UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE UnB GAMA-FACULDADE DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO PÊNDULO QUADRIFILAR PARA DETERMINAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA: ESTUDOS INICIAIS EM MOCKUP DE NANOSATÉLITE CUBESAT

RAPHAEL UGOLINI SANTANA

ORIENTADOR: Dr. Marcus Vinicius Girão de Morais

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM – 092A/2021

BRASÍLIA/DF: MARÇO/2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE UnB GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO PÊNDULO QUADRIFILAR PARA DETERMINAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA: ESTUDOS INICIAIS EM MOCKUP DE NANOSATÉLITE CUBESAT

RAPHAEL UGOLINI SANTANA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Morais, FT/ENM
(Orientador)

Prof. Dra. Marcela Rodrigues Machado, FT/ENM
(Examinador Interno)

Paulo M. V. Ribeiro

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, UFPE
(Examinador Externo)

Brasília, 26/03/2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Raphael Ugolini Santana
Estudo Numérico-Experimental do Pêndulo Quadrifilar Para Determinação do Tensor de Inércia: Estudos Iniciais em Mockup de Nanosatélite CubeSat, Brasília, Distrito Federal 2021.
Nº.132p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2021).
Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Tensor de inércia	2. Métodos dos Elementos Finitos
3. Pêndulo Multifilar	4. IMU
5. CubeSat	
I. FGA/FT/UnB	II. Mestre

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTANA, R. U. (2021). Estudo Numérico-Experimental do Pêndulo Quadrifilar Para Determinação do Tensor de Inércia: Estudos Iniciais em Mockup de Nanosatélite CubeSat. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 092A/2021, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, nº.132p.

CESSÃO DE DIREITOS

Raphael Ugolini Santana
CEP: 70650-352 Brasília, DF – Brasil.
uraphaels@gmail.com

RESUMO

O tensor de inércia em CubeSats é uma propriedade de extrema importância na cinemática de realização de manobras e estabilização de altitude do satélite em órbita. O presente trabalho objetiva determinar o tensor de inércia de CubeSats utilizando a técnica do pêndulo quadrifilar. Ensaios numéricos foram implementados utilizando o software Ansys® para a realização dos estudos numéricos da técnica de pêndulo multifilar para determinação do momento de inércia de corpos rígidos. Foram realizados ensaios numéricos com pêndulos trifilar e quadrifilar a fim de observar a influência dos parâmetros físicos dos pêndulos. Foram modelados corpos rígidos no pêndulo para observar o comportamento dos modelos matemáticos e numéricos na determinação do tensor de inércia destes corpos rígidos. Para os ensaios experimentais, foi montado uma bancada do tipo pêndulo quadrifilar com gaiola foi construída. Ensaios de validação da bancada experimental foram realizados para comprovar sua efetividade em determinar o momento de inércia de corpos rígidos. Utilizando diversas configurações de rotação do mockup de CubeSat 1U nos ensaios na bancada, foi realizada a estimativa do tensor de inércia do mockup.

ABSTRACT

The inertia tensor in CubeSats is an extremely important property in the kinematics of maneuvering and altitude stabilization of the satellite in lower orbit. The present work aims to determine the CubeSats inertia tensor using the quadrifilar pendulum technique. Numerical tests were performed using the Ansys® software for the multifilar pendulum technique to determine the moment of inertia of rigid bodies. Numerical tests were carried out with trifilar and multifilar pendulums in order to observe the influence of the physical parameters of the pendulums on the moment of inertia determination. Rigid bodies were modeled on top and inside the lower platform of a pendulum to observe the behavior of mathematical and numerical models in determining the inertia tensor of these rigid bodies. For the experimental tests, a multifilar pendulum test bench was built. Validation tests of the test bench were performed to prove its effectiveness on moment of inertia of rigid bodies determination using CAD and numerical models. Using various rotation degree configurations of the CubeSat 1U mockup in the bench tests, it is possible to determine its inertia tensor.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Símbolos Latinos

F	Força
m	Massa
$\vec{a}$	Aceleração
$\dot{\boldsymbol{L}}$	Energia cinética total do corpo
M	Momento angular
R_i, r	Raio de rotação
I	Momento de inércia
E_p	Energia potencial gravitacional
E_c	Energia cinética
E_f	Energia dissipativa por fricção
H	Distância entre base superior e plataforma inferior
L	Comprimento do cabo, comprimento do elemento
$\vec{T}$	Tração
T	Período de oscilação
n	Quantidade de cabos no pêndulo
a_n, b_n	Distância entre os pontos de ancoragem nas bases
f	Frequência de oscilação
t	Tempo
g	Aceleração da gravidade
A	Matriz de rotação
M	Matriz de massa
C	Matriz de amortecimento
K	Matriz de rigidez
K_m	Matriz de rigidez do material
K_G	Matriz de rigidez global
U	Vetor de deslocamento
$\dot{\boldsymbol{U}}$	Vetor de velocidade

$\ddot{U}$	Vetor de aceleração
A	Área transversal
I_a	Momento de inércia de área
E	Modulo de elasticidade do material
B	Deslocamento dos nós do elemento
D	Diâmetro do cabo

Símbolos Gregos

ω	Aceleração angular
θ	Rotação angular
η, ϵ, ζ	Posição angular
Δ	Variação entre duas grandezas similares
μ_n	Posição do ponto de ancoragem na base
ω_i	Frequência natural
Φ_i	Modo de vibração
ρ	Densidade do material

Abreviaturas

UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UnB	Universidade de Brasília
FAPDF	Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal
AEB	Agência Espacial Brasileira
LODESTAR	Laboratório de Simulação e Controle de Sistemas Aeroespaciais
GDS	Grupo de Dinâmica de Sistemas
ENM	Departamento de Engenharia Mecânica
FT	Faculdade de Tecnologia
CAD	*Computer Aided Design*
IMU	*Inertia Measurement Unit*
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement
FRF	Função de Resposta em Frequência

1 INTRODUÇÃO

O avanço da tecnologia de veículos espaciais vem proporcionando a comercialização e a exploração espacial, reduzindo consideravelmente os preços de cargas úteis lançadas na órbita baixa da Terra. O lançamento de cargas úteis é realizado por meio dos nano satélites e microssatélites e, por ser acessível e atrativo, vem despertando o interesse de empresas de baixo orçamento e de universidades. No ano de 1957, aconteceu o primeiro lançamento do foguete Vanguard, o qual possuía um custo de USD 894.700/kg. O foguete Saturno V, utilizado nas missões Apolo, possuía um custo de USD 5.200/kg a cada lançamento, sendo um dos menores na história. Entre os anos 1970 e 2000, o custo médio de um lançamento foi de USD 18.500/kg. A partir do ano 2000, houve uma grande redução do custo do quilograma devido a competição entre empresas privadas que fabricam e desenvolvem foguetes. Atualmente, o custo por quilograma do veículo lançador Falcon 9, da Space X, é de USD 2.700/kg. Todos esses valores foram considerados para a órbita baixa da Terra. (JONES, 2018).

A redução do custo por quilograma dos veículos espaciais lançadores impulsionou a desenvolvimento de nano satélites, satélites com massa entre 1 kg e 10 kg, como por exemplo o CubeSats. Os CubeSats foram primeiramente desenvolvidos em 1999 pelas Califórnia Polytechnic State University (CalPoly) e Stanford University para promover e desenvolver as habilidades de design, fabricação e testes em pequenos satélites na órbita baixa da Terra. Eles também estipularam que o padrão de dimensão para CubeSats é múltiplo de $10 \times 10 \times 10$ cm, sendo este chamado de CubeSat 1U. A grande maioria dos CubeSats lançados é de origem acadêmica, porém, a demanda comercial e projetos amadores de CubeSats vem crescendo com o sucesso dos lançamentos. Geralmente, os CubeSats são lançados como carga útil extra nos veículos lançadores, ou até mesmo diretamente da estação espacial internacional. Até o dia primeiro de janeiro de 2020, foram lançados com sucesso 1.357 CubeSats e 1.474 nanosatélites, sendo destes, somente 93 nanosatélites destruídos durante o lançamento (KULU, 2021). O recorde de maior quantidade de nanosatélites em um único veículo lançador é de 103 nanosatélites e 1 satélite em 15 de fevereiro de 2017 (MATHEWSON, 2017). O Brasil lançou o seu primeiro CubeSat em dezembro de 2019, o FloripaSat-1 (PAULA e MAGALHAES, 2019), desenvolvido por estudantes da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), sendo lançado pela China.

1.1 MOTIVAÇÃO

Em Brasília, a Universidade de Brasília (UnB) possui uma parceria com a Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF) e a Agência Espacial Brasileira (AEB) que estabelece cooperação técnica e desenvolvimento de satélites, chamado de projeto Alfa Crux. Este projeto consiste na fabricação e desenvolvimento técnico-científico e acadêmico de CubeSats pelo Laboratório de Simulação e Controle de Sistemas Aeroespaciais (LODESTAR) (SILVA et al., 2019). Uma das características físicas necessária para o projeto e desenvolvimento de um satélite é o seu tensor de inércia. O tensor de inércia do satélite tem grande importância e relevância no desenvolvimento e performance do código, pois irá realizar o controle de altitude do satélite em órbita e a manobra mais precisa e eficaz do satélite durante a missão (FERGUSON, 2008). O tensor de inércia do satélite sempre é checado antes do seu lançamento, pois durante a sua vida útil, o tensor deve ser recalculado para otimizar o algoritmo de controle. A massa e o tensor de inércia do satélite diminuem à medida que o propelente é utilizado, portanto, uma medição do momento de inércia é mantida válida por um longo período de tempo antes da necessidade de recalculá-lo, pois em algumas missões requerem uma precisão do controle de altitude (KIM et al., 2010; MCFARLAND et al., 2009).

O Grupo de Dinâmica de Sistemas (GDS) do Departamento de Engenharia Mecânica (ENM) da Faculdade de Tecnologia (FT) na UnB, estuda métodos experimentais para medição do momento de inércia de corpos rígidos. Entre os métodos utilizados, aplica-se o pêndulo trifilar para a medição de momento de inércia de diferentes corpos de geometria simples (MENDONÇA, 2017) e de pás eólicas (SANTANA, 2017).

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem por objetivo aperfeiçoar a metodologia de pêndulo multifilar para determinação do tensor de inércia de corpo rígidos dentro da classificação dos nano satélites, ou seja, com massa entre 1 e 10 kilogramas. Para isso, serão realizadas simulações numéricas com pêndulo trifilar e quadrifilar, além de ensaios experimentais utilizando o mockup de um CubeSat 1U. Para alcançar o objetivo deste trabalho, são traçados alguns objetivos específicos, sendo estes:

- estudar a sensibilidade à determinação do momento de inércia no pêndulo por meio de ensaios numéricos;

- validar a bancada experimental por mesmo dos modelos numéricos e *Computer Aided Design* (CAD);
- determinar a incerteza da medição da bancada experimental.

1.3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho consiste na modelagem em elementos finitos do pêndulo multifilar e na construção de uma bancada de experimento para determinação do tensor de inércia com o uso de um mockup de CubeSat 1U. Na modelagem numérica, as análises estática e modal são utilizadas para extrair as frequências de oscilação do pêndulo e, a partir disso, obter a estimativa do momento de inércia do pêndulo. Nos casos de pêndulos simples, trifilar e quadrifilar são moldados numericamente no software Ansys® e os resultados das frequências naturais e do momento de inércia são comparados posteriormente com os seus modelos analíticos. Os corpos rígidos são moldados nos pêndulos trifilar e quadrifilar para observar suas características oscilatórias durante as equações da estimativa do momento de inércia do corpo rígido. É feito um estudo da estimativa do tensor de inércia do corpo rígido no pêndulo quadrifilar baseado nos ângulos de inclinação deste corpo rígido, no qual são necessários diferentes ângulos de inclinação.

Após a análise do comportamento oscilatório do pêndulo quadrifilar nos modelos numéricos, uma bancada experimental é construída utilizando uma gaiola. Esta gaiola permite a inclinação do corpo rígido no seu interior por meio de uma plataforma giratória. Este modelo numérico e o software CAD da bancada são utilizados para validar a frequência natural e o momento de inércia da bancada experimental vazia. Além disso, outros ensaios de validação da bancada são realizados utilizando um perfil simples de corpo rígido com o tensor de inércia. Com isso, este tensor de inércia obtido experimentalmente é comparado com valor obtido no modelo CAD do corpo rígido.

Por último, o mockup de CubeSat 1U, projetado pela LODESTAR/UnB, é submetido aos ensaios na bancada experimental. Primeiramente, realizam-se ensaios do mockup na bancada experimental vazia com 9 (nove) posicionamentos diferentes a fim de obter o tensor de inércia. Logo em seguida, é adicionado uma massa de calibração na bancada experimental com o objetivo de obter outros dados do tensor de inércia do mockup.

1.4 PLANO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação tem por finalidade apresentar o estudo numérico de pêndulos oscilatórios multifilar por meio de simulação numérica e ensaio experimental em bancada para determinar o tensor de inércia de CubeSats e, encontra-se organizada em cinco capítulos, incluindo a introdução.

Na introdução, faz-se uma breve explanação dos custos dos veículos espaciais e na acessibilidade e atratividade destes veículos, despertando o interesse de empresas privadas de baixo orçamento para a comercialização e de universidades para suas pesquisas.

O segundo capítulo, apresenta a dinâmica dos corpos rígidos e define o que é o momento de inércia. Além disso, são discutidos conceitos teóricos e técnicas experimentais para a determinação do momento de inércia de corpos rígidos. Técnicas oscilatórias são apresentadas, com destaque para a técnica do pêndulo oscilatório na identificação do momento de inércia de corpos rígidos.

O terceiro capítulo, apresenta e desenvolve a formulação física do pêndulo multifilar. Equações matemáticas são apresentadas para a determinação do momento de inércia de um corpo rígido nos pêndulos trifilar e quadrifilar.

O quarto capítulo, abrange a formulação numérica dos pêndulos multifilar. Primeiramente, realiza-se uma breve apresentação dos conceitos de elementos finitos. Um modelo numérico do pêndulo simples é construído para verificação da modelagem. Após as análises, a modelagem é exportada aos pêndulos trifilar e quadrifilar, com a utilização da metodologia para determinação do momento de inércia do corpo rígido.

O quinto capítulo, apresenta o aparato experimental utilizado nos ensaios do pêndulo quadrifilar. Ensaios de validação da bancada experimental são realizados com os dados da bancada numérica e do resultado obtido do corpo rígido com o momento de inércia. Por fim, é determinado o tensor de inércia de um CubeSat.

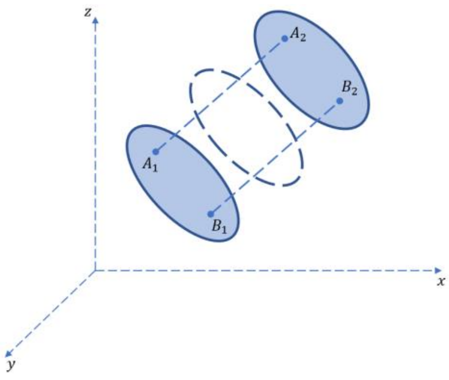
2 MOMENTO DE INÉRCIA DOS CORPOS RÍGIDOS

Este capítulo apresenta os principais conceitos da dinâmica de corpos rígidos e a formulação analítica para determinar o seu tensor de inércia. O capítulo discorre também das técnicas experimentais para determinação do tensor de inércia, destacando para as técnicas oscilatórias em movimento pendular, as quais são utilizadas neste trabalho. Em diversos casos, devido à complexidade do corpo rígido, a técnica experimental é necessária para ter exatidão na determinação do tensor de inércia, pois este é fundamental para o estudo da sua dinâmica durante o projeto, bem como, sua vida útil.

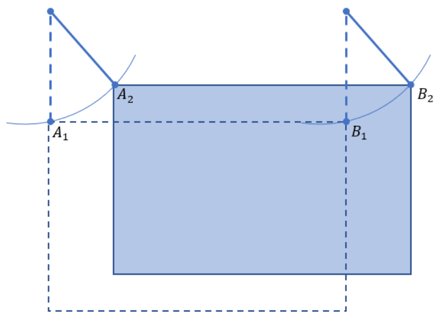
2.1 CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Beer et al. (2006) define que um corpo rígido possui diversos tipos de movimentos, que podem ser agrupados em diferentes grupos, como:

- Translação: um movimento é classificado como translação quando qualquer reta une dois pontos distintos do corpo, conservando a mesma direção durante o movimento. Observa-se também que durante a translação, todos os pontos materiais que formam o corpo rígido deslocam-se em trajetórias paralelas. Se estas trajetórias são retas, então o movimento é classificado como translação retilínea (Figura 2.1a), e se as trajetórias são curvas, o movimento é uma translação curvilínea (Figura 2.1b). Em um movimento de translação, todos os pontos materiais do corpo possuem a mesma velocidade e a mesma aceleração instantânea.



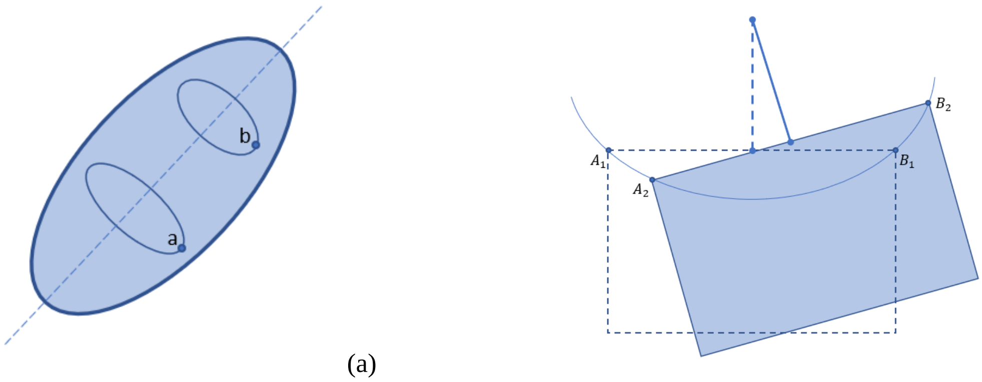
(a)



(b)

Figura 2.1 - Translação retilínea (a) e curvilínea (b) de um corpo rígido
Fonte: elaborado pelo autor.

• Rotação em torno de um eixo fixo: neste movimento, os pontos materiais que formam o corpo rígido se deslocam em planos paralelos ao longo de circunferências, cujo centro encontra-se sobre uma mesma reta fixa. Se esta reta fixa coincide com o eixo de rotação do corpo rígido, então os pontos nesta reta têm velocidades e acelerações nulas, sendo descritos na Figura 2.2a. Contudo, se este movimento se difere da translação curvilínea pelo fato dos pontos materiais se deslocarem das circunferências concêntricas, ou seja, com o mesmo ponto fixo, na translação curvilínea, os pontos materiais se deslocam das circunferências paralelas (Figura 2.2b).



(a) (b)

Figura 2.2 - Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo (a) e em torno de um ponto fixo (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

• Movimento plano geral: qualquer tipo de movimento plano que não seja de rotação ao redor de um eixo fixo nem de translação são considerados como um movimento plano geral. Porém, um movimento plano geral sempre pode ser deduzido pela soma de uma translação e uma rotação (Figura 2.3).

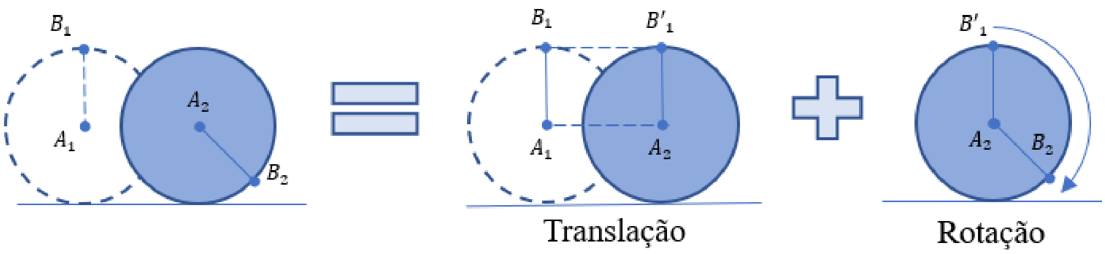


Figura 2.3 - Movimento plano geral de um corpo rígido dado a soma de sua translação e rotação
Fonte: elaborado pelo autor.

• Movimento em torno de um ponto fixo: este movimento ocorre com a combinação do movimento de rotação em torno de um ponto fixo e em torno de um eixo fixo. Um exemplo típico é o giroscópio. Considere que um corpo rígido de massa m está submetido a diversas forças externas $\vec{\boldsymbol{F}}$. Desta forma, as equações (2.1) representa o movimento deste corpo:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração do centro de massa.

Um corpo rígido contínuo pode ser aproximado por finitas partículas de massa m_i a uma distância r_i do eixo de rotação. Quando este gira em torno de um eixo fixo, as partículas adquirem velocidade linear $v_i = \omega r_i$, onde ω é a velocidade angular da partícula de massa. Um corpo rígido em rotação consiste em uma massa em movimento, portanto tem energia cinética. A energia cinética pode ser expressa em termos da velocidade angular e o momento de inércia, que depende da massa do objeto e como a sua massa é distribuída. A palavra momento significa que I depende de como a massa do corpo é distribuída no espaço. Quanto maior o momento de inércia de um corpo, maior a sua energia cinética para uma mesma velocidade angular (YOUNG e FREEDMAN, 2008). Portanto a energia cinética total do corpo pode ser expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum \frac{1}{2} \mathrm{m_i r_i^2} \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \mathrm{m_i r_i^2}\right)\omega^2 \tag{2.2}$$

O somatório em parênteses, obtido pelo somatório das finitas massas pelo quadrado da sua distância ao eixo de referência, podendo ser ou não coincidente ao eixo de rotação, é denominado momento de inércia. Este conceito pode ser estendido para a forma integral, representado por:

$$I = \sum_{i}^{n} m_i r^2 = \int r^2 dm \tag{2.3}$$

O momento de inércia depende do eixo de referência a ser escolhida, por conta disso um corpo não possui apenas um momento de inércia, mas infinitos. Mas existe uma simples relação entre o momento de inércia de um corpo I_{cm} no seu centro de gravidade e o momento de inércia em relação a qualquer eixo paralelo a uma distância d.

$$I_p = I_{cm} + \int^{N} d^2 dm_i \tag{2.4}$$

A equação (2.4) mostra que um corpo rígido tem o seu menor momento de inércia no seu eixo que passa pelo centro de gravidade, ou seja, é mais fácil para começar a rotacionar um corpo por este eixo. Isso sugere que a forma mais natural de um corpo rotacionar é sobre seu eixo que passa pelo centro de massa (YOUNG e FREEDMAN, 2008). Desta forma, o momento angular de um corpo rígido é dado por:

$$M_{cm} = I\omega \tag{2.5}$$

Para um corpo rígido tridimensional, a equação pode ser reescrita por:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{cm} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

Os termos I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} são os momentos de inércia do corpo em relação ao eixo coordenada, que passa pelo centro de massa e estão representados pelas integrais (2.7)-(2.9) (BEER et al., 2006).

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm \tag{2.7}$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm \tag{2.8}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm \tag{2.9}$$

Enquanto isso, as integrais que contêm o produto das coordenadas representam os produtos de inércia do corpo.

$$I_{xy} = I_{yx} = \int (xy)dm \tag{2.10}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int (xz)dm \tag{2.11}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int (yz)dm \tag{2.12}$$

2.2 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA INÉRCIA DE CORPOS RÍGIDOS

Em muitos casos, o corpo rígido apresenta geometria complexa na qual não é possível representá-la em figuras geométricas simples para determinar o momento de inércia do corpo. Métodos computacionais utilizando modelos sólidos em softwares *Computer Aided Design* (CAD) são utilizados para a determinação do momento de inércia de corpos complexos (PEGRAM e ANEMAAT, 2000). Porém, em algumas aplicações de alta precisão, como por exemplo nas indústrias aeroespacial e aeronáutica, qualquer discrepância entre o modelo computacional e o modelo experimental, resultando em diferentes valores de momento de inércia tem impacto direto na eficiência do equipamento. Desta forma, métodos experimentais são necessários para a determinação do momento de inércia da peça ou montagem. Genta e Delprete (1994) e Schedlinski e Link (2001), separam os métodos experimentais para determinação do momento de inércia e produto de inércia em dois grandes grupos: métodos oscilatórios e métodos de aceleração.

No método de aceleração, utiliza a aceleração e/ou desaceleração do corpo para determinar o seu momento de inércia, representado pela Figura 2.4, de acordo com o princípio da conservação de energia. Um torque conhecido é aplicado no corpo e este está sujeito a um atrito viscoso, que pode ser um componente constante ou linear, sendo proporcional a velocidade angular do corpo. Na aceleração do sistema, a energia potencial ΔE_p, geralmente gravitacional, é transformada em energia cinética ΔE_c e em energia dissipativa ΔE_f (2.13). Na desaceleração, a energia cinética ΔE_c é transformada em energia dissipativa ΔE_f (2.14). Esta energia dissipada é devido ao atrito presente no sistema, como por exemplo os mancais de rolamento.

$$\Delta \mathrm{E_p} \rightarrow \Delta \mathrm{E_c} + \Delta \mathrm{E_f} \tag{2.13}$$

$$\Delta \mathrm{E_c} \rightarrow \Delta \mathrm{E_f} \tag{2.14}$$

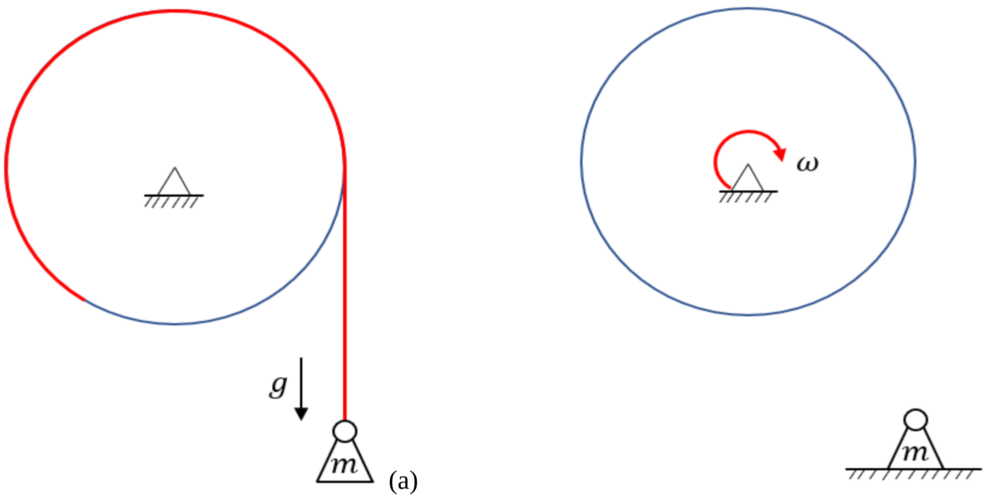


Figura 2.4 - Método da aceleração: aceleração por um torque conhecido (a) e desaceleração pelo atrito (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

Paniagua e Yasa (2007), Haldeman e Dunn (1996) e Santana, Morais e Diniz (2021) utilizam o método da aceleração e desaceleração para determinar o momento de inércia do rotor de uma turbina, enquanto Griffiths, Watkins e Sharpe (2005) utilizam o método para estimar o momento de inércia do corpo humano. O método da aceleração e desaceleração apresenta boas estimativas do momento de inércia quando comparado ao modelo numérico e métodos oscilatórios. Lakatos (2013) utiliza o método da desaceleração para estimar a performance de um motor automotivo. Tian et al. (2019) utiliza o método da desaceleração para estimar a performance e a perda por atrito entre rolamentos de alta rotação. A grande vantagem apresentada no método da aceleração é a falta da necessidade de desmontar o espécime com inércia desconhecida, ou equipamento, pois ele é acoplado para a determinação do seu momento de inércia.

Os métodos oscilatórios são baseados em movimentos periódicos e o momento de inércia é obtido por meio da frequência e período de oscilação. Os métodos oscilatórios, podem ser categorizados em dois grupos: métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência. Os métodos no domínio do tempo são baseados na medição de pequenas oscilações como, por exemplo, de um pêndulo físico. Diversos trabalhos na literatura utilizam o pêndulo bifilar (HINRICHSEN, 2002; JARDIN e MUELLER, 2007), sendo composto por uma base suspensa por dois fios, conforme apresenta a Figura 2.5a, o pêndulo trifilar (HOU et al., 2009; LIU et al., 2017; TANG e SHANGGUAN, 2011) é composto por uma base suspensa por três fios, demonstrada na Figura 2.5b e, o pêndulo multifilar (GOBBI et al., 2011) composto por 4 ou mais fios, pela Figura 2.5c, para medição do momento de inércia de um corpo rígido.

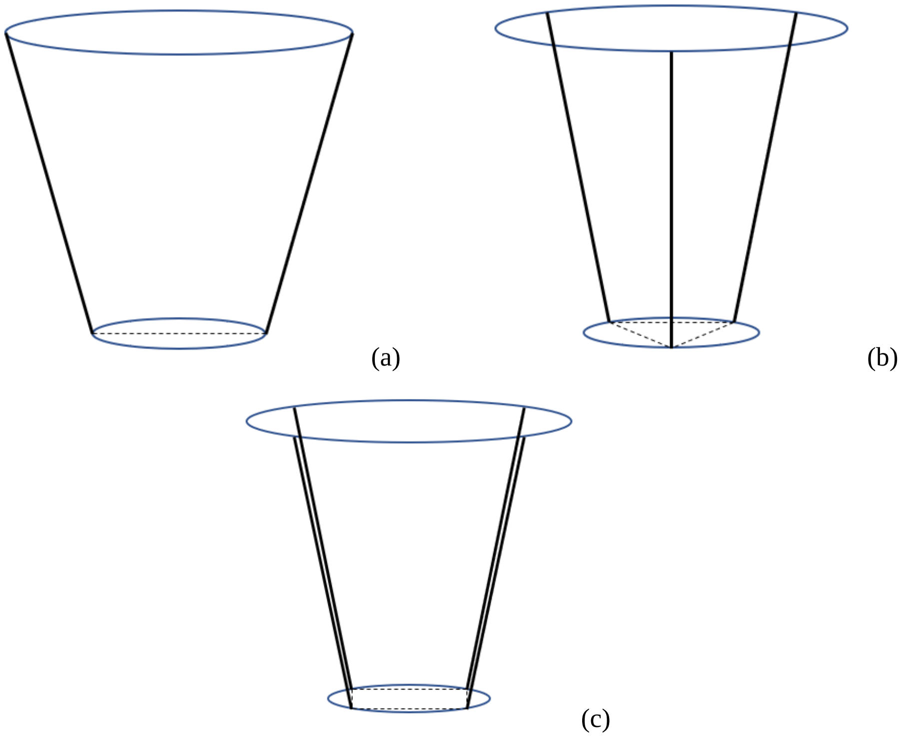


Figura 2.5 - Pêndulo bifilar (a), trifilar (b) e multifilar (c).
Fonte: elaborado pelo autor.

Os métodos no domínio da frequência são baseados na medição da função de resposta em frequência (FRF) da estrutura na condição quase livre-livre. Para atingir esta condição de contorno, o corpo de prova é suspenso por suportes tipo mola (Figura 2.6). Desta forma, é possível identificar as frequências naturais correspondentes ao modo rígido e elástico do sistema. Dependendo do comportamento das frequências naturais associadas ao modo rígido e elástico do sistema, isso é, a proximidade entre eles, mais de um método deve ser utilizado para averiguar os modos livres do sistema.

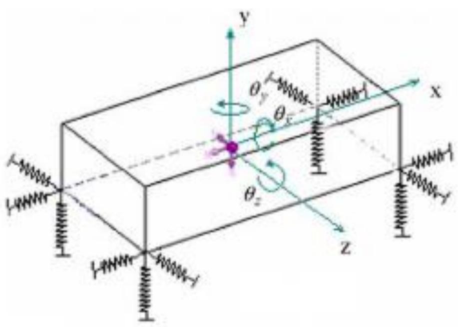


Figura 2.6 - Modelo experimental para o método no domínio da frequência.
Fonte: (ALMEIDA et al., 2007)

Almeida (2007) divide os métodos no domínio da frequência em três grupos: método modal, método de identificação direta de parâmetro e o método de restrição inercial. O método modal (ASHORY et al., 2010; MALEKJAFARIAN et al., 2013; PANDIT e HU, 1994) é baseado na relação de ortogonalidade entre as matrizes de massa e modos de vibração do sistema. Este método é aconselhável quando os modos rígidos e flexíveis do corpo não são bem separados. O método de identificação direta de parâmetro (HUANG e LALLEMENT, 1997) permite estimar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento por meio das FRF medidas. Porém, assim como o método modal, os modos de rigidez e flexíveis do corpo não devem ser distantes. De acordo com Xu, Ding e Yand (2012), este método é bem sensível a ruídos, onde 1% de ruído pode gerar mais de 10% de erro na medição das matrizes.

O método de restrição inercial (MUCCHI, E. et al., 2011; MUCCHI, Emiliano et al., 2009) é baseado no princípio o qual as respostas dinâmicas de um sistema livre-livre são caracterizadas, na região de baixa frequência, por um termo constante, conhecido como linha de restrição de inércia. Este método é recomendado quando os modos de rigidez e flexíveis do corpo são bem distintos e separados.

Os métodos do domínio da frequência possuem a vantagem de o procedimento experimental ser rápido. Sua principal dificuldade é excitar os seis modos de vibração da estrutura. Almeida (2007) observou que são necessários pelo menos três forças de excitação em posições diferentes para a identificação dos seis modos de vibração. Os métodos do domínio do tempo têm a vantagem da rápida determinação do momento de inércia do espécime. Sua desvantagem é na dificuldade do procedimento experimental para a determinação do tensor de inércia. O espécime necessita ser rotacionado em torno do seu centro de massa em pelo menos seis diferentes posicionamentos para determinar os momentos de inércia, além dos produtos de inércia (TANG e SHANGGUAN, 2011). O pêndulo físico continua sendo o método que reproduz com maior exatidão os momentos de inércia (MUCCHI, E. et al., 2011).

2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O capítulo realizou uma breve introdução da cinemática dos corpos rígidos e apresentou os conceitos matemáticos do tensor de inércia. Métodos experimentais são identificados e separados em dois grupos: métodos oscilatórios e de aceleração. São mostradas diversas técnicas experimentais, apresentando as suas vantagens e desvantagens. É estabelecido que será utilizado neste trabalho os métodos oscilatórios, pois estes possuem uma maior acurácia nos resultados. Entre os métodos oscilatórios, é determinado o pêndulo multifilar na continuidade deste trabalho. O próximo capítulo estabelecerá a formulação física do pêndulo multifilar e a metodologia para determinação do momento de inércia de corpos rígidos utilizando o pêndulo multifilar, que será aplicado nos pêndulos trifilar e quadrifilar.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PÊNDULO MULTIFILAR

O pêndulo multifilar consiste em uma plataforma inferior com massa m e momento de inércia I_{base} suspenso por cabos, que são presos na base superior. Dependendo da quantidade de cabos ancorados na plataforma inferior, o pêndulo possui diferentes classificações, podendo ser bifilar, com dois cabos, trifilar, com três cabos e quadrifilar, com quatro cabos. Cada cabo possui um comprimento L e a distância entre a plataforma inferior e a base superior é H. A base superior e a plataforma inferior possuem raios de rotação R_1 e R_2, respectivamente, coincidentes com o centro de massa (Figura 3.1).

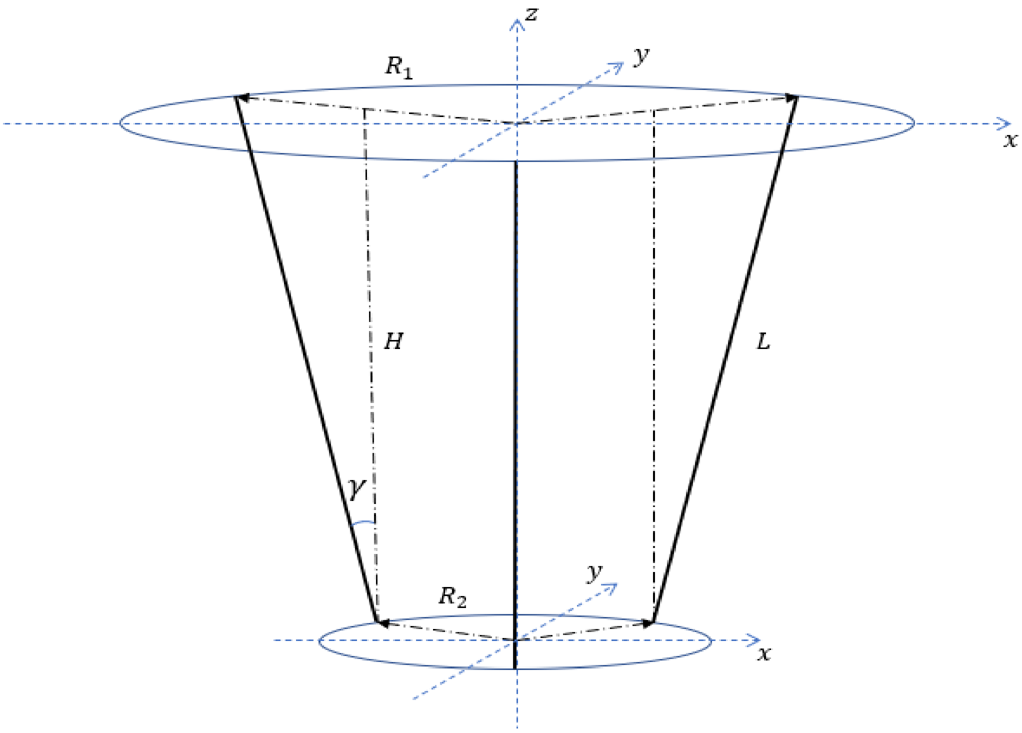
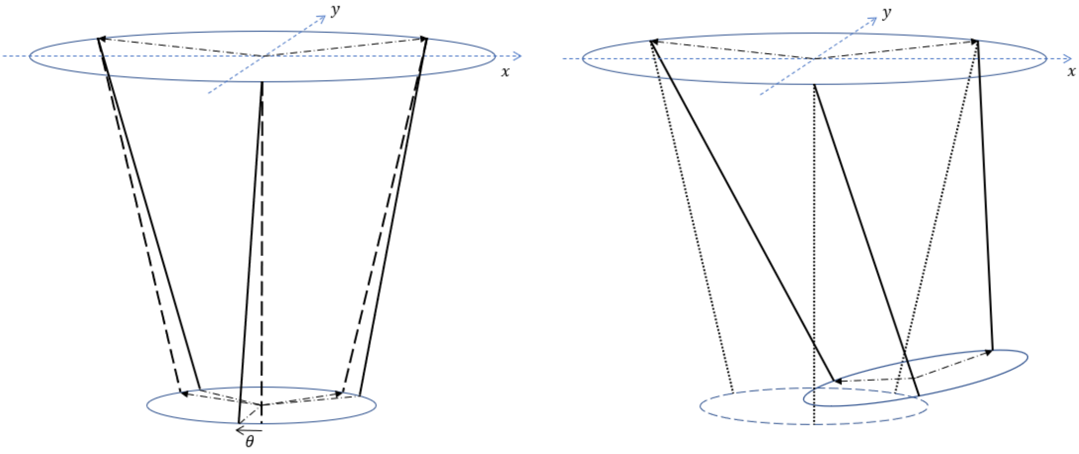


Figura 3.1 - Exemplo de um pêndulo multifilar de três cabos: o pêndulo trifilar.
Fonte: elaborado pelo autor.

