



**ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO  
EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**LEONARDO BERNARDO E SILVA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais  
da Engenharia**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO  
EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**LEONARDO BERNARDO E SILVA**

**ORIENTADOR: PROF. DR. ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE, FT/UNB**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**PUBLICAÇÃO FGA.DM - 095A/2021  
BRASÍLIA-DF, 27 DE MAIO DE 2021**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA

ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO  
EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

LEONARDO BERNARDO E SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA/FA-  
CULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS RE-  
QUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:

Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque, FT/UnB

Orientador

Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge, FT/UnB

Examinador interno

Prof. Dr. Paulo Sollero, FEM/Unicamp

Examinador externo

BRASÍLIA, 27 DE MAIO DE 2021

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

LEONARDO BERNARDO E SILVA

**ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**2021xv, 75p., 201x297 mm**

(FGA-FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2021).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Método dos Elementos de Contorno
2. Materiais Anisotrópicos
3. Cargas Centrífugas

I. FGA-FT/UnB    II. Mestre (FGA.DM 095A/2021)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

LEONARDO BERNARDO E SILVA (2021). ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Publicação 095A/2021, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: LEONARDO BERNARDO E SILVA

TÍTULO: ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FORÇAS DE CORPO EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

GRAU: Mestre    ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de Mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

LEONARDO BERNARDO E SILVA

Correio Eletrônico: leobsilvaa@gmail.com

# Agradecimentos

*Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela minha saúde.*

*Agradeço a todos os membros da minha família, pois sem eles nenhuma das minhas realizações seriam possíveis, em especial minha mãe, Maria, meu pai, Dorli, e meu irmão, Henrique.*

*Ao meu orientador professor Éder Lima de Albuquerque, pelos ensinamentos e conselhos tanto acadêmicos, quanto pessoais. A toda paciência, colaboração e conhecimentos repassados durante o desenvolvimento deste trabalho. A você, toda a minha sincera gratidão!*

*Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia da UnB pela oportunidade.*

*A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.*

*Leonardo Bernardo e Silva*

---

## ABSTRACT

The main objective of this work is the development of a formulation of the boundary element method for the evaluation of problems in bodies of anisotropic materials under centrifugal loads. The fundamental anisotropic solutions are used and terms of inertia are considered as body forces. The domain integrals that arises from the inertial terms are transformed into boundary integrals using the radial integration method, as a result, no internal points are needed to improve the accuracy of the solution. Discontinuous quadratic boundary elements are used whose degrees of freedom are written in a local reference system, where the directions of the coordinate axes coincide with the normal and tangent directions to the boundary at the collocation point. Stresses and displacements are calculated at the boundary and at internal points. Problems with known analytical solutions are used in order to assess the accuracy of the proposed formulation. It is possible to notice that, there is a good agreement between the numerical and exact solutions.

Keywords: Boundary Element Method, Anisotropic Materials, Centrifugal Loads.

---

## RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno para a avaliação de problemas em corpos de materiais anisotrópicos sob cargas centrífugas. As soluções fundamentais anisotrópicas são utilizadas e os termos de inércia são considerados como forças do corpo. As integrais de domínio que resultam dos termos inerciais são transformadas em integrais de contorno usando o método de integração radial, com isso, nenhum ponto interno é necessário para melhorar a precisão da solução. São usados elementos de contorno quadráticos descontínuos cujos graus de liberdade são escritos em um sistema de referência local, onde as direções dos eixos de coordenadas coincidem com as direções normal e tangente ao contorno no ponto de colocação. As tensões e os deslocamentos são calculados no contorno e em pontos internos. Problemas com soluções analíticas conhecidas são usados a fim de avaliar a precisão da formulação proposta. É possível notar que, existe uma boa concordância entre as soluções numéricas e exatas.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Materiais Anisotrópicos, Cargas Centrífugas.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2	MATERIAIS COMPÓSITOS .....	1
1.3	SUPERLIGAS .....	3
1.4	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	4
1.5	OBJETIVO .....	6
1.5.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	6
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	6
<b>2</b>	<b>MECÂNICA DOS SÓLIDOS .....</b>	<b>8</b>
2.1	TENSÃO .....	8
2.2	DEFORMAÇÃO.....	11
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS E DE EQUILÍBRIO PARA MATERIAIS ANISOTRÓ- PICOS .....</b>	<b>12</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	12
3.2	EVOLUÇÃO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS.....	12
3.3	TIPOS E CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS .....	14
3.4	ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA .....	15
3.5	EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DE UMA LÂMINA .....	22
3.6	LAMINADOS SIMÉTRICOS.....	25
3.7	SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA UM DISCO ROTATIVO ORTOTRÓPICO.....	29
<b>4</b>	<b>TRATAMENTO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO PROVENIENTES DAS FORÇAS DE CORPO.....</b>	<b>32</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	32
4.2	FORMULAÇÃO INTEGRAL .....	32
4.3	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS ANISOTRÓPICAS .....	34
4.4	TRANSFORMAÇÃO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO NA INTEGRAL DE CON- TORNHO - MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL.....	37
4.5	EQUAÇÕES INTEGRAIS SINGULARES .....	39
4.6	FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DISCRETIZADA .....	40
4.7	FUNÇÕES DE FORMA QUADRÁTICAS DESCONTÍNUAS.....	41

4.8	SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL .....	47
4.9	TRATAMENTO DAS INTEGRAIS SINGULARES .....	48
4.10	CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM PONTOS INTERNOS ...	49
4.11	TENSÕES NO CONTORNO .....	51
<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>54</b>
5.1	PLACA QUADRADA .....	54
5.2	PLACA LAMINADA .....	55
5.3	DISCO ORTOTRÓPICO ROTATIVO .....	58
5.4	PALHETA DE TURBINA AERONÁUTICA .....	66
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>70</b>
6.1	TRABALHOS FUTUROS .....	71
6.2	PUBLICAÇÕES .....	71
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>73</b>



# LISTA DE FIGURAS

1.1	Boeing 787 Dreamliner tem aproximadamente 80% de volume (50% de peso) em compósitos (BOEING, 2014). .....	2
1.2	Impressão artística da turbomáquina no motor Trent 800 da Rolls-Royce, que alimenta a aeronave Boeing 777 (Cortesia da Rolls-Royce) (REED, 2006). .....	3
2.1	Corpo em equilíbrio sob as forças externas. ....	9
2.2	Vetores de tensão sobre as faces do elemento infinitesimal de volume. ....	10
3.1	Lâmina ortotrópica. ....	22
3.2	Sistemas de coordenadas da lâmina $(x_1x_2)$ e do laminado $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$ . ....	23
3.3	Laminado simétrico. ....	26
3.4	Transformação de sistemas de coordenadas. ....	29
3.5	Disco rotativo. ....	30
4.1	Transformação da integral de domínio em integral de contorno. ....	38
4.2	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular..	39
4.3	Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para $\xi$ . ....	42
4.4	Funções de forma quadráticas descontínuas. ....	43
4.5	Elementos descontínuos curvos. ....	44
4.6	Sobreposição de elementos descontínuos curvos. ....	45
4.7	Elementos contínuos curvos. ....	45
4.8	Funções de forma quadráticas contínuas. ....	46
4.9	Tensões no contorno. ....	51
5.1	Condições de contorno da placa quadrada. ....	55
5.2	Malha deformada da placa quadrada. ....	55
5.3	Condições de contorno da placa laminada. ....	56
5.4	Malha deformada da placa laminada. ....	57
5.5	Tensão no laminado no sistema global. ....	57
5.6	Tensão no laminado no sistema local. ....	58
5.7	Deformação do laminado no sistema global. ....	58
5.8	Malha de elementos de contorno usado para discretizar um quarto do disco rotativo (15 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 5 por aresta). ....	59
5.9	Deslocamento da aresta horizontal na direção $x$ . ....	60

5.10	Deslocamento da aresta vertical na direção $y$ .....	60
5.11	Tensão circunferencial ao longo da aresta vertical. ....	61
5.12	Tensão radial ao longo da aresta horizontal. ....	61
5.13	Erros percentuais para os deslocamentos na direção $x$ na aresta horizontal.....	62
5.14	Erros percentuais para os deslocamentos na direção $y$ na aresta vertical. ....	63
5.15	Erros percentuais para as tensões radiais na aresta horizontal. ....	64
5.16	Erros percentuais para as tensões tangenciais na aresta vertical.....	64
5.17	Erros. ....	65
5.18	Esboço do rotor e da palheta da turbina (PAPANIKOS; MEGUID; STJEPANOVIC, 1998).....	66
5.19	Condições de contorno da palheta. ....	67
5.20	Malha deformada da palheta. ....	67
5.21	Tensão normal na região de contato.....	68
5.22	Deslocamento tangencial na região de contato. ....	68

# LISTA DE TABELAS

5.1	Geometria e propriedade do material - placa quadrada.....	54
5.2	Geometria e propriedade do material - placa laminada.....	56
5.3	Geometria e propriedade do material - disco rotativo.....	59
5.4	Geometria e propriedade do material - palheta de turbina aeronáutica. ....	66

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$n$	Normal; ordem
$u$	Deslocamento
$t$	Tensão
$b$	Força de corpo
$h$	Espessura
$C$	Coefficiente de linearidade
$P$	Força
$S$	Tensor de flexibilidade
$E$	Elasticidade longitudinal
$G$	Elasticidade transversal
$Q$	Tensor de rigidez
$R$	Raio
$N$	Número de nós
$J$	Jacobiano

## Símbolos Gregos

$\sigma$	Tensão normal
$\varepsilon$	Deformação normal
$\Omega$	Domínio
$\Gamma$	Contorno de um domínio
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\zeta$	Coefficiente de Chentsov
$\mathcal{U}$	Função potencial
$\rho$	Densidade
$\Delta$	Delta de Dirac
$\omega$	Velocidade angular constante

## Grupos Adimensionais

$\xi$  Coordenada ao longo do elemento

## Siglas

MEC Método dos Elementos de Contorno  
MRD Método de Reciprocidade Dual  
3D Três Dimensões  
a.C. Antes de Cristo  
d.C. Depois de Cristo

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações iniciais

No século passado, graças ao grau de desenvolvimento da Matemática e da Física a partir do século dezessete, foi possível o surgimento dos computadores, e assim, outra grande área de modelagem foi desenvolvida, a modelagem via computador, também conhecida como modelagem numérica. Com o passar do tempo, a modelagem numérica ganha mais espaço e atualmente é imprescindível nas mais diferentes áreas do conhecimento humano devido sua eficiência e versatilidade. Para tornar essa modelagem possível, foram desenvolvidos os métodos numéricos e, a partir desses, a elaboração de códigos computacionais para a análise dos problemas de Engenharia.

A modelagem de problemas de engenharia vem se tornando mais complexa ao tentar reduzir a lacuna entre o modelo e aplicação real. Isso significa que suposições menos restritivas podem ser formuladas. Em outras palavras, mais física pode ser implementada no modelo. Dentre os vários desafios, as representações das propriedades do material é um dos mais importantes. No caso de materiais compósitos, a representação das propriedades apresenta dificuldades extras quando comparadas aos materiais metálicos, que ainda são os mais usados em engenharia.

### 1.2 Materiais compósitos

A palavra *compósito* no termo *material compósito* significa que dois ou mais materiais são combinados em uma escala macroscópica para formar um terceiro material útil (JONES, 1999). Uma das fases é geralmente descontínua, mais rígida e mais forte, e é chamada de reforço, enquanto a fase menos rígida e mais fraca é contínua, chamada de matriz (DANIEL; ISHAI, 2006). Além disso, a ideia de combinar vários componentes para produzir um material com propriedades que não são atingíveis com os componentes individuais tem sido utilizada pelo homem há milhares de anos.

Peters (1997) mostra as técnicas de fabricação de compósitos, sendo que os objetivos da fabricação de compósitos são: alcançar um produto consistente controlando a espessura da fibra, o volume da fibra e as direções da fibra. Os outros objetivos são minimizar os vazios, reduzir as tensões residuais internas e o processo da maneira menos trabalhosa.

Taylor (2000) afirma que "aumentar o uso de compósitos para substituir o alumínio na fabricação de fuselagens de aeronaves traz inúmeras vantagens de desempenho, como o potencial de redução de peso (devido à maior resistência e módulo específicos), maior flexibilidade e design (devido à capacidade de melhorar o desempenho em direções específicas), maior resistência à corrosão e resistência à fadiga aprimorada. A redução de peso leva a uma maior eficiência de combustível". Além disso, o número reduzido de fixadores em estruturas compósitas permite uma superfície mais aerodinâmica à aeronave em comparação ao alumínio rebitado.

Conforme a Figura 1.1, a aeronave Boeing 787 contém cerca de 80% de material compósito no seu volume. Por peso, é composto por aproximadamente 50% de compósitos, 20% alumínio, 15% titânio, 10% aço e 5% de outros materiais e ligas (BOEING, 2014).

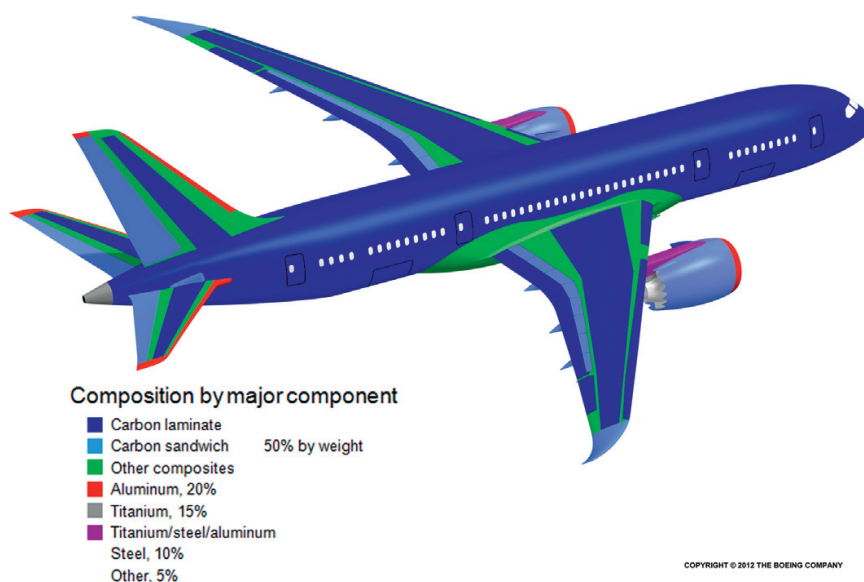


Figura 1.1: Boeing 787 Dreamliner tem aproximadamente 80% de volume (50% de peso) em compósitos (BOEING, 2014).

A seleção do tipo de processo de fabricação e do sistema de resina/fibra será influenciada pelas propriedades específicas necessárias para as diferentes partes da aeronave. A alta resistência e rigidez da fibra combinada com a baixa densidade são requisitos gerais óbvios para todas as partes da estrutura da aeronave. Essas propriedades foram melhor alcançadas a partir de compósitos produzidos usando layup de fibras pré-impregnadas unidirecionais (conhecidas como prepreg) juntamente com a cura em autoclave.

Os altos níveis de rigidez e resistência dos compósitos alcançados pela tecnologia prepreg, combinados com a baixa densidade dos constituintes, tornam os componentes fabricados dessa forma adequados para estruturas de asas e fuselagem (MCILHAGGER E. AR-





deverá dobrar devido ao rápido crescimento da economia e da população dos países em desenvolvimento. Para que isto aconteça, a maioria das atuais usinas precisará ser substituída. Assim, as superligas nunca foram tão importantes para a prosperidade do mundo.

Em altas temperaturas, a fluência é um fenômeno predominante na falha de materiais metálicos policristalinos. Por fluência, entende-se o fenômeno de deformação lenta e contínua ao longo do tempo de peça carregada em altas temperaturas. Microscopicamente, o fenômeno da fluência ocorre devido ao mecanismo de escorregamento de grãos ao longo dos contornos de grãos. A maneira óbvia de evitar a ocorrência da fluência é a eliminação dos contornos de grãos através do uso de materiais metálicos monocristalinos. Por isso, as superligas são frequentemente usadas na forma de monocristais nas palhetas de turbina. O níquel, como todos os metais, é anisotrópico quando na forma de um único cristal. Assim, a análise estrutural das palhetas deve levar em conta a anisotropia do material, assim como a análise estrutural de peças de materiais compósitos.

## 1.4 O método dos elementos de contorno

Uma das maneiras para resolver problemas estruturais com materiais anisotrópicos é usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O nome Método dos Elementos de Contorno surgiu no ano de 1978 como uma alternativa para as técnicas baseadas em divisão de domínio (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1996; BANERJEE, 1994). Sua grande vantagem é a redução da dimensão do problema, baseando-se nas equações integrais de contorno e nas soluções fundamentais das equações diferenciais que regem o fenômeno a ser estudado (KANE, 1994). A redução de malha é benéfica para problemas que possuem domínios infinitos ou semi-infinitos presentes na acústica, mecânica dos solos e mecânica dos fluidos (WROBEL, 2002).

Diferente do método dos elementos finitos, o MEC calcula deslocamentos e tensões com a mesma precisão no contorno e modela o interior dos corpos continuamente, sem discretização. Isto resulta em resultados mais precisos com um número reduzido de variáveis que precisam ser calculadas (graus de liberdade).

O MEC é amplamente utilizado para muitas aplicações em engenharia, como: crescimento da trinca (GOMES; MIRANDA, 2018), eletromagnetismo (OUESLATI et al., 2021), fadiga (OLIVEIRA; GOMES; EVANGELISTA, 2019), acústica (GILVEY; TREVELYAN; HATTORI, 2020), contato multi-corpo (LOYOLA, 2020) apenas para citar alguns trabalhos recentes. Essas são uma evidência da versatilidade do método.

Está técnica é desenvolvida com base na transformação das equações diferenciais parciais governantes do problema, que envolvem campos desconhecidos no contorno e no interior de um domínio, em uma equação integral envolvendo apenas os campos no contorno. O MEC possui características bastante desejáveis para a modelagem de muitos problemas,

sendo possível a modelagem de problemas de alto gradiente de tensão e deformação com a discretização apenas do contorno.

O comportamento anisotrópico dos materiais aumenta o número de variáveis na análise estrutural. As soluções analíticas são limitadas a problemas simples. Assim, os métodos numéricos são necessários para a análise de estruturas complexas.

O uso do MEC para a solução de problemas com materiais anisotrópicos tem-se tornado mais comum nos últimos anos. À medida que a anisotropia aumenta o número de constantes elásticas do material, surgem dificuldades no desenvolvimento das formulações. Particularmente, no método dos elementos de contorno, o maior número de variáveis significa muito mais dificuldade em encontrar as soluções fundamentais. Esse aspecto é evidente na literatura; o número de referências nas quais o MEC é aplicado a estruturas anisotrópicas é significativamente menor do que o número de estruturas isotrópicas, pode-se ter como referência Sollero e Aliabadi (1995) que propuseram a formulação dos elementos de contorno para problemas anisotrópicos. No entanto, nos últimos 10 anos, avanços importantes na aplicação de técnicas de elementos de contorno a materiais anisotrópicos foram publicados. Por exemplo, problemas de elasticidade plana foram analisados por Tyagnii (2015), Cordeiro e Leonel (2020), problemas de contato em sólidos elásticos por Nguyen e Hwu (2019), problemas em três dimensões por Gu et al. (2018), Shiah e Hematiyan (2018) e por Shiah e Hematiyan (2021).

