



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Departamento de Matemática - MAT

Bifurcações estocásticas de n pontos para dinâmicas Markovianas

Ana Vitória Rezende Ramos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa

Brasília

2021

Ana Vitória Rezende Ramos

**Bifurcações estocásticas de n pontos para dinâmicas
Markovianas**

Relatório apresentado ao Departamento de Matemática, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa

Brasília

2021

Ana Vitória Rezende Ramos

Bifurcações estocásticas de n pontos para dinâmicas Markovianas/ Ana Vitória Rezende Ramos. – Brasília, 2021

59 p.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado, 2021.

1. Processo de Markov 2. Sistemas dinâmicos 3. Bifurcação estocástica

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Bifurcações estocásticas de n-pontos para dinâmicas Markovianas

Ana Vitória Rezende Ramos*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRA EM MATEMÁTICA

Brasília, 18 de janeiro de 2022.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa- MAT/UnB (Orientador)



Profª. Dra. Cátia Regina Gonçalves- MAT/UnB (Membro)



Profª. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano- EST- UnB (Membro)

* A autora foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial meus pais, Luciana e Carlos Henrique, e meu irmão Luiz Henrique por todas as oportunidades que proporcionaram e por sempre me apoiarem.

Agradeço também ao meu namorado, Gabriel Faria, e aos meus amigos Laís Ribeiro, Lucas Gongora e Milena Garcez.

Por fim, a todos os professores com quem tive contato durante o mestrado, obrigada por compartilharem comigo seu conhecimento. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Henrique da Costa pela ajuda e às professoras Dr^a Cátia Gonçalves e Dr^a Cira Otiniano por aceitarem fazer parte da banca.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 3.1 – Movimento de 2 pontos em $M = \{1, 2, 3, 4\}$ | 34 |
| Figura 3.2 – Fluxo sem perturbação para a condição inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ | 38 |
| Figura 3.3 – Fluxo com perturbação ε para a condição inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ | 39 |
| Figura A.1 – Fluxos para o valor inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e suas respectivas projeções . | 52 |
| Figura A.2 – Fluxos para o valor inicial $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$ e suas respectivas projeções . | 53 |

Lista de tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 3.1 – Movimento de 3 pontos | 36 |
| Tabela 3.2 – Subgrupos de S_3 | 36 |
| Tabela 4.1 – Sistema sem perturbação com valor inicial (1, 2, 3, 4, 5, 6) | 46 |
| Tabela 4.2 – Sistema sem perturbação com valor inicial (1, 2, 1, 4, 1, 6) | 47 |
| Tabela 4.3 – Sistema com perturbação com valor inicial (1, 2, 1, 4, 1, 6) | 47 |

Lista de símbolos

| | |
|-----------------------|---|
| δ | Letra grega delta; usada para simbolizar o delta de Dirac |
| μ | Letra grega mi; usada para simbolizar uma medida |
| φ | Letra grega fi; usada para simbolizar um fluxo |
| Ω | Letra grega omega maiúscula; usada para simbolizar um espaço amostral |
| \mathcal{F} | σ -álgebra |
| P | Medida de probabilidade; probabilidades de transição |
| \in | Pertence a |
| \subseteq | Está contido ou é igual a |
| \forall | Para todo |
| \Rightarrow | Implica em |
| \Leftrightarrow | Se, e somente se, |
| \mathbb{N} | Conjunto dos números naturais |
| \mathbb{R} | Conjunto dos números reais |
| $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | Conjunto dos números reais não-negativos |
| $\bar{\mathbb{R}}$ | Conjunto estendido dos números reais; $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ |
| i.i.d. | Independentes e identicamente distribuídas |
| id_M | Função identidade $id_M : M \rightarrow M$, com $id_M(x) = x, \forall x \in M$ |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 15 |
| 1 Noções preliminares | 17 |
| 2 Bifurcação estocástica de n pontos | 27 |
| 2.1 Sistema homogêneo de Markov de N pontos | 28 |
| 2.2 Bifurcação estocástica de n pontos | 30 |
| 3 Famílias de bifurcações estocásticas de n pontos | 33 |
| 3.1 Exemplo mínimo | 33 |
| 3.2 Generalização da construção para $H < G \lesssim S_m$ | 38 |
| 4 Detecção do nível de uma bifurcação estocástica de n pontos | 43 |
| Referências | 49 |
| A Fluxos | 51 |
| B Código | 55 |

Introdução

Um fluxo Browniano é, sob algumas condições, determinado por sua média e covariância infinitesimais (vide [16, capítulo 4]), ou seja, os processos de 1 e 2 pontos determinam o movimento de N pontos, $N > 2$. Entretanto, para processos Markovianos, em geral, esse resultado não é válido.

Assim, o objetivo deste trabalho é explorar resultados relacionados ao conceito de bifurcação estocástica apresentado por Högele e Ruffino[11] e da Costa, Högele e Ruffino[7], estudando seus exemplos e teoremas. Esse conceito estende a noção clássica de bifurcação para dinâmicas estocásticas apresentada em Arnold[3], generalizando-a para o contexto de dinâmicas Markovianas de N pontos.

Essas dinâmicas surgem a partir do fluxo induzido no espaço produto, isto é, tal fluxo representa o processo de N pontos associado e o interesse em estudá-las se deve ao fato de que esse contexto fornece informações que, em geral, não podem ser observadas com o movimento de 1 ponto.

Na teoria clássica determinística uma bifurcação ocorre quando uma mudança no parâmetro altera o suporte da medida invariante associada ao fluxo, por exemplo, quando ocorre a separação do suporte em dois domínios invariantes e desconexos (como referência para a teoria clássica de sistemas dinâmicos veja Katok e Hasselblatt[15], onde a definição de bifurcação é dada em termos da ruptura topológica do suporte das medidas invariantes). Em sistemas gerados por equações diferenciais estocásticas as bifurcações podem ser estudadas seguindo esta mesma ideia (veja por exemplo, [3]), entretanto essa ruptura topológica da medida ocorre em diferentes níveis. Além disso, diferentemente do caso estocástico explicado em [6], no caso determinístico a medida invariante é estendida de modo natural ao espaço produto como sendo a respectiva medida produto.

O ponto central do trabalho está ligado à discussão da rigidez imposta pelo fluxo Browniano pois, como demonstrado em [16], a Gaussianidade do fluxo garante uma dependência de modo que o movimento de N pontos fica completamente conhecido a partir das leis de 1 e 2 pontos. Por outro lado, retirando-se a continuidade do fluxo, o chamado fluxo de Lévy, não há razões, a princípio, para esperar que esse mesmo resultado (veja por exemplo [2, 8, 9, 17]). Logo, a questão natural que surge é saber quantos níveis

são necessários para se determinar um fluxo de Lévy em geral. Esta dissertação trabalha esta questão para cadeias de Markov em espaços de estados finitos aborda, sendo baseada nos resultados apresentados em [11] e [7].

Assim, este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 foi feito um esforço de concatenação de resultados afim de que o trabalho se torne autocontido num contexto de primeira leitura e também uma tentativa de incentivar a busca em detalhes desses conceitos nas referencias nele deixadas. Já no Capítulo 2 serão definidos um sistema homogêneo de Markov e uma bifurcação estocástica de n pontos, a qual ocorre no contexto de um sistema de Markov. O Capítulo 3 será destinado à apresentação de exemplos de fluxos estocásticos onde ocorre uma bifurcação para $n > 2$, incluindo o exemplo mínimo, ou seja, o menor número de pontos necessários para haver uma bifurcação de 3 ou mais pontos, enquanto o Capítulo 4 discutirá formas de determinar o nível em que uma bifurcação acontece.

Capítulo 1

Noções preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar definições e teoremas que serão utilizados de ao longo do trabalho para que o mesmo seja autocontido. As principais referências utilizadas foram Kunita[16], Ash e Dóleans-Dade[5], Arnold[3] e Rudnicki, Pichór e Tyran-Kamińska[23]. Além dessas, como referência em tópicos da álgebra utilizou-se Jacobson[12] enquanto para a área de topologia cita-se Munkres[18], Rudin[22] e Baxendale[6].

Definição 1.1. Uma topologia em um conjunto não-vazio S é uma coleção \mathcal{T} de subconjuntos de S tal que:

- i. \emptyset e S pertencem à \mathcal{T} ;
- ii. a união de qualquer coleção de elementos de \mathcal{T} pertence à \mathcal{T} ; e
- iii. a interseção finita de elementos de \mathcal{T} pertence à \mathcal{T} .

Um par (S, \mathcal{T}) é chamado de espaço topológico.

Observação 1.1. É comum referir-se a um conjunto S como sendo um espaço topológico ficando então subentendida a respectiva topologia \mathcal{T}_S .

Definição 1.2. Seja (S, \mathcal{T}) um espaço topológico.

1. Um subconjunto $A \subseteq S$ é dito aberto se $A \in \mathcal{T}$.
2. Um subconjunto $A \subseteq S$ é dito fechado se o seu complementar é aberto, isto é, se $A^c = S \setminus A \in \mathcal{T}$.
3. O fecho de um subconjunto $A \subseteq S$ é a interseção de todos os subconjuntos fechados que contêm A .
4. Dada uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, o fecho do conjunto $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{s \in S : f(s) \neq 0\}$ é chamado suporte de f .
5. Um subconjunto $A \subseteq S$ é denso em S se o fecho de A é igual a S .

6. O espaço (S, \mathcal{T}) é dito separável se possui um subconjunto denso contável.

Exemplo 1.1. O conjunto dos números reais com a topologia gerada por $\mathcal{T}_0 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ é um espaço topológico separável pois $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ é denso e contável. Para mais detalhes, consulte [18, capítulos 2 e 4].

A definição a seguir mostra que é possível construir uma topologia para um conjunto S a partir de uma função (ou de um conjunto de funções) que possui S como domínio.

Definição 1.3. Seja S um conjunto e \mathcal{A} uma coleção de funções $f : S \rightarrow Y_f$, onde cada (Y_f, \mathcal{T}_{Y_f}) é um espaço topológico. A coleção \mathcal{T} de todas as uniões de interseções finitas de conjuntos $f^{-1}(V)$, com $f \in \mathcal{A}$ e $V \in \mathcal{T}_{Y_f}$, é uma topologia em S chamada topologia fraca.

Exemplo 1.2. Seja S o produto cartesiano de uma coleção de espaços topológicos $(Y_\alpha, \mathcal{T}_{Y_\alpha})$. Se para todo α , $f_\alpha : S \rightarrow Y_\alpha$ é uma função tal que $f_\alpha(s)$ apresenta a α -ésima coordenada de $s \in S$ então a topologia fraca induzida por esse conjunto de funções é chamada de topologia produto. Para mais detalhes, consulte [22, seção 3.8].

Como caso particular de espaço topológico, definido em 1.1, tem-se os espaços métricos, cuja definição será apresentada a seguir.

Definição 1.4. Uma métrica em um conjunto S é uma função $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in S$, sendo $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in S$; e
- iii. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in S$, chamada desigualdade triangular.

O par (S, d) é dito um espaço métrico.

Se d é uma métrica em S então a coleção dos conjuntos $B_d(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$, com $x \in S$ e $\varepsilon > 0$, chamados de bolas abertas, forma uma base para uma topologia em S , chamada topologia induzida por d .

Um espaço topológico (S, \mathcal{T}) é dito metrizable se existe uma métrica d que induz a topologia \mathcal{T} .

No contexto de espaços métricos, é possível caracterizar a convergência de uma sequência utilizando o conceito de sequências de Cauchy.