Quando o sistema é rotacionado em torno do seu eixo vertical, a plataforma inferior descreve movimentos oscilatórios em torno dos seus eixos cartesianos $\theta(t)$. Estes movimentos oscilatórios são uma sobreposição de dois movimentos: rotacional e translacional (Figura 3.2).



(a) (b)

Figura 3.2 - Movimento geral do pêndulo trifilar: rotacional (a) e translacional (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

3.1 EQUILIBRIO DAS FORÇAS

O diagrama de corpo livre, na (Figura 3.3) de um pêndulo trifilar evidencia as forças atuantes em um pêndulo multifilar, que consiste na força gravitacional e na tração dos fios conectados na base inferior.

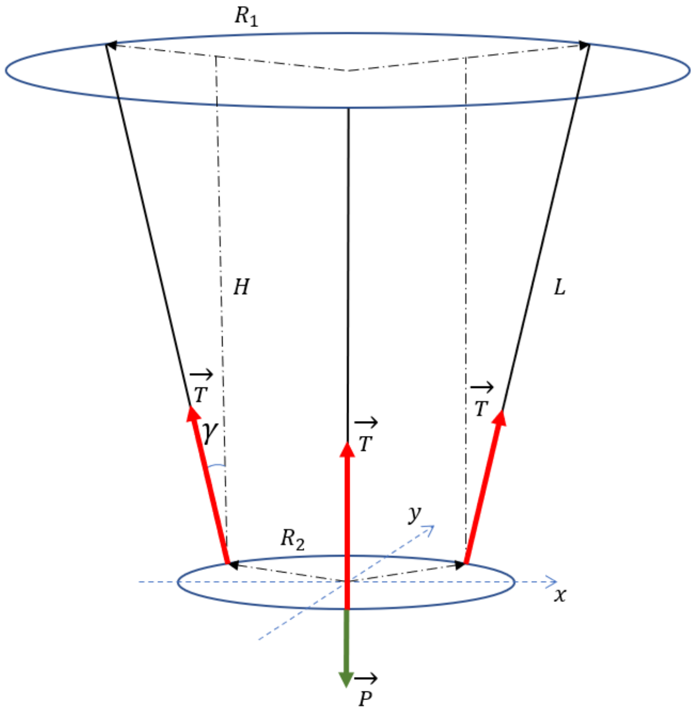


Figura 3.3 - Diagrama de corpo livre do pêndulo trifilar.
Fonte: elaborado pelo autor.

Como as bases possuem raios de rotação diferentes, a tração nos cabos possui componentes na horizontal (eixo x e y), Equação (3.1), e na vertical (eixo z), que é igual ao peso da base inferior Equação (3.2).

$$T_{x,y} = T \sin\gamma \tag{3.1}$$

$$T_z = T cos\, \gamma \tag{3.2}$$

onde o γ é o ângulo entre a base inferior e o cabo, portanto:

$$\sin\gamma = \frac{R_1 - R_2}{L} \tag{3.3}$$

$$\cos\gamma = \frac{H}{L} \tag{3.4}$$

Desta forma, juntando as equações (3.3) com (3.1) e equações (3.4) com (3.2), temos:

$$T_{x,y} = T\left(\frac{R_1 - R_2}{L}\right) \tag{3.5}$$

$$T_z = T\left(\frac{H}{L}\right) \tag{3.6}$$

Conforme a Figura 3.3 e o equilíbrio das forças, a componente vertical (no eixo z) para a tração nos cabos é igual a força peso, portanto:

$$F_z = nT\left(\frac{H}{L}\right) = mg \tag{3.7}$$

onde n é a quantidade de cabos presentes no pêndulo. No caso do pêndulo bifilar, $n = 2$, enquanto no pêndulo trifilar $n = 3$ e no pêndulo quadrifilar $n = 4$. Manipulando a equação (3.7), temos a relação:

$$T = \frac{mgL}{nH} \tag{3.8}$$

De acordo com a Figura 3.4, o vetor $T_{x,y}$ possui componentes nos eixos x e y, que podem ser definidas através das equações (3.9) e (3.10), onde $i = 1{:}j$, j é o ponto de ancoragem do cabo na base inferior, e μ é o ângulo entre os pontos de ancoragem. No caso do pêndulo bifilar, o valor de $\mu = [0^o, 180^o]$, enquanto no pêndulo trifilar é $\mu = [0^o, \pm 120^o]$, e no pêndulo quadrifilar é $\mu = [0^o, \pm 90^o, 180^o]$.

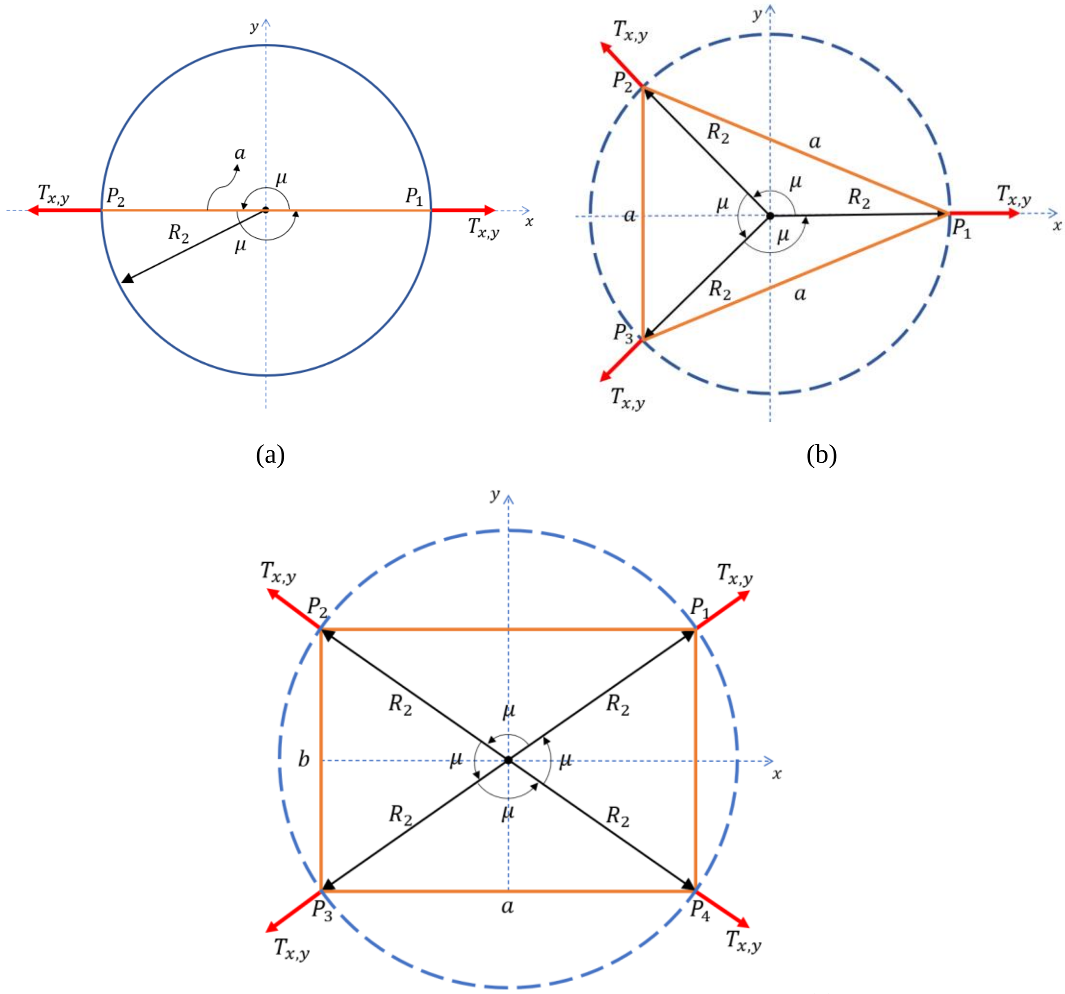


Figura 3.4 - Diagrama de corpo livre da base inferior do pêndulo bifilar (a), trifilar (b) e quadrifilar (c).
Fonte: elaborado pelo autor.

$$F_x = T\left(\frac{R_1 - R_2}{L}\right)\cos\mu_i \quad (3.9)$$

$$F_y = T\left(\frac{R_1 - R_2}{L}\right)\sin\mu_i \quad (3.10)$$

Os diferentes tipos de pêndulo possuem formas diversas de obter o raio de rotação da base superior R_1 e da plataforma inferior R_2. As equações (3.11) e (3.12) representam o raio de rotação no pêndulo bifilar, onde a_1 e a_2 são a distância entre os pontos de ancoragem (Figura 3.4a) do cabo da base superior e inferior, respectivamente.

$$R_1 = \frac{a_1}{2} \tag{3.11}$$

$$R_2 = \frac{a_2}{2} \tag{3.12}$$

No pêndulo trifilar, a_1 e a_2 são as distâncias entre os pontos de ancoragem (Figura 3.4b) na plataforma inferior e na superior, respectivamente. Assumindo que sejam iguais as distâncias entre os pontos de ancoragem, ou seja, um triângulo equilátero, portanto, a equação (3.13) representa o raio de rotação da base superior e (3.14) da plataforma inferior.

$$R_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{3} \tag{3.13}$$

$$R_2 = \frac{a_2\sqrt{3}}{3} \tag{3.14}$$

No pêndulo quadrifilar, a_1, b_1 e a_2, b_2 são a distância entre os pontos de ancoragem da plataforma inferior e superior, respectivamente, onde a é o maior valor e b é o menor valor (Figura 3.4c)

$$R_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{2} \tag{3.15}$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{2} \tag{3.16}$$

Aplicando a segunda lei de Newton, tem-se a equação da força (3.17) e momento (3.18) resultante em um pêndulo multifilar.

$$\sum \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$\sum \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Juntando as equações (3.6), (3.9) e (3.10) na equação (3.17), obtem-se a equação:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{mg}{H} \begin{pmatrix} (R_1 - R_2)\cos\mu_i \\ (R_1 - R_2)\sin\mu_i \\ nH \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

As forças resultantes nos eixos x e y serão responsáveis pelo momento no eixo z, conforme a equação (3.20).

$$M_z = T_{xy} \times R_2 \tag{3.20}$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.8) na equação (3.20).

$$M_z = \frac{mgL}{nH}\left(\frac{R_1 - R_2}{L}\right) \times R_2 \tag{3.21}$$

Portanto, a equação do momento resultante no eixo z é:

$$M_z = \frac{mgR_2}{nH}(R_1 - R_2) \tag{3.22}$$

Conforme a Figura 3.5, o movimento rotacional no eixo x tem origem no movimento translacional no eixo y, e, consequentemente, o movimento rotacional no eixo y no movimento translacional no eixo x.

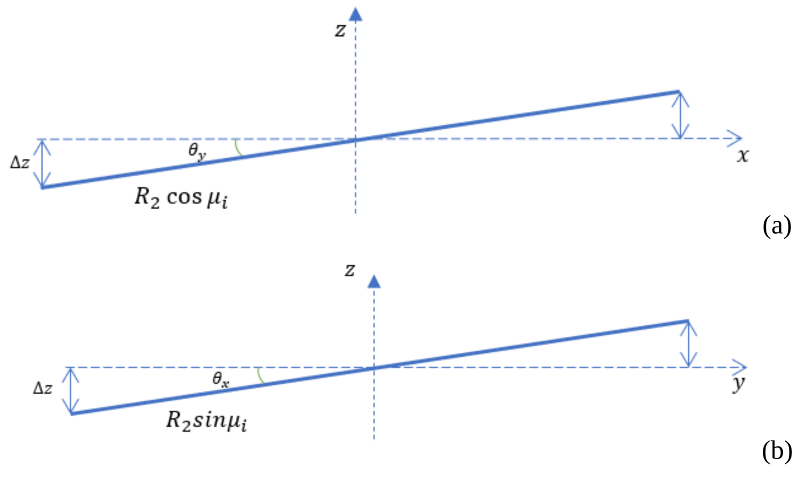


Figura 3.5 - Movimento rotacional da base inferior em virtude do movimento translacional no eixo x (a) e no eixo y (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

Desta forma, o momento resultante nos eixos x e y são descritos a partir da tração dos cabos no eixo z:

$$M_{x,y} = T_z \times R_2 \tag{3.23}$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.8) na equação (3.23) e (3.17), obtem-se as equações (3.24) e (3.25) para o momento resultante no eixo x e y, respectivamente.

$$M_x = mgR_2 \cos \mu_i \tag{3.24}$$

$$M_y = mgR_2 \sin \mu_i \tag{3.25}$$

3.2 CINEMÁTICA DO PÊNDULO MULTIFILAR

As equações vistas anteriormente são válidas para a solução estática do pêndulo multifilar. Porém, para determinar o momento de inércia do sistema, este precisa ser excitado, portanto, apresentará um movimento oscilatório onde é necessário conhecer a sua solução. O pêndulo multifilar apresenta três graus de liberdade, que consiste na rotação nos três eixos cartesianos $[\theta_x, \theta_y, \theta_z]$. A aplicação no pêndulo multifilar requer uma solução linear, que consiste na substituição de termos na equação governante, conforme equações (3.26) e (3.27), e termos de alta ordem são iguais a zero.

$$\cos(\theta) \to 1 \tag{3.26}$$

$$\sin(\theta) \to \theta \tag{3.27}$$

O Gráfico 3.1 apresenta o erro relativo das aproximações sugeridas em função do ângulo de entrada. Como é possivel observar, um erro relativo de 1% é atingido na aproximação do seno para o ângulo de aproximadamente 14 graus, e na aproximação do cosseno para o ângulo de aproximadamente 8 graus. Com estes resultados, é escolhido um limite de 8 graus do ângulo de rotação para validar a aproximação da solução do pêndulo multifilar para uma solução simples.

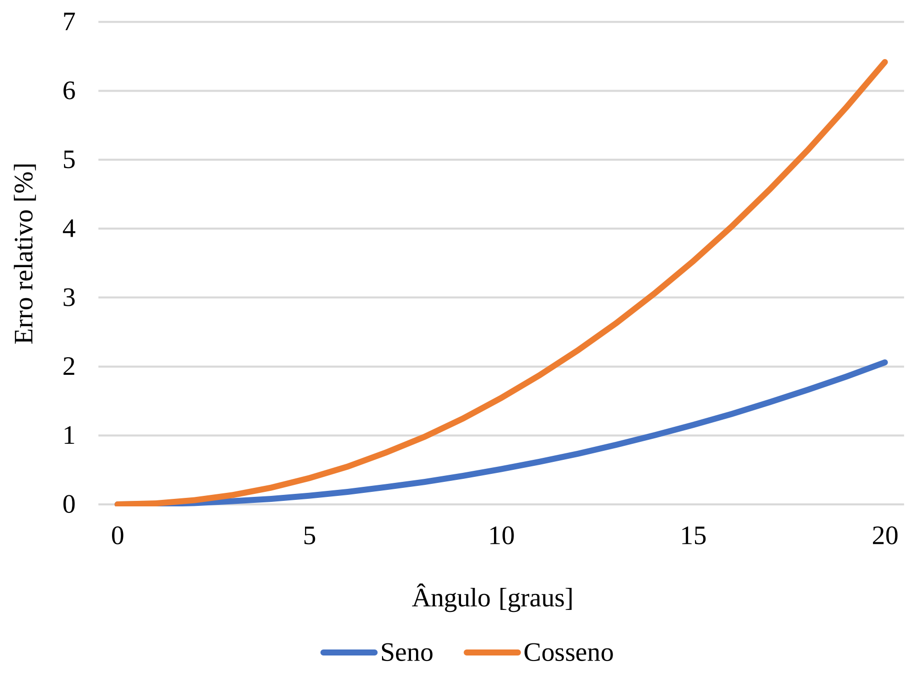


Gráfico 3.1 - Erro relativo (%) da aproximação do seno e cosseno em função do ângulo de rotação θ da plataforma.
Fonte: elaborado pelo autor.

3.2 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA PELO PÊNDULO MULTIFILAR

A partir das suposições e considerações iniciais feitas para o pêndulo multifilar, Mendonça (2017) aplica para o caso de um pêndulo trifilar com cabos paralelos $(R_1 = R_2)$ e um grau de liberdade θ_z. Desta forma, o momento de inércia do sistema é calculado a partir da equação.

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{mgR}^2}{4\pi^2 f^2 L} \tag{3.28}$$

onde $L = H$ é o comprimento do cabo, f é a frequência de oscilação da base inferior. A metodologia para determinar o momento de inércia de um corpo rígido no pêndulo multifilar consiste na medição do momento de inércia do sistema em duas etapas:

1- Medição do momento de inércia do sistema sem o corpo rígido.
2- Medição do momento de inércia do sistema com o corpo rígido, na qual deseja-se obter o seu momento de inércia.

Ao final, para obter o momento de inércia do corpo rígido, é feita a subtração do momento de inércia obtido nas duas etapas, conforme equação (3.29), onde m_1 é a massa da plataforma inferior, f_1 é o período da base inferior sem o corpo rígido, m_2 é a massa da plataforma inferior com o corpo rígido e, f_2 é o período da base inferior com o corpo rígido.

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1 = \frac{\mathrm{gR}^2}{4\pi^2 L}\left(\frac{m_2}{f_2^2} - \frac{m_1}{f_1^2}\right) \tag{3.29}$$

Genta e Delprete (1994) aplicam a metodologia do pêndulo multifilar no caso de um pêndulo quadrifilar com três graus de liberdade $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$. Desta forma, as equações (3.30), (3.31) e (3.32) são as equações movimento governantes para os três graus de liberdade:

$$\left(m_{eq} + \frac{I_{yy}(R_2 - R_1)^2}{R_2^2 H^2}\right)\ddot{\theta_x} + \frac{m_{eq}g}{H}c\theta_x = 0 \tag{3.30}$$

$$\left(m_{eq} + \frac{I_{xx}(R_2 - R_1)^2}{R_2^2 H^2}\right)\ddot{\theta_y} + \frac{m_{eq}g}{H}c\theta_y = 0 \tag{3.31}$$

$$I_{zz}\ddot{\theta_z} + \frac{m_{eq}g}{H}R_1 R_2 \theta_z = 0 \tag{3.32}$$

onde $m_{eq} = m_{base} + \frac{1}{2}m_{cabos}$ e a variável c é definida na constante adimensional física:

$$c = 1 + \frac{R_1(R_2 - R_1)^2}{2R_2 H^2} \tag{3.33}$$

Como observado nas equações do movimento no eixo x (3.30) e y (3.31), caso o pêndulo possua o mesmo raio de rotação na base inferior e superior, ou seja, cabos paralelos, ele não apresenta a rotação nos eixos x e y da base inferior. Desta forma, as frequências naturais do pêndulo quadrifilar para cada um dos eixos são definidas pelas equações (3.34), (3.35) e (3.36).

$$f_x = \sqrt{\frac{m_{eq} g c}{\left(m_{eq} + \frac{I_{yy}(R_2 - R_1)^2}{R_2^2 H^2}\right) H}} \quad (3.34)$$

$$f_y = \sqrt{\frac{m_{eq} g c}{\left(m_{eq} + \frac{I_{xx}(R_2 - R_1)^2}{R_2^2 H^2}\right) H}} \quad (3.35)$$

$$f_z = \sqrt{\frac{m_{eq} g R_1 R_2}{I_{zz} H}} \quad (3.36)$$

Reorganizando as equações acima, o momento de inércia da plataforma inferior para cada um dos seus eixos cartesianos é calculado por meio das equações (3.37), (3.38) e (3.39)

$$I_{xx} = \frac{m_{eq} R_2 H}{(R_2 - R_1)^2}\left(\frac{gc}{4\pi^2 f_y^2 H} - 1\right) \quad (3.37)$$

$$I_{yy} = \frac{m_{eq} R_2 H}{(R_2 - R_1)^2}\left(\frac{gc}{4\pi^2 f_x^2 H} - 1\right) \quad (3.38)$$

$$I_{zz} = \frac{m_{eq} g R_1 R_2}{4\pi^2 H f_z^2} \quad (3.39)$$

3.3 DETERMINAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA

As técnicas de pêndulo de Mendonça (2017) e Genta (1994) são capazes de determinar o momento de inércia baricentro do tensor de inércia, porém não preveem a determinação dos produtos de inércia. Tang (2011) apresenta uma nova técnica onde o corpo rígido é posicionado sob um conhecido ângulo em torno do seu centro de massa, conforme a Figura 3.6.

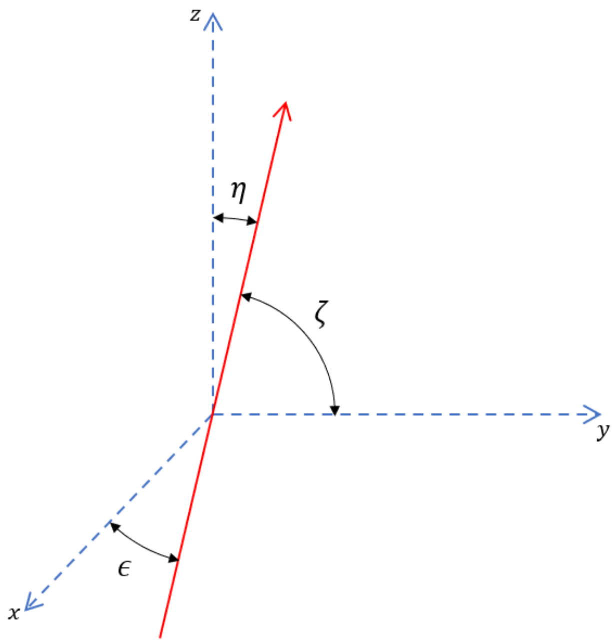


Figura 3.6 - Ângulos entre o eixo principal do pêndulo e o eixo do corpo rígido (seta vermelha).
Fonte: elaborado pelo autor.

De acordo com a teoria dos produtos de inércia, há uma relação dos ângulos $\epsilon_i, \zeta_i, \eta_i$, entre os três eixos do centro de massa do corpo rígido e os eixos da plataforma inferior, e o momento de inércia medido I_N, descrito na equação (3.40). Como o corpo rígido está rotacionado fora do seu eixo principal, então novos momentos de inércia serão obtidos, onde $l_i = \cos\epsilon_i$, $m_i = \cos\zeta_i$ e $n_i = \cos\eta_i$.

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & -2l_1m_1 & -2m_1n_1 & -2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & -2l_2m_2 & -2m_2n_2 & -2n_2l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_i^2 & m_i^2 & n_i^2 & -2l_im_i & -2m_in_i & -2n_il_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xy} \\ I_{yz} \\ I_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

A equação (3.40) apresenta seis incógnitas, que consiste no vetor de inércia $\{I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{yz}, , I_{zx}\}$ do corpo rígido. Portanto, são necessários, no mínimo, seis medições do momento de inércia $\{I_1, I_2, \dots, I_6\}$ na plataforma inferior em diferentes configurações de ângulos para obter o tensor de inércia do corpo rígido. De acordo com Tang (2011), para obter uma solução do tensor de inércia do corpo rígido com erro relativo menor de 1,5%, é necessário de 9 a 12 testes em diferentes configurações de ângulo.

Como é desejado identificar as seis incógnitas do tensor de inércia do corpo rígido presente no vetor de inércia, o vetor de inércia é isolado da equação (3.40) utilizando a pseudo-inversa da matriz **A**, conforme a equação (3.41).

$$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{I}_{\boldsymbol{N}} \tag{3.41}$$

onde,

$$I_N = (I_1, I_2, \dots I_i) \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & -2l_1m_1 & -2m_1n_1 & -2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & -2l_2m_2 & -2m_2n_2 & -2n_2l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_i^2 & m_i^2 & n_i^2 & -2l_im_i & -2m_in_i & -2n_il_i \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

4 ESTUDO NUMÉRICO

Após a formulação matemática do pêndulo multifilar feito no capítulo 3, é necessário a construção de um modelo numérico antes da construção do modelo experimental para prever o comportamento do modelo experimental e realizar conclusões sobre modificações e otimizações do modelo experimental. Primeiramente, é feita a modelagem de um pêndulo simples com o objetivo de validar o modelo numérico e, em seguida, o modelo numérico é exportado para o problema do modelo trifilar do Mendonça (2017) e modelo quadrifilar do Genta e Delprete (1994), no qual é a base para o modelo experimental.

4.1 MODELAGEM NUMÉRICA

As características físicas do sistema vibratório definem as suas respostas dinâmicas. Em geral, um sistema é constituído por um, ou mais componentes para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um ou mais componentes para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e, um ou mais componentes para a perda gradual desta energia. A energia potencial é associada a matriz de rigidez $[K]$, enquanto a energia cinética é associada a matriz de massa $[M]$ e a energia dissipativa é associada a matriz de amortecimento $[C]$ do sistema. O pêndulo pode ser classificado como um sistema de vibração livre, onde não há uma força externa agindo no sistema, apenas a perturbação inicial. Desta forma, o equilíbrio dinâmico do pêndulo para N graus de liberdade é representado pela equação (4.1), onde $\{\ddot{U}\}$, $\{\dot{U}\}$, $\{U\}$ são os vetores da aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente, dos graus de liberdade.

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \tag{4.1}$$

Assume-se que o pêndulo não possui perda de energia pela resistência do ar $[C] = 0$, e sabendo que $\{U\}$ possui a função harmônica $\{U\} = \Phi \sin \omega t,$ então é possível obter as frequências naturais ω_i de um sistema e os modos de vibração Φ_i pela solução da equação (4.2).

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\Phi\} = 0 \tag{4.2}$$

Nota-se que a modelagem matemática do problema é crítica para obter corretamente as matrizes de rigidez $[K]$ e massa $[M]$ que descreve o sistema. Quaisquer discrepâncias podem gerar resultados que não coincidem com o modelo físico. Analisar e refinar o tipo de elemento utilizado na modelagem numérica por elementos finitos tem como objetivo em estabelecer um modelo razoavelmente eficaz possuindo as características naturais do modelo real.

4.1.1 Modelagem do pêndulo simples

Para a modelagem dos cabos no pêndulo, considera-se um único elemento barra sem carregamento externo. O elemento barra possui dois nós com dois graus de liberdade em cada nó u_i, v_i, seção transversal A, comprimento L e módulo de elasticidade E (Figura 4.1).

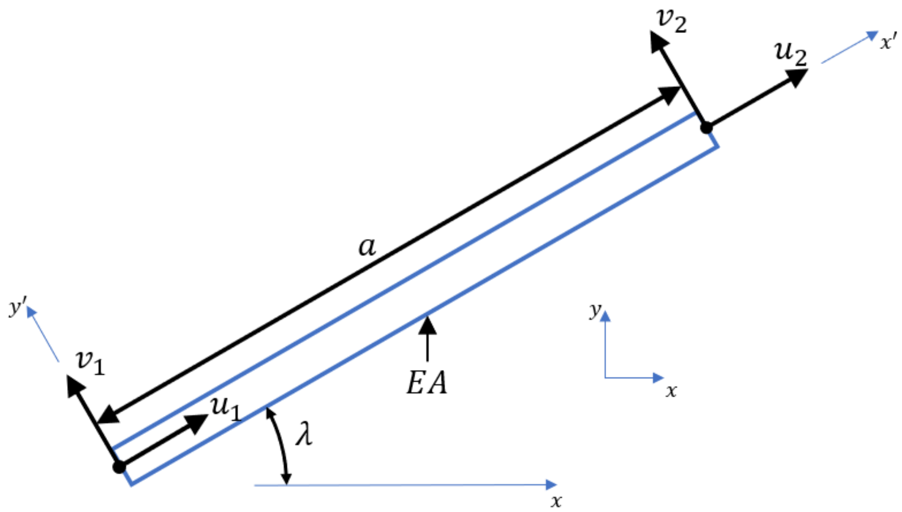


Figura 4.1 - Elemento barra com dois nós e dois graus de liberdade u_i, v_i.
Fonte: elaborado pelo autor.

A matriz de rigidez do elemento pode ser obtida a partir da derivada parcial das forças internas p com relação aos deslocamentos nodais u (4.3), o que pode ser simplificado a duas matrizes de rigidez: K_m (4.4) é proveniente da propriedade do material e K_G (4.5) é resultante das tensões internas do elemento (CHEN e LIU, 2019; FELIPPA, 2004).

$$\mathbf{K_e} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial (NL\boldsymbol{B}^T)}{\partial \boldsymbol{u}} = AL\boldsymbol{B}^T \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + ALs\frac{\partial \boldsymbol{B}^T}{\partial \boldsymbol{u}} = K_M + K_G \tag{4.3}$$

$$K_M = \frac{\mathrm{EA}}{L}\begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & -a_x^2 & -a_x a_y \\ a_x a_y & a_y^2 & -a_x a_y & -a_y^2 \\ -a_x^2 & -a_x a_y & a_x^2 & a_x a_y \\ -a_x a_y & -a_y^2 & a_x a_y & a_y^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$K_G = \frac{\mathrm{N}}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

onde,

$$\frac{\partial \mathrm{s}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial (s_0 + Ee)}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathrm{E}\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathrm{E}\mathbf{B} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{\mathrm{L}^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$B = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -a_x & -a_y & a_x & a_y \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$a_x = \frac{x_2 - x_1}{a}, a_y = \frac{y_2 - y_1}{a} \tag{4.9}$$

A barra está sujeita a tensão puramente axial e não sofre deformação por flexão. A adição do termo K_G aumenta a rigidez da matriz de rigidez se o cabo é submetido a tração ($s > 0$), mas reduz a rigidez se o cabo é submetido a compressão ($s < 0$). O termo N na equação (4.5) representa a força axial inicial, que no caso do pêndulo simples consiste na força da gravidade $N = mg$. A equação (4.10) representa a matriz de massa do pêndulo simples.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

A massa encontra-se acoplada a uma das extremidades, enquanto na outra extremidade é engatado $u_2 = v_2 = 0$. As frequências naturais ω_i do pêndulo simples podem ser obtidas por meio da equação (4.11), onde $\{z_i\}$ é o autovetor associado ao deslocamento horizontal e vertical do primeiro no, onde está acoplado a massa. Duas frequências naturais são encontradas pela equação: uma é associada a oscilação pendular, enquanto a outra é associada a oscilação axial.

$$[K]\{z_i\} = \omega_i^2[M]\{z_i\} \tag{4.11}$$

Aplicando as condições de contorno na equação (4.11), o caso do pêndulo simples se resume a um problema de autovalores, corresponde ao quadrado da frequência natural, ω_i^2 e autovetores, correspondente ao modo de vibração $\{z_i\}$.

$$\left(\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mg}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\{z_i\} = \omega_i^2\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\{z_i\} \tag{4.12}$$

Uma modelagem de pêndulo simples é realizada no software Ansys®, onde é extraído a frequência de oscilação do pêndulo e comparado com sua a solução analítica. O cabo do pêndulo simples possui um comprimento de 1 metro e aceleração da gravidade de $9{,}78\ m/s^2$. A frequência de oscilação do pêndulo é extraída pela equação (4.13).

$$f_{\mathrm{analitico}} = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^{-1} = \left(2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}78}}\right)^{-1} = 0{,}4977\ \mathrm{Hz} \tag{4.13}$$

O elemento barra utilizado na modelagem do cabo é o LINK180. Este elemento possui três graus de liberdade, correspondente aos deslocamentos nos três eixos $x, y\ e\ z$, e suporta apenas tensão ou compressão. Este elemento é correspondente ao elemento barra, apresentado anteriormente, sendo ideal para utilizar na modelagem de cabos. O material do elemento é aproximado a um cabo de aço de seção transversal $A \approx 0{,}8\ mm^2$, sendo que as propriedades mecânicas do material consistem no módulo de elasticidade $E = 210$GPa e densidade $\rho = 7870\ Kg/m^3$. Na extremidade inferior, é utilizado o elemento MASS21 para modelagem da massa concentrada, que é associado ao nó na extremidade do cabo. O elemento MASS21 possui seis graus de liberdade: translação e rotação nos eixos x, y, z. O elemento permite assumir a quantidade de massa e inércia do nó onde é associado. É utilizada uma massa concentrada de 1 kg. A Figura 4.2 apresenta a solução nodal do deslocamento no eixo x no primeiro modo de vibração do pêndulo simples. A frequência natural extraída no eixo x, que é igual ao eixo y, é $0{,}498\ Hz$, e um erro relativo à frequência obtida analiticamente de $0{,}06\%$ (TABELA 4.1).

TABELA 4.1 - FREQUÊNCIA DE OSCILAÇÃO DO PÊNDULO SIMPLES.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{f_{numerico}}$	**Erro Relativo**
$1\ kg$	$9{,}78\ m/s^2$	$0{,}4980\ Hz$	0,06%

Fonte: elaborado pelo autor.

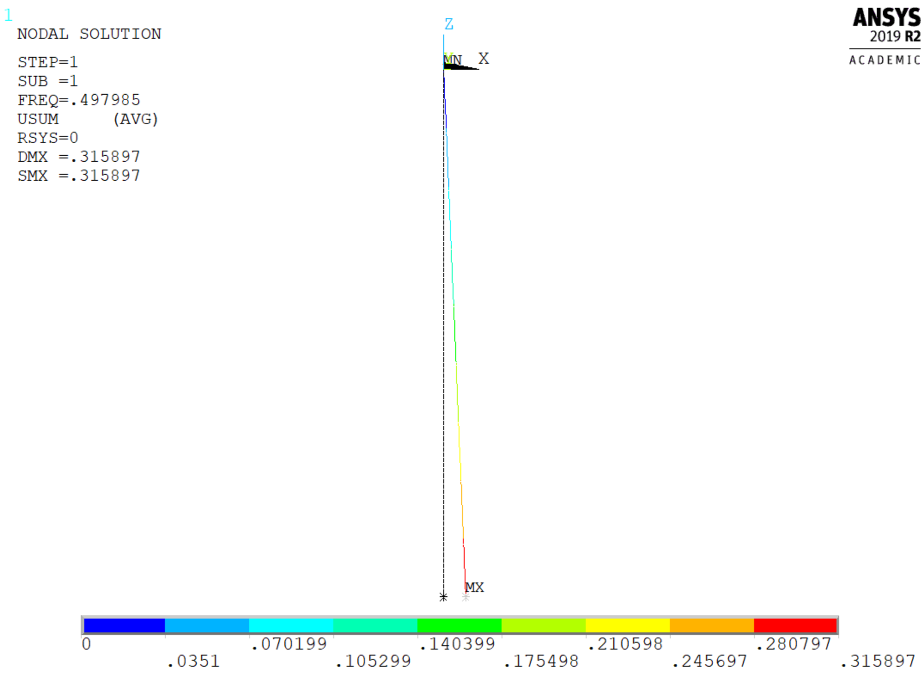


Figura 4.2 - Primeiro modo de oscilação do pêndulo simples.
Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.2 Modelagem de cabos por elemento viga

Na subseção anterior, o cabo do pêndulo simples foi modelado utilizando o elemento barra que apresenta dois graus de liberdade por nó u e v. Outro elemento que pode ser considerado para modelagem do cabo do pêndulo simples é o elemento viga. O elemento viga possui dois nós com dois graus de liberdade em cada nó v_i, Θ_i. O elemento possui comprimento L, módulo de elasticidade E e momento inercial (Figura 4.3).

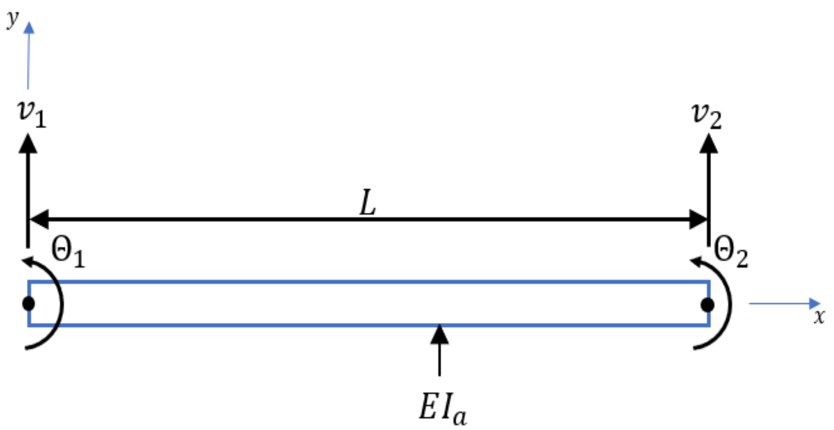


Figura 4.3 - Elemento barra com dois nós e dois graus de liberdade v, Θ.
Fonte: elaborado pelo autor.

A equação diferencial (4.14) descreve o movimento da viga uniforme de Euler-Bernoulli com módulo de elasticidade E e momento de inércia de área I_a em relação ao eixo y (BAUCHAU e CRAIG, 2009; CHEN e LIU, 2019).