Na formulação geral do MEC com forças de corpo, integrais de domínio surgem na formulação devido às cargas de domínio. A fim de avaliar essas integrais, um esquema de integração de células pode ser usado para fornecer resultados precisos, conforme realizado por Shi e Bazine (1988) para problemas de flexão de placa anisotrópica. Porém, a discretização do domínio em células anula uma das principais vantagens do MEC que é a discretização apenas do contorno. Uma alternativa a este procedimento foi apresentada por Rajamohan (1999), que propõe o uso de soluções particulares para evitar a discretização do domínio. No entanto, o uso de soluções particulares requer que encontre uma função adequada que satisfaça a equação governante. Dependendo de quão complicada é a equação governante, essa função pode ser bastante difícil de encontrar.

As integrais de domínio que surgem de cargas distribuídas que podem ser transformadas em integrais de contorno por transformação exata usando o método de integração radial. Este método foi inicialmente apresentado por Venturini (1988) para problemas de flexão de placa isotrópica. Posteriormente, em Gao (2002) foi estendido para problemas elásticos isotrópicos tridimensionais. A característica mais atrativa do método é a sua simplicidade, uma vez que apenas a variável radial é integrada. Para integrais de domínio que incluem variáveis desconhecidas, o procedimento proposto pode ser realizado usando uma função de base radial como no método de reciprocidade dual sugerido por Gao (2002). No caso de cargas centrífugas, como as forças de corpo não dependem de variáveis desconhecidas, nenhuma função de base radial é usada. Consequentemente, o uso de pontos internos não é necessário para melhorar a precisão da formulação.

Uma abordagem que é chamada de método de reciprocidade dual (MRD) foi proposta por Nardini e Brebbia (1982). Este método, que aproxima as força de corpo por uma série de funções de base prescritas, transforma as integrais de domínio em integrais de contorno, empregando soluções particulares derivadas do operador diferencial do problema com essas funções de base (GAO, 2002).

Na presente dissertação, o MEC é aplicado à análise de campos de tensões e deslocamentos em problemas anisotrópicos sob cargas centrífugas. Os resultados numéricos são comparados com as soluções exatas e a dependência da discretização do contorno é avaliada.

## **1.5 Objetivo**

O objetivo geral do presente trabalho é o desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas em materiais anisotrópicos sujeito a forças de corpo, sem a discretização do domínio.

### **1.5.1 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Desenvolver uma formulação cujas condições de contorno e as variáveis desconhecidas sejam escritas em um sistema de referência local, com eixos de referência normal e tangente ao contorno em cada um dos nós;
- Implementar elementos descontínuos tanto para interpolar as variáveis de campo, como deslocamentos e forças de superfície, quanto a geometria.

## **1.6 Organização do trabalho**

O trabalho está dividido em 7 capítulos distintos, relacionados a seguir:

- Capítulo 1: Introdução. Neste capítulo é mostrado a motivação para o trabalho, informações iniciais, revisão bibliográfica e a descrição do escopo do trabalho;
- Capítulo 2: Mecânica dos Sólidos. Apresenta os conceitos de tensão e deformação. Estes conceitos serão usados nos demais capítulos da tese;
- Capítulo 3: Equações Constitutivas e de Equilíbrio para Materiais Anisotrópicos. Uma breve revisão sobre materiais compósitos, tipos e classificação. A análise da elasticidade anisotrópica, análise estrutural de lâminas ortotrópicas e laminados simétricos.

Por último, a análise dos campos de tensões e deslocamentos em discos rotativos ortotrópico, que serão usados na comparação com resultados numéricos para a validação da formulação implementada;

- Capítulo 4: Método dos Elementos de Contorno. Apresenta o desenvolvimento das equações integrais de contorno e o tratamento das integrais de contorno e de domínio. É detalhado como é feita a discretização das integrais e como são calculadas as variáveis desconhecidas no sistema de referência local. Neste capítulo é detalhado a transformação da integral de domínio na integral de contorno usando o método da integração radial;
- Capítulo 5: Resultados. Resultados numéricos do problema da placa quadrada, da placa laminada, do disco rotativo e da palheta de turbina aeronáutica. Toda a formulação desenvolvida ao longo do trabalho é avaliada neste capítulo através de comparações com resultados da literatura;
- Capítulo 6: Considerações finais. Principais conclusões e contribuições do trabalho, bem como proposta para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Mecânica dos Sólidos

Este capítulo apresenta os conceitos básicos para o entendimento do comportamento de meios sólidos e como os mesmos reagem a aplicações de cargas. Esses princípios são base para todas as formulações apresentadas posteriormente relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno.

### 2.1 Tensão

Tensão é uma medida das forças internas que atuam em pontos dentro de um corpo. Quantitativamente, é uma medida da força média por unidade de área de uma superfície no interior do corpo sobre a qual atuam as forças internas. Estas forças internas surgem como reação às forças externas aplicadas ao corpo. Uma vez que o corpo deformável carregado é assumido como contínuo, estas forças internas são distribuídas de forma contínua dentro do volume do corpo e o corpo tem uma deformação contínua.

A Figura 2.1 representa um corpo em equilíbrio sob as forças  $P_1, \dots, P_7$ . Imagine o corpo dividido em duas partes  $A$  e  $B$  através de um corte na seção  $mm'$ . Será assumido que estas forças estão distribuídas sobre a área  $mm'$  continuamente, da mesma forma que a pressão é continuamente distribuída sobre a superfície sob a qual atua.

A área  $\Delta S$  é uma área infinitesimal com normal unitária  $n_i$  e  $\Delta F$  é uma força interna exercida sobre essa área. Define-se o vetor tensão como:

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S} = \frac{dF_i}{dS} \quad (2.1)$$

O vetor de tensão  $t_i$  depende da sua localização no corpo e da orientação do plano sobre o qual atua. Dependendo da orientação do plano considerado, o vetor de tensão pode não ser necessariamente perpendicular a esse plano e pode ser decomposto em dois componentes:

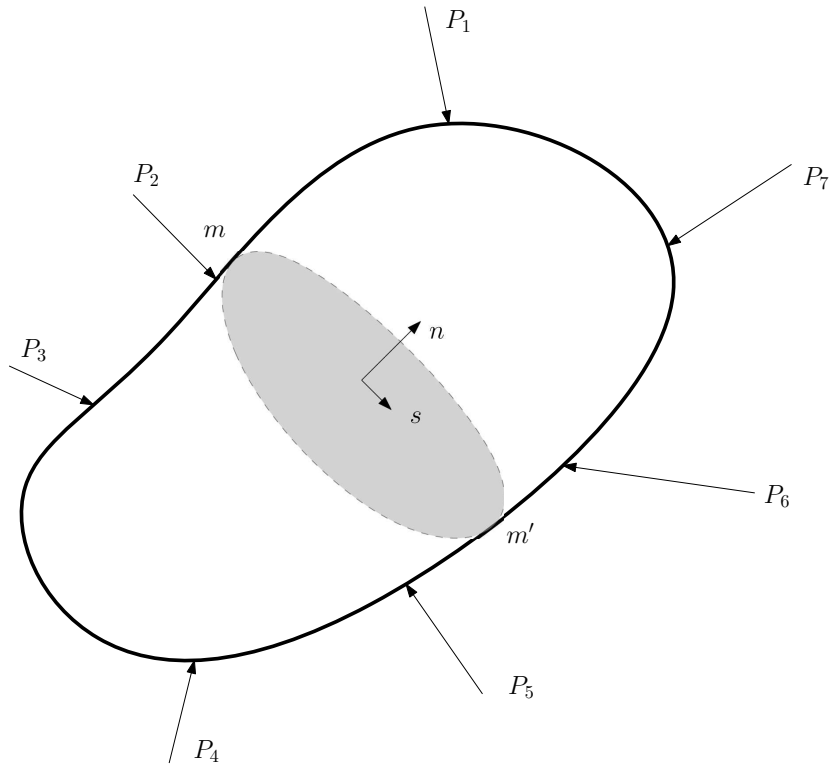


Figura 2.1: Corpo em equilíbrio sob as forças externas.

- Normal ao plano, chamado de *tensão normal*:

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} \quad (2.2)$$

onde  $\Delta F_n$  é o componente normal da força  $\Delta F$  que atua sobre a área  $\Delta S$ .

- Paralelo a este plano, chamado de *tensão de cisalhamento*:

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta S} \quad (2.3)$$

onde  $\Delta F_s$  é a componente tangencial da força  $\Delta F$  que atua sobre a área  $\Delta S$ . A tensão de cisalhamento pode ser ainda decomposta em dois vetores mutuamente perpendiculares.

Em um elemento infinitesimal de volume do corpo elástico, o vetor de tensão pode decompor em três vetores de tensão em cada face nas direções de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Um vetor normal à superfície e outros dois tangentes à superfície e perpendiculares entre si. Portanto, observam-se 9 vetores de tensão em um volume de corpo.

As tensões sobre um volume infinitesimal de um corpo podem ser organizadas em uma matriz simétrica pois há equilíbrio de momentos. Utilizando-se notação indicial, pode-se escrever cada componente de tensão como  $\sigma_{ij}$ , onde  $i$  representa a coordenada normal ao plano em que a tensão se encontra e  $j$  é a direção do componente do vetor tensão. Essa matriz é denominada de tensor de tensões de Cauchy e é representada pelo símbolo  $\sigma$ , como

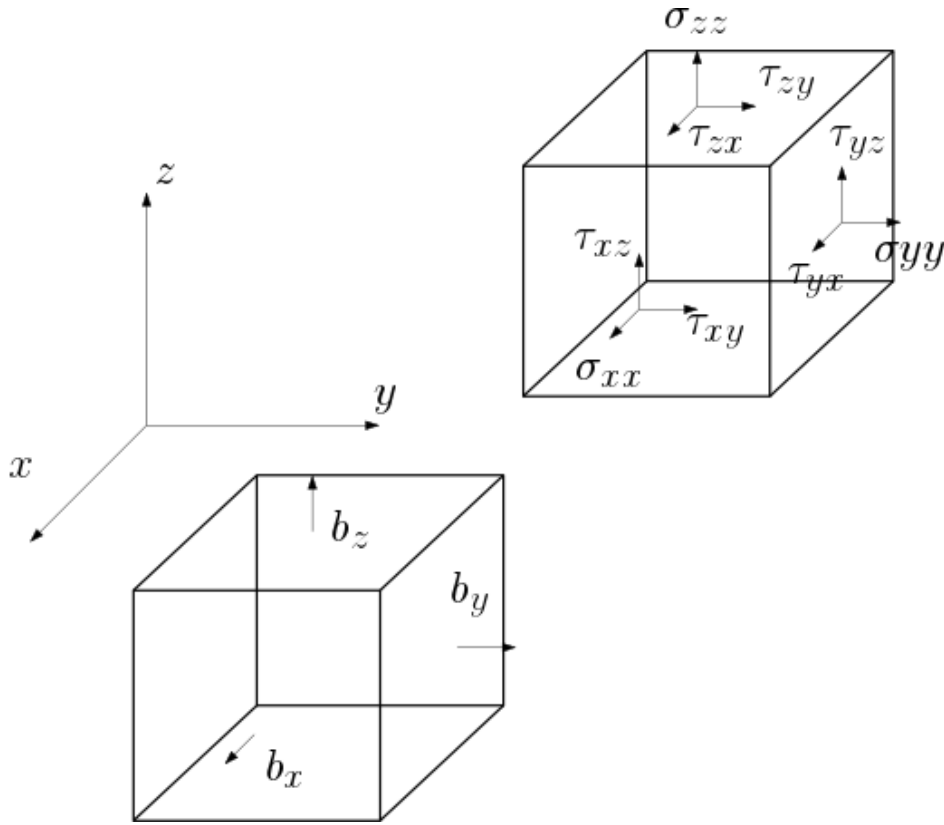


Figura 2.2: Vetores de tensão sobre as faces do elemento infinitesimal de volume.

abaixo:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

O teorema de Cauchy afirma que existe um campo tensorial  $\sigma$ , chamado de tensor de Cauchy, independente da direção normal  $n$ , tal que  $t$  é uma função linear de  $n$ :

$$t(n) = \sigma_{ij} n \quad (2.5)$$

Definindo  $b_i$  como uma força por unidade de volume, tem-se:

$$b_i = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Portanto o equilíbrio estático pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.7)$$

## 2.2 Deformação

A deformação de um corpo elástico é definida como a variação de comprimento e forma em certa direção. A deformação linear média,  $\varepsilon_{ij}$ , é definida pela razão entre a variação de comprimento,  $\partial u_i$ , pelo comprimento inicial,  $\partial x_i$ . Em um elemento infinitesimal, a deformação é definida como a variação de comprimento por unidade de comprimento, e pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.8)$$

As Eqs. (2.8) representam as deformações normais ou lineares. As componentes cisalhantes de deformação também fazem parte da deformação. Estas componentes são chamadas deformações angulares e podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad e \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

Todos os componentes de deformação podem ser escritos na forma de uma matriz denominada tensor de deformações representado por  $\varepsilon$  que envolve todos os componentes normais e de cisalhamento do tensor de deformação.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Na matriz (2.10), devido ao equilíbrio de momentos, os componentes de cisalhamento da deformação são iguais em dupla, por simetria, ou seja  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

As Eqs. (2.8) e (2.9) podem ser reescritas como:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.11)$$



# Capítulo 3

## Equações Constitutivas e de Equilíbrio para Materiais Anisotrópicos

### 3.1 Introdução

Neste Capítulo é feita uma revisão da teoria da elasticidade aplicada a materiais anisotrópicos. Além disso, é mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. Por último, é mostrada a obtenção analítica dos campos de tensões e deslocamentos em discos ortotrópicos rotativos. As formulações matemáticas presentes neste Capítulo serão usadas nos Capítulos posteriores, quer seja na obtenção da formulação do método dos elementos de contorno, quer seja na comparação com resultados numéricos obtidos a partir das formulações propostas.

### 3.2 Evolução dos materiais compósitos

Os compósitos têm desempenhado um papel importante ao longo da história humana, desde abrigar civilizações antigas, até possibilitar inovações futuras. Não importa o ano, os compósitos tornam o mundo um lugar melhor. Na idade da pedra, o homem primitivo dependia principalmente da cerâmica (pedra) para ferramentas e armas, e em polímeros naturais e compósitos (madeira). O uso de metais começou com o ouro e prosseguiu com cobre, bronze e ferro.

No passado, os principais motivadores para o uso de compósitos para componentes de aeronaves era a redução do peso, redução de custos e uma performance melhorada. Esses objetivos ainda estão presentes, mas cabe destacar que os principais objetivos na utilização de compósito nos tempos atuais são as questões ambientais. Com isso, pode-se citar como os principais motivadores a redução da queima de combustível, redução da poluição e a redução do ruído (MCILHAGGER E. ARCHER, 2020).

Os tempos a.C.(Antes de Cristo) marcou o início do uso de materiais compósitos, especificamente em aplicações diárias. Sendo que, o primeiro registro conhecido do uso de compósitos foi feito pelos Mesopotâmicos. Esses povos antigos colaram tiras de madeira em ângulos diferentes para criar o compensado, utilizado até hoje em larga escala. Por volta de 1500 a.C., construtores e artesãos egípcios e mesopotâmicos usavam palhas para reforçar tijolos de barro, cerâmica e barcos.

Mais tarde, em 1200 d.C.(Depois de Cristo), os Mongóis usavam compósitos básicos de tendões de gado, chifres, bambu, seda e pinho para construir seus arcos, obtendo o arco e flecha. Entre os anos de 1870 e 1890 foram desenvolvidas as primeiras resinas sintéticas (feitas pelo homem) que podiam ser convertidas de um líquido em um sólido, por polimerização. Essas resinas de polímeros são transformadas do estado líquido para o estado sólido por meio da reticulação das moléculas.

Seguindo a ordem cronológica, especificamente em 1917, o químico norte-americano de origem belga, Leo Hendrik Baekeland inventa a baquelite, uma das primeiras resinas sintéticas. O primeiro uso comercial da baquelite foi na fabricação de maçanetas de câmbio para automóveis Rolls Royce.

Por volta de 1930, a American Cyanamid e a DuPont trabalharam com resina de polímero e resina de poliéster formulada independentemente pela primeira vez. Alguns anos depois, em 1936, as resinas de poliéster insaturadas foram patenteadas por Carleton Ellis. Por causa de suas propriedades de cura (ou endurecimento), elas se tornaram a principal escolha para resinas na fabricação de compósitos.

Com isso, o uso de compósitos cresceu rapidamente à medida que barcos, caminhões, carros esportivos, tanques de armazenamento, tubos, dutos e muitos outros produtos eram construídos com compósitos. A vasta aplicação dos compósitos foi essencial para a exploração do espaço, na década de 1960 e além. Nos anos 90, as aplicações de compósitos são inúmeras.

Por fim, é importante ressaltar alguns avanços dos materiais compósitos, dos anos 2000 até atualmente. A nanotecnologia começou a ser usada em produtos comerciais. Os compósitos desempenham um papel importante nos nanotubos de carbono para melhorar as propriedades mecânicas, térmicas e elétricas na produção em massa. As empresas do setor de compósitos também apostaram na impressão em 3D (três dimensões), onde é possível a impressão de itens com fibras reforçadas. É necessário ressaltar que nos dias atuais, grandes potências mundiais investem bastante neste tipo de tecnologia, onde cada vez mais, vem obtendo resultados surpreendentes.

### 3.3 Tipos e classificação dos materiais compósitos

Ao longo dos últimos 40 anos de uso de compósitos poliméricos no setor aeroespacial, designers e engenheiros de manufatura progrediram de seções da estrutura e componentes relativamente pequenos e levemente carregados, como os ailerons (partes móveis das asas de aeronaves que controlam o movimento) e carenagens, para itens críticos e com grande tensão (MCILHAGGER E. ARCHER, 2020).

A ligação entre as fibras e a matriz é criada durante a fase de fabricação do material compósito. Isso tem influência fundamental nas propriedades mecânicas do material compósito.

Segundo Vasiliev (2001), pode-se classificar os materiais compósitos em dois grupos principais. O primeiro grupo compreende os compósitos conhecidos como "materiais preenchidos". A principal característica desses materiais é a existência de algum material básico ou de matriz cujas propriedades são melhoradas pelo preenchimento com algumas partículas. O segundo grupo de materiais compósitos é chamado de "materiais reforçados". Os componentes básicos desses materiais (às vezes chamados de "compósitos avançados") são fibras longas e finas que possuem alta resistência e rigidez.

Os autores Peters (1997), mostram as técnicas de fabricação de compósitos, sendo que os objetivos da fabricação de compósitos são: alcançar um produto consistente controlando a espessura da fibra, o volume da fibra e as direções da fibra. Os outros objetivos é minimizar os vazios, reduzir as tensões residuais internas e o processo da maneira menos trabalhosa.

Com isso é necessário alguns procedimentos para atingir esses objetivos, envolvem processos iterativos para selecionar os componentes principais, são: material compósito e sua configuração, ferramentas e processo. Uma vez que a seleção do material foi concluída, a primeira etapa que leva à estrutura compósita aceitável é a seleção do ferramental, que está intimamente ligada ao processo e ao material. Para todas as técnicas de cura, a ferramenta deve ser: forte e rígida o suficiente para resistir à pressão exercida durante a cura, dimensionalmente estável por meio de ciclos repetidos de aquecimento e resfriamento, leve o suficiente para responder razoavelmente rápido às mudanças na temperatura do ciclo de cura e para ser movido na oficina, à prova de vazamentos para que os ciclos de vácuo e pressão sejam consistentes.

Um alto volume de fibra é essencial para um bom desempenho da estrutura da aeronave. É importante que a distribuição de fibra e resina seja uniforme em todo o componente. Uma das principais dificuldades associadas à fabricação de compósitos é a de formação de vazios durante a impregnação e a cura (TAYLOR, 2000).

