

**UNIFICAÇÃO DE DIFERENTES FORMULAÇÕES  
CORROTACIONAIS APLICADAS NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE  
VIGAS, PÓRTICOS E ARCOS**

**ÉDER LEONARDO DO REGO NASCIMENTO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UNIFICAÇÃO DE DIFERENTES FORMULAÇÕES**  
**CORROTACIONAIS APLICADAS NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE**  
**VIGAS, PÓRTICOS E ARCOS**

**ÉDER LEONARDO DO REGO NASCIMENTO**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO**  
**CIVIL**

**BRASÍLIA/DF, AGOSTO DE 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UNIFICAÇÃO DE DIFERENTES FORMULAÇÕES  
CORROTACIONAIS APLICADAS NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE  
VIGAS, PÓRTICOS E ARCOS**

**ÉDER LEONARDO DO REGO NASCIMENTO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD. (UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Sebastião Simão da Silva, DSc. (IFPB)**  
**(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, AGOSTO DE 2021.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

NASCIMENTO, ÉDER LEONARDO DO REGO

Unificação de diferentes formulações corrotacionais aplicada na análise não linear de vigas, pórticos e arcos [Distrito Federal] 2021.

xvi, 58p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2021).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| 1. Formulação corrotacional    | 2. Elemento de viga Euler-Bernoulli            |
| 3. Elemento de viga Timoshenko | 4. Elemento de viga Euler-Bernoulli não linear |
| I. ENC/FT/UNB                  | II. Título (Mestre)                            |

## REFERÊNCIAS

NASCIMENTO, E. L. R. Unificação de diferentes formulações corrotacionais aplicadas na análise não linear de vigas, pórticos e arcos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação 08A/21, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 58p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Éder Leonardo do Rego Nascimento

Título: Unificação de diferentes formulações corrotacionais aplicadas na análise não linear de vigas, pórticos e arcos.

GRAU: Mestre

ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Éder Leonardo do Rego Nascimento

Rua Clarisse Siebra Saraiva, 94, Campo Alegre

63.049-182 Juazeiro do Norte/CE – Brasil.

ederlrn@gmail.com

## **DEDICATÓRIA**

À memória de Bruna Queiroz de Carvalho, que muito contribuiu e tanto sonhou com esta conquista.

## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, IFCE – Campus Juazeiro do Norte, pela concessão do afastamento para realização desta pesquisa.

Ao professor William Taylor Matias Silva, orientador, pela compreensão e suporte durante a tarefa de redigir este trabalho.

Aos professores Sebastião Simão da Silva e Luciano Mendes Bezerra, pelas valorosas contribuições dadas.

Ao corpo docente do PECC/UnB pelos conhecimentos transmitidos.

Ao corpo docente do Departamento de Engenharia Civil da UFRN, instituição na qual concluí meu curso de bacharelado.

A Александра Асановна Элбакян (Alexandra Asanovna Elbakyan), idealizadora do sci-hub, pela contribuição imensurável à universalização do conhecimento científico.

À companheira Bruna Vieira, pelo suporte durante a elaboração deste trabalho.

Aos familiares que torceram e contribuíram de alguma forma.

Aos amigos do PECC, em especial aqueles que fiz antes de ingressar no programa.

A todos os felinos que tive oportunidade de conhecer e conviver, por todo o companheirismo e por me fazerem sentir necessidade de estar vivo. Tirolez, Jujuba, Jorel, Rodolfín, Linguinha, Catrina, Jubileu, Mamadeira, Mamona, Cajuína, Neguin, Nutela, Luna, Velã, Bento, Lila, Pérola, Félix, Nicolau, Fifito, Magaiver, Olívia, Bodó, Paola, Paloma, Neném, Canelita, Ilha, Maria, China, Xilito, Pulga, Pitanga, Corina, Raimunda, Tina, Maruja, Corino, Chococat, Boneca, e aos que ainda não cheguei a conhecer.

*“Cara, não saber alguma coisa  
é meio que o primeiro passo  
em ser bom em alguma coisa.”*

Jake, o Cachorro.

**RESUMO****UNIFICAÇÃO DE DIFERENTES FORMULAÇÕES CORROTACIONAIS APLICADAS NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE VIGAS, PÓRTICOS E ARCOS**

Autor: Éder Leonardo do Rego Nascimento

Orientador: William Taylor Matias Silva

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC/UnB

Brasília/DF, agosto de 2021

O presente trabalho descreve a obtenção de elementos finitos consistentes a partir de formulações corrotacionais baseadas em diferentes teorias, apontando as semelhanças que justificam sua unificação. A cinemática corrotacional tem como base a decomposição dos deslocamentos de um sólido em uma parcela deformacional e outra devida ao movimento de corpo rígido. Enquanto os deslocamentos de corpo rígido, no plano, são dados por duas translações e uma rotação do sistema de referência local, a parcela de deformação é também representada por três graus de liberdade, sendo uma translação devida ao esforço axial e duas rotações relativas aos esforços de flexão simétrica (flexão pura) e antissimétrica (flexão com cortante). Os esforços internos são obtidos a partir do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) em relação ao sistema local, uma vez definidas as funções de interpolação que descrevem o estado de deformação para cada teoria de viga utilizada, sendo elas as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e Euler-Bernoulli não linear, este último considerando o acoplamento entre esforços de flexão e axiais. É descrita a obtenção da matriz de rigidez tangente em diferentes parcelas, sendo uma delas, denominada matriz de rigidez elástica, distinta para cada uma das 3 teorias de viga. Através de alguns exemplos numéricos, se demonstra a habilidade da formulação unificada para obter respostas de comportamento severamente não linear para vigas, pórticos e arcos, que são comparadas com soluções analíticas e com exemplos numéricos extraídos da literatura.

**Palavras-chave:** Formulação corrotacional; Elemento de viga Euler-Bernoulli; Elemento de viga Timoshenko; Elemento de viga Euler-Bernoulli não linear.



**ABSTRACT****UNIFICATION OF DIFFERENT CO-ROTATIONAL FORMULATIONS APPLIED TO NON-LINEAR ANALYSIS OF BEAMS, FRAMES, AND ARCHES**

Author: Éder Leonardo do Rego Nascimento

Advisor: William Taylor Matias Silva

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction – PECC/UnB

Brasília/DF, August, 2021

The present work describes the obtaining of consistent finite elements from co-rotational approach based on different theories, pointing out the similarities that justify their unification. Co-rotational kinematics is based on the decomposition of the displacements of a solid in a deformational portion and another part due to rigid body motion. The rigid body displacements in the plane are given by two translations and one rotation of the local reference system. The deformation portion is also represented by three degrees of freedom, with one translation due to axial force and two rotations related to symmetrical bending (pure bending) and anti-symmetrical bending (bending associated to shear force). The internal forces are obtained in relation to the local system, using the principle of virtual works. Different interpolation functions that describe the deformation state for each beam theory used are defined, namely the theories of Euler-Bernoulli, Timoshenko, and shallow arch Euler-Bernoulli considering the coupling of flexural and axial forces. The obtainment of the tangent stiffness matrix in different portions is described, one of them being the said elastic stiffness matrix, which is different for each of the 3 beams theories presented. Through some numerical examples, the ability of the unified element to obtain responses with rough non-linear behavior for beams, frames and arches is demonstrated, which are compared to analytical solutions and to numerical examples taken from the literature.

**Keywords:** Co-rotational kinematic; Euler-Bernoulli beam element; Timoshenko beam element; shallow arch Euler-Bernoulli beam element.

## SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>VII</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES.....</b>	<b>XIV</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO .....	1
1.2 OBJETIVOS .....	2
1.3 METODOLOGIA .....	3
1.4 CONTRIBUIÇÕES.....	4
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	4
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>6</b>
2.1 HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL .....	8
2.2 ESTADO DA ARTE.....	10
2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS NO PECC/UNB.....	13
<b>3. FORMULAÇÃO CORROTACIONAL UNIFICADA PARA ELEMENTO DE VIGA 2D.....</b>	<b>14</b>
3.1 DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS CINEMÁTICAS .....	14
3.2 RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS LOCAIS E GLOBAIS .....	20
3.3 ESFORÇOS NODAIS EM COORDENADAS LOCAIS E GLOBAIS.....	21
3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ EM COORDENADAS GLOBAIS .....	23
3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EM COORDENADAS LOCAIS .....	25
<b>4. MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA PARA DIFERENTES TEORIAS DE VIGA</b>	<b>30</b>
4.1 ELEMENTO DE VIGA EULER-BERNOULLI.....	30
4.2 ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO .....	31
4.3 ELEMENTO DE VIGA EULER-BERNOULLI NÃO LINEAR .....	33

<b>5. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>36</b>
5.1 VIGA ENGASTADA SOB FLEXÃO PURA.....	36
5.2 COLUNA DE EULER.....	38
5.3 PÓRTICO DE LEE.....	40
5.4 ARCO CIRCULAR BIARTICULADO REBAIXADO.....	43
5.5 ARCO SEMICIRCULAR BIARTICULADO.....	46
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>52</b>
6.1 CONCLUSÕES .....	52
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	52
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>54</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Contribuição de U, V e Q na deformação e rotação de um cubo de volume unitário (adaptado de Reddy, 2013).....	6
Figura 2-2: Número de trabalhos com o tema “análise não-linear via MEF corrotacional” nos últimos anos.....	11
Figura 3-1: Variáveis cinemáticas do elemento de viga 2D.....	15
Figura 3-2: Deslocamentos do sistema local de referência .....	16
Figura 3-3: Função módulo para ângulos arbitrários.....	19
Figura 3-4: Vetor de esforços nodais. a) Em coordenadas globais. b) Em coordenadas locais. c) Autoequilibrados .....	22
Figura 3-5: Movimento incremental do elemento de viga 2D.....	26
Figura 5-1: Propriedades geométricas e mecânicas da viga engastada. ....	37
Figura 5-2: Deformada da estrutura discretizada com 40 elementos para 50 passos de carga. ....	37
Figura 5-3: Trajetórias de equilíbrio para diferentes níveis de discretização.....	38
Figura 5-4: Propriedades geométricas e mecânicas da coluna de Euler.....	38
Figura 5-5: Trajetória secundária de equilíbrio da coluna de Euler. ....	39
Figura 5-6: Deformada .....	39
Figura 5-7: Pórtico de Lee. Propriedades geométricas e mecânicas. ....	40
Figura 5-8: Trajetórias de equilíbrio dos deslocamentos $v_1$ e $v_2$ .....	41
Figura 5-9: Deformada para o elemento EBNL - Passos 20 a 100.....	42
Figura 5-10: Deformada para o elemento EBNL - Passos 120 a 220.....	42
Figura 5-11: Deformada para o elemento EBNL - Passos 240 a 328.....	43
Figura 5-12: Propriedades geométricas e mecânicas do arco circular biarticulado rebaixado. ....	44
Figura 5-13: Trajetória de equilíbrio para os elementos TI, EB e EBNL. ....	44
Figura 5-14: Deformada para elemento EBNL. Passos de carga 15, 30 e 45. ....	45
Figura 5-15: Deformada para o elemento EBNL. Passos de carga 75, 90 e 120. ....	45
Figura 5-16: Deformada para o elemento EBNL. Passos de carga 135, 150 e 165. ....	46
Figura 5-17: Propriedades geométricas e mecânicas do arco semicircular biarticulado. ....	46
Figura 5-18: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical no vértice do arco x fator de carga para os elementos TI, EBNL e EB.....	47
Figura 5-19: Deformada para elemento EBNL até o 100° passo de carga. ....	48
Figura 5-20: Deformada para elemento EBNL do 120° ao 220° passo de carga.....	49
Figura 5-21: Deformada para elemento EBNL do 240° ao 360° passo de carga.....	49

Figura 5-22: Deformada para elemento EBNL do 380° ao 500° passo de carga.....50  
Figura 5-23: Deformada para elemento EBNL do 520° ao 640° passo de carga..... 50  
Figura 5-24: Deformada para elemento EBNL do 660° ao 740° passo de carga.....51  
Figura 5-25: Deformada para elemento EBNL do 760° ao 840° passo de carga..... 51

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 5-1: Deformação máxima obtida para cada tipo de elemento e passo de carga correspondente.....	41
Tabela 5-2: Valores da carga $qr^3/EI$ nos pontos limites .....	45
Tabela 5-3: Valores de carga $P$ nos pontos limites .....	47

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

Neste trabalho, é convencionado que grandezas escalares são definidas por letras maiúsculas e minúsculas. Letras maiúsculas em negrito definem tensores e matrizes, enquanto letras minúsculas em negrito referem-se a vetores.

Operadores:

$\otimes$  – Produto aberto ou produto tensorial

$\square^T$  – Transposto de  $\square$

Letras gregas:

$\alpha$  – Rotação de corpo rígido do elemento

$\beta$  – Inclinação atual do elemento

$\beta_0$  – Inclinação inicial do elemento

$\gamma$  – Deformação transversal do elemento

$\delta\square$  – Variação virtual de  $\square$

$\varepsilon$  – Deformação longitudinal do elemento

$\varepsilon_f$  – Medida de distribuição média de deformação axial ao longo do elemento

$\theta_{\square}$  – Rotação do nó  $\square$  em relação ao sistema global

$\bar{\theta}_{\square}$  – Rotação do nó  $\square$  em relação ao sistema de coordenadas locais

$\kappa$  – Curvatura do elemento

$\sigma$  – Tensão normal

$\tau$  – Tensão de cisalhamento

Letras latinas:

$A$  – Área da seção transversal do elemento

$\mathbf{B}$  – Matriz de transformação

$\mathbf{b}_{\square}$  – Vetores auxiliares

$E$  – Módulo de elasticidade longitudinal

$\mathbf{e}_{\square}$  – Vetor unitário na direção  $\square$

$\mathbf{F}$  – Tensor gradiente de deformação

$f$  – Fator de cisalhamento da seção transversal

$\mathbf{f}_d$  – Vetor de esforços internos

- $\mathbf{f}_e$  – Vetor de forças nodais do elemento  
 $\mathbf{f}_g$  – Vetor de cargas globais  
 $G$  – Módulo de elasticidade transversal  
 $I$  – Momento de inércia da seção transversal do elemento  
 $\mathbf{K}$  – Matriz de rigidez tangente  
 $\mathbf{K}_d$  – Matriz de rigidez tangente elástica  
 $\mathbf{K}_e$  – Matriz de rigidez tangente em coordenadas locais  
 $\mathbf{K}_r$  – Matriz de rigidez tangente corrotacional  
 $l$  – Comprimento atual do elemento  
 $l_0$  – Comprimento inicial do elemento  
 $m_{\square}$  – Momento nodal do nó  $\square$  em relação ao sistema local  
 $N$  – Esforço normal em relação ao sistema global  
 $n$  – Esforço normal em relação ao sistema local  
 $P$  – Carga concentrada aplicada em um ponto  
 $\mathbf{Q}$  – Tensor de rotação  
 $Q$  – Esforço cortante em relação ao sistema global  
 $\mathbf{R}$  – Matriz de rotação  
 $\mathbf{r}$  – Vetor auxiliar  
 $\mathbf{S}$  – Matriz de transformação  
 $\mathbf{U}$  – Tensor de estiramento direito  
 $u_{\square}$  – Deslocamento horizontal do nó  $\square$  em relação ao sistema global  
 $\mathbf{u}_d$  – Vetor de deslocamentos deformacionais  
 $\mathbf{u}_e$  – Vetor de deslocamentos nodais do elemento  
 $\mathbf{u}_g$  – Vetor de deslocamentos globais  
 $\mathbf{u}_r$  – Vetor de deslocamentos de corpo rígido  
 $\bar{u}$  – Deslocamento axial relativo entre os nós do elemento  
 $\mathbf{V}$  – Tensor de estiramento esquerdo  
 $V$  – Trabalho virtual  
 $v_{\square}$  – Deslocamento vertical do nó  $\square$  em relação ao sistema global  
 $\mathbf{z}$  – Vetor auxiliar

Siglas:

CEN – Comitê Europeu de Normalização



EB – Euler-Bernoulli

EBNL – Euler-Bernoulli não linear

EICR – *Element Independent Co-rotational Formulation*

GFEM – *Generalized Finite Element Method*

MEF – Método dos Elementos Finitos

MBD – *Multibody Dynamics*

PECC – Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

PL – Ponto limite

PTV – Princípio dos Trabalhos Virtuais

TI – Timoshenko

XFEM – *Extended Finite Element Method*

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Até a primeira metade do século XX, as estruturas civis correntes eram compostas por elementos de geometria relativamente robusta, o que implicava em condições de utilização nas quais os materiais costumavam trabalhar com esforços e deslocamentos em uma margem consideravelmente distante da falha. Desse modo, admitir que os deslocamentos fossem infinitesimais e que o material permanece em regime linear elástico eram hipóteses bastante representativas da realidade. Em paralelo, o avanço das indústrias automobilística, naval, aeronáutica e aeroespacial implicava em estruturas submetidas a condições críticas, e a necessidade de componentes mais leves obrigava tanto o emprego de materiais de menor peso específico como de elementos estruturais de elevada esbeltez. Posteriormente, tal avanço passa a ser incorporado também pela indústria da construção civil, que tem como consequência o emprego de novos materiais, que por sua vez implicam em elementos estruturais de dimensões consideravelmente reduzidas. Tais condições de geometria podem fazer com que os elementos estruturais estejam submetidos a estados de tensão e deformação de magnitude superior àquelas correspondentes aos limites que definem a fase elástica linear, de modo que se faz necessária a utilização de modelos não lineares para que se obtenha uma resposta satisfatória ao analisar essas estruturas.

Nos projetos que envolvem estruturas compostas por elementos esbeltos, os efeitos de não-linearidade geométrica passaram a ser relevantes e, portanto, sua consideração se torna essencial para que seja possível garantir a estabilidade do sistema estrutural. Embora muitas vezes a resposta pré-crítica seja suficiente para os propósitos de projeto, a determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja identificar a habilidade da estrutura resistir a carregamentos no domínio de grandes deslocamentos (Bellini e Chulya, 1987). Além disso, uma análise pós crítica também serve de subsídio para elaboração de projetos de reparo e recuperação de estruturas colapsadas.

No contexto do método dos elementos finitos (MEF) para análise não linear geométrica, três diferentes descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas: descrição lagrangeana total, descrição lagrangeana atualizada e descrição corrotacional (Menin, 2006). Na descrição lagrangeana total as equações do MEF são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura. Assim, os

deslocamentos calculados numa análise incremental se referem a um mesmo referencial fixo (origem). A descrição lagrangeana atualizada caracteriza-se pelo fato das equações do MEF serem formuladas em relação a uma última configuração de equilíbrio atingida pelo elemento. A configuração de referência é mantida fixa durante todo o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga e, atingido o equilíbrio, os esforços internos e deformações passam a ser definidos a partir daquela nova configuração. A formulação corrotacional, que é a mais recente e ainda menos consolidada entre estas, tem como princípio básico a possibilidade de representar o movimento do sólido a partir da superposição de duas parcelas, sendo uma delas relativa aos deslocamentos de corpo rígido e outra relacionada ao movimento deformacional. Tal hipótese traz algumas vantagens de ordem teórica, por oportunizar uma compreensão intuitiva do significado físico da decomposição do movimento e gerar simplificações matemáticas importantes na formulação. Além disso, podem ser apontadas vantagens de ordem prática, como a possibilidade de implementação de novos modelos constitutivos e geometria de elementos reaproveitando parte considerável do código referente à contribuição não-linear ou ao movimento de corpo rígido. Entretanto, a formulação tem aplicação limitada a problemas cuja magnitude das deformações é pequena, da ordem de 2% segundo De Borst (2012), o que ainda é uma hipótese satisfatoriamente representativa da realidade na grande maioria dos casos de estruturas que apresentam comportamento não-linear geométrico. Desse modo, a formulação corrotacional apresenta-se como uma importante ferramenta para a análise não linear geométrica de estruturas, com larga aplicação nas engenharias civil, mecânica, aeronáutica e aeroespacial.

## 1.2 OBJETIVOS

A presente pesquisa tem como objetivo principal contribuir à consolidação teórica da formulação corrotacional como ferramenta de análise não linear de estruturas planas, apontando as semelhanças que podem ser estabelecidas entre diferentes formulações corrotacionais constantes na literatura a partir de uma formulação unificada. Aponta-se também os seguintes objetivos específicos:

- Detalhar a obtenção da formulação corrotacional unificada, explicitando as parcelas componentes da matriz de rigidez tangente.
- Obter elementos de viga baseados em 3 teorias cinemáticas distintas, constatando a possibilidade de aproveitamento de elementos finitos previamente definidos para análise linear.

- Desenvolver um código computacional em linguagem Fortran para solução de problemas numéricos.
- Validar a formulação proposta a partir da comparação de resultados aqui obtidos com aqueles constantes na literatura.
- Comparar o desempenho dos três tipos de elemento de viga 2D ao retratar o comportamento não linear de vigas, pórticos e arcos.

### 1.3 METODOLOGIA

A partir do referencial teórico aqui elaborado, baseado nos trabalhos de renomados pesquisadores da área de mecânica computacional e análise não linear geométrica via MEF, como Battini, Crisfield, Felippa e Krenk, é construído o arcabouço teórico necessário à dedução de uma formulação corrotacional capaz de resolver problemas estruturais que envolvem grandes deslocamentos de corpo rígido.