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=f(x,t) \tag{4.14}$$

O resíduo médio ponderado da equação (4.14) é dado pela equação (4.15), onde w é uma função teste.

$$T=\int_0^L\left(\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-f\right)wdx=0 \tag{4.15}$$

Discretizando a viga em um número finito de elementos, tem-se (BAUCHAU e CRAIG, 2009):

$$T=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0\left(\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}w+EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-fw\right)dx\right]+\left[EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}w-EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^L=0 \tag{4.16}$$

Assim como observado no elemento barra, o elemento viga possui um aumento da sua rigidez quando submetido a cargas axiais de tração e, por outro lado diminui sua rigidez quando submetido a cargas de compressão. Como há quatro graus de liberdade, dois em cada nó, na Figura 4.3, assume-se uma função polinomial cúbica para $v(x)$ (4.17).

$$v(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3 \tag{4.17}$$

Sabendo que $\Theta=\frac{\partial v}{\partial x}$, a flexão do elemento pode ser calculada por

$$\Theta(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2 \tag{4.18}$$

Aplicando as equações (4.17) e (4.18) nos nós na Figura 4.3, obtém-se as seguintes equações em termo dos graus de liberdade v,Θ:

$$v(0)=c_0=v_1 \tag{4.19}$$

$$\Theta(0) = c_1 = \Theta_1 \tag{4.20}$$

$$\Theta(L) = c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 = v_2 \tag{4.21}$$

$$\Theta(L) = c_1 + 2c_2 L + 3c_3 L^2 = \Theta_2 \tag{4.22}$$

Substituindo as equações (4.19)-(4.22) na equação (4.17), tem-se:

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\Theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\Theta_2 \tag{4.23}$$

onde $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ e $H_4(x)$ são função de forma do elemento viga.

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \tag{4.24}$$

$$H_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2} \tag{4.25}$$

$$H_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \tag{4.26}$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \tag{4.27}$$

Substituindo as funções de forma no segundo termo da equação (4.16), é possível extrair a matriz de rigidez do elemento viga (4.28) (BAUCHAU e CRAIG, 2009).

$$K_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{EI_a}}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

A matriz de rigidez do elemento viga (4.28) é função do momento de inércia de área I_a (4.29) do elemento, enquanto a matriz de rigidez do elemento barra (4.4) é função da área A (4.30) do elemento. A relação entre o momento de inércia de área e a área transversal do elemento determina o quão eficaz é a aproximação da modelagem numérica por elemento viga em comparação com elemento barra.

$$I_a = \frac{\pi D^4}{64} \tag{4.29}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\pi \mathrm{D}^2}{4} \tag{4.30}$$

O elemento viga utilizado na modelagem do cabo do pêndulo simples no software Ansys® é o BEAM188. Este elemento possui seis graus de liberdade e é adequado para analisar vigas finas sendo baseado na teoria de viga de Timoshenko, onde o cisalhamento é constante ao longo da seção transversal do elemento. O cabo possui um ponto fixo, onde está na condição de engastada $v = \Theta = 0$. A frequência de oscilação do pêndulo é extraída para diferentes diâmetros do cabo e o erro relativo à solução analítica é obtido (TABELA 4.2). Em diâmetros abaixo de 0,5 mm, a modelagem do cabo por BEAM188 apresenta um erro relativo abaixo de 2%, o que justifica a utilização do BEAM188 em substituição do LINK180 na modelagem do cabo do pêndulo.

TABELA 4.2 - FREQUÊNCIA DE OSCILAÇÃO DO PÊNDULO SIMPLES PARA DIFERENTES DIÂMETROS E ELEMENTOS DE MODELAGEM DO CABO.

Diâmetro do cabo	**Link180**	$\frac{f_{link}}{f_{analitico}} - 1$	**Beam188**	$\frac{f_{beam}}{f_{analitico}} - 1$	$\frac{f_{beam}}{f_{link}} - 1$
$0{,}25\ mm$	$0{,}4977\ Hz$	0 %	$0{,}4998\ Hz$	0,42 %	0,42 %
$0{,}5\ mm$	$0{,}4978\ Hz$	0,02 %	$0{,}5062\ Hz$	1,71 %	1,69 %
$1\ mm$	$0{,}4980\ Hz$	0,06 %	$0{,}5341\ Hz$	7,3 %	7,25 %
$2\ mm$	$0{,}4987\ Hz$	0,2 %	$0{,}7003\ Hz$	40,7 %	40,4 %
$5\ mm$	$0{,}5037\ Hz$	1,2 %	$2{,}670\ Hz$	436 %	430 %

Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.3 Modelagem do pêndulo trifilar e quadrifilar

O pêndulo trifilar possui três cabos e o pêndulo quadrifilar possui quatro cabos, que ligam à uma plataforma inferior na base superior, presa ao teto. Os cabos são modelados utilizando o elemento BEAM188, onde a extremidade superior é engastada $v = \Theta = 0$ no teto. A modelagem do pêndulo trifilar e quadrifilar se diferencia da modelagem do pêndulo simples pela presença da plataforma inferior, que acrescenta a frequência natural de rotação ao longo do eixo vertical e é dependente da inércia resultante da plataforma inferior, portanto, o pêndulo apresenta três graus de liberdade: translação nos eixos horizontais e rotação no eixo vertical. A plataforma inferior é modelada utilizando o SOLID185, elemento estrutural tridimensional de oito nós com três graus de liberdade: translação no eixo x, y e z. O elemento possui módulo de elasticidade E e de densidade ρ, e que por consequência possui uma massa m e tensor de inércia $[I]$.

A metodologia do pêndulo multifilar consiste na determinação da inércia de um corpo rígido ao centro da base inferior. Este corpo rígido é modelado utilizando o elemento MASS21, onde é possível modificar a massa e inércia do elemento. Este corpo rígido é conectado aos nós da plataforma inferior utilizando o comando CERIG, que define uma região rígida onde as equações de restrição do elemento MASS21 serão iguais ao do SOLID185.

4.2 PÊNDULO TRIFILAR

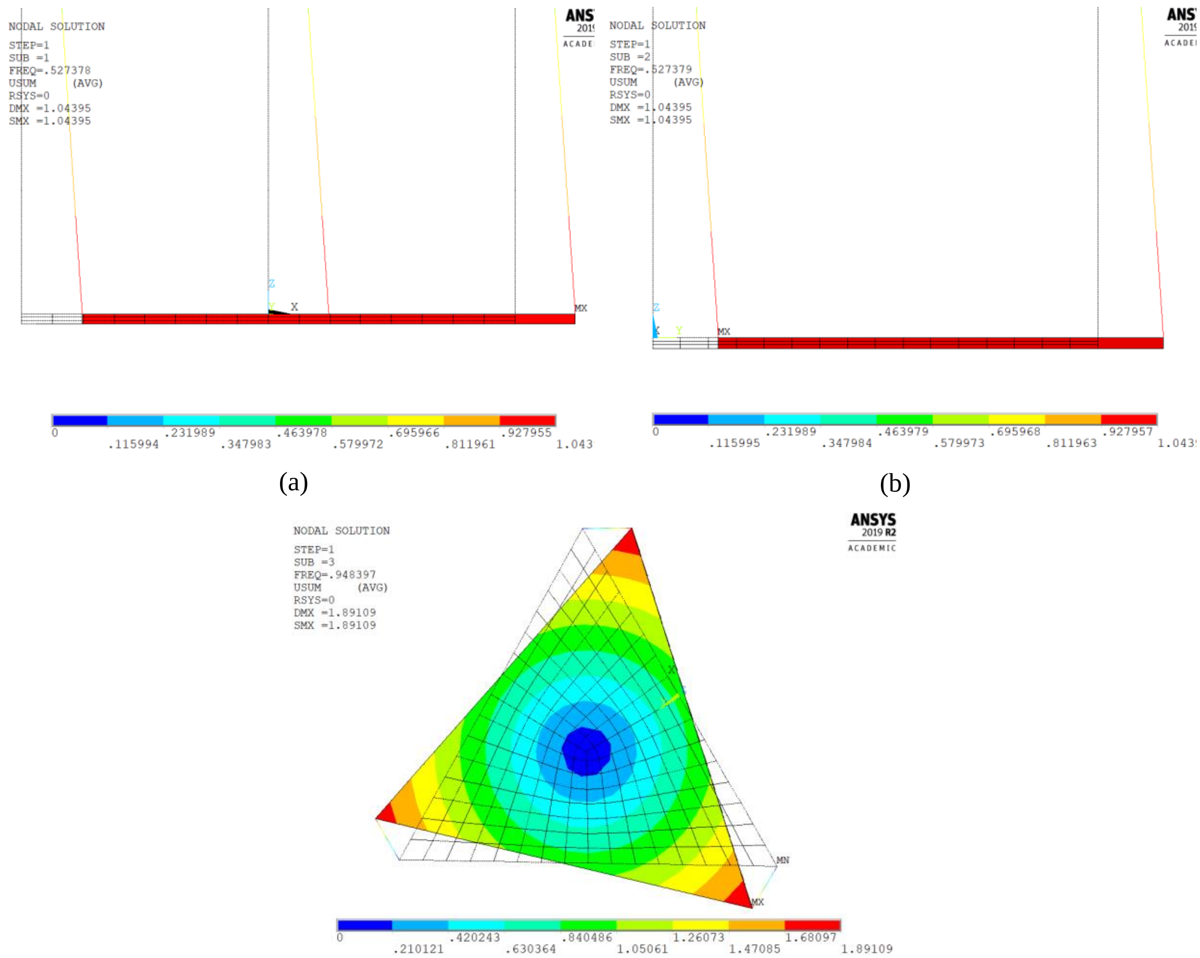
Um modelo numérico da bancada trifilar é construído no software Ansys®. Este modelo consiste numa base inferior triangular com 0,6 metros de comprimento, 0,5 metros de altura e 12mm de espessura. Desta forma, o raio de rotação da base inferior é de $0{,}333\ \mathrm{m}$ (4.31). A base triangular é construída em madeira, portanto a densidade é definida em $470\ \mathrm{kg/m^3}$ e massa de 846 gramas. O momento de inércia da base triangular equação (4.32) é calculado por meio do modelo *Computer Aided Design* (CAD) pelo software SolidWorks®. A base é suspensa por três cabos de aço de 1/8 polegadas (3,2 mm) de diâmetro e 1,5 metros de extensão. Os cabos são conectados nas extremidades da plataforma triangular. A frequência de oscilação translacional do pêndulo trifilar pode ser aproximada para a solução de um pêndulo físico, que é definida pela equação (4.33), não dependendo da massa, apenas do comprimento dos cabos.

$$R = \frac{2h}{3} = \frac{2 \times 0{,}5}{3} = 0{,}333\ \mathrm{m} \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{bmatrix}_{cm} = \begin{bmatrix} 11{,}7602 \\ 12{,}7002 \\ 24{,}44 \end{bmatrix} \mathrm{gm^2} \tag{4.32}$$

$$f_{analitico} = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^{-1} = \left(2\pi\sqrt{\frac{1{,}5}{9{,}78}}\right)^{-1} = 0{,}4064\ \mathrm{Hz} \tag{4.33}$$

Após a modelagem, a análise estática é utilizada para aplicar tensão nos cabos para posteriormente realizar a análise modal da bancada. Na análise modal, as primeiras três frequências naturais da bancada são extraídas (Figura 4.4) correspondente, respectivamente, ao movimento translacional no eixo x (Figura 4.4a), no eixo y (Figura 4.4b) e rotacional (Figura 4.4c) em torno do eixo z da bancada.



(a) (b)

(c)

Figura 4.4 - Os primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos de vibração da bancada numérica.
Fonte: elaborado pelo autor.

Os dois primeiros modos são equivalentes ao valor analítico da equação (4.33). Utilizando a frequência de oscilação da bancada no terceiro modo, por meio da equação (4.34), é possível aferir a inércia da bancada numérica e compará-la com o valor analítico, conforme apresenta na TABELA 4.3.

$$I^{zz} = \frac{mgR^2}{4\pi^2 L f^2} \tag{4.34}$$

TABELA 4.3 - MOMENTO DE INÉRCIA DA BASE TRIANGULAR NO PÊNDULO TRIFILAR.

$\boldsymbol{m = 846g; R = 0,333m; L = 1,5m}$			
$\boldsymbol{f_z}$	$\boldsymbol{I^{zz}_{analítico}}$	$\boldsymbol{I^{zz}_{numerico}}$	**Erro relativo**
0,9484 Hz	24,44 gm^2	17,22 gm^2	29,5%

Fonte: elaborado pelo autor.

Devido ao alto erro relativo obtido, um estudo de convergência entre o valor numérico e o valor analítico é realizado. Este estudo consiste em modificar as variáveis com o objetivo de aproximar o valor numérico com o analítico e, assim averiguar quais são as variáveis que possuem maior contribuição na convergência.

4.2.1 Variação do diâmetro dos cabos

O primeiro caso consiste em modificar o diâmetro dos cabos que suspendem a bancada triangular. Com isso, o valor da inércia da bancada é obtido por meio da equação (4.34) e comparado com o valor analítico da plataforma triangular (TABELA 4.4). O Gráfico 4.1 apresenta os dados de erro relativo da TABELA 4.4 para a frequência de translação e momento de inércia da plataforma inferior.

Além disso, para compreender como o diâmetro altera a inércia numérica, são calculados a razão entre a massa dos cabos suspensos e da base triangular e, a razão entre frequência translacional da bancada e o valor analítico obtido pela equação (4.33). É possível observar, no Gráfico 4.1, que a redução do diâmetro do cabo tem grande impacto na convergência do modelo numérico com o analítico, como já foi documentado na Seção 4.1.2.

TABELA 4.4 - MOMENTO DE INÉRCIA DA BANCADA PARA DIFERENTES DIÂMETROS DOS CABOS.

$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 7870\ kg/m^3}$; $\boldsymbol{\rho_{base} = 470\ kg/m^3}$; $\boldsymbol{m_{base} = 846\ g}$				
Modo	$\boldsymbol{D_{cabo} = 3,2\ mm}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 284g}$	$\boldsymbol{D_{cabo} = 1,6\ mm}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 84g}$	$\boldsymbol{D_{cabo} = 0,8\ mm}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 18g}$	$\boldsymbol{D_{cabo} = 0,4\ mm}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 4,5g}$
1	0,52738	0,43102	0,41187	0,40717
2	0,52738	0,43102	0,41187	0,40717
3	0,94840	0,83170	0,81547	0,81222
$I_{numerico}$	17,22 gm^2	22,40 gm^2	23,30 gm^2	23,53 gm^2
$\frac{m_{cabo}}{m_{base}}$	33,6%	8,4%	2,1%	0,52%

Fonte: elaborado pelo autor.

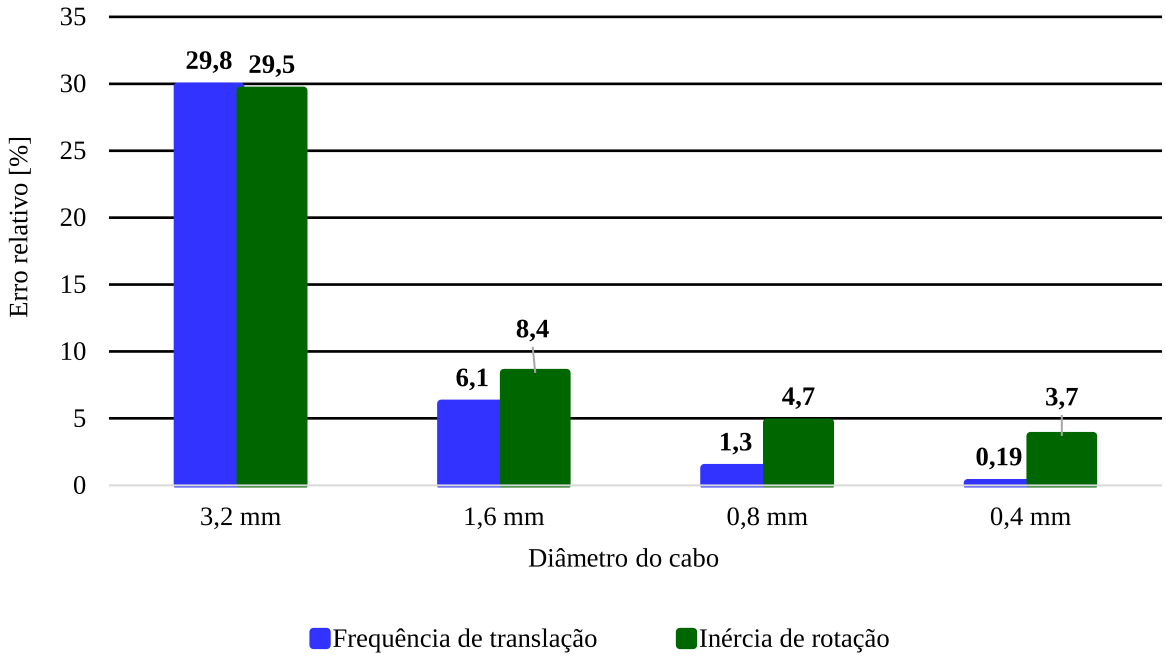


Gráfico 4.1 - Erro relativo da frequência de translação e inércia de rotação da plataforma inferior do pêndulo trifilar em função do diâmetro dos cabos
Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.2 Variação da massa dos cabos

Uma hipótese para a convergência deve ser ao fato da redução da influência dos cabos na inércia da bancada, ou pela massa dos cabos ou pela sua inércia. Desta forma, outro estudo de caso é realizado onde apenas a massa dos cabos é alterada (TABELA 4.5). O Gráfico 4.2 demonstra o erro relativo da frequência e momento de inércia estimado do modelo numérico comparado com o modelo analítico.

TABELA 4.5 - MOMENTO DE INÉRCIA DA BANCADA PARA DIFERENTES DENSIDADES DO CABO.

$\boldsymbol{D_{cabo} = 3,2\ mm; \rho_{base} = 470\ kg/m^3\ ; m_{base} = 846\ g}$			
Modo	$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 7870 \frac{kg}{m^3}}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 284g}$	$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 3935 \frac{kg}{m^3}}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 168g}$	$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 1968 \frac{kg}{m^3}}$ $\boldsymbol{m_{cabos} = 71g}$
1	0,52738	0,52820	0,52864
2	0,52738	0,52821	0,52865
3	0,94840	0,99711	1,0258
$I_{numerico}$	$17,22\ gm^2$	$15,58\ gm^2$	$14,72\ gm^2$
$\frac{m_{cabo}}{m_{base}}$	33,6%	16,8%	8,4%

Fonte: elaborado pelo autor.

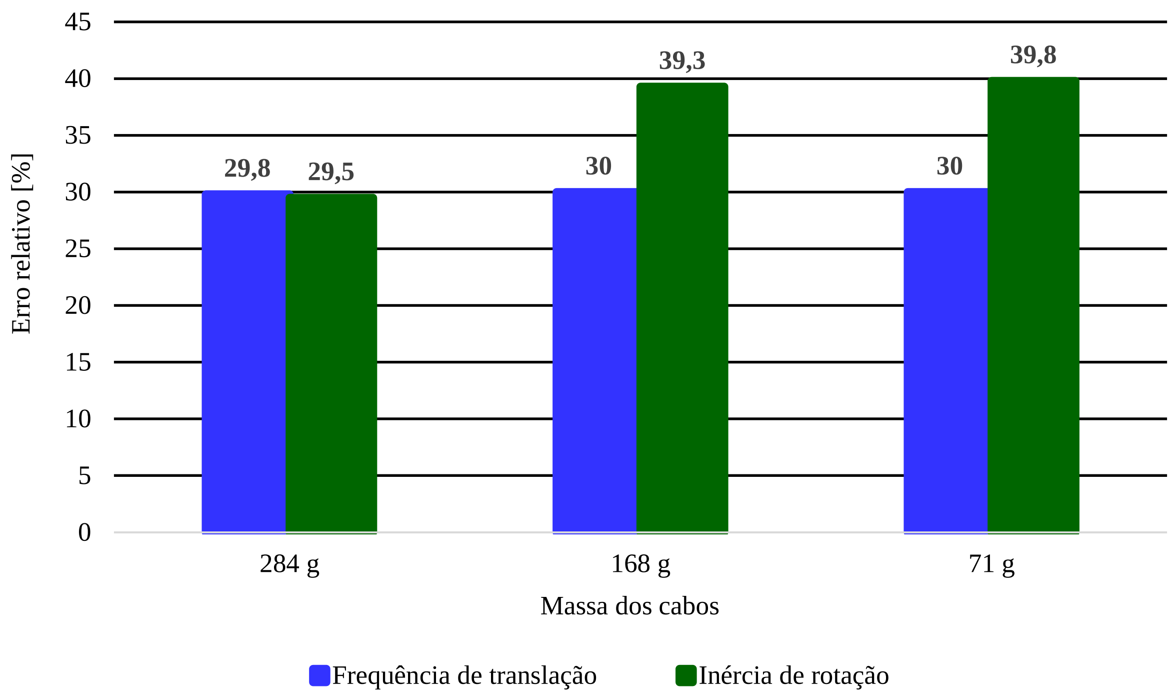


Gráfico 4.2 - Erro relativo da frequência de translação e inércia de rotação da plataforma inferior do pêndulo trifilar em função da massa dos cabos
Fonte: elaborado pelo autor.

Com os resultados, é observado que mesmo com a redução da massa, não há a convergência do modelo numérico. Conclui-se então, que a massa dos cabos não tem influência na convergência e sim na sua inércia. É possível também concluir que com a diminuição do diâmetro dos cabos, o elemento do cabo converge a uma solução de elemento de cabo, não do elemento viga, como pressuposto no modelamento numérico.

4.2.3 Variação da massa da plataforma

Um quarto estudo de caso realizado foi aumentar a massa da bancada para observar se há convergência do modelo numérico. Neste estudo, apenas a densidade é alterada, desta forma, alterando a massa da bancada, porém a densidade e diâmetro dos cabos continuam inalterados (TABELA 4.6).

Como a massa da plataforma é modificada, o seu momento de inércia no eixo z também é modificado, sendo necessário recalcular utilizando CAD. O Gráfico 4.3 apresenta o erro relativo da frequência de oscilação e momento de inércia da plataforma inferior entre o modelo numérico e o analítico. Os resultados demonstram uma convergência do modelo numérico, porém, numa menor taxa do que observado no segundo estudo de caso, onde é alterado o diâmetro do cabo (TABELA 4.4).

TABELA 4.6 - MOMENTO DE INÉRCIA DA BANCADA PARA DIFERENTES DENSIDADES ρ_{base} DA BASE TRIANGULAR.

$\rho_{cabo} = 7870\ kg/m^3$; $D_{cabo} = 3{,}2\ mm$; $m_{cabos} = 284\ g$				
Modo	$\rho_{base} = 470\ \frac{kg}{m^3}$ $m_{base} = 846\ g$	$\rho_{base} = 940\ \frac{kg}{m^3}$ $m_{base} = 1692\ g$	$\rho_{base} = 1880\ \frac{kg}{m^3}$ $m_{base} = 3384\ g$	$\rho_{base} = 3760\ \frac{kg}{m^3}$ $m_{base} = 6768\ g$
1	0,52738	0,4845	0,45772	0,44074
2	0,52738	0,4845	0,45772	0,44074
3	0,94840	0,91259	0,88581	0,86603
$I_{analitico}$	$24{,}44\ gm^2$	$48{,}88\ gm^2$	$97{,}76\ gm^2$	$195{,}52\ gm^2$
$I_{numerico}$	$17{,}22\ gm^2$	$37{,}28\ gm^2$	$79{,}14\ gm^2$	$169{,}07\ gm^2$
$\frac{m_{cabo}}{m_{base}}$	33,6%	16,8%	8,4%	4,2%

Fonte: elaborado pelo autor.

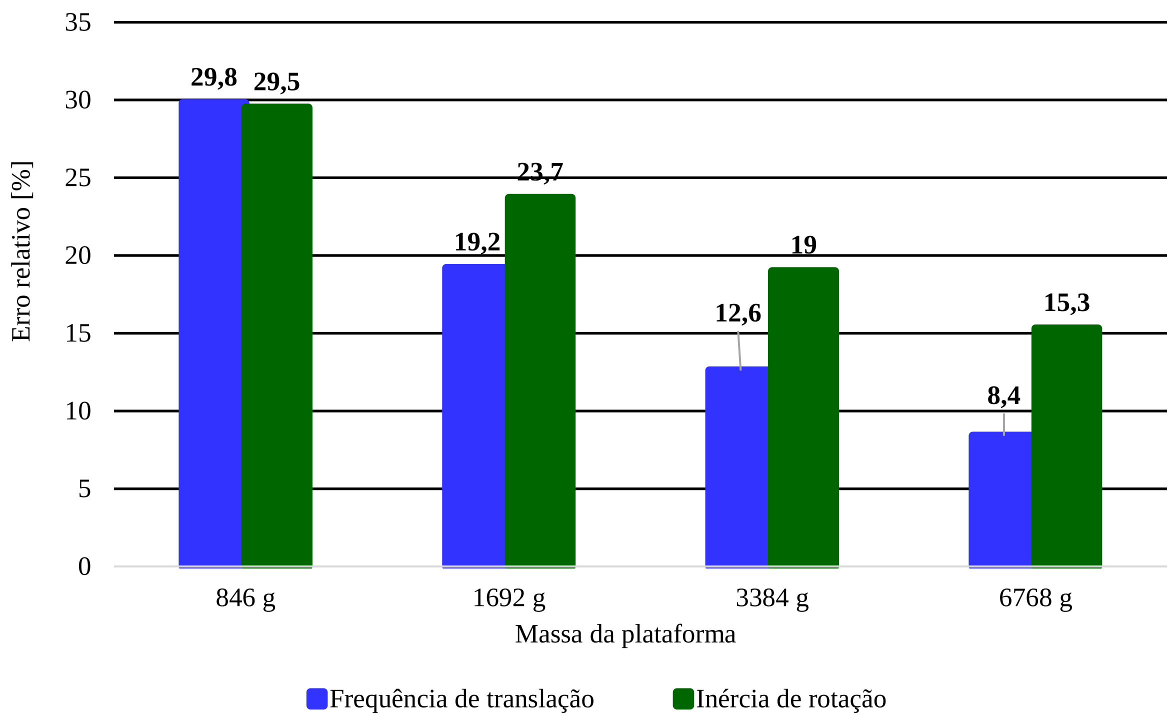


Gráfico 4.3 - Erro relativo da frequência de translação e inércia de rotação da plataforma inferior do pêndulo trifilar em função da massa da plataforma.

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.4 Considerações do momento de inércia do corpo rígido

O modelo numérico é aplicado na metodologia experimental para determinação do momento de inércia de um corpo. A metodologia consiste na diferença de duas configurações no pêndulo trifilar: uma com o corpo rígido de inércia desconhecida e outra sem o corpo. Desta forma, A equação (4.35) é baseada na equação (3.29).

$$I_{corpo}^{zz} = \frac{gR^2}{4\pi^2 L}\left(\frac{m_{base} + m_{corpo}}{f_{corpo}^2} - \frac{m_{base}}{f_{base}^2}\right) \tag{4.35}$$

No modelo numérico é o utilizado o elemento MASS21, onde é possível adicionar massa e inércia na bancada e, posteriormente, são extraídos os primeiros três modos de vibração da bancada. Dois cenários foram utilizados para o modelo numérico: primeiro cenário com a bancada nas suas dimensões iniciais, ou seja, com o diâmetro dos cabos de 3,2 mm. O segundo cenário consiste no melhor estudo de caso encontrado, ou seja, com o diâmetro de 0,4 mm nos cabos. Os corpos rígidos com diferentes massas e momento de inércia no eixo z são propostos para verificar a convergência do modelo com a adição de massa e inércia. As propriedades dos corpos rígidos foram escolhidas respeitando a faixa de classificação dos nano satélites, ou seja, entre 1 e 10Kg.

A TABELA 4.7 apresenta a frequência de oscilação do pêndulo trifilar e a estimativa do momento de inércia no eixo z do corpo rígido a partir da equação (4.35). É possível observar que há uma grande discrepância entre a estimativa do momento de inércia numérico e o analítico do corpo rígido e, essa discrepância diminui quando o corpo rígido possui maior massa e momento de inércia.

A TABELA 4.8 apresenta a frequência de oscilação do pêndulo trifilar com o diâmetro dos cabos reduzido e a estimativa do momento de inércia no eixo z do corpo rígido a partir da equação (4.35). Neste cenário, também ocorre a convergência do modelo numérico.

TABELA 4.7 - MOMENTO DE INÉRCIA DE DIFERENTES CORPOS RÍGIDOS NO PÊNDULO TRIFILAR COM CABOS DE 3,2 mm DE DIÂMETRO.

$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 7870\ kg/m^3}$; $\boldsymbol{D_{cabo} = 3,2\ mm; m_{base} = 846\ g; I_{base} = 24,44\ gm^2}$			
	1^o / 2^o modo	**3^o modo**	$\boldsymbol{I_{numerico}}$
Sem corpo	0,52738	0,94840	-
$m_{corpo} = 500g$ $I_{corpo} = 0,83\ gm^2$	0,49650	1,0927	3,42 gm^2
$m_{corpo} = 1\ kg$ $I_{corpo} = 1,66\ gm^2$	0,48041	1,2116	5,81 gm^2
$m_{corpo} = 2\ kg$ $I_{corpo} = 3,33\ gm^2$	0,46329	1,4022	9,30 gm^2
$m_{corpo} = 5\ kg$ $I_{corpo} = 8,33\ gm^2$	0,44374	1,7832	16,48 gm^2
$m_{corpo} = 10\ kg$ $I_{corpo} = 16,66\ gm^2$	0,43273	2,1508	25,76 gm^2

Fonte: elaborado pelo autor.

TABELA 4.8 - MOMENTO DE INÉRCIA DE DIFERENTES CORPOS DE PROVA NO PÊNDULO TRIFILAR COM CABOS DE 0,4 MM DE DIÂMETRO.

$\boldsymbol{\rho_{cabo} = 7870\ kg/m^3}$; $\boldsymbol{D_{cabo} = 0,4\ mm; m_{base} = 846\ g; I_{base} = 24,44\ gm^2}$				
	$\boldsymbol{I_{corpo}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$	**1^o / 2^o modo**	**3^o modo**	$\boldsymbol{I_{numerico}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$
Sem corpo	-	0,40717	0,8122	-
$m_{corpo} = 500g$	0,83 gm^2	0,40690	1,0066	0,843
$m_{corpo} = 1\ kg$	1,66 gm^2	0,40676	1,1595	1,663
$m_{corpo} = 2\ kg$	3,33 gm^2	0,40663	1,3953	3,292
$m_{corpo} = 5\ kg$	8,33 gm^2	0,40649	1,8408	8,125
$m_{corpo} = 10\ kg$	16,66 gm^2	0,40642	2,2393	16,157

Fonte: elaborado pelo autor.

O Gráfico 4.4 apresenta erro relativo do momento de inércia do corpo rígido nos casos do pêndulo trifilar com diâmetro dos cabos de 3.2 mm, em azul, e 0,4 mm, em verde. O erro relativo encontrado no segundo caso é inferior ao encontrado no primeiro cenário, sendo mais eficaz para determinação do momento de inércia do corpo rígido.

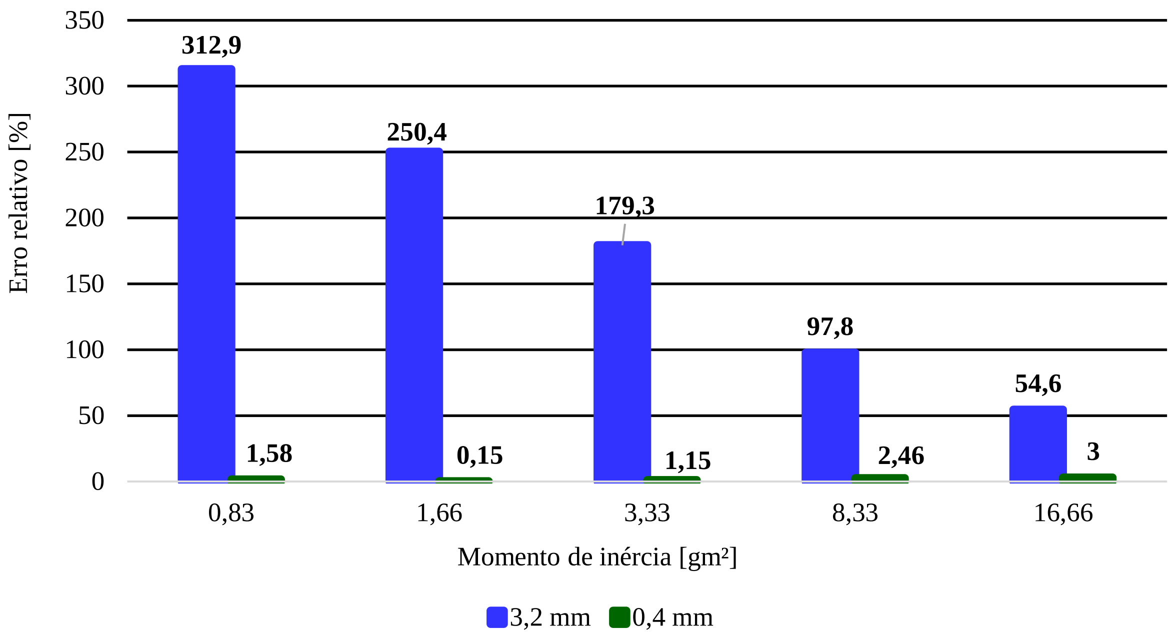


Gráfico 4.4 - Erro relativo do momento de inércia dos corpos rigidos no pêndulo trifilar em função do diâmetro dos cabos.

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.5 Considerações sobre os ensaios numéricos no pêndulo trifilar

Como determinado por meio do modelo numérico do pêndulo trifilar e documentado na seção 4.1.2, a diminuição do diâmetro dos cabos modelados por elemento viga, e consequentemente a diminuição da massa dos cabos, contribui para a convergência do modelo numérico com o analítico, tanto na frequência de translação (primeiro e segundo modos) quanto na frequência de rotação (terceiro modo). A diminuição apenas da massa dos cabos ou o aumento da massa da plataforma inferior também contribuem para a convergência dos modelos, porém, não na mesma taxa que a variação do diâmetro dos cabos. Na determinação do momento de inércia do corpo rígido utilizando o pêndulo trifilar, os resultados obtidos utilizando cabos de diâmetro $0{,}8\ mm$ são satisfatórios. Além disso, é possível observar que o aumento da massa e inércia do corpo rígido contribuem para a convergência do modelo numérico, portanto, a adição de massa pode ser benéfica para aumentar a acurácia do resultado experimental obtido.

4.3 PÊNDULO QUADRIFILAR

O modelo numérico de um pêndulo trifilar é exportado para a aplicação em um pêndulo quadrifilar, com a adição de um cabo, quatro no total e, alteração das dimensões da plataforma inferior. O suporte superior é quadrado com lados de 1,2 metros e fixo ao teto, sendo o raio de rotação de $0{,}8485$ m (4.36). Para a plataforma inferior, é utilizada uma placa quadrada com 0,6 metros de lado e 12 milímetros de espessura, sendo o raio de rotação de $0{,}424$ m (4.37). A placa possui uma densidade de $\rho = 470\ kg/m^3$ e massa de $2{,}03$ kg. Os momentos de inércia da placa são definidos na equação (4.38). Como determinado por meio do modelo numérico do pêndulo trifilar, a diminuição do diâmetro dos cabos de aço contribui para a convergência do modelo numérico com o analítico, sendo utilizados cabos de aço com diâmetro de $0{,}4\ mm$. A altura entre a base superior e a plataforma inferior é de 1,5 metro.

$$R_1 = \sqrt{2 \times 0{,}6^2} = 0{,}8485\ m \tag{4.36}$$

$$R_2 = \sqrt{2 \times 0{,}3^2} = 0{,}4243\ m \tag{4.37}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I_{xx}} \\ \mathrm{I_{yy}} \\ \mathrm{I_{zz}} \end{bmatrix}_{\mathrm{cm}} = \begin{bmatrix} 60{,}93 \\ 60{,}93 \\ 121{,}82 \end{bmatrix} \mathrm{gm^2} \tag{4.38}$$

Os momentos de inércia do pêndulo quadrifilar para os seus três eixos cartesianos são estimados a partir das equações (4.39), (4.40) e (4.41), baseadas nas equações (3.37), (3.38) e (3.39), onde a constante c (4.42) representa uma razão adimensional geométrica do pêndulo quadrifilar.

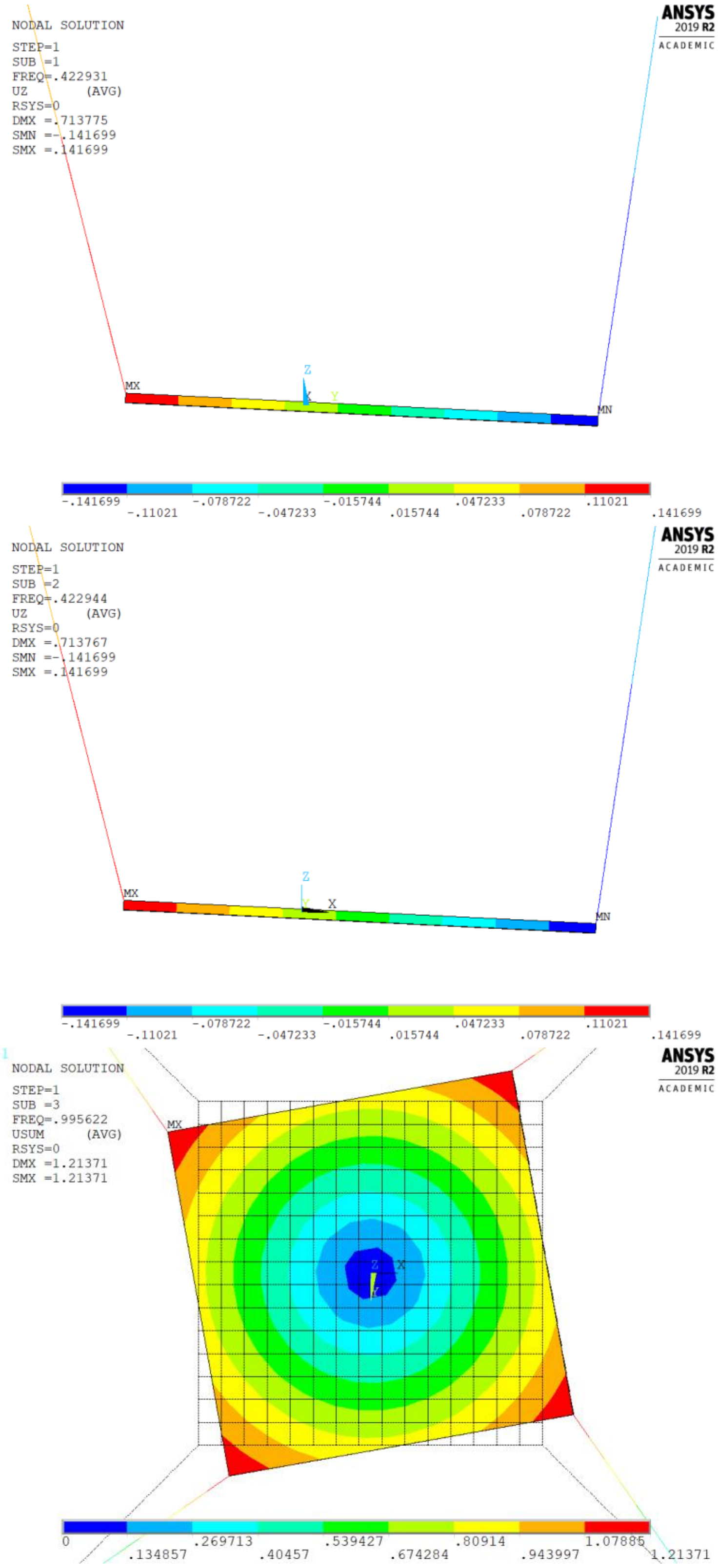
$$I_{xx} = \frac{mgh}{4\pi^2 f_y^2} \frac{R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} c - \frac{mR_2^2 h^2}{(R_2 - R_1)^2} \tag{4.39}$$

$$I_{yy} = \frac{mgh}{4\pi^2 f_x^2} \frac{R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} c - \frac{mR_2^2 h^2}{(R_2 - R_1)^2} \tag{4.40}$$

$$I_{zz} = \frac{mgR_1R_2}{4\pi^2 h f_z^2} \tag{4.41}$$

$$c = 1 + \frac{[R_1(R_2 - R_1)^2]}{2R_2h^2} \tag{4.42}$$

O pêndulo quadrifilar é modelado numericamente no software Ansys® e as três primeiras frequências e modos de vibração são obtidas conforme apresenta a (Figura 4.5).