De acordo como esses vazios gasosos ficam presos dentro da matriz, as concentrações de tensão podem ser estabelecidas dentro da matriz. Estes pode se originar de várias maneiras, incluindo: durante a mistura da formulação da resina, durante o preenchimento das cavidades em componentes de forma mais complexa, devido à natureza complexa do reforço têxtil, durante as reações químicas complexas que ocorrem durante a cura da resina termofixa,

à medida que os gases voláteis são liberados e encapsulados na resina reticulada (HILL; MCILHAGGER, 1999).

O aumento do uso de compósitos para substituir o alumínio na fabricação de fuselagens traz inúmeras vantagens de desempenho, como o potencial de peso (devido a maior resistência e módulo específicos), maior flexibilidade de design (devido à capacidade de construir desempenho em direções específicas), maior resistência à corrosão e resistência à fadiga aprimorada. A redução de peso leva a uma maior eficiência de combustível (TAYLOR, 2000). Além disso, o número reduzido de fixadores em estruturas compósitas dá uma superfície mais aerodinâmica à aeronave em comparação ao alumínio rebitado.

A seleção do tipo de processo de fabricação e do sistema de resina/fibra será influenciada pelas propriedades específicas necessárias para as diferentes partes da aeronave. A alta resistência e rigidez da fibra combinada com a baixa densidade são requisitos gerais óbvios para todas as partes da estrutura da aeronave. Essas propriedades foram melhor alcançadas a partir de compósitos produzidos usando layup de fibras pré-impregnadas unidirecionais (conhecidas como prepreg) juntamente com a cura em autoclave.

Os altos níveis de rigidez e resistência dos compósitos alcançados pela tecnologia prepreg, combinados com a baixa densidade dos constituintes, tornam os componentes fabricados dessa forma adequados para estruturas de asas e fuselagem (MCILHAGGER E. ARCHER, 2020). Portanto, há um foco crescente na redução do custo de peças compósitas, reduzindo os custos de materiais e processos de fabricação (HARRIS; SHUART; STARNES, 2002).

### 3.4 Elasticidade anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$ , o equilíbrio de forças pode ser expresso por:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (3.1)$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos é expresso por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $b_i$  é o vetor de forças de corpo,  $\ddot{u}_i$  é o vetor de acelerações que corresponde a segunda derivada do vetor de deslocamentos  $u_i$  em relação ao tempo  $\tau$ .

O vetor de forças de superfície  $t_i$  em um ponto no contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$  é expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.3)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$  no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.4)$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,k,l} + \varepsilon_{kl,i,j} - \varepsilon_{ik,j,l} - \varepsilon_{jl,i,k} = 0 \quad (3.5)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12} \quad (3.6)$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

sendo o coeficiente de linearidade  $C_{ijkl}$  um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido as restrições de simetria tem-se que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.8)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que:

$$C_{ijkl} = C_{klji} \quad (3.9)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes (LEKHNITSKII, 1963).

Considerando as 21 constantes elásticas, a Eq. (3.7) pode ser escrita na forma matricial

como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

A Eq. (3.7) também pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (3.11)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A Eq. (3.11) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a Eq. (3.12) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (LEKHNITSKII, 1963):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\ a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\ a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\ a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\ a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\ a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\ a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\ a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\ a_{66} &= 1/G_{12} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $E_k$  são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos  $x_k$ ,  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos  $x_i x_j$ . Os coeficientes  $\nu_{ij}$  são chamados coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim,  $\zeta_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam

em planos outros, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a Eq. (3.13) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Em estado plano de deformação ( $\sigma_3 = -1/a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{36}\sigma_6)$ ,  $\sigma_4 = \sigma_5 = \varepsilon_3 = 0$ ) a Eq. (3.13) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde,

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3.19)$$

Substituindo as Eq. (3.4), (3.7) na Eq. (3.1), obtém-se a Eq. de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos:

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + p_i = 0 \quad (3.20)$$

onde,

$$p_i = \rho(b_i - \ddot{u}_i) \quad (3.21)$$

é o termo que contém todas as forças de volume.

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções  $F(x_1, x_2)$  chamadas funções tensão de Airy (LEKHNITSKII, 1963) dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma função potencial na qual:

$$\mathcal{U}_{,i} = p_i \quad (3.23)$$



Substituindo as Eqs. (3.22) na Eq. constitutiva (3.17) e então na Eq. de compatibilidade (3.6), resulta na Eq. diferencial para funções tensão  $F(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22} \end{aligned} \quad (3.24)$$

No caso da ausência de forças de corpo a Eq. (3.24) pode ser escrita como:

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0 \quad (3.25)$$

Criando o operador diferencial:

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.26)$$

aplicando este operador na função tensão  $F(x_1, x_2)$  na forma:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \quad (3.27)$$

e expandindo a Eq. (3.27) tem-se:

$$\begin{aligned} F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \\ + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} \\ + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

As Eq. (3.25) e (3.28) serão idênticas se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (3.29)$$

As raízes da Eq. (3.29) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares ( $\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k$ ) conforme mostrado por Lekhnitskii (1968):

Criando-se a variável:

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (3.30)$$

tem-se que:

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \quad (3.31)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se:

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (3.32)$$

Introduzindo a notação:

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k) \quad (3.33)$$

onde a convenção de soma não é empregada em  $k$ , e substituindo a Eq. (3.32) na Eq. (3.22), obtém-se as componentes de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[ \Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde  $\Psi_k^{(1)}$  representa a primeira derivada de  $\Psi_k$ .

Substituindo a Eq. (3.34) na Eq. (3.17) e então na Eq. (3.20), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} [q_{11} \Psi_1(z_1) + q_{12} \Psi_2(z_2)] \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_{21} \Psi_1(z_1) + q_{22} \Psi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde:

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas Eq. (3.22) com derivadas dadas pela Eq. (3.33), que satisfaça estas condições,

determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas Eq. (3.35), e tensões, dados pelas Eq. (3.34).

### 3.5 Equação constitutiva de uma lâmina

Se for considerada apenas uma lâmina, na qual as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (Fig. 3.1), esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por (DANIEL; ISHAI, 2006):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez, ou seja:

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (3.38)$$

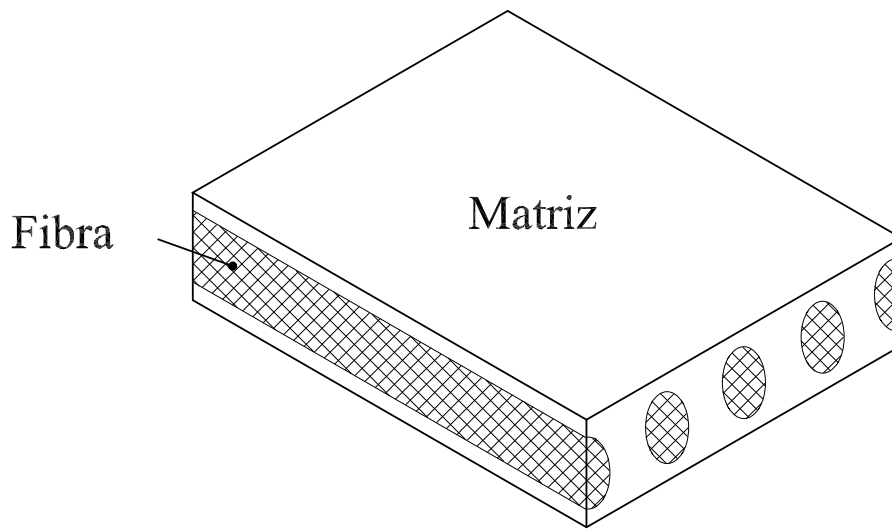


Figura 3.1: Lâmina ortotrópica.

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson,  $\nu_{12}$ . A quinta constante

elástica,  $\nu_{21}$  pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz  $\mathbf{Q}$ :

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (3.40)$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina ( $x_1x_2$ ) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ).

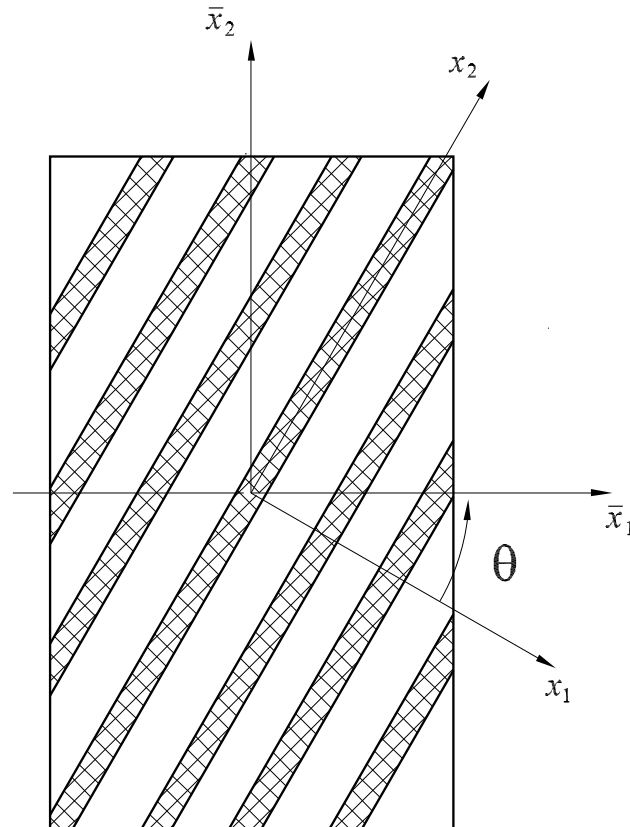


Figura 3.2: Sistemas de coordenadas da lâmina ( $x_1x_2$ ) e do laminado ( $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ).

Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (Fig. 3.2) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  e  $\varepsilon'_{ij}$  são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de

referência do laminado,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

sendo:

$$m = \cos\theta \quad (3.44)$$

$$n = \text{sen}\theta \quad (3.45)$$

Convém observar que a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo  $\theta$ , conforme Fig. 3.2, pelo ângulo negativo  $-\theta$ . A equação constitutiva pode ser escrita da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

onde  $(\mathbf{T}^{-1})'$  representa a matriz transposta da matriz inversa de  $\mathbf{T}$  e,

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Multiplicando-se as matrizes da Eq. (3.46), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

onde,

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin^3\theta\cos\theta) \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin\theta\cos^3\theta)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A matriz  $\bar{Q}$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$ , são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $\bar{Q}$  é parecida com a matriz  $Q$  dos materiais totalmente anisotrópicos ( $\bar{Q}_{16} \neq 0$ ,  $\bar{Q}_{26} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

### 3.6 Laminados simétricos

Os laminados simétricos são laminados cujas lâminas são montadas de maneira que haja um plano médio em relação ao qual para cada lâmina de um lado deste plano existe uma outra, idêntica em propriedade e orientação, localizada a mesma distância porém do outro lado deste plano médio (Fig. 3.3). Por apresentarem uma equação constitutiva mais simples e por serem mais facilmente analisados, os laminados simétricos são de utilização bastante comum em estruturas.

A não existência de um plano médio implica num laminado no qual não é possível uma análise bidimensional pois, mesmo que o carregamento seja constante em relação ao eixo  $x_3$ , ao longo de toda a espessura do laminado, além das deformações no plano  $x_1x_2$ , haveria também uma flexão em torno do eixo  $x_1$ , aparecendo deformações nos três eixos.

A hipótese inicial sobre a qual os laminados simétricos podem ser tratados pela formulação aqui apresentada é que as deformações em qualquer reta perpendicular ao plano  $x_1x_2$  sejam as mesmas em toda a espessura do laminado. Isto equivale a dizer que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra).

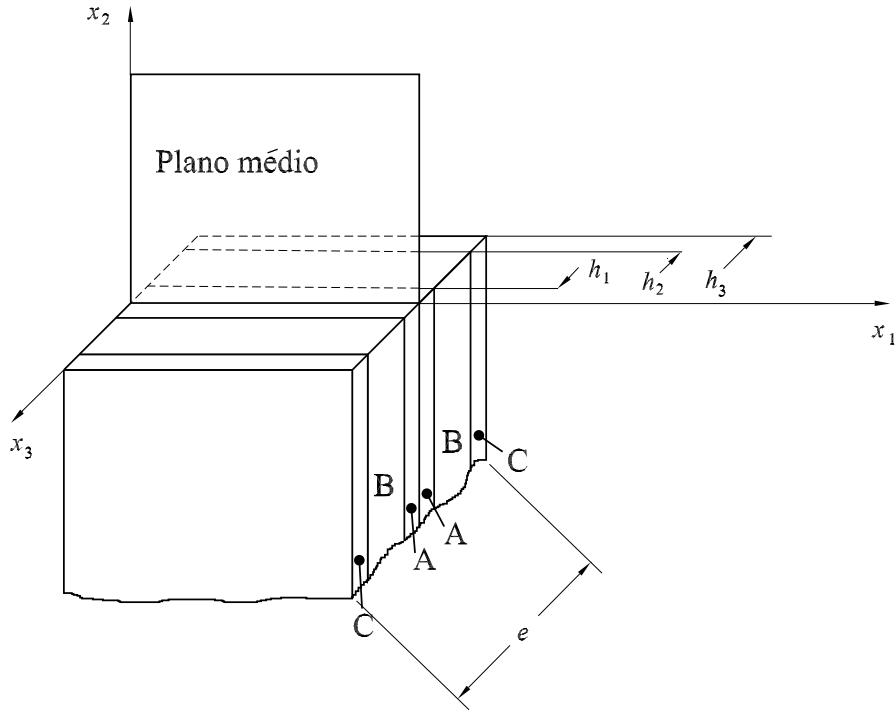


Figura 3.3: Laminado simétrico.

As componentes do tensor de tensões atuantes em um laminado são obtidas integrando as componentes atuantes em cada lâmina, ao longo de toda a espessura  $e$  do laminado, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \sigma'_{ij} dx_3 \quad (3.50)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  é o tensor de tensão atuante em uma lâmina individual e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensão média no laminado.

Considere o laminado constituído de  $N$  lâminas genericamente ortotrópicas, conforme mostrado na Fig. 3.3. As forças atuantes no plano médio deste laminado podem ser obtidas pela substituição da integral contínua pela soma das integrais, representando a contribuição de cada lâmina:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_l dx_3 \quad (3.51)$$

substituindo a Eq. (3.48) na Eq. (3.51) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} dx_3 \right\} \quad (3.52)$$

Convém lembrar que o tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  é, por hipótese, o mesmo em todas as lâminas.

Sendo a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{Q}}_l$  e o vetor deformação  $\varepsilon_{ij}$  constantes ao longo da espessura da lâmina  $(h_l - h_{l-1})$ , a Eq. (3.52) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \left[ \sum_{l=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

A matriz de rigidez média pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_L \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_L = \left[ \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \mathbf{Q}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \quad (3.55)$$

que é equivalente a matriz de rigidez do laminado.

O tensor de flexibilidade para o laminado é dada pelo inverso do tensor de rigidez, ou seja:

$$[a_{ij}]_L = \mathbf{Q}_L^{-1} \quad (3.56)$$

Muitas vezes tem-se ainda a necessidade de se escrever o tensor de rigidez  $\mathbf{Q}$  e de flexibilidade  $[a_{ij}]$  do laminado em relação a um outro referencial. Neste caso, por um procedimento similar ao realizado para encontrar as Eqs. (3.49) determina-se que:



$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^4\theta + (2a_{12} + a_{66})\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + a_{22}\text{sen}^4\theta \\
&\quad + (a_{16}\cos^2\theta + a_{26}\text{sen}^2\theta)\text{sen}2\theta \\
a'_{22} &= a_{11}\text{sen}^4\theta + (2a_{12} + a_{66})\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + a_{22}\cos^4\theta \\
&\quad - (a_{16}\cos^2\theta + a_{26}\text{sen}^2\theta)\text{sen}2\theta \\
a'_{12} &= a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66})\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16})\text{sen}2\theta\cos2\theta \\
a'_{66} &= a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66})\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + 2(a_{26} - a_{16})\text{sen}2\theta\cos2\theta \\
a'_{16} &= [a_{22}\text{sen}^2\theta - a_{11}\cos^2\theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66})\cos2\theta]\text{sen}2\theta \\
&\quad + a_{16}\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\text{sen}^2\theta) + a_{26}\text{sen}^2\theta(3\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \\
a'_{26} &= [a_{22}\cos^2\theta - a_{11}\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66})\cos2\theta]\text{sen}2\theta \\
&\quad + a_{16}\text{sen}^2\theta(3\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + a_{26}\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\text{sen}^2\theta)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde  $a'_{ij}$  representa a matriz de constantes elásticas do laminado escrita no sistema  $x'_1x'_2$  (Fig. 3.4) enquanto que  $a_{ij}$  representa esta mesma matriz escrita no sistema  $x_1x_2$ .

As raízes da equação característica podem ser escritas num novo sistema de coordenadas, conforme mostrado por Lekhnitskii (1968) como:

$$\mu'_k = \frac{\mu_k \cos\theta - \text{sen}\theta}{\cos\theta + \mu_k \text{sen}\theta} \tag{3.58}$$

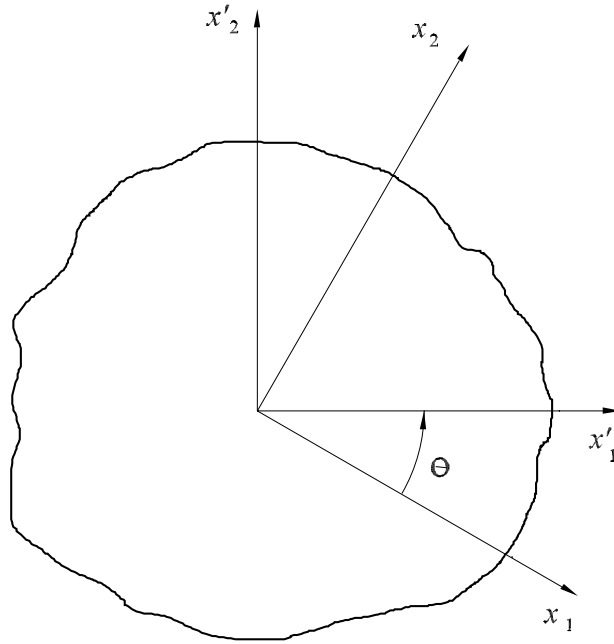


Figura 3.4: Transformação de sistemas de coordenadas.

Onde  $\mu'_k$  representa as raízes da equação característica no referencial  $x'_1x'_2$  e  $\mu_k$  as raízes da mesma equação no referencial  $x_1x_2$ .

### 3.7 Soluções analíticas para um disco rotativo ortotrópico

Considere um disco rotativo ortotrópico de raio  $R$ , girando com velocidade angular  $\omega$ , ao redor de seu centro, e um sistema de coordenadas de origem no centro do disco e cujas direções dos eixos coincidem com as direções dos eixos de maior e menor rigidez do material (Fig. 3.5).