Tomando como referência a configuração deformada de um elemento genérico de viga 2D, são estabelecidas as variáveis cinemáticas envolvidas no problema. Em seguida, a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais associado a operações algébricas e diferenciais leva à dedução das matrizes de rigidez tangente para cada um dos elementos aqui estudados. Vale salientar que independente da matriz de transformação utilizada, é possível obter uma matriz de rigidez tangente que pode ser decomposta em diferentes parcelas, sendo uma delas coincidente com a matriz de rigidez de um elemento linear, aqui nomeada matriz de rigidez elástica do elemento.

A formulação aqui descrita é implementada computacionalmente no programa 2Dbeam\_nl.f90 que, diante dos sistemas de equações não lineares obtidos na formulação apresentada, utiliza técnicas de solução numérica capazes de contornar pontos críticos que venham a surgir nas trajetórias de equilíbrio, como pontos limites (*limit points*) e pontos de retorno (*turning points*), bem como obter trajetórias típicas de problemas com severas não linearidades, como saltos dinâmicos (*snap-through*) e laços (*loopings*).

Por fim, de posse do código computacional anteriormente mencionado, é feita a comparação dos resultados obtidos pelo programa utilizado no presente trabalho com a solução analítica de problemas constantes na literatura, quando possível, e também com resultados numéricos obtidos por outros autores, para fins de validação da formulação estudada. São resolvidos 5 exemplos, sendo eles:

- Viga engastada com extremidade livre submetida a uma carga momento;
- Viga-coluna de Euler engastada com extremidade livre;
- Pórtico de Lee;
- Arco semicircular birrotulado rebaixado;
- Arco semicircular birrotulado com carga concentrada excêntrica.

Na apresentação dos resultados, percebe-se que são problemas que apresentam severas não linearidades geométricas, o que demonstra que, apesar de simples, a formulação aqui desenvolvida é suficientemente versátil para resolver problemas complexos.

#### 1.4 CONTRIBUIÇÕES

Embora não se proponha nova solução para problemas de mecânica computacional, este trabalho apresenta resultados que trazem significativa contribuição teórica ao desenvolvimento da formulação corrotacional para análise não linear de estruturas. Apontar a semelhança entre formulações distintas pode levar a uma melhor compreensão do desenvolvimento teórico necessário para maiores avanços no estado da arte, especialmente para pesquisadores menos experientes.

Como resultado deste trabalho, foi produzido o artigo intitulado “Formulação corrotacional unificada aplicada à análise não linear de vigas, pórticos e arcos”, apresentado no III Congresso Nacional de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semiárido (III CONGRESA). Na ocasião, o trabalho foi premiado como melhor artigo científico da área de Estruturas e Construção Civil.

#### 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Para chegar aos objetivos estabelecidos na seção 1.2, o presente trabalho foi dividido em 6 capítulos.

O primeiro capítulo faz uma breve introdução ao tema abordado no trabalho, trazendo as motivações para o desenvolvimento deste, além dos objetivos gerais e específicos, a metodologia utilizada e suas contribuições para a comunidade científica.

O capítulo 2 traz a revisão de literatura que consiste em um apanhado histórico de importantes trabalhos na área de análise não-linear geométrica de estruturas, descrevendo o avanço das teorias científicas que possibilitaram a solução dos problemas relativos à área em função do

tempo. Posteriormente, a atenção é voltada para o desenvolvimento da formulação corrotacional nas últimas décadas, culminando com trabalhos contemporâneo que definem o estado da arte, dando destaque àqueles produzidos no âmbito do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília, PECC/UnB.

No capítulo 3 é feita a dedução matemática da formulação corrotacional unificada de um elemento de viga a partir do princípio dos trabalhos virtuais. São definidas as variáveis cinemáticas do problema, necessárias para montagem do vetor de deslocamentos globais e do vetor de forças nodais, também em coordenadas globais. A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) são estabelecidas correlações entre as variáveis definidas para o sistema local do elemento e o sistema global de referência. Com isso, é obtida a matriz de rigidez tangente do elemento, a partir da variação virtual das expressões que correlacionam o vetor de deslocamentos com o vetor de cargas, sendo utilizadas matrizes de transformação para estabelecer as correlações entre as matrizes de rigidez do elemento e a matriz de rigidez tangente global.

O capítulo 4 traz a dedução da parcela da matriz de rigidez tangente correspondentes às distintas teorias de viga consideradas, denominada matriz de rigidez elástica, a partir do estabelecimento de diferentes funções de forma para cada tipo de elemento aqui estudado.

O capítulo 5 tem por objetivo validar a formulação aqui apresentada, estabelecendo um comparativo com resultados numéricos obtidos em trabalhos já consolidados na literatura.

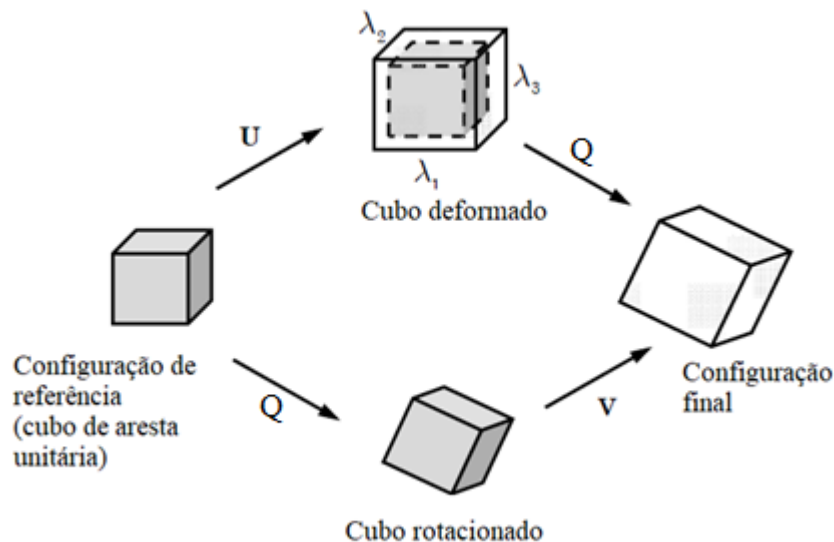
Por fim, as considerações finais constam no capítulo 6, no qual os resultados obtidos no presente trabalho são abordados de forma crítica, ressaltando sua e reconhecendo as limitações daquilo que é proposto. Além disso, são apontadas sugestões de trabalhos que podem ser desenvolvidos em complementação a esta produção científica, a fim de ampliar a gama de problemas que podem ser resolvidos pela formulação aqui definida.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

A formulação corrotacional tem como base o princípio teórico oriundo da aplicação do teorema da decomposição polar de Cauchy, ilustrado na Figura 2-1. Segundo este, o tensor gradiente de deformação  $F$  pode ser decomposto em duas parcelas: uma delas é responsável pelo movimento de corpo rígido  $Q$ , enquanto a outra corresponde à mudança nas dimensões do corpo, definida como estiramentos. Matematicamente, tem-se a relação da equação (2.1), sendo  $U$  definido como o tensor de estiramento direito, enquanto  $V$  representa o tensor de estiramento esquerdo.

$$F = QU = VQ \quad (2.1)$$

Figura 2-1: Contribuição de  $U$ ,  $V$  e  $Q$  na deformação e rotação de um cubo de volume unitário (adaptado de Reddy, 2013)



Partindo deste fundamento, a formulação do MEF utilizada passa por uma modificação na qual é estabelecido um sistema de eixos local para cada elemento finito ao invés do sistema único global para a estrutura. Simultaneamente, admite-se que os deslocamentos deformacionais do elemento são infinitesimais, isto é, de pequena magnitude se comparados com os deslocamentos de corpo rígido sofridos pelo sistema de eixos locais do elemento. Embora possa parecer limitadora a princípio, esta hipótese é, na verdade, um fator determinante para o sucesso da formulação corrotacional. Desde que se tenha um problema com material linear elástico, é possível a reutilização de elementos finitos lineares em problemas envolvendo não-linearidade geométrica, e caso a hipótese de material linear elástico não seja atendida para um elemento em particular, o

mesmo pode ser subdividido em mais elementos por meio de um refinamento da malha, a fim de evitar perda de precisão na análise (Menin, 2006).

Menin (2006) compila uma série de vantagens do emprego da formulação corrotacional em relação às formulações lagrangeanas na análise não linear de estruturas, enumeradas a seguir:

- Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações, lembrando que este assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais;
- Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial se a formulação EICR (*Element Independent Corrotational Formulation*) for empregada;
- Facilidade no estudo de não-linearidades materiais caracterizadas por pequenas deformações, juntamente com não-linearidades geométricas;
- Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas lagrangeanas;
- Facilidade de interface com programas envolvendo *multibody dynamics* (MBD).

Ainda de acordo com Menin (2006), dentre as desvantagens da formulação corrotacional, se enumeram:

- A formulação corrotacional não é vantajosa no estudo de problemas envolvendo grandes deformações plásticas;
- Pode levar a uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Entretanto, conforme já foi apresentado por Cole (1990), Crisfield (1990), Nour-Omid & Rankin (1991) e Menin & Taylor (2005a), pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar a precisão dos resultados ou o grau de convergência da solução;
- Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação;
- A formulação é eficiente somente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples: elementos de treliças e vigas contendo dois nós e elementos de placas ou cascas



contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta. Felizmente, os elementos com geometria mais simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência na análise não-linear geométrica de estruturas.

## 2.1 HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

Segundo Felippa (2005), a primeira publicação a tratar daquela que viria a ser conhecida como formulação corrotacional nos dias atuais foi escrita por Truesdell e Toupin (1960), numa abordagem de problemas de fluxo de tensão pela teoria de campos clássicos no contexto da mecânica dos meios contínuos. Argyris (1965) traz uma abordagem pioneira do conceito de decomposição dos movimentos de corpo rígido e deformacionais, que foram inicialmente denominados de “aproximação natural”. Os princípios teóricos estabelecidos nesses trabalhos serviram de sustentação teórica para os trabalhos que viriam a ser desenvolvidos nas décadas seguintes e nos dias atuais.

Belytschko e Hsieh (1973) estudaram elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas (*convected coordinates*). Fraeijs de Veubeke (1976) introduziu o conceito de configuração sombra (*shadow*) no estudo da análise dinâmica para estruturas flexíveis aporticadas na indústria aeronáutica. Sua formulação valeu-se mais de soluções do que de uma formulação numérica de elementos finitos. No trabalho citado, utilizou-se um único sistema de eixos corrotacionais para a estrutura como um todo, e tal abordagem acabou gerando uma série de dificuldades, de modo que o conceito de “configuração fantasma” foi substituído pelo conceito de “elemento sombra” (*shadow element*).

Rankin e Brogan (1986) introduziram a formulação EICR, que foi posteriormente refinada por Rankin e Nour-Omid (1988), e Nour-Omid e Rankin (1991). e implementada no programa STAGS. A formulação EIRC não faz uso explícito do conceito “*shadow element*” na obtenção dos deslocamentos deformacionais, utilizando em vez disso operadores de projeção. Este processo é bastante similar ao que foi utilizado por Bergan e Nygard (1989). Estes autores usaram a formulação corrotacional para obter uma matriz de rigidez tangente consistente. A formulação proposta por Nour-Omid e Rankin (1991) ainda apresentava restrições no número de grau de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e manter simultaneamente a consistência da matriz de rigidez tangente. Haugen (1994) resolve este problema desenvolvendo um trabalho aplicado ao estudo de cascas planas discretizadas por

elementos triangulares e quadrangulares, que apresentavam o grau de liberdade de rotação torcional, combinando a natureza invariável da formulação de Bergan com o equilíbrio e a consistência da formulação de Rankin. Ao fim da década de 80, Cardona (1989) utilizou o conceito de formulação corrotacional no estudo de mecanismos.

Crisfield (1990) apresentou uma formulação consistente para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais. Peng e Crisfield (1992) apresentaram uma formulação consistente para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante. Crisfield e Moita (1996) apresentaram um procedimento teórico inicialmente voltado para o estudo de elementos finitos sólidos, que em seguida fora modificado para abranger o estudo de vigas e pórticos espaciais.

Pacoste e Eriksson (1996) e Pacoste (1998) apresentaram uma formulação corrotacional no contexto do estudo de instabilidades. No primeiro, estudaram-se problemas de instabilidade para elementos de viga no plano e no espaço, comparando as descrições lagrangeanas total e corrotacional. Foram avaliados oito exemplos numéricos planos e espaciais, e percebeu-se que os exemplos que fizeram uso da formulação corrotacional apresentaram melhor taxa de convergência. Com isso, concluiu-se que não era suficiente aumentar o número de graus de liberdade dos elementos ou refinar a malha no tratamento de fenômenos complexos como a instabilidade de estruturas. No segundo, Pacoste fez estudos de instabilidade de cascas utilizando elementos finitos planos e triangulares de três nós e seis graus de liberdade por nó. O autor seguiu a formulação de Rankin e Nour-Omid (1988) por meio da utilização de projetores e implementou uma parametrização das rotações finitas no espaço. Tal procedimento levou a uma mudança adicional de variáveis, de modo que as variáveis relacionadas às rotações no espaço fossem transformadas em grandezas aditivas e, com isso, tornaram-se desnecessários eventuais procedimentos de atualização.

Nos anos 90 e 2000, Felippa e seus colaboradores publicaram uma série de artigos: Felippa e Militello (1992), Felippa e Alexander (1992), Felippa (2000), Felippa e Park (2002), Felippa (2003) e Felippa e Haugenn (2005). Nestes trabalhos, os autores propuseram a formulação de um elemento triangular de três nós com nove graus de liberdade, incluindo a rotação torcional, para parametrizar os princípios variacionais. Esses princípios serviriam como uma espécie de base unificada para diversas técnicas de dedução de elementos que viriam posteriormente, tal qual a Formulação Livre (*Free Formulation - FF*), Formulação Livre Estendida (*Extended Free*

*Formulation - EFF*) e Formulação de Deformação Deviatória Natural (*Assumed Natural Deviatoric Strain - ANDES*).

Battini (2008) apresentou um elemento não-linear corrotacional plano de baixa ordem para análise de estruturas sob grandes deslocamentos e pequenas deformações, evidenciando as vantagens obtidas utilizando elementos de baixa ordem para análises em grande escala, isto é, problemas que acabam gerando grande custo computacional devido seu elevado número de nós e graus de liberdade.

Krenk (2009) aborda uma formulação corrotacional utilizando um elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko, por meio do uso dos modos de deformação natural. Na obra, é demonstrado que sua formulação é capaz de livrar os elementos do inconveniente do travamento por cisalhamento, conhecido como *shear locking*. Tal fenômeno é caracterizado pela ocorrência de deslocamentos de flexão menores relacionados ao enrijecimento do elemento, este provocado pela inabilidade do elemento de obter deformações de cisalhamento nulas mesmo em casos que apresenta geometria esbelta.

No panorama mais atual pode-se citar alguns trabalhos em que é feita aplicação da formulação corrotacional utilizando outros métodos de discretização. Em Yaw *et al.* (2009) são demonstradas aplicações da formulação corrotacional e de métodos sem malha na análise de sólidos bidimensionais incluindo efeitos de não linearidade física e geométrica. Este trabalho é o primeiro na literatura a tratar de métodos sem malha no contexto da formulação corrotacional. O trabalho de Xu *et al.* (2012) apresenta, também de forma pioneira, uma formulação corrotacional com aplicação do Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM) para tratar de problemas de não linearidades severas relativas a conexões por pinos e rótulas plásticas, abrangendo tanto deformações infinitesimais quanto deformações finitas.

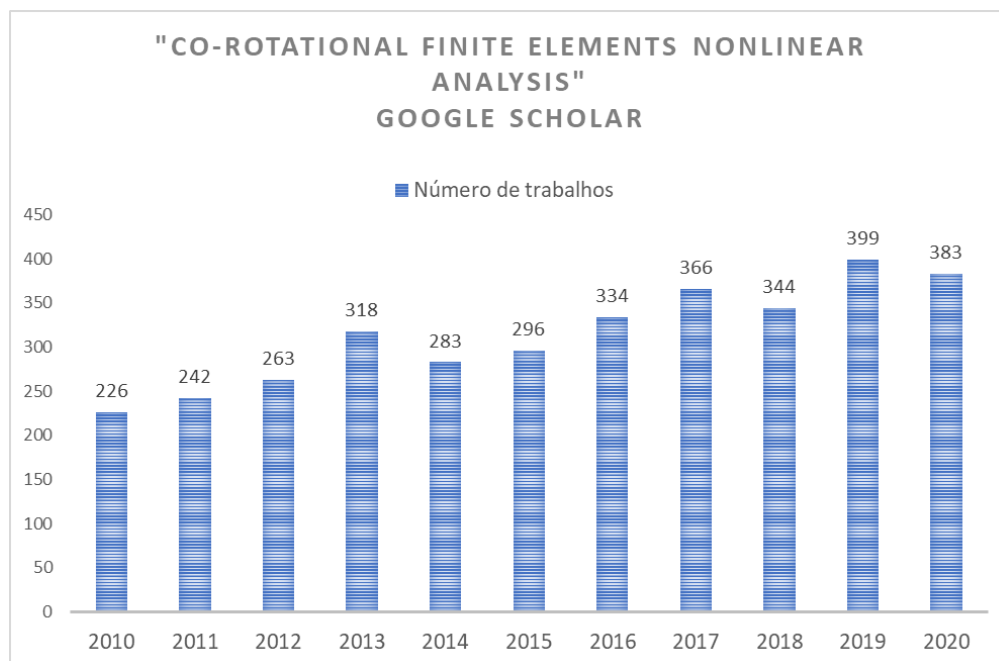
## 2.2 ESTADO DA ARTE

Dentre as formulações do tipo lagrangeana, a formulação corrotacional é a menos desenvolvida, o que se justifica pelo fato de ser também a mais recente dentre aquelas. Embora não muito explorada no Brasil, percebe-se o grande interesse dos pesquisadores em todo o mundo em consolidar a formulação corrotacional para a análise não linear geométrica de estruturas.

O processo de consolidação da formulação corrotacional nos últimos anos permaneceu firme, apesar do desenvolvimento de técnicas relativamente mais recentes de modelagem numérica

que demandam interesse e dedicação por parte dos pesquisadores atuantes na área de mecânica computacional, como, por exemplo, a formulação posicional, método dos elementos de contorno, métodos sem malha, além do método dos elementos finitos estendidos (XFEM) e método dos elementos finitos generalizados (GFEM). O gráfico da Figura 2-2 foi elaborado a partir de dados extraídos da plataforma Google Scholar, no qual tem-se o número de trabalhos retornado em cada um dos últimos 11 anos quando efetuada uma busca com o termo “*co-rotational finite element nonlinear analysis*”, que em tradução livre, pode ser escrito como “análise não linear via elementos finitos com uma formulação corrotacional”.

Figura 2-2: Número de trabalhos com o tema “análise não-linear via MEF corrotacional” nos últimos anos



Para além do considerável número de publicações, observa-se nos últimos anos a ocorrência de trabalhos que já não possuem como objetivo principal dar contribuições ao desenvolvimento teórico da formulação propriamente dita, mas sim utilizar-se da formulação corrotacional em aplicações diretas na resolução de problemas práticos da engenharia estrutural. Em Flores *et al.* (2014), é proposto um modelo para simulação de voos de paraquedas considerando o acoplamento fluido-estrutura. Segundo o autor citado, devido à grande mudança de geometria durante a trajetória, a simulação demanda que a malha seja redesenhada algumas vezes, o que gera alto custo computacional e reduz a robustez do processo de solução como um todo. Tais limitações foram superadas a partir uma análise dinâmica explícita, utilizando elementos corrotacionais de cabo e de membrana para a estrutura do paraquedas e elementos de contorno na modelagem do fluido circundante. Em Jia e Liu (2018), é apresentada uma formulação corrotacional aplicada à

simulação do fenômeno da endocitose, um processo celular fisiológico de vital importância do sistema imunológico e metabólico, relacionado a doenças como Alzheimer e câncer. A partir destes, é demonstrada a versatilidade da formulação para tratar de modelos constitutivos mais genéricos, acompanhando o avanço nas áreas de bioengenharia e biotecnologia nos últimos anos. Nesse contexto, surgem problemas que requerem a modelagem computacional de sistemas mecânicos compostos por tecidos vivos, cujas soluções são elaboradas a partir da atuação do pesquisador da área de simulação numérica.

Na área de projetos de estrutura, Addessi *et al.* (2020) estabelece uma interface argamassa-bloco modelada a partir de elementos de viga corrotacional na análise de estabilidade de elementos em alvenaria estrutural armada. Possidenti *et al.* (2020) faz uma análise do problema de torção em vigas em situação de incêndio a partir de uma análise em elementos finitos de cinemática corrotacional, com parâmetros de expansibilidade térmica conforme Eurocódigo EN 1993-1-2 (CEN 2005).

