



**ANÁLISE DINÂMICA DE CABOS DE PONTES
ESTAIADAS CONSIDERANDO ALEATORIEDADE
NA CONDIÇÃO DE CONTORNO E NA
EXCITAÇÃO**

Vinícius Mendes de Sousa

Dissertação de Mestrado
Integridade de Materiais da Engenharia

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Faculdade do Gama / Faculdade de Tecnologia

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA

**ANÁLISE DINÂMICA DE CABOS DE PONTES
ESTAIADAS CONSIDERANDO ALEATORIEDADE NA
CONDIÇÃO DE CONTORNO E NA EXCITAÇÃO**

Vinícius Mendes de Sousa

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra.

Coorientador: Maciej Dutkiewicz, Dr.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: FGA.DM – 091A/2020


BRASÍLIA/DF, 01 de fevereiro de 2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA
ENGENHARIA

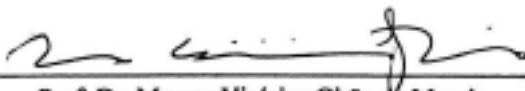
**ANÁLISE DINÂMICA DE CABOS DE PONTES
ESTAIADAS CONSIDERANDO ALEATORIEDADE NA
CONDIÇÃO DE CONTORNO E NA EXCITAÇÃO**

VINÍCIUS MENDES DE SOUSA

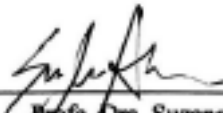
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.



Prof. Dra. Marjorie Rodrigues Machado
Orientadora



Prof. Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes
(Membro Interno)



Prof. Dra. Suzana Moreira Ávila
(Membro Externo)

Brasília / DF, 01 de fevereiro de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

SOUSA, V. M.

Análise dinâmica de cabos de pontes estaiadas considerando aleatoriedade na condição de contorno e na excitação. [Distrito Federal] 2021.

xix, 92p. (FGA/UnB, Mestre, Integridade Estrutural e Materiais, 2021.

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade do Gama / Faculdade de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia

Palavras-chave:

1. Análise dinâmica

2. Método do elemento espectral

3. Quantificação de Incertezas

4. Pontes Estaiadas

I. FGA/UnB

II. Mestre

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Sousa, V. M. (2021). Análise dinâmica de cabos de pontes estaiadas considerando aleatoriedade na condição de contorno e na excitação. Dissertação de Mestrado, Publicação FGA. DM – 091A/2020, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 2021, 92p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Vinícius Mendes de Sousa

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: ANÁLISE DINÂMICA DE CABOS DE PONTES ESTAIADAS CONSIDERANDO ALEATORIEDADE NA CONDIÇÃO DE CONTOURNO E NA EXCITAÇÃO.

GRAU / ANO: MESTRE / 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Vinícius Mendes de Sousa

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me guiou durante os períodos difíceis e me deu forças para seguir firme durante toda caminhada.

A minha mãe Leide Mendes de Sousa por ser exemplo de pessoa e mostrar sempre confiança em minhas batalhas.

A todos os docentes que ao longo desses dois anos passaram conhecimento suficiente para chegarmos até aqui, um agradecimento especial a minha orientadora Marcela Rodrigues Machado que me ajudou, orientando e colaborando para um melhor desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao meu amigo e irmão de coração Evans Gama de Oliveira Mendes, por sempre estar ao meu lado, torcendo pelo meu sucesso e incentivando a alcançar sonhos maiores.

Por fim, agradeço a minha noiva Tanise de Lima Cezário, por saber compreender os momentos de ausência em função deste trabalho, e mesmo assim, sempre dando apoio e carinho. São nos pequenos gestos diários transmitindo segurança, conforto e tranquilidade que percebemos a importância dos nossos familiares.

Resumo

ANÁLISE DINÂMICA DE CABOS DE PONTES ESTAIADAS CONSIDERANDO ALEATORIEDADE NA CONDIÇÃO DE CONTORNO E NA EXCITAÇÃO

Autor: Vinícius Mendes de Sousa

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra.

Coorientador: Maciej Dutkiewicz, Dr.

Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia

Brasília, 01 de fevereiro de 2021.

Nos últimos anos, grandes estruturas como as pontes estaiadas têm chamado a atenção com seus projetos complexos, com estruturas cada vez mais esbeltas e leves, mas o que deve ser destacado são os fenômenos vibratórios, que afetam o seu comportamento estrutural, provocando variações nos valores das frequências, modos de vibração e nos coeficientes de amortecimento. Por este motivo, modelos numéricos vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de proporcionar respostas precisas para verificação da integridade da estrutural, da durabilidade e da confiabilidade. O MEE (Método do Elemento Espectral) é um método derivado da equação analítica da onda. O elemento de viga via MEE apresenta a solução exata em vibrações necessitando de poucos elementos para descrever o problema e exigindo um esforço computacional menor em comparação a outros métodos para a solução de problemas dinâmicos em média e alta frequências. Foram modelados os estais e o pilone com elementos de cabo e viga respectivamente. Excitações com cargas de vento e chuva foram aplicadas na análise da dinâmica da ponte estaiada. Levando em consideração que os modelos numéricos não apresentam uma exatidão em relação aos experimentais causando incertezas nos resultados, considerou-se a partir destas incertezas nas condições de contorno através da inclusão de variáveis aleatórias. O Método de Monte Carlo foi utilizado para geração das amostras utilizadas na análise estatística. Resultados numéricos considerando excitações por vento e chuva determinísticas e aleatórias são estimados no estais. Alterações significativas na resposta dinâmica dos estais são demonstrados após a inclusão da aleatoriedade nas molas de contorno, evidenciando a importância da inclusão desta informação no modelo numérico.

Palavras-Chaves: Ponte estaiada; Método do Elemento Espectral; Excitação Aleatória; Análise Dinâmica; Quantificação de Incertezas.

Abstract

Dynamic analysis of cable-stayed bridge cables considering randomness in boundary condition and excitation

Author: Vinícius Mendes de Sousa

Supervisor: Marcela Rodrigues Machado, Dra.

Co-supervisor: Maciej Dutkiewicz, Dr.

Master in Engineering Materials Integrity

Brasília, February 01, 2021.

In recent years, large structures such as cable-stayed bridges have attracted attention for their complex designs and the use of slim and light structures. Therefore, the vibratory phenomena affect their structural behavior, causing variations in the resonance frequencies, vibration mode shape and damping coefficients. For this reason, numerical models have been developed to provide precise statements to verify the structural integrity, durability and reliability. The Spectral Element Method (SEM) is a method derived from the analytical wave equation, leading to less computational effort. It requires a reduced number of mesh elements to solve dynamic problems in medium and high frequencies. The stays and the pylon were modelled with cable and beam elements, respectively. Excitations with wind and rain loads were applied in the analysis of the cable-stayed bridge dynamics. Considering that the numerical models do not present accuracy concerning the physical phenomena caused by uncertainties intrinsic in the real system, it was considered uncertainties in the model's boundary conditions. Hence, random variables were associated with the boundary condition model. The Monte Carlo Method was employed to generate the samples used in the statistical analysis. Numerical results considering deterministic and random wind and rain excitations are estimated. Significant changes in the stays' dynamic response are demonstrated after the inclusion of randomness in the boundary condition modelled by rotational springs, showing the importance of including this information in the analysis.

Key-words: Cable-stayed bridge; Spectral Element Method; Random Excitation; Dynamic Analysis; Quantification of Uncertainties.

Sumário

1 Introdução	17
1.1 Objetivos	18
1.2 Metodologia	19
1.3 Organização do trabalho	19
2 Revisão Bibliográfica	20
2.1 Pontes estaiadas	20
2.1.1 Componentes estruturais	21
2.1.1.1 Torre (Pilone)	21
2.1.1.2 Tabuleiro	22
2.1.1.3 Estais	23
2.3 Análise dinâmica	25
2.4 Método do elemento espectral	27
2.5 Quantificação de incertezas, Variáveis aleatórias e Método de Monte Carlo	28
3 Formulação Teórica	30
3.1 Formulação geral da matriz espectral do elemento	30
3.1.1 Elemento espectral de viga	33
3.1.2 Elemento espectral de cabo	35
3.1.3 Elemento espectral de pórtico.....	36
3.2 Variáveis aleatórias	38
3.2.1 Função densidade de probabilidade	38
3.2.2 Valor esperado (esperança matemática, média).....	39
3.2.3 Variância e Desvio Padrão	39
3.3 Método de Monte Carlo	39
3.4 Excitação determinística e aleatória	40
3.4.1 Carga de vento	40
3.4.2 Carga de Chuva.....	45
3.4.3 Carga de Vento e Chuva.....	47
3.4.4 Densidade Espectral de Potência	48
3.4.5 Autocorrelação e Correlação Cruzada.....	49
4 Resultados	51
4.1 Metodologia	51
4.2 Caso de aplicação	53
4.2.1 Análise dinâmica da ponte.....	55
4.2.2 Excitações por cargas pontuais de vento e chuva	59
4.2.3 Excitações aleatórias	68

4.2.4	Análise dinâmica da ponte estaiada sob excitação aleatória	69
4.2.5	Análise dinâmica da ponte dada excitações de cargas determinísticas e inclusão de incerteza na condição de contorno	74
4.2.6	Análise dinâmica da ponte dada excitações por espectros aleatórios e inclusão de incerteza na condição de contorno	76
4.2.7	Análise estatística.....	78
5	Conclusão.....	84
5.1	Considerações Finais	84
5.2	Contribuições.....	85
	Referências Bibliográficas	86

Lista de Figura

Figura 2. 1: Diferentes configurações longitudinais de cabos.....	20
Figura 2. 2: Componentes Estruturais da Ponte Estaiada.....	21
Figura 2. 3: Formas usuais de pilone: (a) em coluna; (b) portal; (c) “A”; (d) diamante	22
Figura 2. 4: Esquema dos componentes de uma ancoragem regulável.....	23
Figura 3. 1: Elemento espectral de viga com dois nós com dois graus de liberdade e duas cargas nodais em cada nó.....	33
Figura 3. 2: Viga Euler-Bernoulli sujeito a uma carga axial.	35
Figura 3. 3: Modelo Elementar de Pórtico	36
Figura 3. 5: Mapa das isopletas do vento (V0 em m/s).....	42
Figura 4. 1: Estrutura Simplificada do Modelo.....	52
Figura 4. 2: FRF do Ponto Vermelho (3, 21).....	53
Figura 4. 3: Modelo da Estrutura Analisada	54
Figura 4. 4: Simetria entre as FRFs dos Pontos 5 e 8 (a) e 6 e 7 (b) com excitação de carga unitária no GDL nº 5.....	56
Figura 4. 5: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga unitária no GDL nº 5..	56
Figura 4. 6: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga unitária no GDL nº5.	57
Figura 4. 7: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga unitária no GDL nº 5	57
Figura 4. 8: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga unitária no GDL nº5.....	58
Figura 4. 9: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga unitária no GDL nº5.....	59
Figura 4. 10: FRF medida no ponto 5, dada excitação por vento, chuva e vento-chuva no GDL nº 5.....	60
Figura 4. 11: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de chuva no GDL nº5	60
Figura 4. 12: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de chuva no GDL nº 5	61
Figura 4. 13: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de chuva no GDL nº5.....	61
Figura 4. 14: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva no GDL nº5.....	62
Figura 4. 15: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva no GDL nº5.....	62
Figura 4. 17: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de vento no GDL nº5.....	63
Figura 4. 16: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de vento no GDL nº 5	63
Figura 4. 18: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de vento no nó nº 5.	64
Figura 4. 19: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento no nó nº 5	64
Figura 4. 20: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento no nó nº 5	65

Figura 4. 21: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de chuva e vento simultâneas no nó n° 5	66
Figura 4. 22: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de chuva e vento simultâneas no nó n° 5	66
Figura 4. 23: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de chuva e vento simultâneos no nó n°5	67
Figura 4. 24: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva e vento simultâneos no GDL n° 5	67
Figura 4. 25: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento e chuva simultâneos no GDL n° 5	68
Figura 4. 26: PSD da força de excitação para ruído branco (azul), Kaimal (roxa) e Kanai – Tajimi (vermelha).....	69
Figura 4. 27: PSDs no domínio do tempo de Ruído Branco, Kaimal e Kanai-Tajimi para a carga de vento.....	69
Figura 4. 28: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)	70
Figura 4. 29: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)	70
Figura 4. 30: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	71
Figura 4. 31: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	71
Figura 4. 32: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	72
Figura 4. 33: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)	72
Figura 4. 34: FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi (Linha Roxa) para carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	73
Figura 4. 35: FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi (Linha Roxa) para carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	73
Figura 4. 36: FRF com espectro de excitação de Kanai-Tajimi (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b).....	74
Figura 4. 37: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de chuva obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE	75
Figura 4. 38: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de vento obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE	75
Figura 4. 39: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de chuva-vento obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE.....	76
Figura 4. 40: As linhas roxas é a PSD de Ruído Branco com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.....	77
Figura 4. 41: As linhas roxas é a PSD de Kaimal com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.	77

Figura 4. 42: As linhas roxas é a PSD de Kanai-Tajimi com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.....	78
Figura 4. 43: PDF da mola de média 100 kgf e covariância 0.2	79
Figura 4. 44: PDF da FRF com mola aleatória.....	79
Figura 4. 45: Sinal da PDF em relação ao Espectro: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi.....	81
Figura 4. 46: Sinal da PDF em relação ao PSD sem considerar a aleatoriedade do contorno: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi	82
Figura 4. 47: Sinal da PDF em relação ao PSD considerando a aleatoriedade do contorno: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi	83

Lista de Tabelas

<i>Tabela 3. 1: Classes de relevo do terreno</i>	42
<i>Tabela 3. 2: Categorias de Rugosidade do Terreno</i>	43
<i>Tabela 3. 3: Classes de Edifícios em função de suas dimensões.</i>	43
<i>Tabela 3. 4: Fator S_2.....</i>	44
<i>Tabela 3. 5: Valores Mínimos do Fator Estatístico S_3.....</i>	44
<i>Tabela 4. 1: Comparação entre as 15 primeiros frequências naturais e as frequências de ressonâncias obtidas com o modelo de MEE e MEF.</i>	52
<i>Tabela 4. 2: Características do Vento.....</i>	54
<i>Tabela 4. 3: Características da Chuva.....</i>	55

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>ABNT</i>	<i>Associação Brasileira de Normas Técnicas</i>
<i>ALT</i>	<i>Altitude da Região</i>
<i>DFT</i>	<i>Discrete Fourier Transform</i>
<i>EFC</i>	<i>Estrada de Ferro Carajás</i>
<i>FRF</i>	<i>Função de Resposta em Frequência</i>
<i>HDPE</i>	<i>High Density Polyethylene</i>
<i>FOF</i>	<i>First Order Filder</i>
<i>LMF</i>	<i>Liga com Memória de Forma</i>
<i>MEE</i>	<i>Método dos Elementos Espectrais</i>
<i>MEF</i>	<i>Método dos Elementos Finitos</i>
<i>NBR</i>	<i>Norma Brasileira Regulamentadora</i>
<i>PDF</i>	<i>Função Densidade de probabilidade</i>
<i>PEAD</i>	<i>Polietileno de Alta Densidade</i>
<i>PSD</i>	<i>Densidade Espectral de Potência</i>
<i>TEMP</i>	<i>Temperatura</i>

Lista de Símbolos

Letras Latinas

A	Área
A_1, A_2, A_3, A_4	Constantes
c	Vetor de constantes
C_a	Coefficiente de Arrasto
d	Vetor de deslocamento nodal espectral
d	Vetor de graus de liberdade nodais
E	Módulo de Elasticidade [GPa]
f	Força Nodal
F_v	Força do Vento
F_c	Força da Chuva
h	Altura
$H(\omega)$	Função de Transferência
I	Momento de Inércia
I_t	Momento de Inércia torcional
k	Número de onda
K	Matriz de rigidez dinâmica espectral
K_g	Matriz de Rigidez Global
K_r	Coefficiente de Rugosidade
L	Comprimento
L_{1u}	Escala de Comprimento
\mathcal{L}	Operador estrutural diferencial no domínio do tempo
L_{GB}	Operador diferencial linear para as condições de contorno
L_{NB}	Operador diferencial linear para as condições de contorno naturais
n_h	Espectro da gota de chuva na horizontal
n_v	Espectro da gota de chuva na vertical
$\eta(d)$	Taxa de captura específica

$N(x, \omega)$	Função de forma
m	Massa
\hat{M}	Momento fletor
M	Operador Inercial
P_n	Vetor de forças externas
P_v	Pressão do Vento
P_c	Pressão da Chuva
P_{total}	Pressão devido ao Vento e Chuva
q	Pressão Dinâmica
r	Raio
$R_{xx}(\tau)$	Função de autocorrelação
$R_{xy}(\tau)$	Função de correlação cruzada
R_e	Número de Reynolds
R_h	Intensidade da Chuva no sentido horizontal
R_v	Intensidade da Chuva no sentido vertical
$S(\omega)$	Matriz de rigidez dinâmica
$S_{xx}(\omega)$	Densidade espectral da aceleração
T	Força axial de tração
t	Tempo
U_n	Deslocamento axial
u	Vetor de deslocamento axial
\hat{V}	Força cisalhante
\hat{v}	Deslocamento Transversal
v_0	Amplitude
V	Volume do fluxo da chuva
V_0	Velocidade básica do vento
V_k	Velocidade característica do vento
V_h	Velocidade de uma gota de chuva
V_p	Velocidade de Projeto
x, y, z	Coordenadas Espaciais

Letras Gregas

μ_{ar}	Viscosidade do ar
------------	-------------------

ρ	Densidade [Kg/m ³]
θ	Ângulo
σ	Desvio padrão
ω	Frequência Angular
ρ_a	Densidade do ar
ρ_v	Massa Específica do vento
ρ_c	Massa Específica da chuva
ρ_w	Densidade da água
γ	Razão da velocidade da chuva
α	Fator de Efetividade
ω	Frequência
ω_g	Frequência característica
ω_n	Frequência discreta
$\hat{\phi}$	Rotação da seção transversal
ξ_g	Coefficiente de amortecimento característico

1 Introdução

Os avanços tecnológicos e as constantes pesquisas em engenharia civil aprimoram as técnicas e a construção de estruturas (MOREIRA e LAIER, 2017). Dentre as estruturas existentes, as pontes, tem grande destaque e importância para a arquitetura e economia, cuja função é a integração de regiões, além de proporcionar um marco arquitetônico na paisagem urbana. Entre os projetos das pontes, podemos destacar as pontes suspensas por cabos, que é constituído por um tabuleiro, uma ou mais torres e os cabos de suporte. O comportamento estrutural depende de várias características, como configuração dos estais, rigidez da torre e do tabuleiro, conexões entre componentes e entre outras (COUTO *et al.* 2013).

As pontes estaiadas têm chamado a atenção devido a complexibilidade nos seus projetos, apresentando estruturas com maiores vãos e cada vez mais esbeltas e leves. Mas, quanto maior a esbeltez e a leveza, maior deve ser a atenção aos fenômenos vibratórios, que afetam o seu comportamento estrutural, provocando variações nos valores das frequências, nos modos de vibração e nos coeficientes de amortecimento. Por este motivo, modelos numéricos e avaliações através de técnicas de análise dinâmica vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de proporcionar respostas precisas para verificação do comportamento dinâmico (SANTOS, 2018). A partir disso, realizar a representação da estrutura é de suma importância para análise dinâmica, e o modelo numérico baseado no Método dos Elementos Espectrais (MEE) é muito eficaz em se tratando desse assunto. O MEE é aplicado na análise do comportamento dinâmico do elemento estudado através da função de resposta em frequência. A partir da FRF (função de resposta em frequência) podem ser extraídas as frequências de ressonância, os modos de vibrar e estimar o amortecimento.

Devido as qualidades apresentadas pelo MEE em pesquisas, os estudos foram desenvolvidos utilizando este método que será abordado neste trabalho. Segundo LEE (2004), a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral é consequência da resposta exata da propagação da onda no meio. Devido ao MEE apresentar uma matriz dinâmica exata, ele desenvolve uma resposta precisa com pouco esforço computacional e com um

excelente nível de acurácia.

Nessa perspectiva, a dissertação apresenta desde as premissas e considerações no desenvolvimento do modelo numérico de uma estrutura de uma ponte estaiada, onde as propriedades dinâmicas são extraídas diretamente da resposta em deformação. As forças serão assumidas como cargas pontuais unitárias, além das forças causadas pela pressão do vento e chuva, que serão implementadas de forma determinista e randômica.

Considerando que os modelos numéricos não apresentam uma exatidão em relação as análises experimentais porque o modelo numérico não prevê erros associados a ruídos nas medições, condições de contorno e variabilidade de parâmetros. Para tratar modelagem da condição de contorno dos estais, considerou-se incertezas paramétricas nas condições de contorno que foi modelado por molas torcionais. O Método de Monte Carlo foi utilizado para geração das amostras utilizadas na análise estatística, que permitirá alcançarmos resultados mais realistas em relação ao comportamento das cargas atuantes na ponte.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é utilizar o MEE para estimação da resposta dinâmica como a FRF (Função de resposta em frequência) e a densidade espectral e potência (PSD), bem como o efeito da aleatoriedade presente no contorno devido a conexão dos cabos na base. Dentro deste podemos salientar os objetivos específicos tais quais:

- Validar o MEE para uma estrutura de uma ponte estaiada;
- Estudar o comportamento do cabo excitado com força determinística e aleatória de forma concentrada com cargas unitária, de vento, chuva e vento e chuva simultâneas.
- Investigar o efeito de aleatoriedades presente na modelagem das condições de contorno dos cabos e através da análise estatística.

1.2 Metodologia

A metodologia desenvolvida na presente pesquisa compreende um breve referencial teórico da temática abordada e no desenvolvimento da modelagem numérica da estrutura de cabo baseado em MEE na plataforma MATLAB. Posteriormente as mesmas modelagens foram realizadas utilizando o Método dos elementos finitos (MEF) na plataforma MATLAB, com a intenção de validar os resultados obtidos com os modelos com MEE. Após a validação, foram implementados de forma pontual e distribuída, forças de vento, chuva, e ambos de forma simultânea. As análises foram feitas com cargas determinísticas e aleatórias com 3 espectros de densidade de potência diferentes, sendo eles, ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi. Levando em consideração que os modelos numéricos não apresentam uma exatidão, considerou-se incertezas nas condições de contorno através da inclusão de variáveis aleatórias. O Método de Monte Carlo foi utilizado para geração das amostras utilizadas na análise estatística, que permite alcançarmos resultados mais realista.

1.3 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. O **capítulo 1** consiste em uma introdução ao tema, abordando sobre a motivação que levaram a realização do trabalho, a metodologia, os objetivos e organização do texto. Em seguida, no **capítulo 2**, é realizada uma revisão bibliográfica abordando os principais trabalhos e os campos trabalhados na área do tema abordado. O **capítulo 3** é destinado a descrever as excitações aleatórias e os espectros de potência. A descrição dos materiais e métodos e os resultados obtidos são apresentados posteriormente no **capítulo 4**. E por fim, no **capítulo 5**, são apresentadas as conclusões.

2 Revisão Bibliográfica

Esta seção apresenta-se informações e conceitos embasadores para o desenvolvimento da pesquisa. A estrutura base das pontes estaiadas constitui de um tabuleiro suportado por cabos de aço retos e inclinados denominados de estais, os quais são fixados em torres. Além de apresentar os principais trabalhos sobre análise dinâmica de estruturas estaiadas, como pontes estaiadas e trabalhos com a utilizando o método do elemento espectral.

2.1 Pontes estaiadas

A parte estrutural de uma ponte estaiada é formada por uma ou mais vigas principais que se distribuem ao longo de seu comprimento e cabos inclinados e tensionados fixados em torres e no tabuleiro (FONSECA JUNIOR, 2018). A ponte estaiada tem ganhado visibilidade por causa da fácil construção e custo reduzido.

A configuração e disposição dos cabos da ponte estaiada classifica o tipo da ponte em mono, leque, harpa e semi-harpa, como ilustrado na Figura 2.1.

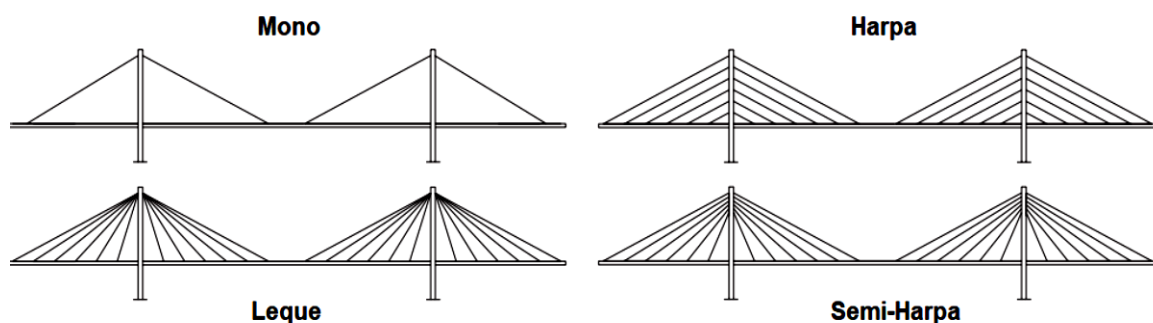


Figura 2. 1: Diferentes configurações longitudinais de cabos

Fonte: Adaptado de LIN e YODA (2017).

Pontes estaiadas com configuração em leque têm os cabos conectados paralelos ou cruzados no topo da torre. Este tipo de configuração é vantajoso em relação as outras, pois os estais são dispostos com uma inclinação maior, o que acarreta maior componente vertical da força, proporcionando menores esforços axiais no tabuleiro. A desvantagem

da ponte em leque é a tração no topo das torres devido a convergência da ancoragem dos estais requerendo um reforço maior (FONSECA JUNIOR, 2018). As pontes estaiadas com configuração em harpa têm os cabos são conectados paralelamente, de forma que a altura da fixação deles na torre seja proporcional à distância de suas posições no tabuleiro. Este tipo de configuração não possui vantagens estruturais sobre as pontes com configuração em leque, sendo estas a mais utilizadas devido a fatores estéticos.

Já as pontes estaiadas com configuração em semi-harpa são utilizadas com o objetivo de evitar a aglomeração de cabos no topo da torre. Proporcionando assim melhor acesso a estes em casos de inspeção em manutenção (GIMSING e GEORGAKIS, 2012).

2.1.1 Componentes estruturais

A estrutura de uma ponte estaiada é definida a partir de três componentes estruturais sendo: o pilone (torre), o tabuleiro e o sistema de cabos como mostrado na Figura 2.2.

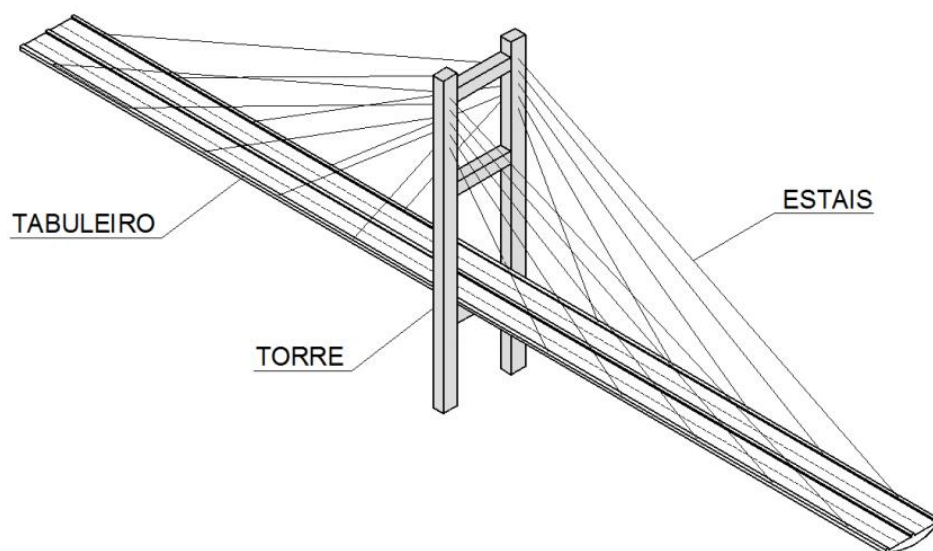


Figura 2. 2: Componentes Estruturais da Ponte Estaiada

Fonte: MAZARIM (2011).

2.1.1.1 Torre (Pilone)

A torre, também conhecida como pilone é responsável por transmitir as cargas resultantes das ancoragens dos estais e esforços do tabuleiro para as fundações. Dentre as diferentes formas geométricas que o pilone pode-se destacar as em formato de “A”, em forma de diamante (TOLEDO, 2014) e pilones isolados. Como exemplificado na Figura 2.3.

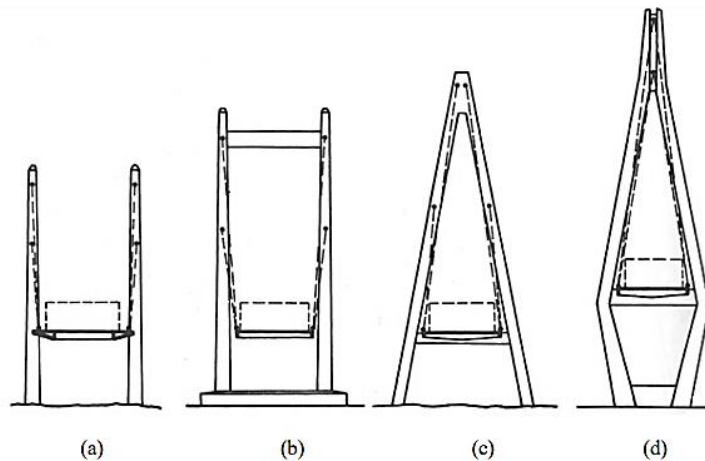


Figura 2. 3: Formas usuais de pilone: (a) em coluna; (b) portal; (c) “A”; (d) diamante

Fonte: WALTHER *et al.* 1999

SVENSSON (2011) afirma que os pilones são comumente construídos em concreto armado, capazes de absorver as cargas de compressão. Um pilone construído em aço seria vantajoso apenas quando se encontrasse sob condições desfavoráveis de fundação e precisasse ter uma altura bem elevada, recomendando-se o pilone em concreto armado.