Definição 1.5. Seja (S, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de S é dita uma sequência de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Se toda sequência de Cauchy em S converge então (S, d) é dito completo.

Um caso específico de espaço topológico são os chamados espaços poloneses, muito utilizados na área de probabilidade.

Definição 1.6. Um espaço polonês é um espaço topológico separável e metrizável de forma a se tornar completo.

Definição 1.7. Uma relação de equivalência em um conjunto S é uma relação \sim em S tal que:

- i. $x \sim x, \forall x \in S$;
- ii. $x \sim y \Rightarrow y \sim x, x, y \in S$; e
- iii. $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z, x, y, z \in S$.

Dada uma relação de equivalência \sim em S e $x \in S$, o subconjunto $E_x = \{y \in S : x \sim y\}$ é chamado de classe de equivalência de x .

Definição 1.8. Seja (S, \mathcal{T}) um espaço topológico como na Definição 1.1 e A um subconjunto de S . O par (A, \mathcal{T}_A) , onde $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em A , é dito um subespaço de S .

Para a demonstração de que \mathcal{T}_A descrito na definição anterior é uma topologia em A consulte [18, página 89].

Definição 1.9. Dado (S, \mathcal{T}) um espaço topológico, uma separação de S é um par $U, V \in \mathcal{T}$ tal que $U, V \neq \emptyset, U \cup V = S$ e $U \cap V = \emptyset$. O conjunto S é conexo (com respeito à topologia \mathcal{T}) se não existe uma separação de S .

Definição 1.10. Dado (S, \mathcal{T}_S) um espaço topológico qualquer e definindo \sim uma relação de equivalência em S dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe um subespaço conexo de } S \text{ contendo } x \text{ e } y,$$

as classes de equivalência dessa relação são chamadas de componentes conexos de S .

Para demonstração de que \sim na definição anterior é uma relação de equivalência, consulte [18, página 159].

No contexto de espaços topológicos, a caracterização de continuidade de uma função é dada por:

Definição 1.11. Sejam (S, \mathcal{T}_S) e (Y, \mathcal{T}_Y) espaços topológicos e $f : S \rightarrow Y$ uma função.

1. $f : S \rightarrow Y$ é dita contínua se $f(U) \in \mathcal{T}_Y, \forall U \in \mathcal{T}_S$.
2. Se $f : S \rightarrow Y$ é uma bijeção tal que f é contínua e a sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow S$ também é contínua, então f é chamada de homeomorfismo.
3. Se existe $f : S \rightarrow Y$ um homeomorfismo entre (S, \mathcal{T}_S) e (Y, \mathcal{T}_Y) então diz-se que esses são espaços equivalentes topologicamente.

Observação 1.2. É fácil notar que se \mathcal{T} é a topologia fraca em S como na Definição 1.3 então \mathcal{T} é a menor topologia em S onde todas as funções de \mathcal{A} são contínuas.

Ao longo do trabalho, serão utilizadas algumas noções usuais de probabilidade que estão listadas a seguir.

Definição 1.12. Dado Ω um conjunto não vazio, uma coleção \mathcal{F} de subconjuntos de Ω é uma σ -álgebra se satisfaz:

- i. $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ii. se $B \in \mathcal{F}$ então $B^c \in \mathcal{F}$; e
- iii. se $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$.

Uma dupla (Ω, \mathcal{F}) é chamada espaço mensurável.

Ao longo do texto, com exceção de explicitado o contrário, Ω representará um conjunto não vazio e \mathcal{F} uma σ -álgebra referente ao conjunto de interesse.

Observe que, em um experimento aleatório, o espaço amostral Ω é o conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento e os elementos da σ -álgebra \mathcal{F} são chamados eventos de Ω .

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ é definido como sendo a menor σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{R} contendo os intervalos da forma $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tal conjunto é chamado de σ -álgebra de Borel e seus elementos são chamados de borelianos da reta.

Se M é um espaço métrico então o conjunto $\mathcal{B}(M)$ é definido como sendo a σ -álgebra gerada pelos abertos de M e seus elementos são chamados de borelianos de M .

Definição 1.13. Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que:

- i. $\mu(B) \geq 0, \forall B \in \mathcal{F}$; e
- ii. se $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$, $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$, então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$, isto é, μ é σ -aditiva.

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é chamada espaço de medida.

Se $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ satisfaz i. e ii. acima e é tal que $\mu(\Omega) = 1$ então μ é chamada medida de probabilidade e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é chamada espaço de probabilidade. Tradicionalmente, utiliza-se P no lugar de μ nesse contexto.

Exemplo 1.4. Um determinado jogo consiste no lançamento de dois dados honestos de cores distintas e na observação dos resultados. Assim, para esse experimento tem-se que:

- Espaço amostral: $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

- σ -álgebra: $\mathcal{F} = \{\text{todos os subconjuntos de } \Omega\}$ (parte de Ω)
- Probabilidade: $P((i, j)) = \frac{1}{36}, \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \forall A \in \mathcal{F}$

Definição 1.14. Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, diz-se que uma determinada afirmação é válida quase-certamente com relação a μ se existe $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(N) = 0$ e essa afirmação é válida para N^c .

Definição 1.15. Um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é dito σ -finito se existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.16. Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ espaços mensuráveis. Uma função $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é mensurável com respeito às σ -álgebras \mathcal{F}_1 de Ω_1 e \mathcal{F}_2 de Ω_2 se, para todo $A \in \mathcal{F}_2$, vale $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1$.

Definição 1.17. Uma variável aleatória com valores em um espaço métrico separável e completo M é uma função mensurável $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M, \mathcal{B}(M))$.

Teorema 1.1 (Teorema da Medida Induzida). *Seja $\pi : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ uma função mensurável, μ uma medida em \mathcal{F} e defina a medida $\mu_0 = \pi_*\mu$ em \mathcal{F}_0 como*

$$\mu_0(A) = \pi_*\mu(A) = \mu(\pi^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{F}_0.$$

Dada uma função $f : (\Omega_0, \mathcal{F}_0) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ então, $\forall A \in \mathcal{F}_0$,

$$\int_{\pi^{-1}(A)} f(\pi(\omega)) d\mu(\omega) = \int_A f(\omega) d\mu_0(\omega) \quad (1.1)$$

no sentido que se uma das integrais existe então a outra também existe e as duas são iguais.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [5, páginas 52 e 53].

□

Uma classe de funções muito utilizada no contexto de probabilidade é a classe de funções integráveis, isto é, funções cuja integrais com relação a uma determinada medida são finitas. O espaço dessas funções, denotado por L^1 está definido a seguir.

Definição 1.18. Dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , o espaço $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é definido como sendo o conjunto de todas as funções P -integráveis sobre Ω , ou seja, $L^1 = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) \text{ é finita} \right\}$.

O principal objeto de estudo neste trabalho são as Cadeias de Markov, um caso específico de processo estocástico que, como será apresentado posteriormente, podem ser caracterizadas por uma família de núcleos de transição.

Definição 1.19. Dado (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável, um núcleo de transição é uma função $P : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- i. $\forall B \in \mathcal{F}$ fixo, $P(\cdot, B) : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é mensurável (com relação à \mathcal{F}); e
- ii. $\forall x \in \Omega$, $P(x, \cdot) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma medida em (Ω, \mathcal{F}) .

Uma família de variáveis aleatórias indexadas em T com valores em um espaço métrico M , isto é, $X : \Omega \times T \rightarrow M$, é chamada de um processo estocástico. As definições formais de processo estocástico e de seus casos particulares que serão mencionados ao longo do texto encontram-se a seguir.

Definição 1.20. Dados (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e M um espaço métrico completo e separável, uma família de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in T}$ com valores em M , onde T é um conjunto relacionado ao tempo, é um processo estocástico com espaço de estados M .

Observando a dinâmica temporal quando o parâmetro aleatório $\omega \in \Omega$ é fixado, isto é, as funções $X_t(\omega) : T \rightarrow M$, chamadas trajetórias de um processo estocástico X , constrói-se o chamado processo canônico. Tal processo é uma versão de X , isto é, suas distribuições de dimensão finita são iguais, motivando portanto o estudo de processos estocásticos a partir das chamadas probabilidades de transição.

Um caso particular de processo estocástico cujo espaço de estados é um conjunto enumerável é chamado Cadeia de Markov.

Definição 1.21. Seja M um conjunto enumerável (finito ou infinito), chamado espaço de estados, $\Pi = [p_{ij}]_{i,j \in M}$ uma matriz estocástica, ou seja, $p_{ij} \geq 0$, $\forall i, j \in M$, e $\sum_{j \in M} p_{ij} = 1$, $\forall i \in M$, e $\Pi_0 = [p_k]_{k \in M}$ tal que $p_k \geq 0$, $\forall k \in M$, e $\sum_{k \in M} p_k = 1$, chamada distribuição inicial.

Existe então (vide [5, *Theorem 4.11.2*]) uma sequência de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in T}$, $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$, definidas em um mesmo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e assumindo valores em M tais que $P(X_0 = k) = P(\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = k\}) = p_k$, $\forall k \in M$, e

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) &= P(\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = i_0, \dots, X_n(\omega) = i_n\}) \\ &= p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}, \quad \forall i_0, \dots, i_n \in M, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

O processo estocástico definido por essas variáveis aleatórias é chamado de Cadeia de Markov (homogênea).

As entradas p_{ij} da matriz Π , chamada matriz de transição, são chamadas de probabilidades de transição pois, de (1.2), tem-se que $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, $\forall i, j \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Tal valor é interpretado como a probabilidade de, estando no estado i , o processo estar no estado j depois de uma 1 tempo de transição.

É importante observar que (1.2) é equivalente a

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij},$$

$\forall i, j, i_0, \dots, i_{n-1} \in M, n \in \mathbb{N}$. A primeira igualdade é chamada de propriedade de Markov e, pela equivalência entre as equações, é suficiente para caracterizar uma Cadeia de Markov. Para mais detalhes, consulte [4, seção 7.1], [5, capítulo 4], [24, capítulo 2] entre outros.

Exemplo 1.5. Suponha que um jogo de aposta sobre o lançamento de um dado honesto ocorra da seguinte forma: se o resultado for um número par, o jogador ganha 1 real, caso contrário, o jogador perde 1 real.

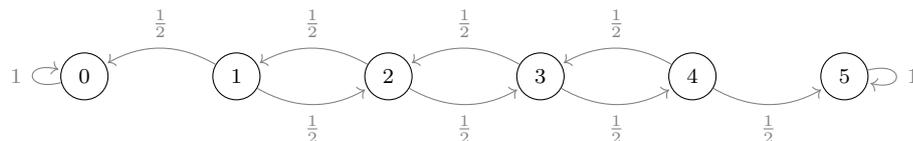
Supondo que o jogo acabe quando o jogador atingir 5 reais ou perder todo o dinheiro (ficar com 0 reais), a quantidade de dinheiro que o jogador possui a cada rodada pode ser representado como uma Cadeia de Markov com espaço de estados $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de probabilidades de transição

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, se X_n indica quantidade de dinheiro do jogador após n lançamentos, então

$$P(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 0 \text{ ou } i = j = 5 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i = j - 1 \text{ ou } i = j + 1, \text{ com } j = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Visualmente, em cada lançamento tem-se:



A extensão de uma Cadeia de Markov para um espaço de estados M que não é necessariamente enumerável é o chamado processo de Markov, definido a seguir.