Recentemente, diversos pesquisadores tem trabalhado no desenvolvimento da formulação com intuito de desenvolver elementos capazes de lidar com situações menos correntes. O trabalho de Mororó *et al.* (2019) apresenta elementos laminados de paredes finas capazes de simular o comportamento de vigas compósitas submetidas a grandes rotações. Heng *et al.* (2019) apresenta uma formulação bidimensional para vigas rígidas com rótulas elasto-plásticas generalizadas submetidas a carregamentos dinâmicos de impacto, utilizando um processo de condensação estática a fim de desconsiderar nós internos extras e seus correspondentes graus de liberdade. No trabalho, a carga de impacto é aplicada a partir de um modelo de contato descrito no âmbito de não linearidades severas, em que as equações de movimento são deduzidas a partir de diferentes medidas diferenciais e ferramentas de análise convexa, nas quais a lei de impacto de Newton é imposta pela instituição de um coeficiente de restituição capaz de contemplar perdas de energia. Em Tang *et al.* (2020), foi deduzido um elemento de viga corrotacional de eixo curvo, o que possibilita uma melhora na precisão das análises de estruturas curvilíneas em decorrência da não necessidade de aproximação da geometria de estruturas curvas por trechos retos. Lanfeng e Zhang (2020) deduziram uma formulação corrotacional capaz de resolver problemas dinâmicos envolvendo vigas deslizantes, através de uma abordagem energética e modelagem dos elementos como um sistema de massa variável. Tais situações estão comumente presentes em problemas na indústria mecatrônica, como antenas de aeronaves e braços de robôs, e na construção civil em dispositivos de dissipação de vibrações sísmicas em edificações.

## 2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS NO PECC/UNB

No âmbito da Universidade de Brasília e do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), Cortivo (2004) estudou problemas de não-linearidade física e geométrica de estruturas de cascas finas, no domínio de pequenas deformações, adotando o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento plástico de Von Mises. Menin (2006) aplicou a descrição cinemática corrotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliça, vigas e cascas. Dentre os trabalhos publicados pelo autor, podem-se destacar: Menin e Taylor (2003a), que estudaram problemas de instabilidade de pórticos planos, discretizados com elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli. Menin e Taylor (2003b) e Menin *et al.* (2006), que estudaram o comportamento pós-crítico de sistemas de barras articuladas no plano e no espaço, utilizando distintas medidas de deformações. Menin e Taylor (2004), que estudaram problemas de não-linearidade geométrica de pórticos espaciais, baseando-se no conceito de operadores de projeção da formulação EICR. Finalmente, Menin e Taylor (2005a) e Menin e Taylor (2005b), que estudaram problemas de instabilidade em estruturas de cascas, discretizadas com elementos finitos triangulares, com base em modificações feitas na formulação EICR. Em parceria estabelecida entre pesquisadores da UFSC e UnB, Belo (2009) desenvolveu elementos ANDES de casca com uma formulação EICR, capazes de contemplar efeitos de não linearidades físicas a partir da adaptação de um elemento linear de casca a um modelo constitutivo de hiperelasticidade. Silva (2011) desenvolveu uma formulação corrotacional para pórticos planos considerando não linearidade geométrica e não linearidade física através da implementação de um modelo constitutivo de plasticidade por camadas. Da Silva (2013) desenvolveu um programa de elementos finitos para análise estática e dinâmica não-linear geométrica de pórticos espaciais com o uso do elemento de viga 3D Euler-Bernoulli corrotacional, implementando a formulação EICR. Cunha (2015) apresentou uma análise de vigas e pórticos planos utilizando um elemento corrotacional de viga generalizado Bernoulli-Timoshenko, capaz de superar o inconveniente do fenômeno de travamento por cisalhamento, e Oliveira (2016) demonstrou a aptidão da formulação em também lidar com estruturas de arco, através da aproximação de trechos curvos por elementos retos. Silva (2019) utilizou uma formulação corrotacional em elementos enriquecidos de baixa ordem na análise inelástica de placas e lâminas.

### 3. FORMULAÇÃO CORROTACIONAL UNIFICADA PARA ELEMENTO DE VIGA 2D

Para que uma abordagem via MEF seja considerada corrotacional, usualmente adota-se o princípio de decomposição dos movimentos dos elementos estruturais em uma parcela de corpo rígido e uma parcela deformacional, associado à existência de um sistema de coordenadas locais que apresenta rotações e translações conjuntamente com o elemento. De maneira geral, tem-se adicionalmente a hipótese de deformações infinitesimais, que são estabelecidas em relação a este sistema local de referência. Contudo, é possível admitir a ocorrência de deformações finitas de maneira aproximada em alguns casos, conforme De Borst (2012).

A formulação apresentada por Crisfiel (1991) e tem como base teorias de viga de Kirchhoff e de Timoshenko, com a transformação dos deslocamentos definidos no sistema local para o sistema global através da matriz de transformação  $\mathbf{B}$ . Tal formulação foi tomada como referência no desenvolvimento do trabalho de Silva (2011). Já em Krenk (2009), a formulação corrotacional apresentada obtém os deslocamentos locais a partir da superposição dos modos naturais de deformação, e sua transformação para o sistema de coordenadas globais é feita a partir das matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$ . Esta formulação serviu como referência para os trabalhos de Cunha (2015) e Oliveira (2016).

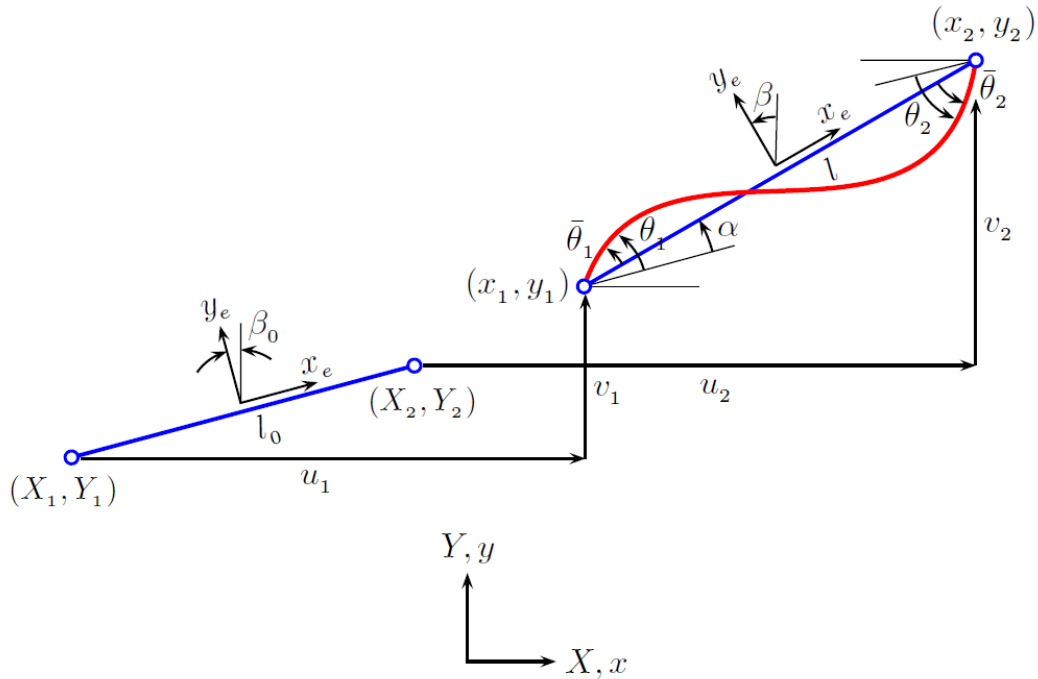
Desse modo, mesmo atendendo as condições estabelecidas no primeiro parágrafo, tem-se que é possível adotar diferentes abordagens matemáticas, teorias cinemáticas e relações constitutivas para os elementos estruturais estudados. Em outras palavras, embora tomando um ponto de partida comum (decomposição dos deslocamentos em deformacionais e de corpo rígido, com associação de um sistema local de referência aos elementos), é possível adotar caminhos intermediários ao longo do desenvolvimento da formulação, e ainda assim chegar ao mesmo ponto final. A seguir, será demonstrado que, apesar das diferenças admitidas para as formulações, os resultados obtidos são similares, tanto do ponto de vista algébrico/matemático como do ponto de vista numérico, conforme será mostrado no capítulo 5, o que permite definir uma formulação unificada.

#### 3.1 DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS CINEMÁTICAS

As variáveis cinemáticas tomadas como referência para a formulação corrotacional aqui definida, para elementos de viga 2D, são mostradas na Figura 3-1. Nela, tem-se ilustrado o

elemento na sua configuração inicial à esquerda, e na configuração final à direita, isto é, após atingir uma nova configuração de equilíbrio devido o processo de carregamento.

Figura 3-1: Variáveis cinemáticas do elemento de viga 2D.



As coordenadas dos nós 1 e 2 (inicial e final) do elemento na configuração de referência são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. Na configuração deformada, as coordenadas nodais são definidas por  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Tal notação é baseada naquela comumente utilizada na mecânica dos meios contínuos, em que letras maiúsculas referem-se a coordenadas materiais enquanto letras minúsculas definem coordenadas espaciais.

Tomando como referência a configuração deformada do elemento, o vetor de deslocamentos globais é definido pelos deslocamentos nodais na forma:

$$\mathbf{u}_g = (u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)^T \quad (3.1)$$

cujas componentes serão obtidas pela soma dos deslocamentos de corpo rígido com os deslocamentos deformacionais, estes definidos, a princípio, em relação ao sistema local de referência do elemento. Vale salientar que tal soma não ocorre de forma algébrica ou direta, visto que são necessárias transformações das variáveis. Os deslocamentos do sistema de coordenadas do elemento, que definem os deslocamentos de corpo rígido, devem ser transformados em deslocamentos nodais, visto que a origem do sistema de coordenadas locais do elemento é

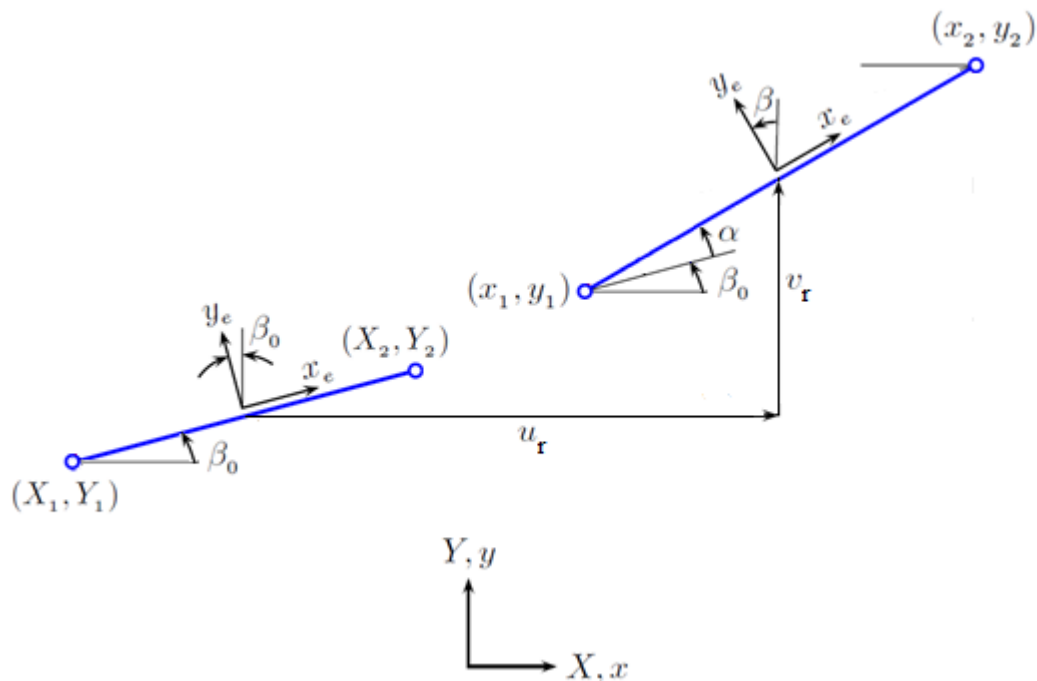


estabelecida em seu centro. Já os deslocamentos deformacionais, por serem obtidos em relação ao sistema local, precisam ser transformados para o sistema global.

A cada elemento é associado um sistema de coordenadas local de referência  $(x_e, y_e)$ , que tem sua origem no centro do elemento e o acompanha durante seu movimento. Os deslocamentos do sistema local definirão o movimento de corpo rígido, conforme observa-se na Figura 3-2, e compõem o vetor  $\mathbf{u}_r$ , definido a seguir:

$$\mathbf{u}_r = (u_r, v_r, \alpha)^T \quad (3.2)$$

Figura 3-2: Deslocamentos do sistema local de referência



no qual  $u_r$  e  $v_r$  são as componentes translacionais em relação aos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $\alpha = \beta - \beta_0$  denota a rotação de corpo rígido, sendo  $\beta_0$  a inclinação do elemento na configuração inicial e  $\beta$  a inclinação da reta que une os dois nós do elemento na configuração atual. Tais ângulos podem ser obtidos a partir de correlações trigonométricas entre os deslocamentos e o comprimento do elemento em sua configuração inicial e atual, respectivamente, conforme pode-se perceber na Figura 3-1 e se mostra nas expressões seguintes:

$$\cos\beta_0 = \frac{X_{21}}{l_0} \quad (3.3)$$

$$\text{sen}\beta_0 = \frac{Y_{21}}{l_0} \quad (3.4)$$

$$\text{cos}\beta = \frac{X_{21} + u_{21}}{l} = \frac{x_{21}}{l} \quad (3.5)$$

$$\text{sen}\beta = \frac{Y_{21} + v_{21}}{l} = \frac{y_{21}}{l} \quad (3.6)$$

sendo  $l_0$  o comprimento inicial e  $l$  o comprimento atual do elemento, dados pelas expressões:

$$l_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} \quad (3.7)$$

$$l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2} \quad (3.8)$$

de modo que:

$$X_{21} = X_2 - X_1 \quad (3.9)$$

$$Y_{21} = Y_2 - Y_1 \quad (3.10)$$

$$u_{21} = u_2 - u_1 \quad (3.11)$$

$$v_{21} = v_2 - v_1 \quad (3.12)$$

A fim de estabelecer relação direta entre a rotação de corpo rígido  $\alpha$  e os deslocamentos nodais do elemento, são estabelecidas algebricamente as seguintes correlações entre senos e cossenos:

$$\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta_0 \text{sen}\beta - \text{sen}\beta_0 \text{cos}\beta \quad (3.13)$$

$$\text{cos}\alpha = \text{cos}\beta_0 \text{cos}\beta + \text{sen}\beta_0 \text{sen}\beta \quad (3.14)$$

A partir das correlações estabelecidas em (3.3) a (3.6), pode-se reescrever as equações (3.13) e (3.14) da forma seguinte:

$$\cos\alpha = \frac{x_{21}^*}{l_0 l} \quad (3.15)$$

$$\sin\alpha = \frac{y_{21}^*}{l_0 l} \quad (3.16)$$

$$x_{21}^* = X_{21}x_{21} + Y_{21}y_{21} \quad (3.17)$$

$$y_{21}^* = X_{21}y_{21} - Y_{21}x_{21} \quad (3.18)$$

sendo as coordenadas  $x_{21}^*$  e  $y_{21}^*$  relacionadas à diferença entre as translações dos nós do elemento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Pode-se ainda estabelecer a relação conforme descrito em (3.19), de modo que a rotação de corpo rígido será dada como apresentado na Equação (3.20).

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (3.19)$$

$$\alpha = 2 \tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \right) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{l_0 l - x_{21}^*}{y_{21}^*} \right) \quad (3.20)$$

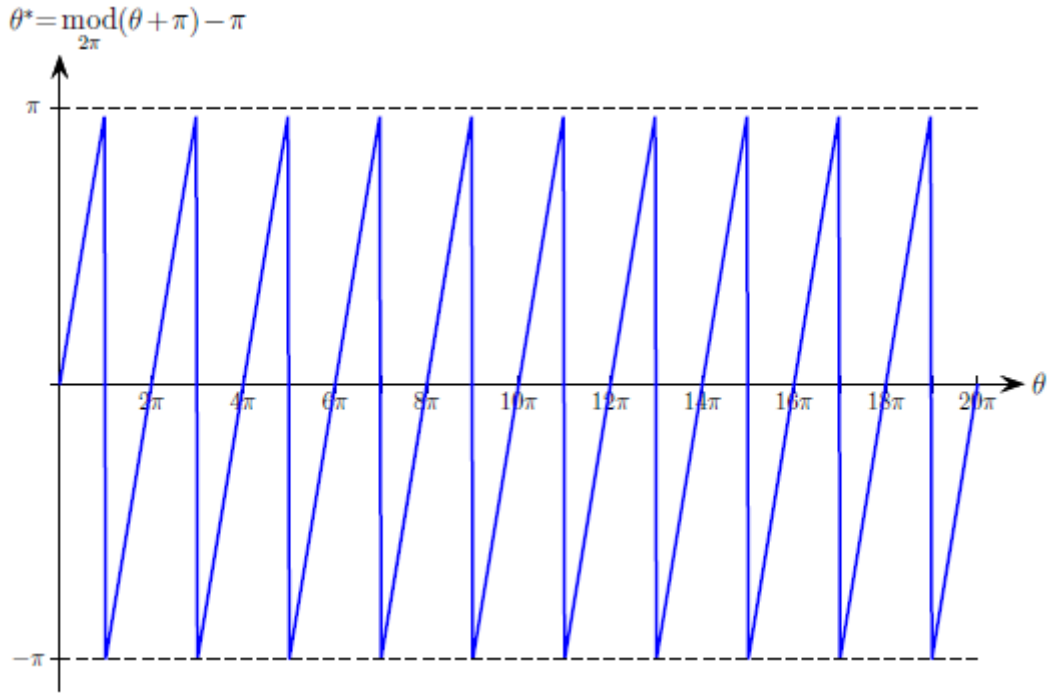
Como pode-se observar, a expressão (3.20) é singular nos casos em que  $y_{21}^* = 0$ , sendo então atribuído o valor de  $\alpha = 0$  para  $x_{21}^* = l_0 l$  ou  $\alpha = \pi$  para  $x_{21}^* = -l_0 l$ . Com o objetivo de admitir qualquer magnitude no valor dos ângulos relativos às rotações deformacionais, as expressões constantes em (3.28) e (3.29) devem ser reescritas utilizando a função módulo, conforme constante em (3.21) e (3.22).

$$\bar{\theta}_1 = \text{mod}_{2\pi}(\bar{\theta}_1 + \pi) - \pi \quad (3.21)$$

$$\bar{\theta}_2 = \text{mod}_{2\pi}(\bar{\theta}_2 + \pi) - \pi \quad (3.22)$$

A função módulo assume um valor arbitrário no intervalo  $[0, 2\pi]$ , e o último termo reestabelece a simetria em relação ao valor zero, podendo assim superar a ocorrência de problemas de divergência quando o elemento venha a sofrer rotações múltiplas de  $\pm\pi$ . Na Figura 3-3 é ilustrada a aplicação da função módulo definida nas equações (3.21) e (3.22) para ângulos de valor arbitrário no intervalo  $[0, 20\pi]$ , o que corresponde a 10 voltas em um círculo de raio unitário.

Figura 3-3: Função módulo para ângulos arbitrários.



Considerando que a origem do sistema de coordenadas locais situa-se no centro do elemento tanto na configuração inicial quanto na configuração atual, e a variação do comprimento do elemento será distribuída uniformemente, pode-se definir as componentes do vetor de deslocamentos de corpo rígido  $u_r$  e  $v_r$  em função dos deslocamentos nodais, tal que:

$$u_r = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{X_2 + X_1}{2} = \frac{u_2 + u_1}{2} \quad (3.23)$$

$$v_r = \frac{y + y_1}{2} - \frac{Y_2 + Y_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2} \quad (3.24)$$

o que permite reescrever o vetor de deslocamentos de corpo rígido na forma:

$$\mathbf{u}_r = \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_2 + u_1}{2} \\ \frac{v_2 + v_1}{2} \\ 2 \tan^{-1} \left( \frac{l_0 l - x_{21}^*}{y_{21}^*} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

A parcela deformacional do movimento é dada pelo vetor de deslocamentos locais como

$$\mathbf{u}_d = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)^T \quad (3.26)$$

sendo  $\bar{u}$  o deslocamento relativo entre os nós 1 e 2 na direção do eixo local  $x_e$ ;  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$  são as rotações deformacionais dos nós 1 e 2, respectivamente. As componentes do vetor de deslocamentos locais são definidas conforme segue:

$$\bar{u} = l - l_0 \quad (3.27)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha \quad (3.28)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha \quad (3.29)$$

Ao vetor de deslocamentos globais, está associado um vetor de cargas globais, definido como:

$$\mathbf{f}_g = (f_{x1}, f_{y1}, m_{z1}, f_{x2}, f_{y2}, m_{z2})^T \quad (3.30)$$

que tem suas componentes definidas a partir da transformação do vetor de esforços internos pela matriz  $\mathbf{B}$ , definida no próximo item.

