



**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA  
APLICADA EM PROBLEMAS ELÍPTICOS**

**Fernando Soares de Carvalho**

**Doutorado  
Ciências Mecânicas**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA APLICADA  
EM PROBLEMAS ELÍPTICOS

Fernando Soares de Carvalho

Orientador: Dr. Éder Lima de Albuquerque - (ENM/UnB)  
Co-orientador: Dr. Antonio André Novotny - (LNCC)

DOUTORADO

BRASÍLIA/DF: 14 de dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problemas  
Elípticos

Fernando Soares de Carvalho

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

---

Dr. Éder Lima de Albuquerque - (ENM/UnB)  
(Orientador)

---

Dr. Antonio André Novotny - (LNCC)  
(Co-Orientador)

---

Dra. Carla Tatiana Mota Anflor - (FGA/UnB)  
(Examinador Interno - UnB)

---

Dr. Adriano Todorovic Fabro - (ENM/UnB)  
(Examinador Interno - PCMEC)

---

Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes - (ENM/UnB)  
(Examinador Interno - UnB)

---

Dr. Marcel Duarte da Silva Xavier - (TEM/UFF)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 14 DE DEZEMBRO DE 2020.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Carvalho, F. S.  
Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problemas Elípticos  
[Distrito Federal] 2020.  
xvii, 84p. (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2020.  
Doutorado - Universidade de Brasília.  
Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. Derivada Topológica             | 2. Otimização Topológica                       |
| 3. Projetos de Trocadores de Calor | 4. Maximização do primeiro autovalor de Placas |
| I. ENM/FT/UnB                      | II. Título (série)                             |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Carvalho, F. S.(2020). Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problemas Elípticos. Doutorado, Publicação ENM.DM - XXX.XXX, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, , Distrito Federal, xvii, 84p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Fernando Soares de Carvalho.

**TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO:** Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problemas Elípticos.

**GRAU / ANO:** DOUTOR / 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de Doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Fernando Soares de Carvalho

Agradeço a Deus por me ter dado forças para chegar até aqui.

A professora Carla Tatiana Mota Anflor pela confiança, pelo apoio e suas valorosas contribuições neste trabalho.

Ao professor Antonio André Novotny pela paciência e generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

Ao professore Éder Lima de Albuquerque pela colaboração imprescindível.

Aos professores Adriano Todorovic Fabro, Marcus Vinicius Girão de Moraes e Marcel Duarte da Silva Xavier, por participarem da banca de defesa, por seus comentários e sugestões que só enriqueceram este trabalho.

Aos meus pais Luis Carlos Vieira de Carvalho (in memoriam) e Janete de Oliveira Soares, que são a base da minha família e sempre me incentivaram a estudar.

À minha namorada Renata pelo companheirismo e por me apoiar durante esse período.

Aos meus irmãos Humberto e Luis por sempre acreditarem em mim.

Às minhas sobrinhas Raphaella e Sophia e meu sobrinho Luis Gabriel por todo amor.

Ao Colegiado de Matemática da UFT/Arraias por permitir meu afastamento para qualificação, em especial ao meu colega de trabalho e doutorado Dirlei Rucheinsky, pelas valorosas discussões e contribuições sobre esta tese.

Aos professores e colegas do GMEC, pelo apoio e incentivo de sempre.

# Resumo

## **Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problemas Elípticos**

**Autor:** Fernando Soares de Carvalho

**Orientador:** Dr. Éder Lima de Albuquerque - (ENM/UnB)

**Co-orientador:** Dr. Antonio André Novotny - (LNCC)

**Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas**

**Brasília, 14 de dezembro de 2020**

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para otimização topológica baseada no conceito de derivada topológica. Dentre as aplicações bem sucedidas da derivada topológica destacam-se sua utilização em certas classes de problemas inversos, mecânica da fratura e modelagem da evolução do dano. A fim de ampliar as aplicações dessa metodologia, a mesma é utilizada de forma inovadora em três problemas distintos: Modelo de dissipação de calor por Difusão-Convecção em estado estacionário e também os modelos de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. No primeiro problema, foi possível otimizar o fluxo de calor e nos demais problemas (modelos de placas), foi otimizada a primeira frequência natural de vibração. A principal ferramenta utilizada neste contexto, refere-se ao conceito de derivada topológica, que foi calculada em cada problema. Esta derivada mede a sensibilidade do funcional de forma em relação a uma perturbação singular infinitesimal no domínio, tal como inserção de furos, trincas, inclusões ou termos fontes. Como função de forma (função custo), no problema que envolve convecção e difusão, foi utilizada uma versão modificada da energia potencial e nos problemas de placas foi utilizada a forma variacional do primeiro autovalor. A fórmula fechada, possibilitou a otimização de topologias utilizando métodos dos elementos finitos.

**Palavras-chaves:** Derivada Topológica; Otimização Topológica; Projetos de Trocadores de Calor; Maximização do primeiro autovalor de Placas.

# Abstract

## TOPOLOGICAL SENSITIVITY ANALYSIS APPLIED TO ELLIPTICAL PROBLEMS

**Author:** Fernando Soares de Carvalho

**Supervisor:** Dr. Éder Lima de Albuquerque - (ENM/UnB)

**Co-advisor:** Dr. Antonio André Novotny - (LNCC)

**PhD in Mechanical Sciences**

**Brasília, December 11, 2020**

In the present work is presented a methodology for topological optimization based on topological derivative concept. Among the successful applications of the topological derivative, its use in certain classes of inverse problems, fracture mechanics and damage evolution modeling are highlighted. Expanding the applications of this methodology, it is used in an innovative way, in three distinct problems: A convective-diffusive problem in steady state and also for the Kirchhoff and Reissner-Mindlin plate models. In the first problem, it was possible to optimize the heat flow and in the other problems (plate models), the first natural frequency of vibration was optimized. The main tool used in this context, refers to the concept of topological derivative, which was calculated for each problem. This derivative measures the functional's sensitivity in relation to a singular infinitesimal perturbation in the domain, such as insertion of holes, cracks, inclusions or source terms. As a shape function (cost function), in the problem involving convection and diffusion, a modified version of the potential energy was used and in the plate problems the variational form of the first eigenvalue was used. The closed formula of the topological derivative, made it possible to optimize topologies using finite element methods.

**Key-words:** Topological derivative; Topological optimization; heat exchange topology design; plates eigenvalue maximization.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
	1.0.1 Motivação	4
	<b>1.1 Objetivos do Trabalho</b>	<b>5</b>
	1.1.1 Objetivo Geral	5
	1.1.2 Objetivos Específicos	5
	<b>1.2 Metodologia</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
	<b>3.1 Otimização</b>	<b>10</b>
	3.1.1 Otimização de Parâmetros	10
	3.1.2 Otimização de Forma	11
	3.1.3 Otimização Topológica	12
	<b>3.2 Derivada Topológica</b>	<b>13</b>
	<b>3.3 Método dos Elementos Finitos</b>	<b>15</b>
	<b>3.4 Implementação</b>	<b>16</b>
	3.4.1 Penalização Linear	17
	3.4.2 Algoritmo de Otimização Baseado na Derivada Topológica	17
<b>4</b>	<b>TROCADORES DE CALOR</b>	<b>20</b>
	<b>4.1 Equação de Difusão-Convecção-Reação</b>	<b>21</b>
	4.1.1 Problema não Perturbado	21
	4.1.2 Problema Perturbado	22
	4.1.3 Existência da Derivada Topológica	22
	<b>4.2 Cálculo da Derivada Topológica dos Funcionais Auxiliares</b>	<b>24</b>
	<b>4.3 Equação de Difusão-Convecção</b>	<b>33</b>
	4.3.1 Formulação do Problema	33
	<b>4.4 Estimativas dos Termos Residuais</b>	<b>34</b>
	<b>4.5 Exemplos Numéricos</b>	<b>40</b>



<b>5</b>	<b>MODELOS DE PLACAS: KIRCHHOFF E REISSNER-MINDLIN . . .</b>	<b>48</b>
5.1	Otimização Topológica de Placas em Vibração Livre . . . . .	49
5.2	<b>Caso I: Modelo de Placa de Kirchhoff . . . . .</b>	<b>50</b>
5.2.1	Existência da Derivada Topológica . . . . .	53
5.2.2	Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	55
5.2.2.1	Parte I . . . . .	55
5.2.2.2	Parte II . . . . .	62
5.2.3	Autovalor do Operador Diferencial de Quarta Ordem . . . . .	67
5.2.4	Cálculo da Derivada Topológica do Primeiro Autovalor . . . . .	68
5.2.5	Estimativas dos Termos Remanescentes . . . . .	70
5.3	<b>Caso II: Modelo de Placa de Reissner-Mindlin . . . . .</b>	<b>71</b>
5.3.1	Existência da Derivada Topológica . . . . .	73
5.3.2	Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	75
5.3.2.1	Parte I . . . . .	75
5.3.2.2	Parte II . . . . .	80
5.3.3	Problema de Autovalor: Sistema Acoplado . . . . .	82
5.3.4	Estimativas dos Termos Remanescentes . . . . .	83
5.4	<b>Exemplos Numéricos: Maximização do Primeiro Autovalor . . .</b>	<b>83</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>89</b>
6.1	Trabalhos Publicados . . . . .	90
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	90
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>92</b>

# Lista de Figuras

Figura 3.1 – Otimização de parâmetros . . . . .	11
Figura 3.2 – Otimização de forma . . . . .	11
Figura 3.3 – Otimização topológica . . . . .	12
Figura 3.4 – Conceito de derivada topológica . . . . .	14
Figura 3.5 – Graus de liberdade: Elementos DKT e DST . . . . .	15
Figura 3.6 – Elemento finito triangular com 3 graus de liberdade . . . . .	16
Figura 3.7 – Triangulação do quadrado unitário: (a) Enumeração dos elementos; (b) Enumeração dos pontos nodais . . . . .	16
Figura 4.1 – Topologia (a) e Mapa de temperatura (b) inicial. . . . .	41
Figura 4.2 – Topologias otimizadas: (a) caso A; (b) caso B; (c) caso C; (d) caso D. . . . .	41
Figura 4.3 – Histórico da Função custo. . . . .	42
Figura 4.4 – Histórico da Fração de Volume. . . . .	42
Figura 4.5 – Topologias otimizadas para $t = 0.5$ (a) e $t = 0$ (b). . . . .	43
Figura 4.6 – Histórico da Função Custo (a) e Histórico da Fração de Volume (b). . . . .	43
Figura 4.7 – Topologias finais após três etapas de refinamento da malha. . . . .	44
Figura 4.8 – (a) Domínio inicial; (b) Mapa de temperatura no domínio inicial. . . . .	45
Figura 4.9 – Topologias nas iterações $j = 1$ (a), $j = 3$ (b), $j = 30$ (c) e topologia otimizada $j = 56$ (d). . . . .	45
Figura 4.10–(a) Histórico da função custo; (b) Histórico de Volume. . . . .	46
Figura 4.11–(a) Topologias otimizadas. . . . .	46
Figura 5.1 – Flexão da Placa. . . . .	50
Figura 5.2 – Representação do Domínio . . . . .	51
Figura 5.3 – Elemento infinitesimal da placa: a) sem furo; b) com furo. . . . .	51
Figura 5.4 – Sistema de Coordenadas curvilíneo sobre $\partial\Omega$ . . . . .	52
Figura 5.5 – Descrição cinemática da flexão da placa . . . . .	71
Figura 5.6 – Domínio inicial: uma massa (a) e quatro massas (b) concentradas, representadas por pontos pretos. . . . .	84
Figura 5.7 – Topologia final para o problema de Kirchhoff com uma massa concen- trada (a) e quatro massas concentradas (b). . . . .	85

Figura 5.8 – Topologia final para o problema de Reissner-Mindlin com uma massa concentrada (a) e quatro massas concentradas (b). . . . .	85
Figura 5.9 – Primeiro autovalor normalizado $\lambda_1/\lambda_1^0$ . . . . .	86
Figura 5.10 – Segundo autovalor normalizado $\lambda_1/\lambda_2$ . Casos K1 e R1 no eixo esquerdo, casos K2 e R2 no eixo secundário direito. . . . .	86
Figura 5.11 – Histórico da fração de volume . . . . .	86
Figura 5.12 – Histórico da função custo . . . . .	87
Figura 5.13 – Topologia final utilizando IP (a) MAM (b) e DT (c). . . . .	87
Figura 5.14 – Topologia otimizada utilizando a derivada topológica associada a Energia potencial total (a) e primeiro autovalor (b). . . . .	88

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Valores de $\alpha(x)$ , $\beta(x)$ , $\rho(x)$ e $f(x)$ em $\Omega$ . . . . .	14
Tabela 2 – Valores de $\alpha_\varepsilon$ , $\beta_\varepsilon$ , $\rho_\varepsilon$ and $f_\varepsilon$ . . . . .	14
Tabela 3 – Valores de $\gamma_\alpha$ , $\gamma_\beta$ , $\gamma_\rho$ and $\gamma_f$ . . . . .	14
Tabela 4 – Exemplo 1. Velocidade e contraste. . . . .	40
Tabela 5 – Exemplo 1. Topologia Final. . . . .	43

# Lista de Símbolos

$\Omega$	Subdomínio contido em $\mathbb{R}^n$
$ \Omega $	Função que associa a cada subconjunto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ a um número real não negativo que está relacionado com o "volume" ocupado por ele
$o(f(\varepsilon))$	$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$
$O(f(\varepsilon))$	$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = C$ (constante)
$\text{div}(\mathbf{V})$	Operador divergência $\text{div}(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$
$\Delta u$	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2}$
$\Delta^2 u$	$\Delta(\Delta u)$
$L^p$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega}  u(x) ^p < \infty\}; p \in [0, \infty)$
$D^j u$	$\begin{cases} \frac{\partial^{ j } u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_N^{j_N}} & \text{se } j \neq (0, 0, \dots, 0) \\ u & \text{se } j = (0, 0, \dots, 0) \end{cases},$
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega) \mid D^j u \in L^p(\Omega), 0 \leq  j  \leq m\}$
$H^m$	$W^{m,2}(\Omega)$
$H_0^m$	$W_0^{m,2}(\Omega)$
$B_\varepsilon$	Bola de centro no ponto $\hat{x}$ e raio $\varepsilon$
$[[\phi]]$	Salto da função $[[\phi]] := \phi _{\Omega \setminus B_\varepsilon} - \phi _{B_\varepsilon}$
$t$	Parâmetro de peso (Número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$ )

# 1 Introdução

A otimização topológica tem um papel importante em projetos estruturais. Atualmente, pesquisadores despendem grandes esforços na busca de técnicas de otimização mais eficazes. Estes métodos têm por objetivo modificar a forma e topologia da estrutura inicial, representada por uma geometria em um domínio aberto e limitado  $\Omega$ , sujeito a certas condições de contorno, de maneira que seja possível reduzir os custos ou melhorar a funcionalidade de uma estrutura.

Uma maneira de abordar os problemas de otimização topológica, consiste em inferir o quanto a solução de uma equação de estado associada ao problema é sensível a uma perturbação na topologia do domínio. Essa análise de sensibilidade topológica pode ser realizada observando-se a influência da criação de um pequeno furo circular no domínio, através de uma expansão assintótica da solução da equação de estado no domínio perturbado [4, 59].

A derivada topológica (DT) é um método versátil que pode contribuir significativamente para o campo de otimização de topologia independentemente do método numérico ou de otimização empregado. A DT é definida como o primeiro termo (correção) da expansão assintótica de um determinado funcional de forma em relação a um pequeno parâmetro que mede o tamanho das perturbações de domínio, como furos, inclusões, termos-fonte e trincas (Novotny e Sokolowski, 2013). Este conceito relativamente novo tem aplicações em diferentes campos, como otimização de forma e topologia (Lopes et al., 2017; Anflor et al., 2018), problemas inversos (Ferreira e Novotny, 2017), processamento de imagem (Hintermuller e Laurain, 2009), design de material em modelos constitutivos multi-escala (Amstutz et al., 2010) e modelagem mecânica incluindo fenômenos de evolução de danos e fratura (Ammari et al., 2013; Xavier et al., 2017). Mais recentemente, a DT foi combinada com sucesso com um método level-set de representação do domínio (Amstutz e Andra, 2006), levando a um algoritmo de projeto de topologia bastante eficiente conduzido apenas pela derivada topológica. Para uma descrição do desenvolvimento teórico e das aplicações do método da derivada topológica, é possível consultar a série de artigos (Novotny et al., 2019a, b, c). Ver também (Bojczuk e Mroz, 2012; Giusti et al., 2017; Norato et al., 2007; Otomori et al., 2015). Apesar de não terem sido citados, existem muitos outros trabalhos com contribuições relevantes nos avanços no campo da derivada topológica.

Os problemas tratados neste trabalho, referem-se a análise de sensibilidade topoló-

gica dos modelos de condução de calor envolvendo Convecção-Difusão e modelos placas (Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin). As funções custo associadas a cada problema (condução de calor e modelo de flexão de placas) são: funcional energia modificado e primeiro autovalor, respectivamente. Sendo assim, neste trabalho a expansão assintótica associada a cada um dos modelos foram desenvolvidas em detalhes e a derivada topológica, com relação à nucleação de uma inclusão circular é obtida em sua forma fechada para os três modelos, além de importantes resultados numéricos obtidos com geometrias otimizadas.

A inovação deste trabalho refere-se a expansão assintótica topológica para problemas de condução de calor (equação Convecção-Difusão modificada), assim como para os modelos de flexão de placas, que não estão disponíveis na literatura, quando se considera a energia modificada e o primeiro autovalor como funções custo, respectivamente. Dependendo da equação diferencial governante considerada, o procedimento de derivação se torna altamente complexo. A forma fechada da DT pode ser obtida após um intenso trabalho analítico. Nesse contexto, um conjunto disponível de fórmulas fechadas de DT para diversas classes de problemas pode contribuir significativamente no campo da otimização topológica, uma vez que pode ser acoplado a diversos métodos de otimização topológica disponíveis na literatura.

A equação de Convecção-Difusão permite solucionar problemas relacionados a projetos ótimos de trocadores de calor. Essa classe de problemas foi introduzida pela primeira vez como lei construtiva com a proposta de reconhecer que existe um fenômeno universal que gera uma configuração ideal de design na natureza (Bejan et al., 1995; Bejan, 1997). Esse fenômeno pode ser observado pela otimização da topologia ao resolver os problemas de condução de calor em estado estacionário, onde a maioria dos estudos também confirmam que as estruturas ramificadas representam uma classe de projeto ideal para trocadores de calor (Bendsoe e Sigmund, 2003; Gersborg-Hansen et al., 2006; Lohan et al., 2017). Dbouk (2017) apresenta uma revisão de pesquisas sobre otimização de topologia desenvolvidos nos últimos quinze anos considerando problemas dessa natureza. Este trabalho discute alguns aspectos referentes às metodologias numéricas desenvolvidas para resultar em um projeto ideal com geometrias complexas e sua desvantagem natural na fabricação industrial. O projeto ideal de trocadores de calor ainda está sendo considerado na literatura, bem como o desenvolvimento de abordagens numéricas para obter a geometrias otimizadas com designs inovadores. Com tais geometrias é possível obter a minimização da dissipação de energia convectiva-difusiva.

A teoria das placas caracteriza-se por ser um campo amplo e seu projeto ideal pode ser analisado sob diferentes pontos de vista da engenharia. Em relação à otimização topológica de placas diferentes variáveis de projeto podem ser consideradas, por exemplo, a espessura [61] materiais compósitos [53] e uma formulação de otimização de material para placas laminadas [114]. Em [62] foi proposta uma teoria da análise de sensibilidade do projeto de estruturas baseadas em modelos de elementos finitos mistos.

A otimização de topologias para os modelos de placas (Kirchhoff e Reissner-Mindlin),

considerando a maximização do primeiro autovalor desempenha um papel importante na integridade estrutural. Quando a frequência de excitação é sintonizada em uma das frequências naturais de vibração, a estrutura pode ser danificada ou até colapsar. Nesse sentido, torna-se relevante problemas de otimização formulados com a maximização do menor autovalor sujeito a uma restrição de volume. De acordo com a literatura, as estruturas podem apresentar autovalores simples ou múltiplos. Os métodos para lidar com autovalor simples estão bem estabelecidos assim como implementações de rotinas para otimização de topologias. O principal problema em uma otimização de topologia é a existência de autovalores simples, mas conforme o processo iterativo evolui, a geometria se torna complexa e autovalores múltiplos podem surgir, o que pode ocasionar vibrações auto-excitadas na placa. Nos modelos abordados nesse trabalho, o problema de autoexcitação não é observado e são obtidas topologias otimizadas com a maximização da primeira frequência natural de vibração da estrutura. Masur e Mróz (1979); Haug e Rousset (1980) demonstraram que a falta de diferenciabilidade no caso de existir múltiplos autovalores, geram sérios problemas na análise numérica e obtenção das condições de otimalidade em problemas de otimização. Geometrias complexas requerem métodos específicos para lidar com um projeto estrutural ideal com respeito a multiplicidade de autovalores (em particular o primeiro autovalor) devido aos elevados números de parâmetros de projeto e graus de liberdade. A DT para autovalores (simples) do Laplaciano foi considerada por Ammari e Kheli (2003) e para múltiplos autovalores no contexto de elasticidade por Nazarov e Sokolowski (2008).

A DT para o problema de flexão da placas de Kirchhoff considerando o operador diferencial de quarta ordem foi primeiramente considerada no artigo de Novotny et al. (2005). A extensão desses resultados levando em consideração uma classe geral de funcionais de forma foi apresentada por Amstutz e Novotny (2011). No artigo de Turevsky et al. (2009) foi proposto um método numérico para calcular a variação de primeira ordem de algumas quantidades de interesse quando uma inclusão de formato arbitrário é introduzida no domínio da placa. A DT com relação à introdução de reforço em uma placa foi apresentada e discutida em detalhes por Bojczuk e Mróz (2009). Uma análise detalhada dos métodos de controle de volume para otimização topológica de placas usando o conceito de DT foi apresentada por Campeão et al. (2014). Mais tarde, a derivada topológica para a energia potencial total associada ao problema de flexão da placa de Reissner-Mindlin foi apresentada por Sales et al. (2015). O modelo mecânico conduz a um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem. O modo de lidar com tal sistema acoplado representa a principal contribuição dos autores. Portanto, o modelo de placa de Kirchhoff já foi extensivamente estudado do ponto de vista teórico e numérico. Por outro lado, existem poucos trabalhos teóricos lidando com o modelo de placas de Reissner-Mindlin. Em particular, apenas o funcional de forma energia foi considerada e nada pode ser encontrado do ponto de vista numérico.

Neste trabalho, é considerada a análise assintótica topológica da norma  $L^2$  e da



seminorma  $H^1$  da solução para um problema difusivo-convectivo, no que diz respeito à nucleação de inclusões dotadas de diferentes propriedades materiais. A metodologia para lidar com essas questões representa um grande desafio deste trabalho. Já para o problema de flexão de placas são apresentadas as derivadas topológicas das normas  $L^2$  e energia associadas à solução dos problemas considerando os modelos de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. Um termo de ordem zero é introduzido nas equações de equilíbrio, o que permite adaptar as sensibilidades obtidas ao contexto de otimização da topologia de placas em vibração livre. Alguns experimentos numéricos são apresentados mostrando topologias otimizadas de trocadores de calor e também aplicações na maximização de autovalores de estruturas de placas.

### 1.0.1 Motivação

A equação de Difusão-Convecção-Reação [88] está associada a um problema de condução de calor em estado estacionário. Após calcular a derivada topológica, considerando como função custo (funcional a ser otimizado) um funcional energia modificado, foi possível otimizar a dissipação de calor em um domínio  $\Omega$  por meio de geometrias ótimas de trocadores de calor.

Os problemas de placas são importantes elementos estruturais e são frequentemente encontradas em muitas estruturas na engenharia, como lajes de edifícios, pontes, passarelas, partes de automóveis, aviões, navios, etc. Dessa forma, análise de vibrações de placas é significativa para controle de ressonância. Isto pode ser conseguido, por exemplo, maximizando a primeira frequência natural de vibração.

Uma placa é um elemento estrutural no qual uma dimensão, denominada espessura, é relativamente menor que as outras duas dimensões. Neste trabalho vamos considerar placas finas e espessas. É considerado placa fina quando a relação entre a espessura e a menor dimensão do plano médio for inferior a 2,5%. Mas de fato, o importante a ser diferenciado entre placas finas e espessas são as hipóteses necessárias para construção dos modelos.

O modelo de placas finas de Kirchhoff [58] pode ser visto como uma extensão do modelo de viga de Euler-Bernoulli. A teoria de Kirchhoff não considera a deformação por cisalhamento transversal. A teoria de placas espessas de Reissner-Mindlin [95] leva em conta o cisalhamento transversal. O modelo de Reissner-Mindlin é visto como uma extensão do modelo de vigas de Timoshenko. Dessa forma, o modelo matemático para o problema de Kirchhoff é dado por um sistema de equações diferenciais de quarta ordem [10]. Já o modelo matemático que dá suporte para a teoria de Reissner-Mindlin é escrito como um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem [96].

## 1.1 Objetivos do Trabalho

Neste trabalho, utilizamos uma alternativa mais geral, que apresenta várias possibilidades de aplicações, obtendo a sensibilidade topológica considerando não apenas a equação de estado, mas uma função custo que representa uma medida de desempenho do problema em estudo. Este é o foco da análise de sensibilidade topológica [38, 45, 83, 103].

### 1.1.1 Objetivo Geral

Fazer a análise de sensibilidade topológica dos funcionais: Energia modificado para um operador diferencial de segunda ordem e a forma variacional do primeiro autovalor para um operador de quarta ordem e também de um sistema de segunda ordem acoplado.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Obter topologias otimizadas para trocadores de calor otimizando a dissipação de energia;
- Obter topologias otimizadas maximizando a primeira frequência natural de vibração (primeiro autovalor) em estruturas de placas.

## 1.2 Metodologia

A metodologia utilizada é o desenvolvimento da expansão assintótica das funções custo. A perturbação topológica considerada é a nucleação de uma inclusão infinitesimal circular no domínio, com propriedades materiais diferentes do domínio original.

Primeiramente é apresentado o modelo matemático do problema proposto, que é representado por um operador diferencial, em sua forma forte. Em seguida é definida uma função custo expandida assintoticamente com auxílio da forma fraca do problema proposto e de uma equação adjunta. Tal equação adjunta é determinada pela diferenciação analítica da função custo adicionada pela equação de estado (maiores detalhes podem ser encontrados em [90]). Com essa expansão é possível determinar a DT do funcional associado a cada problema.

Dessa forma, o conceito central é o de DT, introduzido em Sokolowski e Zochowski (1999). Este conceito tem sido utilizado com sucesso na otimização de topologia (uma revisão detalhada pode ser encontrada em [42]).

Utilizamos o conceito de derivada topológica em três problemas, modelados por operadores diferenciais que são conhecidos em problemas de engenharia, são eles: Equação

de Difusão-Convecção, Modelo de placa de Kirchhoff e Modelo de placa de Reissner-Mindlin. Foi realizada a análise assintótica desses operadores diferenciais, com intuito de obter a forma fechada da derivada topológica. Essa análise possibilita a geração de projetos de geometrias otimizadas, em problemas de condução de calor e vibrações de placas. De forma sintetizada pode-se descrever a metodologia utilizada:

- Calcular a DT do funcional (função custo) energia modificada no problema de Difusão-Convecção-Reação;
- Calcular a derivada topológica do primeiro autovalor associado ao modelo de placas de Kirchhoff;
- Calcular a derivada topológica do primeiro autovalor associado ao modelo de placas de Reissner-Mindlin;
- Adaptação do algoritmo para Otimização Topológica, baseado na DT, utilizando métodos dos Elementos Finitos para o presente contexto.

Para implementação do algoritmo baseado na derivada topológica, é utilizado o método de penalização linear com restrição de volume para obter a topologia ótima do projeto considerado. Para a obtenção dos resultados numéricos, é empregado o Método dos Elementos Finitos.

Embora existam poucos trabalhos na literatura relacionando os modelos propostos com o conceito de derivada topológica, para cada um desses problemas a DT já foi determinada, considerando como função custo, a energia potencial total. Nesse contexto, Novotny e Sales (2015), determinaram a DT para equação de Convecção-Difusão, porém, não há perturbação no termo que modela a difusão. Para o modelo de placa de Kirchhoff a DT foi determinada por Amstutz e Novotny (2011) e por último, a DT associada ao modelo de placa de Reissner-Mindlin foi calculada no trabalho de Sales e Novotny (2015).

## 2 Revisão Bibliográfica

A análise de sensibilidade topológica estendeu os conceitos desenvolvidos nos anos 70 para a análise de sensibilidade à mudança de forma, na qual o objetivo é determinar a sensibilidade de um problema quando o domínio sofre perturbações suaves em sua fronteira, não havendo mudanças em sua topologia [104].

Posteriormente surgem técnicas de otimização topológica que apresentam melhores resultados, por exemplo técnicas de homogeneização e penalização, que utilizam materiais fictícios com densidades intermediárias [22, 23].