Definição 1.22. Sejam (M, \mathcal{F}) um espaço mensurável e $(P_t)_{t \in T}$ uma família de probabilidades de transição (homogêneas) em (M, \mathcal{F}) , isto é, para cada $t \in T$, P_t é um núcleo de transição, com $P_0(x, B) = \delta_x(B)$ e

$$P_{t+s}(x, A) = \int_M P_t(z, A)P_s(x, dz), \quad \forall t, s \in T, \quad (1.3)$$

chamada equação ou condição de Chapman-Kolmogorov. O teorema da extensão de Kolmogorov (vide [24, Teorema 2.2]) garante que existe então um processo estocástico associado a essas probabilidades de transição chamado processo de Markov (homogêneo) com espaço de estados M .

De forma análoga ao caso da cadeia de Markov, $P_t(x, A)$ é interpretada como a probabilidade de, partindo de $x \in M$, o processo estar em $A \in \mathcal{F}$ depois de um período t .

Definição 1.23. Um processo estocástico $(X_t)_{t \in T}$, $T = \mathbb{N} \cup 0$ definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) é chamado de processo de Lévy se:

- i. $X_0 = 0$ quase-certamente (isto é, $P(X_0 = 0) = 1$);
- ii. os incrementos são independentes, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1}$ as variáveis aleatórias $X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$, $1 \leq j \leq n$, são independentes;
- iii. os incrementos são estacionários, ou seja, $X_{t+k} - X_t \stackrel{d}{=} X_k - X_0$, $\forall t, k \in \mathbb{N}$; e
- iv. para todo $a > 0$ e $s \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \rightarrow s} P(|X_t - X_s| > a) = 0$

Definição 1.24. Seja M um espaço polonês, $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade completo. Uma família $(\varphi_t)_{t \in T}$, $\varphi_t(\omega) : M \rightarrow M$, $\omega \in \Omega$, é chamada de um (semi)fluxo estocástico de Lévy de aplicações se existe $N \in \mathcal{F}$ com $P(N) = 0$ tal que:

- i. $\varphi_{t+s}(\omega) = \varphi_t(\omega) \circ \varphi_s(\omega)$, para todo $s, t \in T$ e $\omega \in N^c$;
- ii. $\varphi_0(\omega) = id_M$, para todo $\omega \in N^c$;
- iii. para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_n \in T$ a família de incrementos $(\varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_n})$ é independente;
- iv. $t \mapsto \varphi_t(\omega)$ é contínua a direita e limitada a esquerda, para $\omega \in N^c$ fixo. Se, em particular, $t \mapsto \varphi_t(\omega)$ é contínua, para $\omega \in N^c$ fixo, então o fluxo estocástico é chamado de Browniano.

Definição 1.25. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito. Denotando por D o subconjunto de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ que contém as densidades, ou seja, $D = \{f \in L^1 : f \geq 0, \|f\| = 1\}$, uma função $P : L^1 \rightarrow L^1$ é chamada de operador de Markov se $P(D) \subseteq D$.

Utilizando a definição acima, é possível introduzir o conceito de semigrupo de Markov.

Definição 1.26. Um semigrupo de Markov consiste em uma família $\{P_t\}_{t \geq 0}$ de operadores de Markov satisfazendo:

- i. $P_0 = Id$;
- ii. $P_{t+s} = P_t P_s$, $t, s \geq 0$; e
- iii. a função $t \mapsto P_t f$ é contínua para todo $f \in L^1$.

Observação 1.3. Em [20, página 80] são definidas as funções de transição e a equação de Chapman-Kolmogorov para semigrupo.

Definição 1.27. Sejam (M, \mathcal{F}, μ) um espaço de probabilidade e X um processo de Markov com valores em M e probabilidades de transição associadas a P . Para $A \in \mathcal{F}$, define $\mu_* P(A) = \int P(x, A) \mu(dx)$. A medida $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita invariante se $\mu(A) = \int P(x, A) \mu(dx)$, $\forall A \in \mathcal{F}$, isto é, $\mu_* P = \mu$. Se o processo tem espaço de estados discreto então P pode ser representada como uma matriz e μ como um vetor de forma que μ é invariante se $P\mu = \mu$, isto é, se μ é um autovetor de P .

Uma medida invariante μ é dita ergódica se para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$ P -invariante, isto é, $P(a, A) = 1$, $\forall a \in A$, tem-se que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Capítulo 2

Bifurcação estocástica de n pontos

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, M um espaço polonês e $t \in T$, com $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ou $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Uma família de probabilidades de transição homogêneas $(P_t)_{t \in T}$ satisfazendo a equação de Chapman-Kolmogorov como na equação (1.3), isto é, dados $x \in M$, $A \in \mathcal{B}(M)$,

$$P_{t+s}(x, A) = \int_M P_t(z, A) P_s(x, dz)$$

para todo para $s, t \in T$, $s \leq t$, gera um processo de Markov com valores no espaço de estados M . Para mais detalhes, consulte [20].

Nesse contexto, o processo X_t é considerado o movimento de 1 ponto que pode ser estendido de diversas formas para um processo no espaço produto $M^N = M \times \dots \times M$, com $N \leq |M|$, cujas probabilidades de transição são denotadas por

$$P_t^N(x, B), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in M^N \text{ e } B \in \mathcal{B}(M^N).$$

As mais intuitivas são:

1. Assumir que as dinâmicas aleatórias são provenientes de um fluxo de bijeções mensuráveis como nos exemplos que serão apresentados no Capítulo 3 e no Exemplo 4.3.
2. Considerar um fluxo estocástico de Lévy de funções de mensuráveis $\varphi : M \rightarrow M$, como descrito na Definição 1.24, permitindo coalescência de partículas. A extensão de para o movimento de N pontos induzido por φ será descrita na Seção 2.1.
3. Permitir que o sistema não venha de um fluxo, como será o caso apresentado no Exemplo 2.2.

A definição de bifurcação de n pontos que será dada nas próximas seções é aplicável para todos os casos acima.

2.1 Sistema homogêneo de Markov de N pontos

Seja $\varphi = (\varphi_t)_{t \in T}$ um fluxo estocástico de Lévy, como na Definição 1.24. O movimento de $N \in \mathbb{N}$ pontos em M^N induzido por φ é dado por

$$\varphi_t(x) := (\varphi_t(x_1), \dots, \varphi_t(x_N)), \quad \forall t \in T, \quad (2.1)$$

com $x = (x_1, \dots, x_N) \in M^N$. Como descrito em [7] as probabilidades de transição desse processo são dadas por

$$P_t^N(x, A) := P(\varphi_t(x) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M^N). \quad (2.2)$$

Dados $k \in \mathbb{N}$ e $l \in \{1, \dots, k\}$, a projeção cuja imagem omite a l -ésima coordenada será denotada por $\pi_l^k : M^k \rightarrow M^{k-1}$, ou seja, para cada $(x_1, \dots, x_k) \in M^k$ tem-se que

$$\pi_l^k(x_1, \dots, x_k) := (x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_k) \in M^{k-1}. \quad (2.3)$$

Considerando um processo de Markov com valores em M e suas diferentes extensões para um processo de N pontos em M^N , se qualquer projeção do processo de M^N para M^k , com $k \leq N$, leva a um processo com a mesma estrutura de probabilidade, de tal forma que, após $N - 1$ projeções as probabilidades originais de transição de 1 ponto em M são eventualmente recuperadas, então o processo de Markov de N pontos é dito compatível. Essa noção de compatibilidade será utilizada na definição de um sistema homogêneo de Markov apresentada a seguir.

É importante observar que dois processos diferentes de N pontos podem coincidir quando observada a estrutura do processos de k pontos, para algum $1 \leq k < N$. Neste caso, as probabilidades de transição desses processos são distintas apenas para movimento de j pontos, com $k < j \leq N$ suficientemente grande.

Definição 2.1. Seja M um espaço polonês, $\mathcal{B}(M)$ sua σ -álgebra de Borel, $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq |M|$ e $(P^k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$ uma família de núcleos de transição homogêneos $P_t^k(x, B)$, com $t \in T$, $x \in M^k$ e $B \in \mathcal{B}(M)$. Se essa família de probabilidades de transição é compatível, ou seja, se para cada $k > 1$ tem-se que

$$P_t^k(x, (\pi_l^k)^{-1}(A)) = P_t^{k-1}(\pi_l^k(x), A), \quad (2.4)$$

$\forall t \in T$, $x \in M^k$, $A \subseteq M^{k-1}$ e $l \in \{1, \dots, k\}$, então $(M, (P^k)_{1 \leq k \leq N})$ é chamado um sistema homogêneo de Markov de N pontos.

Exemplo 2.1. Se $|M| = m < \infty$, o sistema homogêneo de Markov de N pontos, $N \leq m$ coincide com o fluxo estocástico de Lévy, isto é, dado φ um fluxo estocástico de Lévy em M , os movimentos de k pontos, $1 \leq k \leq N$, induzidos por φ , obtidos como descrito na equação (2.1), formam um sistema homogêneo de Markov de N pontos.

Exemplo 2.2. Para $M = \{1, 2\}$ considere os movimentos de 1 ponto em M e de 2 pontos em $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ com suas respectivas probabilidades de transição descritas abaixo.

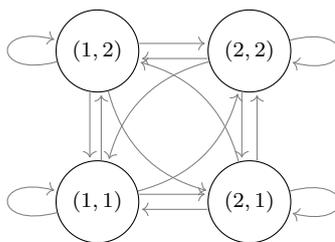
- Processo em $M = \{1, 2\}$



onde todas as probabilidades de transição são iguais a $\frac{1}{2}$, ou seja, a matriz de transição do movimento de 1 ponto é

$$P^1 = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Processo em $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$:



onde todas as probabilidades de transição são iguais a $\frac{1}{4}$, ou seja, a matriz de transição do movimento de 2 pontos é

$$P^2 = \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Como, por exemplo, $P_{(1,1),(1,2)}^2 = \frac{1}{4} > 0$, tem-se que o sistema não vem de um semifluxo, pois, caso contrário, tal função teria 1 e 2 como imagens de 1, uma contradição com a definição de função.

É possível obter P^1 a partir de P^2 utilização projeções como descrito na equação 2.4. A relação entre as probabilidades de transição serão apresentadas de forma mais detalhada no Capítulo 4.

Dados um sistema homogêneo de Markov de N pontos $\left(M, (P^k)_{1 \leq k \leq N}\right)$ e uma função contínua e limitada $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$, o semigrupo de Markov associado é dado por

$$P_t^k f(x) = \int_{M^k} f(y) P_t^k(x, dy), \quad t \in T, \quad x \in M^k.$$

A condição de compatibilidade da família $(P^k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$, apresentada na equação (2.4) é dada no semigrupo por $P_t^k f(x_1, \dots, x_k) = P_t^l g(x_1, \dots, x_l)$, onde $l \leq k$, $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : M^l \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas tais que $f(y_1, \dots, y_k) = g(y_{i_1}, \dots, y_{i_l})$, sendo $(x_1, \dots, x_l) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_l})$, para algum conjunto $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Em [13, def. 1.1] é apresentada uma definição análoga e sua respectiva condição de compatibilidade para um semigrupo de Feller.

