Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática
Mestrado acadêmico em Matemática

ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE RICCI E DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO

Brasília/DF

2022

ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE RICCI E DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva.

Brasília/DF

2022

ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE RICCI E DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: XX/XX/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva (Orientador)
Universidade de Brasília (UnB)

Profª Dra. Luciana Ávila Rodrigues
Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Universidade Federal de Goiás (UFG)

Aos meus pais, Francisco Ailton Pereira e Antônia Elizete da Silva Pereira.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus Pai, que me guiou e me possibilitou viver este momento de realização.

Aos meus pais, Francisco Ailton e Antônia Elizete, por todo amor, dedicação, ajuda e por sempre serem uma fonte de inspiração.

Ao meu tio, Antônio Airton, que me ajudou em muitos momentos.

Aos meus amigos e fregueses no PES, Rodolfo, Isael e Ricardo, por toda a parceria.

Às minhas colegas Francisca e Edivânia, que tive a honra de conhecer durante o Mestrado. Agradeço pelos momentos de descontração e experiências compartilhadas.

À todos os professores que tive o privilégio de conhecer ao longo desta caminhada. Em especial, ao meu orientador Dr. Tarcísio Castro Silva, pela confiança e por ter me dado a honra de produzir esta dissertação sob sua orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Luciana Ávila Rodrigues e Benedito Leandro, pelas valiosas contribuições para o presente trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UnB por me oferecer um curso de excelência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Nada na vida deve ser temido, somente compreendido.

Marie Curie

RESUMO

Sobre o espaço pseudo-euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, consideramos tensores simétricos constantes $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$, $\varepsilon_j = \pm 1$ e $c_{ij} \in \mathbb{R}$, e tensores não-diagonais $T = \sum_{i,j} f_{ij} dx_i dx_j$, onde f_{ij} são funções diferenciáveis de x_i e x_j, e estudamos o problema de encontrar métricas $\bar{g}$, conformes a métrica g, satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$ e $Ric_{\bar{g}} - \bar{g}\overline{K}/2 = T$. Mostramos que tais tensores ficam determinados pelos elementos da diagonal e obtemos explicitamente a métrica $\bar{g}$. Além disso, obtemos soluções globalmente definidas sobre $\mathbb{R}^n$ para a equação $-\varphi \Delta_g \varphi + \frac{n}{2} |\nabla_g \varphi|^2 + \lambda \varphi^2 = 0$, e mostramos que, para determinadas funções $\overline{K}$, existem métricas conformes à métrica pseudo-euclidiana, com curvatura escalar $\overline{K}$.

Palavras-chave: métricas conformes; espaço pseudo-euclidiano; equação de Ricci; equação de Einstein.

ABSTRACT

On the pseudo-euclidean space, $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, we consider constant symmetric tensors $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $c_{ij} \in \mathbb{R}$, and nondiagonal tensors $T = \sum_{i,j} f_{ij} dx_i dx_j$, where f_{ij} are differentiable functions of x_i and x_j, and we study the problem of finding metrics $\bar{g}$ conformal to the pseudo-Euclidean metric g such that $Ric_{\bar{g}} = T$ and $Ric_{\bar{g}} - \bar{g}\overline{K}/2 = T$. One show such tensors are determined by the diagonal elements and one obtain explicitly metrics $\bar{g}$. Moreover, one get solutions globally defined on $\mathbb{R}^n$ for the equation $-\varphi \Delta_g \varphi + \frac{n}{2} |\nabla_g \varphi|^2 + \lambda \varphi^2 = 0$, and we show that for certain $\overline{K}$ functions defined on $\mathbb{R}^n$, there are metrics conformal to the pseudo-euclidean metric with scalar curvature $\overline{K}$.

Keywords: conformal metrics; pseudo-Euclidean space; Ricci equation; Einstein equation.

SUMÁRIO

Introdução

Nos últimos anos, muitos autores estudaram variações do seguinte problema:

"Dado um tensor simétrico de ordem 2, $T = \sum_{i,j} T_{ij} dx_i dx_j$, definido sobre uma variedade (M, g), existe uma métrica $\bar{g}$, conforme à métrica g, tal que $Ric_{\bar{g}} = T$?"

Utilizando-se de um resultado clássico da geometria riemanniana, o qual fornece uma relação envolvendo as curvaturas de Ricci de g e $\bar{g}$, mostra-se que encontrar solução para este problema equivale a resolver um sistema não-linear de equações diferencias de segunda ordem.

Em 1981, DeTurck [5] mostrou que o problema possui solução local quando o tensor T é não singular e $\dim M \geq 3$. Quando M é uma variedade de dimensão 2, sempre existe solução local quando $T_{ij} = p(x)Q_{ij}$, onde $p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e Q é um tensor positivo definido (ver [6]). Para uma variedade compacta, resultados podem ser encontrados em [4], [8] e [23].

Em [2], Cao e DeTurck estudaram a existência e unicidade de soluções globais em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$ considerando um tensor rotacionalmente simétrico e não singular. Para $\mathbb{R}^n$, mostraram que o problema admite única solução e que, para certos tensores, existe uma métrica $\bar{g}$ completa, globalmente definida em $\mathbb{R}^n$, tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Em $\mathbb{S}^n$, mostraram resultados de não existência e encontraram condições necessárias sobre um tensor T não singular, de maneira que exista uma métrica $\bar{g}$ satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$. Eles consideraram apenas tensores não singulares, pois fora do contexto rotacionalmente simétrico, a unicidade pode falhar [4]. Além disso, há exemplos de tensores não singulares para os quais não há métrica satisfazendo a equação de Ricci, $Ric_{\bar{g}} = T$, mesmo localmente [19].

Posteriormente, Künel e Rademacher [10] mostraram que, se (M, g) é uma variedade semi-riemanniana e $\bar{g}$ é uma métrica conforme a g tal que $Ric_g = Ric_{\bar{g}}$, sendo uma delas completa, então g e $\bar{g}$ são homotéticas. Desse modo, provaram que o problema possui solução única em variedades semi-riemannianas para uma classe de métricas conformes.

Em [23], Xingwang Xu mostrou que o problema de Ricci possui solução em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{S}^n$ para tensores esfericamente simétricos, sem a condição de o tensor ser não singular. Romildo Pina [18], considerou tensores da forma $T = Ric_g + \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{x_n^2} dx_i dx_j$, no espaço hiperbólico $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, onde $g_{ij} = \frac{\delta_{i,j}}{x_n^2}$. Neste trabalho, ele mostrou condições necessárias e suficientes para a existência de uma métrica $\bar{g}$, conforme a métrica g, satisfazendo a equação de Ricci, $Ric_{\bar{g}} = T$.

Em [19], Romildo Pina e Keti Tenenblat analisaram em $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, um tensor da forma $T = fg$, onde f é uma função diferenciável e g é a métrica usual. Os mesmos autores [20], consideraram o espaço pseudo-euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, com $n \geq 3$, $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, e tensores da forma $T = \sum_i \varepsilon_i f_i(x_k) dx_i^2$, em que $f_i(x_k)$ é uma função diferenciável de x_k, para algum k fixado, $1 \leq k \leq n$. Neste trabalho, eles encontraram condições necessárias e suficientes para que exista uma métrica $\bar{g}$ satisfazendo os seguintes sistemas de equações

$$\begin{cases} \bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}, \\ Ric_{\bar{g}} = T, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}, \\ Ric_{\bar{g}} - \dfrac{\overline{K}}{2} \bar{g} = T. \end{cases}$$

A equação envolvendo a curvatura escalar $\overline{K}$ é chamada de *equação de Einstein*. Eles forneceram soluções explícitas que dependem de uma função diferenciável arbitrária de uma única variável. Em [21], estudaram este mesmo problema no espaço pesudo-euclidiano e no espaço hiperbólico para tensores da forma $T = fg$, como em [19].

Sobre a equação de Einstein, com $n = 4$, DeTurck [5] considerou o problema de Cauchy para tensores não singulares. Além disso, para tensores que representam diversos problemas físicos, a equação tem sido estudada por diversos autores, dos quais destacamos [23].

No presente estudo, seguimos os passos apresentados em [14,15], por Romildo Pina e Keti Tenenblat, e consideramos $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, e g a métrica pseudo-euclidiana, e estudamos o problema da equação de Ricci em dois casos. No Capítulo 2, consideramos um tensor simétrico constante da forma

$$T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \ \varepsilon_j = \pm 1,$$

e buscamos condições necessárias e suficientes para que exista uma métrica $\bar{g}$ satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} \bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g \\ Ric_{\bar{g}} = T. \end{cases}$$

Nos Teoremas 2.1 e 2.2 consideramos T um tensor simétrico constante não-diagonal. No Teorema 2.1 (respectivamente Teorema 2.2), admitimos que $\sum_i c_{ii} \neq 0$ (resp. $\sum_i c_{ii} = 0$) e mostramos que tais tensores ficam determinados pelos elementos da diagonal c_{ii}, $1 \leq$

$i \leq n$, e que tais elementos pertencem a determinados subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Em ambos os casos, apresentamos explicitamente as métricas. Para cada n-upla $(c_{11}, \dots c_{nn})$, existem 2^{n-1} tensores para os quais existem, a menos de homotetia, duas métricas $\bar{g}$ satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$.

Como consequência dos resultados obtidos, encontramos infinitas soluções de classe C^∞, definidas em $\mathbb{R}^n$, para a equação

$$-\varphi \Delta_g \varphi + \frac{n}{2} \|\nabla_g \varphi\|^2 + \lambda \varphi^2 = 0,$$

onde $\Delta_g \varphi$ e $\nabla_g \varphi$ denotam o laplaciano e o gradiente de φ na métrica g, respectivamente, e $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda \leq 0$ quando g é a métrica euclidiana. Além disso, mostramos que, para certas funções $\overline{K}$, existem métricas $\bar{g}$, conforme à métrica pseudo-euclidiana g, com curvatura escalar $\overline{K}$.

No Capítulo 3, contexto no qual comtemplamos também o espaço pseudo-euclidiano, consideramos um tensor simétrico não-diagonal, da forma

$$T = \sum_{i,j} f_{ij} dx_i dx_j,$$

onde, para $i \neq j$, f_{ij} são funções diferenciáveis dependentes de x_i e x_j. No Teorema 3.1, apresentamos soluções para a equação da curvatura de Ricci para tal tensor, ou seja, obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$. No Teorema 3.2, apresentamos condições necessárias e suficientes para que exista uma métrica $\bar{g}$, conforme g, satisfazendo a equação de Einstein, ou seja, encontramos soluções para o sistema

$$\begin{cases} \bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g, \\ Ric_{\bar{g}} - \dfrac{\overline{K}}{2} \bar{g} = T, \end{cases}$$

onde $\overline{K}$ é a curvatura escalar. Em ambos os resultados, se T é um tensor satisfazendo o problema, então ele pode ser de duas formas, ou T é da forma

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x_1, x_2) dx_i dx_j + h(x_1, x_2) \sum_{i=3}^{n} dx_i^2,$$

e $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ é solução de uma equação hiperbólica, ou T é determinado por p funções diferenciáveis não constantes $\xi_j = \xi_j(x_j)$, $1 \leq p \leq n$. Neste caso, T e φ são dados explicitamente em função de ξ_j.

Como consequência, apresentamos soluções de classe C^∞ para a equação

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + \overline{K}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,$$

para certas funções $\overline{K}$ dependentes de $\xi_j(x_j)$. Esta equação está relacionada com o seguinte problema da curvatura escalar:

"Dada uma função diferenciável $\overline{K}$, sobre uma variedade riemanniana (M,g), existe uma métrica $\bar{g}$, conforme g, com curvatura escalar $\overline{K}$?"

Quando $\overline{K}$ é constante, este problema é chamado de *Problema de Yamabe.*

Por fim, exibimos exemplos de métricas completas em $\mathbb{R}^n$, a saber, sobre o toro n-dimensional T^n e sobre cilindros $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, que são soluções do *problema de Ricci* ou da *Equação de Einstein.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixaremos notações e apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis no decorrer do trabalho. Iniciamos definindo uma *variedade diferenciável* e caminhamos de modo a introduzir conceitos como *variedade semi-riemanniana* e *curvatura*. Os conceitos e resultados aqui mencionados podem ser encontrados em [9] e [13].

Definição 1.1. *Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Um sistema de coordenadas para M é uma família*

$$\phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ de um aberto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ sobre um aberto V_α de M, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, que satisfazem as seguintes propriedades:

i) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = M$;

ii) Para todo par $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, com $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, as funções

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}) \longrightarrow \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}),$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \longrightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}),$$

são diferenciáveis de classe C^∞.

As aplicações φ_α são chamadas *sistema de coordenadas* (ou *parametrizações* ou *cartas*) para uma vizinhança em M, denotada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada.* Se $p = \varphi_\alpha(x_1, \ldots x_n)$, então $x_1, \ldots x_n$ sã chamados de *coordenadas locais* de p no sistema de coordenadas φ_α.

Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável munido com uma estrutura diferenciável.

Dada uma variedade diferenciável M, um *campo de vetores* X em M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p)$ no espaço tangente T_pM. Considerando uma parametrização $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, para cada ponto $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ é a base de vetores tangentes em $p \in M$ associada à φ, e $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ são funções diferenciáveis em U_α. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ em M, e por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções C^∞ em M.

Escrevendo apenas f para simbolizar $f \circ \varphi_\alpha$, podemos pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$, definida por

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde $\mathcal{F}(M)$ é o conjunto das funções em M.

Exemplo 1.1. *Considere os campos de vetores dados por*

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Então $[X, Y] := XY - YX$ *é um campo de vetores em* M. *De fato, um cálculo direto revela que*

$$XY(f) = \sum_j \sum_i a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_j \sum_i a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

e

$$YX(f) = \sum_i \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_j b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Assim, pelo teorema de Schwarz, podemos escrever

$$XY(f) - YX(f) = \sum_i \sum_j \Big(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \Big) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

o que mostra que $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$. *O campo* $[X, Y]$ *é chamado Colchete de Lie.*

Vamos agora apresentar uma ferramenta importante da Geometria Diferencial. Os *tensores* são objetos indispensáveis no estudo local e global de variedades diferenciáveis, eles generalizam a ideia de campos de vetores, funções reais e 1-formas.

Dado um espaço vetorial de dimensão finita V, seja $V^* = \{f : V \to \mathbb{R} | f \text{ é linear}\}$ o seu espaço dual, e seja $\mathcal{L}(V)$ o espaço dos operadores lineares em V. Além disso, para inteiros $r, s \geq 1$, considere $(V^*)^r = V^* \times \ldots \times V^*$ (r-vezes) e $(V)^s = V \times \ldots \times V$ (s-vezes).

Definição 1.2. *Um tensor do tipo (r,s) (ou (r,s)-tensor) em V, $r, s \geq 0$, é uma aplicação multilinear $T : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$. O conjunto dos (r,s)-tensores em V será denotado por $\mathfrak{T}_s^r(V)$. O número r+s é a ordem de T.*

Diremos ainda que $T \in \mathfrak{T}_s^r(V)$ é $r-vezes$ contravariante e $s-vezes$ covariante. Com operações definidas pontualmente, $\mathfrak{T}_s^r(V)$ torna-se um espaço vetorial.