(a)
(b)
(c)

Figura 4.5 - O primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos de vibração da bancada numérica com cabos inclinados.
Fonte: elaborado pelo autor.

Observando o plotagem dos três primeiros modos de vibração, o primeiro modo de vibração (Figura 4.5a) é representado pelo movimento plano geral: translação no eixo y e rotação no eixo x. O segundo modo (Figura 4.5b) também é representado pelo movimento plano geral: translação no eixo x e rotação no eixo y e o terceiro modo (Figura 4.5c) é representado apenas pela rotação no eixo z.

A partir das frequências de oscilação, é possível estimar o momento de inércia para os três eixos da plataforma inferior e calcular o erro relativo do momento de inércia obtido numericamente com o momento de inércia analítico da plataforma inferior (TABELA 4.9).

TABELA 4.9 - MOMENTO DE INÉRCIA DO PÊNDULO QUADRIFILAR COM CABOS INCLINADOS.

$\boldsymbol{m = 2030g; R_1 = 0,8485m; R_2 = 0,4243m; H = 1,5m}$				
	Frequência (Hz)	$\boldsymbol{I_{experimental}}$	$\boldsymbol{I_{analítico}}$	**Erro relativo (%)**
Eixo x	0,4229	$-12,23\ gm^2$	$60,93\ gm^2$	120 %
Eixo y	0,4229	$-12,23\ gm^2$	$60,93\ gm^2$	120 %
Eixo z	0,9956	$121,83\ gm^2$	$121,82\ gm^2$	0,01 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Para determinar o momento de inércia de um corpo rígido utilizando a técnica do pêndulo quadrifilar, é utilizada a mesma metodologia do pêndulo trifilar. A metodologia consiste na medição do momento de inércia da plataforma inferior com e sem o corpo rígido. No modelo numérico, o corpo rígido é modelado utilizando o elemento MASS21, onde é possível variar a massa e inércia do elemento. Por conta disso, um corpo rígido é moldado na plataforma inferior com os momentos de inércia definidos pela equação (4.43).

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{I_{xx}} \\ \mathrm{I_{yy}} \\ \mathrm{I_{zz}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 300 \end{Bmatrix} gm^2 \tag{4.43}$$

A TABELA 4.10 apresenta as frequências de oscilação para os três eixos da plataforma inferior, onde primeiramente são apresentadas as frequências da plataforma sem o corpo rígido, e posteriormente com o corpo rígido. Com as frequências de oscilação sem e com o corpo rígido, é possível fazer a estimativa do momento de inércia para os três eixos da plataforma por meio das equações (4.39), (4.40) e (4.41). Com isso, são apresentados na TABELA 4.10, as estimativas do momento de inércia do corpo rígido calculados a partir da subtração do momento de inércia da plataforma com e sem o corpo rígido.

TABELA 4.10 - MOMENTOS DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO NO PÊNDULO QUADRIFILAR.

	$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{Bmatrix} gm^2$	f_x f_y $[Hz]$ f_z	$I_{numerico}^{xx}$ $[gm^2]$	$I_{numerico}^{yy}$ $[gm^2]$	$I_{numerico}^{zz}$ $[gm^2]$
Sem corpo	-	0,4266 0,4266 0,9828	-	-	-
$m_{corpo} = 0{,}5\ kg$	$\begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 300 \end{Bmatrix}$	0,4160 0,4181 0,5901	24,97	265,91	307,36
$m_{corpo} = 1\ kg$	$\begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 300 \end{Bmatrix}$	0,4152 0,4167 0,6456	94,74	327,56	307,51
$m_{corpo} = 2\ kg$	$\begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 300 \end{Bmatrix}$	0,4138 0,4148 0,7444	241,58	469,18	307,58
$m_{corpo} = 5\ kg$	$\begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 300 \end{Bmatrix}$	0,4118 0,4125 0,9828	672,45	910,96	307,77

Fonte: elaborado pelo autor.

Os momentos de inércia I_{xx} e I_{yy} apresentaram grandes variações com o incremento na massa do corpo rígido, indicando uma instabilidade na metodologia da determinação do momento de inércia nestes eixos. Em uma nova configuração, o corpo rígido é rotacionado em 90 graus em torno do seu eixo y, apresentando o momento de inércia por meio da equação (4.44).

$$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 100 \\ 50 \end{Bmatrix} gm^2 \tag{4.44}$$

A TABELA 4.11 apresenta as frequências de oscilação para os três eixos da plataforma inferior, sem o corpo rígido, que são iguais as apresentadas na TABELA 4.10 e, posteriormente com o corpo rígido. Com as frequências de oscilação, é possível fazer a estimativa do momento de inércia para os três eixos da plataforma por meio das equações (4.39), (4.40) e (4.41). Com isso, são apresentados na TABELA 4.11, as estimativas do momento de inércia do corpo rígido calculados a partir da subtração do momento de inércia da plataforma com e sem o corpo rígido.

TABELA 4.11 - MOMENTO DE INÉRCIA DE UM CORPO RÍGIDO NO PÊNDULO QUADRIFILAR.

	$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{Bmatrix}$ gm^2	f_x f_y $[Hz]$ f_z	$I_{xx}^{numerico}$ $[gm^2]$	$I_{yy}^{numerico}$ $[gm^2]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$
Sem corpo	-	0,4266 0,4266 0,9828	-	-	-
$m_{corpo} = 0{,}5\ kg$	$\begin{Bmatrix} 300 \\ 100 \\ 50 \end{Bmatrix}$	0,4164 0,4095 0,9255	271,80	254,63	50,68
$m_{corpo} = 1\ kg$	$\begin{Bmatrix} 300 \\ 100 \\ 50 \end{Bmatrix}$	0,4155 0,4095 1,0110	343,42	317,37	51,28
$m_{corpo} = 2\ kg$	$\begin{Bmatrix} 300 \\ 100 \\ 50 \end{Bmatrix}$	0,4138 0,4095 1,1656	486,66	469,18	51,35
$m_{corpo} = 5\ kg$	$\begin{Bmatrix} 300 \\ 100 \\ 50 \end{Bmatrix}$	0,4118 0,4094 1,5389	923,61	910,96	51,42

Fonte: elaborado pelo autor.

O Gráfico 4.5 apresenta o erro relativo da estimativa numérica do momento de inércia com o modelo analítico para os eixos x, y e z do corpo rígido.

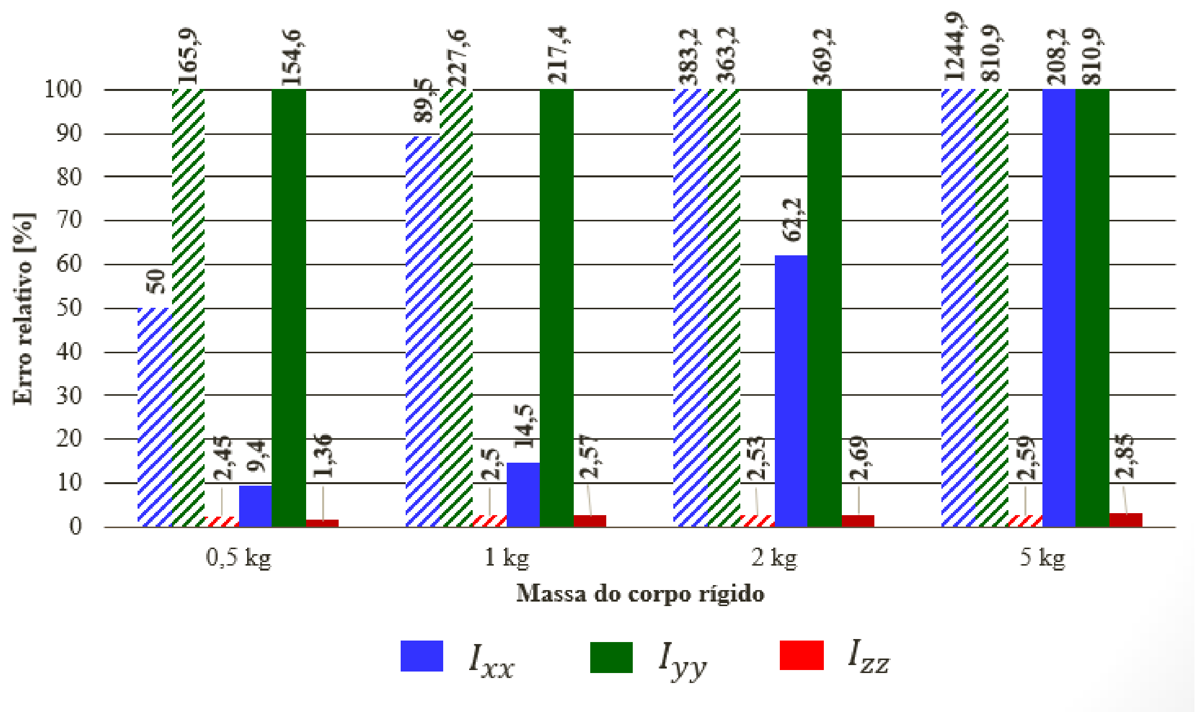


Gráfico 4.5 - Erro relativo da estimativa do momento de inércia do corpo rigido no eixo x (em azul), eixo y (em verde) e eixo z (em vermelho) da plataforma quadrilateral.

Fonte: elaborado pelo autor.

A primeira configuração do corpo rígido, caracterizada anteriormente na TABELA 4.10 é representada pelas barras listradas, enquanto a segunda configuração do corpo rígido, caracterizada na TABELA 4.11, é representada pelas barras sólidas. O erro relativo do eixo x é apresentado pela barra em azul, do eixo y pela barra em verde e do eixo z pela barra em vermelho. Como observado, o erro relativo da estimativa do momento de inércia no eixo x e y apresenta altos valores, em muitos casos acima de 100%, para todos os casos. Enquanto isso, o erro relativo da estimativa do momento de inércia do eixo z do corpo rígido apresenta resultados abaixo de 3% para todos os casos estudados.

4.3.1 Considerações dos momentos de inércia obtidos nos eixos x e y

Os momentos de inércia para os eixos x e y da plataforma inferior do pêndulo quadrifilar, obtidas nas equações (4.39) e (4.40), são reescritas em função das seis variáveis de entrada da determinação do momento de inércia do corpo rígido.

$$\mathrm{I_{xx}} = f(m, g, R_1, R_2, f_y, h) \tag{4.45}$$

$$\mathrm{I_{yy}} = f(m, g, R_1, R_2, f_x, h) \tag{4.46}$$

Deseja-se obter o comportamento do momento de inércia em função da frequência de oscilação do pêndulo quadrifilar. Para isso, foram mantidas constante as cinco variáveis (m, g, R_1, R_2, h) e apenas a variável de entrada a frequência foi alterada. Um incremento de 0,0001 Hz foi aplicado na variável de entrada “frequência” com o objetivo de simular um erro de medição da frequência. Com isso, foi possível observar o comportamento do momento de inércia e calcular o erro relativo causado pelo incremento do erro na frequência, representado no Gráfico 4.6.

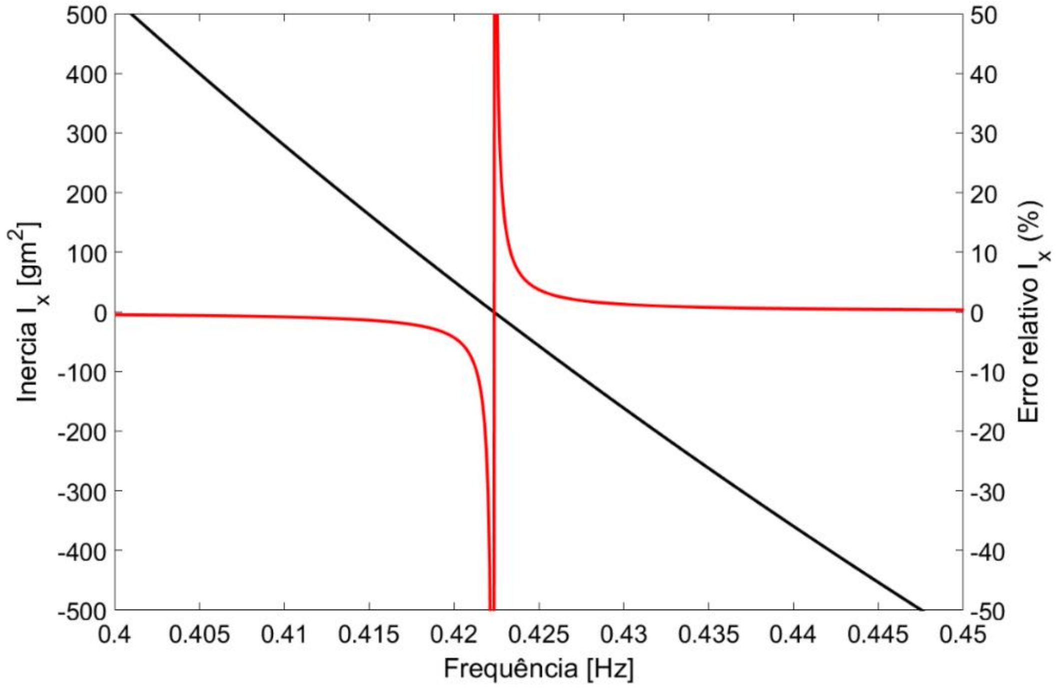


Gráfico 4.6 - Momento de inércia I_{xx} (linha preta) e erro relativo (linha vermelha) em função da frequência.

Fonte: elaborado pelo autor.

Como observado no Gráfico 4.6, a equação possui uma faixa, entre $0{,}420$ e $0{,}425$, onde o erro relativo é maior que 20% para cada incremente de $0{,}0001\ Hz$ na frequência. Esta região compreende exatamente a faixa dos valores obtidos na seção 4.3, justificando a instabilidade do modelo numérico em obter o momento de inércia do corpo rígido no eixo x e y da plataforma inferior.

A função possui um valor limite que compreende a região onde há uma inversão de sinal da função. Para as frequências acima de $0{,}422$ Hz, o valor da inércia estimado pela equação é abaixo de zero. Consequentemente, a função, para esta configuração de pêndulo quadrifilar, só é válida para frequências abaixo de $0{,}422\ Hz$. Diferentes configurações do pêndulo quadrifilar, ou seja, diferentes valores das variáveis de entrada da função, terão regiões críticas diversas, podendo desta forma não ser possível determinar com exatidão o momento de inércia nos eixos x e y da plataforma inferior.

4.3.2 Estudo sobre a inclinação dos cabos

Para finalizar a análise do pêndulo quadrifilar numérico, foi feita uma comparação entre duas configurações do pêndulo quadrifilar: a primeira com os cabos inclinados $R_1 \neq R_2$, e segunda com os cabos paralelos $R_1 = R_2$. A TABELA 4.12 apresenta o resultado obtido para o momento de inércia I_{zz} de corpos rígidos distintos, ou seja, com momentos de inércia e massas diferentes.

TABELA 4.12 - MOMENTO DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO NO PÊNDULO QUADRIFILAR COM CABOS PARALELOS I_{zz}^{RETO} E PÊNDULO COM CABOS INCLINADOS $I_{zz}^{INCLINADO}$

	$I_{zz}\ [gm^2]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{reto}\ [gm^2]$	$I_{zz}^{inclinado}\ [gm^2]$
Sem corpo	-	0,7051	-	-
$m_{corpo} = 0{,}5\ kg$	50	0,6628	49,85	50,68
	300	0,4233	298,68	307,36
$m_{corpo} = 1{,}0\ kg$	50	0,7251	49,93	51,28
	300	0,4631	298,86	307,51
$m_{corpo} = 2{,}0\ kg$	50	0,8359	50,02	51,35
	300	0,5338	299,19	307,58
$m_{corpo} = 5{,}0\ kg$	50	1,1033	50,20	51,42
	300	0,7046	299,57	307,77

Fonte: elaborado pelo autor.

O Gráfico 4.7, apresenta o erro relativo do momento de inércia dos dois corpos rígidos obtido pelo modelo numérico e o valor analítico para os dois casos de pêndulo quadrifilar, sendo o primeiro com raios de rotação iguais e o segundo com raios de rotação diferentes.

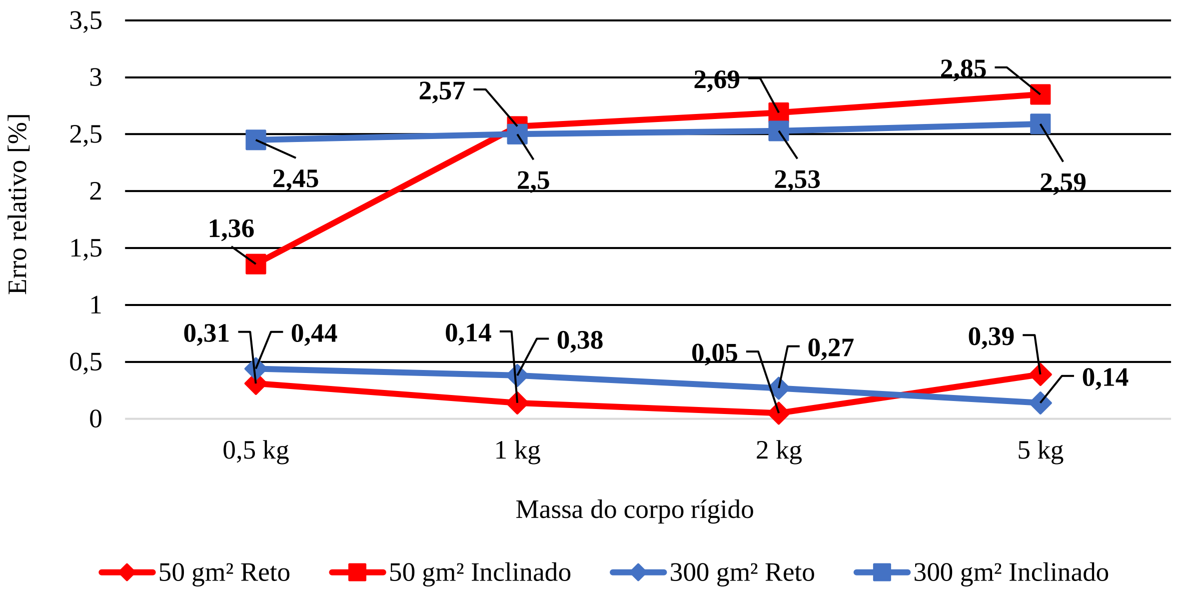


Gráfico 4.7 - Erro relativo do momento de inércia do corpo rigido para o caso do pêndulo quadrifilar com cabos paralelos (marcação quadrada) e para o caso do pêndulo quadrifilar com cabos inclinados (marcação losango).

Fonte: elaborado pelo autor.

É observado que o modelo numérico do pêndulo quadrifilar com cabos paralelos apresenta resultados mais próximos ao resultado analítico. Com isso, esta configuração também pode ser utilizada na montagem do pêndulo quadrifilar experimental.

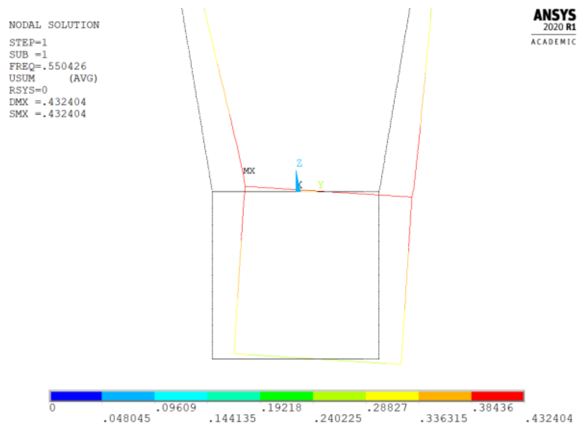
4.3.2 Pêndulo quadrifilar utilizando gaiola

O modelo experimental considera a utilização de uma base na forma de uma gaiola, onde o corpo rígido de inércia desconhecida é posicionado. A gaiola consiste em uma estrutura cúbica com arestas de meio metro de comprimento. A estrutura da gaiola consiste em quatorze vigas quadradas com $20\ mm$ de largura e $0{,}5\ m$ de comprimento. O raio de rotação da gaiola é de $0{,}353\ m$, e o raio de rotação da base superior é de $0{,}707\ m$, sendo a massa da gaiola de $7.560\ g$. Utilizando um software CAD, é estimado o tensor de inércia para a gaiola com estas dimensões.

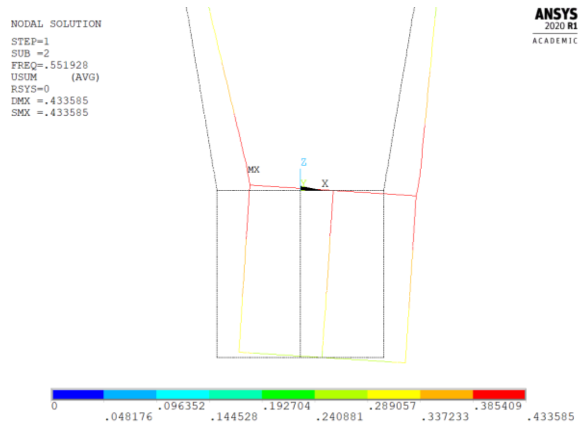
$$\begin{bmatrix} 672{,}70 & 0 & 0 \\ 0 & 631{,}96 & 0 \\ 0 & 0 & 671{,}71 \end{bmatrix} gm^2 \tag{4.47}$$

Um modelo numérico de pêndulo quadrifilar utilizando uma gaiola com estas dimensões físicas é construído utilizando o software de elementos finitos Ansys®. Tanto a gaiola quanto os cabos foram modelados utilizando BEAM188, sendo a densidade do material utilizado na gaiola de $\rho = 2700\ kg/m^3$, enquanto os cabos foram modelados com densidade $\rho = 7870\ kg/m^3$ e diâmetro de $0{,}4\ mm$. Após realizada a solução modal do sistema, foi possível identificar o comportamento dinâmico idêntico ao do pêndulo quadrifilar, onde são identificados os três primeiros modos de vibração do sistema que são correspondentes a translação no eixo y (Figura 4.6a) e eixo x (Figura 4.6b) e rotacional em torno do eixo z (Figura 4.6c) da gaiola. No modelo numérico, a força de reação nos cabos no eixo z é de $73{,}996\ N$, o que coincide com o valor obtido no software CAD.

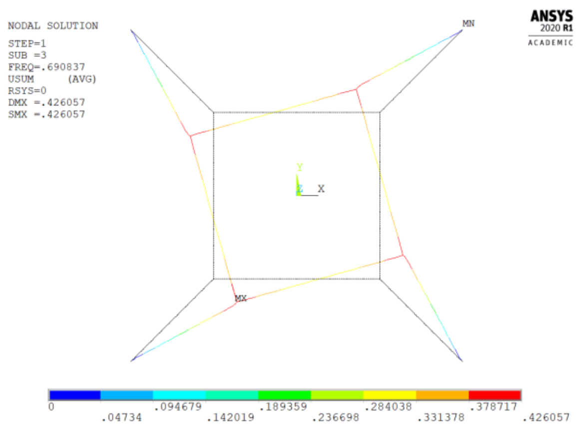
Utilizando a equação (3.39) para calcular o momento de inércia do modelo, obtêm-se o valor de $655{,}36\ gm^2$, que corresponde a um erro relativo de $2{,}43\%$ com relação ao modelo analítico da gaiola.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6 - O primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos de vibração da gaiola com cabos inclinados.
Fonte: elaborado pelo autor.

O objetivo do modelo numérico com gaiola é determinar o momento de inércia de um corpo rígido. Para isso, é adicionado um corpo rígido utilizando o elemento BEAM188 no interior da gaiola. Dois corpos rígidos com o mesmo perfil quadrado de $0{,}1\ m$ são utilizados, porém, com seus comprimentos distintos de $0{,}2\ m$ e $0{,}4\ m$. A massa deste corpo rígido é variada entre $1\ kg$ e $10\ kg$, conforme os limites para a classificação de um nanosatélite e, desta forma, é obtido o momento de inércia por meio do modelo numérico, conforme apresenta a TABELA 4.13. O Gráfico 4.8 apresenta os erros relativos do momento de inércia estimado utilizando o modelo numérico do pêndulo quadrifilar para cada um dos corpos rígidos.

TABELA 4.13 - MOMENTO DE INÉRCIA DE UM CORPO RÍGIDO NO PÊNDULO QUADRIFILAR UTILIZANDO GAIOLA.

	Corpo 1 $(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}2\ m)$			Corpo 2 $(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}4\ m)$		
	$I_{zz}^{analitico}$ $[gm^2]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$	$I_{zz}^{analitico}$ $[gm^2]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$
Gaiola	-	0,70854	-	-	0,70854	-
$m_{corpo} = 1\ kg$	4,1667	0,74738	6,426	14,167	0,74220	15,854
$m_{corpo} = 2\ kg$	8,333	0,78383	12,483	28,333	0,77314	31,393
$m_{corpo} = 3\ kg$	12,500	0,81822	18,251	42,500	0,80173	46,716
$m_{corpo} = 5\ kg$	20,833	0,88182	29,209	70,833	0,85309	76,870
$m_{corpo} = 7\ kg$	29,166	0,93972	39,609	99,166	0,89812	106,55
$m_{corpo} = 10\ kg$	41,667	1,01814	54,490	141,66	0,95645	150,52

Fonte: elaborado pelo autor.

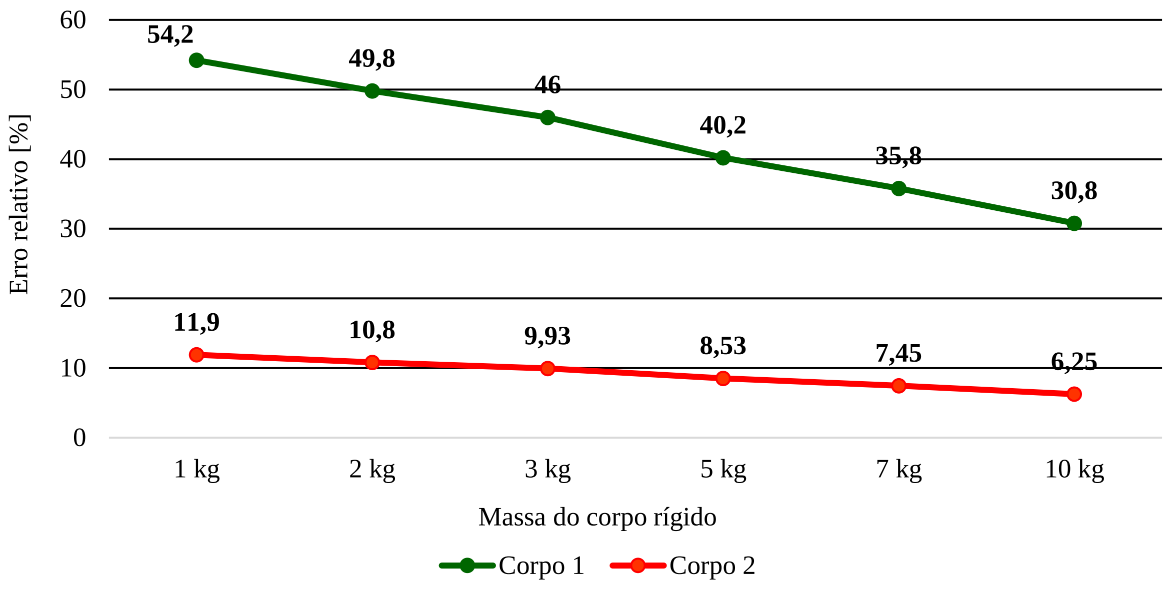


Gráfico 4.8 - Erro relativo dos corpos rígidos utilizando o pêndulo quadrifilar modelo gaiola.

Fonte: elaborado pelo autor.

No caso do primeiro corpo rígido, com dimensão $0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}2\ m$, é observado uma discrepância de 54% para o valor analítico no ensaio com massa de $1kg$. À medida que é adicionada massa ao corpo rígido, a discrepância é reduzida até o valor de $30{,}8\%$ para um corpo rígido de $10kg$. No caso do segundo corpo rígido, com dimensão $0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}4\ m$, é obtido uma discrepância de $11{,}9\%$ para uma massa de $1kg$, que decresce à medida que é adicionado massa ao corpo rígido, conforme observado também no caso do primeiro corpo rígido, chegando ao valor de $6{,}25\%$ no caso de $10kg$.

4.3.2 Influência das características do corpo rígido no erro numérico

Como observado na seção anterior, a massa e momento de inércia no eixo z apresentam um impacto na discrepância do momento de inércia no modelo numérico e o modelo analítico. Desta forma, é feito um estudo número para determinar qual razão entre a massa do corpo rígido e da plataforma inferior e a razão entre o momento de inércia do corpo rígido e da plataforma inferior que produz as menores discrepâncias entre o modelo numérico e o modelo analítico. A massa do corpo rígido é variada respeitando uma razão que vai desde 1/10 da massa da plataforma até 10 vezes a massa da plataforma. Já para o momento de inércia do corpo rígido, este é variado utilizando uma razão que vai desde um centésimo do momento de inércia da plataforma até 10 vezes o seu momento de inércia. A massa e o momento de inércia da plataforma inferior, conforme modelo numérico descrito, são $7{,}566\,kg$ e $655{,}36\,gm^2$, respectivamente.

$$r_{massa} = m_{corpo}/m_{plataforma} \tag{4.48}$$

$$r_{inercia} = I_{corpo}/I_{plataforma} \tag{4.49}$$

Um gráfico de contorno (Gráfico 4.9) é gerado utilizando a matriz resultante das iterações entre a razão de massa e inércia do corpo rígido e da plataforma inferior. Assim como os eixos, a legenda em cor também está na escala logarítmica, onde a região que compreende abaixo do valor 2 representa o erro relativo abaixo de 7%.

Como observado, um corpo rígido abaixo de um décimo do momento de inércia da plataforma apresenta um alto erro relativo na determinação do seu momento de inércia numérico para todas as razões de massa. Já para os casos em que o momento de inércia do corpo está acima de um décimo do momento de inércia da plataforma, foi possível determinar o momento de inércia do corpo rígido com erro relativo abaixo de 7% para todas as razões de massa. As regiões abaixo do espectro verde, nas cores verde e azul, representam as regiões onde o erro relativo da determinação do momento de inércia numérico é abaixo de 2%. É possível observar uma região em azul onde o erro relativo é igual a zero, portanto esta é a região ideal de operação do pêndulo quadrifilar. Esta região pode ser simplificada a uma regressão onde a massa e momento de inércia do corpo rígido aumentam linearmente entre $7/100$ e 5 vezes a massa e momento de inércia da plataforma inferior.

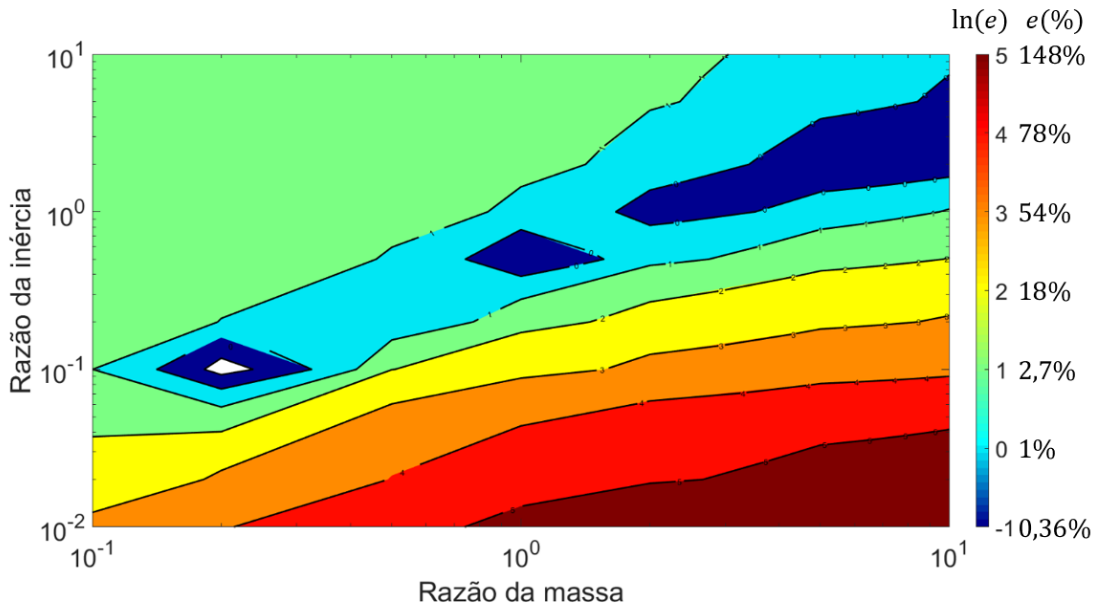
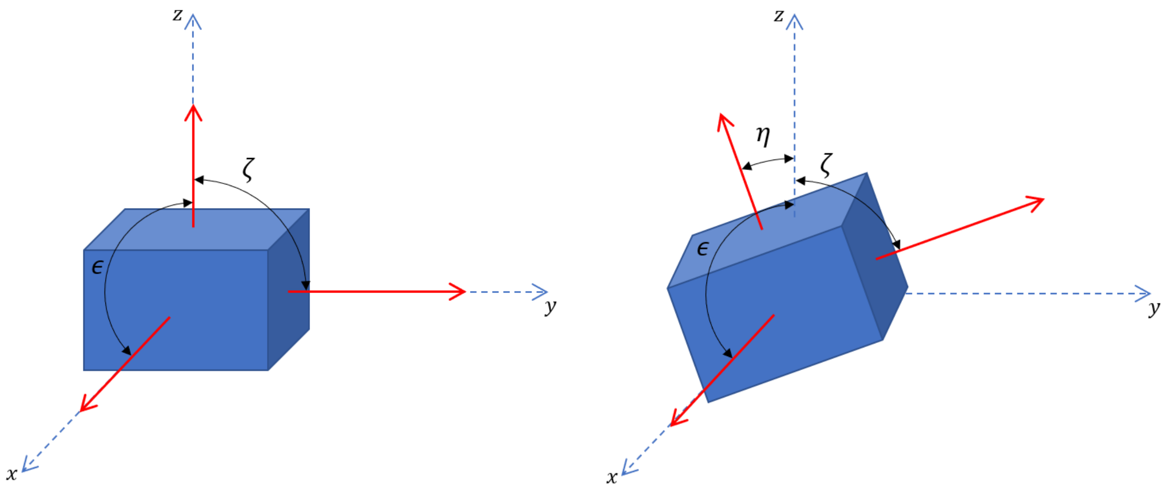


Gráfico 4.9 - Isolinhas do logaritmo do erro relativo em função das razões da massa e inércia

Fonte: elaborado pelo autor.

4.3.5 Estudo do tensor de inércia

Tang (2011) propõe uma metodologia para obter o tensor de inércia de um corpo rígido. Esta metodologia consiste na medição do momento de inércia em torno do eixo z da plataforma inferior enquanto, o corpo rígido está rotacionado a um ângulo conhecido em relação ao seu centro de massa, conforme Figura 4.7.



(a) (b)

Figura 4.7 - Rotação do eixo cartesiano do corpo rígido (vermelho) em torno do eixo cartesiano da plataforma inferior (azul).
Fonte: elaborado pelo autor.

Utilizando a pseudoinversa da matriz de rotação do corpo rígido, é possível estimar o tensor de inércia do corpo rígido, com os seus momentos e produtos de inércia. Foi modelado um corpo rígido com as mesmas dimensões descritas acima utilizando o elemento SOLID185 no software Ansys®. O corpo rígido possui massa de $10{,}8\,kg$ e dimensão de $0{,}3 \times 0{,}4 \times 0{,}45\,m$ para comprimento, largura e altura, respectivamente. Nestas características, o tensor de inércia pode ser estimado analiticamente utilizando as equações para um paralelepípedo.

$$\begin{bmatrix} 326{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 263{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 225{,}00 \end{bmatrix} gm^2 \tag{4.50}$$

Este corpo foi rotacionado em doze posicionamentos distintos e a frequência de oscilação em torno do eixo z da gaiola é extraída, sendo possível obter o momento de inércia para cada posicionamento. De acordo com a Figura 4.7, o corpo é rotacionado em torno de um dos eixos, mantendo dessa forma um dos eixos do corpo rígido paralelo ao eixo x da plataforma inferior enquanto os outros dois eixos do corpo rígido variam o seu ângulo com relação a plataforma inferior. A equação (4.51) representa a rotação do corpo rígido em torno do seu eixo x, que é coincidente com o eixo x da plataforma inferior, enquanto a equação (4.52) é a rotação do corpo rígido em torno do seu eixo y, que é coincidente com o eixo x da plataforma inferior, e por fim a equação (4.53) é a rotação em torno do eixo z do corpo rígido, que é coincidente ao eixo x da plataforma inferior.

$$\mathrm{X\,Y\,Z} \rightarrow \mathrm{X}\,y'z' \tag{4.51}$$

$$\mathrm{X\,Y\,Z} \rightarrow x'Y\,z' \tag{4.52}$$

$$\mathrm{X\,Y\,Z} \rightarrow x'y'Z \tag{4.53}$$

Para cada uma das rotações, é feita a aferição da frequência de oscilação do conjunto plataforma inferior com corpo rígido rotacionado e, com isso, estimado o momento de inércia do conjunto, conforme apresentados na TABELA 4.14.