Alguns anos depois surge o conceito de DT que permite a determinação de uma topologia ótima, conforme descrita por Eschenauer et al. (1994) [45], Shumacher (1996) [102], Sokolowski e Zokowski (1999) [103], Cea et al. (2000) [38], Novotny (2003) [83]. Esta técnica ganha destaque pela grande quantidade de aplicações e também por não utilizar densidades intermediárias.

É importante destacar, que o conceito matemático formal de derivada topológica foi introduzido por Sokolowski e Zochowski (1999). Posteriormente, Novotny et al. [83], introduz uma forma alternativa para a definição de DT equivalente a definição inicial [103]. Porém esses autores estabelecem um isomorfismo entre o domínio original e o domínio topologicamente modificado. Este resultado potencializa as possibilidades de aplicações da técnica.

Novotny et al. (2003) [83, 86, 87] estudam a sensibilidade topológica para diversos problemas de engenharia: a condução estacionária de calor em sólidos rígidos considerando condições de contorno de Neumann, Robin e Dirichlet na fronteira do furo, elasticidade linear em estado plano de tensão e deformação flexão elástica linear de placas de Kirchhoff, torção de barras sujeitas a fluência estacionária e Poisson em domínio perturbado por uma inclusão com propriedades distintas do meio.

Amstutz (2003) [6] analisa o desenvolvimento assintótico topológico de alguns problemas. Em particular, aplicam-se os resultados obtidos em problemas de: (i) localização de trincas considerando o problema de Laplace 2D, (ii) Helmholtz 2D com condição de Dirichlet no furo circular, condição de Neumann no furo de forma arbitrária e inserção de inclusões. E ainda, estuda-se a sensibilidade para uma classe de problemas não lineares com condição de Dirichlet e furo de forma arbitrária.

Nazarov e Sokolowski (2004) [75] desenvolvem a expansão assintótica do funcional energia, correspondente ao problema de Poisson para uma perturbação associada a formação de um ligamento. Feijóo (2004) [47] estuda a derivada topológica para o problema de Helmholtz em um meio infinito, sendo o resultado empregado na resolução do problema inverso do espalhamento. Guillaume e Idris (2004) [54] aplicam a análise de sensibilidade nas equações de Stokes considerando funcionais custos mais gerais e furos de forma arbitrária. E ainda, são apresentadas aplicações da derivada topológica em problemas de otimização. Burger et al. (2004) [34] usam a derivada topológica em combinação com o método *level-set* para resolver problemas de reconstrução e otimização de formas.

O trabalho de Novotny et al. (2002) [87] apresenta uma nova metodologia para obtenção da derivada topológica, mediante conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma. Essa abordagem viabiliza a utilização do conceito de derivada topológica na obtenção de topologia ótima em elasticidade bidimensional, de modo a minimizar a energia de deformação da estrutura. Em 2005 [85], utilizando essas ideias, calcula a forma fechada da DT no problema de flexão de placas elásticas para o modelo cinemático de Kirchhoff, utilizando a energia potencial como função custo. Uma variação na função custo a ser otimizada, para o modelo de placas de Kirchhoff, aparece no trabalho de Bojczuk e Mróz (2009) [29]. Esses utilizam como função custo o volume de material da placa.

Diante das grandes possibilidades do conceito de DT, Amstutz (2006) [7] fornece o cálculo da derivada topológica para uma classe de problemas não lineares. Em particular, trata da equação de Navier-Stokes e da versão não linear da equação de Helmholtz. Giusti et al. (2010) [51] apresenta o cálculo da DT para a energia potencial total associada ao problema de difusão de calor em um meio ortotrópico em estado estacionário.

Amstutz e Novotny (2011) [10] calculam a derivada topológica para o modelo de placas finas o modelo matemático é um operador diferencial de quarta ordem para uma classe de funcionais associados a esse modelo. Posteriormente, generalizando alguns resultados, Amstutz et al. (2014) [11] apresentam a expansão topológica assintótica de uma classe de funções de forma associadas a operadores diferenciais elípticos de ordem  $2m$ ,  $m \geq 1$ . Neste último trabalho, a estrutura geral do tensor de polarização é apresentada e o conceito de tensor de polarização degenerado é introduzido. Utilizando diferentes abordagens, Campeão et al. (2014) [36] utiliza o modelo de placas de Kirchhoff para otimização topológica, considerando diferentes métodos para o controle de volume e assume também como função custo a energia potencial.

No presente trabalho, estuda-se uma generalização das ideias apresentadas por Sales e Novotny (2015) [88]. A DT é calculada para um problema convectivo-difusivo em estado estacionário. Porém, no caso analisado por esses autores, não há perturbação no termo de convecção e ainda é adotada a energia potencial como função custo.

Também é analisado neste trabalho, o modelo de placa de Reissner-Mindlin descrito como um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem. São

ampliadas as ideias desenvolvidas por Sales et al. (2015) [99], que apresentaram o primeiro trabalho no contexto de otimização topológica associado ao conceito de DT para este modelo de placas.

Demonstrando a grande potencialidade do conceito de DT, na otimização topológica, em variados contextos. Os trabalhos de Amigo et al. (2016) [3] apresenta a derivada topológica para atuadores piezoelétricos. Torii et al (2016) [107] utilizam o conceito de DT para apresentar uma abordagem para a otimização de topologia de conformidade robusta sob restrição de volume. Já Sá et al. (2016) [98] apresentam a DT aplicada a problemas de otimização de projeto de canal de fluxo de fluido. Lopes (2016) [65] calculam a derivada topológica para mecanismos flexíveis com restrições de tensão. Amad et al. (2017) [1] desenvolve, via derivada topológica, um novo método para design de topologia de antenas eletromagnéticas utilizadas em terapia de hipertermia para o tratamento de câncer. Em Machado (2017) é determinada a derivada topológica para o problema de fundição eletromagnética inversa, que consiste em projetar um conjunto de indutores de tal forma que um metal líquido atinja uma determinada forma. Ferreira e Novotny (2017) [48] desenvolvem um novo método de reconstrução não iterativa para o problema da tomografia por impedância elétrica. Considerando um domínio anisotrópico, Bonnet e Cornaggia (2017) [31] calculam a derivada topológica de ordem superior para elasticidade tridimensional.

Todos os trabalhos citados até aqui, utilizam métodos dos Elementos Finitos em sua formulação numérica. Poucos trabalhos são encontrados na literatura, com implementação da derivada topológica via métodos do elementos de contorno (MEC), dentre eles, podemos destacar: Anflor (2007) [13] apresenta o desenvolvimento e implementação computacional de técnicas de otimização topológica para problemas governados pela equação de Poisson, utilizando o método dos elementos de contorno e derivada topológica adotando a energia potencial como função custo. Anflor e Marczak (2012) [14] apresenta uma implementação de uma formulação obtida pela análise de sensibilidade topológica utilizando MEC, para problemas simultâneos de otimização de transferência de calor e massa. Também utilizando o MEC e derivada topológica, Neches e Cisilino (2008) [77] apresentam otimizações topológicas em problemas de elasticidade linear bidimensional.

Cabe mencionar ainda que o método de análise de sensibilidade topológica, em particular, não apresenta qualquer limitação quanto à função custo, condição de contorno nos furos, ao fenômeno em estudo ou tipo de método numérico utilizado, o que permitiu aplicar o conceito de DT em três problemas, com modelos matemáticos distintos: Equação de Convecção-Difusão, Modelos de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin.

## 3 Conceitos Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. É feita uma breve explanação sobre os tipos de otimização (parâmetros, forma e topológica) com ênfase na Otimização Topológica. O conceito da DT também é apresentado. Finalmente, é feita uma descrição do algoritmo baseado na DT utilizando método dos elementos finitos.

### 3.1 Otimização

A otimização estrutural busca encontrar um projeto (estruturas) com melhor desempenho e que satisfaça as restrições impostas ao mesmo. A avaliação do desempenho está associada a algum critério, que pode ser, por exemplo: mínima massa, máxima rigidez, mínima/máxima frequência natural de vibração, mínima dissipação de calor, máxima carga de flambagem, etc.

Os processos de otimização são classificados em três tipos, são eles, otimização de forma, de parâmetro e topológica.

#### 3.1.1 Otimização de Parâmetros

Segundo Anflor (2007), um problema de otimização de parâmetros ocorre quando as variáveis de um projeto descrevem características geométricas da estrutura, como a área de seção transversal em barras, momento de inércia em vigas ou espessura de placas. Para o caso de barras, por exemplo, o objetivo consiste na busca de uma distribuição ótima para a área de seção transversal de cada barra, de modo que uma grandeza física seja otimizada (minimizada ou maximizada), tal como a flexibilidade ou tensão enquanto a condição de equilíbrio e as restrições são satisfeitas.

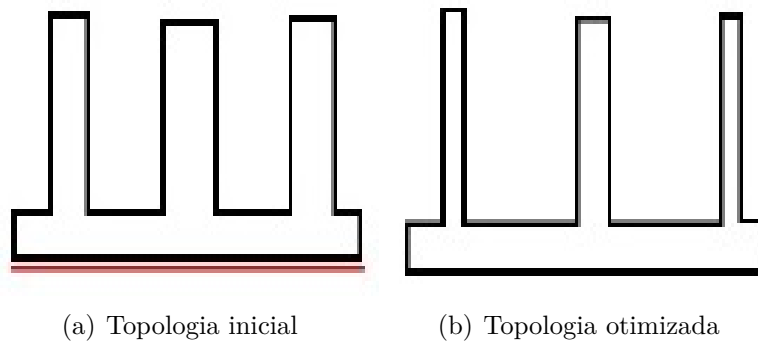


Figura 3.1 – Otimização de parâmetros

### 3.1.2 Otimização de Forma

Na otimização de forma o domínio de definição da equação de estado é modificado através de alterações em sua forma, ou seja, há modificação no contorno do domínio. O tratamento desse tipo de variável de projeto (forma) possui algumas particularidades, principalmente no que se refere ao cálculo das derivadas das funções de desempenho, que podem ser obtidas utilizando alguns conceitos básicos da mecânica do contínuo, tais como derivada material de campos espaciais e o teorema do transporte de Reynolds. No caso de estruturas discretas (treliças ou pórticos) busca-se a solução ótima através da modificação das coordenadas nodais. Já em estruturas contínuas (cascas, placas, etc.), a forma é definida e modificada através de variáveis de controle geométrico, tais como pontos de controle de curvas de Bezier ou Splines. Nesses problemas, os limites e interface das estruturas são controlados como variáveis de projeto que geralmente são contínuas. Problemas de otimização de forma geralmente são mais complicados do que otimização de parâmetros, pois requerem técnicas mais sofisticadas para geração de malha automatizada e derivadas bastante precisas para a determinação da sensibilidade.

As variáveis de projeto são geralmente os pontos de controle de primitivas geométricas. A otimização de forma permite mudanças apenas no contorno do domínio original. (Ver figura (3.1.2))

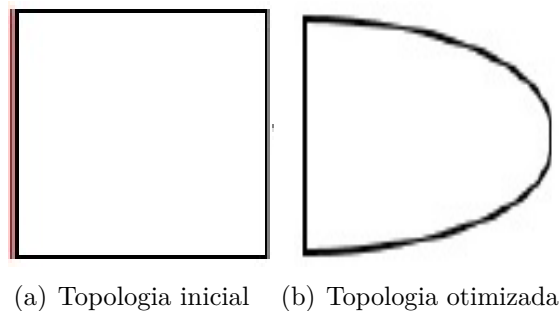


Figura 3.2 – Otimização de forma



### 3.1.3 Otimização Topológica

Nos últimos anos, a otimização da topologia assistida por computador tem recebido crescente atenção. É um campo relativamente novo, mas em rápida expansão, da mecânica estrutural. Ele é usado em uma taxa crescente em aplicações industriais, por exemplo, nas indústrias automotiva, de máquinas e aeroespacial. A razão para isso é que muitas vezes é possível obter maiores economias e melhorias de design do que as otimizações de parâmetros e de forma.

Neste trabalho a ênfase está na otimização topológica, que tem por objetivo determinar a distribuição ótima de material de um projeto ao inserirem furos (nucleações de inclusões) tanto no domínio quanto em seu contorno. Esse tipo de otimização pode ser visto como uma extensão da otimização de forma, pois na topologia final do projeto o contorno também sofre alterações. Com isso, tem ainda a vantagem de poder ser usada no estágio conceitual de um projeto, não dependendo de uma estrutura inicial definida, sendo capaz de alterar a topologia, tamanho e forma.

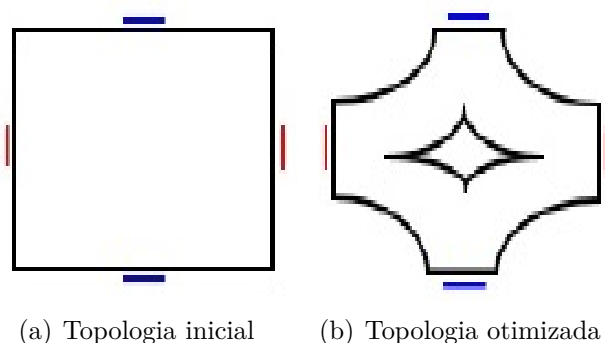


Figura 3.3 – Otimização topológica

Muitos métodos de otimização topológica foram desenvolvidos nas últimas décadas, incluindo método de homogeneização (Bendsøe e Sigmund, 1998 [23]), a microestrutura fictícia *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (SIMP) (Bendsøe e Sigmund, 1999 [25]), o método level set (WANG et al. 2003 [113]) e o método da derivada topológica (Sokolowski e Zochowski, 1999 [103]). Entre todos os métodos de otimização de topologia citados aqui, talvez um deles que esteja sob desenvolvimento contínuo devido à alta complexidade matemática envolvida seja a derivada topológica, sendo essa a abordagem discutida neste trabalho e, portanto, apresentada com mais detalhes na próxima seção.

É importante destacar as vantagens da utilização da DT com relação aos métodos citados acima: É dada por uma fórmula fechada, que depende da solução do problema original não perturbado; fornece uma direção de descida mais íngreme no processo de minimização da função de forma e não utiliza densidades intermediárias de materiais no processo de otimização.

## 3.2 Derivada Topológica

Para introduzir o conceito de DT considere um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  o qual contém uma pequena perturbação (furo ou inclusão) de forma arbitrária  $B_\varepsilon(\hat{x})$  de tamanho  $\varepsilon$  centrada em um ponto arbitrário  $\hat{x} \in \Omega$ , conforme pode ser observado na figura (3.4) (ver [110]).

É introduzida então, uma função característica  $x \mapsto \chi(x)$ ,  $x \in \Omega$  associada ao domínio original, que será denotado por  $\chi = \mathbf{1}_\Omega$ , tal que

$$|\Omega| = \int_{\Omega} \chi, \quad (3.1)$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de Lebesgue de  $\Omega$ . Então, é definida uma função característica da forma  $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}, x)$ ,  $x \in \Omega$  associada ao domínio topologicamente perturbado. O domínio perturbado é obtido quando um furo circular  $B_\varepsilon(\hat{x})$  é introduzido no domínio  $\Omega$ , neste caso,  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{B_\varepsilon(\hat{x})}$ .

Assume-se que um dado funcional de forma,  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ , associado a um domínio topologicamente perturbado, admite a seguinte expansão assintótica topológica

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)D_T(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (3.2)$$

onde  $\psi(\chi)$  é o funcional de forma associado ao domínio original (não perturbado),  $f(\varepsilon)$  é uma função positiva, tal que,  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A função,  $\hat{x} \mapsto D_T(\hat{x})$  é chamada de derivada topológica de  $\psi$  em  $\hat{x}$ . Essa derivada, pode ser entendida como uma correção de primeira ordem de  $\psi(\chi)$  para aproximar  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ . De fato, a equação (3.2), pode ser escrita da forma

$$\frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)} = D_T(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (3.3)$$

Passando o limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$  na equação acima, obtemos

$$D_T(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)}. \quad (3.4)$$

De acordo com Novotny e Sokolowski (2015), o limite (3.4) não é trivial, pois se trata de perturbações singulares consistindo da nucleação de furos em que os funcionais de forma  $\psi(\chi)$  e  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  resultam definidos em domínios topologicamente diferentes. Entretanto, neste trabalho, são consideradas perturbações regulares, produzidas pela nucleação de inclusões, por ser mais prático do ponto de vista matemático do que o caso singular, visto que a topologia do domínio é preservada. O domínio  $\Omega$  é dividido em dois subdomínios  $\omega \subset \Omega$  e o complemento  $\Omega \setminus \omega$ . Dessa forma, introduzimos funções constantes por partes  $\alpha, \beta, \rho$  e  $f$ , que são apresentadas na tabela 1.

	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$\rho(x)$	$f(x)$
$\Omega \setminus \omega$	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\rho_0$	$f_0$
$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\rho_1$	$f_1$

Tabela 1 – Valores de  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\rho(x)$  e  $f(x)$  em  $\Omega$

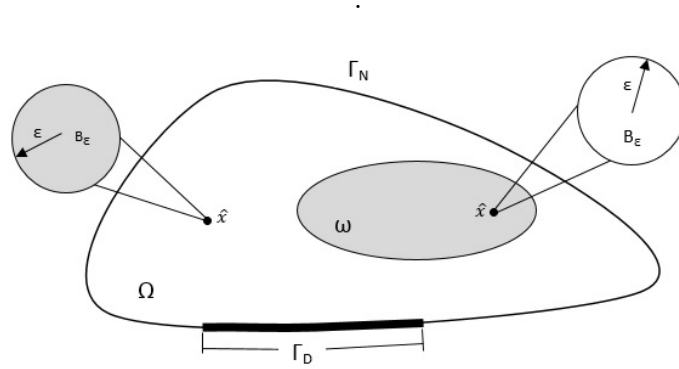


Figura 3.4 – Conceito de derivada topológica

A perturbação topológica é dada pela nucleação de uma pequena inclusão circular da forma  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) := B_\varepsilon(\hat{x}) = \{\|x - \hat{x}\| < \varepsilon\}$  para  $\hat{x} \in \Omega$ . Em particular, a perturbação é governada pelo conjunto de funções constantes por partes,  $\alpha_\varepsilon$ ,  $\beta_\varepsilon$ ,  $\rho_\varepsilon$  and  $f_\varepsilon$  de acordo com as tabelas 2 e 3.

Tabela 2 – Valores de  $\alpha_\varepsilon$ ,  $\beta_\varepsilon$ ,  $\rho_\varepsilon$  and  $f_\varepsilon$ .

	$\alpha_\varepsilon$	$\beta_\varepsilon$	$\rho_\varepsilon$	$f_\varepsilon$
$\Omega \setminus B_\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$f$
$B_\varepsilon$	$\gamma_\alpha \alpha$	$\gamma_\beta \beta$	$\gamma_\rho \rho$	$\gamma_f f$

Tabela 3 – Valores de  $\gamma_\alpha$ ,  $\gamma_\beta$ ,  $\gamma_\rho$  and  $\gamma_f$ .

	$\gamma_\alpha$	$\gamma_\beta$	$\gamma_\rho$	$\gamma_f$
$\Omega \setminus \omega$	$\alpha_1/\alpha_0$	$\beta_1/\beta_0$	$\rho_1/\rho_0$	$f_1/f_0$
$\omega$	$\alpha_0/\alpha_1$	$\beta_0/\beta_1$	$\rho_0/\rho_1$	$f_0/f_1$

É importante ressaltar que um funcional de forma definido em um domínio de referência  $\Omega$  irá admitir a expansão assintótica topológica (3.2) se algumas propriedades forem verificadas, são elas:

- O funcional  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  deve ser diferenciável com relação a forma em  $\hat{x} \in \Omega$ ;
- O funcional  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  é contínuo em relação a perturbação topológica em  $0^+$ , isto é,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon) = 0$ ;
- A função  $\varepsilon \mapsto f(\varepsilon)$  é continuamente diferenciável em  $(0, \varepsilon_0]$ ;
- A passagem ao limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0$  é verdadeira.

**Observação. 3.1** A derivada topológica obedece às regras básicas do Cálculo Diferencial (em particular soma e regra de quociente para diferenciação), que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

### 3.3 Método dos Elementos Finitos

Nesta seção é apresentado os tipos de elementos finitos utilizados neste trabalho. O primeiro é conhecido na literatura por DST (*Discrete Shear Triangle*) proposto originalmente por Batoz e Lardeur (1989) [20], baseadas no modelo de Reissner-Mindlin e as seguintes hipóteses: a) as rotações das seções variam quadraticamente sobre o domínio do elemento; b) o deslocamento vertical varia cubicamente ao longo dos lados; c) A rotação normal da seção varia linearmente ao longo do lado do elemento; d) material homogêneo e isotrópico; e) campos pequenos de deslocamentos, rotações e deformações. O DST possui nove graus de liberdade sendo duas rotações ( $\theta_{xi}, \theta_{yi}$ ) e um deslocamento vertical ( $w_i$ ) por nó, (ver figura 3.3). A formulação matemática deste elemento contempla as hipóteses da teoria de flexão de placas de Reissner-Mindlin [74], de forma que ele tem capacidade de capturar os efeitos de índices de rigidez relativas (vão/espessura) no comportamento da placa.

O segundo elemento de placas utilizado foi o DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*), que foi originalmente apresentado por Stricklin apud [21]. Segundo Batoz e Lauder [20], o DKT pode ser considerado uma forma degenerada do DST. De fato, Viana [109], mostra explicitamente as alterações na matriz de rigidez do DST para se obter a forma exata da matriz de rigidez do DKT. Embora a construção da matriz de rigidez dos elementos DKT e DST não requeira a interpolação dos deslocamentos transversais no domínio do elemento, para o cálculo do vetor nodal equivalente e da massa de matriz, tal interpolação é essencial.

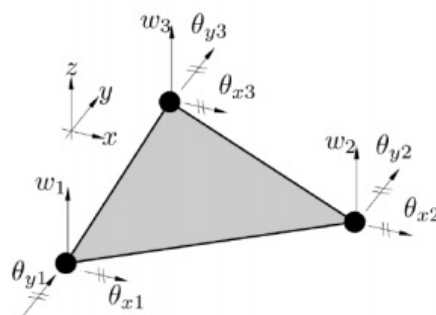


Figura 3.5 – Graus de liberdade: Elementos DKT e DST

Nos exemplos de trocadores de calor, foram utilizados elementos finitos triangulares lineares, com três nós e três graus de liberdade. O polinômio aproximador é uma expressão algébrica completa do primeiro grau, expresso em função dos parâmetros nodais (temperatura).

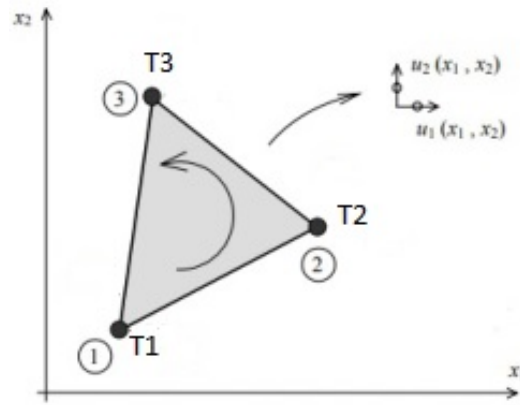


Figura 3.6 – Elemento finito triangular com 3 graus de liberdade

A figura 3.7 mostra uma malha  $2 \times 2$  (estruturada) definida sobre o domínio  $\Omega$ , com 16 elementos e 13 nós.

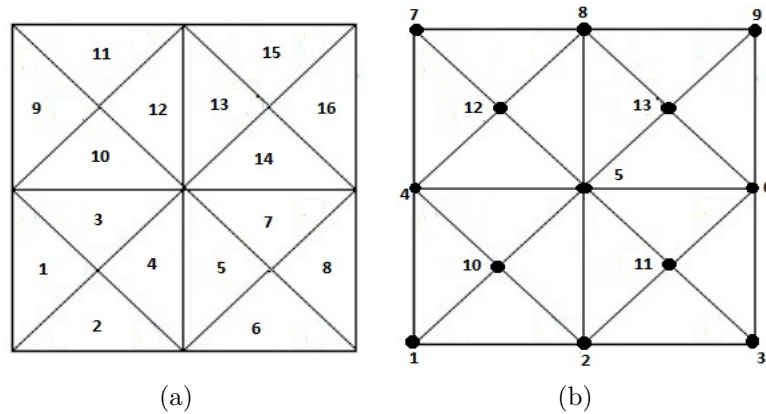


Figura 3.7 – Triangulação do quadrado unitário: (a) Enumeração dos elementos; (b) Enumeração dos pontos nodais

**Observação. 3.2** *A malha triangular estruturada  $n \times n$  utilizada nos exemplos numéricos deste trabalho, possui  $4n^2$  elementos e  $[(n + 1)^2 + n^2]$  nós.*

### 3.4 Implementação

Com o intuito de facilitar o entendimento da implementação do algoritmo baseado na derivada topológica, nas subseções a seguir são descritos: o método de penalização linear que é utilizado para minimizar a função de forma, impondo uma restrição de volume, o algoritmo de otimização, bem como a metodologia de criação de furos (ou inclusões) no processo de otimização.

### 3.4.1 Penalização Linear

Considere um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $\Omega \subset \mathcal{D}$ . O problema de otimização a ser resolvido consiste em encontrar um subdomínio  $\Omega \subset \mathcal{D}$ , que satisfaz o seguinte problema de minimização:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \mathcal{F}_\Omega(u), \\ \text{sujeito a } |\Omega| \leq |\Omega|^*. \end{cases} \quad (3.5)$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de Lebesgue de  $\Omega$  e  $\mathcal{F}_\Omega$  é a função de forma (função objetivo) definida no domínio  $\Omega$ .

Usando o método de penalização linear para o controle de volume, o problema (3.5) é reescrito como

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \mathcal{F}_\Omega^\mu(u), \quad (3.6)$$

com

$$\mathcal{F}_\Omega^\mu(u) = \mathcal{F}_\Omega + \mu|\Omega|. \quad (3.7)$$

Na equação acima  $\mu > 0$  é um multiplicador fixo que impõe uma restrição no volume de material elástico, ou seja, quanto maior for o valor de  $\mu$ , menor será o volume final  $|\Omega|$ .

A derivada topológica de (3.7) é dada por,

$$D_T \mathcal{F}_\Omega(\hat{x}) = D_T \mathcal{F} + \mu D_T |\Omega|. \quad (3.8)$$

De forma que,

$$D_T |\Omega| = \begin{cases} -1 & \text{se } \hat{x} \in \Omega \\ 1 & \text{se } \hat{x} \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (3.9)$$

Deve-se ressaltar que o método de penalização utilizado não fornece um controle direto sobre a fração de volume requerida, isto significa que não conseguimos fixar a priori a fração de volume de material a ser retirado.

### 3.4.2 Algoritmo de Otimização Baseado na Derivada Topológica

O algoritmo de otimização topológica utilizado neste trabalho foi proposto por Amstutz e Andra (2006) para resolução do problema (3.5). O processo se dá por uma representação do domínio por uma função *level-set* e a aproximação das condições de otimalidade baseadas na derivada topológica por uma iteração de ponto fixo. Em particular, o algoritmo se mostra muito eficiente em produzir mudanças gerais na topologia, diferentemente de outras metodologias baseadas em representações por funções *level-set*. Além disso, a DT tem a vantagem de fornecer uma fórmula analítica explícita para a sensibilidade topológica que permite obter a topologia ótima (em alguns casos em poucas iterações).

Com a representação de domínio por função *level-set*, o material duro é caracterizado por uma função  $\psi \in L^2(\Omega)$ , tal que

$$\Omega^s = \{x \in \Omega, \psi(x) < 0\}, \quad (3.10)$$

e o domínio de material mole é definido por

$$\Omega^\omega = \{x \in \Omega, \psi(x) > 0\}. \quad (3.11)$$

Agora, considere a DT do funcional de forma  $\mathcal{F}_\Omega(u)$ . De acordo com Amstutz e Andra (2006), uma condição suficiente de otimalidade local do problema (3.5) para a classe de problemas que consideram inclusões circulares como perturbações singulares é

$$D_T \mathcal{F}_\Omega(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.12)$$

Para desenvolver um algoritmo baseado em *level-set* que tem por objetivo produzir uma topologia que satisfaça (3.12) é necessário definir a função

$$g(x) = \begin{cases} -D_T^s \mathcal{F}_\Omega(x) & \text{se } x \in \Omega^s \\ D_T^\omega \mathcal{F}_\Omega(x) & \text{se } x \in \Omega^\omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

Com a definição acima e considerando (3.10) e (3.11), podemos estabelecer que a condição suficiente (3.12) é satisfeita se for válida a seguinte relação de equivalência entre  $g$  e a função *level-set*  $\psi$ :

$$\exists \chi > 0, \text{ tal que } g = \chi\psi, \quad (3.14)$$

ou, de forma equivalente

$$\theta := \arccos \left( \frac{\langle g, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}} \right) = 0, \quad (3.15)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $g$  e  $\psi$  em  $L^2(\Omega)$ .