As forças de corpo em um ponto de coordenadas  $(x_1, x_2)$  do disco rotativo são dadas por:

$$p_i = \rho\omega^2 x_i \quad (3.59)$$

As forças de corpo  $p_i$ , conforme a Eq. (3.23), satisfazem o potencial:

$$\mathcal{U} = -\frac{\rho}{2}\omega^2 x_i x_i \quad (3.60)$$

A Eq. (3.24) é escrita para materiais ortotrópicos como:

$$\begin{aligned} \beta_{22}F_{,1111} + (2\beta_{12} + \beta_{66})F_{,1122} + \beta_{11}F_{,2222} = \\ -(\beta_{12} + \beta_{22})\mathcal{U}_{,11} - (\beta_{11} + \beta_{12})\mathcal{U}_{,22} \end{aligned} \quad (3.61)$$

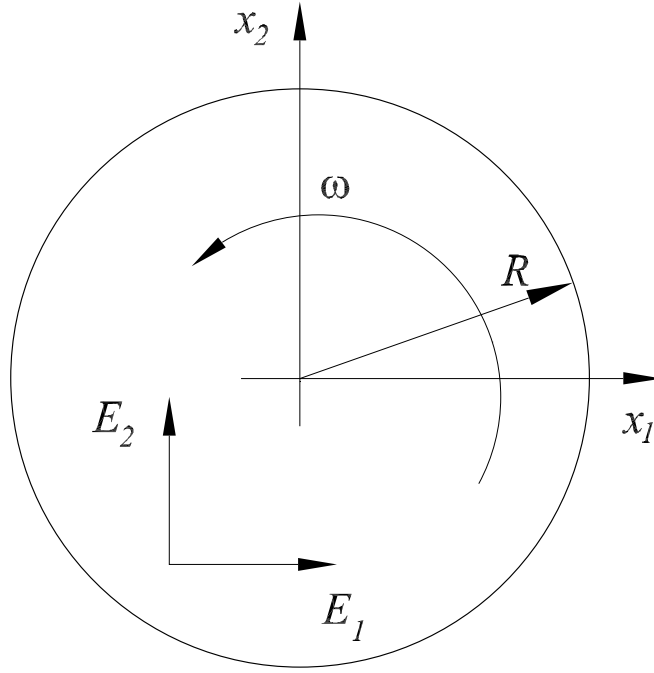


Figura 3.5: Disco rotativo.

onde  $\beta_{ij}$  é dado pela Eq. (3.19) para estado plano de deformação e  $\beta_{ij} = a_{ij}$  para estado plano de tensão.

Conforme mostrado por Chang (1974), a função  $F$  que satisfaz a Eq. (3.61) pode ser dada por:

$$F = \frac{\rho\omega^2(2\beta_{12} + \beta_{11} + \beta_{22})}{24(\beta_{11} + \beta_{22}) + 8(2\beta_{12} + \beta_{66})}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)^2 + \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2[(x_1 - R)^2 + x_2^2] \quad (3.62)$$

onde  $R$  é o raio do disco.

As componentes do tensor de tensões correspondentes ao disco rotativo são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 \{K(x_1^2 + 3x_2^2 - R^2) + [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)]\} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 \{K(3x_1^2 + x_2^2 - R^2) + [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)]\} \\ \sigma_6 &= \rho\omega^2 K x_1 x_2 \\ \sigma_4 &= \sigma_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde:

$$K = \frac{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}{3a_{11} + 2a_{12} + a_{66} + 3a_{22}} \quad (3.64)$$

No caso de estado plano de deformação, tem-se:

$$\sigma_3 = -\frac{1}{a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2)} \quad (3.65)$$

e no caso de estado plano de tensão:

$$\sigma_3 = 0 \quad (3.66)$$

As componentes do vetor de deslocamentos são dadas por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_{11}\rho\omega^2 x_1}{2} \left\{ K \left( \frac{x_1^2}{3} + 3x_2^2 - R^2 \right) + \left[ R^2 - \left( \frac{x_1^2}{3} + x_2^2 \right) \right] \right\} + \\ &\quad \frac{a_{12}\rho\omega^2 x_1}{2} \left\{ K (x_1^2 + x_2^2 - R^2) + \left[ R^2 - \left( \frac{x_1^2}{3} + x_2^2 \right) \right] \right\} \\ u_2 &= \frac{a_{12}\rho\omega^2 x_2}{2} \left\{ K (x_1^2 + x_2^2 - R^2) + \left[ R^2 - \left( x_1^2 + \frac{x_2^2}{3} \right) \right] \right\} + \\ &\quad \frac{a_{22}\rho\omega^2 x_2}{2} \left\{ K \left( 3x_1^2 + \frac{x_2^2}{3} - R^2 \right) + \left[ R^2 - \left( x_1^2 + \frac{x_2^2}{3} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Se os resultados forem transformados em coordenadas polares, as componentes do tensor de tensões se tornam:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2}\rho\omega^2(1 - K)(R^2 - r^2) \\ \sigma_t &= \frac{1}{2}\rho\omega^2[K(3r^2 - R^2) + (R^2 - r^2)] \\ \sigma_{rt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde  $\sigma_r$  é a componente radial do tensor de tensões,  $\sigma_t$  é a componente tangencial e  $\sigma_{rt}$  é a componente de cisalhamento.

O deslocamento radial é dado por:

$$u_r = u_1^2 + u_2^2 \quad (3.69)$$

Pode-se notar pelas Eqs. (3.67) e (3.68) que enquanto que as tensões só dependem do raio, os deslocamentos são dependentes do raio e da posição angular do ponto de análise.

# Capítulo 4

## Tratamento das Integrais de Domínio Provenientes das Forças de Corpo

### 4.1 Introdução

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação dos elementos de contorno para o tratamento de problemas de elasticidade plana em materiais anisotrópicos, considerando a presença de forças de corpo genéricas. As integrais de domínio provenientes das forças de corpo são transformadas em integrais de contorno usando o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual e também o método da integração radial.

### 4.2 Formulação integral

Assumindo-se uma função vetorial contínua  $u_i^\bullet$ , que representa o deslocamento de um estado elasto-estática definido sobre um domínio  $\Omega$ , como sendo uma função peso residual da Eq. de equilíbrio (3.1), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^\bullet d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(\sigma_{ji} u_i^\bullet)_{,k} = \sigma_{ji,k} u_i^\bullet + \sigma_{ij} u_{i,k}^\bullet \quad (4.2)$$

Pode-se escrever  $u_{i,j}^\bullet$  como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma:

$$u_{i,j}^\bullet = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet + u_{j,i}^\bullet) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet - u_{j,i}^\bullet) = \varepsilon_{ij}^\bullet + \omega_{ij}^\bullet \quad (4.3)$$

sendo que  $\varepsilon_{ij}^\bullet$  e  $\omega_{ij}^\bullet$  representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-

simétrico), respectivamente, do estado elástico "•".

Substituindo a Eq. (4.3) na Eq. (4.2) tem-se:

$$(\sigma_{ji}u_i^\bullet)_{,j} = \sigma_{ji,j}u_i^\bullet + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet + \sigma_{ij}\omega_{ij}^\bullet \quad (4.4)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a Eq. (4.4) torna-se:

$$\sigma_{ji,j}u_i^\bullet = (\sigma_{ji}u_i^\bullet)_{,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet \quad (4.5)$$

Substituindo a Eq. (4.5) na Eq. (4.1) tem-se:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ji}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^\bullet d\Omega - \int_{\Omega} \ddot{u}_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}u_i^\bullet)n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma \quad (4.7)$$

onde

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (4.8)$$

Substituindo a Eq. (4.7) na Eq. (4.6), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^\bullet d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_i^\bullet d\Omega \quad (4.9)$$

Se partirmos da Eq. (3.1) como sendo a correspondente ao estado  $u_i^\bullet$  e a função de interpolação da Eq. (4.1) como sendo  $u_i$ , obtém-se, de forma análoga a anterior:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^\bullet \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^\bullet u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i^\bullet u_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i^\bullet u_i d\Omega \quad (4.10)$$

Pelo teorema recíproco dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por  $\sigma_{ij}^\bullet \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet$ . Desta forma, igualando-se as Eqs. (4.10) e (4.9), tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i^\bullet (b_i - \ddot{u}_i) d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^\bullet u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i (b_i^\bullet - \ddot{u}_i^\bullet) d\Omega \quad (4.11)$$

A Eq. integral (4.11) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito

a uma carga concentrada unitária em um ponto  $\mathbf{x}'$ . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como:

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (4.13)$$

para um dado ponto  $\mathbf{x}' \in \Omega$ .

Considerando o estado "•" como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ( $\ddot{u}_i^{\bullet} = 0$  e  $b_i^{\bullet} = 0$ ), a Eq. (4.11) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} p_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega \quad (4.14)$$

onde  $p_i = \rho(b_i - \ddot{u}_i)$ ,  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$ , num ponto  $\mathbf{x}$ , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto  $\mathbf{x}'$  numa direção  $i$ . Por serem soluções do estado fundamental,  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade da Eq. (4.13), a Eq. (4.14) pode ser escrita como:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} p_i U_{ik} d\Omega \quad (4.15)$$

### 4.3 Soluções fundamentais anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio  $\Omega$  será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

onde  $\mu_k$  são raízes complexas da Eq. (3.29),  $x'_1$  e  $x'_2$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado  $\Gamma$  ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela Eq. (3.3) e as tensões definidas pela Eq. (3.34), tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\mu_1\Psi_1 + \mu_2\Psi_2]] \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]]\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte. Se o contorno  $\Gamma$  engloba  $\mathbf{z}'$ , então o resultado das Eqs. (4.18) serão diferentes de zero.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas Eqs. (4.18), e a Eq. de equilíbrio de forças (3.1) considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção  $x_i$  pode ser representada por  $\Psi_{ik}$ . Como as equações integrais de contorno (4.18) possuem sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como:

$$\begin{aligned}2\text{Re}[[\mu_1\Psi_{i1} + \mu_2\Psi_{i2}]] &= -\delta_{i1} \\ 2\text{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] &= \delta_{i2}\end{aligned}\quad (4.19)$$

As Eqs. (4.19) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado  $\mathbf{z}'$ , tomando:

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \quad (4.20)$$

onde  $A_{ik}$  são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto  $\mathbf{z}'$ :

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i \quad (4.21)$$

Usando as Eqs. (4.19), (4.20) e (4.21), podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas  $A_{ik}$ :



$$\begin{aligned}
A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} &= \delta_{i2}/(2\pi i) \\
\mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} &= -\delta_{i1}/(2\pi i)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

As duas outras equações necessárias para se determinar  $A_{ik}$  resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja:

$$[[u_i]] = 0 \tag{4.23}$$

Usando as equações de deslocamentos (3.35), a Eq. (4.20) e a Eq. (4.21), a Eq. (4.23) pode ser expandida como:

$$\begin{aligned}
q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{i2} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} &= 0 \\
q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{i2} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} &= 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Escrevendo as Eqs. (4.22) e (4.24) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

que é suficiente se para encontrar as constantes complexas  $A_{ik}$ .

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela Eq. (3.34) nas equações de deslocamentos (3.35). Desta forma, tem-se:

$$U_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1} \ln(z - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z - z'_2)] \tag{4.26}$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtida pela substituição da Eq. (4.20) nas equações de tensão (3.34) e usando a Eq. (3.3), obtém-se:

$$T_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right] \tag{4.27}$$

onde:

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

e  $n_k$  são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ( $\ln r$ ). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ( $1/r$ ). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na Seção 4.7.

## 4.4 Transformação da integral de domínio na integral de contorno - Método da integração radial

Nesta seção será apresentado o método da integração radial que é bastante geral para o tratamento de forças de domínio e foi inicialmente proposto por Gao (2002).

Considere o termo  $p_i$  da Eq. (4.15). Pode-se usar o método da integração radial para transformar a integral de domínio em integral de contorno, da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} p_i U_{ik} d\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\int_0^r U_{ik} p_i [x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)] \rho d\rho}_{F_i} d\theta \quad (4.29)$$

Fazendo:

$$F_i = \int_0^r U_{ik} p_i [x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)] \rho d\rho \quad (4.30)$$

resulta em:

$$\int_{\Omega} U_{ik} p_i(x, y) d\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_i d\theta \quad (4.31)$$

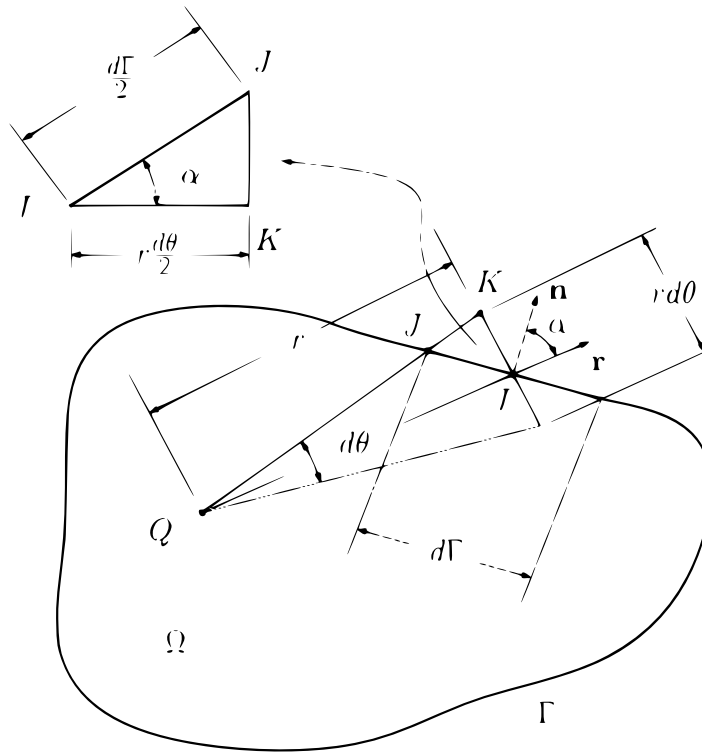


Figura 4.1: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

Do triângulo da Fig. (4.1), segue:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}$$

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma \quad (4.32)$$

Como  $\vec{n}$  e  $\vec{r}$  são vetores unitários, tem-se:

$$\cos \alpha = \vec{n} \cdot \vec{r} \quad (4.33)$$

Substituindo a Eq. (4.33) na Eq. (4.32) e depois na Eq. (4.31), tem-se:

$$\int_{\Omega} U_{ik} p_i(x, y) d\Omega = \int_{\Gamma} F_i(x, y) \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.34)$$

Substituindo a Eq. (4.34) na Eq. (4.15), segue:

$$u_l + \int_{\Gamma} T_{li} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} F_i \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.35)$$

A Eq. (4.35) será usada como equação básica do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual. Pode ser notado a ausência de integrais de domínio.

## 4.5 Equações integrais singulares

A equação integral (4.35) foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semicircular, com contorno  $\Gamma_\epsilon^*$  e raio  $\epsilon$ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Fig. (4.2). Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma:

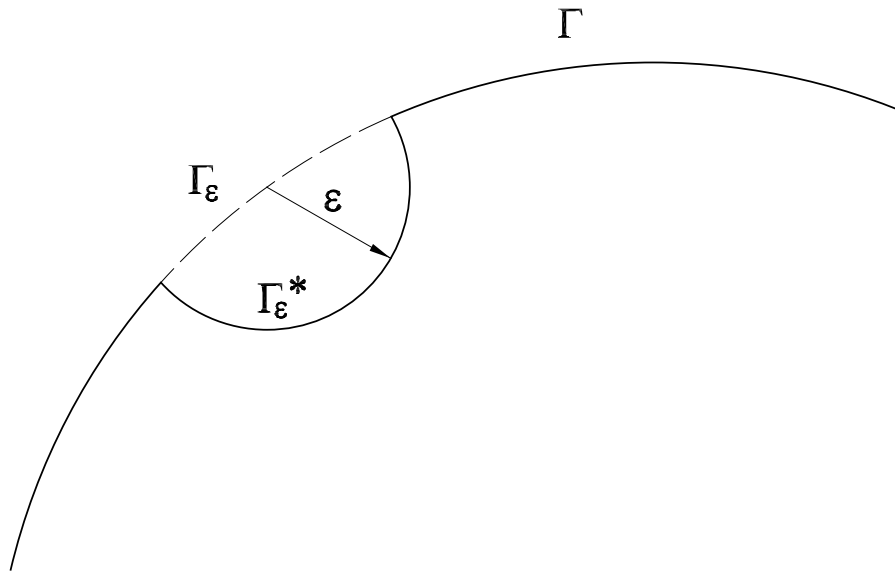


Figura 4.2: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (4.36)$$

onde  $\epsilon$  é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno  $\Gamma$  (Fig. 4.2). A Eq. (4.35) é escrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} F_i \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.37)$$

A primeira integral do lado direito da Eq. (4.37) contém um integrando de singularidade fraca da ordem  $\ln(1/r)$  e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem  $1/r$ , que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\
&u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma & \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.38) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por  $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$ , no qual  $A_{ij}(\mathbf{z}')$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a Eq. (4.37) pode ser escrita na forma:

$$c_{li}u_i + \oint_{\Gamma} T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} F_i \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.39)$$

onde  $\oint$  representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{li}(\mathbf{z}')$  é dado por  $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$ , no qual  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

## 4.6 Formulação dos elementos de contorno discretizada

Para se obter a solução do problema e calcular as variáveis desconhecidas na Eq. (4.39), o contorno é dividido em elementos de contorno. Neste trabalho serão utilizados elementos quadráticos (3 nós por elementos) descontínuos (elementos cujos nós da extremidades não são compartilhados com os elementos vizinhos).

Nesta seção será mais conveniente trabalhar com notação matricial ao invés da notação indicial. De acordo com Albuquerque (2001), tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \phi \mathbf{u}^{(i)} \\
\mathbf{t} &= \phi \mathbf{t}^{(i)} \\
\hat{\mathbf{u}} &= \phi \hat{\mathbf{u}}^{(i)} \\
\hat{\mathbf{t}} &= \phi \hat{\mathbf{t}}^{(i)}
\end{aligned} \quad (4.40)$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós,  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\mathbf{t}^{(i)}$  representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente,  $\phi$  é o vetor de funções de forma,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  representam os deslocamentos e

tensões ao longo do elemento e  $\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$  e  $\hat{\mathbf{t}}^{(i)}$  são os vetores nodais das soluções particulares de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Considere que o domínio tenha sido dividido em  $NE$  elementos de contorno. Substituindo as Eqs. (4.40) na Eq. (4.39), tem-se:

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^l = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi d\Omega \right\} \mathbf{t}^j + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.41)$$

Chamando a equação:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \phi d\Gamma = \mathbf{G} \quad (4.42)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma = \mathbf{H} \quad (4.43)$$

tem-se:

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} t^j + p_i \quad (4.44)$$

Daí, pode-se escrever:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{p} \quad (4.45)$$

## 4.7 Funções de forma quadráticas descontínuas

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático descontínuo como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \quad (4.46)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{t}^{(n)} \quad (4.47)$$

onde  $u_i^{(n)}$  e  $t_i^{(n)}$  são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$\phi^{(1)} = \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right) \quad (4.48)$$

$$\phi^{(2)} = 1 - \frac{9}{4} \xi^2 \quad (4.49)$$

$$\phi^{(3)} = \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right) \quad (4.50)$$

onde  $\xi$  representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Fig. 4.3).