Definição 1.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica sobre V é uma função bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$, tal que*

$$b(u, v) = b(v, u),\ \forall u, v \in V.$$

Definição 1.4. *Uma forma bilinear simétrica b sobre um espaço vetorial V é:*

(1) positiva (negativa) definida se $b(v, v) > 0$ (< 0), $\forall \neq 0 \in V$;

(2) positiva (negativa) semi-definida se $b(v, v) \geq 0$ (≤ 0), $\forall \neq 0 \in V$;

(3) não-degenerada $b(u, v) = 0$, $\forall v \in V$, implica $u = 0$.

Definição 1.5. *Seja b uma forma bilinear sobre um espaço vetorial V. O índice v de b é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ tal que b restrita a W é negativa definida.*

Dada uma base $\beta = \{e_1, \ldots e_n\}$ de V, a *matriz de b relativa a base β* é a matriz $b_{ij} = b(e_i, e_j)$. Prova-se que uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ é inversível.

Definição 1.6. *Um tensor métrico g, em uma variedade diferenciável M, é um $(0, 2)$-tensor simétrico não-degenerado em M de índice constante.*

Definição 1.7. *Uma variedade semi-riemanniana é uma variedade diferenciável (M,g), munida com um tensor métrico g.*

Em um sistema de coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ em torno de um ponto p de M, as coordenadas do tensor métrico g são $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Desde que g é não-degenerada, temos que $(g_{ij}(p))$ é inversível com inversa $(g^{ij}(p))$. Em U_α, temos

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Para um inteiro v, $1 \leq \mathrm{v} \leq n$, o espaço $\mathbb{R}^n_{\mathrm{v}}$, munido com o tensor métrico

$$g = -\sum_{i=1}^{\mathrm{v}} v_i w_i + \sum_{j=\mathrm{v}+1}^{n} v_j w_j \tag{1.1}$$

de índice v, é uma variedade semi-riemanniana chamada espaço *pseudo-euclidiano*. Fixando a notação

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \text{v}, \\ 1, & \text{v}+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

podemos escrever o tensor (1.1) como

$$g = \sum_i \varepsilon_i dx_i dx_j.$$

Definição 1.8. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

indicada por $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, *onde* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Em coordenadas locais, $X_i = \partial/\partial x_i$, podemos ver, para $X = \sum_i x_i X_i$ e $Y = \sum_i y_i Y_i$, que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

em que os coeficientes Γ_{ij}^k, definidos por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, são os *símbolos de Christoffel* da conexão.

Desse modo, $\nabla_X Y$ é chamada de *derivada covariante* de Y na direção de X com relação à conexão ∇.

Em [13], mostra-se que sobre uma variedade semi-riemanniana existe uma única conexão D tal que

i) $[X,Y] = D_X Y - D_Y X$,

ii) $X(g(Y,Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$, $\forall\ X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

D é chamada *Conexão de Levi-Civita* de M, e é caracterizada pela expressão

$$2g(D_Y Z, X) = Yg(Z,X) + Zg(X,Y) - Xg(Y,Z) - g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) + g(X,[Y,Z]).$$

Considerando (M,g) uma variedade semi-riemanniana com a conexão de Levi-Civita D, mostra-se em [3] que a aplicação $R : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y,Z) = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z,\ \ Z \in \mathcal{X}(M),$$

é um $(1,3)$-tensor em M, chamado *tensor de curvatura* de (M,g). Assim, em um sistema de coordenadas $\{x_i\}$, temos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_i R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde os coeficientes

$$R^i_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj}-\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{lj}+\sum_m\Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}-\sum_m\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

são denominados *componentes do tensor curvatura.* A *curvatura seccional* S é definida por

$$S=\frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g^2(X,Y)}.$$

Definição 1.9. *Seja R o tensor curvatura de uma variedade semi-riemanniana (M,g). O tensor curvatura de Ricci é o $(0,2)$-tensor definido por*

$$Ric(X,Y):=tr(Z\to R(X,Z)Y),$$

onde $X,Y,Z\in T_pM$. Suas componentes são dadas por

$$R_{ij}=\sum_{k=1}^n R^k_{kij}=\sum_{k,m=1}^n g^{km}R_{kljm}.$$

Definição 1.10. *Considere (M,g) uma variedade semi-riemanniana. A curvatura escalar de M é uma aplicação $K:M\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por*

$$K=traço\ de\ A,$$

onde A é uma aplicação linear auto-adjunta, $A:T_pM\longrightarrow T_pM$, associada ao tensor de Ricci,

$$Ric_g:T_pM\times T_pM\longrightarrow\mathbb{R},$$

que é uma forma bilinear simétrica.

Em um sistema de coordenadas locais, temos

$$K=\sum_{i,j}g^{ij}R_{ij}=\sum_{i,j,k}g^{ij}R^k_{ijk}.$$

Definição 1.11. *Duas métricas g e $\bar{g}$ em uma variedade M são conformes se existe uma função diferenciável $\varphi:M\to\mathbb{R}$ tal que para todo $p\in M$ e todo $u,v\in T_pM$ se tem*

$$\bar{g}_p(u,v)=\frac{1}{\varphi^2}g_p(u,v).$$

Uma variedade riemanniana (M, g) é *local conformemente plana (flat, em inglês)* se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p que é conforme a um aberto U de $\mathbb{R}^n$, isto é, se para todo $p \in M$, existe um difeomorfismo $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset M$ tal que

$$(\phi^* g)(X, Y) = g(d\phi(X), d\phi(Y)) = f^2 g_0(X, Y)$$

onde f é uma função não-nula e g_0 a métrica canônica.

Se g e $\bar{g}$ são métricas conformes e g for uma métrica flat, $\bar{g}$ é dita conformemente flat.

O resultado a seguir apresenta uma relação entre os tensores de Ricci nas métricas conformes g e $\bar{g}$.

Proposição 1.1. *Sejam (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade semi-riemanniana e $\bar{g} = g/\varphi^2$ uma métrica conforme à métrica g. Então os tensores de Ricci de g e $\bar{g}$ satisfazem a seguinte relação*

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + (\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g\Big\},$$

onde

$$\Delta_g\varphi = \sum_i \varepsilon_i \varphi_{x_i x_i}, \quad Hess_g(\varphi)_{ij} = \varphi_{x_i x_j}, \quad \|\nabla_g\varphi\|^2 = \sum_i \varphi_{x_i}^2.$$

Considerando o espaço pseudo-euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$ e a métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$, conforme a métrica g, segue da Proposição 1.1 que o tensor de Ricci na métrica $\bar{g}$ é da forma

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi \mathrm{Hess}_g(\varphi) + (\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g\Big\}.$$

Assim, em um sistema de coordenadas locais, a curvatura escalar é dada pela expressão

$$\begin{aligned} K = R_{\bar{g}} &= \textstyle\sum_{i,j} \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij} = \sum_{i,j} \varphi^2 \varepsilon_i \delta_i \bar{R}_{ij} = \varphi^2 \sum_i \bar{R}_{ii}\varepsilon_i \\ &= \varphi^2\Big[\textstyle\sum_i \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi(\mathrm{Hess}_g\varphi)_{ii} + (\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)\varepsilon_i\Big\}\Big]\varepsilon_i \\ &= (n-2)(\varphi\Delta_g\varphi) + n\varphi\Delta_g\varphi - n(n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2 \\ &= (n-1)[2\varphi\Delta_g\varphi - n\|\nabla_g\varphi\|^2], \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O *tensor de Weyl* de (M, g) é definido pela seguinte fórmula de decomposição

$$W = R - C \odot g,$$

onde R denota o tensor de curvatura e C denota o *tensor de Schouten*

$$C = \frac{1}{n-2}\Big(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g\Big),$$

e $C \odot g$ é o produto *Kulkarni-Nomizu* dado por

$$\begin{aligned} C \odot g &= \frac{1}{n-2}(Ric(X,Z)Y + g(X,Y)Ric(Z) - g(Y,Z)Ric(X) - Ric(Y,Z)X) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g(X,Z)Y g(Y,Z)X). \end{aligned}$$

A classe das variedades riemannianas localmente conformemente plana tem uma caracterização clássica em termos dos tensores de Schouten e de Weyl. Uma variedade riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$, é conformemente plana se, e somente se, $W = 0$ e o tensor de Schouten é Codazzi, isto é,

$$(\Delta_X C)(Y,Z) = (\Delta_Y C)(X,Z),$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ (ver [9]).

Definição 1.12. *Uma variedade semi-riemanniana (M, g) é (geodesicamente) completa se toda geodésica de M está definida em todo $\mathbb{R}$.*

Uma *curva divergente* em uma variedade riemanniana (M, g) é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subset M$, existe um $t_0 \in (0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$, para todo $t > t_0$. O comprimento de uma curva divergente é definido por

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \|\alpha'(t)\|_g dt.$$

Mostra-se que uma variedade riemanniana M é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

Capítulo 2

Soluções da equação de Ricci e da equação de Einstein para um tensor constante em espaços pseudo-euclidianos

Neste capítulo, seguimos os mesmos passos de Keti Tenenblat e Romildo Pina, em [15], e estudamos o problema da equação de Ricci para um tensor constante. Antes de apresentar os resultados principais, definimos alguns conceitos importantes.

Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ o espaço pseudo-euclidiano, $n \geq 3$, $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Neste capítulo consideramos um tensor simétrico constante, de ordem dois, da forma

$$T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

e apresentamos condições necessárias e suficientes para a existência de uma métrica $\bar{g}$, satisfazendo

$$(R) \begin{cases} \bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g, \\ Ric_{\bar{g}} = T. \end{cases}$$

Os resultados apresentados farão uso de alguns subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Para definir tais conjuntos, considere, para uma métrica pseudo-euclidiana $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ fixada, as funções lineares $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, dadas por

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_n) = (n-1)x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{2.2}$$

Assim, definimos os seguintes subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_j \beta_j(x) \geq 0, \ \forall\, j, \ 1 \leq j \leq n\}, \tag{2.3}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_j \beta_j(x) \leq 0, \ \forall \ j, \ 1 \leq j \leq n\}, \tag{2.4}$$

obtidos como a interseção de semi-espaços de $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira consiste na união dos hiperplanos dados por

$$\pi_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta_i(x) = 0\}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.5}$$

Admitindo a existência de uma métrica $\bar{g}$, conforme à métrica g, tal que $Ric_{\bar{g}} = T$, na próxima seção, detalharemos o sistema de equações diferenciais que deverá ser satisfeito pelo fator conforme φ.

2.1 Resultados de caracterização

Para estudar o problema (R), utilizaremos um sistema não-linear de equações diferenciais de segunda ordem, de acordo com o que mostra o lema a seguir.

Lema 2.1. *Resolver o problema* (R) *equivale à resolver o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \left(\lambda_i \varphi + \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} \right), \\ \varphi_{x_i x_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2} \varphi, \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $1 \leq i \neq j \leq n$ *e*

$$\lambda_i = \frac{2(n-1) - \displaystyle\sum_{\ell} c_{\ell\ell}}{2(n-1)(n-2)}.$$

Demonstração. Considere $(\mathbb{R}^n, g)$ espaço pesudo-euclidiano, $n \geq 3$. Se $\bar{g} = g/\varphi^2$ é uma métrica conforme à métrica pseudo-euclidiana g, como $Ric_g = 0$, temos da Proposição 1.1 que

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2} \Big\{ (n-2)\varphi \mathrm{Hess}_g(\varphi) + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2) g \Big\}. \tag{2.7}$$

Sendo $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$ e $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$, segue de (2.7) que estudar o problema (2) equivale a resolver o seguinte sistema de equações

$$\frac{1}{\varphi^2} \Big\{ (n-2)\varphi \mathrm{Hess}_g(\varphi)_{ij} + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2) g_{ij} \Big\} = \varepsilon_j c_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Note que, como $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, podemos escrever o sistema acima como

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varphi^2} \Big\{ (n-2)\varphi \varphi_{x_i x_i} + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2) \varepsilon_i \Big\} = \varepsilon_i c_{ii}, \\ \varphi_{x_i x_i} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2} \varphi, \quad 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Substituindo $\Delta_g \varphi = \sum_i \varepsilon_i \varphi_{x_i x_i}$ nas n pimeiras equações do sistema (2.8), obtemos

$$(n-2)\varphi_{x_i x_i} + \varepsilon_i \sum_j \varphi_{x_j x_j} = \varepsilon_i c_{ii} \varphi + \frac{(n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi} \varepsilon_i,$$

ou, equivalentemente,

$$(n-1)\varphi_{x_i x_i} \varepsilon_i + \sum_{j \neq i} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j} = c_{ii} \varphi + \frac{(n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi}. \tag{2.9}$$

Para um i fixado, multiplicando (2.9) por $2n-3$, temos

$$(2n-3)(n-1)\varphi_{x_i x_i} \varepsilon_i + (2n-3) \sum_{j \neq i} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j} = (2n-3) c_{ii} \varphi + \frac{(2n-3)(n-1)\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi}. \tag{2.10}$$

Somando as demais $n-1$ equações de (2.9), temos

$$\sum_{\ell \neq i} \sum_{j \neq \ell} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j} + (n-1) \sum_{\ell \neq i} \varepsilon_\ell \varphi_{x_\ell x_\ell} = \varphi \sum_{\ell \neq i} c_{\ell\ell} + \frac{(n-1)^2 \|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi}. \tag{2.11}$$

Notando que,

$$\sum_{\ell \neq i} \sum_{j \neq \ell} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j} = (n-1)\varepsilon_i \varphi_{x_i x_i} + (n-2) \sum_{j \neq i} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j},$$

podemos escrever (2.11) como

$$(n-1)\varepsilon_i \varphi_{x_i x_i} + (n-2) \sum_{j \neq i} \varepsilon_j \varphi_{x_j x_j} + (n-1) \sum_{\ell \neq i} \varepsilon_\ell \varphi_{x_\ell x_\ell} = \varphi \sum_{\ell \neq i} c_{\ell\ell} + \frac{(n-1)^2 \|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi} \tag{2.12}$$

Agora, subtraindo (2.12) de (2.10), obtemos

$$2(n-1)(n-2)\varepsilon_i \varphi_{x_i x_i} = 2(n-1) c_{ii} \varphi - \varphi \textstyle\sum_\ell c_{\ell\ell} + (n-1)(n-2) \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi},$$

ou, equivalentemente,

$$\varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \left(\frac{2(n-1)\varphi c_{ii} - \varphi \sum_\ell c_{\ell\ell}}{2(n-1)(n-2)} + \frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} \right). \tag{2.13}$$

Fazendo

$$\lambda_i = \frac{2(n-1)c_{ii} - \sum_\ell c_{\ell\ell}}{2(n-1)(n-2)},$$

obtemos de (2.8) e (2.13) que

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \left(\lambda_i \varphi + \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} \right), \\ \varphi_{x_i x_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2} \varphi, \quad j \neq i. \end{cases}$$

□

Considere $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn})$. Pela definição de β_i e λ_i, observamos que valem as seguintes relações:

$$(n-2)\lambda_i - \sum_k \lambda_k = \frac{\beta_i(c)}{n-1} \tag{2.14}$$

e

$$\sum_i \frac{\beta_i(c)}{n-1} = -2 \sum_i \lambda_i = -\sum_i \frac{c_{ii}}{n-1}. \tag{2.15}$$

Veremos agora que se φ é uma solução do sistema (2.6), é possível relacionar as derivadas parciais de primeira ordem de φ. Mais precisamente, temos o seguinte lema.