Lema 2.1. *Seja X um processo de Markov gerado pelas probabilidades de transição P^N em M^N e μ uma medida invariante de X . Se $\pi_k^N(X)$ também é um processo de Markov, então a medida induzida $(\pi_k^N)_* \mu$ é uma medida invariante para o processo $\pi_k^N(X)$ em M^{N-1} . Além disso, se μ é ergódica então $(\pi_k^N)_* \mu$ é ergódica em M^{N-1} .*

Demonstração. Para $t \in T$ fixo, seja $P_t^N(x, A)$ a família das probabilidades de transição do processo X em M^N no tempo t , com $x \in M^N$ e $A \subseteq M^N$. Como, por hipótese, $\pi_k^N(X)$ gera um processo de Markov em M^{N-1} , as probabilidades de transição em M^{N-1} são dadas por

$$P_t^{N-1}(\pi_k^N(x), B) \stackrel{(2.4)}{=} P_t^N(x, (\pi_k^N)^{-1}(B)) \quad (2.5)$$

$\forall x \in M^N, B \subseteq M^{N-1}$. Assim, denotando $\gamma = (\pi_k^N)_* \mu$ e utilizando o Teorema da Medida Induzida (Teorema 1.1),

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= (\pi_k^N)_* \mu(B) = \mu((\pi_k^N)^{-1}(B)) = \int_{M^N} P_t^N(x, (\pi_k^N)^{-1}(B)) d\mu(x) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \int_{M^{N-1}} P_t^N((\pi_k^N)^{-1}(y), (\pi_k^N)^{-1}(B)) d\mu((\pi_k^N)^{-1}(y)) \\ &= \int_{M^{N-1}} P_t^N((\pi_k^N)^{-1}(y), (\pi_k^N)^{-1}(B)) d(\pi_k^N)_* \mu(y) \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \int_{M^{N-1}} P_t^{N-1}(y, B) d(\pi_k^N)_* \mu(y) \\ &= ((\pi_k^N)_* \mu)_* P_t^{N-1}(B) = \gamma_* P_t^{N-1}(B) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e, portanto, $(\pi_k^N)_* \mu$ também é invariante.

Se μ é ergódica como na Definição 1.27 então a ergodicidade de $(\pi_k^N)_* \mu$ segue diretamente do resultado obtido na equação (2.6). □

2.2 Bifurcação estocástica de n pontos

A ideia de bifurcação em um sistema dinâmico, tanto em um contexto determinístico quanto para sistemas estocásticos, está relacionada com a mudança da topologia do suporte da medida invariante. A definição a seguir generaliza essa ideia para um sistema de Markov de N pontos em um espaço polonês.

Definição 2.2. Seja M um espaço polonês e $\left(\left(P^{k,\varepsilon}\right)_{1 \leq k \leq N}\right)_{\varepsilon \in I}$ uma família de sistemas homogêneos de Markov de N pontos, como na Definição 2.1, indexada por $\varepsilon \in I$, onde I é um intervalo da reta. Diz-se que $\left(\left(P^{k,\varepsilon}\right)_{1 \leq k \leq N}\right)_{\varepsilon \in I}$ possui uma bifurcação estocástica de n pontos em $\varepsilon_0 \in I$, com $n \leq N$, se

1. para todo $x \in M^k$, $1 \leq k \leq n$, tem-se que $\varepsilon \mapsto P^{k,\varepsilon}(x, \cdot)$ é contínua com respeito à topologia fraca no espaço de medidas de probabilidade $\mathcal{P}(M^k)$
2. para todo $\varepsilon \in I$ existe uma medida invariante μ_ε com respeito à $P^{n,\varepsilon}$ em M^n tal que
 - a) para todo ε em uma vizinhança $V_{\varepsilon_0} \subseteq I$ de ε_0 a medida μ_ε é ergódica e todos os conjuntos de $(\text{supp}(\mu_\varepsilon))_{\varepsilon \in V_{\varepsilon_0}}$ são topologicamente equivalentes entre si, como na Definição 1.11, mas $\text{supp}(\mu_\varepsilon)$ não é topologicamente equivalente ao $\text{supp}(\mu_{\varepsilon_0})$;
 - b) para toda sequência de projeções $\pi_{k_2}^2, \dots, \pi_{k_n}^n$, $k_i \in \{1, \dots, i\}$, $i \in \{2, \dots, n\}$, tem-se que $\text{supp}((\pi_{k_2}^2 \circ \dots \circ \pi_{k_n}^n)_* \mu_\varepsilon)$ e $\text{supp}((\pi_{k_2}^2 \circ \dots \circ \pi_{k_n}^n)_* \mu_{\varepsilon_0})$ são topologicamente equivalentes.

O exemplo a seguir ilustra a definição acima apresentando um processo que possui uma bifurcação estocástica.

Exemplo 2.3. Considere um processo de Markov com espaço de estados $M = \{1, 2\}$ e matriz das probabilidades de transição

$$P^1 = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Note que $\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é a medida invariante para P^1 uma vez que $\mu^1 P^1 = \mu^1$.

Já para o processo em $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, ou seja, para o sistema de 2 pontos, suponha que a matriz das probabilidades de transição é

$$P^2 = \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se $\mu^2 = (\mu_{(1,1)}^2, \mu_{(1,2)}^2, \mu_{(2,1)}^2, \mu_{(2,2)}^2)$ é uma medida invariante com relação à P^2 , então $\mu^2 P^2 = \mu^2$. Assim,

$$\left(\mu_{(1,1)}^2, \mu_{(1,2)}^2, \mu_{(2,1)}^2, \mu_{(2,2)}^2\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\mu_{(1,1)}^2, \mu_{(1,2)}^2, \mu_{(2,1)}^2, \mu_{(2,2)}^2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{(1,1)}^2 = \frac{1}{2}\mu_{(1,1)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^2 + \frac{1}{2}\mu_{(2,2)}^2 \\ \mu_{(1,2)}^2 = \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^2 \\ \mu_{(2,1)}^2 = \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^2 \\ \mu_{(2,2)}^2 = \frac{1}{2}\mu_{(1,1)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^2 + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^2 + \frac{1}{2}\mu_{(2,2)}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{(1,1)}^2 = \mu_{(2,2)}^2 \\ \mu_{(1,2)}^2 = \mu_{(2,1)}^2 \\ \mu_{(2,1)}^2 = 3\mu_{(1,2)}^2 \end{cases}.$$

Portanto, como $\mu_{(1,1)}^2 + \mu_{(1,2)}^2 + \mu_{(2,1)}^2 + \mu_{(2,2)}^2 = 1$, pois μ^2 é uma medida de probabilidade, obtêm-se $\mu^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Para $\varepsilon \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, seja

$$P^{2,\varepsilon} = \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,1),(1,2)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,1),(2,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,1),(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ P_{(1,2),(1,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,2),(1,2)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,2),(2,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(1,2),(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ P_{(2,1),(1,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,1),(1,2)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,1),(2,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,1),(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ P_{(2,2),(1,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,2),(1,2)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,2),(2,1)}^{2,\varepsilon} & P_{(2,2),(2,2)}^{2,\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon \end{pmatrix},$$

e note que $P^{2,\frac{1}{4}} = P^2$. Utilizando a equação 2.4,

$$P^{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} P_{1,1}^{1,\varepsilon} & P_{1,2}^{1,\varepsilon} \\ P_{2,1}^{1,\varepsilon} & P_{2,2}^{1,\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P^1,$$

mas, se $\mu^{2,\varepsilon} = (\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon})$ é medida invariante com relação à $P^{2,\varepsilon}$, então

$$\begin{aligned} & (\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon}) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} - \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon \end{pmatrix} = (\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon}, \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon}) \\ & \Rightarrow \begin{cases} \mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} = \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} + \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} = \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} + \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} + \frac{1}{4}\mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} = \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \\ \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} = \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} \\ \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} = (-4\varepsilon + 1)\mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Como $\mu^{2,\varepsilon}$ é uma medida de probabilidade, $\mu_{(1,1)}^{2,\varepsilon} + \mu_{(1,2)}^{2,\varepsilon} + \mu_{(2,1)}^{2,\varepsilon} + \mu_{(2,2)}^{2,\varepsilon} = 1$, logo $\mu^{2,\varepsilon} = \frac{1}{1-2\varepsilon} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4}\right)$.

Tem-se então que, para $\varepsilon \neq \frac{1}{4}$,

$$\text{supp}(\mu^{2,\varepsilon}) = M^2 \neq \{(1,1), (2,2)\} = \text{supp}(\mu^{2,\frac{1}{4}}) = \text{supp}(\mu^2)$$

e, portanto, $P^{2,\varepsilon}$ apresenta uma bifurcação estocástica de 2 pontos.

Capítulo 3

Famílias de bifurcações estocásticas de n pontos

O objetivo das próximas seções será apresentar alguns casos particulares, com famílias de processos estocásticos, e obter condições para a existência de uma bifurcação estocástica, cuja definição foi apresentada no capítulo anterior.

3.1 Exemplo mínimo

O exemplo a seguir mostra que para $M = \{1, 2, 3, 4\}$ existe bifurcação estocástica de $n > 2$ pontos. Esse é o exemplo mínimo, isto é, 4 é o menor número de pontos necessário para haver uma bifurcação estocástica de $n > 2$ pontos.

Exemplo 3.1. Para $M = \{1, 2, 3, 4\}$, denote $G = S_4$, o grupo simétrico, e $H = A_4$, o subgrupo alternado, dado pelas permutações pares de G , ou seja,

| $H = A_4$ | número de transposições | $G \setminus H$ | número de transposições |
|-----------|-------------------------|-----------------|-------------------------|
| id | 0 | (12) | 1 |
| (123) | 2 | (13) | 1 |
| (132) | 2 | (14) | 1 |
| (124) | 2 | (23) | 1 |
| (142) | 2 | (24) | 1 |
| (134) | 2 | (34) | 1 |
| (143) | 2 | (1234) | 3 |
| (234) | 2 | (1432) | 3 |
| (243) | 2 | (1324) | 3 |
| (12)(34) | 2 | (1423) | 3 |
| (13)(24) | 2 | (1243) | 3 |
| (14)(23) | 2 | (1342) | 3 |

Sejam $\Delta_H = U(H)$ e $\Delta_{G \setminus H} = U(G \setminus H)$ as distribuições uniformes sobre H e $G \setminus H$, respectivamente, e φ_ε , $\varepsilon \geq 0$, o fluxo com distribuição dada por

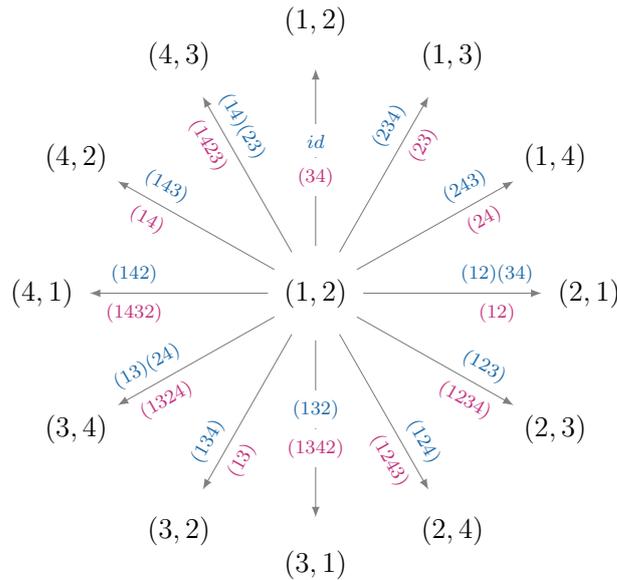
$$\Delta_\varepsilon = \Delta_H + \varepsilon (\Delta_{G \setminus H} - \Delta_H) = (1 - \varepsilon)\Delta_H + \varepsilon\Delta_{G \setminus H}. \quad (3.1)$$

Para cada par $(i, j), (k, l) \in M^2$, com $i \neq j$ e $k \neq l$ ¹, a probabilidade de transição do movimento de 2 pontos relativo ao fluxo φ_ε é dado por

$$P_{(i,j),(k,l)}^\varepsilon = \frac{1 - \varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} = \frac{1}{12} \quad (3.2)$$

ou seja, não depende de ε . Isso ocorre pois, para cada par, existem exatamente dois elementos de G que levam (i, j) para (k, l) , sendo uma permutação par e uma ímpar, ou seja, um elemento de H e um de $G \setminus H$. Por exemplo, dada a condição inicial $(1, 2)$, tem-se que

Figura 3.1 – Movimento de 2 pontos em $M = \{1, 2, 3, 4\}$



onde os ciclos em azul são os elementos de H e os ciclos em rosa são os elementos de $G \setminus H$.

