

TESE DE DOUTORADO

**UM SIMULADOR DE RESERVATÓRIO
BASEADO EM FORMULAÇÕES DO MÉTODO DE
ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICOS**

Lúcio Gomes Nascimento

Brasília, Março de 2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TESE DE DOUTORADO

**UM SIMULADOR DE RESERVATÓRIO
BASEADO EM FORMULAÇÕES DO MÉTODO DE
ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGOMÉTRICOS**

Lúcio Gomes Nascimento

*Tese submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial
para obtenção do grau de Doutor Engenheiro em Ciências Mecânicas.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, ENM/UnB

Orientador

Prof. Dr. Adriano P. Rosa, ENM/UnB

Examinador interno

Prof. Dr. Manoel P. C. Neto, ENC/UnB

Examinador externo

Prof. Dr. Edson D. Leonel, EESC/USP

Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

NASCIMENTO, LÚCIO GOMES

UM SIMULADOR DE RESERVATÓRIO BASEADO EM FORMULAÇÕES DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICOS

[Distrito Federal] 2021.

xii, 140p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2021).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------|--------------------|
| 1. Reservatório | 2. Cone de Gás |
| 3. Escoamento Potencial | 4. MEC |
| 5. Isogeométrico | 6. NURBS |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

NASCIMENTO, L. G. (2021). UM SIMULADOR DE RESERVATÓRIO BASEADO EM FORMULAÇÕES DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICOS, Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM-X, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 140p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Lúcio Gomes Nascimento

TÍTULO: UM SIMULADOR DE RESERVATÓRIO BASEADO EM FORMULAÇÕES DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICOS.

GRAU: Doutor ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Lúcio Gomes Nascimento

QMSW 5 LOTE 4 APARTAMENTO B-218

SUDOESTE

CEP 70680-519 - Brasília - DF - Brasil

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, a minha mãe Vera Lúcia, ao meu irmão Alexandre, aos meus familiares, amigos e principalmente ao meu orientador Éder, pois sem ele jamais teria chegado neste momento da minha tese.

Lúcio Gomes Nascimento

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora pelo dom da vida.

Agradeço em especial a minha mãe Vera Lúcia que sempre apoiou e se dedicou para que eu alcançasse o sucesso na vida acadêmica e profissional, e em tudo.

Agradeço ao meu irmão e colega de profissão, o Mestre Engenheiro Mecânico Alexandre por todos os anos de estudos juntos e companheirismo na vida.

Agradeço a toda minha família, em especial minha avó Elita (in memoriam), meus padrinhos tio Leonam e tia Gené, todos os tios e a todos que de certa forma ajudaram minha mãe em minha criação e educação.

Agradeço ao meu orientador Professor Éder, pelos ensinamentos e dedicações que me fizeram chegar até este momento.

Agradeço aos meus amigos e colegas de estudo: Afonso, Gustavo, Fernando, Álvaro, Emerson e outros; que contribuíram de uma certa forma para que eu obtivesse êxito no meu trabalho.

Agradeço à Universidade de Brasília por todos os meios prestados, e agradeço a CAPES pela disponibilização de recursos para o financiamento da bolsa de doutorado.

Lúcio Gomes Nascimento

RESUMO

O desenvolvimento do simulador de reservatório para o estudo dos fenômenos do cone de água e de gás no poço produtor (representado por um sumidouro), é obtido pela combinação do Método de Elementos de Contorno (MEC), Formulação Isogeométrica através da utilização das funções de forma do tipo NURBS (*Non Uniform Rational B-Spline*) e, ainda, Formulação Bidimensional e Axissimétrica. Através da Formulação Isogeométrica, a discretização do modelo geométrico (geração de malha), que é a etapa da análise numérica que exige mais tempo para o engenheiro, não é mais necessária, uma vez que as mesmas funções que descrevem a geometria podem também aproximar as variáveis de campo no MEC, tornando-se, portanto, uma grande vantagem em sua utilização. A mesma discretização usada no modelo geométrico, gerada nos programas de modelagem do tipo CAD (*Computer Aided Design*), NURBS, também pode ser usada pelo MEC. Na formulação bidimensional, o reservatório é representado em um plano de corte perpendicular à direção de um poço horizontal de extração de petróleo. Na formulação axissimétrica, o reservatório de óleo ou de água é representado pela análise de um plano que passa pelo eixo de simetria rotacional (axial) de um poço vertical. Em ambos os casos, a dimensão do problema é reduzida de três para duas dimensões: vertical e horizontal (caso bidimensional); radial e axial (caso axissimétrico), sendo que todas as variáveis na direção tangencial são consideradas constantes. Quando a geometria e as variáveis do problema são ambas axissimétricas, o problema pode ser considerado totalmente axissimétrico. As formulações isogeométricas e bidimensionais ou axissimétricas são acopladas através das equações integrais de contorno, para obter o simulador de reservatório para os casos monofásico e bifásico. A determinação das condições de contorno do modelo, incluindo a análise do movimento da interface de fluidos, também é apresentada. O código final é uma ferramenta eficiente para a análise da extração de óleo em protótipos de reservatório na presença de produção de fluidos indesejáveis e também em problemas de aquífero (reservatório de água). A validação dos resultados é realizada comparando-se com outros métodos numéricos e resultados analíticos.

Palavras Chaves: Simulador, reservatório, Método de Elementos de Contorno (MEC), Formulação Isogeométrica (NURBS), Formulação Axissimétrica.

ABSTRACT

The development of the reservoir simulator for the study of water and gas coning phenomena in the producer well (represented by a sink) is obtained by combining the Boundary Element Method (BEM), the Isogeometric Formulation using the NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) as shape functions, and also the Two-dimensional and Axisymmetric Formulation. The Isogeometric Formulation makes the discretization of geometric model (mesh generation), which is the step of numerical analysis that is more time consuming for the engineer, be no longer necessary, since the same functions that describe the geometry can also approximate the field variables in the BEM, making it a great advantage in their use. The same discretization used in the geometric model, generated in CAD (Computer Aided Design) modeling programs, NURBS, can also be used by the BEM. In the two-dimensional formulation, the reservoir is represented in a section plane perpendicular to the direction of a horizontal oil extraction well. In the axisymmetric formulation, the oil or water reservoir is represented by the analysis of a plane passing through the axis of rotational (axial) symmetry of a vertical well. In both cases, the dimension of the problem is reduced from three to two dimensions: vertical and horizontal (two-dimensional case); radial and axial (axisymmetric case) directions only, and all variables in the tangential direction are assumed to be constant. When the geometry and the problem variables are both axisymmetric, then the problem is considered fully axisymmetric. The isogeometric and two-dimensional or axisymmetric formulations are coupled through boundary integral equations, to obtain the reservoir simulator for the single and double phase cases. The determination of boundary conditions for the model, including the analysis of fluids interface movement, is also presented. The final code is an efficient tool for the analysis of oil extraction in reservoir prototypes in the presence of undesirable fluid production and also in aquifer (water reservoir) problems. Validation of the results is carried out by comparing to others numerical methods and analytical results.

Keywords: Simulator, reservoir, Boundary Element Method (BEM), Isogeometric Formulation (NURBS), Axisymmetric Formulation.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	DEFINIÇÕES DOS PROBLEMAS	2
1.2	MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO	4
1.2.1	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA	5
1.3	ANÁLISE DE RESERVATÓRIOS	7
1.4	CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTADO DA ARTE	9
1.5	OBJETIVOS	10
1.6	ESCOPO DA TESE	10
2	Reservatórios	12
2.1	ETAPAS DA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO	12
2.2	RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO	13
2.2.1	POÇO PRODUTOR	14
2.2.2	FLUIDOS INDESEJADOS NA PRODUÇÃO	17
2.2.3	O FENÔMENO DOS CONES DE ÁGUA E DE GÁS	18
2.3	RESERVATÓRIO DE ÁGUA	21
2.3.1	BREVE REBAIXAMENTO DE POÇO (<i>Quick Drawdown</i>)	24
2.4	HIDRODINÂMICA DO PROBLEMA	26
2.4.1	LEI DE DARCY	27
2.4.2	ESCOAMENTO POTENCIAL	30
2.4.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	32
3	Curvas de Bézier, B-Splines e NURBS	37
3.1	CURVAS DE BÉZIER	37
3.2	CURVAS B-SPLINES	39
3.3	NURBS (B-SPLINES RACIONAIS NÃO-UNIFORMES)	42
3.3.1	DERIVADAS NURBS	42
3.3.2	INSERÇÃO DE NÓS	44
4	Método dos Elementos de Contorno - Escoamentos Potenciais	45
4.1	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	45
4.1.1	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO POTENCIAL	46
4.1.2	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA VELOCIDADE	47

4.2	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	49
4.3	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	55
4.4	IMPLEMENTAÇÃO ISOGEOMÉTRICA NO PROBLEMA.....	59
4.4.1	INTEGRAIS FRACAMENTE SINGULARES.....	59
4.4.2	PONTOS DE COLOCAÇÃO.....	61
4.4.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	62
5	Formulação Axissimétrica.....	64
5.1	POTENCIAL AXISSIMÉTRICO.....	65
5.1.1	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS AXISSIMÉTRICAS.....	66
5.1.2	PONTOS NO EIXO z	70
5.2	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	70
6	Simulador de Reservatório.....	74
6.1	PARÂMETROS DE ENTRADA.....	74
6.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	76
6.2.1	ESCOAMENTO MONOFÁSICO POTENCIAL.....	76
6.2.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO POTENCIAL.....	77
6.3	ANÁLISE DE MOVIMENTAÇÃO DA INTERFACE.....	83
6.4	MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	87
7	Validação da Formulação Axissimétrica.....	89
7.1	PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS SEM MOVIMENTAÇÃO DE INTERFACE.....	89
7.1.1	POÇO CONCENTRADO.....	89
7.1.2	POÇOS DISTRIBUÍDOS.....	91
7.1.3	CILINDRO MACIÇO.....	94
7.1.4	CILINDRO VAZADO.....	96
7.1.5	ESFERA OCA.....	99
8	Resultados.....	102
8.1	POÇO VERTICAL.....	102
8.1.1	CONE DE GÁS.....	102
8.1.2	BREVE REBAIXAMENTO DE POÇO (<i>Quick Drawdown</i>).....	106
8.2	POÇO HORIZONTAL.....	108
8.2.1	CÉLULA DE HELE-SHAW.....	108
8.2.2	CONE DE ÁGUA.....	112
9	Conclusões.....	116
9.1	TRABALHOS FUTUROS.....	117
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	118

LISTA DE FIGURAS

1.1	Típicos sistemas de produção <i>offshore</i> . Reproduzido de Castaño e Julieth (2017)	2
2.1	Reservatório de óleo. Reproduzido de Teixeira et al. (2009).	14
2.2	Reservatório de óleo e água.	14
2.3	Reservatório de óleo e gás. Fonte: <i>U.S Energy Information Administration</i>	14
2.4	Configuração geral do reservatório. Fonte: Blog de notícias <i>Diário do Pré-Sal</i>	15
2.5	Configuração geral de poços produtores. Fonte: SINMEC-UFSC	15
2.6	Cones de Água e de Gás em Reservatório de Petróleo. Reproduzido de Filho (2014). ..	18
2.7	Contaminação de aquíferos (reservatórios de água). Fonte: EmbTec.....	23
2.8	Breve rebaixamento de poço (<i>quick drawdown</i>). Fonte: <i>solinst.com</i>	25
2.9	Domínio bidimensional do reservatório.....	26
2.10	Experimento de Darcy. Reproduzido de Dias Jr. (2012).	28
2.11	Fenômeno do Cone de Gás - Condições de Contorno.....	32
2.12	Breve Rebaixamento de Poços (<i>Quick Drawdown</i>) - Condições de Contorno.	33
2.13	Fenômeno do Cone de Água - Condições de Contorno.....	35
3.1	Curva de Bézier (ordem 3) e Polígono de Controle.	38
3.2	B-Splines e os segmentos no polígono de controle para U_1	40
3.3	Funções de base das B-Splines para U_1	40
3.4	B-Splines e os segmentos no polígono de controle para U_2	41
3.5	Funções de base das B-Splines para U_2	41
3.6	NURBS em coordenadas homogêneas.	43
4.1	Ponto Fonte e Ponto Campo.	46
4.2	Modificação do Contorno.	51
4.3	Ângulos interno e externos do contorno modificado.	54
4.4	Discretização do Contorno.....	55
4.5	Modificação das abcissas de Greville.....	61
5.1	Domínio para uma solução axissimétrica. Reproduzido de Becker (1992).	66
6.1	Reservatório retangular contendo apenas um fluido.	76
6.2	Reservatório retangular contendo dois fluidos.	78
6.3	Translação máxima $V = V_{max}$ de um ponto de controle arbitrário. Reproduzido de Piegel e Tiller (1996).	84

6.4	Fluxograma do método de solução.	88
7.1	Reservatório com sumidouro pontual.	90
7.2	Malha do problema com pontos internos - poço concentrado.	91
7.3	Reservatório com sumidouro pontual. Gradiente de potencial.	91
7.4	Fluxo hidráulico no topo do reservatório - poço concentrado.	92
7.5	Reservatório com sumidouros distribuídos.	92
7.6	Malha do problema com pontos internos - poços distribuídos.	93
7.7	Reservatório com sumidouros distribuídos. Gradiente de potencial.	93
7.8	Fluxo hidráulico no topo do reservatório - poços distribuídos.	94
7.9	Malha do problema com pontos internos - cilindro maciço.	95
7.10	Distribuição de temperatura em um cilindro maciço.	95
7.11	Comparação de resultados para distribuição de temperatura - cilindro maciço.	96
7.12	Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - cilindro maciço.	96
7.13	Malha do problema com pontos internos - cilindro vazado.	97
7.14	Distribuição de temperatura em um cilindro vazado.	97
7.15	Comparação de resultados para distribuição de temperatura - cilindro vazado.	98
7.16	Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - cilindro vazado.	98
7.17	Pontos de colocação do problema com pontos internos - esfera oca.	99
7.18	Distribuição de temperatura em uma esfera oca.	100
7.19	Comparação de resultados para distribuição de temperatura - esfera oca.	100
7.20	Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - esfera oca.	101
8.1	Malha com os elementos de contorno - reservatório axissimétrico.	103
8.2	Pontos internos utilizados na geração do mapa de cor - reservatório axissimétrico.	104
8.3	Gradiente de potencial em um reservatório axissimétrico (cone de gás): MEC-Iso.	104
8.4	Comparação entre os dois códigos para a variação do ponto médio da superfície livre: MEC-Iso (AXI-IGA-BEM) e MEC (AXI-BEM).	105
8.5	Comparação entre os dois códigos para a variação do ponto médio da superfície livre: MEC-Iso (AXI-IGA-BEM) e MEC (AXI-BEM). Meio poroso com $\sigma = 0,2$	105
8.6	Pontos de colocação para a geometria não-deformada - experimento de Hall.	107
8.7	Validação dos resultados com a literatura para o experimento de Hall (1955). Resultado presente através das formulações isogeométrica e axissimétrica.	107
8.8	Distribuição dos pontos de colocação - célula de Hele-Shaw.	109
8.9	Pontos internos utilizados na geração do mapa de cor - célula de Hele-Shaw.	109
8.10	Gradiente de potencial com interface móvel no instante $t = t_b = 10000$ s (MEC-Iso). Célula de Hele-Shaw.	109
8.11	Posição final da interface. Célula de Hele-Shaw.	110
8.12	Comparação entre a variação da posição vertical do ponto médio na superfície livre para os simuladores monofásico e bifásico. Célula de Hele-Shaw.	111
8.13	Malha do problema com pontos internos - sub-regiões.	113
8.14	Distribuição do potencial de velocidade: $t = 15000$ s.	113
8.15	Distribuição do potencial de velocidade: $t = 30000$ s.	113

8.16 Interface deformada (forma cônica) para a vazão subcrítica encontrada - último passo de tempo.	114
8.17 Variação da posição vertical do ponto médio na interface através do simulador bifásico com vazão subcrítica atingida no valor de $Q = -7,241 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ - cone de água. MEC-Iso.	114
8.18 Variação da posição vertical do ponto médio na interface através do simulador bifásico com vazão subcrítica no valor de $Q = -4,093 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ - cone de água. MEC convencional.	115

LISTA DE TABELAS

6.1	Parâmetros de entrada para o código	75
8.1	Simulador da célula de Hele-Shaw.....	111

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas

α	Coefficiente de inserção do ponto de colocação; Razão entre as massas específicas dos fluidos do reservatório
β	Coefficiente de movimentação do ponto de colocação
γ	Variável de integração; Pontos de colocação
Γ	Contorno aproximado
δ	Função delta de Dirac
ϵ	Raio de um arco de circunferência
η	Ângulo entre o vetor normal e o eixo z
θ	Ângulo interno do contorno; Coordenada tangencial
κ	Permeabilidade efetiva do meio poroso
λ	Função altura da interface
μ	Viscosidade dinâmica
ρ	Massa específica
σ	Porosidade do meio
Φ	Potencial
ξ	Variável de integração/transformação
Ψ	Domínio circular
ω	Função peso

Letras Romanas

<i>A</i>	Área; Constante; Matriz
<i>b</i>	Vetor de variáveis; Espessura
<i>B</i>	Pontos de controle
<i>c</i>	Constante variável de multiplicação
<i>C</i>	Função de curva
<i>d</i>	Quantidade de nós
<i>F</i>	Função
<i>Fr</i>	Número de Froude
<i>g</i>	Aceleração da gravidade
<i>G</i>	Matriz
<i>H</i>	Escala característica de comprimento; Matriz; Altura
<i>L</i>	“Altura de areia”
<i>k</i>	Vetor normal à base
<i>K</i>	Condutividade hidráulica do meio
<i>m</i>	Número de nós
<i>n</i>	Vetor normal
<i>p</i>	Pressão; grau do polinômio
<i>q</i>	Velocidade aparente do fluido
<i>Q</i>	Vazão volumétrica por unidade de comprimento; Novos pontos de controle
<i>r</i>	Coordenada radial; Raio
<i>R</i>	Função de base racional; Coordenada radial
<i>s</i>	Vetor sumidouro
<i>S</i>	Contorno
<i>t</i>	Tempo; Parâmetro
<i>T</i>	Temperatura
<i>u</i>	Velocidade média real do fluido; Valores do vetor de nós; Parâmetro da curva
<i>U</i>	Vetor de nós
<i>V</i>	Vetor de translação
<i>w</i>	Coordenada do peso
<i>x</i>	Coordenada da direção do escoamento; Vetor posição; Vetor incógnitas
<i>y</i>	Coordenada
<i>z</i>	Coordenada da altura referencial; Coordenada axial
<i>Z</i>	Coordenada axial

Subscritos

<i>a</i>	Água; Analítico
<i>axi</i>	Axial
<i>b</i>	Bomba
<i>c</i>	Crítico; Cilindro
<i>d</i>	Fonte
<i>e</i>	Elíptico; Externo
<i>f</i>	Fluido
<i>i</i>	Ponto de controle; Interno
<i>int</i>	Interno
<i>j</i>	Segmento
<i>m</i>	Passo de tempo
<i>max</i>	Máximo
<i>min</i>	Mínimo
<i>n</i>	Ordem da curva; Numérico
<i>o</i>	Óleo
<i>p</i>	Grau do polinômio; Poço; Fonte
<i>Q</i>	Campo
<i>r</i>	Reservatório
<i>R</i>	Sub-região
<i>s</i>	Sumidouro
<i>t</i>	Total; Topo
<i>x</i>	Coordenada; Arbitrário
<i>y</i>	Coordenada
<i>z</i>	Coordenada da altura referencial
1	Primeira referência
2	Segunda referência
3D	Tridimensional

Sobrescritos

<i>c</i>	Controle; Coordenada
<i>h</i>	Homogêneo
*	Solução fundamental, Termo fracionado
-	Novo
^	Vetor; Localização
'	Modificação

Siglas

<i>ACA</i>	Aproximação Cruzada Adaptativa
<i>Axi</i>	Axial
<i>CAD</i>	<i>Computer Aided Design</i>
<i>FMM</i>	<i>Fast Multipole Method</i>
<i>GLP</i>	Gás Liquefeito de Petróleo
<i>Iso</i>	Isométrico
<i>MDF</i>	Método das Diferenças Finitas
<i>MEC</i>	Método de Elementos de Contorno
<i>MECRD</i>	Método de Elementos de Contorno de Reciprocidade Dual
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MEG</i>	Método dos Elementos de Green
<i>MRP</i>	Método dos Resíduos Ponderados
<i>MVF</i>	Método dos Volumes Finitos
<i>NURBS</i>	<i>Non Uniform Rational B-Spline</i>
<i>RMS</i>	<i>Root Mean Square</i>
<i>SI</i>	Sistema Internacional (medidas)

Capítulo 1

Introdução

O petróleo origina-se a partir da matéria orgânica que ao longo dos anos acumula-se em conjunto com sedimentos no fundo dos oceanos. A base de sua composição são os hidrocarbonetos, substâncias compostas por carbono e hidrogênio, à qual podem juntar-se átomos de oxigênio, nitrogênio e enxofre, além de íons metálicos, principalmente de níquel e vanádio. Estes componentes, sob condições termoquímicas apropriadas, interagem dando início a uma cadeia de processos que levam à formação do petróleo.

A sociedade atual é altamente dependente do petróleo presente em muitas atividades cotidianas, no trabalho, no lazer, nos deslocamentos e em todas as áreas industriais e agrícolas. Além de gerar a gasolina, que serve de combustível para grande parte dos automóveis que circulam no mundo, vários produtos são derivados do petróleo como a parafina, o gás natural, o gás liquefeito de petróleo (GLP), os produtos asfálticos, a nafta petroquímica, o querosene, os solventes, os óleos combustíveis, os óleos lubrificantes, o óleo diesel, os combustíveis de aviação, os polímeros, entre outros.

A extração do petróleo é feita através de dois tipos de plataformas, as *onshore* (terrestres) e as *offshore* (em alto mar). Nas plataformas *onshore*, a estação de tratamento é mais simples de se estruturar, sendo que há maior facilidade de manutenção e transporte dos equipamentos e materiais, devido à localização na terra. No entanto, no Brasil, a maior parte da produção de petróleo está localizada em campos marítimos *offshore* (Figura 1.1), o que dificulta a estruturação de toda a estação de tratamento em um pequeno espaço. Por este motivo, são aplicados métodos de tratamento mais eficazes para que os equipamentos e as rotas de trabalho possam ser menores (Fonte: PETROBRAS).

O custo de se implantar uma planta de produção de petróleo (*onshore* ou *offshore*) é bastante elevado, mesmo para os padrões de uma empresa integrante consolidada deste mercado como a PETROBRAS. A alta produtividade é sempre desejada, independente das condições de prospecção. Isso significa produção em maior volume possível, de um óleo o mais “puro” possível e gás com menor concentração de metano. No entanto, somente para condições ideais de produção é possível obter uma extração com a velocidade e com a pureza almejadas. Distante do caso utópico, existem vários fatores que limitam a produção, desde a extração através do poço no reservatório

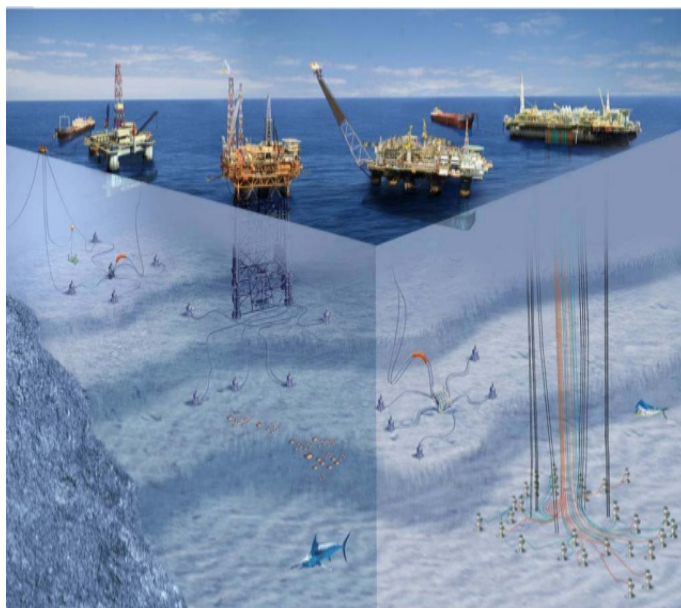


Figura 1.1: Típicos sistemas de produção *offshore*. Reproduzido de Castaño e Julieth (2017)

caracterizado pelo escoamento multifásico em meios porosos, como no escoamento multifásico na linha de transporte, o sistema *pipeline-riser*, assim como problemas insurgentes em separadores, *manifold* e outros.

O presente trabalho é direcionado para um simulador de reservatório de petróleo a fim de estudar as formações dos cones de água e de gás, condições prejudiciais para a produção uma vez que há infiltração de outros fluidos com maior mobilidade que o petróleo, escoando em direção ao poço à medida que toma a forma de um cone, de acordo com o gradiente da função potencial.

Outra aplicação do simulador apresentado está na análise de reservatórios de água ou aquíferos através da caracterização de problemas de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*), para obtenção de recursos hídricos a serem utilizados nas mais diversas áreas pela humanidade. O simulador é construído através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico (MEC-Iso) com aplicação em problemas bidimensionais e axissimétricos, que possuem vantagens numéricas não somente em relação a outros métodos numéricos como o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), como também em relação ao Método de Elementos de Contorno (MEC) “Convencional”, uma vez que o MEC-Iso utiliza geometrias NURBS (*Non Uniform Rational B-Spline*) que trazem maior suavidade às curvas dos elementos em questão e garantem a continuidade das variáveis de campo e da geometria, além de poderem possibilitar a descrição precisa de geometrias complexas.

1.1 Definições dos Problemas

Escoamento multifásico é definido como o escoamento que apresenta mais de uma fase, sendo o escoamento bifásico o caso mais simples. Escoamentos multifásicos acontecem em toda parte e a todo o instante na natureza como em chuvas, ciclones, poluição atmosférica, e também em

inúmeros processos industriais como combustão interna, transportes e produção de óleo e gás.

Na indústria de petróleo, o escoamento multifásico ocorre durante o processo de produção e de transporte, tanto nos poços (meios porosos) quanto nas linhas que interligam o poço à plataforma ou a um separador submarino primeiramente (sistema *pipeline-riser*), e um grande esforço tem sido realizado no que diz respeito ao estudo desse fenômeno. Ele exerce uma grande influência em fatores como a produtividade, manutenção e segurança.

Quando gás e líquido escoam simultaneamente em um reservatório, várias configurações de reservatórios podem existir, caracterizando os vários tipos: (i) óleo, (ii) óleo e água, (iii) óleo e gás, (iv) óleo, gás e água. Estas configurações dependem de variáveis operacionais, principalmente da viscosidade dinâmica, massa específica e mobilidade dos fluidos, e de alguns aspectos do meio poroso, tais como, a permeabilidade efetiva. A mobilidade do fluido é a razão entre a permeabilidade efetiva do meio poroso e a viscosidade dinâmica do fluido que está saturando-o.

Os fenômenos dos cones de água e de gás são fatores limitantes na produtividade de um poço produtor de petróleo, pois ocorrem em decorrência do gradiente de pressão aplicado pelo poço com o objetivo de extrair o petróleo do reservatório. O gradiente de pressão atinge todos os fluidos presentes no reservatório (petróleo, água e gás natural) e como a água e o gás têm maior mobilidade que o petróleo, os mesmos tendem a fluir em direção ao poço, tomando, cada um, a forma de um cone. Diferentemente dos poços produtores, o poço injetor é caracterizado por ser um poço de desenvolvimento perfurado para injeção de água, gás ou qualquer outro fluido utilizado para manutenção de pressão e/ou aumento de recuperação do reservatório.

Os cones de água e/ou de gás atingem a extremidade do poço para certos valores de vazão de extração, fazendo com que água e/ou gás sejam produzidos junto com o petróleo, diminuindo, portanto, a produtividade. Desde o princípio da exploração industrial do petróleo, vários experimentos e análises matemáticas foram conduzidos para resolver problemas de cone de água/gás (JOSHI, 1991). Em 1935 foi publicado um dos primeiros trabalhos sobre esse tema, onde pode ser observado que a formação e evolução do cone de água são fenômenos muito complexos sobre os quais uma análise teórica é praticamente impossível (MUSKAT; WYCKOFF, 1935).

Tratamentos analíticos com severas aproximações e restrições foram utilizados na formulação de diversos modelos e correlações que hoje são utilizados para estimar o comportamento dos cones de água e de gás, a fim de contornar a grande complexidade do problema (ROSA et al., 2006). Hoje existem ferramentas avançadas de análise numérica que permitem o estudo destes fenômenos via simulação computacional, minimizando as simplificações nos modelos utilizados e aumentando a precisão dos resultados obtidos.

Outro tipo de reservatório de extrema importância para a humanidade, é o reservatório de água ou aquífero. Desde os tempos pré-históricos, as águas subterrâneas têm sido um recurso importante em que as pessoas utilizam para beber, irrigar plantações e aplicar na indústria. As águas subterrâneas alimentam, por exemplo, a exuberância dos oásis do deserto no Saara, os grãos de âmbar nas altas planícies norte-americanas, o aquífero Guarani no Brasil e as cidades em crescimento das regiões áridas e ensolaradas. Embora a água subterrânea represente cerca de 95% da água doce líquida do planeta, a água subterrânea acessível não pode ser reabastecida

rapidamente e isso leva à escassez. A contaminação das águas subterrâneas também é uma tragédia crescente. Essa poluição, causada quando resíduos tóxicos e outras impurezas se infiltram no lençol freático (reservatório de água), pode ser invisível, mas pode arruinar o suprimento de água para as próximas gerações (FOSTER et al., 2017).

Estudar o escoamento monofásico em meios porosos através de problemas de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*) em aquíferos, um dos problemas abordados neste trabalho, ajuda na obtenção de técnicas de exploração de recursos hídricos subterrâneos, a fim de minimizar o dano causado pela utilização excessiva de água doce no planeta. A hidrodinâmica do escoamento de fluido em meios porosos, tanto em reservatórios de óleo e gás (bifásico) como de água (monofásico), é definida basicamente e de forma simplificada para a validação da implementação das formulações numéricas: axissimétrica e isogeométrica, aplicadas ao Método de Elementos de Contorno e construção do simulador; através da Lei de Darcy, equação da conservação da massa e equação de Laplace.

1.2 Método de Elementos de Contorno

Muitos dos processos físicos na natureza podem ser descritos por uma equação diferencial, usando as leis fundamentais da física como o equilíbrio (conservação de momento linear e angular), a conservação de energia e outras. A combinação destas leis a fim de descrever comportamentos físicos, faz com que os modelos matemáticos (representação ou interpretação simplificada da realidade) sejam extremamente precisos, ou seja, tenham um grande poder de reproduzir os fenômenos naturais; sendo assim, o caso estudado neste trabalho: a simulação de reservatórios de petróleo e de água com fronteira móvel, problemas de condução de calor sem fronteira móvel. Estas previsões reduzem significativamente o custo no desenvolvimento de novos produtos pois reduzem a demanda por ensaios experimentais de protótipos que, por sua vez, possuem custos elevados se comparado com a análise teórica.

Apenas uma classe limitada de problemas tem uma solução analítica. Sem técnicas numéricas seria praticamente impossível resolver problemas práticos de engenharia com um grau de precisão razoável. A maior parte das técnicas numéricas se baseiam no princípio de que é possível obter equações e relações que descrevem o comportamento de uma pequena parte diferencial do corpo, construindo modelos discretos a partir do modelo contínuo. O Método dos Volumes Finitos (MVF) foi introduzido na década de 1970 e historicamente tem sido o método preferido pelos cientistas e engenheiros que trabalham com a mecânica dos fluidos, mais especificamente na engenharia de petróleo. Na última década, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem tido importantes avanços, conseguindo resolver com sucesso os desafios da mecânica dos fluidos, porém para problemas mais complexos relacionados a escoamentos multifásicos, reativos, ou fortemente turbulentos, o Método dos Volumes Finitos é, na prática, uma melhor opção. Uma importante propriedade do MVF é que os princípios de conservação (massa, momentum e energia), que são a base da modelagem matemática para a mecânica do contínuo, por definição, são respeitadas pelas equações deduzidas por MVF.

Depois de décadas de desenvolvimento, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) se firmou entre os métodos numéricos para solução de equações diferenciais parciais. Comparando com métodos mais populares, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF), que são classificados como métodos de domínio, o MEC se diferencia por ser um método de contorno, significando que a discretização numérica é conduzida em uma dimensão espacial reduzida. Por exemplo, para problemas de três dimensões, a discretização é realizada somente nas superfícies de contorno. Essa redução leva a um sistema com menos graus de liberdade. O efeito é ainda mais pronunciado quando o domínio é infinito. Domínios infinitos têm de ser truncados ou aproximados em métodos de domínio (JACKSON et al., 2013)). No entanto, o MEC automaticamente modela o comportamento no infinito sem a necessidade de uma malha para aproximá-la.

O MEC transformou-se hoje em uma ferramenta de análise numérica cada vez mais utilizada na modelagem do protótipos de extração de petróleo e de formação dos cones de água e de gás, como pode ser observado no Capítulo 4. Atualmente fazer a malha é a parte mais trabalhosa e cara no processo de simulação, particularmente no MEF (BELYTSCHKO et al., 1994). Sem a necessidade de lidar com a malha no interior do domínio, o MEC é mais eficiente na geração de malha. Para problemas de fronteira móvel (saturação móvel) como a formação dos cones de água e de gás, o ajuste da malha é muito mais simples com o MEC.

Uma das principais diferenças entre o MEC e o MEF se refere às funções peso usadas para encontrar a forma fraca das equações diferenciais parciais. O MEF usa funções arbitrárias e simples, enquanto o MEC usa soluções analíticas representando os efeitos de uma carga pontual em um ponto do domínio infinito (BECKER, 1992), soluções essas conhecidas como soluções fundamentais. O uso dessas funções são a razão da precisão maior do MEC em relação ao MEF, particularmente em regiões onde as variáveis apresentam diferenças significativas quanto à direção e o sentido no espaço em consideração.

1.2.1 Análise Isogeométrica

A Análise Isogeométrica é uma tentativa de eliminar a geração da malha usando a discretização dos softwares de Desenho Assistido por Computador (CAD), onde o MEC tem significativas vantagens apresentadas nas sessões a seguir. A tecnologia predominante usada pelo CAD na representação de geometrias complexas é a *Non Uniform Rational Basis Splines* (NURBS) ou B-Spline Não-Uniforme Racional. Isso possibilita reproduzir de maneira exata entidades que seriam apenas aproximadas por funções polinomiais, incluindo seções cônicas circulares, cilindros, esferas, elipsóides, parabolóides, etc. Existe uma vasta literatura que trata dos diferentes aspectos das NURBS, por exemplo: Peigl e Tiller (1996), Rogers (2000) e as décadas de pesquisa que resultaram em diversos algoritmos eficientes para a avaliação rápida e refinamento.

O conceito principal apresentado em Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) é empregar as NURBS não só como discretização da geometria, mas também como ferramenta de discretização na análise de funções de aproximação dos campos mecânicos, atribuindo a denominação de análise isogeométrica para essa característica de métodos. No MEC, uma formulação utilizando B-Splines é

apresentada inicialmente em Cabral et al. (1990) e Cabral, Wrobel e Brebbia (1991), porém ainda sem ter a preocupação na integração ao CAD. Essa integração foi observada, posteriormente, em Simpson et al. (2012) e Simpson et al. (2013). O Conceito Isogeométrico também está presente nos métodos sem malha, criando métodos baseados em *splines*, como apresentado em Wang e Zhang (2014), Shaw e Roy (2008), Kim e Youn (2012).

As NURBS foram utilizadas com sucesso em problemas de mecânica dos fluidos por Nielsen et al. (2011) e Bazilevs e Akkerman (2010). Bazilevs et al. (2008), por exemplo, realizaram uma análise de interação entre fluido-estrutura em seu trabalho. A suavidade e alta continuidade das curvas as tornaram especialmente interessantes nesses casos. Equações que contém derivadas de alta ordem das variáveis de campo podem ser criadas de maneira direta ao utilizar as NURBS. Exemplos desse caso são as equações de Cahn-Hilliard (GÓMEZ et al., 2008), modelos de dano com gradiente (VERHOOSEL et al., 2011), elasticidade gradiente (FISCHER et al., 2011) e a equação de Kohn-Sham para modelagem da estrutura eletrônica de materiais semi-condutores (MASUD; KANNAN, 2012).

Somente as superfícies são definidas nos modelos CAD e o interior dos sólidos não é explicitamente modelado. Essa definição é necessária no MEF, o que exige uma etapa adicional de análise onde as representações CAD tem que ser convertidas para modelos sólidos. Enquanto isso, no MEC, somente a discretização do contorno, que é completamente definida pelo CAD, é necessária.

A alta continuidade das funções de base das NURBS diminui a esparsidade das matrizes no MEF, aumentando consideravelmente o custo computacional do MEF Isogeométrico (COLLIER et al., 2012). Esse efeito não é observado no MEC, uma vez que as matrizes geradas são cheias e esparsas. Outra desvantagem do MEF Isogeométrico é que a quadratura de Gauss deixa de ser ótima uma vez que o integrando deixa de ser um simples polinômio. Esse comportamento já é observado mesmo no MEC convencional já que a solução fundamental, que faz parte do integrando, não é um polinômio.

Um trabalho de grande relevância para a formulação isogeométrica é utilizado como base para este estudo: Campos (2016) desenvolve uma formulação isogeométrica do MEC, em que as funções de forma polinomiais são substituídas pelas funções NURBS. As formulações desenvolvidas são implementadas e aplicadas na análise de vários exemplos numéricos e seus resultados são comparados com o Método dos Elementos de Contorno com uso de funções de forma polinomiais. Nesse trabalho é mostrado que, diferentemente do MEC convencional, as condições de contorno na formulação isogeométrica não podem ser aplicadas diretamente ao problema, uma vez que os pontos de controle estão tipicamente fora do contorno. Para superar este problema, é utilizada uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-Splines capaz de relacionar os valores entre os pontos de controle e os pontos de colocação. Soluções numéricas para problemas isogeométricos bidimensionais e axissimétricos foram obtidas e comparadas às soluções analíticas e resultados satisfatórios para erros foram encontrados.

1.3 Análise de Reservatórios

Liggett et al. (1977) aplicaram primeiramente o MEC para modelar o escoamento de fluido em meio poroso, em seguida eles compararam a solução do espaço de Laplace com a do espaço real (LIGGETT et al., 1979). Uma série de estudos relacionados às aplicações do MEC na engenharia de reservatórios de petróleo e gás foram conduzidas por pesquisadores da Universidade de Stanford nos Estados Unidos. Kikani (1989) descreveu as abordagens através da técnica do MEC para gerar linhas de corrente em reservatórios de formas indefinidas e com vários poços produtores, além de ter derivado e investigado formulações de espaço real e espaço de Laplace para escoamento monofásico em reservatórios anisotrópicos homogêneos. Para aplicar o MEC em meios heterogêneos, Sato (1992) decompôs as equações governantes em várias equações de perturbação de ordem cujas funções de Green de espaço livre estão disponíveis, além de ter utilizado os aproximadores de Pade para melhorar a convergência. Archer (2000) explorou as aplicações dos métodos baseados em elementos de contorno, isto é, o Método de Elementos de Contorno de Reciprocidade Dual (MECRD) e o Método dos Elementos de Green (MEG), em testes de modelos de poços, testes de rastreadores e escoamento multifásico em meios heterogêneos, além de ter desenvolvido um esquema de estimativa de parâmetros para derivar a distribuição de permeabilidade a partir dos dados de pressão. Mais recentemente, Wang et al. (2009) desenvolveram o Método de Elementos Contorno do espaço de Laplace para resolver problemas transientes de pressão em reservatórios de gás geometricamente complexos. Liu et al. (2013) investigaram o desempenho do MEC e MECRD no manuseio de escoamento multifásico simples em reservatórios heterogêneos.

Quanto às aplicações do MEC em problemas de escoamento em meios porosos fraturados, Shapiro et al. (1983) e Shapiro et al. (1985) trataram o escoamento no interior das trincas através de placas paralelas e as interseções entre elas através de canais unidimensionais de fluido. O MEC foi utilizado para avaliar as respostas do fluido, e um algoritmo foi proposto e estudado para acoplar a abordagem de trincas discretas e do continuum. Várias outras abordagens foram desenvolvidas (MEDINA, 1987; RASMUSSEN et al., 1987; LOUGH et al., 1995), sendo as principais diferenças encontradas nas formulações do MEC para o escoamento em trincas e, ainda, nas estratégias de acoplamento entre este e as matrizes. As aplicações através das abordagens do MEC para derivar a permeabilidade efetiva do bloco de grade também foram relatadas (LOUGH et al., 1998; TEIMOORI et al., 2005).