Lema 2.2. *Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema de equações*

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \left(\lambda_i \varphi + \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} \right), \\ \varphi_{x_i x_i} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2} \varphi, \end{cases}$$

então as derivadas de primeira ordem de φ satisfazem

$$c_{ij} \varphi_{x_i} = \frac{\beta_i}{n-1} \varphi_{x_j}, \quad \forall\ i \neq j.$$

Demonstração. Desde que φ satisfaça o sistema (2.8), dado $1 \leq \ell \leq n$, temos que

$$\varepsilon_i \varphi_{x_i x_j x_\ell} = \frac{c_{ij}}{n-2} \varphi_{x_\ell}.$$

Assim, derivando a primeira equação de (2.8) com relação à x_j, segue da comutatividade das derivadas de terceira ordem que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i\varphi_{x_ix_ix_j} &= \lambda_i\varphi_{x_j} + \left[\sum_\ell 4\varepsilon_\ell\varphi_{x_\ell}\varphi_{x_\ell x_j}\varphi - \sum_\ell 2\varepsilon_\ell\varphi_{x_\ell}^2\varphi_{x_j}\right]\frac{1}{4\varphi^2}\\
&= \lambda_i\varphi_{x_j} + \sum_\ell \frac{\varepsilon_\ell\varphi_{x_\ell}\varphi_{x_\ell x_j}}{\varphi} - \frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\varphi_{x_j}\\
&= \lambda_i\varphi_{x_j} + \sum_{\ell\neq i,j} \frac{\varepsilon_\ell\varphi_{x_\ell}\varphi_{x_\ell x_j}}{\varphi} + \frac{\varepsilon_i\varphi_{x_i}\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} + \frac{\varepsilon_j\varphi_{x_j}\varphi_{x_jx_j}}{\varphi} - \frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\varphi_{x_j}\\
&= (\lambda_i+\lambda_j)\varphi_{x_j} + \sum_{\ell\neq i,j} \frac{\varphi_{x_jx_\ell}}{\varphi}\varphi_{x_\ell} + \frac{\varepsilon_i\varphi_{x_i}\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} + \frac{\varepsilon_j\varphi_{x_j}\varphi_{x_jx_j}}{\varphi} - \frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\varphi_{x_j} - \lambda_j\varphi_{x_j}\\
&= (\lambda_i+\lambda_j)\varphi_{x_j} + \sum_{\ell\neq i,j} \frac{c_{j\ell}}{n-2}\varphi_{x_\ell} + \frac{\varepsilon_i\varphi_{x_i}\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} + \frac{\varepsilon_j\varphi_{x_j}\varphi_{x_jx_j}}{\varphi} - \frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\varphi_{x_j} - \lambda_j\varphi_{x_j}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, segue da primeira equação do sistema (2.8) que

$$\frac{\varepsilon_i\varphi_{x_i}\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} + \frac{\varepsilon_j\varphi_{x_j}\varphi_{x_jx_j}}{\varphi} = \varepsilon_i\varphi_{x_ix_jx_i} + \lambda_j\varphi_{x_j} + \frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\varphi_{x_j}.$$

Assim, obtemos que

$$(\lambda_i+\lambda_j)\varphi_{x_j} + \sum_{\ell\neq i,j}\frac{c_{j\ell}}{n-2}\varphi_{x_\ell} = 0. \tag{2.16}$$

Se $n = 3$, segue de (2.14) que $\lambda_k + \lambda_j = -\beta_i/2$, e daí,

$$c_{ij}\varphi_{x_i} = \frac{\beta_i}{2}\varphi_{x_j}, \quad \forall\ i \neq j.$$

Se $n > 3$, multiplicando a equação (2.16) por $-(n-3)$ para algum par (i, j) fixado, e somando com as $n-2$ equações dadas pelos pares (k, j), com $k \neq i$ e $k \neq j$, obtemos

$$c_{ij}\varphi_{x_i} = \left((n-2)\lambda_i + \sum_k \lambda_k\right)\varphi_{x_j}, \quad \forall i \neq j.$$

Segue novamente de (2.14) que

$$c_{ij}\varphi_{x_i} = \frac{\beta_i}{n-1}\varphi_{x_j}, \quad \forall\ i \neq j.$$

□

O Lema a seguir mostra que os tensores T, para os quais o sistema (R) tem solução, ficam inteiramente determinados pelos elementos da diagonal, isto é, os elementos c_{ij}, $i \neq j$, podem ser expressos em função de $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn})$.

Lema 2.3. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pesudo-euclidiano e* $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$ *um tensor simétrico constante não-diagonal. Se existe uma métrica* $\bar{g} = g/\varphi^2$ *tal que* $Ric_{\bar{g}} = T$, *então*

$$\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k \varphi}{n-2},$$

e as componentes do tensor T *são tais que* $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn}) \in \{D \cup L\} \setminus \{\pi_t \cup \pi_\ell\}$ *para algum par* (r, ℓ), $1 \leq r \neq \ell \leq n$, D, L, *e* π_r *são dados por* (2.3), (2.4) *e* (2.5), *e*

$$c_{ij} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j \beta_i \beta_j}}{n-1}(c_{11}, \ldots, c_{nn}), \quad i \neq j, \tag{2.17}$$

onde $\beta_i(c_{11}, \ldots, c_{nn})$ *é dado por (3) e* λ_i *é dado por (16).*

Demonstração. Segue do Lema 2.1 e do Lema 2.2 que, se existe $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$, então

$$c_{ij}\varphi_{x_i} = \frac{\beta_i}{n-1}\varphi_{x_j}, \quad \forall\ i \neq j. \tag{2.18}$$

Derivando (2.18) com respeito a x_j, $j \neq i$, temos

$$c_{ij}\varphi_{x_i x_j} = \frac{\beta_i}{n-1}\varphi_{x_j x_j}, \quad i \neq j.$$

Pelo Lema 2.1, podemos escrever a igualdade acima como

$$\frac{c_{ij}^2}{n-2}\varepsilon_i \varphi = \frac{\varepsilon_j \beta_i}{n-1}\left(\lambda_j \varphi + \frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi}\right). \tag{2.19}$$

Agora, derivando (2.18) com respeito a x_i, obtemos

$$c_{ij}\varphi_{x_i x_i} = \frac{\beta_i}{n-1}\varphi_{x_j x_i}, \quad i \neq j.$$

Novamente, pelo Lema 2.1, podemos escrever a igualdade acima como

$$c_{ij}\left(\lambda_i \varphi + \frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi}\right) = \frac{\beta_i}{(n-1)(n-2)}c_{ij}\varphi. \tag{2.20}$$

Como T é um tensor não diagonal, existe pelo menos um termo c_{ij} não nulo, $i \neq j$. Assim, podemos escrever

$$\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} = \frac{\beta_i}{(n-1)(n-2)}\varphi - \lambda_i \varphi.$$

Substituindo (2.14) na expressão acima, obtemos

$$\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} = -\frac{\varphi}{n-2}\sum_k \lambda_k.$$

Da equação anterior e de (2.19), temos que

$$\frac{c_{ij}^2}{n-2} = \frac{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i}{n-1}\left(\lambda_i\varphi - \frac{\varphi}{n-2}\sum_k \lambda_k\right).$$

Usando (2.14) novamente, obtemos

$$\frac{c_{ij}^2\varphi}{n-2} = \frac{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\varphi}{n-1}\left(\frac{\beta_j}{(n-1)(n-2)}\right) = \frac{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\beta_j}{(n-1)^2(n-2)}\varphi.$$

Como φ não se anula, concluímos que

$$c_{ij} = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\beta_j}}{n-1}(c_{11},\ldots,c_{nn}),\ i\neq j.$$

Note que, pela igualdade acima, devemos ter $\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\beta_j \geq 0$, para todo $i\neq j$. Assim, $c\in D\cup L$. Além disso, como T é um tensor não diagonal, existe pelo menos um par (r,ℓ) tal que $c_{r\ell}\neq 0$. Daí e da igualdade acima, temos que $(\beta_r\beta_\ell)(c)\neq 0$ e, portanto, $c\notin \pi_r\cup\pi_\ell$. Logo, $c\in D\cup L\backslash\{\pi_r\cup\pi_\ell\}$.

□

Em posse desses lemas, na próxima seção apresentaremos os principais resultados deste capítulo.

2.2 Teoremas de classificação

Iniciamos estudando o problema (R) considerando um tensor T da forma (3.1) tal que $\sum_i c_{ii}\neq 0$.

Teorema 2.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pesudo-euclidiano e $T=\sum_{i,j}\varepsilon_j c_{ij}dx_idx_j$ um tensor simétrico não-diagonal tal que $\sum_i c_{ii}\neq 0$. Então existe uma métrica $\bar{g}=g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}}=T$ se, e somente se, $c=(c_{11},\ldots,c_{nn})\in D\setminus\{\pi_\ell\cup\pi_s\}$ para algum $\ell\neq s$ e*

$$c_{ij} = \frac{\varepsilon_j\gamma_i\gamma_j}{n-1}\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i(c)\beta_j(c)}\quad \forall\ i\neq j,$$

onde $\gamma_j=\pm1$, $1\leq j\leq n$. Além disso, para algum tentor T fixado, φ é dada por

$$\varphi(x) = k\exp\left(\frac{\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}\left(\sum_j \gamma_j\sqrt{\varepsilon_j\beta_j(c)}\,x_j\right)\right),$$

onde k é uma constante não nula e $\delta=\pm1$.

Demonstração. Suponha que existe uma métrica $\bar{g}=g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}}=T$. Então pelo

Lema 2.1, φ satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_{x_ix_i} = \varepsilon_i\left(\lambda_i\varphi + \dfrac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi}\right), \\ \varphi_{x_ix_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi. \end{cases} \tag{2.21}$$

Além disso, pelo Lema 2.3, $c \in D \cup L \setminus \{\pi_r \cup \pi_s\}$, para algum par (r,s), $r \neq s$, e

$$\frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k\varphi}{n-2}. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.14) e (2.22) em (2.21), obtemos

$$\begin{cases} \varphi_{x_ix_i} = \alpha_i\varphi, \\ \varphi_{x_ix_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi, \end{cases} \tag{2.23}$$

onde

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i\beta_i(c)}{(n-1)(n-2)}, \quad c_{ij} = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i(c)\beta_j(c)}}{n-1}. \tag{2.24}$$

Suponha que $c \in L \setminus \{\pi_r \cup \pi_s\}$. Então $\alpha_s < 0$ e as soluções de (2.23) são dadas por

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = f(\hat{x}_s)\cos\left(\sqrt{-\alpha_s}\,x_s\right) + g(\hat{x}_s)\sin\left(\sqrt{-\alpha_s}\,x_s\right),$$

onde f e g são funções diferenciáveis de $\hat{x}_s = (x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_n)$. Derivando φ com relação a x_s e x_j, $j \neq s$, respectivamente, obtemos

$$\varphi_{x_sx_j} = \sqrt{-\alpha_s}\big(-f_{x_j}\sin\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right) + g_{x_j}\cos\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right)\big). \tag{2.25}$$

Por outro lado, por (2.23),

$$\varphi_{x_sx_j} = \frac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\big(f(\hat{x}_s)\cos\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right) + g(\hat{x}_s)\sin\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right)\big). \tag{2.26}$$

Comparando (2.25) e (2.26), vemos que

$$f_{x_j} = -\frac{\varepsilon_j c_{sj}}{(n-2)\sqrt{-\alpha_s}}g, \quad g_{x_j} = \frac{\varepsilon_j c_{sj}}{(n-2)\sqrt{-\alpha_s}}f, \ \forall\ s \neq j.$$

Assim,

$$\varphi_{x_j} = \frac{\varepsilon_j c_{sj}}{(n-2)\sqrt{-\alpha_s}}\big(f\sin\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right) - g\cos\left(\sqrt{-\alpha_s}x_s\right)\big).$$

Assim, utilizando (2.24), temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla_g\varphi\|^2 &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i c_{si}}{(n-2)^2\alpha_s}\big(f\sin\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)-g\cos\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)\big)^2\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{(n-1)(n-2)}\big(f\sin\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)-g\cos\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)\big)^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, por (2.14), φ satisfaz

$$\begin{aligned}\|\nabla_g\varphi\|^2 &= -\frac{2}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi^2\\ &= -\frac{2}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big(f\cos\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)+g\sin\big(\sqrt{-\alpha_s}x_s\big)\big)^2\end{aligned}$$

Comparando as duas igualdades acima, obtemos

$$(f^2+g^2)\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=0.$$

Ora, como, por hipótese, $\sum_{i=1}^{n}c_{ii}\neq 0$, então devemos ter $f^2+g^2=0$. Além disso, como $f^2\geq 0$ e $g^2\geq 0$, então temos $f=g=0$. Assim, supondo $c\in L\setminus\{\pi_r\cup\pi_s\}$, obtemos que $\varphi=0$, ou seja, (2.23) não admite solução não-nula.