Assim, começando com uma dada função *level-set*  $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ , que define o domínio inicial para a topologia ótima, o algoritmo proposto, produz uma sequência  $(\psi)_{i \in \mathbb{N}}$  de funções *level-set* que fornecem sucessivas aproximações para a condição suficiente de otimalidade (3.14). A sequência satisfaz,

$$\psi_0 \in L^2(\Omega) \quad (3.16)$$

$$\psi_{n+1} \in \text{co}(\psi_n, g_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

onde  $\text{co}(\psi_n, g_n)$  é o espaço convexo  $\{\psi_n, g_n\}$ . Neste trabalho o domínio inicial  $\psi_0$  é normalizado. Com  $\mathcal{S}$  denotando a esfera unitária em  $L^2(\Omega)$ , o algoritmo é explicitamente dado por

$$\psi_0 \in \mathcal{S} \quad (3.18)$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sin \theta_n} \left[ \sin((1 - \kappa_i)\theta_n) \psi_n + \sin(\kappa_i \theta_n) \frac{g_n}{\|g_n\|_{L^2(\Omega)}} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

onde  $\kappa_i \in [0, 1]$  é o tamanho do passo determinado pela busca linear de modo a diminuir o valor da função custo  $\mathcal{F}_\Omega(u)$  e, por construção de (3.19), tem-se que  $\psi_{n+1} \in \mathcal{S}, \forall n \in \mathbb{N}$ . O processo iterativo é interrompido quando, para alguma iteração, algum dos decréscimos obtidos em  $\kappa$  ou  $\theta$ , seja menor que uma dada tolerância numérica. Se, neste estágio, a condição de otimalidade (3.14) não é satisfeita no grau de precisão requerido, isto é, se  $\theta_{n+1} > \epsilon_\theta$  ou  $\kappa_{n+1} > \epsilon_\kappa$ , onde  $\epsilon_\theta = 1^\circ$  e  $\epsilon_\kappa = 10^{-3}$ , são tolerâncias de convergência pré-estabelecidas, então, um refino uniforme da malha é feito e o processo repetido até que seja obtido  $\theta < 1^\circ$  (valor adotado neste trabalho).

Vale ressaltar que a fim de reduzir o custo computacional e, ao mesmo tempo, melhorar a robustez em relação aos mínimos locais, observa-se que geralmente é benéfico dividir o processo de otimização em várias etapas associados a diferentes níveis de precisão. Nesta estrutura, começamos com uma malha mais grosseira e, após a convergência, essa malha é refinada. A função *level-set* é projetada na malha (estruturada) refinada e a otimização é reiniciada com essa nova configuração. Este procedimento é iterado até a precisão desejada ser alcançada.

**Observação. 3.3** *Para obter todos os exemplos numéricos apresentados neste trabalho, os códigos foram implementados no Matlab 2018a e ainda, contou-se com uma workstation com um processador Intel Core i7 e memória instalada (RAM) de 64,0 GB.*



## 4 Trocadores de Calor

Neste capítulo é feita a expansão assintótica do funcional energia modificado, para isso é necessário o cálculo da DT de dois funcionais auxiliares. Inicialmente é considerado o modelo matemático para um problema Difusivo-Convectivo-Reativo, que é um modelo mais geral da equação de Difusão-Advecção. Vamos impor uma restrição, considerando-o em estado estacionário.

São apresentadas estimativas dos termos residuais (remanescentes), assim como os resultados numéricos, que possibilitaram um projeto de trocador de calor, baseado no cálculo da derivada topológica, implementado com auxílio do método dos elementos finitos. Nas duas primeiras seções, os problemas originais não perturbados e topologicamente perturbados são apresentados, juntamente com argumentos sobre a existência da derivada topológica associada.

Ao utilizar a DT, foi possível obter topologias otimizadas, que além de corroborar com as tradicionais topologias ramificadas conhecidas na literatura, por serem os caminhos condutivos ótimos na condução de calor  $2D$ , propõe uma nova abordagem para a função custo. Também é considerada uma perturbação do termo convectivo, o que permitiu a obtenção de topologias ótimas de trocadores de calor. A possibilidade de inserção de material com diferentes condutividades térmicas durante o processo iterativo permite a obtenção de trocadores de calor com geometrias mais complexas.

É importante ressaltar que a otimização de topologia é uma valiosa ferramenta de projeto para sistemas físicos, especialmente para sistemas estruturais. No entanto, sua aplicação no campo da transferência de calor é menos evidente, mas está em constante progresso. Dessa forma, poucos trabalhos são encontrados na literatura no contexto de otimização topológica para problemas de condução de calor utilizando a DT.

A perturbação no termo convectivo da equação de Difusão-Convecção e o fato de que o funcional energia modificado é mais geral, com relação a outros funcionais que podemos encontrar na literatura especializada destacam as contribuições desse trabalho.

## 4.1 Equação de Difusão-Convecção-Reação

A seguir, é apresentado o problema (modelo matemático) no domínio não perturbado  $\Omega$  e também as condições de contorno nas fronteiras,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ , de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Posteriormente, apresentam-se também a formulação do problema no domínio perturbado e as respectivas condições de contorno.

### 4.1.1 Problema não Perturbado

O modelo é representado pela Equação de Difusão-Convecção-Reação:

Encontre  $u$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V}) + \rho k u & = f \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{V}) & = 0 \\ u & = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde  $u$  é a temperatura,  $\operatorname{div}(\alpha \nabla u)$  é o termo difusivo,  $\nabla u \cdot \mathbf{V}$  é o termo convectivo, com  $\mathbf{V}$  um dado campo de velocidade, a última parcela do lado esquerdo ( $\rho k u$ ) é o termo de reação ( $k$  é uma função escalar não negativa) e  $f$  é o termo fonte. Consideramos a condição de não-deslizamento,  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $\partial\Omega$  ( $\mathbf{n}$  é o vetor normal a fronteira  $\partial\Omega$ ), e ainda,  $(\Gamma_D \cup \Gamma_N) = \partial\Omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de difusão e convecção, respectivamente ( $\beta \ll \alpha$ ),  $\rho$  é o coeficiente de reação.

A formulação fraca é dada por:

Encontrar

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V}) \eta + \int_{\Omega} \rho k u \eta = \int_{\Omega} f \eta, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (4.2)$$

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado é definido como,

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} \rho k |u|^2, \quad (4.3)$$

onde a primeira e segunda parcelas do lado direito estão associadas a energia potencial e energia térmica, respectivamente.

Para calcular a DT do funcional dado por (4.3) é necessário calcular a DT dos funcionais,

$$\mathcal{G}(u) = \int_{\Omega} \rho k |u|^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2. \quad (4.4)$$

A fim de auxiliar as análises, introduz-se os problemas adjuntos para  $\mathcal{G}(u)$  e  $\mathcal{J}(u)$ , dados por:

Encontrar

$$q \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \beta(\nabla q \cdot \mathbf{V}) \eta + \int_{\Omega} \rho k q \eta = -2 \int_{\Omega} \rho k u \eta, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (4.5)$$

Encontrar

$$p \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \beta (\nabla p \cdot \mathbf{V}) \eta + \int_{\Omega} \rho k p \eta = -2 \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Problema Perturbado

Com isso, podemos definir o problema perturbado:

Encontre  $u_\varepsilon$  tal que,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + \beta_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k u_\varepsilon = f_\varepsilon \\ \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \\ u_\varepsilon = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha \nabla u_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{em } \Omega, \\ \\ \text{sobre } \partial\Omega \\ \\ \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \quad (4.7)$$

A formulação fraca do problema é dada por,

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \eta + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k u_\varepsilon \eta = \int_{\Omega} f_\varepsilon \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (4.8)$$

Os funcionais de forma perturbados são dados por,

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |u_\varepsilon|^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|^2. \quad (4.9)$$

**Observação. 4.1** A igualdade a seguir, é importante para o desenvolvimento do restante do capítulo. Sejam  $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$  então

$$\int_{\Omega} 2\beta (\nabla \psi \cdot \mathbf{V}) \psi = - \int_{\Omega} \beta \operatorname{div}(\mathbf{V}) \psi^2 + \int_{\Omega} \beta \operatorname{div}(\mathbf{V} \psi^2) = \int_{\partial\Omega} \beta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \psi^2 = 0. \quad (4.10)$$

#### 4.1.3 Existência da Derivada Topológica

Uma vez definidos o problema não perturbado (4.1) e o problema perturbado (4.7), mostraremos a existência da derivada topológica associada ao problema de Convecção-Difusão-Reação.

**Lema 4.1** *Seja  $u$  solução do Problema (4.1) e  $u_\varepsilon$  solução do Problema (4.7). Então:*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} = O(\varepsilon). \quad (4.11)$$

**Demonstração.** Fazendo a diferença entre (4.8) e (4.2),

$$\underbrace{\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta}_{L_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \eta - \int_{\Omega} \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) \eta}_{L_2} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} \rho k u \eta}_{L_3} = \underbrace{\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta}_{L_4}. \quad (4.12)$$

Desenvolvendo  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , obtemos

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &\quad - \int_{B_{\varepsilon}} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla u_{\varepsilon} \cdot V) \eta - \int_{\Omega} \beta (\nabla u \cdot V) \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta (\nabla u_{\varepsilon} \cdot V) \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta (\nabla u_{\varepsilon} \cdot V) \eta - \int_{\Omega} \beta (\nabla u \cdot V) \eta \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta (\nabla u \cdot V) \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta (\nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot V) \eta - \int_{\Omega} \gamma_{\beta} \beta (\nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot V) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta (\nabla u \cdot V) \eta \\ &= \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot V) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta (\nabla u_{\varepsilon} \cdot V) \eta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k u_{\varepsilon} \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\rho} \rho k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k u \eta - \int_{B_{\varepsilon}} \rho k u \eta \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\rho} \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k (u_{\varepsilon} - u) \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\rho} \rho k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$L_4 = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta = - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta. \quad (4.16)$$

Substituindo  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  em (4.12)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot V) \eta + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta &= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta (\nabla u_{\varepsilon} \cdot V) \eta + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Considerando  $\eta = u_\varepsilon - u$ , pela igualdade (4.10) tem-se,  $\int_{\Omega} \beta_\varepsilon (\nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \mathbf{V})(u_\varepsilon - u) = 0$  e,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon - u\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon - u)^2 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla(u_\varepsilon - u) \\ & + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V})(u_\varepsilon - u) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u (u_\varepsilon - u) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando a desigualdade Cauchy-Schwarz e o fato de  $u$  ser Lipschitz contínua, temos

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla(u_\varepsilon - u) \leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq c_1 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.19)$$

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta [\nabla u \cdot \mathbf{V}](u_\varepsilon - u) \leq c_3 \|\nabla u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq c_3 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.20)$$

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u (u_\varepsilon - u) \leq c_4 \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq c_4 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.21)$$

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u) \leq c_5 \|f\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq c_5 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.22)$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon u\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon - u)^2 \leq c_6 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$C_1 \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon u\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon - u)^2. \quad (4.24)$$

Portanto, substituindo (4.23) em (4.24), concluímos que

$$C_1 \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c_6 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.25)$$

que conduz ao resultado,

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \varepsilon, \quad (4.26)$$

com  $C = \frac{c_6}{C_1}$  independente do parâmetro  $\varepsilon$ .  $\square$

**Observação. 4.2** *O Lema 4.1 garante a continuidade com relação ao pequeno parâmetro  $\varepsilon$ , e portanto diferenciável no sentido (3.2).*

## 4.2 Cálculo da Derivada Topológica dos Funcionais Auxiliares

A partir dos problemas apresentados nas equações (4.1) a (4.9) são formulados dois teoremas a respeito da derivada topológica, que serão apresentados ao longo das próximas seções.

**Teorema 4.1** *Considere os funcionais de forma  $\mathcal{G}(u)$  e  $\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon)$  apresentados no lado esquerdo de (4.4) e (4.9), respectivamente. Então, a derivada topológica de  $\mathcal{G}$  é dada por,*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \mathcal{G}(x) = & -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q - 2\beta (\mathbf{P}_{\alpha\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V})q \\ & - \rho k(1 - \gamma_\rho)u(u + q) + (1 - \gamma_f)qf, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde  $q$  é a solução do problema adjunto definido em (4.5) e  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{P}_{\alpha\beta}$  são os tensores de polarização, dados por

$$\mathbf{P}_\alpha = \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \gamma_\alpha} \mathbf{I} \quad e \quad \mathbf{P}_{\alpha\beta} = \frac{1 - \gamma_\beta}{1 + \gamma_\alpha} \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ tensor identidade de segunda ordem}). \quad (4.28)$$

**Demonstração.** Considerando a diferença entre os funcionais  $\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon)$  e  $\mathcal{G}(u)$ , teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= \int_\Omega \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 + \int_{B_\varepsilon} \gamma_\rho \rho k(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 \pm \int_{B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 \\ &= \int_\Omega \rho k[(u_\varepsilon)^2 - (u)^2] - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2 \\ &= \underbrace{2 \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u)u}_{A_1} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2}_{A_2} + \underbrace{\int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u)^2}_{\mathcal{E}_1(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para  $A_2$ , temos:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u + u)^2 \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2 + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u)^2}_{\mathcal{E}_2(\varepsilon)} + 2 \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u) \cdot u}_{\mathcal{E}_3(\varepsilon)} \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k[(u)^2 - (u)^2(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_4(\varepsilon)} + \mathcal{E}_2(\varepsilon) + \mathcal{E}_3(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2(\hat{x}) + \sum_2^4 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para determinar  $A_1$ , observamos que a Equação (4.17) é igual a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \beta (\nabla(u_\varepsilon - u) \cdot V) \eta + \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u) \eta &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta \\ &+ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u_\varepsilon \cdot V) \eta + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta \end{aligned} \quad (4.31)$$

e fazendo  $\eta = q$  em (4.31)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla q + \int_\Omega \beta (\nabla(u_\varepsilon - u) \cdot V) q + \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u) q &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q \\ &+ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \rho (\nabla u_\varepsilon \cdot V) q + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por outro lado, considerando (4.10) e  $\eta = u_\varepsilon - u$  em (4.5), teremos

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla q + \int_{\Omega} \beta(\nabla(u_\varepsilon - u) \cdot V)q + \int_{\Omega} \rho k(u_\varepsilon - u)q = -2 \int_{\Omega} \rho k u(u_\varepsilon - u). \quad (4.33)$$

Observando que o lado esquerdo de (4.33) e (4.32) são iguais e o lado direito de (4.33) é igual a  $-A_1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} A_1 = & - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q}_{A_3} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta(\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V})q}_{A_4} \\ & - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q}_{A_5} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q}_{A_6}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Para  $A_6$  e  $A_5$  temos:

$$\begin{aligned} A_6 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f [q - q(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_5(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_f) f q(\hat{x}) + \mathcal{E}_5(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} A_5 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u + u) q \\ &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u q - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) q}_{\mathcal{E}_6(\varepsilon)} \\ &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u q(\hat{x}) - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k [u q - (u q)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_7(\varepsilon)} + \mathcal{E}_6(\varepsilon) \\ &= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k (u q)(\hat{x}) + \mathcal{E}_6(\varepsilon) + \mathcal{E}_7(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para determinar  $A_3$  e  $A_4$ , utilizaremos um *ansatz* para a expansão de  $u_\varepsilon$ , dado por

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \quad (4.37)$$

onde  $u_\varepsilon$  é solução de (4.8),  $w_\varepsilon$  é solução do problema exterior (4.47) e  $\tilde{u}_\varepsilon$  é um resíduo.

Com isso, podemos escrever  $A_3$  e  $A_4$  da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_3 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla (u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon(x)) \cdot \nabla q \\ &= - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q}_{A_7} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla q}_{A_8} \\ &\quad - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla q}_{\mathcal{E}_8(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta [\nabla(u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon(x)) \cdot \mathbf{V}] q \\
&= - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q}_{A_9} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) q}_{A_{10}} \\
&\quad - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \mathbf{V}) q}_{\mathcal{E}_9(\varepsilon)}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
A_7 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha [\nabla u \cdot \nabla q - (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)} \\
&= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon), \tag{4.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_9 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q(\hat{x}) \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q(\hat{x}) - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) [q - q(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)} \\
&= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Para determinar  $A_8$  e  $A_{10}$ , vamos substituir (4.37) em (4.7),

$$\begin{aligned}
0 &= -\operatorname{div}\{\alpha_\varepsilon \nabla[u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon]\} + \beta_\varepsilon (\nabla[u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon] \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k [u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon] - f_\varepsilon \\
&= \underbrace{-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla u) + \beta_\varepsilon (\nabla u \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k u - f_\varepsilon}_{A_{11}} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \\
&\quad + \beta_\varepsilon (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \beta_\varepsilon (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k w_\varepsilon + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon(x). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Reescrevendo os termos de  $A_{11}$ ,

$$A_{11} = \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) + \rho k u - f & \text{se } x \in \Omega \setminus B_\varepsilon \\ -\operatorname{div}(\gamma_\alpha \alpha \nabla u) + \gamma_\beta \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) + \gamma_\rho \rho k u - \gamma_f f & \text{se } x \in B_\varepsilon. \end{cases} \tag{4.43}$$

Logo,  $A_{11} = 0$  por (4.1) e (4.7).

Assim, (4.42) pode ser escrito como:

$$-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon) + \beta_\varepsilon (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \beta_\varepsilon (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k w_\varepsilon + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon(x) = 0. \tag{4.44}$$



Também podemos calcular o salto do gradiente no problema perturbado,

$$\begin{aligned}
[[\alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon]] \cdot n &= -(1 - \gamma_\alpha) \nabla u(x) \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon]] \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n \\
&= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot n - (1 - \gamma_\alpha) \nabla^2 u(y)(x - \hat{x}) \cdot n|_{\partial B_\varepsilon} \\
&\quad + [[\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon]] \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n \\
&= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon(1 - \gamma_\alpha) \alpha [\nabla^2 u(y)] n \cdot n \\
&\quad + [[\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon]] \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Como o salto do gradiente no problema perturbado é nulo, temos que:

$$-(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla^2 u(y) n \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon]] \cdot n + [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n = 0. \tag{4.46}$$

Para o problema exterior quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos: Encontre  $w_\varepsilon$ , tal que

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) = 0 & \text{em } \mathbb{R}, \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 & \text{quando } \|x\| \rightarrow \infty \\ \begin{array}{l} [[w_\varepsilon]] = 0 \\ [[\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon]] \cdot n = \hat{u} \end{array} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{4.47}$$

onde  $\hat{u} = (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot n$ .

Sabemos que a solução de  $P_1$ , conforme Novotny e Sokolowski (2016, p. 88), é dada por:

$$w_\varepsilon(x) = \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \quad \text{em } B_\varepsilon \tag{4.48}$$

$$w_\varepsilon(x) = \mathbf{P}_\alpha \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon. \tag{4.49}$$

Na bola  $B_\varepsilon$ , podemos escrever

$$\nabla w_\varepsilon(x) = \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}), \tag{4.50}$$

isto significa que,  $\nabla w_\varepsilon(x)$  é uniforme na bola  $B_\varepsilon$ .

Agora constrói-se  $\tilde{u}_\varepsilon$ , de tal forma que ficam compensadas as discrepâncias introduzidas por termos de ordem superior em  $\varepsilon$ , bem como pela camada limite  $\nabla w_\varepsilon$  na fronteira exterior  $\Omega$ . Dessa forma, o *resíduo*  $\tilde{u}_\varepsilon$  deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno: Encontre  $\tilde{u}_\varepsilon$ , tal que

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon (\nabla u u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon(x)] = \beta_\varepsilon (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) + \rho_\varepsilon k w_\varepsilon & \text{em } \Omega \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w_\varepsilon & \text{em } \partial\Omega \\ \begin{array}{l} [[\tilde{u}_\varepsilon]] = 0 \\ [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] n = \varepsilon g \end{array} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{4.51}$$

onde  $g = (1 - \gamma_\alpha) \alpha [\nabla^2 u(y)] n \cdot n$ .

É demonstrado no Lema 4.3 que o resíduo, apresentado no problema acima, possui uma estimativa na forma  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)_o} = o(\varepsilon)$ .

Considerando (4.50), podemos estimar  $A_8$  e  $A_{10}$

$$\begin{aligned}
A_8 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q \cdot \nabla w_\varepsilon \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q(\hat{x}) \cdot \nabla w_\varepsilon - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla q - \nabla q(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)} \\
&= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q(\hat{x}) \cdot \int_{B_\varepsilon} \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) + \mathcal{E}_{12}(\varepsilon) \\
&= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{12}(\varepsilon), \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{10} &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta q(\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta q(\hat{x})(\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) [q - q(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)} \\
&= -(1 - \gamma_\beta) \beta q(\hat{x}) \int_{B_\varepsilon} \mathbf{P}_{\alpha\beta} (\nabla u(\hat{x}) \cdot \mathbf{V}) + \mathcal{E}_{13}(\varepsilon) \\
&= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbf{P}_{\alpha\beta} (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{13}(\varepsilon). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.40) e (4.52) na equação (4.38), (4.41) e (4.53) na equação (4.39), obtemos

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\pi \varepsilon^2 [(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q + (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q](\hat{x}) + \mathcal{E}_8(\varepsilon) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{12}(\varepsilon) \\
&= -2\pi \varepsilon^2 \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_8(\varepsilon) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{12}(\varepsilon), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$(4.55)$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= -\pi \varepsilon^2 [(1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) q + (1 - \gamma_\beta) \beta (\mathbf{P}_\beta \nabla u \cdot \mathbf{V}) q](\hat{x}) + \mathcal{E}_9(\varepsilon) + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{13}(\varepsilon) \\
&= -2\pi \varepsilon^2 \beta (\mathbf{P}_{\alpha\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V}) q(\hat{x}) + \mathcal{E}_9(\varepsilon) + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{13}(\varepsilon). \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (4.35), (4.36), (4.54) e (4.56) em (4.34),

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\pi \varepsilon^2 [2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) + 2\beta (\mathbf{P}_\beta \nabla u \cdot \mathbf{V}) q \\
&\quad + (1 - \gamma_\rho) \rho k u q(\hat{x}) - (1 - \gamma_f) f q(\hat{x})] + \sum_{i=5}^{13} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (4.30) e (4.57) em (4.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= -\pi \varepsilon^2 [2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q(\hat{x}) + 2\beta (\mathbf{P}_{\alpha\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V}) q \\
&\quad + (1 - \gamma_\rho) \rho k u(u + q)(\hat{x}) - (1 - \gamma_f) f q(\hat{x})] + \sum_{i=1}^{13} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Considerando que  $f(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$ , podemos concluir que a derivada topológica do funcional  $\mathcal{G}$  é dada por:

$$D_T \mathcal{G} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q - 2\beta (\mathbf{P}_{\alpha\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V}) q - \rho k (1 - \gamma_\rho) u(u + q) + (1 - \gamma_f) f q. \tag{4.59}$$

□

**Teorema 4.2** *Considere os funcionais de forma,  $\mathcal{J}(u)$  e  $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)$ , apresentados em (4.4) e (4.9), respectivamente. Então a derivada topológica de  $\mathcal{J}$  é dada por,*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \mathcal{J}(x) = & -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot (\nabla u + \nabla p) - 2\beta (\mathbf{P}_{\alpha\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V}) p \\ & - \rho k (1 - \gamma_\rho) u p + (1 - \gamma_f) p f, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde  $p$  é solução do problema adjunto (4.6).

**Demonstração.** Considerando  $\eta = u$  em (4.2) e  $\eta = u_\varepsilon$  em (4.8), temos:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} f u - \int_{\Omega} \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) u - \int_{\Omega} \rho k (u)^2, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|^2 = \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_{\Omega} \beta_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) u_\varepsilon - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k (u_\varepsilon)^2. \quad (4.62)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = & \underbrace{- \int_{\Omega} \beta_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) u_\varepsilon + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon (\nabla u \cdot \mathbf{V}) u}_{B_1} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_\varepsilon k (u_\varepsilon)^2 + \int_{\Omega} \rho k (u)^2}_{B_2} + \underbrace{\int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_{\Omega} f u}_{B_3}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Note que, por (4.10) temos que  $B_1 = B_4 = 0$ . Calculando  $B_3$ ,

$$\begin{aligned} B_3 &= \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_{\Omega} f u = \int_{\Omega} f u_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} \gamma_f f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f u \pm \int_{B_\varepsilon} f u_\varepsilon \\ &= \int_{\Omega} f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f u - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon \pm \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u) \\ &= 2 \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Observa-se que  $B_2 = \mathcal{G}(u) - \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon)$ . Assim, substituindo (4.64) e  $B_2$  em (4.63), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = & \underbrace{2 \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u) - 2 \int_{\Omega} \rho k (u_\varepsilon - u) u}_{B_5} - \underbrace{\int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u)}_{B_6} \\ & + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon)^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon + \mathcal{E}_{14}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde  $\mathcal{E}_{14}(\varepsilon) = \mathcal{E}_1(\varepsilon)$ .

Para determinar  $B_5$ , substituímos (4.2) em (4.6) e posteriormente consideramos  $\eta = u_\varepsilon - u$  e também utilizamos a equação (4.10), então teremos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u) - 2 \int_{\Omega} \rho k u (u_\varepsilon - u) = & - \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla (u_\varepsilon - u) - \int_{\Omega} \rho k p (u_\varepsilon - u) \\ & - \int_{\Omega} \beta (\nabla p \cdot \mathbf{V}) (u_\varepsilon - u) + 2 \int_{\Omega} \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V}) (u_\varepsilon - u). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Por outro lado, fazendo  $\eta = p$  em (4.31),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \nabla(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \beta(\nabla(u_{\varepsilon} - u) \cdot \mathbf{V})p + \int_{\Omega} \rho k(u_{\varepsilon} - u)p = &+ \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla p \\ &+ \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})p + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho})\rho k u_{\varepsilon} p - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fp. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Logo,  $B_5$  pode ser escrito da seguinte forma,

$$\begin{aligned} B_5 = & - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla p - \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta}\beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})p - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho})\rho k u_{\varepsilon} p \\ & + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fp + 2 \int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V})u_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Para determinar  $B_6$ , vamos considerar  $\eta = u_{\varepsilon}$  em (4.2) e  $\eta = u$  em (4.8), obtendo

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla u_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V})u_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \rho k u u_{\varepsilon} = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon}, \quad (4.69)$$

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon}(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} u = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u. \quad (4.70)$$

Fazendo a diferença entre (4.70) e (4.69), temos

$$\begin{aligned} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho})\rho k u_{\varepsilon} u \\ + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon}(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u}_{B_7} - \underbrace{\int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V})u_{\varepsilon}}_{B_8} = \underbrace{\int_{\Omega} f_{\varepsilon} u - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon}}_{B_9}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Mas,

$$B_7 = \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon}(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u \pm \int_{B_{\varepsilon}} \beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u = - \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta}\beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u + \underbrace{\int_{\Omega} \beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u}_{B_{10}}, \quad (4.72)$$

$$B_9 = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} \pm \int_{\Omega} f u = - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} u - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fu. \quad (4.73)$$

É possível observar que  $B_{10} = B_8$ . Assim, (4.71) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho})\rho k u_{\varepsilon} u - \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta}\beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u \\ - 2 \int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V})u_{\varepsilon} = - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} u - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fu. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Logo,

$$\begin{aligned} B_6 = & - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u - \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta}\beta(\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V})u \\ & - 2 \int_{\Omega} \beta(\nabla u \cdot \mathbf{V})u_{\varepsilon} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho})\rho k u_{\varepsilon} u + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fu. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Substituindo (4.68) e (4.75) em (4.65),

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p}_{B_{11}} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u}_{B_{12}} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) p}_{B_{13}} \\
&\quad - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) p}_{B_{14}} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon u}_{B_{15}} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p}_{B_{16}} \\
&\quad + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)} + \mathcal{E}_{14}(\varepsilon). \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
B_{15} &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon p \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u p \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u p + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) p \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u p)(\hat{x}) \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u p)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k [u p - (u p)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{17}(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) p}_{\mathcal{E}_{18}(\varepsilon)} \\
&= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k u p(\hat{x}) + \mathcal{E}_{17}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{18}(\varepsilon), \quad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{16} &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p(\hat{x}) \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) [f p - (f p)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{19}(\varepsilon)} \\
&= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_f) (f p)(\hat{x}) + \mathcal{E}_{19}(\varepsilon). \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Para desenvolver os termos de  $B_{11}$  a  $B_{14}$ , novamente o *ansatz* é definido para a expansão de  $u_\varepsilon$  e seguimos de forma análoga ao que foi feito no desenvolvimento das equações de (4.37) a (4.53).