O influxo constante de um par de fluidos imiscíveis, ou um único fluido com superfície livre, tem sido investigado através dos métodos hodógrafo e numérico. A maioria das pesquisas foi baseada em vazões críticas e subcríticas para condições estáveis. Por exemplo, Bear e Dagan (1964) usaram o método hodográfico para encontrar a forma da interface e a altura do cone para o caso de um sumidouro em um plano horizontal impermeável. Zhang e Hocking (1996) empregaram um modelo no qual se assumia que a camada de escoamento é confinada abaixo por um limite impermeável. Uma solução de equação integral não linear para este modelo foi resolvida numericamente. Com este modelo, a vazão crítica pode ser calculada para qualquer local do sumidouro. MacDonald e Kitanidis (1993) usaram a teoria da estabilidade linear e o Método dos Elementos de Contorno para modelar o escoamento em um poço de recirculação, configuração usada em esquemas de

lençóis freáticos ou aquíferos. As simulações numéricas mostraram que, para esse arranjo, existe uma taxa de bombeamento crítica, cujo valor foi determinado para uma variedade de separações de poço.

Problemas de escoamento axissimétrico e em torno de sumidouros não podem ser resolvidos usando métodos de mapeamento conformes. Várias aproximações foram feitas para resolver esses problemas. Para bombear óleo, Meyer e Garder (1954) usaram a fórmula de descarga de poço de Dupuit para derivar uma relação para a vazão crítica que leva em consideração a presença do fenômeno de cone. Eles obtiveram um escoamento teórico máximo em função da profundidade de penetração do poço, abaixo do topo da camada de óleo (supostamente sobrepondo uma camada de água) e da espessura da zona de óleo. No entanto, eles previram vazões críticas muito baixas. Muskat e Wyckoff (1935) consideraram o problema do cone de água em direção a um poço vertical. Eles calcularam a função potencial na zona de petróleo, assumindo escoamento radial horizontal e negligenciando a presença de cone de água. Suas vazões críticas calculadas foram cerca de 20% maiores. Em outros estudos, como Blake e Kucera (1988), foram aplicados o Método de Pequena Perturbação e o Método Integral de Contorno, assumindo uma forma aproximada para a pressão de sucção do poço em uma zona de óleo não confinada. Zhang e Hocking (1997) usaram o Método de Equação Integral de Contorno para resolver numericamente o problema de bombeamento em uma geometria axissimétrica.

Dagan e Bear (1968) estudaram o influxo de água doce por poços rasos, que operam a uma curta distância acima da interface de água salgada em um aquífero costeiro. Eles aplicaram o método de pequena perturbação baseado em uma aproximação linearizada para determinar o formato da interface ascendente. Suas aproximações são válidas até que a crista da interface ascendente avance um terço da distância inicial entre a interface e o sumidouro. A análise foi verificada por meio de experimentos em um modelo de caixa de areia.

No trabalho de Lennon (1985), foi estudado um problema transiente com uma interface móvel. Um fluido mais denso é retirado através de um poço de recuperação da camada inferior de um sistema de duas camadas, enquanto um segundo poço é perfurado e ocultado na camada superior (o fluido menos denso) para puxar a interface para cima, de modo que o tempo de recuperação (o tempo que a interface leva para se recuperar após o término do bombeamento) seja reduzido. O bombeamento simultâneo de água tende a fazer com que a interface se mova para cima, permitindo que o fluido mais denso seja recuperado a uma vazão maior sem que a água entre no poço de recuperação. O Método da Equação Integral de Contorno foi utilizado para quantificar a resposta do fluido mais denso próximo ao poço de recuperação.

A vazão crítica constante ocorre quando a interface que separa os dois fluidos imiscíveis atinge o ponto de influxo. Para um influxo constante, a vazão do fluido não pode exceder a vazão crítica de modo que infiltrações sejam evitadas. Para uma vazão supercrítica, é empregada uma estratégia de bombeamento pulsado para determinar se um influxo mais rápido pode ser alcançado. Nessa estratégia, quando o bombeamento começa em um aquífero ou lençol freático, a interface é puxada rapidamente, mas antes que o ar entre no poço, o bombeamento é interrompido. A interface pode então voltar à sua posição inicial por um certo tempo. Portanto, o ciclo se repete.

Wisniewski (1985) usou modelos de caixas retangulares bidimensionais para investigar o escoamento simultâneo de água e um fluido mais denso em um aquífero não confinado. Foi demonstrado que a recuperação cíclica em uma vazão maior por um tempo fixo, pode ser mais produtiva. Porém, a longo prazo, o bombeamento contínuo mostrou-se mais eficaz do que o bombeamento cíclico. Investigações experimentais através da célula de Hele-Shaw, foram realizadas por Ram e Chauhan (1987) para modelar um perfil instável do lençol freático crescente em um aquífero “deitado” sobre um leito impermeável levemente inclinado, em resposta à reposição constante. Zhang et al. (1999) realizaram um estudo em uma célula de Hele-Shaw vertical analógica para modelar o problema de bombeamento em um lençol freático (aquífero) bidimensional e verificar soluções analíticas para bombeamento constante e contínuo, além de soluções numéricas para alta vazão e bombeamento pulsado.

Neste trabalho a interface considerada nos problemas de infiltração por cone de gás ou de água em reservatório de óleo e em problemas de aquífero, é considerada como sendo do tipo abrupta, ou seja, em cada lado desta interface, somente um fluido do escoamento é governado através do gradiente do seu próprio potencial. Esta condição é crucial na montagem do sistema matricial para a resolução das soluções fundamentais em cada problema (BEER, 2008). O custo computacional é diminuído ao utilizar o Método de Elementos de Contorno Isogeométrico na simulação, levando em consideração que, a reprodução da discretização do problema se torna mais exata através da utilização das funções de forma do tipo NURBS, quando comparados a outros métodos como o MVF, MDF e FEM. As desvantagens se encontram no alto custo matemático através de relações integrais densas e na dificuldade de tratamento em problemas não-homogêneos e não-lineares.

1.4 Contribuição para o Estado da Arte

Não foi encontrada na literatura trabalhos nos quais os fenômenos dos cones de água e gás fossem analisados utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico. Soma-se, ainda, ao estado da arte, a implementação da Formulação Axissimétrica para problemas totalmente axissimétricos, como os reservatórios de óleo e água estudados. Em todos estes caso, a dinâmica da movimentação de interface em mono-região e sub-regiões é apresentada.

Fortaleza et al. (2019), por exemplo, estudaram o fenômeno do cone de gás através do Método de Elementos de Contorno convencional em poços de petróleo horizontais com movimentação de interface. Lucas et al. (1991) desenvolveram um estudo do cone de água em poços verticais de petróleo axissimétricos através do Método da Integral de Contorno com soluções fundamentais axissimétricas. Rafiezadeh e Ataie-Ashtiani (2014) utilizaram o Método de Elementos de Contorno lagrangiano para resolver problemas de infiltração de aquíferos com superfícies livres transientes, em meios isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos.

Portanto, este trabalho contribui de forma única e atual para o estudo dos fenômenos de cone de água e gás em poços horizontais e verticais, a partir de domínios bidimensionais e axissimétricos, respectivamente. Através da Lei de Darcy, é desenvolvida, ainda, a hidrodinâmica dos problemas simplificados de reservatórios de petróleo e gás, problemas de aquífero ou lençol freá-

tico (reservatórios de água), que rege o escoamento multifásico em meios porosos, adicionando resultados coerentes à Engenharia de Reservatórios através da simulação de protótipos. Por último, são apresentados ainda, problemas de reservatórios axissimétricos com poço concentrado e distribuído onde não há movimentação de interface, além de problemas de condução de calor para geometrias axissimétricas, a fim de que seja comprovado e validado o novo código apresentado com Formulação Isogeométrica e Axissimétrica junto ao Método de Elementos de Contorno.

1.5 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento das formulações axissimétrica e isogeométrica junto ao MEC, para aplicação em problemas bidimensionais e axissimétricos no qual é possível simular as diferentes formas de cones: de água e de gás; e ainda, simular problemas de breve rebaixamento de poço em lençóis freáticos, que podem ocorrer em protótipos de reservatório de óleo e de água, respectivamente, de acordo com cada configuração de armazenamento dos fluidos existentes nos mesmos. Problemas de condução de calor em geometrias axissimétricas e problemas de reservatório axissimétrico sem movimentação de interface, também são analisados a fim de validar a formulação desenvolvida através da comparação com soluções analíticas e também com o Método de Elementos de Contorno convencional.

Os objetivos específicos deste trabalho são os seguintes:

1. Descrever as diferentes configurações de reservatórios, assim como os fenômenos do cone de água e de gás que podem existir na extração de petróleo através do poço, prejudicando o mesmo.
2. Descrever a configuração de reservatório de água ou aquífero, a fim de que seja estudado o problema de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*), existente em lençóis freáticos.
3. Desenvolver um simulador de reservatório numérico através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico com aplicação em problemas bidimensionais e axissimétricos.
4. Aplicar a formulação axissimétrica em problemas de condução de calor e de reservatórios para validação do simulador quando não há fronteira móvel.
5. Comparar os resultados com o Método de Elementos de Contorno convencional para validação do código e realização de análise das vantagens e desvantagens da formulação isogeométrica.

1.6 Escopo da Tese

No Capítulo 2 são apresentados conceitos a respeito da produção de petróleo, aprofundando nas diferentes configurações de reservatório e sua relação com a extração do mesmo através do poço, além da descrição dos fenômenos do cone de água e de gás. É apresentada também a configuração

de reservatórios de água ou aquíferos, cujo objetivo é estudar o problema de breve rebaixamento de poço, onde não há um sumidouro presente. São definidos ainda os modelos físicos para a hidrodinâmica dos problemas em meios porosos: lei de Darcy, escoamento potencial e condições de contorno aplicadas. A formulação isogeométrica é apresentada no Capítulo 3 assim como a definição das NURBS, para então serem implementadas no Método de Elementos de Contorno para Escoamentos Potenciais. No Capítulo 4 são definidos os diferentes modelos matemáticos e numéricos a fim de se obter a solução fundamental para o potencial e para a velocidade, além ainda da discretização das equações como a equação integral de contorno. É obtido ainda o método de solução para o cálculo do potencial e da velocidade no contorno através de funções de forma do tipo NURBS. A formulação axissimétrica é desenvolvida no Capítulo 5 junto ao Método de Elementos de Contorno para Escoamentos Potenciais a fim de ser acopladas às funções do tipo NURBS para o desenvolvimento do novo método numérico proposto por este trabalho: o Método de Elementos de Contorno Isogeométrico com aplicação em problemas axissimétricos. No Capítulo 6 é realizada a modelagem do poço através da condição de equipotencial e produção supercrítica, levando à implementação do simulador de reservatório através dos parâmetros de entrada e calculados, assim como das condições de contorno e da movimentação da interface. Uma vez obtida esta implementação, é apresentado o simulador de reservatório baseado em Elementos de Contorno Isogeométrico para validação. Finalmente, no Capítulo 7, um dos objetivos deste trabalho é apresentado: a validação da formulação axissimétrica do MEC-Iso através dos resultados para problemas axissimétricos sem fronteira móvel. Em seguida, no Capítulo 8, os resultados com movimentação de interface são apresentados e analisados para comparação com o Método de Elementos de Contorno convencional. Por último são apresentadas as conclusões e as propostas futuras deste trabalho no Capítulo 9.

Capítulo 2

Reservatórios

Neste Capítulo são apresentados os conceitos relacionados às diferentes configurações de reservatórios de petróleo e gás e, ainda, as diferentes formações de cones de água e de gás. São detalhados os tipos de poços produtores, sua relação com o reservatório e com toda a infraestrutura de produção. As etapas de produção são complexas e exigem um grande investimento de engenharia.

Neste Capítulo são apresentadas também as configurações de reservatório de água ou aquíferos, como a ocorrência do breve rebaixamento de poço na exploração de recursos hídricos em lençóis freáticos. Este estudo é de grande importância, uma vez que a humanidade tem tornada a captação de água doce cada vez mais escassa, através do seu uso excessivo.

Logo, a análise numérica é necessária para diminuir os custos de simulação e otimizar as variáveis de produção como a posição e vazão do poço de petróleo, e obter as principais características na captação de recursos hídricos.

2.1 Etapas da Produção de Petróleo

Uma vez descoberto o petróleo, normalmente são perfurados os poços de extensão (delimitação), para estimar as dimensões da jazida. A seguir, perfuram-se os poços de desenvolvimento, que colocarão o campo em produção. No entanto, isso só ocorre quando é constatada a viabilidade técnico-econômica da descoberta, ou seja, se o volume de petróleo a ser recuperado justificar os altos investimentos necessários à instalação de uma infra-estrutura de produção.

A fase seguinte é denominada completação, quando o poço é preparado para produzir. Uma tubulação de aço, chamada coluna de revestimento, é introduzida no poço de modo a deixar o interior do revestimento de produção gabaritado e em condição de receber os equipamentos necessários. A criação de barreiras artificiais visa modificar a distribuição de pressão no reservatório, porém esse procedimento também poderia prejudicar a extração do petróleo (KIKUCHI, 1997).

A operação seguinte é o canhoneio: um canhão especial desce pelo interior do revestimento e, acionado da superfície, provoca perfurações no aço e no cimento, abrindo furos nas zonas

portadoras de óleo ou gás e permitindo o escoamento desses fluidos para o interior do poço. Outra tubulação, de menor diâmetro (coluna de produção), é introduzida no poço, para levar os fluidos até a superfície. Instala-se na boca do poço um conjunto de válvulas conhecido como “árvore-de-natal”, para controlar a produção.

Algumas vezes, o óleo vem à superfície espontaneamente, impelido pela pressão interna dos gases ou da água. Quando isso não ocorre, é preciso usar equipamentos para bombear os fluidos. O bombeio mecânico é feito por meio do “cavalo-de-pau”, um equipamento montado na cabeça do poço que aciona uma bomba colocada no seu interior. Com o passar do tempo, alguns estímulos externos são utilizados para extração do petróleo. Esses estímulos podem, por exemplo, ser injeção de gás ou de água, ou dos dois simultaneamente, e são denominados recuperação secundária. Dependendo do tipo de petróleo, da profundidade e do tipo de rocha-reservatório, pode-se ainda injetar gás carbônico, vapor, soda cáustica, polímeros e vários outros produtos, visando sempre aumentar a recuperação de petróleo.

O petróleo segue então para os separadores, onde é retirado o gás natural, água e areia. O óleo é tratado, separado da água salgada que geralmente contém, e armazenado para posterior transporte às refinarias ou terminais. Já o gás natural é submetido a um processo no qual são retiradas partículas líquidas, que vão gerar o gás liquefeito de petróleo (GLP) ou gás de cozinha. Depois de processado, o gás é entregue para consumo industrial, inclusive na petroquímica. Parte deste gás é reinjetado nos poços para estimular a produção de petróleo.

2.2 Reservatório de Petróleo

Um reservatório de petróleo é um meio poroso, permeável, que normalmente está aprisionado entre uma rocha impermeável acima e uma rocha semipermeável abaixo. Existem várias configurações possíveis dentro do reservatório, sendo que a primeira possibilidade é o reservatório conter apenas petróleo (Figura 2.1). A segunda possibilidade é o reservatório conter, além do petróleo, um reservatório de água, denominado aquífero (Figura 2.2). Além destas configurações, pode haver ainda a ocorrência de petróleo na presença de um “bolsão” de gás natural ou “capa de gás” (Figura 2.3). Por último, pode haver a presença dos três fluidos, petróleo, água e gás coexistindo (Figura 2.4). Estas diferentes configurações dependem das condições de pressão e temperatura no qual o reservatório está submetido e das condições geológicas daquele ponto da subsuperfície onde ele está localizado.

As condições de pressão e temperatura aliadas ao longo do tempo em que o petróleo fica estagnado, contribuem para a composição final e o estado físico dos hidrocarbonetos que se encontram no reservatório. Uma vez formado o petróleo, este escoar por rochas semipermeáveis até encontrar um bolsão de rocha porosa que esteja aprisionado por rochas impermeáveis. Este bolsão gradativamente se enche de petróleo até configurar-se um reservatório.

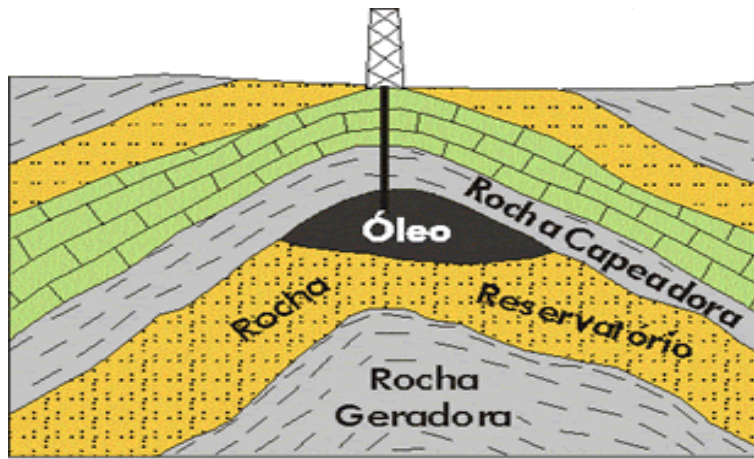


Figura 2.1: Reservatório de óleo. Reproduzido de Teixeira et al. (2009).

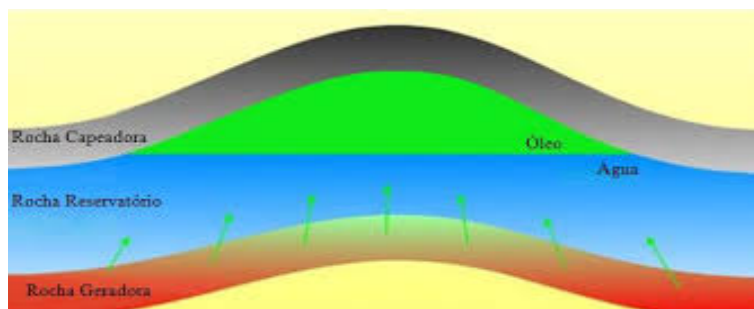


Figura 2.2: Reservatório de óleo e água.

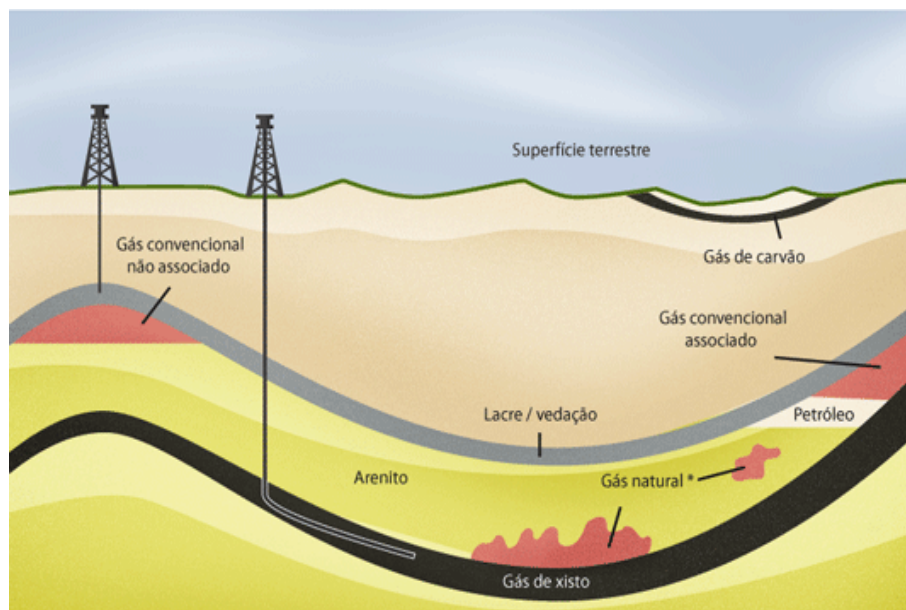


Figura 2.3: Reservatório de óleo e gás. Fonte: *U.S Energy Information Administration*.

2.2.1 Poço Produtor

O processo de extração de petróleo de um reservatório é realizado através de um poço que é perfurado no solo (*onshore*) ou na superfície do oceano (*offshore*), passando através de várias

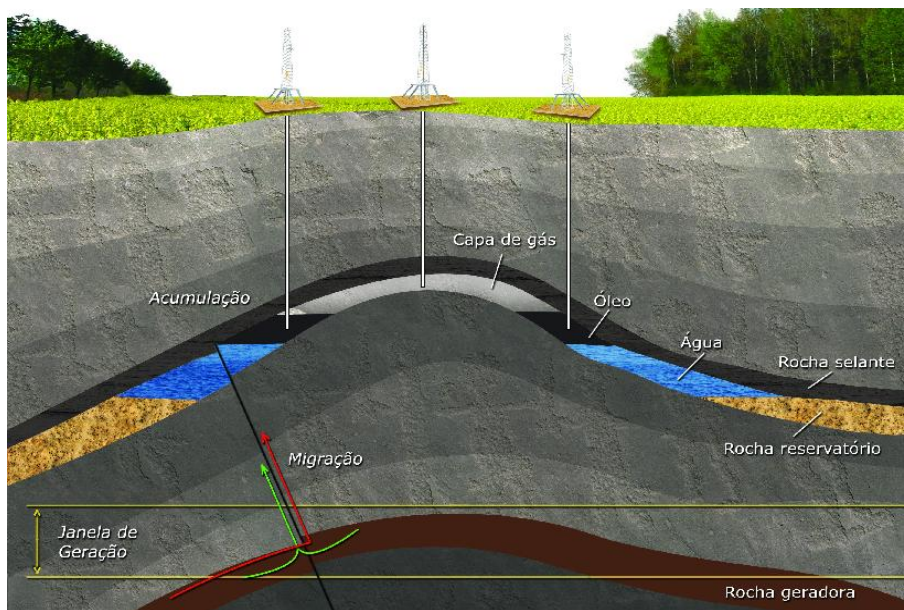


Figura 2.4: Configuração geral do reservatório. Fonte: Blog de notícias *Diário do Pré-Sal*.

camadas de rocha até chegar no meio poroso que contém o petróleo, conforme mostrado na Figura 2.5 para o caso *offshore*. O poço se caracteriza pelo sistema de perfuração desde a superfície até a zona de óleo do reservatório. Suas paredes são recobertas por um tubo metálico para garantir a estabilidade estrutural necessária denominado revestimento, que pode ser do tipo perfurado ou ranhurado na região que está em contato com a zona de óleo. Isso é necessário para permitir a entrada do óleo no interior do poço através de toda a superfície do poço que tem contato com o óleo.



Figura 2.5: Configuração geral de poços produtores. Fonte: SINMEC-UFSC

Os poços podem ser verticais, direcionais ou horizontais, contudo os poços direcionais não serão abordados neste trabalho, ainda que os poços horizontais sejam um caso particular de poço direcional.

Poços Verticais

O poço vertical (Figura 2.5) é a configuração mais utilizada desde o início da produção de petróleo pela indústria. Quando comparados com os poços horizontais, estes poços são mais baratos, tecnicamente mais simples e têm um tempo de perfuração menor.

Apresentam duas fortes características:

1. A primeira é que cada poço deve ser perfurado a partir do ponto da superfície localizado exatamente sobre o ponto do reservatório de onde se deseja extrair. Como os reservatórios são muito grandes, da ordem de quilômetros, são perfurados vários poços para extrair o petróleo, cada um com uma área de drenagem determinada pela condutividade hidráulica do meio poroso onde o óleo se encontra. A área de drenagem determina o espaçamento entre os poços. Como o custo da perfuração aumenta consideravelmente com a profundidade, é comum que poços mais profundos tenham um espaçamento maior entre si. Isso significa que em grandes reservatórios produzidos por meio de poços verticais, existirá uma grande área na superfície ocupada por equipamentos de produção.
2. A segunda característica é que o contato dos poços verticais com a zona de óleo do reservatório fica restrita à altura dessa camada de óleo. Em um reservatório, quanto maior for o diferencial de pressão entre o poço e o reservatório para se conseguir uma vazão de óleo considerável, maior será a influência na ocorrência dos fenômenos do cone de água e de gás. Em algumas situações, estas características dos poços verticais podem inviabilizar tecnicamente e/ou economicamente a extração de petróleo de um determinado reservatório. A perfuração de poços horizontais foi desenvolvida e atualmente é plenamente utilizada para superar essas adversidades.

Poços Horizontais

Uma característica específica dos poços horizontais (Figura 2.5) é o de aumentar o contato entre o poço e o reservatório, aumentando a produtividade. A zona de óleo de um reservatório é caracterizada por ser mais extensa no plano horizontal do que no vertical, portanto, a área de contato entre poço e óleo é consideravelmente maior do que em poços verticais. As mesmas vazões de óleo podem ser conseguidas com um diferencial de pressão menor, auxiliando na prevenção da formação do cone de água e de gás.

Azar e Samuel (2007) dizem que os reservatórios considerados como potenciais candidatos a receberem um poço horizontal têm pelo menos uma das características a seguir:

- Economicamente inacessíveis.
- Propensos à ocorrência de cone de água ou de gás.
- Verticalmente fraturados.
- Permeabilidade muito baixa.

- Reservatórios que contém óleo mais viscoso.
- Reservatórios que possuem camadas com ângulo de inclinação muito grande.
- Altura reduzida.

A perfuração de um poço horizontal demanda tempo e custo operacional maior que a de um poço vertical. É de extrema importância verificar se os ganhos em produtividade trazidos pelo poço horizontal superam seus custos de perfuração, para isso é necessário realizar uma análise de viabilidade econômica.

Selley e Sonnenberg (2015) apontam três fatores que podem levar à escolha de um poço horizontal:

1. A partir de um único local, uma grande área pode ser drenada por vários poços perfurados.
2. Através de um poço horizontal que intercepte um poço “fora de controle”, este pode ser selado ou ter sua pressão aliviada.
3. Uma área que está sob uma região habitada ou hidrográfica (lagos, lagoas ou rios), onde a superfície não pode ser ocupada, apresenta viabilidade de drenagem.

Em plataformas marítimas busca-se principalmente a perfuração de vários poços a partir de um mesmo local (Figura 2.5). Nelas, normalmente se perfuram um poço vertical e vários horizontais (ou direcionais).

2.2.2 Fluidos Indesejados na Produção

Uma certa quantidade de água sempre está presente nos poros das rochas junto ao óleo, e ambos os fluidos escoam para o interior do poço devido ao diferencial de pressão entre o poço e o reservatório. Esta água se encontra dentro da zona de óleo em equilíbrio e sua produção é inevitável. Ela não deve ser confundida com o reservatório de água ou o aquífero, que se localiza abaixo da zona de óleo e pode ou não existir, como mostrado na Figura 2.2. A produção de água do aquífero é o que se tenta evitar de modo a não produzir mais água do que a quantidade inevitável.

O mesmo ocorre com o gás, onde normalmente há uma parcela de gás dissolvida no óleo, independentemente do reservatório conter uma capa de gás livre. Esse gás se encontra dissolvido no óleo a mesma pressão do reservatório, porém à pressão atmosférica ele forma uma fase gasosa que chega junto com o óleo e a água à superfície. O que se tenta evitar é a produção do gás natural proveniente da capa de gás, de forma a não produzir mais gás do que a quantidade inevitável.

A aceleração da perda da energia natural do reservatório deve-se à produção de água e gás provenientes do aquífero e da capa de gás. Isso faz com que os métodos de recuperação secundária tenham que ser adotados à medida que estes fluidos indesejados são produzidos consideravelmente. Deve ficar claro que a produção de óleo sempre implica em produção de água e gás. A produção

de ambos os fluidos na produção de petróleo, água e/ou gás, maior que a quantidade inevitável através da infiltração natural pelo meio poroso, origina-se através do fenômeno dos cones de água e de gás; um dos temas de estudo deste trabalho a fim de que seja modelado e melhor compreendido através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico (MEC-Iso).

2.2.3 O Fenômeno dos Cones de Água e de Gás

O cone de água é um fenômeno que pode ocorrer durante a extração de petróleo de um reservatório que tem um aquífero de fundo (reservatório de água), como os exemplificados pelas Figuras 2.2 e 2.4. Da mesma forma, o cone de gás ocorre em reservatórios que têm a presença de uma capa de gás na sua parte superior (Figuras 2.3 e 2.4). A teoria que envolve os fenômenos é a mesma tanto para o cone de água quanto para o cone de gás, mudando apenas o par de fluidos envolvidos: óleo/água ou óleo/gás. O termo *cone* é empregado apenas quando o fenômeno ocorre em poços verticais; para poços horizontais, o fenômeno é denominado *crista* (Figura 2.6). No entanto, o termo *cone* tem sido utilizado para fins de praticidade, sem distinção para ambos os casos; assim como é adotado neste trabalho, onde são apresentados os poços horizontais e verticais.

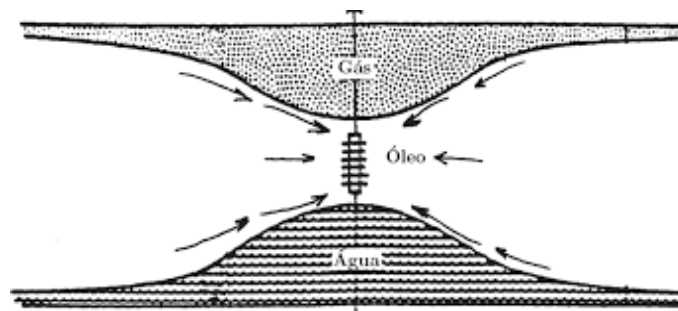


Figura 2.6: Cones de Água e de Gás em Reservatório de Petróleo. Reproduzido de Filho (2014).

A baixa pressão no poço induzida pelo bombeamento (poços insurgentes) ou pela comunicação com a pressão atmosférica enquanto o poço é surgente, introduz um gradiente de pressão dentro do reservatório que afeta os três fluidos: água, óleo e gás. O campo de pressão induzido possui decaimento radial. A pressão resultante no reservatório é a soma (diferença) de dois campos: o campo de pressão natural do reservatório e o campo de pressão induzido pelo bombeamento ou pela comunicação com a pressão atmosférica (caso para um poço surgente). O campo de pressão natural é a combinação da pressão da coluna de fluidos no interior do reservatório com a pressão das camadas geológicas sobre ele.

O gradiente de pressão resultante, naturalmente possui efeito principal de impelir o petróleo para o interior do poço, ao mesmo tempo que possui o efeito colateral de causar a tendência da água e do gás de serem impelidas também para o poço. O fenômeno do cone é gerado, portanto, uma vez que os fluidos movem-se em direção ao poço e devido à condição de imiscibilidade entre eles, a superfície de interface entre óleo e água (assim como entre óleo e gás) toma a forma de uma cônica, que é a forma “desenhada” pelas linhas de corrente do óleo fluindo para o interior do poço.

2.2.3.1 Vazão Crítica

A diferença de pressão entre o poço e o reservatório dita a vazão de petróleo na produção e, conseqüentemente, a altura atingida pelo cone. Infere-se, portanto, que a altura do cone é função da vazão de petróleo. Existe uma vazão na qual a altura do cone é tal que o seu vértice fica na iminência de atingir o poço e, neste momento, qualquer incremento na vazão faz com que água ou gás passem a ser produzidos junto com a extração do petróleo. Esta vazão é denominada de vazão crítica. A vazão crítica é definida como a máxima vazão na qual óleo é produzido sem a extração de água ou gás (JOSHI, 1991).

A vazão crítica de um poço pode ser determinada por meio de testes de produção, onde a vazão de produção é aumentada aos poucos até ocorrer um aumento repentino na quantidade de água ou gás extraídos. Este é o momento em que o cone atinge o poço e água ou gás provenientes do aquífero ou da capa de gás passam a ser produzidos. A vazão crítica é determinada como sendo a vazão imediatamente menor à ocorrência da infiltração por partes destes fluidos (água e/ou gás) no poço produtor.

É possível desligar o poço para permitir que as interfaces se re-estabilizem (CALHOUN JR., 1953). No entanto, existem reservatórios nos quais o cone é irreversível, uma vez que a água começa a ser produzida. O desligamento do poço por alguns dias não causa a diminuição no cone quando o poço é religado, para alguns casos. Isso provavelmente ocorre por causa de forças capilares severas que conseguem sustentar a saturação de água nos arredores do poço. Quando a vazão crítica não pode ser determinada por um teste de produção, um Simulador de Reservatório como o apresentado neste trabalho, é fortemente indicado para a determinação da vazão crítica. Através do MEC-Iso pode-se modelar o fenômeno do cone com uma boa precisão.

2.2.3.2 Aspectos físicos

Para analisar o fenômeno dos cones de água e de gás, deve-se considerar os principais parâmetros físicos que os afetam:

1. Massa específica do óleo (ρ_o).
2. Viscosidade dinâmica do óleo (μ_o).
3. Permeabilidade efetiva do meio poroso ao óleo (κ_o).
4. Mobilidade do óleo no meio poroso (κ_o/μ_o).

Ahmed (2010) diz que o fenômeno do cone é resultado do movimento dos fluidos do reservatório na direção de menor resistência, balanceado pela tendência dos fluidos de se manterem em equilíbrio gravitacional. Essa correlação pode ser vista no número de Froude, um parâmetro adimensional que expressa a razão entre a força de sucção do sumidouro e a força gravitacional que tende a segregar gás, óleo e água em camadas de acordo com suas massas específicas.

O número de Froude é dado por:

$$F_r = \frac{Q\mu_o}{\kappa_o H \Delta\rho g} \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1) para o número de Froude (problema bidimensional), Q representa a vazão volumétrica por unidade de comprimento do sumidouro, H é a escala característica de comprimento, $\Delta\rho$ representa a diferença de massa específica entre água e óleo (para cone de água) ou entre óleo e gás (para cone de gás) e g é a aceleração da gravidade.

A partir do número de Froude crítico pode ser obtido as características gerais do fenômenos dos cones. É preciso somente fixar F_r crítico e H como constantes, fazer com que μ_o , κ_o e/ou $\Delta\rho$ varie em magnitude e, então, analisar o que acontece com a variável Q , referente à vazão crítica do poço.

A expressão para a vazão crítica Q_c torna-se:

$$Q_c = (F_r H g) \frac{\kappa_o}{\mu_o} \Delta\rho \quad (2.2)$$

onde $\frac{\kappa_o}{\mu_o}$ é a mobilidade do óleo no meio poroso, como já definido.

A partir da Eq. (2.2) é possível observar que quanto maior for a viscosidade do óleo, menor será a vazão crítica, ou seja, maior será a tendência à ocorrência do cone. Geralmente os reservatórios de óleo mais viscosos têm permeabilidade bem maior que os de óleo menos viscosos. Portanto, a mobilidade do óleo no meio poroso exibida pelos reservatórios de óleo mais viscoso é comparável à exibida pelos reservatórios de óleo menos viscoso que tenham baixa permeabilidade ao óleo. Pode-se inferir ainda que quanto maior for a diferença das massas específicas entre os fluidos ($\Delta\rho$), maior será a vazão crítica, ou seja, menor será a tendência à ocorrência do cone.

Outro fator importante é a permeabilidade na direção vertical (anisotrópica), pois, se esta fosse zero (caso utópico), logo não haveria fluxo na direção vertical e o fenômeno do cone não ocorreria. Porém, a permeabilidade vertical pode chegar a ser igual à horizontal e a tendência ao cone é máxima para casos limites.

2.2.3.3 Vantagens e desvantagens

Toda a água produzida pode ser descartada ou reinjetada no reservatório, porém ambos os casos exigem um tratamento com alto custo operacional. A produção inevitável de água, proveniente da própria zona de óleo, já tem um volume considerável normalmente, suficiente para reinjeção nos casos em que esta manobra é necessária como mecanismo de recuperação secundária. Logo, qualquer quantidade de água extra produzida por meio do fenômeno do cone de água será extremamente prejudicial à viabilidade econômica do poço.

O gás produzido por ocorrência do cone de gás pode até chegar a ser vendido, contudo os custos de tratamento deste gás que é produzido junto com o óleo, não justificam sua produção intencional. Portanto, a produção de gás por meio do fenômeno do cone de gás é sempre prejudicial à indústria.

A pressão do reservatório cai rapidamente através da produção de gás e água por ocorrência do cone, interferindo, portanto, na ação dos mecanismos de recuperação. Mecanismos de recuperação secundária podem ser acionados prematuramente, impactando diretamente nos custos de produção, além de prejudicar a produtividade do poço. A importância de impedir o surgimento do cone, minimizando seus efeitos ou atrasando o seu surgimento, leva ao controle da produção indesejada de água ou gás que pode reduzir significativamente a produção de óleo.

Existem várias situações que indicam possíveis vantagens ao tentar contornar o problema de produção da água e do gás indesejáveis. A principal delas é manter a vazão de produção abaixo da vazão crítica. Alterar a sua mobilidade é outra forma de prevenir a produção de água, fazendo com que a formação do cone não seja tão suscetível e prejudicial para a produção de óleo. Através da injeção de polímeros hidrossolúveis na água, que a tornem mais viscosa, pode-se alcançar este objetivo.

Entender o comportamento das interfaces óleo/água e óleo/gás é o principal esforço para se obter vantagens sobre o problema do fenômeno dos cones de água e de gás. Vários métodos analíticos, experimentais e numéricos já foram propostos e testados para esta finalidade. Os métodos analíticos utilizam as equações diferenciais que governam o problema, que no caso dos cones de água e de gás é a equação de Darcy (escoamento potencial incompressível), que descreve o escoamento multifásico em meios porosos. Estes métodos utilizam em sua estrutura simplificações das equações para permitir um tratamento matemático que as solucione. Portanto, os resultados são válidos somente para aplicação na análise de casos em que as simplificações adotadas sejam consideradas válidas.

Métodos numéricos são então solicitados, onde as equações são resolvidas numericamente de forma aproximada, sem a necessidade de se obter uma expressão analítica que explique o comportamento do fenômeno físico. Por isso, os métodos numéricos não necessitam de tantas simplificações nas equações governantes do problema e podem apresentar uma aplicação mais geral. Um método numérico pode ser utilizado para estudar reservatórios e poços com características diferentes, além de permitir o estudo de regimes transientes. Métodos numéricos têm ganhado cada vez mais espaço no estudo de fenômenos físicos complexos por causa de suas características.

Análogo aos métodos analíticos, os resultados obtidos com os métodos numéricos devem ser confrontados com resultados experimentais para colocar em prova a sua fidelidade ao fenômeno físico estudado. Devem, ainda, serem confrontados com outros métodos numéricos para validação, assim como é o objetivo deste trabalho: construir um código numérico através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico para um Simulador de Reservatório e, então, compará-lo ao Método de Elementos de Contorno convencional para o mesmo problema.

2.3 Reservatório de Água

A água subterrânea em reservatórios é considerada como recurso renovável para um período de 10.000 anos, pois o ciclo hidrológico faz com que as reservas esgotadas sejam reabastecidas. Porém, em um período de 100 a 1.000 anos (o tempo de uma vida humana ou da vida útil de

um aquífero em uma civilização), pode se tornar um recurso não renovável em muitas regiões. Ao bombear a água do solo a uma taxa mais rápida do que a natureza a substitui, as pessoas estão efetivamente “minando” o suprimento de água em lençóis freáticos. De fato, por exemplo, em partes da região deserta de Sunbelt (Estados Unidos), o suprimento de aquífero com uma vida útil menor já foi esgotado e os poços profundos extraem agora uma água subterrânea com 10.000 anos de idade. Parte dessa água antiga está em rochas há tanto tempo que se tornou mineralizada demais para ser utilizada. Vários outros problemas acompanham o esgotamento dos reservatórios de água.

Abaixando o nível do lençol freático: quando extraímos a água subterrânea dos poços a uma taxa mais rápida do que a natureza pode ser reabastecida, o lençol freático cai seu nível. Primeiro, um cone de depressão se forma localmente ao redor do poço; logo, o nível do lençol freático se torna gradualmente mais baixo em uma região ampla. Consequentemente, poços, nascentes, rios e pântanos secam. Para continuar explorando o suprimento de água, é preciso perfurar progressivamente mais fundo. O nível do lençol freático também pode cair quando as pessoas desviam a água da superfície da área de recarga. Esse problema se desenvolveu, por exemplo, nos Everglades (sul da Flórida, Estados Unidos), um imenso pântano onde o lençol freático se localizava na superfície do solo, antes da expansão de Miami e do desenvolvimento da agricultura. O desvio de água da área de recarga dos Everglades para os canais reduziu significativamente o lençol freático, fazendo com que partes dos Everglades secassem.