### 3.2 RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS LOCAIS E GLOBAIS

A partir da definição de um sistema local para que sejam calculados os deslocamentos deformacionais, se faz necessário estabelecer uma correlação entre as variáveis locais e as variáveis globais. Tal correlação é obtida a partir do teorema dos trabalhos virtuais, aplicando uma variação virtual nos deslocamentos locais, tal que:

$$\delta\bar{u} = \delta l = (-\cos\beta, -\sin\beta, 0, \cos\beta, \sin\beta, 0)^T \delta\mathbf{u}_g \quad (3.31)$$

$$\delta\bar{\theta}_1 = \delta\theta_1 - \delta\alpha = \delta\theta_1 - \delta\beta \quad (3.32)$$

$$\delta\bar{\theta}_2 = \delta\theta_2 - \delta\alpha = \delta\theta_2 - \delta\beta \quad (3.33)$$

A equação (3.31) é obtida a partir da diferenciação da equação (3.8), que define o comprimento atualizado do elemento, em relação aos deslocamentos globais. Por outro lado, a

variação virtual de  $\beta$  é calculada diferenciando a equação (3.6) em relação aos deslocamentos globais, assumindo a forma:

$$\delta\beta = \frac{1}{l}(\text{sen}\beta, -\text{cos}\beta, 0, -\text{sen}\beta, \text{cos}\beta, 0)^T \delta\mathbf{u}_g \quad (3.34)$$

Reagrupando na forma matricial as relações entre as variações virtuais das variáveis locais e globais, se define a matriz de transformação  $\mathbf{B}$  como:

$$\delta\mathbf{u}_d = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_g \quad (3.35)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\text{cos}\beta & -\text{sen}\beta & 0 & \text{cos}\beta & \text{sen}\beta & 0 \\ -\text{sen}\beta/l & \text{cos}\beta/l & 1 & \text{sen}\beta/l & -\text{cos}\beta/l & 0 \\ -\text{sen}\beta/l & \text{cos}\beta/l & 0 & \text{sen}\beta/l & -\text{cos}\beta/l & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

O trabalho realizado pelos esforços internos está diretamente relacionado à energia de deformação dos elementos, enquanto o trabalho das forças externas será função dos deslocamentos nodais ocorridos. Para obter a relação entre os esforços internos e os esforços globais impõe-se que o trabalho virtual realizado por ambos seja igual, de modo que

$$V = \delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \delta\mathbf{u}_d^T \mathbf{f}_d = \delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_d \quad (3.37)$$

Sendo a igualdade descrita em (3.37) válida para qualquer valor arbitrário de  $\delta\mathbf{u}_g$  tem-se que:

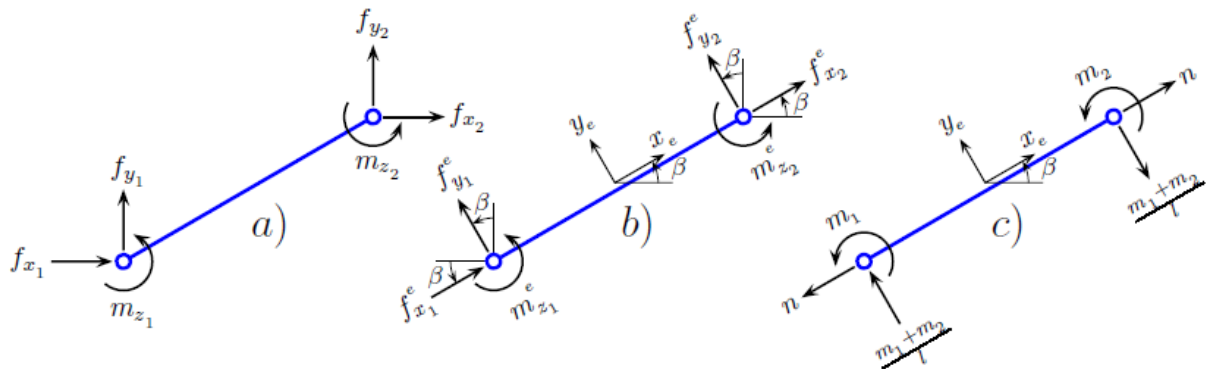
$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_d \quad (3.38)$$

onde o vetor de esforços internos  $\mathbf{f}_d = (n, m_1, m_2)^T$  depende da definição do tipo de elemento de viga utilizado, que serão definidos no próximo capítulo.

### 3.3 ESFORÇOS NODAIS EM COORDENADAS LOCAIS E GLOBAIS

A combinação dos esforços internos gera um vetor de forças nodais que se expressa tanto em coordenadas locais quanto em coordenadas globais, conforme consta na Figura 3-4.

Figura 3-4: Vetor de esforços nodais. a) Em coordenadas globais. b) Em coordenadas locais. c) Autoequilibrados



A relação entre os esforços internos e o vetor de forças nodais expresso em coordenadas locais será estabelecida a partir da matriz de transformação  $S$ . Assim:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{S}\mathbf{f}_d \quad (3.39)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

É importante destacar que ao assumir  $\beta = 0$  na equação (3.36), ou seja, a ocorrência de rotação de corpo rígido nula, chega-se à igualdade  $\mathbf{B}^T = \mathbf{S}$ . A relação entre o vetor de forças nodais em coordenadas locais e o vetor de forças nodais em coordenadas globais, mostrado na Figura 3-4b, respectivamente, é dada por:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{R}\mathbf{f}_e \quad (3.41)$$

na qual  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais para elementos planos, dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.39) em (3.41), se obtém a relação entre os esforços internos e o vetor de forças nodais em coordenadas globais, que se escreve como

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{RSf}_d \quad (3.43)$$

Comparando as equações (3.38) e (3.43), percebe-se que  $\mathbf{B}^T = \mathbf{RS}$  para quaisquer valores não nulos de  $\beta$ .

### 3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ EM COORDENADAS GLOBAIS

A relação entre as variações virtuais do vetor de forças globais e do vetor de deslocamentos globais é descrita por:

$$\delta\mathbf{f}_g = \mathbf{K}\delta\mathbf{u}_g \quad (3.44)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez tangente global, que será obtida diferenciando a equação (3.38), o que resulta na expressão:

$$\delta\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \delta\mathbf{f}_d + \delta\mathbf{B}^T \mathbf{f}_d = \mathbf{B}^T \delta\mathbf{f}_d + n\delta\mathbf{b}_1 + m_1\delta\mathbf{b}_2 + m_2\delta\mathbf{b}_3 \quad (3.45)$$

sendo  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  a primeira, segunda e terceira coluna da matriz  $\mathbf{B}^T$ . Para auxiliar a dedução algébrica da matriz de rigidez tangente, são definidos os seguintes vetores auxiliares:

$$\mathbf{r} = (-\cos\beta, -\text{sen}\beta, 0, \cos\beta, \text{sen}\beta, 0)^T \quad (3.46)$$

$$\mathbf{z} = (\text{sen}\beta, -\cos\beta, 0, -\text{sen}\beta, \cos\beta, 0)^T \quad (3.47)$$

cujas variações virtuais são, respectivamente:



$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{z} \delta \beta \quad (3.48)$$

$$\delta \mathbf{z} = -\mathbf{r} \delta \beta \quad (3.49)$$

Tomando como referência os vetores auxiliares, podemos reescrever as equações (3.31) e (3.34) da seguinte forma:

$$\delta \bar{u} = \delta l = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (3.50)$$

$$\delta \beta = \frac{1}{l} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (3.51)$$

Para esta notação, os vetores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  se escrevem como:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{r} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T - \frac{1}{l} \mathbf{z} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{b}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T - \frac{1}{l} \mathbf{z} \quad (3.54)$$

cujas variações virtuais são dadas por:

$$\delta \mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{r} = \frac{1}{l} (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) \delta \mathbf{u}_g \quad (3.55)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{b}_3 = -\frac{1}{l} \delta \mathbf{z} + \frac{\delta l}{l^2} \mathbf{z} = \frac{1}{l^2} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r}) \delta \mathbf{u}_g \quad (3.56)$$

O primeiro termo da equação (3.45) é calculado ao introduzir a matriz de rigidez elástica local  $\mathbf{K}_d$ , que, como já dito anteriormente, depende do tipo de elemento de viga adotado e será calculada no próximo capítulo. Por outro lado, a relação entre a variação virtual dos esforços internos e os deslocamentos globais é definida por:

$$\delta \mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \delta \mathbf{u}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.57)$$

e finalmente, a partir das equações (3.44), (3.45), (3.55) e (3.56), obtém-se a expressão da matriz de rigidez tangente global como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_d \mathbf{B} + \frac{n}{l} (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) + \frac{1}{l^2} (m_1 + m_2) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r}) \quad (3.58)$$

O primeiro termo da equação (3.58) representa a matriz de rigidez material. Da mesma forma, levando em conta que o esforço cortante se define como  $Q = \frac{m_1 + m_2}{l}$ , conforme constante na Figura 3-4c, a matriz de rigidez geométrica global pode ser escrita mediante a seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_g = \frac{N}{l} (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) + \frac{Q}{l} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r}) \quad (3.59)$$

### 3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EM COORDENADAS LOCAIS

A relação entre as variações virtuais do vetor de forças e do vetor de deslocamentos expressos em coordenadas locais pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \delta \mathbf{u}_e \quad (3.60)$$

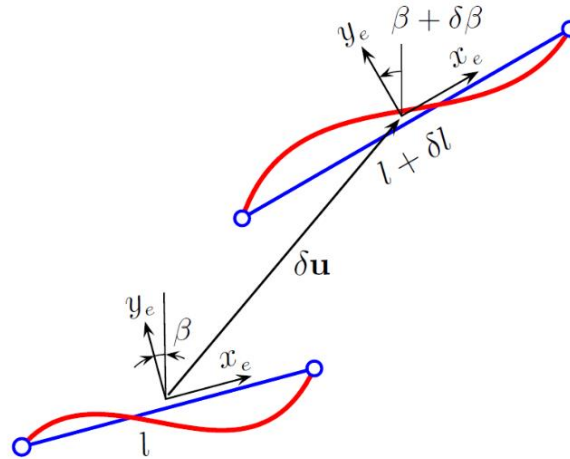
Levando em consideração o elemento de viga 2D em sua configuração deformada atual, conforme consta na Figura 3-5, e é aplicada uma variação infinitesimal de deslocamentos a partir desta configuração de equilíbrio, a variação infinitesimal da rotação de corpo rígido e do comprimento do elemento se escrevem, respectivamente, conforme o seguinte:

$$\delta \beta = \frac{\delta v_2^e - \delta v_1^e}{l} \quad (3.61)$$

$$\delta l = \delta u_2^e - \delta u_1^e \quad (3.62)$$

onde  $(\delta u_1^e, \delta v_1^e, \delta u_2^e, \delta v_2^e)$  são as componentes da variação virtual dos deslocamentos nodais descritos em coordenadas locais.

Figura 3-5: Movimento incremental do elemento de viga 2D



Por outro lado, lembrando que o trabalho interno não varia em relação aos diferentes sistemas de coordenadas e levando em consideração a equação (3.39), a variação do trabalho interno pode ser escrita como:

$$\delta V = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{S} \mathbf{f}_d = \delta \mathbf{u}_d^T \mathbf{f}_d \quad (3.63)$$

onde  $\delta \mathbf{u}_d^T = (\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1, \delta \bar{\theta}_2)$  é a variação virtual da parte deformacional do movimento do elemento de viga 2D. A última igualdade se cumpre para qualquer valor arbitrário de  $\mathbf{f}_d$ , o que implica na relação:

$$\delta \mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \delta \mathbf{u}_e \quad (3.64)$$

A variação virtual do vetor de forças expresso em coordenadas globais dado pela equação (3.43) se escreve como:

$$\delta \mathbf{f}_g = \mathbf{R} \mathbf{S} \delta \mathbf{f}_d + \mathbf{R} \delta \mathbf{S} \mathbf{f}_d + \delta \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (3.65)$$

com:

$$\delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\beta & -\text{cos}\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}\beta & -\text{sen}\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\beta & -\text{cos}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\beta & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \beta \quad (3.66)$$

e:

$$\delta \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l^2 & -1/l^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l^2 & 1/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta l \quad (3.67)$$

Tendo em conta as equações (3.57) e (3.64), a equação (3.65) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\delta \mathbf{f}_e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T \delta \mathbf{u}_e + (\delta \mathbf{S} + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{R} \mathbf{S}) \mathbf{f}_d \quad (3.68)$$

Finalmente, de posse da equação (3.60), a matriz de rigidez tangente em relação ao sistema de coordenadas locais pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r \quad (3.69)$$

onde o primeiro termo, como dito anteriormente, representa a matriz de rigidez material, enquanto  $\mathbf{K}_r$  é a matriz de rigidez corrotacional, que representa o efeito da variação da rotação de corpo rígido do sistema de coordenadas local e do efeito do esforço cortante devido à variação no comprimento do elemento, que de acordo com as equações (3.55) e (3.56) se define como:

$$\mathbf{K}_r \delta \mathbf{u}_e = (\delta \mathbf{S} + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{R} \mathbf{S}) \mathbf{f}_d \quad (3.70)$$

De acordo com as equações (3.50) e (3.51), percebe-se que a variação da matriz de transformação  $\mathbf{S}$  depende da variável  $\delta l$  e a variação da matriz de rotação  $\mathbf{R}$  depende de  $\delta \beta$ . Tendo em conta as equações (3.61) e (3.62), após algum desenvolvimento algébrico, chega-se a

$$\mathbf{K}_r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Esta matriz faz parte da matriz de rigidez geométrica completa do elemento de viga 2D como se demonstrará posteriormente. Para  $\beta=0$  as equações (3.46) e (3.47) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{r} = (-1, 0, 0, 1, 0, 0)^T = (-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)^T \quad (3.72)$$

$$\mathbf{z} = (0, -1, 0, 0, 1, 0)^T = (-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)^T \quad (3.73)$$

Substituindo as equações (3.72) e (3.73) na equação (3.59), chega-se na seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_g = \frac{N}{l} \left( \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} \right) + \frac{Q}{l} \left( \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.74)$$

Ao desenvolver algebricamente a equação (3.74), chega-se na expressão da matriz  $\mathbf{K}_r$  dada pela equação (3.71). Portanto, demonstra-se que a formulação corrotacional descrita nas seções 3.3 e 3.5 é um caso particular, para  $\beta = 0$ , da formulação corrotacional descrita no item 3.4. Para os demais valores de  $\beta$ , ambas são idênticas. Finalmente, para obter a matriz de rigidez tangente em coordenadas globais utiliza-se a matriz de rotação dada em (3.42), de modo que:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{R} \mathbf{K}_e \mathbf{R}^T \quad (3.75)$$

Por outro lado, a matriz de rigidez elástica  $\mathbf{K}_d$  é obtida por meio da diferenciação dos esforços internos  $f_d$  em relação aos deslocamentos locais  $\mathbf{u}_d$ , tal que:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial n}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial n}{\partial \bar{\theta}_1} & \frac{\partial n}{\partial \bar{\theta}_2} \\ \frac{\partial m_1}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial m_1}{\partial \bar{\theta}_1} & \frac{\partial m_1}{\partial \bar{\theta}_2} \\ \frac{\partial m_2}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial m_2}{\partial \bar{\theta}_1} & \frac{\partial m_2}{\partial \bar{\theta}_2} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

No próximo capítulo serão obtidas as matrizes de rigidez elásticas para os elementos de viga de Euler-Bernoulli, de Timoshenko e Euler-Bernoulli não linear. O primeiro é definido a partir da formulação clássica de Euler-Bernoulli utilizada na análise linear de estruturas e resistência dos materiais; o segundo elemento é obtido considerando uma relação entre os deslocamentos e a curvatura, além das deformações por cortante e esforço axial, a partir de funções

de interpolação lineares; no terceiro, leva-se em consideração o acoplamento entre os efeitos dos esforços de flexão e axial, que gera coeficientes não lineares na matriz de rigidez elástica.

## 4. MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA PARA DIFERENTES TEORIAS DE VIGA

### 4.1 ELEMENTO DE VIGA EULER-BERNOULLI

O movimento deformacional deste elemento é descrito pelas seguintes funções de forma:

$$u = \frac{x}{l_0} \bar{u} \quad (4.1)$$

$$v = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{l_0} \left(\frac{x}{l_0} - 1\right) \bar{\theta}_2 \quad (4.2)$$

É importante destacar que os deslocamentos transversais  $v_1$  e  $v_2$  são nulos, devido as funções de formas estarem descritas em relação ao sistema de referência local na configuração deformada do elemento conforme consta na Figura 3-1. Por consequência disso, a curvatura e a deformação de um ponto no interior do elemento se definem como:

$$\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(-\frac{4}{l_0} + 6\frac{x}{l_0^2}\right)^2 \bar{\theta}_1 + \left(-\frac{2}{l_0} + 6\frac{x}{l_0^2}\right) \bar{\theta}_2 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa y = \frac{\bar{u}}{l_0} + y \left( \left(\frac{4}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2}\right)^2 \bar{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2}\right) \bar{\theta}_2 \right) \quad (4.4)$$

Ao aplicar uma variação virtual no vetor de deslocamentos locais, tem-se uma variação virtual da deformação, e por consequência, a partir do princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$\delta V = \int_V \sigma \delta \varepsilon dV = n \delta \bar{u} + m_1 \delta \bar{\theta}_1 + m_2 \delta \bar{\theta}_2 \quad (4.5)$$

$$n = \int_A \sigma dA; m_1 = \int_A \sigma y dA; m_2 = - \int_A \sigma y dA \quad (4.6)$$

Assumindo que  $\sigma = E\varepsilon$  e substituindo a equação (4.4) nas relações estabelecidas em (4.6) se obtém o vetor de esforços internos, que é descrito como:

$$\mathbf{f}_d = \begin{Bmatrix} n \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l_0} \bar{u} \\ \frac{EI}{l_0} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \\ \frac{EI}{l_0} (2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2) \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Agora, diferenciando cada componente do vetor de esforços internos na equação (4.7) em relação aos deslocamentos locais  $(\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ , obtém-se a matriz de rigidez elástica dada por:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

#### 4.2 ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO

No elemento de viga de Timoshenko são usadas funções de interpolação lineares para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  no sistema de referência local como:

$$u = \frac{x}{l_0} \bar{u} \quad (4.9)$$

$$v = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{l_0} \left(\frac{x}{l_0} - 1\right) \bar{\theta}_2 \quad (4.10)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \bar{\theta}_1 + \frac{x}{l_0} \bar{\theta}_2 \quad (4.11)$$

A curvatura, a deformação por corte e a deformação axial são dadas, respectivamente, por:

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{l_0} \quad (4.12)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{l_0} \bar{\theta}_2 \quad (4.13)$$



$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa y = \frac{\bar{u}}{l_0} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{l_0} y \quad (4.14)$$

As equações constitutivas se definem como  $\sigma = E\varepsilon$  e  $\tau = G\gamma$ . Os esforços internos são calculados usando o princípio dos trabalhos virtuais considerando as deformações por cortante. Assim, tal princípio pode ser escrito como:

$$\delta V = \int_V (\sigma \delta \varepsilon + \tau \delta \gamma) dV = n \delta \bar{u} + m_1 \delta \bar{\theta}_1 + m_2 \delta \bar{\theta}_2 \quad (4.15)$$

Além disso, as variações virtuais  $\delta \gamma$  e  $\delta \varepsilon$  se calculam a partir das equações (4.13) e (4.14), respectivamente, o que permite escrever que:

$$\delta V = \int_V \left[ \sigma \left( \frac{\delta \bar{u}}{l_0} - \frac{\delta \bar{\theta}_2 - \delta \bar{\theta}_1}{l_0} y \right) - \tau \left( \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \delta \bar{\theta}_1 + \frac{x}{l_0} \delta \bar{\theta}_2 \right) \right] dV \quad (4.16)$$

Utilizando um único ponto de Gauss,  $x = l_0/2$ , para evitar o bloqueio por cortante nas equações (4.15) e (4.16), os esforços internos são obtidos como:

$$n = \int_V \frac{\sigma}{l_0} dV = \int_A \sigma dA \quad (4.17)$$

$$m_1 = \int_V \left( \frac{\sigma}{l_0} y - \frac{\tau}{2} \right) dV = \int_A \sigma y dA - \frac{l_0}{2} \int_A \tau dA \quad (4.18)$$

$$m_2 = \int_V \left( -\frac{\sigma}{l_0} y - \frac{\tau}{2} \right) dV = -\int_A \sigma y dA - \frac{l_0}{2} \int_A \tau dA \quad (4.19)$$

Levando em consideração as equações constitutivas definidas anteriormente e as equações (4.13) e (4.14), obtém-se a seguinte expressão para o vetor de esforços internos:

$$\mathbf{f}_d = \begin{Bmatrix} n \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l_0} \bar{u} \\ \frac{EI}{l_0} (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} GAl_0 (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \\ \frac{EI}{l_0} (-\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} GAl_0 (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Por último, diferenciando cada componente do vetor de esforços internos na equação (4.20) em relação aos deslocamentos locais, obtém-se a matriz de rigidez elástica, dada por:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 \\ 0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

#### 4.3 ELEMENTO DE VIGA EULER-BERNOULLI NÃO LINEAR

A denominação *não linear* refere-se ao acoplamento entre os efeitos do esforço axial e de flexão, o que resulta na obtenção de coeficientes não lineares na matriz de rigidez elástica do elemento. Portanto, a deformação em um ponto qualquer do elemento é dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon_f - \kappa y = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx - \kappa y \quad (4.22)$$

onde  $\varepsilon_f$  é uma medida de distribuição média de deformação axial ao longo do comprimento do elemento, estabelecida com o objetivo de evitar o bloqueio por deformação de membrana. É admitida a linearização da rotação do elemento, definida pela segunda derivada dos deslocamentos verticais, pelo fato de assumir a hipótese de deformações infinitesimais. Percebe-se que no integrando da equação (4.22) constam parcelas tanto da deformação axial quanto da rotação da seção transversal para o cálculo da dita deformação. Usando as funções de interpolação dadas pelas equações (4.1) e (4.2) e a definição de curvatura dada na equação (4.3), a equação (4.22) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l_0} + \frac{1}{15}\bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 + \frac{1}{15}\bar{\theta}_2^2 + y \left( \left( \frac{4}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_2 \right) \quad (4.23)$$

cuja variação virtual se expressa da seguinte maneira:

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta\bar{u}}{l_0} + \frac{2\bar{\theta}_1\delta\bar{\theta}_1}{15} - \frac{\bar{\theta}_2\delta\bar{\theta}_1}{30} - \frac{\bar{\theta}_1\delta\bar{\theta}_2}{30} + \frac{2\bar{\theta}_2\delta\bar{\theta}_2}{15} + y \left( \left( \frac{4}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) \delta\bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) \delta\bar{\theta}_2 \right) \quad (4.24)$$

Ao aplicar o princípio dos trabalhos virtuais e tendo em conta a equação (4.24), obtém-se os esforços internos como:

$$n = \int_V \frac{\sigma}{l_0} dV = \int_A \sigma dA \quad (4.25)$$

$$m_1 = \left( \frac{2}{15}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_2 \right) \int_V \sigma dV + \int_V \sigma y \left( \frac{4}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) dV = \left( \frac{2}{15}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_2 \right) l_0 \int_A \sigma dA + \int_A \sigma y dA \quad (4.26)$$

$$m_2 = \left( -\frac{1}{30}\bar{\theta}_1 + \frac{2}{15}\bar{\theta}_2 \right) \int_V \sigma dV + \int_V \sigma y \left( \frac{2}{l_0} - 6\frac{x}{l_0^2} \right) dV = \left( -\frac{1}{30}\bar{\theta}_1 + \frac{2}{15}\bar{\theta}_2 \right) l_0 \int_A \sigma dA + \int_A \sigma y dA \quad (4.27)$$

Admitindo  $\sigma = E\varepsilon$  e utilizando as equações (4.25), (4.26) e (4.27), obtém-se o vetor de esforços internos da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_d = \begin{Bmatrix} n \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EAe \\ \frac{EI}{l_0}(4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) + EAl_0 e e_1 \\ \frac{EI}{l_0}(2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2) + EAl_0 e e_2 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

em que:

$$e = \frac{\bar{u}}{l_0} + \frac{1}{15}\bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 + \frac{1}{15}\bar{\theta}_2^2 \quad (4.29)$$

$$e_1 = \frac{2}{15}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_2 \quad (4.30)$$

$$e_2 = -\frac{1}{30}\bar{\theta}_1 + \frac{2}{15}\bar{\theta}_2 \quad (4.31)$$

Por último, diferenciando cada componente do vetor de esforços internos na equação (4.28) em relação aos deslocamentos locais, obtém-se a matriz de rigidez elástica dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & & \\ EAe_1 & \frac{4EI}{l_0} + EAl_0\left(\frac{2}{15}e + e_1^2\right) & \frac{2EI}{l_0} + EAl_0\left(-\frac{1}{30}e + e_1e_2\right) \\ EAe_2 & \frac{2EI}{l_0} + EAl_0\left(-\frac{1}{30}e + e_1e_2\right) & \frac{4EI}{l_0} + EAl_0\left(\frac{2}{15}e + e_2^2\right) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Observa-se que os termos  $e$ ,  $e_1e_2$ ,  $e_1^2$  e  $e_2^2$  são funções quadráticas das variáveis  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$ , portanto os coeficientes da matriz em (4.32) que possuem estes termos são não lineares em relação a  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$ .

## 5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulações numéricas realizadas com os elementos obtidos no presente trabalho. As respostas serão comparadas com aquelas apresentadas por outros autores em trabalhos já consolidados, de modo a validar a formulação aqui obtida.

Para realizar as análises não linear geométricas dos exemplos apresentados neste capítulo, utilizou-se um código computacional em linguagem Fortran denominado 2Dbeam\_nl.f90. Na apresentação das trajetórias de equilíbrio, serão convencionadas as siglas EB para o elemento de viga Euler-Bernoulli; EBNL para o elemento de viga Euler-Bernoulli não linear; e TI para o elemento de viga Timoshenko. Em todos os exemplos foi admitida uma tolerância de convergência de  $10^{-5}$ . O objetivo é demonstrar o desempenho destes elementos de viga para reproduzir o comportamento diante das não linearidades severas características de alguns sistemas estruturais.

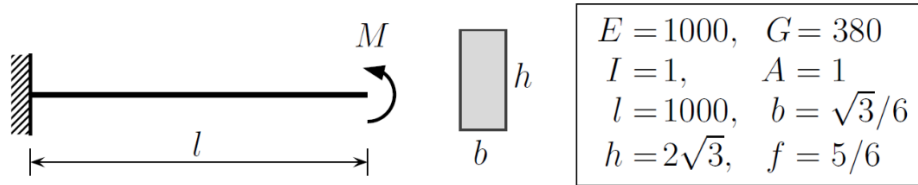
É importante ressaltar que dentre os três elementos de viga aqui apresentados, o elemento de viga Timoshenko é o menos refinado, pois utiliza funções de interpolação lineares, enquanto o elemento de viga Euler-Bernoulli não linear é o mais refinado, pois além de utilizar funções de interpolação de terceiro grau, ainda considera o acoplamento entre os efeitos dos esforços axiais e de flexão. Em consequência disto, a resposta não linear de um sistema estrutural obtida utilizando os três tipos de elemento só será a mesma se a magnitude das deformações for infinitesimal; se as deformações forem pequenas ou medianas, a resposta será ligeiramente distinta. Além do mais, conforme será visto nos exemplos, os elementos de viga aqui descritos possuem a habilidade de lidar com grandes translações e rotações de corpo rígido, e o elemento de viga Timoshenko não apresenta bloqueio por cortante.

### 5.1 VIGA ENGASTADA SOB FLEXÃO PURA

O seguinte exemplo ilustra a habilidade da formulação desenvolvida no presente trabalho em lidar com grandes rotações e translações de corpo rígido devido à aplicação da função módulo definida nas equações (3.21) e (3.22). Tem-se uma viga engastada, sujeita a um momento fletor em sua extremidade livre, que se enrolará em círculos de raio cada vez menores à medida que cresce o valor do momento aplicado. Na Figura 5-1 são detalhadas as propriedades geométricas e mecânicas da viga, que foi discretizada em 10, 20 e 40 elementos. Foram utilizadas malhas mais refinadas a fim de obter uma melhor aproximação para os círculos de raio menor. Observa-se que

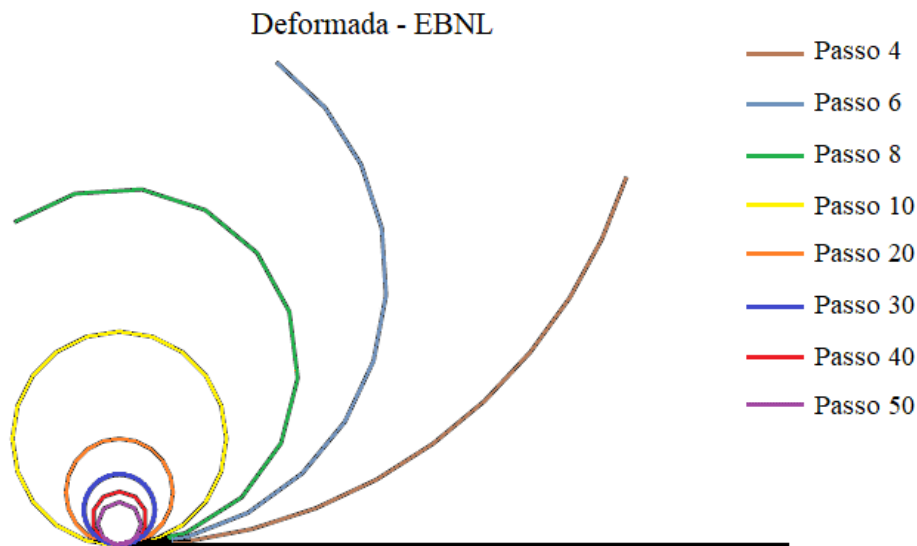
quanto mais a malha é refinada, melhor é a representação da magnitude dos deslocamentos à medida que aumenta o número de voltas.

Figura 5-1: Propriedades geométricas e mecânicas da viga engastada.



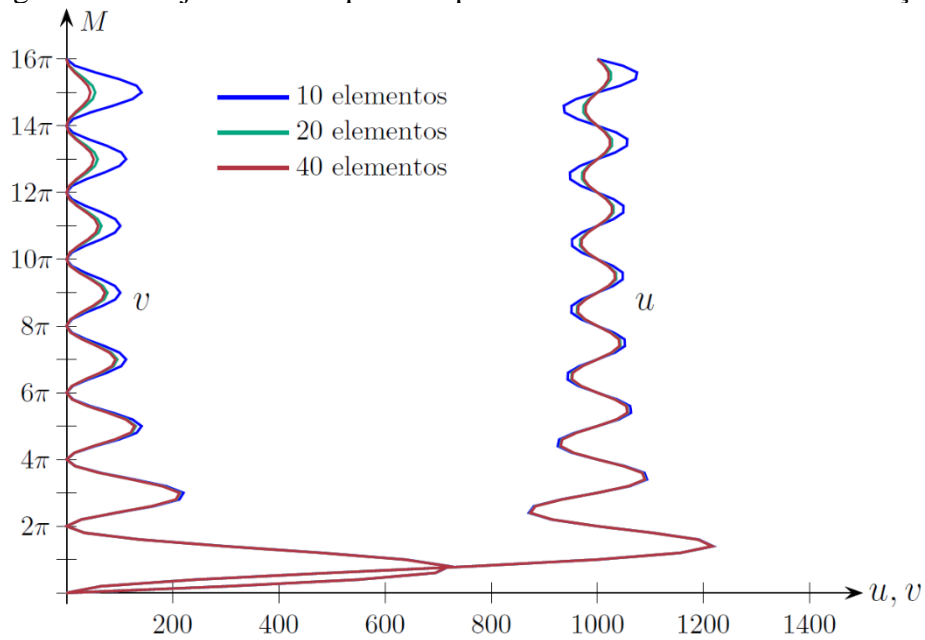
Na Figura 5-2, tem-se a deformada da viga com 5 voltas completas, obtida com a malha de 40 elementos. O primeiro círculo se forma quando  $l = 2\pi r$ , ou seja, quando se completa uma volta. Nesse caso, o raio de curvatura será  $r = l/2\pi$ , a curvatura  $\kappa = 2\pi/l$  e o momento fletor  $M = 2\pi EI/l$ . No exemplo foram simuladas 8 voltas com 80 passos de carga, tendo o raio assumido o valor de  $1000/16\pi \cong 19,89$ , com a extremidade livre apresentando uma rotação de  $2880^\circ$ . Não foi possível representar com precisão 8 círculos com malha de 40 elementos, pois o comprimento de cada elemento é de  $1000/40 = 25 > 19,89$ .

Figura 5-2: Deformada da estrutura discretizada com 40 elementos para 50 passos de carga.



As trajetórias de equilíbrio obtidas para diferentes níveis de discretização são ilustradas na Figura 5-3. Para a discretização com 10 elementos, a trajetória de equilíbrio foi obtida com um número médio de 5,68 iterações; para 20 elementos, o valor médio foi de 5,04 iterações, enquanto para 40 elementos o valor médio foi de 6 iterações.

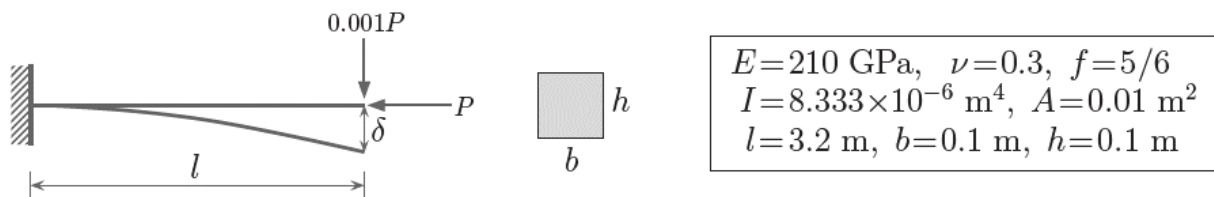
Figura 5-3: Trajetórias de equilíbrio para diferentes níveis de discretização.



## 5.2 COLUNA DE EULER

Neste exemplo é considerada a flambagem da coluna de Euler com uma extremidade engastada e a outra livre, conforme a Figura 5-4, na qual também são descritas as propriedades geométricas e mecânicas da coluna, que foi discretizada com 10 elementos de viga EB, EBNL e TI.

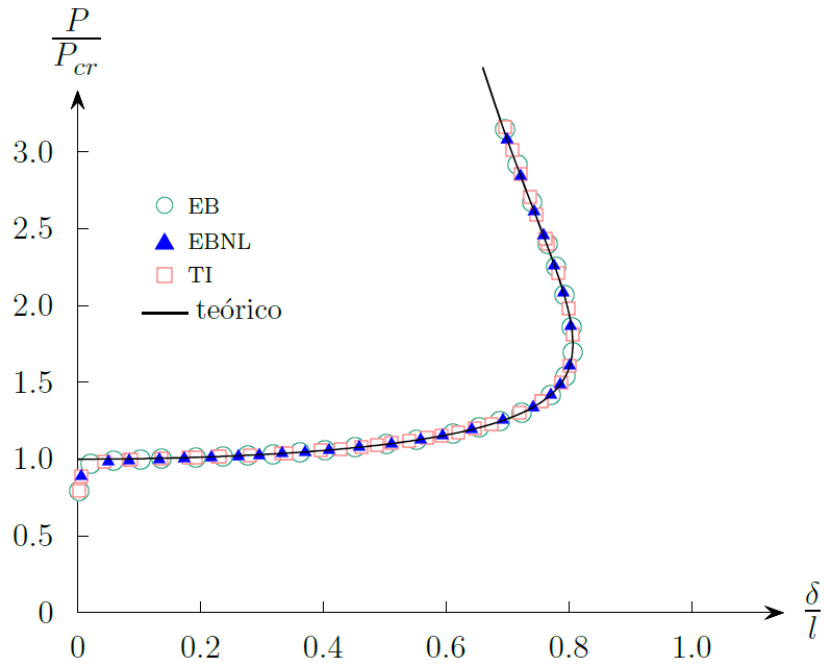
Figura 5-4: Propriedades geométricas e mecânicas da coluna de Euler.



Para que fosse possível obter a trajetória secundária de equilíbrio, foi aplicada uma carga transversal de  $0,001P$  na extremidade livre. Na Figura 5-5 é mostrada a referida trajetória obtida pela aplicação de uma integral elíptica completa de primeira espécie extraída de Timoshenko (2009) que foi comparada com a trajetória de equilíbrio obtida para os três tipos de elemento de viga. Observa-se uma boa concordância entre os resultados analíticos e numéricos, e também se observa uma coincidência entre os resultados numéricos obtidos para os três diferentes elementos, o que possibilita concluir que as deformações são infinitesimais no comportamento pós crítico da coluna, pelo fato desta apresentar grandes translações e rotações de corpo rígido. Para obter a resposta não linear da flambagem da coluna de Euler utilizou-se o método de controle variável dos

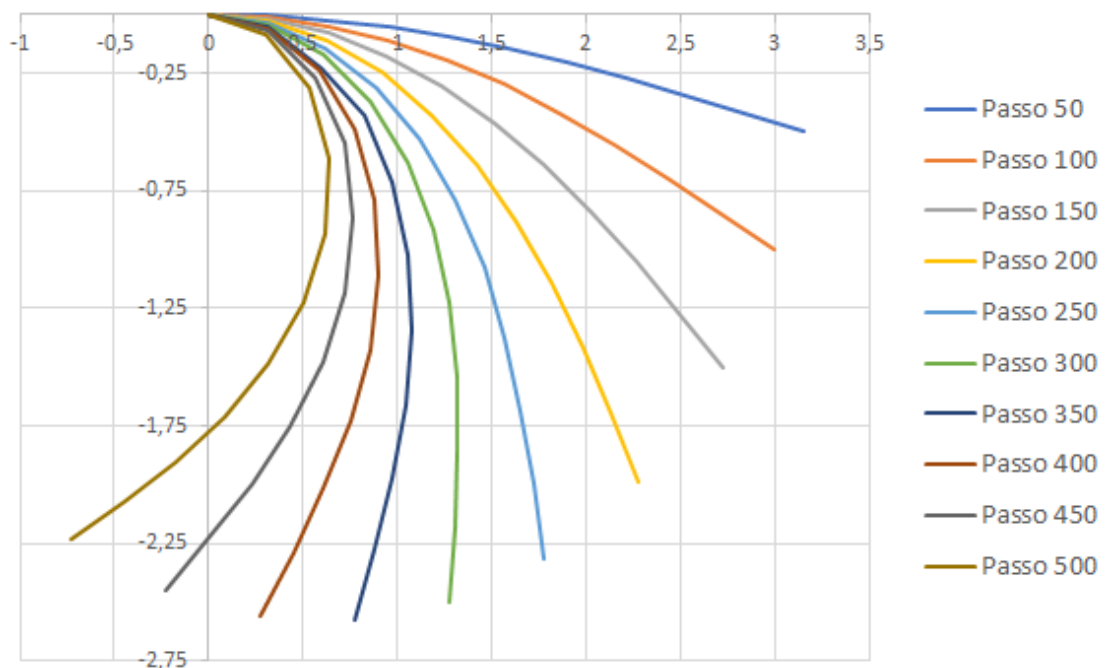
deslocamentos conforme Matias (2002). O valor do comprimento de arco foi de 0,01 para 500 passos de carga. O número médio de iterações foi 2. Estes dados foram os mesmos para os três tipos de elemento de viga utilizados na análise numérica.

Figura 5-5: Trajetória secundária de equilíbrio da coluna de Euler.



Na Figura 5-6, tem-se a deformada da estrutura, indicados os respectivos passos de carga. Observa-se a ocorrência de grandes deslocamentos de corpo rígido, enquanto as deformações ainda permanecem em regime infinitesimal, com valores de magnitude da ordem de  $10^{-4}$ .

Figura 5-6: Deformada

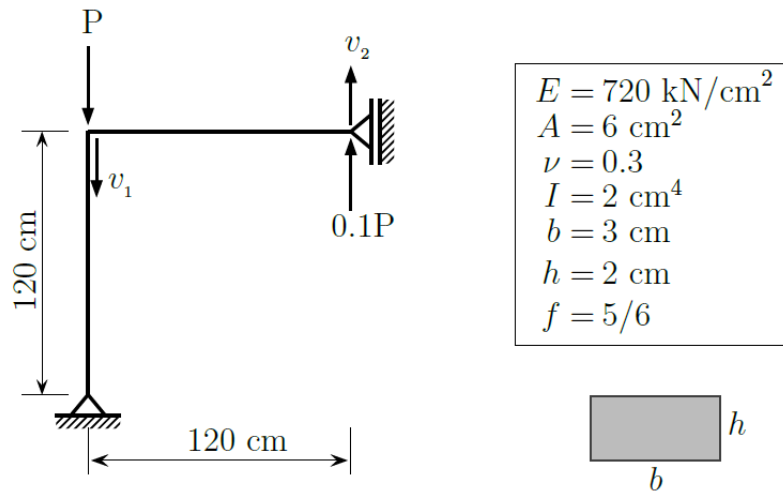




### 5.3 PÓRTICO DE LEE

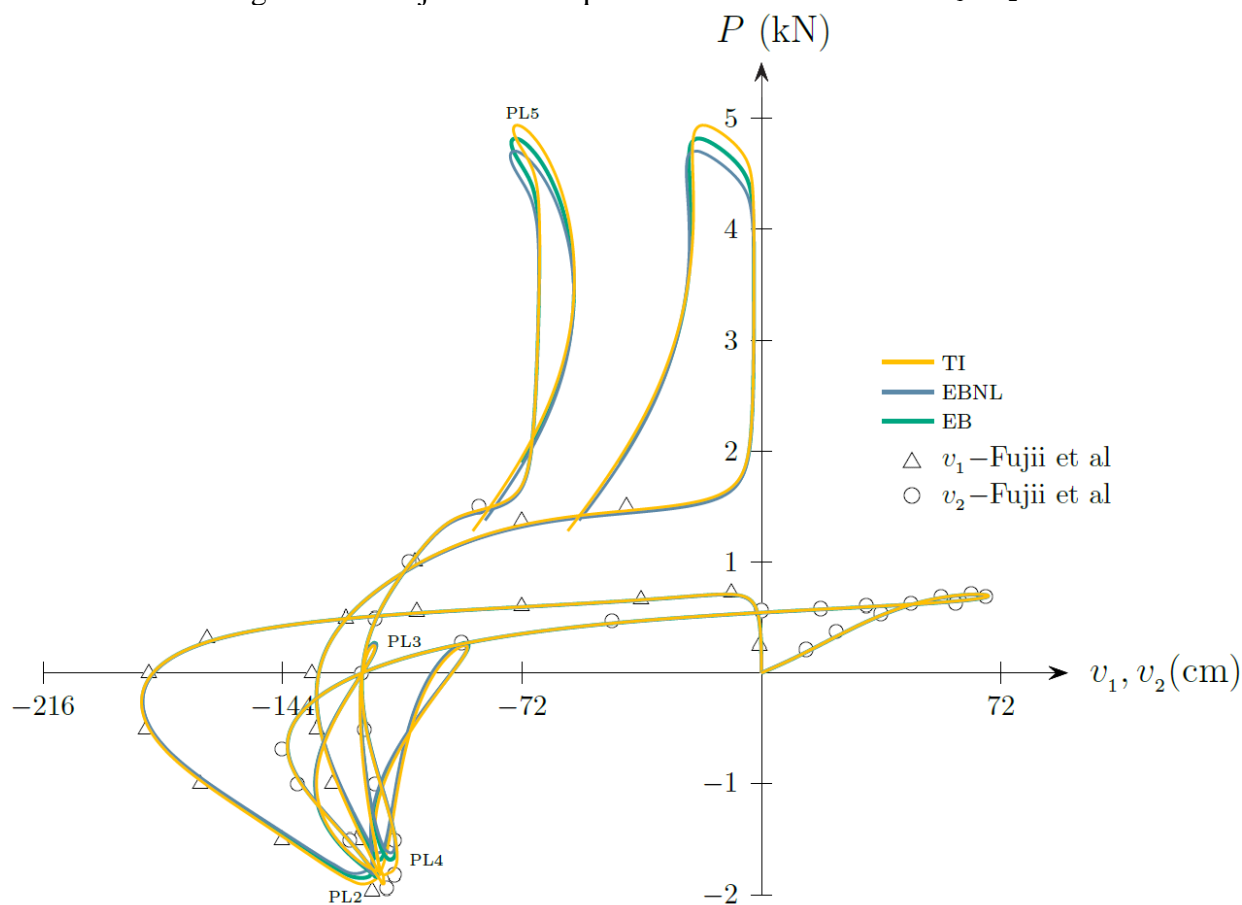
Este exemplo consiste na união de uma viga e uma coluna formando entre si um ângulo reto. Uma das extremidades possui um apoio com duas restrições, enquanto o outro apresenta um apoio com apenas uma restrição, que permite o deslocamento na direção do eixo  $y$ . As condições de carga, assim como as propriedades geométricas e mecânicas estão descritas na Figura 5-7. A estrutura foi discretizada com 20 elementos de viga EB, EBNL e TI, respectivamente.