TABELA 4.14 - MOMENTO DE INÉRCIA DE UM CORPO RÍGIDO ROTACIONADO NO PÊNDULO QUADRIFILAR.

$X\,Y\,Z \rightarrow x'Y\,z'$			$X\,Y\,Z \rightarrow X\,y'z'$			$X\,Y\,Z \rightarrow x'\,y'Z$		
η/ζ $[^o]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$	η/ζ $[^o]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$	η/ζ $[^o]$	$f_z[Hz]$	$I_{zz}^{numerico}$ $[gm^2]$
0/90	0,92179	231,73	0/90	0,90314	268,27	0/90	0,87268	329,04
15/75	0,91881	238,20	15/75	0,90480	265,76	15/75	0,87586	322,50
30/60	0,91055	256,09	30/60	0,90943	258,95	30/60	0,88477	304,56
45/45	0,89967	280,25	45/45	0,91582	249,64	45/45	0,89732	280,28
60/30	0,88917	304,60	60/30	0,92230	240,45	60/30	0,91040	255,98

Fonte: elaborado pelo autor.

O ângulo ϵ, o ângulo ζ e o ângulo η correspondem o eixo principal do corpo rígido coincidentemente respectivamente com o eixo x, eixo y e eixo z da plataforma inferior. Foi gerada uma rotina no Matlab utilizando a metodologia de Tang e o tensor de inércia sendo estimado, conforme (4.54).

$$\begin{bmatrix} 333,86 & 24,300 & -2,6633 \\ 24,300 & 272,94 & 12,853 \\ -2,6633 & 12,853 & 223,92 \end{bmatrix} gm^2 \tag{4.54}$$

Para os momentos de inércia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, obteve-se um erro relativo de $2{,}33\%, 3{,}68\%$ e $0{,}48\%$ respectivamente. Estes valores de erro relativo foram obtidos utilizando quinze medições diferentes do momento de inércia do corpo rígido.

Com isso, foi feito um estudo da metodologia de Tang para observar a quantidade de medições necessárias para se obter uma boa estimativa do tensor de inércia do corpo rígido. As medições foram ordenadas de acordo com o ângulo de rotação do corpo rígido (I_n), onde as medições $n = 1,4,7,10,13$ representam a rotação $x'\,Y\,z'$, $n = 2,5,8,12,14$ representam a rotação $X\,y'\,z'$, e $n = 3,6,9,12,15$ representam a rotação $x'\,y'\,Z$. A partir de cada medição realizada do momento de inércia, são estimados os momentos e produtos de inércia do corpo rígido, além do momento de inércia, sendo este calculado o seu erro relativo ao modelo em CAD, conforme demonstrado na Figura 4.8.

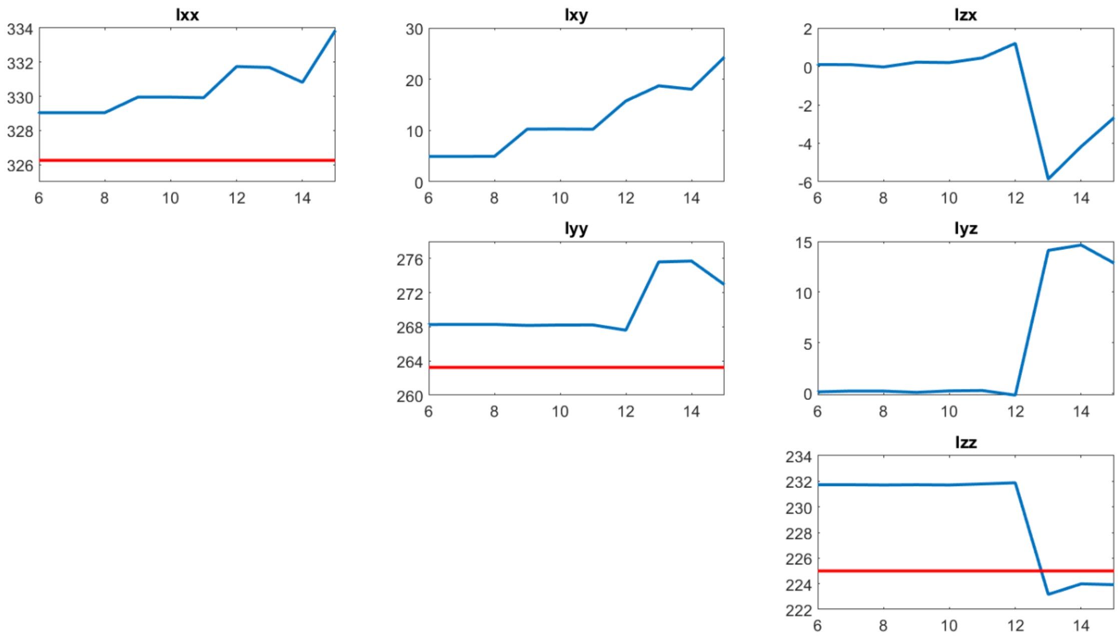


Figura 4.8 - Tensor de inércia do corpo rígido (curva azul) calculado numericamente e momento de inércia (curva vermelha) calculado pelo modelo CAD.
Fonte: elaborado pelo autor.

As medições são reunidas em grupos que possuem o mesmo ângulo de rotação η. A partir das medições realizadas para o mesmo ângulo η, é obtido o tensor de inércia pela metodologia de Tang, conforme apresenta a TABELA 4.15.

TABELA 4.15 - TENSOR DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO ROTACIONADO EM DIFERENTES ÂNGULOS.

$\boldsymbol{\eta}$	$\boldsymbol{I_{xx}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$ $\boldsymbol{\delta}$ (%)	$\boldsymbol{I_{yy}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$ $\boldsymbol{\delta}$(%)	$\boldsymbol{I_{zz}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$ $\boldsymbol{\delta}$(%)	$\boldsymbol{I_{xy}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$	$\boldsymbol{I_{yz}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$	$\boldsymbol{I_{zx}}$ $[\boldsymbol{gm^2}]$
0^o	-	-	-	-	-	-
15^o	329,04 0,86%	268,27 1,91%	231,73 2,99%	4,9384	0,1246	0,0971
30^o	329,95 1,13%	268,17 1,87%	231,73 2,99%	10,268	0,0736	0,2197
45^o	331,74 1,68%	267,61 1,66%	231,88 3,06%	15,762	−0,2026	1,1994
60^o	333,86 2,33%	272,94 3,68%	223,92 0,48%	24,300	12,853	−2,6633

δ = erro relativo do momento de inércia em relação ao valor analítico

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que para o ângulo $\eta \leq 45^o$, os valores estimados para os momentos de inércia, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, apresentam pouca variação no erro relativo ao valor analítico. Porém, quando $\eta = 60^o$ é adicionado na equação de Tang, os valores dos momentos de inércia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} e produto de inércia I_{yz}, apresentam uma grande variação no seu valor estimado.

4.3.6 Estudo de caso do Tang para pequenos ângulos

Conforme visto na seção anterior, o corpo rígido rotacionado para ângulos $n \geq 45^o$ apresenta um aumento do erro relativo da estimativa dos momentos de inércia. Um novo estudo de caso é realizado utilizando o mesmo corpo rígido, porém, uma nova série de rotações é utilizada, com um intervalo é de $n = 5^o$. Após a realização de cada rotação, é obtida a frequência de oscilação do eixo z da plataforma inferior e, por fim, é estimado o tensor de inércia do corpo rígido (Figura 4.9).

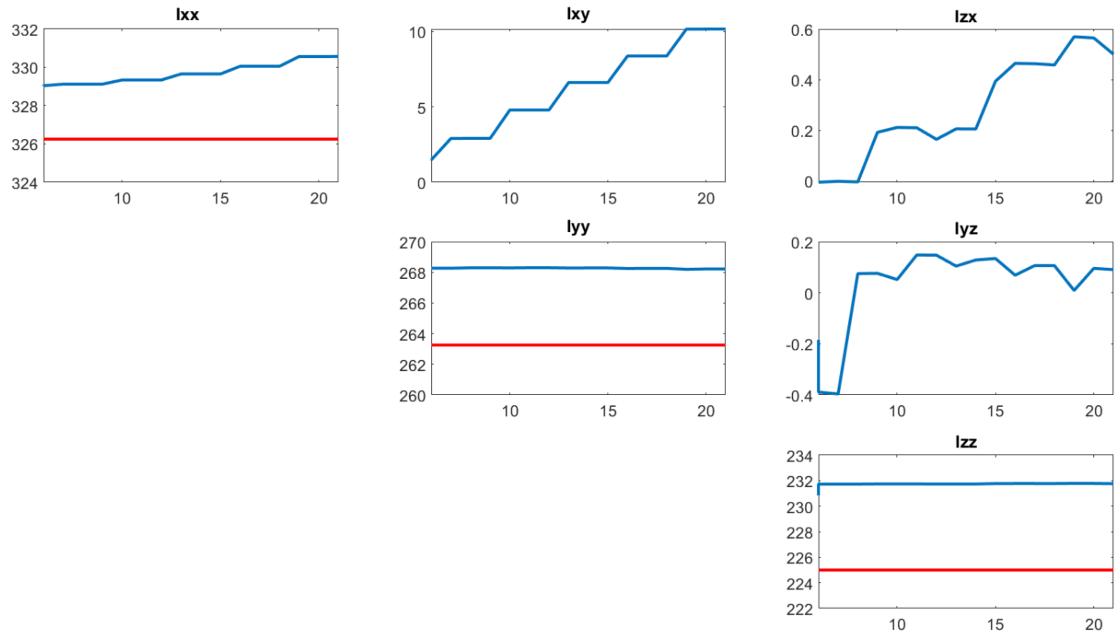


Figura 4.9 - Tensor de inércia do corpo rígido (curva azul) calculado numericamente após pequenos ângulos de rotação e momento de inércia (curva vermelha) calculado pelo modelo CAD.
Fonte: elaborado pelo autor.

Assim como foi feito na seção anterior, as medições são reunidas em ordem ascendente de grupos que possuem o mesmo ângulo de rotação η e, desta forma é obtido o tensor de inércia pela metodologia de Tang, representada na TABELA 4.16. É observado que não houve uma grande variação do erro relativo dos momentos de inércia em relação ao modelo CAD. Os produtos de inércia obtiveram o mesmo comportamento apresentado na TABELA 4.15.

TABELA 4.16 - TENSOR DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO ROTACIONADO EM PEQUENOS ÂNGULOS NO PÊNDULO QUADRIFILAR.

η	$I_{xx}\ [gm^2]$	$I_{yy}\ [gm^2]$	$I_{zz}\ [gm^2]$	$I_{xy}\ [gm^2]$	$I_{yz}\ [gm^2]$	$I_{zx}\ [gm^2]$
5^o	329,04 0,86%	268,27 1,91%	231,73 2,99%	1,4880	$-0{,}3891$	$-0{,}0047$
10^o	329,12 0,88%	268,30 1,92%	231,74 3,00%	2,9075	0,0761	0,1924
15^o	329,34 0,95%	268,30 1,92%	231,74 2,99%	4,7929	0,1474	0,1644
20^o	329,65 1,04%	268,29 1,91%	231,77 3,01%	6,6149	0,1342	0,3939
25^o	330,06 1,17%	268,26 1,90%	231,77 3,01%	8,3730	0,1062	0,4582
30^o	330,57 1,32%	268,22 1,89%	231,76 3,01%	10,161	0,0908	0,5006

$\delta =$erro relativo do momento de inércia em relação ao valor analítico

Fonte: elaborado pelo autor.

4.4 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou o estudo numérico realizado no pêndulo multifilar. O primeiro caso consistiu na modelagem de um pêndulo simples. Foram apresentados dois elementos utilizados para modelagem de cabos: uma com elemento barra LINK180 e outra com elemento viga BEAM188. Apesar do elemento barra ser o mais aconselhável para modelagem dos cabos para diâmetros abaixo de $0{,}5\ mm$, a modelagem por elemento viga BEAM188 possui resultados razoáveis quando comparado à modelagem barra. A modelagem numérica do pêndulo trifilar foi implementada e estudos de caso foram aplicados realizando a mudança das variáveis do pêndulo trifilar com o objetivo de obter convergência dos resultados do momento de inércia da plataforma inferior.

Resultados satisfatórios foram obtidos para a determinação do momento de inércia de corpos rígidos quando houve a diminuição do diâmetro dos cabos e o aumento da massa da plataforma inferior. O modelo numérico é exportado para o pêndulo quadrifilar, onde foi possível determinar o momento de inércia de corpos rígidos. Resultados satisfatórios foram obtidos do momento I_{zz}, coincidentemente com o eixo z do pêndulo, porém, para os momentos I_{xx} e I_{yy}, quando o eixo z está alinhado ao eixo vertical da plataforma, houve grande variação, desta forma sendo difícil de obter uma correta medição da frequência de oscilação nos eixos x e y. Um último estudo foi realizado comparando a acurácia da determinação do momento de inércia de corpo rígido entre o pêndulo quadrifilar com cabos inclinados e cabos paralelos. Os resultados obtidos com o pêndulo quadrifilar de cabos paralelos foram mais próximos ao modelo analítico.

Uma plataforma inferior tipo gaiola foi simulada no software Ansys® e obteve-se os três modos de vibração correspondentes as translações no eixo x e y e rotação no eixo z. O momento de inércia calculado a partir do modelo numérico possui uma discrepância de 2,43% relativa ao modelo CAD. A simulação de dois corpos rígidos de dimensões distintas foi realizada no interior desta gaiola, sendo observado o erro relativo da determinação do seu momento de inércia. Observou-se que o corpo rígido de menor dimensão $(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}2\ m)$, e consequentemente menor momento de inércia, apresentou erro relativo na estimativa do momento de inércia entre 30 e 50%. Já o corpo com maior dimensão $(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}4\ m)$, e consequentemente maior momento de inércia, apresentou um erro relativo abaixo de 10%.

Observado este comportamento com os dois corpos rígidos, foi realizado um estudo sobre a influência da massa e momento de inércia do corpo rígido em relação a massa e momento de inércia da plataforma inferior possui na determinação do momento de inércia deste corpo rígido. Foi observado que existe uma região ótima de operação do pêndulo quadrifilar para determinar o momento de inércia do corpo rígido onde o erro relativo numérico é menor do que 2%. Esta região corresponde a uma região quase linear onde a razão da massa do corpo rígido e plataforma e a razão do momento de inércia possui valores iguais.

Por último, foi feito um estudo da metodologia de Tang para determinação do tensor de inércia de um corpo rígido. Foi observado que a partir de seis medições distintas, realizadas com um ângulo de rotação $n \leq 30^o$, do momento de inércia é possível estimar o tensor de inércia do corpo rígido. Após as medições realizadas com o ângulo de rotação $n \geq 45^o$, o produto de inércia apresenta uma grande variação na sua estimativa.

Comparando os dados obtidos para a estimativa do tensor de inércia para pequenos ângulos, descrito na TABELA 4.16 e grandes ângulos, na TABELA 4.15, observa-se que os valores dos componentes do tensor de inércia para os ângulos $\eta = 15^o$ e $\eta = 30^o$ são idênticos, qualificando as metodologias de rotação do corpo rígido nos dois modelos numéricos. Portanto, pode-se deduzir que ou o modelo numérico ou a metodologia de Tang para ângulos de rotação $n \geq 45^o$ acrescenta um erro na estimativa do tensor de inércia do corpo rígido.

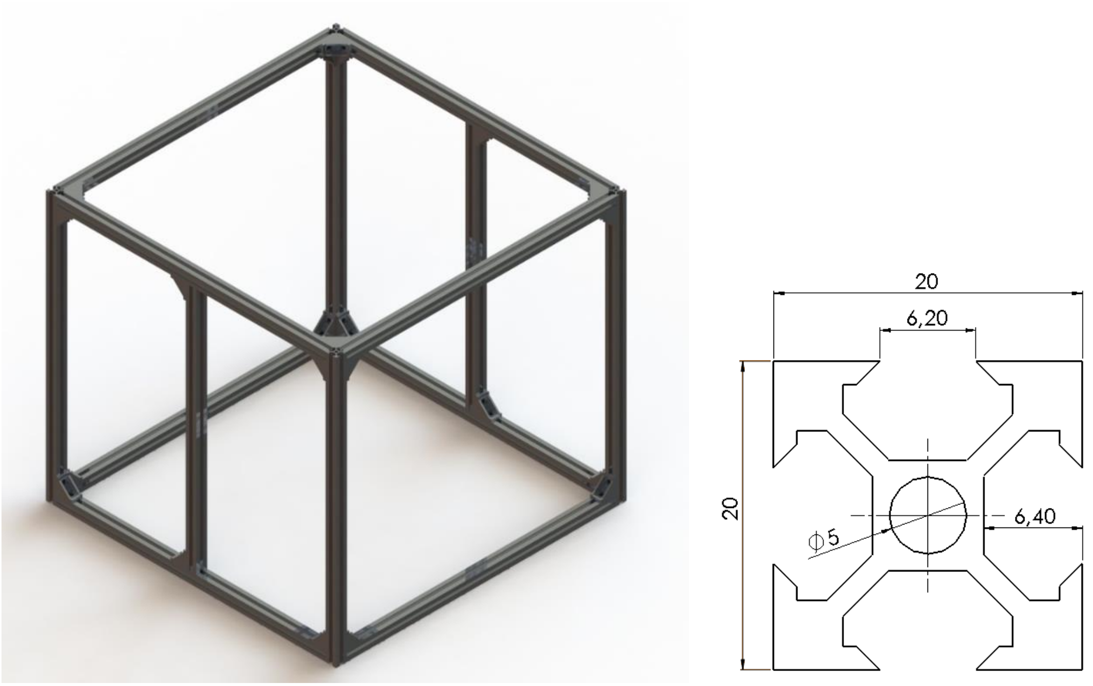
5 ENSAIO EXPERIMENTAL

A partir da compreensão do comportamento dinâmico do pêndulo quadrifilar por meio dos ensaios numéricos, foi realizado o ensaio experimental. Constrói-se uma bancada experimental para a determinação do momento de inércia de corpos rígidos utilizando-se a técnica do pêndulo quadrifilar. Este capítulo apresenta a proposta da bancada experimental, o dimensionamento e os materiais utilizados na sua construção. Apresenta-se a instrumentação utilizada para mensurar com eficácia a frequência de oscilação da bancada, a fim de aplicar a metodologia de aferição do momento de inércia no pêndulo quadrifilar.

5.1 APARATO EXPERIMENTAL

A bancada é constituída por uma base inferior, sendo quatro cabos de aço e quatro suportes presos ao teto. São utilizados quatro cabos de aço de 2 milímetros de diâmetro, cada um com 2,40 metros de comprimento que fazem a ligação entre a base inferior e a base superior. Na extremidade de cada lado do cabo é feito uma volta no cabo utilizando o apertador de cabo de aço, pois isto permite uma rápida conexão e desconexão da gaiola inferior dos suportes superiores.

A base inferior é constituída por uma gaiola contendo quatorze perfis de alumínio extrudado e uma base de madeira. Doze perfis de alumínio na Figura 5.1b com 0,5 metro de comprimento cada constituem a gaiola, enquanto outros dois perfis de alumínio com 0,4 metro de comprimento cada são utilizados verticalmente ao centro de dois dos lados da gaiola (Figura 5.1). Todos os perfis de alumínio são projetados, fabricados e comercializados pela empresa TDTEC®. Os perfis são conectados por cantoneiras e parafusos estranguladores, para que a gaiola seja de fácil processo de montagem, desmontagem e reparos, caso seja necessário. A gaiola nesta configuração possui uma massa de $2{,}87\ kg$. Os cabos de aço são conectados a gaiola por meio de quatro ganchos que estão localizados nos quatro cantos da parte superior da gaiola.

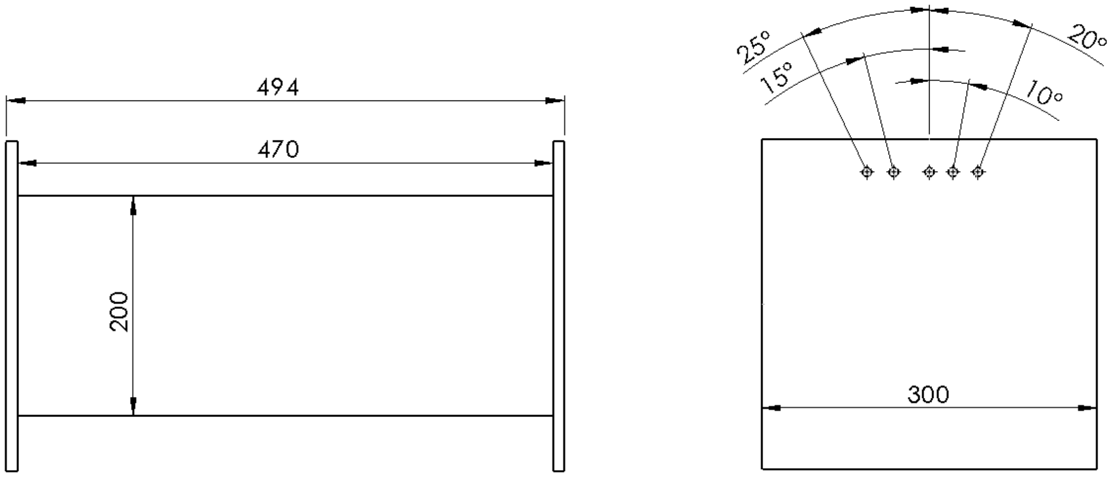


(a) (b)

Figura 5.1 - Rendenização da gaiola em perfil extrudado de alumínio (a) e as dimensões da seção transversal (b), em milimetros.
Fonte: elaborado pelo autor.

A base de madeira consiste numa base retangular em madeira de $0{,}47 \times\ 0{,}2$ metro e 12 mm de espessura. Em suas duas extremidades, são conectadas duas placas quadradas de $0{,}3$ metro de lado e 12 mm de espessura. A base de madeira possui uma massa de $1{,}65$ kg. Com o objetivo de permitir a rotação da base de madeira, são feitas cinco perfurações nas placas quadradas laterais, onde a partir de cada uma das perfurações é possível obter ângulos de rotação $\theta = 10^o$ e $\theta = 17^o$ da base de madeira (Figura 5.2). A base de madeira é posicionada no centro da gaiola de alumínio, utilizando os dois trilhos de alumínio como guia que permite a sua rotação. O corpo rígido é inserido no centro da base retangular de madeira, onde é possível aferir a frequência de oscilação da base para diferentes configurações de ângulos do corpo rígido.

(a)



(b)

Figura 5.2 - Rendenização da base rotatória em madeira (a) e suas dimensões (b), em milímetros.
Fonte: elaborado pelo autor.

Ainda na gaiola, utiliza-se uma placa de madeira 600×600 milímetros com 12 mm de espessura, sendo fixada nas cantoneiras da base inferior da gaiola por meio de quatro parafusos e porcas. A placa de madeira possui massa de 2,59 kg. Nesta placa, são colocados os instrumentos utilizados na coleta de dados da bancada experimental. A Figura 5.3 apresenta a montagem final com todos os componentes da gaiola, finalizando a bancada experimental com uma massa de 7.725 gramas.

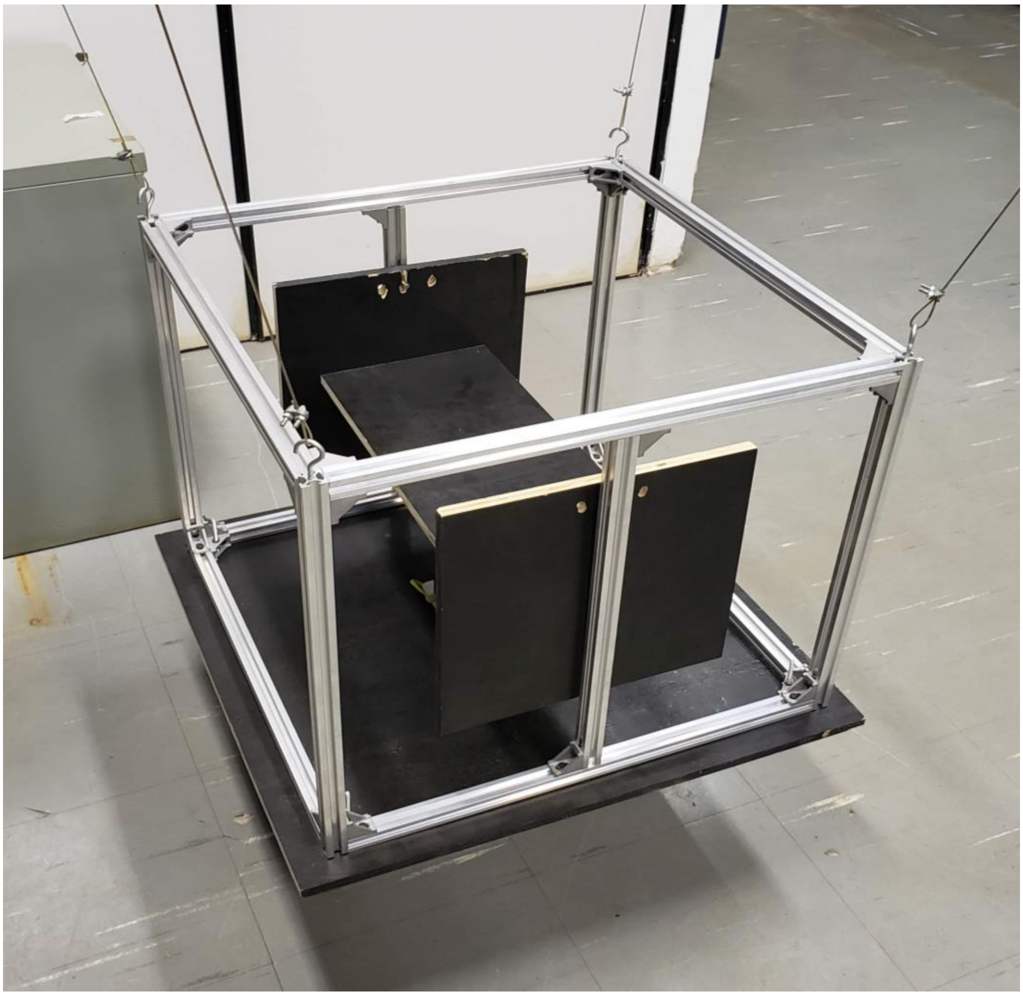
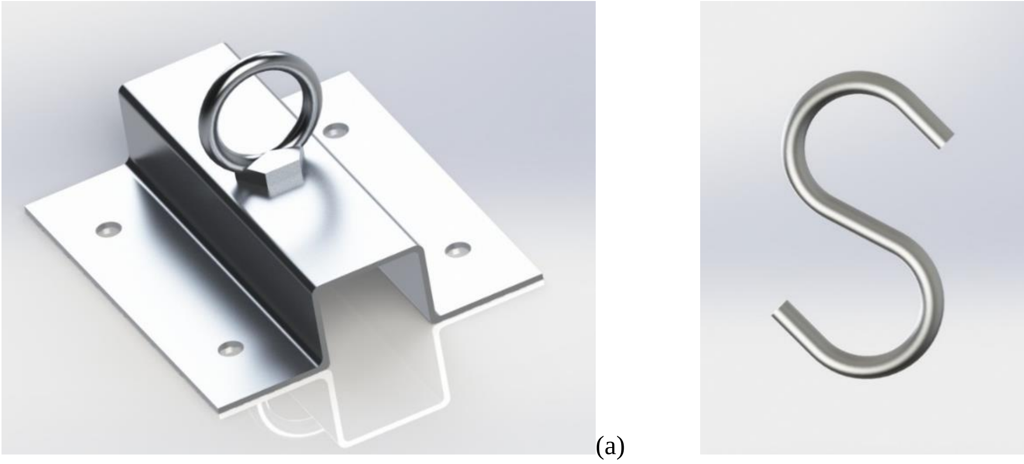


Figura 5.3 - Plataforma inferior composta pela gaiola, base giratória e placa de madeira.
Fonte: elaborado pelo autor.

Os cabos, conectados a gaiola, são conectados aos suportes superiores por meio de ganchos. Quatro ganchos e quatro suportes são utilizados conforme apresenta na (Figura 5.4). Cada um dos suportes é conectado ao teto a uma distância de 1,5 metro do outro, valor este medido do centro dos pontos de fixação do suporte, formando um quadrilátero com lados iguais a 1,5 metro. O suporte é formado de uma placa de aço de 2 milímetros de espessura, 130 mm de comprimento, 80 milímetros de largura e 110 milímetros de altura. O anel superior é livre para rotacionar em torno do seu eixo vertical, adicionado um grau de liberdade para o suporte superior.

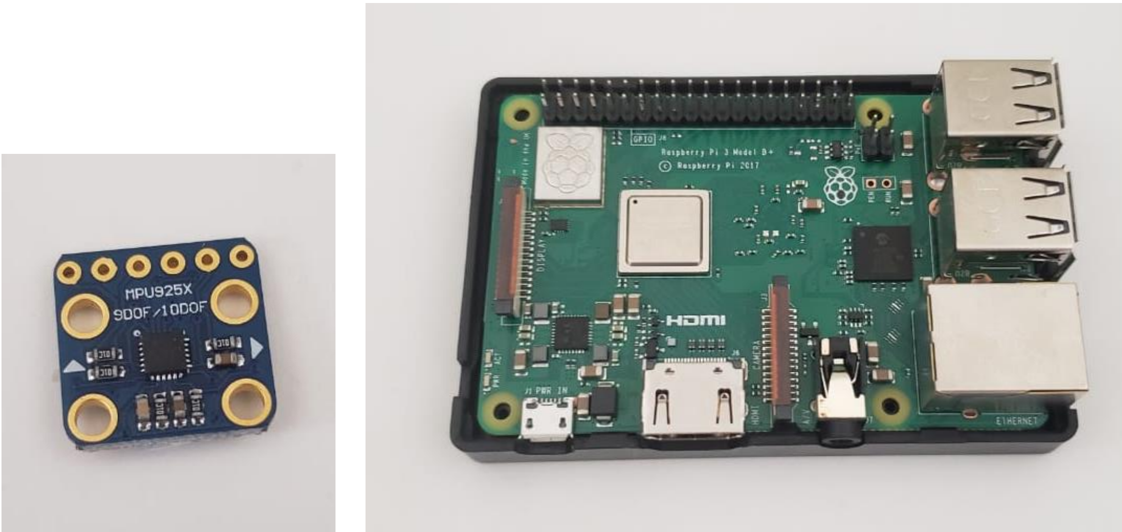


(a) (b)

Figura 5.4 - Suporte superior da bancada experimental (a) e o gancho (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

5.2 COLETA DE DADOS

O instrumento para realizar a coleta de dados nos ensaios experimentais foi um sensor tipo *Inertia Measurement Unit* (IMU) (Figura 5.5a) conectado a um Raspberry Pi 3B+ (Figura 5.5b), localizado na placa quadrada de madeira na parte debaixo da gaiola.



(a) (b)

Figura 5.5 - Fotografia do sensor IMU (a) e Raspberry Pi 3 B+ (b) utilizados nos ensaios.
Fonte: elaborado pelo autor.

Uma bateria de 10.000 mAh posicionada na plataforma inferior é utilizada para alimentação do sistema Raspberry Pi 3B+ e IMU. O conjunto do Raspberry Pi 3B+ e bateria de alimentação possui massa de 356,26 gramas. O instrumento de medição é acessado remotamente utilizando a rede wireless do laboratório de vibrações recebido de um computador por meio do software VNC Viewer.

O sensor IMU, do modelo MPU9250, possui um acelerômetro de três graus de liberdade, um giroscópio de três graus de liberdade e um magnetômetro de três graus de liberdade, totalizando 9 graus de liberdade.

Um algoritmo em Python é utilizado para efetuar a leitura de dados do giroscópio e acelerômetro da IMU na plataforma do Raspberry Pi. A análise dos sinais proveniente do giroscópio e do acelerômetro é efetuada utilizando o Matlab. A técnica da transformada rápida de Fourier (FFT) é aplicada para identificar as frequências dominantes dos sinais analisados, que são associados as frequências de oscilação da bancada experimental. A técnica de FFT consiste em converter um sinal originalmente no domínio do tempo ou espaço para uma representação no domínio da frequência e vice-versa.

Minda e Gilich (2020) apresentam alguns métodos de interpolação para estimar a frequência de uma transformada de Fourier. O algoritmo de Voglewede utiliza o ponto de maior amplitude $|A_k|$ do espectro da transformada de Fourier e dois pontos adjacentes para estimar o pico da interpolação parabólica p (Figura 5.6).

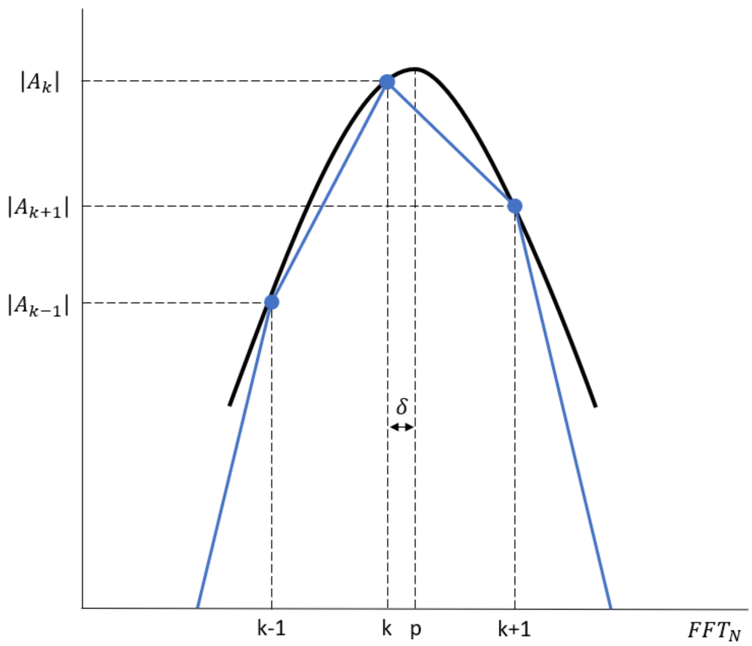


Figura 5.6 - Demonstração da interpolação parabólica (curva em preto) utilizando três amostras do espectro da transformada de Fourier (em azul).
Fonte: elaborado pelo autor.

Neste algoritmo, a frequência f_p do pico da interpolação parabólica é estimada utilizando a equação:

$$f_P = f_k + \delta \Delta f \tag{5.1}$$

sendo Δf a resolução da aquisição de dados da IMU, definida por Fs/N, onde Fs é frequência de amostragem e N é o número de amostras utilizado na transformada de Fourier. O coeficiente de correção δ é calculado utilizando as amplitudes do ponto máximo $|A_k|$ e dos dois pontos adjacentes $|A_{k-1}|$ e $|A_{k+1}|$, como descreve a equação (5.2).

$$\delta = \frac{|A_{k+1}| - |A_{k-1}|}{2(2|A_k| - |A_{k-1}| - |A_{k+1}|)} \tag{5.2}$$

5.3 INCERTEZA DE MEDIÇÃO EXPERIMENTAL

A incerteza de medição está associada ao valor de uma grandeza física e o seu intervalo de confiança, pois nenhuma medição experimental é isenta de erros. Nenhuma medição é exata devido ao fato do mensurando ser uma função do procedimento de medição, perícia do operador, do ambiente e entre outros efeitos. Mesmo que as condições sejam mantidas rigorosamente constantes, repetidas medições da grandeza física podem atribuir a diferentes valores do mensurando. O guia para a expressão de incertezas de medição (ISO-GUM) apresenta uma metodologia para quantificar e qualificar as incertezas presentes num ensaio experimental (JCGM, 2008). A avaliação da incerteza de medição pelo ISO-GUM caracteriza a grandeza de saída Y em função dos mensurandos de entrada X_i,

$$Y = f(X_i, \dots, X_N) \tag{5.3}$$

5.3.1 Incerteza-padrão e combinada

As fontes da incerteza-padrão de medição são categorizadas em dois grupos baseada no método de avaliação: tipo A e B. A incerteza-padrão do tipo A é apresentada como a média aritmética de uma determinada quantidade de observações do mensurando. A variação experimental das observações é denominada como variância s^2 da incerteza-padrão, enquanto o desvio-padrão é a raiz quadrada da variância, que é comumente utilizado para expressar a distribuição de probabilidade da incerteza do mensurando.

Os mensurados que não podem ser avaliados por observações repetidas devem ser obtidos pela avaliação tipo B da incerteza-padrão. A variância e desvio padrão estimado para o mensurando são obtidos baseados em informações previamente disponíveis do mensurando ou do instrumento de medição, associado à sua resolução. O desvio padrão do mensurando consiste na combinação das avaliações da incerteza-padrão e desvio padrão do tipo A e B. O desvio padrão abrange apenas parte dos valores constituídos na distribuição normal, portanto, o intervalo de incerteza do mensurando é comumente apresentado utilizando o intervalo de confiança de 95% (duas vezes o desvio padrão) ou 98% (três vezes o desvio padrão). Neste trabalho é utilizado o intervalo de confiança de 95%, o método do Monte Carlo no ISO-GUM.

5.3.2 Amostragem por Monte Carlo

O ISO-GUM acrescenta um suplemento ao guia de incertezas onde apresenta o método de Monte Carlo (MMC) como um método alternativo para estimar a incerteza-padrão e desvio padrão da grandeza de saída Y. O MMC consiste num método estatístico baseado em amostragens aleatórias dos mensurando de entrada para obter a grandeza de saída Y. A equação (5.4) representa a grandeza de saída neste estudo em função das suas variáveis de entrada, que é baseada na equação (5.5) da determinação do momento de inércia do corpo rígido.

$$I_{corpo} = f(m_{corpo}, m, g, R_1, R_2, H, f_1, f_2) \tag{5.4}$$

$$I_{corpo} = \frac{\mathrm{g}\mathrm{R}_1 R_2}{4\pi^2 H}\left(\frac{(m_{corpo} + m)}{f_2^2} - \frac{m}{f_1^2}\right) \tag{5.5}$$

onde m_{corpo} é a massa do corpo rígido, m é a massa da plataforma inferior, g é a aceleração da gravidade, R_1 é o raio de rotação da base superior, R_2 é o raio de rotação da plataforma inferior, H é a distância entre a plataforma inferior e a base superior, f_1 é a frequência de oscilação da plataforma inferior sem o corpo rígido e f_2 com o corpo rígido ao centro da base rotativa.