Invertendo a direção de escoamento das águas subterrâneas: o cone de depressão que se desenvolve ao redor de um poço cria uma inclinação local para o lençol freático. O gradiente de potencial hidráulico resultante pode ser grande o suficiente para reverter a direção de escoamento das águas subterrâneas mais próximas. Tais reversões podem permitir que contaminantes, saindo de uma fossa séptica, por exemplo, contaminem o poço.

Intrusão salina: nas áreas costeiras, as águas límpidas dos lençóis freáticos ficam em uma camada acima da água salina que entrou no aquífero a partir do oceano adjacente. Como a água doce é menos densa que a água salina, ela flutua acima desta. Se esta água é bombeada rapidamente, a interface entre a água salina e a água límpida sobe. Uma vez que a interface ultrapassa a base do poço, o poço começará a produzir água salina indesejável. Os geólogos se referem a esse fenômeno como intrusão salina.

Colapso dos poros e sedimentação da terra: quando a água subterrânea preenche o espaço poroso de uma rocha ou sedimento, mantém os grãos separados, pois a água não pode ser comprimida. A extração de água de um poro elimina o suporte que mantém os grãos separados, pois o ar que substitui a água pode ser comprimido. Como resultado, os grãos se tornam mais próximos. Esse colapso dos poros diminui permanentemente a porosidade e a permeabilidade de uma rocha e, portanto, diminui seu valor de recurso hídrico como aquífero. O colapso dos poros também diminui o volume do aquífero, uma vez que o solo acima do reservatório afunda. Essa sedimentação pode causar fissuras na superfície e inclinar o solo. Os edifícios construídos sobre as regiões em sedimentação de terra podem inclinar-se ou suas fundações podem quebrar.

A Figura 2.7 exemplifica alguns dos principais problemas existentes causados muitas vezes pela

contaminação de aquíferos.

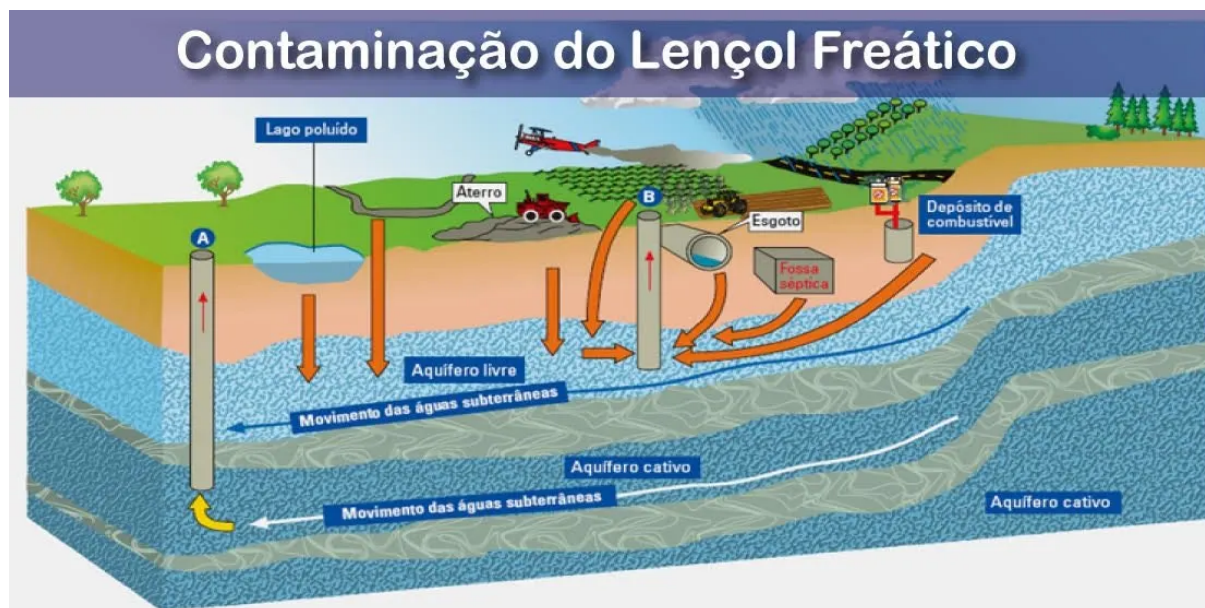


Figura 2.7: Contaminação de aquíferos (reservatórios de água). Fonte: EmbTec.

Grande parte das águas subterrâneas do mundo é cristalina e pura o suficiente para beber diretamente do solo. Rochas e sedimentos são filtros naturais capazes de remover sólidos em suspensão. Esses sólidos ficam presos em poros minúsculos ou grudam nas superfícies dos flocos de argila. De fato, a distribuição comercial de água subterrânea engarrafada (“água de nascente”) tornou-se um grande empreendimento em todo o mundo. Mas os produtos químicos dissolvidos e, em alguns casos, o metano, podem inutilizar algumas águas naturais subterrâneas. Por exemplo, as águas subterrâneas que passaram por estratos contendo sal podem tornar-se salobras e inadequadas para irrigação ou bebida.

As águas subterrâneas que passaram pelo calcário ou dolomita contêm íons de cálcio dissolvido (Ca^{2+}) e magnésio (Mg^{2+}); essa água, chamada de “água dura”, pode ser um problema porque os minerais carbonatos precipitam para formar uma “escala” que obstrui as tubulações. Além disso, lavagem com “água dura” pode ser difícil porque o sabão não desenvolve espumas. As águas subterrâneas que passaram por rochas contendo ferro podem conter óxido de ferro dissolvido que precipita para formar manchas de ferrugem. Alguns aquíferos contêm sulfeto de hidrogênio dissolvido, que sai da solução quando as águas subterrâneas sobem à superfície; sulfeto de hidrogênio é um gás venenoso e possui cheiro de ovo podre. Nos últimos anos, aumentou a preocupação com o arsênico, um produto químico altamente tóxico que entra nos lençóis freáticos quando os minerais contendo arsênico se dissolvem dentro do aquífero (Fonte: *Geologylearn.Blogspot*).

Alguns contaminantes nas águas subterrâneas ocorrem naturalmente. No entanto, nas últimas décadas, os contaminantes foram cada vez mais introduzidos nos aquíferos devido à atividade humana. Esses contaminantes incluem resíduos agrícolas (pesticidas, fertilizantes e esgoto de animais), resíduos industriais (produtos químicos orgânicos e inorgânicos perigosos), efluentes de aterros sanitários e fossas sépticas (incluindo bactérias e vírus), produtos petrolíferos e outros

produtos químicos que não se dissolvem na água, resíduos radioativos (da fabricação de armas, usinas de energia e hospitais) e ácidos lixiviados de minerais sulfurados em minas de carvão e metal. A nuvem de água subterrânea contaminada que se afasta da fonte de contaminação é chamada de pluma contaminante.

Em primeiro lugar, a melhor maneira de evitar essa contaminação das águas subterrâneas é impedir que os contaminantes entrem nos aquíferos. Isso pode ser feito colocando contaminantes em recipientes selados ou em leitos impermeáveis, para que eles sejam isolados dos lençóis freáticos. Se esse local não estiver disponível, a área de armazenamento deve ser revestida com plástico ou com uma espessa camada de argila, pois a argila não atua apenas como um selante, mas pode se unir a contaminantes. Felizmente, em alguns casos, processos naturais podem limpar a contaminação das águas em reservatórios porosos. Os produtos químicos podem ser absorvidos pela argila, o oxigênio na água pode oxidá-los e as bactérias na água podem metabolizá-los, transformando-os em substâncias inofensivas.

Quando os contaminantes poluem um reservatório de água, os engenheiros ambientais perfuram poços de teste para determinar de que maneira e com que velocidade a coluna de contaminantes está escoando; depois de conhecer o caminho do escoamento, eles podem fechar os poços no caminho para evitar o consumo de água contaminada. Os engenheiros podem tentar limpar a água subterrânea perfurando uma série de poços de extração para bombeá-la para fora do solo. Se a água contaminada não subir rápido o suficiente, os engenheiros perfuram os poços de injeção para forçar água limpa ou vapor no chão sob a coluna de contaminantes, fazendo com que os fluidos injetados empurrem a água contaminada para dentro dos poços de extração.

Recentemente, os engenheiros ambientais começaram a explorar técnicas de biorremediação: injetar oxigênio e nutrientes em um aquífero contaminado para promover o crescimento de bactérias que podem reagir e quebrar moléculas de contaminantes. Contudo, as técnicas de limpeza são caras e geralmente são apenas parcialmente eficazes (Fonte: *Geologylearn.Blogspot*).

2.3.1 Breve Rebaixamento de Poço (*Quick Drawdown*)

O breve rebaixamento de poço é a rápida mudança no nível hidráulico de água em relação às condições espaciais e temporais iniciais do sistema. O breve rebaixamento é frequentemente representado em diagramas de seção transversal de aquíferos, um dos problemas apresentado neste trabalho. Na hidrogeologia de aquíferos, o breve rebaixamento é a rápida redução no nível de água observada em um poço contido dentro do reservatório, normalmente devido ao bombeamento como parte de um teste de poço ou teste de aquífero. Como resultado da retirada rápida de água e através da definição de hidrologia das águas de superfície e na engenharia civil, o breve rebaixamento refere-se à redução da elevação da superfície de um corpo de água, do lençol freático, da superfície piezométrica ou da superfície da água de um poço (BAGHERI et al., 2019).

Portanto, o problema de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*) pode ocorrer nas seguintes formas:

1. Bombeamento a partir de uma perfuração.

2. Interferência de uma perfuração de bombeamento adjacente.
3. Em resposta ao bombeamento local intensivo de águas subterrâneas.
4. Declínio sazonal regional devido à descarga em excesso de recarga.

A Figura 2.8 apresenta uma configuração de breve rebaixamento de poço.

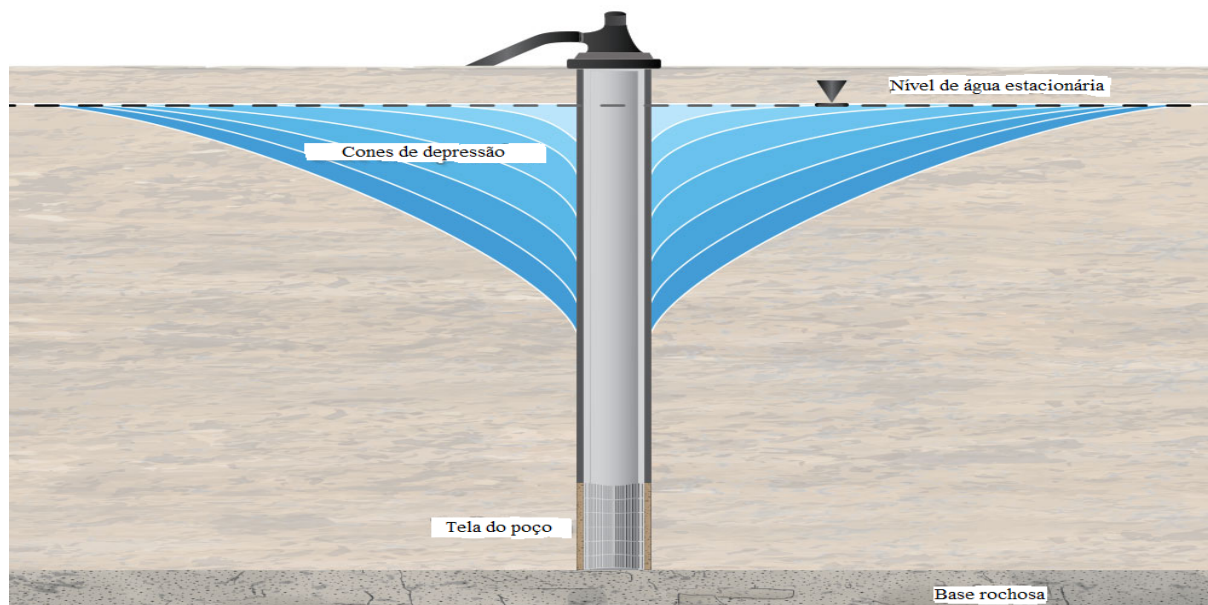


Figura 2.8: Breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*). Fonte: *solinst.com*.

A captação de água subterrânea devido à sua extração excessiva pode ter impactos ecológicos adversos. A característica ambiental dos lençóis freáticos costuma apresentar alta biodiversidade; no entanto, a redução do volume de água no reservatório altera a quantidade e os tipos de nutrientes liberados para os organismos adjacentes. Além disso, áreas úmidas, pesqueiros, habitats terrestres e aquáticos próximos podem ser alterados com uma redução da água disponível para esses ecossistemas, em algumas vezes, até mesmo alterando a ecofisiologia das espécies.

A extração de água subterrânea a uma taxa mais rápida do que pode ser reabastecida naturalmente pode ser chamada de superdimensionamento. Esse processo pode diminuir a quantidade de água no reservatório que alimenta naturalmente os corpos d'água circundantes, incluindo áreas úmidas, lagos, rios e córregos. Além disso, quando um cone de depressão é formado em torno de um poço de bombeamento devido à extração de água no lençol freático, as fontes de água subterrânea próximas podem fluir em direção ao poço para reabastecer o cone, retirando assim, água de córregos e lagos locais. Isso pode resultar em uma baixa qualidade de água nesses corpos d'água locais, à medida que a sua contribuição no escoamento base é reduzida, tornando, portanto, escoamentos permanentes cada vez mais em escoamentos intermitentes e até mesmo transientes. Finalmente, o breve rebaixamento de poços em aquíferos pode levar a uma maior sensibilidade do ecossistema às mudanças climáticas e pode ser um fator que contribui para a elevação do nível do mar e a sedimentação da terra.

Alguns métodos para medir o breve rebaixamento de poço podem ser correlacionados:

Transdutor: é utilizado para medir os níveis de água em poços de lençóis freáticos, rios, córregos, tanques, canais abertos e sistemas de eclusa.

Sirene ou ecômetro acústico de poços: é uma ferramenta simples, econômica e minimamente intrusiva usada para medir pressões e níveis subaquáticos.

Sirene elétrica é um método prático e econômico em terreno utilizado para medir os níveis de água dos poços. Este método utiliza um peso conectado a um fio isolado e um amperímetro para indicar um circuito fechado. A corrente fornecida por uma pequena bateria flui através do circuito, quando a ponta do fio está em contato com a superfície da água.

Linha de ar: é um método conveniente e não invasivo usado para medir os níveis de água, frequentemente usado em testes repetidos de poços com mais de 90 metros de profundidade. Este método obtém a profundidade do lençol freático usando um manômetro através do deslocamento de água.

Fita úmida: é um método comumente usado para medir níveis de água de até 30 metros de profundidade. Este método utiliza um peso de chumbo preso a uma fita métrica de aço.

2.4 Hidrodinâmica do Problema

Casos que incluem poços horizontais e verticais de petróleo são utilizados na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás neste trabalho; o caso para simulação de breve rebaixamento de poço é apresentado para a análise de aquíferos (reservatórios de água). Todas as simulações são realizadas em domínio bidimensional ou axissimétrico. A Figura 2.9 mostra, por exemplo, o domínio bidimensional representativo (gás e óleo coexistindo) simplificado do escoamento no reservatório, obtido através de um plano de corte.



Figura 2.9: Domínio bidimensional do reservatório.

Os problemas são tratados de forma individual: (i) reservatório contendo água e óleo - cone de água, (ii) reservatório contendo óleo e gás - cone de gás, (iii) reservatório de água (aquífero) - breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*).

Apenas um modelo é adotado neste trabalho: escoamento potencial. Neste modelo, fluidos e rochas são considerados incompressíveis. O modelo para escoamento compreensível também é possível, mas no momento não é objetivo deste trabalho. Portanto, a equação da difusividade hidráulica não é utilizada.

Os fluidos são considerados imiscíveis entre si e a interface entre eles é considerada como sendo abrupta. Esta aproximação considera que quando dois fluidos imiscíveis estão em contato, existe uma interface entre eles e, de cada lado desta interface, só existe um fluido cujo escoamento é governado pelo gradiente de seu próprio potencial. A interface se movimentando, ambos os fluidos também irão se movimentar, de forma que não ocorram vazios nem sobreposições entre eles. Tal aproximação se dá pelo fato de que a camada de transição entre os fluidos (que se apresentam estratificados em função da diferença entre as massas específicas), na qual existe a mistura entre eles, tem altura insignificante em comparação com a escala de comprimento característica do escoamento.

Vale ressaltar que mesmo os modelos mais sofisticados não conseguem representar fielmente os reservatórios. Reservatórios são inacessíveis, portanto, não se pode obter um conhecimento real das suas características físicas. Existem extrapolações feitas a partir de dados obtidos em medições e amostras de material retirado do reservatório durante a fase de perfuração dos poços. Em estudos dos reservatórios de petróleo e de água (aquíferos), são utilizados valores médios para suas propriedades físicas; porosidade, permeabilidade e compressibilidade, mesmo nos casos de modelagem mais complexa. Valores numéricos muito apurados, com um grande número de algarismos significativos, não necessariamente aumentam a exatidão do modelo, uma vez que os valores reais das grandezas que se estão sendo representadas não são conhecidos.

2.4.1 Lei de Darcy

A Lei de Darcy é uma ferramenta simples e ao mesmo tempo poderosa, que auxilia os engenheiros de reservatório na avaliação qualitativa e simplificada dos fatores que afetam o escoamento multifásico em meios porosos. Sua aplicação conceitual leva a possíveis inferências do problema, mesmo que estudos detalhados ainda não sejam realizados.

Em 1856, na cidade de Dijon (França), Darcy (1856) investigou o comportamento do escoamento de água através de um filtro vertical contendo areia. O experimento de Darcy consiste em simular o escoamento de água sob pressão através de um cilindro de seção transversal A preenchido com areia até uma altura L . A Figura 2.10 ilustra o experimento de Darcy.

Darcy (1856) chegou a seguinte equação para o escoamento em meios porosos:

$$Q = \frac{KA(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (2.3)$$

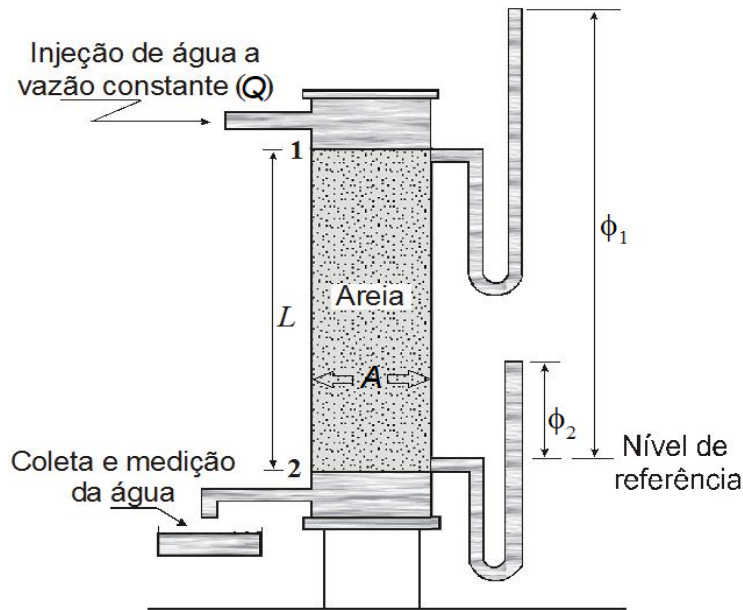


Figura 2.10: Experimento de Darcy. Reproduzido de Dias Jr. (2012).

Da Eq. (2.3) têm-se que Q é a vazão volumétrica do fluido, A é a área da seção transversal do aparato, L é o comprimento a ser atravessado pelo fluido ou “altura de areia”, Φ_1 e Φ_2 são as alturas piezométricas das seções de início e fim do escoamento e K é a condutividade hidráulica do meio, definida por Bear (1972) por:

$$K = \frac{\kappa \rho g}{\mu} \quad (2.4)$$

Da Eq. (2.4) tem-se que κ é a permeabilidade absoluta do meio poroso, ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e g é a aceleração da gravidade. A permeabilidade absoluta κ é uma característica do meio poroso e independe do fluido que o está preenchendo. A condutividade hidráulica K , por envolver a massa específica e a viscosidade dinâmica do fluido, ρ e μ respectivamente, é dependente, portanto, do fluido que está escoando. Os fatores limitantes da Lei de Darcy se encontram na permeabilidade do meio poroso que pode sofrer alterações consideráveis em função do volume de vazios do material e da temperatura da água no momento do ensaio. Um mesmo solo poderá apresentar, conforme sua situação, permeabilidades diferentes.

Dividindo ambos os lados da Eq. (2.3) por A , chega-se à expressão para a velocidade aparente ou vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal q :

$$q = \frac{K (\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (2.5)$$

q é denominada ainda como sendo a velocidade média (macroscópica) do escoamento e, ao reorganizar a Eq. (2.5), pode ser escrita novamente como:

$$q = \frac{-K (\Phi_2 - \Phi_1)}{L} \quad (2.6)$$

ou ainda como:

$$q = \frac{-K\Delta\Phi}{L} \quad (2.7)$$

Ao aplicar a propriedade do cálculo fazendo o limite do comprimento L tender a zero, tem-se:

$$q = -K \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (2.8)$$

sendo x a coordenada da direção do escoamento.

Para escoamento bidimensional ou tridimensional, tem-se:

$$\mathbf{q} = -K\nabla\Phi \quad (2.9)$$

Através da Eq. (2.9) pode ser observado que a velocidade aparente do fluido, q , está linearmente relacionada (através da condutividade hidráulica do meio) com o gradiente de uma função potencial, denominado potencial de velocidade do escoamento. Liggett e Liu (1983) a definem através da altura piezométrica, dada pela seguinte expressão:

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (2.10)$$

O primeiro termo da Eq. (2.10) é, portanto, conhecido como altura piezométrica; o segundo termo como sendo a altura que está associada com um referencial ou, ainda, com a energia associada à posição do fluido no campo gravitacional.

2.4.1.1 Velocidade Real do Fluido

A velocidade aparente do fluido é dada pela vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal ao escoamento, ou seja:

$$\mathbf{q} = \frac{Q}{A}\mathbf{n} \quad (2.11)$$

em que \mathbf{n} é o vetor unitário normal à área da seção transversal A .

Como dito anteriormente, a velocidade aparente do fluido é uma velocidade média macroscópica do escoamento, denominada também por velocidade de Darcy, velocidade de descarga ou, ainda, velocidade superficial. Vale ressaltar que ela não representa a velocidade real do fluido no interior dos poros. Deve-se considerar que o mesmo ocupa apenas uma fração do volume total do meio poroso e que percorre caminhos tortuosos dentro dos poros interconectados das rochas (BRUCH, 1991).

Liggett e Liu [33] definem a velocidade média real do fluido no interior dos poros como sendo:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\sigma} \quad (2.12)$$

em que \mathbf{u} é a velocidade média real do fluido e σ é a porosidade do meio, dada por:

$$\sigma = \frac{\text{Volume de vazios na rocha}}{\text{Volume total da rocha}} \quad (2.13)$$

A partir das Equações (2.12) e (2.13) infere-se que a velocidade média real do fluido \mathbf{u} é sempre maior que a velocidade aparente \mathbf{q} .

2.4.2 Escoamento Potencial

Os fluidos, assim como o meio, são considerados incompressíveis no modelo de escoamento potencial adotado. O meio poroso é homogêneo com permeabilidade constante e isotrópica na região do escoamento e, ainda, a viscosidade dinâmica dos fluidos é considerada como sendo constante. Neste modelo, os poros estão saturados com apenas um fluido por vez.

2.4.2.1 Equação Governante

Um escoamento potencial é definido como sendo irrotacional quando em uma região irrotacional de escoamento, a velocidade pode ser expressa como sendo o gradiente da função potencial de velocidade (CENGEL; CIMBALA, 2006), dada pela Eq. (2.9), ou seja:

$$\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times (-K\nabla\Phi) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

uma vez que o rotacional do gradiente de qualquer função potencial é sempre zero.

O princípio de conservação da massa é definido através da equação da continuidade incompressível como sendo:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.16)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.16), obtém-se:

$$\nabla \cdot (-K\nabla\Phi) = 0 \quad (2.17)$$

Considerando o meio como sendo homogêneo, a condutividade hidráulica K é assumida como constante e isotrópica. Logo, a Eq. (2.17) torna-se:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.18)$$

A Eq. (2.18) é definida como sendo a Equação de Laplace, que governa o escoamento em um meio poroso simplificado.

No presente trabalho deve ser adicionado um sumidouro pontual para ser contabilizado na hidrodinâmica do problema, logo, aplicando o princípio de conservação da massa resulta em:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.19), obtém-se:

$$\nabla \cdot (-K\nabla\Phi) = -Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.20)$$

Rearranjando, torna-se:

$$\nabla^2\Phi = \frac{Q}{K}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.21)$$

em que δ é a função delta de Dirac e \mathbf{x}_s é o vetor posição do sumidouro.

A Eq. (2.21) define o laplaciano da função potencial como sendo igual a 0 em todo o domínio, tornando-se, portanto, a equação de Laplace. No ponto onde está localizado o sumidouro, a equação de Laplace torna-se a equação de Poisson.

A equação de Laplace é a equação diferencial governante do problema; a equação de Poisson para casos com fontes ou sumidouros. Além do escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos, a equação de Laplace governa a transferência de calor por condução em sólidos, o fluxo de corrente elétrica em um condutor e outros fenômenos físicos.

No momento, o escoamento compressível não será considerado. Portanto, a equação governante do escoamento compressível em meios porosos, ou seja, a equação da difusividade hidráulica não será analisada. A solução do problema é válida para qualquer fluido incompressível, independentemente de sua massa específica ou sua viscosidade, em regiões do escoamento nas quais a aproximação irrotacional é adequada. A solução é válida até mesmo instantaneamente para um escoamento não permanente, pois o tempo não aparece na equação da continuidade incompressível. Em outras palavras, em qualquer instante no tempo, o campo de escoamento incompressível se ajusta instantaneamente de forma a satisfazer a equação de Laplace e as condições de contorno existentes naquele instante. Caso que pode ser aplicado ao problema de movimentação de interface estudado neste trabalho, onde a equação de Laplace é calculada passo a passo em cada instante de tempo.

2.4.3 Condições de Contorno

Neste trabalho são apresentados dois simuladores para escoamento multifásico em meios porosos: (i) escoamento monofásico, (ii) escoamento bifásico. A simulação de escoamento monofásico permite analisar o fenômeno do cone de gás, em regime de produção com vazão subcrítica em reservatórios de petróleo; e a característica do breve rebaixamento de poços em reservatórios axisimétricos de água. A simulação para o caso de sub-regiões, ou seja, para escoamento bifásico, permite analisar os fenômenos dos cones de água e de gás, tanto em regime subcrítico quanto supercrítico em poços bidimensionais e axissimétricos de petróleo.

São mostradas a seguir, portanto, as condições de contorno para escoamento potencial monofásico e bifásico e, ainda, para a interface, cuja referência está associada ao trabalho de Gontijo (2015).

2.4.3.1 Escoamento Monofásico

O simulador de reservatório para escoamento monofásico é utilizado para simular uma extração de óleo sujeito à ocorrência de cone de gás, ou seja, para a configuração de reservatório de petróleo onde uma camada de óleo e outra de capa de gás coexistem e, ainda, para analisar o breve rebaixamento de poços (*quick drawdown*), fenômeno que ocorre em reservatórios de água devido ao bombeamento como parte de teste de poços ou teste de aquíferos.

A Figura 2.11 mostra o aspecto geral para o problema de cone de gás em reservatórios de petróleo e gás.

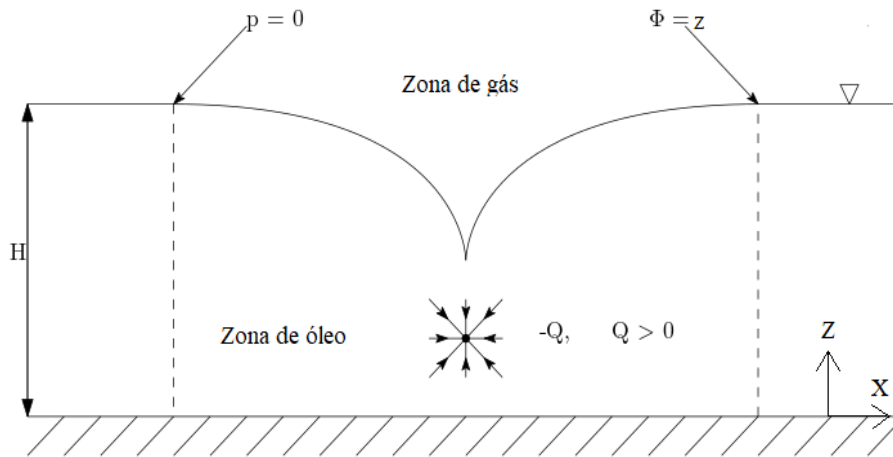


Figura 2.11: Fenômeno do Cone de Gás - Condições de Contorno.

A partir da Figura 2.11 pode ser definido o limite inferior da camada de óleo, ou seja, a base, como sendo uma fronteira impermeável. A impermeabilidade representa a condição de contorno (C.C.) no qual não há escoamento na direção normal à base (\hat{e}_z), portanto, tem-se:

$$\text{C.C. Base: } \mathbf{q} \cdot (-\hat{e}_z) = 0 \quad (2.22)$$

Na Figura 2.11, H é a altura da camada de óleo, medida da base impermeável até a interface óleo/gás não perturbada pelo escoamento. Os limites laterais têm sempre o potencial igual a H e o sumidouro com intensidade $-Q$, com $Q > 0$. Portanto, a condição de contorno para os limites laterais é:

$$\text{C.C. Limites Laterais: } \Phi = H \quad (2.23)$$

A interface óleo/gás (superfície livre) é o limite superior da zona de óleo, definida como sendo uma superfície freática ($p = 0$). Logo, de acordo com a Eq. (2.10), a altura piezométrica da superfície livre é igual a sua altura (coordenada z), variável de estudo neste trabalho. Portanto, a condição de contorno para a superfície livre é:

$$\text{C.C. Superfície Livre: } \Phi = z(x) \quad (2.24)$$

A Figura 2.12 mostra o aspecto geral para o problema de breve rebaixamento de poços (*quick drawdown*) em reservatórios de água (aquíferos).

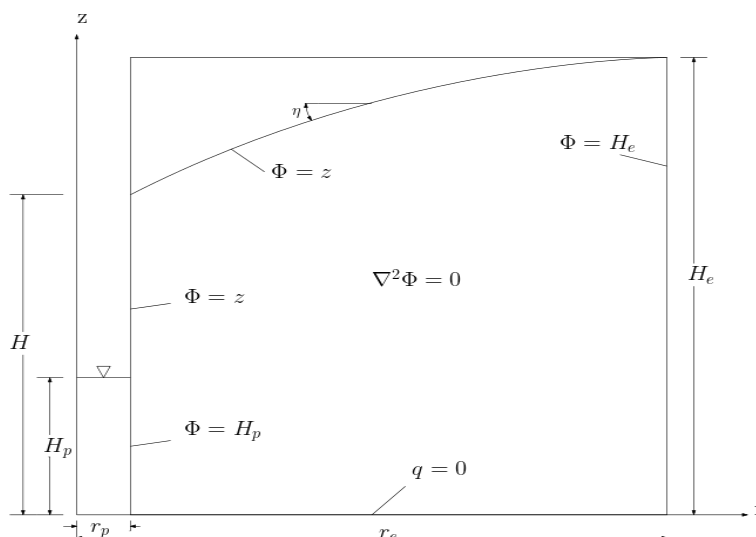


Figura 2.12: Breve Rebaixamento de Poços (*Quick Drawdown*) - Condições de Contorno.

onde H_e é a altura externa do aquífero, H_p é a altura do poço, r_e é o raio externo do aquífero, r_p é o raio do poço e η é o ângulo de inclinação da superfície livre.

A partir da Figura 2.12 pode ser definido o limite inferior do aquífero ou seja, a base, como sendo uma fronteira impermeável. A impermeabilidade representa a condição de contorno no qual não há escoamento na direção normal à base (\hat{e}_z), portanto, tem-se:

$$\text{C.C. Base: } \mathbf{q} \cdot (-\hat{e}_z) = 0 \quad (2.25)$$

Na Figura 2.12, H_e é a altura externa do aquífero, medida da base impermeável até a interface água/ar não perturbada pelo escoamento. Os limites laterais têm sempre o potencial igual a H_e

para a condição inicial do problema $t = 0$, porém, assim que ocorre o rebaixamento do aquífero pelo poço, o potencial da parede lateral onde está localizado o poço torna-se H_p e o restante desta mesma parede possui valor igual à coordenada z de referência, como mostrado na Figura 2.12. Nesse tipo de problema a vazão do poço não é contabilizada no simulador de reservatório. Portanto, as condições de contorno para os limites laterais do aquífero são:

$$\text{C.C. Parede Externa: } \Phi = H_e \quad (2.26)$$

$$\text{C.C. Parede Poço: } \Phi = H_p \quad (2.27)$$

A interface água/ar (superfície livre) é o limite superior da zona do aquífero, definida como sendo uma superfície freática ($p = 0$). Logo, de acordo com a Eq. (2.10), a altura piezométrica da superfície livre é igual a sua altura (coordenada z). Assim como na superfície livre do aquífero, o potencial da parede do reservatório logo acima do poço, também está em função da coordenada z . Portanto, as condições de contorno para a superfície livre e parede do reservatório logo acima do poço são:

$$\text{C.C. Superfície Livre: } \Phi = z(r) \quad (2.28)$$

$$\text{C.C. Parede acima do Poço: } \Phi = z(r) \quad (2.29)$$

As condições de contorno para o escoamento monofásico para o estudo do fenômeno do cone de gás, são definidas a partir da Eq. (2.22) até a Eq. (2.24); e para o estudo do breve rebaixamento de poço, a partir da Eq. (2.25) até a Eq. (2.29).

2.4.3.2 Escoamento Bifásico

O simulador de reservatório para escoamento bifásico é utilizado para simular uma extração de óleo sujeito à ocorrência do cone de água ou cone de gás, ou seja, para a configuração de reservatório onde uma camada de óleo e outra de água ou de capa de gás coexistem. A Figura 2.13 mostra o aspecto geral deste tipo de problema.

A partir da Figura 2.13 podem ser definidos os limites inferior da zona de água e superior da camada de óleo, ou seja, a base e o topo respectivamente, como sendo fronteiras impermeáveis. A impermeabilidade representa a condição de contorno no qual não há escoamento na direção normal à base e nem ao topo, portanto, tem-se:

$$\text{C.C. Base: } \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (2.30)$$

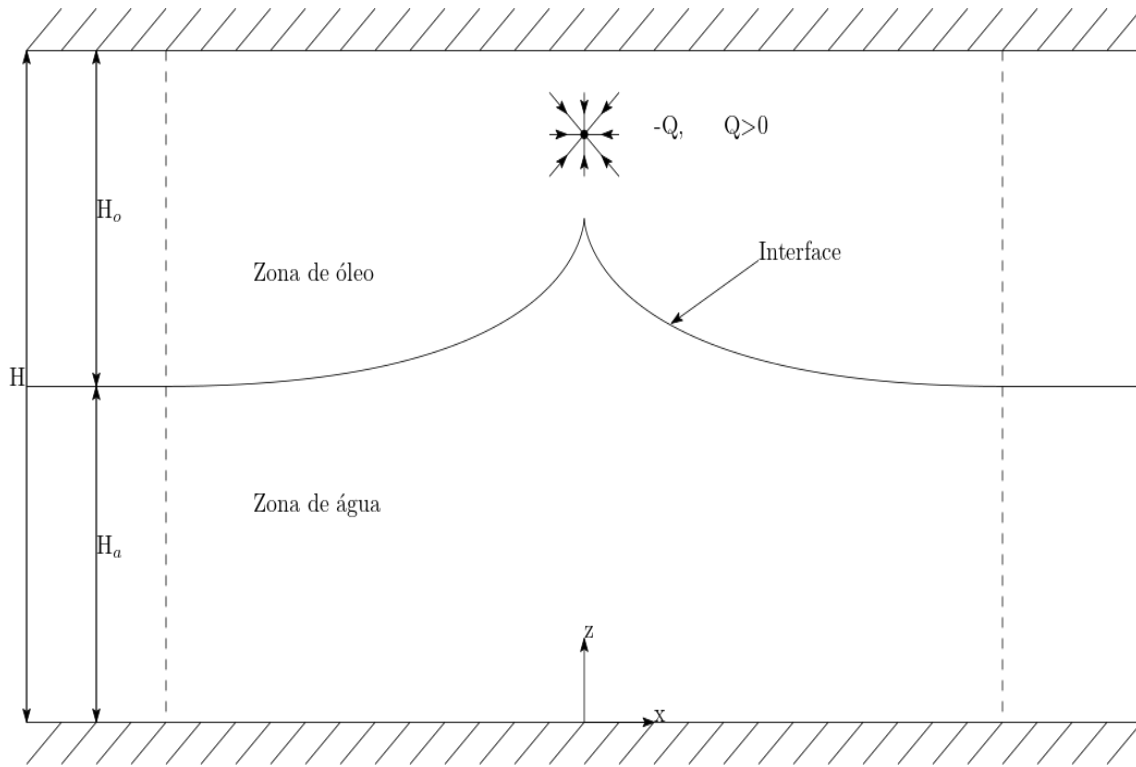


Figura 2.13: Fenômeno do Cone de Água - Condições de Contorno.

$$\text{C.C. Topo: } \mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (2.31)$$

Na Figura 2.13, H é a altura total do reservatório; H_a é a altura da camada de água, medida da base impermeável até a interface não perturbada pelo escoamento; H_o é a altura da zona de óleo, medida da interface não perturbada pelo escoamento até o topo impermeável. Portanto, a condição de contorno para os limites laterais são:

$$\text{C.C. Limites Laterais (óleo): } \Phi = H_o + H_a \quad (2.32)$$

$$\text{C.C. Limites Laterais (água): } \Phi = H_a + (\rho_o/\rho_a) H_o \quad (2.33)$$

Interface

Interface é o limite entre as camadas de água e óleo ou entre o reservatório de óleo e a capa de gás. De acordo com Bear (1972), o modelo utilizado considera os fluidos como sendo imiscíveis e a aproximação para a interface como sendo abrupta. A condição de interface do tipo abrupta, implica que para um ponto localizado sobre a interface, a velocidade deve ter a mesma magnitude, porém, sentidos contrários do ponto de vista de qualquer um dos dois fluidos. As condições de contorno para a interface são as equações de compatibilidade de pressões e equilíbrio de velocidades, dadas através do fenômeno do escoamento que leva à condição de continuidade de pressão entre os dois

fluidos, ao longo de todo o reservatório e, conseqüentemente, na interface. As tensões capilares são consideradas como sendo desprezíveis.

$$\text{C.C. 1 Interface: } p_o = p_a \quad (2.34)$$

$$\text{C.C. 2 Interface: } \mathbf{q}_o \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{n} \quad (2.35)$$

em que \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao ponto da interface considerado.

As condições de contorno para o escoamento bifásico são definidas a partir da Eq. (2.30) até a Eq. (2.35). Pode-se obter as mesmas equações análogas para o escoamento de óleo/gás.

A coordenada z do sumidouro localiza-se inicialmente na camada de óleo e possui intensidade igual a $-Q$, $Q > 0$. A posição do sumidouro pode vir a ser tomada pela zona de água (ou de gás) à medida que o cone de água (ou de gás) avança. A interface, assim como a superfície livre no caso monofásico, tem sua localização desconhecida durante a extração do óleo. É parte do escopo deste trabalho descobrir esta localização.

Capítulo 3

Curvas de Bézier, B-Splines e NURBS

Neste Capítulo é apresentada a formulação das curvas de Bézier, B-Splines e NURBS que serão utilizadas para descrever a geometria, na maioria das vezes de forma exata, aproximando as condições de contorno e as variáveis desconhecidas no contorno ao longo dos capítulos posteriores. Em problemas de engenharia, as discretizações usualmente utilizadas não possuem continuidade na derivada da variável principal ao longo de elementos distintos. Mais uma fonte de erro é introduzida ao processo quando suas funções de forma tem seu comportamento definido por trechos. Os métodos mais populares para se preservar essa derivada é a utilização de *splines* em seus diversos tipos: Bezier, B-Splines, *Non Uniform Rational Basis Splines* (NURBS), entre outras.