Portanto, uma medida invariante e ergódica para o movimento de 2 pontos não depende de ε e não há bifurcação.

Entretanto, considerando o movimento de 4 pontos, se $\varepsilon = 0$ e a condição inicial está fora das subdiagonais, então as trajetórias de φ_0 estão quase-certamente em $12 = |H|$ pontos, logo a medida invariante é tal que $|\text{supp}(\mu_0^4)| = |H| = 12$. Por outro lado, se $\varepsilon > 0$ então $|\text{supp}(\mu_\varepsilon^4)| = |G| = 24$. Logo, existe uma bifurcação estocástica de n pontos no nível $n = 3$ ou $n = 4$.

¹ Note que, como os elementos de G são bijeções, a probabilidade de $(i, j) \in M^2$, com $i \neq j$, ir para um elemento do tipo $(l, l) \in M^2$ é zero.

O exemplo a seguir mostra que, para $M = \{1, 2, 3\}$ não existe bifurcação estocástica de $n = 3$ pontos e, portanto, o número mínimo de pontos no qual uma dinâmica de bijeções apresenta uma bifurcação de $n > 2$ pontos é $m = 4$.

Exemplo 3.2. Considere agora $M = \{1, 2, 3\}$ e o grupo simétrico

$$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Utilizando a distribuição uniforme sobre S_3 tem-se que:

1. Para o movimento de 1 ponto, as probabilidades de transição são

$$P^1 = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 & P_{1,3}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 & P_{2,3}^1 \\ P_{3,1}^1 & P_{3,2}^1 & P_{3,3}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e, portanto, a medida invariante pra P^1 é $\mu^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pois $\mu^1 P^1 = \mu^1$, e $\text{supp}(\mu^1) = M$.

2. Já para movimento em M^2 , considerando a ordem lexicográfica, as probabilidades de transição de 2 pontos são

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Assim, se

$$\begin{cases} A_1^2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ A_2^2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\} \end{cases}$$

então A_1^2 e A_2^2 formam uma partição de M^2 de modo que as possíveis medidas invariantes e ergódicas pra P^2 são

| medida | suporte |
|--|---------|
| $\mu_{A_1^2}^2 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$ | A_1^2 |
| $\mu_{A_2^2}^2 = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)$ | A_2^2 |

Como no Exemplo 3.1, $\Delta_{H_l} = U(H_l)$ e $\Delta_{G \setminus H_l} = U(G \setminus H_l)$ denotarão as distribuições uniformes sobre H_l e $G \setminus H_l$, respectivamente, e

$$\Delta_\varepsilon^l = \Delta_{H_l} + \varepsilon (\Delta_{G \setminus H_l} - \Delta_{H_l}) = (1 - \varepsilon)\Delta_{H_l} + \varepsilon\Delta_{G \setminus H_l}, \quad \varepsilon \geq 0,$$

a distribuição do fluxo φ_ε^l , associado.

É importante notar que, como quando considerado todo o conjunto S_3 , para cada subconjunto H_l , as probabilidades de transição $P_l^{3,\varepsilon}(u, v)$, $u, v \in M^3$, do movimento de 3 pontos podem ser não nulas apenas quando u e v pertencem a um mesmo conjunto A_i^3 , $i = 1, \dots, 5$. Assim, para $u = (i, j, k), v = (x, y, z) \in M^3$ e $i \neq j \neq k$ e $x \neq y \neq z$, ou seja, $u, v \in A_5^3$, as probabilidades de transição do movimento de 3 pontos são:

- Grupo $H_1 = \{id\}$:

$$P_1^{3,\varepsilon}(u, v) = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & \text{se } u = v \\ \frac{\varepsilon}{5}, & \text{se } u \neq v \end{cases}.$$

e, portanto, as possíveis medidas invariantes e ergódica para o processo são as mesmas apresentadas na Tabela 3.1, de forma que não há bifurcação estocástica de 3 pontos.

- Grupo $H_2 = \{id, (12)\}$:

$$P_2^{3,\varepsilon}(u, v) = \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{2}, & \text{se } i = x = 3 \text{ ou } j = y = 3 \text{ ou } k = z = 3 \\ \frac{\varepsilon}{4}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nesse caso, a única medida invariante e ergódica é $\mu_2^{3,\varepsilon} = \mu_{A_1^3}^3$ e, portanto, não há bifurcação de 3 pontos.

Os grupos $H_3 = \{id, (13)\}$ e $H_4 = \{id, (23)\}$ seguem de forma análoga.

- Grupo $H_5 = \{id, (123), (132)\}$:

$$P_5^{3,\varepsilon}(u, v) = \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{3}, & \text{se } (i, j, k) = (x, y, z) \text{ ou } \{i \neq x \text{ e } j \neq y \text{ e } k \neq z\} \\ \frac{\varepsilon}{3}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como para os grupos H_2, H_3 e H_4 , a única medida invariante e ergódica no caso H_5 é $\mu_5^{3,\varepsilon} = \mu_{A_1^3}^3$ e, portanto, não há bifurcação de 3 pontos.

Logo, não existe bifurcação estocástica para $M = \{1, 2, 3\}$ e, como afirmado anteriormente, o Exemplo 3.1 é o exemplo mínimo.

A proposição a seguir estende o Exemplo 3.1, mostrando que sempre existe uma bifurcação em níveis maiores.

Proposição 3.1. *Dado um espaço de estados finito $M = \{1, \dots, m\}$, $m > 3$, existe uma dinâmica estocástica com bifurcação de n pontos em $n = m - 1$ ou $n = m$ que preserva as probabilidades de transição do movimento de $m - 2$ pontos.*

Demonstração. De forma análoga à construção feita no Exemplo 3.1, considere o grupo simétrico $G = S_m$ e $H = A_m < G$ o subgrupo alternado. Existem exatamente dois elementos de G que levam uma $(m - 2)$ -upla sem repetição $(i_1, \dots, i_{m-2}) \in M^{m-2}$ em outra $(m - 2)$ -upla sem repetição $(j_1, \dots, j_{m-2}) \in M^{m-2}$ sendo uma permutação par e outra ímpar, ou seja, uma em H e outra em $G \setminus H$. Logo, o efeito da perturbação ε nas probabilidades de transição de $m - 2$ pontos é cancelado e a bifurcação das medidas invariante segue de forma análoga ao Exemplo 3.1. □

3.2 Generalização da construção para $H < G \not\subseteq S_m$

Seguindo a ideia da seção anterior, será apresentado a seguir um resultado referente à existência de uma bifurcação estocástica válido para quando o grupo G não é o grupo simétrico. Tal resultado será apresentado primeiramente em um exemplo para, em seguida, ser apresentado o caso geral.

Exemplo 3.3. Considere $M = \{1, \dots, 6\}$, o grupo

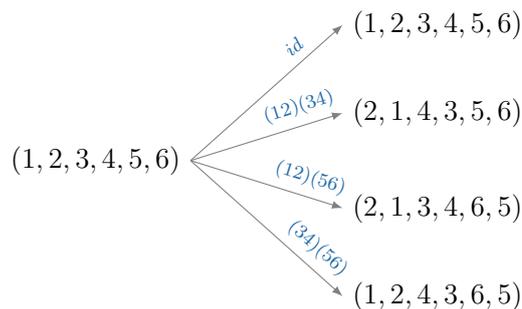
$$G = \{id, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56), (12)(34)(56)\}$$

com a operação de composição de funções e o seu subgrupo

$$H = \{id, (12)(34), (12)(56), (34)(56)\}.$$

O movimento de 6 pontos de um fluxo φ_0 gerado pela composição i.i.d. de bijeções concentrado em H , com distribuição uniforme, isto é, $\Delta_0 = \Delta_H = U(H)$, tem trajetórias aleatórias com a seguinte propriedade: para cada condição inicial em M^6 a órbita aleatória do processo está concentrada em no máximo 4 de 6^6 possíveis elementos de M^6 . Por exemplo, dada a condição inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \in M^6$, tem-se que

Figura 3.2 – Fluxo sem perturbação para a condição inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$



ou seja, a órbita do processo está concentrada em $\{(1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 1, 4, 3, 5, 6), (2, 1, 3, 4, 6, 5), (1, 2, 4, 3, 6, 5)\}$.

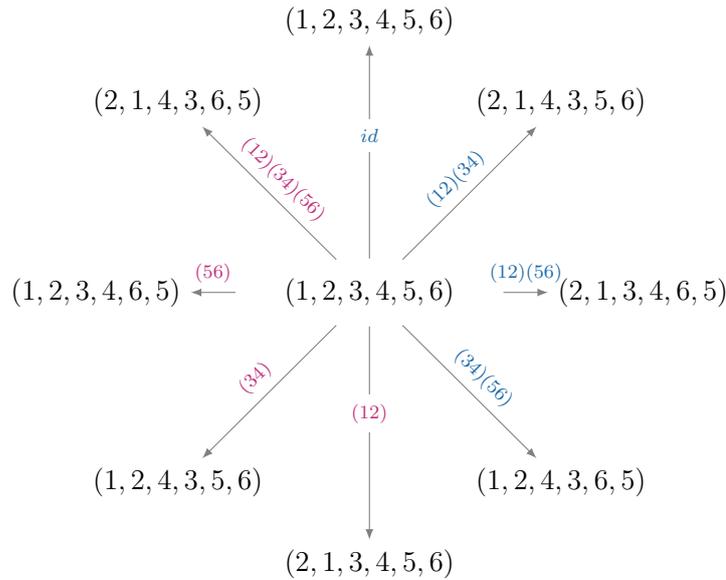
É fácil notar que para toda condição inicial fora das subdiagonais, ou seja, onde todas as entradas são diferentes entre si, o suporte da medida invariante concentra-se em exatamente 4 elementos de M^6 .

Para $\varepsilon > 0$, o fluxo φ_ε gerado pela perturbação ε na distribuição

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_H + \varepsilon(\Delta_{G \setminus H} - \Delta_H), \quad (3.3)$$

onde $\Delta_H = U(H)$ e $\Delta_{G \setminus H} = U(G \setminus H)$ são as distribuições uniformes sobre H e $G \setminus H$, respectivamente, tem medida invariante com suporte em exatamente 8 elementos para qualquer condição inicial em M^6 fora das subdiagonais. Por exemplo, se a condição inicial é $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \in M^6$ então

Figura 3.3 – Fluxo com perturbação ε para a condição inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$



ou seja, a órbita do processo está concentrada em $\{(1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 1, 4, 3, 5, 6), (2, 1, 3, 4, 6, 5), (1, 2, 4, 3, 6, 5), (2, 1, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 4, 3, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 6, 5), (2, 1, 4, 3, 6, 5)\}$.

Além disso, observando a equação (3.3), é possível notar que as probabilidades de transição dos movimentos de 1 e de 2 pontos não depende de ε . Existe portanto uma bifurcação estocástica de n pontos para algum $3 \leq n \leq 6$.