Figura 5-7: Pórtico de Lee. Propriedades geométricas e mecânicas.



Na Figura 5-8 se mostram as trajetórias de equilíbrio, onde se descreve a evolução dos deslocamentos verticais  $v_1$  do nó rígido do pórtico e  $v_2$  do apoio de primeiro gênero, conforme indicados na Figura 5-7. São relacionados os deslocamentos com o fator de carga para o processo de carga para os três tipos de elemento aqui deduzidos. Observa-se que na maior parte da trajetória de equilíbrio os diferentes tipos de elementos apresentam curvas coincidentes, tanto para  $v_1$  quanto para  $v_2$ , exceto nos trechos próximos aos pontos limites PL2, PL4 e PL5. Estas diferenças devem-se ao fato de as deformações nesses trechos da trajetória são consideráveis. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos por Fuji *et al.* (1992), no qual foi usada uma malha de 10 elementos de viga 2D. A trajetória foi obtida com o método de comprimento de arco com restrição cilíndrica. O comprimento de arco inicial para os três tipos de elemento foi de 12,5. Para o elemento EB foram atingidos 285 passos de carga com 43 cortes automáticos devido à divergência do processo iterativo, com um número médio de 4,43 iterações. Com o elemento EBNL foram dados 328 passos de carga, 55 cortes automáticos e número médio de iterações de 4,41. Para o elemento TI foram 350 passos de carga com 78 cortes automáticos e um número médio de 4,65 iterações. Nota-se que o comportamento do pórtico de Lee é severamente não linear, com vários pontos limites, pontos de retorno e *loopings*.

Figura 5-8: Trajetórias de equilíbrio dos deslocamentos  $v_1$  e  $v_2$ .



Na Tabela 5-1 são mostrados os valores máximos de deformação obtidos nas análises para cada tipo de elemento, considerando todos os elementos da malha. A partir daí, percebe-se que apesar da estrutura apresentar grandes deslocamentos de corpo rígido, as deformações situam-se no domínio de valores infinitesimais.

Tabela 5-1: Deformação máxima obtida para cada tipo de elemento e passo de carga correspondente.

	EB	EBNL	TI
Valor de deformação máximo absoluto	-3,71%	-3,70%	-3,70%
Passo de carga	148	150	135

Na Figura 5-9, tem-se as deformadas obtidas para o elemento EBNL, indicados os passos de carga correspondentes, o que também consta na Figura 5-10 e na Figura 5-11. A diferença entre as deformadas obtidas para os diferentes tipos de elementos adotados não foi significativa.

Figura 5-9: Deformada para o elemento EBNL - Passos 20 a 100

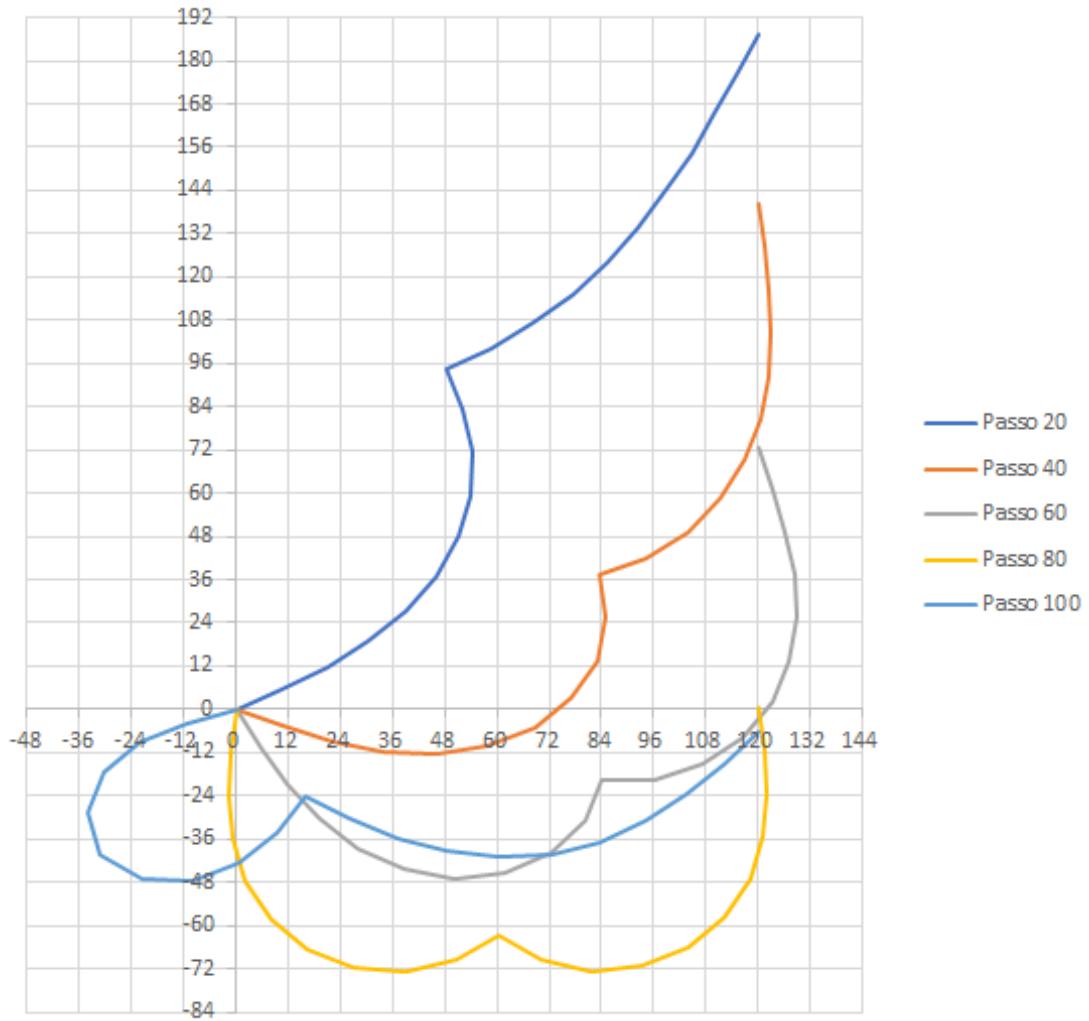
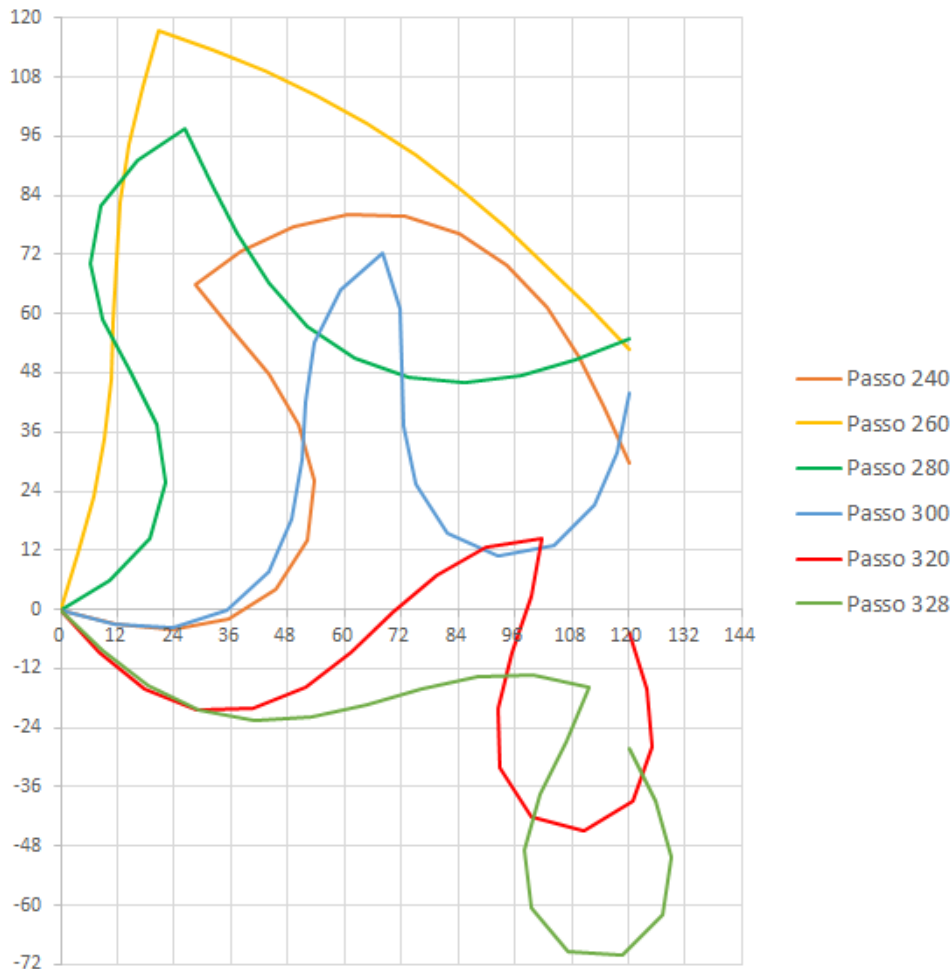


Figura 5-10: Deformada para o elemento EBNL - Passos 120 a 220



Figura 5-11: Deformada para o elemento EBNL - Passos 240 a 328



#### 5.4 ARCO CIRCULAR BIARTICULADO REBAIXADO

Neste exemplo considera-se um arco rebaixado de diretriz circular, ambas extremidades em apoios de 2º gênero, e submetido a uma carga  $q$  uniformemente distribuída na primeira metade do arco conforme constante na Figura 5-12. Nela, são definidas as propriedades geométricas e mecânicas do arco, que foi discretizado com 20 elementos de viga EB, EBNL e TI.

Na Figura 5-13 são ilustradas as curvas de carga normalizada  $qr^3/EI$  em função do deslocamento vertical normalizado  $v/r$  no vértice para os três elementos de viga. As trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o método de controle variável de deslocamento, e para os três tipos de elemento foi adotado o comprimento de arco inicial de 0,1. Com o elemento EB, foram atingidos 176 incrementos de carga e o número médio de iterações foi 3,89. Para o elemento TI foram dados 173 passos de carga com número médio de 4,00 iterações. Com o elemento foram 169 passos de carga com 4,00 iterações em média.

Figura 5-12: Propriedades geométricas e mecânicas do arco circular biarticulado rebaixado.

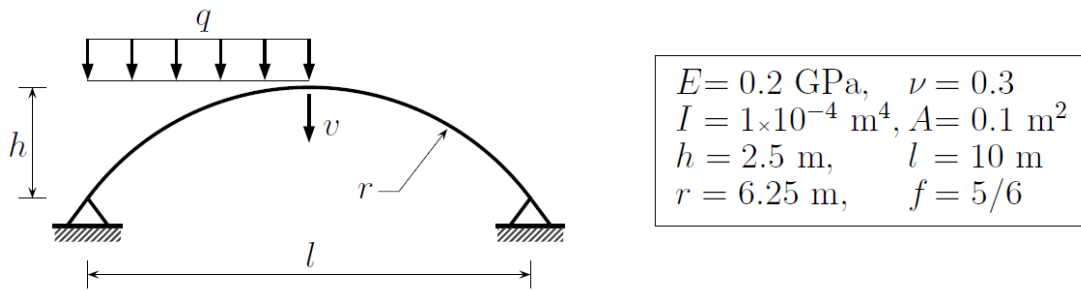
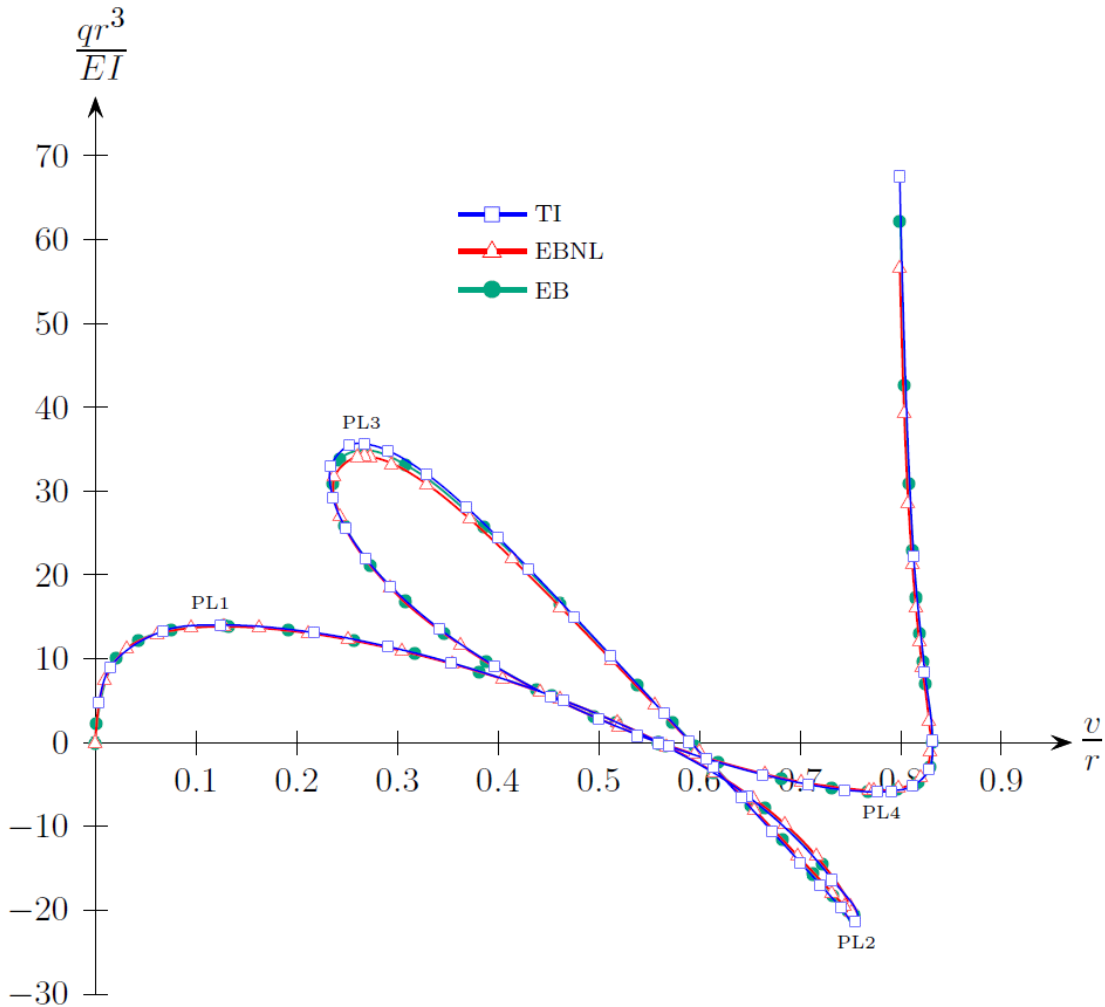


Figura 5-13: Trajetória de equilíbrio para os elementos TI, EB e EBNL.



Observa-se que não há diferenças significativas entre as três trajetórias de equilíbrio, exceto nos valores próximos aos pontos limites PL2, PL3 e PL4. Os valores normalizados da carga nos pontos limites PL1, PL2 e PL3 foram comparados com os valores obtidos por Xu e Mirmiran (1997), no qual os autores utilizaram uma formulação corrotacional e um elemento de viga que inclui termos não lineares da deformação axial de Green, com uma malha de 20 elementos. Os valores destas cargas são detalhados na Tabela 5-2. A maior diferença foi verificada para o

elemento TI no PL2, o que se justifica pelo fato de ser o elemento mais simples dentre os que foram utilizados.

Tabela 5-2: Valores da carga  $qr^3/EI$  nos pontos limites

	PL1	PL2	PL3
Xu e Mirmiran	13,77	-20,09	33,99
EB	13,92	-20,71	34,86
diferença (%)	1,09	3,09	2,56
EBNL	13,83	-20,25	34,17
diferença (%)	0,44	0,8	0,53
TI	14,02	-21,28	35,62
diferença (%)	1,82	5,92	4,80

Na Figura 5-14, Figura 5-15 e Figura 5-16 são ilustradas as configurações deformadas obtidas para o elemento EBNL.

Figura 5-14: Deformada para elemento EBNL. Passos de carga 15, 30 e 45.

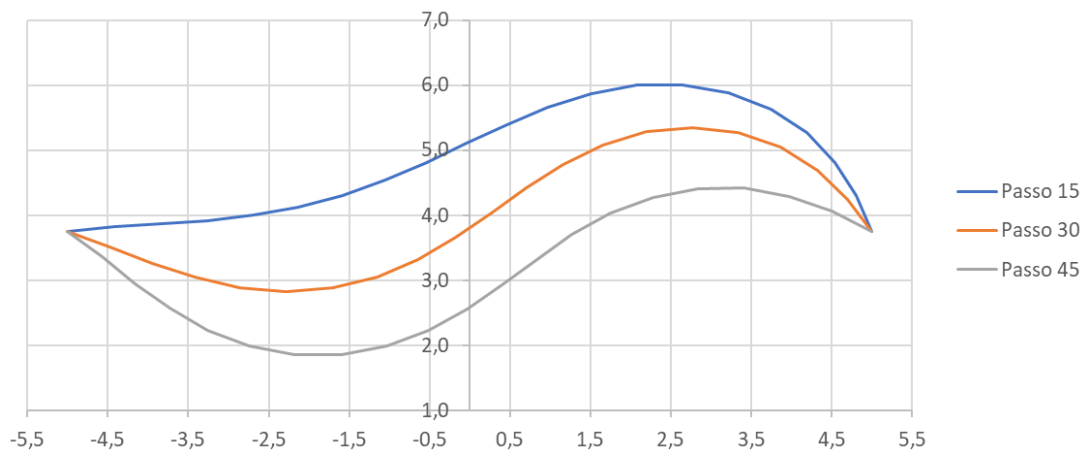


Figura 5-15: Deformada para o elemento EBNL. Passos de carga 75, 90 e 120.