Para que o comportamento do nosso elemento seja o mais próximo da realidade, e os cálculos confiáveis, considerar elementos adequados durante a idealização do modelo é de suma importância, como exemplo de estudo de modelagem numérica, temos CUNHA e CAETANO (2016) que desenvolveu um modelo numérico da Ponte Estaiada sobre o Rio Árabe, onde usou o elemento de viga para modelar a torre/pilone da ponte estaiada. Portanto, nessa pesquisa será utilizado o elemento de viga para análise da estrutura abordada.

2.1.1.2 Tabuleiro

O tabuleiro é responsável por absorver os esforços axiais de compressão resultantes das componentes horizontais das forças dos estais e, suportar as cargas móveis que percorrem pela ponte. O principal objetivo do tabuleiro é transferir as cargas permanentes e móveis para os pontos de ancoragem dos estais. A seção transversal do tabuleiro é construída somente em concreto armado ou misto (aço e concreto), sendo as lajes de concreto armado e as vigas em concreto ou aço.

Uma característica importante em relação a concepção da seção transversal do tabuleiro é a sua rigidez à torção (GIMSING e GEORGAKIS, 2012). Dependendo da

disposição dos estais, se estão em um plano único centrado no tabuleiro ou não, o tabuleiro necessitará de uma rigidez à torção elevada. CLAUDIO (2010) estudou as tipologias das pontes estaiadas com tabuleiro de concreto. CARVALHO (2017) simulou uma estrutura baseada na ponte estaiada Anita Garibaldi, comparando a distribuição dos estais, e analisando o comportamento do tabuleiro, o qual se mostrou análogo a uma viga contínua sobre apoios elásticos.

2.1.1.3 Estais

Os estais são ancorados na extremidade do pilone e no tabuleiro (TOLEDO, 2014). Os estais são responsáveis pela transferência das cargas do tabuleiro para o pilone. De acordo com a Norma Brasileira 7483 - Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido (2008), os estais são constituídos por cordoalhas especiais composta por 7 fios, sendo 6 fios com mesmo diâmetro, em uma forma helicoidal, com um passo uniforme, em torno de um fio central, cujo diâmetro é maior do que o dos demais, envolvida por cera de petróleo e recoberta por um tubo de HDPE (*High Density Polyethylene*), que é conhecido também como PEAD (Polietileno de Alta Densidade) (TOLEDO, 2014). A Figura 2.4 apresenta o detalhe de uma cordoalha.

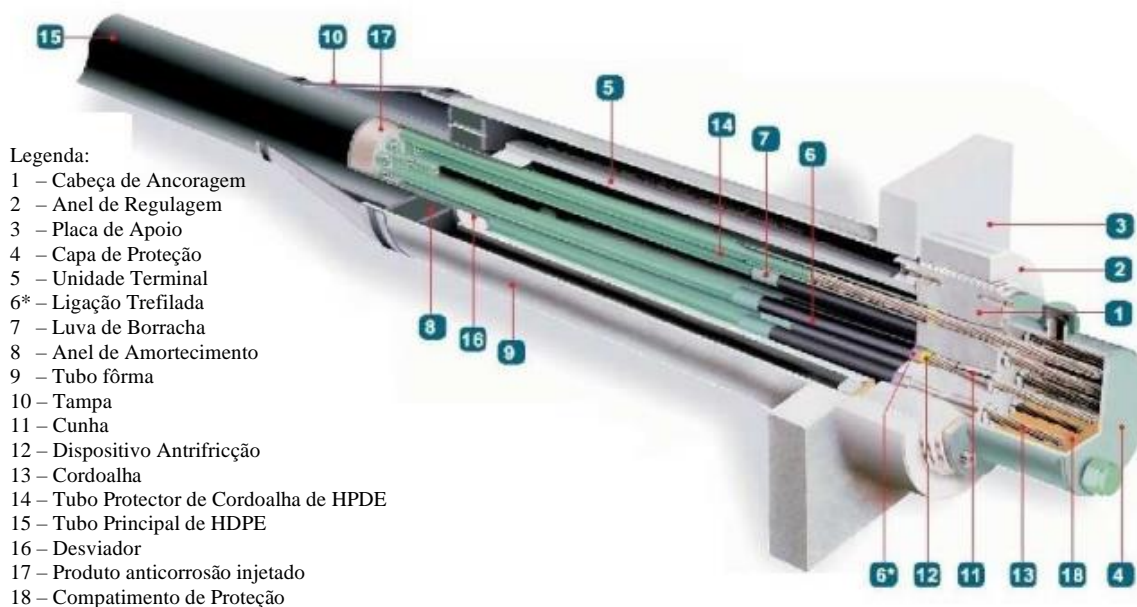


Figura 2. 4: Esquema dos componentes de uma ancoragem regulável

Fonte: adaptado de ALGA (2013)

Os tubos protetores das cordoalhas de HDPE que envolvem os estais devem dispor de mecanismos que amenizem as cargas aerodinâmicas. CAETANO (2007) apresenta de

forma específica os efeitos que regem os fenômenos causadores das vibrações em estais. Além de apresenta os métodos utilizados para diminuir ou anular esses efeitos, como a utilização de fios dispostos helicoidalmente ao longo do estai e a introdução de protuberâncias ou covas no tubo de HDPE.

As ancoragens de um estai, estão localizadas em suas extremidades, onde são responsáveis pela transferência de força do estai tensionado para os elementos estruturais que se encontram ancorados. Uma ancoragem regulável, ou ativa, permite que seja ajustado o comprimento do estai sem que ocorra movimento relativo das cordoalhas em relação à ancoragem (FIB, 2005). A ancoragem regulável também possibilita o tensionamento ou retensionamento do estai, onde através de um macaco hidráulico se ajusta a tensão das cordoalhas, chegando assim na força de projeto calculada do estai. Já a ancoragem fixa, ou passiva, não permite o ajuste do comprimento do estai e nem o retensionamento dos estais.

É essencial para o conhecimento do comportamento dinâmico dos estais, devido à flexibilidade e aos baixos coeficientes de amortecimento (VIEIRA, 2014). Os cabos são sensíveis às vibrações, o que pode comprometer a durabilidade e a confiabilidade estrutural. A dinâmica dos cabos intenta aos aspectos de fadiga nas ancoragens, causadas pelo uso das pontes (veículos) e ações naturais como o vento, além de analisar e determinar a carga de tração, elas são submetidas (VIEIRA, 2014).

As incertezas são intrínsecas em relação as propriedades geométricas e mecânicas das grandes estruturas, bem como nas montagens ou juntas estruturais. Na pesquisa de SOUSA *et al.* (2019) afirmam que a análise estocástica, considerando a incerteza na condição de contorno, mostra que para o cabo, um efeito significativo do mapeamento não-linear, distorcendo a resposta estatística, apresentando uma influência considerável na resposta estrutural. Isso mostra que representar corretamente o modelo de condição de contorno é uma informação essencial e crucial no controle de vibrações e na confiabilidade estrutural.

Será considerado o elemento de cabo que irá representar os estais nesta pesquisa assim como no trabalho de TOLEDO (2014) que realizou um estudo sobre o dimensionamento de vigas de rigidez de concreto de pontes estaiadas e CLAUDIO (2010) que estudou as tipologias das pontes estaiadas com tabuleiro de concreto, onde afirmam que os estais podem ser modelados como elementos de cabo.

2.3 Análise dinâmica

A análise dinâmica tem como objetivo identificar dos parâmetros modais, bem como o comportamento da estrutura quando submetida a forças externas, que podem ser oriundas de diferentes fontes, tais tráfego de pessoas e veículos, o peso próprio da estrutura, cargas procedentes de fenômenos naturais como vento e a chuva (FONSECA JUNIOR, 2018).

Pesquisas abordando análises de dinâmica estrutural em pontes estaiadas. WISLON e GRAVELLE (1991), onde os autores apresentaram uma descrição detalhada do desenvolvimento de uma classe de modelo de elementos finitos elásticos lineares para a análise dinâmica da ponte estaiada Quincy Bayview em Illinois. CUNHA (2011 *apud* INGLIS, 1934) abordou em sua pesquisa o efeito dinâmico em pontes ferroviárias, onde admitiu que a resposta dinâmica de uma viga bi-apoiada apresentava sempre a mesma resposta do seu primeiro modo de vibração. SAMPAIO *et al.* (2010) em sua pesquisa descreveu a análise modal experimental de uma ponte ferroviária da Estrada de Ferro Carajás (EFC). RIMOLA *et al.* (2017) desenvolveu uma análise para o estudo da resposta dinâmica e determinação da vida útil à fadiga de pontes rodoviárias mistas.

Com o desenvolvimento tecnológico e surgimento das ferramentas computacionais, as análises de vibrações em pontes passaram a ser desenvolvidas a partir de métodos. CUNHA (2011 *apud* FRÝBA, 1980) apresentou uma solução analítica para solução de problemas de vibrações em vigas submetidas a cargas em movimento. FUGANTI (2012 *apud* LIN e YANG, 2005) utilizou um carro para escanear as frequências de uma ponte. Concluíram que a frequência de vibração das pontes possui uma relação com a sua rigidez, onde, caso a frequência apresente redução, ocasionaria então a deterioração da rigidez, acusando assim, danos nos componentes estruturais da ponte. LIN e YANG (2005) apresentaram diversas técnicas com objetivo medir as frequências nas pontes, de acordo com sua fonte de vibração, forças de vento, carregamento de tráfego, vibração forçada, forças de impacto, entre outras.

CARVALHO (2008) analisou a perda de estabilidade estática e dinâmica em estruturas estaiadas, verificou-se que houve uma grande influência do tensionamento dos cabos, das imperfeições geométricas iniciais e na instabilidade global das torres estaiadas. FUGANTI (2012) analisou o comportamento dinâmico de uma ponte submetida a diferentes carregamentos móveis e com diferentes velocidades, comparando-os com a

análise estática, desenvolve-se dois modelos, utilizando o método dos elementos finitos, um modelo composto por elementos de barra, e outro composto por elementos de placa.

DIENG *et al.* (2013) realizou uma análise qualitativa e quantitativa da eficiência de amortecedores de Ni – Ti (Níquel – Titânio) para reduzir as amplitudes de vibração de cabos de pontes. SONG *et al.* (2016) abordou em sua pesquisa a resposta dinâmica de uma ponte estaiada excitada por uma sequência contínua de forças móveis idênticas e igualmente espaçadas. NAGUIB *et al.* (2014) abordou um estudo do efeito da ruptura de cabos em pontes estaiadas, onde realizou uma análise estática e dinâmica em uma ponte com cinco vãos com um único plano de cabos em forma de harpa.

SANTOS (2018) abordou uma atualização do modelo numérico de uma ponte estaiada, com base em dados experimentais, com o intuito de avaliar a integridade estrutural, durabilidade e confiabilidade de pontes estaiadas. FONSECA JUNIOR (2018) realizou uma análise dinâmica em um protótipo de pontes estaiada, em escala reduzida, com molas superelásticas de uma LMF (Liga com Memória de Forma) NiTi (Nitinol), utilizando ferramentas analíticas, numéricas e experimentais, onde verificou-se que as molas de LMF NiTi (Nitinol) apresentou um desempenho de dissipação de efeitos de vibração aplicados no protótipo, os modelos numéricos permitiram uma melhor previsão na resposta da estrutura.

ISOLDI *et al.* (2003) realizou uma análise numérica da dinâmica nos cabos altamente extensíveis, onde observou que a tração estática inicial no cabo é um fator importante, e que um tempo de ruptura maior possibilita uma melhor dissipação de energia ao longo do cabo. CARVALHO *et al.* (2016) apresentou uma metodologia para a análise dinâmica de cabos submetidos ao vento, considerando as não-linearidades geométricas e o amortecimento aerodinâmico, comprovando que através do amortecimento os resultados apresentaram redução de resposta do cabo.

Os trabalhos referenciados nessa seção utilizaram diferentes modelos numéricos na análise dinâmica dos cabos. Como proposta, este trabalho abordará um estudo do comportamento dos cabos de uma ponte estaiada excitados com força determinística e aleatória de forma concentrada, com cargas unitária, de vento, chuva e vento-chuva simultâneas via MEE, além de investigar as condições de contorno dos cabos conectados.

2.4 Método do elemento espectral

A análise espectral, também conhecida como análise de Fourier ou análise no domínio da frequência, teve sua primeira abordagem em 1822 por Joseph Fourier com a *Theorie analytique de la chaleur* (LEE, 2004). Nesta pesquisa Joseph Fourier demonstrou como analisar a condução de calor em sólidos a partir de uma série de funções de senos e cossenos. A pesquisa de Joseph Fourier com o uso de séries trouxe desconfiança acarretando a não aceitação do método. Com o decorrer dos anos diversos matemáticos como Dirichlet e Riemann realizaram pesquisas em busca da validação das séries de Fourier.

Uma das primeiras pesquisas que apresentou a derivação da matriz rigidez dinâmica para uma viga de Euler-Bernoulli foi realizada por KOLOUSEK (1973). Já o Método do Elemento Espectral foi abordado pela primeira vez por BESKOS e NARAYANAN (1978) onde formulou-se a matriz de rigidez dinâmica para uma viga de Euler-Bernoulli uniformes de dois nós em relação ao domínio da frequência aplicando a teoria (*Discrete Fourier Transform - DFT*). A partir dessa formulação foram realizadas diferentes abordagens com a aplicação do MEE, dando destaque para as formulações dos elementos barra, viga, eixo e placa.

Em se tratando de livros, temos três publicações abordando o MEE, o primeiro livro publicado por DOYLE (1997) intitulado *Wave Propagation in Structures*, que apresentou diversas abordagens em relação a propagação de onda com aplicação do MEE em elementos estruturais. O segundo livro foi publicado por LEE (2004), intitulado *Spectral Elements Method in Structural Dynamics*, onde aborda-se uma extensa pesquisa buscando novas aplicações utilizando o MEE, como em compósitos laminados, treliças periódicas e materiais inteligentes e controle de vibração ativa. O terceiro livro foi publicado por GOPALAKRISHNAN *et al.* (2005), intitulado *Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*, abordando o comportamento das ondas em materiais compósitos, meios não homogêneos.

Na literatura pode-se encontrar pesquisas abordando análises de dinâmica estrutural e propagação de ondas, adotando como solução a aplicação da formulação do MEE. LEE (2004) sugeriu o uso do MEE em análises de vibração em placas finas sujeitas a uma força de ponto móvel. MACHADO *et al.* (2020) desenvolveu um elemento espectral para o cabo condutor de transmissão, incluindo o efeito de amortecimento

histerético e aerodinâmico usando o MEE. A eficiência do MEE para calcular a resposta dinâmica do cabo foi explorada em DUTKIEWICZ e MACHADO (2019a, 2019b, 2019c, 2019d). Os resultados do MEE mostraram uma precisão muito boa em comparação com as medidas experimentais. SOUSA *et al.* (2019) utilizaram o MEE para modelar os estais de uma ponte estaiada simplificada considerando a condição de contorno por molas. SOARES (2020) abordou em sua pesquisa a modelagem dinâmica de Linhas de Transmissão aérea utilizando o MEE.

Os trabalhos referenciados nessa seção utilizaram o MEE para diferentes aplicações em suas pesquisas. Como proposta, este trabalho abordará a aplicação do MEE em estruturas de pontes estaiadas, para estimação das respostas dinâmicas (FRFs e PSDs) além do efeito da aleatoriedade presente no contorno devido a conexão dos cabos no tabuleiro.

2.5 Quantificação de incertezas, Variáveis aleatórias e Método de Monte Carlo

Nos últimos anos surgiram diferentes ferramentas de simulação computacional, objetivando o conhecimento da concepção de projetos e análise de modelos de estruturas complexas, como as pontes estaiadas. Entretanto, KLIR (2005) afirma que essas ferramentas de simulação computacional, apresentam uma discordância significativa nos resultados quando comparado aos experimentais, pelo nível de incertezas associados aos testes.

Análise de incertezas é de suma importância, pois proporcionam maior confiabilidade ao modelo numérico (SANTOS, 2018). Uma forma a qual podemos representar as incertezas é através de variáveis aleatórias. Variável aleatória é um valor numérico, cujo valor que depende do resultado de um experimento ou circunstância aleatória (PORTNOI, 2010).

Existem métodos probabilísticos que se baseiam na utilização de variáveis aleatórias com o objetivo de solucionar problemas, isto é, proporciona a geração de muitas amostras randômicas de cada parâmetro incerto que foi modelado, um deste métodos é conhecido como Método de Monte Carlo. O Método de Monte Carlo é um método probabilístico, que tem como objetivo a geração de um valor com base em simulações realizadas com elevado número de repetições, baseados em amostragem randômica

usados em aproximação, evidenciando reduzir o erro e o custo de computação (SAMPAIO, 2012). O método de Monte Carlo apresenta competências em conseguir atingir aproximações numéricas para problemas com um certo grau de complexidade (SAMPAIO, 2012).

PALIGA (2008) apresentou em sua pesquisa um modelo para análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através da utilização conjunta do método de simulação de Monte Carlo e do método dos Elementos Finitos, onde os resultados apresentaram um bom nível de segurança no projeto de vigas de concreto armado. TREVISAN (2015) avaliou em sua pesquisa a incerteza de medição em curvas de fadiga S-N através do método de Monte Carlo. O desenvolvimento do cálculo das incertezas de medição foi realizado para três níveis de rugosidade, com o intuito de verificar a influência dessas no valor da tensão corrigida. Por fim, foi o método de Monte Carlo foi comparado com o método Kragten, optando-se pelo método de Monte Carlo por não exigir linearidade do modelo. VILLELA (2017) em sua pesquisa realizou um procedimento de avaliação de incerteza da prevalência do incômodo causado por ruído, utilizando o método de Monte Carlo e considerou em seu modelo matemático a incerteza dos parâmetros da relação funcional. Verificou que as incertezas dos parâmetros da relação funcional não devem ser desconsideradas no modelo, além da ferramenta se apresentar eficaz para orientar quais fontes de incerteza devem ser reduzidas.

MONTEIRO (2020) mostrou em seu estudo de obras variabilidade de custos em orçamentos de obras residenciais utilizando o método de Monte Carlos, onde levou em consideração as incertezas e os riscos. O método de Monte Carlo é boa alternativa no auxílio de tomada de decisões financeiras da obra.

Os trabalhos referenciados nessa seção utilizaram o método de Monte Carlos para diferentes aplicações em suas pesquisas. Como proposta, este trabalho abordará a aplicação do método de Monte Carlo para geração das amostras utilizadas na análise estatística.

3 Formulação Teórica

O presente capítulo tem o objetivo de apresentar o MEE para estruturas de viga, cabo e pórtico. Em seguida é apresentado a teoria sobre o Método de Monte Carlo e os efeitos das cargas de vento e chuva em estruturas dinâmicas e uma breve abordagem acerca de espectros de potência.

3.1 Formulação geral da matriz espectral do elemento

DOYLE (1997) e LEE (2004) apresentam a formulação geral do elemento espectral, utilizando da aplicação dos conceitos de equilíbrio e a compatibilidade com a solução exata da equação governante do movimento, que estão relacionados com as forças e deslocamentos nodais. A apresentação das equações governamentais do movimento de uma estrutura é dada por:

$$\mathcal{L}u(x, t) + M\ddot{u}(x, t) = p(x, t) \quad (3.1)$$

sendo \mathcal{L} o operador estrutural diferencial linear no domínio do tempo t e coordenada espacial x , e M o operador inercial. Os pontos (\cdot) na equação representam as derivadas em relação ao tempo, $u(x, t)$ e $p(x, t)$ são respectivamente os vetores dos campos de deslocamento e de forças externas. Considerando que as forças externas podem ser representadas na forma espectral pela equação

$$p(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.2)$$

onde $P_n(x, \omega_n)$ representam os componentes espectrais das forças externas $p(x, t)$. A solução da Equação (3.1) é representada pela Equação (3.3):

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.3)$$

sendo $U_n(x, \omega_n)$ a representação dos componentes espectrais dos campos de deslocamentos $u(x, t)$. Substituindo as Equações (3.3) e (3.2) na Equação (3.1) e

considerando que os componentes espectrais $U_n(x, \omega_n)$ e $P_n(x, \omega_n)$ atendem a Equação (3.1) em cada frequência discreta ω_n , resultando na seguinte equação:

$$\mathcal{L}U_n(x, \omega_n) - \omega_n^2 M U_n(x, \omega_n) = P_n(x, \omega_n) \quad (3.4)$$

As funções de forma dependentes da frequência, chamadas de funções de forma dinâmica são utilizadas para formular a matriz do elemento espectral, que são obtidas a partir da equação homogênea:

$$\mathcal{L}U_n(x) - \omega_n^2 M U_n(x) = 0 \quad (3.5)$$

A Equação (3.5) é as frequências discretas e cada frequência discreta ω_n se torna um parâmetro.

Utilizando como solução geral da Equação (3.5) na seguinte forma:

$$U(x) = c e^{ikx} \quad (3.6)$$

sendo c é um vetor de constantes e k é o número de onda. Substituindo a Equação (3.6) em (3.5) obtém-se um problema de autovalor,

$$A(k, \omega)c = 0 \quad (3.7)$$

formulando uma equação característica onde as raízes são para os números de ondas k da seguinte forma:

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é denominada relação de dispersão ou de relação de espectro. Supondo que k_1, k_2, \dots, k_p sejam raízes específicas de uma determinada frequência ω . De maneira que o autovetor c_i seja calculado a partir da Equação (3.7)

$$c_i = a_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.9)$$

sendo o autovetor c_i normalizado para que um componente do vetor normalizado ϕ se torne unitário e os demais assumam β_i . Com as condições de contorno são obtidas as constantes a_i . De posse dos autovetores k_i e c_i , para satisfazer o problema de autovalor na Equação (3.7) a solução geral para a Equação (3.5) é dada como:

$$\mathbf{U}(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i = \mathbf{E}(x; \omega) \mathbf{a}$$

sendo:

$$\mathbf{E}(x; \omega) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_p] \mathbf{\Lambda}(x; \omega) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{\Lambda}(x; \omega) = \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}]$$

$$\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_p\}^T$$

Para um determinado elemento com comprimento L , com características homogêneas, a Equação (3.10) apresentará as condições de contorno em seus nós $x = 0$ e $x = L$, obtidas pelos deslocamentos e inclinações nos nós, também conhecidos como variáveis primárias,

$$D(x) = L_{GB}U(x) \quad (3.11)$$

onde L_{GB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno. Aplicando a relação da Equação (3.10) na Equação (3.11) e levando em consideração os graus de liberdade nodais “d” especificados em dois nós do elemento finito, têm-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} D(0) \\ D(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{GB}E(x; \omega)|_{x=0} \\ L_{GB}E(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{a} \quad (3.12)$$

sendo “d” o vetor de deslocamento nodal espectral, onde a pode ser definido como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1}\mathbf{d} \quad (3.13)$$

A solução pode ser reescrita em termos das condições nodais, substituindo a Equação (3.13) na Equação (3.10), obtém-se:

$$\mathbf{U}(x) = N(x, \omega)\mathbf{d} \quad (3.14)$$

onde $N(x, \omega)$ é a função de forma dinâmica dada por:

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{E}(x, \omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.15)$$

LEE (2004) demonstra que as forças e momentos internos são variáveis secundárias e suas especificações constituem as condições de contorno naturais. Sendo assim, a resistência dos materiais determina a relação entre variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma,

$$F(x) = L_{NB}U(x) \quad (3.16)$$

onde L_{NB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno naturais. Substituindo a Equação (3.14) na Equação (3.16) e considerando a força nodal f , que são as cargas concentradas nos nós do elemento finito, tem-se:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{NB}N(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} \quad (3.17)$$

onde:

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}N(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = G(\omega)H^{-1}(\omega) \quad (3.18)$$

sendo:

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}E(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}E(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A matriz $\mathbf{S}(\omega)$ representa a matriz de rigidez dinâmica exata dependente da frequência, também chamada de matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral.

3.1.1 Elemento espectral de viga

O elemento de viga composto de dois nós e dois graus de liberdade e, cada relativos aos deslocamentos transversais \hat{v} e a rotacionais $\hat{\phi}$, sendo que a rotação é resultado da deformação transversal como $\hat{\phi} = \partial\hat{v}/\partial x$. As forças atuantes no elemento de viga são o cisalhamento \hat{V} e momento fletor \hat{M} , que também podem ser expressos a partir do deslocamento espectral transversal (DOYLE, 1997), como

$$\hat{M} = EI \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} = EI \hat{v}''(x), \hat{V} = -EI \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^3} = EI \hat{v}'''(x) \quad (3.20)$$

Os deslocamentos nodais \hat{v} e $\hat{\phi}$ e a forças nodais atuantes na viga de comprimento L são apresentados na Figura 3.1.

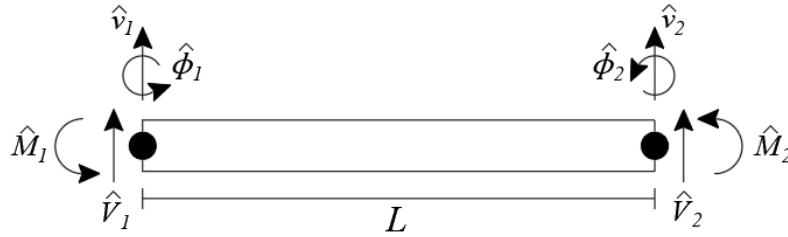


Figura 3. 1: Elemento espectral de viga com dois nós com dois graus de liberdade e duas cargas nodais em cada nó

A equação do movimento para o elemento de viga de Euler Bernoulli é representada por

$$EI \frac{\partial^4 \hat{v}(x, \omega)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A \hat{v}(x, \omega) = q \quad (3.21)$$

e a resposta espectral expressa da seguinte forma:

$$\hat{v}(x, \omega) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{-kx} A_3 e^{ik(L-x)} + A_4 e^{k(L-x)} = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{a}$$

onde,

$$\mathbf{e}(x, \omega) = [e^{-ikx}, e^{-kx}, e^{-ik(L-x)}, e^{-k(L-x)}] \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a} = [A_1, A_2, A_3, A_4]^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as inclinações do elemento de viga estão relacionados ao campo de deslocamento no nó 1 em $(x = 0)$ e no nó 2 em $(x = L)$, determinados por:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{\phi}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{v}(0) \\ \widehat{v}'(0) \\ \widehat{v}(L) \\ \widehat{v}'(L) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Substituindo a Equação (3.22) no lado direito da Equação (3.23) e escrito em forma de matriz, obtém-se:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} e(0, \omega) \\ e'(0, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e'(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.24)$$

onde:

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega)^{-1} \mathbf{d} \quad (3.25)$$

sendo:

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ -ik & -k & -ie^{-ikL}k & e^{-kL}k \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & 1 & 1 \\ -ike^{-ikL} & -e^{-kL}k & ik & k \end{bmatrix}$$

Os deslocamentos nodais do elemento podem ser definidos a partir dos seus graus de liberdade, que são determinados pelo vetor \mathbf{d} e a partir da eliminação do vetor de constantes têm-se:

$$\widehat{v}(x) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \mathbf{d} \quad (3.26)$$

As forças e os momentos de flexão nodais determinados para a viga podem ser relacionados com as forças e os momentos que são definidos por

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \widehat{V}_1 \\ \widehat{M}_1 \\ \widehat{V}_2 \\ \widehat{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\widehat{v}(0)''' \\ -\widehat{v}(0)'' \\ \widehat{v}(L)''' \\ \widehat{v}(L)'' \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

As forças espectrais nodais que são as força de cisalhamento e o momento fletor localizados ao lado esquerdo da viga onde $x = 0$ e do direito $x = L$. Aplicando as condições de contorno na Equação (3.27) teremos a seguinte

$$\mathbf{f} = EI \begin{bmatrix} -ik^3 & k^3 & ie^{-ikL}k^3 & -e^{ikL}k^3 \\ k^2 & -k^2 & e^{-ikL}k^2 & -e^{-kL}k^2 \\ ie^{-ikL}k^3 & -e^{-kL}k^3 & -ik^3 & k^3 \\ -e^{-ikL}k^2 & e^{-kL}k^2 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.28)$$

Substituindo a Equação (3.25) na (3.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \mathbf{d} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{S}_B(\omega) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde, $\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \mathbf{G}(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica da viga de Euler-Bernoulli.

3.1.2 Elemento espectral de cabo

A equação de movimento do feixe de Euler-Bernoulli sem amortecimento submetido à força axial e sob vibração de flexão é governada por

$$EI(x) \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4}(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2}(x, t) - T \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(x, t) = q \quad (3.29)$$

A Figura 3.2 mostra um elemento elástico de dois nós com uma seção transversal retangular uniforme submetido a uma força axial. O amortecimento estrutural interno é introduzido por um módulo de Young complexo, $E = E(1 + i\eta)$ onde η é o fator de perda estrutural histórica e $i = \sqrt{-1}$.

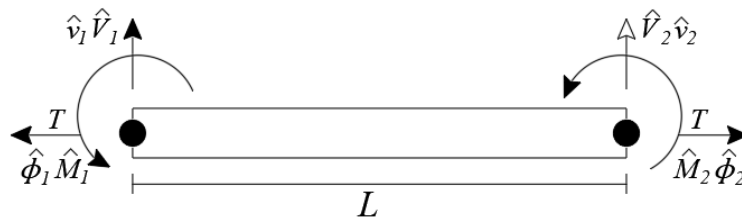


Figura 3. 2: Viga Euler-Bernoulli sujeito a uma carga axial.

Ao considerar um coeficiente constante, a solução de deslocamento vertical pode ser assumida da forma:

$$v(x, t) = v_0 e^{-i(kx - \omega t)} \quad (3.30)$$

onde v_0 representa a amplitude, ω é a frequência angular e k é o número de onda. Substituindo a Equação (3.38) na Equação (3.37), a equação de dispersão é obtida como:

$$EIk^4 + Tk^2 - \rho A\omega^2 = 0 \quad (3.31)$$

resolvendo o polinômio em função de k , temos os números de ondas são dados por:

$$k_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{-T + \sqrt{T^2 + 4EI\rho A\omega^2}}{2EI}} \quad (3.32)$$

$$k_{2,4} = \pm \sqrt{\frac{-T - \sqrt{T^2 + 4EI\rho A\omega^2}}{2EI}}$$

Na solução geral, representada na Equação (3.29), utiliza-se modos de propagação de ondas, sendo dois modos incidentes e dois refletidos, cada par contendo uma onda propagante e outra evanescente. Os deslocamentos nodais espectrais e as inclinações do elemento de viga estão relacionados ao campo de deslocamento no nó 1 e no nó 2 determinada pela Equação (3.23). Substituindo a Equação (3.22) no lado direito da equação (3.23) e aplicando as equações de contorno obtemos a matriz na

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ -ik & -k & -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & 1 & 1 \\ -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & -ik & -k \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde \mathbf{a} ser definido como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}^{-1}(\omega)\mathbf{d} \quad (3.34)$$

assim as forças nodais são:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -ik^3 & k^3 & ik^3 e^{-ikL} & -e^{ikL} \\ k^2 & -k^2 & -k^2 e^{-ikL} & -k^2 e^{-kL} \\ ik^3 e^{-ikL} & -k^3 e^{-kL} & -ik^3 & k^3 \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{a} \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação (3.34) na Equação (3.35) relacionamos os deslocamentos com as forças, obtendo assim a matriz de rigidez espectral para o elemento de cabo relacionamos $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega)$, como,

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega)\mathbf{d} \quad (3.36)$$

3.1.3 Elemento espectral de pórtico

O modelo elementar de pórtico ilustrado na Figura 3.3 inclui em sua formulação os graus de liberdade longitudinal, vertical e rotacional. Tendo como base o elemento de viga ou cabo e assumido deformação pequena, pode-se negligenciar o acoplamento entre a duas deformações. Como resultado, a matriz de rigidez do elemento pórtico considerará as rigidezes longitudinais e flexurais.