Dessa forma,

$$B_{11} = 2\pi \varepsilon^2 \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla p(\hat{x}) + \sum_{i=20}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (4.79)$$

$$B_{12} = -2\pi \varepsilon^2 \alpha \mathbf{P}_\alpha \|\nabla u\|^2(\hat{x}) + \sum_{i=23}^{25} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (4.80)$$

$$B_{13} = 2\pi \varepsilon^2 \beta (\mathbf{P}_{\mathbf{B}_\beta} \nabla u \cdot \mathbf{V}) p(\hat{x}) + \sum_{i=26}^{28} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (4.81)$$

$$B_{14} = 2\pi \varepsilon^2 \beta (\mathbf{P}_\beta \nabla u \cdot \mathbf{V}) u(\hat{x}) + \sum_{i=29}^{31} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (4.82)$$

onde

$$\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x) \cdot \nabla p. \quad (4.83)$$

$$\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha [\nabla u \cdot \nabla p - (\nabla u \cdot \nabla p)(\hat{x})]. \quad (4.84)$$

$$\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha \nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla p - \nabla p(\hat{x})]. \quad (4.85)$$

$$\mathcal{E}_{23}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x) \cdot \nabla u \quad (4.86)$$

$$\mathcal{E}_{24}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha [\nabla u \cdot \nabla u - (\nabla u \cdot \nabla u)(\hat{x})]. \quad (4.87)$$

$$\mathcal{E}_{25}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha \nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla u - \nabla u(\hat{x})]. \quad (4.88)$$

$$\mathcal{E}_{26}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha (\nabla(u - u_\varepsilon) \cdot \mathbf{V})p. \quad (4.89)$$

$$\mathcal{E}_{27}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta [(\nabla u \cdot \mathbf{V})p - ((\nabla u \cdot \mathbf{V})p)(\hat{x})]. \quad (4.90)$$

$$\mathcal{E}_{28}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V})[p - p(\hat{x})]. \quad (4.91)$$

$$\mathcal{E}_{29}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha (\nabla(u - u_\varepsilon) \cdot \mathbf{V})u. \quad (4.92)$$

$$\mathcal{E}_{30}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta [(\nabla u \cdot \mathbf{V})u - ((\nabla u \cdot \mathbf{V})u)(\hat{x})]. \quad (4.93)$$

$$\mathcal{E}_{31}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V})[u - u(\hat{x})]. \quad (4.94)$$

Finalmente, substituindo (4.77), (4.78), (4.79) e (4.82) em (4.76),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = & -2\pi\varepsilon^2\alpha\mathbf{P}_\alpha\nabla u \cdot (\nabla u(\hat{x}) + \nabla p(\hat{x})) - 2\pi\varepsilon^2\beta\mathbf{P}_{\alpha\beta}(\nabla u \cdot \mathbf{V})p(\hat{x}) \\ & - \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\rho)\rho k u p(\hat{x}) + \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)fp(\hat{x}) + \sum_{i=14}^{31} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Considerando que  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ , é possível concluir que a derivada topológica de  $\mathcal{J}$  é dada por:

$$D_T\mathcal{J} = -2\alpha\mathbf{P}_\alpha\nabla u \cdot \nabla(u + p) - 2\beta(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\nabla u \cdot \mathbf{V})p - \rho k(1 - \gamma_\rho)up + (1 - \gamma_f)fp. \quad (4.96)$$

## 4.3 Equação de Difusão-Convecção

Para o cálculo da DT do funcional energia modificada associado a equação de Difusão-Convecção-Reação (eq. (4.1)), o termo de reação é considerado nulo. Além disso, é feita uma modificação do funcional apresentado em (4.3), no que se refere a importância de cada parcela do funcional. Serão utilizadas as derivadas determinadas em (4.59) e (4.96).

### 4.3.1 Formulação do Problema

No domínio original, a formulação matemática é apresentada a seguir:

Encontre  $u$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \nabla u \cdot \mathbf{V} = f \\ \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \text{ sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega, \quad (4.97)$$

Definimos a função de forma (funcional energia modificado), que será minimizado:

$$\mathcal{F}(u) = \underbrace{t \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2}_{\text{energia potencial}} + \underbrace{(1-t) \int_{\Omega} \rho |u|^2}_{\text{energia térmica}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.98)$$

*energia modificada*

onde  $t$  é um parâmetro que fornece o peso de cada parcela do funcional,  $u$  é solução do sistema (4.97). Dessa forma, a DT associada é dada por,

$$D_T(\mathcal{F}) = -2\alpha \mathbf{P}_{\alpha} \nabla u \cdot (t \nabla u + \nabla p + \nabla q) - (1-t)(1-\gamma_{\rho})\rho |u|^2, \quad (4.99)$$

onde  $p$  e  $q$  são as respectivas soluções dos problemas adjuntos a seguir:

$$p \in \mathcal{U}(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \mathbf{V}) \eta = -2t \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\Omega), \quad (4.100)$$

$$q \in \mathcal{U}(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} (\nabla q \cdot \mathbf{V}) \eta = -2(1-t) \int_{\Omega} \rho u \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\Omega), \quad (4.101)$$

com o espaço  $\mathcal{U} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial D} = 0\}$ .

## 4.4 Estimativas dos Termos Residuais

Nesta seção serão calculadas as estimativas dos termos remanescentes (residuais)  $\mathcal{E}_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, 31$ , gerados no cálculo das derivadas topológicas apresentadas nas seções anteriores.

Antes de calcular a estimativa dos resíduos será necessário apresentar as demonstrações a seguir.

**Lema 4.2** *Seja  $w_{\varepsilon}$  definido em (4.37) e solução de (4.47), então*

$$\|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} = o(\varepsilon). \quad (4.102)$$

**Demonstração.** Considerando  $R > 0$  tal que  $\Omega \subset B_R$  onde  $B_R$  é a bola centrada em  $\hat{x}$  e raio  $R$ , então

$$\|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} w_{\varepsilon}^2 \leq \int_{B_R} w_{\varepsilon}^2 = \int_{B_{\varepsilon}} w_{\varepsilon}^2 + \int_{B_R \setminus B_{\varepsilon}} w_{\varepsilon}^2. \quad (4.103)$$

Para calcular essas integrais vamos considerar a solução de  $w_\varepsilon$  apresentada em (4.48). Usando coordenadas polares, obtemos

$$\int_{B_\varepsilon} cw_\varepsilon^2 = \int_{B_\varepsilon} c \left[ \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \right]^2 = c_2 \int_0^\varepsilon r^2 r dr = c_3 \varepsilon^4, \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} cw_\varepsilon^2 &= \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} c \left[ \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \right]^2 \\ &= c_4 \int_\varepsilon^R \frac{\varepsilon^4}{r^4} r^2 r dr = c_5 \varepsilon^4 (\ln R - \ln \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Portanto,

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{c_3 \varepsilon^4 + c_5 \varepsilon^4 |\ln(\varepsilon)|} \leq C \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|}. \quad (4.106)$$

□

**Lema 4.3** *Seja  $\tilde{u}_\varepsilon(x)$  definido em (4.37) e solução de (4.51), então*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} = o(\varepsilon). \quad (4.107)$$

**Demonstração.** A forma fraca do problema definido em (4.51) é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon : \quad & \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon \eta + \int_\Omega \beta_\varepsilon (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \eta \\ &= \int_\Omega \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \eta + \int_\Omega \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \eta + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \eta, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.108)$$

onde,

$$\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = -w_\varepsilon\}; \quad g = (1-\gamma)\alpha \nabla^2 u(y) n \cdot n. \quad (4.109)$$

Observe que se  $\varphi_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$ ;  $\eta = \tilde{u}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ . Fazendo a substituição em (4.108), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \alpha_\varepsilon \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2 + \int_\Omega \rho_\varepsilon k (\tilde{u}_\varepsilon)^2 + \int_\Omega \beta_\varepsilon (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_\varepsilon - \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon - \int_\Omega \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon \varphi_\varepsilon \\ & - \int_\Omega \beta_\varepsilon (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \varphi_\varepsilon = \int_\Omega \beta_\varepsilon (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_\varepsilon + \int_\Omega \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \tilde{u}_\varepsilon \\ & - \int_\Omega \beta_\varepsilon (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \varphi_\varepsilon - \int_\Omega \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \varphi_\varepsilon - \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \varphi_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Pelo Teorema da divergência temos:

$$- \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon = \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \varphi_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} \rho \varphi_\varepsilon \partial_n \tilde{u}_\varepsilon - \int_{B_\varepsilon} [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n \varphi_\varepsilon. \quad (4.111)$$



Substituindo (4.111) em (4.110),

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (\tilde{u}_{\varepsilon})^2 + \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}) \varphi_{\varepsilon}}_{E_1} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \varphi_{\varepsilon} \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_2} - \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} [\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}] \cdot \mathbf{n} \varphi_{\varepsilon}}_{E_3} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_4} - \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \varphi_{\varepsilon}}_{E_5} - \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_6} + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \varphi_{\varepsilon}}_{E_7} \\
& - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \tilde{u}_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}}_{E_8} = + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_9} - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}}_{E_{10}} + \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_{11}} - \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}} g \varphi_{\varepsilon}}_{E_{12}}. \quad (4.112)
\end{aligned}$$

Pode-se observar que  $E_3 = E_{12}$ , por (4.10)  $E_4 = 0$ . Agrupando os termos  $E_1$ ,  $E_5$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  e  $E_{10}$  e considerando (4.51), teremos

$$\int_{\Omega} [\operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}) - \beta_{\varepsilon} (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) + \beta_{\varepsilon} (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) - \rho_{\varepsilon} k \tilde{u}_{\varepsilon} + \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon}] \varphi_{\varepsilon} = 0. \quad (4.113)$$

Logo, (4.112) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (\tilde{u}_{\varepsilon})^2 - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \varphi_{\varepsilon} \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_2} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_6} = - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_9} + \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_{11}}. \quad (4.114)
\end{aligned}$$

Como  $\varphi_{\varepsilon} \in \tilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon}$  segue que  $\varphi_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = -w_{\varepsilon}$  e  $w_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = h\varepsilon^2$  onde  $h = \frac{P}{\|x-\hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x-\hat{x})$ , temos que

$$|E_2| = \left| \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \rho h \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq \varepsilon^2 \|h\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon^2 \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.115)$$

Para os termos  $E_9$  e  $E_{11}$ , escrevemos

$$|E_9| = \left| \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq c \|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.116)$$

$$|E_{11}| = \left| \varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq c\varepsilon \|g\|_{H^{-1/2}(\partial B_{\varepsilon})} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\partial B_{\varepsilon})} \leq c\varepsilon^2 \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.117)$$

Já para  $E_6$ , temos

$$\begin{aligned}
E_6 &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_{\varepsilon} + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \beta (\nabla w_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) \tilde{u}_{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega} \beta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} - \int_{\partial B_{\varepsilon}} \beta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} \\
& - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) w_{\varepsilon} + \int_{\partial B_{\varepsilon}} \gamma \beta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} - \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \beta (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) w_{\varepsilon} = - \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) w_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (4.118)$$

logo,

$$|E_6| = \left| \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} (\nabla \tilde{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}) w_{\varepsilon} \right| \leq c \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.119)$$

Substituindo (4.115), (4.116) e (4.117) em (4.112), vamos obter

$$\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k |\tilde{u}_{\varepsilon}|^2 \leq \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.120)$$

Por outro lado, usando a desigualdade Poincaré,

$$\alpha \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k |\tilde{u}_{\varepsilon}|^2. \quad (4.121)$$

Assim, substituindo (4.120) em (4.121), obtemos

$$\alpha \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.122)$$

que conduz ao resultado

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} = C \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} = o(\varepsilon). \quad (4.123)$$

□

**Lema 4.4** *Seja  $u$  solução do Problema (4.1) e  $u_{\varepsilon}$  solução do problema (4.7). Então*

$$\|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{1+\delta} = o(\varepsilon). \quad (4.124)$$

**Demonstração.** Considerando a expansão de  $u_{\varepsilon}$  apresentada em (4.37) e usando (4.106) e (4.123), temos

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)} &= \|w_{\varepsilon} - \tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 \sqrt{|\ln(\varepsilon)|} + C \varepsilon^{1+\delta} = o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.125)$$

□

De posse dos resultados apresentados, podemos estimar os termos remanescentes.

Utilizando o Lema 4.3, temos

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \mathcal{E}_{14}(\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho k (u_{\varepsilon} - u)^2 \leq C_1 \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\varepsilon) &= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k (u_{\varepsilon} - u) \leq C \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \\ &\leq C_1 \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 4.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\varepsilon) &= 2 \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k (u_{\varepsilon} - u) u \leq C_1 \|u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.128)$$

Usando o fato de  $u$  ser Lipschitz contínua e fazendo a mudança para coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k [(u)^2 - (u)^2(\hat{x})] \\ &\leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Observe que, se  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ , temos

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) \rho f [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} (x - \hat{x}) \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (4.130)$$

Fazendo  $\phi = q$  e  $\phi = p$ , por (4.130) temos que  $\mathcal{E}_5(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

Para os resíduos  $\mathcal{E}_6(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{18}(\varepsilon)$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) \phi &\leq C_1 \|\phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.131)$$

Novamente, considerando  $\phi = q$  e  $\phi = p$ , teremos  $\mathcal{E}_6(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

Sabendo que  $\phi$  e  $u$  são Lipschitz contínuas e fazendo a mudança para coordenadas polares:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (4.132)$$

Na equação acima, considerando  $\phi = q$  obtemos  $\mathcal{E}_7(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ . E para  $\phi = p$ , obtemos  $\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$

Para o cálculo dos resíduos  $\mathcal{E}_8(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{20}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{23}(\varepsilon)$ , vamos usar também a imersão de  $L^2(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \phi &\leq C \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla \phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.133)$$

Logo, considerando  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = u$  obtemos  $\mathcal{E}_8(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{23}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ , respectivamente.

Para estimar  $\mathcal{E}_9(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{26}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{29}(\varepsilon)$ , vamos usar a imersão de  $L^2(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V}) \phi &\leq C \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.134)$$

Assim, considerando  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = u$  resulta em  $\mathcal{E}_9(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{26}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{29}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  respectivamente.

Para determinar os resíduos  $\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{24}(\varepsilon)$  considere o fato de  $u$  e  $\phi$  serem Lipschitz contínuas e fazendo a mudança para coordenadas polares, logo

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot [\nabla \phi - \nabla \phi(\hat{x})] \leq C \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C\varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (4.135)$$

Com isso, considerando  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = u$  resulta em  $\mathcal{E}_{10}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{24}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$

Para o resíduo  $\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{27}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{30}(\varepsilon)$  é usado o fato de  $\phi$  ser Lipschitz contínua, logo

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla u \cdot \mathbf{V})] [\phi - \phi(\hat{x})] &\leq C \|\nabla u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Considerando  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = p$  resulta em  $\mathcal{E}_{11}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{27}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{30}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  respectivamente.

Para o resíduo  $\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{22}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{25}(\varepsilon)$  é usado o fato de  $\phi$  ser Lipschitz contínua, logo

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla \phi - \nabla \phi(\hat{x})] \leq C \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} = o(\varepsilon^2). \quad (4.137)$$

Para  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = u$  resulta, respectivamente, em  $\mathcal{E}_{12}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{25}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

Para o resíduo  $\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_{28}(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_{31}(\varepsilon)$  é usado o fato de  $\phi$  ser Lipschitz contínua,

$$\int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_\beta) \beta (\nabla w_\varepsilon \cdot \mathbf{V})] [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} = o(\varepsilon^2). \quad (4.138)$$

Da equação anterior, se considerarmos  $\phi = q$ ,  $\phi = p$  e  $\phi = p$  o que resulta em  $\mathcal{E}_{13}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ ,  $\mathcal{E}_{28}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  e  $\mathcal{E}_{31}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

O resíduo  $\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)$  é calculado usando a Lema 4.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{17}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u) u_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u) (u_\varepsilon - u + u) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u)^2 + (u_\varepsilon - u) u \leq C_1 \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)}^2 + C_2 \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_3 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_4 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 \varepsilon^{2(1+\delta)} + \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Para o resíduo  $\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)$  é usado o fato de  $u$  ser Lipschitz contínua e fazendo a mudança para coordenadas polares.

$$\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho f(u_\varepsilon - u) \leq C \|f\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} = o(\varepsilon^2). \quad (4.140)$$

## 4.5 Exemplos Numéricos

Nos exemplos numéricos apresentados, o domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $\Omega \subset \mathcal{D}$  é dado por um quadrado de lado unitário  $(0, 1) \times (0, 1)$ , com uma fonte de calor uniformemente distribuído no domínio de intensidade  $f$ . Durante o processo de otimização, são utilizados dois materiais, o primeiro é o alumínio ( $\alpha = 205W/mK$ ) e o segundo é um material com baixa condutividade térmica ( $\gamma_\alpha \ll \alpha$ ). O domínio inicial consiste apenas em alumínio. Uma fonte externa produzindo um vento unidirecional com velocidade  $V$ , também é imposta ao problema. Com a evolução do processo de otimização, iterativamente, o alumínio é substituído pelo segundo material, dessa forma, a região branca representa o material de baixa condutividade térmica.

Dois critérios de parada são considerados no algoritmo atual:  $\theta < 1^\circ$ , que é o ângulo entre a função *level-set* e a DT e  $\kappa < 10^{-3}$ , ( $\kappa \in (0, 1]$ ). Nos exemplos (4.1) e (4.2) a seguir, o domínio é discretizado usando elementos finitos triangulares lineares, resultando em uma malha uniforme inicial com 160.000 elementos e 80.401 nós. Para aumentar a precisão e a suavidade da topologia, são realizadas 4 etapas de refinamento uniforme na malha durante o processo iterativo, resultando em uma malha final com 40.960.000 elementos e 20.486.401 nós.

**Exemplo 4.1** *No exemplo 1, o domínio (topologia) inicial, têm as bordas (contorno de Neumann  $\Gamma_N$ ) isoladas termicamente, exceto por uma região  $\Gamma_D$  (contorno de Dirichlet) de comprimento  $m(\Gamma_D) = 0.2$ , posicionada no meio do lado esquerdo, na qual a temperatura é prescrita como  $u = 0^\circ C$ , tem-se ainda,  $t = 1$ ,  $f = 10^4 W$  e parâmetro de penalidade  $\mu = 4$ .*

Nas figuras 4.1(a) e (b), são apresentados o domínio e o mapa de temperaturas iniciais. Para avaliar a influência da velocidade  $V$  e do contraste  $\gamma_\alpha$  na topologia final, é considerado um conjunto de quatro casos, a saber, casos A, B, C, D, como mostra a Tabela 4.

Tabela 4 – Exemplo 1. Velocidade e contraste.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
$V$	(10, 0)	(-10, 0)	(0, 10)	(10, 0)
$\gamma_\alpha$	0.020	0.020	0.020	0.006

As topologias finais estão descritas na figura 4.2(a)-(d). É possível notar várias ramificações nas topologias, o que mostra como o bom condutor drena energia da maior parte do domínio, considerando a restrição de volume, controlada (indiretamente) pelo parâmetro de penalidade  $\mu$ .

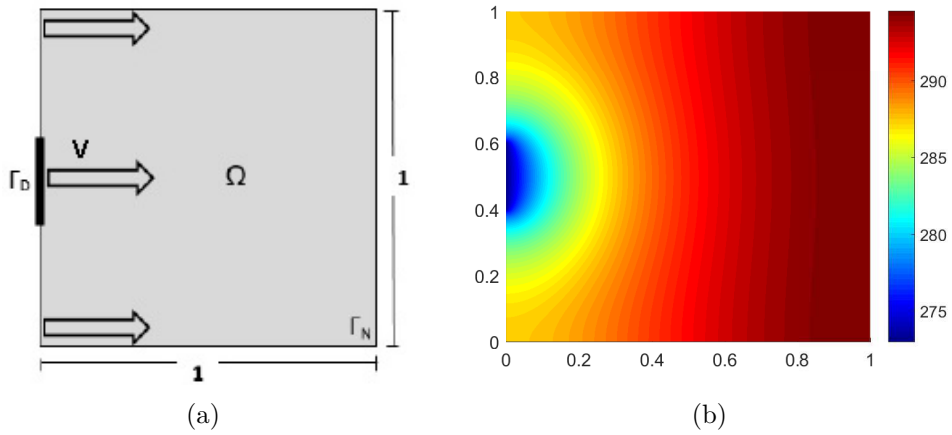


Figura 4.1 – Topologia (a) e Mapa de temperatura (b) inicial.

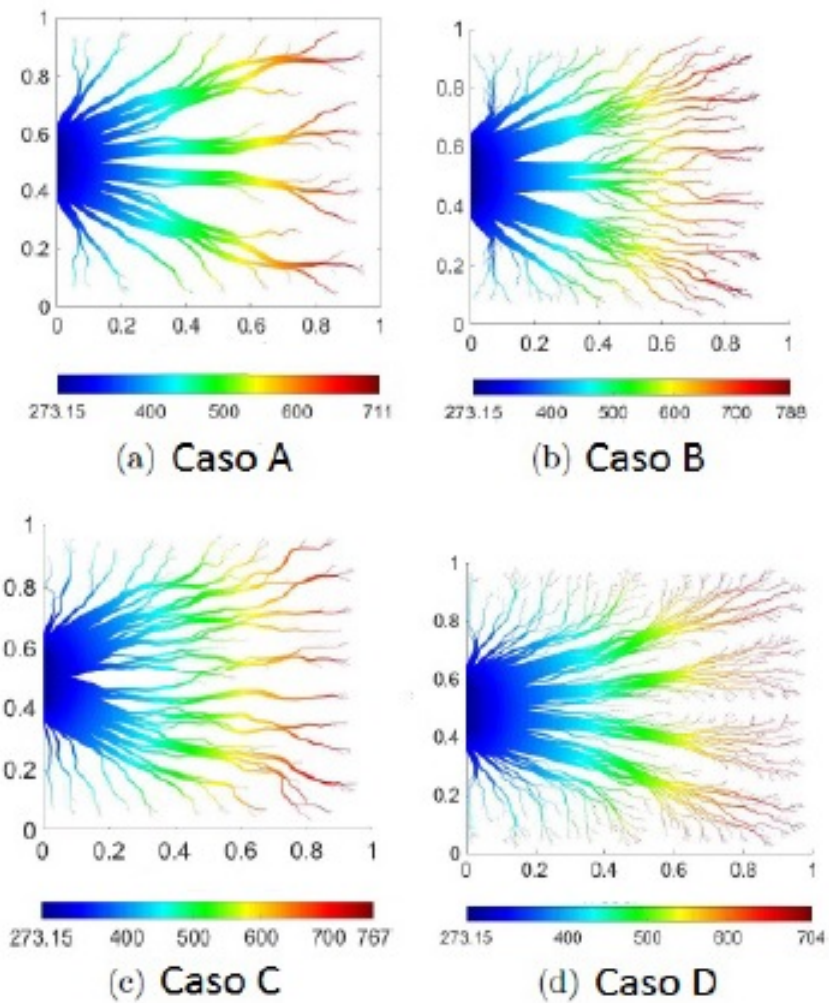


Figura 4.2 – Topologias otimizadas: (a) caso A; (b) caso B; (c) caso C; (d) caso D.

Para efeito de comparação, a velocidade é a única variável que interfere nas topologias finais nos casos A, B e C, pois o contraste  $\gamma_\alpha$  é o mesmo nos três casos. É possível observar, comparando os casos A e B, a influência da mudança de sentido da velocidade  $V$ . Já no caso C é imposta a mudança de direção na velocidade, resultando em

uma falta de simetria horizontal da topologia final. O caso D apresenta um comportamento diferente devido ao menor valor imposto ao parâmetro  $\gamma_\alpha$ , consumindo maior custo computacional para atingir os critérios de parada quando comparado aos casos anteriores. Os históricos de evolução para a função custo e a fração de volume são apresentados nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente.

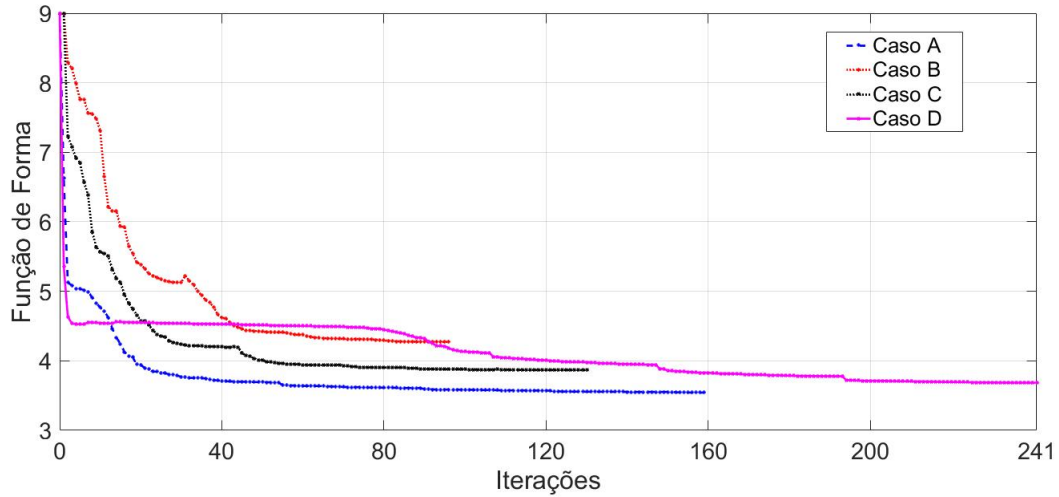


Figura 4.3 – Histórico da Função custo.

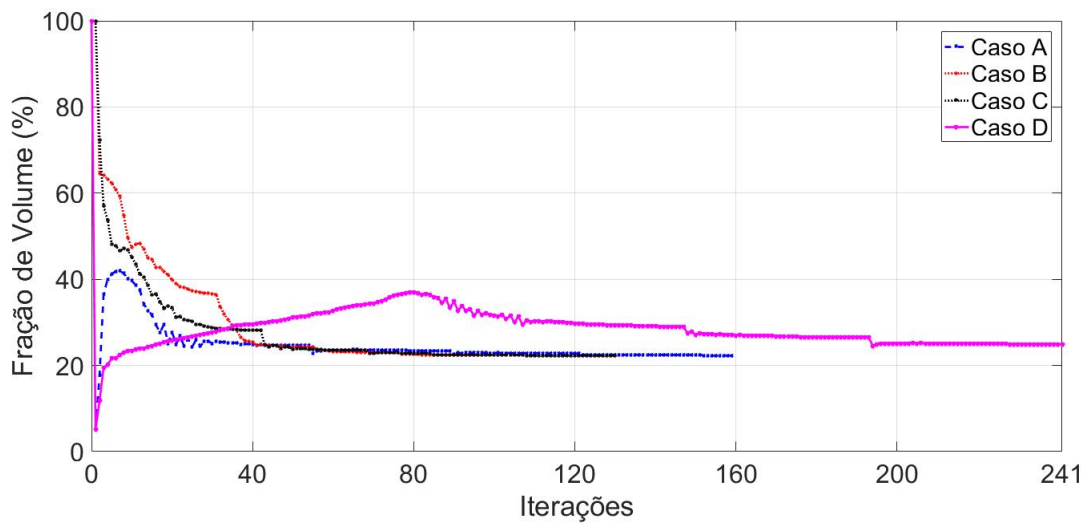


Figura 4.4 – Histórico da Fração de Volume.

Exemplos representativos com variações no parâmetro  $t$ , são mostrados nas figuras 4.5a e 4.5b, com  $t = 0.5$  e  $t = 1$ , respectivamente. Os demais parâmetros e condições de contorno são dados no Exemplo 4.1 (Caso C). O históricos da função custo e da fração de volume podem ser vistos nas figuras 4.6(a) e (b).

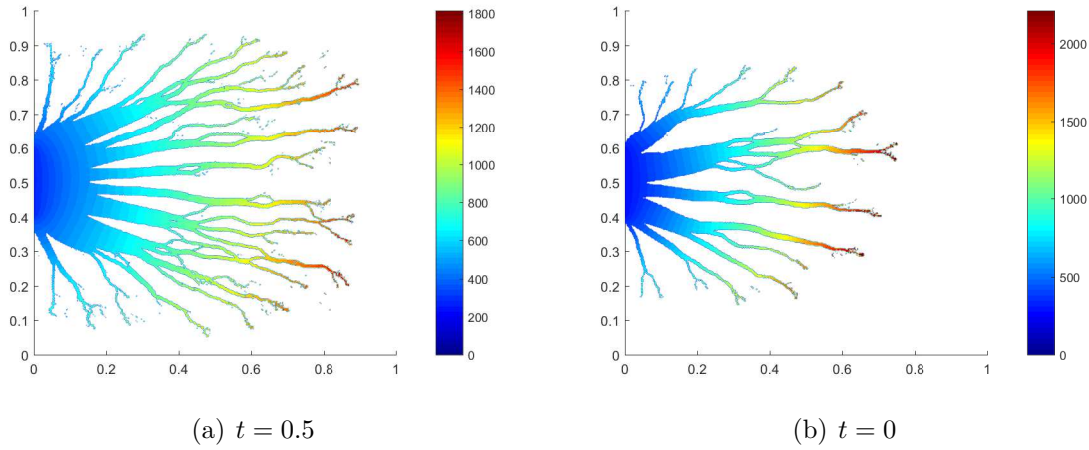


Figura 4.5 – Topologias otimizadas para  $t = 0.5$  (a) e  $t = 0$  (b).