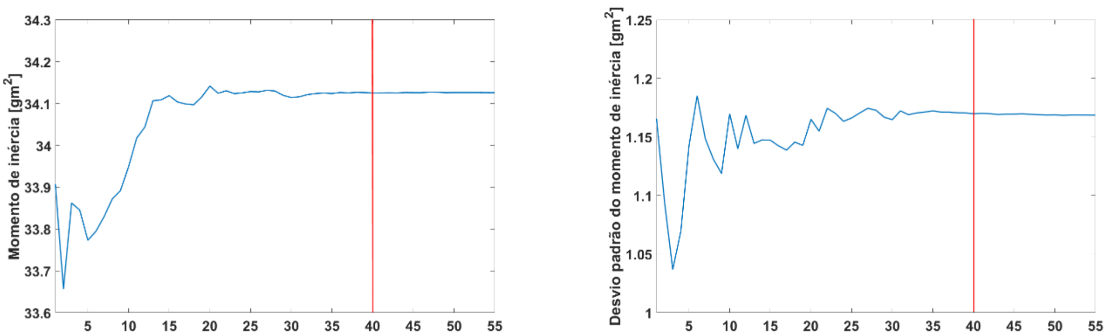
A grandeza de saída I_{corpo} é uma função dependente de 8 grandezas de entrada independentes. Cada uma das grandezas de entrada é modelada para uma distribuição de probabilidade do tipo normal, descrita pela média e desvio padrão em consequência das repetitivas medições experimentais realizadas desta variável. Além do desvio padrão devido as repetitivas medições, também é levado em conta para o desvio padrão, a resolução dos equipamentos utilizados durante o ensaio experimental (TABELA 5.1).

TABELA 5.1 - EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NO ENSAIO EXPERIMENTAL.

Equipamento	Modelo	Resolução
Giroscópio Acelerômetro	MPU9250	5~40 ms
Balança de precisão	Toledo 9094C/5	0,01 g
Balança corporal	Welmy W200/50 A	50 g
Fita métrica	Starrett Y12-3ME9	0,001 m

Fonte: elaborado pelo autor.

Com as médias e desvios padrão das oito variáveis de entrada da função do momento de inércia, é utilizado o método de amostragem por Monte Carlo para obter os vetores de amostras aleatórias baseados nas curvas de probabilidade das oito variáveis de entrada. São utilizadas N amostras aleatórias, observando a convergência da média e desvio padrão da grandeza de saída da função, ou seja, o momento de inércia da plataforma ou corpo rígido, dependendo do que é desejado determinar (SOLAGUREN-BEASCOA FERNÁNDEZ et al., 2009). Como observado na Figura 5.7, a convergência da amostragem por Monte Carlo é obtida a partir de $N = 4 * 10^5$ amostras.



(a) (b)

Figura 5.7 - Convergência da amostragem por Monte Carlo da média (a) e desvio padrão (b) do momento de inércia.
Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 5.8 resume a metodologia por meio de um fluxograma para determinar a incerteza experimental do momento de inércia pela amostragem de Monte Carlo.

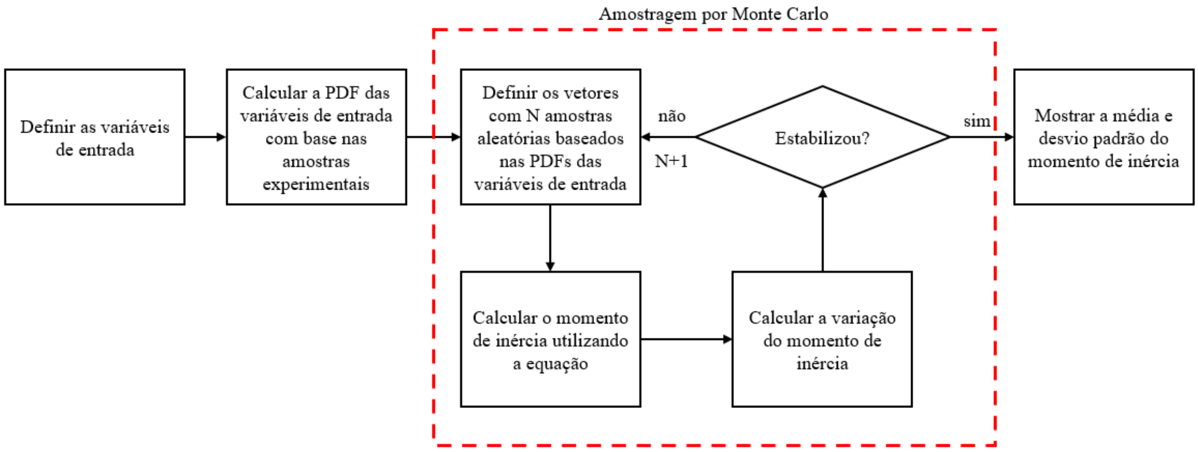


Figura 5.8 - Fluxograma da determinação da incerteza experimental pelo ISO-GUM e amostragem por Monte Carlo para determinar o momento de inércia e sua incerteza experimental.
Fonte: elaborado pelo autor.

5.4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Os suportes superiores apresentam um distanciamento entre os seus pontos de fixação de 1,52 m na longitudinal e 1,50 m na lateral. Nesta configuração, a distância R, denominado raio de rotação (Figura 5.9), entre o centro de massa $(C.M.)$ e o ponto de fixação (P_1, P_2, P_3, P_4) é de 1,068 m. Na gaiola, os pontos de fixação dos cabos ficam a 0,52 m de distância. Nesta configuração, o raio de rotação R da gaiola é de 0,368 m. A distância entre os pontos de fixação da gaiola e do teto é de 2,30 m.

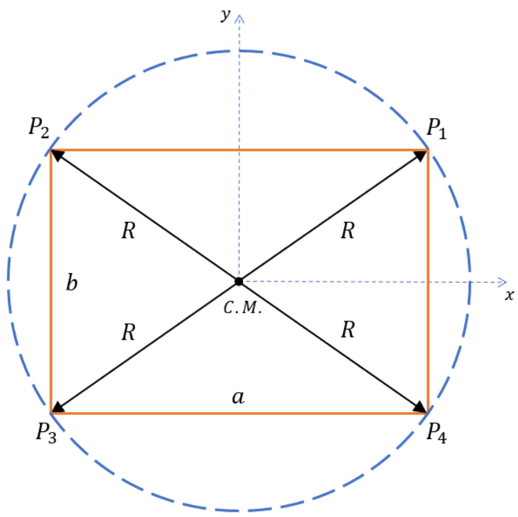


Figura 5.9 - Esquematização do raio de rotação de uma superfície quadrilateral.
Fonte: elaborado pelo autor.

O procedimento experimental para os ensaios consiste nos seguintes passos:

1. Medir a massa da gaiola em uma balança digital;
2. Posicionar os cabos nos ganchos que estão presos nos suportes superiores;
3. Utilizando os ganchos na gaiola, posicioná-la utilizando os cabos;
4. Posicionar a plataforma giratória para o ângulo desejável utilizando os parafusos laterais;
5. Medir a distância entre os suportes superiores e a parte superior da gaiola;
6. Fazer a conexão entre a MPU9250 e a placa do Raspberry Pi;
7. Ligar o Raspberry Pi utilizando uma bateria externa;
8. Posicionar o Raspberry Pi na parte inferior da gaiola, ao seu centro de massa;
9. Conectar o computador ao Raspberry Pi utilizando a rede wireless do laboratório;
10. Posicionar a plataforma giratória, no interior da gaiola, na configuração $\theta = 0^o$;
    a. Aplicar uma pequena rotação em torno do eixo vertical da gaiola e observá-la oscilar;
    b. Iniciar a medição dos giroscópios e acelerômetros presentes na MPU9250;
    c. Obter a transformada de Fourier das medições do giroscópio e acelerômetro;
    d. Utilizar o algoritmo de Voglewede e obter a frequência de oscilação da plataforma no eixo z do giroscópio;
    e. Repetir cinco vezes os passos 10a a 10d;
    f. Obter a média e desvio padrão das cinco medições da frequência de oscilação da plataforma;
    g. Estimar o momento de inércia da plataforma;
11. Posicionar o corpo rígido no centro da plataforma giratória;
12. Alinhar o eixo x do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Repetir os passos 10a a 10g;
    b. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
13. Alinhar o eixo y do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Repetir os passos 10a a 10g;
    b. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
14. Alinhar o eixo z do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Repetir os passos 10a a 10g;

    b. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
15. Retirar o corpo rígido da plataforma giratória;
16. Posicionar a plataforma giratória, no interior da gaiola, na configuração $\theta = 10^o$;
    a. Repetir os passos 10a a 10g;
17. Posicionar o corpo rígido no centro da plataforma giratória;
18. Alinhar o eixo x do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Alinhar o eixo y do momento de inércia do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;
    b. Repetir os passos 10a a 10g;
    c. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
    d. Alinhar o eixo z do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;
    e. Repetir os passos 10a a 10g;
    f. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
19. Alinhar o eixo y do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Alinhar o eixo x do momento de inércia do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;
        i. Repetir os passos 10a a 10g;
        ii. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
    b. Alinhar o eixo z do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;
        i. Repetir os passos 10a a 10g;
        ii. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;
20. Alinhar o eixo z do momento de inércia do corpo rígido com o eixo z da base giratória;
    a. Alinhar o eixo y do momento de inércia do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;
        i. Repetir os passos 10a a 10g;

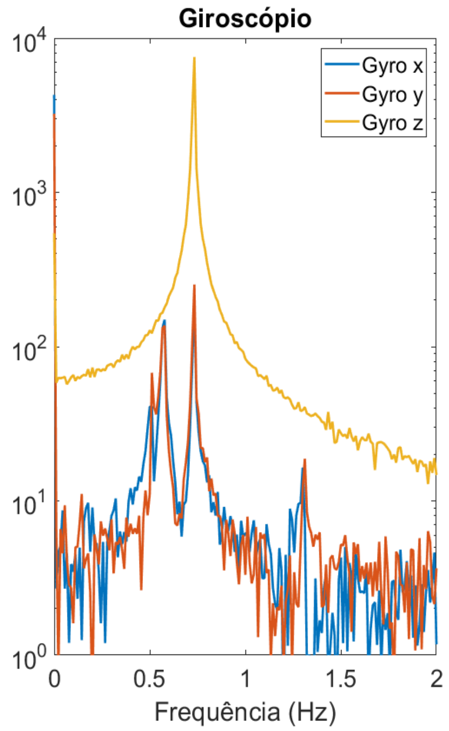
ii. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido;

b. Alinhar o eixo x do corpo rígido com o eixo não rotacionado da plataforma giratória;

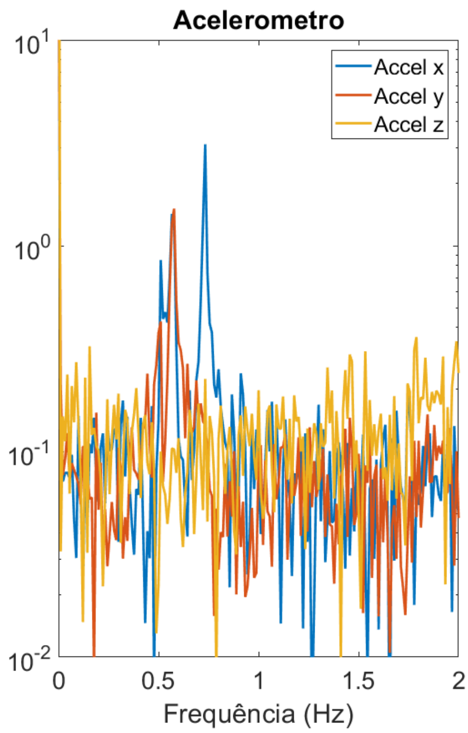
i. Repetir os passos 10a a 10g;

ii. Subtrair a estimativa do momento de inércia da plataforma com o corpo rígido com a estimativa do momento de inércia da plataforma sem o corpo rígido.

É aplicada a transformada de Fourier nas leituras extraídas dos três eixos do acelerômetro $(accel\ x, accel\ y, accel\ z)$ e dos três eixos do giroscópio $(gyro\ x, gyro\ y, gyro\ z)$. A Figura 5.9 apresenta as curvas de espectro dos sinais obtidos pela IMU, onde a Figura 5.9a apresenta o espectro do giroscópio e a Figura 5.9b do acelerômetro.



(a)



(b)

Figura 5.10 - Curvas de espectro da leitura do giroscópio (a) e do acelerometro (b).
Fonte: elaborado pelo autor.

Visualizando a Figura 5.10, é possível identificar os picos nos espectros nos sinais dos eixos do giroscópio e do acelerômetro, que são associadas as suas frequências. Pela Figura

5.10a, é possível determinar as três primeiras frequências de oscilação da gaiola. O espectro do giroscópio no eixo z apresenta um único pico, que é associado a rotação da gaiola no seu eixo Z. Os espectros dos sinais do giroscópio nos seus eixos x e y identificaram três picos, que são associados a três frequências de oscilação da gaiola. A terceira frequência é coincidentemente a frequência obtida pelo giroscópio no seu eixo Z, portanto esta é a frequência de rotação da gaiola em torno do seu eixo z. As duas primeiras frequências são referentes aos movimentos translacionais da gaiola no eixo x e y. Os modos de vibração obtidos pelos dados experimentais são confirmados pelo modelo numérico, pois o sistema é moldado possuindo três graus de liberdade: translacional nos eixos x e y e rotacional no eixo z.

Um estudo de caso é realizado com a IMU para determinar a melhor configuração para o intervalo de leitura do sensor e tempo total de ensaio na aquisição das leituras do giroscópio e acelerômetro. As frequências de amostragem utilizadas são de $25/50/100/200\,hz$, enquanto os tempos totais de amostragem utilizados são de $60/90/120\,s$. As curvas de espectro para cada um dos intervalos de leitura e tempo total de ensaio são apresentadas na Figura 5.11, sendo realizadas três ensaios para cada configuração de aquisição dos dados da IMU.

As curvas em azul são correspondentes a transformada de Fourier do giroscópio no eixo z, enquanto as curvas em verde correspondem ao eixo y e as curvas em vermelho ao eixo x. Em todos os casos é possível identificar as três primeiras frequências de oscilação da gaiola. O aumento da taxa de amostragem se mostrou prejudicial a construção do espectro da transformada de Fourier devido a flutuação do período médio entre as escritas do giroscópio. A frequência em obter neste estudo é próxima a 1 Hz, foi escolhida para a progressão dos ensaios, a taxa de amostragem de 25 Hz. Sabendo que a precisão da transformada de Fourier é proporcional a quantidade de amostras adquiridas pelo giroscópio, sendo definido que o tempo de amostra na progressão dos ensaios é de 120 segundos. Definida a taxa de amostragem de 25 Hz e o tempo total de coleta de amostragem de 120 segundos, a resolução do espectro da transformada de Fourier é de 0,0083 Hz. Além disso, é utilizado o algoritmo de Voglewede para interpolação do espectro e consequentemente obtém-se a frequência com maior precisão.

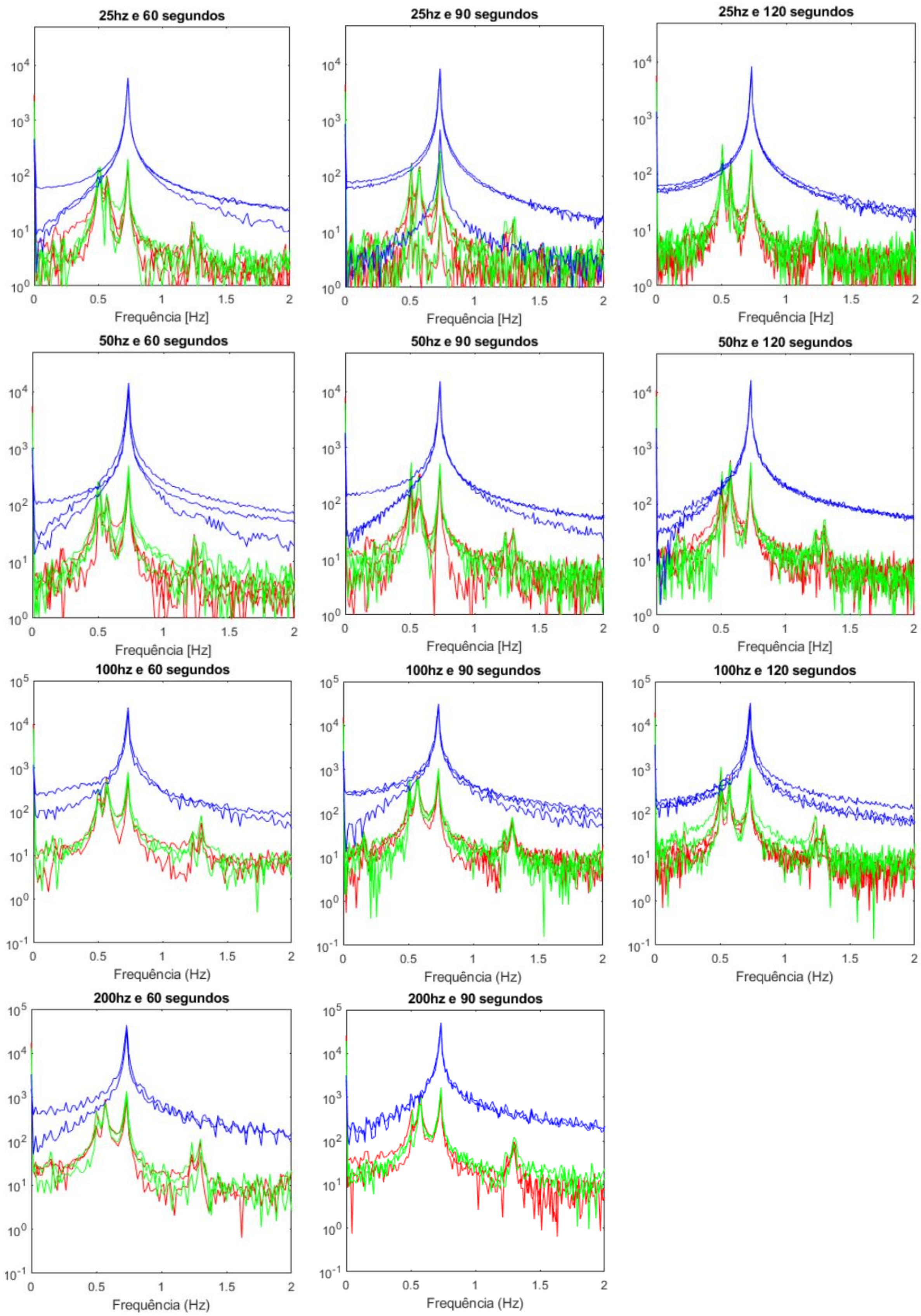


Figura 5.11 - Curvas de espectro da transformada de Fourier do giroscópio nos seus três eixos para diferentes frequências e duração de amostragem do ensaio experimental.
Fonte: elaborado pelo autor.

5.5 ENSAIOS DA BANCADA VAZIA

Na primeira etapa, são realizados ensaios com a bancada experimental vazia, constituídos pela gaiola, plataforma giratória, placa de madeira e instrumentação de medição. A TABELA 5.2 apresenta os momentos de inércia dos componentes presentes na bancada experimental obtidos utilizando o software CAD.

TABELA 5.2 - MOMENTO DE INÉRCIA DOS COMPONENTES DA GAIOLA NO SOFTWARE SOLIDWORKS.

	Momento de Inércia $[gm^2]$		
	Plataforma Giratória $\boldsymbol{m = 1654\ g}$	**Placa de Madeira** $\boldsymbol{m = 2592\ g}$	**Gaiola Completa** $\boldsymbol{m = 7718\ g}$
Eixo x	18,098	77,791	519,126
Eixo y	83,865	77,791	616,456
Eixo z	85,805	155,520	595,350

Fonte: elaborado pelo autor.

A bancada possui massa de $7.725 \pm 25g$ e, após a adição dos instrumentos de medição, a massa total da bancada experimental é de $8081\ g$. A bancada é submetida aos ensaios experimentais e assim é obtida a sua frequência de oscilação. Com isso, é possível estimar o momento de inércia devido a frequência de oscilação da bancada experimental no eixo vertical, que é comparado com os valores obtidos pelo modelo CAD e pelo modelo numérico (TABELA 5.3).

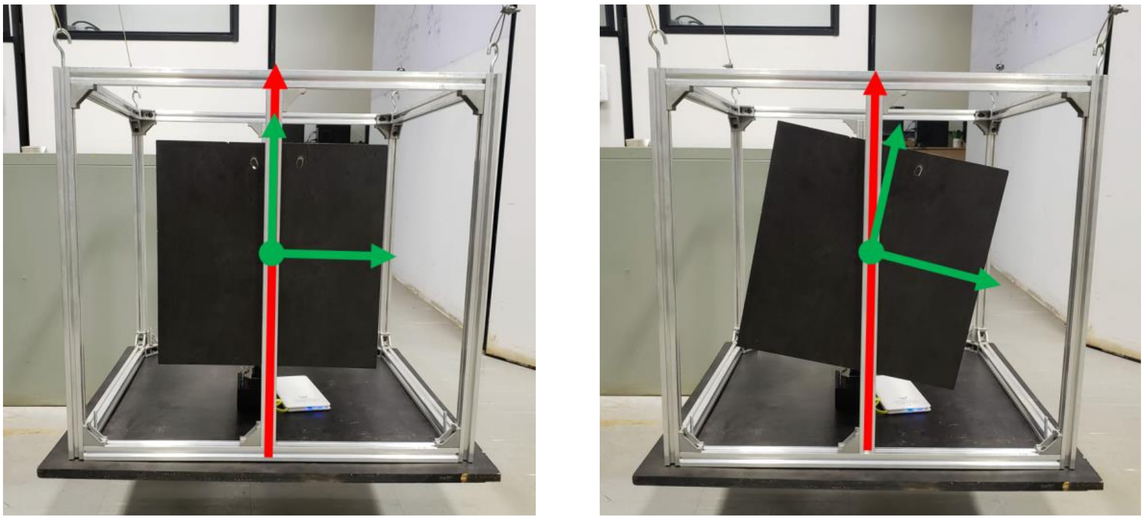
TABELA 5.3 - COMPARAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA ESTIMADA A PARTIR DO MODELO EM CAD, NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DA BANCADA EXPERIMENTAL.

	CAD	**Numérico**	**Experimental**
Massa $[g]$	7718	7674	8081*
Frequência $[Hz]$	-	0,74710	$0{,}76515 \pm 0{,}00027$
Momento de Inércia $[gm^2]$	595,350	584,270	$585{,}836 \pm 34{,}265$

* soma da massa da bancada 7725g e do conjunto de sensor 356g

Fonte: elaborado pelo autor.

Como observado na TABELA 5.3, as diferenças entre os modelos CAD e numérico com o modelo experimental foram abaixo de 2%. A plataforma giratória é rotacionada em torno do seu eixo, conforme mostra na Figura 5.12. Consequentemente, a nova configuração da plataforma giratória rotacionada a 10 graus (Figura 5.12b) modifica o momento de inércia da gaiola completa. O momento de inércia da bancada para 10 graus é obtido analiticamente, utilizando a matriz de rotação $\boldsymbol{A}$ (3.43), e comparado ao momento de inércia estimado experimentalmente (TABELA 5.4).



(a) (b)

Figura 5.12 - Eixo z da gaiola (em vermelho) e eixo cartesiano da plataforma giratória (em verde) da bancada experimental nas configurações de zero grau (a) e dez graus (b) de inclinação.
Fonte: elaborado pelo autor.

TABELA 5.4 - MOMENTO DE INÉRCIA DA GAIOLA PARA DIFERENTES GRAUS DE INCLINAÇÃO DA PLATAFORMA GIRATÓRIA.

Configuração da Plataforma Giratória	**Momento de Inércia no eixo Z $[gm^2]$**		
	Analítico		**Experimental**
	Plataforma Giratória $m = 1654\ g$	**Gaiola Completa $m = 7718\ g$**	**Gaiola + sensores $m = 8081\ g$**
0^o	85,805	595,350	$585{,}836 \pm 34{,}265$
10^o	85,746	595,986	$585{,}541 \pm 34{,}265$

Fonte: elaborado pelo autor.

5.6 ENSAIOS COM O CORPO RÍGIDO

Após os ensaios da bancada experimental vazia, é escolhido um corpo rígido com momento de inércia conhecido para determiná-lo utilizando a bancada. O corpo rígido apresentado na Figura 5.12, é um perfil metálico do tipo seção caixão que possui massa de $4.404\ g$ e momentos de inércia principais I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} de $26{,}496\ gm^2, 19{,}656\ gm^2$ e $20{,}236\ gm^2$, respectivamente.

Figura 5.13 - Corpo rígido com massa 4.404 g.
Fonte: elaborado pelo autor.

Primeiramente, a base giratória é posicionada na configuração de zero graus de inclinação. Conforme o procedimento experimental realizado, o corpo é posicionado em diferentes orientações com relação ao eixo z da gaiola para determinar o seu tensor de inércia, totalizando três diferentes orientações. Na Figura 5.14, o corpo rígido está orientado com o seu eixo x alinhado com o eixo z (vertical) da gaiola, sendo coincidentemente com o eixo z do giroscópio. Nesta configuração de oscilação, é possível estimar o momento de inércia I_{xx} do corpo rígido. Para estimar os momentos de inércia I_{yy} e I_{zz}, é necessário alinhar os respectivos eixos y e z do corpo rígido com o eixo z da gaiola.

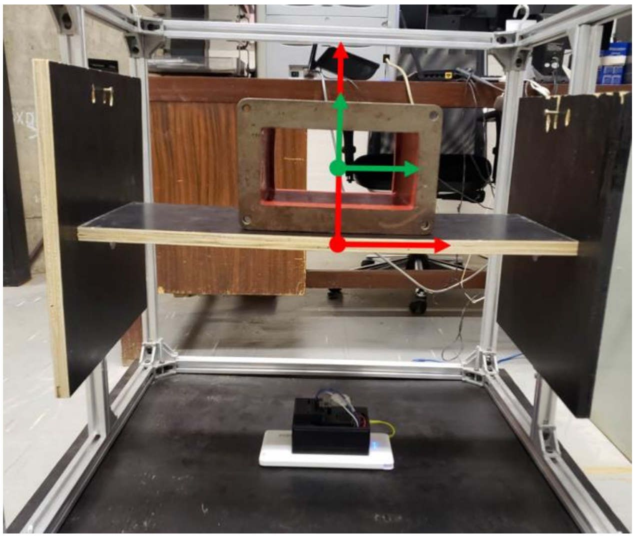


Figura 5.14 - Orientação dos eixos cartesianos do corpo rígido (verde) em relaçãoaos eixos cartesianos da gaiola (vermelho). O eixo y do corpo rígido está alinhado ao eixo x da gaiola, enquanto o eixo x do corpo rígido está alinhado ao eixo z da gaiola.
Fonte: elaborado pelo autor.

Então a base giratória é rotacionada para o ângulo de 10 graus com relação ao seu eixo z, vertical, conforme Figura 5.12b. O corpo rígido é posicionado em diferentes orientações com relação ao eixo z da gaiola, totalizando seis diferentes orientações. Estas orientações são nomeadas conforme ao alinhamento dos eixos cartesianos do corpo rígido em relação aos eixos cartesianos da gaiola. Na orientação apresentada na Figura 5.15, o eixo y do corpo rígido está alinhado ao eixo x da gaiola. Consequentemente, os eixos x e z do corpo rígido estão rotacionados.

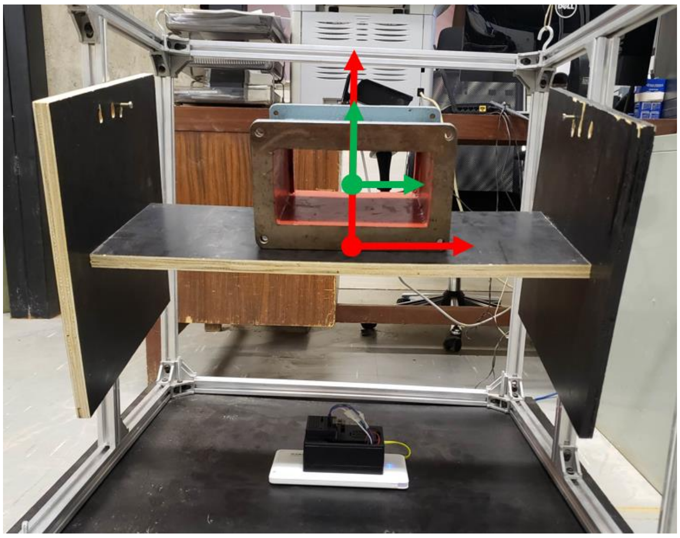


Figura 5.15 - Orientação dos eixos cartesianos do corpo rígido (verde) em relação aos eixos cartesianos da gaiola (vermelho). O eixo y do corpo rígido está alinhado ao eixo x da gaiola, enquanto o eixo x do corpo rígido possui um ângulo de dez graus em relação ao eixo z da gaiola.
Fonte: elaborado pelo autor.

O eixo x do corpo rígido está rotacionado a 10 graus do eixo z da gaiola, enquanto o eixo z do corpo rígido está rotacionado a 10 graus do eixo y da gaiola, desta forma, a 80 graus do eixo z da gaiola. Definindo o eixo z da gaiola como o eixo de referência, esta configuração de orientação onde o eixo x possui 10 graus de rotação, o eixo z possui 80 graus de rotação e o eixo y mantêm-se inalterado, sendo nomeado como orientação eixo x-z.

Três medições são realizadas para cada configuração de inclinação e orientação, onde são extraídas as frequências de oscilação da bancada. A TABELA 5.5 apresenta as frequências de oscilação no eixo z da gaiola em conjunto com o desvio padrão, além da estimativa dos momentos de inércia do corpo rígido para as diferentes orientações do perfil metálico e inclinação da base giratória.

TABELA 5.5 - MOMENTO DE INÉRCIA PARA DIFERENTES CASOS DE INCLINAÇÃO DA BASE GIRATÓRIA E ORIENTAÇÃO DO PERFIL METÁLICO.

Inclinação	**Orientação**	**Frequência de oscilação (Hz)**	**Momento de Inércia (gm^2)**
0^o	Eixo x	$0{,}92502 \pm 0{,}00013$	$32{,}655 \pm 2{,}264$
	Eixo y	$0{,}93293 \pm 0{,}00017$	$22{,}212 \pm 1{,}818$
	Eixo z	$0{,}93146 \pm 0{,}00041$	$24{,}126 \pm 1{,}953$
10^o	Eixo x-y	$0{,}92512 \pm 0{,}00009$	$32{,}809 \pm 2{,}259$
	Eixo x-z	$0{,}92511 \pm 0{,}00014$	$32{,}821 \pm 2{,}264$
	Eixo y-x	$0{,}93251 \pm 0{,}00023$	$23{,}051 \pm 1{,}853$
	Eixo y-z	$0{,}93309 \pm 0{,}00010$	$22{,}297 \pm 1{,}802$
	Eixo z-x	$0{,}92698 \pm 0{,}00032$	$30{,}328 \pm 2{,}183$
	Eixo z-y	$0{,}93089 \pm 0{,}00053$	$25{,}176 \pm 2{,}039$

* desvio padrão 2σ com intervalo de confiança de 95%

Fonte: elaborado pelo autor.

Para a inclinação de zero grau, é possível calcular o erro da estimativa do momento de inércia nos três eixos. Para o eixo x, o erro da estimativa foi de 23%. Para o eixo y, o erro foi de 13% e, para o eixo z e o erro foi de 19%. Os valores de momento de inércia estimados na TABELA 5.5 são utilizados na metodologia de Tang e o tensor de inércia do corpo rígido é estimado por:

$$\begin{bmatrix} 31{,}528 & -3{,}4025 & -9{,}0065 \\ -3{,}4025 & 22{,}005 & -0{,}0114 \\ -9{,}0065 & -0{,}0114 & 25{,}460 \end{bmatrix} gm^2 \tag{5.6}$$

Após a aplicação da metodologia de Tang, o erro da estimativa dos momentos de inércia I_{xx} é de 19%, do I_{yy} é de 12% e do I_{zz} é de $25{,}8\%$. Portanto, não houve grande alteração nos erros da estimativa dos momentos de inércia.

5.7 ENSAIO DO CUBESAT

Após os ensaios com o corpo rígido com momento de inércia conhecido, são feitos ensaios com um mockup de CubeSat modelo 1U. Um mockup é construído com as dimensões de $10 \times 10 \times 10\ cm$, com volume de 1.000 cm³, sendo sua massa de 555,34 g. O mockup é equipado com uma placa Beaglebone, além de um módulo de câmera, uma bateria de alimentação e um motor de reação, todos conectados a placa Beaglebone. Os eixos cartesianos de referência utilizados no mockup 1U são apresentados na Figura 5.16.

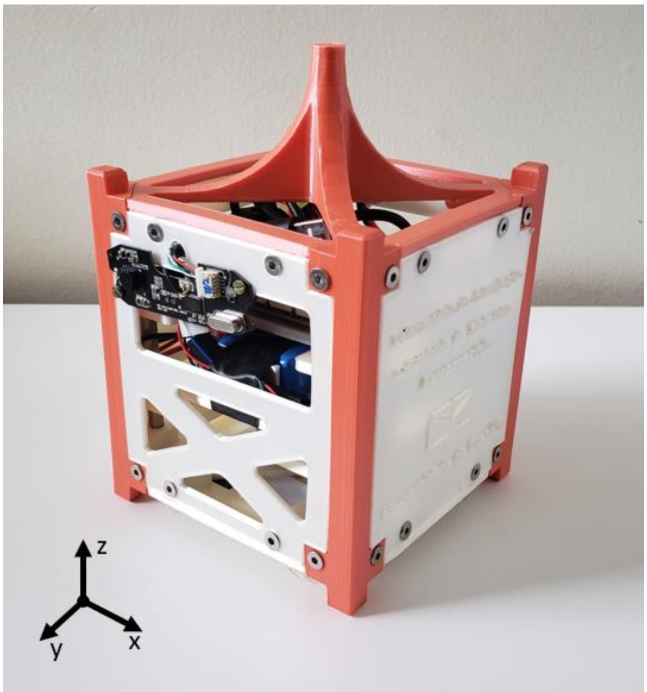


Figura 5.16 - Mockup de CubeSat com massa 555,34 g.
Fonte: elaborado pelo autor.

O procedimento experimental realizado nos ensaios do mockup são os mesmos utilizados nos ensaios do perfil metálico tipo caixão. Com a plataforma giratória na configuração de zero graus, o mockup é posicionado sendo aferida a frequência de oscilação da plataforma para cada um dos eixos cartesianos do mockup. Logo em seguida, a plataforma giratória é posicionada na configuração de 10 graus de rotação, sendo aferida a frequência de oscilação da plataforma para cada um dos produtos dos eixos cartesianos do mockup. As médias e desvios padrões, com confiabilidade de 95%, da frequência aferida para cada um dos ensaios e, a estimativa do momento de inércia são apresentados na TABELA 5.6.

TABELA 5.6 - MOMENTO DE INÉRCIA PARA DIFERENTES CASOS DE INCLINAÇÃO DA BASE GIRATÓRIA E ORIENTAÇÃO DO CUBESAT.

Inclinação	Orientação	Frequência de oscilação (Hz)	Momento de inércia (gm^2)
0^o	Eixo x	$0{,}79052 \pm 0{,}00042$	$0{,}5801 \pm 0{,}7882$
	Eixo y	$0{,}79053 \pm 0{,}00022$	$0{,}5644 \pm 0{,}5823$
	Eixo z	$0{,}79065 \pm 0{,}00024$	$0{,}3879 \pm 0{,}5967$
10^o	Eixo x-y	$0{,}78978 \pm 0{,}00053$	$1{,}9714 \pm 0{,}9128$
	Eixo x-z	$0{,}78995 \pm 0{,}00012$	$1{,}7302 \pm 0{,}4922$
	Eixo y-x	$0{,}79102 \pm 0{,}00011$	$0{,}1352 \pm 0{,}4821$
	Eixo y-z	$0{,}79100 \pm 0{,}00014$	$0{,}1617 \pm 0{,}4964$
	Eixo z-x	$0{,}79089 \pm 0{,}00030$	$0{,}3342 \pm 0{,}6300$
	Eixo z-y	$0{,}79106 \pm 0{,}00058$	$0{,}0821 \pm 0{,}9668$

* desvio padrão 2σ com intervalo de confiança de 95%

Fonte: elaborado pelo autor.

A metodologia de Tang é aplicada com os momentos de inércia estimados na Tabela 5.6 e é obtido o tensor de inércia do mockup:

$$\begin{bmatrix} 1{,}1939 & -1{,}0729 & -1{,}0392 \\ -1{,}0729 & 0{,}1788 & 0{,}1384 \\ -1{,}0392 & 0{,}1384 & 0{,}1597 \end{bmatrix} gm^2 \tag{5.7}$$

Os valores encontrados para os produtos de inércia I_{xy} e I_{xz} apresentaram valores altos, não sendo correspondente a um corpo rígido cúbico. A razão de inércia do mockup em relação a gaiola é inferior a $0{,}01$, e conforme o Gráfico 4.9, a baixa razão de inércia apresenta um alto erro numérico na estimativa do momento de inércia na modelagem numérica.

Mendonça (2017) identificou em seu trabalho que a utilização de uma massa de calibração em adição com o corpo rígido de inércia desconhecida na bancada do pêndulo trifilar proporciona o acréscimo na precisão do momento de inércia calculado. A massa de calibração é definida como um corpo rígido com momento de inércia conhecida. Com a massa de calibração, é feito o posicionamento do perfil metálico com seção caixão, a mesma da subseção anterior, na placa de madeira inferior, enquanto o mockup é posicionado na plataforma giratória, conforme apresenta na Figura 5.17.