A construção do Exemplo 3.3 pode ser estendida da seguinte forma: sejam k e q números naturais, com k par e $q > k$, e $m = kq$. Para $M = \{1, \dots, m\}$ considere a partição de M em q subconjuntos disjuntos dada por

$$M = \bigcup_{l=1}^q \{lk - k + 1, \dots, lk\}$$

e denote $b_l = (lk - k + 1, \dots, lk)$, para cada $l \in \{1, \dots, q\}$. O conjunto das composições desses ciclos

$$G = \left\{ b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_q^{i_q} \mid i_1, \dots, i_q \in \{0, 1, \dots, k-1\} \right\}$$

é um grupo abeliano de ordem $|G| = k^q$ que preserva os subgrupos da partição de M . Considere também o subgrupo próprio de G dado por

$$H = \left\{ b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_q^{i_q} \mid i_1, \dots, i_q \in \{0, 1, \dots, k-1\} \text{ e } (i_1 + \dots + i_q) \text{ é par} \right\}$$

que possui ordem $|H| = \frac{|G|}{2}$.

Seja Δ_H e $\Delta_{G \setminus H}$ as distribuições uniformes em H e $G \setminus H$, respectivamente, e considere a distribuição Δ_ε em G dada por

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_H + \varepsilon (\Delta_{G \setminus H} - \Delta_H), \quad (3.4)$$

com $\varepsilon \geq 0$, e seja φ_ε o fluxo estocástico discreto gerado pela composição i.i.d. de elementos aleatórios de G de acordo com a equação acima.

Proposição 3.2. *As probabilidades de transição do movimento de k pontos em M^k induzido pelo fluxo φ_ε não depende de ε e φ_ε possui uma bifurcação estocástica de n pontos para algum $n > k$.*

Demonstração. Dado $u = (a_1, \dots, a_k) \in M^k$ fixo, um elemento fora das subdiagonais, como a partição de M possui $q > k$ subconjuntos e u possui k componentes, existe pelo menos um $l_0 \in \{1, \dots, q\}$ tal que o ciclo b_{l_0} não possui interseção com $\{a_1, \dots, a_k\}$. Consequentemente, todo elemento $g = b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_{l_0}^{i_{l_0}} \circ \dots \circ b_q^{i_q} \in G$ é tal que

1. existem $\frac{k}{2}$ elementos $g = b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_{l_0}^\alpha \circ \dots \circ b_q^{i_q} \in H$, ou seja, tais que $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ satisfaz a paridade dos expoente, e
2. existem $\frac{k}{2}$ elementos $g = b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_{l_0}^\beta \circ \dots \circ b_q^{i_q} \in G \setminus H$, ou seja, tais que $\beta \in \{1, \dots, k\}$ não satisfaz a paridade dos expoente.

Assim, como o ciclo b_{l_0} não altera u , tem-se que, para quaisquer α e β como nos itens acima,

$$\left(b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_{l_0}^\alpha \circ \dots \circ b_q^{i_q} \right) \cdot u = \left(b_1^{i_1} \circ \dots \circ b_{l_0}^\beta \circ \dots \circ b_q^{i_q} \right) \cdot u .$$

Portanto, a probabilidade dos elementos de $G \setminus H$ cancela com a dos elementos de H em (3.4) que possuem a mesma ação sobre u , ou seja, a probabilidade de que u vá para qualquer outro elemento de M^k não depende de ε .

De forma análoga ao Exemplo 3.1, conclui-se que existe uma bifurcação estocástica de n pontos para algum $n > k$. □

Além de garantir uma bifurcação estocástica para algum $n > k$, a Proposição 3.2 garante que as probabilidades de transição são invariantes para ordens menores ou iguais a k .

Uma extensão da construção dada neste capítulo para processo a tempo contínuo no espaço euclidiano é feita em [11, seção 3.3] e [7, seção 3.4].

Capítulo 4

Detecção do nível de uma bifurcação estocástica de n pontos

Seja $M = \{1, \dots, m\}$, $m \geq 2$, e considere duas medidas invariantes do movimento de m pontos cujas projeções coincidem exceto em alguns níveis k , com $1 \leq k \leq m$. O nível da bifurcação estocástica é dado pelo menor valor $n \in \{1, \dots, m\}$ para o qual essas medidas diferem.

Obter esse nível utilizando sequências de projeções pode ser trabalhoso e, por isso, será apresentado a seguir um algoritmo, desenvolvido em [11] e [7], que fornece o resultado desejado.

Para cada $1 \leq n \leq m$, seja P^n a matriz estocástica $m^n \times m^n$ cujas entradas são as probabilidades de transição do processo em M^n em ordem lexicográfica. Pela Definição 2.1, um sistema homogêneo de Markov de n pontos possui probabilidades de transição compatíveis, P^{n-1} pode ser obtido utilizando as projeções π_r^n , para qualquer $r \in \{1, \dots, n\}$. Dessa forma, para todo $r \in \{1, \dots, n\}$ e $(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n) \in M^n$ tem-se que

$$P_{\pi_r^n(i_1, \dots, i_n), \pi_r^n(j_1, \dots, j_n)}^{n-1} = \sum_{l \in M} P_{(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_{r-1}, l, j_{r+1}, \dots, j_n)}^n. \quad (4.1)$$

A equação acima define P^{n-1} em termos de P^n de forma que, como ilustrará o exemplo a seguir, para cada $i_r \in M$ existe um par (R_{n-1}, Q_{n-1}) , onde R_{n-1} é uma matriz $m^{n-1} \times m^n$ e Q_{n-1} é uma matriz $m^n \times m^{n-1}$ ambas com entradas todas nulas exceto por uma única entrada igual a 1 em cada linha, satisfazendo

$$P^{n-1} = R_{n-1} P^n Q_{n-1}. \quad (4.2)$$

O exemplo abaixo ilustra uma maneira de se determinar R_{n-1} e Q_{n-1} que, como descrito anteriormente, não são necessariamente únicas.

Exemplo 4.1. Para $m = n = 2$, os itens a seguir mostram que, seguindo a equação (4.1), diferentes escolhas do par (r, i_r) levam a diferentes matrizes $R_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ e $Q_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$.

- Para $r = 1$ e $i_r = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix},$$

- para $r = 1$ e $i_r = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix},$$

- para $r = 2$ e $i_r = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix},$$

- para $r = 2$ e $i_r = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix}.$$

Para $m \geq 2$, fixando $r = i_r = 1$, como as matrizes das probabilidades de transição foram definidas utilizando a ordem lexicográfica, tem-se que

$$R_{n-1} = \left(Id_{m^{n-1}} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right)_{m^{n-1} \times m^n} \quad (4.3)$$

onde 0 representa uma matriz nula quadrada de dimensão m^{n-1} , e

$$Q_{n-1} = \begin{pmatrix} Id_{m^{n-1}} \\ \vdots \\ Id_{m^{n-1}} \end{pmatrix}_{m^n \times m^{n-1}}. \quad (4.4)$$

Proposição 4.1. *Dada uma cadeia de Markov em M^n compatível e v_n uma medida invariante para o processo, representada como um vetor linha em \mathbb{R}^{m^n} , então*

$$v_{n-1} = v_n Q_{n-1} \quad (4.5)$$

é uma medida invariante em M^{n-1} , representada como um vetor em $\mathbb{R}^{m^{n-1}}$.

Demonstração. A equação (4.5) representa a projeção $(\pi_1^n)_*$ da medida v_n , logo o resultado segue utilizando o Lema 2.1. □

O resultado apresentado na proposição anterior pode ser observado de forma simples no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. Considere um processo de Markov com espaço de estados $M = \{1, 2\}$ e matriz das probabilidades de transição

$$P^1 = \begin{pmatrix} P_{1,1}^1 & P_{1,2}^1 \\ P_{2,1}^1 & P_{2,2}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e, para o sistema de 2 pontos (processo em $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$)

$$P^2 = \begin{pmatrix} P_{(1,1),(1,1)}^2 & P_{(1,1),(1,2)}^2 & P_{(1,1),(2,1)}^2 & P_{(1,1),(2,2)}^2 \\ P_{(1,2),(1,1)}^2 & P_{(1,2),(1,2)}^2 & P_{(1,2),(2,1)}^2 & P_{(1,2),(2,2)}^2 \\ P_{(2,1),(1,1)}^2 & P_{(2,1),(1,2)}^2 & P_{(2,1),(2,1)}^2 & P_{(2,1),(2,2)}^2 \\ P_{(2,2),(1,1)}^2 & P_{(2,2),(1,2)}^2 & P_{(2,2),(2,1)}^2 & P_{(2,2),(2,2)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como visto no Exemplo 2.3, $\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\mu^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ e, é fácil notar que, como na equação (4.5), $\mu^1 = \mu^2 Q_1$.

Vale ressaltar que, como visto no Exemplo 4.1, a matriz Q_{n-1} dada em (4.4) não é única e, portanto, outra escolha de (r, i_r) e, conseqüentemente, de Q_{n-1} , pode resultar em uma medida v_{n-1} diferente.

O exemplo a seguir apresenta um algoritmo para detecção de uma bifurcação estocástica de 3 pontos.

Exemplo 4.3. No Exemplo 3.3 concluiu-se que, para $M = \{1, \dots, 6\}$, o fluxo φ_ε (fluxo gerado pela perturbação $\varepsilon > 0$ na distribuição $\Delta_\varepsilon = \varepsilon \Delta_{G \setminus H} + (1 - \varepsilon) \Delta_H$) possui uma bifurcação estocástica de n pontos para algum $3 \leq n \leq 6$. Utilizando a Proposição 4.1 é possível obter para qual nível a bifurcação ocorre dada uma medida invariante para o movimento de 6 pontos.

Sejam v_l^0 e v_l^ε as medidas invariantes do sistema de l pontos sem perturbação (fluxo φ_0 , $\varepsilon = 0$) e com perturbação $\varepsilon > 0$ (fluxo φ_ε), respectivamente.

Para ambos os sistemas, considerando as medidas que contêm o ponto $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, a representação em coluna das respectivas medidas é

$$v_6^0 = \begin{pmatrix} 1_{123456} \\ 1_{124365} \\ 1_{213465} \\ 1_{214356} \end{pmatrix}_{6^6 \times 1} \quad \text{e} \quad v_6^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1_{123456} \\ 1_{123465} \\ 1_{124356} \\ 1_{124365} \\ 1_{213456} \\ 1_{213465} \\ 1_{214356} \\ 1_{214365} \end{pmatrix}_{6^6 \times 1}$$

onde $1_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}$ significa que $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ é estritamente positiva, enquanto todas as demais são zero. Vale ressaltar que, como no Exemplo 3.3, as distribuições v_6^0 e v_6^ε são uniformes em seus respectivos suportes.

Utilizando a Proposição 4.1, com as devidas alterações uma vez que os vetores v_6^0 e v_6^ε foram apresentados nesse exemplo em forma de colunas, tem-se que a distribuição para o movimento de 5 pontos do sistema sem perturbação é dada por

$$v_5^0 = Q_5^T v_6^0 = \begin{pmatrix} Id_{6^5} & \cdots & Id_{6^5} \end{pmatrix}_{6^5 \times 6^6} \begin{pmatrix} 1_{123456} \\ 1_{124365} \\ 1_{213465} \\ 1_{214356} \end{pmatrix}_{6^6 \times 1} = \begin{pmatrix} 1_{13465} \\ 1_{14356} \\ 1_{23456} \\ 1_{24365} \end{pmatrix}_{6^5 \times 1}.$$

Analogamente, é possível obter as demais projeções, apresentadas a seguir.