As NURBS conseguem representar seções cônicas de forma exata: círculos, hipérbolas, elipses e parábolas. Já as funções de forma lagrangianas usuais não são capazes de descrever geometrias mais complexas de maneira precisa. As NURBS são mais adequadas para representar as geometrias e podem, ainda, ser utilizadas para aproximar as variáveis de campo. Quando são utilizadas geometrias complexas em um problema, usar a representação analítica exata do contorno no MEC acarreta em uma precisão maior para um mesmo número de graus de liberdade.

Ter que criar uma malha específica para a análise numérica não é mais necessário quando as mesmas funções que descrevem a geometria nos programas de modelagem geométrica do tipo CAD (*Computer Aided Design*), podem também aproximar as variáveis de campo no MEC, tornando-se, portanto, uma grande vantagem em sua utilização. Assim é formado o MEC Isogeométrico.

3.1 Curvas de Bézier

Pierre Bézier desenvolveu curvas e superfícies de forma livre para o design de automóveis, enquanto trabalhava na fabricante francesa Renault. Estas curvas se tornaram muito importantes na modelagem matemática e por isso receberam o seu nome. Usando a base de Bernstein, pode ser definida a curva de Bézier como sendo:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(u), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.1)$$

em que os coeficientes B_i são denominados pontos de controle e formam, portanto, o polígono de controle. $J_{n,i}(u)$ é denominado base de Bernstein, u e n são o parâmetro e a ordem da curva, respectivamente, e o índice i é associado ao ponto de controle. A base de Bernstein pode ser escrita como sendo:

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (3.2)$$

onde $\binom{n}{i}$ é o coeficiente binomial de Newton aplicado a n e i .

Uma curva de Bézier (ordem $n = 3$) e seu polígono de controle podem ser observados na Figura 3.1:

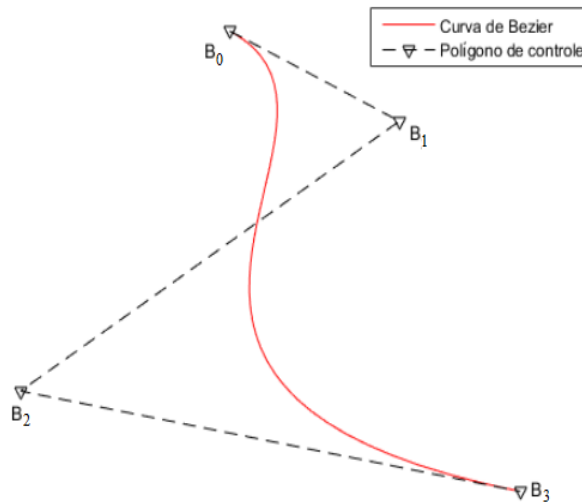


Figura 3.1: Curva de Bézier (ordem 3) e Polígono de Controle.

As propriedades mais importantes da curva de Bézier são:

- O número de pontos de controle ($n + 1$) está relacionado ao grau do polinômio (p) por: $p = n + 1$.
- A curva está sempre contida na envoltória dos pontos de controle.
- Uma mudança de um ponto de controle afeta a curva globalmente, pois cada ponto da curva é calculado como uma soma ponderada de todos os pontos de controle.
- Uma transformação afim não afeta a curva.
- A curva inicia-se no primeiro ponto de controle e encerra-se no último.

- Os vetores tangentes, no início e no final da curva, coincidem com os segmentos do polígono de controle.

3.2 Curvas B-Splines

Uma B-Spline é composta de uma ou mais curvas de Bézier com um mecanismo de continuidade entre os segmentos. As B-Splines são uma forma generalizada das curvas de Bézier. A curva é descrita matematicamente por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_i N_{i,p}(u), \quad u_{min} \leq u \leq u_{max}, \quad 0 \leq p \leq n+1 \quad (3.3)$$

sendo B_i os pontos de controle e $N_{i,p}(u)$ as funções de base de grau p e ordem $p+1$. Essas funções não são definidas explicitamente e são calculadas de forma recursiva por:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{restante do intervalo} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u - u_i)}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_{i+p+1} - u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.5)$$

onde u_i são os valores do vetor de nós \mathbf{U} , definido por uma série de parâmetros reais crescentes e que tem uma forte influência nas funções de base de uma B-Spline. O número de intervalos no vetor \mathbf{U} define o número de segmentos na curva e cada um sofre influência de i pontos de controle. Cada vez que o parâmetro u entra em um novo segmento, um novo ponto de controle se torna ativo, enquanto um ponto antigo é descartado. O número de nós ($m+1$), o número de pontos de controle ($n+1$) e o grau (p) estão relacionados por:

$$m = p + n + 1 \quad (3.6)$$

Nós consecutivos podem ter o mesmo valor, logo, o segmento relativo àqueles nós tem comprimento igual a zero. Consequentemente, dois pontos de controle são ativados ao mesmo tempo e dois são desativados, alterando, portanto, a continuidade de uma curva anteriormente suave. A quantidade de nós coincidentes é conhecida por ser um único nó com certa multiplicidade. Uma vez que uma multiplicidade maior acarretaria em uma curva descontínua e pontos de controle inutilizados, a multiplicidade de um nó é limitada à ordem da curva. Nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 pode-se observar a B-Spline quadrática, seus segmentos e as funções de base para dois valores distintos de \mathbf{U} : $\mathbf{U}_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$ e $\mathbf{U}_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$. Um vetor nó do tipo $\mathbf{U} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}]$ leva a um polinômio de Bernstein de grau p .

Através das Figuras 3.2 e 3.4 é possível observar claramente o efeito do vetor \mathbf{U} . Ao inserir uma multiplicidade de ordem 3 no início da curva, uma mudança nas funções de base ocorre

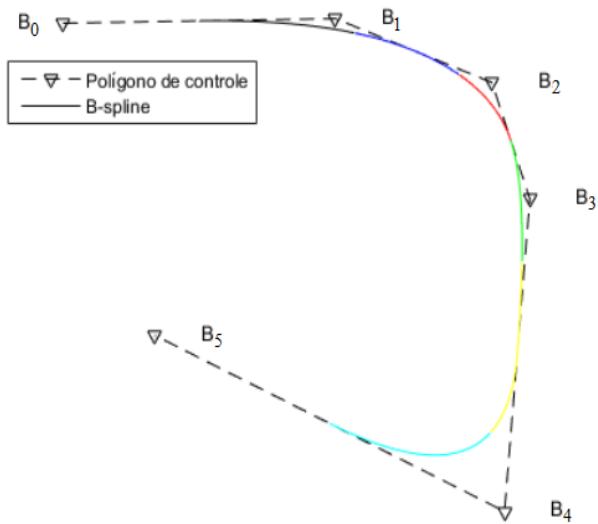


Figura 3.2: B-Splines e os segmentos no polígono de controle para U_1 .

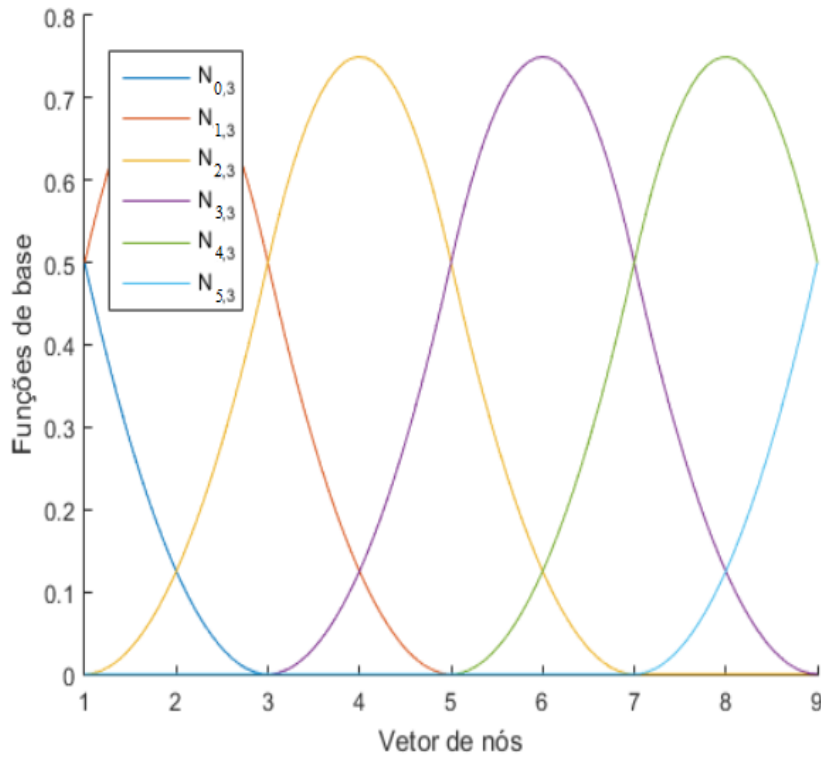


Figura 3.3: Funções de base das B-Splines para U_1 .

e, conseqüentemente, o primeiro ponto de controle passa a fazer parte da curva. Cada segmento dessa curva poderia ser representado por uma curva de Bézier, porém seriam necessários três vezes mais pontos de controle. As propriedades mais importantes da curva B-Spline são:

- As funções de base são sempre maiores ou iguais a zero: $N_{i,p}(u) \geq 0$.
- A soma das bases para qualquer valor de u é igual a 1: $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1$.
- Uma transformação afim não afeta a curva.

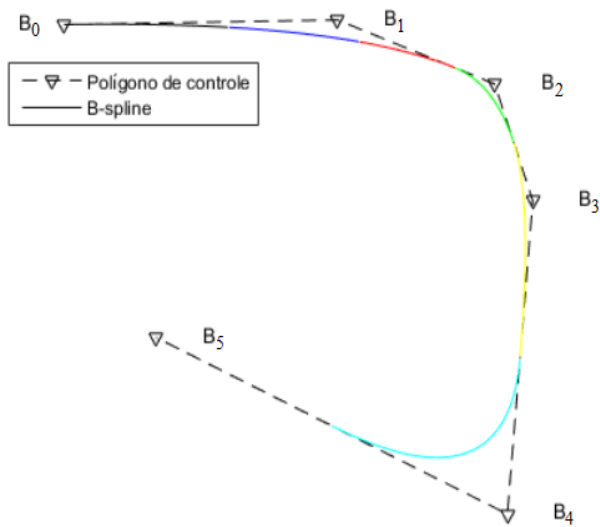


Figura 3.4: B-Splines e os segmentos no polígono de controle para U_2 .

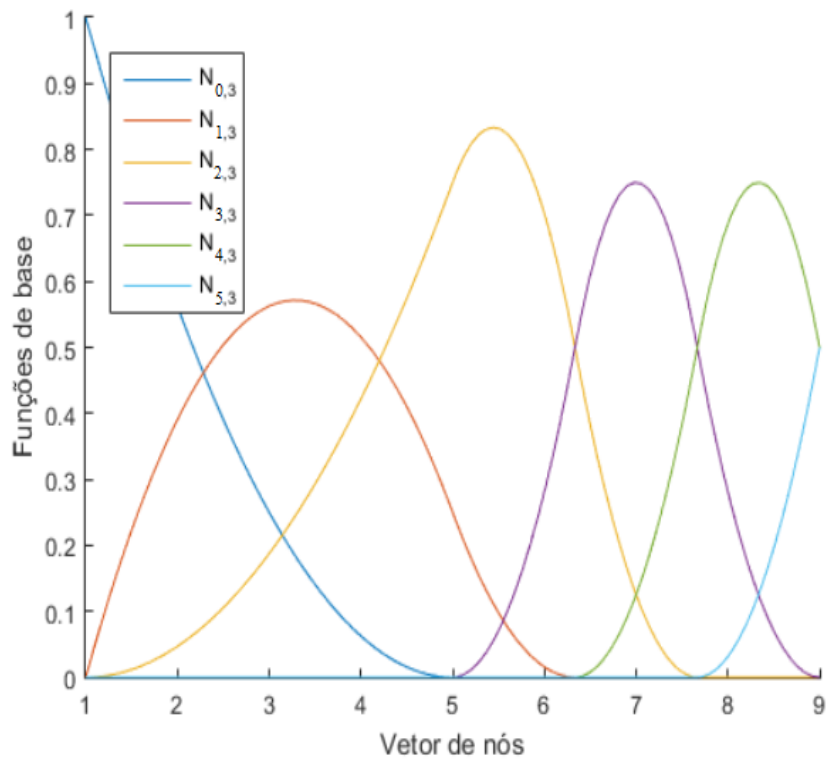


Figura 3.5: Funções de base das B-Splines para U_2 .

- A curva está sempre contida na envoltória dos pontos de controle.
- O grau da curva é um a menos que a ordem da curva ($n - 1$). A ordem da curva não pode ser maior que o número de pontos de controle.
- Uma mudança de um ponto de controle afeta a curva apenas localmente, pois cada ponto da curva é calculado como uma soma ponderada de parte dos pontos de controle.

3.3 NURBS (B-Splines Racionais Não-Uniformes)

Um peso é associado à cada ponto de controle em uma NURBS. A curva é uma B-spline, caso todos os pesos tenham o mesmo valor. A representação exata de geometrias como: círculos, seções cônicas e objetos de forma livre, é a maior vantagem de se trabalhar com as curvas NURBS. Essa facilidade na representação tem sido amplamente adotada na indústria por engenheiros, estando presente em praticamente todos os softwares CAD.

Através de coordenadas homogêneas pode-se chegar a maneira mais conveniente de se representar uma NURBS. Esse sistema de coordenadas adiciona mais uma dimensão aos pontos de controle, relativa aos pesos, como sendo:

$$B^h = [B_x \omega \quad B_y \omega \quad \omega] \quad (3.7)$$

B^h é o ponto de controle no sistema de coordenadas homogêneas. Realiza-se a projeção dessa curva no plano $\omega = 1$ para se obter a NURBS, sendo que um ponto na projeção é obtido a partir do ponto equivalente na curva homogênea. A Eq. (3.3) é novamente aplicada da mesma maneira que nas B-Splines, resultando em uma B-Spline que se encontra no sistema de coordenadas homogêneas:

$$C(u) = \begin{bmatrix} \frac{C(u)_x^h}{C(u)_\omega^h} & \frac{C(u)_y^h}{C(u)_\omega^h} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A Figura 3.6 representa este processo.

Portanto, as NURBS podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i N_{i,p}(u) \omega_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} = \sum_{i=0}^n B_i R_{i,p}(u) \quad (3.9)$$

onde $R_{i,p}(u)$ é a função de base racional dada por:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) \omega_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad (3.10)$$

A maneira usual pela qual os engenheiros calculam a curva em programas comerciais, é através de coordenadas homogêneas; apesar de também existir uma equação recursiva para as NURBS. Portanto, as NURBS são uma generalização da B-Spline, substituindo a base polinomial por uma razão de polinômios. Suas características são basicamente as mesmas por esse motivo.

3.3.1 Derivadas NURBS

É essencial poder calcular as derivadas das funções de base, grandezas importantes no MEC, pois assim como na análise isogeométrica, as funções de base são as mesmas das NURBS. As derivadas das funções de base das B-Splines, apresentada na Eq. (3.5), podem ser escritas da

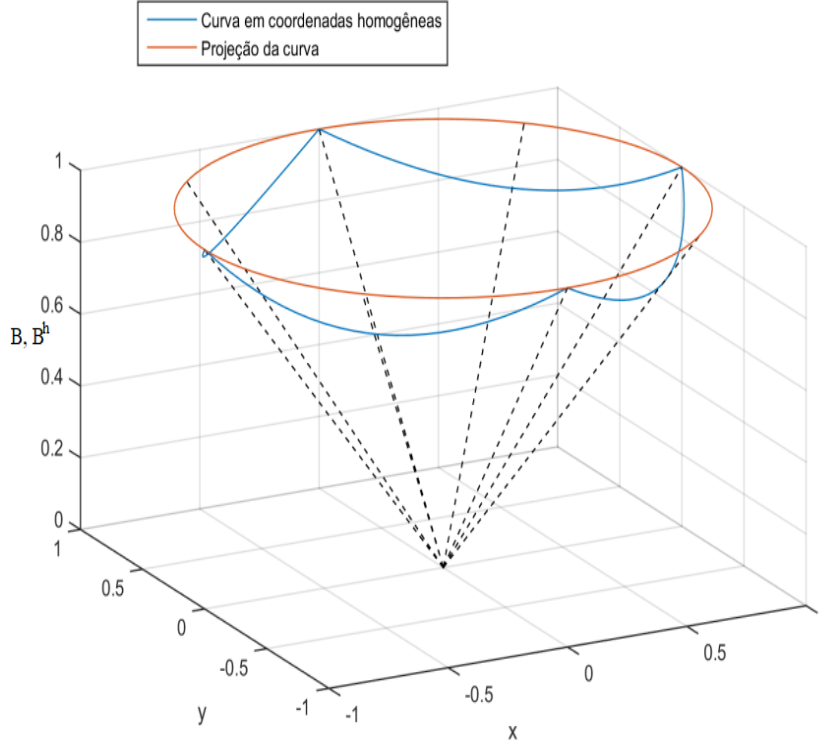


Figura 3.6: NURBS em coordenadas homogêneas.

seguinte maneira:

$$\frac{\partial N_{i,p}(u)}{\partial u} = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.11)$$

Substituindo a Eq. (3.11) na derivada da equação para a curva B-Spline - Eq. (3.3), tem-se:

$$\frac{\partial C(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) Q_i \quad (3.12)$$

sendo Q_i dado por:

$$Q_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} (B_{i+1} - B_i) \quad (3.13)$$

Através das Equações (3.12) e (3.13) fica evidente que a derivada de uma B-Spline, de ordem n , também é uma B-Spline, porém de ordem $n - 1$ e com novos pontos de controle Q_i . Essa propriedade singular possibilita que o mesmo tratamento realizado nas curvas seja utilizado nas suas derivadas. Pode-se aplicar esse técnica recursivamente para obter as derivadas de maior ordem sem maiores dificuldades, uma vez que a primeira derivada de uma B-Spline é outra B-Spline.

As derivadas de uma NURBS podem ser facilmente obtidas pela projeção da B-Spline com maior dimensão, utilizando-se do sistema de coordenadas homogêneas. Tem-se que:

$$C(u) = \frac{\omega(u) C(u)}{\omega(u)} = \frac{C^{hc}(u)}{\omega(u)} \quad (3.14)$$

sendo $C^{hc}(u)$ as primeiras coordenadas, ignorando-se o peso, e $\omega(u)$ é a última coordenada do sistema homogêneo. Logo:

$$\frac{\partial C(u)}{\partial u} = \frac{\omega(u) \frac{\partial C^{hc}(u)}{\partial u} - \frac{\partial \omega(u)}{\partial u} C^{hc}(u)}{\omega(u)^2} \quad (3.15)$$

Por $C^{hc}(u)$ e $\omega(u)$ serem as coordenadas de $C^h(u)$, suas derivadas são obtidas diretamente da Eq. (3.12).

3.3.2 Inserção de Nós

Nós podem ser inseridos em um vetor de nós sem mudar a geometria ou as propriedades geométricas da curva. Um novo ponto de controle deve ser adicionado para cada nó inserido. Ao adicionar um novo nó \bar{u} ao vetor de nós, o ponto de controle seguinte é adicionado:

$$\bar{B}_i = \left\{ \begin{array}{l} B_i, \text{ se } i = 1 \\ \alpha B_i + (1 - \alpha) B_{i-1}, \text{ se } 1 < i < m \\ B_m, \text{ se } i = m \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

onde

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ se } i = 1 \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i}, \text{ se } 1 < i < m \\ 0, \text{ se } i = m \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Os valores nodais podem ser inseridos múltiplas vezes. No entanto, a cada repetição de um nó, a continuidade das funções de base é reduzida de um. Contudo, a continuidade da curva é mantida ao definir o novo ponto de controle conforme as Equações (3.16) e (3.17).

Capítulo 4

Método dos Elementos de Contorno - Escoamentos Potenciais

Neste Capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para problemas regidos pela equação de Laplace; modelo adotado neste trabalho - o escoamento potencial. As bases da formulação do MEC são as equações integrais de contorno e a solução fundamental da equação diferencial governante. A solução fundamental aplicada neste trabalho, corresponde à resposta do potencial em um meio infinito quando o sumidouro (ou fonte) está concentrado em um ponto. A formulação isogeométrica é introduzida ao modelo.

Dois trabalhos são utilizados como modelo de discretização do escoamento potencial para estudo dos fenômenos dos cones de água e de gás, através da formulação do MEC convencional. Dias Jr. (2012) estudou o fenômeno do cone de água durante a extração (recuperação) de óleo pelo poço produtor. Ele realizou uma simulação numérica do reservatório de petróleo, a fim de estudar a quantidade de água produzida quando o petróleo está sendo extraído, utilizando o Método de Elementos de Contorno (MEC) convencional. Gontijo (2015) apresenta um estudo sobre os fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. Ele realiza uma modelagem numérica bidimensional dos fenômenos utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) convencional e, então, desenvolve três simuladores distintos entre si pela configuração dos fluidos no reservatório e pela contabilização do fator de compressibilidade no meio poroso. A determinação das condições de contorno para os três modelos, incluindo as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface entre fluidos, é apresentada. Os simuladores propostos foram desenvolvidos e validados em comparação a resultados analíticos e experimentais disponíveis na literatura.

4.1 Soluções Fundamentais

Segundo Brebbia e Dominguez (1992), a solução particular da Equação de Poisson quando o termo não homogêneo (sumidouro ou fonte) é igual ao delta de Dirac, é dada por:

$$\nabla^2 \Phi^* = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.1)$$

Para a Eq. (4.1) existe a possível solução:

$$\Phi^* = A \ln(r) \quad (4.2)$$

sendo r a distância entre o ponto fonte (ponto em que a fonte é aplicada) e o ponto campo (ponto onde a pressão é medida), apresentado na Figura 4.1. A é uma constante a ser determinada.

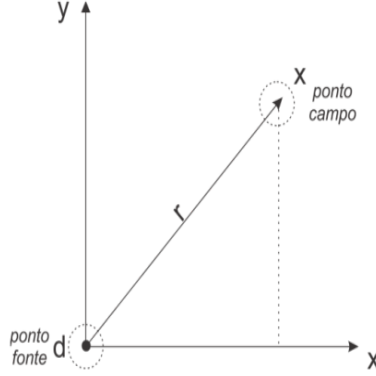


Figura 4.1: Ponto Fonte e Ponto Campo.

4.1.1 Solução Fundamental do Potencial

Segundo Katsikadelis (2016), uma solução particular singular deve ser considerada para se obter uma melhor formulação. Escreve-se a Eq. (4.1) em coordenadas polares com origem no ponto fonte d .

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \theta^2} \quad (4.3)$$

Desde que a solução seja axissimétrica em relação ao ponto fonte, ou seja, independente do ângulo polar θ a solução fundamental do potencial apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.4)$$

onde r é dado por:

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.5)$$

O lado direito da Eq. (4.4) compreende todos os pontos do plano, exceto na origem $r = 0$, onde possui um valor infinito. Além do ponto $r = 0$, a Eq. (4.4) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.6)$$

Integrando-se duas vezes tem-se:

$$\Phi^* = A \ln(r) + B \quad (4.7)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Desde que a solução particular singular é considerada, tem-se que $B = 0$. Logo, derivando-se a Eq. (4.7) em relação à r tem-se:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = A \frac{1}{r} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.8)$$

sendo \mathbf{n} a direção do vetor normal, ou seja, equivalente à direção radial r .

Aplicando-se o Teorema de Gauss-Green para um domínio circular Ψ , onde $dS = r d\theta$ e com o raio ϵ centrado no ponto fonte d , tem-se:

$$- \int_{\Psi} (\nabla^2 \Phi^*) d\Psi = - \int_S \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (4.9)$$

Para os pontos no contorno S , $r = \epsilon$, portanto, a Eq. (4.9) torna-se:

$$\int_{\Psi} \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} d\Psi = - \int_0^{2\pi} A \frac{1}{\epsilon} \epsilon d\theta \quad (4.10)$$

Aplicando as propriedades da função delta de Dirac na Eq. (4.10), chega-se a:

$$\frac{1}{K} = -2\pi A \quad (4.11)$$

Ou seja,

$$A = -\frac{1}{2\pi K} \quad (4.12)$$

A solução fundamental do potencial através de uma solução particular singular é dada, portanto, como sendo:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \quad (4.13)$$

4.1.2 Solução Fundamental da Velocidade

A partir do fluxo que atravessa o contorno, a Eq. (2.9) torna-se:

$$q = -K \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \quad (4.14)$$

que pode ser escrita como:

$$q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (4.15)$$

A solução fundamental da velocidade é dada então como sendo:

$$q^* = -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \quad (4.16)$$

A partir do valor obtido para Φ^* na Eq. (4.13), tem-se:

$$q^* = -K \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} \quad (4.17)$$

Abrindo a Eq. (4.17), tem-se:

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \ln(r)}{\partial x} n_x + \frac{\partial \ln(r)}{\partial y} n_y \right) \quad (4.18)$$

onde n_x e n_y são as componentes do vetor unitário normal nas direções x e y respectivamente.

A partir da Figura 4.1, tem-se que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, logo:

$$\frac{\partial \ln(r)}{\partial x} = \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \ln(r)}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \quad (4.20)$$

Da mesma forma para y tem-se:

$$\frac{\partial \ln(r)}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{y}{r} = \frac{y}{r^2} \quad (4.21)$$

Substituindo as Equações (4.20) e (4.21) na Eq. (4.18), chega-se a:

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{r^2} n_x + \frac{y}{r^2} n_y \right) \quad (4.22)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} (x n_x + y n_y) \quad (4.23)$$

Quando o ponto fonte não está localizado na origem do sistema de coordenadas, a Eq. (4.23) torna-se:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] \quad (4.24)$$

onde

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.25)$$

sendo (x_d, y_d) as coordenadas do ponto fonte. Logo, a Eq. (4.24) é a solução fundamental da velocidade.

4.2 Equação Integral de Contorno

O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) e o Teorema de Gauss-Green são utilizados para obter a equação integral de contorno. O MRP multiplica a equação diferencial governante do problema, Eq. (2.18), por uma função peso arbitrária ω . A expressão obtida em todo o domínio é integrada e assume-se que o resultado desta integração seja igual a zero. Este procedimento é mostrado na equação abaixo:

$$\int_A (\nabla^2 \Phi) \omega dA = 0 \quad (4.26)$$

Abrindo a Eq. (4.26), tem-se:

$$\int_A \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \omega dA = 0 \quad (4.27)$$

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = 0 \quad (4.28)$$

Para realizar a transformação das integrais sobre o domínio em integrais sobre o contorno, utiliza-se do Teorema de Gauss-Green dado por:

$$\int_S f(x, y) n_x dS = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA \quad (4.29)$$

Analisando a primeira integral da Eq. (4.28), fazendo $f(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega$, chega-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS = \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \quad (4.30)$$

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS = \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.31)$$

Reorganizando a Eq. (4.31) para a primeira integral do lado direito, tem-se:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.32)$$

Aplica-se o Teorema de Gauss-Green para transformar a última integral de domínio do lado direito da Eq. (4.32), fazendo $f = \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x}$, logo:

$$\int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS = \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA = \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.33)$$

Reorganizando a Eq. (4.33) para a primeira integral do lado direito, tem-se:

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA = \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS - \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.34)$$

Substituindo a Eq. (4.34) na Eq. (4.32), obtém-se a primeira integral da Eq. (4.28), que torna-se:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.35)$$

Para a segunda integral da Eq. (4.28) pode-se escrever de forma análoga:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega n_y dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dA \quad (4.36)$$

Substituindo as Equações (4.35) e (4.36) na Eq. (4.28), chega-se a:

$$\int_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y \right) \omega dS - \int_S \Phi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) dS + \int_A \Phi \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dA = 0 \quad (4.37)$$

Simplificando a Eq. (4.37), torna-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \omega dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \omega dA = 0 \quad (4.38)$$

A integral de domínio da Eq. (4.38) deve ser eliminada a fim de se obter uma equação integral de contorno. Portanto, uma função peso $\omega(x, y)$ deve ser escolhida em que o laplaciano seja igual a zero. Para isso a solução fundamental para o potencial é utilizada como função peso, ou seja, $\omega = \Phi^*$. O laplaciano será igual a zero para todo o domínio, exceto no ponto fonte, uma vez que o laplaciano da solução fundamental é uma função delta de Dirac.

Com isso a Eq. (4.38) torna-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \Phi^* dA = 0 \quad (4.39)$$

Substituindo a Eq. (4.1) na Eq. (4.39), ou seja, o termo para o laplaciano da solução fundamental, tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \left(-\frac{\delta(x-x_d)}{K} \right) dA = 0 \quad (4.40)$$

Aplicando as propriedades da função delta de Dirac, chega-se a:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS - \frac{\Phi(x_d, y_d)}{K} = 0 \quad (4.41)$$

Multiplicando a Eq. (4.41) por $-K$:

$$\int_S \left(-K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS - \int_S \Phi \left(-K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS + \Phi(x_d, y_d) = 0 \quad (4.42)$$

Isolando $\Phi(x_d, y_d)$, tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi \left(-K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS - \int_S \left(-K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS \quad (4.43)$$

e substituindo as Equações (4.15) e (4.16) na Eq. (4.43), chega-se à Equação Integral de Contorno válida para quando o ponto fonte está no interior do domínio, dada por:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.44)$$

É necessário realizar uma modificação no contorno S , criando um arco de circunferência sobre o ponto fonte (contorno S^*), para o caso em que o ponto fonte se encontra sobre o contorno, conforme ilustrado na Figura 4.2 abaixo:

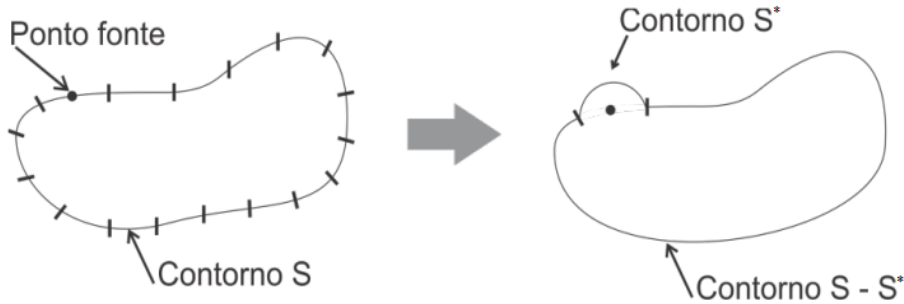


Figura 4.2: Modificação do Contorno.

A partir da Figura 4.2, infere-se que:

$$[\text{Contorno } S] = [\text{Contorno original}]$$

$$[\text{Contorno } S - S^*] + [\text{Contorno } S^*] = [\text{Contorno modificado}]$$

O contorno S^* pode ter qualquer forma. Entretanto, para facilitar os cálculos, será considerado como sendo um arco de circunferência de raio igual a ϵ , sem perda de generalidade. O raio r que é a distância entre ponto fonte e ponto campo, é sempre igual a ϵ para qualquer ponto de S^* . O ponto fonte estará localizado sobre o contorno quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Aplicando algumas considerações algébricas em relação ao raio r , tem-se:

$$\mathbf{r} = (x - x_d)\hat{i} + (y - y_d)\hat{j} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} \quad (4.45)$$

$$|\mathbf{r}| = r = \left[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{r_x\hat{i} + r_y\hat{j}}{(r_x^2 + r_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_x\hat{i} + r_y\hat{j}}{r} \quad (4.47)$$

$$n_x = \frac{r_x}{r} \Leftrightarrow n_y = \frac{r_y}{r} \quad (4.48)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal no contorno S^* .

Separando as integrais da Equação Integral de Contorno, Eq. (4.44), em S^* e $(S - S^*)$, chega-se a:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_{S^*} \Phi q^* dS - \int_{S^*} q \Phi^* dS + \int_{(S - S^*)} \Phi q^* dS - \int_{(S - S^*)} q \Phi^* dS \quad (4.49)$$

Analisando a primeira integral da Eq. (4.49), pode-se substituir o termo q^* pela Eq. (4.24), tornando-se:

$$\int_{S^*} \Phi q^* dS = \int_{S^*} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] dS \quad (4.50)$$

Aplicando as considerações algébricas em relação ao raio r , Eq. (4.45) a Eq. (4.48), a Eq. (4.50) torna-se:

$$\int_{S^*} \Phi q^* dS = \int_{S^*} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y) dS = \int_{S^*} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} \left(r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right) dS \quad (4.51)$$

em todo contorno modificado S^* , $r = \epsilon$ e $dS = r d\theta \Rightarrow dS = \epsilon d\theta$, logo:

$$\int_{S^*} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \epsilon^2} \left(\frac{r_x^2 + r_y^2}{\epsilon} \right) \epsilon d\theta \quad (4.52)$$

sendo $r_x^2 + r_y^2 = r^2 = \epsilon^2$, tem-se:

$$\int_{S^*} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon} \right) \epsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi} d\theta = \frac{\Phi}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.53)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se que $\Phi \rightarrow \Phi(x_d, y_d)$, logo:

$$\int_{S^*} \Phi q^* dS = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \quad (4.54)$$

Analisando a segunda integral da Eq. (4.49), pode-se substituir o termo Φ^* pela Eq. (4.13), tornando-se:

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = \int_{S^*} q \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) dS \quad (4.55)$$

onde em todo contorno modificado S^* , $r = \epsilon$ e $dS = \epsilon d\theta$, logo:

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(\epsilon) \right) \epsilon d\theta \quad (4.56)$$

Sendo ϵ constante em todo o contorno S^* , tem-se:

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \epsilon \ln(\epsilon) \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \quad (4.57)$$

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \epsilon \ln(\epsilon) (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.58)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} (\theta_2 - \theta_1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon \ln(\epsilon)] = 0 \quad (4.59)$$

Com isso a segunda integral da Eq. (4.49) se torna:

$$\int_{S^*} q\Phi^* dS = 0 \quad (4.60)$$

Substituindo as Equações (4.54) e (4.60) na Eq. (4.49), chega-se a:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_{(S-S^*)} \Phi q^* dS - \int_{(S-S^*)} q\Phi^* dS \quad (4.61)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, sabe-se que $(S - S') \rightarrow S$, portanto:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_S \Phi q^* dS - \int_S q\Phi^* dS \quad (4.62)$$

Reorganizando a Eq. (4.62) chega-se a:

$$\Phi(x_d, y_d) - \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.63)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.64)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[\frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.65)$$

O termo $2\pi - (\theta_2 - \theta_1)$ corresponde ao ângulo interno do contorno, conforme mostra a Figura 4.3:

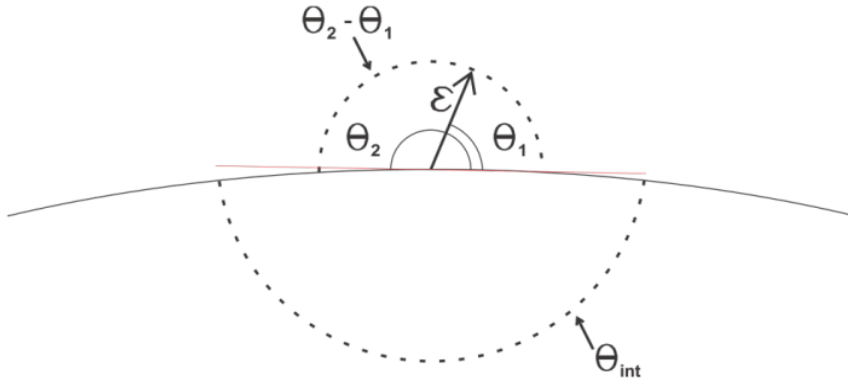


Figura 4.3: Ângulos interno e externos do contorno modificado.

A Equação Integral de Contorno para o caso em que o ponto fonte está localizado sobre o contorno, é dada por:

$$\Phi(x_d, y_d) \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.66)$$

A integral do delta de Dirac da Eq. (4.40) é igual a zero se o ponto fonte estiver no exterior do domínio e fora do contorno. Logo, $\Phi(x_d, y_d) = 0$. A Eq. (4.44) torna-se:

$$0 = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.67)$$

A Eq. (4.67) é a Equação Integral de Contorno para o caso em que o o ponto fonte está no exterior do domínio e fora do contorno. Através dos resultados para as Equações Integrais de Contorno, chega-se a seguinte equação generalizada:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.68)$$

$$c = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ , se o ponto fonte estiver fora do dom\u00ednio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi} \text{ , se o ponto fonte estiver sobre o contorno} \\ 1 \text{ , se o ponto fonte estiver no interior do dom\u00ednio} \end{array} \right\}$$

Quando o ponto fonte n\u00e3o apresenta-se no “canto” do contorno, ou seja, quando ele apresenta-se como sendo um ponto suave do contorno, tem-se que:

$$c = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (4.69)$$

4.3 Discretiza\u00e7\u00e3o das Equa\u00e7\u00f5es

A discretiza\u00e7\u00e3o do contorno da regi\u00e3o estudada \u00e9 realizada atrav\u00e9s da formula\u00e7\u00e3o do MEC Isogeom\u00e9trico, por\u00e9m \u00e9 importante detalhar a formula\u00e7\u00e3o do MEC convencional, uma vez que as duas formula\u00e7\u00f5es ser\u00e3o comparadas. Detalhes da implementa\u00e7\u00e3o do MEC convencional podem ser encontrados em Gontijo (2015). Uma vez que o contorno S \u00e9 escrito como a soma de n partes nos quais \u00e9 dividido (Figura 4.4), a discretiza\u00e7\u00e3o do contorno est\u00e1 associada \u00e0 discretiza\u00e7\u00e3o da Equa\u00e7\u00e3o Integral de Contorno - Eq. (4.68).

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$$

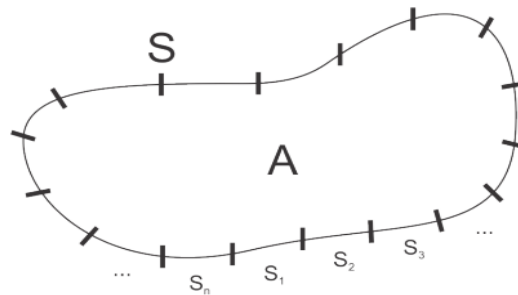


Figura 4.4: Discretiza\u00e7\u00e3o do Contorno.

Cada uma das integrais da Eq. (4.68) d\u00e1 origem a uma integral sobre as n partes do contorno dividido. A Eq. (4.68) discretizada se torna ent\u00e3o:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{S_j} \Phi q^* dS_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\int_{S_j} q \Phi^* dS_j \right) \quad (4.70)$$

as n partes do contorno discretizado s\u00e3o geradas e precisam, ainda, ser representadas matematicamente. Estas partes do contorno apresentam variados tipos de formas, nos quais necessitam serem aproximadas por uma forma conhecida, como por exemplo: segmentos de reta, polin\u00f4mios de primeira ordem, polin\u00f4mios de segunda ordem e, ainda, fun\u00e7\u00f5es de forma do tipo NURBS. As NURBS, que formam uma base para o MEC Isogeom\u00e9trico, apresentar\u00e3o um custo computacional maior em rela\u00e7\u00e3o ao MEC convencional. Entretanto, espera-se que seja necess\u00e1rio um n\u00famero

menor de pontos de colocação no MEC Isogeométrico para obter precisão similar ao MEC convencional (padrão), uma vez que os pontos de colocação possuem influência direta nos pontos de integração.