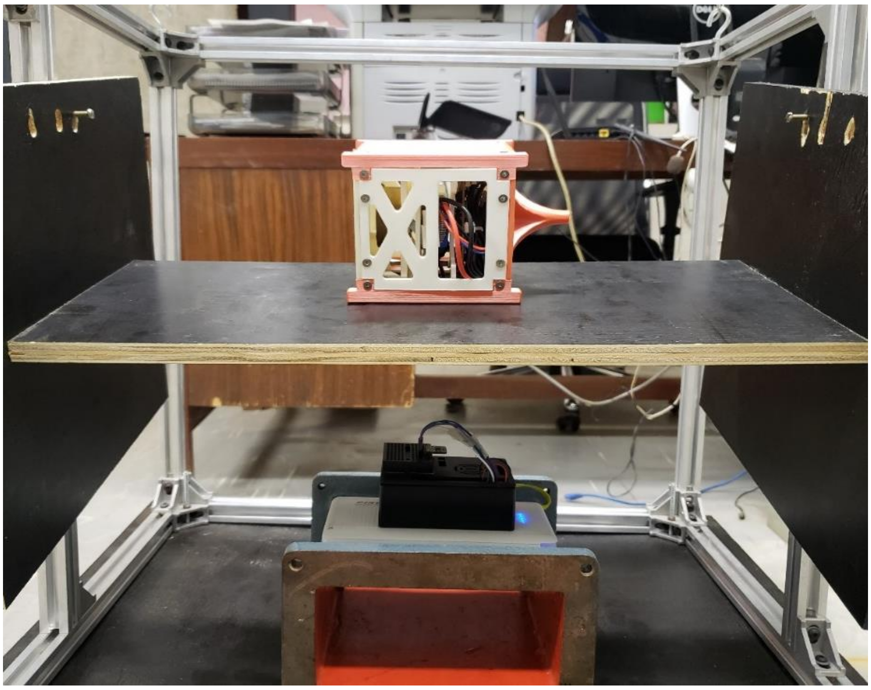


Figura 5.17 - Mockup de CubeSat na plataforma giratória e perfil metálico na placa inferior.
Fonte: elaborado pelo autor.

Uma bateria de ensaios é realizada na bancada, de acordo com o procedimento experimental da determinação do momento de inércia. Primeiramente, são feitas as medições da bancada apenas com o perfil metálico com seção caixão posicionada na placa inferior. Logo após, o mockup é posicionado na plataforma giratória e são feitas as aferições da frequência de oscilação da bancada. O momento de inércia do mockup é estimado fazendo a subtração do momento de inércia da bancada com o mockup sem o perfil metálico com o momento de inércia da bancada com o perfil metálico sem o mockup. A TABELA 5.7 apresenta as frequências de oscilação e o momento de inércia estimado da bancada em todas as configurações do mockup.

TABELA 5.7 - MOMENTO DE INÉRCIA PARA DIFERENTES CASOS DE INCLINAÇÃO DA BASE GIRATÓRIA E ORIENTAÇÃO DO CUBESAT UTILIZANDO O PERFIL METÁLICO COMO MASSA DE CALIBRAÇÃO.

Inclinação	**Orientação**	**Frequência de oscilação (Hz)**	**Momento de inércia (gm^2)**	**Mockup**
0^o	Massa de calibração	$0{,}92513 \pm 0{,}00016$	$32{,}500 \pm 2{,}259$	-
	Eixo x	$0{,}94234 \pm 0{,}00009$	$36{,}574 \pm 2{,}494$	$4{,}074 \pm 0{,}357$
	Eixo y	$0{,}94232 \pm 0{,}00006$	$36{,}593 \pm 2{,}500$	$4{,}093 \pm 0{,}345$
	Eixo z	$0{,}94248 \pm 0{,}00003$	$36{,}381 \pm 2{,}483$	$3{,}881 \pm 0{,}329$
10^o	Massa de calibração	$0{,}92507 \pm 0{,}00017$	$32{,}876 \pm 2{,}272$	-
	Eixo x-y	$0{,}94213 \pm 0{,}00014$	$37{,}142 \pm 2{,}523$	$4{,}266 \pm 0{,}391$
	Eixo x-z	$0{,}94223 \pm 0{,}00016$	$37{,}010 \pm 2{,}520$	$4{,}134 \pm 0{,}401$
	Eixo y-x	$0{,}94223 \pm 0{,}00016$	$37{,}005 \pm 2{,}519$	$4{,}129 \pm 0{,}400$
	Eixo y-z	$0{,}94237 \pm 0{,}00001$	$36{,}831 \pm 2{,}502$	$3{,}995 \pm 0{,}335$
	Eixo z-x	$0{,}94249 \pm 0{,}00015$	$36{,}666 \pm 2{,}502$	$3{,}790 \pm 0{,}386$
	Eixo z-y	$0{,}94250 \pm 0{,}00007$	$36{,}654 \pm 2{,}492$	$3{,}778 \pm 0{,}340$

* desvio padrão 2σ com intervalo de confiança de 95%

Fonte: elaborado pelo autor.

A metodologia de Tang é aplicada com os momentos de inércia estimados na Tabela 5.7 e é obtido o tensor de inércia do mockup.

$$\begin{bmatrix} 4{,}1382 & -0{,}2800 & 0{,}0858 \\ -0{,}2800 & 4{,}0653 & 0{,}2000 \\ 0{,}0858 & 0{,}2000 & 3{,}8445 \end{bmatrix} gm^2 \tag{5.8}$$

Os resultados apresentados do tensor de inércia do mockup estão dentro do previsto para um corpo rígido cúbico, onde se espera que os momentos de inércia principais I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} estejam próximos e produtos de inércia próxima a zero.

5.7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo apresentou a bancada utilizada nos ensaios experimentais para a determinação do tensor de inércia de um corpo rígido. Os componentes de compõe a bancada foram apresentados, em específico, a plataforma giratória, a qual permite a rotação horizontal do corpo rígido estimulando o tensor de inércia do corpo rígido.

Primeiramente foi feita a comparação dos ensaios experimentais com os modelos numéricos e CAD da bancada. A discrepância entre os modelos foi inferior a 3% para a frequência e para o momento de inércia no eixo z da gaiola. Então é utilizado um corpo rígido, com momento de inércia calculado em modelo CAD, para estimar o seu momento de inércia na bancada experimental e comparar com o modelo CAD. O corpo utilizado é um perfil metálico com seção caixão e geometria simples. A discrepância entre os modelos é de 23% para I_{xx}, 13% para I_{yy} e 19% para I_{zz}. Utilizando os dados obtidos com a rotação da plataforma e aplicando a metodologia de Tang, a discrepância entre os valores estimados dos momentos de inércia experimentalmente e modelo CAD é de 19% para I_{xx}, 12% para I_{yy} e 25,8% para I_{zz}.

Por último, é utilizado o CubeSat para estimar o seu tensor de inércia. O mockup é um modelo experimental de CubeSat tipo 1U, que é um cubo de 10cm de lado. O tensor de inércia é estimado utilizando a metodologia de Tang e com nove configurações distintas do mockup. O tensor de inércia do mockup foi estimado, porém, verificou-se que o valor médio não é o esperado para um corpo rígido cúbico, além da incerteza expandida ser muito alta. Desta forma, foi utilizado o conceito da massa de calibração no pêndulo quadrifilar com o objetivo de obter melhores estimativas do tensor de inércia do mockup. Para a massa de calibração, foi utilizada o mesmo perfil metálico com seção caixão que foi utilizado nos ensaios anteriores. Com a massa de calibração, o tensor de inércia do mockup estimado pela bancada encontrava-se dentro do previsto para um corpo rígido cúbico e, as incertezas expandidas encontradas foram menores.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a metodologia de determinação do tensor de inércia de corpos rígidos utilizando a técnica do pêndulo quadrifilar. Foi apresentado os conceitos da dinâmica dos corpos rígidos e desenvolvido a formulação matemática onde é possível determinar o seu tensor de inércia. Diferentes técnicas experimentais foram analisadas, sendo destacado a técnica do pêndulo oscilatório, a qual foi utilizado neste trabalho. A formulação física que governa o comportamento dinâmico do pêndulo oscilatório foi introduzida e apresentada o trabalho de Mendonça (2017) que utiliza-se da técnica do pêndulo trifilar e Genta e Dulprete (1994) do uso da técnica do pêndulo quadrifilar para determinação do momento de inércia de corpos rígidos.

Com a formulação física definida, foram realizados ensaios numéricos para compreensão do comportamento dinâmico da técnica de pêndulo. Primeiramente, foi utilizado o conceito de pêndulo simples para definir a eficácia da modelagem dos cabos nos ensaios numéricos posteriores. Para diâmetros inferiores a $0{,}5\ mm$, o erro relativo da modelagem dos cabos por elemento viga é inferior a 2%.

Ensaios numéricos do pêndulo trifilar de cabos paralelos foram realizados e nestes diversos ensaios, houve a variação das variáveis, sendo realizados com o objetivo de identificar a melhor configuração do pêndulo onde há o menor erro relativo entre o ensaio numérico e a formulação matemática. Foi observado que houve a convergência do modelo numérico nos ensaios onde o diâmetro dos cabos é reduzido e a razão entre a massa dos cabos e da plataforma inferior é maximizada.

Ensaios numéricos do pêndulo quadrifilar foram efetuados e verificou-se resultados satisfatórios no momento de inércia do eixo z, contudo teve uma grande inconsistência do momento de inércia dos eixos x e y da plataforma inferior. Um estudo sobre o comportamento da função utilizada na determinação do momento de inércia apresentou uma região onde a grandeza de saída é extremamente sensitiva a oscilação da frequência. Além disso, esta faixa divide a função onde a grandeza de saída apresenta resultados negativos e, na formulação física do pêndulo é inexistente.

Foi feita a modelagem de um pêndulo quadrifilar onde a plataforma inferior encontra-se no formato de uma gaiola. Dentro desta gaiola, um corpo rígido é posicionado de forma que seja possível estimar os três modos de vibração da gaiola e extrair as frequências associadas. Diversos corpos com massa e momento de inércia diferentes foram utilizados e estimado o momento de inércia numericamente, comparando com o valor real. Verificou-se que a discrepância entre os valores numéricos e reais variam de acordo com a característica do corpo, sendo feito um estudo da influência da discrepância dos valores com as características do corpo rígido utilizado. As características do corpo rígido e da plataforma inferior foram normalizadas utilizando a razão de massa e razão de inércia. Com isso, foi observado uma região na qual a discrepância é baixa, indicando uma ótima região de trabalho do pêndulo quadrifilar para estimar o momento de inércia do corpo rígido.

Para finalizar os ensaios numéricos, são feitos estudos da metodologia de Tang para ângulos grandes e para pequenos ângulos. Foi definido um corpo rígido com características físicas como massa e momento de inércia fixas. O corpo é rotacionado para diferentes configurações e a frequência associada ao modo de oscilação no eixo z da plataforma inferior, o qual é extraída e utilizada para calcular o momento de inércia. Observou-se que rotações acima de 30 graus em relação ao eixo vertical acrescenta erro na estimativa do tensor de inércia do corpo rígido.

Apresenta-se o aparato experimental proposto, baseado no pêndulo quadrifilar e o sistema de coleta dos dados. O aparato experimental possui uma massa total de 8.081 gramas, correspondentes a gaiola completa e o sistema de coleta de dados. O método de Monte Carlo é utilizado para estimar a incerteza da estimativa do momento de inércia, em consequência das incertezas nas medições das variáveis e dos instrumentos de medição. Ensaios com a bancada vazia revelaram uma discrepância inferior a 3% entre os modelos numéricos e CAD com o modelo experimental.

Um perfil metálico do modelo caixão foi utilizado para determinação do momento de inércia utilizando a gaiola e comparação com o modelo CAD. A estimativa do momento de inércia experimental obteve a discrepância de 23%, 13% e 19% para I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, respectivamente. Utilizando a metodologia de Tang e a rotação do corpo rígido, a discrepância da estimativa experimental foi de $19\%, 12\%$ e $25{,}8\%$ para I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, respectivamente.

Um mockup baseado em um CubeSat tipo 1U é utilizado nos ensaios da gaiola com objetivo de determinar o seu tensor de inércia. Utilizando a metodologia de Tang, foi possível estimar o tensor de inércia do mockup. Porém, o estudo da propagação de erros por amostragem de Monte Carlo demonstrou uma alta incerteza do momento de inércia estimado. Deste modo, seguindo o trabalho de Mendonça (2017), foi utilizado uma massa de calibração em conjunto com o mockup. Foi possível obter a estimativa do tensor de inércia do mockup e, os resultados encontrados compactuam com o esperado para um corpo rígido cúbico. A incerteza de medição do momento de inércia foi inferior ao caso da bancada com mockup e sem a massa de calibração.

Foi possível estimar o tensor de inércia de um CubeSat utilizando o pêndulo quadrifilar, como exemplo a gaiola. Observado pelos estudos numéricos da gaiola, o método do pêndulo quadrifilar possui uma faixa ótima de trabalho no qual é possível fazer a estimativa do momento de inércia do corpo rígido com baixa discrepância. A bancada experimental construída possui a massa de 8.081 gramas e o mockup de CubeSat possui massa de 555,34 gramas, o que gera uma razão de massa de aproximadamente $1/14$. Além disso, a inércia da bancada experimental medida é de $585\ gm^2$ e do mockup medido é de aproximadamente $4\ gm^2$, o que significa uma razão de inércia de aproximadamente $1/146$. Estas razões de massa e inércia, de acordo com o estudo numérico da determinação do momento de inércia de um corpo rígido usando a gaiola (Gráfico 4.9) estão fora da região ótima de trabalho da gaiola. Isso pode ser observado na alta incerteza e na inconsistência da estimativa do momento de inércia do mockup. Com a adição da massa de calibração, a razão de massa passou para $1/1{,}5$ e a razão de inércia para $1/16$. Deste modo, a faixa de trabalho da gaiola é melhor do que o caso sem a massa de calibração, como é constatado no tensor de inércia obtido.

A gaiola com a plataforma giratória representa um ótimo método para determinar o tensor de inércia de um corpo rígido. Porém, como descrito pelos resultados dos ensaios experimentais e numéricos, a configuração da gaiola montada neste trabalho não permite uma medição precisa do tensor de inércia de um CubeSat, em virtude das baixas razões de inércia e massa. Para trabalhos posteriores, sugere-se uma nova bancada projetada seja realizada com o objetivo em reduzir o seu peso e momento de inércia, sendo o mais próximo possível do CubeSat. Além disso, a plataforma giratória pode ser remodelada para permitir a rotação segura do CubeSat em diferentes ângulos, além de zero grau e 10 graus.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, R. A.B. e URGUEIRA, A. P.V. e MAIA, N. M.M. **Identification of rigid body properties from vibration measurements**. Journal of Sound and Vibration, v. 299, n. 4–5, p. 884–899, 2007.

ASHORY, M. R. e MALEKJAFARIAN, A. e HARANDI, P. **On the accuracy of estimation of rigid body inertia properties from modal testing results**. Structural Engineering and Mechanics, v. 35, n. 1, p. 53–65, 2010.

BAUCHAU, O. A. e CRAIG, J. I. Euler-Bernoulli beam theory. [S.l: s.n.], 2009. p. 173–221. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-2516-6_5>.

BEER, Ferdinand Pierre e CLAUSEN, William E e JOHNSTON, E Russell. **Mecânica vetorial para engenheiros / Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston Jr., William E. Clausen ; com a colaboração de George H. Staab ; tradução: Nelson Manzanares Filho, Ariosto Bretanha Jorge ; revisão técnica: José Carlos Amorim**. [S.l: s.n.], 2006. Disponível em: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07149a&AN=buin.953007&site=eds-live>.

CHEN, Xiaolin e LIU, Yijun. **Finite Element Modeling and Simulation with ANSYS Workbench**. [S.l.]: CRC Press, 2019.

FELIPPA, Carlos A. **Introduction to finite element methods**. [S.l.]: University of Colorado, 2004.

FERGUSON, Philip A. **On-Orbit Spacecraft Inertia and Rate Sensor Scale Factor Estimation for Microsatellites**. 22nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, n. 905, 2008.

GENTA, G. e DELPRETE, C. **Some considerations on the experimental determination of moments of inertia**. Meccanica, v. 29, n. 2, p. 125–141, 1994.

GOBBI, M. e MASTINU, G. e PREVIATI, G. **A method for measuring the inertia properties of rigid bodies**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 25, n. 1, p. 305–318, 2011.

GRIFFITHS, I. W. e WATKINS, J. e SHARPE, D. **Measuring the moment of inertia of the human body by a rotating platform method**. American Journal of Physics, v. 73, n. 1, p. 85–92, 2005.

HALDERMAN JR, W; e DUNN, Michael G. **High-Accuracy Turbine Performance**

Measurements in Short-Duration Facilities. The american society of mechanical engineers, 1996.

HINRICHSEN, Peter F. **Bifilar Suspension Measurement of Boat Inertia Parameters**. Journal of Sailboat Technology, n. May, p. 1–37, 2002.

HOU, Zhi Chao et al. **A new trifilar pendulum approach to identify all inertia parameters of a rigid body or assembly**. Mechanism and Machine Theory, v. 44, n. 6, p. 1270–1280, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.07.004>.

HUANG, S. J. e LALLEMENT, G. **Direct estimation of rigid body properties from harmonic forced responses**. Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC, v. 1, n. April, p. 175–180, 1997.

JARDIN, Matthew e MUELLER, Eric. **Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum**. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, n. August, p. 1–23, 2007.

JCGM. **Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement**. International Organization for Standardization (ISO), v. JCGM 100:1, p. p.134, 2008.

JONES, Harry W. **The Recent Large Reduction in Space Launch Cost**. 48th International Conference on Environmental Systems, n. 81, p. 81, 2018.

KIM, Dong-Hoon e CHOI, Dae-Gyun e OH, Hwa-Suk. **Inertia Estimation of Spacecraft Based on Modified Law of Conservation of Angular Momentum**. Journal of Astronomy and Space Sciences, v. 27, n. 4, p. 353–357, 15 Dec. 2010. Disponível em: <http://koreascience.or.kr/journal/view.jsp?kj=OJOOBS&py=2010&vnc=v27n4&sp=353>.

KULU, Erik. **Nanosats Database**. Disponível em: <https://www.nanosats.eu/>. Acesso em: 11 jan. 2021.

LAKATOS, Istv??n. **Diagnostic measurement for the effective performance of motor vehicles**. Acta Polytechnica Hungarica, v. 10, n. 3, p. 239–249, 2013.

LIU, Yu et al. Design, Analysis and Simulation of a Device for Measuring the Inertia Parameters of Rigid Bodies. 2017, Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 965–975.

MALEKJAFARIAN, A. e ASHORY, M. R. e KHATIBI, M. M. **Identification of inertia properties from the results of output-only modal analysis**. Archive of Applied Mechanics, v. 83, n. 6, p. 923–937, 2013.

MATHEWSON, Samantha. **India Launches Record-Breaking 104 Satellites on Single**

Rocket. Disponível em: <https://www.space.com/35709-india-rocket-launches-record-104-satellites.html>.

MCFARLAND, Chester et al. Near Real-Time Closed-Loop Optimal Control Feedback for Spacecraft Attitude Maneuvers. 10 Aug. 2009, Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 10 Aug. 2009. Disponível em: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2009-5814>.

MENDONÇA, Vinicius de Abreu. **Incerteza experimental do momento de inércia polar no pêndulo trifilar : aplicação para pás eólicas comerciais**. 2017. 2017.

MINDA, Andrea Amalia e GILLICH, Gilbert Rainer. **A review of interpolation methods used for frequency estimation**. Romanian Journal of Acoustics and Vibration, v. 17, n. 1, p. 21–26, 2020.

MUCCHI, E. et al. **Determining the Rigid-Body Inertia Properties of Cumbersome Systems: Comparison of Techniques in Time and Frequency Domain**. Experimental Techniques, v. 35, n. 3, p. 36–43, May 2011.

MUCCHI, Emiliano e BOTTONI, Giuliamarta e DI GREGORIO, Raffaele. **Determining the rigid-body inertia properties of a knee prosthesis by FRF measurements**. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, 2009.

PANDIT, S. M. e HU, Z. Q. **Determination of rigid body characteristics from time domain modal test data**. Journal of Sound and Vibration. [S.l: s.n.]. , 1994

PANIAGUA, G. e YASA, T. **Accurate Turbine Inertia Measurement**. Experimental Mechanics, v. 47, n. 5, p. 693–700, Sep. 2007.

PAULA, Elaine de Souza Ferreira de. e MAGALHAES, Renato Oleiveira de. **ANALISE DE BALANÇO DE POTENCIA, PROJETO PRELIMINAR DE PAINEL SOLAR E DIMENSIONAMENTO DE BATERIA DE UM CUBESAT 3U PARA DETECÇÃO DE RAIOS**. II Congresso Aeroespacial Brasileiro, 2019.

PEGRAM, James P. e ANEMAAT, William A. **Preliminary estimation of airplane moments of inertia using CAD solid modeling**. SAE Technical Papers, n. 724, 2000.

SANTANA, Raphael Ugolini. **Experimental determination of rotational inertia of wind turbine mechanical components (port. Determinação experimental da inércia de rotação de componentes de turbinas eólicas)**. 2017. 89 f. University of Brasília, 2017.

SANTANA, Raphael Ugolini e MORAIS, Marcus Vinicius Girão De e DINIZ, Alberto Carlos G. C. Implementation of ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (ISO-GUM) to Rotational Inertia Determination of a Small Wind Turbine by Acceleration–Deceleration Method. [S.l: s.n.], 2021. p. 615–627. Disponível em:

<http://link.springer.com/10.1007/978-981-15-8049-9_38>.

SCHEDLINSKI, Carsten e LINK, Michael. **Survey of current inertia parameter identification methods**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 15, n. 1, p. 189–211, Jan. 2001.

SILVA, Rodrigo Cardoso Da et al. **Tabletop Testbed for Attitude Determination and Control of Nanosatellites**. Journal of Aerospace Engineering, v. 32, n. 1, p. 1–10, 2019.

SOLAGUREN-BEASCOA FERNÁNDEZ, M. e ALEGRE CALDERÓN, J. M. e BRAVO DÍEZ, P. M. **Implementation in MATLAB of the adaptive Monte Carlo method for the evaluation of measurement uncertainties**. Accreditation and Quality Assurance, v. 14, n. 2, p. 95–106, 2009.

TANG, Liang e SHANGGUAN, Wen Bin. **An improved pendulum method for the determination of the center of gravity and inertia tensor for irregular-shaped bodies**. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, v. 44, n. 10, p. 1849–1859, 2011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2011.09.004>.

TIAN, Shengli et al. **Experimental study on frictional loss of high-speed bearings based on free-deceleration and energy-balance methods**. Industrial Lubrication and Tribology, p. ILT-07-2018-0281, Apr. 2019.

XU, Chuanyan e DING, Kang e YANG, Zhijian. **Identification of engine inertia parameters on the basis of frequency response functions**. International Journal of Vehicle Design, v. 60, n. 1–2, p. 121–137, 2012.

YOUNG, Hugh D e FREEDMAN, Roger A. **Física / Hugh D.Young, Roger A. Freedman ; colaborador T. R. Sandin ; tradução Sonia Midori Yamamoto**. [S.l: s.n.], 2008. Disponível em: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07149a&AN=buin.985841&site=eds-live>.

ANEXOS

ANEXO A - CÓDIGOS DO ANSYS

A.1. PÊNDULO SIMPLES COM ELEMENTO CABO

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,pêndulo simples
/PREP7
!*
ET,1,LINK180
ET,2,MASS21
!*
!*
R,1,1,1,1, , , ,
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
!*
!*
SECTYPE,1,LINK, ,cabo
SECDATA,.049e-6,
SECCONTROL,0,0
!*
K, ,,,,
K, ,,,-1,
LSTR,       2,       1
!*
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,       1
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,1,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
CM,_Y,KP
KSEL, , , ,       2
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
KATT,       1,       1,   2,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
FLST,5,1,4,ORDE,1
FITEM,5,1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,100, , , , ,100
!*
LMESH,       1
KMESH,       2
!*
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
ACEL,0,0,9.78,
!*
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!*
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
!*
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.2. PÊNDULO SIMPLES COM ELEMENTO VIGA

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,pêndulo simples
/PREP7
!*
ET,1,BEAM188
ET,2,MASS21
!*
!*
R,1,1,1,1, , , ,
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
!*
!*
SECTYPE,   1, BEAM,
CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,.25e-
3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
!*
K, ,,,,
K, ,,,-1,
LSTR,       2,       1
!*
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,       1
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
!*
!*
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,1,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
CM,_Y,KP
KSEL, , , ,       2
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
KATT,       1,       1,   2,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
FLST,5,1,4,ORDE,1
FITEM,5,1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,100, , , , ,100
!*
LMESH,       1
KMESH,       2
!*
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
ACEL,0,0,9.78,
!*
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!*
!*
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
!*
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.3. PÊNDULO TRIFILAR

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Trifilar Reto
/PREP7
K, ,0.3,,,
K, ,-0.3,,,
K, ,,0.5,,
K, ,,0.5,1.5,
K, ,0.3,,1.5,
K, ,-0.3,,1.5,
K, ,0.3,,-0.012,
K, ,-0.3,,-0.012,
K, ,,0.5,-0.012,
LSTR, 6, 2
LSTR, 4, 3
LSTR, 5, 1
V, 2, 3, 1, 8, 9, 7
!*
ET,1,BEAM188
SECTYPE,   1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,1.6e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
ET,2,SOLID185
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,470
!*
FLST,5,3,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-3
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,3,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-3
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,10, , , , ,1
!*
FLST,2,3,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-3
LMESH,P51X
!*
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , , 1
CM,_Y1,VOLU
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
VATT, 2, , 2, 0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
!*
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,      1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
/SOLU
ANTYPE,0
FLST,2,3,3,ORDE,2
FITEM,2,4
FITEM,2,-6
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
ACEL,0,0,9.78,
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!*
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LI
```

A.4. PÊNDULO TRIFILAR COM CORPO RÍGIDO

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Trifilar Reto com Massa Concentrada
/PREP7
K, ,0.3,,,
K, ,-0.3,,,
K, ,,0.5,,
K, ,,0.5,1.5,
K, ,0.3,,1.5,
K, ,-0.3,,1.5,
K, ,0.3,,-0.012,
K, ,-0.3,,-0.012,
K, ,,0.5,-0.012,
K, ,0,.166,.1,
!*
LSTR, 6, 2
LSTR, 4, 3
LSTR, 5, 1
V, 2, 3, 1, 8, 9, 7
!*
ET,1,BEAM188
SECTYPE,   1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,1.6e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
ET,2,SOLID185
ET,3,MASS21
!* CORPO DE PROVA (mx,my,mz,Ixx,Iyy,Izz)
R,1,1,1,1,8.33e-3,8.33e-3,8.33e-3,
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,470
!*
!*
FLST,5,3,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-3
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
!*
!*
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
FLST,5,3,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-3
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,10, , , , ,1
!*
FLST,2,3,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-3
LMESH,P51X
!*
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
VATT,       2, ,   2,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
CM,_Y,KP
KSEL, , , ,      10
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,       1,       1,   3,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
KMESH,      10
!*
FLST,5,149,1,ORDE,81
FITEM,5,79
FITEM,5,84
FITEM,5,-86
FITEM,5,91
FITEM,5,-93
FITEM,5,97
FITEM,5,-100
```

```
FITEM,5,136
FITEM,5,-139
FITEM,5,143
FITEM,5,-146
FITEM,5,171
FITEM,5,178
FITEM,5,-179
FITEM,5,185
FITEM,5,-187
FITEM,5,192
FITEM,5,-195
FITEM,5,220
FITEM,5,-221
FITEM,5,227
FITEM,5,-228
FITEM,5,234
FITEM,5,-235
FITEM,5,241
FITEM,5,-242
FITEM,5,392
FITEM,5,397
FITEM,5,-399
FITEM,5,404
FITEM,5,-406
FITEM,5,410
FITEM,5,-413
FITEM,5,449
FITEM,5,-452
FITEM,5,456
FITEM,5,-459
FITEM,5,484
FITEM,5,491
FITEM,5,-492
FITEM,5,498
FITEM,5,-500
FITEM,5,505
FITEM,5,-508
FITEM,5,533
FITEM,5,-534
FITEM,5,540
FITEM,5,-541
FITEM,5,547
FITEM,5,-548
FITEM,5,554
FITEM,5,-555
FITEM,5,561
FITEM,5,-562
FITEM,5,571
FITEM,5,-576
FITEM,5,585
FITEM,5,-590
FITEM,5,597
FITEM,5,-604
FITEM,5,675
FITEM,5,-682
FITEM,5,689
FITEM,5,-696
FITEM,5,745
FITEM,5,-746
FITEM,5,759
FITEM,5,-762
FITEM,5,773
FITEM,5,-778
FITEM,5,787
FITEM,5,-794
FITEM,5,843
FITEM,5,-846
FITEM,5,857
FITEM,5,-860
FITEM,5,871
FITEM,5,-874
FITEM,5,885
FITEM,5,-888
FITEM,5,899
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,     899
NSEL,S, , ,P51X
NSEL,A, , ,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,899,ALL,ALL, , , ,
CMSEL,S,_NODECM
!*
/SOLU
ANTYPE,0
FLST,2,3,3,ORDE,2
FITEM,2,4
FITEM,2,-6
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
ACEL,0,0,9.78,
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!*
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.5. PÊNDULO QUADRIFILAR

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Quadrifilar Inclinado
/PREP7
!* Preparação dos keypoints
K, ,0.3,0.3,,
K, ,-0.3,0.3,,
K, ,-0.3,-0.3,,
K, ,0.3,-0.3,,
K, ,0.6,0.6,1.5,
K, ,-0.6,0.6,1.5,
K, ,-0.6,-0.6,1.5,
K, ,0.6,-0.6,1.5,
K, ,0.3,0.3,-0.012,
K, ,-0.3,0.3,-0.012,
K, ,-0.3,-0.3,-0.012,
K, ,0.3,-0.3,-0.012,
!* Criação das linhas e volume
LSTR, 6, 2
LSTR, 5, 1
LSTR, 7, 3
LSTR, 8, 4
V, 10, 9, 12, 11, 2, 1, 4, 3
!* Elementos
ET,1,BEAM188
SECTYPE,   1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.4e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
ET,2,SOLID185
!* Propriedades mecanicas dos materiais
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e12
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,470
!* Criação dos cabos e base
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , ,50, , , , ,1
FLST,2,4,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
LMESH,P51X
!* Base
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
VATT,       2, ,   2,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!* Condicoes de contorno
ACEL,0,0,9.78,
FLST,2,4,3,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-8
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
!* Solucao estatica
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.6. PÊNDULO QUADRIFILAR COM CORPO RÍGIDO

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Quadrifilar Inclinado
/PREP7
!*
!* Preparação dos keypoints
K, ,0.3,0.3,,
K, ,-0.3,0.3,,
K, ,-0.3,-0.3,,
K, ,0.3,-0.3,,
K, ,0.6,0.6,1.5,
K, ,-0.6,0.6,1.5,
K, ,-0.6,-0.6,1.5,
K, ,0.6,-0.6,1.5,
K, ,0.3,0.3,-0.012,
K, ,-0.3,0.3,-0.012,
K, ,-0.3,-0.3,-0.012,
K, ,0.3,-0.3,-0.012,
K, , , ,0.05,
!*
!* Criação das linhas e volume
LSTR,       6,       2
LSTR,       5,       1
LSTR,       7,       3
LSTR,       8,       4
V,      10,       9,      12,      11,       2,       1,       4,
3
!*
!* Elementos
ET,1,BEAM188
SECTYPE,   1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,.4e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
ET,2,SOLID185
ET,3,MASS21
!* CORPO DE PROVA (mx,my,mz,Ixx,Iyy,Izz)
R,1,.5,.5,.5,300e-3,100e-3,50e-3,
!*
!* Propriedades mecanicas dos materiais
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,470
!*
!* Criação dos cabos e base
!* Cabos
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , ,100, , , , ,1
FLST,2,4,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
LMESH,P51X
!* Base
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
VATT,       2, ,   2,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , ,       1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
CM,_Y,KP
KSEL, , , ,      13
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
KATT,       2,       1,   3,       0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
KMESH,      13
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,    1425
```

```
NSEL,S, , ,    1425
NSEL,A, , ,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
!*
FLST,5,65,1,ORDE,25
FITEM,5,540
FITEM,5,-543
FITEM,5,554
FITEM,5,-557
FITEM,5,568
FITEM,5,-571
FITEM,5,582
FITEM,5,-585
FITEM,5,912
FITEM,5,-915
FITEM,5,926
FITEM,5,-929
FITEM,5,940
FITEM,5,-943
FITEM,5,954
FITEM,5,-957
FITEM,5,1183
FITEM,5,-1190
FITEM,5,1211
FITEM,5,-1218
FITEM,5,1239
FITEM,5,-1246
FITEM,5,1267
FITEM,5,-1274
FITEM,5,1425
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,    1425
NSEL,S, , ,P51X
NSEL,A, , ,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
!*
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,1425,ALL,ALL, , , ,
CMSEL,S,_NODECM
!* Condicoes de contorno
ACEL,0,0,9.78,
FLST,2,4,3,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-8
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
!*
!* Solucao estatica
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!* Modal
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
!*
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.7. PÊNDULO QUADRIFILAR COM GAIOLA E CORPO RÍGIDO

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Quadrifilar com Gaiola e Corpo Rigido
/PREP7
!* KEYPOINTS (1-12)
K,,0.25,0.25,,
K,,-.25,0.25,,
K,,-.25,-.25,,
K,,0.25,-.25,,
K,,0.5,0.5,1.5,
K,,-.5,0.5,1.5,
K,,-.5,-.5,1.5,
K,,0.5,-.5,1.5,
K,,0.25,0.25,-.5
K,,-.25,0.25,-.5
K,,-.25,-.25,-.5
K,,0.25,-.25,-.5
!* Barra lateral (13-18)
K,,,-.25,,
K,,,-.25,-.25,
K,,,-.25,-.5,
K,,,0.25,,
K,,,0.25,-.25,
K,,,0.25,-.5,
!* Massa
K,,,,-.25,
!* Criacao das linhas
!* verticais
LSTR,1,5
LSTR,2,6
LSTR,3,7
LSTR,4,8
LSTR,1,9
LSTR,2,10
LSTR,3,11
LSTR,4,12
LSTR,13,14
LSTR,14,15
LSTR,16,17
LSTR,17,18
!* horizontais
LSTR,1,16
LSTR,2,16
LSTR,1,4
LSTR,3,2
LSTR,3,13
LSTR,4,13
LSTR,9,18
LSTR,10,18
LSTR,9,12
LSTR,11,10
LSTR,11,15
LSTR,12,15
!* Elemento
ET,1,BEAM188
ET,2,MASS21
R,1,75.660,75.660,75.660,1,1,6553.6e-3,
!* Sessoes
SECTYPE, 1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,.2e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
SECTYPE, 2, BEAM, RECT, viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,20e-3,20e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
!* Propriedades mecanicas dos materiais
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e11
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,2700
!* Mesh dos cabos e base
!* Cabos
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,,100,,,,,1
!* Viga
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,2, ,1, , , ,2
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
```

```
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , ,10, , , , ,1
!* MESH
FLST,2,24,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-24
LMESH,P51X
!*MASS21
CM,_Y,KP
KSEL,,,,19
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,1,1,2,0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
KMESH,19
!*Coupling
FLST,5,20,1,ORDE,10
FITEM,5,446
FITEM,5,452
FITEM,5,-455
FITEM,5,457
FITEM,5,-461
FITEM,5,467
FITEM,5,473
FITEM,5,-476
FITEM,5,478
FITEM,5,-482
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,595
NSEL,S,,,P51X
NSEL,A,,,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,595,ALL,ALL,,,,
CMSEL,S,_NODECM
!* Condicoes de contorno
ACEL,0,0,9.78,
FLST,2,4,3,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-8
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
!* Solucao
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!* Modal
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.8. PÊNDULO QUADRIFILAR COM GAIOLA E CORPO RÍGIDO, MODELO DE TANG

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Quadrifilar com Gaiola e Corpo Rigido
/PREP7
!* KEYPOINTS (1-12)
K,,0.25,0.25,,
K,,-.25,0.25,,
K,,-.25,-.25,,
K,,0.25,-.25,,
K,,0.5,0.5,1.5,
K,,-.5,0.5,1.5,
K,,-.5,-.5,1.5,
K,,0.5,-.5,1.5,
K,,0.25,0.25,-.5
K,,-.25,0.25,-.5
K,,-.25,-.25,-.5
K,,0.25,-.25,-.5
!* Barra lateral (13-18)
K,,,-.25,,
K,,,-.25,-.25,
K,,,-.25,-.5,
K,,,0.25,,
K,,,0.25,-.25,
K,,,0.25,-.5,
!* Massa
!*LOCAL,KCN,KCS,XC,YC,ZC,THXY,THYZ,T
HZX,PAR1,PAR2
LOCAL,11,0,0,0,-0.25,0,0,0,1,1,
K,,,,,
!* Criacao das linhas
!* verticais
LSTR,1,5
LSTR,2,6
LSTR,3,7
LSTR,4,8
LSTR,1,9
LSTR,2,10
LSTR,3,11
LSTR,4,12
LSTR,13,14
LSTR,14,15
LSTR,16,17
LSTR,17,18
!* horizontais
LSTR,1,16
LSTR,2,16
LSTR,1,4
LSTR,3,2
LSTR,3,13
LSTR,4,13
LSTR,9,18
LSTR,10,18
LSTR,9,12
LSTR,11,10
LSTR,11,15
LSTR,12,15
!* Elemento
ET,1,BEAM188
ET,2,MASS21
R,1,7.566,7.566,7.566,1,1,6553.6e-3,
!* Sessoes
SECTYPE, 1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,.2e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
SECTYPE, 2, BEAM, RECT, viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,20e-3,20e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
!* Propriedades mecanicas dos materiais
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e11
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,2700
!* Mesh dos cabos e base
!* Cabos
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,,100,,,,,1
!* Viga
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,2, ,1, , , ,2
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
```

```
CMDELE,_Y1
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , ,10, , , , ,1
!* MESH
FLST,2,24,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-24
LMESH,P51X
!*MASS21
CM,_Y,KP
KSEL,,,,19
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,1,1,2,0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
KMESH,19
!*Coupling
FLST,5,20,1,ORDE,10
FITEM,5,446
FITEM,5,452
FITEM,5,-455
FITEM,5,457
FITEM,5,-461
FITEM,5,467
FITEM,5,473
FITEM,5,-476
FITEM,5,478
FITEM,5,-482
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,595
NSEL,S,,,P51X
NSEL,A,,,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,595,ALL,ALL,,,,
CMSEL,S,_NODECM
!* Condicoes de contorno
ACEL,0,0,9.78,
FLST,2,4,3,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-8
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
!* Solucao
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!* Modal
/SOLU
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

A.9. PÊNDULO QUADRIFILAR COM GAIOLA EXPERIMENTAL

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE,Quadrifilar com Gaiola e Corpo Rigido
/PREP7
!* KEYPOINTS (1-12)
K,,0.25,0.25,,
K,,-.25,0.25,,
K,,-.25,-.25,,
K,,0.25,-.25,,
K,,0.75,0.75,2.7,
K,,-.75,0.75,2.7,
K,,-.75,-.75,2.7,
K,,0.75,-.75,2.7,
K,,0.25,0.25,-.5
K,,-.25,0.25,-.5
K,,-.25,-.25,-.5
K,,0.25,-.25,-.5
!* Barra lateral (13-18)
K,,,-.25,,
K,,,-.25,-.25,
K,,,-.25,-.5,
K,,,0.25,,
K,,,0.25,-.25,
K,,,0.25,-.5,
!* Massa
K,,,,-.25,
K,,,,-.5,
!* Criacao das linhas
!* verticais
LSTR,1,5
LSTR,2,6
LSTR,3,7
LSTR,4,8
LSTR,1,9
LSTR,2,10
LSTR,3,11
LSTR,4,12
LSTR,13,14
LSTR,14,15
LSTR,16,17
LSTR,17,18
!* horizontais
LSTR,1,16
LSTR,2,16
LSTR,1,4
LSTR,3,2
LSTR,3,13
LSTR,4,13
LSTR,9,18
LSTR,10,18
LSTR,9,12
LSTR,11,10
LSTR,11,15
LSTR,12,15
!* Elemento
ET,1,BEAM188
ET,2,MASS21
!* Base giratória
R,1,1.543,1.543,1.543,16.87e-3,78.19e-3,80e-3,
!* Placa madeira
R,2,2.419,2.419,2.419,72.6e-3,72.6e-3,145.15e-3,
!* Cantoneiras e parafusos
R,3,0.1327,0.1327,0.1327,.0287e-3,.0287e-
3,.0493e-3,
!* Sessoes
SECTYPE, 1, BEAM, CSOLID, cabo, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,.2e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
SECTYPE, 2, BEAM, RECT, viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,6.613e-3,6.613e-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
!* Propriedades mecanicas dos materiais
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e11
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7870
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,210e9
MPDATA,PRXY,2,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,9485
!* Mesh dos cabos e base
!* Cabos
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,1, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,,100,,,,,1
!* Viga
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
```

```
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,2, ,1, , , ,2
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-24
CM,_Y,LINE
LSEL,,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,,20,,,,,1
!* MESH
FLST,2,24,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-24
LMESH,P51X
!*Base giratoria
CM,_Y,KP
KSEL,,,,19
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,1,1,2,0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
KMESH,19
!*Coupling
FLST,5,23,1,ORDE,11
FITEM,5,486
FITEM,5,501
FITEM,5,-505
FITEM,5,507
FITEM,5,-511
FITEM,5,527
FITEM,5,542
FITEM,5,-546
FITEM,5,548
FITEM,5,-552
FITEM,5,795
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,795
NSEL,S,,,P51X
NSEL,A,,,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,795,ALL,ALL, , , ,
CMSEL,S,_NODECM
!*Placa de madeira
CM,_Y,KP
KSEL,,,,20
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,1,2,2,0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
KMESH,20
!*Coupling
FLST,5,121,1,ORDE,9
FITEM,5,405
FITEM,5,425
FITEM,5,445
FITEM,5,465
FITEM,5,506
FITEM,5,547
FITEM,5,681
FITEM,5,-794
FITEM,5,796
CM,_NODECM,NODE
*SET,_z1,796
NSEL,S,,,P51X
NSEL,A,,,_Z1
CM,_CERGCM,NODE
CMSEL,S,_NODECM
CMSEL,S,_CERGCM
CERIG,796,ALL,ALL,,,,
CMSEL,S,_NODECM
!* Cantoneiras e parafusos
FLST,5,8,3,ORDE,4
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
FITEM,5,9
FITEM,5,-12
CM,_Y,KP
KSEL,,,,P51X
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
KATT,1,3,2,0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
FLST,2,8,3,ORDE,4
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
FITEM,2,9
FITEM,2,-12
KMESH,P51X
!* Condicoes de contorno
ACEL,0,0,9.78,
FLST,2,4,3,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-8
DK,P51X,,0,,0,ALL,,,,,,
!* Solucao
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!* Modal
/SOLU
```

```
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,10
EQSLV,SPAR
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,1
MODOPT,LANB,10,0,0, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
```