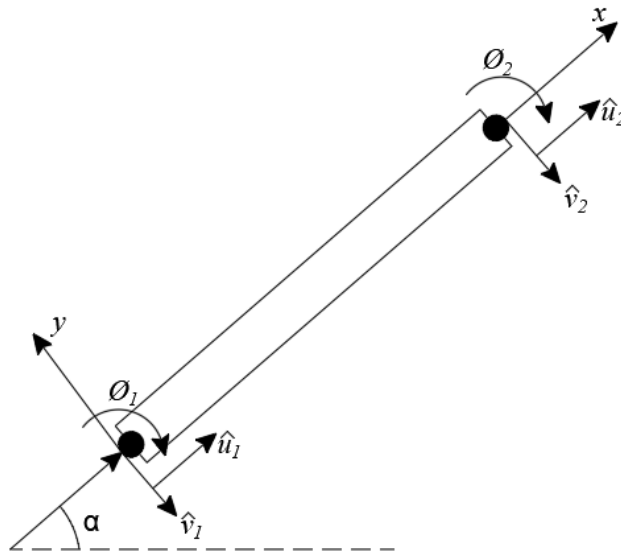


Figura 3. 3: Modelo Elementar de Pórtico

Partindo das soluções espectrais relacionadas com os deslocamentos longitudinais e verticais temos:

$$\hat{u}(x, \omega) = A_1 e^{-ik_r x} + A_2 e^{ik_r(L-x)} \quad (3.37)$$

$$\hat{v}(x, \omega) = A_3 e^{-ikx} + A_4 e^{-kx} + A_5 e^{ik(L-x)} + A_6 e^{k(L-x)} \quad (3.38)$$

onde,

$$\mathbf{e}(x, \omega) = [e^{-ik_r x}, e^{-ikx}, e^{-kx}, e^{ik_r(L-x)}, e^{-ik(L-x)}, e^{-k(L-x)}]$$

$$\mathbf{a} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6]^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as flexões do elemento de pórtico estão relacionados com as condições de contorno no nó, onde o nó 1 ($x = 0$) e no nó 2 ($x = L$), determinados por:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_1 \\ \widehat{v}_1 \\ \widehat{\phi}_1 \\ \widehat{u}_2 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{v}(0) \\ \widehat{v}'(0) \\ \widehat{u}(L) \\ \widehat{v}(L) \\ \widehat{v}'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(0, \omega) \\ e(0, \omega) \\ e'(0, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e'(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.39)$$

sendo $\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \mathbf{d}$. Aplicando as condições de contorno em \mathbf{H} obtemos a matriz espectral nodal representada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_1 \\ \widehat{v}_1 \\ \widehat{\phi}_1 \\ \widehat{u}_2 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-ik_r L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ 0 & -ik & -k & 0 & ike^{-ikL} & ke^{-kL} \\ e^{-ik_r L} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ikL} & e^{-kL} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & 0 & ik & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.40)$$

onde k é o número do cabo dado nas Equações (3.32) e (3.33); $k_r = \omega \sqrt{E/A}$ é o número de ondas de um elemento de barra dado em (DOYLE, 1997). As forças nodais de cisalhamento e momento são expressas pela Equação (3.18), a força nodal normal é formulada por $\widehat{P} = -EA \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} = EA \widehat{v}'(x)$. Assim, aplicando as condições de contorno nodais, resolvendo as equações diferenciais obtém-se a matriz de forças nodais:

$$\begin{bmatrix} \widehat{P}_1 \\ \widehat{V}_1 \\ \widehat{M}_1 \\ \widehat{P}_2 \\ \widehat{V}_2 \\ \widehat{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EAik_r & 0 & 0 & -EAik_r e^{-ik_r L} & 0 & 0 \\ 0 & -EI(ik_b)^3 & -EI(k_b)^3 & 0 & EI(ik_b)^3 e^{-ik_b L} & EI(k_b)^3 e^{-k_b L} \\ 0 & -EI(ik_b)^2 & -EI(k_b)^2 & 0 & -EI(ik_b)^2 e^{-ik_b L} & -EI(k_b)^2 e^{-k_b L} \\ -EAik_r e^{-ik_r L} & 0 & 0 & EAik_r & 0 & 0 \\ 0 & EI(ik_b)^3 e^{-ik_b L} & EI(ik_b)^3 e^{-k_b L} & 0 & -EI(ik_b)^3 & -EI(k_b)^3 \\ 0 & EI(ik_b)^2 e^{-ik_b L} & EI(ik_b)^2 e^{-k_b L} & 0 & EI(ik_b)^2 & EI(k_b)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.41)$$

Ao relacionar forças nodais com os deslocamentos $\mathbf{f} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega)\mathbf{d}$, obtém-se a matriz de rigidez dinâmica para o elemento pórtico da forma $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega)$. A matriz do elemento é formulada no sistema local de coordenadas, ou seja, seguindo o eixo do elemento. Para simulação que demande mais elementos de diferentes ângulos e posições é necessário aplicar transformação de cada elemento do sistema local para o sistema global de coordenadas. Essa transformação de sistemas utiliza-se a matriz de rotação \mathbf{R} descrita por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Aplicando a ortogonalidade da matriz de rotação ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$) e multiplicando a matriz do elemento, formula-se a matriz de rigidez do pórtico plano em coordenadas globais da forma

$$\mathbf{S}_g(\omega) = \mathbf{R}^T \mathbf{S}(\omega) \mathbf{R} \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{S}_g(\omega)$ é a matriz do elemento complexa nas coordenadas globais.

3.2 Variáveis aleatórias: Conceitos iniciais

3.2.1 Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade, do inglês *probability density function* (PDFs) é associada a cada valor assumido pela variável aleatória e à probabilidade do evento correspondente. A função cumulativa da probabilidade da variável aleatória x é tal que $F(x) = P(X \leq x)$. A PDF $f(x)$ é usualmente definida como (RITTO e CASTELLO, 2016)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.44)$$

onde x é um valor específico da variável aleatória e $F(x)$ uma função contínua à direita e limitada à esquerda. A PDF segue as seguintes propriedades

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (3.45)$$

Dentre as principais PDFs, a distribuição Gaussiana ou Normal é tem um suporte simétrico, um valor médio e variância de $\pm\infty$. A PDF Gaussiana é expressa por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.46)$$

3.2.2 Valor esperado (esperança matemática, média)

Para uma variável aleatória discreta X com valores possíveis $x_1, x_2, x_3 \dots x_i$ e com as suas probabilidades representadas pela função $p(x_i)$, o valor esperado calcula-se pela série:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (3.47)$$

Para uma variável aleatória contínua X o valor esperado calcula-se mediante o integral de todos os valores de $f(x)$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.48)$$

O termo $\mathbb{E}[X]$ é uma média ponderada de todos os possíveis valores de X em que os pesos são determinados pela PDF (FREIRE, 2020 *apud* DAMASCENO *et al.* 2008)

3.2.3 Variância e Desvio Padrão

A esperança do quadrado da variável aleatória discreta X é dada por (FREIRE, 2020 *apud* DAMASCENO *et al.* 2008):

$$\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}\{[X - \mathbb{E}[X]]^2\} \quad (3.49)$$

Outra forma de calcular a dispersão é pelo desvio padrão (σ) que é a raiz quadrada da variância

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \quad (3.50)$$

3.3 Método de Monte Carlo

Na simulação de Monte Carlo gera-se números aleatórios associados a uma distribuição de probabilidade, o qual é a base desta técnica. Entretanto, os computadores não possuem a capacidade de gerar números aleatórios não sequenciais, e sim uma sequência de números que apresentam propriedade estatísticas conforme a determinada distribuição pois fazem uso de algoritmos (DUTANG e WUERTZ, 2009).

Na sua forma mais simples, o método de Monte Carlo é bastante utilizado para aproximação de cálculos de integrais multidimensionais (ROSS, 2006). Considerando a seguinte integral

$$p_f = \int I(x)f(x)dx \quad (3.51)$$

$f(x)$ é uma função densidade de probabilidade (PDF) associada a um vetor aleatório $(x) \in \mathbb{R}^d$. Supondo que seja possível a geração de N variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada por $f(x)$, um estimador não polarizado para p_f é expresso por

$$p_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(x_i) \quad (3.52)$$

sendo x_i amostras do vetor aleatório (x) com densidade f e I uma função determinada a partir de

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(x) \geq 0 \\ 0 & \text{if } g(x) < 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Esta abordagem apresentada usa a chamada amostragem aleatória simples, que na maioria dos casos se apresenta ineficiente. Na Equação (3.52) fica evidente que a precisão da estimativa depende do número de amostras. Dessa forma é possível estimar um intervalo de confiança, mesmo sem conhecer a PDF de p_f . Temos como solução, aproximá-lo do intervalo de confiança de uma distribuição normal, recorrendo assim ao teorema limite central (FABRO, 2010).

3.4 Excitação determinística e aleatória

As velocidades e direções dos fluxos de vento e chuva mudam com o espaço e o tempo. Atualmente essas cargas são determinadas a partir de testes de túnel de vento, simulações de campo ou numéricas. Esta seção trata sobre os efeitos das cargas de vento e chuva em estruturas dinâmicas. A abordagem está limitada a resposta devido as cargas ao longo das estruturas.

3.4.1 Carga de vento

A NBR 7187 - Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – Procedimento, não apresenta nenhuma recomendação em relação ao procedimento para se determinar a ação do vento em pontes, somente recomenda seguir o apresentado na NBR 6123 – Força devidas ao vento em edificações, que explana sobre a ação do vento em edifícios.

Os procedimentos para execução do cálculo de forças devido ao vento seguem as indicações da NBR 6123,

$$F_{ca} = C_a q l d \quad (3.54)$$

sendo C_a representado pelo coeficiente de arrasto para fios e cabos, q é a pressão dinâmica, l é o comprimento do cabo e d é o diâmetro da seção do cabo. A pressão dinâmica é obtida através da velocidade de projeto V_p é determinada por:

$$q = \frac{1}{2} \rho_v V_p^2 = 0,613 V_k^2$$

onde V_p é a velocidade básica corrigida pelos fatores de topografia, da influência da rugosidade do terreno além do fator relacionado a conceitos probabilísticos e ρ_v a massa específica do ar obtida por:

$$\rho_v = \frac{1,293}{(1 + 0,00367) temp} \left(\frac{16000 + 64 temp - ALT}{16000 + 64 temp + ALT} \right) \quad (3.55)$$

sendo $temp$ representado pela temperatura, em °C e ALT a altitude da região.

Incidindo o vento a um ângulo θ em relação à direção perpendicular ao cabo, a força de arrasto nesta direção é determinada por:

$$F_{nca} = C_a q l d \text{sen}^2 \theta \quad (3.56)$$

O número de Reynolds (Re) para o cálculo do coeficiente de arrasto para cabos é determinado por

$$Re = 70000 V_k d \quad (3.57)$$

onde V_k representa a velocidade característica do vento, determinada por

$$V_k = V_0 S_1 S_2 S_3 \quad (3.58)$$

onde:

V_k = Velocidade característica do vento, em m/s;

V_0 = Velocidade básica do vento, em m/s;

S_1 = Fator Topográfico;

S_2 = Fator de rugosidade do terreno, Dimensão da estrutura e Altura acima do terreno;

S_3 = Fator estatístico.

De acordo com a NBR 6123, a velocidade básica do vento é "[...] a velocidade de uma rajada de 3 segundos excedida em média uma vez em 50 anos, a 10 metros acima do terreno, em campo aberto e plano." Essa velocidade, segundo a localidade da estrutura analisada, pode ser obtida a partir do mapa de isopletas do vento, conforme a Figura 3.4.

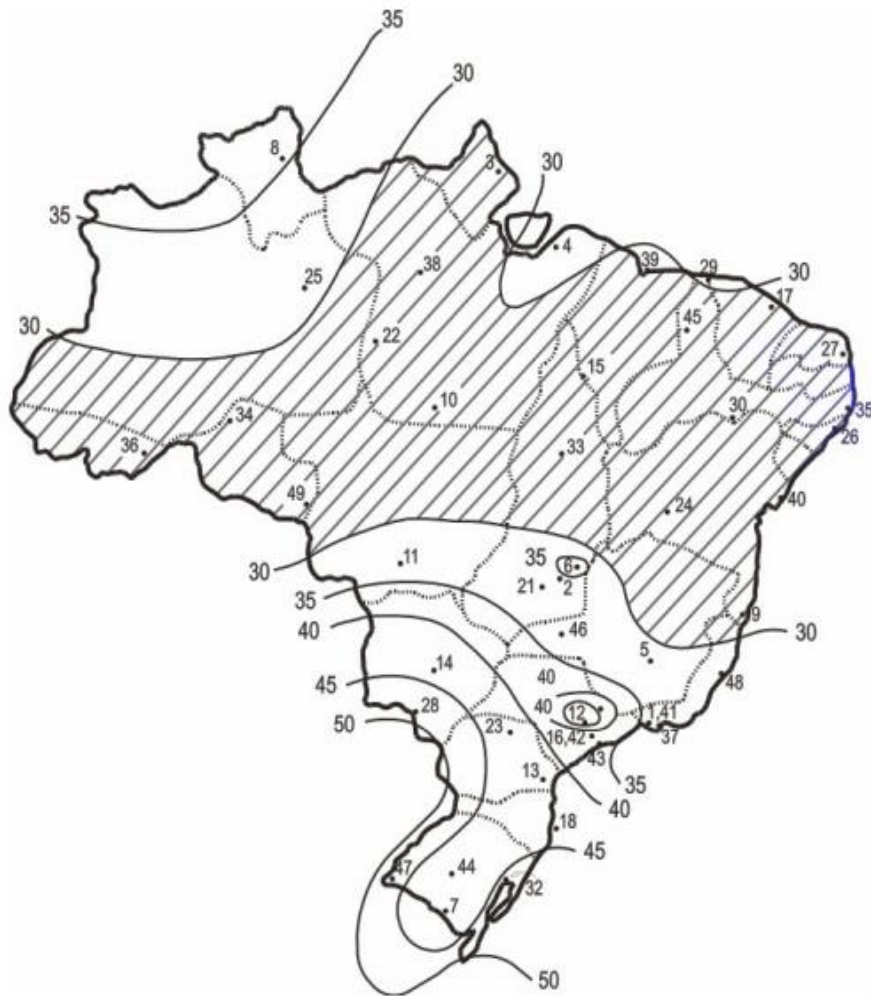


Figura 3. 4: Mapa das isopletas do vento (V_0 em m/s).

Fonte: NBR 6123

O fator S_1 considera a topografia e as variações do relevo do terreno.

Tabela 3. 1: Classes de relevo do terreno

S_1	Tipo de Relevo do Terreno
1,0	Terreno Plano ou fracamente acidentado
VARIÁVEL	Taludes e Morros
0,9	Vales Profundos e protegidos de ventos de qualquer direção.

Fonte: NBR 6123

Para mais informações sobre a determinação do Fator Topográfico, ver o item 5.2 da NBR-6123. A norma recomenda que casos de combinação de vales e montanhas com dificuldades de se estabelecer a direção predominante dos ventos que seja feita ensaio em Túnel de Vento.

O fator S_2 , considerando a rugosidade do terreno, as dimensões da edificação (no caso da ponte), o período de integração e a altura acima do terreno, é determinado por:

$$S_2 = bF_r \left(\frac{z}{10} \right)^p \quad (3.59)$$

com z determinando a altura do centro do painel, b e p são os fatores meteorológicos determinados a partir da função das categorias de rugosidade do terreno, das classes da edificação e da altura do contorno superior da camada atmosférica.

De acordo com a NBR-6123, os terrenos podem ser classificados em uma das categorias seguintes:

Tabela 3. 2: Categorias de Rugosidade do Terreno

Categoria	Tipo de Superfície do Terreno
I	Superfícies Lisas de grandes dimensões, com mais de 5 km de extensão, medida na direção e sentido do vento incidente.
II	Terrenos abertos em nível ou aproximadamente em nível, com poucos obstáculos isolados, tais como árvores e edificações baixas. Obstáculos com altura média abaixo de 1,0 metros.
III	Terrenos planos ou ondulados com obstáculos, tais como sebes e muros, poucos quebra-ventos. Obstáculos com altura média de 3,0 metros.
IV	Terrenos cobertos por obstáculos numerosos e pouco espaçados, em zona florestal, industrial a urbanizada. Altura média dos obstáculos de 10 metros.
V	Terrenos cobertos por obstáculos numerosos, grandes, altos e pouco espaçados. Obstáculos com altura média de 25 metros ou mais.

Fonte: NBR 6123

Além das características de rugosidade do terreno, devemos levar em consideração as dimensões do edifício.

Tabela 3. 3: Classes de Edifícios em função de suas dimensões.

Classe	Dimensões do Edifício
A	Todas as unidades de vedação, seus elementos de fixação e peças individuais de estruturas sem vedação. Toda edificação na qual a maior dimensão horizontal ou vertical seja inferior a 20 metros .
B	Toda edificação ou parte de edificação para a qual a maior dimensão horizontal ou vertical da superfície frontal esteja entre 20 e 50 metros .
C	Toda edificação ou parte de edificação para a qual a maior dimensão horizontal ou vertical da superfície frontal exceda 50 metros .

Fonte: NBR 6123

Juntando a Categoria do Terreno com a Classe do Edifício, entramos na tabela seguinte, obtendo o Fator Rugosidade S_2 para diversas alturas de edifício:

Tabela 3. 4: Fator S_2

Altura Z (m)	Categoria de Rugosidade do Terreno														
	I			II			III			IV			V		
	CLASSE			CLASSE			CLASSE			CLASSE			CLASSE		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
≤ 5	1,06	1,04	1,01	0,94	0,92	0,89	0,88	0,86	0,82	0,79	0,76	0,73	0,74	0,72	0,67
10	1,10	1,09	1,06	1	0,98	0,95	0,94	0,92	0,88	0,86	0,83	0,80	0,74	0,72	0,67
15	1,13	1,12	1,09	1,04	1,02	0,99	0,98	0,96	0,93	0,90	0,88	0,84	0,79	0,76	0,72
20	1,15	1,14	1,12	1,06	1,04	1,02	1,01	0,99	0,96	0,93	0,91	0,88	0,82	0,80	0,76
30	1,17	1,17	1,15	1,10	1,08	1,06	1,05	1,03	1	0,98	0,96	0,93	0,87	0,85	0,82
40	1,20	1,19	1,17	1,13	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04	1,01	0,99	0,96	0,91	0,89	0,86
50	1,21	1,21	1,19	1,15	1,13	1,12	1,10	1,09	1,06	1,04	1,02	0,99	0,94	0,93	0,89
60	1,22	1,22	1,21	1,16	1,15	1,14	1,12	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02	0,97	0,95	0,92
80	1,25	1,24	1,23	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,12	1,10	1,08	1,06	1,01	1	0,97
100	1,26	1,26	1,25	1,22	1,21	1,20	1,18	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09	1,05	1,03	1,01
120	1,28	1,28	1,27	1,24	1,23	1,22	1,20	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,07	1,06	1,04
140	1,29	1,29	1,28	1,25	1,24	1,24	1,22	1,22	1,20	1,18	1,16	1,14	1,10	1,09	1,07
160	1,30	1,30	1,29	1,27	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,20	1,18	1,16	1,12	1,11	1,10
180	1,31	1,31	1,31	1,28	1,27	1,27	1,26	1,25	1,23	1,22	1,20	1,18	1,14	1,14	1,12
200	1,32	1,32	1,32	1,29	1,28	1,28	1,27	1,26	1,25	1,23	1,21	1,20	1,16	1,16	1,14
250	1,34	1,34	1,33	1,31	1,31	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,25	1,23	1,20	1,20	1,18
300				1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,31	1,29	1,27	1,26	1,23	1,23	1,22
350							1,34	1,34	1,33	1,32	1,30	1,29	1,26	1,26	1,26
400										1,34	1,32	1,32	1,29	1,29	1,29
420										1,35	1,35	1,33	1,30	1,30	1,30
450													1,32	1,32	1,32
500													1,34	1,34	1,34

Fonte: NBR 6123

O fator S_3 leva em consideração o grau de segurança solicitado e a vida útil da edificação. A velocidade básica do vento é determinada para um certo período de recorrente de 50 anos, e a probabilidade de que esta velocidade seja igual ou maior neste período é de aproximadamente 63%. A Tabela 3.5 determina o fator S_3 para alguns níveis de probabilidade e para os períodos de exposição da edificação à ação do vento.

Tabela 3. 5: Valores Mínimos do Fator Estatístico S_3

Grupo	Descrição	S_3
1	Edificações cuja ruína total ou parcial pode afetar a segurança ou possibilidade de socorro a pessoas após uma tempestade destrutiva (hospitais, quartéis de bombeiros e de forças de segurança, centrais de comunicação etc.)	1.10
2	Edificações para hotéis e residências. Edificações para comércio e indústria com alto fator de ocupação	1.00
3	Edificações e instalações industriais com baixo fator de ocupação (depósitos, silos, construções rurais etc.)	0.95
4	Vedações (telhas, vidros, painéis de vedação etc.)	0.88
5	Edificações temporárias. Estruturas dos grupos 1 a 3 durante a construção.	0.83

Fonte: NBR 6123

3.4.2 Carga de Chuva

De acordo com a pesquisa de SOARES (2020), o espectro vertical da gota de chuva é calculado com as taxas de captura específicas obtidas a partir de dois conceitos diferentes. A trajetória da gota de chuva é determinada de acordo com a pesquisa de CHOI (1997).

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= 6\pi\mu_{ar}r \left(U - \frac{dx}{dt} \right) \frac{C_a Re}{24} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= 6\pi\mu_{ar}r \left(V - \frac{dy}{dt} \right) \frac{C_a Re}{24} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= 6\pi\mu_{ar}r \left(W - \frac{dz}{dt} \right) \frac{C_a Re}{24} - mg \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

sendo r representando o raio da gota de chuva, μ_{ar} a viscosidade do ar, ρ_a a densidade do ar, ρ_w a densidade da água, U , V e W são as componentes da velocidade do vento nas direções x , y e z respectivamente, Re o número de Reynolds e C_a o coeficiente de arrasto e m a massa da gota de chuva determinada por:

$$m = \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) \rho_w \quad (3.61)$$

O número de Reynolds é determinado a partir da seguinte equação:

$$Re = \left(\frac{2\rho_a r}{3} \right) \sqrt{\left(U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(W - \frac{dz}{dt} \right)^2} \quad (3.62)$$

Substituindo (3.81) em (3.79) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{3C_{Dx}\rho_a}{8r\rho_w} \left(U - \frac{dx}{dt} \right) \sqrt{\left(U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(W - \frac{dz}{dt} \right)^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{3C_{Dy}\rho_a}{8r\rho_w} \left(V - \frac{dy}{dt} \right) \sqrt{\left(U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(W - \frac{dz}{dt} \right)^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{3C_{Dz}\rho_a}{8r\rho_w} \left(W - \frac{dz}{dt} \right) \sqrt{\left(U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(W - \frac{dz}{dt} \right)^2} - g \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

sendo x , y e z os coeficientes de arrasto determinados por C_{Dx} , C_{Dy} e C_{Dz} respectivamente, onde C_{Dz} é tomado partir dos resultados calculados por GUNN e KINZER (1948) e C_{Dx} , C_{Dy} são igualados ao coeficiente de arrasto de uma esfera, que é aproximadamente 0,47.

Os fatores aplicados no estudo das características da carga de chuva no plano vertical e sua velocidade horizontal são a taxa de captura específica $\eta(d)$ que são

referentes ao diâmetro da gota de chuva d , e à razão de velocidade $\gamma(H, d, \alpha)$ referentes ao diâmetro da gota de chuva, sua altitude H e ao expoente da lei de potência α :

$$\eta = \frac{R_v}{R_h} \quad (3.64)$$

onde R_v e R_h são as intensidades da chuva no sentido vertical e horizontal. γ é determinada por:

$$\gamma(H, d, \alpha) = \frac{V_h(H, d, \alpha)}{V_p(H, \alpha)} \quad (3.65)$$

onde V_h é a velocidade de uma gota de chuva e V_p é a velocidade do vento na direção horizontal.

FU *et al.* (2015) verificou-se as seguintes afirmações através de seus estudos. As pequenas gotículas possuem uma inércia menor e são sujeitas a forças de arrasto que em o movimento se modifica acarretando sua velocidade próxima a 1. As gotas maiores possuem velocidade maiores. Maior o diâmetro da gota maior será expoente e a da lei de potência acarretando uma consistência ruim da velocidade do vento horizontal e da gota de chuva. Abreviando, γ é proporcional ao diâmetro da gota de chuva e a α é inversamente proporcional a H . O ajuste para a razão de velocidade é determinado por:

$$\gamma(H, d, \alpha) = (0,2373H^{(-0.5008)}) \left(\frac{d}{3}\right)^{0.8} \left(\frac{\alpha}{0,12}\right) + 1 \quad (3.66)$$

sendo H em metros e d em milímetros.

Existe entre a intensidade da chuva no plano horizontal e vertical uma relação que é determinada pela taxa de captura específica η que é idêntica à taxa de fluxo da chuva por unidade de área no plano vertical em relação ao plano horizontal. Sendo assim η pode ser determinado por:

$$\eta(d) = \frac{R_v(d)}{R_h(d)} = \frac{V_h}{V_{term}} = \frac{V_p \gamma}{V_{term}} \quad (3.67)$$

sendo V_h representado pela velocidade horizontal e V_{term} a velocidade terminal na direção vertical. V_{term} de uma gota de chuva determinada pela fórmula de ajuste (VAN MOOK, 2002).

$$V_{term}(d) = 9,40(1 - e^{-0,557d^{1,15}}) \quad (3.68)$$

na condição de V_{term} ser maior que V_h então teremos que a velocidade da chuva na vertical será maior que a velocidade horizontal.

Para uma chuva qualquer com diâmetros de gota d temos a intensidade determinada por:

$$R(d) = 3600V_{gota}n(d)\frac{\pi d^3}{6} \quad (3.69)$$

sendo V_{gota} representado pela velocidade de uma gota perpendicular ao plano do espectro da gota de chuva e $n(d)$. Sendo $n(d)$ o número de gotas de chuva com diâmetro d por unidade volume. Deste modo η é obtido por

$$\eta(d) = \frac{R_v(d)}{R_h(d)} = \frac{3600V_h n_v(d)(\pi d^3/6)}{3600V_{term} n_h(d)(\pi d^3/6)} = \frac{V_h n_v(d)}{V_{term} n_h(d)} \quad (3.70)$$

Considerando a Equação (3.70) e a Equação (3.67) idêntica, então o espectro no sentido horizontal n_h e no sentido vertical n_v são idênticos. De maneira que espectro da chuva é determinado por MARSHALL e PALMER (1948) como:

$$n_h(d) = n_0 e^{(-\Lambda d)} \quad (3.71)$$

onde $n_0 = 8 \times 10^3$ em $1/(m^3 mm)$ e $\Lambda = 4.1 R_h^{-0.21}$ em $1/mm$, R_h é a intensidade da chuva horizontal.

A carga da chuva com um diâmetro específico d atuando na estrutura com um volume unitário precisa-se adotar o espectro no plano vertical de modo que F_d é terminando por:

$$F_d = F(\tau) n_v(d) \quad (3.72)$$

Logo, a carga da chuva agindo na estrutura é determinada pela seguinte equação:

$$F_r = F_d V = \frac{1}{3} \rho \pi d^3 n_v(d) V_h^2 A = \frac{1}{3} \rho \pi d^3 n_h(d) (\gamma(H, d, \alpha) V_a(H, t))^2 A \quad (3.73)$$

sendo V representado pelo volume do fluxo agindo na estrutura. E, a pressão da chuva é dada por:

$$P_c = \frac{1}{3} \rho_c \pi d^3 n_h(d) (\gamma(H, d, \alpha) V_p(H, t))^2 \quad (3.74)$$

3.4.3 Carga de Vento e Chuva

A ação das chuvas é bem significativa nas propriedades aerodinâmicas dos cabos de pontes estaiadas e o acoplamento das cargas de vento e de chuva são bem complexos do que analisar apenas a carga de vento. Sendo assim, é preciso realizar uma análise das cargas de vento e de chuva simultaneamente objetivando um melhor entendimento do comportamento destas cargas na estrutura. A formulação para se calcular a ação das cargas de chuva e de vento atuando de forma simultânea na estrutura é determinada a partir do somatório destas atuando separadamente (FU e LI, 2016),

$$P_{total} = P_v + P_c \quad (3.75)$$

3.4.4 Densidade Espectral de Potência

SOARES (2020) determina as cargas provenientes de fenômenos naturais empregando as densidades espectrais de potência (PSD) devido as suas irregularidades e dinâmicas. MACHADO (2018), apresenta diferentes tipos de espectros para excitações dinâmicas específicas, como por exemplo, Ruído branco, Kaimal, Kanai-Tajimi e FOF (*First Order Filter*). O ruído branco é um espectro que apresenta um comportamento mais dispersivo em torno da média e não apresenta significância física, mas devido sua simplicidade se torna um espectro bastante utilizado. Kanai-Tajimi, é um espectro de segunda ordem, que apresenta uma grande dispersão, mas apresenta respostas em relação ao domínio de tempo mais suave que o espectro de ruído branco. Já o espectro de Kaimal, é um espectro de primeira ordem, que apresenta um perfil mais significativo apresentando assim uma boa autocorrelação (MURTAGH *et al.* 2004).