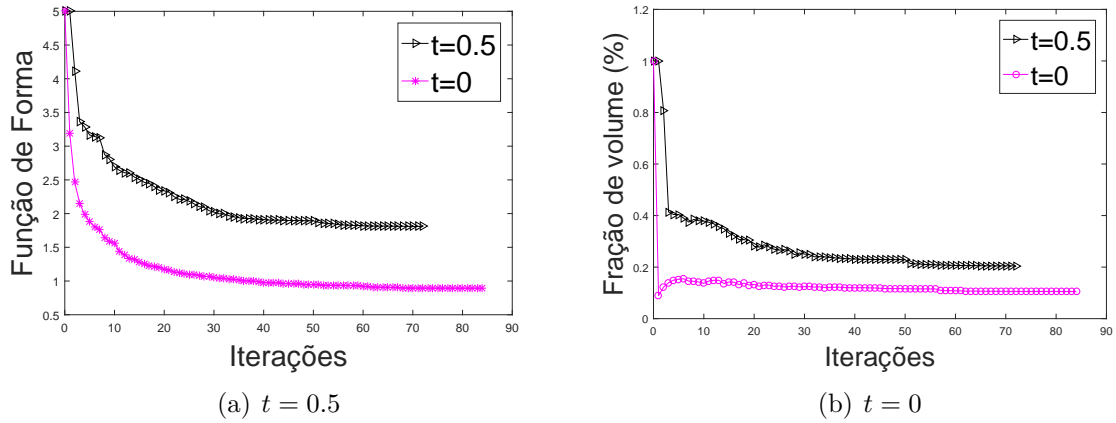


Figura 4.6 – Histórico da Função Custo (a) e Histórico da Fração de Volume (b).

Vale destacar que quaisquer alterações na malha inicial, no número de refinamentos da malha, nas propriedades do material, condições de contorno ou parâmetro de peso  $t$ , tem influência sobre topologia final. Nas figuras 4.7(a) e (b), foram utilizadas as mesmas condições de contorno do Exemplo 4.1-C, exibido acima. Porém, na figura 4.7(a), a malha inicial possui 40000 elementos, 20201 nós e foram realizadas três etapas de refinamento da malha, gerando uma malha final com 2.560.000 elementos e 1.281.601 nós. Na figura 4.7(b) a malha inicial possui 160.000 elementos e 80.401 nós, foram realizados dois refinamentos de malha, gerando uma malha final também com 2.560.000 elementos e 1.281.601 nós. A tabela 5 exhibe os valores da função de forma ( $\mathcal{F}$ ), ângulo  $\theta$ , Volume final e o número de iterações, das topologias finais.

Tabela 5 – Exemplo 1. Topologia Final.

	$\mathcal{F}$	$\theta$	Volume	Iterações
Figura 4.7(a)	2.85	4.26°	31.73%	91
Figura 4.7(b)	2.89	7.47°	33.62%	59



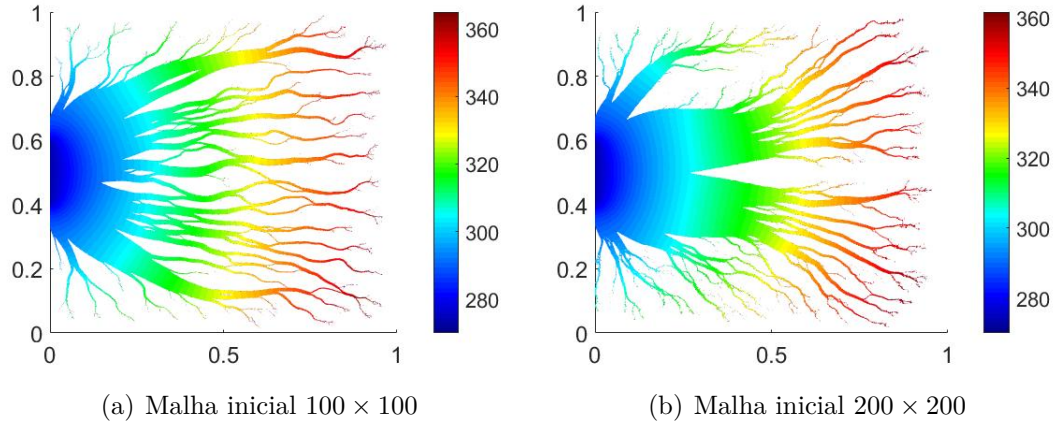


Figura 4.7 – Topologias finais após três etapas de refinamento da malha.

É possível observar que aumentar o número de etapas de refinamento da malha gera um maior custo computacional (maior número de iterações). Porém pode alcançar um menor valor para o ângulo  $\theta$ , que determina melhor condição de otimalidade. Embora as topologias 4.7(a) e (b) foram obtidas com a mesma malha final, observa-se a influência da malha inicial, assim como da quantidade de refinamentos da malha, na topologia final, que modifica a forma, a quantidade e a suavidade do contorno das ramificações no design do trocador de calor. Contudo, o mais importante é observar o critério de otimalidade relativo ao ângulo  $\theta$ , pois em nenhum dos dois exemplos imediatamente acima alcançamos o valor  $\theta < 1^\circ$ , ou seja, as topologias não estão otimizadas. Dessa forma, para alcançar tal critério ( $\theta < 1^\circ$ ) seria necessário refinar ainda mais a malha, até que o critério fosse satisfeito, gerando um maior custo computacional. Sendo assim, conclui-se que a malha inicial e o número de refinamentos devem ser determinados de acordo com os valores de  $\theta$  obtidos.

**Exemplo 4.2** *O segundo exemplo refere-se a um trocador de calor assimétrico. As temperaturas nas regiões  $\Gamma_{D_i}, i = 1, \dots, 4$ , são prescritas  $T_H = 100^\circ C$  e  $T_L = 0^\circ C$ . Os demais contornos são isolados termicamente. Tem-se ainda  $t = 1$ ,  $f = 10^4$  e  $\mu = 0.8$ .*

Na figura 4.8(a) e (b), estão representadas o domínio inicial e o mapa de temperatura no domínio inicial, respectivamente. As regiões  $\Gamma_{D_i}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  tem comprimento 0.2. É possível observar, na figura 4.9(a)-(d), a evolução da otimização do domínio, durante o processo iterativo, mais precisamente são mostradas as topologias nas iterações  $j = 1$ ,  $j = 3$ ,  $j = 30$  e na iteração  $j = 56$ , tem-se a topologia otimizada. As ramificações observadas na topologia, surgem devido a fonte de calor  $f$ , uniformemente distribuída por todo o domínio.

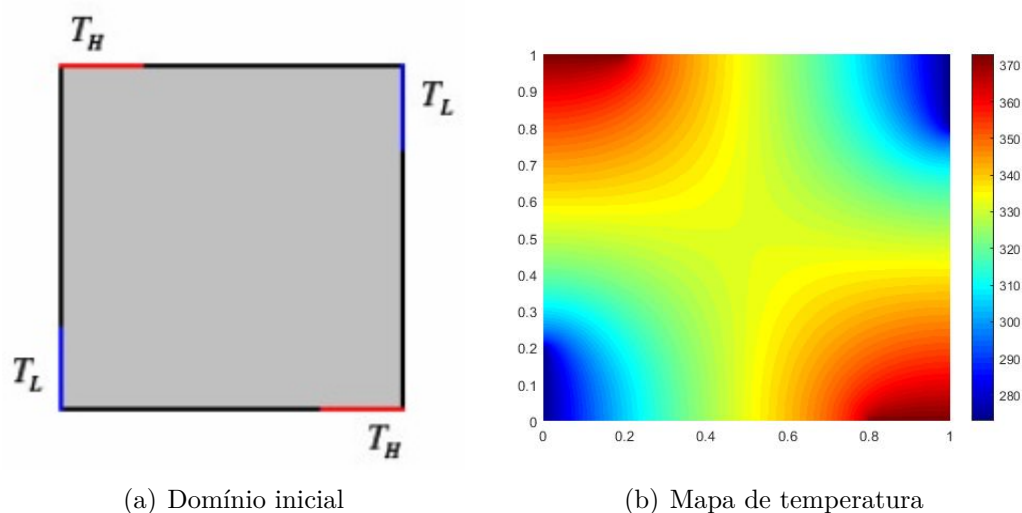


Figura 4.8 – (a) Domínio inicial; (b) Mapa de temperatura no domínio inicial.

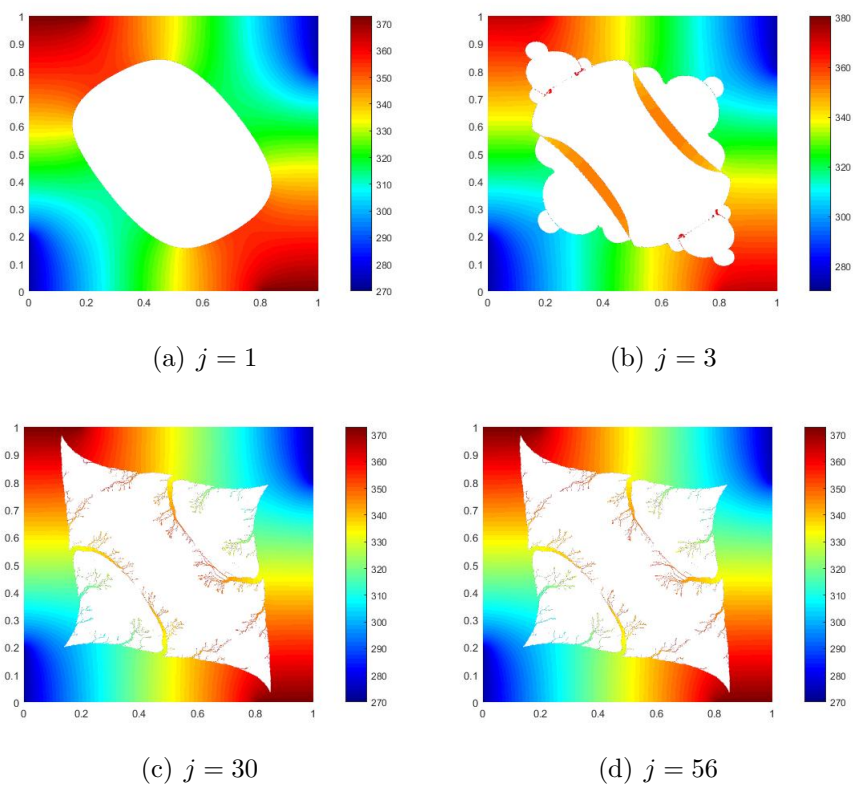


Figura 4.9 – Topologias nas iterações  $j = 1$  (a),  $j = 3$  (b),  $j = 30$  (c) e topologia otimizada  $j = 56$  (d).

O decréscimo da função de forma pode ser visto na figura 4.10(a), o que mostra que o problema de minimização é resolvido e o método é eficiente. A figura 4.10(b), mostra a evolução do histórico de volume.

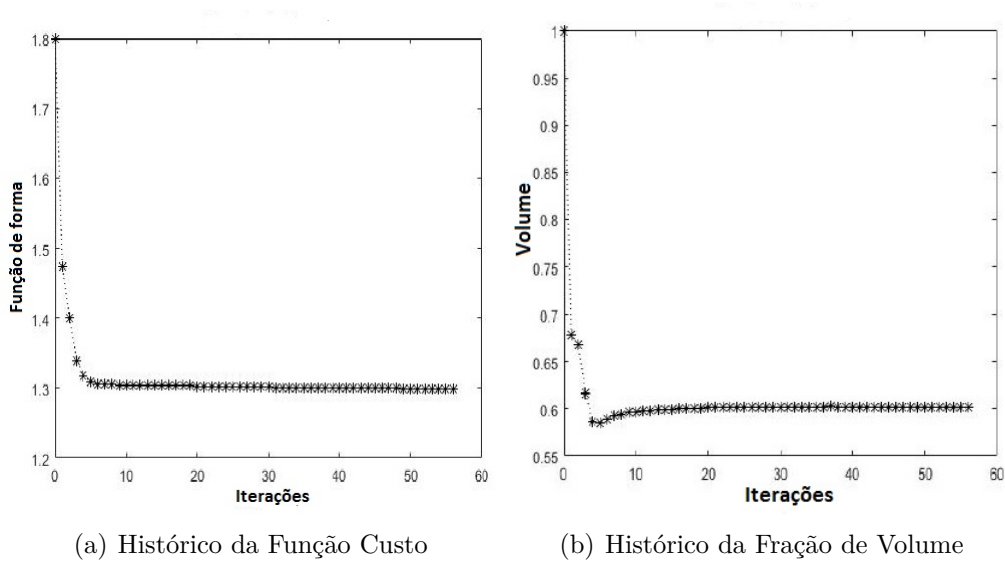


Figura 4.10 – (a) Histórico da função custo; (b) Histórico de Volume.

Na literatura encontra-se trabalhos que utilizam o conceito de DT para obter uma topologia ótima para trocadores de calor. Os trabalhos destacados nesse sentido, são apresentados por Novotny (2003) e Marczak (2005). Novotny (2003) utilizou método do elementos finitos e a energia potencial como função custo, Marczak (2005) também considera a energia potencial como função custo. Porém utilizou o Método dos elementos de Contorno para implementação numérica. As topologias otimizadas obtidas pelos autores são mostradas nas figuras 4.11(a) e (b). Na figura 4.11(c) é mostrada a topologia otimizada com a metodologia utilizada neste trabalho, no qual uma função custo mais geral é utilizada. Nas topologias apresentadas nas figuras 4.11(a)-(c), não são observadas as ramificações na estrutura do trocador de calor, isso ocorre pelo fato de considerarmos  $f = 0$ , ou seja, não há uma fonte de calor distribuída uniformemente pelo domínio, tem-se ainda,  $t = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $V = 0$ .

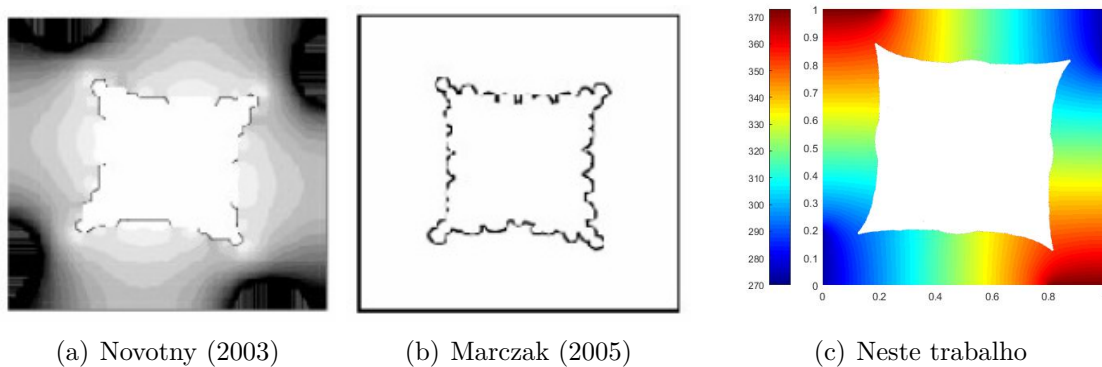


Figura 4.11 – (a) Topologias otimizadas.

Neste capítulo, a análise assintótica topológica do funcional energia modificado

associado ao problema difusivo-convectivo-reativo, no que diz respeito à nucleação de inclusões circulares dotadas de diferentes propriedades materiais, foi considerada. Em particular, argumentos sobre a existência da derivada topológica foram apresentados, a forma fechada da DT foi calculada e também as estimativas para os termos remanescentes (residuais) da expansão assintótica topológica foram rigorosamente apresentadas. Por fim, foram apresentados os exemplos numéricos implementados com base na derivada topológica. As sensibilidades resultantes foram particularizadas para resolver alguns problemas selecionados, todos com foco na minimização da dissipação de energia convectiva. No projeto de trocador de calor, o material de alta eficiência foi substituído progressivamente por um material de baixa condutividade térmica, até a obtenção de um projeto complexo com alto desempenho. Os experimentos numéricos confirmam a eficácia do método proposto.

# 5 Modelos de Placas: Kirchhoff e Reissner-Mindlin

Neste capítulo, o foco principal é a análise de sensibilidade topológica, considerando os modelos de placas sob as hipóteses de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. No modelo matemático de placa de Kirchhoff, o operador diferencial se caracteriza por ser de quarta ordem. Já o modelo de Reissner-Mindlin é expresso por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem acoplado.

Ao apresentar a forma fechada da derivada topológica, é possível otimizar o primeiro autovalor, em um domínio  $\Omega$  que representa uma placa quadrada  $(0, 1) \times (0, 1) m^2$ , sob certas condições de contorno. Após o processo de otimização foi possível obter um domínio final (topologia) otimizado, com relação à maximização da primeira frequência natural de vibração.

Ressalta-se que Novotny e Amstutz (2011) [10] e Sales e Novotny (2015) calcularam a derivada topológica para o modelo de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, respectivamente. Porém, nos dois trabalhos é considerada a energia potencial total como função de forma (ou função custo). Para os modelos de placas analisados neste trabalho, considera-se como função custo a forma variacional do primeiro autovalor do operador diferencial. Este primeiro autovalor ( $\lambda$ ), está relacionado com a primeira frequência natural ( $\omega_1$ ) de vibração da placa ( $\omega_1 = \sqrt{\lambda}$ ).

Em cada caso, a análise assintótica de funcionais auxiliares são necessárias para determinar a forma fechada da derivada topológica do primeiro autovalor associado aos modelos de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin.

O design final de placas apresentados maximizam a primeira frequência de ressonância (ou frequência natural de vibração) da placa. Os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma de suas frequências naturais. Ou seja, para cada frequência natural existe pelo menos um modo de vibração específico, ou um perfil de vibração. Em particular, o primeiro modo de vibração apresenta maior deslocamento, motivo pelo qual torna-se vantajoso otimizar a frequência natural correspondente.

O método (Derivada Topológica) utilizado neste trabalho, para otimização topológica de placas, considera inclusões circulares de um material com propriedades diferentes

da topologia inicial, de forma que a função custo (primeiro autovalor) seja otimizada. É importante destacar que não há necessidade de considerar densidades intermediárias em cada ponto do domínio. O algoritmo utilizado encontra de forma iterativa a distribuição ótima de material.

## 5.1 Otimização Topológica de Placas em Vibração Livre

A otimização topologia (OT) de estruturas de placas tem sido objeto de estudo há décadas. Vários métodos foram propostos nesse período, e ainda hoje pesquisadores demandam grandes esforços no aperfeiçoamento ou criação de métodos de otimização.

O objetivo da OT em problemas de placas em vibração livre é obter uma solução para otimização (maximização/minimização) de autovalores. Bruggi e Taliencio (2012) analisam, por exemplo, a maximização de autovalores estruturais. Bendsøe e Olhoff (1985) [24] maximizam as distâncias dos autovalores estruturais de uma determinada frequência. Maeda et al. (2006) [71] atimizam a topologia da estrutura para alcançar certos autovalores .

Díaz e Kikuchi (1992) [41], Krog e Olhoff (1999) [60] utilizam método de design de homogeneização para resolver os problemas de projeto à prova de vibração. Para essa mesma classe de problemas Stanford, Beran e Bhatia (2014) [105]; Luo e Gea 1998 [68] utilizam as microestruturas isotrópicas sólidas com penalização linear (SIMP). Wang, Basu e Leiva 2004 [112], ainda no contexto de otimização de topologia aplicam o método de otimização estrutural evolutiva (ESO). Zhu, Zhang e Qiu 2007 [115] utilizam o método de otimização estrutural bidirecional evolutiva (BESO). Já o método *Level-Set* é utilizado nos trabalhos de Park e Youn 2008 [94]; Ansari, Khajepour e Esmailzadeh 2013 [18]. De acordo com Aulig e Olhoff (2016) [17]; Guo, Zhang e Zhong (2014) [55], embora os princípios matemáticos usados nos métodos acima sejam diferentes há um elemento comum entre eles, ou seja, todos esses métodos conduzem a otimização da topologia de uma maneira geometricamente implícita (usando representação em rede ou indireta), pelo qual o design do layout do problema é transformado em um problema de distribuição ideal do material.

Como já ressaltado anteriormente, o objetivo deste trabalho é maximizar o primeiro autovalor, sujeito a uma restrição de volume, dos operadores diferenciais que modelam os problemas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, com intuito de otimizar a topologia das estruturas de placas.

A inovações deste trabalho, com relação aos trabalhos já encontrados na literatura, estão na utilização da forma fechada da derivada topológica do primeiro autovalor para otimização da topologia de placas, o que facilita a implementação numérica do algoritmo de otimização e ainda a função de forma considerada é a forma variacional do primeiro autovalor.

## 5.2 Caso I: Modelo de Placa de Kirchhoff

Para a formulação do problema é considerada a representação de uma placa retangular de espessura constante  $h$ , por um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Kirchhoff (1850), desenvolveu uma teoria baseada nas seguintes suposições:

- As fibras normais ao plano médio da placa permanecem normais durante a deformação e não sofrem variações em seu comprimento.
- A tensão normal transversal pode ser desprezada.

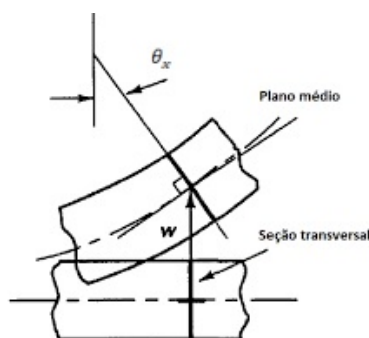


Figura 5.1 – Flexão da Placa.

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado aqui considerado é definido como,

$$\lambda_1 = \frac{\int \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u}{\int_{\Omega} \beta |u|^2}. \quad (5.1)$$

Para determinar a derivada topológica do funcional  $\lambda_1$  associado ao problema de Kirchhoff, inicialmente são calculadas as derivadas topológicas dos funcionais que aparecem no numerador e denominador (subseções 5.2.2.1 e 5.2.2.2) de (5.1). Posteriormente, é utilizada a regra do quociente para diferenciação.

A seguir é apresentado o problema original e também o problema perturbado, bem como a existência da derivada topológica.

O operador que modela o problema é dado por [89]: Encontre  $u \in H_0^2$ , tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u)) + \beta k u = f & \text{em } \Omega \\ \mathbf{M}(u) = \mathbb{C} \nabla \nabla u \\ u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{M}(u)$  é o tensor momento fletor,  $k$  é uma função positiva,  $u$  é o deslocamento transversal e  $\mathbb{C}$  é o Tensor constitutivo de quarta ordem, dado por

$$\mathbb{C} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ((1-\nu)\mathbb{I} + \nu \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (5.3)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $h$  é a espessura da placa,  $\mathbf{I}$  e  $\mathbb{I}$  são tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente.

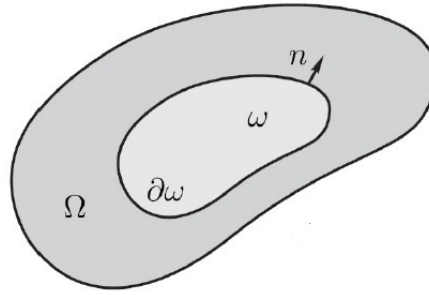


Figura 5.2 – Representação do Domínio

**Observação. 5.1** A constante  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  é conhecida como a rigidez à flexão da placa.

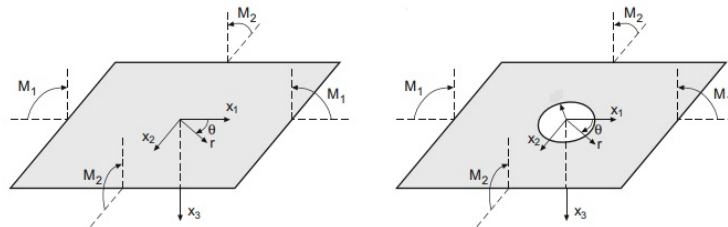


Figura 5.3 – Elemento infinitesimal da placa: a) sem furo; b) com furo.

Entende-se este problema no sentido fraco, isto é,  $u \in H_0^2(\Omega)$  é solução fraca de (5.2) se, e somente se,

$$u \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k u \eta = \int_{\Omega} f \eta, \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.4)$$

Com isso, temos o problema perturbado,

$$u_{\varepsilon} \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta, \quad \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.5)$$

**Observação. 5.2** É considerado um sistema de coordenadas ortonormal  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$  sobre  $\partial\Omega$ .



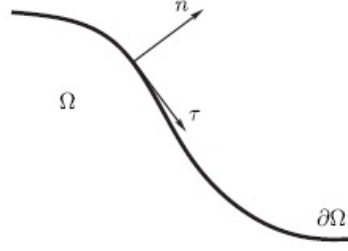


Figura 5.4 – Sistema de Coordenadas curvilíneo sobre  $\partial\Omega$ .

Dessa forma, é possível decompor  $\nabla\varphi$  em duas componentes, uma normal outra tangencial, ou seja

$$\nabla\varphi = \underbrace{\partial_{\mathbf{n}}\varphi \cdot \mathbf{n}}_{\text{normal}} + \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\tau}}\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\text{tangencial}},$$

e ainda, vamos escrever

$$\begin{aligned} M^{nn}(u_\varepsilon) &= \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \\ M^{\boldsymbol{\tau}n}(u_\varepsilon) &= \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

ou seja,  $M^{nn}$  e  $M^{\boldsymbol{\tau}n}$ , são as componentes do tensor momento fletor escrito na base ortonormal  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ .

Para definir a formulação associada ao problema variacional perturbado, utiliza-se integração por partes, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} -\operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta - \int_{\partial\Omega} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta + \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta - \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta - \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Integrando por partes novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} -\operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \operatorname{div}(\operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \eta) - \int_{\partial\Omega} \eta \operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} + \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} \eta \operatorname{div} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.7)$$

e

$$- \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta = \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div}(\operatorname{div} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \eta) - \int_{\partial B_\varepsilon} \eta \operatorname{div} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.8)$$

Somando (5.7) e (5.8) e observando que  $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$ ,

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{div} \alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon) \eta) + \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \operatorname{div} \alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon) \rrbracket \eta. \quad (5.9)$$

Integrando por partes sobre a  $\partial B_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta &= \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot (\partial_{\mathbf{n}} \eta \mathbf{n} + \partial_{\mathcal{T}} \eta \boldsymbol{\tau}) \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \partial_{\mathbf{n}} \eta \mathbf{n} + \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \partial_{\mathcal{T}} \eta \boldsymbol{\tau} \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \partial_{\mathbf{n}} \eta + \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \partial_{\mathcal{T}} \eta \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha M^{\mathbf{nn}}(u_\varepsilon) \partial_{\mathbf{n}} \eta + \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&\quad - \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{\mathcal{T}} (\alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \eta.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta &= \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha M^{\mathbf{nn}}(u_\varepsilon) \partial_{\mathbf{n}} \eta + \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \\
&\quad \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{\mathcal{T}} \gamma_\alpha \alpha M^{\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}}(u_\varepsilon) \eta.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Fazendo a diferença entre (5.11) e (5.10), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta - \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \mathbf{n} \cdot \nabla \eta &= \int_{\partial B_\varepsilon} [\alpha_\varepsilon M^{\mathbf{nn}}(u_\varepsilon)] \partial_{\mathbf{n}} \eta - \\
&\quad \int_{\partial B_\varepsilon} [\partial_{\mathcal{T}} \alpha_\varepsilon M^{\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}}(u_\varepsilon)] \eta.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Assim, substituindo (5.9) e (5.12) em (5.6), vamos obter o problema:

Encontre  $u_\varepsilon$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\operatorname{div} \alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon)) + \beta_\varepsilon k u_\varepsilon = \rho_\varepsilon f \quad \text{em } \Omega, \\ M(u_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla \nabla u_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 \\ \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon M^{\mathbf{nn}}(u_\varepsilon) \rrbracket = 0 \\ \llbracket \partial_{\mathcal{T}} \alpha_\varepsilon M^{\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}}(u_\varepsilon) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon)) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sobre } \partial\Omega \\ \\ \\ \\ \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \tag{5.13}$$

### 5.2.1 Existência da Derivada Topológica

Uma vez definidos os problemas (5.2) e (5.13), é possível mostrar a existência da Derivada Topológica, que será feito no resultado a seguir.

**Teorema 5.1** *Seja  $u$  solução do problema (5.2) e  $u_\varepsilon$  solução do problema (5.13). Então*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} = O(\varepsilon).$$

**Demonstração.** Subtraindo as equações (5.5) e (5.4), temos

$$\underbrace{\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta}_{S_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} \beta k u \eta}_{S_2} = \underbrace{\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta}_{S_3}. \quad (5.14)$$

Agora pode-se escrever,

$$S_1 = \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta. \quad (5.15)$$

Somando e subtraindo  $\int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta$ , no lado direito da equação acima, obtêm-se

$$S_1 = \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} M(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta. \quad (5.16)$$

Para  $S_2$ , escreve-se

$$S_2 = \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta k u_{\varepsilon} \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta k u \eta - \int_{B_{\varepsilon}} \beta k u \eta,$$

após somar e subtrair  $\int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta k u \eta$ , no lado direito da equação acima, obtêm-se

$$S_2 = \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u \eta. \quad (5.17)$$

E para  $S_3$ , tem-se

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} f \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_f f \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} f \eta - \int_{B_{\varepsilon}} f \eta \\ &= - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Substituindo (5.16), (5.17) e (5.18) em (5.14), teremos

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} M(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u \eta = - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta. \quad (5.19)$$

Na equação anterior, considerando  $\eta = u_{\varepsilon} - u$  e reorganizando os termos, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} M(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) &+ \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k \|u_{\varepsilon} - u\|^2 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \\ &+ \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u (u_{\varepsilon} - u) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f (u_{\varepsilon} - u). \end{aligned} \quad (5.20)$$

É possível observar que,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla (u_\varepsilon - u) &\leq c_1 \|\mathbf{M}(u)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla \nabla (u_\varepsilon - u)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\
&\leq \varepsilon c_2 \|\nabla \nabla (u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \varepsilon c_3 \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u (u_\varepsilon - u) &\leq c_1 \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\
&\leq \varepsilon c_2 \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \varepsilon c_2 \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u) &\leq c_1 \|f\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\
&\leq \varepsilon c_2 \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \varepsilon c_3 \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

E ainda que,

$$c \|u_\varepsilon - u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \nabla (u_\varepsilon - u) + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon k |u_\varepsilon - u|^2. \tag{5.24}$$

Utilizando as desigualdades (5.21) - (5.24) em (5.20), teremos

$$c \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_4 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Portanto, pode-se concluir que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \varepsilon = O(\varepsilon). \tag{5.25}$$

□

## 5.2.2 Cálculo da Derivada Topológica

Nesta seção são determinadas as derivadas topológicas dos funcionais auxiliares, que serão essenciais no cálculo da DT do primeiro autovalor associado ao modelo de placas.