Através da aplicação das NURBS para as funções de forma, o MEC passa a ser denominado agora como sendo Método de Elementos de Contorno Isogeométrico, ou simplesmente MEC-Iso. O Método de Elementos de Contorno Isogeométrico, na maioria dos casos, terá uma representação exata do contorno. Para a formulação isogeométrica, quanto maior for a discretização, ou seja, quanto maior for o refinamento de uma curva de Bézier em que o polígono de controle foi dividido, melhor será a aproximação feita por meio dos Elementos de Contorno Isogeométrico para as variáveis de campo Φ e q . Entretanto, a representação exata da geometria, na maioria das vezes, é obtida com poucos graus de liberdade. Enquanto o contorno real é denominado S , o contorno aproximado é denominado por Γ . Cada parte do contorno real S é aproximado por uma ou mais curvas de Bézier com um mecanismo de continuidade entre os segmentos. Sabendo que $R_{i,p}(u)$ é a função base racional de grau p , cujo o parâmetro da curva é u . A Eq. (4.70) para a aproximação com os elementos de contorno isogeométrico na forma discretizada, torna-se:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^n \Phi_i^c R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) d\Gamma - \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^n q_i^c R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) d\Gamma \quad (4.71)$$

em que Φ_i^c e q_i^c são o potencial e a velocidade, respectivamente, no ponto de controle i . Como estes valores são pontuais (não variam ao longo do contorno), pode-se organizá-los ainda da seguinte forma:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{\Gamma} R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) d\Gamma \right) - \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{\Gamma} R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) d\Gamma \right) \quad (4.72)$$

Na Eq. (4.72) tem-se a representação exata da geometria para a maioria dos problemas de engenharia. O contorno é parametrizado por t como mostrado a seguir:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{t_{min}}^{t_{max}} R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) - \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{t_{min}}^{t_{max}} R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) \quad (4.73)$$

onde

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} \quad (4.74)$$

Apenas em um intervalo único, cada função de base é não nula. Esse intervalo pode ser entendido como o domínio de influência daquele ponto de controle. O domínio de influência começa em t_i e termina em t_{i+p} , logo $t_{min} = t_i$ e $t_{max} = t_{i+p}$. Não se define elementos em

formulação isogeométrica, já que eles não seriam independentes. As integrais são regidas apenas pelo domínio de influência. Portanto, podem ser reduzidas para somente intervalos não-nulos. A Eq. (4.73) torna-se:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{t_i}^{t_{i+p}} R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) - \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{t_i}^{t_{i+p}} R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) \quad (4.75)$$

Calcular somente uma vez as funções de base e propriedades geométricas dos pontos de Gauss para cada coluna, faz com que o procedimento numérico se torne mais simples. Embora haja um custo computacional maior ao calcular as funções de base das NURBS do que as funções polinomiais regulares, a formulação isogeométrica traz vantagens sobre a formulação padrão do MEC quanto à precisão da utilização destas funções para a representação geométrica do problema. Além de melhorar a representação da solução, garantindo a continuidade das derivadas ao longo do contorno, o processo de geração de malha pode ser eliminado uma vez que a própria estrutura utilizada pelo CAD para representar o modelo, também é usada no MEC Isogeométrico. Mais uma mudança de variáveis é necessária para o cálculo numérico das integrais, que ao regularizar o intervalo de integração, torna-se possível utilizar a quadratura de Gauss. A Eq. (4.75) torna-se:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) - \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) \quad (4.76)$$

onde

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{t_{i+p} - t_i}{2} \quad (4.77)$$

A Eq. (4.76) reorganizada com os termos da matriz \mathbf{H} de um lado e os termos da matriz \mathbf{G} do outro, torna-se:

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \Phi_i^c \left[\int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi - cR_{i,p}(x_d, y_d) \right] \right\} = \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) \quad (4.78)$$

sendo

$$H_{i,p} = \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi - cR_{i,p}(x_d, y_d) \quad (4.79)$$

$$G_{i,p} = \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi^*(x_d, y_d) \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \quad (4.80)$$

A Eq. (4.78) pode ser escrita, portanto, da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^n H_{i,p} \Phi_i^c = \sum_{i=0}^n G_{i,p} q_i^c \quad (4.81)$$

ou ainda pela forma matricial, como:

$$\mathbf{H}\Phi^c = \mathbf{G}q^c \quad (4.82)$$

O termo c terá influência em p elementos da matriz \mathbf{H} , o que não ocorre no MEC convencional. A Eq. (4.82) é a Equação Integral de Contorno discretizada, representada na forma matricial. Para uma região com discretização simples, ou seja, com quatro pontos de controle, por exemplo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1^c \\ \Phi_2^c \\ \Phi_3^c \\ \Phi_4^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^c \\ q_2^c \\ q_3^c \\ q_4^c \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Sumidouro Pontual

No caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson, a Eq. (4.82) se torna:

$$\mathbf{H}\Phi^c = \mathbf{G}q^c - \mathbf{s} \quad (4.84)$$

em que \mathbf{s} é o vetor que guarda a contribuição do termo fonte. No caso deste trabalho, os termos fontes serão sumidouros pontuais. Cada elemento deste vetor corresponde ao efeito dos sumidouros em um dado ponto fonte d . Logo, tem-se que:

$$s_d = \sum_{j=1}^{n_s} Q_j \Phi_j^* \quad (4.85)$$

em que n_s é o número de sumidouros pontuais do problema, Q_j é a intensidade do sumidouro j e Φ_j^* é a solução fundamental do potencial, dada pela Eq. (4.13).

Para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas é preciso reorganizar a equação através de um sistema matricial. Logo, tem-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{s} \quad (4.86)$$

ou ainda

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) \quad (4.87)$$

Através do sistema linear dado pela Eq. (4.87) é possível obter os valores desconhecidos do potencial Φ e da velocidade \mathbf{q} no contorno. No entanto, deve-se salientar que os pontos de controle estão tipicamente fora do contorno, ou seja, as condições de contorno não podem ser aplicadas diretamente. Uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-splines é utilizada então para superar este problema (CABRAL et al., 1990). Essa matriz usa as funções de base para relacionar os valores nos pontos de controle com os valores nos pontos de colocação.

4.4 Implementação Isogeométrica no Problema

Quanto ao tipo de singularidade que surge durante a integração, as integrais são divididas da seguinte forma:

1. **Integrais Regulares:** caso em que o integrando que envolve o produto da solução fundamental pela função de forma permanece finito no intervalo de integração, sendo sua variação considerada suave ao longo deste intervalo.
2. **Integrais Quase-Singulares:** caso em que o integrando permanece finito, porém varia bruscamente em uma das extremidades do intervalo de integração.
3. **Integrais Fortemente Singulares:** caso em que o ponto de colocação encontra-se dentro do intervalo de integração. A integral não existe no sentido de Cauchy-Riemann, ou seja, a área abaixo da curva do integrando é infinita. O método para integração consiste em realizar expansões assintóticas dos integrandos do MEC e extrair a parte singular do núcleo para que a mesma seja integrada analiticamente. Não existem integrais fortemente singulares na formulação de problemas em que a equação diferencial governante é a equação de Laplace ou a equação de Poisson (WROBEL et. al, 1984)
4. **Integrais Fracamente Singulares:** caso oposto às Integrais Regulares, em que a função de forma não tende a zero enquanto o integrando envolve a solução fundamental, tendo o ponto de colocação pertencente ao intervalo de integração. Quando o ponto fonte pertence ao domínio de influência, o integrando é singular e precisa ter um tratamento especial devido a característica singular das soluções fundamentais. Neste trabalho, a Transformada de Telles (1987) é usada para calcular as integrais fracamente singulares.

4.4.1 Integrais Fracamente Singulares

Considerações do tipo: corpo de temperatura constante (problemas potenciais) e deslocamento de corpo rígido (problemas elásticos) são técnicas bastante utilizadas no MEC para calcular indiretamente as integrais singulares. Primeiro são calculadas todas as integrais não-singulares para um ponto de colocação em específico, e em seguida o deslocamento de corpo rígido é aplicado para

calcular a integral restante. O número de integrais singulares é igual ao número de translações de corpo rígido para funções polinomiais. No MEC convencional, para cada ponto de colocação e seu elemento singular correspondente, somente uma função de base associada a aquele elemento é não nula. Portanto, apenas uma integral singular em cada elemento é existente.

Quando se trata de funções de forma do tipo NURBS, as funções de base não apresentam essa característica, pois várias delas são não nulas nos pontos de colocação. Existem k integrais singulares que precisam de tratamento especial, para cada ponto de colocação. As integrais de natureza fracamente singular são, portanto, calculadas através da Transformada de Telles (1987). O método aplica uma transformação cúbica de coordenadas de maneira que as abscissas se concentram em torno da singularidade, fazendo com que o jacobiano dessa transformação se anule no ponto singular. Isso é obtido por meio da seguinte transformação:

$$\hat{\xi} = \frac{(\gamma - \gamma')^3 + \gamma'(\gamma'^2 + 3)}{1 + 3\gamma'^2} \quad (4.88)$$

onde

$$\gamma' = \sqrt[3]{\hat{\xi}'(\hat{\xi}'^2 - 1) + |\hat{\xi}'^2 - 1|} + \sqrt[3]{\hat{\xi}'(\hat{\xi}'^2 - 1) + |\hat{\xi}'^2 - 1| + \hat{\xi}'} \quad (4.89)$$

sendo $\hat{\xi}'$ a localização da singularidade no espaço original e γ representa a nova variável de integração. Logo, um jacobiano dessa transformação é dado por:

$$d\hat{\xi} = \frac{3(\gamma - \gamma')^2}{1 + 3\gamma'^2} d\gamma \quad (4.90)$$

Através da Eq. (4.90) infere-se que a formulação apresentada é unidimensional e a extensão para duas dimensões pode ser feita de forma direta; uma vez que o conjunto de abscissas é transformado separadamente e os pesos multiplicados pelo jacobiano e, então, utilizados conforme ocorre na extensão da quadratura de Gauss-Legendre para duas dimensões.

A transformada de Telles apresenta um método eficiente para o cálculo de integrais fracamente singulares e quase-singulares. A transformação cúbica de coordenadas melhora a aproximação da quadratura de Gauss dentro da faixa perto da singularidade. Portanto, essa técnica pode ser aplicada de maneira simples no Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico, apresentando uma característica auto adaptável, além de produzir uma variável que depende da distância mínima do ponto de colocação ao elemento. No entanto, o método torna-se inativo para longas distâncias do ponto de colocação.

Essa transformação pode ser utilizada também para calcular integrais com uma singularidade logarítmica em uma de suas extremidades. A integração de Gauss tradicional pode ser aplicada sem a necessidade de separação da parte regular da singularidade, uma vez que o jacobiano da transformada é nulo na posição da singularidade.

A escolha dos pontos de integração é baseada numa distância mínima relativa entre o ele-

mento de contorno e o ponto de colocação. A posição dos pontos de Gauss é, então, alterada para aproximá-los da singularidade, fazendo com que o comportamento singular da solução fundamental seja bem descrito. Através do auxílio da Transformada de Telles, Integrais Fracamente Singulares podem ser calculadas de forma mais precisa quando comparadas aos resultados obtidos pela integração de Gauss padrão.

4.4.2 Pontos de Colocação

Os pontos de controle e nós utilizados para definir as NURBS podem ter uma multiplicidade de até o grau da curva, além do fato de que os pontos de controle não estão na curva e sim no polígono de controle. Essas características fazem com que essas entidades não sejam as melhores escolhas para os pontos de colocação no MEC-Iso.

Li e Qian (2011) testaram diferentes alternativas como pontos de colocação: uniforme, pontos de Gauss, valores máximos das funções de base e as coordenadas de Greville. As abcissas de Greville se mostraram como a melhor alternativa para resultados estáveis e precisos no MEC-Iso (Figura 4.5). A abcissa de Greville é o ponto no domínio sobre o qual o ponto de controle tem influência máxima (FARIN, 1996) e é definida como sendo a média de d nós, mostrada na expressão abaixo:

$$\gamma_i = \frac{1}{d} (u_{i+1} + \dots + u_{i+d}) \quad (4.91)$$

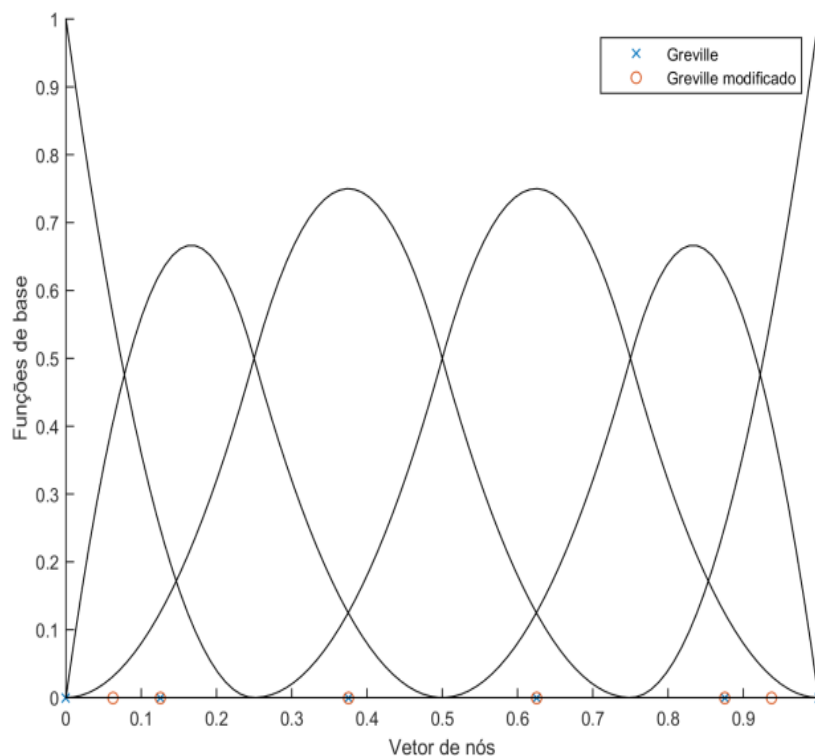


Figura 4.5: Modificação das abcissas de Greville.

Esses pontos estão localizados no contorno, tem a mesma quantidade que os pontos de controle e são únicos. Eles são os pontos mais adequados para serem utilizados como pontos de colocação quando a curva é suave (SIMPSON et al., 2012). No entanto, quando cantos estão presentes (especialmente para problemas tridimensionais), calcular os termos diagonais se torna problemático, uma vez que os pontos de colocação estão localizados nestes cantos.

Propõe-se, portanto, uma mudança nas posições do primeiro e do último ponto de colocação para contornar esse problema, das seguintes formas respectivamente:

$$\gamma_0 = \gamma_0 + \beta(\gamma_1 - \gamma_0) \quad (4.92)$$

$$\gamma_n = \gamma_n - \beta(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \quad (4.93)$$

onde β é um coeficiente que define o quanto o ponto de colocação se move. Wang e Benson (2015) define o valor deste coeficiente de forma empírica como sendo $\beta = 0.5$. Esse procedimento lembra o uso de elementos descontínuos, porém, como não há nenhuma mudança nos pontos de controle, não haverá nenhuma perda de continuidade na aproximação.

4.4.3 Condições de Contorno

Como visto na Seção 4.3, os pontos de controle apresentam-se fora do contorno e por isso as condições de contorno do problema não podem ser aplicadas diretamente. Tornando-se necessário utilizar uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-Splines (CABRAL et al., 1990), sendo ela, portanto, capaz de usar as funções de base para relacionar os valores nos pontos de controle com os valores nos pontos de colocação, através da seguinte forma:

$$\Phi = \mathbf{E}\Phi^c \quad (4.94)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}\mathbf{q}^c \quad (4.95)$$

onde os vetores Φ e \mathbf{q} contém os valores para o potencial e para a velocidade, respectivamente, nos pontos de colocação; enquanto Φ^c e \mathbf{q}^c contém os valores para o potencial e para a velocidade, respectivamente, nos pontos de controle. A mesma ideia pode ser aplicada às NURBS.

É preciso lembrar que a Equação de Equilíbrio obtida pelo MEC Isogeométrico - Eq. (4.72) - é escrita em termos dos pontos de controle, sendo:

$$\mathbf{H}\Phi^c = \mathbf{G}\mathbf{q}^c \quad (4.96)$$

e que ao aplicar-se a matriz de transformação \mathbf{E} , a Eq. (4.96) torna-se:

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\Phi = \mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{q} \quad (4.97)$$

Com isso a Eq. (4.97) pode ser resolvida através da maneira usual do MEC convencional.

Capítulo 5

Formulação Axissimétrica

Neste Capítulo é apresentada a formulação axissimétrica para geometrias ou corpos de revolução, mais especificamente para o problema proposto: fenômeno do cone de gás em um reservatório de petróleo e, ainda, para problemas de aquífero e condução de calor. As geometrias axissimétricas são formadas através da rotação de 360° de um plano bidimensional sobre um dado eixo, conhecido como o eixo de simetria rotacional. O eixo z é o eixo de simetria rotacional ou axial, enquanto que r e θ são as direções radial e tangencial respectivamente, utilizadas nas coordenadas cilíndricas. Quando a geometria e as variáveis do problema são ambas axissimétricas, logo o problema é considerado totalmente axissimétrico. Portanto, todo carregamento deve ser do tipo circular. Tais problemas podem ser totalmente representados pela análise de um plano passando pelo eixo de simetria rotacional (axial), ou seja, o plano $r - z$. A dimensão do problema é reduzida de três para duas dimensões: direções radial e axial somente, sendo ainda, que todas as variáveis na direção tangencial são assumidas como constantes. Um grande número de aplicações em engenharia (estruturas ou componentes) são axissimétricas ou podem ser aproximadas como sendo axissimétricas, por exemplo: vasos de pressão, selos mecânicos, tubulações e até mesmo um reservatório de petróleo. Lucas et al. (1991) estudaram o fenômeno do cone de água em reservatório de óleo, através das soluções da Equação Integral de Contorno com formulação axissimétrica. Algumas geometrias axissimétricas podem estar sob carregamento não-axissimétrico, como forças causadas pelo vento sobre uma torre de resfriamento. Nestes casos é necessário um tratamento especial para a solução do problema.

Diferentemente de outros métodos numéricos (como por exemplo o Método dos Elementos Finitos), o Método de Elementos de Contorno para problemas axissimétricos não se caracteriza por ser uma simples transformação da formulação bidimensional. Ele requer um esforço matemático maior para o tratamento em comparação às formulações bi e tridimensional. Existem basicamente dois tipos de aproximações para as formulações axissimétricas: (I) derivam das soluções fundamentais axissimétricas com base em carregamentos circulares em oposição a carregamentos pontuais; (II) a partir das soluções tridimensionais integra-se em relação à direção tangencial. Ambas as aproximações conduzem a soluções idênticas e tem sido discutida com detalhe para problemas potenciais, elásticos, termoelásticos e centrífugos desde Bakr (1986) e Becker (1992). Neste trabalho será detalhado somente a segunda aproximação, ou seja, a partir das soluções tridimensionais.

5.1 Potencial Axissimétrico

Existem três direções das coordenadas cilíndricas ou curvilíneas: radial (r), axial (z) e tangencial (θ). Para reduzir em uma dimensão o sistema, a solução tridimensional é então transformada a partir das coordenadas cartesianas (x, y, z) em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e em seguida integra-se analiticamente em relação à direção tangencial, θ , a fim de produzir núcleos e funções com componentes radial e axial somente.

A equação de Laplace, Eq. (2.18), pode ser escrita em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\nabla^2 \Phi_{3D} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

Todos as variáveis são constantes com relação à direção tangencial para problemas axissimétricos, portanto, todas as derivadas com relação à θ são iguais a zero. Logo a Eq. (5.1) torna-se:

$$\nabla^2 \Phi_{axi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.2)$$

onde $3D$ e axi são os subscritos referentes às soluções tridimensional e axissimétrica respectivamente.

Considere-se um domínio com solução axissimétrica arbitrária, como mostrado na Figura 5.1, com um ponto fonte p de coordenadas (R_p, θ_p, Z_p) e um ponto campo Q (r_Q, θ_Q, z_Q). Letras maiúsculas são relacionadas às coordenadas fixas, enquanto as letras minúsculas são referentes às coordenadas variáveis. O ponto Q pode variar sua posição ao longo da superfície Γ .

A partir da Equação Integral de Contorno, Eq. (4.68), problemas tridimensionais de potencial podem ser transformados em axissimétrico através da integração de cada termo em relação à direção tangencial, ao realizar uma mudança do termo da integração superficial, dS , para uma integração de linha cujo termo é $d\Gamma$. Portanto, tem-se:

$$dS(Q) = r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) \quad (5.3)$$

A Equação Integral de Contorno tridimensional pode ser escrita como sendo:

$$\Phi_{3D}(p) + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} [q_{3D}^* \Phi_{3D}(Q)] r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} [\Phi_{3D}^* q_{3D}(Q)] r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) \quad (5.4)$$

Através da integração em relação à direção tangencial (θ_Q) pode-se reescrever a Eq. (5.4) em termos axissimétricos como:

$$\Phi_{axi}(p) + \int_{\Gamma} N_{1axi} \Phi_{axi}(Q) r_Q d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} N_{2axi} q_{axi}(Q) r_Q d\Gamma(Q) \quad (5.5)$$

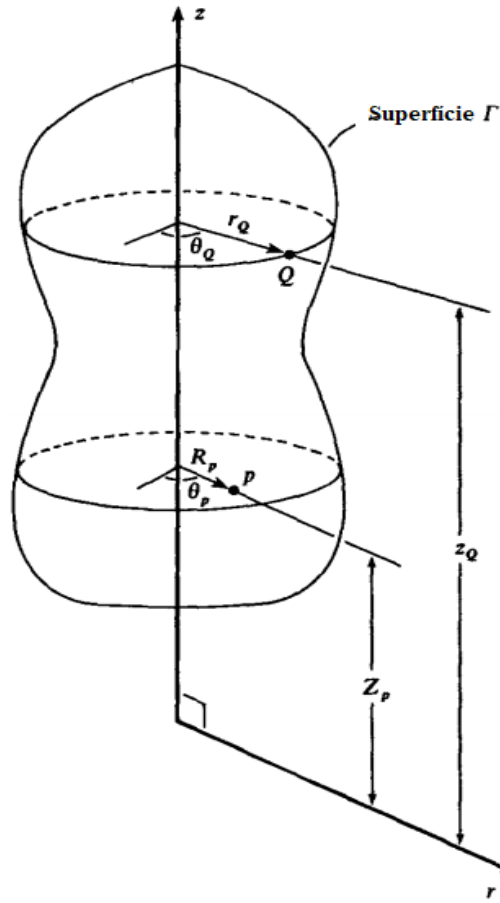


Figura 5.1: Domínio para uma solução axissimétrica. Reproduzido de Becker (1992).

onde N_{1axi} e N_{2axi} são o primeiro e o segundo núcleo axissimétrico dado por:

$$N_{1axi} = \int_0^{2\pi} q_{3D}^* d\theta_Q \quad (5.6)$$

$$N_{2axi} = \int_0^{2\pi} \Phi_{3D}^* d\theta_Q \quad (5.7)$$

5.1.1 Soluções Fundamentais Axissimétricas

A solução fundamental axissimétrica para o potencial de velocidade, Φ_{axi}^* , baseia-se em um arco de potenciais colocados ao longo do ponto p , ao contrário de um ponto potencial para a solução tridimensional. Portanto, a expressão para a solução fundamental axissimétrica é a mesma para o segundo núcleo axissimétrico, Eq. (5.7).

$$\Phi_{axi}^* = N_{2axi} = \int_0^{2\pi} \Phi_{3D}^* d\theta_Q \quad (5.8)$$

Para derivar os núcleos axissimétricos, é preciso primeiro integrar os núcleos tridimensionais

em relação à direção tangencial em um círculo completo (de 0 até 2π), no qual efetivamente dá origem à solução associada a um arco de potenciais no ponto p . As coordenadas cartesianas x , y e z são então primeiramente transformadas em coordenadas cilíndricas r , θ e z . Como referência é escolhida a direção tangencial como direção inicial a partir do ponto p , ou seja, com início em $\theta_p = 0$. Logo as coordenadas cilíndricas dos pontos p e Q podem ser escritas através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas } (p) &\Rightarrow X_p = R_p \cos \theta_p = R_p; & Y_p = R_p \sin \theta_p = 0; & Z_p = Z_p \\ \text{Coordenadas } (Q) &\Rightarrow x_Q = r_Q \cos \theta_Q; & y_Q = r_Q \sin \theta_Q; & z_Q = z_Q \end{aligned} \quad (5.9)$$

A solução fundamental tridimensional do potencial de velocidade, Φ_{3D}^* , correspondente à resposta do potencial em um meio poroso infinito, é dada pela seguinte expressão:

$$\Phi_{3D}^* = \frac{1}{4\pi K} \frac{1}{r(p, Q)} \quad (5.10)$$

onde $r(p, Q)$ é a distância correspondente entre p e Q , K é a condutividade hidráulica do meio poroso. Escrevendo a Eq. (5.10) em coordenadas cilíndricas ao substituir os termos da Eq. (5.9), torna-se:

$$\Phi_{3D}^* = \frac{1}{4\pi K} \left[(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2 - 4R_p r_Q \cos^2 \left(\frac{\theta_Q}{2} \right) \right]^{-1/2} \quad (5.11)$$

Substituindo $\theta_Q = \pi - 2\alpha$ e a Eq. (5.11) na Eq. (5.8) resulta em:

$$\Phi_{axi}^* = \frac{1}{4\pi K} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left[(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2 - 4R_p r_Q \sin^2 \alpha \right]^{-1/2} \times (-2) d\alpha \quad (5.12)$$

Usando as seguintes definições:

$$m = \frac{4R_p r_Q}{C^2} \quad (5.13)$$

e

$$C = \sqrt{(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2} \quad (5.14)$$

resulta na seguinte expressão para a solução fundamental axissimétrica, no qual a Eq. (5.12) é reorganizada em função da integral elíptica de primeiro tipo como sendo:

$$\Phi_{axi}^* = \frac{1}{4\pi K C} \int_0^{2\pi} \left(1 - m \sin^2 \alpha \right)^{-1/2} d\alpha \quad (5.15)$$

onde a integral elíptica $K_e(m, \pi/2)$ é definida por:

$$K_e(m, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha \quad (5.16)$$

Portanto, a solução fundamental axissimétrica do potencial de velocidade, Eq. (5.15), pode ser reescrita como:

$$\Phi_{axi}^* = \frac{1}{\pi KC} K_e(m, \pi/2) \quad (5.17)$$

A solução fundamental axissimétrica da velocidade pode ser calculada da seguinte forma:

$$q_{axi}^* = -K \frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial n} \quad (5.18)$$

A derivada da solução fundamental axissimétrica do potencial com relação à direção normal é calculada como sendo:

$$\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \quad (5.19)$$

onde as derivadas das coordenadas r e z com relação à direção normal, n , são as componentes da normal unitária n_r e n_z na direção radial e axial respectivamente.

$$n_r = \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.20)$$

$$n_z = \frac{\partial z}{\partial n} \quad (5.21)$$

Por conveniência, a integral elíptica de primeiro tipo $K_e(m, \pi/2)$ será escrita em função somente do termo m , ou seja, $K_e(m)$. Os diferenciais da integral elíptica $K_e(m)$ em relação às direções radial e axial são dados por:

$$\frac{\partial K_e(m)}{\partial r_Q} = \frac{\partial K_e(m)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial r_Q} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial K_e(m)}{\partial z_Q} = \frac{\partial K_e(m)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial z_Q} \quad (5.23)$$

onde

$$\frac{\partial K_e(m)}{\partial m} = \frac{E_e(m) - (1 - m) K_e(m)}{2(1 - m)m} \quad (5.24)$$

A derivada da integral elíptica de primeiro tipo em relação à m produz o termo $E_e(m)$, que é chamada de integral elíptica de segundo tipo, e, assim como $K_e(m)$, também está em função de $\pi/2$, ou seja, é definido como sendo:

$$E_e(m, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \alpha) d\alpha \quad (5.25)$$

As derivadas do termo m em relação às direções radial e axial, $\frac{\partial m}{\partial r_Q}$ e $\frac{\partial m}{\partial z_Q}$ respectivamente, podem ser calculadas como sendo:

$$\frac{\partial m}{\partial r_Q} = \frac{4R_p - 8R_p r_Q (R_p + r_Q)}{[(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2]^2} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial m}{\partial z_Q} = \frac{8R_p r_Q (Z_p - z_Q)}{[(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2]^2} \quad (5.27)$$

A partir da Eq. (5.19) é necessário, ainda, calcular as derivadas da solução fundamental axissimétrica do potencial em relação às direções radial e axial, ou seja, os termos $\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial r}$ e $\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial z}$ para obter o resultado final da expressão em relação à direção normal. Portanto, através da Eq. (5.17) as derivadas podem ser calculados como sendo:

$$\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial r} = \frac{\partial K_e(m)}{\partial r_Q} C^* + K_e(m) \frac{\partial C^*}{\partial r_Q} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial z} = \frac{\partial K_e(m)}{\partial z_Q} C^* + K_e(m) \frac{\partial C^*}{\partial z_Q} \quad (5.29)$$

onde C^* é dado por:

$$C^* = \frac{1}{\pi K C} \quad (5.30)$$

e suas derivadas com relação às direções radial e axial, $\frac{\partial C^*}{\partial r_Q}$ e $\frac{\partial C^*}{\partial z_Q}$ respectivamente, são dadas por:

$$\frac{\partial C^*}{\partial r_Q} = -\frac{(R_p + r_Q)}{\pi K [(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2]^{3/2}} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial z_Q} = \frac{(Z_p - z_Q)}{\pi K [(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2]^{3/2}} \quad (5.32)$$

Portanto, através dos cálculos da Eq. (5.20) até a Eq. (5.32), é possível calcular a solução fundamental axissimétrica da velocidade, Eq. (5.18), através da Eq. (5.19):

$$q_{axi}^* = -K \frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial n} = -K \left(\frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{axi}^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \quad (5.33)$$

5.1.2 Pontos no Eixo z

Em problemas axissimétricos o eixo z não é explicitamente modelado com elementos, no entanto o ponto fonte pode estar contido no eixo de simetria, como por exemplo, na modelagem de um cilindro sólido. A princípio pode parecer que as soluções fundamentais axissimétricas se tornarão singulares quando $R_p \rightarrow 0$, porém após a substituição do parâmetro m , estes termos cancelam e $K_e(m, \pi/2) = E_e(m, \pi/2) = \pi/2$.

As soluções fundamentais axissimétricas do potencial Φ_{axi}^* e da velocidade q_{axi}^* se tornam, portanto:

$$\Phi_{axi}^* = \frac{1}{2K \left[r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.34)$$

$$q_{axi}^* = \frac{r_Q n_r - (Z_p - z_Q) n_z}{2 \left[r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2 \right]^{3/2}} \quad (5.35)$$

5.2 Discretização das Equações

Uma vez calculadas as soluções fundamentais axissimétricas do potencial e da velocidade, Φ_{axi}^* e q_{axi}^* respectivamente; pode-se obter, portanto, a Equação Integral de Contorno Isogemétrico discretizada para geometrias axissimétricas, a partir da Eq. (4.71), dada por:

$$c\Phi(R_p, Z_p) = \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^n \Phi_i^c R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q d\Gamma - \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^n q_i^c R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q d\Gamma \quad (5.36)$$

onde $R_{i,p}(u)$ é a função de base racional do tipo NURBS referente ao contorno aproximado Γ ; R_p e Z_p são as coordenadas do ponto fonte p ; Φ_i^c e q_i^c são o potencial e a velocidade, respectivamente, no ponto de controle i . Estes valores são pontuais (não variam ao longo da direção circunferencial), portanto, pode-se organizá-los como:

$$c\Phi(R_p, Z_p) = \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{\Gamma} R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q d\Gamma \right) - \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{\Gamma} R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q d\Gamma \right) \quad (5.37)$$

Na Eq. (5.37) tem-se a representação exata da geometria para a maioria dos problemas axissimétricos de engenharia. O contorno é parametrizado por t , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
c\Phi(R_p, Z_p) = & \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{t_{min}}^{t_{max}} R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) - \\
& \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{t_{min}}^{t_{max}} R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} dt \right)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

onde

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sqrt{\frac{dr(t)^2}{dt} + \frac{dz(t)^2}{dt}} \tag{5.39}$$

Apenas em um intervalo único, cada função de base é não nula. Esse intervalo pode ser entendido como o domínio de influência daquele ponto de controle. O domínio de influência começa em t_i e termina em t_{i+p} , logo $t_{min} = t_i$ e $t_{max} = t_{i+p}$. Não se define elementos em formulação isogeométrica, sabendo que eles não seriam independentes. As integrais são regidas apenas pelo domínio de influência. Portanto, podem ser reduzidas apenas para intervalos não-nulos. A Eq. (5.38) torna-se:

$$\begin{aligned}
c\Phi(R_p, Z_p) = & \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{t_i}^{t_{i+p}} R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} dt \right) - \\
& \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{t_i}^{t_{i+p}} R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} dt \right)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Mais uma mudança de variáveis é necessária para o cálculo numérico das integrais, que ao regularizar o intervalo de integração, torna-se possível utilizar a quadratura de Gauss. A Eq. (5.40) torna-se:

$$\begin{aligned}
c\Phi(R_p, Z_p) = & \sum_{i=0}^n \left(\Phi_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) - \\
& \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

onde

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{t_{i+p} - t_i}{2} \tag{5.42}$$

A Eq. (5.41) reorganizada com os termos da matriz \mathbf{H} de um lado e os termos da matriz \mathbf{G} do outro, torna-se:

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \Phi_i^c \left[\int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi - c R_{i,p}(R_p, Z_p) \right] \right\} = \sum_{i=0}^n \left(q_i^c \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) \quad (5.43)$$

sendo

$$H_{i,p} = \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) q_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi - c R_{i,p}(R_p, Z_p) \quad (5.44)$$

$$G_{i,p} = \int_{-1}^1 R_{i,p}(u) \Phi_{axi}^*(R_p, Z_p) r_Q \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi \quad (5.45)$$

A Eq. (5.43) pode ser escrita, portanto, da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^n H_{i,p} \Phi_i^c = \sum_{i=0}^n G_{i,p} q_i^c \quad (5.46)$$

ou ainda pela forma matricial, como:

$$\mathbf{H} \Phi^c = \mathbf{G} q^c \quad (5.47)$$

O termo c terá influência em p elementos da matriz \mathbf{H} , o que não ocorre no MEC convencional. A Eq. (5.47) é a Equação Integral de Contorno Isogométrico discretizada para geometrias axissimétricas, representada na forma matricial.

Sumidouro Pontual

No caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson, a Eq. (5.47) se torna:

$$\mathbf{H} \Phi^c = \mathbf{G} q^c - \mathbf{s} \quad (5.48)$$

em que \mathbf{s} é o vetor que guarda a contribuição do termo fonte. No caso deste trabalho, os termos fontes serão sumidouros pontuais. Cada elemento deste vetor corresponde ao efeito dos sumidouros em um dado ponto fonte d . Logo, tem-se que:

$$s_d = \sum_{j=1}^{n_s} Q_j \Phi_{axi}^* \quad (5.49)$$

em que n_s é o número de sumidouros pontuais do problema, Q_j é a intensidade do sumidouro j e Φ_{axi}^* é a solução fundamental axissimétrica do potencial de velocidade, dada pela Eq. (5.17).

Da mesma forma que o domínio bidimensional, para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas é preciso reorganizar a equação através de um sistema matricial. Logo, tem-se:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} - \mathbf{s} \quad (5.50)$$

ou ainda

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{s}) \quad (5.51)$$

Através do sistema linear dado pela Eq. (5.51) é possível obter os valores desconhecidos do potencial Φ e da velocidade \mathbf{q} no contorno da geometria axissimétrica. No entanto, deve-se salientar que os pontos de controle estão tipicamente fora do contorno, ou seja, as condições de contorno não podem ser aplicadas diretamente. Assim como no domínio bidimensional, uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-splines é utilizada então para superar este problema (CABRAL et al., 1990). Essa matriz usa as funções de base para relacionar os valores nos pontos de controle com os valores nos pontos de colocação.

Capítulo 6

Simulador de Reservatório

Neste Capítulo são apresentados os detalhes sobre a implementação de um simulador de reservatório como os parâmetros de entrada, a determinação das condições de contorno e o cálculo da movimentação da interface, com base nos modelos definidos nos Capítulos 3 e 4, ou seja, através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico para Escoamento Potencial Monofásico e Bifásico com aplicação em problemas bidimensionais e axissimétricos. O poço produtor é modelado como sendo um sumidouro pontual. O simulador foi desenvolvido utilizando a linguagem MATLAB.

Quando o código é comparado com outro simulador desenvolvido através do mesmo software, no caso o MRST (*MATLAB Reservoir Simulation Toolbox*), por exemplo, o desempenho computacional apresentado supera o MRST na escala do tempo de semanas.

6.1 Parâmetros de Entrada

Além das coordenadas dos pontos que compõe a geometria do reservatório, alguns parâmetros, listados a seguir, também são requeridos pelo código.

Meio Poroso

Os parâmetros de entrada para o meio poroso são:

- Porosidade do meio σ [-].
- Permeabilidade absoluta κ [m²].

Fluidos

Os parâmetros de entrada para o(s) fluido(s) são:

- Massa específica ρ [kg/m³].
- Viscosidade dinâmica μ [Pa.s].

Simulador

Os parâmetros de entrada para o simulador são:

- Intensidade do poço (sumidouro) Q [m²/s].
- Coordenadas do poço (sumidouro) (x_p, z_p) [m].
- Tempo total de análise t_t [s].
- Tempo de funcionamento do poço t_b [s].
- Tamanho do passo de tempo Δt [s].
- Quantidade de passos de tempo npt [-].

Parâmetros Calculados

Os parâmetros calculados são:

- Condutividade hidráulica do meio poroso K [m/s], por meio da Eq. (2.4), em que utiliza-se da permeabilidade absoluta do meio, da massa específica e da viscosidade dinâmica do fluido, além, ainda, da aceleração da gravidade para o cálculo.
- Potencial do fluido Φ [m], em repouso, utilizado como condição de contorno e obtido através da altura da zona de fluido, ou seja, da coordenada z do reservatório.

Todos os parâmetros utilizados no código são dispostos na Tabela 6.1 abaixo para uma melhor visualização:

Tabela 6.1: Parâmetros de entrada para o código

Parâmetros de Entrada		
Grandezas	Símbolos	Unidade de Medida (SI)
Massa específica	ρ	kg/m ³
Viscosidade dinâmica	μ	Pa.s
Porosidade do meio	σ	-
Permeabilidade absoluta	κ	m ²
Condutividade hidráulica	K	m/s
Potencial	Φ	m
Intensidade do poço	Q	m ² /s
Coordenadas do poço	(x_p, z_p)	m
Tempo total	t_t	s
Tempo funcionamento	t_b	s
Tamanho passo de tempo	Δt	s
Quantidade passos de tempo	npt	-

6.2 Condições de Contorno

A geometria do reservatório é bidimensional ou axissimétrica para fins de simplificação do simulador. Como já descrito, a equação governante do escoamento potencial é a Equação de Laplace - Eq. (2.18), escrita em termos do potencial Φ . As condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são de potencial conhecido ou de velocidade conhecida. Existem duas configurações para o simulador de reservatório:

Monofásico: reservatório de óleo com uma capa de gás; reservatório de água ou aquífero.

Bifásico: reservatório de óleo com aquífero; reservatório de óleo com uma capa de gás.

6.2.1 Escoamento Monofásico Potencial

Através da Figura 6.1 pode ser observado que a altura da zona de fluido (óleo ou água) não perturbada pelo escoamento, H_f , é igual à altura de toda a porção simulada do reservatório.

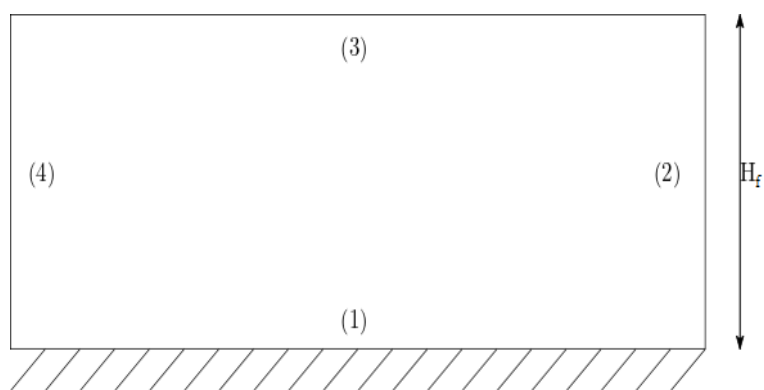


Figura 6.1: Reservatório retangular contendo apenas um fluido.

(I) Análise do Potencial

O potencial é conhecido nas duas laterais (2) e (4) e na superfície livre (3). Seu valor é constante e pode ser calculado através da Eq. (2.10), como:

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (6.1)$$

onde p é a pressão total na qual uma partícula fluida localizada na posição do nó considerado está submetida, ou seja:

$$p = p_f + p_t \quad (6.2)$$

sendo p_f a pressão referente ao peso da coluna de fluido que está acima do nó e p_t é a pressão no topo desta coluna de fluido, ou seja, a pressão que o gás/ar faz sobre a superfície livre. Substituindo a Eq. (6.2) na Eq. (6.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{p_f + p_t}{\rho g} + z \\
&= \frac{\rho g (H_f - z)}{\rho g} + \frac{p_t}{\rho g} + z \\
&= H_f + \frac{p_t}{\rho g}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Na interface entre o fluido e o gás/ar - superfície livre (3), a pressão existente é apenas aquela que o gás/ar exerce sobre o fluido (p_t). A pressão na superfície livre pode ser assumida como zero, sem perda de generalidade, logo, todo o domínio tem potencial constante e de valor igual à sua altura (H_f). Portanto, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) e da superfície livre (3) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = H_f \tag{6.4}$$

onde H_f é a altura da zona de fluido medida pela coordenada z da superfície livre não-perturbada pelo escoamento.