O ruído branco é um espectro cobre toda a escala de frequências uniformes. Apesar deste espectro ser idealizado, o ruído branco proporciona uma forma analítica para a realização de estudos de vibrações aleatórias em estruturas (ZULUAGA GÓMEZ, 2007).

A densidade espectral de potência do ruído branco é demonstrada por $S(\omega) = S_0$. Existe um pensamento no qual afirma que a frequência do sinal é distribuída homogeneamente pela banda de frequência. Essa suposição não é comprovada, mas podemos utilizar outros modelos de PSD que dispõem de acurácia e precisão nas formulações.

O modelo FOF é determinado por:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{S_0}{V_m^2 + (2\pi\omega)^2} \quad (3.76)$$

já o modelo de espectro Kaimal é determinado por:

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{4S_0^2 L_{1u}/V_p}{(1 + 6\omega L_{1u}/V_p)} \right]^{5/3} \quad (3.77)$$

sendo que L_{1u} é a escala referente ao comprimento que é determinado como:

$$L_{1u} = 150m, \text{ ou } 5h \text{ para } h < 30 \quad (3.78)$$

O modelo de segunda ordem, Kanai-Tajimi, é definido por:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1 + 4\xi_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 4\xi_g^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2} S_0 \quad (3.79)$$

sendo $S_{xx}(\omega)$ a densidade espectral da aceleração na frequência f , o ω_g a frequência característica dos mantos de solo do local, em Hertz e ξ_g a razão de amortecimento dos mantos de solo do local. O coeficiente de amortecimento característico ξ_g e a frequência característica ω_g são ajustadas de acordo com a carga aleatória e o sistema. O filtro Kanai-Tajimi amplia as frequências em torno de ω_g , atenua as frequências mais altas, mas não altera a amplitude de frequências muito baixas (ALKMIM, 2017).

3.4.5 Autocorrelação e Correlação Cruzada

A autocorrelação de um sinal pode ser obtida através da equação a seguir:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t - \tau)] \quad (3.80)$$

onde τ representa o tempo de defasagem da análise. A autocorrelação destaca a relação linear que existe entre um sinal em um determinado instante de tempo com o mesmo sinal com uma defasagem de τ . O teorema de Wiener-Khinchin associa uma função de autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ com o domínio de frequência. Como na equação a seguir:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.81)$$

onde $S_{xx}(\omega)$ é definida como a PSD. Os ruídos considerados neste trabalho são definidos através da PSD.

Podemos definir a correlação cruzada a partir da análise dos sinais de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ do sistema, relacionando o valor de x em um instante t e y em um instante de $t + \tau$.

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = E \left[\int_0^{\infty} x(t)h(\tau_1)x(t + \tau - \tau_1) d\tau_1 \right] \quad (3.82)$$

No livro de SHIN e HAMMOND (2008), podemos conseguir uma maior explanação da Equação (3.82), que é adquirida pela relação de um sistema linearmente invariante no tempo com uma entrada e uma saída. O sinal $y(t + \tau)$ pode ser adquirido a partir da determinação da relação entre entrada e saída dada pela integral de convolução.

Levando a equação de correlação cruzada para o domínio da frequência a partir da Transformada de Fourier (Equação 3.82), pode-se obter a densidade espectral de potência cruzada que é caracteristicamente relacionada com a Função de Resposta em Frequência (FRF).

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.83)$$

Aplicando a Equação (3.102) em (3.103) pode-se obter a seguinte equação:

$$R_{xy}(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \tau_1) e^{-i\omega(\tau - \tau_1)} d\tau \quad (3.84)$$

a primeira integral representa a definição da função de transferência no domínio do tempo, já a segunda integral representa a densidade espectral de potência do sinal de entrada. A partir disso teremos a resposta do sistema a um PSD de entrada que é determinada por SHIN e HAMMOND (2008):

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega) \quad (3.85)$$

onde,

$$H(\omega) = S^{-1}(\omega)$$

sendo o $H(\omega)$ representado pelo valor absoluto da função de transferência entre a entrada S_{xx} e a saída $S_{xy}(\omega)$.

4 Resultados

No presente capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos nas implementações computacionais dos elementos apresentados no capítulo 3. Para validação do modelo, os resultados obtidos para uma ponte simplificada utilizando o MEE foram comparados com os resultados calculados via Elementos Finitos. Em seguida, uma estrutura mais completa da ponte é utilizada e sua resposta dinâmica analisada quando está exposta a cargas determinísticas e randômicas simulando os fenômenos naturais, além da inclusão de aleatoriedade na condição de contorno dos cabos. Um estudo estatístico é apresentado na seção 4.6, onde é demonstrado o efeito das aleatoriedades devido a cargas e contornos na resposta dinâmica do sistema.

4.1 Metodologia

Dentre as subestruturas utilizadas para a criação da ponte estaiada, é necessário a implementação e a validação do modelo numérico. A estrutura simplificada do modelo da ponte (SOUSA *et al.* 2019), é composta por um conjunto de 4 cabos com dimensões como mostrado na (Figura 4.1). Os cabos têm uma geometria circular de diâmetro 75,2 mm e a área da seção transversal igual a $A_c = 0,000149 \text{ m}^2$, o momento de inércia $I_c = 0,197 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ e o momento de inércia torcional $I_t = 0,123 \times 10^{-8} \text{ m}^4$. As propriedades mecânicas são o módulo de Young de $E = 195 \text{ GPa}$ e a densidade $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. O fator de amortecimento estrutural é 0,01. Contudo, comparou-se os resultados obtidos pelo MEF objetivando a validação da implementação do MEE implementada no *Software* MATLAB.

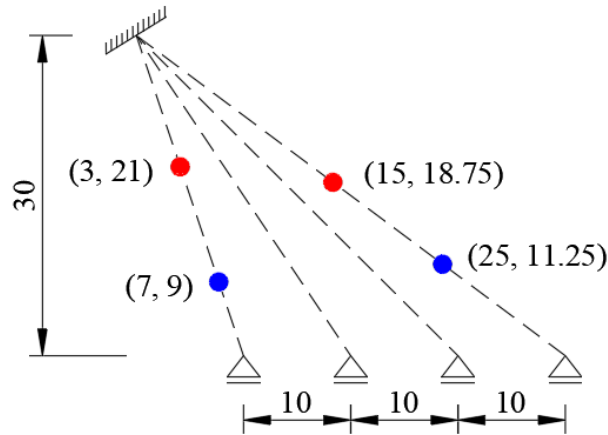


Figura 4. 1: Estrutura Simplificada do Modelo

Fonte: adaptado de Zhang *et al.* (2018)

Os pontos vermelhos e azuis denotam pontos de medição. A excitação unitária em vertical é imposta no ponto vermelho de coordenada (3,21). As 15 primeiras frequências de ressonância foram extraídas das FRFs e comparadas com as frequências naturais do sistema e com as calculas via SEM e FEM sem amortecimento conforme demonstrados na Tabela 4.1.

Tabela 4. 1: Comparação entre as 15 primeiros frequências naturais e as frequências de ressonâncias obtidas com o modelo de MEE e MEF.

Modo	Frequência Natural	Frequência de Ressonância	
	ω (Hz)	MEE	MEF
1 ^o	0,35	-	-
2 ^o	0,50	0,50	-
3 ^o	0,60	0,60	0,60
4 ^o	0,70	-	-
5 ^o	0,80	0,78	-
6 ^o	0,92	0,92	-
7 ^o	1,00	-	-
8 ^o	1,05	1,07	1,05
9 ^o	1,14	1,14	1,13
10 ^o	1,24	1,25	-
11 ^o	1,34	1,37	1,35
12 ^o	1,46	-	-
13 ^o	1,53	1,53	1,52
14 ^o	1,65	-	-
15 ^o	1,72	1,70	1,79

As frequências de ressonância obtidos pelo MEE e MEF estão próximos da frequência natural do sistema. MEE não conseguiu identificar a 1^a, 4^a, 7^a, 12^a e 14^a frequência de ressonância. Enquanto o MEF não conseguiu identificar 1^a, 2^a, 4^a a 7^a, 10^a, 12^a e 14^a. Essas falhas de identificação dos métodos podem ser decorrentes do ponto de

excitação e medição escolhido. Assim, a frequência ressonante não identificada é devido a não excitação dos modos. Porém, é verificável que MEE é apresentou mais acurácia na estimação das frequências que o MEF. Na modelagem da ponte por MEE usou-se 8 elementos espectrais ao todo, enquanto por MEF foi-se necessário uma discretização em 45 elementos cada cabo. As FRFs obtidas no ponto vermelho (3, 21) mostradas na Figura 4.2 foram calculadas usando MEE e MEF.

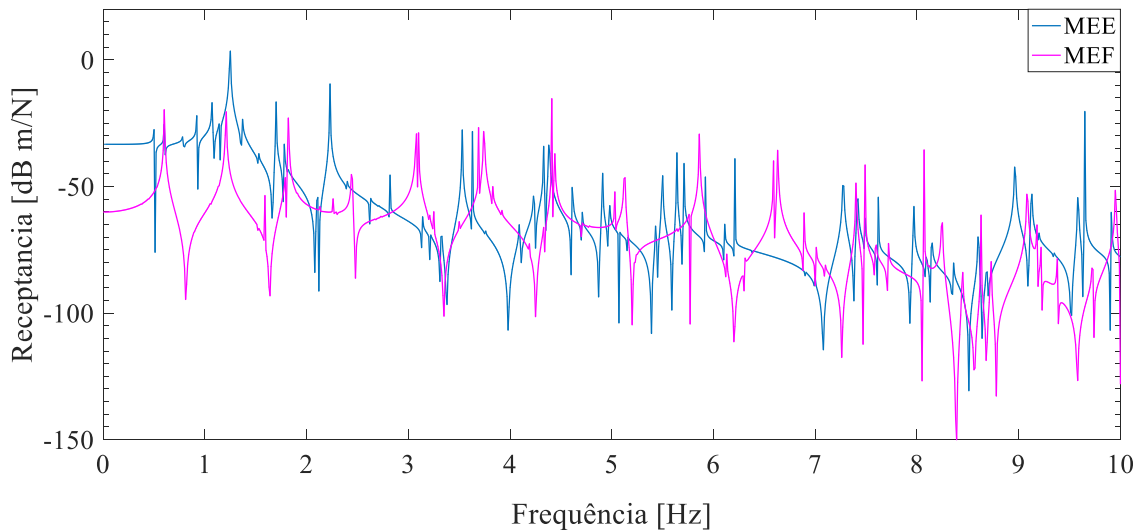


Figura 4. 2: FRF do Ponto Vermelho (3, 21)

Dado o caso simplificado é verificado que o MEE usado para modelar estruturas mais complexas apresentou eficiência e robustez. Assim, o caso da ponte mais completa é modelada apenas utilizando o MEE.

4.2 Caso de aplicação

Nesta seção uma ponte estaiada mais completa é analisada. Esta é composta por 10 estais (cabos), o pilone, a base e a inclusão da condição de contorno através de molas torcionais, como ilustrada na Figura 4.3. Os pontos azuis são pontos de obtenção das repostas dinâmicas nos cabos e os em cor vermelha são pontos de análise na estrutura de concreto. O ponto de excitação é assumido no nó 5 no GDL vertical.

Os cabos estão conectados nos na base, este é modelado por um suporte fixo contendo o GDL de rotação livre. A conexão de cabo-base é modelada por uma mola rotacional K_{ϕ} incluída em cada ponto de conexão.

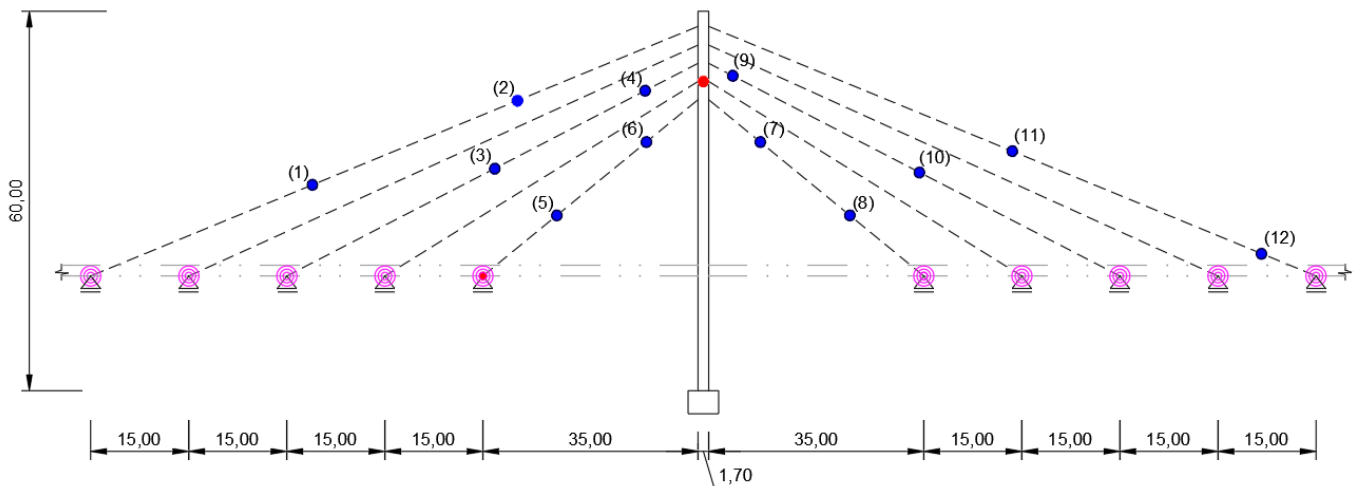


Figura 4. 3: Modelo da Estrutura Analisada

A geometria dos cabos e as propriedades mecânicas adotadas foram as mesmas utilizadas para a estrutura apresentada na Figura 4.1. O pilone têm uma geometria retangular e a área da seção transversal igual a $A_c = 4,225 \text{ m}^2$, o momento de inércia $I_c = 24,20 \text{ m}^4$. As propriedades mecânicas são o módulo de Young de $E = 35,42 \text{ GPa}$ e a densidade $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$.

Análises da resposta dinâmica da ponte considerando cargas pontuais unitária, de vento, chuva e vento-chuva são apresentados. Dois casos de estudo são realizados, um considerando a mola no contorno e outro sem a mola. A rigidez média da mola igual a $K\phi = 100 \text{ kgf/m}^2$. Em sequência, considerou-se cargas aleatória expressas por espectros de Ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi, todos com amplitude associada à carga de vento-chuva. As características das excitações oriundas das cargas de vento e chuva estão dispostas nas Tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4. 2: Características do Vento

Propriedades	Valor Adotado
Velocidade base [m/s]	20
Densidade do ar [kg/m^3]	1225
Fator topográfico (S_1)	1,0
Categoria de rugosidade do terreno	III
Classes de edifícios em função da dimensão	B
Coefficiente de rugosidade K_r (S_2)	1,03
Fator estatístico (S_3)	1,10
Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	25
Coefficiente de arrasto C_a	1,00

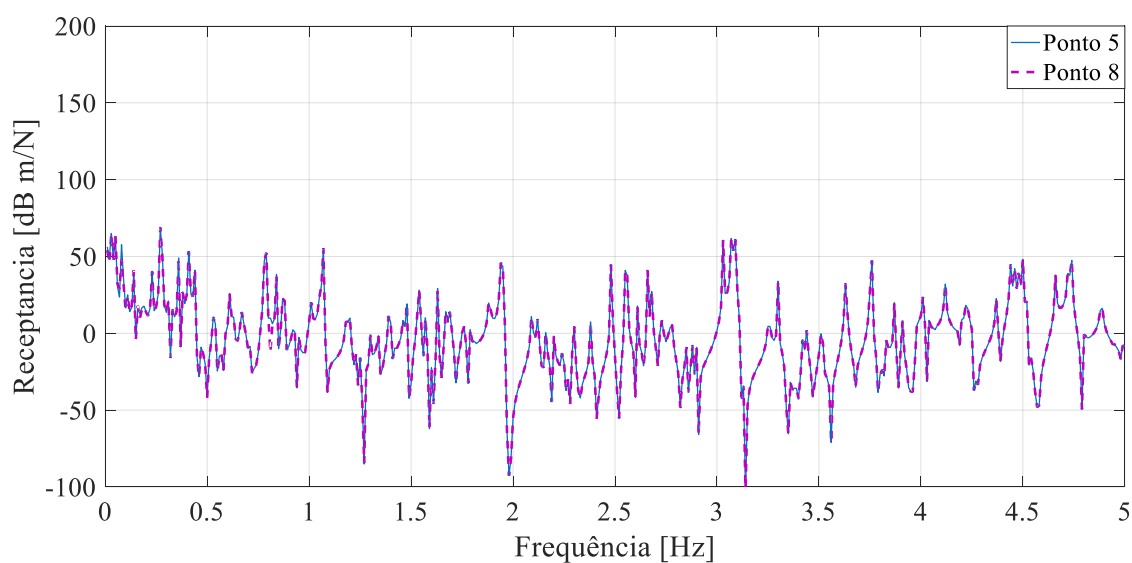
Tabela 4. 3: Características da Chuva

Propriedades	Valor Adotado
Densidade da gota de chuva [kg/m^3]	1000
Intensidade da chuva [mm/h]	150
Diâmetro da Gota de Chuva	0,003

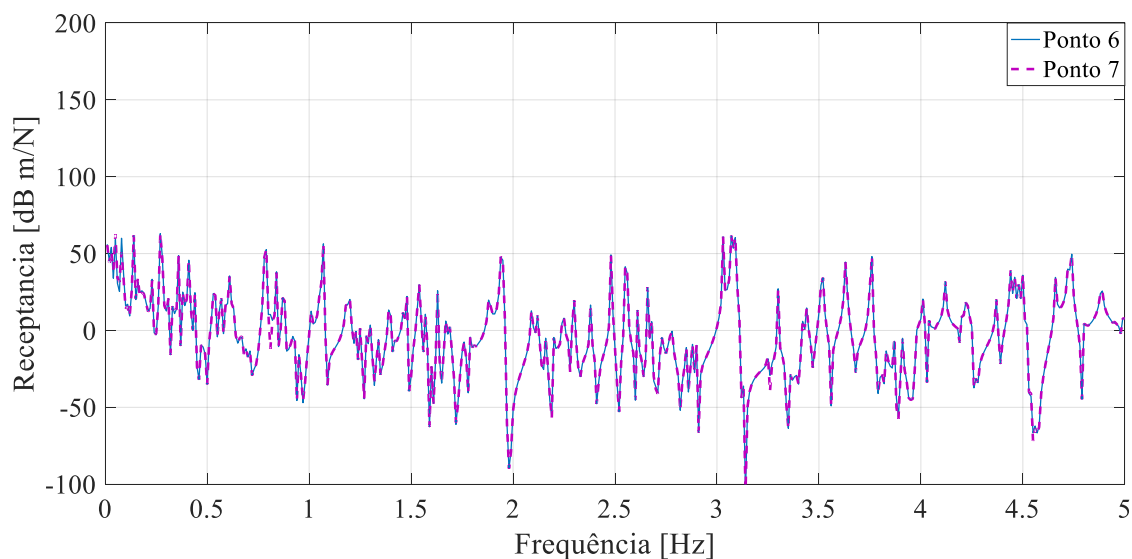
4.2.1 Análise dinâmica da ponte

As FRFs da ponte foram estimadas nos pontos de cor azul, para isso, impôs-se um forçamento unitário no nó n° 5.

Para checar a simetria resposta dinâmica da estrutura obtiveram-se as FRFs nos pontos 5, 6, 7 e 8 no GDL vertical. A Figura 4.4 (a) mostra as FRFs obtidas nos nós 5 e 8 e Figura 4.4 (b) nos nós 6 e 7, em ambos os casos podemos observar que as repostas são idênticas aos nós analisados, demonstrando a simetria da estrutura e comportamento dinâmico. A simetria de estruturas é um fator importante na análise, principalmente em modelos que demandem alto tempo de processamento. Isso porque pode-se utilizar apenas metade ou parte da modelagem na simulação.



(a)



(b)

Figura 4. 4: Simetria entre as FRFs dos Pontos 5 e 8 (a) e 6 e 7 (b) com excitação de carga unitária no GDL nº 5

As Figuras 4.5 e 4.6 apresentam a resposta dos cabos para uma excitação unitária no nó nº 5 nos nós 1 a 6 da ponte. O início das FRFs apresenta alta densidade modal e as FRFs calculadas nos pontos 1 e 2 apresentam maior amplitude de resposta seguidos pelos pontos 3-4 e 5-6, isso devido ao comprimento dos cabos associados aos pontos. Embora as amplitudes sejam diferentes das frequências de ressonância são similares. A Figura 4.6 mostram as FRFs calculadas nos nós 7 a 12. Comportamento similar ao da Figura 4.5 são observados.

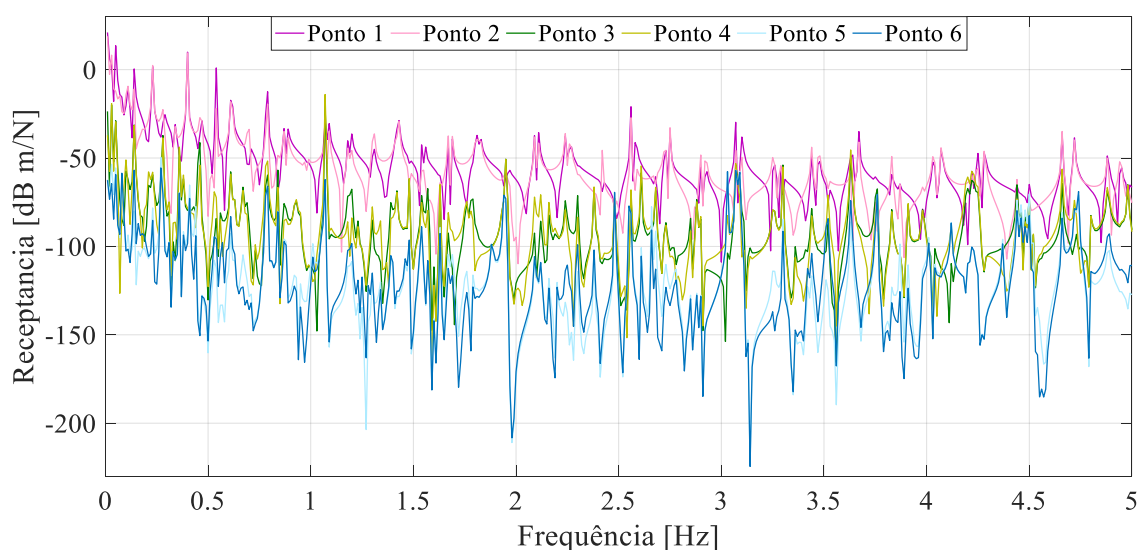


Figura 4. 5: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga unitária no GDL nº 5

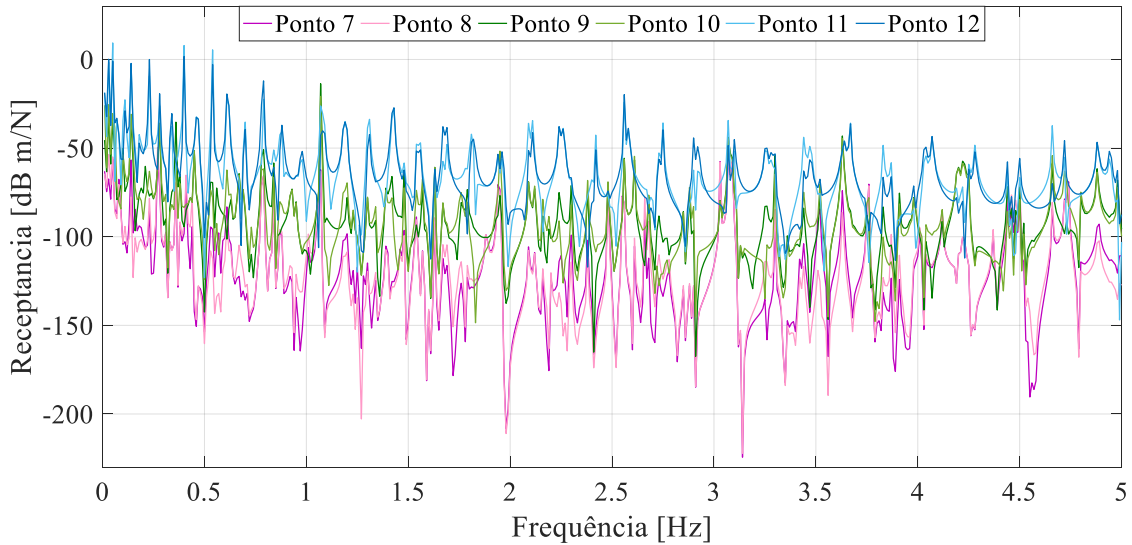


Figura 4. 6: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga unitária no GDL nº5

A FRF calculada no ponto vermelho, na conexão entre o cabo e a base, é mostrada na Figura 4.7. Nestes pontos observa-se a interação do cabo com a ponte, é possível perceber um aumento da influência do cabo na resposta vibracional.

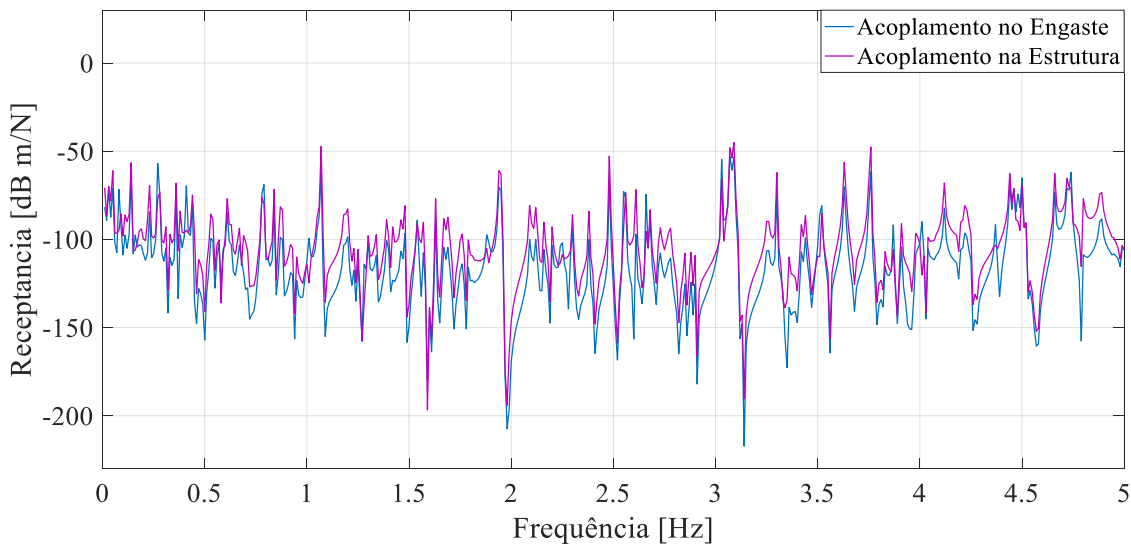


Figura 4. 7: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga unitária no GDL nº 5

Quando a excitação é no acoplamento do cabo com a estrutura, as FRFs apresentaram uma maior densidade modal, com maiores amplitudes em suas respostas.

Uma questão que deve ser levada em consideração no projeto de uma ponte estaiada é o desempenho dos estais no decorrer de seu funcionamento pois estão suscetíveis a esforços, do vento, chuva, tráfego etc. A ocorrência alternada desses carregamentos no elemento acarreta um desgaste nos estais e em seus elementos de

ligação que são as ancoragens. Essa ocorrência é conhecida como fadiga, um dos principais motivos da degradação, pois estão suscetíveis a cargas que variam com o tempo.

A fadiga atuante nos estais e em seus elementos de ligação é classificada em fadiga axial e fadiga devido a flexão. Sendo a fadiga axial ocasionada pela variação de carga acidental que pode ser corrigida reduzindo-se a tensão limite do cabo. No caso da fadiga devido a flexão é ocasionada devido a vibração dos cabos provocados pelo vento ou pela rotação do tabuleiro da ponte tendo uma correção a utilização de mecanismos que realizam o controle das vibrações e através de atenuadores de flexão (ISHII, 2006).

No intuito de checar a influência da condição de contorno na resposta vibracional da ponte, foi realizada a inclusão das restrições nos engastes através da inclusão de molas torcionais nesses pontos de conexão. A FRF impressa em linha de cor roxa é a resposta considerando a mola rotacional de valor médio $K\phi = 1e^2 \text{ kgf/m}^2$ em cada engaste. As Figuras 4.8 e 4.9 demonstram resposta dinâmica da ponte com e sem a inclusão da mola no contorno nos pontos 4 e 5, respectivamente. Em ambas as análises houve uma mudança significativa na resposta em baixa frequências. Observa-se uma alteração nas frequências de ressonância até aproximadamente 1 Hz, após essa faixa as curvas da estrutura com e sem mola são próximas, tanto para o modo quanto para as frequências.