ANEXO B - CÓDIGOS EM PYTHON

B.1. AQUISIÇÃO DE DADOS UTILIZANDO O MPU 9250

```
# leitura dos acelerometros e giroscopios
import MPU9250
import time
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#accel_file=open('Acelerometro.csv','w')

mpu9250 = MPU9250.MPU9250()
## Configure MPU-9250
#  @param [in] self The object pointer.
#  @param [in] gfs Gyro Full Scale
Select(default:GFS_250[+250dps])
#  @param [in] afs Accel Full Scale
Select(default:AFS_2G[2g])
#mpu9250.configMPU9250('0x68','250','2')
##
t=open('Tempo.txt','w+')
## Acelerometro
ax=open('Ax.txt','w+')
ay=open('Ay.txt','w+')
az=open('Az.txt','w+')
## Giroscopio
gx=open('Gx.txt','w+')
gy=open('Gy.txt','w+')
gz=open('Gz.txt','w+')
##
t_taxa=float(input('Taxa de leitura da IMU [Hz]?'))
t_input=input('Quanto tempo para rodar o sensor
[segundos]?')
t_inicio=time.time()
t_end=time.time()+float(t_input)
print('Inicio da leitura a IMU')
while time.time() <t_end:
	t.write(str(time.time()))
	t.write('\n')

	accel = mpu9250.readAccel()
	ax.write(str(accel['x']))
	ax.write('\n')
	ay.write(str(accel['y']))
	ay.write('\n')
	az.write(str(accel['z']))
	az.write('\n')

	gyro = mpu9250.readGyro()
	gx.write(str(gyro['x']))
	gx.write('\n')
	gy.write(str(gyro['y']))
	gy.write('\n')
	gz.write(str(gyro['z']))
	gz.write('\n')

#	mag = mpu9250.readMagnet()
	time.sleep(1/t_taxa)
print('Termino da leitura da IMU')
#
t.close()
ax.close()
ay.close()
az.close()
gx.close()
gy.close()
gz.close()
```

ANEXO C - CÓDIGOS DO MATLAB

C.1. ROTINA PRINCIPAL DA DETERMINAÇÃO DA FREQUÊNCIA E MOMENTO DE INÉRCIA

```
clc;clear all;close all;
%% importando dados
%%% gaiola zero graus
% vazia
r1_0o=load('0 graus/Vazia/run1/dados.mat');
r2_0o=load('0 graus/Vazia/run2/dados.mat');
r3_0o=load('0 graus/Vazia/run3/dados.mat');

% Viga
% eixo x
r1_0o_viga_x=load('0 graus/Viga/eixo
X/run1/dados.mat');
r2_0o_viga_x=load('0 graus/Viga/eixo
X/run2/dados.mat');
r3_0o_viga_x=load('0 graus/Viga/eixo
X/run3/dados.mat');
% eixo y
r1_0o_viga_y=load('0 graus/Viga/eixo
Y/run1/dados.mat');
r2_0o_viga_y=load('0 graus/Viga/eixo
Y/run2/dados.mat');
r3_0o_viga_y=load('0 graus/Viga/eixo
Y/run3/dados.mat');
% eixo z
r1_0o_viga_z=load('0 graus/Viga/eixo
Z/run1/dados.mat');
r2_0o_viga_z=load('0 graus/Viga/eixo
Z/run2/dados.mat');
r3_0o_viga_z=load('0 graus/Viga/eixo
Z/run3/dados.mat');

% Cubesat
% eixo x
r1_0o_cube_x=load('0 graus/Cubesat/eixo
X/run1/dados.mat');
r2_0o_cube_x=load('0 graus/Cubesat/eixo
X/run2/dados.mat');
r3_0o_cube_x=load('0 graus/Cubesat/eixo
X/run3/dados.mat');
% eixo y
r1_0o_cube_y=load('0 graus/Cubesat/eixo
Y/run1/dados.mat');
r2_0o_cube_y=load('0 graus/Cubesat/eixo
Y/run2/dados.mat');
r3_0o_cube_y=load('0 graus/Cubesat/eixo
Y/run3/dados.mat');
% eixo z
r1_0o_cube_z=load('0 graus/Cubesat/eixo
Z/run1/dados.mat');
r2_0o_cube_z=load('0 graus/Cubesat/eixo
Z/run2/dados.mat');
r3_0o_cube_z=load('0 graus/Cubesat/eixo
Z/run3/dados.mat');

%%% gaiola dez graus
r1_10o=load('10 graus/Vazia/run1/dados.mat');
r2_10o=load('10 graus/Vazia/run2/dados.mat');
r3_10o=load('10 graus/Vazia/run3/dados.mat');

% viga
% eixo x-y
r1_10o_viga_xy=load('10 graus/Viga/eixo X-
Y/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_xy=load('10 graus/Viga/eixo X-
Y/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_xy=load('10 graus/Viga/eixo X-
Y/run3/dados.mat');
% eixo x-z
r1_10o_viga_xz=load('10 graus/Viga/eixo X-
Z/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_xz=load('10 graus/Viga/eixo X-
Z/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_xz=load('10 graus/Viga/eixo X-
Z/run3/dados.mat');
% eixo y-x
r1_10o_viga_yx=load('10 graus/Viga/eixo Y-
X/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_yx=load('10 graus/Viga/eixo Y-
X/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_yx=load('10 graus/Viga/eixo Y-
X/run3/dados.mat');
% eixo y-z
r1_10o_viga_yz=load('10 graus/Viga/eixo Y-
Z/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_yz=load('10 graus/Viga/eixo Y-
Z/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_yz=load('10 graus/Viga/eixo Y-
Z/run3/dados.mat');
% eixo z-x
r1_10o_viga_zx=load('10 graus/Viga/eixo Z-
X/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_zx=load('10 graus/Viga/eixo Z-
X/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_zx=load('10 graus/Viga/eixo Z-
X/run3/dados.mat');
% eixo z-y
r1_10o_viga_zy=load('10 graus/Viga/eixo Z-
Y/run1/dados.mat');
r2_10o_viga_zy=load('10 graus/Viga/eixo Z-
Y/run2/dados.mat');
r3_10o_viga_zy=load('10 graus/Viga/eixo Z-
Y/run3/dados.mat');

% Cubesat
% eixo x-y
```

```
r1_10o_cube_xy=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Y/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_xy=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Y/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_xy=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Y/run3/dados.mat');
% eixo x-z
r1_10o_cube_xz=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Z/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_xz=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Z/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_xz=load('10 graus/Cubesat/eixo X-Z/run3/dados.mat');
% eixo y-x
r1_10o_cube_yx=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-X/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_yx=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-X/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_yx=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-X/run3/dados.mat');
% eixo y-z
r1_10o_cube_yz=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-Z/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_yz=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-Z/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_yz=load('10 graus/Cubesat/eixo Y-Z/run3/dados.mat');
% eixo z-x
r1_10o_cube_zx=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-X/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_zx=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-X/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_zx=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-X/run3/dados.mat');
% eixo z-y
r1_10o_cube_zy=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-Y/run1/dados.mat');
r2_10o_cube_zy=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-Y/run2/dados.mat');
r3_10o_cube_zy=load('10 graus/Cubesat/eixo Z-Y/run3/dados.mat');

%%% gaiola 17 graus

%% Transformando o tempo em frequencia
%%%% ZERO graus
[t_r1_0o]=t_freq(r1_0o.t);
[t_r2_0o]=t_freq(r2_0o.t);
[t_r3_0o]=t_freq(r3_0o.t);

% Viga
% eixo X
[t_r1_0o_viga_x]=t_freq(r1_0o_viga_x.t);
[t_r2_0o_viga_x]=t_freq(r2_0o_viga_x.t);
[t_r3_0o_viga_x]=t_freq(r3_0o_viga_x.t);
% eixo Y
[t_r1_0o_viga_y]=t_freq(r1_0o_viga_y.t);
[t_r2_0o_viga_y]=t_freq(r2_0o_viga_y.t);
[t_r3_0o_viga_y]=t_freq(r3_0o_viga_y.t);
% eixo Z
[t_r1_0o_viga_z]=t_freq(r1_0o_viga_z.t);
[t_r2_0o_viga_z]=t_freq(r2_0o_viga_z.t);
[t_r3_0o_viga_z]=t_freq(r3_0o_viga_z.t);

% Cubesat
% eixo X
[t_r1_0o_cube_x]=t_freq(r1_0o_cube_x.t);
[t_r2_0o_cube_x]=t_freq(r2_0o_cube_x.t);
[t_r3_0o_cube_x]=t_freq(r3_0o_cube_x.t);
% eixo Y
[t_r1_0o_cube_y]=t_freq(r1_0o_cube_y.t);
[t_r2_0o_cube_y]=t_freq(r2_0o_cube_y.t);
[t_r3_0o_cube_y]=t_freq(r3_0o_cube_y.t);
% eixo Z
[t_r1_0o_cube_z]=t_freq(r1_0o_cube_z.t);
[t_r2_0o_cube_z]=t_freq(r2_0o_cube_z.t);
[t_r3_0o_cube_z]=t_freq(r3_0o_cube_z.t);

%%% GAIOLA dez graus
[t_r1_10o]=t_freq(r1_10o.t);
[t_r2_10o]=t_freq(r2_10o.t);
[t_r3_10o]=t_freq(r3_10o.t);

% Viga
% EIXO X-Y
[t_r1_10o_viga_xy]=t_freq(r1_10o_viga_xy.t);
[t_r2_10o_viga_xy]=t_freq(r2_10o_viga_xy.t);
[t_r3_10o_viga_xy]=t_freq(r3_10o_viga_xy.t);
% EIXO X-Z
[t_r1_10o_viga_xz]=t_freq(r1_10o_viga_xz.t);
[t_r2_10o_viga_xz]=t_freq(r2_10o_viga_xz.t);
[t_r3_10o_viga_xz]=t_freq(r3_10o_viga_xz.t);
% EIXO Y-X
[t_r1_10o_viga_yx]=t_freq(r1_10o_viga_yx.t);
[t_r2_10o_viga_yx]=t_freq(r2_10o_viga_yx.t);
[t_r3_10o_viga_yx]=t_freq(r3_10o_viga_yx.t);
% EIXO Y-Z
[t_r1_10o_viga_yz]=t_freq(r1_10o_viga_yz.t);
[t_r2_10o_viga_yz]=t_freq(r2_10o_viga_yz.t);
[t_r3_10o_viga_yz]=t_freq(r3_10o_viga_yz.t);
% EIXO Z-X
[t_r1_10o_viga_zx]=t_freq(r1_10o_viga_zx.t);
[t_r2_10o_viga_zx]=t_freq(r2_10o_viga_zx.t);
[t_r3_10o_viga_zx]=t_freq(r3_10o_viga_zx.t);
% EIXO Z-Y
[t_r1_10o_viga_zy]=t_freq(r1_10o_viga_zy.t);
[t_r2_10o_viga_zy]=t_freq(r2_10o_viga_zy.t);
[t_r3_10o_viga_zy]=t_freq(r3_10o_viga_zy.t);

% Cubesat
% EIXO X-Y
[t_r1_10o_cube_xy]=t_freq(r1_10o_cube_xy.t);
[t_r2_10o_cube_xy]=t_freq(r2_10o_cube_xy.t);
[t_r3_10o_cube_xy]=t_freq(r3_10o_cube_xy.t);
% EIXO X-Z
[t_r1_10o_cube_xz]=t_freq(r1_10o_cube_xz.t);
[t_r2_10o_cube_xz]=t_freq(r2_10o_cube_xz.t);
[t_r3_10o_cube_xz]=t_freq(r3_10o_cube_xz.t);
% EIXO Y-X
[t_r1_10o_cube_yx]=t_freq(r1_10o_cube_yx.t);
```

```
[t_r2_10o_cube_yx]=t_freq(r2_10o_cube_yx.t);
[t_r3_10o_cube_yx]=t_freq(r3_10o_cube_yx.t);
% EIXO Y-Z
[t_r1_10o_cube_yz]=t_freq(r1_10o_cube_yz.t);
[t_r2_10o_cube_yz]=t_freq(r2_10o_cube_yz.t);
[t_r3_10o_cube_yz]=t_freq(r3_10o_cube_yz.t);
% EIXO Z-X
[t_r1_10o_cube_zx]=t_freq(r1_10o_cube_zx.t);
[t_r2_10o_cube_zx]=t_freq(r2_10o_cube_zx.t);
[t_r3_10o_cube_zx]=t_freq(r3_10o_cube_zx.t);
% EIXO Z-Y
[t_r1_10o_cube_zy]=t_freq(r1_10o_cube_zy.t);
[t_r2_10o_cube_zy]=t_freq(r2_10o_cube_zy.t);
[t_r3_10o_cube_zy]=t_freq(r3_10o_cube_zy.t);

%% Encontrando os peaks
% QINT - quadratic interpolation of three adjacent
samples
%
%%% ZERO
freq0=[];
freq0_viga=[]; % matriz m-n, onde m é referente ao
eixo de coordenada: 1=eixo x, 2=eixo y, 3=eixo z
freq0_cube=[];

% vazia
[f_n]=qint(r1_0o.gz,t_r1_0o);freq0(1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o.gz,t_r2_0o);freq0(2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o.gz,t_r3_0o);freq0(3)=f_n;

% Viga
% eixo X
[f_n]=qint(r1_0o_viga_x.gz,t_r1_0o_viga_x);freq0
_viga(1,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_viga_x.gz,t_r2_0o_viga_x);freq0
_viga(1,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_viga_x.gz,t_r3_0o_viga_x);freq0
_viga(1,3)=f_n;
% eixo Y
[f_n]=qint(r1_0o_viga_y.gz,t_r1_0o_viga_y);freq0
_viga(2,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_viga_y.gz,t_r2_0o_viga_y);freq0
_viga(2,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_viga_y.gz,t_r3_0o_viga_y);freq0
_viga(2,3)=f_n;
% eixo Z
[f_n]=qint(r1_0o_viga_z.gz,t_r1_0o_viga_z);freq0
_viga(3,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_viga_z.gz,t_r2_0o_viga_z);freq0
_viga(3,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_viga_z.gz,t_r3_0o_viga_z);freq0
_viga(3,3)=f_n;

% Cubesat
% eixo X
[f_n]=qint(r1_0o_cube_x.gz,t_r1_0o_cube_x);freq
0_cube(1,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_cube_x.gz,t_r2_0o_cube_x);freq
0_cube(1,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_cube_x.gz,t_r3_0o_cube_x);freq
0_cube(1,3)=f_n;
% eixo Y
[f_n]=qint(r1_0o_cube_y.gz,t_r1_0o_cube_y);freq
0_cube(2,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_cube_y.gz,t_r2_0o_cube_y);freq
0_cube(2,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_cube_y.gz,t_r3_0o_cube_y);freq
0_cube(2,3)=f_n;
% eixo Z
[f_n]=qint(r1_0o_cube_z.gz,t_r1_0o_cube_z);freq0
_cube(3,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_0o_cube_z.gz,t_r2_0o_cube_z);freq0
_cube(3,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_0o_cube_z.gz,t_r3_0o_cube_z);freq0
_cube(3,3)=f_n;

disp(['ZERO GRAU'])
disp(['Frequência da gaiola
vazia:',num2str(mean(freq0)),' +-
',num2str(2*std(freq0))])
disp(['Frequência com a viga:'])
disp(['eixo x: ',num2str(mean(freq0_viga(1,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_viga(1,:)))])
disp(['eixo y: ',num2str(mean(freq0_viga(2,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_viga(2,:)))])
disp(['eixo z: ',num2str(mean(freq0_viga(3,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_viga(3,:)))])
disp(['Frequência com o cubesat:'])
disp(['eixo x: ',num2str(mean(freq0_cube(1,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_cube(1,:)))])
disp(['eixo y: ',num2str(mean(freq0_cube(2,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_cube(2,:)))])
disp(['eixo z: ',num2str(mean(freq0_cube(3,:))),' +-
',num2str(2*std(freq0_cube(3,:)))])

%%% DEZ GRAUS
freq10=[];
freq10_viga=[];
freq10_cube=[];

% Vazia
[f_n]=qint(r1_10o.gz,t_r1_10o);freq10(1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o.gz,t_r2_10o);freq10(2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o.gz,t_r3_10o);freq10(3)=f_n;

% Viga
% eixo X-Y
[f_n]=qint(r1_10o_viga_xy.gz,t_r1_10o_viga_xy);f
req10_viga(1,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_xy.gz,t_r2_10o_viga_xy);f
req10_viga(1,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_viga_xy.gz,t_r3_10o_viga_xy);f
req10_viga(1,3)=f_n;
% eixo X-Z
[f_n]=qint(r1_10o_viga_xz.gz,t_r1_10o_viga_xz);f
req10_viga(2,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_xz.gz,t_r2_10o_viga_xz);f
req10_viga(2,2)=f_n;
```

```
[f_n]=qint(r3_10o_viga_xz.gz,t_r3_10o_viga_xz);freq10_viga(2,3)=f_n;
% eixo Y-X
[f_n]=qint(r1_10o_viga_yx.gz,t_r1_10o_viga_yx);freq10_viga(3,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_yx.gz,t_r2_10o_viga_yx);freq10_viga(3,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_viga_yx.gz,t_r3_10o_viga_yx);freq10_viga(3,3)=f_n;
% eixo Y-Z
[f_n]=qint(r1_10o_viga_yz.gz,t_r1_10o_viga_yz);freq10_viga(4,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_yz.gz,t_r2_10o_viga_yz);freq10_viga(4,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_viga_yz.gz,t_r3_10o_viga_yz);freq10_viga(4,3)=f_n;
% eixo Z-X
[f_n]=qint(r1_10o_viga_zx.gz,t_r1_10o_viga_zx);freq10_viga(5,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_zx.gz,t_r2_10o_viga_zx);freq10_viga(5,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_viga_zx.gz,t_r3_10o_viga_zx);freq10_viga(5,3)=f_n;
% eixo Z-Y
[f_n]=qint(r1_10o_viga_zy.gz,t_r1_10o_viga_zy);freq10_viga(6,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_viga_zy.gz,t_r2_10o_viga_zy);freq10_viga(6,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_viga_zy.gz,t_r3_10o_viga_zy);freq10_viga(6,3)=f_n;

% Cube
% eixo X-Y
[f_n]=qint(r1_10o_cube_xy.gz,t_r1_10o_cube_xy);
freq10_cube(1,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_xy.gz,t_r2_10o_cube_xy);
freq10_cube(1,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_xy.gz,t_r3_10o_cube_xy);
freq10_cube(1,3)=f_n;
% eixo X-Z
[f_n]=qint(r1_10o_cube_xz.gz,t_r1_10o_cube_xz);
freq10_cube(2,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_xz.gz,t_r2_10o_cube_xz);
freq10_cube(2,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_xz.gz,t_r3_10o_cube_xz);
freq10_cube(2,3)=f_n;
% eixo Y-X
[f_n]=qint(r1_10o_cube_yx.gz,t_r1_10o_cube_yx);
freq10_cube(3,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_yx.gz,t_r2_10o_cube_yx);
freq10_cube(3,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_yx.gz,t_r3_10o_cube_yx);
freq10_cube(3,3)=f_n;
% eixo Y-Z
[f_n]=qint(r1_10o_cube_yz.gz,t_r1_10o_cube_yz);
freq10_cube(4,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_yz.gz,t_r2_10o_cube_yz);
freq10_cube(4,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_yz.gz,t_r3_10o_cube_yz);
freq10_cube(4,3)=f_n;
% eixo Z-X
[f_n]=qint(r1_10o_cube_zx.gz,t_r1_10o_cube_zx);
freq10_cube(5,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_zx.gz,t_r2_10o_cube_zx);
freq10_cube(5,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_zx.gz,t_r3_10o_cube_zx);
freq10_cube(5,3)=f_n;
% eixo Z-Y
[f_n]=qint(r1_10o_cube_zy.gz,t_r1_10o_cube_zy);
freq10_cube(6,1)=f_n;
[f_n]=qint(r2_10o_cube_zy.gz,t_r2_10o_cube_zy);
freq10_cube(6,2)=f_n;
[f_n]=qint(r3_10o_cube_zy.gz,t_r3_10o_cube_zy);
freq10_cube(6,3)=f_n;

disp(['DEZ GRAUS:'])
disp(['Frequência da gaiola vazia:',num2str(mean(freq10)),' +- ',num2str(2*std(freq10))])
disp(['Frequência com viga:'])
disp(['eixo x-y: ',num2str(mean(freq10_viga(1,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(1,:)))])
disp(['eixo x-z: ',num2str(mean(freq10_viga(2,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(2,:)))])
disp(['eixo y-x: ',num2str(mean(freq10_viga(3,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(3,:)))])
disp(['eixo y-z: ',num2str(mean(freq10_viga(4,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(4,:)))])
disp(['eixo z-x: ',num2str(mean(freq10_viga(5,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(5,:)))])
disp(['eixo z-y: ',num2str(mean(freq10_viga(6,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_viga(6,:)))])
disp(['Frequência com cubesat:'])
disp(['eixo x-y: ',num2str(mean(freq10_cube(1,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(1,:)))])
disp(['eixo x-z: ',num2str(mean(freq10_cube(2,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(2,:)))])
disp(['eixo y-x: ',num2str(mean(freq10_cube(3,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(3,:)))])
disp(['eixo y-z: ',num2str(mean(freq10_cube(4,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(4,:)))])
disp(['eixo z-x: ',num2str(mean(freq10_cube(5,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(5,:)))])
disp(['eixo z-y: ',num2str(mean(freq10_cube(6,:))),' +- ',num2str(2*std(freq10_cube(6,:)))])

%% Definindo as inércia
% massa da bancada => 7725 + 356 = 8081g
% massa da viga = 4404g
% massa do cubesat = 555.34g
% função da inércia def_inércia(massa 1,frequencia 1,massa 2,frequencia 2)

disp(['Momento de inércia :'])
disp(['ZERO GRAU'])
[I,I0]=def_inércia(4404,mean(freq0_viga(1,:)),8081,mean(freq0));
disp(['Gaiola vazia :',num2str(I0),' gm^2'])
disp(['Viga eixo x: ',num2str(I),' gm^2'])
```

```
[I]=def_inércia(4404,mean(freq0_viga(2,:)),8081,
mean(freq0));
disp(['Viga eixo y: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq0_viga(3,:)),8081,
mean(freq0));
disp(['Viga eixo z: ',num2str(I),' gm^2'])
disp([''])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq0_cube(1,:)),8081
,mean(freq0));
disp(['Cubesat eixo x: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq0_cube(2,:)),8081
,mean(freq0));
disp(['Cubesat eixo y: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq0_cube(3,:)),8081
,mean(freq0));
disp(['Cubesat eixo z: ',num2str(I),' gm^2'])

disp(['DEZ GRAUS'])
[I,I0]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(1,:)),80
81,mean(freq10));
disp(['Gaiola vazia :',num2str(I0),' gm^2'])
disp(['Viga eixo x-y: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(2,:)),8081,
mean(freq10));
disp(['Viga eixo x-z: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(3,:)),8081,
mean(freq10));
disp(['Viga eixo y-x: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(4,:)),8081,
mean(freq10));
disp(['Viga eixo y-z: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(5,:)),8081,
mean(freq10));
disp(['Viga eixo z-x: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(4404,mean(freq10_viga(6,:)),8081,
mean(freq10));
disp(['Viga eixo z-y: ',num2str(I),' gm^2'])
disp([''])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(1,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo x-y: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(2,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo x-z: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(3,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo y-x: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(4,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo y-z: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(5,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo z-x: ',num2str(I),' gm^2'])
[I]=def_inércia(555.35,mean(freq10_cube(6,:)),808
1,mean(freq10));
disp(['Cubesat eixo z-y: ',num2str(I),' gm^2'])
%% Construindo as figuras
figure()
semilogy(t_r1_0o,abs(fft(r1_0o.gz)),t_r2_0o,abs(fft
(r2_0o.gz)),t_r3_0o,abs(fft(r3_0o.gz)))
title('Gaiola vazia')
xlim([0 2])
%%%
figure()
subplot(1,3,1)
semilogy(t_r1_0o_viga_x,abs(fft(r1_0o_viga_x.gz)
),t_r2_0o_viga_x,abs(fft(r2_0o_viga_x.gz)),...
    t_r3_0o_viga_x,abs(fft(r3_0o_viga_x.gz)))
title('Eixo X')
xlim([0 2])
subplot(1,3,2)
semilogy(t_r1_0o_viga_y,abs(fft(r1_0o_viga_y.gz)
),t_r2_0o_viga_y,abs(fft(r2_0o_viga_y.gz)),...
    t_r3_0o_viga_y,abs(fft(r3_0o_viga_y.gz)))
title('Eixo Y')
xlim([0 2])
subplot(1,3,3)
semilogy(t_r1_0o_viga_z,abs(fft(r1_0o_viga_z.gz)
),t_r2_0o_viga_z,abs(fft(r2_0o_viga_z.gz)),...
    t_r3_0o_viga_z,abs(fft(r3_0o_viga_z.gz)))
title('Eixo Z')
xlim([0 2])
suptitle('Gaiola com viga')
%%%
figure()
subplot(1,3,1)
semilogy(t_r1_0o_cube_x,abs(fft(r1_0o_cube_x.gz
)),t_r2_0o_cube_x,abs(fft(r2_0o_cube_x.gz)),...
    t_r3_0o_cube_x,abs(fft(r3_0o_cube_x.gz)))
title('Eixo X')
xlim([0 2])
subplot(1,3,2)
semilogy(t_r1_0o_cube_y,abs(fft(r1_0o_cube_y.gz
)),t_r2_0o_cube_y,abs(fft(r2_0o_cube_y.gz)),...
    t_r3_0o_cube_y,abs(fft(r3_0o_cube_y.gz)))
title('Eixo Y')
xlim([0 2])
subplot(1,3,3)
semilogy(t_r1_0o_cube_z,abs(fft(r1_0o_cube_z.gz
)),t_r2_0o_cube_z,abs(fft(r2_0o_cube_z.gz)),...
    t_r3_0o_cube_z,abs(fft(r3_0o_cube_z.gz)))
title('Eixo Z')
xlim([0 2])
suptitle('Gaiola com cube')
%%%
figure()
subplot(2,3,1)
semilogy(t_r1_10o_viga_xy,abs(fft(r1_10o_viga_x
y.gz)),t_r2_10o_viga_xy,abs(fft(r2_10o_viga_xy.g
z)),...

t_r3_10o_viga_xy,abs(fft(r3_10o_viga_xy.gz)))
title('x-y')
xlim([0 2])
subplot(2,3,4)
semilogy(t_r1_10o_viga_xz,abs(fft(r1_10o_viga_x
z.gz)),t_r2_10o_viga_xz,abs(fft(r2_10o_viga_xz.gz
)),...

t_r3_10o_viga_xz,abs(fft(r3_10o_viga_xz.gz)))
```

```
title('x-z')
xlim([0 2])
subplot(2,3,2)
semilogy(t_r1_10o_viga_yx,abs(fft(r1_10o_viga_y
x.gz)),t_r2_10o_viga_yx,abs(fft(r2_10o_viga_yx.g
z)),...

t_r3_10o_viga_yx,abs(fft(r3_10o_viga_yx.gz)))
title('y-x')
xlim([0 2])
subplot(2,3,5)
semilogy(t_r1_10o_viga_yz,abs(fft(r1_10o_viga_y
z.gz)),t_r2_10o_viga_yz,abs(fft(r2_10o_viga_yz.gz
)),...

t_r3_10o_viga_yz,abs(fft(r3_10o_viga_yz.gz)))
title('y-z')
xlim([0 2])
subplot(2,3,3)
semilogy(t_r1_10o_viga_zx,abs(fft(r1_10o_viga_z
x.gz)),t_r2_10o_viga_zx,abs(fft(r2_10o_viga_zx.g
z)),...

t_r3_10o_viga_zx,abs(fft(r3_10o_viga_zx.gz)))
title('z-x')
xlim([0 2])
subplot(2,3,6)
semilogy(t_r1_10o_viga_zy,abs(fft(r1_10o_viga_z
y.gz)),t_r2_10o_viga_zy,abs(fft(r2_10o_viga_zy.g
z)),...

t_r3_10o_viga_zy,abs(fft(r3_10o_viga_zy.gz)))
title('z-y')
xlim([0 2])
suptitle('Gaiola com viga')
%%%
figure()
subplot(2,3,1)
semilogy(t_r1_10o_cube_xy,abs(fft(r1_10o_cube_
xy.gz)),t_r2_10o_cube_xy,abs(fft(r2_10o_cube_xy
.gz)),...

t_r3_10o_cube_xy,abs(fft(r3_10o_cube_xy.gz)))
title('x-y')
xlim([0 2])
subplot(2,3,4)
semilogy(t_r1_10o_cube_xz,abs(fft(r1_10o_cube_
xz.gz)),t_r2_10o_cube_xz,abs(fft(r2_10o_cube_xz.
gz)),...

t_r3_10o_cube_xz,abs(fft(r3_10o_cube_xz.gz)))
title('x-z')
xlim([0 2])
subplot(2,3,2)
semilogy(t_r1_10o_cube_yx,abs(fft(r1_10o_cube_
yx.gz)),t_r2_10o_cube_yx,abs(fft(r2_10o_cube_yx
.gz)),...

t_r3_10o_cube_yx,abs(fft(r3_10o_cube_yx.gz)))
title('y-x')
xlim([0 2])
subplot(2,3,5)
semilogy(t_r1_10o_cube_yz,abs(fft(r1_10o_cube_
yz.gz)),t_r2_10o_cube_yz,abs(fft(r2_10o_cube_yz.
gz)),...

t_r3_10o_cube_yz,abs(fft(r3_10o_cube_yz.gz)))
title('y-z')
xlim([0 2])
subplot(2,3,3)
semilogy(t_r1_10o_cube_zx,abs(fft(r1_10o_cube_
zx.gz)),t_r2_10o_cube_zx,abs(fft(r2_10o_cube_zx.
gz)),...

t_r3_10o_cube_zx,abs(fft(r3_10o_cube_zx.gz)))
title('z-x')
xlim([0 2])
subplot(2,3,6)
semilogy(t_r1_10o_cube_zy,abs(fft(r1_10o_cube_
zy.gz)),t_r2_10o_cube_zy,abs(fft(r2_10o_cube_zy.
gz)),...

t_r3_10o_cube_zy,abs(fft(r3_10o_cube_zy.gz)))
title('z-y')
xlim([0 2])
suptitle('Gaiola com cubesat')
```

C.2. DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO

```
function
[Izz,Izz1,Izz2]=def_inércia(m2,fz2,m1,fz1)
%
R1=sqrt((1.52/2)^2+(1.50/2)^2); %raio da base
superior
R2=sqrt(2*(.52/2)^2); %raio da base inferior
% cabo
rho=7870e3;
h=2.3; %SI
r=1e-3; %raio do cabo
%
g=9.78; %SI
L=sqrt(h^2+(R1-R2)^2);
mw=rho*pi*r^2*L; %massa do cabo
meq1=m1+mw/2;
c=1+((R1*(R2-R1)^2)/(2*R2*h^2));
a=(R2*h)^2/(R2-R1)^2;

Izz1=meq1*g*R1*R2/(4*pi^2*h*fz1^2);
Izz2=(meq1+m2)*g*R1*R2/(4*pi^2*h*fz2^2);
Izz=Izz2-Izz1;
```

C.3. METODOLOGIA DE TANG

```
for i=1:length(P)

a_rad=a(1:i,:)*pi/180;
l=cos(a_rad(:,1));
m=cos(a_rad(:,2));
n=cos(a_rad(:,3));
A=[l.^2,m.^2,n.^2,-2*l.*m,-2*m.*n,-2*n.*l];
B=inv(A'*A)*A';

I=B*I_n(1:i);
k(:,i)=I;
end

II=[I(1),I(4),I(6);I(4),I(2),I(5);I(6),I(5),I(3)];

disp(['Matriz de Inércia'])
disp([I(1),I(4),I(6)])
disp([I(4),I(2),I(5)])
disp([I(6),I(5),I(3)])

[V,D]=eig(II);

disp(['Autovalores do tensor de inércia'])
disp([D])
```

C.4. AMOSTRAGEM PELA METODOLOGIA DE MONTE CARLO

```
function
[I_corpo,I1,I2]=montecarlo(M1,F1,M2,F2)
n=10^6; %quantidade de amostras aleatorias
g=9.78; %aceleração da gravidade

%massa
m1=normrnd(M1,25,[n,1]);
m2=normrnd(M2,.1,[n,1]);
%altura
h=normrnd(2.30,0.01,[n,1]);
%raio superior
r11=normrnd(1.52/2,.01,[n,1]);
r12=normrnd(1.50/2,.01,[n,1]);
%raio inferior
r21=normrnd(.52/2,.01,[n,1]);
r22=normrnd(.52/2,.01,[n,1]);
%frequencia gaiola
f1=normrnd(F1(1),F1(2),[n,1]);
%frequencia corpo
f2=normrnd(F2(1),F2(2),[n,1]);
%%%
R1=sqrt(r11.^2+r12.^2);
R2=sqrt(r21.^2+r22.^2);
meq1=m1+59/2; %massa dos quatro cabos = 59
gramas
%%%
Iz1=meq1*g.*R1.*R2./(4*pi^2*h.*f1.^2);
Iz2=(meq1+m2)*g.*R1.*R2./(4*pi^2*h.*f2.^2);
Iz_corpo=Iz2-Iz1;

I1=[mean(Iz1);2*std(Iz1)];
I2=[mean(Iz2);2*std(Iz2)];
I_corpo=[mean(Iz_corpo);2*std(Iz_corpo)];
```