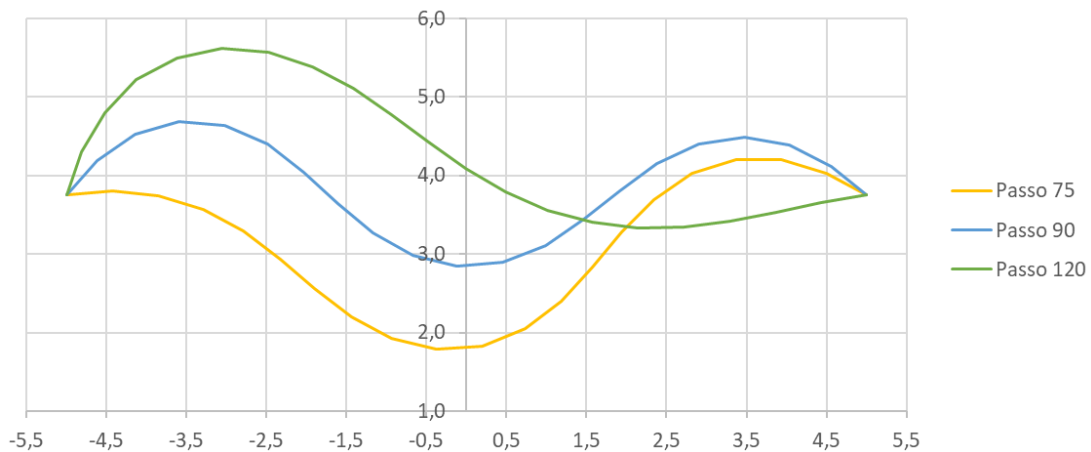
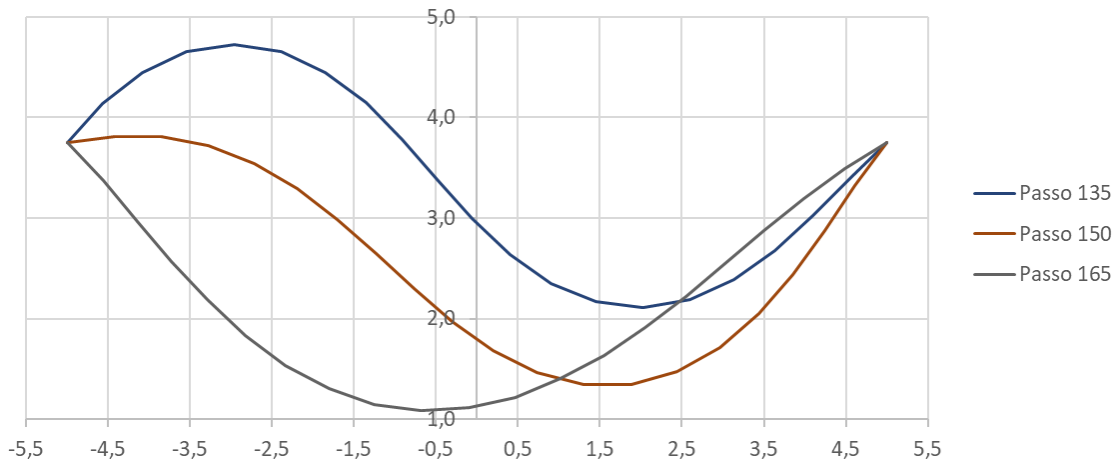


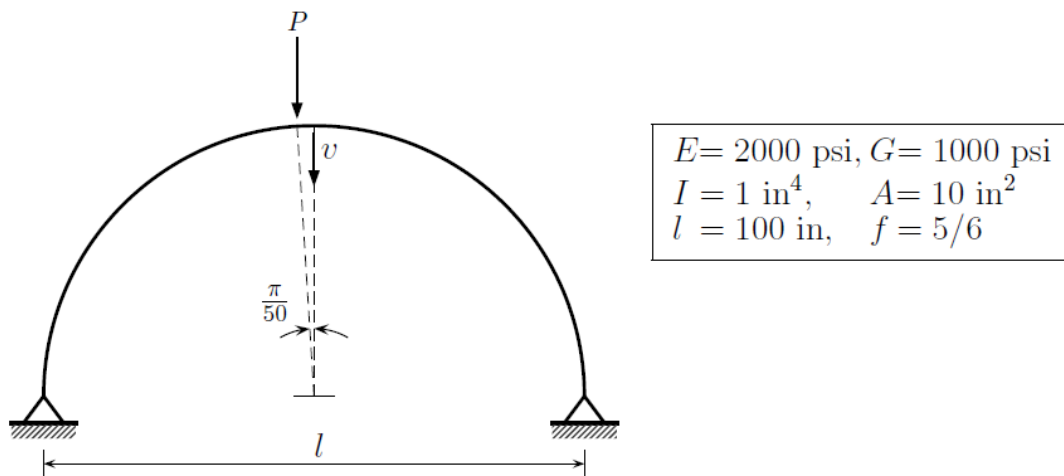
Figura 5-16: Deformada para o elemento EBNL. Passos de carga 135, 150 e 165.



### 5.5 ARCO SEMICIRCULAR BIARTICULADO

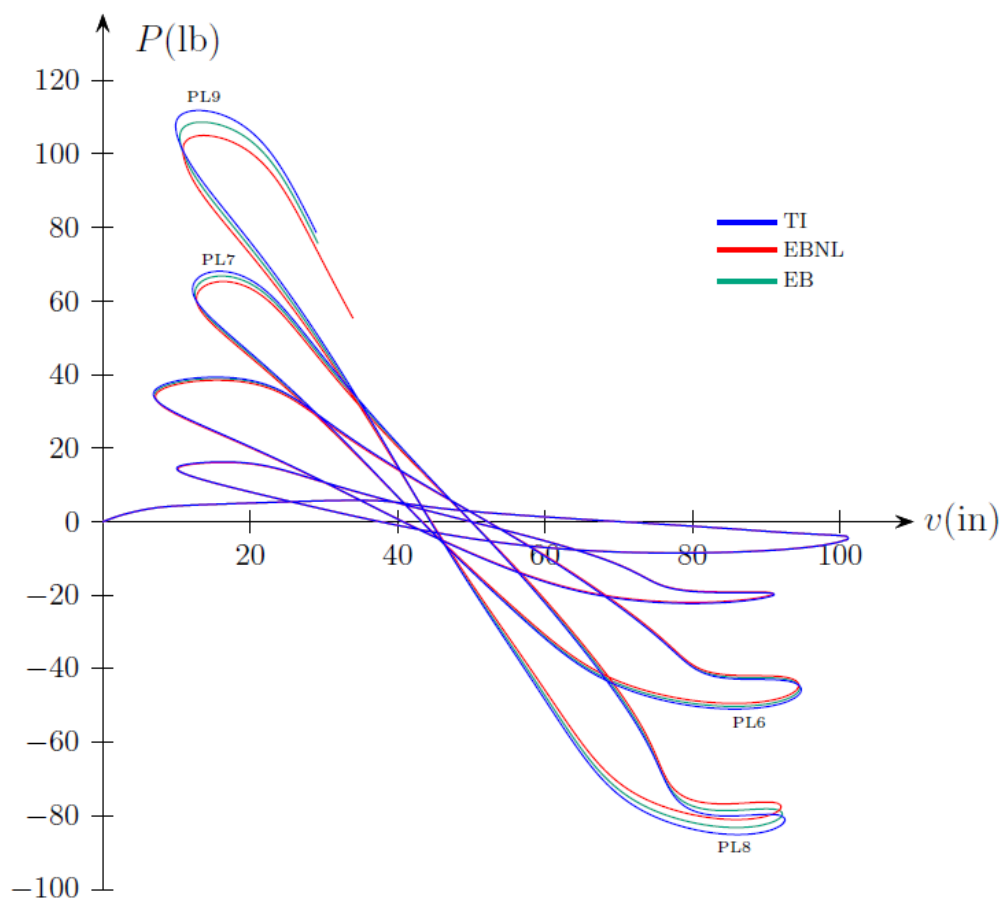
Neste exemplo, considera-se um arco semicircular biapoado submetido a uma carga  $P$  excêntrica a seu vértice, como mostrado na Figura 5-17. São detalhadas as propriedades geométricas adotadas da estrutura, que foi discretizada em 50 elementos de viga EB, EBNL e TI.

Figura 5-17: Propriedades geométricas e mecânicas do arco semicircular biarticulado.



Na são ilustradas as trajetórias de equilíbrio, correlacionando a carga  $P$  com o deslocamento vertical do vértice  $v$  para os três modelos de viga. Percebe-se que há uma boa concordância entre as trajetórias de equilíbrio, exceto em valores próximos dos pontos limites PL6, PL7, PL8 e PL9, porém com diferenças mais acentuadas em torno dos pontos PL8 e PL9, ao que indica serem trechos nos quais os elementos apresentam deformações finitas, devido à própria configuração deformada que a estrutura assume.

Figura 5-18: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical no vértice do arco x fator de carga para os elementos TI, EBNL e EB.



Na Tabela 5-3, os valores da carga  $P$  nos pontos limites foram comparados com os valores apresentados por Yang e Kuo (1994), que utilizaram uma formulação lagrangeana atualizada e um elemento de viga que inclui termos não lineares da deformação axial de Green e uma malha com 26 elementos.

Tabela 5-3: Valores de carga  $P$  nos pontos limites

	PL1	PL2	PL3	PL4	PL5	PL6	PL7	PL8	PL9
Yang e Kuo	5,813	-8,498	16,149	-22,162	38,566	-49,896	64,875	-82,42	104,61
EB	5,811	-8,495	16,204	-22,086	38,932	-50,206	66,786	-83,138	108,61
diferença (%)	0,03	0,04	0,34	0,34	0,95	0,62	2,95	0,87	3,82
EBNL	5,802	-8,464	16,108	-21,912	38,453	-49,394	65,227	-80,967	104,99
diferença (%)	0,19	0,40	0,25	1,13	0,29	1,00	0,62	1,76	0,36
TI	5,816	-8,518	16,278	-22,240	39,328	-50,909	68,081	-85,055	111,81
diferença (%)	0,05	0,24	0,8	0,35	1,98	2,03	4,94	3,2	6,88



Para o elemento EB, a maior diferença obtida foi de 6,88%, no ponto limite PL9. Para o elemento EBNL, a maior diferença foi de 1,76%, no ponto limite PL8. Para o elemento TI, a maior diferença foi de 6,88% no ponto limite PL9. Para os pontos limites PL1, PL2, PL3 e PL4, as diferenças podem ser consideradas insignificantes, enquanto nos pontos PL6, PL7, PL8 e PL9 foram detectadas as maiores diferenças.

Na obtenção das trajetórias de equilíbrio foi utilizado o método de controle variável dos deslocamentos. O valor inicial do comprimento de arco foi de 2,2 para os três tipos de elemento de viga. Para o elemento EB foram utilizados 859 passos de carga com 91 cortes automáticos devido à divergência do processo iterativo. O número médio de iterações foi 4,23. Com o elemento TI foram 840 passos de carga, 93 cortes automáticos e um número médio de 4,25 iterações. Para o elemento EBNL foram 859 passos de carga com 89 cortes automáticos e um número médio de 4,22 iterações. Nota-se que as trajetórias de equilíbrio do arco, mostradas na Figura 5-17b, são severamente não lineares, com vários pontos limites, pontos de retorno e *loopings*. A estrutura deforma para o elemento EBNL é ilustrada na Figura 5-19, Figura 5-20, Figura 5-21, Figura 5-22, Figura 5-23, Figura 5-24 e Figura 5-25, nas quais é indicado o passo de carga correspondente a cada uma das configurações deformadas exibidas.

Figura 5-19: Deformada para elemento EBNL até o 100º passo de carga.



Figura 5-20: Deformada para elemento EBNL do 120° ao 220° passo de carga.

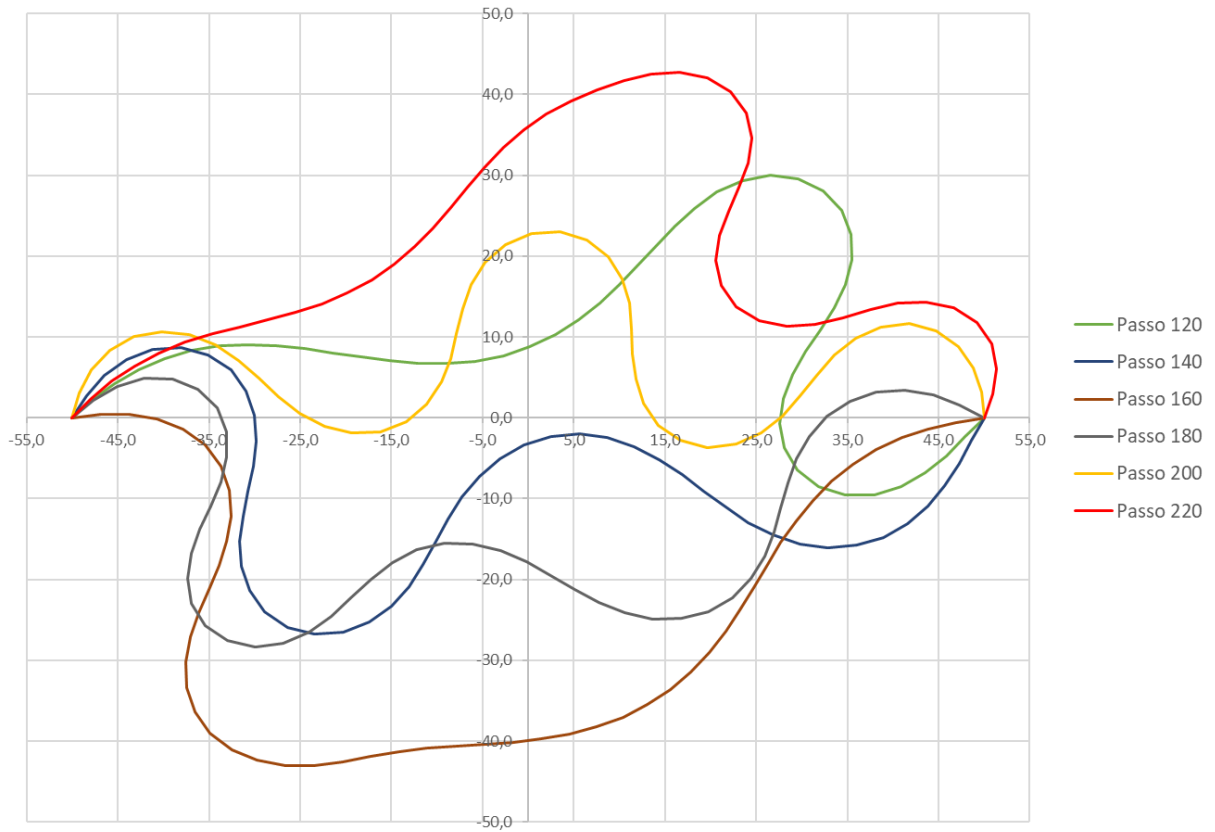


Figura 5-21: Deformada para elemento EBNL do 240° ao 360° passo de carga.

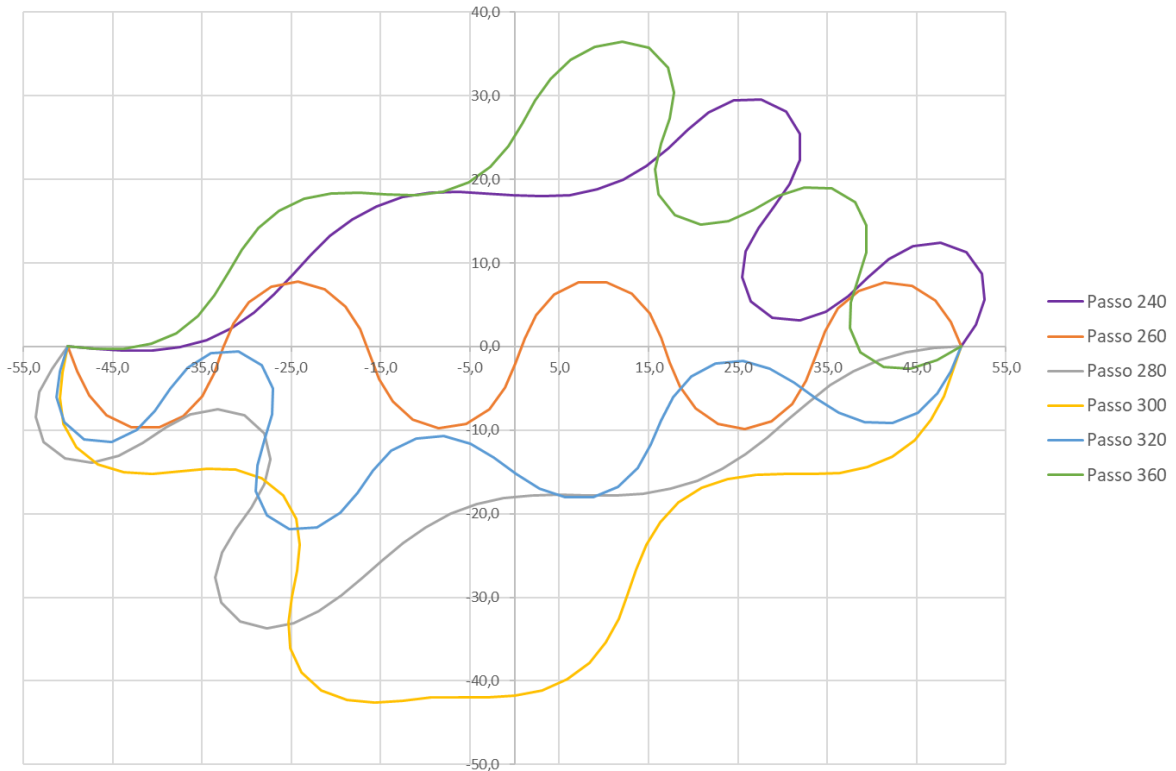


Figura 5-22: Deformada para elemento EBNL do 380° ao 500° passo de carga.

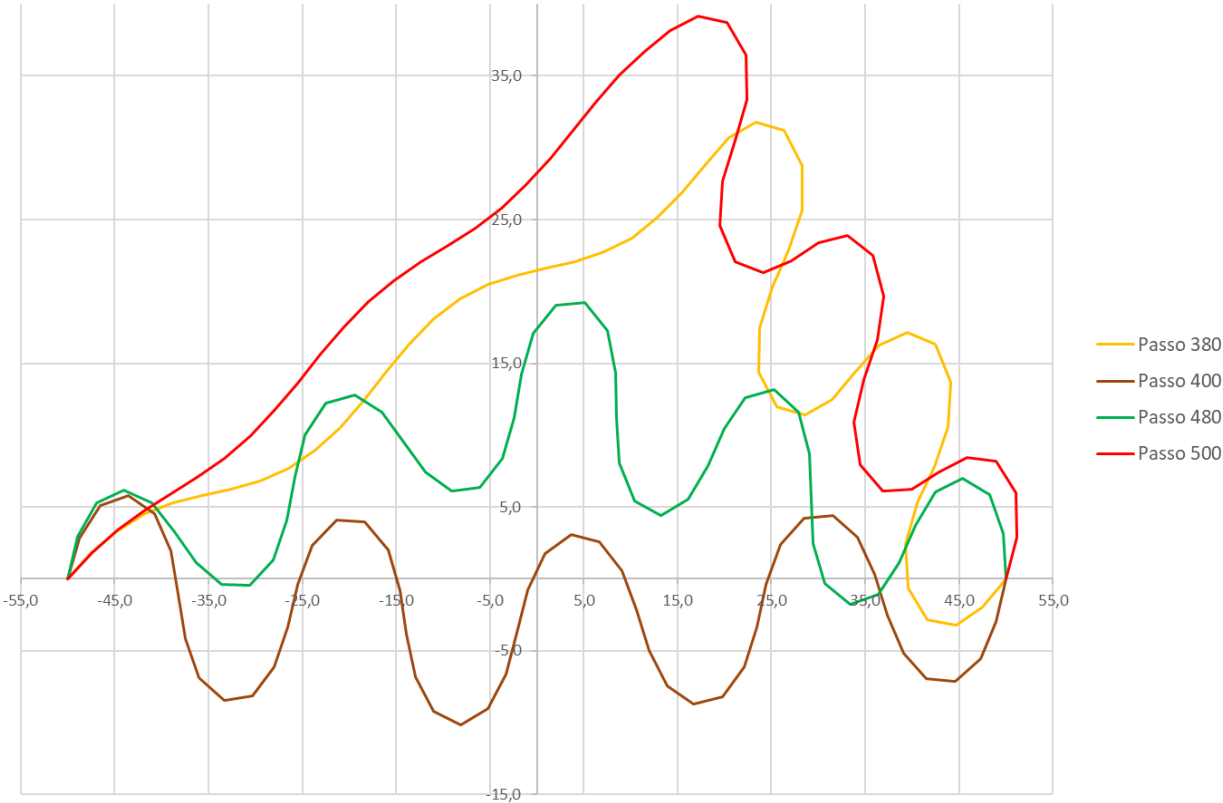


Figura 5-23: Deformada para elemento EBNL do 520° ao 640° passo de carga.