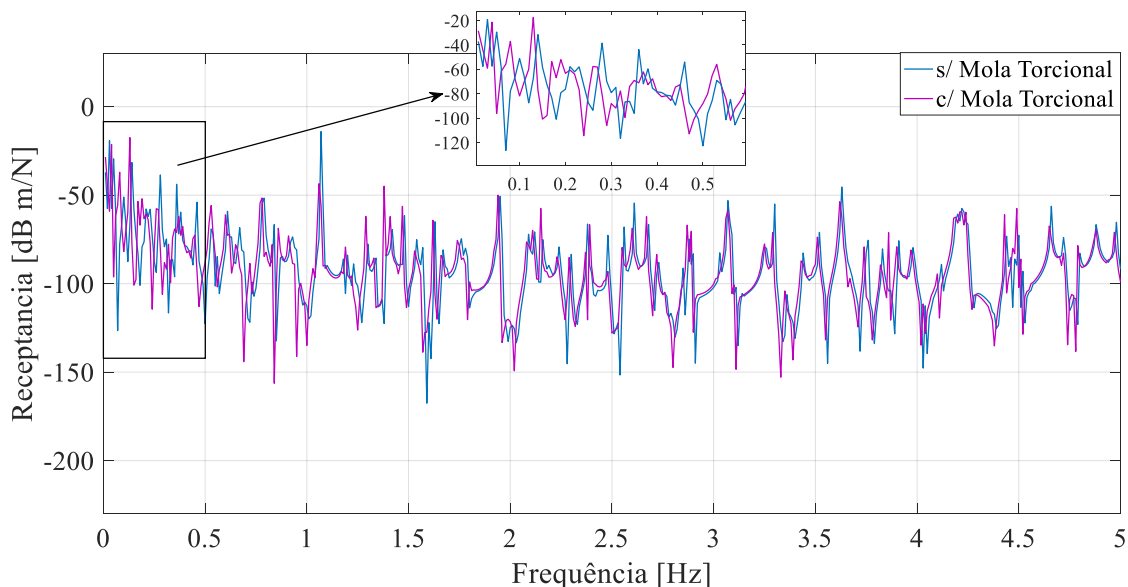


Figura 4. 8: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga unitária no GDL nº5

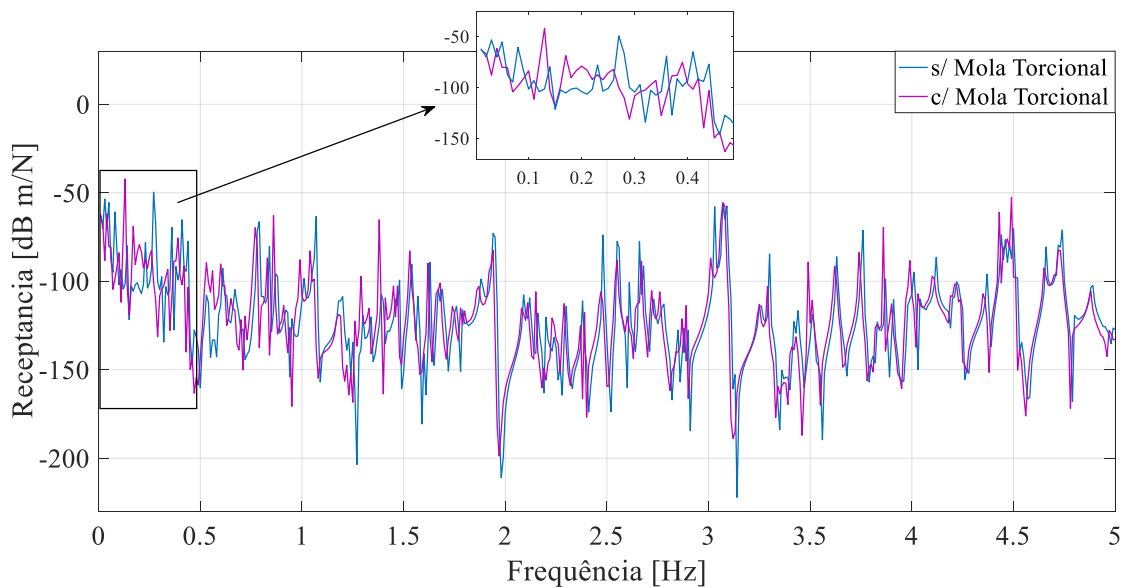


Figura 4. 9: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga unitária no GDL nº5

4.2.2 Excitações por cargas pontuais de vento e chuva

Nessa seção são apresentadas as análises das respostas dinâmicas da ponte submetidas as cargas pontuais como recomendado pelas normas brasileiras NBR-7187 (2003), NBR-6123 (1988) para cargas de vento, e em FU e LI (2016) para as cargas de chuva e vento com chuva.

Todas as estruturas estão sujeitas as vibrações devidas as cargas causadas por veículos, pessoas ou fenômenos naturais (efeitos de ventos, chuva e entre outros). Segundo CHOI (2001), caso coincida as frequências da força de excitação com as frequências naturais da estrutura, poderá ocorrer um fenômeno chamado ressonância, fenômeno esse que acarreta o aumento das amplitudes de oscilação em sistemas que possuem baixo amortecimento, ocasionando degradação de elementos estruturais, resultando em efeitos catastróficos. Na Figura 4.10 o cabo é excitado de forma pontual com a força de vento, chuva e vento com chuva com velocidades básicas de 20 m/s, considerando a categoria de terreno que correspondem a terrenos planos ou ondulados com obstáculos, tais como sebes, muros e poucos quebra-ventos. Os obstáculos têm altura média de 3,0 metros.

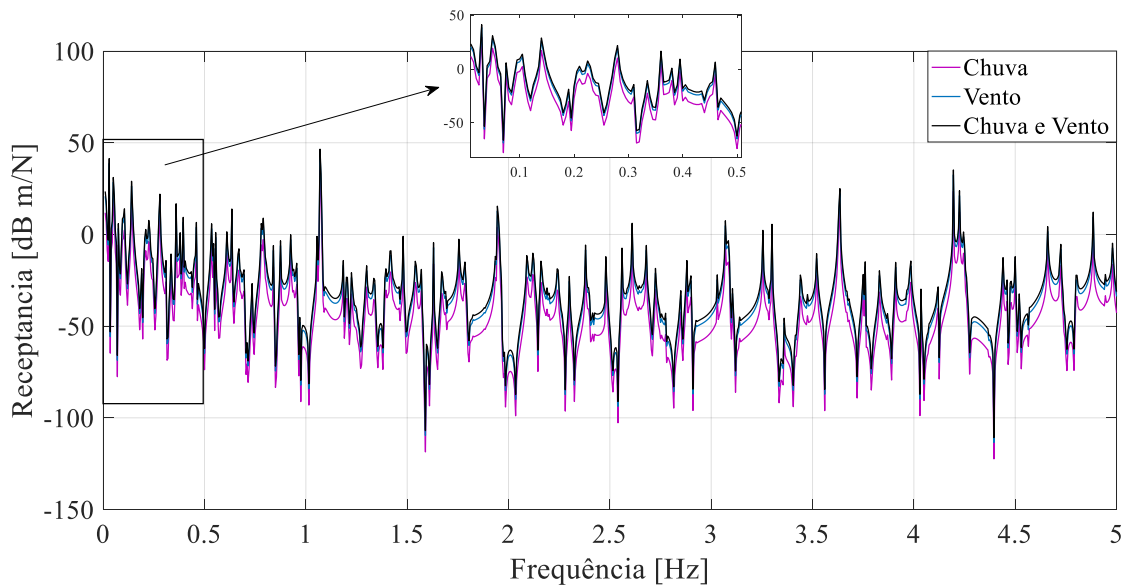


Figura 4.10: FRF medida no ponto 5, dada excitação por vento, chuva e vento-chuva no GDL nº 5

As FRFs obtidas apresentaram uma diferença nas amplitudes mantendo mesmo modos de vibrar e frequências de ressonância, tendo maior magnitude aquelas que foram excitadas com vento e chuva que somadas apresentam uma maior intensidade de força.

A resposta da ponte estaiada para uma carga de chuva foi estudada considerando uma excitação nos pontos de cor azul nos cabos, e na cor vermelha na estrutura da ponte, sendo no ponto de acoplamento e no engaste conforme demonstrados na Figura 4.3. A resposta dinâmica devida a essa carga é mostrada nas Figuras 4.11 a 4.13, tem-se que para excitação com carga de chuva as receptâncias apresentam alteração na amplitude, mas com as mesmas frequências de ressonância.

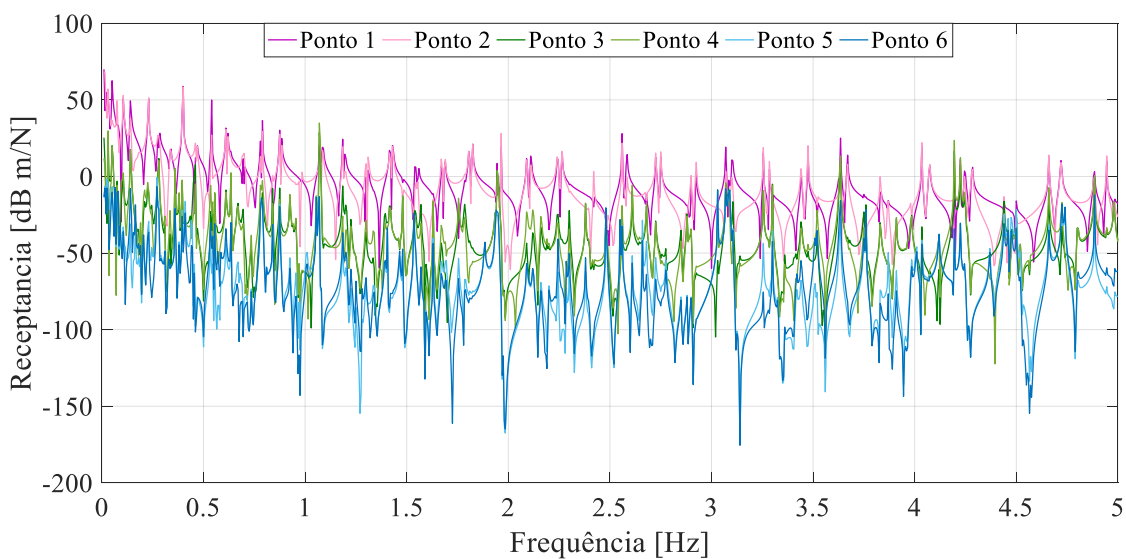


Figura 4.11: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de chuva no GDL nº5

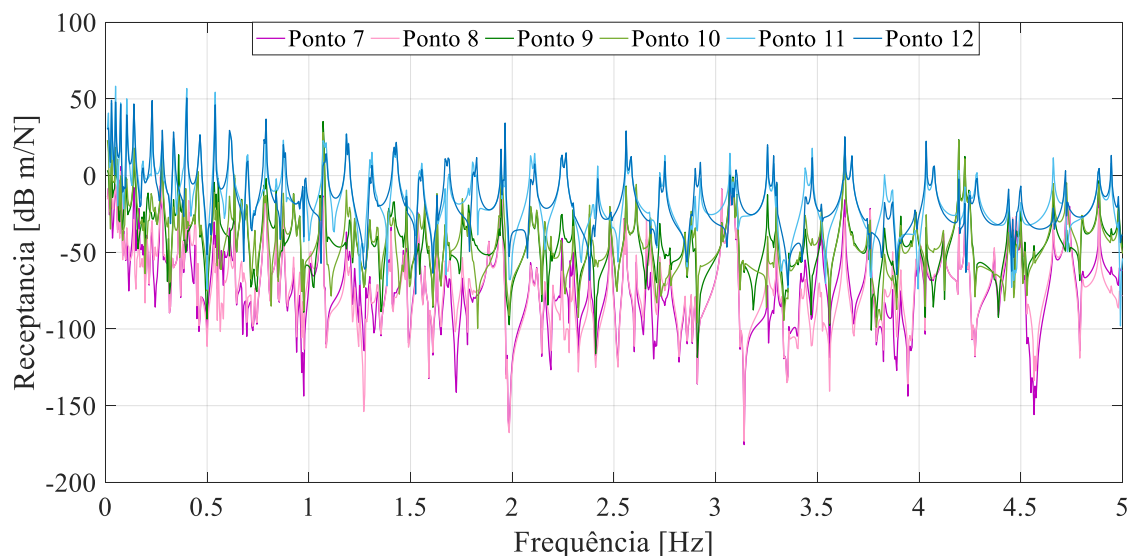


Figura 4. 12: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de chuva no GDL nº 5

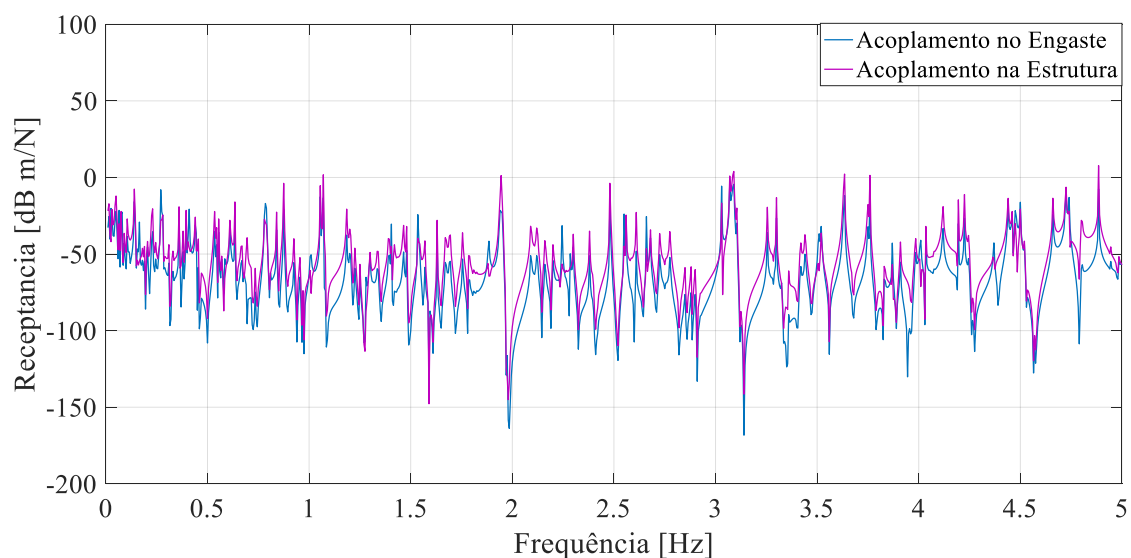


Figura 4. 13: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de chuva no GDL nº5

Assim como foi na análise de excitação de carga pontual unitária, inclui-se a mola no apoio. Observa-se uma mudança da resposta dinâmica e das receptâncias para a ponte com e sem mola como mostrado nas Figuras 4.14 e 4.15. A FRF impressa em linha de cor roxa é a FRF considerando a mola rotacional de $K\phi = 100 \text{ kgf/m}^2$ em cada engaste. Em baixa frequência há uma diferença na receptância e após 1 Hz ela diminui, apresentando um pequeno aumento de amplitude para o modelo sem as molas no contorno.

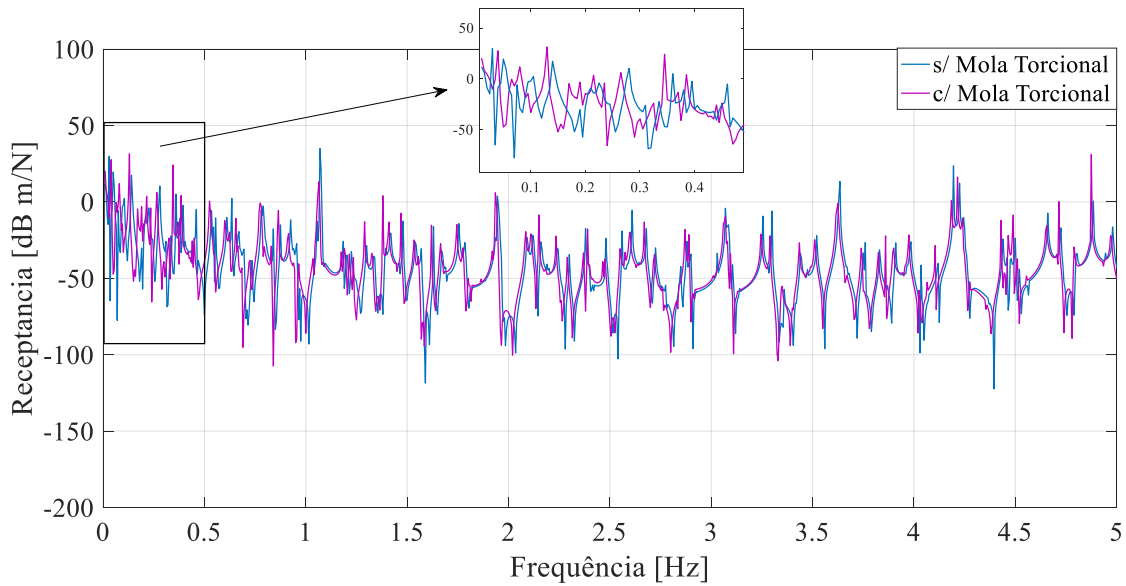


Figura 4. 15: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva no GDL nº5

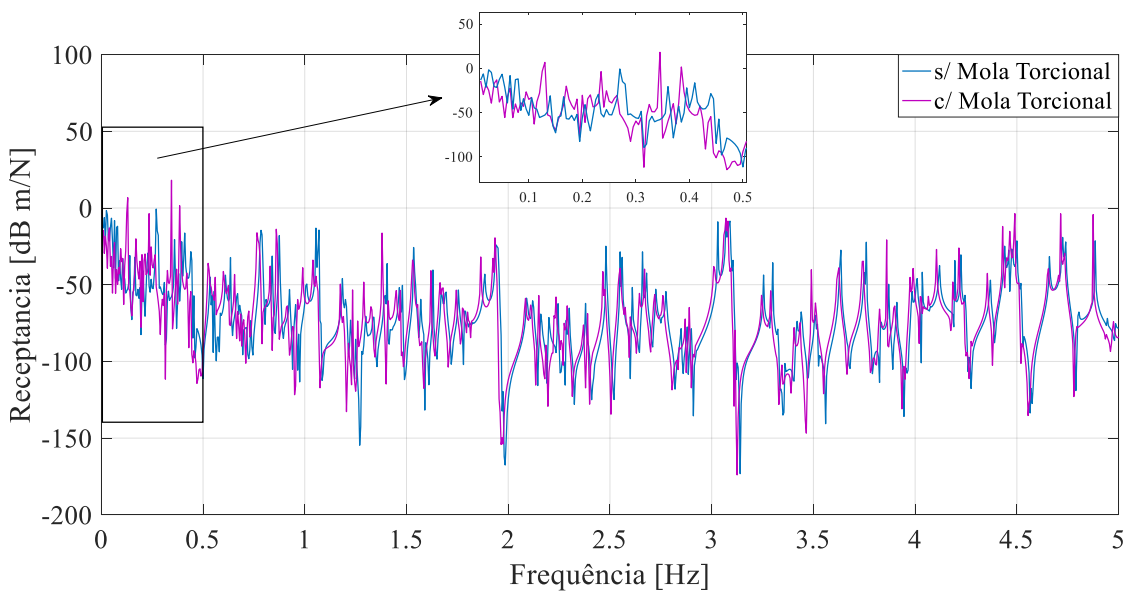


Figura 4. 14: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva no GDL nº5

Assumindo uma carga de excitação devido ao vento, com as características apresentadas na Tabela 4.2, obtém-se a receptâncias nos pontos de 1 a 12 dada excitação pontual por vento no nó 5. Da Figura 4.16 a 4.18 são representadas as FRFs oriundas das excitações pontuais do ponto com a carga de vento, que têm o comportamento dinâmico similar as análises anteriores com mudança apenas nas amplitudes.

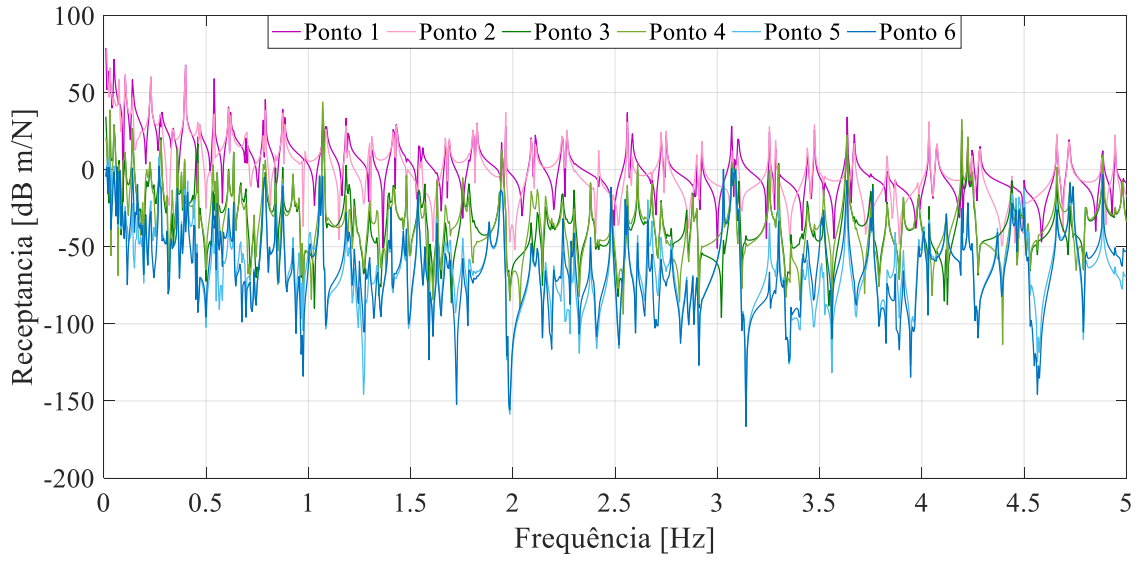


Figura 4. 17: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de vento no GDL n° 5

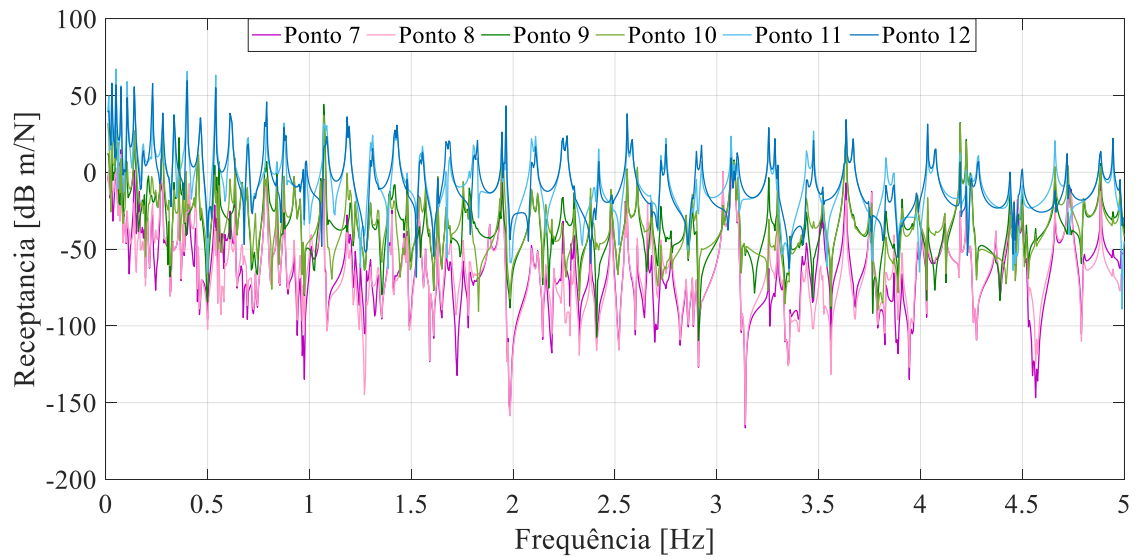


Figura 4. 16: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de vento no GDL n° 5

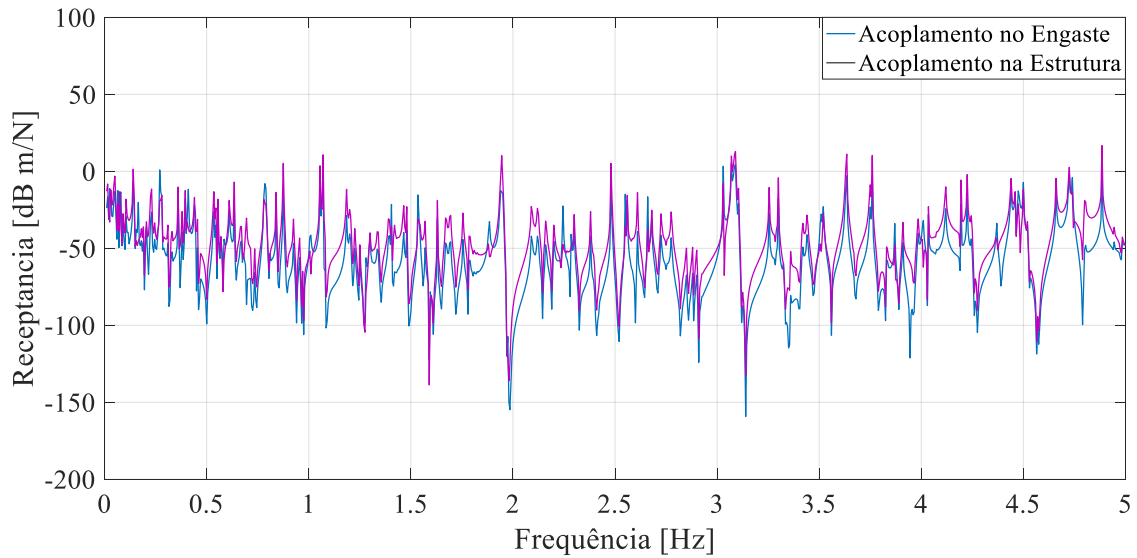


Figura 4. 18 FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de vento no GDL nº5

As Figuras 4.19 e 4.20 ilustram as receptâncias nos pontos 4 e 5 com adição da mola no contorno sob a ação da carga de vento no nó 5. Essas seguem a dinâmica dos outros casos apresentados.

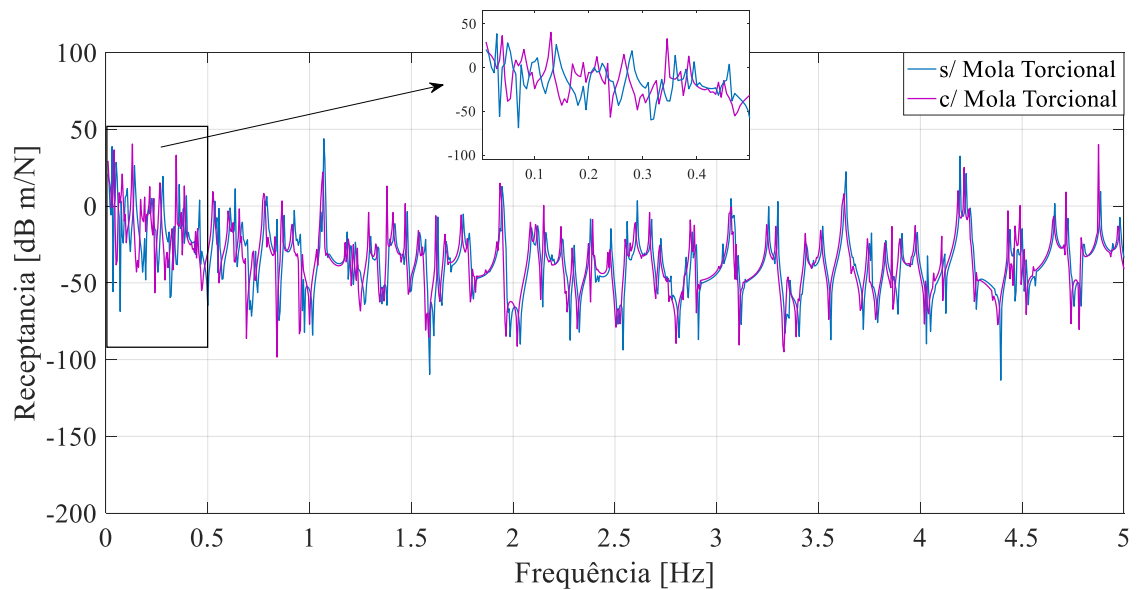


Figura 4. 19: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento no nó nº 5

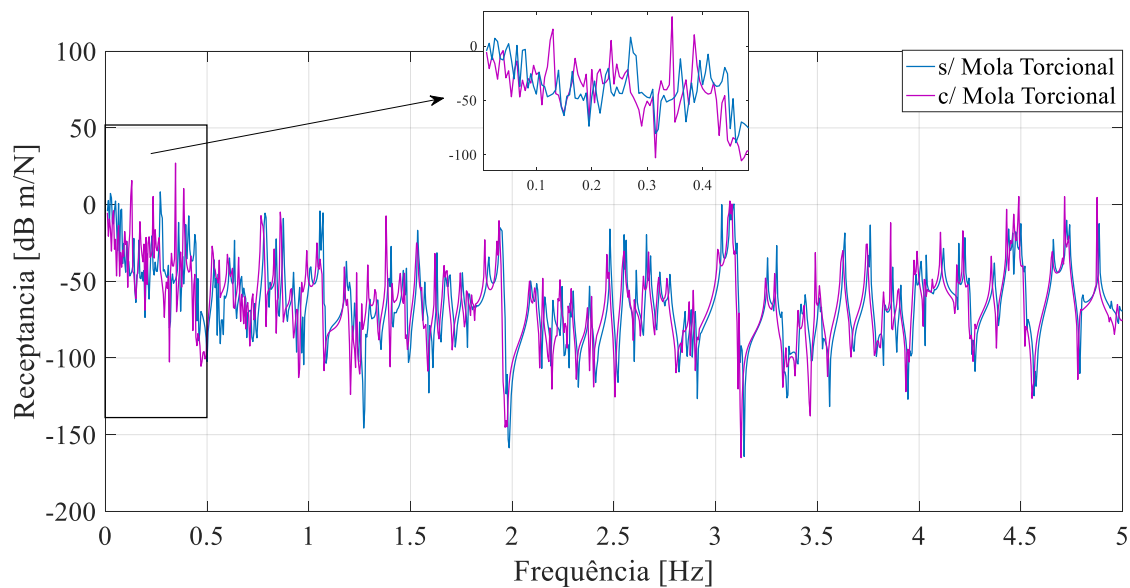


Figura 4. 20: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento no nó nº 5

Comparando as FRFs resultantes da excitação com carga de chuva (Figuras 4.11 a 4.15) com as FRFs resultantes da excitação com carga de vento (Figuras 4.16 a 4.20), percebe-se que o comportamento referente a ação do vento, é semelhante ao comportamento da ação da carga chuva, pois as duas cargas não influenciam o padrão da resposta dinâmica, mediante aos valores das cargas adotadas. Devido ao aumento da magnitude da força empregada, tem-se que as respostas apresentam uma diferença na amplitude em comparação com a análise considerando a força da chuva.