Tabela 4.1 – Sistema sem perturbação com valor inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

| | v_6^0 | v_5^0 | v_4^0 | v_3^0 | v_2^0 | v_1^0 |
|----------|--|--|--|--|--|--|
| Projeção | $\begin{pmatrix} 1_{123456} \\ 1_{124365} \\ 1_{213465} \\ 1_{214356} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{13465} \\ 1_{14356} \\ 1_{23456} \\ 1_{24365} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{3456} \\ 1_{3465} \\ 1_{4356} \\ 1_{4365} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{356} \\ 1_{365} \\ 1_{456} \\ 1_{465} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{56} \\ 1_{65} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_5 \\ 1_6 \end{pmatrix}$ |
| Dimensão | $6^6 \times 1$ | $6^5 \times 1$ | $6^4 \times 1$ | $6^3 \times 1$ | $6^2 \times 1$ | $6^1 \times 1$ |

Para o sistema com a perturbação ε , utilizando novamente a equação (4.5), tem-se que

$$v_5^\varepsilon = Q_5^T v_6^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1_{13456} \\ 1_{13465} \\ 1_{14356} \\ 1_{14365} \\ 1_{23456} \\ 1_{23465} \\ 1_{24356} \\ 1_{24365} \end{pmatrix}_{6^5 \times 1} \neq \begin{pmatrix} 1_{123456} \\ 1_{124365} \\ 1_{213465} \\ 1_{214356} \end{pmatrix}_{6^6 \times 1} = v_5^0$$

mas $v_j^\varepsilon = v_j^0$, para todo $1 \leq j \leq 4$. Os cálculos necessários para a obtenção dessas matrizes foram feitos no software R [19] e encontram-se no Anexo Código.

Assim, conclui-se que o fluxo apresenta uma bifurcação estocástica de 5 pontos para a medida invariante que contém o valor inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (vide representação do fluxo na Figura A.1).

Tomando agora a medida invariante cujo suporte contém o ponto $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$, de forma análoga ao procedimento anterior, obtêm-se

Tabela 4.2 – Sistema sem perturbação com valor inicial $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$

| | v_6^0 | v_5^0 | v_4^0 | v_3^0 | v_2^0 | v_1^0 |
|----------|--|--|--|--|--|--|
| Projeção | $\begin{pmatrix} 1_{121315} \\ 1_{121416} \\ 1_{212326} \\ 1_{212425} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{12326} \\ 1_{12425} \\ 1_{21315} \\ 1_{21416} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{1315} \\ 1_{1416} \\ 1_{2326} \\ 1_{2425} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{315} \\ 1_{326} \\ 1_{416} \\ 1_{425} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{15} \\ 1_{16} \\ 1_{25} \\ 1_{26} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_5 \\ 1_6 \end{pmatrix}$ |
| Dimensão | $6^6 \times 1$ | $6^5 \times 1$ | $6^4 \times 1$ | $6^3 \times 1$ | $6^2 \times 1$ | $6^1 \times 1$ |

Tabela 4.3 – Sistema com perturbação com valor inicial $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$

| | v_6^ε | v_5^ε | v_4^ε | v_3^ε | v_2^ε | v_1^ε |
|----------|--|--|--|--|--|--|
| Projeção | $\begin{pmatrix} 1_{121315} \\ 1_{121316} \\ 1_{121415} \\ 1_{121416} \\ 1_{212325} \\ 1_{212326} \\ 1_{212425} \\ 1_{212426} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{12325} \\ 1_{12326} \\ 1_{12425} \\ 1_{12426} \\ 1_{21315} \\ 1_{21316} \\ 1_{21415} \\ 1_{21416} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{1315} \\ 1_{1316} \\ 1_{1415} \\ 1_{1416} \\ 1_{2325} \\ 1_{2326} \\ 1_{2425} \\ 1_{2426} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{315} \\ 1_{316} \\ 1_{325} \\ 1_{326} \\ 1_{415} \\ 1_{416} \\ 1_{425} \\ 1_{426} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_{15} \\ 1_{16} \\ 1_{25} \\ 1_{26} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1_5 \\ 1_6 \end{pmatrix}$ |
| Dimensão | $6^6 \times 1$ | $6^5 \times 1$ | $6^4 \times 1$ | $6^3 \times 1$ | $6^2 \times 1$ | $6^1 \times 1$ |

Assim, como $v_2^\varepsilon = v_2^0$ e $v_1^\varepsilon = v_1^0$, tem-se que o fluxo apresenta uma bifurcação estocástica de 3 pontos (vide representação do fluxo na Figura A.2).

Referências

- [1] APPLEBAUM, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).
- [2] APPLEBAUM, D.; KUNITA, H. Invariant measures for Lévy flows of diffeomorphisms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 130, n. 5, p. 925–946, 2000.
- [3] ARNOLD, L. *Random dynamical systems*. Berlim: Springer-Verlag, 1998.
- [4] ASH, R. B. *Basic probability theory*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2008.
- [5] ASH, R. B.; DÓLEANS-DADE, C. A. *Probability and measure theory*. [S.l.]: Academic Press, 2000.
- [6] BAXENDALE, P. Brownian motions in the diffeomorphism group I. *Compositio Mathematica*, v. 53, n. 1, p. 19–50, 1984.
- [7] DA COSTA, P. H.; HÖGELE, M. A.; RUFFINO, P. R. *Stochastic n-point D-bifurcations of stochastic Lévy flows and their complexity on finite spaces*. 2021.
- [8] FUJIWARA, T. Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Duke University Press, v. 31, n. 1, p. 99–119, 1991.
- [9] FUJIWARA, T.; KUNITA, H. Stochastic differential equations of jump type and Lévy processes in diffeomorphisms group. *Journal of mathematics of Kyoto University*, Kyoto University, v. 25, n. 1, p. 71–106, 1985.
- [10] HAIRER, M. Convergence of markov processes. *Lecture notes*, 2010.
- [11] HÖGELE, M. A.; RUFFINO, P. R. Stochastic n-point bifurcations for markovian dynamics. 2015.
- [12] JACOBSON, N. *Basic algebra I*. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1985.
- [13] JAN, Y. L.; RAIMOND, O. Flows, coalescence and noise. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 32, n. 2, p. 1247 – 1315, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/009117904000000207>>.
- [14] JAN, Y. L.; RAIMOND, O. Flows, coalescence and noise. A correction. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 48, n. 3, p. 1592 – 1595, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/19-AOP1394>>.

- [15] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- [16] KUNITA, H. *Stochastic flows and stochastic differential equations*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. v. 24.
- [17] KUNITA, H. Stochastic differential equations based on Lévy processes and stochastic flows of diffeomorphisms. In: *Real and stochastic analysis*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 305–373.
- [18] MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.
- [19] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- [20] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous martingales and Brownian motion*. 3. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.
- [21] ROSS, S. M. *Introduction to probability models*. 9. ed. [S.l.]: Academic press, 2007.
- [22] RUDIN, W. *Functional analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 1991.
- [23] RUDNICKI, R.; PICHÓR, K.; TYRAN-KAMIŃSKA, M. Markov semigroups and their applications. In: *Dynamics of Dissipation*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. p. 215–238.
- [24] RUFFINO, P. R. C. Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos. Campinas, 2009. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~ruffino/textos/Versao%20impressa-%20SD%20Estocastico-Publicacoes-Matematicas-IMPA.pdf>>.
- [25] WARNES, G. R.; BOLKER, B.; LUMLEY, T. *gtools: Various R Programming Tools*. [S.l.], 2015. R package version 3.5.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=gtools>>.

Apêndice A

Fluxos

A seguir serão apresentados os fluxos presentes no Exemplo 4.3. Esse exemplo é uma continuação do Exemplo 3.3 onde foram considerados o conjunto $M = \{1, \dots, 6\}$, o grupo

$$G = \{id, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56), (12)(34)(56)\}$$

e o seu subgrupo

$$H = \{id, (12)(34), (12)(56), (34)(56)\}.$$

Tomando a distribuição uniforme sobre H e $G \setminus H$, denotadas por Δ_H e $\Delta_{G \setminus H}$, respectivamente, o objetivo desses exemplos era estudar o fluxo φ_ε , que possui distribuição dada pela mistura dessas uniformes

$$\Delta_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\Delta_H + \varepsilon\Delta_{G \setminus H}.$$

No Exemplo 3.3, concluiu-se que o fluxo φ_ε possuía uma bifurcação estocástica de n pontos para algum $3 \leq n \leq 6$. Posteriormente, no Exemplo 4.3, utilizando o resultado apresentado na Proposição 4.1, concluiu-se que, para a medida invariante cujo suporte possui o ponto $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ a bifurcação ocorre em 5 pontos mas, quando observado a medida com $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$ no suporte, tem-se uma bifurcação de 3 pontos.

As figuras a seguir, onde as funções azuis são elementos de H enquanto as rosas pertencem a $G \setminus H$, buscam facilitar a visualização desse resultado.

Na Figura A.1 é possível perceber que nos movimentos de 1, 2, 3 e 4 pontos, todas as trajetórias possuem tanto elementos de H quanto do seu complementar mas isso não ocorre nos movimentos de 5 e 6 pontos onde, quando considerado todos os elementos grupo G , tem-se um maior número de trajetórias possíveis do que apenas com os de H .

Já na Figura A.2, que apresenta as trajetórias possíveis para o valor inicial $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$ e suas respectivas projeções, é possível notar que essa distinção entre considerar todo o grupo G e os elementos de H aparece já no movimento de 3 pontos, onde ocorre a bifurcação estocástica do fluxo.