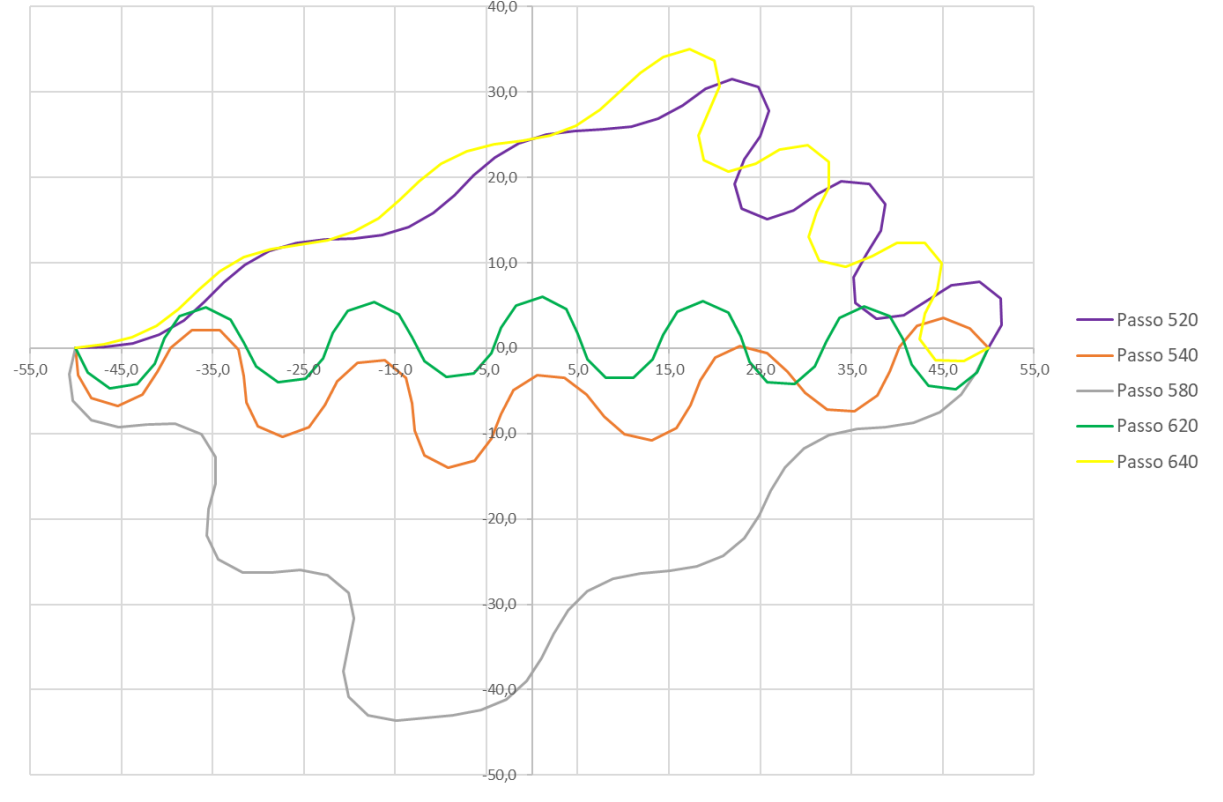


Figura 5-24: Deformada para elemento EBNL do 660° ao 740° passo de carga.

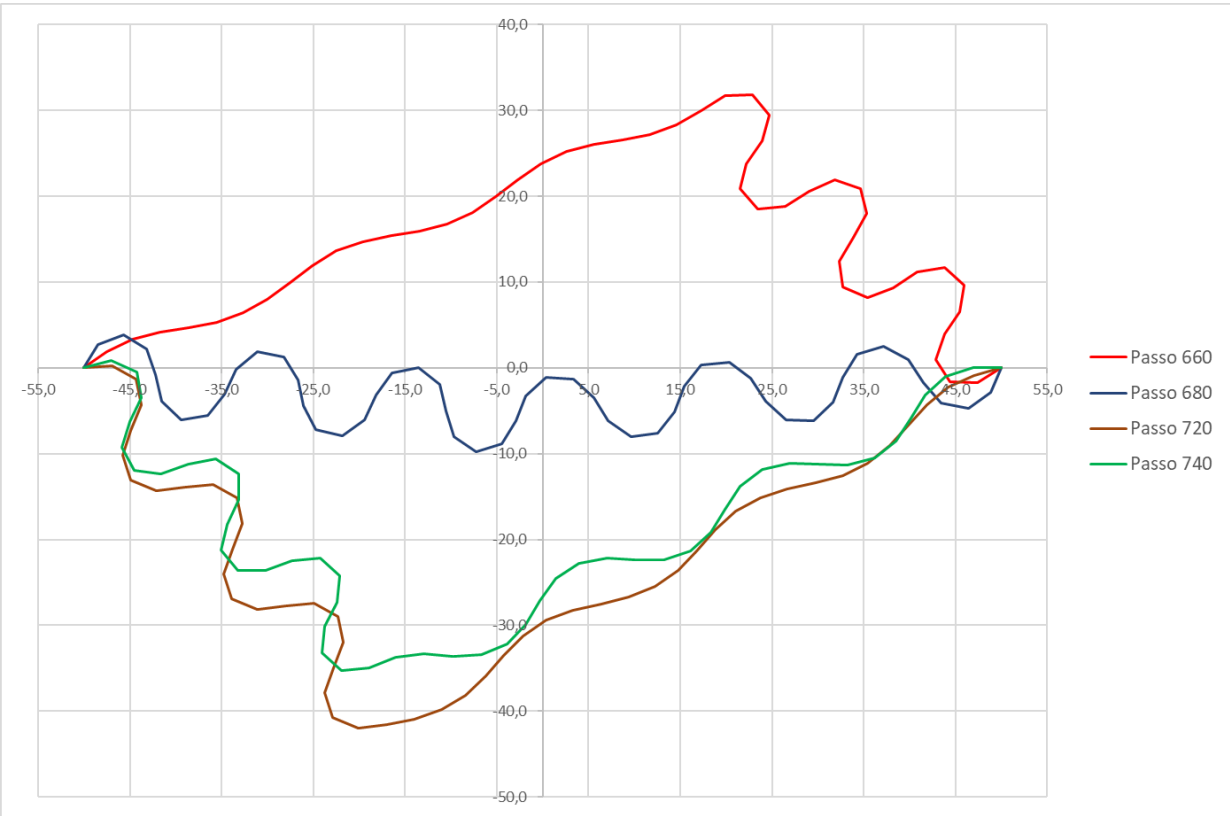
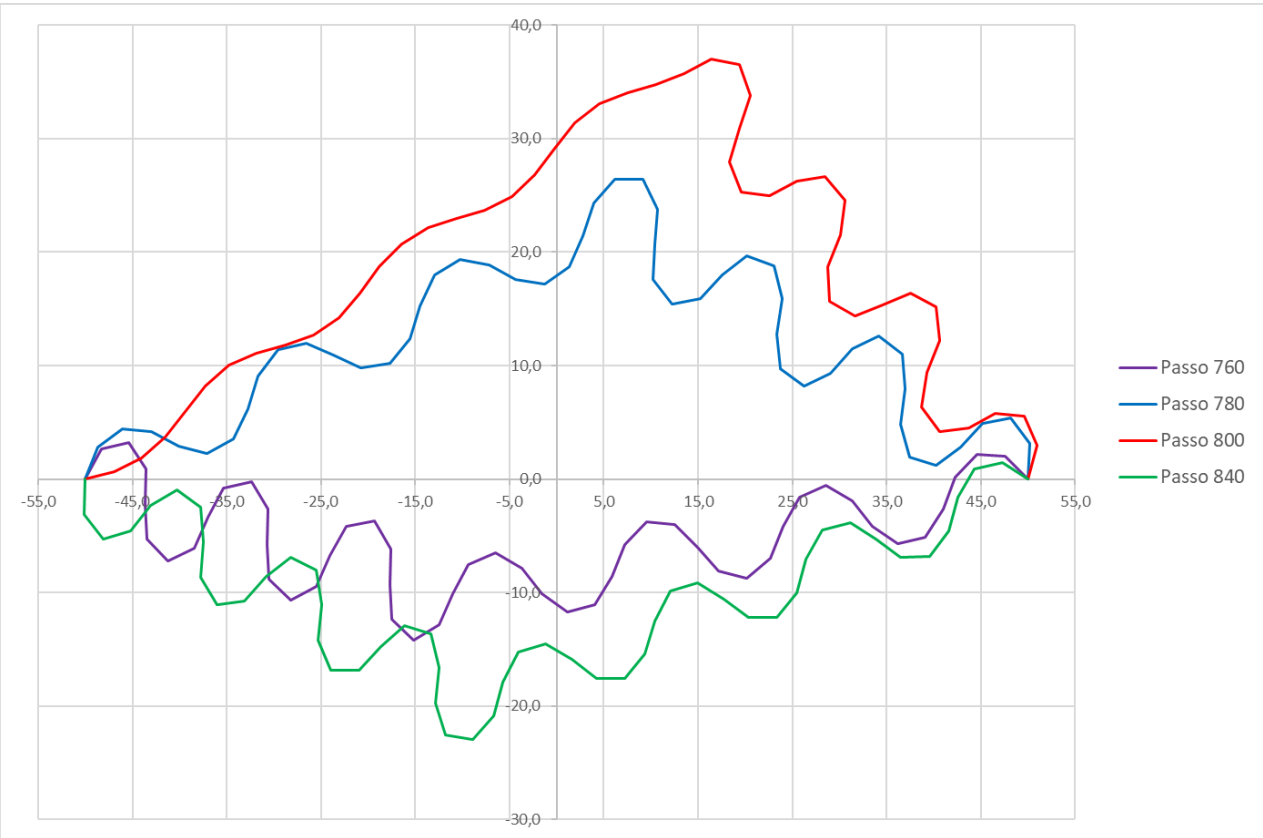


Figura 5-25: Deformada para elemento EBNL do 760° ao 840° passo de carga.



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÕES

Os elementos aqui utilizados apresentaram excelente desempenho na análise não linear de vigas, pórticos e arcos. Verifica-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas são praticamente idênticas para as diferentes tipologias estruturais analisadas, no caso de deformações infinitesimais. Para estados de deformações no domínio das deformações finitas, há uma pequena diferença nas trajetórias de equilíbrio. De maneira geral, os resultados obtidos com os três modelos de viga coincidem com trabalhos de outros autores.

A formulação corrotacional aqui descrita é independente do modelo de viga 2D que será utilizado, o que permite destacar uma das principais vantagens da formulação corrotacional, cujo desacoplamento entre os efeitos locais e globais permite utilizar bibliotecas de elementos finitos oriundos da análise linear. A extrapolação destes para a análise não linear geométrica se dá ao considerar os efeitos globais devidos aos movimentos de corpo rígido, e diferentes tipos de não linearidades físicas podem ser incorporadas à formulação descrita pelo fato de serem consideradas como efeitos locais, na parcela relativa à rigidez elástica da matriz de rigidez tangente.

Nos exemplos numéricos, percebe-se a habilidade dos três modelos de vigas contemplarem grandes rotações de corpo rígido quando se utiliza a formulação corrotacional e o artifício da função módulo. Através de operações algébricas bastante simples, descreve-se de maneira explícita o movimento de corpo rígido do elemento e a obtenção da matriz de rigidez tangente em coordenadas globais.

As trajetórias de equilíbrio obtidas nos exemplos numéricos evidenciam a necessidade da análise da estrutura ir além dos pontos limites, pois em boa parte dos casos estes apresentam-se como pontos de máximo local, o que indica que a estrutura ainda apresenta capacidade resistente adicional. Tal fato atesta a importância das técnicas de solução numérica via comprimento de arco para que os sistemas estruturais possam ter sua resposta estudada por completo, considerando a fase pós-crítica do processo de carregamento.

### 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora a formulação aqui apresentada tenha se mostrado satisfatoriamente eficiente para aquilo que se propõe, percebe-se que ainda há aspectos que podem ser adicionalmente abordados,

o que superaria algumas limitações dos tipos de problemas que o programa é capaz de contemplar, especialmente relativos às condições de carregamento, geometria e modelos constitutivos dos materiais componentes das estruturas analisadas.

Além disso, pode-se mencionar a possibilidade de melhoria na usabilidade do programa, no qual os dados de entrada e saída são constituídos por arquivos de texto, sendo necessária a utilização de programas complementares para visualização gráfica dos dados de entrada e resultados obtidos. Dessa forma, após concluída esta etapa do trabalho, pode-se prosseguir com as seguintes possibilidades de continuação:

- Implementação de modelos de não linearidade física, abordando diferentes relações constitutivas para os materiais empregados, a partir de modelos elastoplásticos e/ou viscoelásticos.
- Previsão do efeito de cargas dinâmicas.
- Implementação de um modelo de dano mediante análise plástica limite pelo método cinemático e/ou análise plástica incremental pelo método estático, possibilitando a modelagem do comportamento da estrutura em colapso por perda de equilíbrio quando da formação de sucessivas rótulas plásticas.
- Comparação dos resultados obtidos pelo programa *2Dbeam\_nl.f90* com aqueles fornecidos por softwares comerciais de utilização consolidada no meio técnico e científico, como *Abaqus* e *ANSYS*, por exemplo.
- Extrapolação da formulação para elementos de viga tridimensionais, possibilitando a análise de estruturas de maior aplicabilidade prática.
- Modificação do algoritmo de solução numérica dos sistemas de equações não lineares com o estabelecimento de uma estratégia de detecção de pontos de bifurcação, para que seja possível obter trajetórias secundárias de equilíbrio.
- Desenvolvimento de uma interface gráfica de pré e pós processamento de dados, o que facilitaria a utilização do programa e possibilitaria a visualização e interpretação dos resultados de forma mais rápida e intuitiva.

## REFERÊNCIAS

- ADDESSI, D., DI RE, P., SACCO, E. **Corotational Beam-Interface Model for Stability Analysis of Reinforced Masonry Walls**. Proceedings of XXIV AIMETA Conference 2019, 1939-1953, 2020.
- ARGYRIS, J. H. **Continua and discontinua**. Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Tecnology, Dayton, Ohio-USA, 1965.
- BATTINI, J. M. **A non-linear corotational 4-node plane element**. Mechanics Research Communications, v. 35, Issue 6, 408–413, 2008.
- BELO, I. M. **Desenvolvimento da formulação co-rotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC, Brasil, 2009.
- BELYTSCHKO, T. e HSIEH, B. J. **Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Convected Co-Coordinates**. International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.7, 255-271, 1973.
- BERGAN, P. G. e NYGARD, M. K. **Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements**. Finite Element Methods for Nonlinear Problems. Berlim, pp. 317–338, 1989.
- CARDONA, A. **An integrated approach to mechanism analysis**. Tese de doutorado. Belgium: University of Liege, 1989.
- COLE, G. **Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations**. Ph.D thesis, School of Civil Engineering – Kingston Polytechnic, 1990.
- CRISFIELD, M. A. **A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beamelements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 81, pp. 131–150, 1990.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids And Structures, Volume 1: Essential**. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.
- CRISFIELD, M. A. e MOITA, G. F. **A unified co-rotational framework for solids, shells and beams**. International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No 20-22, pp. 2969-2992, 1996.
- CORTIVO, N. **Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo elastoplástico por camadas e o elemento finito ANDES**. Tese de doutorado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2004.
- CUNHA, A. A. **Análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional**

**e elementos de viga unificado Bernoulli-Timshenko.** Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2015.

DE BORST, R., CRISFIELD, M. A., REMMERS, J. J. C. e VERHOUSEL, C. V. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.** 2nd. Ed. John Wiley & Sons, UK, 2012.

FELIPPA, C. A. **A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192, 2125–2168, 2003.

FELIPPA, C. A. **Lecture Notes in Nonlinear Finite Element Methods.** Center for Aerospace Structures, Boulder, Colorado, 2004.

FELIPPA, C. A. **Recent advances in finite element templates.** Computational Mechanics for the Twenty-First Century, 2000.

FELIPPA, C. A. e Alexander, S. **Membrane triangles with corner drilling freedoms: III. Implementation and performance evaluation.** Finite Elements in Analysis and Design 12, 203–239, 1992.

FELIPPA, C. A. e HAUGEN, B. **A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194, 2285–2335, 2005.

FELIPPA, C. A. e MILITELLO, C. **Membrane triangles with corner drilling freedoms: II. The ANDES element.** Finite Elements in Analysis and Design 12, 189–201, 1992.

FELIPPA, C. A. e PARK, K.C. **The construction of free-free flexibility matrices for multilevel structural analysis.** Finite Elements in Analysis and Design. 191, 2111–2140, 2002.

FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. M. **The Dynamics of Flexible Bodies.** International Journal of Engineering Science, Pergamon Press, 895-913, 1976.

FUJII, F., CHOONG, K. K., GONG, S X. **Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames.** Computers & Structures, Vol. 44, Nº 1/2, 133-136, 1992.

HAUGEN, B. **Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements.** Tese de doutorado, University of Colorado, USA, 1994.

HENG, P., ALHASAWI, A., BATTINI, J.-M., e HJIAJ, M. **Co-rotating rigid beam with generalized plastic hinges for the nonlinear dynamic analysis of planar framed structures subjected to impact loading.** Finite Elements in Analysis and Design, 2019.

KRENK, S. **Mechanics and analysis of beams, columns and cables.** Springer, 2001.

KRENK, S. **Nonlinear modeling and analysis of solids and structures.** Cambridge University Press, 2009.

LANFENG, D. e ZHANG, Y. **A consistent corotational formulation for the nonlinear dynamic analysis of sliding beams.** Journal of Sound and Vibration 476, 115298, 2020.



- MATIAS, W. T. **El control variable de los desplazamientos em el análisis no lineal elástico de estructuras de barras.** Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 18, Nº 4, 549-572, 2002.
- MENIN, R. C. G. **Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas.** Tese de doutorado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2006.
- MENIN, R. C. G. e TAYLOR, W. M. S. **Resposta Pós-Crítica De Pórticos Planos Discretizados Com Elementos De Viga De Euler-Bernoulli Utilizando Uma Formulação Co-Rotacional.** XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce, 2003a.
- MENIN, R. C. G. **Resposta Pós-Crítica De Sistemas Articulados Com Diferentes Deformações Utilizando Uma Formulação Co-Rotacional.** XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce, 2003b.
- MENIN, R. C. G. **Análise Não-Linear Geométrica De Pórticos Espaciais Utilizando Uma Formulação Co-Rotacional.** XXXI Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. 2004.
- MENIN, R. C. G. **Aplicação Da Descrição Cinemática Corotacional Na Análise Não-Linear Geométrica De Estruturas Laminares.** XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce, 2005a.
- MENIN, R. C. G. **Não-Linearidade Geométrica De Cascas Finas Discretizadas Com Elementos Finites Triangulares Aplicando A Descrição Cinemática Corotacional.** Congreso de Métodos Numéricos en Ingenieria 2005/SEMNI, 2005b.
- MENIN, R. C. G. et al. **“Análise não-linear geométrica de treliças utilizando diferentes medidas de deformações”.** XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2006.
- MORORO, L. A. T., MELO, A. M. C., PARENTE JÚNIOR, E., LUCENA NETO, E., MONTEIRO, F. A. C. **Corotational elements for thin-walled laminated composite beams with large 3D rotations.** Thin-Walled Structures, 106375, 2019.
- NOUR-OMID, B. e RANKIN, C. C. **Finite rotation analysis and consistente linearization using projectors.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 93, 353-384, 1991.
- OLIVEIRA, G. G. **Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos.** Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2016.
- OLIVELLA, X. O. BOSCH, C. A. S. **Continuum Mechanics for Engineers.** 2nd. Edition. Barcelona: Edicions UPC, 2017.

- PACOSTE, C. **Co-Rotational Flat Facet Triangular Elements For Shell Instability Analyses**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 156, 75–110, 1998.
- PACOSTE, C. e ERIKSSON, A. **Beam Element In Instability Problems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 144, 163–197, 1996.
- PENG, X. e CRISFIELD, M. A. **A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle**. International Journal for Numerical Methods in Engineering 35, pp. 1829–1847, 1992.
- POSSIDENTE, L., TONDINI, N., e BATTINI, J.-M. **3D Beam Element for the Analysis of Torsional Problems of Steel-Structures in Fire**. Journal of Structural Engineering 146(7), 04020125, 2020.
- RANKIN, C. C. e BROGAN, F. A. **An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations**. ASME Journal of Pressure Vessel Technology 108, pp. 165–174, 1986.
- RANKIN, C. C. e NOUR-OMID, B. **The Use of Projectors to Improve Finite Element Performance**. Computers & Structures 30, 257–267, 1988.
- REDDY, J. N. **A Corotacional Finite Element Formulation for the Analysis of Planar Beams**. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 553-570, 2005.
- REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**. 2nd Edition. Cambridge University Press, 2013.
- SILVA, S. S. **Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Co-rotacional e Plasticidade por Camadas**. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2011.
- SILVA, S. S. **Utilização de Elementos Finitos de Alta Performance e da Formulação Co-rotacional na Análise Inelástica de Placas e Lâminas**. Tese de doutorado. Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2019.
- SILVA, T. C. **Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas**. Revista de Engenharia Civil IMED. V. 6, N. 1, 57-70, 2019.
- TANG, Y. Q., DU, E.-F., WANG, J.-Q e QI, J.-N. **A co-rotational curved beam element for geometrically nonlinear analysis of framed structures**. Structures 27, 1202-1208. 2020.
- TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. Second Edition. Dover, 2009.
- TRUESDELL, C. e R. A. TOUPINN. **The classical field theories**. Berlin: Springer, 1960.
- XU, J. LEE, C. K. TAN, K. H. **A two-dimensional co-rotational Timoshenko beam elemento with XFEM formulation**. Computational mechanics, Vol. 49, Issue 5, 667-683, 2012.

XU, Z. MIRMIRAN, A. **Looping Behavior of arches using corotational finite element.** Computers & Structures, Vol. 62, N° 6, 1059-1071, 1997.

YANG, Y. B. KUO, S. R. **Theory & analysis of nonlinear framed structures.** Prentice Hall, 1994.

YAW, L. L. SUKUMAR, N. e KUNNATH, S. K. **Meshfree co-rotational formulation for two dimensional continua.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 79(8), 979-1003, 2009.