### 5.2.2.1 Parte I

**Teorema 5.2** *Considere os funcionais,*

$$\mathcal{G}(u) = \int_{\Omega} \beta k |u|^2 \quad e \quad \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \beta_\varepsilon k |u_\varepsilon|^2, \tag{5.26}$$

onde  $u$  é solução de (5.2) e  $u_\varepsilon$  é solução de (5.13). Então a Derivada Topológica de  $\mathcal{G}$  é dada por

$$\mathcal{D}_T \mathcal{G} = \alpha \mathbf{P} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) - (1 - \gamma_\beta) \beta k u (u + q)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f) f(\hat{x}) q(\hat{x}), \tag{5.27}$$

sendo  $q$  solução do problema adjunto,

$$q \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(q) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k q \eta = -2 \int_{\Omega} \beta k u \eta, \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega), \quad (5.28)$$

e  $\mathbb{P}$  o tensor polarização de quarta ordem, dado por

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1-\gamma_{\beta} \delta_2} \left( \frac{4\delta_2}{1-\nu} \mathbb{I} + \delta_1 \delta_2 \frac{1+3\nu}{1-\nu^2} \frac{1-\gamma_{\alpha}}{1+\gamma_{\alpha} \delta_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (5.29)$$

com

$$\delta_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{1-\nu}{3+\nu}.$$

**Demonstração.** Será considerada a diferença entre os funcionais (5.26),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{G}(u) &= \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{\Omega} \beta k |u|^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{\Omega} \beta k |u|^2 \pm \int_{B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{\Omega} \beta k |u|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 \\ &= \int_{\Omega} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{\Omega} \beta k |u|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\beta} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 - \int_{B_{\varepsilon}} \beta k |u_{\varepsilon}|^2 \\ &= \int_{\Omega} \beta k (|u_{\varepsilon}|^2 - |u|^2) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k |u_{\varepsilon}|^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Observando que,

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon}^2 - u^2 &= (u_{\varepsilon} - u)u + u_{\varepsilon}^2 - u_{\varepsilon}u \pm (u_{\varepsilon} - u)u \\ &= 2(u_{\varepsilon} - u)u + u_{\varepsilon}^2 - u_{\varepsilon}u - u_{\varepsilon}u + u^2 \\ &= 2(u_{\varepsilon} - u)u + (u_{\varepsilon} - u)^2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Substituindo a equação (5.31) na equação (5.30), pode-se escrever

$$\mathcal{G}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{G}(u) = \underbrace{2 \int_{\Omega} \beta k (u_{\varepsilon} - u)u}_{A_1} - \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k |u_{\varepsilon}|^2}_{A_2} + \underbrace{\int_{\Omega} \beta k (u_{\varepsilon} - u)^2}_{\mathcal{E}_1(\varepsilon)}. \quad (5.32)$$

Expandindo  $A_2$ , tem-se

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k |u_\varepsilon|^2 \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k |u_\varepsilon - u + u|^2 \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k |u|^2 + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k |u_\varepsilon - u|^2}_{\mathcal{E}_2(\varepsilon)} + 2 \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k (u_\varepsilon - u) u}_{\mathcal{E}_3(\varepsilon)} \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k |u|^2(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k (|u|^2 - |u|^2(\hat{x}))}_{\mathcal{E}_4(\varepsilon)} + \mathcal{E}_2(\varepsilon) + \mathcal{E}_3(\varepsilon) \\
&= (1 - \gamma_\beta) \beta \pi \varepsilon^2 k |u|^2(\hat{x}) + \sum_{i=2}^4 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Para determinar  $A_1$ , considera-se a equação adjunta

$$q \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(q) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k q \eta = -2 \int_{\Omega} \beta k u \eta, \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \tag{5.34}$$

Considerando  $\eta = u_\varepsilon - u$  na equação anterior, obtêm-se

$$\int_{\Omega} \alpha M(q) \cdot \nabla \nabla (u_\varepsilon - u) + \int_{\Omega} \beta k q (u_\varepsilon - u) = -2 \int_{\Omega} \beta k u (u_\varepsilon - u). \tag{5.35}$$

Da equação (5.5), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{B_\varepsilon} \gamma_\alpha \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \beta k u_\varepsilon \eta + \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta k u_\varepsilon \eta = \\
\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} f \eta + \int_{B_\varepsilon} \gamma_f f \eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k u_\varepsilon \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon \eta = \\
\int_{\Omega} f \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Subtraindo (5.4) de (5.36), obtêm-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha M(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k (u_\varepsilon - u) \eta = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon \eta + \\
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \eta. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Considerando  $\eta = q$  na equação (5.37),

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha M(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \nabla q + \int_{\Omega} \beta k (u_\varepsilon - u) q = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon q + \\
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Observando ainda que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha M(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \nabla q + \int_{\Omega} \beta k(u_{\varepsilon} - u)q &= \int_{\Omega} \alpha \mathbb{C} \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \nabla q + \int_{\Omega} \beta k(u_{\varepsilon} - u)q \\
&= \int_{\Omega} \alpha \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \mathbb{C}^T \nabla \nabla q + \int_{\Omega} \beta k(u_{\varepsilon} - u)q \\
&= \int_{\Omega} \alpha M(q) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) \\
&\quad + \int_{\Omega} \beta k(u_{\varepsilon} - u)q. \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.39) em (5.38), pode-se obter

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha M(q) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \int_{\Omega} \beta k(u_{\varepsilon} - u)q &= - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fq + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k u_{\varepsilon}q + \\
&\quad \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla q. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Comparando (5.40) com (5.35), nota-se que

$$\begin{aligned}
- A_1 = -2 \int_{\Omega} \beta k u(u_{\varepsilon} - u) &= - \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fq}_{A_3} + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k u_{\varepsilon}q}_{A_4} + \\
&\quad \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha})\alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla q}_{A_5}. \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Para  $A_3$  e  $A_4$ , tem-se

$$\begin{aligned}
A_3 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fq &= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f)fq(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} [(1 - \gamma_f)fq - (1 - \gamma_f)fq(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_5(\varepsilon)}. \\
&= (1 - \gamma_f)\pi \varepsilon^2 fq(\hat{x}) + \mathcal{E}_5(\varepsilon). \tag{5.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k u_{\varepsilon}q &= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k(u_{\varepsilon} - u + u)q \\
&= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k u q + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k(u_{\varepsilon} - u)q}_{\mathcal{E}_6(\varepsilon)} \\
&= \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta})\beta k u q(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} [(1 - \gamma_{\beta})\beta k u q - (1 - \gamma_{\beta})\beta k u q(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_7(\varepsilon)} + \mathcal{E}_6(\varepsilon) \\
&= (1 - \gamma_{\beta})\beta k \pi \varepsilon^2 u q(\hat{x}) + \sum_{i=6}^7 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Para expandir  $A_5$  é necessário realizar a análise assintótica de  $u_{\varepsilon}$  com relação a  $\varepsilon$ , com esse intuito, é considerado um *ansatz* [91] para  $u_{\varepsilon}$ , da forma

$$u_{\varepsilon}(x) = u(x) + w_{\varepsilon}(x) + \tilde{u}_{\varepsilon}(x). \tag{5.44}$$

Substituindo no operador  $M$ , tem-se que

$$M(u_\varepsilon(x)) = M(u(x)) + M(w_\varepsilon(x)) + \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \quad (5.45)$$

$$= \mathbf{M}(u(\hat{x})) + \nabla M(u(y))(x - \hat{x}) + M(w_\varepsilon(x)) + \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon(x)), \quad (5.46)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  tem-se

$$\llbracket M^{nn}(u_\varepsilon) \rrbracket = (M^{nn}(u_\varepsilon)|_{\Omega \setminus B_\varepsilon} - \gamma_\alpha \alpha M^{nn}(u_\varepsilon)|_{B_\varepsilon}) = 0, \quad (5.47)$$

e

$$\llbracket \partial_\tau M^{\tau n}(u_\varepsilon) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div} \mathbf{M}(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0. \quad (5.48)$$

Levando em conta (5.45), as expressões (5.47) e (5.48) avaliados no  $\partial B_\varepsilon$ , podem ser escritas como:

$$(1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot n - \varepsilon (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\nabla M(u(\xi)) n) n \cdot n + \llbracket M^{nn}(w_\varepsilon(x)) \rrbracket + \llbracket M^{nn}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \rrbracket = 0, \quad (5.49)$$

e

$$(1 - \gamma_\alpha) \alpha (\partial_\tau \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot \tau + \operatorname{div} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot n) + \varepsilon (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\partial_\tau (\nabla M(u(\xi)) n) n \cdot \tau + \operatorname{div} (\nabla M(u(\xi)) n) \cdot n) + \llbracket \partial_\tau M^{\tau n}(w_\varepsilon(x)) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div} M(w_\varepsilon(x)) \rrbracket \cdot n + \llbracket \partial_\tau M^{\tau n}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div} \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \rrbracket \cdot n. \quad (5.50)$$

Logo, é possível determinar  $\mathbf{M}(w_\varepsilon)$ , tal que

$$\llbracket M^{nn}(w_\varepsilon(x)) \rrbracket = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot n, \quad (5.51)$$

$$\llbracket M^{\tau n}(w_\varepsilon(x)) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div} M(w_\varepsilon(x)) \rrbracket \cdot n = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha (\partial_\tau \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot \tau + \operatorname{div} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot n). \quad (5.52)$$

Agora, o seguinte problema exterior é considerado, e obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } M(w_\varepsilon), \text{ tal que} \\ \operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbf{M}(w_\varepsilon)) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ M(w_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty \\ \partial_n w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty \\ \llbracket M^{nn}(w_\varepsilon) \rrbracket = \widehat{u}_1 \\ \llbracket \partial_\tau M^{\tau n}(w_\varepsilon) \rrbracket + \llbracket \operatorname{div} \mathbf{M}(w_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = \widehat{u}_2 \end{array} \right\} \text{ sobre } \partial B_\varepsilon \quad (5.53)$$

com,

$$\widehat{u}_1 = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot n, \quad (5.54)$$

$$\widehat{u}_2 = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha (\partial_\tau \mathbf{M}(u(\hat{x})) n \cdot \tau + \operatorname{div} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot n). \quad (5.55)$$



O problema acima tem uma solução explícita, que pode ser encontrada em detalhes no livro de Little (1973), que será utilizada para construir a expansão para  $\mathbf{M}(u_\varepsilon)$ . Dessa forma, é possível construir  $\mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon)$  de tal forma que compense as discrepâncias introduzidas pelos termos de mais alta ordem em  $\varepsilon$ , assim como pela camada limite  $\mathbf{M}(w_\varepsilon)$  na fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Isto significa que o resíduo  $\mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon)$ , deve ser solução do seguinte problema de valor de contorno:

Encontre  $u_\varepsilon$ , tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\operatorname{div}\alpha_\varepsilon\mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon)) + \beta_\varepsilon k\tilde{u}_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon) = \mathbb{C}\nabla\nabla\tilde{u}_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 \\ \partial_{\mathbf{n}}\tilde{u}_\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (5.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [[\tilde{u}_\varepsilon]] = 0 \\ [[\partial_{\mathbf{n}}\tilde{u}_\varepsilon]] = 0 \\ [[\alpha_\varepsilon M^{\mathbf{mn}}(\tilde{u}_\varepsilon)]] = -\varepsilon h_1 \\ [[\partial_\tau\alpha_\varepsilon M^{\mathbf{n}\tau}(\tilde{u}_\varepsilon)]] + [[\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon\mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \mathbf{n}]] = \varepsilon h_2 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon.$$

onde,

$$h_1 = (1 - \gamma_\alpha)\alpha(\nabla M(u(\xi))\mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (5.57)$$

$$h_2 = -(1 - \gamma_\alpha)\alpha(\partial_\tau(\nabla M(u(\xi))\mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} + \operatorname{div}(\nabla M(u(\xi))\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.58)$$

**Observação. 5.3** Como  $h_1$  e  $h_2$  são independentes do parâmetros  $\varepsilon$ , tem-se uma estimativa  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} = O(\varepsilon^2)$  para o resíduo [10].

Sendo assim, utilizando (5.44), escreve-se

$$\begin{aligned} A_5 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla\nabla q = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha M(u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x)) \cdot \nabla\nabla q \\ &= \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha M(u(x)) \cdot \nabla\nabla q}_{A_6} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha M(w_\varepsilon(x)) \cdot \nabla\nabla q}_{A_7} \\ &\quad + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \cdot \nabla\nabla q}_{\mathcal{E}_8(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Tem-se ainda que,

$$\begin{aligned} A_6 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha M(u(x)) \cdot \nabla\nabla q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha M(u(x)) \cdot \nabla\nabla q + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) - \\ &\quad - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha(\mathbf{M}(u) \cdot \nabla\nabla q - \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}))}_{\mathcal{E}_9(\varepsilon)} \\ &= \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\alpha)\alpha\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_9(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.60)$$

No caso de uma inclusão circular, o tensor  $M(w_\varepsilon(x))$  admite, no sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  em  $\hat{x}$ , a seguinte expressão ([10], [91])

- para  $r \geq \varepsilon$

$$M_r(r, \theta) = -\alpha_1 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_1 \gamma_\alpha} \frac{\varepsilon^2}{r^2} - \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_1 \gamma_\alpha} \left( \frac{4\nu}{3 + \nu} \frac{\varepsilon^2}{r^2} + 3\delta_2 \frac{\varepsilon^4}{r^4} \beta_1 \right) \cos 2\theta. \quad (5.61)$$

$$M_\theta(r, \theta) = \alpha_1 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_1 \gamma_\alpha} \frac{\varepsilon^2}{r^2} - \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_2 \gamma_\alpha} \left( \frac{4\nu}{3 + \nu} \frac{\varepsilon^2}{r^2} + 3\delta_2 \frac{\varepsilon^4}{r^4} \beta_1 \right) \cos 2\theta. \quad (5.62)$$

$$M_{r\theta}(r, \theta) = \delta_2 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_2 \gamma_\alpha} \left( 2 \frac{\varepsilon^2}{r^2} - 3 \frac{\varepsilon^4}{r^4} \right) \beta_1 \sin 2\theta. \quad (5.63)$$

- para  $0 < r < \varepsilon$

$$M_r(r, \theta) = \alpha_1 \delta_1 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_1 \gamma_\alpha} + \delta_2 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_2 \gamma_\alpha} \beta_1 \cos 2\theta. \quad (5.64)$$

$$M_\theta(r, \theta) = \alpha_1 \delta_1 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_1 \gamma_\alpha} - \delta_2 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_2 \gamma_\alpha} \beta_1 \cos 2\theta. \quad (5.65)$$

$$M_{r\theta}(r, \theta) = -\delta_2 \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \delta_2 \gamma_\alpha} \beta_1 \sin 2\theta. \quad (5.66)$$

Os valores  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , são dados por

$$\alpha_1 = \text{tr}(\mathbf{M}(u(\hat{x}))) \quad \text{e} \quad \beta_1 = \sqrt{2M^D(u(\hat{x})) \cdot M^D(u(\hat{x}))}, \quad (5.67)$$

onde  $M^D(u(\hat{x}))$  representa a parte deviatória do tensor momento  $\mathbf{M}(u(\hat{x}))$ , ou seja,

$$M^D(u(\hat{x})) = \mathbf{M}(u(\hat{x})) - \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \mathbb{I}. \quad (5.68)$$

Considerando  $\mathbb{T} = \mathbb{P} - \mathbb{I}$ , para  $A_7$ , teremos

$$\begin{aligned} A_7 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) + \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot (\nabla \nabla q - \nabla \nabla q(\hat{x}))}_{\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 \alpha \mathbb{T} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Substituindo (5.60) e (5.69) em (5.59), pode-se escrever

$$A_5 = \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) + \pi \varepsilon^2 \alpha \mathbb{T} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla q(\hat{x}) + \sum_{i=8}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (5.70)$$

Agora substituindo (5.42), (5.43) e (5.70) em (5.41), obtêm-se

$$\begin{aligned}
-A_1 &= \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)fq(\hat{x}) + \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\beta)\beta kuq(\hat{x}) + \\
&\quad (1 - \gamma_\alpha)\alpha\pi\varepsilon^2\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{T}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \\
&\quad \sum_{i=5}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.33) e (5.71) em (5.32), é possível notar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= -(1 - \gamma_\beta)\beta\pi\varepsilon^2ku^2(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)\pi\varepsilon^2fq(\hat{x}) - \\
&\quad (1 - \gamma_\beta)\beta k\pi\varepsilon^2uq(\hat{x}) - (1 - \gamma_\alpha)\alpha\pi\varepsilon^2\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) - \\
&\quad \alpha\pi\varepsilon^2\mathbb{T}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (5.72)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= -\pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\beta)\beta ku(u(\hat{x}) + q(\hat{x})) + \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)fq \\
&\quad - \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\alpha)\alpha(\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \mathbb{T}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x})) + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\
&= -\pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\beta)\beta ku(u(\hat{x}) + q(\hat{x})) - \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)fq - \\
&\quad \pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{P}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_T\mathcal{G} = \alpha\mathbb{P}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla q(\hat{x}) - (1 - \gamma_\beta)\beta ku(u + q)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)f(\hat{x})q(\hat{x}). \quad (5.74)$$

□

### 5.2.2.2 Parte II

**Teorema 5.3** *Dados os funcionais,*

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \alpha\mathbf{M}(u) \cdot \nabla\nabla u \quad e \quad \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon\mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla\nabla u_\varepsilon, \quad (5.75)$$

com  $u$  e  $u_\varepsilon$  satisfazendo as condições do Teorema (5.2) e  $p$  solução do problema adjunto,

$$p \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla\nabla \eta + \int_{\Omega} \beta kp\eta = -2 \int_{\Omega} \alpha\mathbf{M}(u) \cdot \nabla\nabla \eta, \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.76)$$

Então a DT de  $\mathcal{J}$  é dada por,

$$D_T\mathcal{G} = \alpha\mathbb{P}\mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot (\nabla\nabla p(\hat{x}) + \nabla\nabla u(\hat{x})) - (1 - \gamma_\beta)\beta kup(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)fp(\hat{x}). \quad (5.77)$$

**Demonstração.** Considere a diferença,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= \int_\Omega \alpha_\varepsilon \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u_\varepsilon - \int_\Omega \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u \\
&= \int_\Omega f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_\Omega \beta_\varepsilon k \|u_\varepsilon\|^2 - \int_\Omega f u + \int_\Omega \beta k \|u\|^2 \\
&= \underbrace{\int_\Omega f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_\Omega f u}_{B_1} + \underbrace{\int_\Omega \beta k \|u\|^2 - \int_\Omega \beta_\varepsilon k \|u_\varepsilon\|^2}_{B_2}. \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo  $B_1$ , teremos

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_\Omega f_\varepsilon u_\varepsilon - \int_\Omega f u \\
&= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} f u_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} \gamma_f f u_\varepsilon - \int_\Omega f u + \int_{B_\varepsilon} f u_\varepsilon - \int_{B_\varepsilon} f u_\varepsilon \\
&= \int_\Omega f u_\varepsilon - \int_\Omega f u - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon \\
&= \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon + \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) \\
&= 2 \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon - \int_\Omega f(u_\varepsilon - u). \tag{5.79}
\end{aligned}$$

Para  $B_2$ , tem-se

$$\begin{aligned}
B_2 &= \int_\Omega \beta k \|u\|^2 - \int_\Omega \beta_\varepsilon k \|u_\varepsilon\|^2 \\
&= \int_\Omega \beta k \|u\|^2 - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \beta k \|u_\varepsilon\|^2 - \int_{B_\varepsilon} \gamma_\beta \beta k \|u_\varepsilon\|^2 + \int_{B_\varepsilon} \beta k \|u_\varepsilon\|^2 - \int_{B_\varepsilon} \beta k \|u_\varepsilon\|^2 \\
&= \int_\Omega \beta k \|u\|^2 - \int_\Omega \beta k \|u_\varepsilon\|^2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2 \\
&= \int_\Omega \beta k (\|u\|^2 - \|u_\varepsilon\|^2) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2. \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Logo,

$$-B_2 = \int_\Omega \beta k (\|u_\varepsilon\|^2 - \|u\|^2) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2. \tag{5.81}$$

Utilizando (5.31) em (5.81), obtêm-se

$$-B_2 = 2 \int_\Omega \beta k (u_\varepsilon - u) u + \underbrace{\int_\Omega \beta k \|u_\varepsilon - u\|^2}_{\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2. \tag{5.82}$$

Substituindo (5.79) e (5.82) em (5.78), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= 2 \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon - \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - \\
&\quad - 2 \int_\Omega \beta k (u_\varepsilon - u) u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2 + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= \underbrace{2 \int_\Omega f(u_\varepsilon - u) - 2 \int_\Omega \beta k (u_\varepsilon - u) u}_{B_3} - \underbrace{\int_\Omega f(u_\varepsilon - u)}_{B_4} + \\
&\quad + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \tag{5.83}
\end{aligned}$$

Considerando a equação adjunta

$$p \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla \nabla \eta + \int_{\Omega} \beta k p \eta = -2 \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta, \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.84)$$

Por (5.4),

$$-2 \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla \eta = -2 \int_{\Omega} f \eta + 2 \int_{\Omega} \beta k u \eta. \quad (5.85)$$

Substituindo (5.85) em (5.84) e considerando  $\eta = u_{\varepsilon} - u$ ,

$$\int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \int_{\Omega} \beta k p (u_{\varepsilon} - u) = -2 \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u) + 2 \int_{\Omega} \beta k u (u_{\varepsilon} - u),$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \int_{\Omega} \beta k p (u_{\varepsilon} - u) = -B_3. \quad (5.86)$$

Considerando  $\eta = p$  em (5.37),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(u_{\varepsilon} - u) \nabla \nabla p + \int_{\Omega} \beta k (u_{\varepsilon} - u) p &= - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f p + \\ &\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u_{\varepsilon} p + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla p. \end{aligned} \quad (5.87)$$

De forma análoga ao que foi observado em (5.39), pode-se escrever

$$\int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \int_{\Omega} \beta k p (u_{\varepsilon} - u) = \int_{\Omega} \alpha M(u_{\varepsilon} - u) \nabla \nabla p + \int_{\Omega} \beta k (u_{\varepsilon} - u) p. \quad (5.88)$$

Comparando as equações (5.86), (5.87) e (5.88), observa-se que

$$B_3 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f p - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u_{\varepsilon} p - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla p. \quad (5.89)$$

Para desenvolver  $B_4$ , vamos inicialmente considerar  $\eta = u_{\varepsilon}$  em (5.4) e  $\eta = u$  em (5.5), obtendo

$$\int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \beta k u u_{\varepsilon} = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon}, \quad (5.90)$$

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla u + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} u = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u. \quad (5.91)$$

Fazendo a diferença entre (5.90) e (5.91),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla u - \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \beta_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} u - \int_{\Omega} \beta k u u_{\varepsilon} = \\ \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla u + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\beta}) \beta k u_{\varepsilon} u = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u,$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon u &= \int_{\Omega} f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f_\varepsilon u + \\
&\int_{\Omega} f_\varepsilon u - \int_{\Omega} f u_\varepsilon, \\
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon u &= \int_{\Omega} f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u, \\
\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon u &= \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u) + \\
&\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u. \quad (5.92)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B_4 = - \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u) &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u - \\
&\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u. \quad (5.93)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.89) e (5.93) em (5.83), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon p - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla p - \\
&\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u + \\
&\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k \|u_\varepsilon\|^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \quad (5.94)
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p}_{B_5} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon p}_{B_6} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla p}_{B_7} - \\
&\underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u}_{B_8} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)} - \\
&\underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)} + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \quad (5.95)
\end{aligned}$$

Note que para  $B_5$  e  $B_6$ , pode-se escrever,

$$\begin{aligned}
B_5 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p + \int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_f) f p](\hat{x}) - \int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_f) f p](\hat{x}) \\
&= \int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_f) f p](\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} [(1 - \gamma_f) f p - [(1 - \gamma_f) f p](\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{14}(\varepsilon)} \\
&= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_f) f p(\hat{x}) + \mathcal{E}_{14}(\varepsilon). \quad (5.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon p = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u_\varepsilon p + \\
&\quad \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p = \\
&\quad \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k (u_\varepsilon - u) p + \\
&\quad \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p(\hat{x}) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p(\hat{x}) = \\
&\quad \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k u p - (1 - \gamma_\beta) \beta k u p(\hat{x})}_{\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)} + \\
&\quad \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta k (u_\varepsilon - u) p}_{\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)} = \\
&\quad \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\beta) \beta k u p(\hat{x}) + \mathcal{E}_{15}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{16}(\varepsilon). \quad (5.97)
\end{aligned}$$

Para expandir os termos  $B_7$  e  $B_8$ , podemos proceder de forma análoga ao que foi feito para o termo  $A_5$ , isto é,

$$\begin{aligned}
B_7 &= (1 - \gamma_\alpha) \alpha \pi \varepsilon^2 \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla p(\hat{x}) + \\
&\quad \alpha \pi \varepsilon^2 \mathbf{T} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla p(\hat{x}) + \sum_{i=17}^{19} \mathcal{E}_i(\varepsilon), \quad (5.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_8 &= (1 - \gamma_\alpha) \alpha \pi \varepsilon^2 \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla u(\hat{x}) + \\
&\quad \alpha \pi \varepsilon^2 \mathbf{T} \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla u(\hat{x}) + \sum_{i=20}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon), \quad (5.99)
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla p - \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla p(\hat{x})), \\
\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot (\nabla \nabla p - \nabla \nabla p(\hat{x})), \\
\mathcal{E}_{19}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla p, \\
\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u - \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla u(\hat{x})), \\
\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(w_\varepsilon) \cdot (\nabla \nabla p - \nabla \nabla u(\hat{x})), \\
\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{M}(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla u. \quad (5.100)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as equações (5.96) - (5.99) em (5.95), obtêm-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= (1 - \gamma_f)\pi\varepsilon^2 fp(\hat{x}) - (1 - \gamma_\beta)\beta\pi\varepsilon^2 kup(\hat{x}) - \\
&\quad (1 - \gamma_\alpha)\alpha\pi\varepsilon^2 \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla p(\hat{x}) - \\
&\quad \alpha\pi\varepsilon^2 \mathbf{TM}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla p(\hat{x}) - \\
&\quad (1 - \gamma_\alpha)\alpha\pi\varepsilon^2 \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla u(\hat{x}) - \\
&\quad \alpha\pi\varepsilon^2 \mathbf{TM}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla u(\hat{x}) + \sum_{i=11}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= \pi\varepsilon^2 \left( (1 - \gamma_f)fp(\hat{x}) - (1 - \gamma_\beta)\beta kup(\hat{x}) - (1 - \gamma_\alpha)\alpha \left( \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla p(\hat{x}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{TM}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla p(\hat{x}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{M}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla u(\hat{x}) + \mathbf{TM}(u(\hat{x})) \cdot \nabla\nabla u(\hat{x}) \right) \right) + \sum_{i=11}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\
&= \pi\varepsilon^2 \left( \alpha \mathbf{PM}(u(\hat{x})) \cdot (\nabla\nabla p(\hat{x}) + \nabla\nabla u(\hat{x})) - (1 - \gamma_\beta)\beta kup(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)fp(\hat{x}) \right) + \\
&\quad \sum_{i=11}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (5.101)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_T \mathcal{J} = \alpha \mathbf{PM}(u(\hat{x})) \cdot (\nabla\nabla p(\hat{x}) + \nabla\nabla u(\hat{x})) - (1 - \gamma_\beta)\beta kup(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)fp(\hat{x}). \quad (5.102)$$

□

### 5.2.3 Autovalor do Operador Diferencial de Quarta Ordem

O principal interesse consiste em calcular a DT do primeiro autovalor do Operador de quarta ordem com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira de  $\Omega$ .

Um problema que surge na otimização de autovalores é a possibilidade do algoritmo encontrar dois autovetores (modos de vibrações) associados ao mesmo autovalor, o que pode acarretar em dificuldades na convergência do problema de otimização, por exemplo, fazendo com que a maximização de um determinado autovalor possa fazê-lo coincidir com o autovalor seguinte.

Neste sentido, o problema de repetitividade foi contornado, devido às condições de contorno e geometrias consideradas nos experimentos numéricos. Uma discussão mais detalhada sobre a repetitividade de autovalores pode ser encontrada em [92, 100, 108].