Considere agora o conjunto $\mathcal{I}=\{j, 1\leq j\leq n\mid \alpha_j>0\}$. Se $c\in D\setminus\{\pi_r\cup\pi_s\}$, então $\alpha_j\geq 0$, para todo j, e

$$\varphi(x)=\tilde{f}\exp\bigg(\sum_{j\in\mathcal{I}}\gamma_j\sqrt{\alpha_j}x_j\bigg)+\tilde{g}\exp\bigg(-\sum_{j\in\mathcal{I}}\gamma_j\sqrt{\alpha_j}x_j\bigg)\tag{2.27}$$

é solução de (2.23), onde $\gamma_j=\pm 1$ e $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são funções diferenciáveis de x_i com $i\in\mathcal{I}$. Por (2.24), se $i\notin\mathcal{I}$, então $\beta_i(c)=0$ e, consequentemente, $c_{ij}=0$. Assim, pela segunda equação de (2.23), temos que $\varphi_{x_ix_j}=0$, e por (2.27) obtemos

$$0=\varphi_{x_ix_j}=\Bigg(\tilde{f}_{x_i}\exp\bigg(\sum_{j\in\mathcal{I}}\gamma_j\sqrt{\alpha_j}x_j\bigg)-\tilde{g}_{x_i}\exp\bigg(-\sum_{j\in\mathcal{I}}\gamma_j\sqrt{\alpha_j}x_j\bigg)\Bigg)\gamma_j\sqrt{\alpha_j}.$$

Concluímos que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são constantes. Se $i,j\in\mathcal{I}$, então

$$\varphi_{x_i}=\gamma_i\sqrt{\alpha_i}\Bigg(\tilde{f}\exp\bigg(\sum_{k\in\mathcal{I}}\gamma_k\sqrt{\alpha_k}x_k\bigg)-\tilde{g}\exp\bigg(-\sum_{k\in\mathcal{I}}\gamma_k\sqrt{\alpha_k}x_k\bigg)\Bigg),\tag{2.28}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_{x_ix_j} &= \gamma_i\gamma_j\sqrt{\alpha_i\alpha_j}\left(\tilde{f}\exp\left(\textstyle\sum_{k\in\mathcal{I}}\gamma_k\sqrt{\alpha_k}x_k\right)+\tilde{g}\exp\left(-\textstyle\sum_{k\in\mathcal{I}}\gamma_k\sqrt{\alpha_k}x_k\right)\right)\\ &= \frac{\gamma_i\gamma_j}{(n-1)(n-2)}\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\beta_j}\varphi.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Comparando (2.23) e (2.29), concluímos que

$$c_{ij} = \frac{\varepsilon_j\gamma_i\gamma_j}{n-1}\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i(c)\beta_j(c)}.$$

Lembremos agora que, pelo Lema (2.3), φ satisfaz

$$\|\nabla_g\varphi\|^2 = -\frac{\varphi^2}{n-2}2\sum_i\lambda_i = \frac{\varphi^2}{(n-1)(n-2)}\sum_i\beta_i. \tag{2.30}$$

Ora, por (2.24) e (2.28), temos que

$$\|\nabla_g\varphi\|^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\sum_i\beta_i\varphi_{x_i}^2 \tag{2.31}$$

Comparando (2.31) em (2.30), obtemos que

$$\sum_i\beta_i\varphi^2 = \sum_i\beta_i\varphi_{x_i}^2.$$

Substituindo (2.27) e (2.28) na igualdade acima, vemos que

$$\tilde{f}\tilde{g} = 0,$$

donde $\tilde{f}=0$ ou $\tilde{g}=0$. Portanto, se $\delta=\pm1$, concluímos que φ é da forma

$$\varphi(x) = k\exp\left(\frac{\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}\left(\sum_j\gamma_j\sqrt{\varepsilon_j\beta_j(c)}x_j\right)\right).$$

Reciprocamente, para cada $c=(c_{11},\ldots,c_{nn})\in D\setminus\{\pi_\ell\cup\pi_s\}$, com $\sum_i c_{ii}\neq 0$, para algum $\ell\neq s$, seja

$$c_{ij} = \frac{\varepsilon_j\gamma_i\gamma_j}{n-1}\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j\beta_i\beta_j}(c), \quad \forall\ i\neq j,$$

onde $\gamma_j=\pm1$, $1\leq j\leq n$. Considere o tensor $T=\sum_{i,j}\varepsilon_jc_{ij}dx_idx_j$. Um cálculo direto revela que a função

$$\varphi(x) = k\exp\left(\frac{\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}\left(\sum_j\gamma_j\sqrt{\varepsilon_j\beta_j(c)}x_j\right)\right),$$

satisfaz o sistema (2.6). Segue então do Lema 2.1 que existe $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. $\square$

No próximo resultado, consideramos o caso particular em que T é da forma (3.1) com $\sum_i c_{ii} = 0$.

Teorema 2.2. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pesudo-euclidiano e $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$ um tensor simétrico não-diagonal tal que $\sum_i c_{ii} = 0$. Então existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$ se, e somente se, $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn}) \in \{D \cup L\} \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}$ para algum $\ell \neq s$ e*

$$c_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}} & \forall\ i \neq j, \quad se \quad c \in D \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}, \\ -\varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}} & \forall\ i \neq j, \quad se \quad c \in L \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}, \end{cases} \tag{2.32}$$

onde $\gamma_j = \pm 1$ para $1 \leq j \leq n$. Além disso, para algum tensor T fixado, a função φ é constante se g é a métrica euclidiana e, caso contrário, φ é dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} k_1 \exp\left(\sum_j \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j \right) + k_2 \exp\left(-\sum_j \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j \right), & se \quad c \in D \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}, \\ k_1 \cos\left(\sum_j \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j \right) + k_2 \sin\left(\sum_j \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j \right), & se \quad c \in L \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Demonstração. Admita que existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Como, por hipótese, $\sum_i c_{ii} = 0$, segue do Lema 2.1, φ satisfaz o sistema (2.6), com

$$\lambda_i = \frac{c_{ii}}{n-1}.$$

Além disso, usando que $\sum_i c_{ii} = 0$ no Lema 2.3 e na equação (2.15), temos que

$$\|\nabla_g \varphi\|^2 = -\frac{\varphi^2}{(n-1)(n-2)} \sum_i c_{ii} = 0, \tag{2.34}$$

e

$$\beta_i = (n-1)(n-2)\lambda_i = (n-2)c_{ii}. \tag{2.35}$$

Substituindo (2.35) em (2.17), obtemos

$$c_{ij} = \pm\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}}.$$

Assim, temos que φ satisfaz

$$\varphi_{x_i x_i} = \frac{\varepsilon_i c_{ii}}{n-2} \varphi, \tag{2.36}$$

e

$$\varphi_{x_i x_j} = \frac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi, \tag{2.37}$$

com $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn}) \in \{D \cup L\} \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}$, e $c_{ij} = \pm\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}}$. Note que se g é a métrica euclidiana, segue de (2.34) que φ é constante.

Se $c \in D \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_s\}$, então $\varepsilon_i c_{ii} \geq 0$ para todo i. Considere o conjunto $\mathfrak{I} = \{i \mid c_{ii} \neq 0\}$. Segue, então, de (2.36) que φ é dada por

$$\varphi(x) = k_1 \exp\left(\sum_{j\in\mathfrak{I}} \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}}\gamma_j x_j\right) + k_2 \exp\left(-\sum_{j\in\mathfrak{I}} \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}}\gamma_j x_j\right),$$

onde k_1 e k_2 são funções dependentes de x_i, com $i \notin \mathfrak{I}$. Derivando φ com relação à x_i e x_j, $i, j \in \mathfrak{I}$, respectivamente, e substituindo $\varphi_{x_i x_j}$ em (2.37), obtemos que

$$c_{ij} = \varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}}.$$

Além disso, derivando ambos os lados da equação (2.37) com relação a x_k, $k \notin \mathfrak{I}$, obtemos que $k_{1,x_i} = k_{2,x_i} = 0$, para todo $i \notin \mathfrak{I}$, donde k_1 e k_2 são constantes.

Por outro lado, se $c \in L \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$, então $\varepsilon_i c_{ii} \leq 0$, e φ é dada por

$$\varphi(x) = k_1 \cos\left(\sum_{j\in\mathfrak{I}} \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}}\gamma_j x_j\right) + k_2 \sin\left(\sum_{j\in\mathfrak{I}} \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}}\gamma_j x_j\right),$$

com k_1 e k_2 funções diferenciáveis de x_i, $i \notin \mathfrak{I}$. De maneira análoga, encontramos que k_1 e k_2 são constante e

$$c_{ij} = -\varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}}.$$

Reciprocamente, supondo que φ é dada por (2.33), com $c \in (D \cup L) \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$ e c_{ij} dado por (2.32), então φ satisfaz (2.36) e (2.37). Segue então do Lema 2.1 que $\bar{g} = g/\varphi^2$ é tal que $Ric_{\bar{g}} = T$.

$\square$

Para o próximo resultado, observamos que se $i_1 \neq i_2$ são inteiros tais que $\beta_{i_1}(c) = \beta_{i_1}(c) = 0$, então $c_{i_1 i_1} = c_{i_2 i_2}$. De fato, como β_i é dada por

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_n) = (n-1)x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

então,

$$\begin{aligned} & \beta_{i_1}(c) = \beta_{i_2}(c) \\ \Rightarrow \quad & (n-1)c_{i_1 i_1} - \textstyle\sum_j c_{jj} = (n-1)c_{i_2 i_2} - \textstyle\sum_j c_{jj} \\ \Rightarrow \quad & c_{i_1 i_1} = c_{i_2 i_2}. \end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Sejam* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano e* $T = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i c_{ii} dx_i^2$ *um tensor diagonal não-nulo. Então, existe uma métrica* $\bar{g} = g/\varphi^2$ *tal que* $Ric_{\bar{g}} = T$ *se, e somente se,*

$$T = T_k = b\sum_{i\neq k}\varepsilon_i dx_i^2, \quad 1 \leq k \leq n \quad e \quad b\varepsilon_k < 0.$$

Nesse caso,

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i \exp\left(a + 2\delta\sqrt{\frac{-b\varepsilon_k}{n-2}}x_k\right),$$

onde $\delta = \pm 1$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $\bar{g} = g/\varphi^2$ é tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Então φ satisfaz o sistema (2.6). Como T é um tensor diagonal, então $c_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, e segue do Lema 2.2 que

$$\beta_i(c)\varphi_{x_j} = 0, \ \forall i \neq j.$$

Se k for um inteiro tal que $\varphi_k \neq 0$, então $\beta_i(c) = 0$ para todo $i \neq k$, e portanto, $c_{ii} = b$ para todo $i \neq k$, e podemos escrever

$$\sum_j c_{jj} = (n-1)b + c_{kk}.$$

Logo, para todo $i \neq k$, segue da definição de β_i que

$$0 = \beta_i(c) = (n-1)b - \sum_{j=1}^n c_{jj} = -c_{kk}.$$

Ou seja, se um inteiro k é tal que $\varphi_{x_k} \neq 0$, então $c_{kk} = 0$. Note que φ não depende de mais do que uma variável. De fato, se $r \neq k$ é um inteiro tal que $\varphi_{x_r} \neq 0$, então segue da conclusão acima que $c_{rr} = 0$. Ora, como $c_{ii} = b$, para todo $i \neq k$, então $0 = c_{rr} = c_{ii}$, para todo i, o que é uma contradição, uma vez que T é um tensor não-nulo. Portanto, $\varphi = \varphi(x_k)$, para algum $1 \leq k \leq n$, e $c_{ii} = b$, para todo $i \neq k$. Assim, podemos escrever,

$$T = b\sum_{i\neq k}\varepsilon_i dx_i^2 = T_k.$$

Nesse caso, o sistema (2.6) do Lema 2.1 se torna

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_k(\varphi')^2}{\varphi} + \dfrac{b\varphi}{n-2} = 0, \\ 2\varepsilon_k\varphi'' + \dfrac{b\varphi}{n-2} - \dfrac{\varepsilon_k(\varphi')^2}{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Segue da primeira equação de (2.38) que

$$\varepsilon_k b = -\frac{(\varphi')^2}{\varphi^2}(n-2) < 0,$$

e assim, φ é dada por

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{A}\exp\left(\delta\sqrt{\frac{-b\varepsilon_k}{n-2}}x_k\right), \tag{2.39}$$

onde $A \neq 0$ é constante e $\delta = \pm 1$. Observe que φ satisfaz a segunda equação de (2.38). Assim, como

$$\frac{1}{\varphi^2} = \exp\left(a + 2\delta\sqrt{\frac{-b\varepsilon_k}{n-2}}x_k\right),$$

onde $A^2 = \exp(a)$, então $\bar{g} = g/\varphi^2$ dada por

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i \exp\left(a + 2\delta\sqrt{\frac{-b\varepsilon_k}{n-2}}x_k\right),$$

satisfaz o sistema $Ric_{\bar{g}} = T$.

Reciprocamente, se $T = T_k = b\sum_{i\neq k}\varepsilon_i dx_i^2$, então $\bar{g} = g/\varphi^2$, com φ dada em (2.39), satisfaz $Ric_{\bar{g}} = T$. $\square$

Concluiremos a presente seção considerando o problema (R) para o qual T seja um tensor nulo.

Teorema 2.4. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-euclidiano. Existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = 0$ se, e somente se,*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n}(A\varepsilon_j x_j^2 + B_j x_j + C), \tag{2.40}$$

onde $A, C_j, B_j \in \mathbb{R}$ são constantes tais que

$$4A\sum_j C_j - \sum_j \varepsilon_j B_j^2 = 0.$$

Demonstração. Se $T = 0$, ou seja, $c_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, então o sistema (2.6) do Lema 2.1 se torna

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi}, \\ \varphi_{x_i x_j} = 0, \end{cases} \qquad 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.41}$$

Segue da segunda equação de (2.41) que

$$\varphi(x) = \sum_j A_j x_j^2 + B_j x_j + C_j.$$

Assim,

$$\|\nabla_g \varphi\|^2 = \sum_j \varepsilon_j (4A_j^2 x_j^2 + 4A_j B_j x_j + B_j^2).$$

Substituindo $\|\nabla_g \varphi\|^2$ em (2.41) e comparando os respectivos termos, obtemos que, para todo $1 \leq j \leq n$,

$$A_j = \varepsilon_i A \quad \text{e} \quad 4A_i C_j = \varepsilon_j B_j^2.$$

Reciprocamente, se

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} (A\varepsilon_j x_j^2 + B_j x_j + C),$$

com $A, B_j, C_j \in R$ e

$$4A \sum_j C_j - \sum_j \varepsilon_j B_j^2 = 0,$$

então φ satisfaz o sistema (2.41). Segue, então, do Lema 2.1 que a métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ satisfaz $Ric_{\bar{g}} = T$.

□

Como consequência dos resultados anteriores, na próxima seção apresentamos soluções para a equação

$$-\varphi \nabla_g \varphi + \frac{n}{2} \|\nabla_g \varphi\|^2 + \lambda \varphi^2 = 0,$$

e, além disso, exibimos a expressão da curvatura escalar para algumas métricas.

2.3 Aplicações

Finalizaremos o presente capítulo com algumas ocorrências particulares dos principais resultados tratados na seção anterior. Ressaltamos os aspectos analítico e geométrico presentes no estudo proposto.

Corolário 2.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pesudo-euclidiano. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \leq 0$ se g é a métrica euclidiana), a equação*

$$-\varphi \nabla_g \varphi + \frac{n}{2} \|\nabla_g \varphi\|^2 + \lambda \varphi^2 = 0 \tag{2.42}$$

possui infinitas soluções, de classe C^∞, globalmente definidas em $\mathbb{R}^n$:

a) Se $\lambda \neq 0$, então as funções dadas por

$$\varphi(x) = k \exp\left(\frac{\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j \right) \right), \tag{2.43}$$

satisfazem (2.42), sempre que $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn}) \in D \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$ é escolhido de modo que $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_{ii}}{2(n-2)}$.

b) Se $\lambda = 0$, então as funções (2.33) e (2.40), onde $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn}) \in (D \cup L) \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$ é tal que $\sum_i c_{ii} = 0$, satisfazem (2.42). Em particular, as soluções dadas por (2.33) satisfazem $\|\nabla_g \varphi\| = \Delta_g \varphi = 0$.

Demonstração. Se φ é deifinida como em (2.43), (2.33) ou (2.40), segue dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.4, respectivamente, que φ é solução do sistema

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i \left(\lambda_i \varphi + \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} \right), \\ \varphi_{x_i x_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2} \varphi. \end{cases}$$

Em particular, φ satisfaz

$$\frac{1}{\varphi^2} \left\{ \varepsilon_i (n-2) \varphi \varphi_{x_i x_i} + \varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2 \right\} = c_{ij},$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Somando, para cada $i = 1, \ldots, n$, as equações acima, temos que

$$2(n-1) \varphi \Delta_g \varphi - n(n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2 = \varphi^2 \sum_i c_{ii}. \tag{2.44}$$

Dividindo (2.44) por $2(n-1)$ e fazendo $\lambda 2(n-1) = \sum_i c_{ii}$, obtemos

$$-\varphi \Delta_g \varphi + \frac{n}{2} \|\nabla_g \varphi\|^2 + \lambda \varphi^2 = 0.$$

Assim, supondo $\lambda \neq 0$, existem infinitas formas de obter $\lambda = \sum_i c_{ii} / 2(n-1)$ e, portanto, existem infinitas soluções de (2.42) da forma (2.43), onde $c \in D \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$. Se g é a métrica euclidiana e $c \in D$, então $\varepsilon_i = 1$ e $c_{ii} \leq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, donde $\lambda \in (-\infty, 0]$.