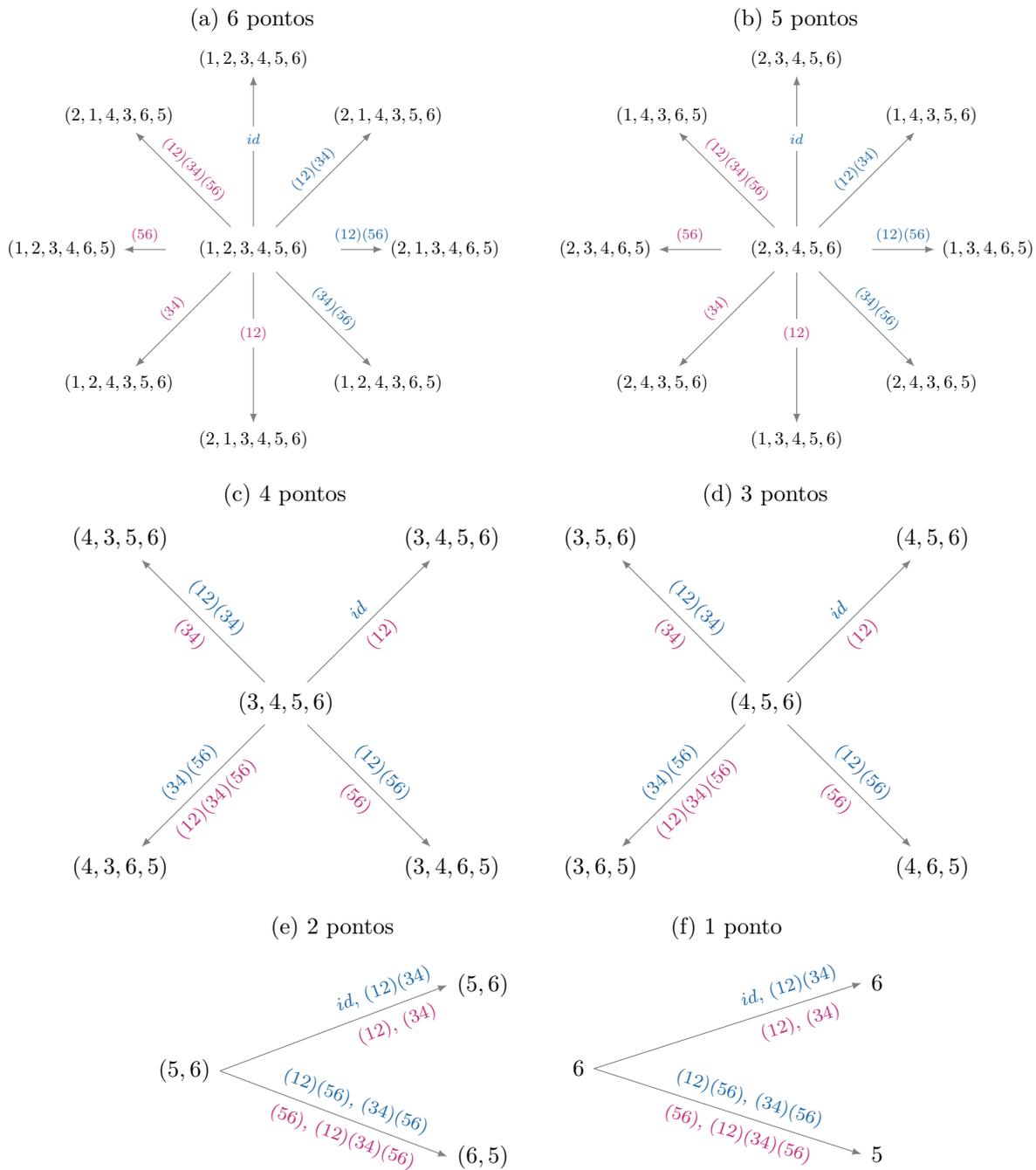
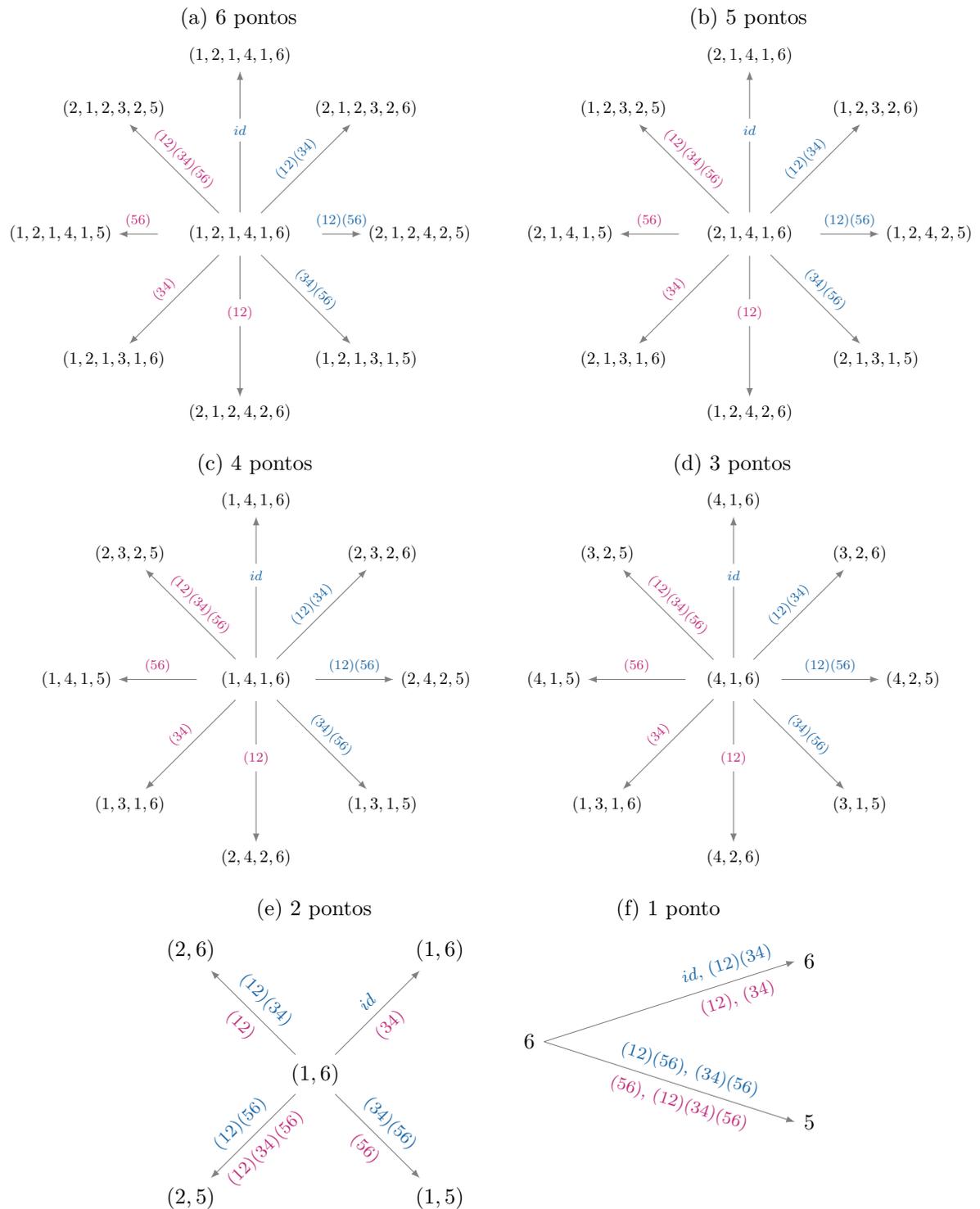
Figura A.1 – Fluxos para o valor inicial $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e suas respectivas projeções

Figura A.2 – Fluxos para o valor inicial $(1, 2, 1, 4, 1, 6)$ e suas respectivas projeções



Apêndice B

Código

A seguir serão apresentadas as linhas de comando utilizadas no software R [19] para a obtenção dos resultados apresentados no Exemplo 4.3.

```
# Biblioteca da funcao permutations
library(gtools)

# matriz que ira indicar qual linha e correspondente a cada entrada
todos6 <- permutations(6, 6, v = 1:6, repeats.allowed = T)
todos5 <- permutations(6, 5, v = 1:6, repeats.allowed = T)
todos4 <- permutations(6, 4, v = 1:6, repeats.allowed = T)
todos3 <- permutations(6, 3, v = 1:6, repeats.allowed = T)
todos2 <- permutations(6, 2, v = 1:6, repeats.allowed = T)
todos1 <- permutations(6, 1, v = 1:6, repeats.allowed = T)

#####
# valor inicial (1,2,3,4,5,6) #
#####

# medidas v06 e ve6
v06.valores <- matrix(c(c(1,2,3,4,5,6),
c(1,2,4,3,6,5), c(2,1,3,4,6,5), c(2,1,4,3,5,6)),
ncol = 6, byrow = T)

v06 <- matrix(rep(0, nrow(todos6)))
i=1
while(i<nrow(v06.valores)+1){
v06[which(apply(todos6, 1,
function(x) all(x==v06.valores[i,]))),1]=1/4;
i=i+1;
```

```

}

ve6.valores <- matrix(c(c(1,2,3,4,5,6),
c(2,1,3,4,5,6), c(1,2,4,3,5,6), c(1,2,3,4,6,5),
c(1,2,4,3,6,5), c(2,1,3,4,6,5), c(2,1,4,3,5,6),
c(2,1,4,3,6,5)),
ncol = 6, byrow = T)

ve6 <- matrix(rep(0, nrow(todos6)))
i=1
while(i<nrow(ve6.valores)+1){
ve6[which(apply(todos6, 1,
function(x) all(x==ve6.valores[i,]))),1]=1/8;
i=i+1;
}

# matrizes Q e projecoes
Q5T <- matrix(rep(diag(6^5),6), nrow = 6^5)

v05 <- Q5T %*% v06
ve5 <- Q5T %*% ve6

v05.valores <- todos5[which(v05!=0),]
ve5.valores <- todos5[which(ve5!=0),]

Q4T <- matrix(rep(diag(6^4),6), nrow = 6^4)

v04 <- Q4T %*% v05
ve4 <- Q4T %*% ve5

v04.valores <- todos4[which(v04!=0),]
ve4.valores <- todos4[which(ve4!=0),]

Q3T <- matrix(rep(diag(6^3),6), nrow = 6^3)

v03 <- Q3T %*% v04
ve3 <- Q3T %*% ve4

v03.valores <- todos3[which(v03!=0),]
ve3.valores <- todos3[which(ve3!=0),]

```

```

Q2T <- matrix(rep(diag(6^2),6), nrow = 6^2)

v02 <- Q2T %*% v03
ve2 <- Q2T %*% ve3

v02.valores <- todos2[which(v02!=0),]
ve2.valores <- todos2[which(ve2!=0),]

Q1T <- matrix(rep(diag(6^1),6), nrow = 6^1)

v01 <- Q1T %*% v02
ve1 <- Q1T %*% ve2

v01.valores <- todos1[which(v01!=0),]
ve1.valores <- todos1[which(ve1!=0),]

#####
# valor inicial (1,2,1,4,1,6) #
#####

# medidas v06 e ve6
v06.valores <- matrix(c(c(1,2,1,3,1,5), c(1,2,1,4,1,6),
c(2,1,2,3,2,6), c(2,1,2,4,2,5)),
ncol = 6, byrow = T)

v06 <- matrix(rep(0, nrow(todos6)))
i=1
while(i<nrow(v06.valores)+1){
v06[which(apply(todos6, 1,
function(x) all(x==v06.valores[i,]))),1]=1/4;
i=i+1;
}

ve6.valores <- matrix(c(c(1,2,1,3,1,5), c(1,2,1,3,1,6),
c(1,2,1,4,1,5), c(1,2,1,4,1,6),
c(2,1,2,3,2,5), c(2,1,2,3,2,6),
c(2,1,2,4,2,5), c(2,1,2,4,2,6)),
ncol = 6, byrow = T)

```

```
ve6 <- matrix(rep(0, nrow(todos6)))
i=1
while(i<nrow(ve6.valores)+1){
ve6[which(apply(todos6, 1,
function(x) all(x==ve6.valores[i,])),1)=1/8;
i=i+1;
}

# matrizes Q e projecoes
Q5T <- matrix(rep(diag(6^5),6), nrow = 6^5)

v05 <- Q5T %*% v06
ve5 <- Q5T %*% ve6

v05.valores <- todos5[which(v05!=0),]
ve5.valores <- todos5[which(ve5!=0),]

Q4T <- matrix(rep(diag(6^4),6), nrow = 6^4)

v04 <- Q4T %*% v05
ve4 <- Q4T %*% ve5

v04.valores <- todos4[which(v04!=0),]
ve4.valores <- todos4[which(ve4!=0),]

Q3T <- matrix(rep(diag(6^3),6), nrow = 6^3)

v03 <- Q3T %*% v04
ve3 <- Q3T %*% ve4

v03.valores <- todos3[which(v03!=0),]
ve3.valores <- todos3[which(ve3!=0),]

Q2T <- matrix(rep(diag(6^2),6), nrow = 6^2)

v02 <- Q2T %*% v03
ve2 <- Q2T %*% ve3

v02.valores <- todos2[which(v02!=0),]
ve2.valores <- todos2[which(ve2!=0),]
```

```
Q1T <- matrix(rep(diag(6^1),6), nrow = 6^1)
```

```
v01 <- Q1T %*% v02
```

```
ve1 <- Q1T %*% ve2
```

```
v01.valores <- todos1[which(v01!=0),]
```

```
ve1.valores <- todos1[which(ve1!=0),]
```