Ressalta-se ainda, que os modos de vibrar são características intrínsecas de uma estrutura (estão associados aos autovalores correspondentes). São determinados pelas propriedades do material, como massa, rigidez, amortecimento e pelas condições de contorno da estrutura. Cada modo é definido por uma frequência natural. Quaisquer



alterações nas condições de contorno ou nas propriedades do material acarretam em mudanças no modo de vibrar.

Ao excitar uma placa, por exemplo, a forma de vibrar assumida tende a ser dominada pela forma do modo de vibrar mais próximo à frequência de excitação. Nosso interesse, está no primeiro modo de vibração, por apresentar menor frequência de vibração e conseqüentemente maior deformação, sendo assim, suas conseqüências para a estrutura são mais prejudiciais. O que torna relevante a maximização do primeiro autovalor [73].

Ao reescrever o problema (5.2) com  $f = 0$  e  $k = -\lambda$ , obtém-se o problema de autovalor

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\alpha \mathbf{M}(u))) = \beta \lambda u & \text{em } \Omega \\ \mathbf{M}(u) = \mathbb{C} \nabla \nabla u \\ u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \quad (5.103)$$

**Observação. 5.4** *Se o módulo de elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  e a espessura da placa  $h$  são constantes, tais que  $Eh^3 = 12$  e  $\nu = 0$ , o problema de valor de contorno acima, pode ser escrito em sua forma mais conhecida, ou seja, o problema de autovalor para equação de Kirchhoff, dado por*

$$\Delta^2 u = \nabla^4 u = \beta \lambda u, \quad \text{em } \Omega.$$

Dessa forma, a formulação fraca será dada por

$$u \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} \lambda \beta u \eta \quad \forall \eta \in H_0^2. \quad (5.104)$$

Segundo Gazzola [49], o menor autovalor do problema do operador, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u}{\int_{\Omega} \beta |u|^2}, \quad (5.105)$$

vamos utilizar a notação  $\lambda_1 = \lambda$ .

Considerando as perturbações apresentadas nas Tabelas 1, 2 e 3, é possível definir a formulação fraca do problema perturbado,

$$u_{\varepsilon} \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \mathbf{M}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \nabla \eta = \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon} \beta_{\varepsilon} u_{\varepsilon} \eta \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.106)$$

## 5.2.4 Cálculo da Derivada Topológica do Primeiro Autovalor

A seguir, é apresentado em detalhes o cálculo da DT do primeiro autovalor. Apresentamos os problemas adjuntos e também utilizamos a regra do quociente para derivada topológica.

**Teorema 5.4** *Seja  $u$  solução de (5.103), então a DT do primeiro autovalor  $\lambda_1$  é dada por:*

$$D_T(\lambda_1) = -\frac{\alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u + (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda u^2}{\mathcal{G}(u)}. \quad (5.107)$$

**Demonstração.** Se  $u$  satisfaz a relação (5.105), teremos

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} \alpha \mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u}{\int_{\Omega} \beta |u|^2} = \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{G}(u)}, \quad (5.108)$$

ou seja,

$$\mathcal{J}(u) = \lambda_1 \mathcal{G}(u). \quad (5.109)$$

Agora para calcular a DT  $D_T(\lambda_1)$  podemos, aplicar a regra do quociente em (5.108) (Novotny e Sokolowski (2016)), isto é.

$$D_T(\lambda_1) = \frac{(D_T \mathcal{J}) \mathcal{G}(u) - (D_T \mathcal{G}) \mathcal{J}(u)}{[\mathcal{G}(u)]^2}. \quad (5.110)$$

Substituindo (5.109) em (5.110), temos

$$D_T(\lambda_1) = \frac{(D_T \mathcal{J}) \mathcal{G}(u) - \lambda_1 (D_T \mathcal{G}) \mathcal{G}(u)}{[\mathcal{G}(u)]^2} = \frac{D_T \mathcal{J} - \lambda_1 D_T \mathcal{G}}{\mathcal{G}(u)}. \quad (5.111)$$

São definidas as equações adjuntas

$$p_1 \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(p_1) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{\Omega} \lambda_1 \beta p_1 \eta = -2 \int_{\Omega} \lambda_1 \beta u \eta \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega), \quad (5.112)$$

para  $\mathcal{G}(u)$ ,

$$q_1 \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha M(q_1) \cdot \nabla \nabla \eta - \int_{\Omega} \lambda_1 \beta q_1 \eta = -2 \int_{\Omega} \beta u \eta \quad \forall \eta \in H_0^2(\Omega). \quad (5.113)$$

De forma análoga ao que foi obtido no capítulo anterior, obtém-se as seguintes derivadas topológicas:

$$D_T \mathcal{J} = \alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u - \alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla p_1 + (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda_1 u p_1, \quad (5.114)$$

$$D_T \mathcal{G} = \alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla q_1 + (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda_1 u q_1 - (1 - \gamma_\beta) \beta u^2. \quad (5.115)$$

Considerando  $\eta = q_1$  em (5.112) e  $\eta = p_1$  em (5.113),

$$\int_{\Omega} \alpha M(p_1) \cdot \nabla \nabla q_1 - \int_{\Omega} \lambda_1 \beta p_1 q_1 = -2 \int_{\Omega} \lambda_1 \beta u q_1, \quad (5.116)$$

$$\int_{\Omega} \alpha M(q_1) \cdot \nabla \nabla p_1 - \int_{\Omega} \lambda_1 \beta q_1 p_1 = -2 \int_{\Omega} \beta u p_1, \quad (5.117)$$

ou seja,

$$-2 \int_{\Omega} \lambda_1 \beta u q_1 = -2 \int_{\Omega} \beta u p_1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \beta u (\lambda_1 q_1 - p_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \lambda_1 q_1. \quad (5.118)$$

Utilizando (5.111), (5.118) e as derivadas (5.114) e (5.115) teremos

$$D_T \mathcal{J} - \lambda_1 D_T \mathcal{G} = -\alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u - (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda_1 u^2. \quad (5.119)$$

Portanto,

$$D_T(\lambda_1) = -\frac{\alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u + (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda_1 u^2}{\mathcal{G}(u)}, \quad (5.120)$$

ou de forma equivalente,

$$D_T(\lambda_1^{-1}) = -\frac{\alpha \mathbb{P}\mathbf{M}(u) \cdot \nabla \nabla u + (1 - \gamma_\beta) \beta \lambda_1 u^2}{\lambda_1^2 \mathcal{G}(u)}. \quad (5.121)$$

□

**Observação. 5.5** *A derivada topológica obtida depende apenas da solução no domínio não perturbado. O tensor de polarização obtido é isotrópico, pois foi utilizada uma inclusão circular.*

**Observação. 5.6** *Pode-se tomar os casos limites ( $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \rightarrow 0$  e  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \rightarrow \infty$ ). Para  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \rightarrow 0$ , a inclusão equivale a um furo e a condição de transmissão na fronteira da inclusão degenera para uma condição de contorno de Neumann homogênea. Neste caso o tensor polarização é dado por,*

$$\mathbb{P}_0 = \frac{2}{3 + \nu} \mathbb{I} + \frac{1 + 3\nu}{2(1 - \nu)(3 + \nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (5.122)$$

*Para  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \rightarrow \infty$ , a inclusão elástica equivale a uma inclusão rígida e o tensor polarização é dado por,*

$$\mathbb{P}_\infty = -\frac{2}{1 - \nu} \mathbb{I} + \frac{1 + 3\nu}{2(1 - \nu^2)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (5.123)$$

### 5.2.5 Estimativas dos Termos Remanescentes

Nesta seção, faremos as estimativas dos termos  $\mathcal{E}_i(\varepsilon)$  (a letra  $c$  irá representar uma constante independente de  $\varepsilon$ ).

Primeiramente, observamos que as estimativas dos termos residuais  $\mathcal{E}_i(\varepsilon), i = 1, 2, \dots, 7$  e  $\mathcal{E}_i(\varepsilon), i = 11, 12, \dots, 16$ , são análogas ao que foi feito na seção 4.4.

Pela regularidade elíptica  $u$  é de classe  $C^\infty$ ,  $p$  e  $q$  são de classe  $C^{4,\alpha}$  em uma vizinhança de  $\hat{x}$ . A partir dessas informações, segue que

$$|\mathcal{E}_9(\varepsilon)| = c\varepsilon^3; \quad |\mathcal{E}_{17}(\varepsilon)| = c\varepsilon^3; \quad |\mathcal{E}_{20}(\varepsilon)| = c\varepsilon^3. \quad (5.124)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e tendo em conta a regularidade de  $p$  e  $q$  em uma vizinhança de  $\hat{x}$ , bem como as fórmulas explícitas (5.64) - (5.66), obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)| &\leq \|\mathbf{M}(w_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla\nabla q - \nabla\nabla q(\hat{x})\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq c\varepsilon^2 \|\mathbf{M}(w_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq c\varepsilon^3, \end{aligned} \tag{5.125}$$

de forma análoga,  $|\mathcal{E}_{18}(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^3$  e  $|\mathcal{E}_{21}(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^3$ .

### 5.3 Caso II: Modelo de Placa de Reissner-Mindlin

Na teoria de placas de Reissner-Mindlin [74, 95], o modelo mecânico é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais totalmente acoplado de segunda ordem. Pouco se encontra na literatura, no que se refere à determinação da derivada topológica para problemas acoplados. Por exemplo, para placa de Reissner-Mindlin, a derivada topológica foi calculada pela primeira vez nos trabalhos de Sales, Novotny e Rivera (2015) [96, 99], onde o funcional considerado foi a energia potencial total associada ao problema. Considerando problemas acoplados de outra natureza, Cardone et al. [37], apresentou de forma abstrata a derivada topológica para um problema piezoelétrico.

Nesta seção, é realizada a análise assintótica topológica do funcional dado pela forma variacional do primeiro autovalor associado ao problema de flexão de placa de Reissner-Mindlin. É considerado que a placa está submetida a efeitos de flexão e cisalhamento sob as seguintes premissas cinemáticas: as fibras normais ao plano médio da placa permanecem retas durante o processo de deformação, mas não necessariamente perpendiculares ao plano médio, e ainda, estas fibras não sofrem variações no seu comprimento. Consequentemente, as deformações cisalhantes transversais não são desprezíveis e as deformações normais são nulas. Assume-se que o material é homogêneo e isotrópico.

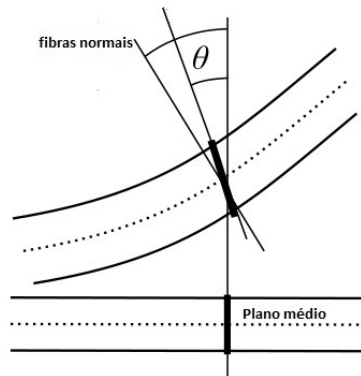


Figura 5.5 – Descrição cinemática da flexão da placa

A perturbação topológica é uma inclusão circular com a propriedade do material também isotrópica e homogênea. A seguir é apresentado o problema original e o problema

perturbado, bem como a existência da derivada topológica. Apresentamos ainda, exemplos numéricos com otimização da topologia com uma restrição de volume para placas quadradas com otimização do primeiro autovalor. Vale ressaltar que a essa abordagem do problema é inédita na literatura especializada.

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado aqui considerado é definido como,

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot (\theta - \nabla \omega)}{\int_{\Omega} \rho \omega^2} = \frac{\mathcal{A}(\theta, \omega)}{\mathcal{B}(\theta, \omega)}. \quad (5.126)$$

Para determinar a derivada topológica do funcional  $\lambda_1$  associado ao problema de Reissner-Mindlin, inicialmente são calculadas as derivadas topológicas dos funcionais que aparecem no numerador e denominador (subseções 5.3.2.1 e 5.3.2.2) de (5.126). Posteriormente, é utilizada a regra do quociente para diferenciação.

O modelo matemático é dado pelo sistema acoplado, apresentado a seguir: Encontre  $(\theta, \omega)$ , tais que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha M(\theta)) + \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\beta \mathbb{Q}(\theta, \omega)) + \rho k \omega = f & \text{em } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sobre } \Gamma_{D_\omega}, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ M(\theta) \cdot \mathbf{n} = \bar{m} & \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \mathbf{n} = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_{N_\omega}, \end{array} \right. \quad (5.127)$$

onde  $M(\theta) = \mathbb{C} \nabla^s \theta$  é tensor momento fletor,  $\nabla^s \theta = \frac{1}{2}(\nabla \theta + (\nabla \theta)^T)$  é o tensor de deformações, e ainda  $\mathbb{Q}(\theta, \omega) = \mathbf{K}(\theta - \nabla \omega)$  é o esforço cisalhante. Os tensores (isotrópicos) constitutivos  $\mathbb{C}$  e  $\mathbf{K}$ , são de quarta e segunda ordens, respectivamente. O ângulo  $\theta$  representa o ângulo de rotação,  $\omega$  é o deslocamento transversal,  $f$  é um termo fonte e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário sobre  $\partial\Omega$  direcionado para o exterior do domínio  $\Omega$ . O tensor  $\mathbb{C}$  foi definido em (5.3), e o tensor  $\mathbf{K}$  é dado por:

$$\mathbf{K} = \frac{f_c E h}{2(1 + \nu)} \mathbf{I}. \quad (5.128)$$

Sendo que,  $f_c = 5/6$  é o fator de correção de cisalhamento. As fronteiras de Neumann são denotadas por  $\Gamma_{N_\theta}$  e  $\Gamma_{N_\omega}$ , enquanto as fronteiras de Dirichlet, por  $\Gamma_{D_\theta}$  e  $\Gamma_{D_\omega}$ . Na fronteira de Dirichlet a rotação e o deslocamento transversal são nulos. E também, o momento  $\bar{m}$  e os esforços cortantes  $\bar{q}$ , são nulos na fronteira de Neumann.

A formulação fraca do problema é dada pelo problema variacional acoplado, apresentado a seguir:

Encontre  $(\theta, \omega) \in \mathcal{U}$ . tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 + \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \eta_1) = 0 \\ \int_{\Omega} (\beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \nabla \eta_2) + \int_{\Omega} \rho k \omega \eta_2 = \int_{\Omega} f \eta_2 \end{array} \right. , \quad (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{H}(\Omega). \quad (5.129)$$

No problema (5.129),  $\mathcal{U}$  é o conjunto das funções admissíveis:

$$\mathcal{U} = \{(\varphi_\theta, \varphi_\omega) \in \mathcal{H} : \varphi_\theta|_{\partial\Omega} = \varphi_\omega|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \mathcal{H}(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega). \quad (5.130)$$

É considerada as perturbação definidas nas tabelas (2) e (3). Dessa forma, podemos definir o problema perturbado: Encontre  $(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ , tais que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon)) + \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon k \omega_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } \Omega \\ M(\theta_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla^s \theta_\varepsilon, & \\ \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = \mathbf{K}(\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon), & \\ \omega_\varepsilon = \bar{\omega} & \text{sobre } \Gamma_{D_\omega}, \\ \theta_\varepsilon = \bar{\theta} & \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ \alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{N_\omega}, \\ \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket \theta_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \omega_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \llbracket \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.131)$$

cuja formulação fraca é dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_1 + \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot \eta_1) = 0, \\ \int_{\Omega} (\beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot \nabla \eta_2) + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \omega_\varepsilon \eta_2 = \int_{\Omega} f_\varepsilon \eta_2, \end{array} \right. \quad (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{H}(\Omega). \quad (5.132)$$

### 5.3.1 Existência da Derivada Topológica

Com o intuito de mostrar (Teorema 5.5) a existência da DT, novamente é necessário mostrar a continuidade da função com relação ao parâmetro  $\varepsilon$ .

**Teorema 5.5** *Sejam  $(\theta, \omega)$  e  $(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$  soluções dos problemas (5.127) e (5.131), respectivamente. Então, tem-se que:*

$$\|\theta_\varepsilon - \theta\| \leq C\varepsilon \quad (5.133)$$

$$\|\omega_\varepsilon - \omega\| \leq C\varepsilon, \quad (5.134)$$

onde  $C$  é uma constante independente do parâmetro  $\varepsilon$ .

#### **Demonstração.**

Subtraindo (5.129) de (5.132), tem-se para todo  $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{H}(\Omega)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} ((\alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) - \alpha M(\theta)) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} (\beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega)) \cdot \eta_1 = 0 \\ \int_{\Omega} (\beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega)) \cdot \nabla \eta_2 + \int_{\Omega} k(\rho_\varepsilon \omega_\varepsilon - \rho \omega) \eta_2 = - \int_{\Omega} (f_\varepsilon - f) \eta_2. \end{array} \right. \quad (5.135)$$

Utilizando a notação  $e_\theta = \theta_\varepsilon - \theta$  e  $e_\omega = \omega_\varepsilon - \omega$ , teremos

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot \eta_1 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \eta_1 \quad (5.136)$$

e também

$$\int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot \nabla \eta_2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k e_\omega \eta_2 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \nabla \eta_2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega \eta_2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta_2, \quad (5.137)$$

Considerando como funções teste,  $\eta_1 = e_\theta$  e  $\eta_2 = e_\omega$ , em (5.136) e (5.137), respectivamente, teremos as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot e_\theta = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot e_\theta, \quad (5.138)$$

$$\int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot \nabla e_\omega + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |e_\omega|^2 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot \nabla e_\omega + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega e_\omega + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f e_\omega. \quad (5.139)$$

Subtraindo (5.139) de (5.138), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |e_\omega|^2 \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s e_\theta \\ & \quad - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega e_\omega - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f e_\omega. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, juntamente com a desigualdade triangular, teremos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |e_\omega|^2 \\ & \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) \\ & \leq C_1 \varepsilon \left( \|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)} + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (5.141)$$

onde foi utilizada a regularidade elíptica de  $\theta$  e  $\omega$ . Agora, da coercividade da forma bilinear no lado esquerdo da desigualdade acima, segue:

$$\begin{aligned} c \left( \|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)}^2 + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)}^2 \right) & \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon M(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta \\ & \quad + \int_{\Omega} \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |e_\omega|^2. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \left( \|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)} + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)} \right)^2 &\leq c \left( \|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)}^2 + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)}^2 \right) \\ &\leq C_1 \varepsilon \left( \|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)} + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (5.143)$$

Finalmente, tem-se

$$\|e_\theta\|_{\mathcal{H}^1(B_\varepsilon)} + \|e_\omega\|_{H^1(B_\varepsilon)} \leq \frac{2C_1}{c} \varepsilon = C\varepsilon, \quad (5.144)$$

onde a constante  $C$  é independente do parâmetro  $\varepsilon$ .  $\square$

### 5.3.2 Cálculo da Derivada Topológica

Nesta seção são calculadas as derivadas topológicas dos funcionais que vão compor o funcional de forma. Sendo assim, serão considerados dois funcionais auxiliares, a saber,  $\mathcal{A}(\theta, \omega)$  e  $\mathcal{B}(\omega)$ .

#### 5.3.2.1 Parte I

Inicialmente é calculada a derivada topológica do funcional  $\mathcal{A}(\theta, \omega)$ . São determinados o problemas exterior, a equação ajunta e os termos remanescentes.

**Teorema 5.6** *Considere os funcionais, dados por*

$$\mathcal{A}(\theta, \omega) = \int_{\Omega} \left( \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot (\theta - \nabla \omega) \right), \quad (5.145)$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = \int_{\Omega} \left( \alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon) \right). \quad (5.146)$$

e ainda o problema adjunto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(p_1) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \int_{\Omega} \rho k q_1 \eta_2 = \\ - 2 \int_{\Omega} \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 - 2 \int_{\Omega} \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2). \end{aligned} \quad (5.147)$$

Então a DT do funcional de forma  $\mathcal{A}$  é dada por,

$$\begin{aligned} D_T(\mathcal{A})(\hat{x}) = \mathcal{T}_M M(\theta(\hat{x})) \cdot \nabla^s (p_1(\hat{x}) + \theta(\hat{x})) + \\ \mathbf{T}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\theta(\hat{x}), \omega(\hat{x})) \left( (p_1 - \nabla q_1) + (\theta - \nabla \omega) \right) - \\ (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_1 + (1 - \gamma_f) f q_1. \end{aligned} \quad (5.148)$$

**Demonstração.**

Fazendo a diferença entre os funcionais (ver equações de (5.30) a (5.33)), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{A}(\theta, \omega) = 2 \int_{\Omega} \rho k \omega e_\omega - 2 \int_{\Omega} f e_\omega - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon^2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \omega_\varepsilon + \\ \int_{\Omega} f e_\omega + \mathcal{E}_1(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.149)$$



Considerando  $\eta_1 = e_\theta$  e  $\eta_2 = e_\omega$  na equação adjunta (5.147), teremos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(p_1) \cdot \nabla^s e_\theta + \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho k q_1 e_\omega = \\ - 2 \int_{\Omega} \alpha M(\theta, \omega) \cdot \nabla^s e_\theta - 2 \int_{\Omega} \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) (e_\theta - \nabla e_\omega). \end{aligned} \quad (5.150)$$

É possível observar que a formulação fraca (5.129) pode ser escrita da seguinte forma,

$$-2 \int_{\Omega} \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 - 2 \int_{\Omega} \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) = -2 \int_{\Omega} \rho k \omega \eta_2 + 2 \int_{\Omega} f \eta_2. \quad (5.151)$$

Substituindo  $\eta_1 = e_\theta$  e  $\eta_2 = e_\omega$  em (5.151) e posteriormente comparando com (5.150), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(p_1) \cdot \nabla^s e_\theta + \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho k q_1 e_\omega = \\ - 2 \int_{\Omega} \rho k \omega e_\omega + 2 \int_{\Omega} f e_\omega. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Subtraindo a equação (5.129) de (5.132) e considerando  $\eta_1 = p_1$  e  $\eta_2 = q_1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(e_\theta) \cdot \nabla^s p_1 + \int_{\Omega} \beta \mathbb{Q}(e_\theta, e_\omega) (p_1 - \nabla q_1) - \int_{\Omega} \rho k e_\omega q_1 = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s p_1 + \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot (p_1 - \nabla q_1) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon q_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q_1 \end{aligned} \quad (5.153)$$

De (5.152) e (5.153), tem-se

$$\begin{aligned} - 2 \int_{\Omega} \rho k \omega e_\omega + 2 \int_{\Omega} f e_\omega = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(p_1) \cdot \nabla^s (\theta_\varepsilon) + \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon q_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q_1. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Para calcular a derivada topológica (3.4), é necessário conhecer o comportamento assintótico das funções  $\theta_\varepsilon$  e  $\omega_\varepsilon$  em relação ao parâmetro  $\varepsilon$ . A fim de resolver a diferença entre os funcionais  $\mathcal{A}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$  e  $\mathcal{A}(\theta, \omega)$  dada em (5.149), serão considerados os seguintes *ansatz*, para  $\theta_\varepsilon$  e  $\omega_\varepsilon$ :

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x) = \theta(x) + \varepsilon \phi(x/\varepsilon) + \tilde{\theta}_\varepsilon(x) \\ \omega_\varepsilon(x) = \omega(x) + \varepsilon z(x/\varepsilon) + \tilde{\omega}_\varepsilon(x). \end{cases} \quad (5.155)$$

As funções  $\theta$  e  $\omega$  são soluções do problema não perturbado (5.127), enquanto que as funções  $\phi$  e  $z$  são soluções dos problemas exteriores e  $\tilde{\theta}_\varepsilon$  e  $\tilde{\omega}_\varepsilon$  são os resíduos. Para construir os problemas exteriores substitui-se os *ansatz* em (5.131). Dessa forma vamos obter,

$$\begin{cases} -\varepsilon \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{C} \nabla^s \phi) - \operatorname{div}(\rho_\varepsilon M(\tilde{\theta}_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) + \varepsilon \rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\phi, z) = 0, \\ -\varepsilon \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \nabla z) + \varepsilon \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \phi) + \rho_\varepsilon \mathbb{K} z + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon \mathbb{K} \tilde{\omega}_\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (5.156)$$

Considerando a mudança de variável  $x = \varepsilon y$ , tem-se que  $\nabla_y z(y) = \varepsilon \nabla z(x/\varepsilon)$  e  $\nabla_y^s \phi(y) = \varepsilon \nabla^s \phi(x/\varepsilon)$ . Então podemos escrever,

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y(\rho_\varepsilon \mathbb{C} \nabla_y^s \phi) - \operatorname{div}(\rho_\varepsilon M(\tilde{\theta}_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) + \varepsilon \rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\phi, z) = 0, \\ -\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \nabla_y z) + \varepsilon \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \phi) + \rho_\varepsilon \mathbb{K} z + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon \mathbb{K} \tilde{\omega}_\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (5.157)$$

Para construção do problema exterior, que é independente de  $\varepsilon$ , utiliza-se os termos de menor ordem de  $\varepsilon$ . Logo, na variável  $y$  as parcelas que compõem os problemas exteriores são,

$$\operatorname{div}_y(\rho_\varepsilon \mathbb{C} \nabla_y^s \phi(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div}_y(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \nabla_y z(y)) = 0 \quad (5.158)$$

Considerando as condições de transmissão sobre  $B_\varepsilon$ , descritas em (5.131), segue que:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta)(\hat{x}) \mathbf{n} + \llbracket \rho_\varepsilon \mathbb{C} \nabla_y^s \phi \rrbracket \mathbf{n} + \\ (1 - \gamma_\alpha) \alpha (M(\theta) - M(\theta)(\hat{x})) \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon M(\tilde{\theta}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n} = 0, \end{aligned} \quad (5.159)$$

e

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega)(\hat{x}) \cdot \mathbf{n} - \llbracket \beta_\varepsilon \mathbb{K} \nabla_y z \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \varepsilon (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{K} \phi \cdot \mathbf{n} + (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{K} z + \\ (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{K} \tilde{\omega}_\varepsilon + (1 - \gamma_\beta) \beta (\mathbb{Q}(\theta, \omega) - \mathbb{Q}(\theta, \omega)(\hat{x})) \cdot \mathbf{n} + \llbracket \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Em seguida, agrupamos os termos de mesma ordem de  $\varepsilon$  e assim construímos os problemas na variável  $y$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \mathbb{C} \nabla_y^s \phi) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ \phi \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty, \\ \llbracket \phi \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \mathbb{C} \nabla_y^s \phi \rrbracket \cdot \mathbf{n} = g_\theta \end{array} \right\} \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.161)$$

onde  $g_\theta = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta)(\hat{x}) \mathbf{n}$ . De forma análoga, a função  $z$  é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\beta_\varepsilon \mathbb{K} \nabla_y z) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ z \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty, \\ \llbracket z \rrbracket = 0 \\ \llbracket \beta_\varepsilon \mathbb{K} \nabla_y z \rrbracket \cdot \mathbf{n} = g_\omega \end{array} \right\} \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.162)$$

onde  $g_\omega = (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta, \omega)(\hat{x}) \cdot \mathbf{n}$ .

Os resíduos  $(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)$  são soluções do problema de valor de contorno, de forma que

as discrepâncias introduzidas pelas funções  $\phi$  e  $z$  são compensadas. Sendo assim,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon M(\tilde{\theta}_\varepsilon) - \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)) = f_1 & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)) + \rho_\varepsilon k \omega_\varepsilon = f_2 & \text{em } \Omega, \\ M(\tilde{\theta}_\varepsilon) & = \mathbb{C} \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon, \\ \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) & = \mathbb{K}(\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{\omega}_\varepsilon), \\ \tilde{\theta}_\varepsilon & = \varepsilon^2 \theta_0 \quad \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ \tilde{\omega}_\varepsilon & = \varepsilon^2 \omega_0 \quad \text{sobre } \Gamma_{D_\omega}, \\ M(\tilde{\theta}_\varepsilon) \mathbf{n} & = \varepsilon^2 M(\theta_0) \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} & = \varepsilon^2 \mathbb{Q}(\theta_0, \omega_0) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_{N_\omega}, \\ \left[ \alpha_\varepsilon M(\tilde{\theta}_\varepsilon) \right] \mathbf{n} & = g_1 \\ \left[ \beta_\varepsilon \mathbb{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon) \right] \cdot \mathbf{n} & = g_2 \\ \left[ \tilde{\theta}_\varepsilon \right] & = 0 \\ \left[ \tilde{\omega}_\varepsilon \right] & = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.163)$$

onde  $\omega_0 = -\varepsilon^{-1} z|_{\partial\Omega}$ ,  $\theta_0 = -\varepsilon^{-1} \phi|_{\partial\Omega}$ ,  $g_1 = -(1 - \gamma_\alpha) \alpha (M(\theta) - M(\theta)(\hat{x})) \mathbf{n}$ ,  $g_2 = \tilde{g}_h + \varepsilon \tilde{g}_p$ , com  $\tilde{g}_h = -(1 - \gamma_\beta) \beta (\mathbb{Q}(\theta, \omega) - \mathbb{Q}(\theta, \omega)(\hat{x})) \cdot \mathbf{n}$  e  $\tilde{g}_p = -\mathbb{K} \phi(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  e ainda  $f_1 = \varepsilon \rho_\varepsilon \mathbb{Q}(\phi, z)$  e  $f_2 = \varepsilon \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbb{K} \phi)$ .