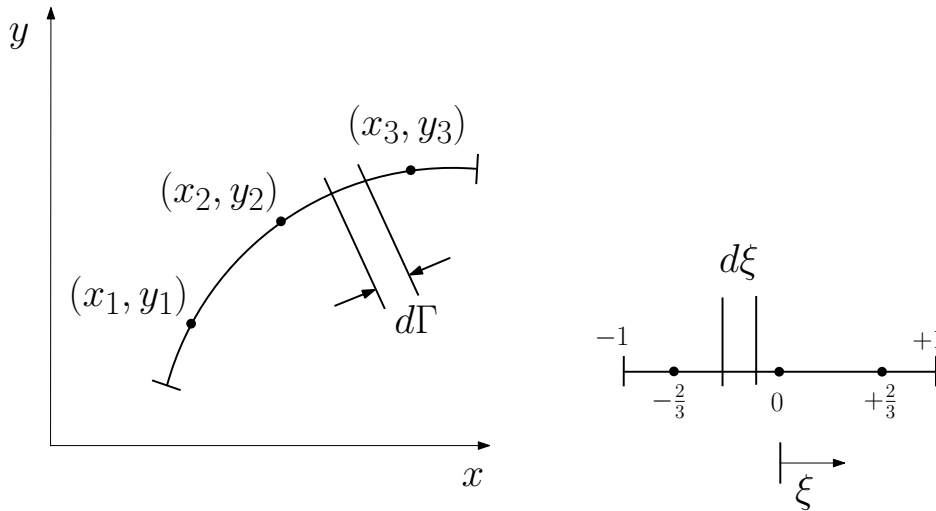


Figura 4.3: Transformação de coordenadas  $x_1 - x_2$  para  $\xi$ .

A formulação deste trabalho é isoparamétrica, ou seja, além das variáveis físicas no contorno (deslocamentos e forças de superfície), a geometria também é aproximada por elementos quadráticos descontínuos, da seguinte forma:

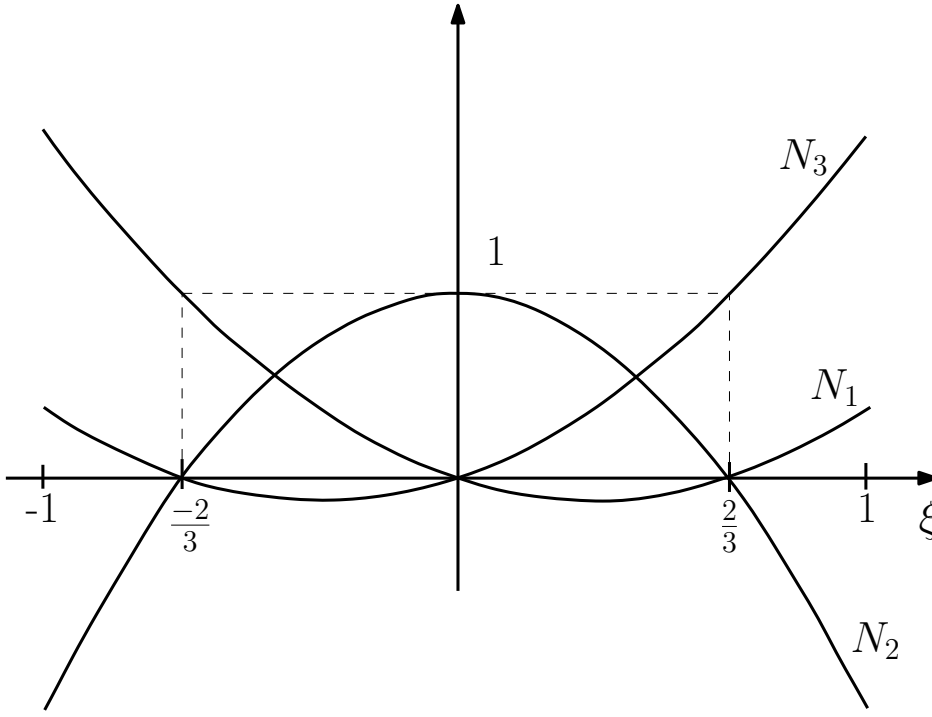


Figura 4.4: Funções de forma quadráticas descontínuas.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{x}^{(n)} \quad (4.51)$$

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \int_{\Gamma_j} T_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 T_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (4.52)$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (4.53)$$

onde  $|J|$  representa o módulo do Jacobiano da transformação  $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ , e é dado por Kane (1994), Brebbia e Dominguez (1996):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.54)$$



onde  $dx_1/d\xi$  e  $dx_2/d\xi$  são obtidos derivando-se as Eqs. (4.51) em relação a  $\xi$ .

Uma das contribuições deste trabalho está no uso das funções de forma quadráticas descontínuas para a interpolação no espaço. Tem sido muito comum na literatura o uso de funções de forma quadráticas descontínuas para as variáveis físicas do problema, por exemplo, temperatura e fluxo nos problemas de condução de calor e deslocamentos e forças de superfície em problemas de análise estrutural. Entretanto, o uso de funções descontínuas para interpolar a geometria sempre era desconsiderado. A justificativa para não se usar era devido aos nós estarem localizados no interior do elemento. Desta forma, no caso de elementos curvos, existe o risco de uma descontinuidade entre o final de um elemento e o início de outro, conforme mostrado na Figura 4.5 e em detalhes na Figura 4.6. Este problema não existe quando os elementos são contínuos pois existem nós nas extremidades dos elementos que são compartilhados entre elementos vizinhos, conforme mostrado na Figura 4.7.

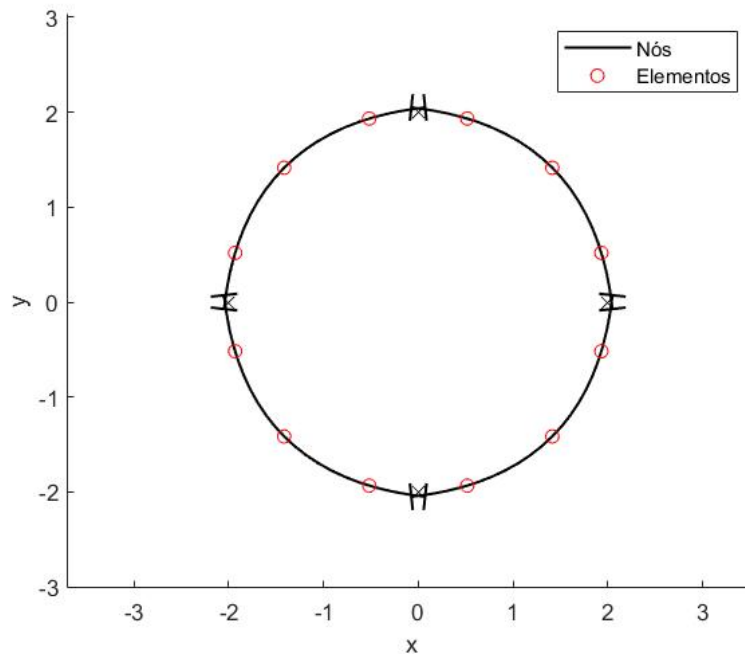


Figura 4.5: Elementos descontínuos curvos.

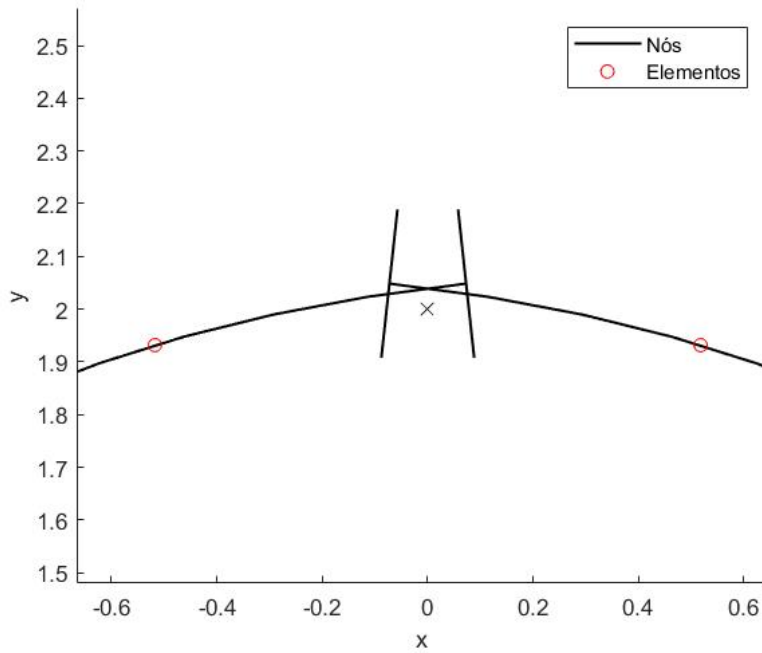


Figura 4.6: Sobreposição de elementos descontínuos curvos.

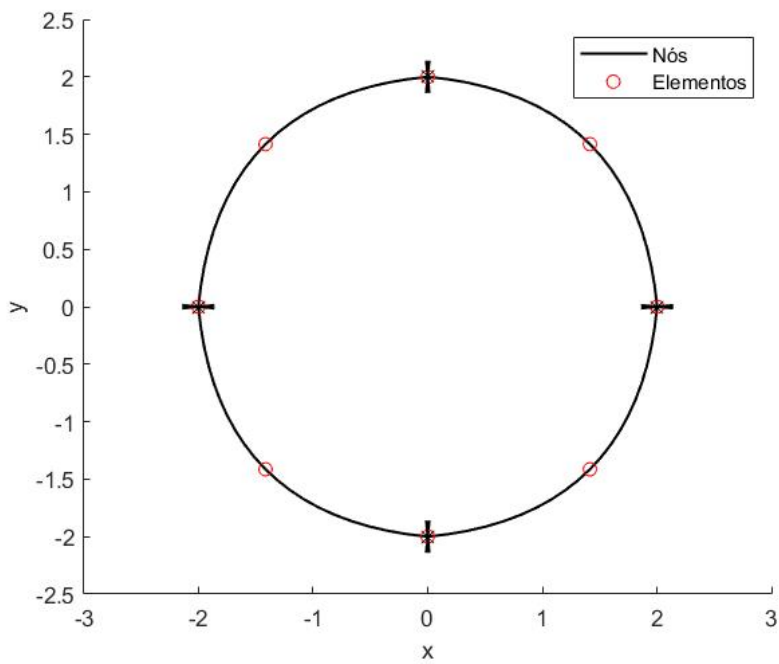


Figura 4.7: Elementos contínuos curvos.

As funções de forma para os elementos contínuos com nós em  $\xi = -2/3$ ,  $\xi = 0$  e  $\xi = 2/3$  são dadas por:

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (4.55)$$

$$\phi^{(2)} = 1 - \xi^2 \quad (4.56)$$

$$\phi^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (4.57)$$

Estas funções de forma são parábolas, conforme mostrado na Figura 4.8.

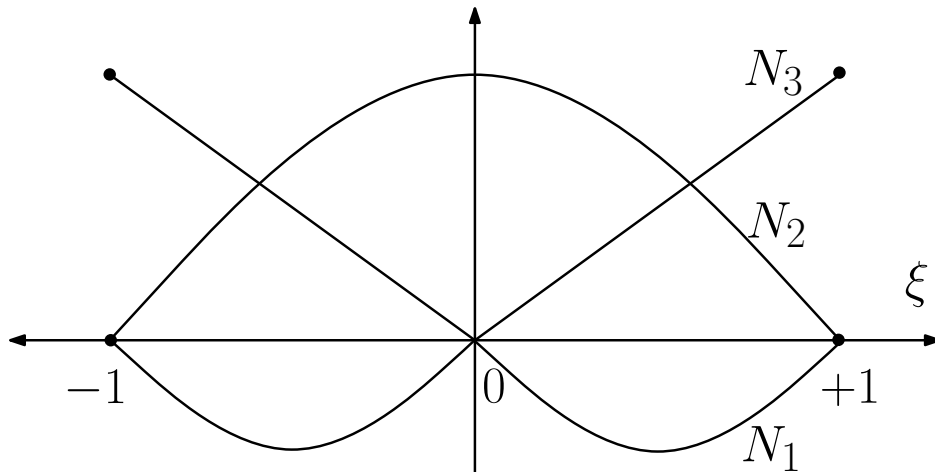


Figura 4.8: Funções de forma quadráticas contínuas.

Para garantir que não há sobreposição entre dois elementos vizinhos, neste trabalho, as funções de forma contínuas são usadas para definir as posições dos nós dos elementos descontínuos. Proceder-se da seguinte forma:

- Elementos com forma de parábolas são gerados usando as funções de forma contínuas, dadas pelas Equações (4.57) e mostradas na Figura 4.8.
- A posição dos nós dos elementos descontínuos são calculadas fazendo  $\xi = -2/3$ ,  $\xi = 0$  e  $\xi = 2/3$ .

Procedendo desta maneira, uma vez que 3 pontos sempre definem uma única parábola, pode-se usar elementos descontínuos para interpolar a geometria sem que haja sobreposição nas extremidades dos elementos. Note que, neste caso, os nós 1 e 3, ou seja, que se encontram em  $\xi = -2/3$  e  $\xi = 2/3$  geralmente não estão sobre o contorno exato, a menos que este contorno seja uma linha reta ou uma parábola. Caso o contorno seja, por exemplo, um arco de circunferência, os nós 1 e 3 não estarão sobre o arco pois os 3 pontos que definiram o elemento de contorno (uma parábola) foram os pontos inicial, central e final do elemento. Entretanto, a diferença entre a geometria do elemento e da parábola é pequena e pode ser diminuída com o refinamento da malha.

## 4.8 Sistema de referência local

Neste trabalho, ao invés do sistema de referências  $(x_1, x_2)$ , usa-se, para aplicar as condições de contorno, um sistema local com eixos nas direções normais e tangentes ao nó, chamado de sistema  $(n, t)$ . Com isso, problemas com condições de contorno de deslocamentos restritos na direção normal podem ser facilmente implementados, o que aumenta significativamente a quantidade de problemas que podem ser analisados pela formulação implementada. Além disso, a implementação de formulações para a análise de mecânica do contato é bastante direta.

Para mudar o sistema de referência  $(x_1, x_2)$  para o sistema  $(n, t)$ , os vetores de deslocamentos e forças de superfícies nodais, dados respectivamente por  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\mathbf{t}^{(i)}$  escritos no referencial  $(x_1, x_2)$  devem ser multiplicados por uma matriz de transformação que, neste caso, é uma matriz  $2 \times 2$  cujos elementos são dados em função das componentes do vetor unitário normal ao contorno  $\mathbf{n}$ . Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(i)} \\ u_t^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Assim, os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  que representam os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, em um ponto qualquer do contorno, são dados, respectivamente por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_t^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_t^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_t^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \hat{\mathbf{u}}^{(n)} \quad (4.59)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_n^{(1)} \\ t_t^{(1)} \\ t_n^{(2)} \\ t_t^{(2)} \\ t_n^{(3)} \\ t_t^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \hat{\mathbf{t}}^{(n)} \quad (4.60)$$

Note que os vetor  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  continuam representados no sistema de referência  $(x_1, x_2)$ .

Assim, a equação (4.45) é reescrita como:

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{t}} + \mathbf{p} \quad (4.61)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  são vetores que contém deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, em todos os nós, escritos no sistema de referência local  $(n, t)$ . As matrizes  $\hat{\mathbf{H}}$  e  $\hat{\mathbf{G}}$  são as matrizes de influência  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , calculadas levando-se em conta que as funções de forma foram multiplicadas pelas matrizes de transformação. Uma vez que o vetor  $\mathbf{p}$  não depende dos valores de deslocamentos e forças de superfície, ele permanece inalterado.

Para se calcular as variáveis desconhecidas, faz-se uma troca de colunas entre as matrizes  $\hat{\mathbf{H}}$  e  $\hat{\mathbf{G}}$ , conforme as condições de contorno, gerando as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Desta forma, todas as variáveis desconhecidas no contorno, sejam elas deslocamentos ou forças de superfícies passam para um vetor  $\mathbf{x}$  e as variáveis conhecidas passam para um vetor  $\mathbf{y}$ , obtendo-se:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{By} + \mathbf{p} \quad (4.62)$$

que pode ser reescrito na forma de um sistema linear:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4.63)$$

Uma vez resolvido este sistema linear, faz-se a reordenação das variáveis desconhecidas, que agora foram calculadas, e que se encontram no vetor  $\mathbf{x}$  e as variáveis conhecidas, obtendo todos os valores dos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$ .

## 4.9 Tratamento das integrais singulares

As integrais singulares da ordem  $O(\ln r)$  podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i) \quad (4.64)$$

onde  $N$  é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração  $\xi_i$  e o fator peso  $w_i$  podem ser encontrados na literatura de Stroud e Secrest (1966), Brebbia e Dominguez (1996).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes  $\hat{\mathbf{H}}$  e  $\hat{\mathbf{G}}$  são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de  $\mathbf{G}$  são do tipo  $\log(r)$  sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de  $\hat{\mathbf{H}}$  são do tipo  $1/r$  e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1996). Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário em uma dada direção do sistema  $(x_1, x_2)$  e que não existam forças de corpo ( $p_i = 0$ ) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Note que neste caso o sistema deve ser  $(x_1, x_2)$  para representar deslocamento de corpo rígido e não os sistema  $(n, t)$ . Desta forma, a Eq. (4.45) torna-se:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (4.65)$$

onde  $\mathbf{v}^q$  é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção  $q$  e zero na outra direção. Para satisfazer a Eq. (4.65) tem-se:

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (4.66)$$

sendo  $j$  par ou ímpar, dependendo da direção considerada.

O termo da diagonal da matriz  $\mathbf{H}$  é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade (direção) em consideração.

## 4.10 Cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio  $\Omega$ , obtido derivando-se a Eq. (4.15) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como:

$$\sigma_{ik} + \int_{\Gamma} S_{jik} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jik} t_j d\Gamma - \int_{\Omega} D_{jik} p_j d\Omega \quad (4.67)$$

onde  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$  são combinações lineares das derivadas de  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$ , respectivamente.

O tensor  $S_{kij}$  é dado por:

$$\begin{Bmatrix} S_{11j} \\ S_{22j} \\ S_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1j,1} \\ T_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (T_{1j,2} + T_{2j,1}) \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

onde  $j = 1, 2$ . As derivadas de  $T_{ij}$  são obtidas pela equação:

$$T_{ij,k} = -2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)^2} R_{k1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)^2} R_{k2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \quad (4.69)$$

onde,

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Da mesma forma  $D_{kij}$  pode ser calculado como:

$$\begin{Bmatrix} D_{11j} \\ D_{22j} \\ D_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1j,1} \\ U_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (U_{1j,2} + U_{2j,1}) \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

sendo que as derivadas de  $U_{ij}$  são dadas por:

$$U_{ij,k} = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{z_1 - z'_1} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z'_2} R_{k2} q_{j2} A_{i2} \right] \quad (4.72)$$

Para transformar as integrais de domínio da Eq. (4.15) em integrais de contorno, conforme explicado neste Capítulo, a integral de domínio da Eq. (4.15) é transformada em integrais de contorno usando o método da integração radial.

Seguindo o mesmo procedimento para obtenção da equação (4.15), pode-se escrever a integral de domínio da Eq. (4.67) como:

$$\int_{\Omega} D_{kij} p_j d\Omega = \int_{\Gamma} K_{kj} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.73)$$

Substituindo a Eq. (4.73) na Eq. (4.67), tem-se:

$$\sigma_{ij} + \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{kij} t_k d\Gamma + \int_{\Gamma} K_{kj} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (4.74)$$

As equações integrais de deslocamentos (4.35) e de tensões (4.74) foram ambas escritas para um ponto fonte pertencendo ao interior do domínio  $\Omega$ .

As equações integrais de deslocamentos (4.35) e de tensões (4.74) podem ser usadas para determinar as componentes de deslocamento e tensão, respectivamente, em qualquer número de pontos previamente selecionados no interior do domínio.

## 4.11 Tensões no contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere um nó em que as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não coincidam com as direções dos eixos geométricos (Fig. 4.9). Neste nó é criado um novo sistema de referência  $x'_1x'_2$  possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local, tem-se:

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij}u_j \\ t'_i &= l_{ij}t_j \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde  $l_{ij}$  são os cossenos diretores.