Na análise de excitação do sistema por vento e chuva simultaneamente, foram adotados os mesmos valores das análises anteriores, mantendo também os pontos de excitação e medição das respostas. Nas Figuras 4.21 a 4.23 estão representadas as receptâncias oriundas das excitações pontuais da ponte com a carga de vento e chuva simultâneos

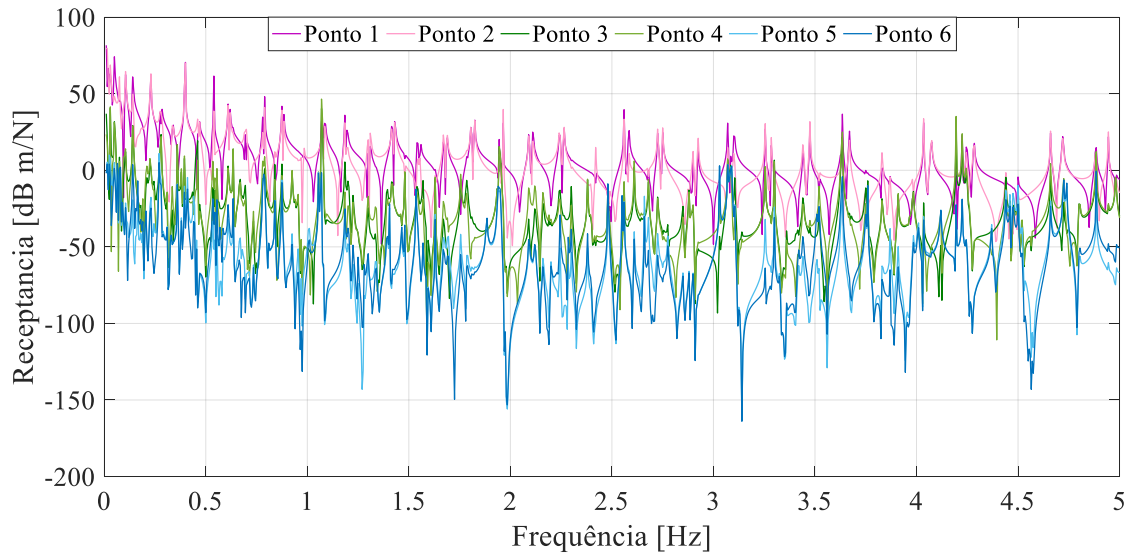


Figura 4. 21: FRFs dos Ponto de 1 a 6 com excitação de carga de chuva e vento simultâneas no nó nº 5

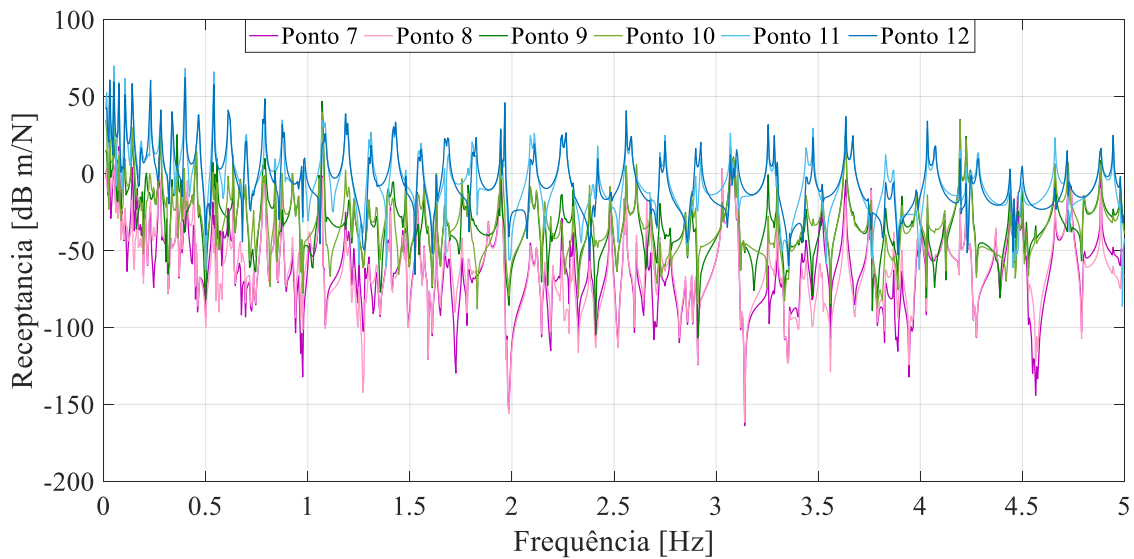


Figura 4. 22: FRFs dos Ponto de 7 a 12 com excitação de carga de chuva e vento simultâneas no nó nº 5

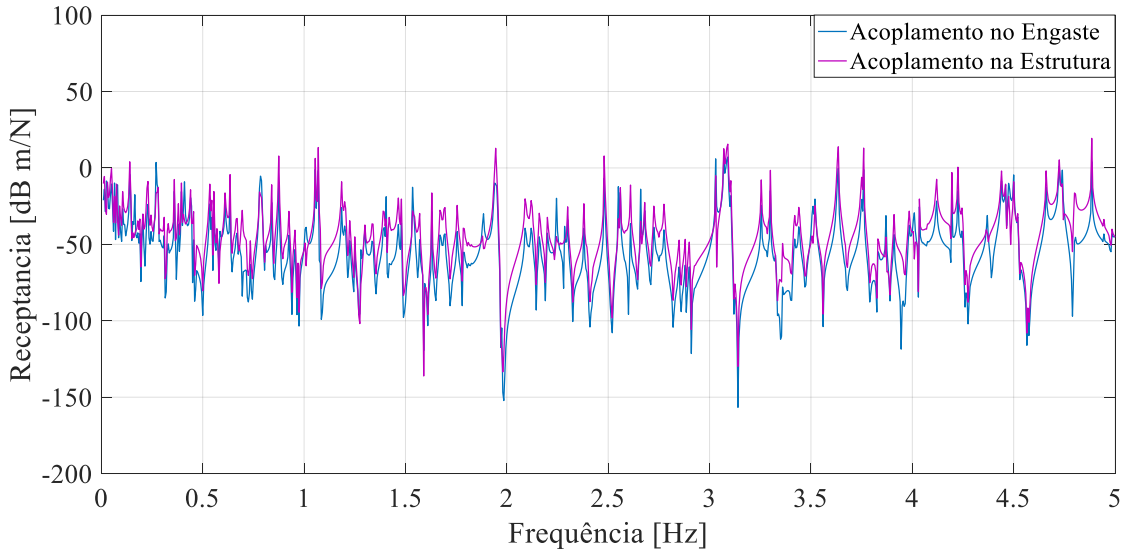


Figura 4. 23: FRFs do Acoplamento no Engaste e no Acoplamento na estrutura com excitação de carga de chuva e vento simultâneos no nó nº5

Para a análise de excitação de carga pontual de vento e chuva simultâneos, faremos também a inclusão das restrições nos engastes como podemos observar nas Figuras 4.24 e 4.25.

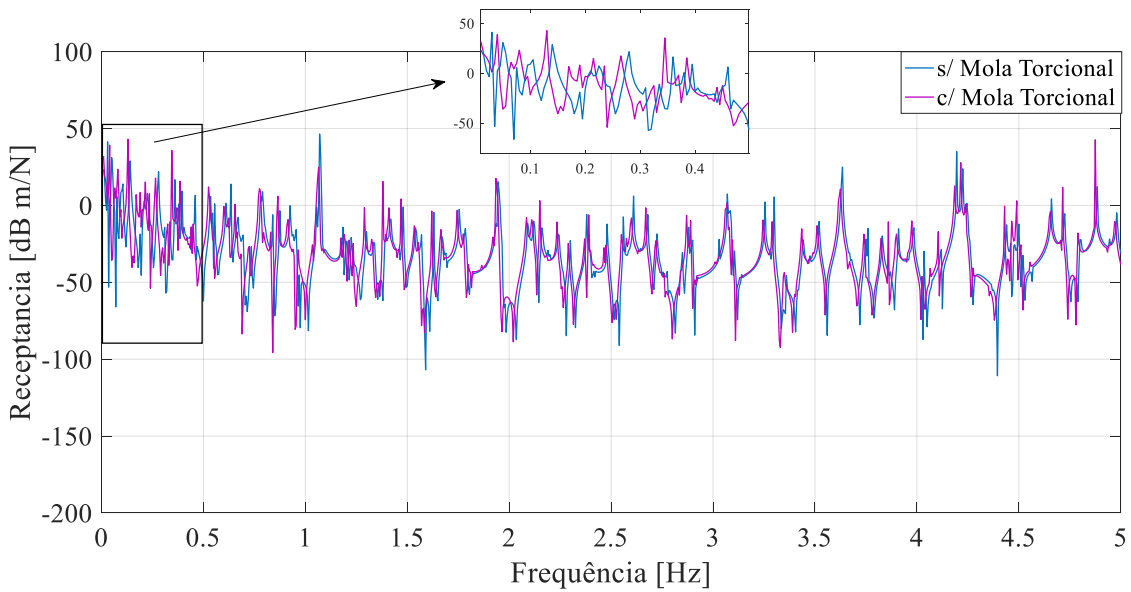


Figura 4. 24: FRFs do Ponto 4 sem e com adição da mola com excitação de carga de chuva e vento simultâneos no GDL nº 5

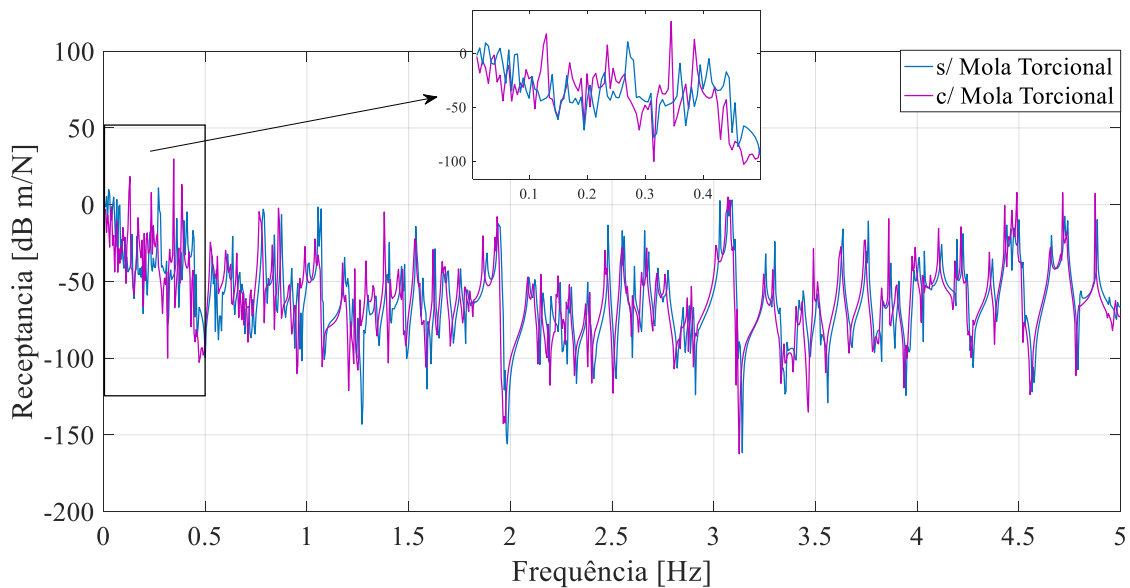


Figura 4. 25: FRFs do Ponto 5 sem e com adição da mola com excitação de carga de vento e chuva simultâneos no GDL n° 5

A excitação de vento e chuva na estrutura apresentou o mesmo comportamento dinâmico que as demais análises, com predominância do modo pertencente da estrutura excitada. Devido ao aumento da magnitude da força empregada, que é o somatório das ações isoladas, tem-se que as respostas apresentam uma diferença na amplitude em comparação com a análise considerando a força da chuva e no caso da força do vento apresentou uma mesma magnitude em relação a excitação pontual de vento e chuva.

4.2.3 Excitações aleatórias

Nessa seção demonstra-se as análises das respostas da estrutura submetidas a cargas aleatórias, seguindo as recomendadas das normas NBR-7187 (2003) e NBR-6123 (1988) para cargas de vento e as pesquisas realizadas por FU e LI (2016b) para as cargas de chuva e vento com chuva. Nessa pesquisa foram utilizadas as PSDs de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi, levando em consideração que as mesmas apresentaram decaimentos diferentes, onde a PSD de ruído branco se manteve constante, em toda faixa de frequência de excitação, a PSD de Kaimal apresenta um decaimento na potência partindo do início da faixa de frequência de excitação e a PSD de Kanai-Tajimi inicia constante na frequência e após 10^0 Hz apresenta um decaimento da potência do sinal, conforme demonstrado na Figura 4.26.

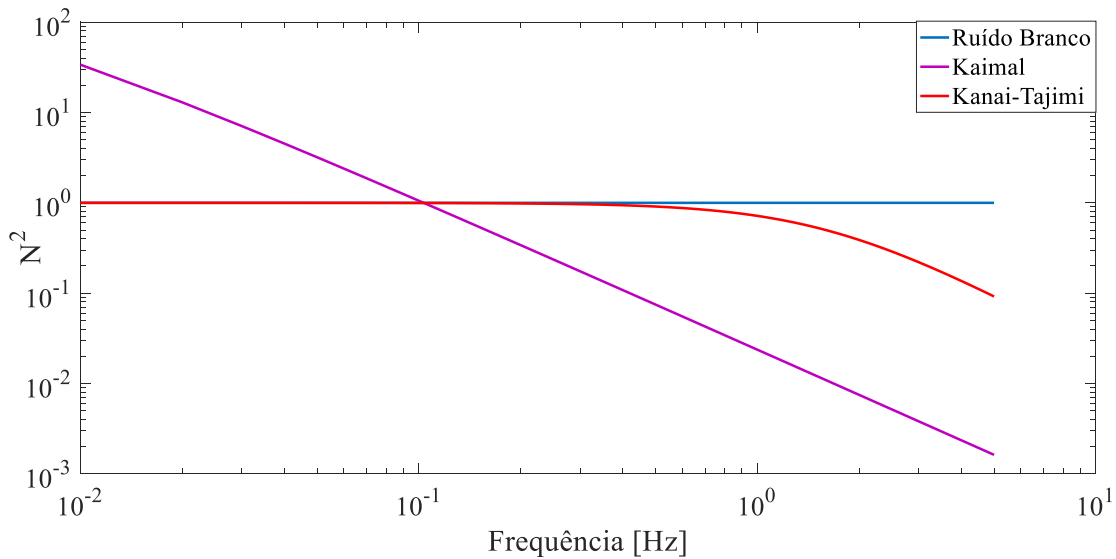


Figura 4. 26: PSD da força de excitação para ruído branco (azul), Kaimal (roxa) e Kanai – Tajimi (vermelha).

A Figura 4.27 ilustra as PSDs no domínio do tempo de ruído branco, Kaimal e Kanai–Tajimi, onde é visível o comportamento individual de cada espectro.

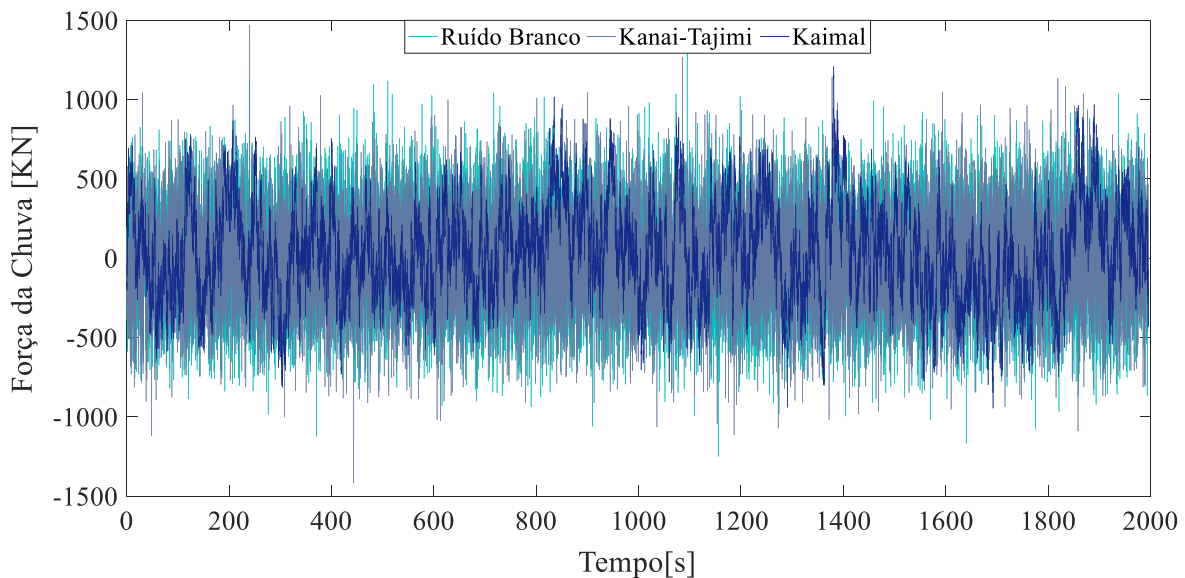


Figura 4. 27: PSDs no domínio do tempo de Ruído Branco, Kaimal e Kanai-Tajimi para a carga de vento.

4.2.4 Análise dinâmica da ponte estaiada sob excitação aleatória

Os espectros de carregamentos aleatórios foram aplicados de forma pontual no cabo no GDL nº 5, para observar a resposta na banda de frequência analisada foi de 0 a 5 Hz, assim como as análises apresentadas em seção 4.2.2. Na Figura 4.28 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de ruído branco relacionado com uma carga de chuva. Na Figura 4.28(a) apresenta PSD obtida no ponto 4 e a 4.28(b) no

ponto 5. Em ambos os pontos de análise a linha roxa é a PSD da resposta dinâmica e a curva em azul a FRF. Comparando as duas curvas, roxa e azul, observa-se que excitação aleatória impõe uma variabilidade na curva, porém ainda segue as frequências de ressonância e modas compondo a FRF do ponto analisado. O espectro da resposta da PSD mantém a sua amplitude em toda faixa de frequência analisada.

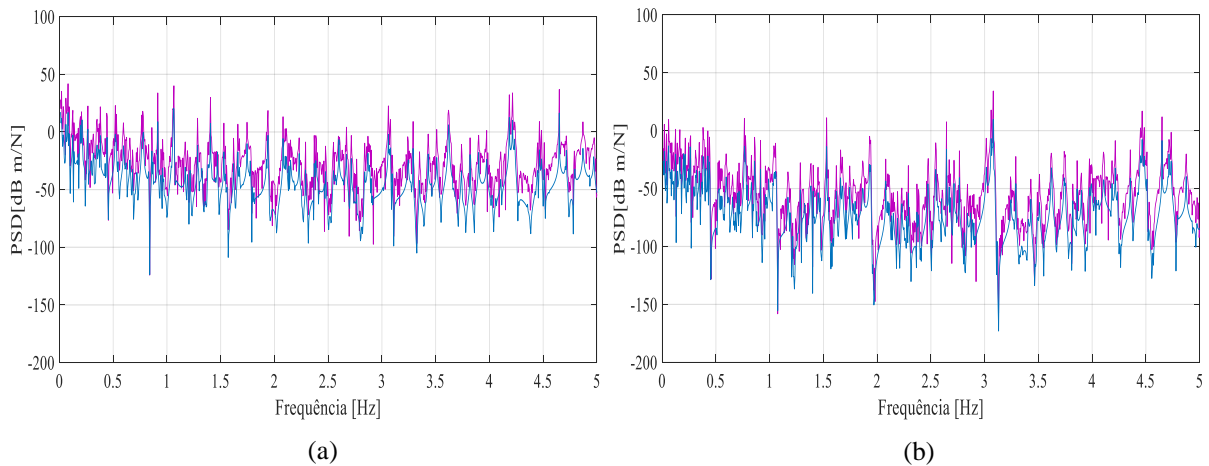


Figura 4. 28: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.29(a) apresenta PSD obtida no ponto 4 e a 4.29(b) no ponto 5 dada uma excitação por ruído branco relacionado com uma amplitude de vento. Em ambos os pontos de análise a linha roxa é a PSD da resposta dinâmica e a curva em azul a FRF. Comparando as duas curvas, roxa e azul, observa-se que excitação aleatória impõe uma variabilidade na curva seguindo o comportamento do caso anterior.

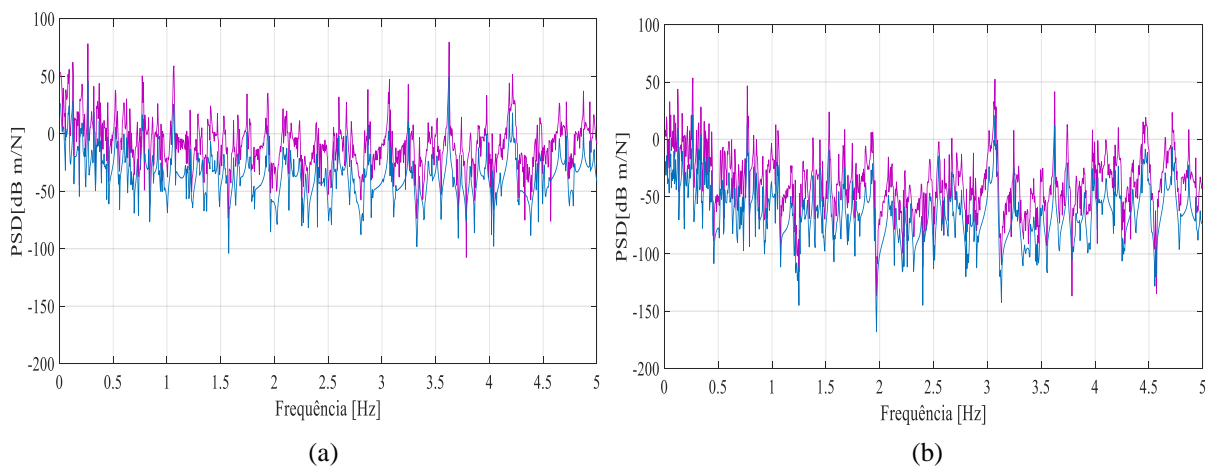


Figura 4. 29: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

Na Figura 4.30 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de ruído branco e carga de vento e chuva simultâneas. Neste caso, a PSD para as análises apresentadas nas Figuras 4.28 e 4.29 apresentam diferença apenas nas amplitudes.

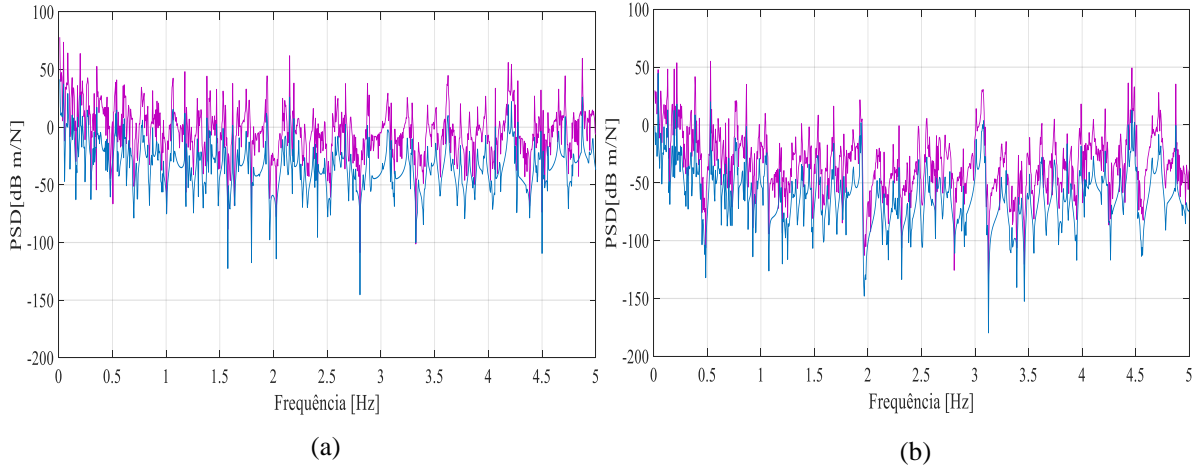


Figura 4. 30: FRF com espectro de excitação de ruído branco (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.31 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de Kaimal e combinado com uma amplitude de força de chuva. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.31 a) e 5 (Figura 4.31 b).

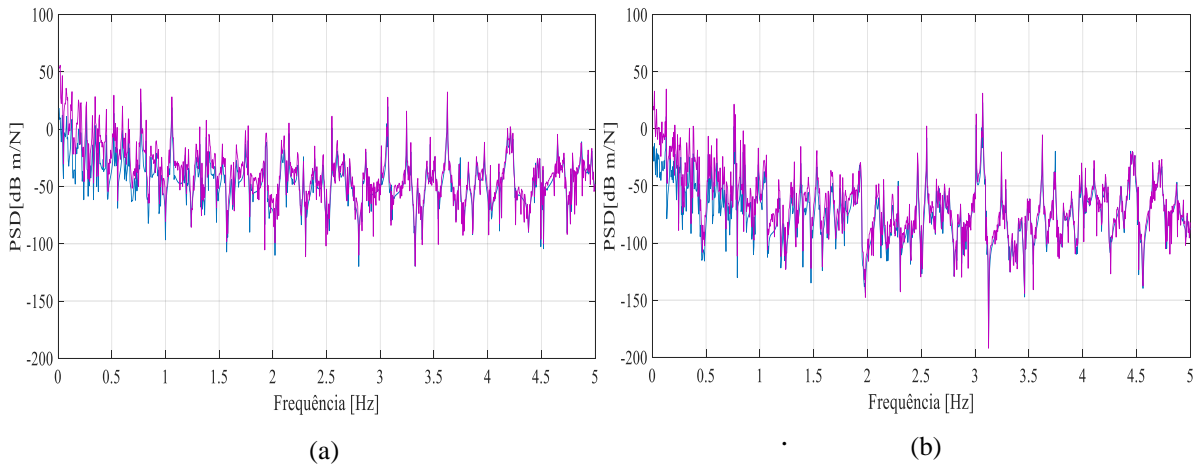


Figura 4. 31: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.32 apresenta o PSD da Ponte Estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de Kaimal combinado com uma amplitude de força de vento. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.32 a) e 5 (Figura 4.32 b).

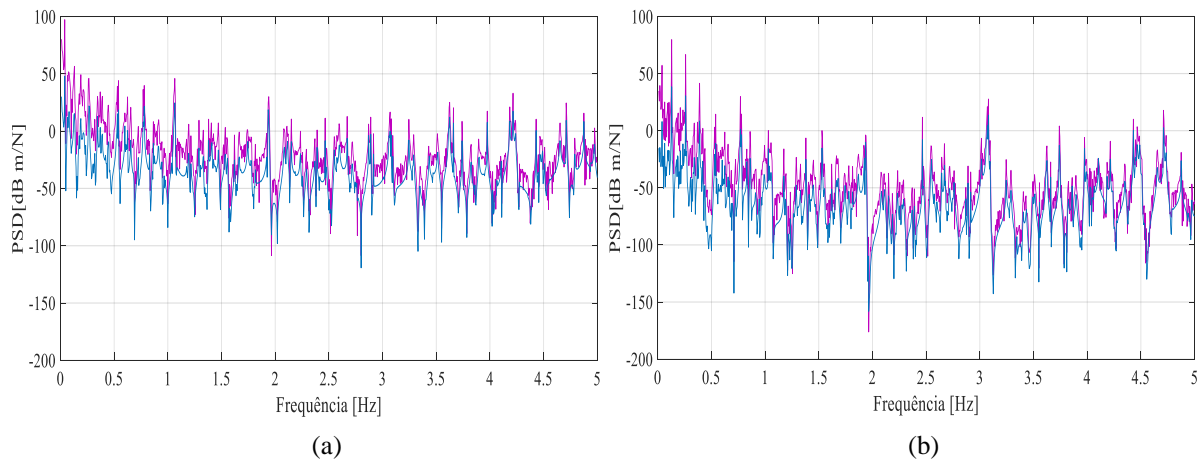


Figura 4. 32: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.33 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de Kaimal com carga de vento e chuva simultâneas. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.33 a) e 5 (Figura 4.33 b).

Todas as análises de vento, chuva e vento-chuva combinado com espectro aleatório de Kaimal apresenta um decaimento de amplitude do espectro da PSD ao longo da frequência. Esse efeito é lincado com a potência de Kaimal como demonstrado na Figura 4.26, onde para frequências mais baixas a densidade de potência é alto e decai ao longa da banda.

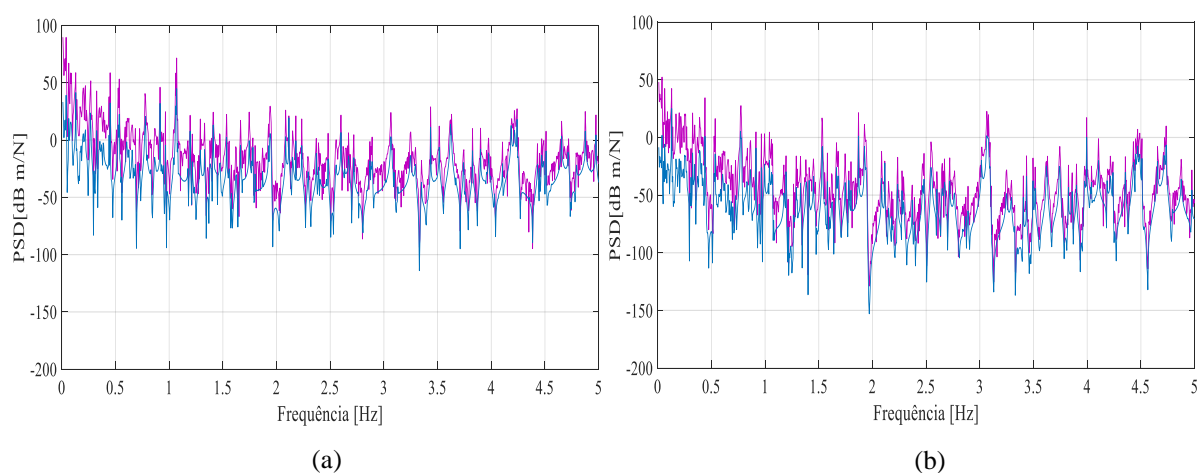


Figura 4. 33: FRF com espectro de excitação de Kaimal (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

As Figuras 4.31 a 4.33 mostram os resultados das PSD Kanai-Tajimi, onde observa-se um decaimento dos resultados em relação a excitação por ruído branco, esse filtro de primeira ordem aproxima melhor os efeitos das cargas transmitidas na ponte estaiada.

A Figura 4.34 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de Kanai-Tajimi combinado com uma amplitude de força de chuva. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.34 a) e 5 (Figura 4.34 b).