Analogamente, se $\lambda = 0$, existem infinitas formas de se obter $\sum_i c_{ii} = 0$, e portanto, existem ifinitas soluções de (2.42) da forma (2.33). Além disso, pelo Teorema 2.4, 2.40 satisfaz (2.42). Se $\lambda = 0$, então $\sum_i c_{ii} = 0$, e segue de (2.34) que $\|\nabla_g \varphi\| = 0$, e de (2.42) que $\Delta_g \varphi = 0$.

$\square$

Corolário 2.2. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano. Para cada n-upla* $c = (c_{11}, \ldots, c_{nn})$ $\in D \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$ *tal que* $\sum_i c_{ii} \neq 0$, *seja* $\beta_j(c)$ *definida em* (2.2). *Considere a função* $\overline{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\overline{K}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i c_{ii} \exp\left(\frac{2\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j\right), \tag{2.45}$$

onde $\gamma_j \pm 1$, $\delta = \pm 1$ *para* $1 \leq j \leq n$. *Então, a métrica* $\bar{g} = g/\varphi^2$, *onde* φ *é dada por*

$$\varphi(x) = k \exp\left(\frac{\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j\right)\right),$$

tem $\overline{K}$ *como curtvatura escalar. Além disso, se* g *e a métrica euclidiana, então* $\overline{K} < 0$.

Demonstração. Derivando φ, obtemos

$$\|\nabla_g \varphi\|^2 = k^2 \exp\left(\frac{2\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j\right)\right) \sum_i \frac{\beta_i(c)}{(n-1)(n-2)},$$

e

$$2\varphi \Delta_g \varphi = 2k^2 \exp\left(\frac{2\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j\right)\right) \sum_i \frac{\beta_i(c)}{(n-1)(n-2)}.$$

Sabemos que a curvatura escalar na métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ é dada por

$$\overline{K} = (n-1)(2\varphi \Delta_g \varphi - n \|\nabla_g \varphi\|^2). \tag{2.46}$$

Substituindo $2\varphi \Delta_g \varphi$ e $\|\nabla_g \varphi\|^2$ na expressão acima, vemos que

$$\overline{K} = k^2 \sum_i c_{ii} \exp\left(\frac{2\delta}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \sum_j \gamma_j \sqrt{\varepsilon_j \beta_j(c)} x_j\right),$$

onde

$$\sum_i \frac{\beta_i(c)}{n-1} = -\sum_i \frac{c_{ii}}{n-1}.$$

Segue então do Corolário 2.1 que φ satisfaz (2.46). Desse modo, $\bar{g} = g/\varphi^2$ possui curvatura escalar dada por (2.45). Além disso, se $(\mathbb{R}^n, g)$ é o espaço euclidiano, então $\sum c_{ii} < 0$ e, portanto, $\overline{K} < 0$.

□

Corolário 2.3. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano. A métrica* $\bar{g} = g/\varphi^2$*, para* φ *dada por* (2.33) *ou* (2.40) *possui curvatura escalar flat* $\overline{K}$*. Neste caso, as métricas possuem curvatura seccional flat.*

Demonstração. Se φ é dada por (2.40), então $Ric_{\bar{g}} = 0$. Ora, como

$$\overline{K}(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j),$$

para uma base ortonormal $\{z_1, \ldots z_{n-1}\}$ de T_pM, segue que $\overline{K} = 0$. Por outro lado, se φ é dada por (2.33), com $\sum_i c_{ii} = 0$, então $\Delta_g\varphi = \|\nabla_g\varphi\| = 0$, e daí

$$\overline{K} = (n-1)[2\varphi\Delta_g\varphi - n\|\nabla_g\varphi\|^2] = 0.$$

□

A seguir, provaremos que para qualquer tensor simétrico constante, T, não existem métricas $\bar{g}$ completas, conformes e não-homotéticas a g tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Para isso, faremos uso do seguinte resultdo cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

Corolário 2.4. *Assuma que duas métricas pseudo-euclidianas na mesma classe conforme têm, pontualmente, o mesmo tensor de Ricci. Se uma delas é completa, então elas são homotéticas entre si.*

Corolário 2.5. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano. Para qualquer tensor simétrico constante* T*, não existem métricas* $\bar{g}$ *completas, conformes e não-homotéticas a* g*, tal que* $Ric_{\bar{g}} = T$*.*

Demonstração. Para cada tensor T fixado como nos Teoremas 2.1 e 2.3, existem duas métricas pseudo-riemannianas (dadas por $\delta = \pm 1$) na mesma classe conforme tais que, pontualmente, têm o mesmo tensor de Ricci. Como tais métricas não são homotéticas entre si, segue-se do Corolário 2.4 que elas não são completas. Um argumento semelhante pode ser aplicado às métricas obtidas no Teorema 2.2 quando $c \in D \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_k\}$. Nos demais casos, a métrica conforme $\bar{g} = g/\varphi^2$ tem pontos singulares.

□

2.4 Soluções da equação de Einstein para um tensor constante não diagonal

Nesta seção agimos de maneira análoga às seções anteriores e estudamos o problema da equação de Einstein, isto é, consideramos um tensor simétrico, constante e não-diagonal, da forma $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$, e buscamos condições necessárias e suficientes para a existência de uma métrica $\bar{g}$ satisfazendo

$$(E) \begin{cases} \bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}, \\ Ric_{\bar{g}} - \dfrac{\overline{K}}{2}\bar{g} = T, \end{cases}$$

onde $\overline{K}$ representa a curvatura escalar. Para isto, definimos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_j \beta_j(x) \geq 0,\ \forall\ j,\ 1 \leq j \leq n\},$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_j \beta_j(x) \leq 0,\ \forall\ j,\ 1 \leq j \leq n\},$$

$$\pi_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta_i(x) = 0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde β_i é uma funcão linear definida por

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_n) = (n-1)(n-2)x_i - (n-3)\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Utilizando a Proposição 1.1 e as expressões

$$\overline{K} = \sum \bar{g}^{ij} \bar{R}_{ij} \ \text{ e } \ \overline{K} = (n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n\|\nabla_g\varphi\|^2),$$

vemos que o problema (E) pode ser estudado pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_i} = \varepsilon_i\left(\lambda_i \varphi + \dfrac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi}\right), \\ \varphi_{x_i x_j} = \dfrac{\varepsilon_j c_{ij}}{n-2}\varphi, \end{cases} \tag{2.47}$$

em que $\lambda_i = c_{ii}/(n-2) - \sum_\ell c_{\ell\ell}/(n-1)(n-2)$. Assim, supondo que φ é uma solução do sistema 2.47, as derivadas de primeira ordem de φ se relacionam da seguinte forma,

$$c_{ij}\varphi_{x_i} = \frac{\beta_i(c)}{(n-1)(n-2)}\varphi_{x_j},$$

em que $c = (c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn})$ e , além disso, vale

$$\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi} + \frac{\varphi}{n-1}\sum_k \lambda_k = 0.$$

Seguindo os passos apresentados em [10], prova-se os seguintes resultados.

Teorema 2.5. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ o espaço pseudo-euclidiano e $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$ um tensor simétrico não-diagonal tal que $\sum_i c_{ii} \neq 0$. Então existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ satisfazendo $Ric_{\bar{g}} - (\overline{K}/2)\bar{g} = T$ se, e somente se, $c = (c_{11}, \dots, c_{nn}) \in D \setminus \{\pi_\ell \cup \pi_r\}$, $\ell \neq r$,*

$$c_{ij} = \frac{\varepsilon_j \gamma_i \gamma_j}{(n-1)(n-2)} \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j \beta_i \beta_j (c)}, \quad \forall\ i \neq j,$$

onde $\gamma_j = \pm 1$, para $1 \leq j \leq n$, e $\delta = \pm 1$.

Teorema 2.6. *Se $T = \sum_{i,j} \varepsilon_j c_{ij} dx_i dx_j$ é um tensor simétrico constante não-diagonal tal que $\sum_i c_{ii} = 0$, então existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$ se, e somente se, $c = (c_{11}, \dots, c_{nn}) \in (D \cup L) \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s)$ para alguns $\ell \neq s$ e*

$$c_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}} & \forall\ i \neq j, \quad se \quad c \in D \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s), \\ -\varepsilon_j \gamma_i \gamma_j \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j c_{ii} c_{jj}} & \forall\ i \neq j, \quad se \quad c \in L \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s), \end{cases}$$

onde $\gamma_j = \pm 1$ para $1 \leq j \leq n$. Neste caso, para algum tensor T fixado, temos que $\overline{K} = 0$. Além disso, a função φ é constante se g é a métrica euclidiana e, caso contrário, φ é dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} k_1 \exp\left(\sum_j \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j\right) + k_2 \exp\left(-\sum_j \sqrt{\frac{\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j\right), & se \quad c \in D \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s), \\ k_1 \cos\left(\sum_j \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j\right) + k_2 \sin\left(\sum_j \sqrt{\frac{-\varepsilon_j c_{jj}}{n-2}} \gamma_j x_j\right), & se \quad c \in L \setminus (\pi_\ell \cup \pi_s). \end{cases}$$

Teorema 2.7. *Se $T = \sum_i \varepsilon_i c_{ii} dx_i^2$ é um tensor diagonal não-nulo, então existe uma solução $\bar{g}$ para (E) se, e somente se,*

$$T = \begin{cases} b \varepsilon_k dx_k^2, & n = 3, \\ b \sum_{i \neq k} \varepsilon_i dx_i^2 + \frac{n-1}{n-3} b \varepsilon_k dx_k^2, & n \geq 4. \end{cases}$$

para algum k fixado, $1 \leq k \leq n$, onde $b \in \mathbb{R}$ é tal que $b\varepsilon_k > 0$. Neste caso,

$$\bar{g}_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}\varepsilon_i \exp(a - 2\delta\sqrt{b\varepsilon_k}x_k), & n = 3, \\ \delta_{ij}\varepsilon_i \exp(a - 2\delta\sqrt{\dfrac{2b\varepsilon_k}{(n-2)(n-3)}}x_k), & n \geq 4, \end{cases}$$

onde $\delta = \pm 1$ e $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se φ é solução de (2.47), então suas derivadas satisfazem

$$c_{ij}\varphi x_i = \frac{\beta_i(c)}{(n-1)(n-2)}\varphi_{x_j}, \quad \forall \ \ i \neq j..$$

Desde que T é um tensor diagonal, ou seja, $c_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, então $\beta_i(c)\varphi_{x_j} = 0$. Assim, se $n = 3$, então $c_{ii} = 0$, para $i \neq k$, e $c_{kk} = b \neq 0$. Além disso, φ depende somente de x_k e T é dado por

$$T = b\varepsilon_k dx_k^2.$$

Neste caso, o sistema (2.47) se torna

$$\begin{cases} 2\varphi'' + \varepsilon_i b - \dfrac{\varepsilon_i(\varphi')^2}{\varphi} = 0, \\ \dfrac{\varepsilon_k(\varphi')^2}{\varphi} + b\varphi = 0. \end{cases}$$

Daí, φ é dada por

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{A}\exp\left(\delta\sqrt{-\varepsilon_k b}x_k\right),$$

donde

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i \exp\left(a - 2\delta\sqrt{-\varepsilon_k b}x_k\right).$$

Se $n \geq 4$ e k é um inteiro tal que $\varphi_{x_k} \neq 0$, então $\beta_i(c) = 0$ para todo $i \neq k$, donde $c_{ii} = b$, para todo $i \neq k$, e $c_{kk} = (n-1)b/(n-3)$. Novamente, φ depende somente de x_k e T é dado por

$$T = b\sum_{i \neq k}\varepsilon_i dx_i^2 + \frac{n-1}{n-3}b\varepsilon_k dx_k^2.$$

Neste caso, o sistema (2.47) se torna

$$\begin{cases} \varphi'' - \dfrac{b\varphi}{(n-2)(n-3)} + \dfrac{\varepsilon_k(\varphi')^2}{\varphi} = 0, \\ \dfrac{\varepsilon_k(\varphi')^2}{2\varphi} - \dfrac{b\varphi}{(n-2)(n-3)} = 0. \end{cases}$$

Daí, φ é dada por

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{A}\exp\left(\delta\frac{\sqrt{2b\varepsilon_k}x_k}{(n-2)(n-3)}\right),$$

donde

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i \exp\left(a - \delta\frac{\sqrt{2b\varepsilon_k}x_k}{(n-2)(n-3)}\right).$$

$\square$

Por fim, se $T = 0$, então existe uma solução para (E) se, e somente se,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n}(A\varepsilon_j x_j^2 + B_j x_j + C_j),$$

onde

$$4A\sum_j C_j - \sum_j \varepsilon_j B_j^2 = 0,$$

e $A, B_j, C_j \in \mathbb{R}$. Neste caso, $\overline{K} \equiv 0$, isto é, $Ric_{\bar{g}} \equiv 0$.

Capítulo 3

Soluções da equação de Ricci e da equação de Einstein para um tensor não-diagonal

Considere o espaço pseudo-euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, com coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, onde ao menos um ε_i é positivo. Outrossim, seja T um tensor não-diagonal da forma

$$T = \sum_{i,j} f_{ij} dx_i dx_j, \tag{3.1}$$

tal que, para todo $i \neq j$, f_{ij} são funções diferenciáveis dependentes de x_i e x_j.

Nosso principal objetivo é estudar resultados de caracterização que fornecem métricas $\bar{g} = g/\varphi^2$ que solucionam a equação de Ricci ou a equação de Einstein, seguindo os passos de Romildo Pina e Keti Tenenblat em [14]. Isto é, em linhas gerais, queremos resolver os seguintes problemas

$$(R) \begin{cases} \bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g \\ Ric_{\bar{g}} = T. \qquad \text{(equação de Ricci)} \end{cases}$$

e

$$(E) \begin{cases} \bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g \\ Ric_{\bar{g}} - \bar{g}\frac{\overline{K}}{2} = T. \qquad \text{(equação de Einstein)} \end{cases}$$

A seguir, faremos alguns cálculos preliminares que serão importantes para a demonstração dos principais teoremas.

3.1 Resultados preliminares

Os dois lemas tratados nessa seção é de interesse analítico, para os quais φ será a solução de uma equação diferencial de segunda ordem.