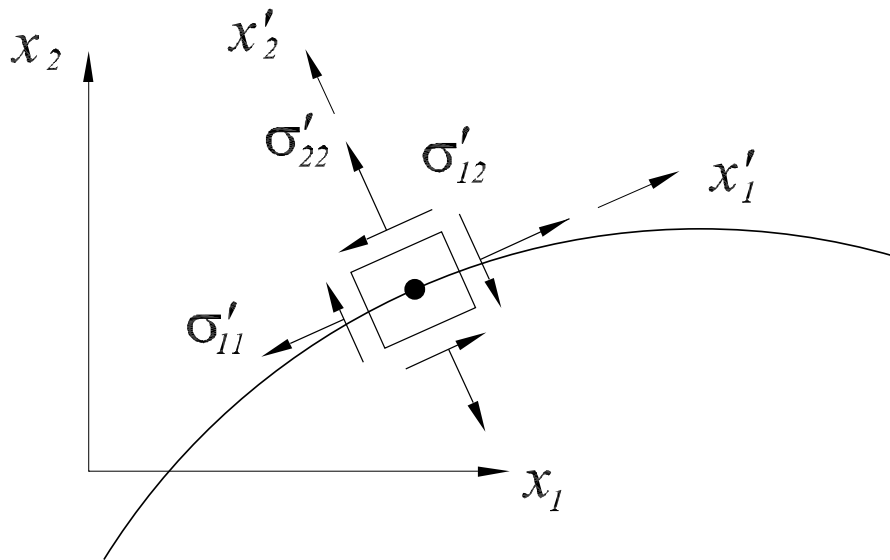


Figura 4.9: Tensões no contorno.

No sistema local tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= t'_2 \\ \sigma'_{12} &= t'_1 \end{aligned} \quad (4.76)$$

A deformação  $\epsilon'_{11}$  pode ser calculada, sabendo que:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1} \\ u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1} \end{aligned} \quad (4.77)$$



Usando geometria diferencial na Eq. (4.77), pode-se notar que a direção local  $x'_1$  é tangente ao comprimento infinitesimal de arco  $ds$  dado por:

$$ds = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_1'}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2'}{d\xi}\right)^2} d\xi$$

$$\frac{ds}{d\xi} = J \quad (4.78)$$

Um pequeno movimento ao longo de  $s$  corresponde a um pequeno movimento em  $x'_1$ . Isto permite com que  $x'_1$  na Eq. (4.77) seja substituído pela Eq. (4.78), ou seja,

$$\varepsilon'_{11} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds}$$

$$\varepsilon'_{11} = \frac{du'_1}{d\xi} J^{-1} \quad (4.79)$$

Sendo:

$$u_1 = \sum_{i=1}^3 \phi^{(i)} u_1^{(i)}$$

$$\frac{du_1}{d\xi} = \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)}$$

$$(4.80)$$

onde  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma. Pode-se então obter a deformação por:

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1} \quad (4.81)$$

Da relação tensão deformação, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & 2Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

onde  $Q'_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez escritas no referencial local.

Na Eq. (4.82) tem-se três incógnitas  $\sigma'_{11}$ ,  $\varepsilon'_{22}$ ,  $\varepsilon'_{12}$ , que agora podem então ser calculadas.

Por último, as tensões tem que ser escritas no referencial global  $x_1x_2$ , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo, a formulação desenvolvida ao longo desta dissertação será aplicada a diferentes problemas para validar a implementação. Sempre que possível, resultados serão comparados com resultados analíticos.

### 5.1 Placa quadrada

O primeiro exemplo a ser analisado é o de uma placa quadrada de aresta igual a 1, inclinada  $30^\circ$  em relação à horizontal. A placa encontra-se sob tração na direção normal a uma das arestas e com os deslocamentos normais restritos em duas outras arestas, conforme mostrado na Figura 5.1. O objetivo deste problema é validar a implementação das condições de contorno no sistema de referência local. As propriedades do material da placa são dadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Geometria e propriedade do material - placa quadrada.

Propriedade	Símbolo	Unidade
Densidade	$\rho$	1 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade Angular Constante	$\omega$	0 rad/s
Módulo de Elasticidade	$E_1$	1.00 Pa
Módulo de Elasticidade	$E_2$	1.01 Pa
Elasticidade Transversal	$G$	0.3846 Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.3

Por se tratar de um problema simples, cuja solução analítica para deslocamentos é linear, apenas 1 elemento por lado foi usado na discretização, conforme mostrado na Figura 5.1. O resultado analítico para os deslocamentos normais na aresta onde a carga é aplicada é igual a 1. O resultados obtidos nos nós desta aresta foram 0,9997, 0,9994 e 0,9990, o que valida a implementação do código no que se refere ao sistema de referência local para as condições de contorno. A placa deformada é mostrada na Figura 5.2.

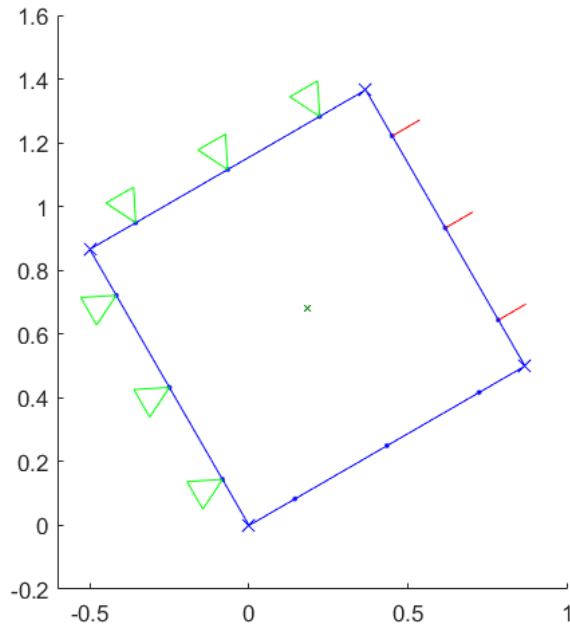


Figura 5.1: Condições de contorno da placa quadrada.

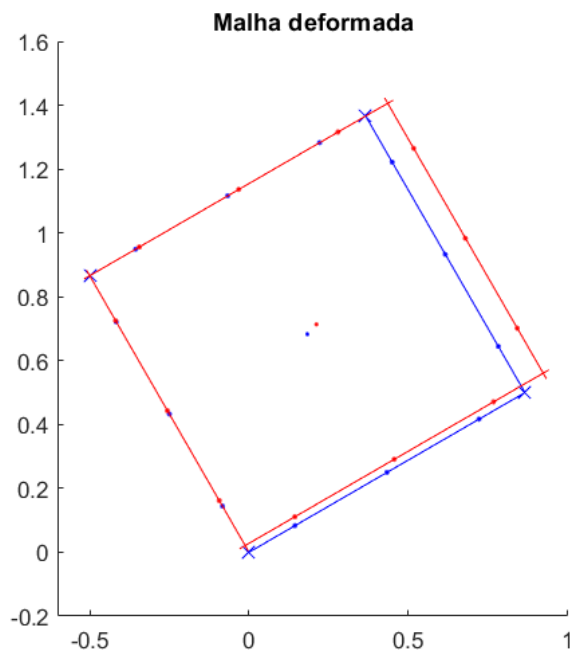


Figura 5.2: Malha deformada da placa quadrada.

## 5.2 Placa laminada

Este exemplo é o de uma placa laminada quadrada de aresta igual a 1 m, composta por quatro lâminas de propriedades mecânicas iguais e sequência de empilhamento igual

a  $[45^\circ/60^\circ/60^\circ/45^\circ]$ . A carga horizontal aplicada de maneira uniformemente distribuída é igual a  $10^4$  N/m. A placa encontra-se sob tração na direção normal nas arestas verticais e possui três nós restritos, conforme mostrado na Fig. 5.3.

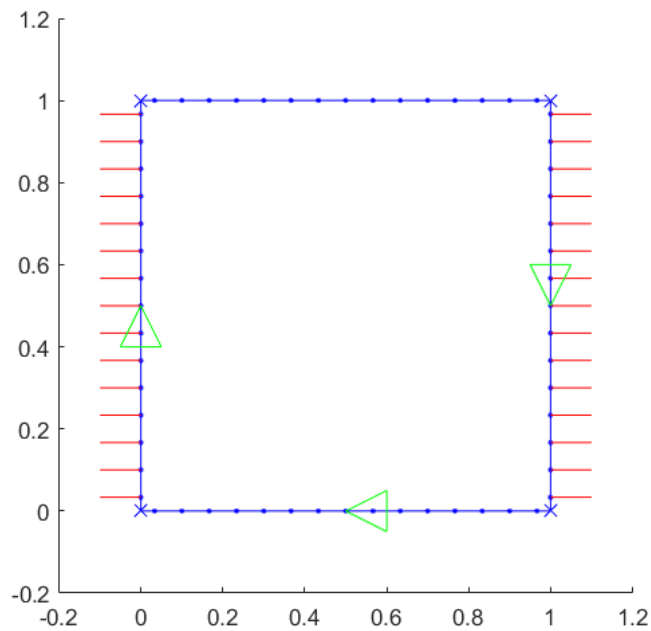


Figura 5.3: Condições de contorno da placa laminada.

As restrições destes nós é unicamente para se eliminar os deslocamentos de corpos rígidos. As propriedades de cada uma das lâminas são mostradas na Tabela 5.2. A espessura de cada uma das lâminas é igual a 2 mm.

Tabela 5.2: Geometria e propriedade do material - placa laminada.

Propriedade	Símbolo	Unidade
Espessura	$h$	2 mm
Módulo de Elasticidade 1	$E_1$	149 GPa
Módulo de Elasticidade 2	$E_2$	10.5 GPa
Módulo de Elasticidade Transversal	$G_{12}$	5.61 GPa
Coefficiente de Poisson Principal	$\nu_{12}$	0.3

Este problema pode ser resolvido analiticamente, usando as equações do Capítulo 2, uma vez que tensões e deformações são constantes ao longo de toda a placa. Os resultados analíticos para as deformações são dados por:  $\epsilon_{11} = 8.35 \cdot 10^{-05}$ ,  $\epsilon_{22} = -1.00 \cdot 10^{-05}$  e  $\epsilon_{12} = -5.00 \cdot 10^{-05}$ . Os resultados numéricos tiveram uma perfeita concordância com os resultados analíticos apresentando erros sempre abaixo de 0,5%.

A deformação da placa laminada é mostrada na Fig. 5.4.

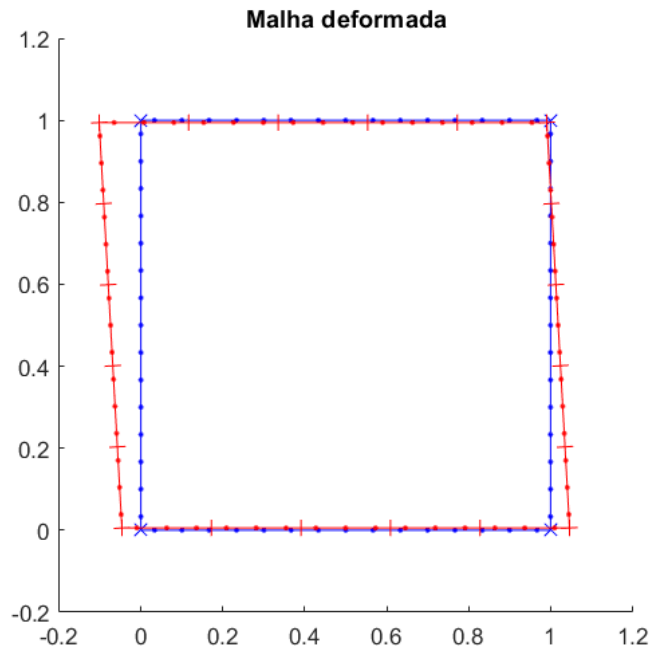


Figura 5.4: Malha deformada da placa laminada.

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram as tensões ao longo da espessura do laminado nos sistemas global e local, respectivamente. A Fig. 5.7 mostra as deformações ao longo da espessura do laminado no sistema global. Note que as tensões variam de lâmina para lâmina, uma vez que as propriedades dos ângulos de orientação das fibras variam de lâmina para lâmina. Já as deformações são constantes ao longo do laminado devido a continuidade do material.

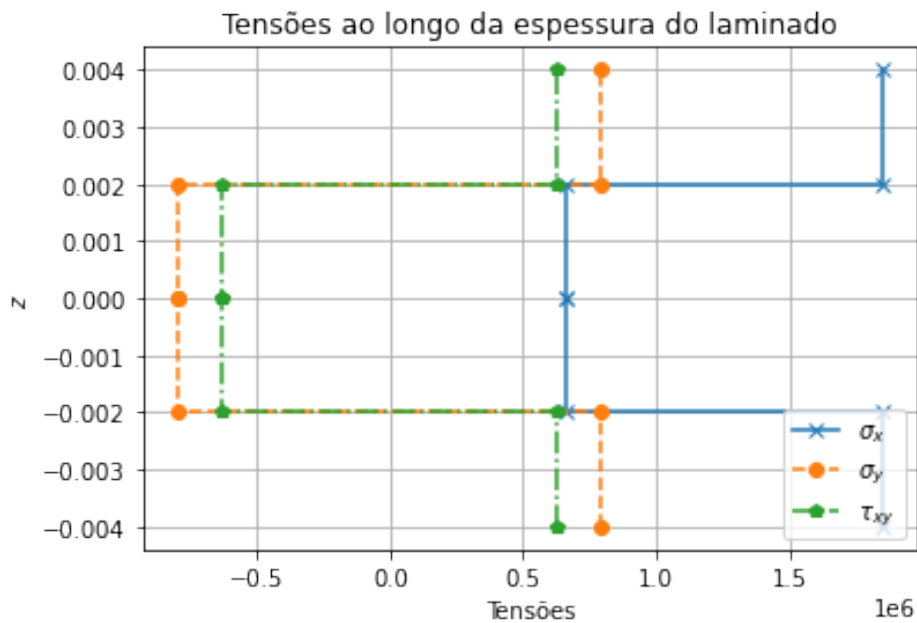


Figura 5.5: Tensão no laminado no sistema global.

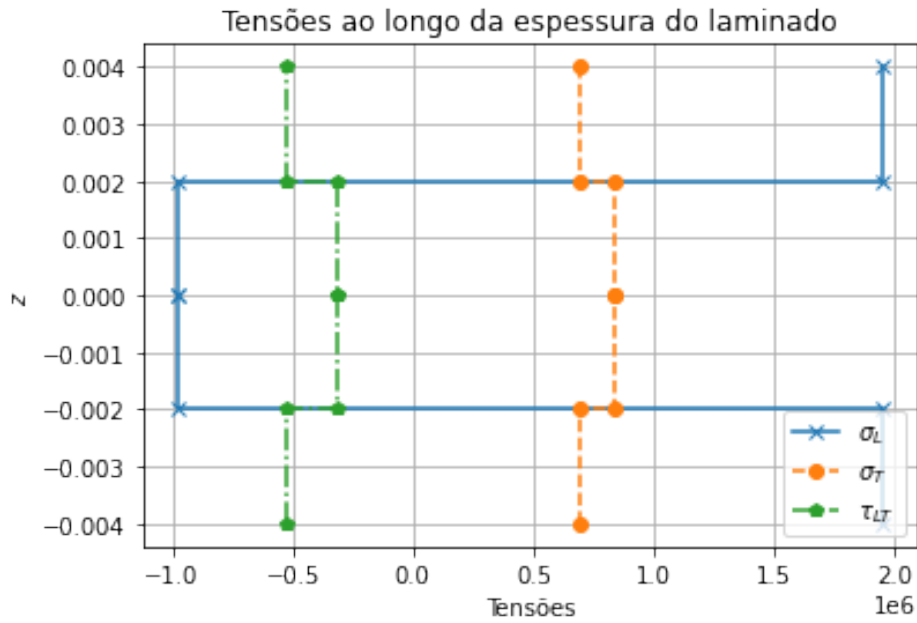


Figura 5.6: Tensão no laminado no sistema local.



Figura 5.7: Deformação do laminado no sistema global.

### 5.3 Disco ortotrópico rotativo

Um disco rotativo hipotético em estado plano de tensão, girando com velocidade angular constante, será analisado para validar-se a formulação desenvolvida. Considere o disco como sendo ortotrópico, devido a simetria, apenas um quarto do disco foi analisado com as condições de contorno mostrada na Figura 3.5. A geometria e as propriedades do material podem ser vistas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Geometria e propriedade do material - disco rotativo.

Propriedade	Símbolo	Unidade
Raio	$R$	1 m
Densidade	$\rho$	1 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade Angular Constante	$\omega$	20 rad/s
Módulo de Elasticidade	$E_1$	17.24 Pa
Módulo de Elasticidade	$E_2$	48.26 Pa
Elasticidade Transversal	$G_{12}$	6.89 Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12}$	0.29

A Fig. 5.8 mostra a malha discretizada utilizada que contém 15 elementos quadráticos descontínuos, sendo 5 elementos por segmento. Também são mostradas nesta figura as condições de contorno que se divide em deslocamentos restritos na direção  $x$  na aresta vertical, deslocamentos restritos na direção  $y$  na aresta horizontal e segmento livre ( $t_x = t_y = 0$ ) no arco de circunferência.

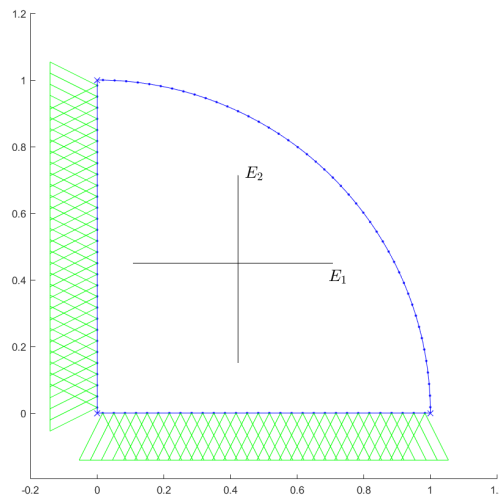


Figura 5.8: Malha de elementos de contorno usado para discretizar um quarto do disco rotativo (15 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 5 por aresta).

A Fig. 5.9 mostra os resultados numéricos obtidos com a formulação ortotrópica para os deslocamentos na direção  $x$  ao longo da aresta horizontal, com os resultados analíticos. Da mesma forma, a Figura 5.10 mostra a comparação dos resultados analíticos e numéricos para os deslocamentos na direção  $y$  ao longo da aresta vertical. Em ambos os casos há uma perfeita concordância entre os resultados analíticos e numéricos.



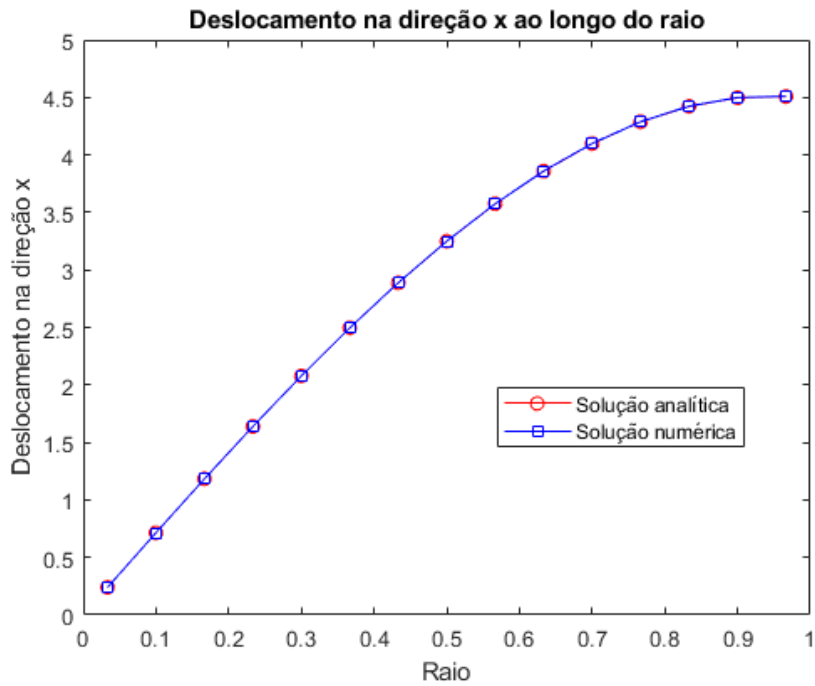


Figura 5.9: Deslocamento da aresta horizontal na direção  $x$ .