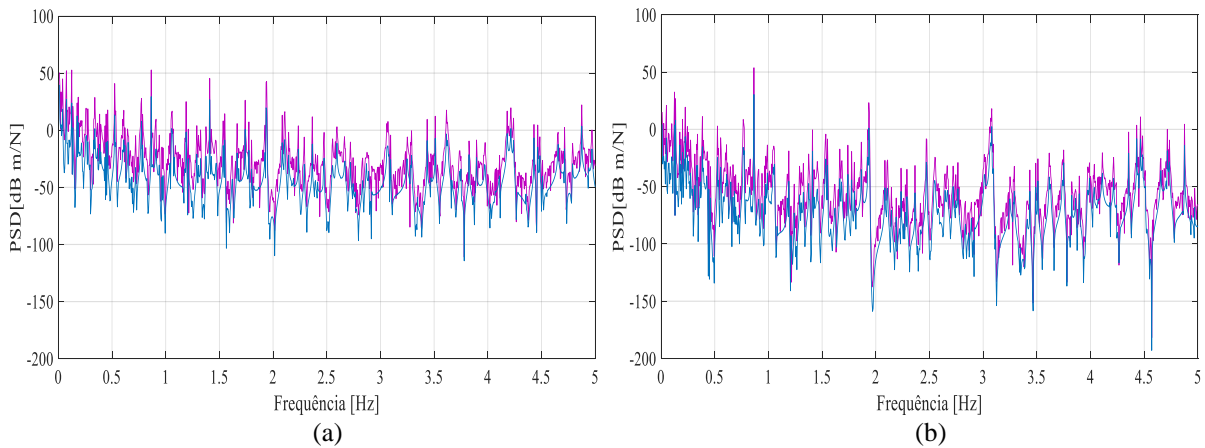


Figura 4. 34: FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi (Linha Roxa) para carga de chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.35 apresenta o PSD da Ponte Estaiada submetida a excitação aleatória com PSD de Kaimal combinado com uma amplitude de força de vento. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.35 a) e 5 (Figura 4.35 b).

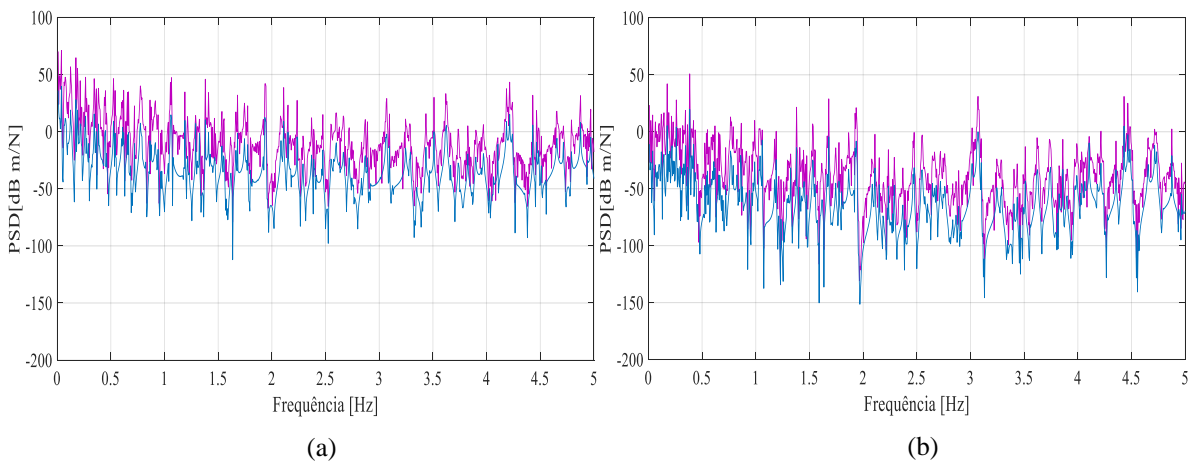


Figura 4. 35: FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi (Linha Roxa) para carga de vento (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

A Figura 4.36 apresenta o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória om PSD de Kanai-Tajimi com carga de vento e chuva simultâneas. A curva roxa é a PSD e a azul a FRF obtidas nos pontos 4 (Figura 4.36 a) e 5 (figura 4.36 b).

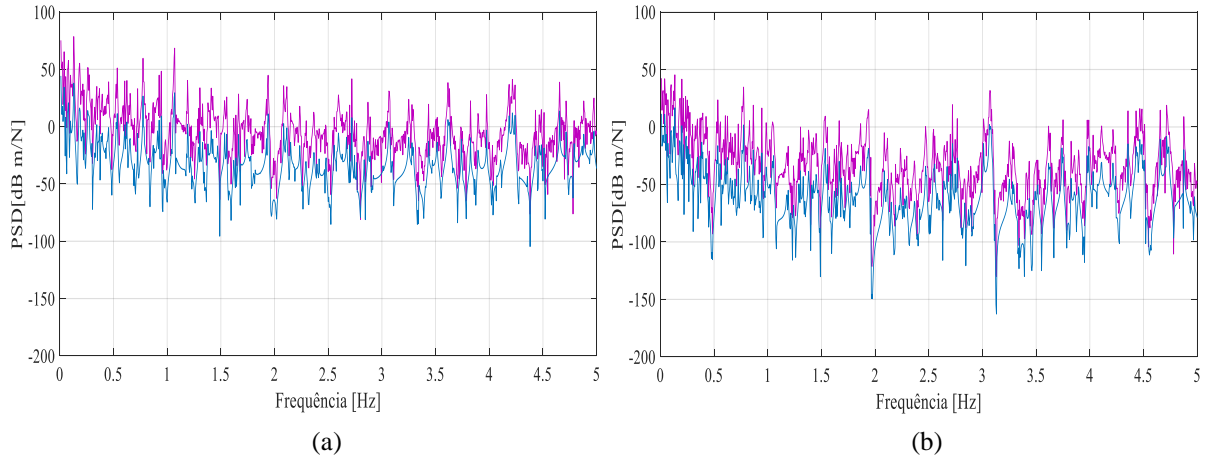


Figura 4. 36: FRF com espectro de excitação de Kanai-Tajimi (Linha Roxa) com carga de vento-chuva (Linha Azul): Ponto 4 (a) e Ponto 5 (b)

Em todo os casos, os efeitos das excitações aleatórias exerceram uma grande influência nas PSDs da ponte. Os casos apresentaram decaimentos diferentes para cada PSD em comparação com a FRF. Onde a amplitude da PSD de ruído branco se manteve constante em toda faixa de frequência de excitação, a PSD de Kaimal apresenta um decaimento na potência partindo do início da faixa de frequência de excitação e a PSD de Kanai-Tajimi inicia constante na frequência, mas apresenta um decaimento da potência do sinal na faixa de frequência de excitação. O decaimento de amplitude da PSDs não afeta a análise dinâmica da ponte.

4.2.5 Análise dinâmica da ponte dada excitações de cargas determinísticas e inclusão de incerteza na condição de contorno

Nessa seção são apresentadas as análises das respostas submetidas as cargas determinísticas de vento, chuva e vento-chuva com inclusão de incertezas na condição de contorno para cargas.

Ao incluir as restrições nos suportes, mudanças significativas ocorreram na resposta dinâmica da estrutura submetidas a cargas aleatórias com incertezas na condição de contorno. O método de Monte Carlo foi utilizado para geração das amostras utilizadas na análise estatística. Resultados numéricos considerando excitações por vento e chuva com condição de contorno aleatórias são estimados no estais.

As Figuras 4.37 a 4.39 apresentam a FRF impressa em linhas vermelhas estimada considerando com valor nominal de $K\phi$ aleatório para cada engaste. A curva impressa em linhas azuis é a FRF média. A FRF média foi estimada considerando 300 amostras. A aleatoriedade considerada na mola do engaste tem valor médio de $K\phi = 100 \text{ kgf/m}^2$ e coeficiente de variação de 20%. A distribuição Gama foi assumida para a rigidez da mola (MACHADO *et al.* 2019).

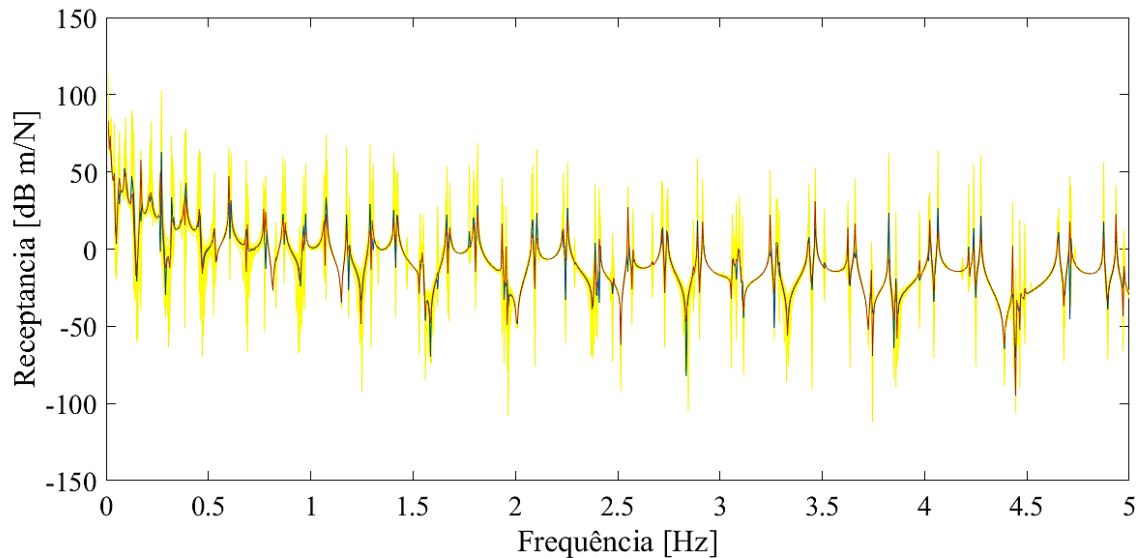


Figura 4. 37: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de chuva obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE

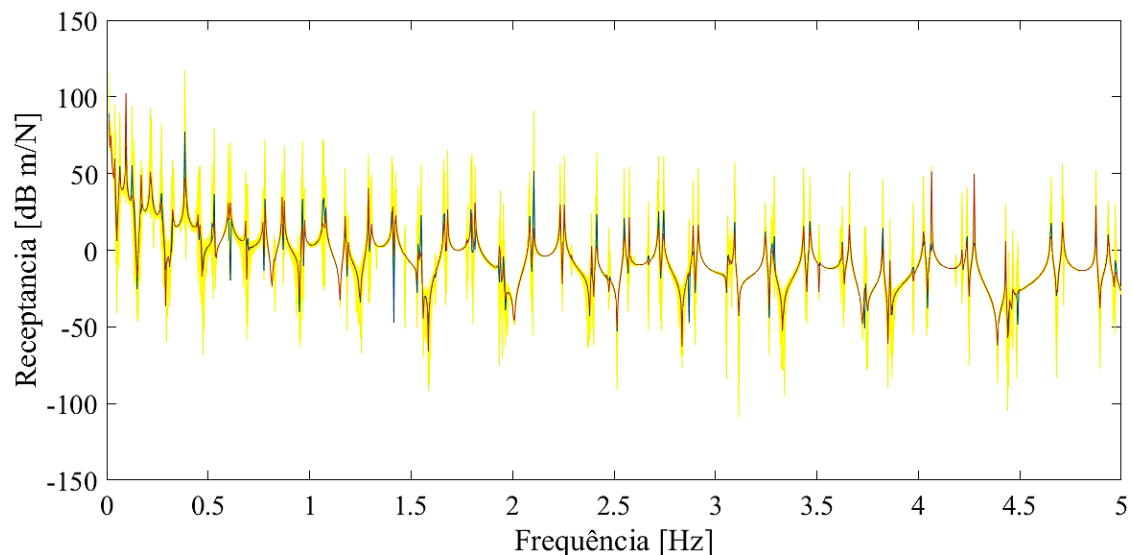


Figura 4. 38: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de vento obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE

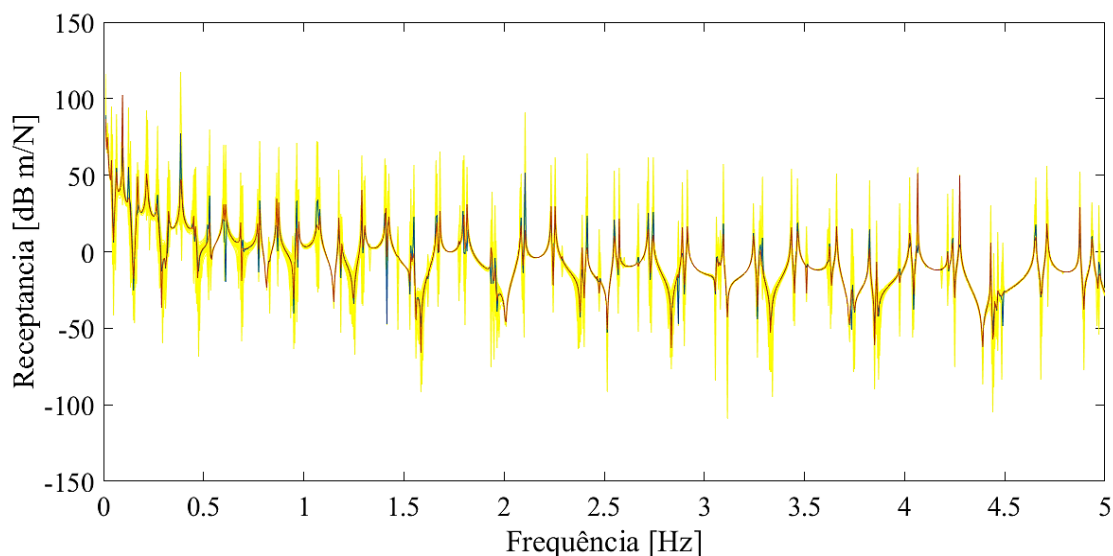


Figura 4. 39: A linha vermelha é a FRF determinística com excitação com carga de chuva-vento obtido no ponto 5; A linha azul é a FRF média e as linhas amarelas são as amostras de nuvem, ambas calculadas em 5. Em todos os casos, as FRFs foram simuladas via MEE

A partir da realização da análise estocástica considerando a incerteza na condição de contorno, observou-se uma alteração significativa do mapeamento não linear, distorcendo a resposta estatística, apresentando uma influência considerável na resposta estrutural. Representar corretamente o modelo de condição de contorno é essencial e crucial para gerenciamento de informações sobre controle de vibração e confiabilidade estrutural.

4.2.6 Análise dinâmica da ponte dada excitações por espectros aleatórios e inclusão de incerteza na condição de contorno

Demonstra-se nessa seção as análises das respostas da estrutura submetidas a cargas de vento, chuva e vento-chuva associados aos espectros aleatórios com incertezas na condição de contorno.

Os carregamentos aleatórios foram aplicados de forma pontual no cabo com o intuito de observar a interferência dos modos da ponte na resposta a banda de frequência analisada foi de 0 a 5 Hz. O método de Monte Carlo foi utilizado para geração das amostras utilizadas na análise estatística. Devido as FRFs apresentarem uma diferença apenas nas amplitudes, foi considerado nessa análise somente a excitação com carga de vento e chuva simultâneas, nas Figuras 4.40 a 4.42 são apresentados o PSD da ponte estaiada submetida a excitação aleatória com incerteza nas condições de contorno com carga de chuva e vento com o PSD de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi.

A Figura 4.40 apresenta a PSD submetida a excitação com carga de chuva e vento com o PSD de ruído branco.

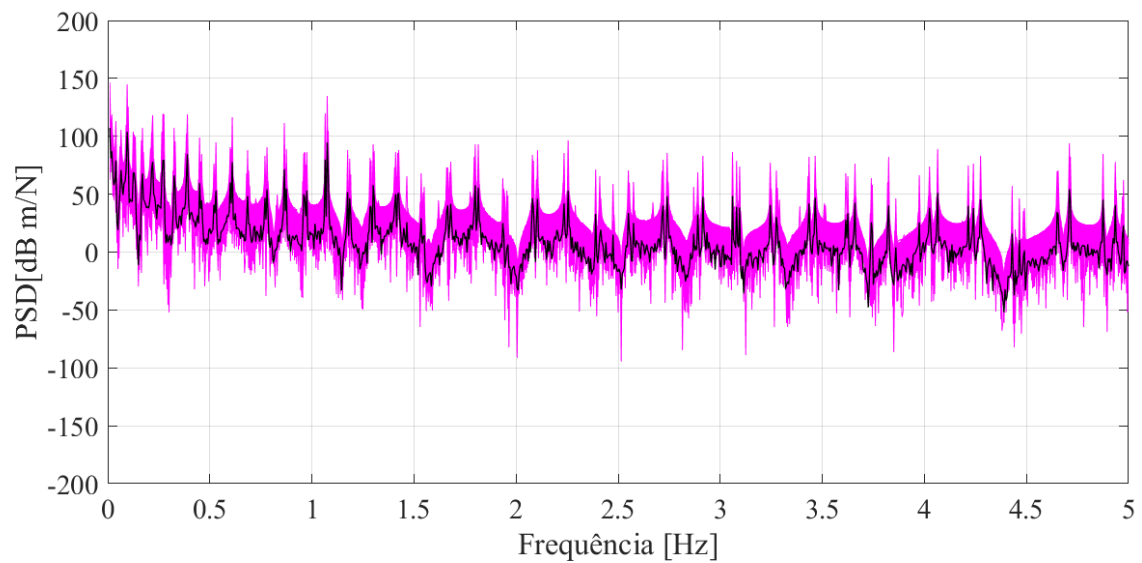


Figura 4. 40: As linhas roxas é a PSD de Ruído Branco com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.

Na Figura 4.41 é apresentado a PSD submetida a excitação com carga de chuva e vento com o PSD de Kaimal.

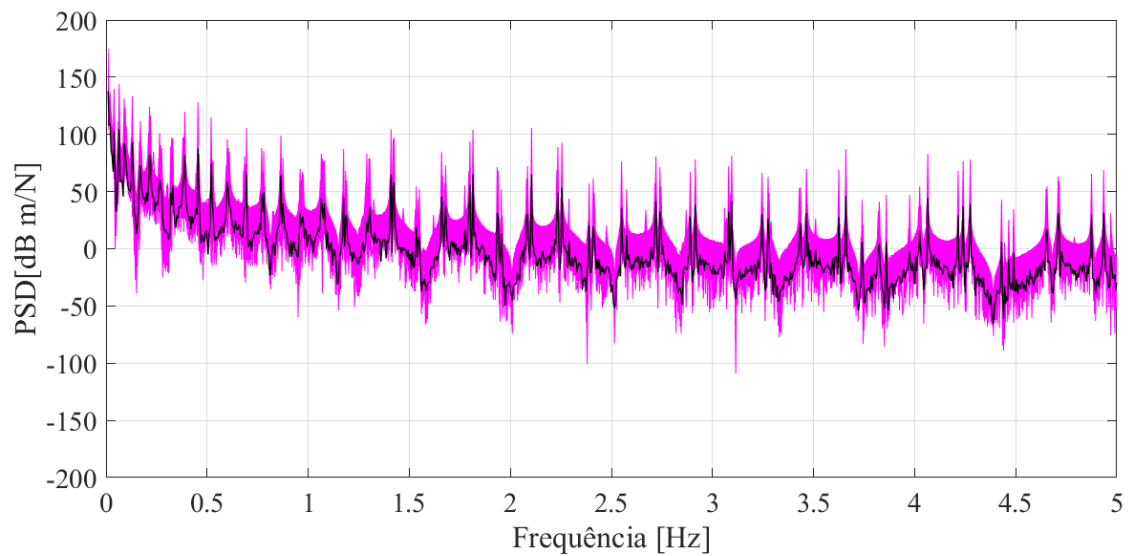


Figura 4. 41: As linhas roxas é a PSD de Kaimal com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.

Por último, na Figura 4.42 é apresentado a PSD submetida a excitação com carga de chuva e vento com o PSD de Kanai-Tajimi.

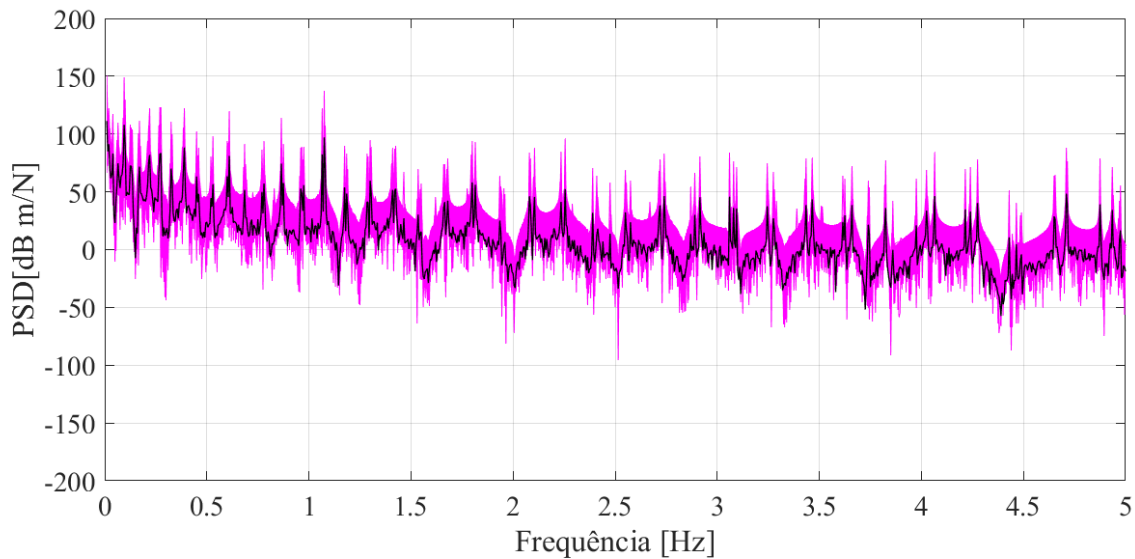


Figura 4.42: As linhas roxas é a PSD de Kanai-Tajimi com excitação com carga de chuva e vento simultâneas obtidas no nó 5; A linha preta é a PSD média também calculada no nó 5.

Em todo os casos, os efeitos das excitações aleatórias tiveram uma grande influência nas respostas do sistema onde é notório que a excitação de maior intensidade exerça maiores alterações nas amplitudes. Alguns casos apresentaram decaimentos diferentes em torno da média. A PSD de ruído branco se manteve constante em toda faixa de frequência de excitação, a PSD de Kaimal apresenta um decaimento na potência partindo do início da faixa de frequência de excitação e a PSD de Kanai-Tajimi inicia constante na frequência, mas apresenta um decaimento da potência do sinal na faixa de frequência de excitação. Nas Figuras 4.40, 4.41 e 4.42, as curvas em preto representa a média das PSDs e a roxa a nuvem de amostras geradas.

4.2.7 Análise estatística

As incertezas são intrínsecas nas propriedades geométricas e mecânicas das estruturas, bem como nas montagens ou juntas estruturais. As incertezas nas condições de contorno combinado com a excitação aleatória podem influenciar no tipo da aleatoriedade na resposta dinâmica estrutural e em alguns casos induzir não-linearidades. Nesta seção é apresentada análise estatística das respostas aleatórias geradas na seção 4.2.6. Para a análise estatística é realizada baseada na função de densidade de probabilidade (PDF) que foi estimada utilizando o valor *Root Mean Square* (RMS) de

cada PSD. As PDFs foram calculadas para amostras de 300 pontos representados pelo valor RMS de cada curva PSD gerada, utilizando a simulação de Monte Carlo, e a PDF foi estimada usando a função *ksdensity* do MATLAB.

A Figura 4.43 mostra o PDF da mola assumida como variável aleatória de média 100 kgf, COV de 0,2 sob o suporte da distribuição Gama.

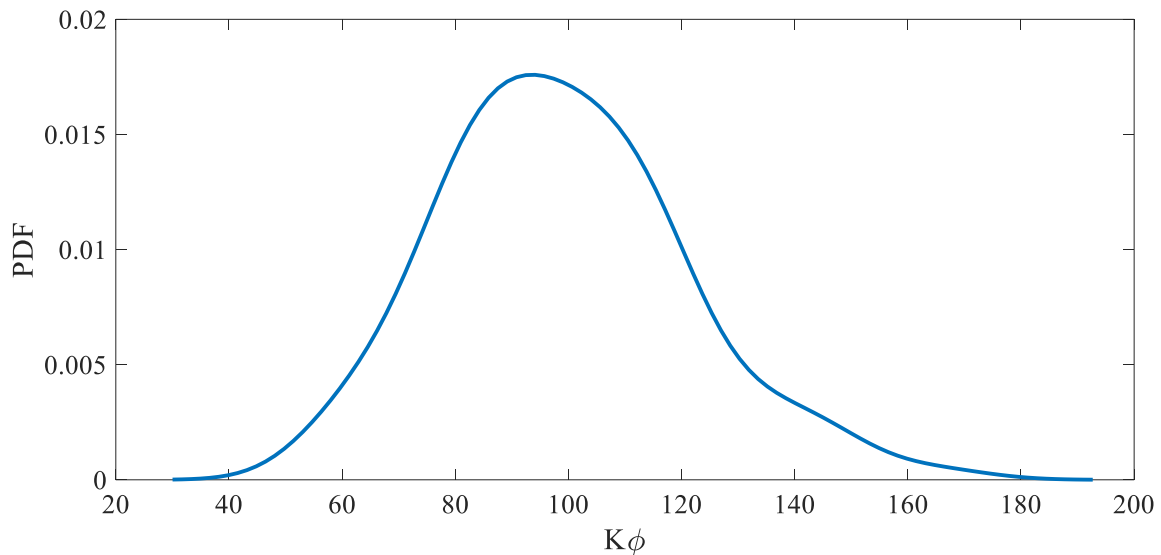


Figura 4. 43: PDF da mola de média 100 kgf e covariância 0.2

A Figura 4.44 mostra o PDF da FRF com mola aleatória assumida como variável aleatória de média 100 kgf, COV de 0,2 sob o suporte da distribuição Gama.

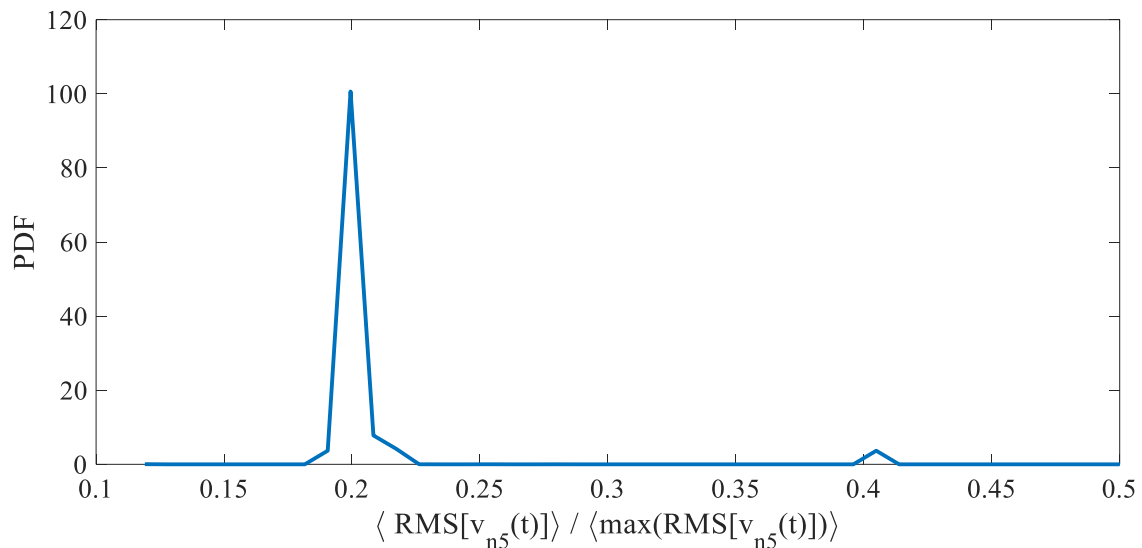
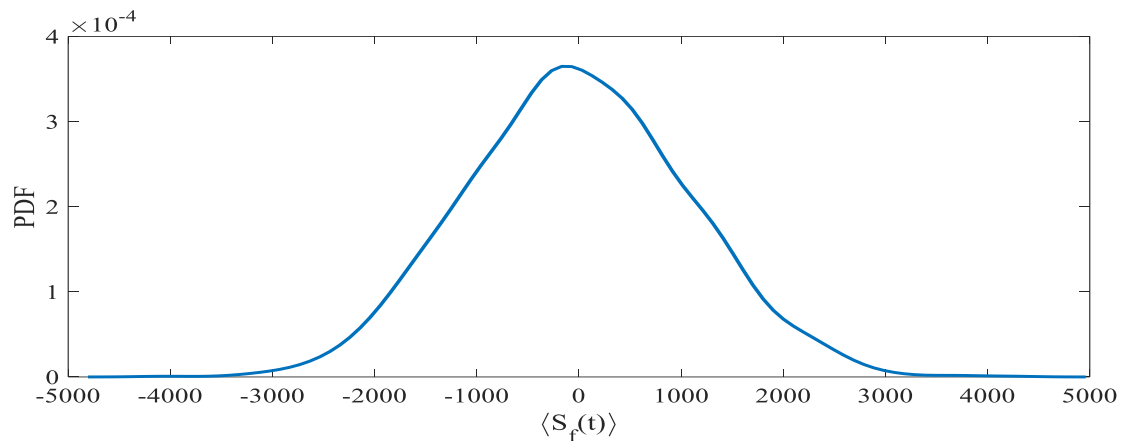


Figura 4. 44: PDF da FRF com mola aleatória

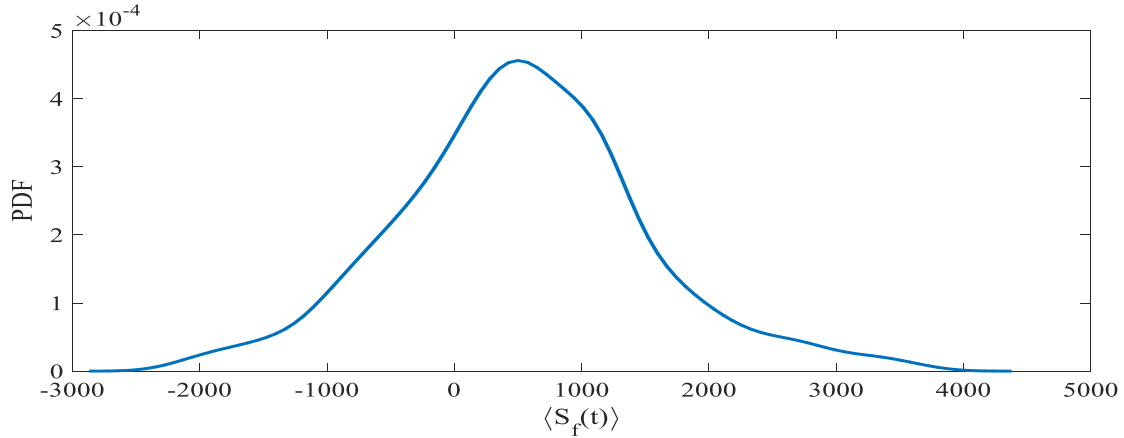
Cada PDF representa o efeito de incertezas dos parâmetros combinadas com as três excitações aleatórias na resposta dinâmica, podemos observar que as respostas da

PDF em relação a FRF com contorno aleatório com excitação pontual no nó nº 5 apresentaram basicamente o mesmo comportamento, apresentando uma diferença apenas nas amplitudes.