Lema 3.1. *Considere $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 3$, uma função diferenciável, não identicamente anula e que satisfaz o sistema*

$$\varphi_{x_i x_j} - f_{ij}\varphi = 0, \ \forall\ i \neq j, \tag{3.2}$$

onde $f_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ são funções diferenciáveis de x_i e x_j. Assuma que existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^p$ sobre o qual todas as funções f_{ij} não se anulam. Então existe um aberto denso $V \subset U$ onde $\prod_i \varphi_{x_i}$ não se anula. Além disso, sobre cada componente conexa de V, existem funções diferenciáveis $\xi_i(x_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq p$, tais que

$$f_{ij} = \varepsilon \xi_i(x_i)\xi_j(x_j), \quad \varepsilon = \pm 1, \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq p.$$

Demonstração. Seja $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 3$, uma função diferenciável que não se anula tal que

$$\varphi_{x_i x_j} = f_{ij}\varphi, \ \forall\ i \neq j, \tag{3.3}$$

onde $f_{ij} = f_{ji}$ é uma função diferenciável de x_i e x_j. Seja U um aberto de $\mathbb{R}^p$ onde f_{ij} não se anula, para todo $i \neq j$. Como φ é uma função que não se anula, segue de (3.3) que o conjunto $\{x \in U \mid \varphi_{x_i}(x) = 0\}$ tem medida nula em U. Assim, existe um subconjunto aberto denso de U onde, para todo $i = 1, \ldots, p$, φ_{x_i} não se anula. No que segue, iremos nos restringir às componentes conexas de tal subconjunto de U.

Dados índices i, j, k, temos de (3.3) que

$$\varphi_{x_i x_j x_k} = f_{ij}\varphi_{x_k}.$$

Pela comutatividade das derivadas de terceira ordem, obtemos que

$$f_{ij}\varphi_{x_k} = f_{ik}\varphi_{x_j} = f_{jk}\varphi_{x_i}, \tag{3.4}$$

para todo i, j, k distintos. Em particular,

$$f_{1j}\varphi_{x_k} = f_{1k}\varphi_{x_j}, \ \forall\ j \neq k \geq 2.$$

Logo, para todo $j \geq 2$, o quocientes φ_{x_j}/f_{1j} são iguais e, portanto, existe uma função $g_1 = g_1(x_1, \ldots, x_p)$, que não se anula, tal que

$$\varphi_{x_j} = g_1 f_{1j}, \ \forall\ j \geq 2.$$

Derivando a igualdade acima com relação à x_1, temos

$$\varphi_{x_j x_1} = g_{1,x_1} f_{1j} + g_1 f_{1j,x_1}. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.3), obtemos, para $j \neq k$, que

$$\begin{aligned} f_{1j}\varphi &= g_{1,x_1} f_{1j} + g_1 f_{1j,x_1}, \\ f_{1k}\varphi &= g_{1,x_1} f_{1k} + g_1 f_{1k,x_1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$g_1(f_{1k} f_{1j,x_1} - f_{1j} f_{1k,x_1}) = 0, \ \forall \ j \neq k \geq 2.$$

Como g_1 não se anula, devemos ter

$$\frac{f_{1j,x_1}}{f_{1j}} = \frac{f_{1k,x_1}}{f_{1k}}.$$

Portanto, como a igualdade acima vale para todo $j \neq k \geq 2$, segue que existe uma função $\xi_1 = \xi_1(x_1)$, que depende apenas de x_1, tal que

$$\frac{f_{1j,x_1}}{f_{1j}} = \frac{\xi_1'}{\xi_1}, \ \forall \ j \geq 2.$$

E daí,

$$f_{1j} = \xi_1 \xi_j, \ \forall j \geq 2. \tag{3.6}$$

Agora vamos mostrar, por indução, que para qualquer $l \geq 2$, $f_{lk} = c\xi_l \xi_k$, para todo $k \geq 2$, com $k \neq l$ e c é uma constante não-nula. Considere $l = 2$. Temos de (3.4) que

$$\varphi_{x_k} = g_2(x, \ldots, x_n) f_{2k}, \ \forall \ k \neq 2.$$

Analogamente, considerando $k = 1$ e $k \geq 3$, derivando a equação acima com relação a x_2, obtemos que

$$f_{21,x_2} f_{2k} - f_{2k,x_2} f_{21} = 0, \ \forall k \geq 3.$$

Por (3.6), temos que

$$f_{2k} = \xi_2 \bar{\xi}_k, \ \forall k \geq 3. \tag{3.7}$$

Novamente por (3.4), temos que

$$f_{1k} \varphi_{x_2} = f_{2k} \varphi_{x_1}, \ \forall k \geq 3.$$

Derivando essa equação com relação a x_2 e usando as expressões em (3.2), (3.4) e (3.7), obtemos

$$\bar{\xi}_k = c_{2k}\xi_k, \ \forall k \geq 3, \tag{3.8}$$

onde c_{2k} é uma constante não-nula. Se $p \geq 4$, então as constantes c_{2k} são iguais. De fato, derivando a equação

$$f_{1k}\varphi_{x_2} = f_{2k}\varphi_{x_1}$$

com relação a x_l, $l \neq k$ e $l \geq 3$, e usando as equações (3.2), (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos que $c_{2k} = c_{2l}$.

Portanto, temos que

$$f_{1j} = \xi_1\xi_j, \ \forall k \geq 2,$$

e

$$f_{2k} = c\xi_1\xi_j, \ \forall k \geq 3.$$

Afirmamos que, se

$$f_{ik} = c\xi_i\xi_k, \ \forall k \geq 2, \ 2 \leq i \leq l-1, \ k \neq i,$$

para um $2 \leq l \leq p-1$ fixado, então $f_{lk} = c\xi_l\xi_k$, para todo $k \geq 2$ e $k \neq l$. Com efeito, desde que $f_{lk} = f_{kl}$, segue da hipótese que basta provar que $f_{lk} = c\xi_l\xi_k$ para $k \geq l+1$. Por (3.4),

$$\varphi_{x_k} = g_l(x_1, \ldots, x_n)f_{lk}, \ \forall k \neq l.$$

Por (3.6),

$$f_{lk} = \xi_l\tilde{\xi}_k(x_k), \ \forall k \geq l+1.$$

Analogamente, obtemos que $\tilde{\xi}_k = c\xi_k$.

Obtemos então que

$$f_{1j} = \xi_1\xi_j, \ \forall j \geq 2,$$

e

$$f_{jk} = c\xi_j\xi_k, \ \forall j \neq k \geq 2.$$

Se $c > 0$, então podemos considerar $\tilde{\xi}_j = \sqrt{c}\xi_j$ e $\tilde{\xi}_1 = \xi_1/\sqrt{c}$. Então $f_{ij} = \tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_j$, para todo $k \neq j$.

Se $c < 0$, então podemos considerar $\tilde{\xi}_j = -\sqrt{-c}\xi_j$, para $j \geq 2$, e $\tilde{\xi}_1 = \xi_1/\sqrt{-c}$. Então $f_{ij} = -\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_j$, para todo $k \neq j$.

$\square$

Lema 3.2. *Uma função diferenciável e não nula $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 3$, é uma solução de* *a)* $\varphi_{x_ix_j} - \varphi = 0$, *para todo* $i \neq j$, *se e somente se*

$$\varphi = a \exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_i\right) + b \exp\left(-\sum_{j=1}^{p} x_i\right), \tag{3.9}$$

b) $\varphi_{x_ix_j} + \varphi = 0$, *para todo* $i \neq j$, *se e somente se*

$$\varphi = a \cos\left(\sum_{j=1}^{p} x_i\right) + b \sin\left(-\sum_{j=1}^{p} x_i\right), \tag{3.10}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *são tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$.

Demonstração. Seja φ uma função não nula e que satisfaz

$$\varphi_{x_ix_j} = \varphi, \ \forall i \neq j.$$

Como $p \geq 3$, considere k diferente de i e j. Então

$$\varphi_{x_ix_jx_k} = \varphi_{x_k}, \tag{3.11}$$

para todo i, j, k distintos. Por outro lado, como φ não se anula, podemos escrever

$$\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} = \beta(x_1, \ldots, x_n), \ \forall i, \tag{3.12}$$

em que β é uma função diferenciável. Derivando (3.12) com relação à x_j, $j \neq i$, temos que

$$\frac{\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} - \frac{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{\varphi^2} = \beta_{x_j}.$$

Daí, utilizando (3.11), obtemos

$$\beta_{x_j} + \beta^2 - 1 = 0.$$

As soluções dessa equação são dadas por

$$\beta = c\frac{a \exp\left(\sum_j x_j\right) - b \exp\left(-\sum_j x_j\right)}{a \exp\left(\sum_j x_j\right) + b \exp\left(-\sum_j x_j\right)},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Isso mostra que φ é dada por (3.9). A recíproca é clara.

Analogamente se verifica o item (b). $\square$

Nas próximas duas seções mostraremos que, quaisquer tensores T da forma (3.1) que satisfazem os problemas (R) ou (E), são de dois tipos, a saber: a menos de mudança da ordem das variáveis independentes, T é da forma (Seção 3.2)

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}(x_1, x_2)dx_i dx_j + h(x_1, x_2) \sum_{i=3}^{n} dx_i^2$$

onde $\varphi(x_1, x_2)$ é uma solução de uma equação hiperbólica; ou, (Seção 3.3) T é determinado por r funções diferenciáveis não constantes $\xi_r(x_r)$, $3 \leq r \leq n$, caso em que φ e T são dadas explicitamente em termos de ξ_r.

3.2 Soluções da equação curvatura de Ricci para um tensor não diagonal

Seja T, dado por (3.1), um tensor simétrico não-diagonal no espaço pseudo-euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, onde $f_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ é uma função diferenciável de x_i e x_j, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Segue da Proposição 1.1 que existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$ se, e somente se,

$$\varphi_{x_i x_j} = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi, \quad \forall i \neq j, \tag{3.13}$$

$$f_{ii} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} - \varepsilon_i (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi^2}, \quad \forall i. \tag{3.14}$$

Desse modo, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, um espaço pseudo-euclidiano com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Considere um tensor simétrico não-diagonal $T = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j$ e assuma que, para $i \neq j$, $f_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ é uma função diferenciável de x_i e x_j. Então, existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$ se, e somente se,*

$$f_{ii} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} - \varepsilon_i (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi^2}, \quad \forall i,$$

e a menos de uma mudança na ordem das variáveis independentes, ocorre um dos seguintes casos:

a) $f_{12}(x_1, x_2)$ é uma função diferenciável não-nula, $f_{ij} \equiv 0$ para todo $i \neq j$ tal que $i \geq 3$ ou $j \geq 3$, e $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ é uma solução que não se anula da equação hiperbólica

$$(n-2)\varphi_{x_1 x_2} - f_{12}\varphi = 0.$$

b) Existe um inteiro p, $3 \leq p \leq n$, tal que $f_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $i \geq p+1$ ou $j \geq p+1$. Além disso, existem funções diferenciáveis não-constantes $\xi_j(x_j)$, para $1 \leq j \leq p$, *tais que, para todo* $i \neq j$, $1 \leq i \neq j \leq p$,

$$f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j' \tag{3.15}$$

e

$$\varphi = a\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\exp\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right), \tag{3.16}$$

ou

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j' \tag{3.17}$$

e

$$\varphi = a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right), \tag{3.18}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *são tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$. *Além disso, em cada caso* φ *está definida em um subconjunto aberto e conexo de* $\mathbb{R}^n$ *onde não se anula.*

Demonstração. Se $\bar{g} = g/\varphi^2$ é uma métrica conforme à métrica pseudo-euclidiana g, satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$, então segue das considerações feitas acima que φ é solução de (3.13) e (3.14). Dado um inteiro $k \neq i, j$, como $f_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$, temos de (3.13) que

$$\varphi_{x_i x_j x_k} = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi_{x_k}, \quad i \neq j.$$

Segue daí e da comutatividade das derivadas de terceira ordem que

$$f_{ij}\varphi_{x_k} = f_{ik}\varphi_{x_j} = f_{jk}\varphi_{x_i}. \tag{3.19}$$

Além disso, como que T é um tensor simétrico não-diagonal, existe um par (i_0, j_0) tal que $f_{i_0 j_0} = f_{j_0 i_0} \neq 0$ sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $f_{i_0 k} \equiv 0$ sobre U, para todo k diferente de i_0 e j_0, então podemos assumir, a menos de uma mudança na ordem das variáveis independentes, que $f_{12} \neq 0$ e $f_{1j} = 0$ para todo $j \geq 3$. Assim, por (3.19),

$$f_{12}\varphi_{x_k} = f_{1k}\varphi_{x_2} = f_{2k}\varphi_{x_1}.$$

Segue da primeira igualdade acima que, para $k \geq 3$, $\varphi_k = 0$ sobre U. Note que, por (3.13), não podemos ter $\varphi_{x_1} = 0$ ou $\varphi_{x_2} = 0$ (em nenhum subconjunto aberto de U), pois φ e f_{12} não se anulam sobre U. Logo, segue da segunda igualdade acima que $f_{2k} = 0$ sobre U, para todo $k \geq 3$. Desse modo, existe $U_1 \subset U$ onde φ_{x_1} e φ_{x_2} não se anulam e, consequentemente, $f_{2k} \equiv 0$ sobre U_1, para todo $k \geq 3$. Por (3.19), temos que $f_{jk}\varphi_{x_2} = f_{2j}\varphi_{x_k} = 0$, para todo $j \neq k \geq 3$, e portanto $f_{jk} \equiv 0$ sobre U_1. Assim, concluímos que φ depende apenas de x_1 e x_2 e por (3.13), satisfaz

$$(n-2)\varphi_{x_1 x_2} = f_{12}\varphi.$$

Alem disso, os elementos da diagonal são determinados por (3.14).