(II) Análise da Velocidade

O limite inferior (1) é a base impermeável do reservatório, conseqüentemente, não há fluxo de óleo na direção normal a ele. A condição de contorno existente é:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \tag{6.5}$$

6.2.2 Escoamento Bifásico Potencial

As condições de contorno analisadas aqui são referentes ao caso de reservatório de óleo com aquífero. O domínio sobre o problema considerado é definido como sendo homogêneo por partes, ou seja, são aplicados os procedimentos numéricos apresentados em cada uma das sub-regiões, como se elas estivessem separadas umas das outras (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

A condição de homogeneidade por sub-regiões tem ocorrência frequente em problemas de engenharia. A condução de calor em um sólido composto por dois materiais distintos é um exemplo, onde cada material possui uma condutividade térmica diferente. Katsikadelis (2016) cita a aplicação da formulação de sub-regiões na modelagem de corpos constituídos de materiais compósitos, onde cada componente do material compósito é tratado como sendo uma sub-região. Para o caso de escoamento bifásico em meios porosos, abordado neste trabalho, é tratado também como sendo homogêneo por partes, visto que cada sub-região (meio) tem condutividade hidráulica K diferente e homogênea em toda sua extensão de acordo com o fluido que está saturando-o (segundo o modelo adotado).

Através da Figura 6.2 pode ser observado que a altura da camada de óleo não perturbada pelo escoamento, H_o , é igual à altura de toda a sub-região superior correspondente ao fluido menos

denso; a altura da camada de água não perturbada pelo escoamento, H_a , é igual à altura de toda a sub-região inferior correspondente ao fluido mais denso. Observe que os fluidos em análise são o óleo e água, porém a formulação matemática é idêntica se os fluidos forem óleo na sub-região inferior e gás na superior.

As duas sub-regiões devem compartilhar o mesmo sistema de coordenadas, pois formam um único domínio. No entanto, cada sub-região deve ser tratada de forma independente uma da outra.

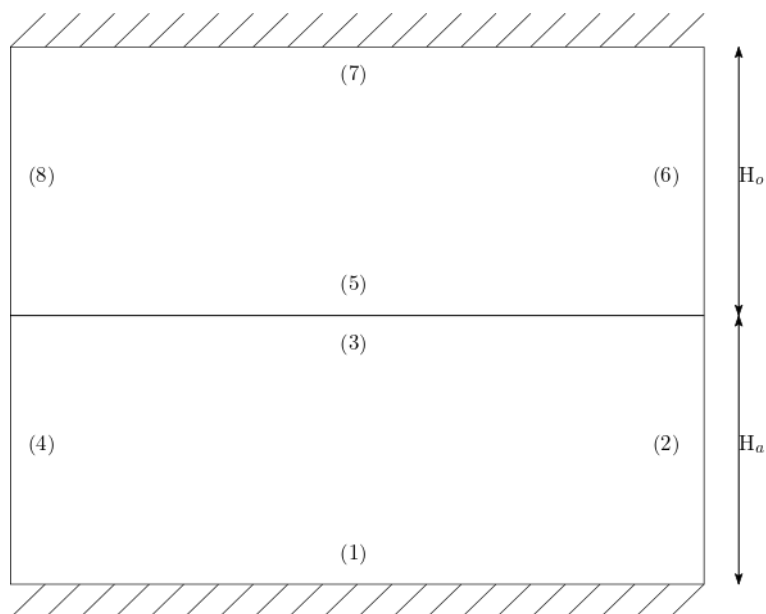


Figura 6.2: Reservatório retangular contendo dois fluidos.

(I) Análise do Potencial

Sub-região superior. O potencial é conhecido nas duas laterais (6) e (8). Seu valor é constante e possui valor igual à altura total da porção simulada do reservatório ($H_o + H_a$). Portanto, o potencial para a sub-região superior no qual está contido óleo no reservatório, pode ser calculado como sendo:

$$\begin{aligned}
 \Phi_o &= \frac{p_o + p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= \frac{\rho_o g (H_o + H_a - z_o)}{\rho_o g} + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_a - z_o + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_a + \frac{p_t}{\rho_o g}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

sendo p_o a pressão referente ao peso da coluna de óleo que está acima do nó e p_t é a pressão no topo desta coluna de óleo, ou seja, no qual a coluna de fluido superior está submetida. A pressão de topo pode ser assumida como sendo zero, portanto, sem perda de generalidade.

Todos os nós dos limites laterais (6) e (8) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_6 = \Phi_8 = H_o + H_a \quad (6.7)$$

Sub-região inferior. O potencial é conhecido nas duas laterais (2) e (4). Seu valor é constante e possui relação com os valores das alturas de cada sub-região do reservatório (H_o e H_a).

$$\Phi_a = \frac{(p_a + p_o + p_t)}{\rho_a g} + z_a \quad (6.8)$$

sendo p_a a pressão referente ao peso da coluna de água que está acima do nó, p_o é a pressão referente ao peso da coluna de óleo que exerce sobre toda a interface e p_t é a pressão no topo do reservatório.

Portanto, o potencial para a sub-região inferior no qual está contido água no reservatório, pode ser calculado como sendo:

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \frac{\rho_a g (H_a - z_a)}{\rho_a g} + \frac{\rho_o g H_o}{\rho_a g} + \frac{p_t}{\rho_a g} + z_a \\ &= H_a - z_a + \frac{\rho_o}{\rho_a} H_o + \frac{p_t}{\rho_a g} + z_a \\ &= H_a + \frac{1}{\alpha} H_o + \frac{p_t}{\rho_a g} \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que α é a razão entre as massas específicas do fluido inferior e do superior.

A pressão de topo do reservatório pode ser assumida como sendo zero novamente, portanto, sem perda de generalidade. Todos os nós dos limites laterais (2) e (4) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_2 = \Phi_4 = H_a + \frac{1}{\alpha} H_o \quad (6.10)$$

(II) Limites Impermeáveis

Os limites inferior (1) e superior (7) são a base e o topo impermeável do reservatório, respectivamente, ou seja, onde não há fluxo na direção normal aos mesmos. Portanto, a condição de contorno existente é idêntica ao escoamento monofásico potencial.

(III) Análise da Interface

A maior diferença na determinação das condições de contorno entre os simuladores potenciais monofásico e bifásico está contida na interface. Utiliza-se das equações de continuidade na interface para poder acoplá-las, uma vez que até então adotou-se as duas sub-regiões como sendo independentes.

A equação de continuidade da pressão deve ser escrita em termos de Φ , uma vez que a equação integral é escrita em termos do potencial Φ . Colocando a pressão em evidência na Eq. (2.10), tem-se:

$$p = (\Phi - z) \rho g \quad (6.11)$$

Substituindo a Eq. (6.11) na Eq. (2.34), a equação da continuidade de pressão entre os dois fluidos correspondentes à sub-região R_1 (sub-região inferior) e R_2 (sub-região superior) na interface, tem-se:

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1}) \rho_{R_1} g = (\Phi_{R_2} - z_{R_2}) \rho_{R_2} g \quad (6.12)$$

Dividindo-se ambos os lados por $\rho_{R_2} g$, a Eq. (6.12) torna-se:

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1}) \frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} = \Phi_{R_2} - z_{R_2} \quad (6.13)$$

Para um ponto na interface, $z_{R_1} = z_{R_2} = z$. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} (\Phi_{R_1} - z) \frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} &= \Phi_{R_2} - z \\ \Phi_{R_2} - \alpha \Phi_{R_1} &= (1 - \alpha) z \end{aligned} \quad (6.14)$$

sendo

$$\alpha = \frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} \quad (6.15)$$

Portanto, a equação de compatibilidade de potenciais para os nós da interface (3) e (5) apresenta-se como sendo:

$$\Phi_5 - \alpha \Phi_3 = (1 - \alpha) z \quad (6.16)$$

O potencial é contínuo dentro de cada sub-região, porém apresenta descontinuidade na interface; diferentemente da pressão que apresenta continuidade em todo o domínio. Ou seja, a pressão é única em cada ponto da interface, não importando qual sub-região esteja contido. O fluxo normal à interface possui a mesma magnitude para as duas sub-regiões, porém, sentidos opostos (Eq. (2.30)).

Portanto, a equação de equilíbrio de velocidades na interface é dada por:

$$q_5 + q_3 = 0 \quad (6.17)$$

A Eq. (6.16) é aplicada apenas aos nós intermediários da interface, uma vez que os nós nas duas extremidade já têm seu potencial conhecido. A Eq. (6.17) é aplicada a todos os nós da interface, começando na velocidade depois do primeiro nó e terminando na velocidade antes do último nó. Os nós intermediários da interface necessitam de equações extra, além destas equações

de “acoplamento”. Da mesma forma como os da superfície livre dos simuladores monofásicos.

(IV) Sistema Matricial

Na aplicação da formulação do MEC-Iso para um problema de escoamento bifásico potencial, é utilizada uma discretização com 8 pontos de controle: 4 para a primeira sub-região e 4 para a segunda sub-região, de forma a minimizar o número de componentes das matrizes H e G e, então, simplificar a demonstração. Esta abordagem é feita sem perder a generalidade, uma vez que a mesma demonstração pode ser estendida para qualquer número de pontos de controle. A Equação Integral de Contorno Isogeométrica discretizada, Eq. (4.82), na forma matricial, torna-se portanto:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1^c \\ \Phi_2^c \\ \Phi_3^c \\ \Phi_4^c \\ \Phi_5^c \\ \Phi_6^c \\ \Phi_7^c \\ \Phi_8^c \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^c \\ q_2^c \\ q_3^c \\ q_4^c \\ q_5^c \\ q_6^c \\ q_7^c \\ q_8^c \end{Bmatrix} \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Adicionando as equações de compatibilidade de potenciais e de equilíbrio de velocidades na interface, Eq. (6.16) e Eq. (6.17), respectivamente, ao sistema de equações (Eq. (6.18)), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1^c \\ \Phi_2^c \\ \Phi_3^c \\ \Phi_4^c \\ \Phi_5^c \\ \Phi_6^c \\ \Phi_7^c \\ \Phi_8^c \end{Bmatrix} = \\
= & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^c \\ q_2^c \\ q_3^c \\ q_4^c \\ q_5^c \\ q_6^c \\ q_7^c \\ q_8^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\alpha)z \end{Bmatrix} \quad (6.19)
\end{aligned}$$

O sistema matricial, Eq. (6.19), pode então ser montado, apresentado-se da seguinte forma:

$$\mathbf{H}\Phi^c = \mathbf{G}q^c + \mathbf{b}_2 \quad (6.20)$$

Separando as variáveis conhecidas das desconhecidas, chega-se ao seguinte sistema matricial simplificado:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \quad (6.21)$$

Os elementos das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são conhecidos e dependem apenas da geometria do problema; os elementos do vetor \mathbf{b}_1 são conhecidos através da aplicação das condições de contorno; os elementos do vetor \mathbf{b}_2 são conhecidos e dependem da geometria do problema e da razão entre as massas específicas dos fluidos (α); o vetor \mathbf{x} contém todas as variáveis desconhecidas do problema (potenciais e velocidades no contorno/interface).

Tornando $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, tem-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.22)$$

Portanto, o sistema matricial pode ser resolvido como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (6.23)$$

Sumidouros Pontuais

No caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson, a Eq. (6.20) se torna:

$$\mathbf{H}\Phi^c = \mathbf{G}\mathbf{q}^c + \mathbf{b}_2 - \mathbf{s}_{R_1} - \mathbf{s}_{R_2} \quad (6.24)$$

em que \mathbf{s}_{R_1} e \mathbf{s}_{R_2} são os vetores que guardam a contribuição de cada sumidouro pontual aos pontos fontes de sua própria sub-região. Cada elemento deste vetor corresponde ao efeito dos sumidouros em um dado ponto fonte d , representado por:

$$s_d = \sum_{j=1}^{n_s} Q_j \Phi^* \quad (6.25)$$

em que n_s é o número de sumidouros pontuais do problema, Q_j é a intensidade do sumidouro j e Φ^* é a solução fundamental do potencial, dada pela Eq. (4.13).

Separando as variáveis conhecidas das desconhecidas, organizando as matrizes e fazendo $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{R_1} + \mathbf{s}_{R_2}$, tem-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{s} \quad (6.26)$$

ou ainda

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) \quad (6.27)$$

Através do sistema linear dado pela Eq. (6.23) ou pela Eq. (6.27) é possível obter os valores desconhecidos do potencial Φ e da velocidade \mathbf{q} no contorno/interface das duas sub-regiões. No entanto, como pode ser visto no Capítulo 4, deve-se salientar que os pontos de controle estão tipicamente fora do contorno, ou seja, as condições de contorno não podem ser aplicadas diretamente. Uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-splines é utilizada então para superar este problema (CABRAL et al., 1990). Essa matriz usa as funções de base para relacionar os valores nos pontos de controle com os valores nos pontos de colocação.

6.3 Análise de Movimentação da Interface

Através dos fenômenos do cone de água e de gás em reservatórios de petróleo e da caracterização do breve rebaixamento de poço em reservatórios de água (aquíferos), uma movimentação da

interface entre os fluidos é existente na análise do problema. Para quantificar essa movimentação, utiliza-se do método de reposicionamento dos pontos de controle (PIEGL; TILLER, 1996). O reposicionamento dos pontos de controle dá-se em curva do tipo B-Spline ou NURBS. Da Eq. (3.9) para a curva NURBS, um ponto de controle arbitrário B_i sofrerá uma translação para \hat{B}_i através de um vetor V , dado por:

$$V = \hat{B}_i - B_i \quad (6.28)$$

Logo, a nova curva para o ponto de controle arbitrário transladado torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{C}(u) &= B_0 R_{0,p}(u) + \dots + (B_i + V) R_{i,p}(u) + \dots + B_n R_{n,p}(u) \\ &= C(u) + R_{i,p}(u) V \end{aligned} \quad (6.29)$$

A Eq. (6.29) expressa a translação funcional de todos os pontos da curva $C(u)$ no qual $u \in [u_i, u_{i+p}]$. Todos os pontos da curva de fora deste intervalo não são afetados. A translação máxima ocorre no máximo da função de base racional $R_{i,p}(u)$, como pode ser visto, por exemplo, na Figura 6.3.

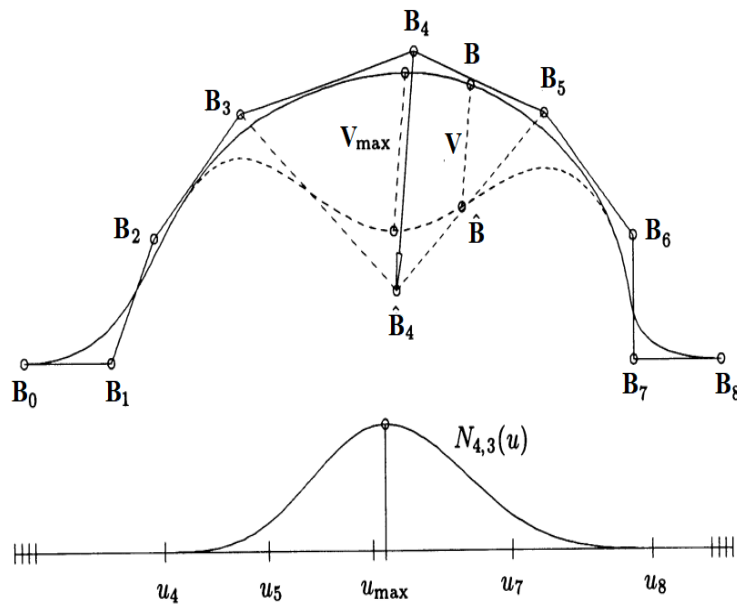


Figura 6.3: Translação máxima $V = V_{max}$ de um ponto de controle arbitrário. Reproduzido de Piegl e Tiller (1996).

Aplicando a Eq. (6.29) para $n + 1$ pontos de controle, é possível, portanto, fazer com que haja uma movimentação da interface total. Empiricamente ficou definido que o primeiro e o último ponto de controle, que teoricamente devem sofrer a translação na movimentação da interface, são fixados para que haja a convergência da translação da curva como um todo. Como não há nenhuma mudança nos pontos de controle, não haverá nenhuma perda de continuidade na aproximação. Neste trabalho e também no de Gontijo (2015), caso fosse permitida a movimentação destes pontos de controle nas extremidades, a movimentação da interface seria comprometida, tornando-

a instável.

Convém lembrar que neste trabalho a movimentação da interface se dá apenas na direção vertical, ou seja, apenas a coordenada z do ponto de controle precisa ser modificada. A velocidade calculada na interface é a velocidade dos pontos materiais que a definem. Em função desta velocidade calculada, é possível deduzir a equação que define sua posição. Para este caso considera-se que exista uma função F , definida por:

$$F = z - \lambda(x, t) = 0 \quad (6.30)$$

onde $\lambda(x, t)$ é a função que expressa a altura da interface para uma determinada coordenada x e um certo instante de tempo t .

A interface é uma linha material, portanto, pode-se fazer, de acordo com Liggett e Liu (1983):

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\sigma} \cdot \nabla F = 0 \quad (6.31)$$

onde $\frac{\mathbf{q}}{\sigma}$ é a a velocidade média real do fluido no interior dos poros, dada pela Eq. (2.12).

Substituindo a Eq. (6.30) na Eq. (6.31), tem-se:

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\sigma} \cdot (\nabla z - \nabla \lambda) = 0 \quad (6.32)$$

Tornando a Eq. (6.32) em função da variação de λ no tempo, chega-se a:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{q} \cdot \nabla z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda) \quad (6.33)$$

Sabendo-se que $\nabla z = \hat{\mathbf{e}}_z$, tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda) \quad (6.34)$$

Aplicando a Eq. (2.9) na Eq. (6.34), tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{K}{\sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla \Phi \cdot \nabla \lambda \right) \quad (6.35)$$

Uma relação entre $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ é requerida

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \quad (6.36)$$

onde o vetor normal unitário pode ser escrito como sendo:

$$\hat{e}_n = \frac{\nabla(z - \lambda)}{|\nabla(z - \lambda)|} \quad (6.37)$$

Substituindo a Eq. (6.37) na Eq. (6.36) chega-se a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla \Phi \cdot \nabla \lambda}{|\nabla(z - \lambda)|} \quad (6.38)$$

onde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} |\nabla(z - \lambda)| + \nabla \Phi \cdot \nabla \lambda \quad (6.39)$$

Substituindo a Eq. (6.39) na Eq. (6.35) tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{K}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} |\nabla(z - \lambda)| \quad (6.40)$$

A quantidade $|\nabla(z - \lambda)|$ na Eq. (6.40) pode ser escrita como sendo:

$$|\nabla(z - \lambda)| = \left[1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.41)$$

e

$$\cos \eta = \left[1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (6.42)$$

onde $\tan \eta$ é definido como sendo a inclinação da superfície livre: $\partial \lambda / \partial x = -\tan \eta$.

Substituindo as Eq. (6.42) e Eq. (6.41) na Eq. (6.40) chega-se a:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{K}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \left[1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{1}{\sigma \cos \eta} \quad (6.43)$$

A informação obtida é a velocidade normal ao ponto de colocação q , portanto, deve-se escrever a Eq. (6.43) em termos desta velocidade normal projetada no eixo z :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \frac{q}{\cos \eta} \quad (6.44)$$

onde η é o ângulo formado entre o vetor normal ao ponto de colocação e o eixo z .

A Eq. (6.44) é a equação para a simulação da movimentação da superfície livre ou da interface entre dois fluidos. A implementação desta equação no código desenvolvido deve ser feita de forma a levar em conta o tamanho do passo de tempo utilizado nas iterações. Escrevendo a Eq. (6.44) em termos de diferenças finitas (ZHANG et al., 1999), tem-se:

$$z_{m+1} = z_m - \frac{\Delta t}{\sigma \cos \eta} \left[\beta (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)_{m+1} + (1 - \beta) (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)_m \right] \quad (6.45)$$

onde β é o coeficiente que define o quanto o ponto de colocação se move, apresentado nas Equações (4.92) e (4.93); z é a altura da interface; Δt é o tamanho do passo de tempo e os sub-índices m e $m + 1$ são, respectivamente, o passo de tempo atual e o imediatamente próximo.

Liu et al. (1981) investigaram o movimento da interface entre dois fluidos em um meio poroso, através das soluções da Equação Integral de Contorno.

6.4 Método de Solução

No instante de tempo $t = 0$, assume-se que a interface coincide com a horizontal, ou seja, têm-se as condições de contorno prescritas. O simulador desenvolvido resolve o problema potencial decorrente do cenário inicial, calculando os potenciais e as velocidades na direção normal em todo o contorno e nos pontos de colocação da interface. A próxima etapa é o cálculo da nova posição da interface através da velocidade calculada, aplicando-a na Eq. (6.45). Como resultado, são obtidas as coordenadas de cada ponto de colocação da interface ao final do passo de tempo Δt . Logo, são calculadas as novas posições dos pontos de controle da interface.

Um novo cenário é estabelecido, então, para a próxima iteração. As condições de contorno são as mesmas que foram prescritas inicialmente. A nova posição da interface não é mais assumida como horizontal, mas sim determinada pelas coordenadas calculadas. O código resolve o problema potencial decorrente deste novo cenário e realiza o cálculo da nova posição da interface. Todo este procedimento é repetido pelo número de passos de tempo indicado como parâmetro, obtendo-se, portanto, a evolução da interface ao longo do tempo. A este tipo de problema é denominado como sendo do tipo transiente artificial ou quase-estático. O fluxograma do método de solução é descrito na Figura 6.4.

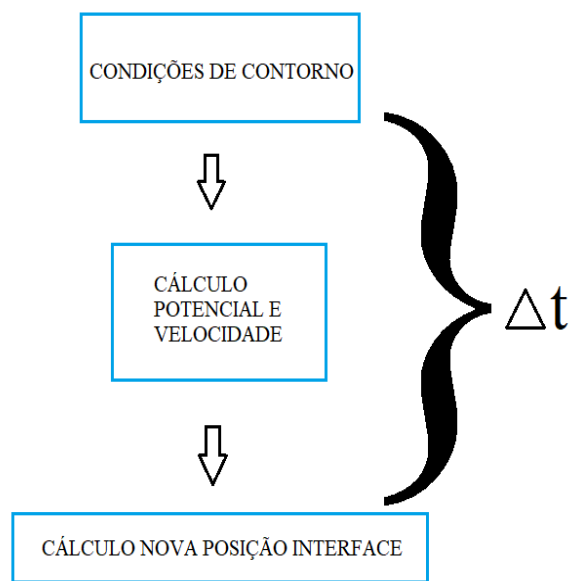


Figura 6.4: Fluxograma do método de solução.

Capítulo 7

Validação da Formulação Axissimétrica

O objetivo deste Capítulo é validar a formulação axissimétrica do MEC-Iso desenvolvida neste trabalho e que não é encontrada em nenhum outro trabalho da literatura.

7.1 Problemas Axissimétricos sem Movimentação de Interface

Os resultados obtidos neste Capítulo visam a validação do simulador para problemas axissimétricos, sem a movimentação de interface. São eles: simulador de reservatório em poço concentrado e distribuído; condução de calor em cilindro maciço, cilindro vazado e esfera oca.

Para os casos de condução de calor, o Erro-RMS (*Root Mean Square*) é apresentado como validação entre os resultados analítico e numérico. A Eq. (7.1) que define o Erro-RMS é:

$$RMS = \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{T_{n,j} - T_{a,j}}{m}} \quad (7.1)$$

onde $T_{n,j}$ e $T_{a,j}$ são as temperaturas para o caso numérico e analítico, respectivamente, associado a cada nó j até o número total de nós m no segmento de referência.

7.1.1 Poço Concentrado

Não foi encontrada na literatura resultados para simuladores de reservatório sem fronteira móvel, através da união das formulações axissimétrica e isogeométrica no MEC. Logo, as comparações foram realizadas apenas entre a formulação axissimétrica do Método de Elementos de Contorno convencional (padrão). Esta formulação vem sendo desenvolvida em uma tese de doutorado que é uma extensão da dissertação de mestrado de Gontijo (2015).

O caso para o problema de reservatório de petróleo com poço concentrado sem movimentação

de interface, foi simulado com as seguintes características:

- Condutividade hidráulica do meio poroso $K = 0,006$ m/s
- Potencial do fluido $\Phi = 1$ m
- Intensidade do poço (sumidouro) $Q = -5,0 \times 10^{-3}$ m²/s.
- Coordenadas do poço (sumidouro) $(r_p; z_p) = (0, 0; 0, 5)$ m.
- Coordenadas do reservatório $(r_r; z_r) = (1, 0; 1, 0)$ m.

A configuração do reservatório é apresentado na Figura 7.1 para melhor visualização.

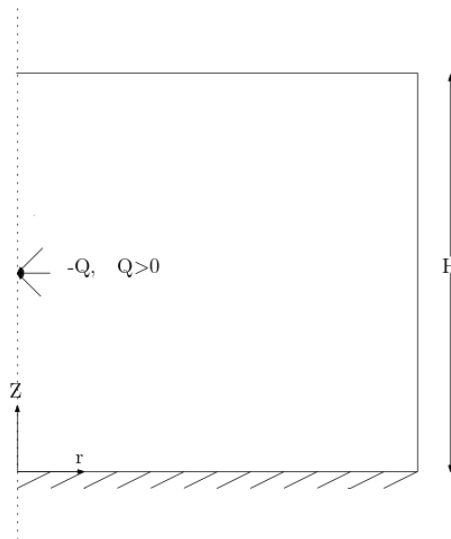


Figura 7.1: Reservatório com sumidouro pontual.

A malha do problema é mostrada na Figura 7.2, onde é possível ver os pontos de colocação, inclusive da interface não deformada. Os pontos internos são gerados para a obtenção do mapa de cor (não possui influência na precisão do cálculo dos resultados). Note que no eixo axial de simetria não existem pontos de colocação.

O resultado para a distribuição de potencial no reservatório é apresentado na Figura 7.3. Próximo ao sumidouro o gradiente de potencial apresenta uma distribuição radial, porém com o aumento do raio do reservatório, esta distribuição tende a se dissipar em camadas adjacentes de valores distintos para o potencial.

A Figura 7.4 apresenta o fluxo hidráulico no topo do reservatório com sumidouro pontual, entre os resultados do MEC-Iso-Axi (AXI-IGA-BEM) e do MEC-Axi (AXI-BEM). Os resultados são comparados somente entre estes dois códigos, uma vez que não foi encontrada na literatura outros trabalhos que utilizassem as formulações axissimétrica e isogeométrica junto ao Método de Elementos de Contorno. Os valores possuem boa concordância para o caso apresentado.

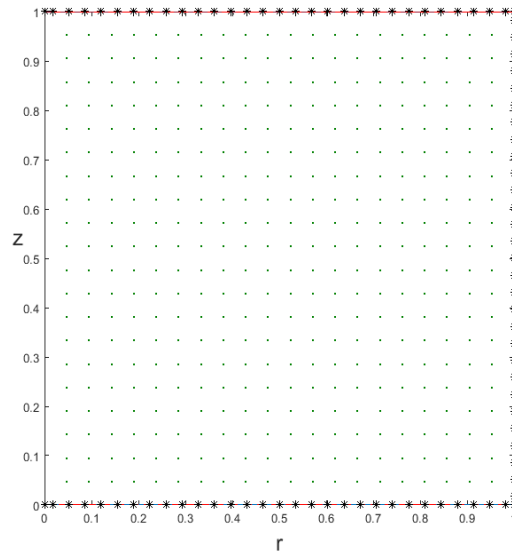


Figura 7.2: Malha do problema com pontos internos - poço concentrado.

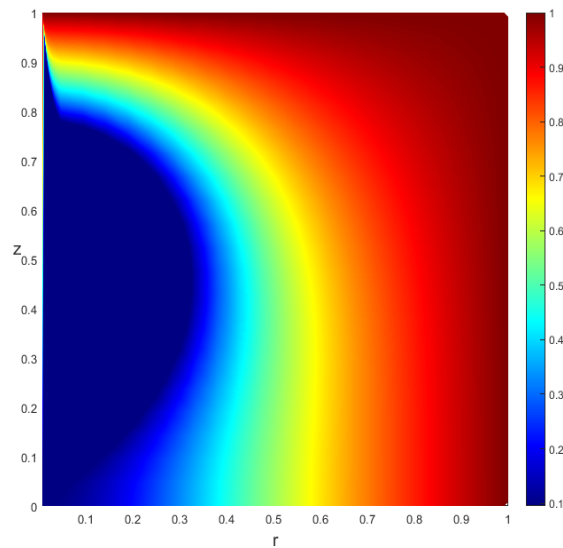


Figura 7.3: Reservatório com sumidouro pontual. Gradiente de potencial.

7.1.2 Poços Distribuídos

O mesmo caso para o problema de reservatório de petróleo sem movimentação de interface foi simulado, porém com poços distribuídos. Os dados do problema são:

- Condutividade hidráulica do meio poroso $K = 0,006$ m/s
- Potencial do fluido $\Phi = 1$ m
- Intensidade dos poços (sumidouro) $Q = -5,0 \times 10^{-3}$ m²/s.

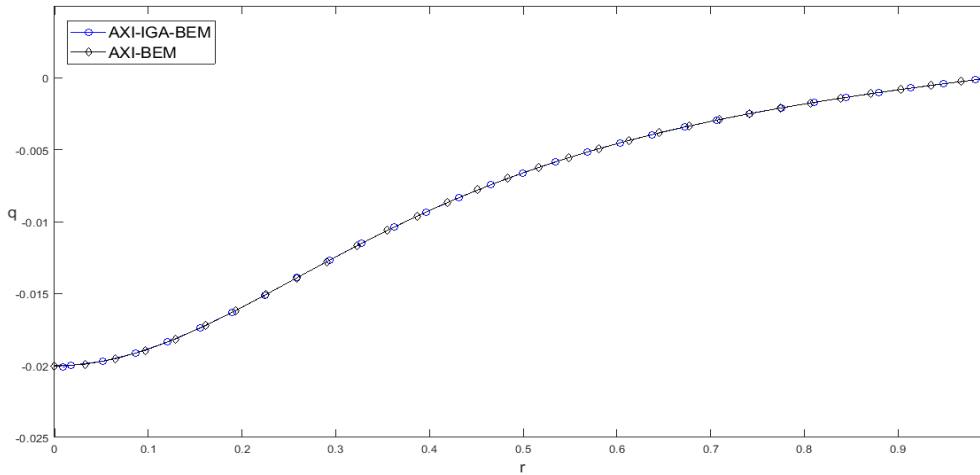


Figura 7.4: Fluxo hidráulico no topo do reservatório - poço concentrado.

- Coordenadas dos poços (5 sumidouros): variando de $(r_p; z_p) = (0, 0; 0, 4)$ m até $(r_p; z_p) = (0, 0; 0, 6)$ m com espaçamento de 0,05 m na altura z_p .
- Coordenadas do reservatório $(r_r; z_r) = (1, 0; 1, 0)$ m.

A configuração do reservatório é apresentado na Figura 7.5 para melhor visualizaçãõ.

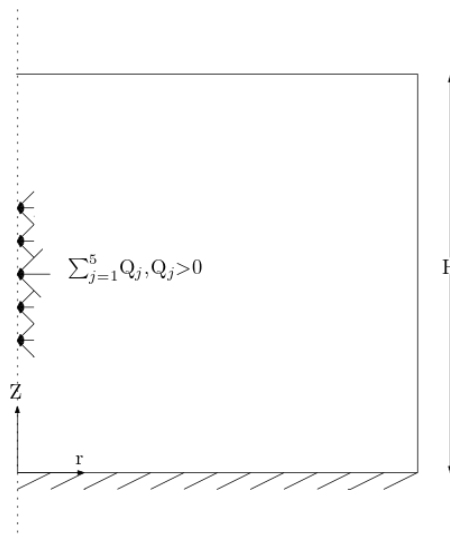


Figura 7.5: Reservatório com sumidouros distribuídos.

Assim como na Figura 7.2, a malha do problema é mostrada na Figura 7.6, onde é possível ver os pontos de colocação, inclusive da interface não deformada. Os pontos internos são gerados para a obtenção do mapa de cor.

O resultado para a distribuição de potencial no reservatório é apresentado na Figura 7.7. Comparado ao caso de poço concentrado, percebe-se uma leve mudança na distribuição do gradiente de potencial, porém permanecendo a forma radial de distribuição próximo aos sumidouros em

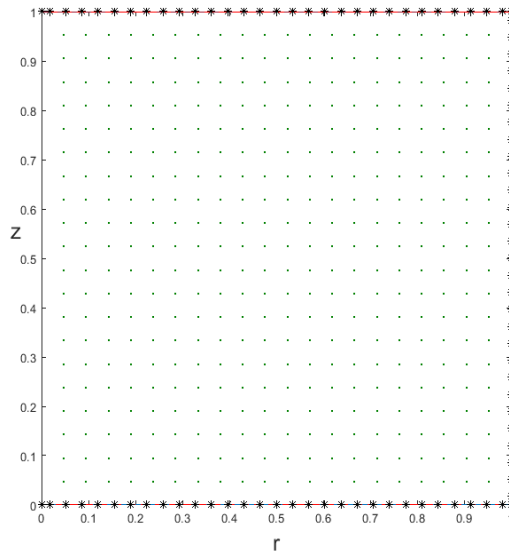


Figura 7.6: Malha do problema com pontos internos - poços distribuídos.

seqüência e a dissipação em camadas adjacentes de valores distintos para o potencial, à medida que o raio do reservatório aumenta.

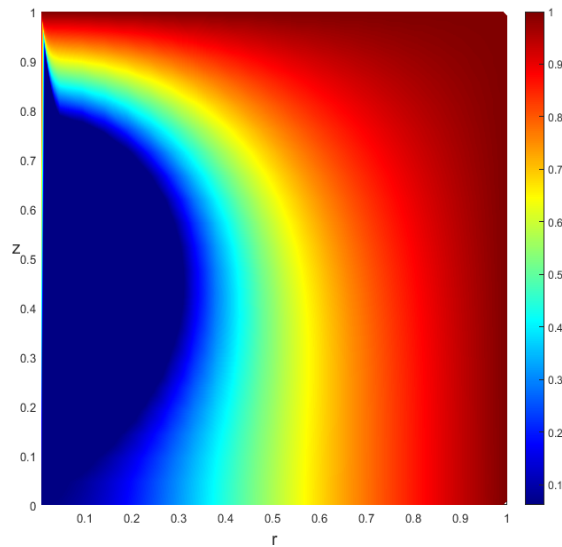


Figura 7.7: Reservatório com sumidouros distribuídos. Gradiente de potencial.

A Figura 7.8 apresenta o fluxo hidráulico no topo do reservatório com sumidouros distribuídos, entre os resultados do MEC-Iso-Axi (AXI-IGA-BEM) e do MEC-Axi (AXI-BEM). Os resultados são comparados somente entre estes dois códigos, uma vez que não foi encontrada na literatura outros trabalhos que utilizassem as formulações axissimétrica e isogeométrica junto ao Método de Elementos de Contorno. Os valores possuem boa concordância para o caso apresentado.

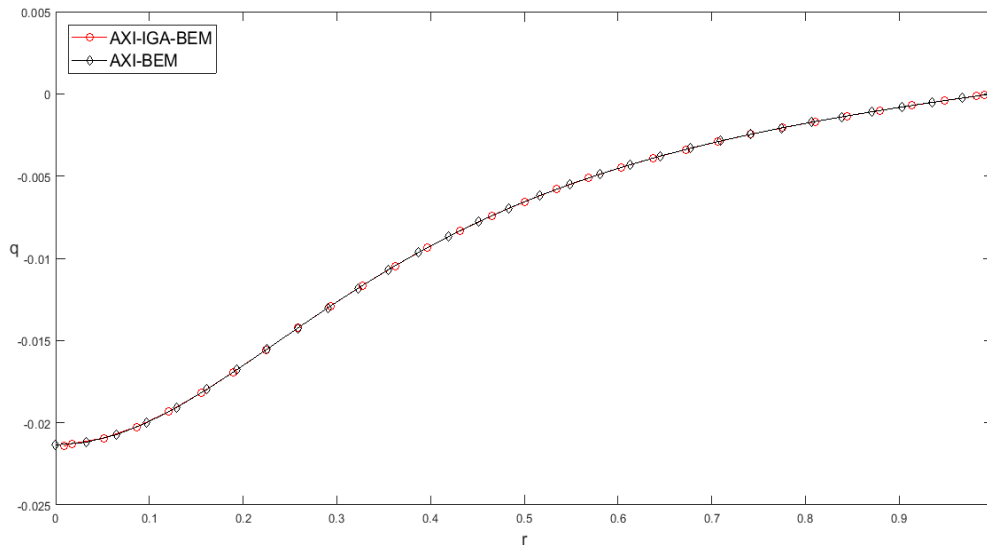


Figura 7.8: Fluxo hidráulico no topo do reservatório - poços distribuídos.

7.1.3 Cilindro Maciço

O caso para o problema de condução de calor em um cilindro maciço com fluxo de calor do topo, aquecido, para a base, resfriada, foi simulado com as seguintes características:

- Temperatura do topo $T_t = 1^\circ$.
- Temperatura da base $T_b = 0^\circ$.
- Altura do cilindro $H_c = 1,0$ m.
- Raio do cilindro $r_c = 1,0$ m.

A malha do problema é mostrada na Figura 7.9, onde é possível ver os pontos de colocação, inclusive da interface não deformada. Os pontos internos são gerados para a obtenção do mapa de cor, assim como para os casos para a simulação de reservatório sem fronteira móvel.

O resultado para a condução de calor no cilindro maciço é apresentado na Figura 7.10.

Vale ressaltar que a distribuição de temperatura T ao longo do eixo axial z são exatamente equivalentes, ou seja:

$$T = z \tag{7.2}$$

A comparação entre a distribuição de temperatura na forma analítica, dada pela Eq. (7.2), e os Método de Elementos de Contorno Isogeométrico e Convencional para problemas axissimétricos, é mostrada na Figura 7.11.

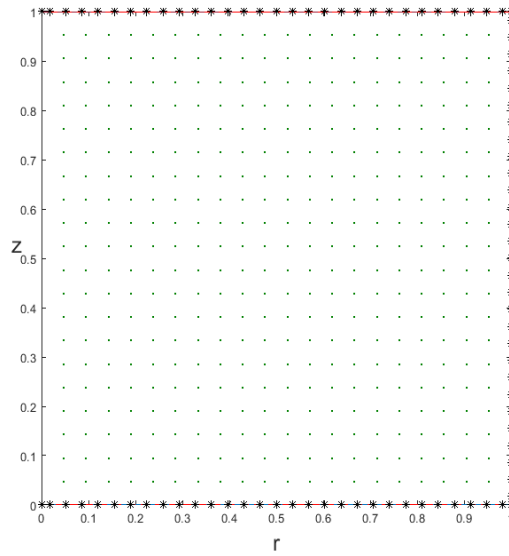


Figura 7.9: Malha do problema com pontos internos - cilindro maciço.

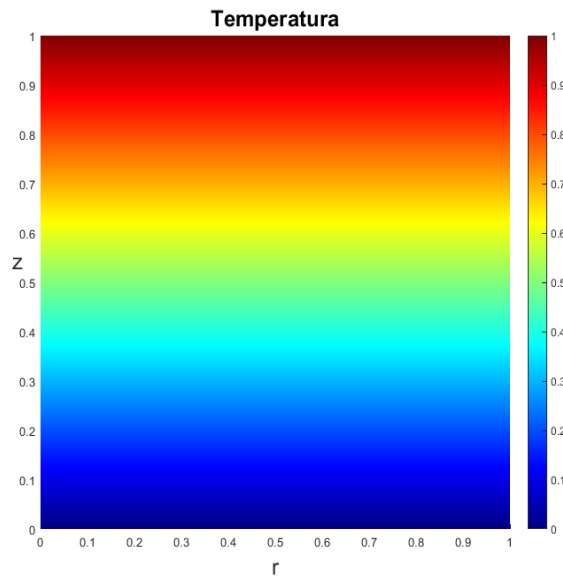


Figura 7.10: Distribuição de temperatura em um cilindro maciço.

A Figura 7.12 apresenta o Erro-RMS de arredondamento entre os resultados analítico e numérico, para a temperatura, na ordem de 10^{-6} .

Através das Figuras 7.11 e 7.12 pode-se observar a exatidão do código desenvolvido na aplicação para problemas de condução de calor em cilindro maciço.