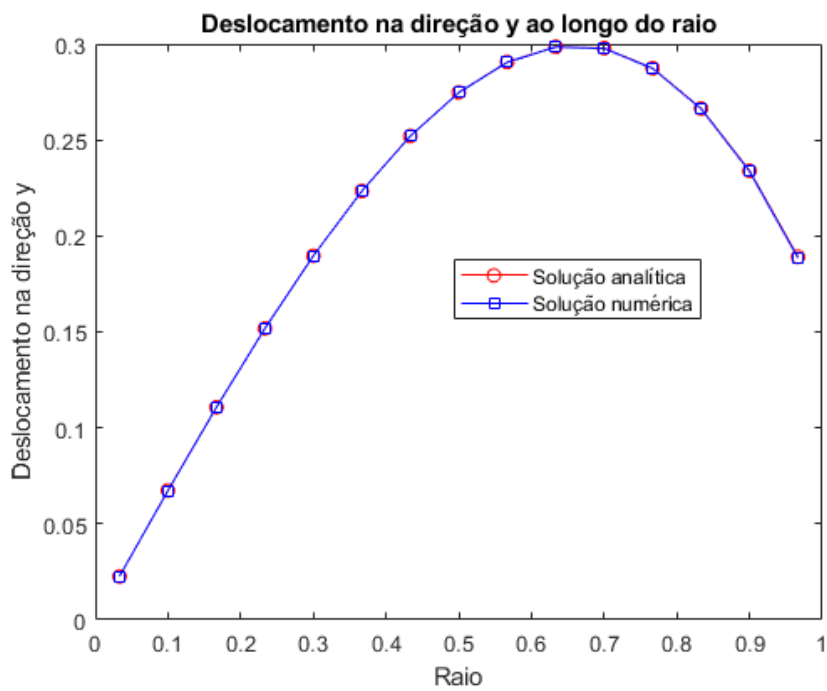


Figura 5.10: Deslocamento da aresta vertical na direção  $y$ .

As Figuras 5.11 e 5.12 mostram, respectivamente, uma comparação dos resultados analíticos e numéricos para as tensões circunferenciais e radiais, respectivamente, calculadas nas arestas vertical e horizontal. Também nesses casos há uma ótima concordância entre ambos os resultados analíticos e numéricos.

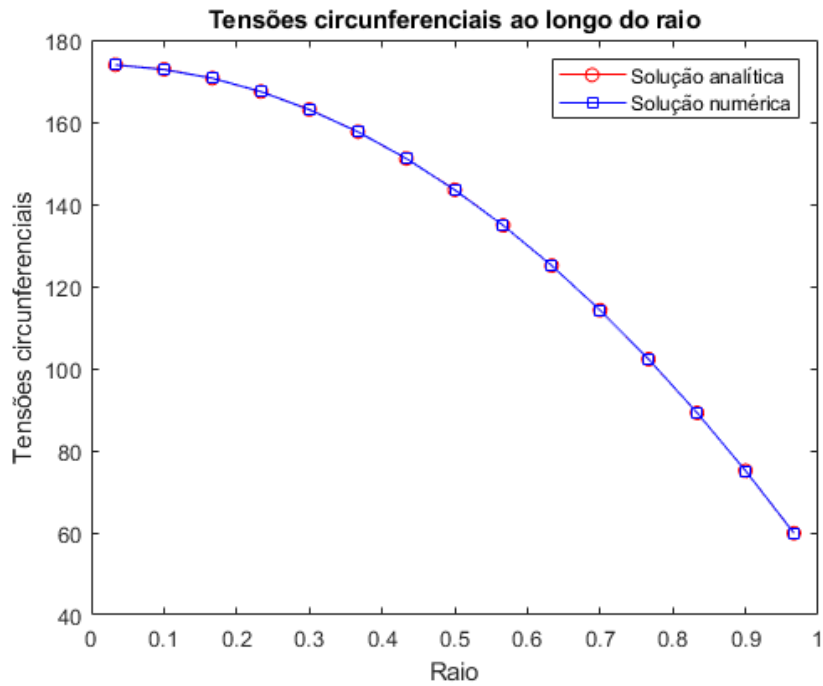


Figura 5.11: Tensão circunferencial ao longo da aresta vertical.

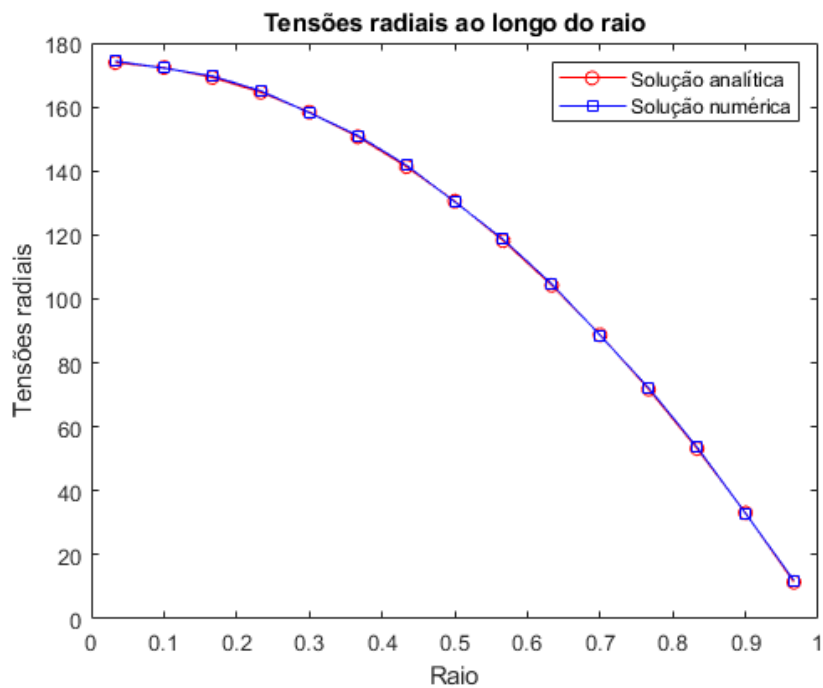


Figura 5.12: Tensão radial ao longo da aresta horizontal.

Para mostrar como os resultados convergem para as soluções analíticas, foi feita uma análise com diferentes malhas e os resultados para deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , tensões radiais e tensões circunferenciais foram comparadas com resultados numéricos. Os erros percentuais em cada um dos nós nas arestas especificadas foram calculadas, conforme a

seguinte equação:

$$E = \left| \frac{u_a - u_n}{u_a} \right| \times 100 \quad (5.1)$$

onde  $E$  é o erro percentual,  $u_a$  é o valor analítico da variável e  $u_n$  é o valor numérico da variável.

Foram utilizadas 4 malhas, sendo que a mais grosseira possui 7 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 2 na aresta vertical, 2 na aresta horizontal e 3 na aresta curva. A malha mais refinada possui 35 elementos, sendo 10 na aresta vertical, 10 na aresta horizontal e 15 na aresta curva.

Conforme pode ser notado na Figura 5.13, os erros para os deslocamentos na direção  $x$  na aresta horizontal possui um padrão de erros mais altos nos nós das extremidades da aresta e menores no interior da aresta, com variação suave entre eles. Um fato inesperado foi que para a malha com 14 elementos os resultados para os nós entre  $0,1 < r < 0,8$  os erros foram menores que para as malhas mais refinadas. Além disso, os erros da malha de 35 elementos são maiores que os erros da malha de 21 e 28 elementos para a grande maioria dos nós. Note também que em todos os casos os erros ficaram abaixo de 1%.

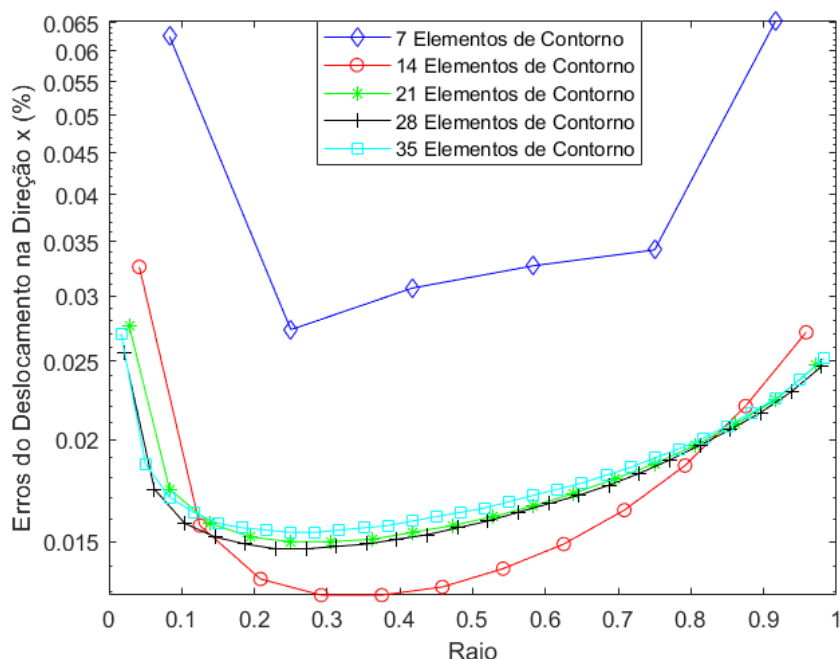


Figura 5.13: Erros percentuais para os deslocamentos na direção  $x$  na aresta horizontal.

Na Figura 5.14, também há um padrão de erros mais altos nas extremidades da aresta. Entretanto, neste caso, ao contrário do caso anterior, os erros em praticamente todos os nós diminuem com o refinamento da malha. As curvas de erros também são suaves, exceto para a malha de 35 elementos que apresenta uma quina na curva. Note que, os erros ficaram abaixo de 1% para a maioria dos casos, exceto para a malha menos refinada e para o último nó das

demais malhas.

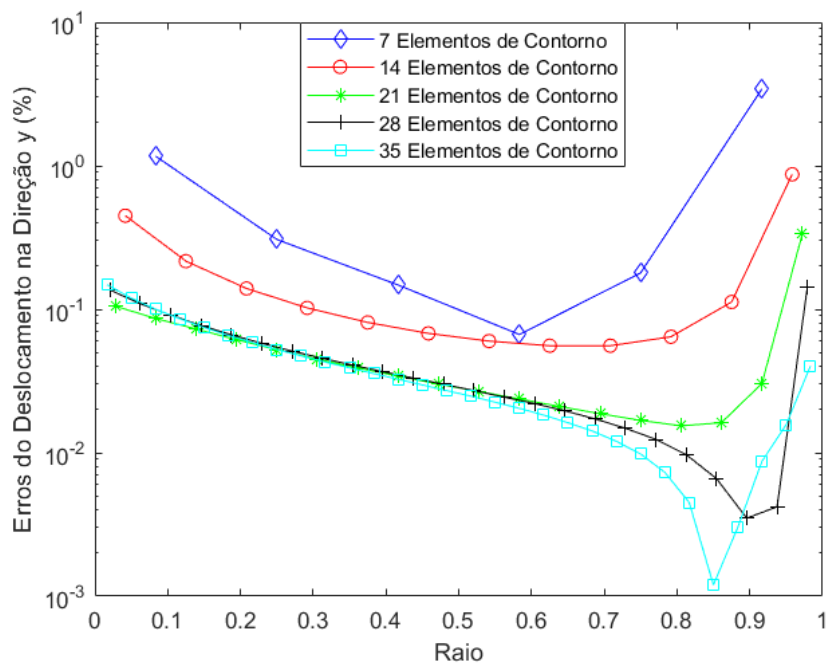


Figura 5.14: Erros percentuais para os deslocamentos na direção  $y$  na aresta vertical.

A Figura 5.15 mostra um padrão diferente pois a curva deixa de ser suave, apresentando na forma de serra. Porém, note que esse padrão indica que os erros nos nós centrais dos elementos são menores que nos nós das extremidades. Este padrão se deve ao fato das tensões serem calculadas usando a derivada das funções de forma, ao invés de uma equação integral.

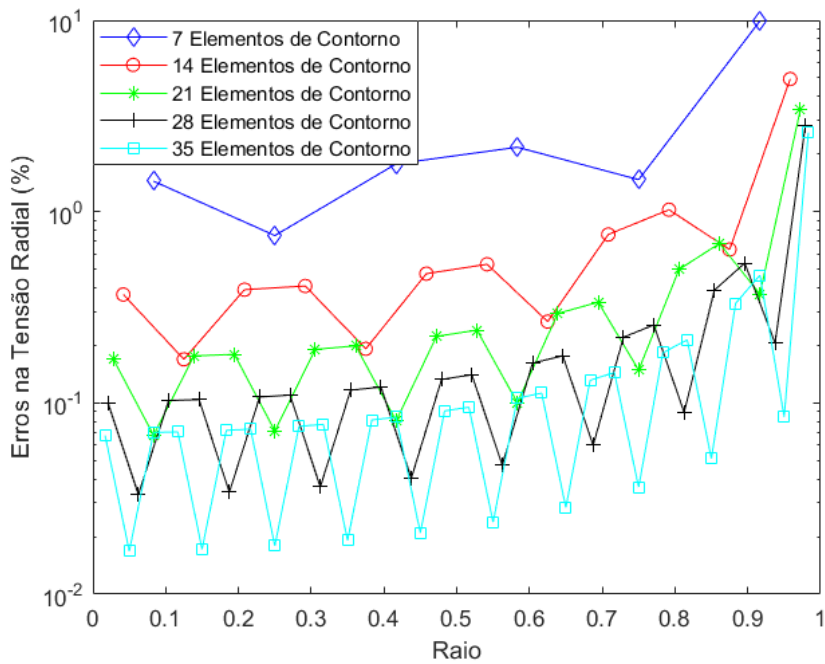


Figura 5.15: Erros percentuais para as tensões radiais na aresta horizontal.

A Figura 5.16 mostra um padrão parecido com o caso anterior, porém invertido. Ou seja, os erros são mais altos nos nós centrais e mais baixos nos nós da extremidades. Em todos os casos os erros ficaram abaixo de 1%.

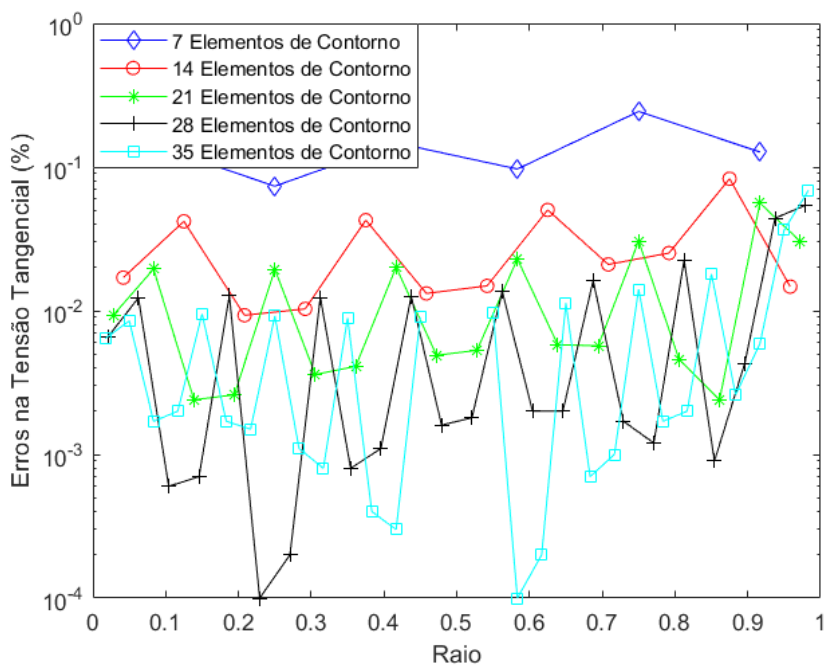


Figura 5.16: Erros percentuais para as tensões tangenciais na aresta vertical.

Para se ter uma medida global do erro, foi calculado o erro quadrático médio para cada uma das curvas mostradas nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16. Assim, é possível plotar esses

erros em função do número total de nós, sendo que cada curva do erro percentual se torna um ponto no gráfico do erro quadrático médio. O erro quadrático médio percentual é dado por:

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(u_a - u_n)^2}{u_a^2}} \times 100 \quad (5.2)$$

onde  $\bar{E}$  é o erro quadrático médio e  $n$  é o número total de nós em cada uma das arestas, sendo que os valores numéricos  $u_n$  e analíticos  $u_a$  estão sendo calculados.

A Figura 5.17 mostra os erros quadráticos médios para os deslocamentos  $x$  e  $y$  e também para as tensões radiais e circunferenciais. Note que, conforme já observado na Figura 5.13, os erros no cálculo dos deslocamentos na direção  $x$  são menores para a malha de 14 elementos que para as demais malhas. A tensão tangencial apresenta um ligeiro aumento dos erros para as malhas de 28 e 35 elementos quando comparado com os erros da malha de 21 elementos. Já os deslocamentos na direção  $y$  e a tensão radial apresentam o comportamento esperado, com os erros menores para as malhas mais refinadas.

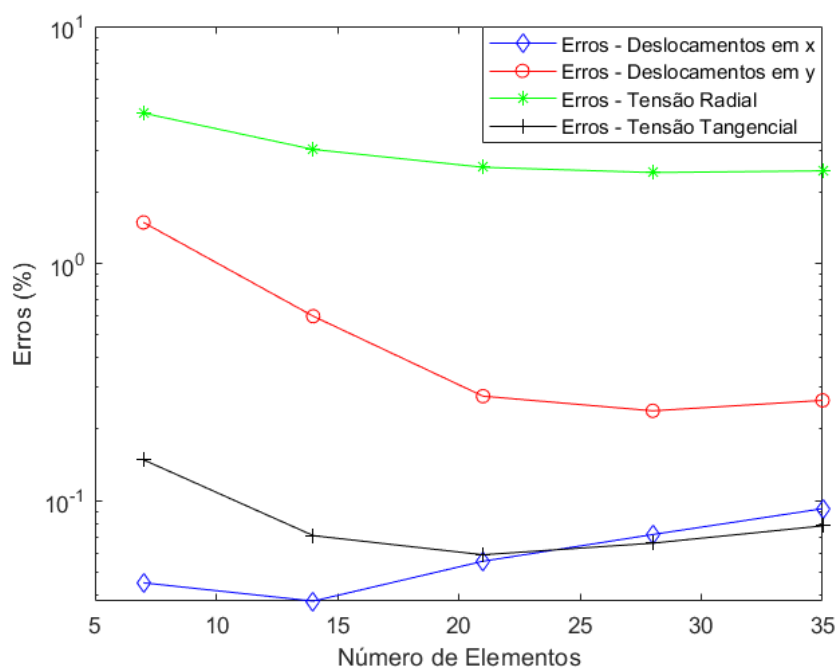


Figura 5.17: Erros.