Suponha agora que i, j, k são índices distintos tais que f_{ij} e f_{ik} não se anulam sobre um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Então, por (3.13), φ_{x_j} e φ_{x_k} não se anulam sobre nenhum aberto U. Considere U_1 subconjunto aberto de U tal que φ_{x_k} e φ_{x_j} não se anulam. Então, por (3.13), f_{jk} e φ_{x_i} não se anulam sobre U_1. Reordenando as variáveis independentes, se necessário, podemos considerar $i = 1$ e $f_{1j} \neq 0$, sobre um aberto $U_2 \subset U_1$, para todo j, tal que $2 \leq j \leq p$, onde p é um inteiro $3 \leq p \leq n$, e $f_{1s} \equiv 0$, sobre U_2 para todo $p+1 \leq s \leq n$. Além disso, como φ é uma função diferenciável, segue de (3.13) que existe um aberto $V \subset U_2$ onde φ_{x_j} não se anula, para $j = 1, \ldots, p$, e segue de (3.19) que, sobre V,

$$\begin{aligned} f_{1j}\varphi_{x_k} &= f_{jk}\varphi_{x_1}, \quad 2 \leq j \neq k \leq p, \\ f_{12}\varphi_{x_s} &= f_{1s}\varphi_{x_2}, \quad p+1 \leq s \leq n, \\ f_{kj}\varphi_{x_s} &= f_{sj}\varphi_{x_k}, \quad 2 \leq j \neq k \leq p, p+1 \leq s \leq n, \\ f_{ks}\varphi_{x_r} &= f_{sr}\varphi_{x_k}, \quad p+1 \leq s, r \leq n. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir de cada equação em (3.20) podemos concluir, respectivamente, que

$$\begin{aligned} f_{jk} \neq 0 &\quad \text{em } V, \\ \varphi_{x_s} \equiv 0 &\quad \text{em } V, \\ f_{sj} \equiv 0 &\quad \text{em } V, \\ f_{sr} \equiv 0 &\quad \text{em } V. \end{aligned}$$

Consequentemente, φ depende apenas das variáveis $x_1, \ldots,\ x_p$. Como φ satisfaz

$$\varphi_{x_i x_j} - \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi = 0, \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq p,$$

segue do Lema 3.1 que, sobre cada componente conexa $W \subset V$, onde $\prod f_{ij}\varphi_{x_k} \neq 0$, existem funções diferenciáveis não-constantes $\xi_i = \xi_i(x_i)$, com $1 \leq i \leq p$, tais que

$$\frac{f_{ij}}{n-2} = \varepsilon \xi_i' \xi_j', \ 1 \leq i \neq j \leq p, \tag{3.21}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$ para todo $i \neq j$. Assim, podemos escrever

$$\varphi_{x_i x_j} - \xi_i' \xi_j' \varphi = 0, \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq p,$$

Considerando, sobre W, a mudança de variáveis $y_i = \xi_i(x_i)$, segue da regra da cadeia e da igualdade acima que

$$\varphi_{y_i y_j} \xi_i' \xi_j' - \varepsilon \xi_i' \xi_j' \varphi = 0, \quad \forall\ i \neq j,$$

ou, como $\xi_i(x_i) \neq 0$,

$$\varphi_{y_i y_j} - \varepsilon \varphi = 0, \quad \forall\ i \neq j. \tag{3.22}$$

Assim, se $\varepsilon = 1$, temos de (3.21) que $f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j'$, e do Lema 3.2 que

$$\varphi = a\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j) + \right) b\exp\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right).$$

Se $\varepsilon = -1$, temos de (3.21) que $f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j'$, e do Lema 3.2 que

$$\varphi = a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right).$$

Reciprocamente, suponha que $T = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}dx_i dx_j$ é tal que

$$f_{ii} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} + \varepsilon_i\frac{\Delta_g\varphi}{\varphi} - \varepsilon_i(n-1)\frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{\varphi^2}, \quad \forall i.$$

Se vale *a*), então φ satisfaz (3.13), donde segue que existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Se vale *b*), suponha que φ e f_{ij}, $i \neq j$, são dadas por

$$f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\exp\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right).$$

Então,

$$\varphi_{x_i x_j} = \xi_i'\xi_j'\left[a\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\exp\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right)\right] = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi.$$

Se, porém, φ e f_{ij}, $i \neq j$, são dadas por

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right).$$

Logo,

$$\varphi_{x_i x_j} = -\xi_i'\xi_j'\left[a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right)\right] = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi.$$

Em ambos os casos, (3.13) e (3.14) são satisfeitas e, portanto, existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$

tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. $\square$

As seguintes ocorrências particulares do Teorema 3.1 estão relacionadas ao problema da curvatura escalar prescrita.

Corolário 3.1. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano,* $n \geq 3$*, com coordenadas* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$*, onde* $\varepsilon_i = \pm 1$*. Seja* $\overline{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$\overline{K} = (n-1)\left\{2(a^2\gamma^2 - b^2\gamma^{-2})\sum_j \varepsilon_j \xi_j'' + [2(n+2)ab - (n-2)(a^2\gamma^2 + b^2\gamma^{-2})]\sum_j \varepsilon_j (\xi_j')^2\right\}, \tag{3.23}$$

onde $\xi_j = \xi_j(x_j)$ *são funções diferenciáveis não-constantes,* $1 \leq j \leq p$*, para algum inteiro* p *com* $3 \leq p \leq n$*,* $a^2 + b^2 \neq 0$ *e* $\gamma = \exp\left(\sum \xi_j\right)$*. Então, a equação diferencial*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + u^{\frac{n+2}{n-2}}\overline{K} = 0,$$

possui solução globalmente definida em $\mathbb{R}^n$*, dada por*

$$u = (a\gamma + b\gamma^{-1})^{-\frac{n-2}{2}}. \tag{3.24}$$

Demonstração. Inicialmente, observamos que a função $\overline{K}$ dada acima é a curvatura escalar de $\mathbb{R}^n$ segundo a métrica $\bar{g}$ dada no Teorema 3.1, e φ é dada por

$$\varphi = a\exp\left(\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\right) + b\exp\left(-\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\right).$$

De fato, se $\bar{g} = g/\varphi^2$ e $\varphi = a\gamma + b\gamma^{-1}$, onde $\gamma = e^{\sum_{j=1}^{p} \xi_j}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 \neq 0$, então

$$\varphi_{x_i} = \xi_i'(a\gamma - a\gamma^{-1})$$

e

$$\varphi_{x_i x_i} = \xi_i''(a\gamma - a\gamma^{-1}) + (\xi_i')^2(a\gamma + a\gamma^{-1}).$$

Por outro lado, temos que

$$\overline{K} = (n-1)\left(2\varphi\sum_j \varepsilon_i \varphi_{x_i x_i} - n\sum_j \varepsilon_i (\varphi_{x_i}')^2\right). \tag{3.25}$$

Substituindo φ, φ_{x_i} e $\varphi_{x_i x_i}$ em (3.25), obtemos

$$\overline{K} = (n-1)\left\{2(a^2\gamma^2 - b^2\gamma^{-2})\sum_j \varepsilon_j \xi_j'' + [2(n+2)ab - (n-2)(a^2\gamma^2 + b^2\gamma^{-2})]\sum_j \varepsilon_j (\xi_j')^2\right\}.$$

Agora, fazendo $\varphi = u^{-2/(n-2)}$, temos que

$$\varphi_{x_i} = \frac{4}{(n-2)^2} u^{\frac{-2n}{n-2}} u_{x_i}^2,$$

e

$$\varphi_{x_i x_i} = -\frac{2}{n-2}\left(u^{\frac{-n}{(n-2)}} u_{x_i x_i} - \frac{n}{n-2} u^{\frac{2-2n}{n-2}} u_{x_i}^2 \right).$$

Daí,

$$2\varphi \Delta_g \varphi = -\frac{4}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g u + \frac{4n}{(n-2)^2} u^{\frac{-2n}{n-2}} \|\nabla_g u\|^2, \tag{3.26}$$

e,

$$n\|\nabla_g \varphi\|^2 = \frac{4n}{(n-2)^2} u^{\frac{-2n}{n-2}} \|\nabla_g u\|^2. \tag{3.27}$$

Substituindo (3.26) e (3.27) em (3.25), obtemos

$$\overline{K} = \frac{-4(n-1)}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g u.$$

Donde $u = (a\gamma + b\gamma^{-1})^{-(n-2)/2}$ é solução de

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + u^{\frac{n+2}{n-2}} \overline{K} = 0.$$

□

Corolário 3.2. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano,* $n \geq 3$*, com coordenadas* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$*, onde* $\varepsilon_i = \pm 1$*. Seja* $\overline{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$\begin{aligned} \overline{K} = -(n-1)(a^2+b^2) \sum_j \Bigg\{ & \varepsilon_j \sin 2\left(\sum_k \xi_k + \theta \right) \xi_j'' \\ & + \left[(n-2) \sin^2 \left(\sum_k \xi_k + \theta \right) + 2 \right] (\xi_j')^2 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $\xi_j(x_j)$*,* $1 \leq j \leq p$*, são funções diferenciáveis não-constantes,* $3 \leq p \leq n$*,* $a^2 + b^2 \neq 0$ *e* θ *é definido por* $\cos(\theta) = a/(a^2+b^2)$ *e* $\sin(\theta) = -b/(a^2+b^2)$*. Então, a equação diferencial*

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + u^{\frac{n+2}{n-2}} \overline{K} = 0 \tag{3.29}$$

possui solução globalmente definida em $\mathbb{R}^n$*, dada por*

$$u = \left(\sqrt{a^2+b^2} \cos\left(\sum_j \xi_j + \theta \right) \right)^{-\frac{n-2}{2}}. \tag{3.30}$$

Demonstração. Seguindo os mesmos passos do Corolário 3.1, vamos mostrar que a função

(3.28) é a curvatura escalar na métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ dada pelo Teorema 3.1, com

$$\varphi = a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Assim, a equação (3.29) terá solução dada por

$$u = \varphi^{-\frac{n-2}{2}} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\sum_j \xi_j - \theta\right)\right)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Derivando φ, temos

$$\varphi_{x_i} = -\xi_i'\left[a\sin\left(\sum_j \xi_j\right) + b\cos\left(-\sum_j \xi_j\right)\right],$$

e

$$\varphi_{x_ix_i} = -\xi_i''\left[a\sin\left(\sum_j \xi_j\right) + b\cos\left(\sum_j \xi_j\right)\right] - (\xi_i')^2\left[a\cos\left(\sum_j \xi_j\right)b + \sin\left(-\sum_j \xi_j\right)\right].$$

Daí,

$$\begin{aligned} -2\varphi\Delta_g\varphi &= \textstyle\sum_j \varepsilon_i\xi_i''\left[(a^2-b^2)\sin\left(2\sum_j \xi_j\right) + 2ab\cos\left(2\sum_j \xi_j\right)\right] \\ &\quad \textstyle+2\sum_i \varepsilon_i(\xi_i')^2\left[a\cos\left(\sum_j \xi_j\right) + b\sin\left(-\sum_j \xi_j\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

e

$$\|\nabla_g\varphi\|^2 = \left[a^2\sin^2\left(\sum_j \xi_j\right) + b^2\cos^2\left(\sum_j \xi_j\right) + ab\sin\left(2\sum_j \xi_j\right)\right]\sum_i \varepsilon_i(\xi_i')^2. \tag{3.32}$$

Note que, usando

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta) \quad \text{e} \quad -b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta),$$

podemos escrever a primeira soma de (3.31) como

$$\sum_j \varepsilon_i\xi_i''\left[(a^2-b^2)\sin\left(2\sum_j \xi_j\right)+2ab\cos\left(2\sum_j \xi_j\right)\right] = (a^2+b^2)\sum_j \varepsilon_i\xi_i''\sin 2\left(\sum_j \xi_j - \theta\right)$$

Quanto à segunda parte de (3.31), somamos com (3.32) e, além disso, somamos e subtraímos a expressão $(n-2)\big(a^2\sin^2\big(\sum_j \xi_j\big)+b^2\cos\big(\sum_j\xi_j\big)\big)$, obtendo a expressão

$$(a^2+b^2)\sum_i \varepsilon_i\left[(n-2)\sin^2\left(\sum_j \xi_j-\theta\right)+2\right](\xi_i')^2.$$

Substituindo na expressão da curvatura escalar obtida em (1.2) as expressões encontradas acima, vemos que a curvatura seccional na métrica $\bar{g}$ é dada pela expressão (3.28). Como queríamos. □

Corolário 3.3. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço pseudo-euclidiano,* $n\geq 3$, *e* $\overline{K}$ *a função dada por* (3.23) *(resp.* (3.28)*). Então existe uma métrica* $\bar{g}=u^{4/(n-2)}g$, *onde* u *é dada por* (3.24) *(resp.* (3.30)*), cuja curvatura escalar é dada por* $\overline{K}$. *Em particular, se* $(\mathbb{R}^n, g)$ *é o espaço euclidiano e* u *é limitada, então* $\bar{g}$ *é uma métrica completa.*

Demonstração. Segue da demonstração dos Corolários 3.1 e 3.2. □

3.3 Soluções da equação de Einstein para um tensor não diagonal

O teorema seguinte caracteriza o tensor T, dado por (3.1), no caso da equação de Einstein relacionada ao problema (E).

Teorema 3.2. *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n\geq 3$, *um espaço pseudo-euclidiano com coordenadas* $x=(x_1,\dots,x_n)$, $g_{ij}=\varepsilon_i\delta_{ij}$, $\varepsilon_i=\pm 1$. *Considere um tensor simétrico não-diagonal* $T=\sum_{i,j=1}^n f_{ij}dx_idx_j$ *e assuma que, para* $i\neq j$, $f_{ij}=f_{ij}(x_i,x_j)$ *é uma função diferenciével de* x_i *e* x_j. *Então existe uma métrica* $\bar{g}=g/\varphi^2$ *tal que* $Ric_{\bar{g}}-\frac{\overline{K}}{2}g=T$ *se, e somente se,*

$$f_{ii}=(n-2)\left(\frac{\varphi_{x_ix_i}}{\varphi}-\varepsilon_i\frac{\Delta_g\varphi}{\varphi}+\varepsilon_i(n-1)\frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\right),\quad \forall i,$$

e a menos de uma mudança na ordem das variáveis independentes, ocorre um dos seguintes casos:

a) $f_{12}(x_1,x_2)$ *é uma função diferenciável não-nula,* $f_{ij}\equiv 0$ *para todo* $i\neq j$ *tal que* $i\geq 3$ *ou* $j\geq 3$, *e* $\varphi=\varphi(x_1,x_2)$ *é uma solução que não se anula da equação hiperbólica*

$$(n-2)\varphi_{x_1x_2}-f_{12}\varphi=0.$$

b) Existe um inteiro p, $3\leq p\leq n$, *tal que* $f_{ij}=0$ *se* $i\neq j$, $i\geq p+1$ *ou* $j\geq p+1$. *Além disso, existem funções diferenciáveis não-constantes* $\xi_j(x_j)$, *para* $1\leq j\leq p$, *tal que, para todo* $i\neq j$, $1\leq i\neq j\leq p$,

$$f_{ij}=(n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = ae^{\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)} + be^{-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)},$$

ou

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a\cos\Bigg(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\Bigg) + b\sin\Bigg(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\Bigg),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Além disso, em cada caso φ está definida em um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ onde não se anula.

Demonstração. Iniciamos observando que, como $Ric_g = 0$ e $\overline{K} = (n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n\|\nabla_g\varphi\|^2)$, segue da Proposição 1.1 que $\bar{g} = g/\varphi^2$ é tal que $Ric_{\bar{g}} - \overline{K}/2\bar{g} = T$ se, e somente se,

$$T = \frac{1}{\varphi^2}\Bigg\{(n-2)\varphi\mathrm{Hess}_g\varphi + \Bigg[-(n-2)\varphi\Delta_g\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\|\nabla_g\varphi\|^2\Bigg]g\Bigg\},$$

ou, equivalentemente,

$$\varphi_{x_ix_j} = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi,$$

$$f_{ii} = (n-2)\Bigg(\frac{\varphi_{x_ix_i}}{\varphi} - \varepsilon_i\frac{\Delta_g\varphi}{\varphi} + \varepsilon_i(n-1)\frac{\|\nabla_g\varphi\|^2}{2\varphi^2}\Bigg).$$

O restante da demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.1. □

Na próxima seção contemplaremos algumas ocorrências particulares dos Teoremas 3.1 e 3.2.

3.4 Aplicações

Antes de passarmos ao estudo de uma situação mais geral envolvendo os problemas (R) e (E), vamos abordar alguns exemplos que poderão elucidar didaticamente todos os esforços despendidos nas seções anteriores.

Corolário 3.4. *Se $(\mathbb{R}^n, g)$ é o espaço euclidiano e $0 < |\varphi(x)| \leq C$, para alguma constante C, então as métricas dadas pelos Teoremas 3.1 e 3.2 são completas sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Desde que $0 < |\varphi(x)| \leq C$, então dado $v \in \mathbb{R}^n$, temos que $\|v\|_{\bar{g}} \geq m\|v\|_g$, onde $m = 1/C$. Assim, se γ é uma curva divergente em $\mathbb{R}^n$, como a métrica euclidiana g

é completa, segue que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t |\gamma'(t)|_{\bar{g}}dt \geq m \lim_{t\to\infty}\int_0^t |\gamma'(t)|_{g}dt = \infty.$$

Portanto, $\bar{g}$ é uma métrica completa.