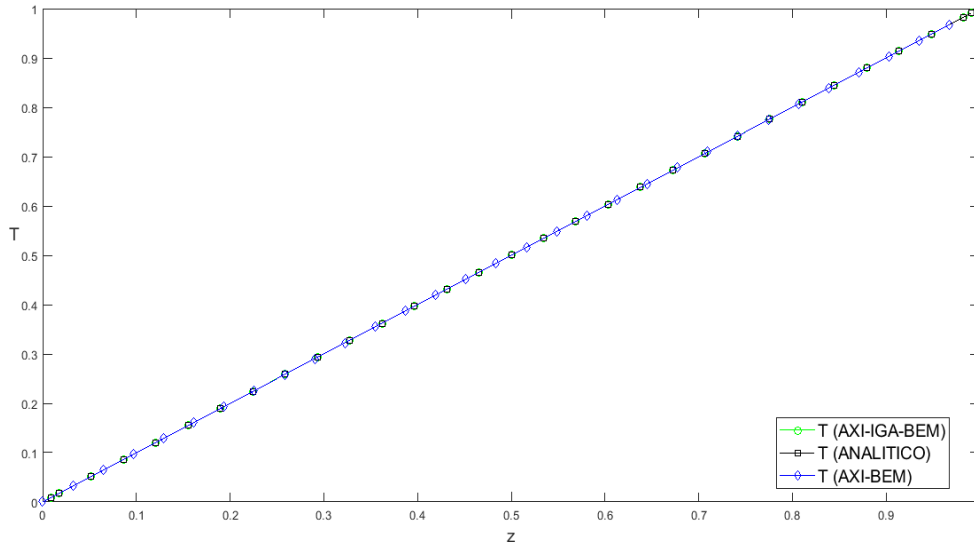


Figura 7.11: Comparação de resultados para distribuição de temperatura - cilindro maciço.

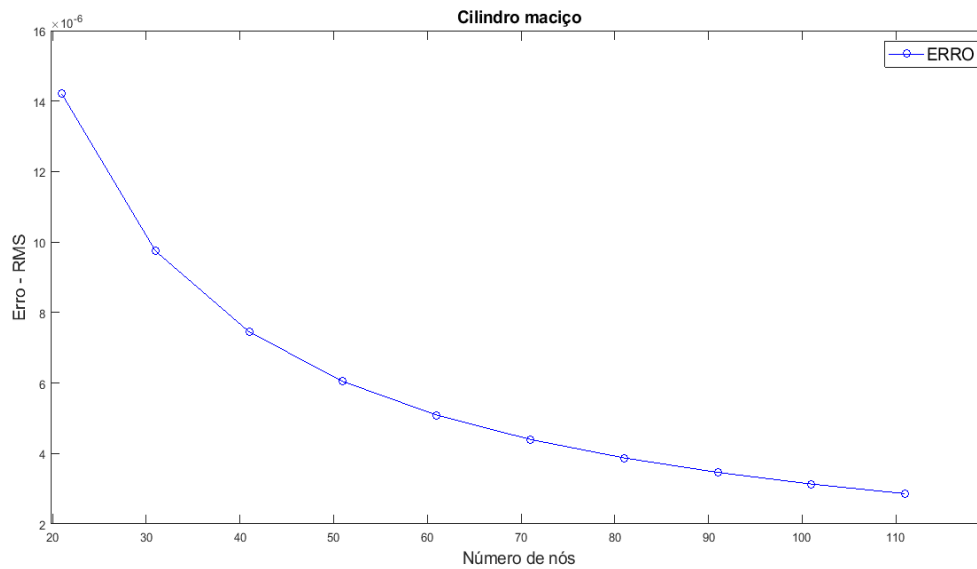


Figura 7.12: Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - cilindro maciço.

7.1.4 Cilindro Vazado

O caso para o problema de condução de temperatura em um cilindro vazado com fluxo de calor da parede externa aquecida para a parede interna resfriada, foi simulado com as seguintes características:

- Temperatura da parede externa $T_e = 3^\circ$.
- Temperatura da parede interna $T_i = 6^\circ$.
- Altura do cilindro $H_c = 1,0$ m.

- Raio interno do cilindro $r_i = 0,5$ m.
- Raio externo do cilindro $r_e = 1,0$ m.

A malha do problema é mostrada na Figura 7.13, onde é possível ver os pontos de colocação, inclusive da interface não deformada, sendo que os pontos internos são gerados para a obtenção do mapa de cor (como nos outros casos).

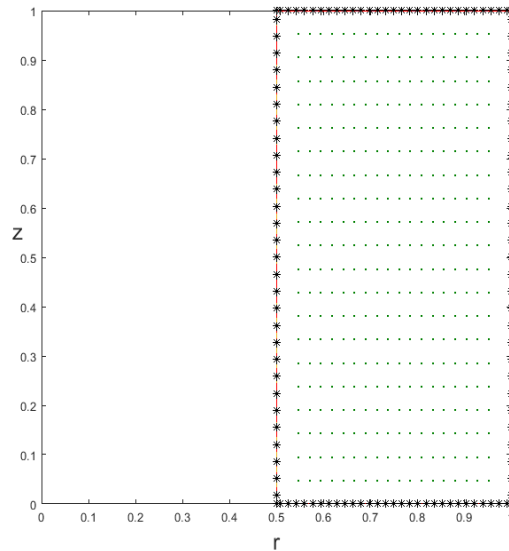


Figura 7.13: Malha do problema com pontos internos - cilindro vazado.

O resultado para a condução de calor no cilindro vazado é apresentado na Figura 7.14.

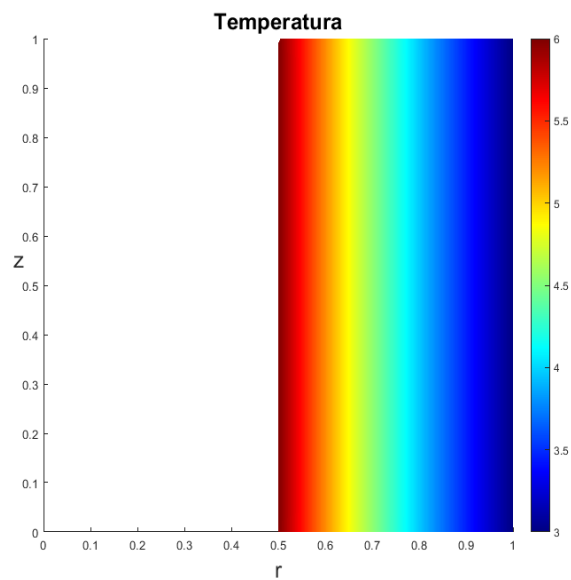


Figura 7.14: Distribuição de temperatura em um cilindro vazado.

A distribuição de temperatura no cilindro vazado é dado pela seguinte equação:

$$T = -\frac{T_i - T_e}{\ln(r_e/r_i)} \ln r + T_i + \frac{T_i - T_e}{\ln(r_e/r_i)} \ln r_i \quad (7.3)$$

A comparação entre a distribuição de temperatura na forma analítica, dada pela Eq. (7.3), e os Métodos de Elementos de Contorno Isogeométrico e Convencional para problemas axissimétricos, é mostrada na 7.15.

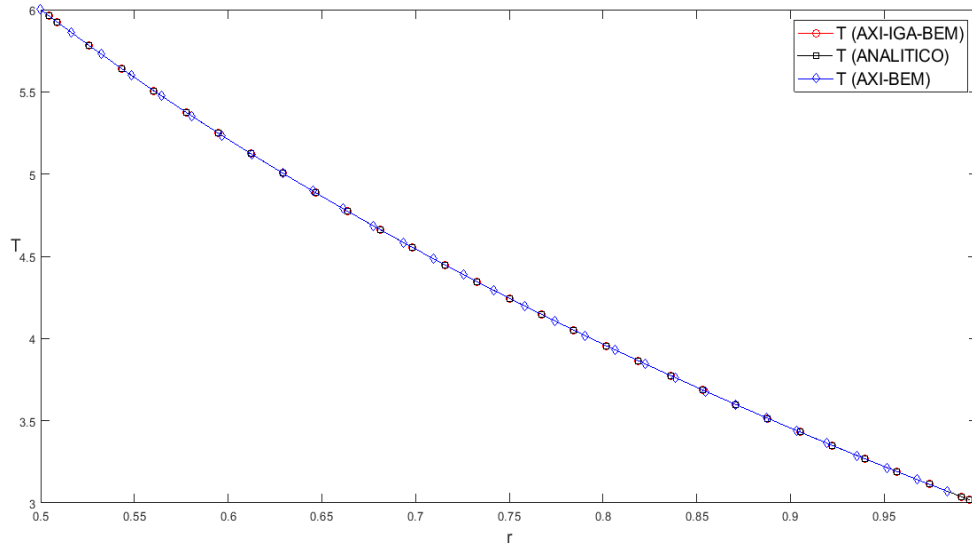


Figura 7.15: Comparação de resultados para distribuição de temperatura - cilindro vazado.

A Figura 7.16 apresenta o Erro-RMS entre os resultados analítico e numérico, para a temperatura, na ordem de 10^{-5} .

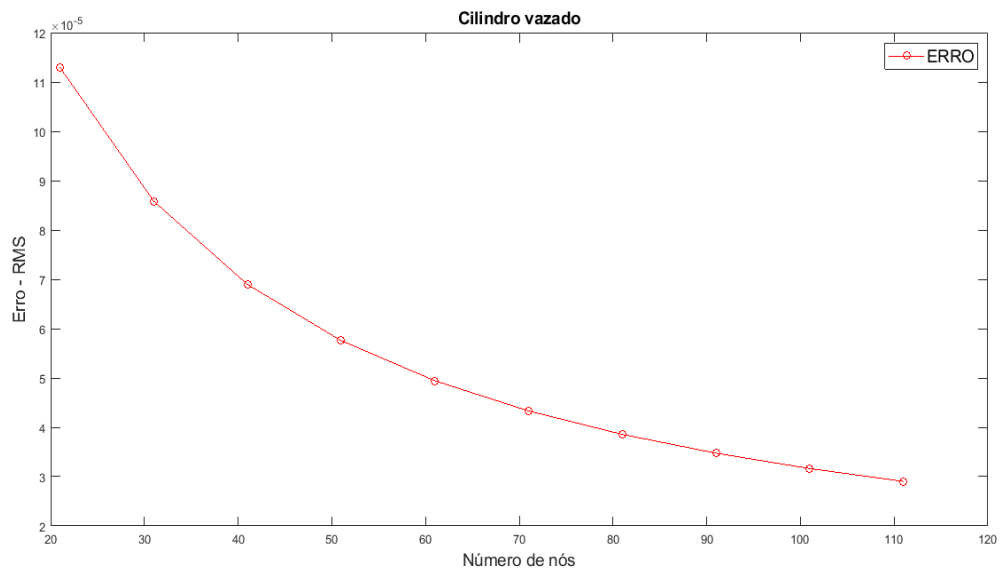


Figura 7.16: Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - cilindro vazado.

Através das Figuras 7.15 e 7.16 pode-se observar a precisão do código desenvolvido na aplicação para problemas de condução de calor em cilindro vazado.

7.1.5 Esfera Oca

O caso para o problema de condução de temperatura em uma esfera oca com fluxo de calor da parede interna, aquecida, para a parede externa, resfriada, foi simulado com as seguintes características:

- Temperatura da parede externa $T_e = 3^\circ$.
- Temperatura da parede interna $T_i = 5^\circ$.
- Raio interno da esfera $r_i = 1,0$ m.
- Raio externo da esfera $r_e = 2,0$ m.

Os pontos de colocação do problema com os pontos internos gerados são apresentados na Figura 7.17. Neste caso para esfera oca, a malha foi melhor refinada para obter resultados mais coerentes para a distribuição de temperatura próximo ao eixo de simetria axial como pode ser visto no mapa de cor.

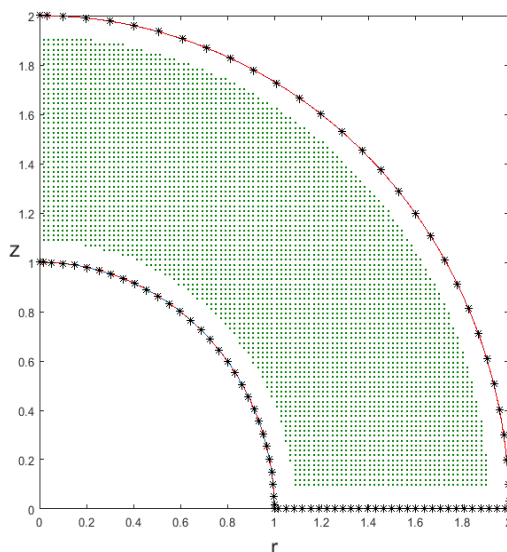


Figura 7.17: Pontos de colocação do problema com pontos internos - esfera oca.

O resultado para a condução de calor na esfera oca é apresentado na Figura 7.18, onde somente 1/4 da esfera é mostrado.

A distribuição de temperatura na esfera oca é dado pela seguinte equação:

$$\frac{T - T_i}{T_e - T_i} = T_i + \frac{r_i r_e}{r_e - r_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) \quad (7.4)$$

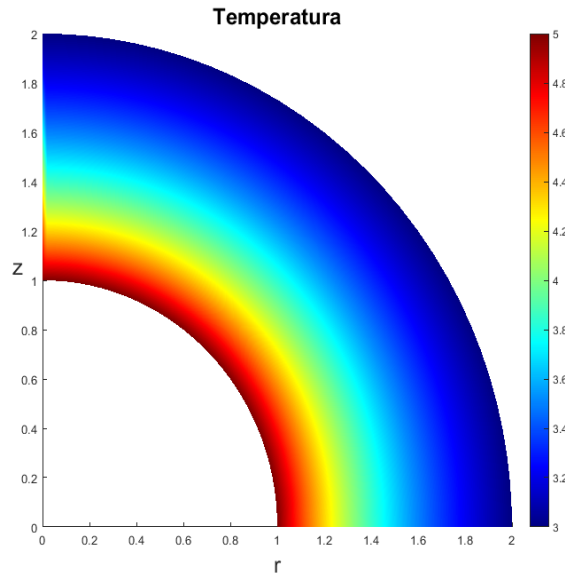


Figura 7.18: Distribuição de temperatura em uma esfera oca.

A comparação entre a distribuição de temperatura na forma analítica, dada pela Eq. (7.4), e os Métodos de Elementos de Contorno Isogeométrico e Convencional para problemas axissimétricos, é mostrada na Figura 7.19.

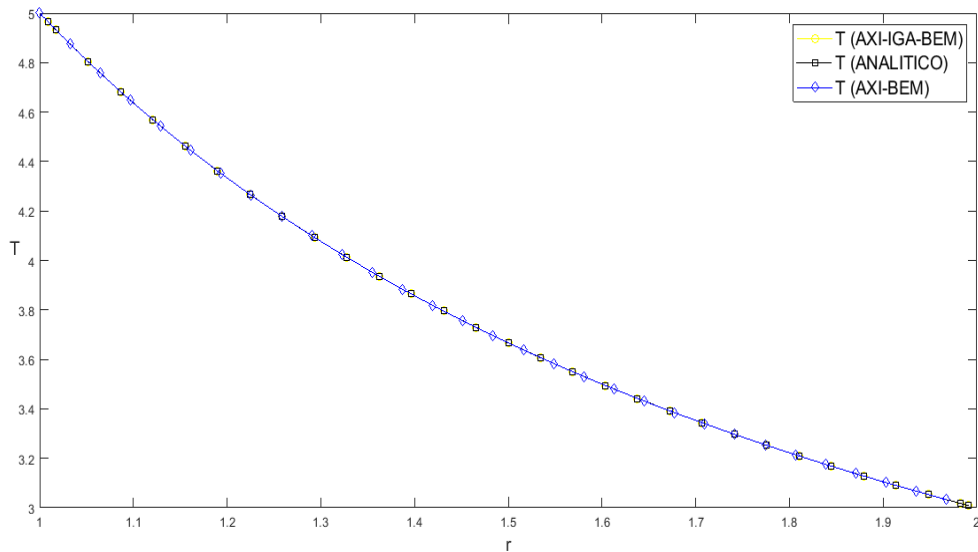


Figura 7.19: Comparação de resultados para distribuição de temperatura - esfera oca.

A Figura 7.20 apresenta o Erro-RMS entre os resultados analítico e numérico, para a temperatura, na ordem de 10^{-4} .

Através das Figuras 7.19 e 7.20 pode-se observar a precisão do código desenvolvido na aplicação para problemas de condução de calor em esfera oca. A oscilação nos valores para o Erro-RMS deve-se pela aplicação da Transformada de Telles no cálculo das singularidades, quando neste caso

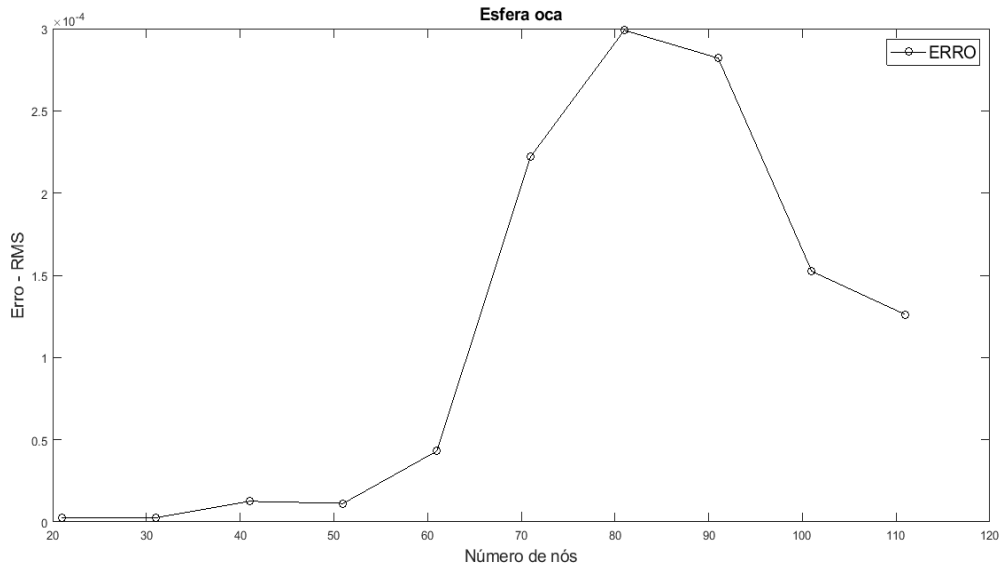


Figura 7.20: Distribuição do Erro-RMS para a temperatura em diferentes malhas - esfera oca.

o ponto de colocação pertence ao intervalo de integração e o ponto fonte pertence ao domínio de influência. Trocar por outro método no cálculo das integrais fracamente singulares é a solução.

Para todos os problemas desta seção, onde não há movimentação de interface, os resultados obtidos através da formulação isogeométrica e axissimétrica apresentaram boa concordância em relação aos resultados analíticos, validando, portanto, a principal proposta de desenvolvimento deste trabalho junto ao Método de Elementos de Contorno.

Capítulo 8

Resultados

Neste Capítulo são apresentados os resultados para dois diferentes tipos de configuração: (i) poço vertical (reservatório axissimétrico); (ii) poço horizontal (formulação bidimensional). Os problemas estudados visam a validação dos simuladores monofásico e bifásico potencial com movimentação de interface.

8.1 Poço Vertical

Nesta Seção é apresentada uma nova formulação do método dos elementos de contorno isogeométrico, para o estudo do comportamento da extração de óleo em um protótipo de reservatório axissimétrico, sujeito à ocorrência do cone de água ou gás em um poço vertical além, ainda; para o estudo do problema de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*) em protótipo de aquífero (reservatório de água) axissimétrico, como pode ser encontrado no trabalho de Nascimento et al. (2021).

8.1.1 Cone de Gás

Não foi encontrada na literatura resultados para poços verticais através da união das formulações axissimétrica e isogeométrica no MEC. Logo, a comparação foi realizada apenas entre a formulação axissimétrica do Método de Elementos de Contorno convencional (padrão). Esta formulação vem sendo desenvolvida em uma tese de doutorado que é uma extensão da dissertação de mestrado de Gontijo (2015) e, por isso, não serão comparados os resultados para o simulador bifásico, uma vez que a formulação axissimétrica do Método de Elementos de Contorno convencional (padrão) ainda não está pronta.

As configurações para a primeira geometria do problema (fenômeno do cone de gás em mono-região) são: 1,0 m de largura e 1,0 m de coluna de óleo. O fluido extraído é óleo com massa específica (ρ_o) 1245,0 kg/m³ e viscosidade dinâmica (μ) de 0,4 Pa.s.

Os dados do simulador monofásico são:

- Condutividade hidráulica (sub-região de óleo) $K = 5,725 \times 10^{-3}$ m/s.
- Intensidade do poço (sumidouro) $Q = -5,697 \times 10^{-4}$ m²/s.
- Coordenadas do poço (sumidouro) $(x_p; z_p) = (0, 0; 0, 5)$ m.
- Tempo total de análise $t_t = 2000$ s.
- Tempo em que a bomba está ligada $t_b = 2000$ s.
- Tamanho do passo de tempo $\Delta t = 0,5$ s.
- Quantidade de passos de tempo $n_{pt} = 4000$.

Os pontos de colocação do problema são mostrados na Figura 8.1, inclusive a interface não deformada. Os pontos internos utilizados na obtenção do mapa de cor são mostrados na Figura 8.2, gerados após a deformação da interface no último passo de tempo.

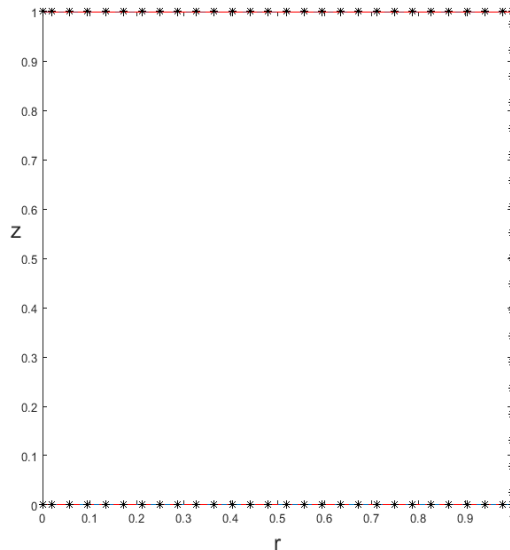


Figura 8.1: Malha com os elementos de contorno - reservatório axissimétrico.

Os pontos internos são utilizados unicamente para gerar o mapa de cor. Como demonstrado em capítulos anteriores, o cálculo do potencial nos pontos internos é realizado após o cálculo do potencial e do fluxo no contorno. Portanto, a quantidade e a posição de pontos internos não interfere na precisão dos resultados. Trata-se apenas de um pós-processamento.

A Figura 8.3 mostra o gradiente de potencial com interface móvel em um reservatório com $\sigma = 1,0$, para a posição estabilizada da interface na vazão subcrítica, através do simulador monofásico potencial isogeométrico com aplicação em problema axissimétrico.

A Figura 8.4 mostra a comparação entre os dois códigos (MEC-Iso e MEC convencional) para a variação do ponto médio da superfície livre. Pode-se notar que o código MEC converge mais rapidamente que o MEC-Iso, onde basicamente apresentam o mesmo valor à altura da borda do

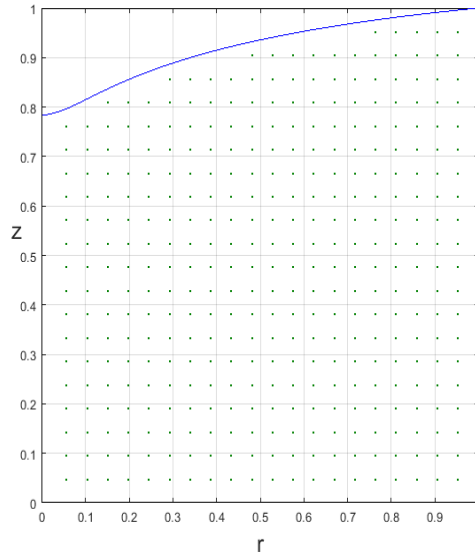


Figura 8.2: Pontos internos utilizados na geração do mapa de cor - reservatório axissimétrico.

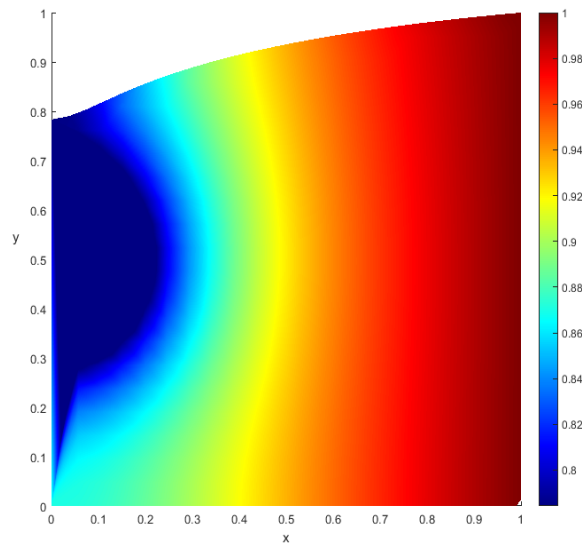


Figura 8.3: Gradiente de potencial em um reservatório axissimétrico (cone de gás): MEC-Iso.

cone: 0,7826 m e 0,7832 m, respectivamente. Um erro de 0,08%. A porosidade do meio não é considerada nesta análise, ou seja, $\sigma = 1, 0$.

As razões para a diferença no tempo de convergência entre o MEC-Iso e o MEC padrão foram investigadas, porém não se chegou a conclusões para esta divergência. Uma vez que a formulação desenvolvida é quase-estática, a variável tempo não aparece explicitamente nesta. Uma hipótese é de que a evolução de um passo de tempo para o outro tenha que ser corrigida. Entretanto, esta análise ficou fora do escopo desse trabalho.

Quando a porosidade do meio é considerada, a velocidade de convergência para a estabilização

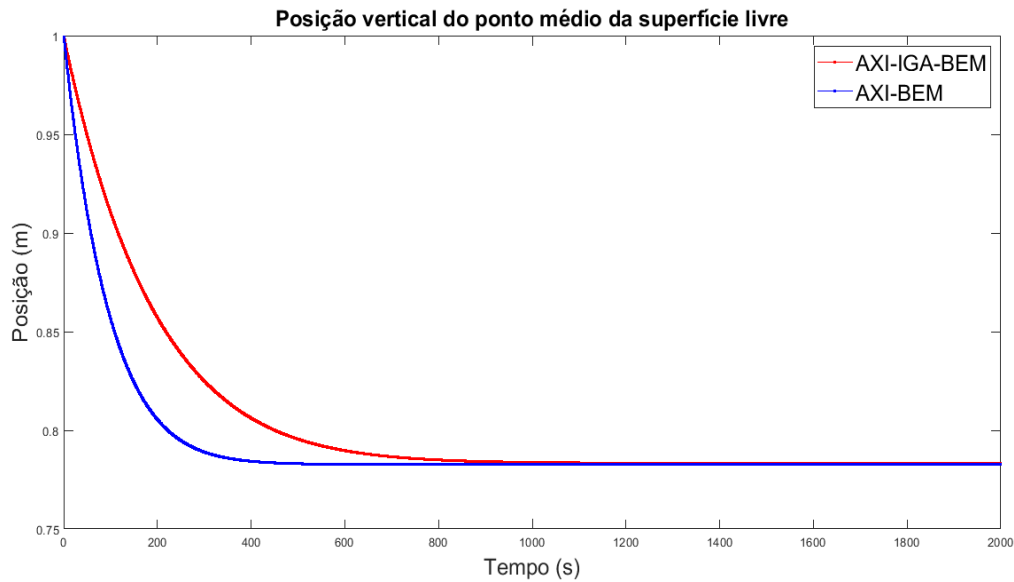


Figura 8.4: Comparação entre os dois códigos para a variação do ponto médio da superfície livre: MEC-Iso (AXI-IGA-BEM) e MEC (AXI-BEM).

do ponto médio da superfície livre é maior para ambos os códigos, uma vez que a velocidade média real do fluido no interior dos poros aumenta de acordo com a Eq. (2.12). A Figura 8.5 apresenta a comparação entre os códigos MEC-Iso e MEC, para uma porosidade do meio no valor de $\sigma = 0,2$.

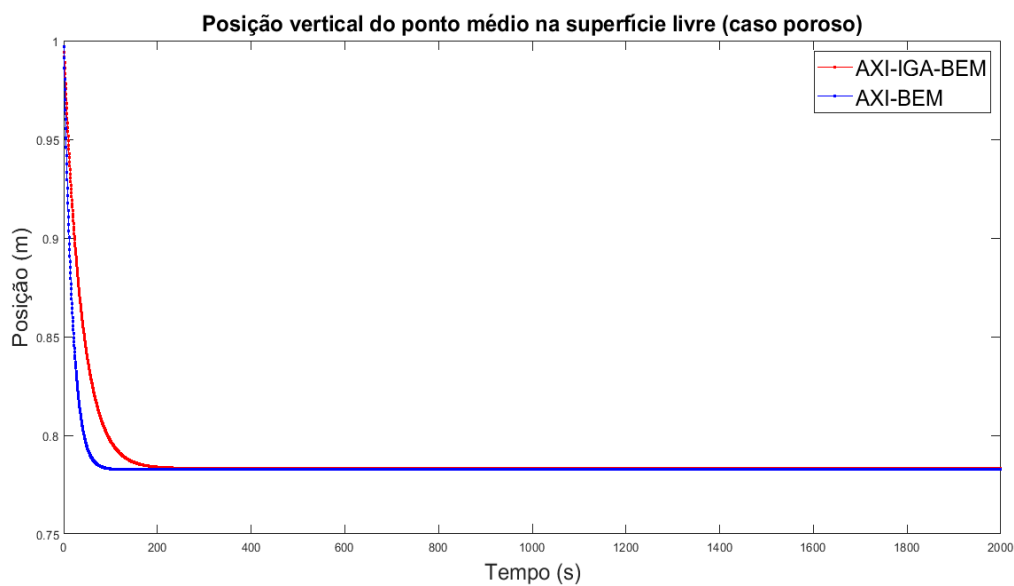


Figura 8.5: Comparação entre os dois códigos para a variação do ponto médio da superfície livre: MEC-Iso (AXI-IGA-BEM) e MEC (AXI-BEM). Meio poroso com $\sigma = 0,2$.

8.1.2 Breve Rebaixamento de Poço (*Quick Drawdown*)

Uma simulação numérica foi realizada para o problema de breve rebaixamento de poço (*quick drawdown*) em um aquífero axissimétrico, para comparação com o trabalho de Rafiezadeh e Ash-tiani (2014) usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) lagrangiano. Eles validaram seu trabalho com o experimento de Hall (1955), poço de Hall, testado em um tanque de areia 3D-axissimétrico e através de outros pesquisadores que o resolveram numericamente. O presente resultado é comparado com o trabalho de Taylor e Luthin (1969) usando o Método das Diferenças Finitas (MDF) e com o trabalho de Cooley (1983) usando o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O problema axissimétrico pode ser comparado diretamente com o problema 3D, uma vez que o objeto tridimensional é desenvolvido através da rotação de um plano bidimensional em um eixo de simetria axial. Se as cargas forem axissimétricas, é possível analisar o anel usando apenas uma representação de secção bidimensional, como é mostrado neste caso para comparação.

Em problemas de breve rebaixamento, o nível de água no poço axissimétrico cai de H_e (altura externa) para um valor constante H_p (altura do poço) em $t = 0$ e permanece nesse nível por todo o tempo. Para problemas de *quick drawdown*, uma fonte ou sumidouro não é considerado na análise. O contorno no problema é tratado como não deformado, sendo o limite de água correspondente à altura do poço após o rebaixamento brusco.

Os parâmetros físicos e geométricos do reservatório foram retirados do experimento de Hall (1955) e aplicados nas simulações numéricas encontradas na literatura para a validação.

- Condutividade hidráulica da água $K = 4,051 \times 10^{-3}$ m/s.
- Porosidade do meio $n = 0,3$.
- Raio do poço $r_p = 1,2192 \times 10^{-1}$ m.
- Altura do poço $H_p = 3,048 \times 10^{-1}$ m.
- Raio externo $r_e = 1,9507$ m.
- Altura externa $H_e = 1,2192$ m.
- Tamanho do passo de tempo $\Delta t = 6$ s.
- Quantidade de passos de tempo $n_{pt} = 300$.
- Tempo total de análise $t_t = 1800$ s.

Os pontos de colocação utilizados para a análise do problema não deformado são mostrados na Figura 8.6.

A validação do resultado para a superfície livre do aquífero, com a literatura, é mostrada na Figura 8.7.

Os resultados para o experimento de Hall (1955), neste caso, são aplicados apenas em meios isotrópicos. O ponto final em estado estacionário da superfície livre para o trabalho de Rafiezadeh

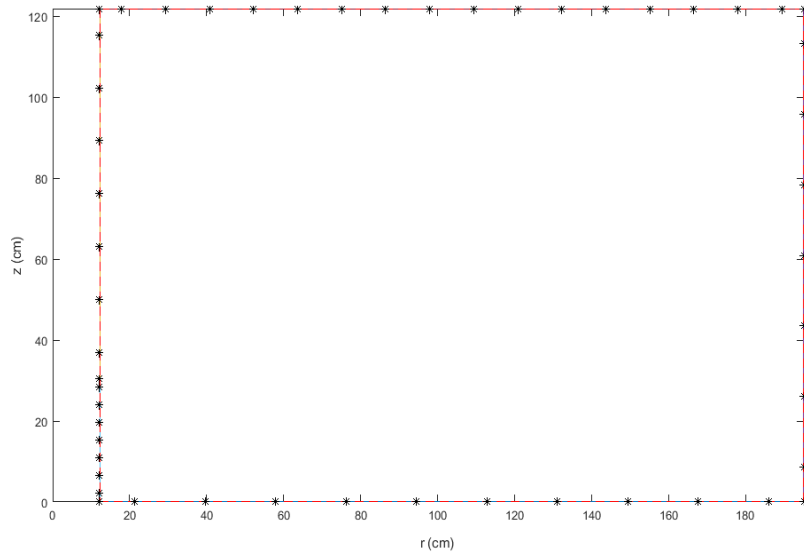


Figura 8.6: Pontos de colocação para a geometria não-deformada - experimento de Hall.

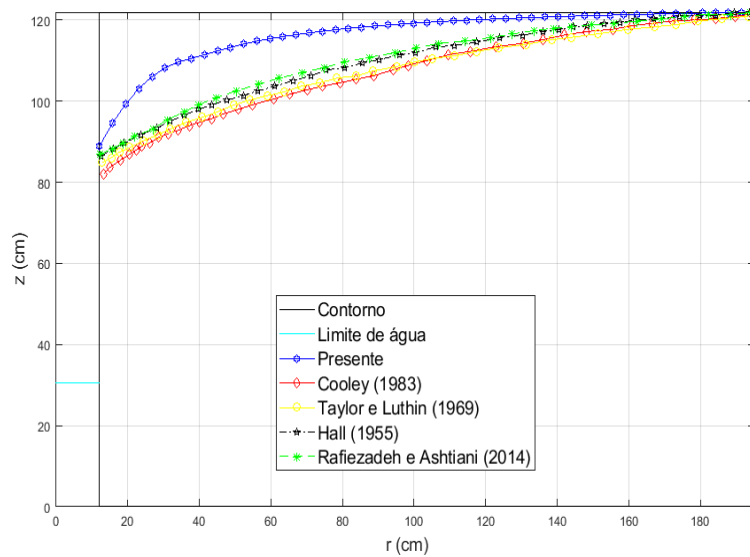


Figura 8.7: Validação dos resultados com a literatura para o experimento de Hall (1955). Resultado presente através das formulações isogeométrica e axissimétrica.

e Ashtiani (2014), que utilizou o MEC lagrangiano para a simulação numérica do problema, apresenta um valor de $H = 8,763 \times 10^{-1}$ m e para o presente trabalho é de $H = 8,890 \times 10^{-1}$ m; uma diferença de 1,4%. Há uma boa concordância entre a altura piezométrica obtida pelo MEC-Iso com formulação axissimétrica e os demais resultados da literatura; apesar da forma da superfície calculada pela formulação presente apresentar uma discordância com os outros resultados.

8.2 Poço Horizontal

Nesta Seção são apresentados os resultados para simulações em poços horizontais em domínio bidimensional. São eles: simulação da célula de Hele-Shaw, protótipo construído para simular o escoamento de fluidos em meios porosos, a fim de que os resultados sejam inseridos no conjunto de dados dos trabalhos de Gontijo (2015) e Fortaleza et al. (2019) para replicar o caso resolvido analiticamente, além de ser comparado e validado junto aos outros simuladores desenvolvidos; cone de água através do simulador bifásico potencial para qualificar o código desenvolvido.

8.2.1 Célula de Hele-Shaw

O simulador da célula de Hele-Shaw foi desenvolvido para comparação e validação junto aos simuladores monofásico potencial, bifásico potencial e monofásico compressível que estão inseridos no trabalho de Gontijo (2015), de forma a replicar o caso resolvido analiticamente. Os resultados obtidos neste trabalho contribuem para uma nova análise do problema de cone de gás em reservatório, através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico.

As configurações para a célula de Hele-Shaw são: 2 m de largura, 0,4 m de altura da coluna de líquido e $4,0 \times 10^{-3}$ m de espessura. O fluido extraído é glicerina, com massa específica $\rho = 1255,5 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica $\mu = 1,0255 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. O bombeamento no poço está ligado durante todo o tempo da simulação.

Os dados do simulador são:

- Potencial do fluido $\Phi = 0,4 \text{ m}$.
- Intensidade do poço (sumidouro) $Q = -2,718 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$.
- Coordenadas do poço (sumidouro) $(x_p; z_p) = (1, 0; 0, 0) \text{ m}$.
- Tempo total de análise $t_t = 10000 \text{ s}$.
- Tempo em que a bomba está ligada $t_b = 10000 \text{ s}$.
- Tamanho do passo de tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$.
- Quantidade de passos de tempo $n_{pt} = 10000 \text{ s}$.

A condutividade hidráulica do meio poroso é dada por Zhang et al. (1999), em função da espessura da célula de Hele-Shaw, através da seguinte expressão:

$$K = \frac{\rho g b^2}{12\mu} \quad (8.1)$$

onde b é a espessura da célula de Hele-Shaw e g é a aceleração da gravidade. Logo, a condutividade hidráulica calculada possui o valor de $K = 1,601 \times 10^{-2} \text{ m/s}$.

A malha do problema é mostrada na Figura 8.8, onde é possível ver os pontos de colocação, inclusive da interface não deformada. Os pontos internos utilizados na obtenção do mapa de cor são mostrados na Figura 8.9, gerados após a deformação da interface no último passo de tempo.

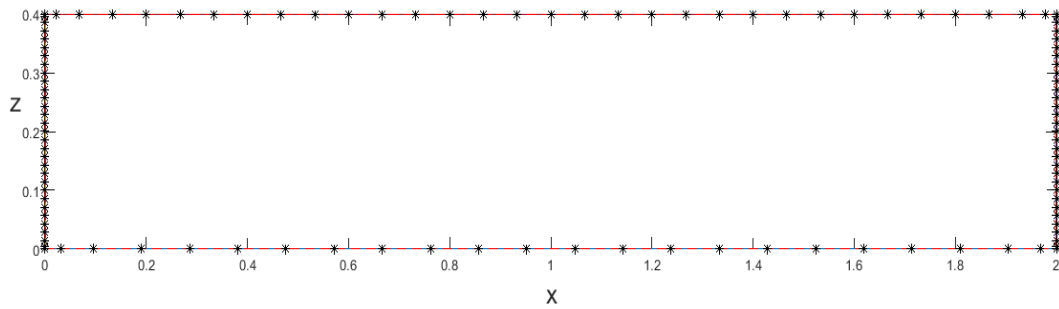


Figura 8.8: Distribuição dos pontos de colocação - célula de Hele-Shaw.