Apesar de alguns comportamentos não esperados, com erros tendo ligeiro aumento com o refinamento, os erros em geral foram abaixo de 1 %, exceto para a tensão radial. Verificando a Figura 5.15, nota-se que apenas o nó mais externo apresenta um erro mais elevado, maior que 1% para todas as malhas. Por causa deste ponto é que o erro quadrático médio se mantém sempre acima de 1 %.

## 5.4 Palheta de turbina aeronáutica

Considere que a palheta é de um material ortotrópico hipotético com propriedades dada na Tabela 5.4, sendo que o atrito entre o rotor e a palheta não foi considerado. As condições de contorno e a malha utilizada para a análise do problema são dados na Figura 5.19.

Tabela 5.4: Geometria e propriedade do material - palheta de turbina aeronáutica.

Propriedade	Símbolo	Unidade
Velocidade Angular Constante	$\omega$	100.000 RPM
Módulo de Elasticidade	$E_1$	114 GPa
Módulo de Elasticidade	$E_2$	228 GPa
Elasticidade Transversal	$G_{12}$	11.4 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12}$	0.3

As dimensões do rotor e da palheta são dados disponíveis na Figura 5.18.

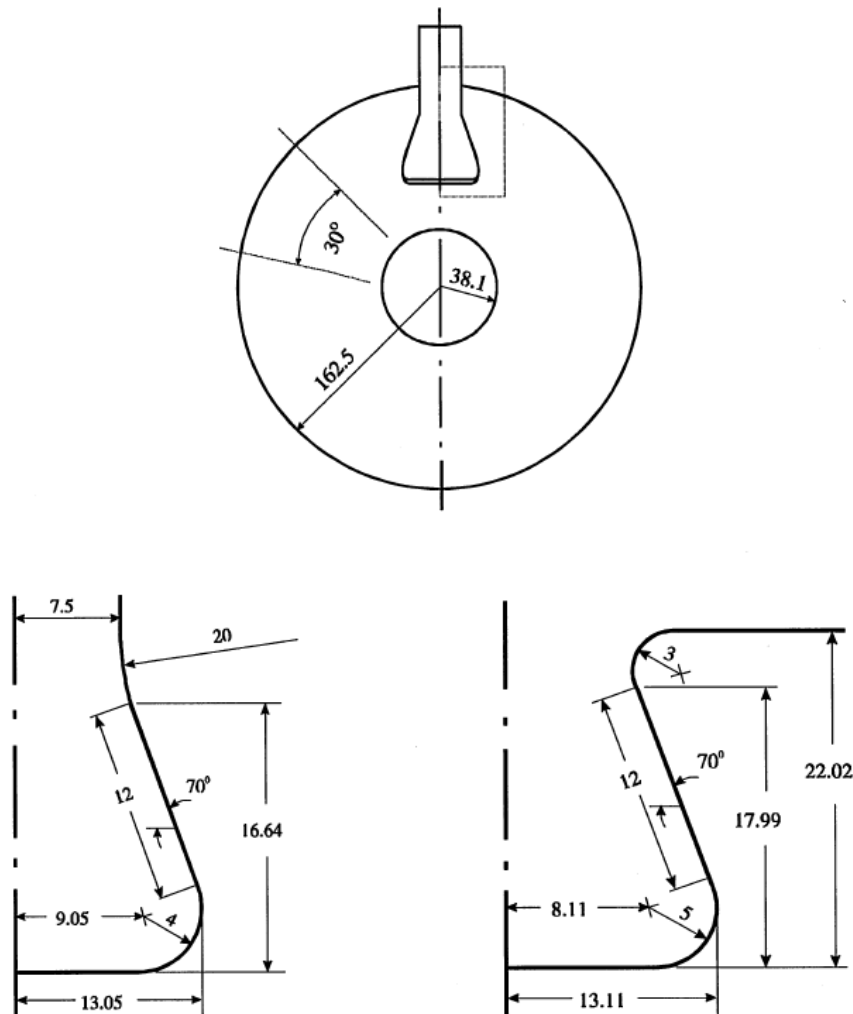


Figura 5.18: Esboço do rotor e da palheta da turbina (PAPANIKOS; MEGUID; STJEPANOVIC, 1998).

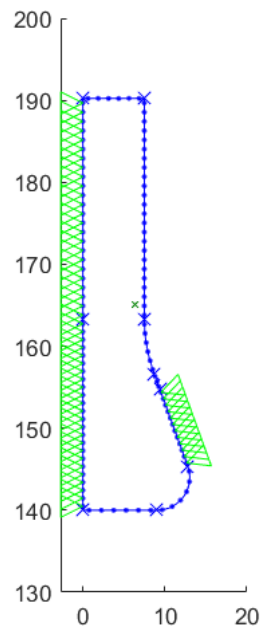


Figura 5.19: Condições de contorno da palheta.

São utilizados 37 elementos de contorno quadráticos descontínuos, distribuídos conforme mostrado na Figura 5.19. A deformação da palheta é mostrada na Figura 5.20.

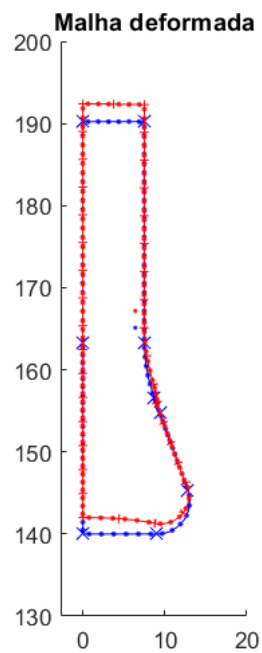


Figura 5.20: Malha deformada da palheta.

A tensão normal na região de contato é mostrada na Figura 5.21 e os deslocamento normal e tangencial são mostrados na Figura 5.22.



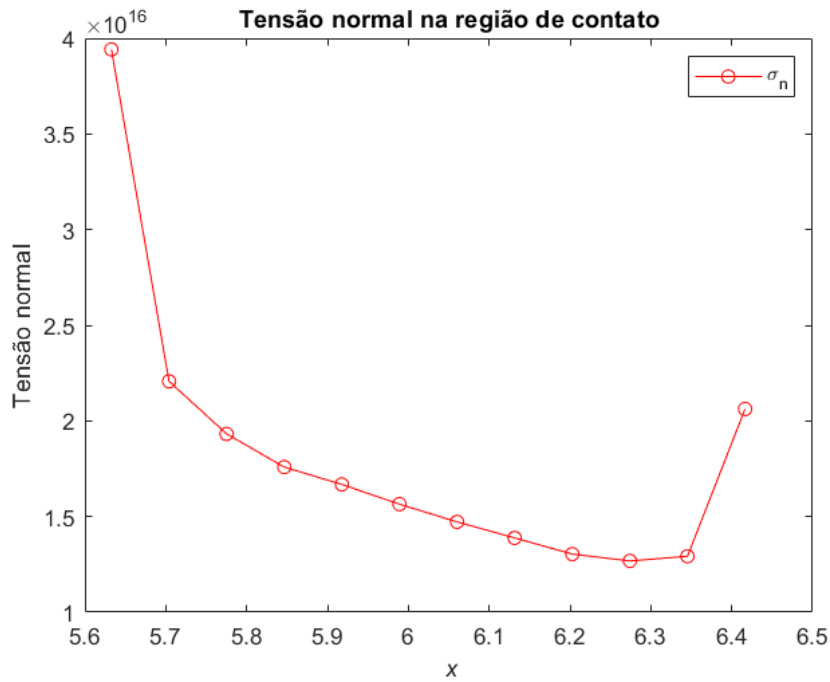


Figura 5.21: Tensão normal na região de contato.

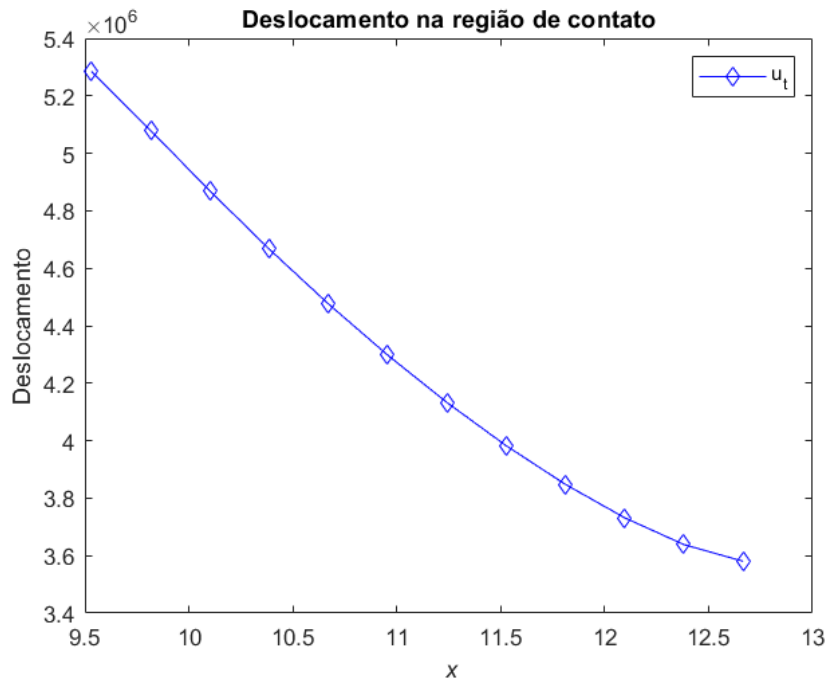


Figura 5.22: Deslocamento tangencial na região de contato.

Os resultados para as tensões normais apresentam-se com a mesma forma dos resultados mostrados por Sinclair e Cormier (2002). Porém, devido a insuficiência de dados fornecida no artigo citado, não foi possível fazer uma reprodução dos seus resultados. Nota-se que a tensão normal apresenta um pico nas extremidades da região de contato caindo na região central do contato. Este comportamento é o contrário da tensão normal que ocorre no contato

de dois cilindros sem atrito (problema de Hertz), onde a tensão mais alta ocorre no ponto central de contato.

# Capítulo 6

## Conclusões

Este trabalho apresenta uma formulação baseada no método dos elementos de contorno para a solução de problemas com força de corpo sob cargas centrífugas em materiais anisotrópicos. O código foi testado para quatro problemas de características distintas.

O primeiro problema foi uma placa quase-isotrópica inclinada e tracionada em uma das arestas na direção normal e com duas arestas com restrições de deslocamentos na direção normal, sendo uma das arestas restrita a oposta à aresta que a carga é aplicada. O objetivo deste problema foi demonstrar a facilidade de aplicação das condições de contorno em arestas inclinadas, curvas ou não, restritas apenas na direção normal. Estes casos são bem comuns em problemas de engenharia e, no sistema de referência global usual na maioria dos programas de elementos de contorno, a imposição de condições de contorno deste tipo requer o estabelecimento de novas equações no sistema linear, tornando o procedimento complexo, exigindo muita habilidade do usuário. Os resultados para este problema foram comparados com a solução analítica e apresentaram uma ótima concordância, tanto para os deslocamentos normais, quanto para os tangenciais.

No segundo problema, foi analisada uma placa quadrada laminada sob tração e com restrições de deslocamentos pontuais em pontos específicos. Este problema mostrou a capacidade do código de tratar problemas com materiais laminados simétricos, onde as tensões variam de uma lâmina para outra devido a mudança na direção de orientações das fibras.

No terceiro problema, as soluções analíticas para os campos de tensões e deslocamentos em disco rotativo ortotrópico foram obtidas a partir de trabalhos apresentados na literatura. Na análise do disco rotativo ortotrópico, os resultados numéricos foram comparados com resultados analíticos, sendo uma análise de convergência dos resultados foi realizada. Foi possível concluir que, tanto os deslocamentos, quanto as tensões, houve a concordância de resultados. Foi feita uma análise da convergência dos resultados em função do número de elementos. Esta análise mostrou vários padrões de convergência dos erros, sendo que nas variáveis calculadas por meio de equação integral, como os deslocamentos, a curva do erro em função dos nós é suave, enquanto que para as tensões, que foram calculadas por derivadas

das funções de forma, os erros apresentaram variações em função da posição dos nós nos elementos, se é um nó central ou se é um nó de extremidade.

No quarto problema, a palheta de turbina aeronáutica, foi utilizado para demonstrar a possibilidade de uma aplicação prática da formulação desenvolvida. Os resultados tiveram o comportamento esperado, embora não tenha sido feita uma análise quantitativa dos erros, devido a insuficiência dos dados do trabalho que apresenta o problema original.

A modelagem dos problemas foi realizada com elementos quadráticos descontínuos que traz vantagens e desvantagens em relação aos elementos contínuos. Como vantagens podemos citar o não compartilhamento de nós, o que facilita a implementação e, no caso tridimensional, também o refinamento, uma vez que pode-se refinar elementos vizinhos de forma independente. Como desvantagem pode-se citar o número maior de graus de liberdade, uma vez que os nós não são compartilhados entre elementos vizinhos.

Outra característica peculiar deste trabalho foi a utilização do sistema de referência local para representar as condições de contorno e as variáveis desconhecidas no contorno. Isto facilitou a imposição de condições de contorno de deslocamentos restritos na direção normal ao contorno, que é um tipo de condição de contorno comum em problemas de engenharia. Por exemplo, problemas de contato sem atrito onde a superfície de contato é plana podem ser implementados sem qualquer modificação no código.

## 6.1 Trabalhos futuros

Ficam como propostas para trabalhos futuros:

- Eliminar o processo de geração de malha, com a implementação de MEC isogeométrico;
- Estender as formulações para problemas tridimensionais e de grande escala usando métodos rápidos tais como o método dos elementos de contorno com expansão em multipolos ou com a utilização de matrizes hierárquicas;
- Extensão da formulação para problemas de contato.

## 6.2 Publicações

Este trabalho deu origem à duas publicações listadas abaixo:

1. BERNARDO, L. S. ; LOYOLA, F. M. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; TREVELYAN, J. *CONTACT PROBLEMS IN ORTHOTROPIC MATERIALS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD*, 2020, Foz do Iguaçu. *XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, ON-LINE*, 2020.

2. BERNARDO, L. S. ; LOYOLA, F. M. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; TREVELYAN, J. *ANALYSIS OF CONTACT PROBLEMS IN TURBOJET ENGINES USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD*, 2021, Paris. *14th Virtual Congress WCCM & ECCOMAS*, 2021.

# Referências Bibliográficas

ALBUQUERQUE, E. L. de. Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP., p. 146p, 2001. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/265059>>.

BANERJEE, P.-K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. 2nd. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 1994.

BOEING. Boeing 787 dreamliner. *Wikipedia article*, [http://en.wikipedia.org/wiki/ Boeing-787-Dreamliner](http://en.wikipedia.org/wiki/Boeing-787-Dreamliner), 2014.

BREBBIA, C.-A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. [S.l.]: WIT Press, 1996. 328 p.

CHANG, C. I. A closed-form solution for an orthotropic rotating disk. *Journal of Applied Mechanics*, v. 41, p. 1122–1123, 1974.

CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Subtraction singularity technique applied to the regularization of singular and hypersingular integrals in high-order curved boundary elements in plane anisotropic elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 119, p. 214 – 224, 2020.

DANIEL, I.; ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Second. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.

GAO, X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.

GILVEY, B.; TREVELYAN, J.; HATTORI, G. Singular enrichment functions for Helmholtz scattering at corner locations using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 121, n. 3, p. 519–533, 2020.

GOMES, G.; MIRANDA, A. C. Analysis of crack growth problems using the object-oriented program bemcracker2D. *Frattura ed Integrita Strutturale*, v. 12, n. 45, p. 67–85, 2018.

GU, Y. et al. Analysis of three-dimensional anisotropic heat conduction problems on thin domains using an advanced boundary element method. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 75, p. 33 – 44, 2018.

HARRIS, C.; SHUART, M.; STARNES, J. Design and manufacturing of aerospace composite structures. *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT*, v. 39, p. 545–560, 07, 2002.

HILL, B.; MCILHAGGER, R. Resin impregnation and prediction of fabric properties. *3-D Textile Reinforcements in Composite Materials*, Publishing Limited: Cambridge (UK), 1999.

- JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 1999.
- KANE, J. H. *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall, 1994.
- LEKHNITSKII, S. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. [S.l.]: Holden-Day, 1963.
- LEKHNITSKII, S. *Anisotropic Plates*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1968.
- LOYOLA, F. M. de. An Isogeometric Boundary Element formulation for multi-body contact problems. Universidade de Brasília, p. 1–104, 2020.
- MCILHAGGER E. ARCHER, R. M. A. 3 - manufacturing processes for composite materials and components for aerospace applications. *Polymer Composites in the Aerospace Industry*, Elsevier, p. 59–81, 2020.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A new approach for free vibration analysis using boundary elements. *Boundary element methods in engineering*, Berlin: Springer, p. 312–26, 1982.
- NGUYEN, V. T.; HWU, C. Boundary element method for two-dimensional frictional contact problems of anisotropic elastic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 108, p. 49 – 59, 2019.
- OLIVEIRA, T. A.; GOMES, G.; EVANGELISTA, F. Multiscale aircraft fuselage fatigue analysis by the dual boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Ltd, v. 104, n. March, p. 107–119, 2019.
- OUESLATI, S. et al. Analytical method for the evaluation of singular integrals arising from boundary element method in electromagnetism. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, v. 34, p. e2792, 2021.
- PAPANIKOS, P.; MEGUID, S.; STJEPANOVIC, Z. Three-dimensional nonlinear finite element analysis of dovetail joints in aeroengine discs. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 29, n. 3, p. 173 – 186, 1998. ISSN 0168-874X.
- PETERS, S. *Handbook of Composites*. 2nd. ed. [S.l.]: Chapman & Hall, 1997.
- RAJAMOCHAN, J. R. C. Adv eng software. *Journal of Composite Materials*, v. 30, p. 369–73, 1999.
- REED, R. C. *The Superalloys: Fundamentals and Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *Journal of Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.
- SHIAH, Y. C.; HEMATIYAN, M. R. Interlaminar stresses analysis of three-dimensional composite laminates by the boundary element method. *Journal of Mechanics*, v. 34, p. 829–837, 2018.
- SHIAH, Y. C.; HEMATIYAN, M. R. Three-dimensional analysis of heat conduction in anisotropic composites with thin adhesive/interstitial media by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 123, p. 36 – 47, 2021.

SINCLAIR, G.; CORMIER, N. Contact stresses in dovetail attachments: Physical modeling. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-transactions of The Asme - J ENG GAS TURB POWER-T ASME*, v. 124, 04 2002.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method. *Composite Structures*, v. 31, n. 3, p. 229–233, 1995. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0263822395001050>>.

STROUD, A. H.; SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. *Prentice Hall*, .. p. ., 1966.

TAYLOR, A. Rtm material developments for improved processability and performance. *SAMPE Journal*, v. 36 (4), p. 17–24, (July/August) 2000.

TELLES, J. C. F. *A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals*. [S.l.: s.n.], 1987. v. 24. 959-973 p.

TYAGNII, A. Boundary element solution of the plane elasticity problem for an anisotropic body with free smooth boundaries. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, v. 56, p. 715–725, 07 2015.

VASILIEV, E. M. V. *Mechanics and Analysis of Composite Materials*. 1st. ed. [S.l.]: Elsevier, 2001.

VENTURINI, W. A study of boundary element method and its application on engineering problems. *Associate Professor Thesis*, University of São Paulo, São Carlos School of Engineering (in Portuguese), 1988.

WROBEL, L.-C. *The Boundary Element Method, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. 468 p.