$\square$

Exemplo 3.1. *Para cada* $j = 1\dots,n$, *seja* $\xi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por* $\xi_j(x_1,\dots,x_n) = -x_j^{2m_j}$, *onde* m_j *é um inteiro positivo. Seja* T *o tensor dado no Teorema 3.1 com* $a = 1$, $b = 0$ *e* φ *definida como*

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \exp\Big(- \sum_{j=1}^{p} x_j^{2m_j}\Big).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} f_{ii} &= (n-2)(-2m_i x_i^{2m_i-2} + 4m_i^2 x_i^{4m_i-2}) + \varepsilon_i \textstyle\sum_j \varepsilon_j(-2m_j x_j^{2m_j-2} + 4m_j^2 x_j^{4m_j-2}) \\ &\qquad -\varepsilon_i(n-1)\textstyle\sum_j \varepsilon_j 4m_j^2 x_j^{4m_j-2}, \end{aligned}$$

e

$$f_{ij} = 4(n-2)m_i m_j x_i^{2m_i-1} x_j^{2m_j-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} T &= (n-2)\textstyle\sum_i \Big((-2m_i x_i^{2m_i-2} + 4m_i^2 x_i^{4m_i-2}) + \varepsilon_i \sum_j \varepsilon_j(-2m_j x_j^{2m_j-2} + 4m_j^2 x_j^{4m_j-2}) \\ &\qquad -\varepsilon_i(n-1)\textstyle\sum_j \varepsilon_j 4m_j^2 x_j^{4m_j-2}\Big)dx_i^2 + 4(n-2)\sum_{i\neq j} m_i m_j x_i^{2m_i-1} x_j^{2m_j-1} dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Assim, a métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ *satisfaz* $Ric_{\bar{g}} = T$. *Além disso, segue do Corolário 3.4 que no caso euclidiano, a métrica* $\bar{g}$ *é completa sobre* $\mathbb{R}^n$, *com curvatura de Ricci negativa. Por fim, a curvatura escalar na métrica* $\bar{g}$ *é*

$$\overline{K} = (n-1)\exp\Big(-2\sum_j x_j^{2m_j}\Big)\sum_j \varepsilon_j\Big(-4m_j x_j^{2m_j-2}(2m_j-1) - 4(n-2)m_j^2 x_j^{4m_j-2}\Big).$$

Exemplo 3.2. *Seja* (T^n, g) *o toro n-dimensional, com* g *a métrica pseudo-euclidiana. Considere o tensor* T *definido no Teorema 3.1*

$$T = \sum_i f_{ii} dx^2 + \sum_{i\neq j} f_{ij} dx_i dx_j,$$

com

$$f_{ii} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} - \varepsilon_i(n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi^2}, \quad \forall i,$$

e

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i' \xi_j',$$

onde

$$\varphi = a\cos\Big(\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\Big) + b\sin\Big(-\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\Big),$$

a e b são constantes positivas e $\xi_i = \xi_i(x_i)$ *são funções periódicas de* x_i, $i = 1,\dots,n$. *Então* *a métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ é tal que $Ric_{\bar{g}} = T$. Se g é a métrica euclidiana, então $\bar{g}$ é completa sobre T^n, uma vez que T^n é compacto. Além disso, considerando k funções periódicas ξ_i, $3 \leq k < n$, então, para cada k, a métrica $\bar{g}$, definida sobre $T^n \times \mathbb{R}^{n-k}$, satisfaz a equação de Ricci. Se g é a métrica euclidiana e φ é limitada, então $\bar{g}$ é completa sobre $T^n \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

Analogamente, considerando T definido no Teorema 3.2, com

$$f_{ii} = (n-2)\Big(\frac{\varphi_{x_ix_i}}{\varphi} + \varepsilon_i \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} - \varepsilon_i (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi^2}\Big), \quad \forall i,$$

temos que $\bar{g} = g/\varphi$, definida sobre T^n, satisfaz $Ric_{\bar{g}} - \frac{\overline{K}}{2}\bar{g} = T$. Além disso, dadas k funções periódicas $\xi_i = \xi_i(x_i)$, $3 \leq k \leq n$, obtemos soluções para a equação de Einstein definidas sobre $T^n \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Exemplo 3.3. *Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$ o espaço euclidiano e T o tensor definido no Teorema 3.1 com $a = 1$, $b = 0$ e*

$$\begin{aligned}
&f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j', \quad 1 \leq i \neq j \leq p,\\
&f_{ij} = 0, \quad i \neq j, \ i \geq p+1 \quad ou \quad j \geq p+1,\\
&f_{ii} = (n-2)\xi_i'' + \textstyle\sum \xi_j'' - (n-2)\sum_{j\neq i}(\xi_j')^2,
\end{aligned}$$

onde $\xi_j(x_j)$ são funções diferenciáveis de x_j tais que $\xi_j(x_j) < 0$ para todo $1 \leq j \leq p$ e $p \geq 3$. Então a métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ possui curvatura de Ricci negativa. Se, além disso, φ é limitada, então $\bar{g}$ é completa sobre $\mathbb{R}^n$.

3.5 Algumas generalizações

Finalizaremos o presente capítulo considerando uma variedade riemanniana localmente conformemente plana (flat, em inglês) (M^n, g), e, por conseguinte, analisamos os problemas (R) e (E) para qualquer vizinhança $V \subset M$ para a qual existem coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ com $g_{ij} = \dfrac{\delta_{ij}}{F^2}$, onde F é uma função diferenciável que não se anula em V.

Teorema 3.3. *Seja (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade riemanniana localmente conformemente plana. Seja $V \subset M^n$ subconjunto aberto com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $g_{ij} = \delta_{ij}/F^2$. Considere um tensor simétrico não-diagonal $T = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}dx_idx_j$, onde cada f_{ij} é uma função diferenciável de x_i e x_j, para $i \neq j$. Então existe uma métrica $\bar{g} = g/\psi^2$ tal que $Ric_{\bar{g}} = T$ se, e somente se, $\psi = \varphi/F$, com*

$$f_{ii} = (n-2)\frac{\varphi_{x_ix_i}}{\varphi} + \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} - (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{\varphi^2}, \quad \forall i,$$

e, a menos de uma mudança na ordem das variáveis independentes, ocorre um dos seguintes casos:

a) f_{12} *é uma função diferenciável não-nula,* $f_{ij} \equiv 0$ *para todo* $i \neq j$ *tal que* $i \geq 3$ *ou* $j \geq 3$*, e* $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ *é uma solução que não se anula da equação hiperbólica*

$$(n-2)\varphi_{x_1x_2} - f_{12}\varphi = 0.$$

b) Existe um inteiro p*,* $3 \leq p \leq n$*, tal que* $f_{ij} = 0$ *se* $i \neq j$*,* $i \geq p+1$ *ou* $j \geq p+1$*. Além disso, existem funções diferenciáveis não-constantes* $\xi_j(x_j)$*, para* $1 \leq j \leq p$*, tal que, para todo* $i \neq j$*,* $1 \leq i \neq j \leq p$*,*

$$f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = ae^{\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)} + be^{-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)},$$

ou

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a\cos\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right) + b\sin\left(-\sum_{j=1}^{p}\xi_j(x_j)\right),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *são tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$*. Além disso, em cada caso* φ *está definida em um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *onde não se anula.*

Demonstração. Suponha que existe uma métrica $\bar{g}$, satisfazendo $Ric_{\bar{g}} = T$, com

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\psi^2 F^2}.$$

Desde que (M^n, g) é localmente conformemente plana, temos que $Ric_g = 0$, e segue da Proposição 1.1 que

$$\frac{1}{\varphi}\{(n-2)\varphi\varphi_{x_ix_j} + (\varphi\Delta_{\tilde{g}}\varphi - (n-1)\|\nabla_{\tilde{g}}\varphi\|^2)\tilde{g}_{ij}\} = f_{ij},$$

onde $\tilde{g}$ é tal que $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ e $\varphi = \psi F$. Assim,

$$\begin{cases} (n-2)\dfrac{\varphi_{x_ix_i}}{\varphi} + \dfrac{\Delta\varphi_{\tilde{g}}\varphi}{\varphi} - (n-1)\dfrac{\|\nabla_{\tilde{g}}\varphi\|^2}{\varphi^2} = f_{ii}, \quad \forall\ i, \\ (n-2)\dfrac{\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} = f_{ij}, \quad i \neq j. \end{cases}$$

O restante da demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.1.

$\square$

Uma versão análoga ao teorema anterior para a equação de Einstein é tratado no seguinte resultado.

Teorema 3.4. *Seja* (M^n, g), $n \geq 3$, *uma variedade riemanniana localmente conformemente plana. Seja* $V \subset M^n$ *subconjunto aberto com coordenadas* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *tal que* $g_{ij} = \delta_{ij}/F^2$. *Considere um tensor simétrico não-diagonal* $T = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j$, *onde cada* f_{ij} *é uma função diferenciável de* x_i *e* x_j, *para* $i \neq j$. *Então existe uma métrica* $\bar{g} = g/\psi^2$ *tal que* $Ric_{\bar{g}} - \frac{\overline{K}}{2}\bar{g} = T$ *se, e somente se,* $\psi = \varphi/F$, *com*

$$f_{ii} = (n-2)\bigg(\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} - \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} + (n-1)\frac{\|\nabla_g \varphi\|^2}{2\varphi^2}\bigg), \quad \forall i,$$

e, a menos de uma mudança na ordem das variáveis independentes, ocorre um dos seguintes casos:

a) f_{12} *é uma função diferenciável não-nula,* $f_{ij} \equiv 0$ *para todo* $i \neq j$ *tal que* $i \geq 3$ *ou* $j \geq 3$, *e* $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ *é uma solução que não se anula da equação hiperbólica*

$$(n-2)\varphi_{x_1 x_2} - f_{12}\varphi = 0.$$

b) Existe um inteiro p, $3 \leq p \leq n$, *tal que* $f_{ij} = 0$ *se* $i \neq j$, $i \geq p+1$ *ou* $j \geq p+1$. *Além disso, existem funções diferenciáveis não-constantes* $\xi_j(x_j)$, *para* $1 \leq j \leq p$, *tal que, para todo* $i \neq j$, $1 \leq i \neq j \leq p$,

$$f_{ij} = (n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a e^{\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)} + b e^{-\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)},$$

ou

$$f_{ij} = -(n-2)\xi_i'\xi_j'$$

e

$$\varphi = a \cos\bigg(\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\bigg) + b \sin\bigg(-\sum_{j=1}^{p} \xi_j(x_j)\bigg),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *são tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$. *Além disso, em cada caso* φ *está definida em um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *onde não se anula.*

Demonstração. Se $\tilde{g}$ é a métrica euclidiana, como $Ric_g = 0$, segue da Proposição 1.1 que a métrica $\bar{g} = \tilde{g}/\psi^2 F^2$ satisfaz $Ric_{\bar{g}} - (\overline{K}/2)\bar{g} = T$ se, e somente se,

$$T = \frac{1}{\varphi^2}\bigg\{(n-2)\varphi \mathrm{Hess}_{\tilde{g}}\varphi + \bigg[-(n-2)\varphi\Delta_{\tilde{g}}\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\|\nabla_{\tilde{g}}\varphi\|^2\bigg]\tilde{g}\bigg\}$$

onde $\psi = \varphi/F$. Equivalentemente, temos que

$$\varphi_{x_i x_j} = \frac{f_{ij}}{n-2}\varphi$$

e

$$f_{ii} = (n-2)\left(\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} - \frac{\Delta_{\tilde{g}}\varphi}{\varphi} + (n-1)\frac{\|\nabla_{\tilde{g}}\varphi\|^2}{2\varphi^2}\right)$$

O restante da demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.1.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. L. Besse. Einstein Manifolds. *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg (1987).

[2] J. Cao and D. Deturck. The Ricci curvature equationwith rotational symmetry. *American Journal of Mathematics* **116** (1994), 219–241.

[3] M. P. do Carmo. Geometria riemanniana, *Projeto Euclides.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (2015).

[4] D. DeTurck and N. Koiso. Uniqueness and Non-existence of Metrics with prescribed Ricci Curvature. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 351–359.

[5] D. DeTurck, The Cauchy problem for Lorentz metrics with Prescribed Ricci curavature, *Compositio Mathematica* **48** (1983), 327–349.

[6] D. DeTurck, Metrics with prescribed Ricci curvature, Seminar on Geometry, *Ann. of Math. Stud.* Vol. **102**, (S. T. Yau, ed.), Princeton University Press (1982), 525–537.

[7] P. L. Eisenhart. Riemannian Geometry. *Princeton* (1964).

[8] R. S. Hamilton. The Ricci curvature equation. *Seminar on nonlinear partial differential equations*, Publ. Math. Sci. Res. Inst. **2** (1984).

[9] W. Kühnel. Differential geometry curves-surfaces-manifolds. *American Mathematical Society* (2005).

[10] W. Kühnel and H. B. Rademacher. Conformal diffeomosrphisms preserving the Ricci tensor. *Proc. of American Mathematical Society* **123** (1995), 2841–2848.

[11] J. M. Lee. Riemannian manifolds: an introduction to curvature. *Springer Science and Business Medi* (2006).

[12] W. M. Ni. On the elliptic equation $\Delta u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$, its generalizations, and applications in geometry. *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), 493–529.

[13] B. O'neill. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. *Academic press*, 1983. New York (1983).

[14] R. Pina and K. Tenenblat. On solutions of the Ricci curvature equation and the Einstein equation. *Israel Journal of Mathematics* **171** (2009), 61–76.

[15] R. Pina and K. Tenenblat. Conformal metrics and Ricci tensors in the pseudo-Euclidean space. *Proceedings of the American Mathematical Society* **129** (2001), 1149–1160.

[16] R. Pina and M. Pieterzack. Prescribed curvature tensor in locally conformally flat manifolds. *Journal of Geometry and Physics* **123** (2018), 438–447.

[17] R. Pina and K. Tenenblat. On metrics satisfying equation $R_{ij} - \frac{1}{2}Kg_{ij} = T_{ij}$ for constant tensors T. *Journal of Geometry and Physics* **40** (2002), 379–383.

[18] R. Pina. Conformal metrics and Ricci tensors in the hyperpolic space. *Mat. Cont.* **17** (1999), 254–262.

[19] R. Pina, K. Tenenblat, Conformal metrics and Ricci tensors on the sphere, *Mat. Contemp.* **17** (1999)

[20] R. Pina, K. Tenenblat, A class of solutions of the Ricci and Einstein equations, *Journal of Geometry and Physics* **57** (2007), 881–888.

[21] R. Pina, K. Tenenblat, On the Ricci and Einstein equations on the pseudo-euclidean and hyperbolic space, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 101–107.

[22] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, Exact solutions of Einstein field equations, *Cambridge University Press*, Cambridge, MA, (2003).

[23] X. Xu. Prescribing a Ricci tensor in a conformal class of Riemannian metrics. *Proceedings of the American Mathematical Society* **115** (1992), 455–459.