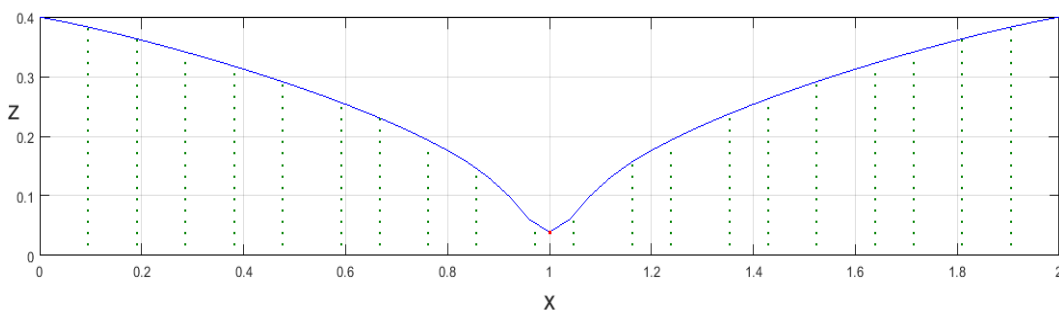


Figura 8.9: Pontos internos utilizados na geração do mapa de cor - célula de Hele-Shaw.

Os pontos internos são utilizados unicamente para gerar o mapa de cor. Como demonstrado em capítulos anteriores, o cálculo do potencial nos pontos internos é realizado após o cálculo do potencial e do fluxo no contorno. Portanto, a quantidade e a posição de pontos internos não interfere na precisão dos resultados. Trata-se apenas de um pós-processamento.

A Figura 8.10 apresenta o resultado para o gradiente de potencial com interface móvel no caso simulado: célula de Hele-Shaw, através do simulador monofásico potencial isogeométrico para o estudo do fenômeno de cone de gás em reservatórios.

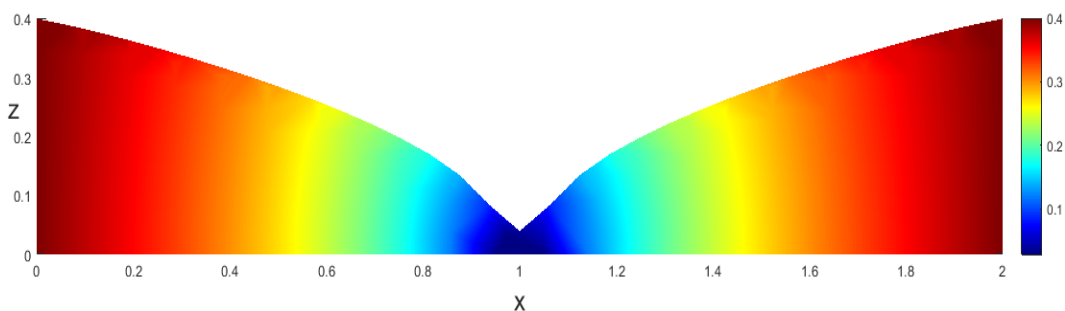


Figura 8.10: Gradiente de potencial com interface móvel no instante $t = t_b = 10000$ s (MEC-Iso). Célula de Hele-Shaw.

A posição estabilizada da interface na vazão crítica, para o simulador monofásico potencial isogeométrico, é comparada com os demais resultados na literatura (FORTALEZA et al., 2019).

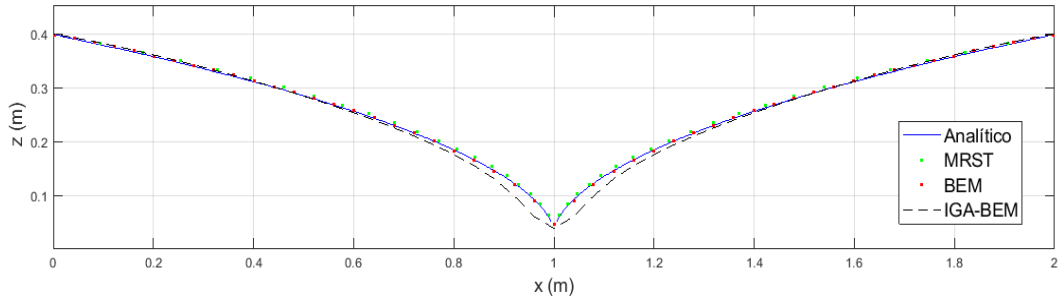


Figura 8.11: Posição final da interface. Célula de Hele-Shaw.

A Figura 8.11 apresenta uma comparação entre os resultados para o caso analítico, através do software MRST (*MATLAB Reservoir Simulation Toolbox*), pelo Método de Elementos de Contorno (MEC) e através do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico (MEC-Iso) proposto para validação neste trabalho. Essa nova ferramenta para o estudo do cone de gás - simulador monofásico potencial isogeométrico - exibiu uma boa concordância com os outros códigos para a estabilidade da interface em vazão crítica.

Para ser validado por comparação com o escoamento monofásico, o simulador bifásico deve simular um caso que mantenha similaridade dinâmica com o escoamento monofásico que servirá de referência. Analisando o número de Froude através da Eq. (2.1),

$$Fr = \frac{Q\mu_o}{\kappa_o H \Delta\rho g} \quad (8.2)$$

pode ser observado que, para garantir a similaridade dinâmica entre os modelos de escoamento monofásico e bifásico, a mesma diferença de densidade $\Delta\rho$ deve ser usada para ambos os casos.

O simulador bifásico deve ter seus parâmetros alterados de forma que o $\Delta\rho$ bifásico seja igual ao $\Delta\rho$ monofásico. Logo, tem-se que:

$$\rho_o(\text{bifásico}) = \rho_o(\text{monofásico}) + \rho_g(\text{bifásico}) \quad (8.3)$$

para garantir que o $\Delta\rho$ do escoamento bifásico seja igual ao do escoamento monofásico. Deve ser garantido ainda que a pressão sobre a interface seja zero, de modo que ela tenha a mesma condição da superfície livre do escoamento monofásico. Portanto, deve ser adotada uma pressão de topo $p_t = -\rho_g g H_g$ para que, então, a pressão na interface seja igual a zero.

Uma vez que os parâmetros continuam iguais, a semelhança dinâmica entre os escoamentos é alcançada e os resultados do escoamento bifásico potencial podem ser comparados com os demais resultados disponíveis.

A Figura 8.12 mostra a variação da posição vertical do ponto médio na superfície livre através da implementação da formulação isogeométrica no problema para os simuladores monofásico e bifásico, respectivamente.

Finalmente, o resultado para a simulação da célula de Hele-Shaw pode ser comparado com os

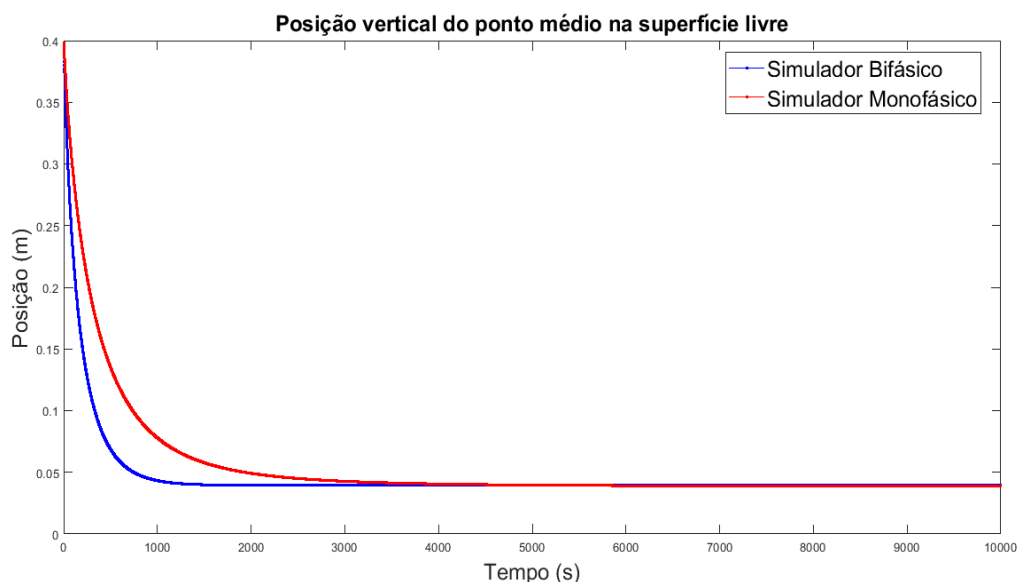


Figura 8.12: Comparação entre a variação da posição vertical do ponto médio na superfície livre para os simuladores monofásico e bifásico. Célula de Hele-Shaw.

demais resultados na literatura (GONTIJO, 2015), assim como para o caso resolvido analiticamente, como pode ser visto através da Tabela 8.1:

Tabela 8.1: Simulador da célula de Hele-Shaw

Comparação dos resultados obtidos na literatura				
Simulador	Vazão crítica [m ² /s]	Erro [%]	Altura nó [m]	Erro [%]
Resultado analítico	0,00254	-	0,04243	-
Monofásico potencial	0,00259	1,9	0,04228	0,35
Bifásico potencial	0,00260	2,3	0,04416	3,9
Monofásico compressível	0,00259	1,9	0,04224	0,45
Monofásico potencial-iso.	0,00254	0	0,03877	7,1
Bifásico potencial-iso.	0,00272	6,6	0,03943	8,6

Vale ressaltar que o resultado analítico não apresenta os pontos da região central (ponta) da interface. A coordenada da altura do nó central apresentada na Tabela 8.1 é obtida a partir de uma interpolação linear da curva analítica, ou seja, não é exatamente precisa. A própria existência de um vértice entre elementos de contorno adjacentes da interface já introduz erros numéricos.

Os valores obtidos para os simuladores monofásico e bifásico potencial isogeométrico desenvolvidos neste trabalho, apresentam valores coerentes com o restante da literatura e podem, portanto, adicionar mais uma contribuição para a análise do cone de gás em reservatórios de petróleo através da simulação de uma célula de Hele-Shaw, com formulação isogeométrica.

Os resultados para os simuladores monofásico e bifásico potencial isogeométrico, apresentam uma boa concordância no que diz respeito à vazão crítica e para a altura do nó central. Para o caso monofásico existe concordância até o terceiro algarismo com relação ao resultado analítico. Para o caso bifásico, o erro em relação ao resultado analítico ficou em 6,6%. Já a altura do nó central,

apresentou um erro de 8,6% para o caso monofásico e de 7% para o caso bifásico. Esta diferença pode ser explicada pelo fato de, tanto a formulação analítica como a formulação do elementos de contorno padrão (monofásico potencial, bifásico potencial e monofásico compressível), prevê a formação de um *cusp*, com uma quina aguda indicando uma descontinuidade da derivada. Uma vez que a formulação isogeométrica garante a continuidade da primeira derivada, o *cusp* não é formado e a superfície do ponto médio apresenta-se suave. Portanto, a diferença no valor da altura do nó central.

8.2.2 Cone de Água

O simulador bifásico potencial foi utilizado também para obter resultados qualitativos em um cenário de reservatório de extração de petróleo sujeito à ocorrência do cone de água. As configurações da geometria são: 1,6 m de largura, coluna de óleo de 0,2 m de altura e coluna de água de 0,2 m de altura. O fluido extraído é óleo com massa específica $\rho_o = 1025,18166 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica $\mu_o = 0,0003 \text{ Pa.s}$; a água possui massa específica $\rho_a = 688,79392 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica $\mu_a = 0,003 \text{ Pa.s}$.

Os dados do simulador são:

- Condutividade hidráulica (sub-região de água) $K = 3,319 \times 10^{-5} \text{ m/s}$.
- Condutividade hidráulica (sub-região de óleo) $K = 2,23 \times 10^{-6} \text{ m/s}$.
- Intensidade do poço (sumidouro) $Q = -7,241 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.
- Coordenadas do poço (sumidouro) $(x_p; z_p) = (0, 8; 0, 3) \text{ m}$.
- Tempo total de análise $t_t = 30000 \text{ s}$.
- Tempo em que a bomba está ligada $t_b = 30000 \text{ s}$.
- Tamanho do passo de tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$.
- Quantidade de passos de tempo $n_{pt} = 30000$.

Os pontos de colocação do problema são mostrados na Figura 8.13, onde é possível ver os elementos de contorno, inclusive da interface não deformada. Os pontos internos são gerados para a obtenção do mapa de cor.

As Figuras 8.14 e 8.15 mostram a evolução do gradiente de potencial em diferentes passos de tempo: 15000 s e 30000 s respectivamente.

A interface deformada, apresentando a forma cônica para a vazão subcrítica encontrada no último passo de tempo, é mostrada na Figura 8.16.

A Figura 8.17 mostra a variação da posição vertical do ponto médio na interface, através da implementação da formulação isogeométrica no problema de cone de água para o simulador bifásico.

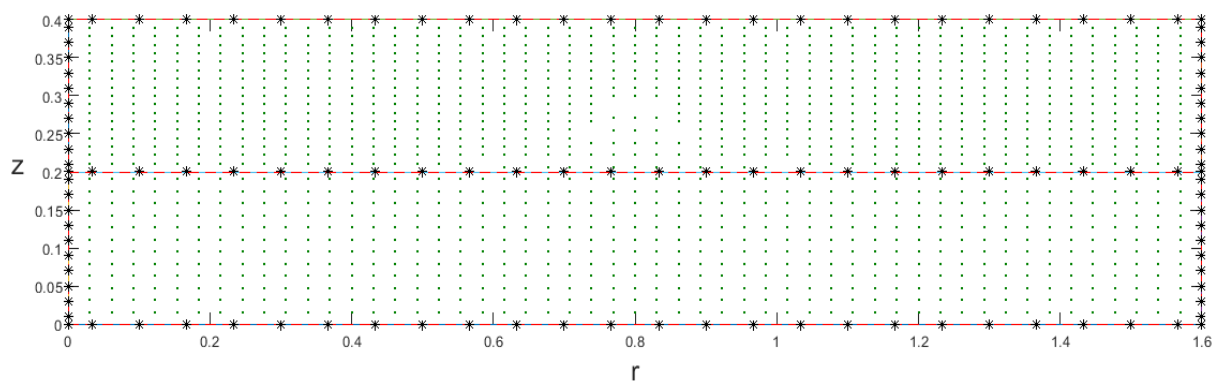


Figura 8.13: Malha do problema com pontos internos - sub-regiões.

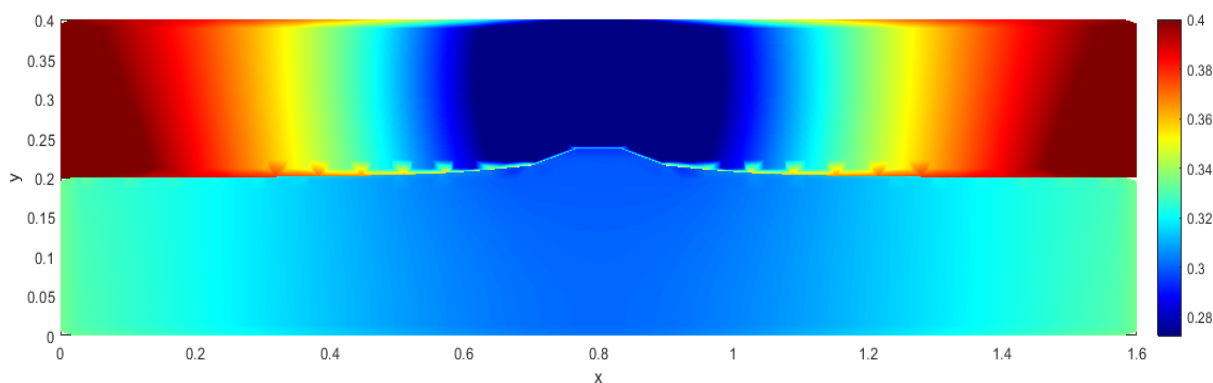


Figura 8.14: Distribuição do potencial de velocidade: $t = 15000$ s.

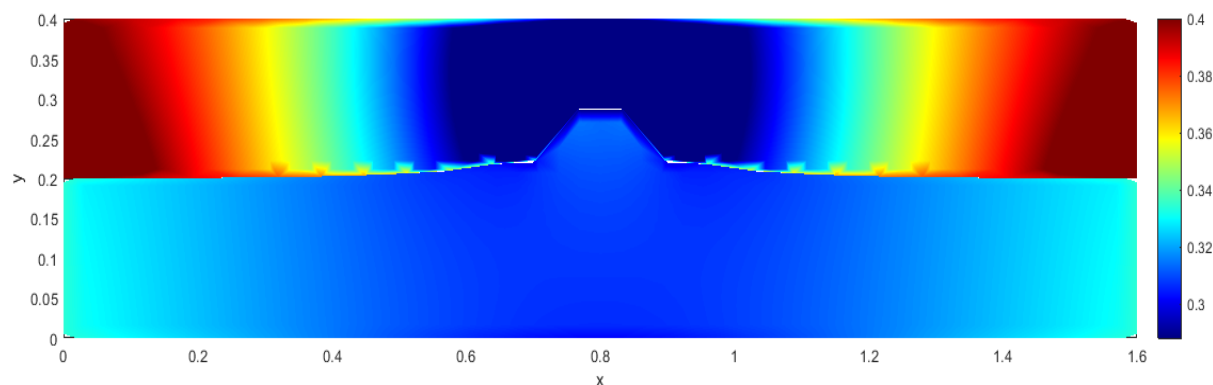


Figura 8.15: Distribuição do potencial de velocidade: $t = 30000$ s.

Através de várias simulações pelo método iterativo de estipulação de intervalos de vazões críticas máximas e mínimas, com período longo de duração de escoamento, pode-se chegar à conclusão de que para o fenômeno de cone de água não foi encontrada uma vazão crítica para o problema, a fim de que o escoamento insurgente de fluidos indesejáveis pelo poço fosse contido. A vazão subcrítica atingida para um longo período de tempo de simulação ($t = 30000$ s), apresentou valor de $Q = -7,241 \times 10^{-7}$ m²/s, ou seja, é a vazão logo anterior à vazão supercrítica do problema. O fenômeno apresentou a mesma característica através do MEC convencional, como pode ser visto na Figura 8.18.

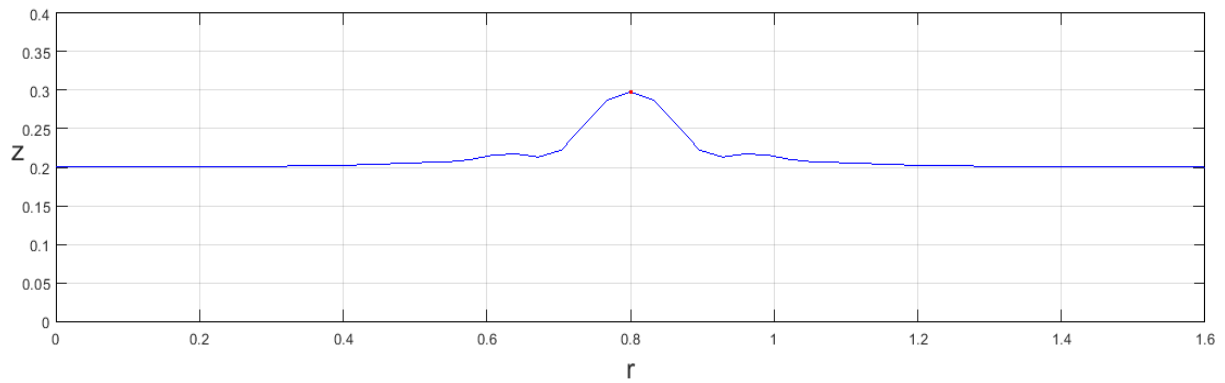


Figura 8.16: Interface deformada (forma cônica) para a vazão subcrítica encontrada - último passo de tempo.

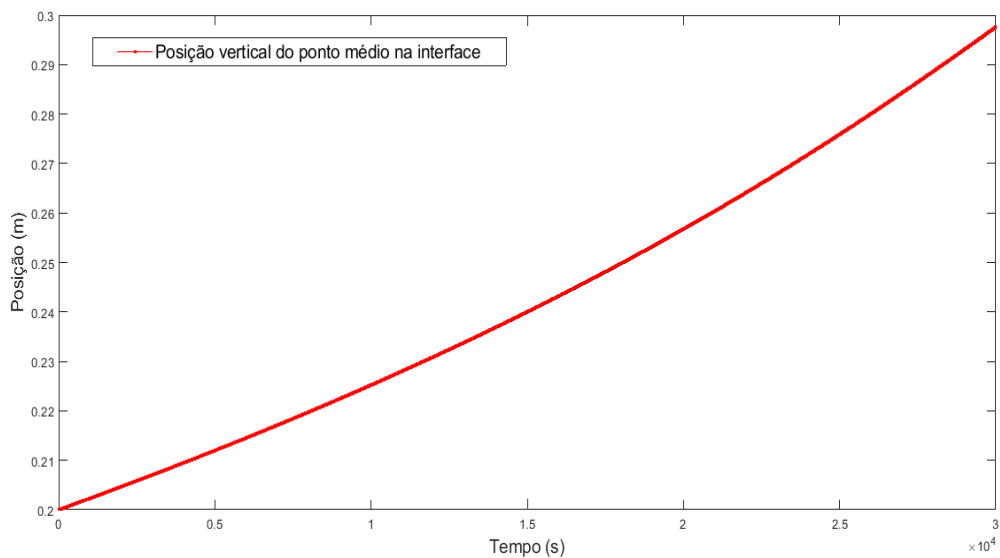


Figura 8.17: Variação da posição vertical do ponto médio na interface através do simulador bifásico com vazão subcrítica atingida no valor de $Q = -7,241 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ - cone de água. MEC-Iso.

Para o mesmo tempo de simulação ($t = 30000 \text{ s}$), através do Método de Elementos de Contorno convencional foi encontrada a vazão subcrítica no valor de $Q = -4,093 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, ou seja, a vazão logo anterior à vazão supercrítica do problema.

A partir das Figuras 8.17 e 8.18, pode-se observar que para o MEC convencional o cume do cone de água apresenta uma convergência mais rápida ao poço do que o MEC-Iso, mesmo apresentando uma vazão subcrítica inferior. Os resultados são dispostos em figuras distintas, uma vez que as vazões subcríticas encontradas para cada formulação apresentaram valores diferentes.

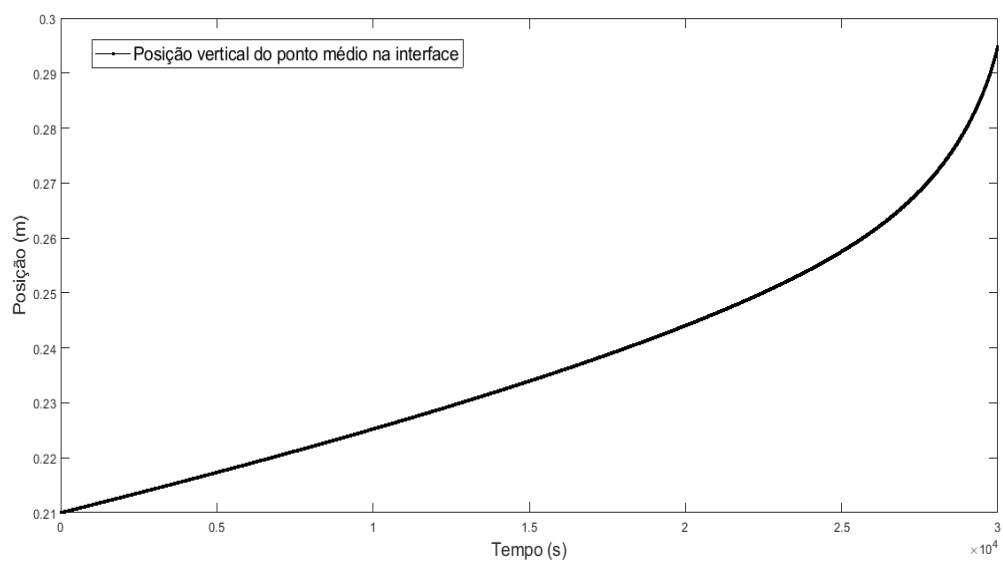


Figura 8.18: Variação da posição vertical do ponto médio na interface através do simulador bifásico com vazão subcrítica no valor de $Q = -4,093 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ - cone de água. MEC convencional.

Capítulo 9

Conclusões

Uma contribuição importante deste trabalho foi o desenvolvimento de uma formulação isogeométrica do Método de Elementos de Contorno para problemas axissimétricos, onde não foi encontrada na literatura nenhuma formulação desse tipo aplicado ao MEC-Iso. A solução fundamental axissimétrica encontrada na literatura nas implementações do MEC padrão, é obtida através da integração da solução fundamental 3D em torno do eixo de simetria axial, sendo esta, utilizada na formulação isogeométrica apresentada neste trabalho. As soluções fundamentais são escritas em função de integrais elípticas e o tratamento das singularidades nas matrizes de influência foi realizado através da Transformada de Telles. A formulação axissimétrica foi validada através da modelagem de problemas presentes na literatura que apresentam soluções analíticas. Houve uma boa concordância entre as soluções analíticas e as soluções do MEC-Iso.

As principais características e configurações do simulador de reservatório foram obtidas com sucesso, a fim de estudar numericamente os fenômenos dos cones de água e de gás para a determinação da vazão crítica em protótipos de poços de petróleo horizontal e vertical, além da análise de aquíferos. Foi realizada a discretização para o modelo de escoamento potencial monofásico (mono-região) e bifásico (sub-regiões), na qual foi desenvolvida através de formulações do Método de Elementos de Contorno Isogeométrico com aplicação em problemas axissimétricos.

A união das funções de forma do tipo NURBS na Equação Integral de Contorno discretizada junto às soluções fundamentais axissimétricas, tornou-se uma nova ferramenta utilizada para a simulação de problemas axissimétricos como do tipo: cone de gás e água em reservatórios de petróleo; análise de breve rebaixamento de poços em problemas de aquífero (reservatório de água). Os resultados para o simulador de reservatórios foram comparados com a literatura e apresentaram uma boa concordância entre os casos estudados: célula de Hele-Shaw (reservatório de petróleo) e poço de Hall (reservatório de água). O maior erro da solução do MEC-Iso em relação à solução analítica, foi na aproximação do deslocamento do ponto médio da interface óleo-gás ou óleo-água. A continuidade das derivadas neste caso, não permite a modelagem de quinas. Como estas quinas estão presentes na solução analítica, a aproximação da solução apresentou erros da ordem de 8%. Uma proposta para melhorar a concordância com resultados analíticos, é o enriquecimento das NURBS com funções que permitem descontinuidade. Porém, este enriquecimento ficou fora do

escopo deste trabalho.

O trabalho pode comprovar que o MEC-Iso com aplicação em problemas axissimétricos é uma nova ferramenta competitiva não só para com o MEC-convencional, como também em relação ao MDF, MVF e ao MEF. O método evidenciou a eficácia no tratamento de problemas de escoamento multifásico em meios porosos simplificados, ou seja, homogêneo, incompressível e isotrópico, onde a viscosidade dinâmica dos fluidos que saturam a rocha são consideradas como sendo constantes. Além dos problemas de poços concentrado e distribuído e problemas de condução de calor, quando não existem fronteiras móveis envolvidas. Fica fundamentado na literatura que a formulação isogeométrica e axissimétrica aliada ao MEC é uma alternativa para o aumento da precisão dos algoritmos implementados.

9.1 Trabalhos Futuros

Os próximos passos deste trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de simuladores que permitam o estudo dos fenômenos dos cones de água e de gás, utilizando a técnica das sub-regiões através da formulação 3D, da implementação de aceleradores de compilação do tipo ACA, bem como do enriquecimento das NURBS.

Os trabalhos futuros se darão, portanto, através de:

1. Implementação de aceleradores de compilação do tipo ACA no código.
2. Desenvolvimento da formulação 3D.
3. Enriquecimento das NURBS por funções que permitem introduzir descontinuidades de derivadas. Este tipo de abordagem tem sido comum na literatura e é chamado de Método dos Elementos de Contorno Enriquecido ou Método dos Elementos de Contorno Estendidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AHMED, T. H. *Reservoir Engineering Handbook*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2010. 4 ed.
- [2] ARCHER, J. *Computing flow and pressure transients in heterogeneous media using boundary element methods*. Tese (Doutorado) - Stanford University, 2000.
- [3] AZAR, J. J.; SAMUEL, G. R. *Drilling engineering*. [S.l.]: PennWell, 2007. 1 ed.
- [4] BAGHERI, A.; MIRNEZAMI, S. J.; MALEKI, A. Inaction of Society on the Drawdown of Groundwater Resources: A Case Study of Rafsanjan Plain in Iran. *Water Alternatives*, v. 11, n. 3, p. 725-748, 2019.
- [5] BAKR, A. A. *The boundary integral equation method in axisymmetric stress analysis problems*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1986.
- [6] BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor-couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 9, p. 3402-3414, 2010.
- [7] BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 3-37, 2008.
- [8] BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. [S.l.]: American Elsevier, 1972.
- [9] BEAR, J.; DAGAN, G. Some exact solutions of interface problems by means of the hodograph method. *Journal of Geophysical Research*, v. 69, p. 1563-1572, 1964.
- [10] BEER, G.; SMITH, I.; DUENSER, C. *The Boundary Element Method with Programming For Engineers and Scientists*. [S.l.]: Springer, 2008.
- [11] BECKER, A. A. *The boundary element method in engineering: a complete course*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 1992.
- [12] BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 37, n. 2, p. 229-256, 1994.
- [13] BLAKE, J. R.; KUCERA, A. Coning in oil reservoirs. *Mathematical Sciences*, v. 13, p. 36-47, 1988.

- [14] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary elements - an introductory course*. [S.l.]: WIT Press, 1992. 2 ed.
- [15] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary elements techniques - theory and applications in engineering*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984. 1 ed.
- [16] BRUCH, E. K. *The boundary element method for groundwater flow*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1991. 1 ed.
- [17] CABRAL; WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. A bem formulation using b-splines: I-uniform blending functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 136-144, 1990.
- [18] CABRAL; WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. A bem formulation using b-splines: II-multiple knots and non-uniform blending functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 8, p. 51-55, 1991.
- [19] CALHOUN, J. J. C. *Fundamentals of reservoir engineering*. [S.l.]: University of Oklahoma Press, 1953. 2 ed.
- [20] CAMPOS, L. S. *Método dos elementos de contorno isogeométrico rápido*. Tese (Doutorado) - Universidade de Brasília, 2016.
- [21] CASTAÑO, G; JULIETH, L. *Avaliação do aspecto logístico na seleção de um sistema marítimo de produção de petróleo*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Instituto de Geociências, Campinas, SP, 2017.
- [22] CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2006.
- [23] COLLIER, N.; PARDO, D.; DALCIN, L.; PASZYNSKI, M.; CALO, V. M. The cost of continuity: a study of the performance of isogeometric finite elements using direct solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 213, p. 353-361, 2012.
- [24] COOLEY, R. Some new procedures for numerical solution of variably saturated flow problems. *Water Resources Research*, v. 19, p. 1271-1285, 1983.
- [25] DARCY, H. *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*. [S.l.]: Dalmont, 1856. 1 ed.
- [26] DIAS JR, A. B. *Análise numérica de bombeamento em reservatório de água*. Projeto de Graduação - Universidade de Brasília, 2012.
- [27] FARIN, G. E. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Code*. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1996.
- [28] FILHO, J. O. A. L. *Aplicação de Controle Não-Linear para Veículos Marítimos e Produção de Petróleo horizontais*. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, 2014.

- [29] FISCHER, P.; KLASSEN, M.; MERGHEIM, J.; STEINMANN, P.; MULLER, R. Isogeometric analysis of 2d gradient elasticity. *Computational Mechanics*, Springer, v. 47, n. 3, p. 325-334, 2011.
- [30] FORTALEZA, G. S. V.; FILHO, J. O. A. L.; GONTIJO, G. S. V.; ALBUQUERQUE, E. L.; SIMÕES, R. D. P.; SOARES, M. M.; MIRANDA, M. E. R.; ABADE, G. C. Analytical, numerical and experimental study of gas coning on horizontal wells. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 41, p. 141-157, 2019.
- [31] FOSTER, T.; BROZOVIC, N.; BUTLER, A. P. Effects of initial aquifer conditions on economic benefits from groundwater conservation. *Water Resources Research*, v. 53, p. 744-762, 2017.
- [32] GÓMEZ, H.; CALO, V. M.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of the cahn-hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 49, p. 4333-4352, 2008.
- [33] GONTIJO, G. S. V. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais*. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, 2015.
- [34] HALL, H. An investigation of steady flow toward a gravity well. *La Houille Blanche*, v. 10, p. 8-35, 1955.
- [35] HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135-4195, 2005.
- [36] JACKSON, M. D.; GOMES, J. L.; MOSTAGHIMI, P.; PERCIVAL, J. R.; TOLLIT, B. S.; PAVLIDIS, D.; PAIN, C. C.; EL-SHEIKH, A. H.; MUGGERIDGE, A. H.; BLUNT, M. J. Reservoir modeling for flow simulation using surfaces, adaptive unstructured meshes and control-volume-finite-element methods. *Reservoir Simulation Symposium*, The Woodlands, Texas, USA, 2013.
- [37] JOSHI, S. D. *Horizontal well technology*. [S.l.]: PennWell, 1991. 1 ed.
- [38] KATSIKADELIS, J. T. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists - Theory and Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2016. 2 ed.
- [39] KIKANI, J. *Application of boundary element method to streamline generation and pressure transient testing*. Tese (Doutorado) - Stanford University, 1989.
- [40] KIKUCHI, M. M. *Otimização de parâmetros de produção para minimizar os efeitos do cone de água*. Tese (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [41] KIM, H.-J.; YOUN, S.-K. Spline-based meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 92, n. 9, p. 802-834, 2012.

- [42] LENNON, G. P. Simulation of two-fluid response in vicinity of recovery wells. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 111, p. 1156-1166, 1985.
- [43] LI, K.; QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. *Computer-Aided Design*, Elsevier, v. 43, n. 11, p. 1427-1437, 2011.
- [44] LIGGETT, J. A.; LIU, P. L.-F. Unsteady free surface flow through a zoned dam using boundary integration. *Symposium on Application of Computer Method*, p. 23-26, 1977.
- [45] LIGGETT, J. A.; LIU, P. L.-F. Unsteady flow in confined aquifers - a comparison of two boundary integral methods. *Water Resources Research*, v. 55, n. 4, 1979.
- [46] LIGGETT, J. A.; LIU, P. L.-F. *The boundary integral equation method for porous media flow*. [S.l.]: George Allen and Unwin, 1983. 1 ed.
- [47] LIU, P. L.-F.; CHENG, A. H.-D.; LIGGETT, J. A.; LEE, J. H. Boundary integral equation solutions to moving interface between two fluids in porous media. *Water Resources Research*, v. 17, n. 5, p. 1445-1452, 1981.
- [48] LIU, P. L.-F.; ZHAO, G. Case study of using boundary integration technique in reservoirs modeling of single- and two-phase immiscible fluid flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 106, p. 9-17, 2013.
- [49] LOUGH, M. F.; LEE, S. H.; KAMATH, J. Modeling of fractured reservoirs using the boundary element method. *Transactions on Modelling and Simulation*, v. 9, 1995.
- [50] LOUGH, M. F.; LEE, S. H.; KAMATH, J. An efficient boundary integral formulation for flow through fractured porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 143, p. 464-483, 1998.
- [51] LUCAS, S. K.; BLAKE, J. R.; KUCERA, A. A boundary-integral method applied to water coning in oil reservoirs. *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 32, p. 261-283, 1991.
- [52] MACDONALD, T. R.; KITANIDIS, P. K. Modeling the free surface of an unconfined aquifer near a recirculation well. *Ground Water*, v. 31, p. 774-780, 1993.
- [53] MASUD, A.; KANNAN, R. B-splines and nurbs based finite element methods for kohn-sham equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 241, p. 112-127, 2012.
- [54] MEDINA, D. E. *Determination of flow in fractured rock by the boundary integral equation method*. Tese (Mestrado) - Cornell University, 1987.
- [55] MEYER, H. I.; GARDER, A. Mechanics of two immiscible fluids in porous media. *Journal of Applied Physics*, v. 25, p. 1400-1406, 195.
- [56] MUSKAT, M.; WYCKOFF, R. B. An approximate theory of water coning in oil production. *Transactions of the AIME*, v. 114, p. 144-163, 1935.

- [57] NASCIMENTO, L. G.; GONTIJO, G. S. V.; ALBUQUERQUE, E. L.; CAMPOS, L. S.; TREVELYAN, J.; FORTALEZA, G. S. V. A well simulator for homogeneous reservoirs based on formulations of the isogeometric boundary element method. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, Springer, v. 43, n. 206, 2021.
- [58] NIELSEN, P. N.; GERSBORG, A. R.; GRAVESEN, J.; PEDERSEN, N. L. Discretizations in isogeometric analysis of navier-stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 200, n. 45, p. 3242-3253, 2011.
- [59] PEIGL, L.; TILLER, W. *The NURBS book*. [S.l.]: Berlin, Springer-Verlag, 1996.
- [60] RAFIEZADEH, K.; ATAIE-ASHTIANI, B. Transient free-surface seepage in three-dimensional general anisotropic media by BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 46, p. 51-66, 2014.
- [61] RAM, S.; CHAUHAN, H.S. Drainage of sloping lands with constant replenishment. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, v. 113, p. 213-223, 1987.
- [62] RASMUSSEN, T. C.; YEH, T. C. J.; EVANS, D. D. Effect of variable fracture permeability/matrix permeability ratios on three-dimensional fractured rock hydraulic conductivity. *DOE/AECL Conference*, p. 337-358, 1987.
- [63] ROGERS, D. F. *An introduction to NURBS: with historical perspective*. [S.l.]: Elsevier, 2000.
- [64] ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. Engenharia de reservatórios de petróleo. [S.l.]: Interciência, 2006. 1 ed.
- [65] SATO, K. *Accelerated perturbation boundary element method for flow problems in heterogeneous reservoirs*. Tese (Doutorado) - Stanford University, 1992.
- [66] SELLEY, R. C.; SONNENBERG, S. A. *Elements of petroleum geology*. [S.l.]: Academic Press, 2015. 3 ed.
- [67] SENA, M. V. H. *Análise bidimensional isogeométrica do método dos elementos de contorno*. Projeto de Graduação - Universidade de Brasília, 2017.
- [68] SHAPIRO, A. M.; ANDERSSON, J. Steady state fluid response in fractured rock: a boundary element solution for a coupled, discrete fracture continuum model. *Water Resources Research*, v. 19, n. 4, p. 959-969, 1983.
- [69] SHAPIRO, A. M.; ANDERSSON, J. Simulation of steady-state flow in three-dimensional fracture networks using the boundary-element method. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 106-110, 1985.
- [70] SHAW, A.; ROY, D. Nurbs-based parametric mesh-free methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 17, p. 1541-1567, 2008.

- [71] SIMPSON, R. N.; BORDAS, S. P. A.; TREVELYAN, J.; RABCZUK, T. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 209, p. 87-100, 2012.
- [72] SIMPSON, R. N.; BORDAS, S. P. A.; LIAN, H.; TREVELYAN, J. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2d implementation aspects. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 118, p. 2-12, 2013.
- [73] TAYLOR, G.; LUTHIN, J. Computer methods for transient analysis of water-table aquifers. *Water Resources Research*, v. 5, p. 144-152, 1969.
- [74] TEIMOORI, A.; CHEN, Z.; RAHMAN, S. S.; TRAN, T. Effective permeability calculation using boundary element method in naturally fractured reservoirs. *Petroleum Science and Technology*, v. 23, n. 5-6, p. 693-709, 2005.
- [75] TEIXEIRA, W.; FAIRCHILD, T. R.; TOLEDO, M. C. M.; TAIOLI, F. Decifrando a Terra. [S.l: s.n.], 2009.
- [76] TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n. 5, p. 959-973, 1987.
- [77] VERHOOSSEL, C. V.; SCOTT, M. A.; HUGHES, T. J. R.; BORST, R. An isogeometric analysis approach to gradient damage models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 86, n. 1, p. 115-134, 2011.
- [78] WANG, Y.; BENSON, D. Multi-patch nonsingular isogeometric boundary element analysis in 3d. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 293, p. 71-91, 2015.
- [79] WANG, D.; ZHANG, H. A boundary element method applied to pressure transient analysis of geometrically complex gas reservoirs. *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*, 2009.
- [80] WANG, D.; ZHANG, H. A consistently coupled isogeometric-meshfree method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 268, p. 843-870, 2014.
- [81] ZHANG, H.; BARRAY, D. A.; HOCKING, G. C. Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. *Advanced in Water Resources*, v. 6, p. 623-632, 1999.
- [82] ZHANG, H.; HOCKING, G. C. Withdrawal of layered fluid through a line sink in a porous medium. *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 38, p. 240-254, 1996.
- [83] ZHANG, H.; HOCKING, G. C. Flow in an oil reservoir of finite depth caused by a point sink above an oil-water interface. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 32, p. 365-376, 1997.