A Figura 4.45 (a) mostra o PDF da excitação de ruído branco no domínio temporal, (b) é a PDF da excitação Kaimal e (c) a PDF de excitação Kanai-Tajimi. As PDFs estimadas seguem uma PDF de suporte gaussiano. Para a excitação de ruído branco, esta é gaussiana. O Kaimal e Kanai-Tajimi tem um suporte marginal gaussiano com amplitude e de mais alta ordem, o que não altera o suporte da PDF.



(a)



(b)

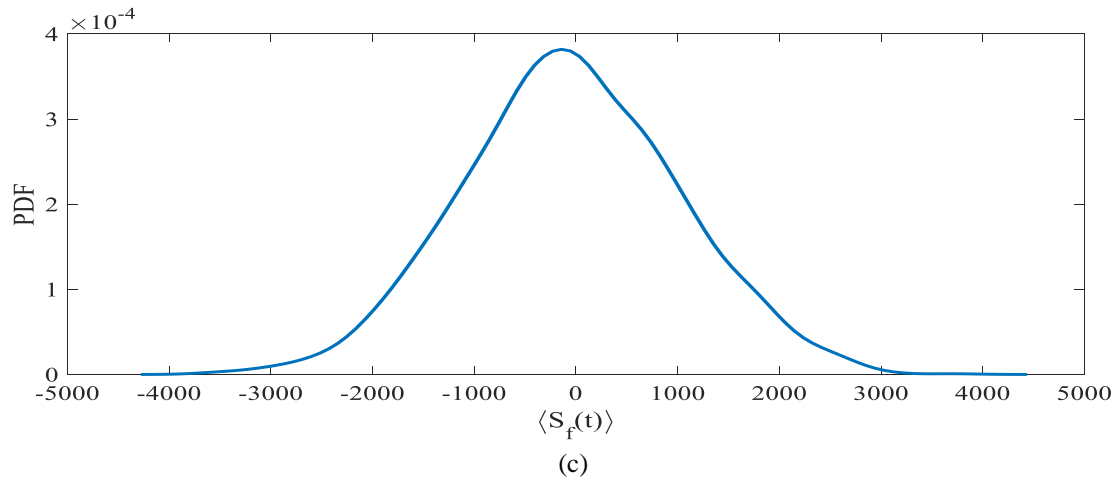
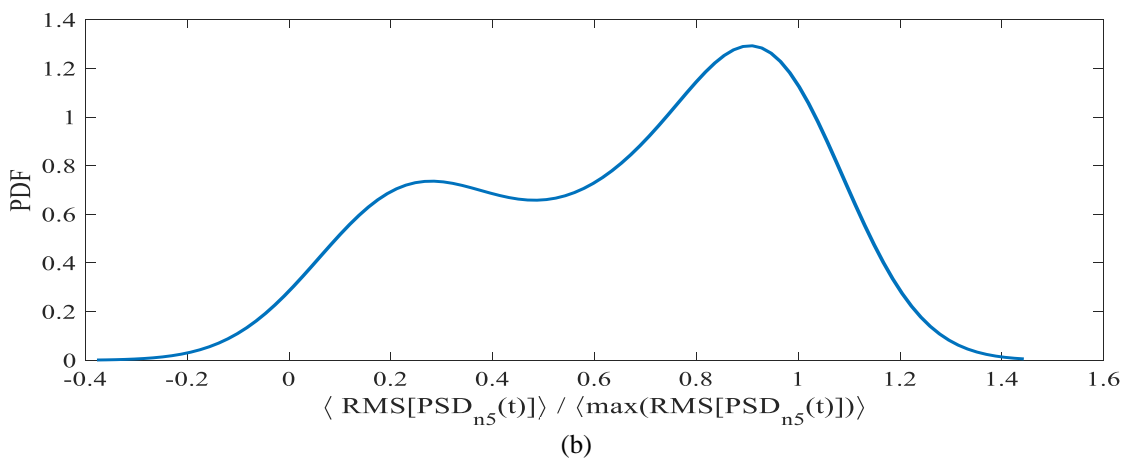
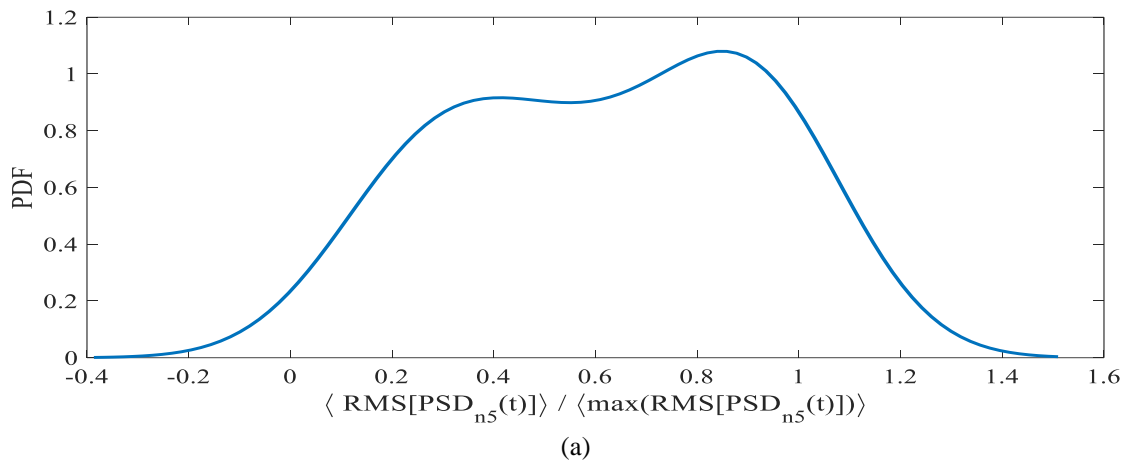


Figura 4. 45: Sinal da PDF em relação ao Espectro: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi

A Figura 4.46 (a-c) apresentam as PDFs marginais do valor RMS das densidades espectrais de potência estimadas no nó nº 5 sem considerar aleatoriedade de contorno. A forma das PDFs sofreu um espalhamento em torno do valor médio do RMS da resposta, se manteve com todo o suporte positivo e a distribuição se apresenta como uma PDF conjunta, onde não é possível identificar o seu tipo sem estudos mais aprofundados como os de entropia por exemplo.



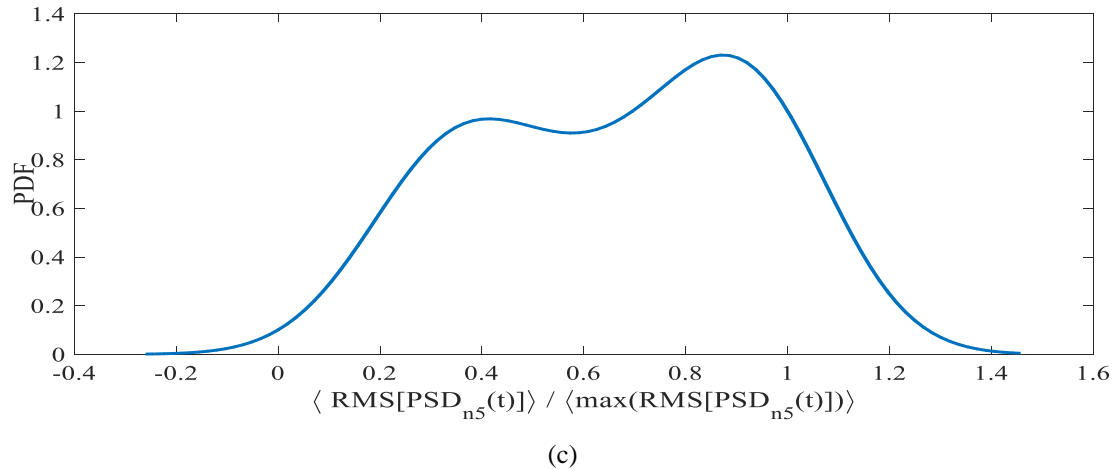
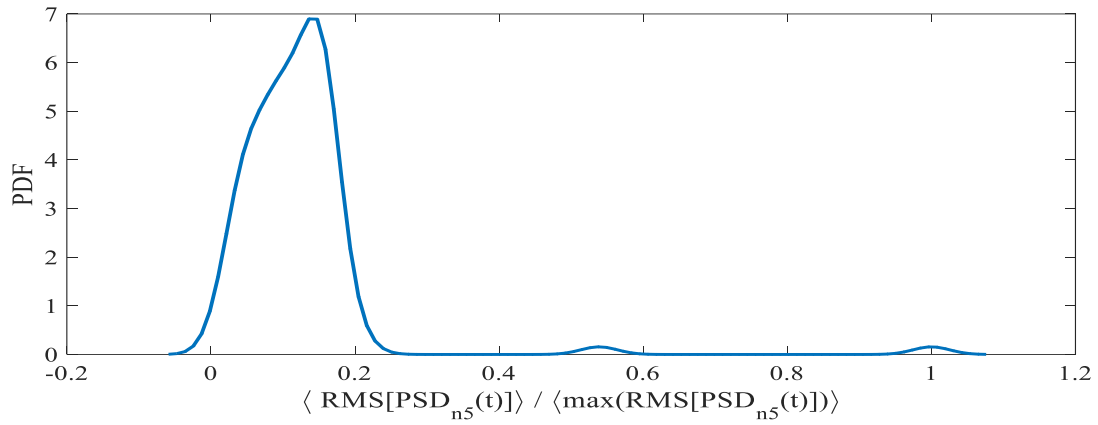


Figura 4. 46: Sinal da PDF em relação ao PSD sem considerar a aleatoriedade do contorno: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi

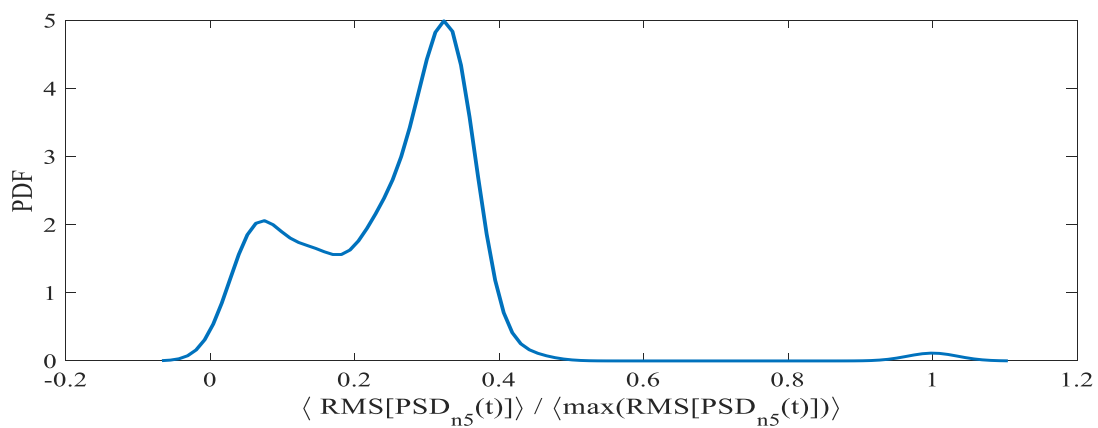
Na Figura 4.47 foi realizado a mesma análise apresentada na Figura 4.46, considerando a aleatoriedade da mola. Neste caso, a PDF ao realizar a comparação entre a Figura 4.46 e 4.47 podemos verificar que a forma da PDF se alterou após a inclusão da aleatoriedade na mola, mostrando assim que a aleatoriedade na condição de contorno aparentemente tem um pequeno efeito na resposta dinâmica estrutural.

Neste caso, a Figura 4.47 (a-c) apresentam as PDFs marginais do valor RMS das densidades espectrais de potência estimadas no nó nº 5 com aleatoriedade de contorno. Para cada tipo de excitação aleatória a forma das PDFs se altera indicando a influência da aleatoriedade mola na resposta do sistema. Em todos os casos as PDFs se mantiveram com todo o suporte positivo e a distribuição se apresenta como uma PDF conjunta. Ainda, com a inclusão da aleatoriedade da mola observa-se a propagação da incerteza associada a este componente na resposta do sistema.

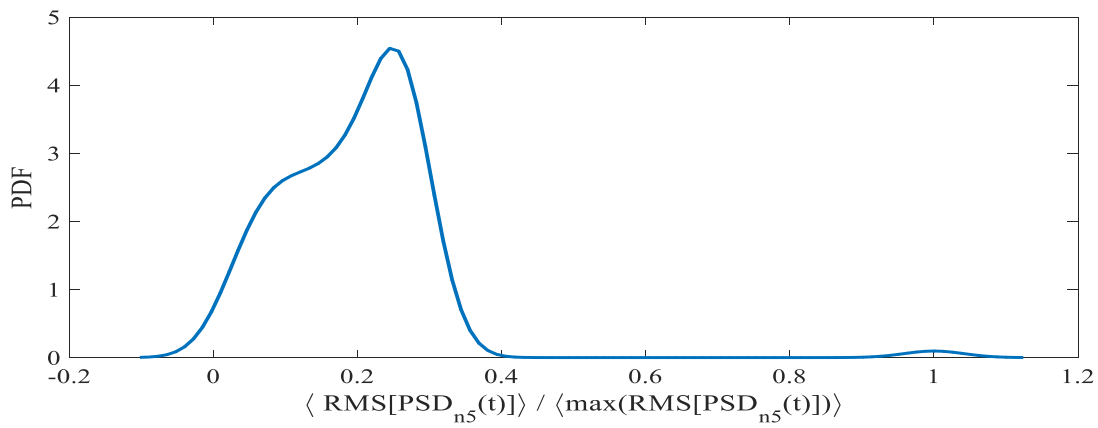
A resposta estatística confirma as análises apresentadas onde a modelagem da condição de contorno é indispensável para uma análise dinâmica da ponte, o tipo de excitação que a ponte está sujeita afetará sua resposta vibracional. A inclusão de aleatoriedades no contorno e na excitação incorpora ao modelo numérico efeitos adversos que são de suma importância para projeto, controle de vibrações, confiabilidade estrutural, análises de fadiga e monitoramento dos cabos de ponte estaiada.



(a)



(b)



(c)

Figura 4. 47: Sinal da PDF em relação ao PSD considerando a aleatoriedade do contorno: (a) Ruído branco, (b) Kaimal e (c) Kanai-Tajimi

5 Conclusão

5.1 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado uma abordagem da análise dinâmica para uma ponte estaiada sujeita a diferentes cargas de excitação. O processo de implementação foi baseado no Método dos Elementos Espectrais (MEE) desenvolvido e validado com o Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando a mesma linguagem MATLAB.

Dentre as subestruturas utilizadas para a criação da ponte estaiada, foi necessário a implementação e a validação do modelo numérico, para isso comparou-se os resultados obtidos pelo MEF objetivando a validação da implementação do MEE implementada no *Software* MATLAB. A ponte estaiada foi submetida a carregamentos pontuais com pressão do vento, chuva e vento-chuva. Foi analisado o efeito que a variação da carga causa nas amplitudes de deslocamento do sistema.

Ao incluir as restrições nos engastes, uma mudança na resposta dinâmica poder ser analisada. Com a adição da incerteza nas condições de contorno, apresentou uma alteração na resposta dinâmica, com redução na amplitude dos primeiros modos de vibrar.

A partir da realização da análise estocástica considerando a incerteza na condição de contorno, observou-se uma alteração significativa do mapeamento não linear, distorcendo a resposta estatística, apresentando uma influência considerável na resposta estrutural. Que comprova a importância da representação correta nas condições de contorno para controle de vibração e confiabilidade estrutural.

Ao analisar os efeitos das excitações aleatórias, elas apresentaram uma grande influência nas respostas do sistema onde podemos perceber que a excitação de maior valor provoca alterações maiores nas amplitudes. Os casos apresentaram decaimentos diferente, a PSD de ruído branco se manteve constante em toda faixa de frequência de excitação, a PSD de Kaimal apresenta um decaimento na potência partindo do início da faixa de frequência de excitação, e a PSD de Kanai-Tajimi inicia constante na frequência, mas apresenta um decaimento da potência do sinal na faixa de frequência de excitação

Ao realizar a análise estatística sobre a função de densidade de probabilidade (PDF) confirma as análises apresentadas onde a modelagem da condição de contorno é

indispensável para uma análise dinâmica da ponte, o tipo de excitação que a ponte está sujeita afetará sua resposta vibracional. A inclusão de aleatoriedades no contorno e na excitação incorpora ao modelo numérico efeitos adversos que são de suma importância para projeto, controle de vibrações, confiabilidade estrutural, análises de fadiga e monitoramento dos cabos de ponte estaiada. Que mais uma vez mostra a importância de representar corretamente o modelo de excitação aleatória, sendo uma informação de suma importância para o controle de vibrações, confiabilidade estrutural e para análises de fadiga.

5.2 Contribuições

Os estudos realizados nesse trabalho permitiram as seguintes contribuições:

SOUSA, V. M.; MACHADO, M. R.; DUTKIEWICZ, M. *Uncertainty Modelling Boundary condition of Structural Cable-Satayed Brigdes. 25° ABCM International Congress of Mechanical Engineering. 2019*

Referências Bibliográficas

ABNT_Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1988, **NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações** - Especificação. Rio de Janeiro, RJ.

ABNT_Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2003b, **NBR 7187 – Projeto de Pontes de Concreto Armado e de Concreto Protendido - Procedimento** - Especificação. Rio de Janeiro, RJ.

ABNT_Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2008, **NBR 7483 - Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido** - Especificação. Rio de Janeiro, RJ.

ALGA, 2013, **Stay**, Milão, Itália. Disponível em: www.alga.it.

ALKMIM, M. H. **Análise de um amortecedor de coluna de líquido sintonizado em uma turbina eólica sujeita a carregamento aleatório**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

BESKOS, D.; NARAYANAN, G. *Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast Fourier transform*. *Journal Computers and Structures*, 9(2), 145–150, 1978.

CAETANO, E. S. *Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges*. Zurich: *International Association for Bridge and Structural Engineering - IABSE*, 2007. ISBN 978-3-85748-1

CARVALHO, E. C., **Análise da instabilidade dinâmica de estruturas estaiadas**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia Civil. Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2008.

CARVALHO, E. O., **Modelagem e simulação estrutural baseada na Ponte Estaiada Anita Garibaldi: Análise comparativa da distribuição dos estais**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Engenharia de Infraestrutura. Santa Catarina. 113p, 2017.

CARVALHO, H.; QUIROZ, G.; FAKURY, R. H. **Procedimento numérico para a avaliação do amortecimento aerodinâmico em cabos de linhas de transmissão**. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*. 13(2), 2016. <https://doi.org/10.5335/rsee.v13i2.5328>.

CHOI, E. *Numerical modelling of gust effect on wind-driven rain*. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 72, 107–116, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(97\)00246-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(97)00246-8).

CHOI, E. C. C. *Wind-driven rain and driving rain coefficient during thunderstorms and non-thunderstorms*. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 89(3-4), 293–308, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(00\)00083-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(00)00083-0).

CLÁUDIO, R. G., **Tipologia das pontes estaiadas com tabuleiro de concreto**. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

COUTO, L. F. M., BESERRA, K. G., HIGUTSI, K., KAWANISHI, S., **Análise Estrutural e Dimensionamento de Ponte Estaiada**. Conic. Semes. 13th Congresso Nacional de Iniciação Científica, São Paulo. 2013.

CUNHA, P. G.; **Análise dinâmica de pontes ferroviárias: uma metodologia simplificada**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica - Universidade de São Paulo. São Paulo, 88p, 2011.

CUNHA, V. S.; CAETANO, E. S., **Desenvolvimento do modelo numérico da Pontes Estaiada sobre o Rio Árabe**. Revista Interdisciplinas de Pesquisa em Engenharia. 2016

DIENG, L.; HELBERT, G.; CHIRANI, S. A.; LECOMPTE, T.; PILVIN. P. (2013), *Use of shape memory alloys damper device to mitigate vibration amplitudes of bridges cables*. *Engineering Structures*. 56, 1547-1556, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.07.018>.

DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures-Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. Springer, 340p. 1997. ISBN 1461273048.

DUTANG, C; WUERTZ, D. *A note on random numbers generation*. CRAN. 2009. <http://cran.rproject.org/web/packages/randtoolbox/vignettes/randtoolbox.pdf>.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M. R. *Dynamic Response of Overhead Transmission Line in Turbulent Wind Flow with Application of the Spectral Element Method*. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 471(5), 052031, (2019.b). DOI: 10.1088 / 1757-899X / 471/5/052031.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M.R. *Measurements in Situ and Spectral Analysis of Wind Flow Effects on Overhead Transmission Lines*. *Sound and Vibration*, 53(4), 161 - 175, (2019.c). DOI: 10.32604/sv.2019.04803.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M. R., **Spectral Approach in Vibrations of Overhead Transmission Lines**. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*., 471(5), 052029, (2019.a). DOI: 10.1088/1757-899X/471/5/052029.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M. R. *Spectral element method in the analysis of vibrations of overhead transmission line in damping environment*. *Structural Engineering and Mechanics*, 71(3), 291-303, (2019.d). <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2019.71.3.291>

FABRO, A. T. **Análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas via métodos probabilísticos.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Computacional - Universidade Estadual de Campinas. São Paulo. 2010.

FIB_FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON, 2005, *Acceptance of Stay Cable Systems Using Prestressing Steels*. Lausanne.

FONSECA JUNIOR, A. W. N.; **Modelagem e Análise de Protótipo de Pontes Estaiada sob cargas dinâmicas incorporando molas de Nitinol Superelásticas para Supressão de Vibrações.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Campina Grande. Pernambuco. 2018.

FREIRE, G. T. O.; **Estimação de parâmetros de um sistema dinâmico com o uso da inferência Bayesiana.** Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

FU, X.; LI, H. N.; YI, T. *Research on motion of wind-driven rain and rain load acting on transmission tower.* *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 139, 27–36, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jweia.2015.01.008>.

FU, X.; LI, H. N. *Dynamic analysis of transmission tower-line system subjected to wind and rain loads.* *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier, 157, 95–103, 2016. ISSN 01676105. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2016.08.010>.

FUGANTI, P. T.; **Análise Dinâmica de uma Ponte com Protensão no Extradorso.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

GIMSING, N. J.; GEORGAKIS, C. T. *Cable Supported Bridges: Concept and Design.* John Wiley & Sons, 590p, 2012.

GOPALAKRISHNAN, S.; CHAKRABORTY, A.; MAHAPATRA, D. R. *Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Aircraft Engineering and Aerospace Technology.* 92(3), 2005.

GUNN, R.; KINZER, G. *The Terminal Velocity of fall for water droplets in stant air.* *Journal of the Atmospheric Sciences.* 6(4), 243-248. 1948. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1949\)006%3C0243:TTVOFF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006%3C0243:TTVOFF%3E2.0.CO;2).

ISHII, M. **Sistemas estruturais de pontes extradorso.** Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo, 90p, 2006.

ISOLDI, L. A.; SANTOS, M. A. V. **Análise numérica da dinâmica de cabos altamente extensíveis.** Repositório Institucional da Universidade Federal do Rio Grande. 13, 7-23, 2003.

KLIR, G. J. *Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory.* John Wiley & Sons, 499p, 2005. ISBN 9780471755562.

KOLOUSEK, V. *Dynamics in engineering structures*. Halsted Press, 1ª ed. 580p. London, Butterworths, 1973. ISBN-13: 978-0408701600.

LEE, U. *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. Wiley, 1ª ed. 480p, 2004. ISBN 9780470823743.

LIN, C.W; YANG, Y.B. (2005), *Use of passing vehicle to scan the fundamental bridge frequencies: An experimental verification*. *Engineering Structures*, 27(13), 1865-1878, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.06.016>.

LIN, W.; YODA, T. *Bridge Engineering: Classifications, Design Loading and Analysis Methods*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 247p, 2017.

MACHADO, M. R., DUTKIEWICZ, M. e MATT, C. F. T., CASTELLO, D. A. *Spectral model and experimental validation of hysteretic and aerodynamic damping in dynamic analysis of overhead transmission conductor*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 136, (2020), 106483. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106483>.

MACHADO, M. R; KHALIJ, L; FABRO; A. T. *Dynamic Analysis of a Composite Structure under Random Excitation Based on the Spectral Element Method*. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 20(2), 179–190, 2019. <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2018-0050>.

MARSHALL, J.S., PALMER, W.M. *The distribution of raindrops with size*. *Journal of Meteorology Sciences*, v. 5(4), 165-166, 1948. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1948\)005%3C0165:TDORWS%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1948)005%3C0165:TDORWS%3E2.0.CO;2).

MAZARIM, D. M. **Histórico das pontes estaiadas e sua aplicação no Brasil**. 2011. 125p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-graduação em Engenharia, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Universidade de São Paulo, 2011.

MONTEIRO, A. M. **Estudo da variabilidade de custos em orçamentos de obras residenciais utilizando o método de Monte Carlo**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção - Universidade Nove de Julho. São Paulo. 2020.

MOREIRA, C. A. F., LAIER, J. E., **Análise de vibrações sob tensões iniciais em pontes estaiadas**, Cadernos de Engenharia de Estrutura, 17(67). São Carlos, 2017.

MURTAGH, P. J.; BASU, B. e BRODERICK, B., *Wind force time-history generation by discrete Fourier transform (DFT)*. *International Symposium on Multi-body Dynamics: Monitoring and Simulation Techniques*. 147-154, 2004.

NAGUIB, M.; BAGLATY, S. e SHAABAN, M. *Effect of ruptures in some cables on the static and dynamic analysis of cable-stayed bridges*. *Mansoura Engineering Journal*. 39(3), 14-32, 2014. DOI: 10.21608 / BFEMU.2020.102685.

PALIGA, C. M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos**

finitos. Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 249p. 2008.

PORTNOI, M. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias, Distribuição de Probabilidades e Geração Aleatória – Conceitos sob ótica de Avaliação de Desempenho de Sistemas**. Universidade de Salvador (UNIFACS). 30p. 2010.

RIMOLA, B. D., SILVA, J. G. S. e ALENCAR, G. S. **Estudo da resposta dinâmica e verificação de projeto à fadiga de pontes rodoviárias mistas (aço concreto) com interação parcial**. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia. 2017. <https://doi.org/10.26512/ripe.v2i2.20740>.

RITTO, T. G., CASTELO, D. A. **Quantificação de incertezas e estimação de parâmetros em dinâmica estrutural: uma introdução a partir de exemplos computacionais**. Instituto de matemática, estatística e computação científica. São Carlos. São Paulo. 2016.

ROSS, S. M., *Simulation*. 2006. 310p. Academic Press; 5ª ed. USA.

SAMPAIO, R. **Modelagem Estocástica e Geração de Amostras de Variáveis e Vetores Aleatórios** - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 144 p. (Notas em Matemática Aplicada; v. 70).

SAMPAIO, R. A. C., SOUZA, R. M. e BARICHELLO, C. V. M. **Análise Dinâmica Experimental de Ponte Ferroviária em Concreto Protendido**. III Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro, 2010.

SANTOS, I. C.; **Atualização do modelo numérico de ponte estaiadas baseado em dados experimentais**. 2018. 332p. Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil - Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K. *Fundamentals of Signal Processing for sound and vibration engineers*. (2008). 416p. Wiley. 1ª ed. ISBN: 978-0-470-51188-6.

SOUSA, V. M.; MACHADO, M. R.; DUTKIEWICZ, M. *Uncertainty Modelling Boundary condition of Structural Cable-Stayed Bridges*. 25º ABCM International Congress of Mechanical Engineering. 2019.

SOARES, Y. M. F., **Modelagem da resposta dinâmica estrutural da interação entre linhas de transmissão e torre**. (2020). 96p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Integridade dos Materiais da Engenharia - Universidade de Brasília. Brasília. 2020.

SONG, M.; CAO, D. e ZHU, W.; *Dynamic analysis of a cable-stayed bridge subjected to a continuous sequence of moving forces*. *Advances in Mechanical Engineering*. 8(12). 2016. <https://doi.org/10.1177/1687814016681721>.

SVENSSON, H., (2011). 458p. *Schräggabelbrücken: 40 Jahre Erfahrung Weltweit*. Ernst & Sohn 1ª ed. Berlin.

TOLEDO, R. L. S., **Dimensionamento de Vigas de Rigidez de Concreto de Pontes Estaiadas**. 2014. 195p. Dissertação de Mestrado. Programa de Engenharia civil. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Engenharia Civil. Rio de Janeiro. 2014.

TREVISAN, L. **Avaliação da Incerteza de Medição em curvas de fadiga S-N através do Método de Monte Carlo**. 2015. 151p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em engenharia de minas, metalúrgica e de materiais. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015

VAN MOOK, F. J. R. *Driving rain on building envelopes*. 2002. 198p. Thesis (Ph.D. Thesis) - Building Physics Group (FAGO), Eindhoven University of Technology, Eindhoven University Press, Eindhoven, The Netherlands, 2002.

VIEIRA, N. Y.; **Determinação das forças em cabos tensionados a partir de ensaios de vibrações livres**. 2014. 102p. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo. 2014.

VILLELA, R. L. A. **Método de Monte Carlo para avaliação de incertezas da prevalência do incômodo provocado por ruído**. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia - Inmetro, Laboratório de Ensaios Acústicos, Núcleo de Incerteza de Medição e Estatística Aplicada. Metrologia, 2017.

WALTHER, R., HOURIET, B. e ISLER, W. (1999). 232p. **Cable Stayed Bridges**. ICE Publishing, 2ª ed. London, Thomas Telford.

WILSON, J. C. e GRAVELLE, W. (1991). *Modelling of a cable-stayed bridge for dynamic analyses*. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 20(8). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290200802>.

ZHANG, S. e SHEN, R. (2018). *A two-step FEM-SEM approach for wave propagation analysis in cable structures*. *Journal of Sound and Vibration*. 415, 41-58. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.11.002>.

ZULUAGA GÓMEZ, A. L.; **Controle de Vibrações em Edifícios Submetidos à Ação de Cargas Dinâmicas Utilizando Amortecedor de Massa Sintonizado na Forma de Pêndulo**. 2007. 86p. Dissertação de Mestrado. Programa em Estruturas e Construção Civil - Universidade de Brasília, Brasília, 2007.