Substituindo (5.155) em (5.154), obtemos

$$\begin{aligned} -2 \int_\Omega \rho k \omega e_\omega + 2 \int_\Omega f e_\omega &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s p_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\phi) \cdot \nabla^s p_1 + \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) (\theta - \nabla \omega) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) (\phi - \nabla z) - \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q_1 + \sum_{i=2}^3 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.164)$$

É possível observar que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega f e_\omega &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \omega - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta - \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) (\theta - \nabla \omega) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho \omega \omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.165)$$

Agora, substituindo (5.164) e (5.165) em (5.149),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{A}(\theta, \omega) &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s p_1 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\phi) \cdot \nabla^s p_1 - \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) (\theta - \nabla \omega) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathbb{Q}(p_1, q_1) (\phi - \nabla z) + \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_1 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q_1 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega^2 + \\ &\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \omega + \int_\Omega f e_\omega + \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.166)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{A}(\theta, \omega) &= \pi\varepsilon^2 \left( \mathcal{T}_M M(\theta(\hat{x})) \cdot \nabla^s(p_1(\hat{x}) + \theta(\hat{x})) + \right. \\ &\quad \left. \beta \mathbf{T}_Q \mathcal{Q}(\theta(\hat{x}), \omega(\hat{x})) \left( (p_1 - \nabla q_1) + (\theta - \nabla \omega) \right) - \right. \\ &\quad \left. (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_1 + (1 - \gamma_f) f q_1 \right) + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho k (\omega_\varepsilon - \omega)^2, \quad (5.168)$$

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(p_1) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon, \quad (5.169)$$

$$\mathcal{E}_3(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \mathcal{Q}(p_1, q_1) (\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{\omega}_\varepsilon), \quad (5.170)$$

$$\mathcal{E}_4(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega (\omega_\varepsilon - \omega), \quad (5.171)$$

$$\mathcal{E}_5(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (\omega_\varepsilon - \omega)^2, \quad (5.172)$$

$$\mathcal{E}_6(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \left( M(p_1) \cdot \nabla^s \theta - M(p_1(\hat{x})) \cdot \nabla^s (\theta)(\hat{x}) \right), \quad (5.173)$$

$$\mathcal{E}_7(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \left( M(p_1) \cdot \nabla^s \phi - M(p_1(\hat{x})) \cdot \nabla^s (\phi)(\hat{x}) \right), \quad (5.174)$$

$$\mathcal{E}_8(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \left( \mathcal{Q}(p_1, q_1) \cdot (\theta - \nabla \omega) - \mathcal{Q}(p_1, q_1) \cdot (\theta - \nabla \omega)(\hat{x}) \right), \quad (5.175)$$

$$\mathcal{E}_9(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta \left( \mathcal{Q}(p_1, q_1) \cdot (\theta - \nabla z) - \mathcal{Q}(p_1, q_1) \cdot (\theta - \nabla z)(\hat{x}) \right), \quad (5.176)$$

$$\mathcal{E}_{10}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) k (\omega^2 - \omega^2(\hat{x})). \quad (5.177)$$

Para o caso de uma perturbação (inclusão) circular com a propriedade isotrópica e homogênea, SALES et al. (2013), apresenta as soluções para os problemas exteriores (5.161) e (5.162). Essas soluções são adaptações das ideias apresentadas por Novotny e Sokolowski (2013). Utilizando ainda o teorema de Eshelby [43, 44], tem-se a seguinte representação para a solução de (5.161),

$$\mathbb{Q} \nabla_y^s \phi(y)|_{B_1} = \mathcal{T} M(\theta)(\hat{x}), \quad (5.178)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o tensor isotrópico de quarta ordem dado por:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \gamma_\alpha \alpha_2} \left( 2\alpha_2 \mathbb{I} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 + \gamma_\alpha \alpha_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (5.179)$$

e para a solução (5.162),

$$\mathbf{K} \nabla_y z(y)|_{B_1} = \mathbf{T} \mathcal{Q}(\theta, \omega)(\hat{x}), \quad (5.180)$$

onde  $\mathbf{T}$  é um tensor isotrópico de segunda ordem e pode ser escrito como:

$$\mathbf{T} = -\frac{1 - \gamma_\beta}{1 + \gamma_\beta}. \quad (5.181)$$

E ainda,

$$\mathcal{T}_M = \alpha(\mathcal{T} + \mathbb{I}) \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_Q = \beta(\mathbf{T} + \mathbf{I}), \quad (5.182)$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}. \quad (5.183)$$

Portanto, pela definição (3.2), identificamos a derivada topológica  $D_T(\mathcal{A})$ , dada por

$$\begin{aligned} D_T(\mathcal{A})(\hat{x}) = & \mathcal{T}_M M(\theta(\hat{x}) \cdot \nabla^s(p_1(\hat{x}) + \theta(\hat{x})) + \\ & \mathbf{T}_Q \mathcal{Q}(\theta(\hat{x}), \omega(\hat{x})) \left( (p_1 - \nabla q_1) + (\theta - \nabla \omega) \right) - \\ & (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_1 + (1 - \gamma_f) f q_1. \end{aligned} \quad (5.184)$$

### 5.3.2.2 Parte II

Nesta segunda subseção, será realizado um estudo seguindo os mesmos passos da subseção anterior. Porém, considera-se novos funcionais auxiliares (definidos no domínio não perturbado e no domínio perturbado) para o cálculo da derivada topológica.

Aqui consideramos os funcionais, dados por

$$\mathcal{B}(\theta, \omega) = \int_{\Omega} \rho k \omega^2 \quad (5.185)$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \omega_\varepsilon^2. \quad (5.186)$$

Fazendo a diferença entre (5.185) e (5.186), obtemos

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{B}(\theta, \omega) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \omega_\varepsilon - \int_{\Omega} \rho k \omega. \quad (5.187)$$

De forma análoga ao que obtemos em (5.32),

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{B}(\theta, \omega) = 2 \int_{\Omega} \rho k (\omega_\varepsilon - \omega) \omega - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon^2 + \underbrace{\int_{\Omega} \rho k (\omega_\varepsilon - \omega)^2}_{\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)}. \quad (5.188)$$

É possível observar que,

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon^2 = (1 - \gamma_\rho) \pi \varepsilon^2 \rho k \omega^2(\hat{x}) + \sum_{i=12}^{14} \mathcal{E}_i(\varepsilon), \quad (5.189)$$

onde,

$$\mathcal{E}_{12}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (\omega_\varepsilon - \omega)^2, \quad (5.190)$$

$$\mathcal{E}_{13}(\varepsilon) = 2 \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (\omega_\varepsilon - \omega) \omega, \quad (5.191)$$

$$\mathcal{E}_{14}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (\omega^2 - \omega^2(\hat{x})). \quad (5.192)$$

Utilizando a equação adjunta, dada por

$$\int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} \beta Q(p, q) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \int_{\Omega} \rho k q \eta_2 = -2 \int_{\Omega} \rho k \omega \eta_2, \quad (5.193)$$

e considerando  $\eta_1 = e_\theta$  e  $\eta_2 = e_\omega$ , teremos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla^s (e_\theta) - \int_{\Omega} \beta Q(p, q) \cdot (e_\theta - \nabla e_\omega) \\ + \int_{\Omega} \rho k q e_\omega = 2 \int_{\Omega} \rho k \omega e_\omega. \end{aligned} \quad (5.194)$$

Da equação (5.132), podemos obter

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} \beta Q(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \int_{\Omega} \rho k \omega_\varepsilon \eta_2 = \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta Q(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon \eta_2 - \int_{\Omega} f \eta_2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta_2. \end{aligned} \quad (5.195)$$

Subtraindo a forma fraca (5.129) do problema não perturbado da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(e_\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{\Omega} \beta Q(e_\theta, e_\omega) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \int_{\Omega} \rho k e_\omega \eta_2 = \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta Q(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \cdot (\eta_1 - \nabla \eta_2) - \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon \eta_2 + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta_2. \end{aligned} \quad (5.196)$$

Considerando  $\eta_1 = p$  e  $\eta_2 = q$  na equação anterior e ainda o fato do operador ser adjunto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha M(p) \cdot \nabla^s e_\theta + \int_{\Omega} \beta Q(p, q) (e_\theta - \nabla e_\omega) - \int_{\Omega} \rho k q e_\omega = \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(p) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta Q(p, q) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon) - \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon q + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Comparando as equações (5.194) e (5.197), temos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \rho k \omega e_\omega = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(p) \cdot \nabla^s (\theta_\varepsilon) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta Q(p, q) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon) \\ + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q. \end{aligned} \quad (5.198)$$

Substituindo a equação anterior em (5.188), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{B}(\theta, \omega) = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha M(p) \cdot \nabla^s (\theta_\varepsilon) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\beta) \beta Q(p, q) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla \omega_\varepsilon) \\ + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega_\varepsilon^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q + \mathcal{E}_{16}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.199)$$

Utilizando o *ansatz* (5.155) em (5.199), e calculando explicitamente as integrais na bola  $B_\varepsilon$ , obtemos

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{B}(\theta, \omega) = \pi\varepsilon^2 \left( \mathcal{T}_M M(p(\hat{x})) \cdot \nabla^s(\theta(\hat{x})) + \mathbf{T}_Q \mathcal{Q}(p(\hat{x}), q(\hat{x}))(\theta(\hat{x}) - \nabla\omega(\hat{x})) - (1 - \gamma_\rho)\rho k\omega(q + \omega)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)fq(\hat{x}) \right). \quad (5.200)$$

Portanto, determinamos a derivada topológica do funcional  $\mathcal{B}$ , dada por

$$D_T \mathcal{B}(\hat{x}) = \mathcal{T}_M M(\theta(\hat{x})) \cdot \nabla^s(p(\hat{x})) + \mathbf{T}_Q \mathcal{Q}(p(\hat{x}), q(\hat{x}))(\theta(\hat{x}) - \nabla\omega(\hat{x})) - (1 - \gamma_\rho)\rho k\omega(q + \omega)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)fq(\hat{x}). \quad (5.201)$$

### 5.3.3 Problema de Autovalor: Sistema Acoplado

Nesta seção, será definido o problema de autovalor ( $\eta$ ) para o modelo de placas de Reissner-Mindlin e apresentar a forma variacional desse autovalor. Utilizando resultados das seções anteriores, vamos determinar a derivada topológica do primeiro autovalor, para que o funcional possa ser otimizado.

Vamos considerar, no problema formulado em (5.127),  $k = \eta$ , e a função custo utilizada é a forma variacional do primeiro autovalor, dada por

$$\lambda_1 = \inf_{(\theta, \omega) \in H^1 \times H^1} \frac{\int_\Omega \alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \beta \mathcal{Q}(\theta, \omega) \cdot (\theta - \nabla\omega)}{\int_\Omega \rho \omega^2} = \frac{\mathcal{A}(\theta, \omega)}{\mathcal{B}(\theta, \omega)}. \quad (5.202)$$

Da equação anterior, podemos escrever

$$\mathcal{A}(\theta, \omega) = \lambda_1 \mathcal{B}(\theta, \omega). \quad (5.203)$$

Definimos então as formulações fracas dos problemas não perturbado e perturbado, respectivamente

$$\int_\Omega (\alpha M(\theta) \cdot \nabla^s \eta_1 + \beta \mathcal{Q}(\theta, \omega)(\eta_1 - \nabla\eta_2)) = \int_\Omega \rho \lambda \omega \eta_2 \quad (5.204)$$

$$\int_\Omega (\alpha_\varepsilon M(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_1 + \beta_\varepsilon \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, \omega_\varepsilon)(\eta_1 - \nabla\eta_2)) = \int_\Omega \rho_\varepsilon \lambda_\varepsilon \omega_\varepsilon \eta_2. \quad (5.205)$$

Sabemos ainda, por (5.111), que

$$D_T(\lambda_1) = \frac{(D_T \mathcal{A}) - \eta D_T(\mathcal{B})}{\mathcal{B}(\theta, \omega)}. \quad (5.206)$$

Definimos também novas equações adjuntas, relacionadas aos funcionais  $\mathcal{A}(\theta, \omega)$  e  $\mathcal{B}(\theta, \omega)$ , respectivamente

$$\int_\Omega \alpha M(p_2) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_\Omega \beta \mathcal{Q}(p_2, q_2) \cdot (\eta_1 - \nabla\eta_2) - \int_\Omega \rho \eta q_2 \eta_2 = -2 \int_\Omega \lambda_1 \rho \omega \eta_2 \quad (5.207)$$

$$\int_\Omega \alpha M(p_3) \cdot \nabla^s \eta_1 + \int_\Omega \beta \mathcal{Q}(p_3, q_3) \cdot (\eta_1 - \nabla\eta_2) - \int_\Omega \rho \eta q_3 \eta_2 = -2 \int_\Omega \rho \omega \eta_2. \quad (5.208)$$

Considerando  $\eta_1 = p_3$  e  $\eta_2 = q_3$  em (5.207),  $\eta_1 = p_2$  e  $\eta_2 = q_2$  em (5.208) e subtraindo as equações obtidas, teremos

$$-2 \int_{\Omega} \rho \omega (-q_2 + \lambda q_3) = 0, \quad \text{isto é,} \quad q_2 = \lambda q_3. \quad (5.209)$$

De forma análoga ao que obtemos nas equações (5.184) e (5.201),

$$D_T \mathcal{A} = \alpha \mathbb{P}M(\theta) \cdot (\nabla(\theta + p_2))^s + \beta PQ(\theta, \omega) \cdot ((\theta + p_2) - \nabla(\omega + q_2)) \\ - (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega q_2 + (1 - \gamma_f) f q_2 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.210)$$

$$D_T \mathcal{B} = \alpha \mathbb{P}M(\theta) \cdot (\nabla p_3)^s + \beta PQ(\theta, \omega) \cdot (p_3 - \nabla q_3) \\ - (1 - \gamma_\rho) \rho k \omega (\omega + q_3) + (1 - \gamma_f) f q_3 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.211)$$

Portanto, utilizando a relação (5.209), nas equações acima e substituindo em (5.206), obtemos a derivada topológica

$$D_T(\lambda_1) = - \frac{\alpha \mathbb{P}M(\theta) \cdot (\nabla \theta)^s + \beta PQ(\theta, \omega) \cdot (\theta - \nabla \omega) + (1 - \gamma_\rho) \rho \lambda_1 |\omega|^2}{\int_{\Omega} \rho |\omega|^2}. \quad (5.212)$$

Em particular,

$$D_T(\lambda_1^{-1}) = - \frac{\alpha \mathbb{P}M(\theta) \cdot (\nabla \theta)^s + \beta PQ(\theta, \omega) \cdot (\theta - \nabla \omega) + (1 - \gamma_\rho) \rho \lambda_1 |\omega|^2}{\lambda_1^2 \int_{\Omega} \rho |\omega|^2}, \quad (5.213)$$

### 5.3.4 Estimativas dos Termos Remanescentes

Será considerada nesta subseção as estimativas dos termos remanescentes da análise assintótica topológica para o problema de placas quando o funcional de forma é dado pelo primeiro autovalor, ou seja, é estimado  $\mathcal{E}$  dados pelas expansões assintóticas (5.164) e (5.200).

Primeiramente é possível observar que, os termos  $\mathcal{E}_i(\varepsilon), i = 1, \dots, 4, \mathcal{E}_8(\varepsilon)$  e  $\mathcal{E}_i(\varepsilon), i = 15, \dots, 19$  são residuais, de acordo com as desigualdades (4.126), (4.127), (4.128) e (4.129).

As estimativas dos demais termos residuais podem ser encontradas em [99]. Tais estimativas dependem essencialmente da regularidade elíptica do modelo matemático e também das estimativas apresentada no Teorema a seguir,

**Teorema 5.7** *Se  $(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon)$  é solução de (5.163). Então, as estimativas  $\|\tilde{\theta}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  e  $\|\tilde{\omega}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  são verdadeiras.*

## 5.4 Exemplos Numéricos: Maximização do Primeiro Autovalor

Nos exemplos numéricos são considerados os dois problemas (Kirchhoff e Reissner-Mindlin) sobre um domínio  $\mathcal{D}$ , dado por um quadrado de dimensões  $(0, 1) \times (0, 1)$  m<sup>2</sup>.



Os parâmetros de contraste  $\gamma_\alpha = \gamma_\beta = \gamma_\rho = 10^{-3}$ , o módulo Young é  $E = 210$  GPa, Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , a espessura da placa é  $h = 0,05$  m. Consideramos dois casos, que são: uma massa concentrada no centro da placa e quatro massas concentradas localizadas no centro de cada quadrante da placa. Os problemas governados pelo modelo de Kirchhoff são rotulados como casos K1 e K2 com uma e quatro massas concentradas, respectivamente. Os problemas governados pela teoria de Reissner-Mindling são rotulados como casos R1 e R2 também com uma e quatro massas concentradas, respectivamente. O parâmetro de penalidade é definido como  $\mu = 1,2$  para os casos K1 e R1 e  $\mu = 1,4$  para os casos K2 e R2. A massa concentrada não estrutural é representada por pontos pretos, como mostrado na Fig. 5.6.

Novamente dois critérios de parada são considerados no algoritmo atual:  $\theta < 2^\circ$ , que é o ângulo entre a função *level-set* e a DT e  $\kappa < 10^{-3}$ , ( $\kappa \in (0, 1]$ ). Em todos os exemplos, o domínio é discretizado usando elementos finitos triangulares lineares, resultando em uma malha uniforme inicial com 14.400 elementos e 7.321 nós. Para aumentar a precisão e a suavidade da topologia, são realizadas 3 etapas de refinamento uniforme na malha durante o processo iterativo, resultando em uma malha final com 921.600 elementos e 461.761 nós.

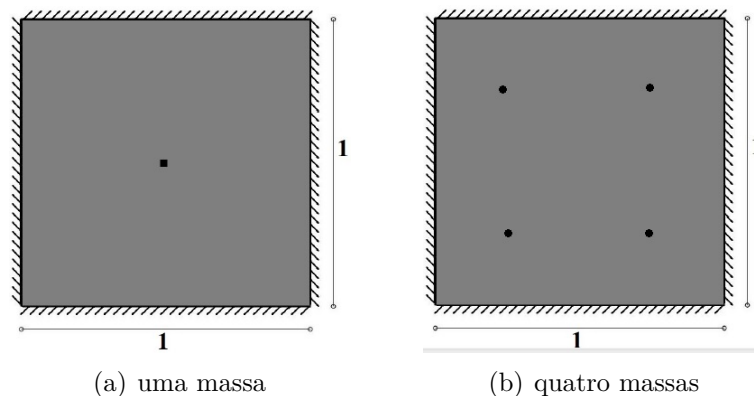


Figura 5.6 – Domínio inicial: uma massa (a) e quatro massas (b) concentradas, representadas por pontos pretos.

As topologias ótimas para o modelo considerando a hipótese de Kirchhoff, são mostradas na Fig. 5.7(a) e (b), respectivamente. Para a hipótese de Reissner-Mindlin, considerando as mesmas topologias iniciais e condições de contorno, as topologias finais são mostradas na Fig. 5.8(a) e (b), nos quais observa-se o efeito de cisalhamento na otimização topológica das placas.

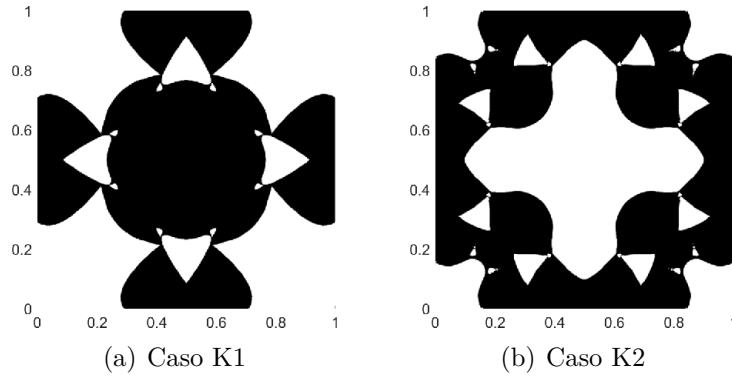


Figura 5.7 – Topologia final para o problema de Kirchhoff com uma massa concentrada (a) e quatro massas concentradas (b).

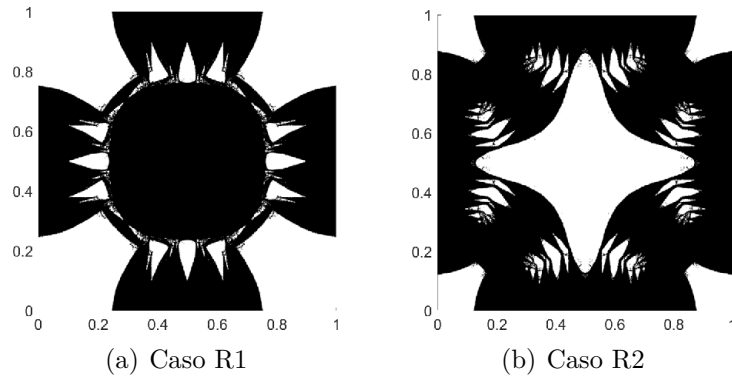


Figura 5.8 – Topologia final para o problema de Reissner-Mindlin com uma massa concentrada (a) e quatro massas concentradas (b).

Nos casos R1 e R2 (figuras 5.8 a-b), as linhas mais finas que surgem na estrutura da placa se devem a artefatos numéricos, sendo assim não há relação com a malha utilizada. No entanto, em todos os casos um mínimo local é atingido, ressaltando que  $\theta \approx 1^\circ$  e  $\theta \approx 2^\circ$  para os casos R1 e R2, respectivamente.

Na figura 5.9, é possível observar o histórico do primeiro autovalor normalizado  $\lambda_1/\lambda_1^0$ , de forma que  $\lambda_1^0$  é calculado para  $\mathcal{D} = \Omega$ . Tem-se ainda  $\lambda_1^0 = 425.68$  (caso K1),  $\lambda_1^0 = 785.47$  (caso K2),  $\lambda_1^0 = 382.18$  (caso R1),  $\lambda_1^0 = 649.96$  (caso R2). Na figura 5.10, o comportamento do segundo autovalor normalizado  $\lambda_1/\lambda_2$  é apresentado, de forma que é possível notar que não há multiplicidade de autovalores durante o processo iterativo. Para os exemplos R1 e R2, verifica-se um maior custo computacional, que se deve ao efeito do cisalhamento no processo de otimização topológica. Nas figuras 5.11 e 5.12 são apresentados o histórico da fração de volume final da placa e o histórico da função de forma, respectivamente. Ainda na figura 5.12, verifica-se que o comportamento da função de forma está relacionada com a quantidade e posições das massas concentradas e não com o modelo de placa considerado..

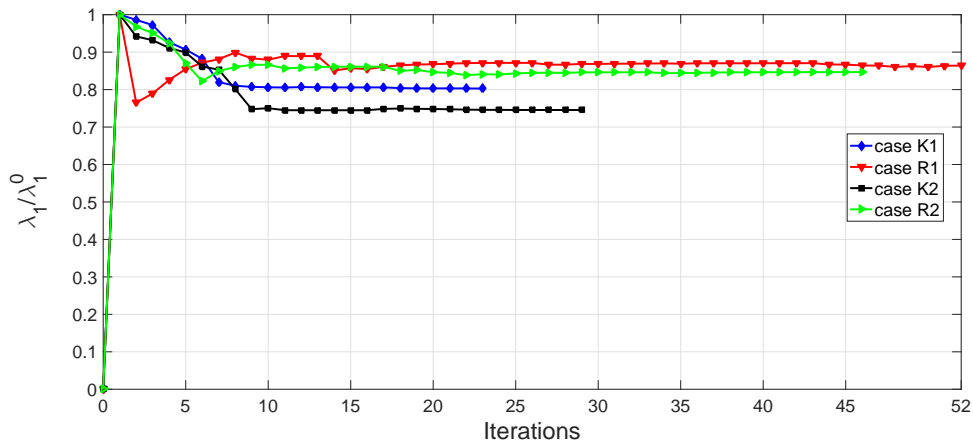


Figura 5.9 – Primeiro autovalor normalizado  $\lambda_1/\lambda_1^0$ .

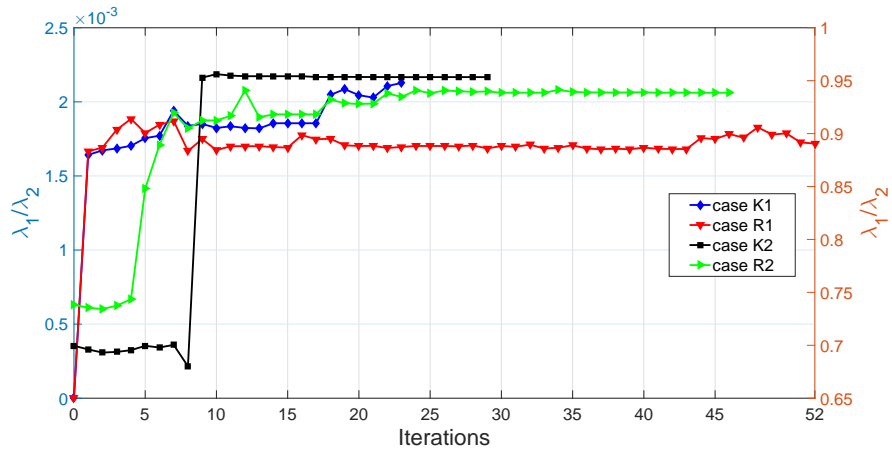


Figura 5.10 – Segundo autovalor normalizado  $\lambda_1/\lambda_2$ . Casos K1 e R1 no eixo esquerdo, casos K2 e R2 no eixo secundário direito.

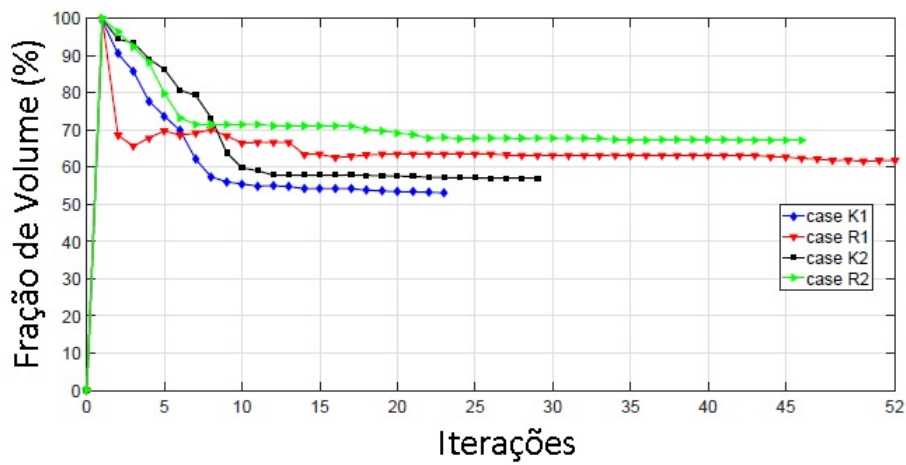


Figura 5.11 – Histórico da fração de volume

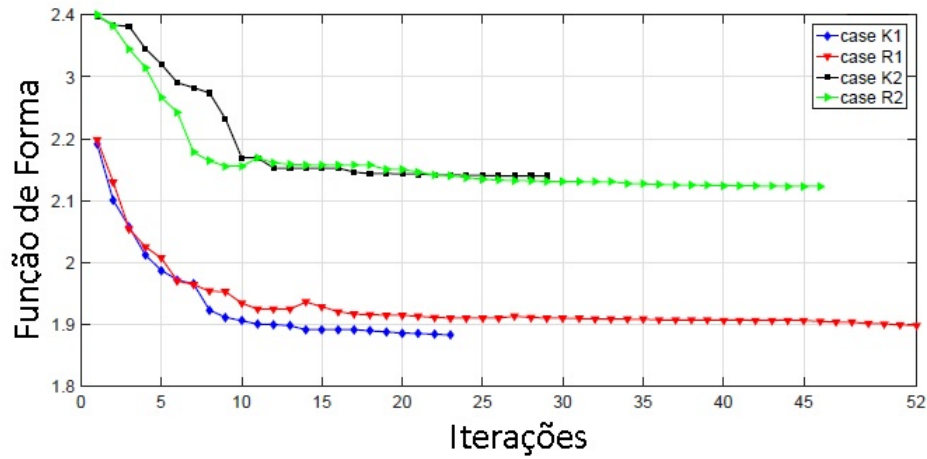


Figura 5.12 – Histórico da função custo

É importante ressaltar que metodologias diferentes para otimização topológica de placas, são encontradas na literatura, por exemplo, Liang et al. (2001), apresenta um método de otimização, baseado no Índice de Performance (IP), que se trata de um parâmetro adimensional que envolve, volume, densidade e tensões Máximas de Von Mises [63]. O resultado obtido, para a otimização da topologia da placa utilizando esse método, pode ser visto na figura 5.13(a). Khoza (2006), utilizando o método das assíntotas móveis (MAM), desenvolvido no trabalho de Svanberg [106], obtém a topologia otimizada 5.13(b). Para reproduzir tais exemplos utilizando a DT do primeiro autovalor, considera-se uma placa quadrada  $(0, 1) \times (0, 1)m^2$ , com uma massa concentrada no centro da placa, módulo de elasticidade  $E = 70GPa$ , Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , parâmetro de penalidade  $\mu = 0.45$  e espessura  $h = 0.05 m$ , a topologia final é apresentada na figura 5.13(c)

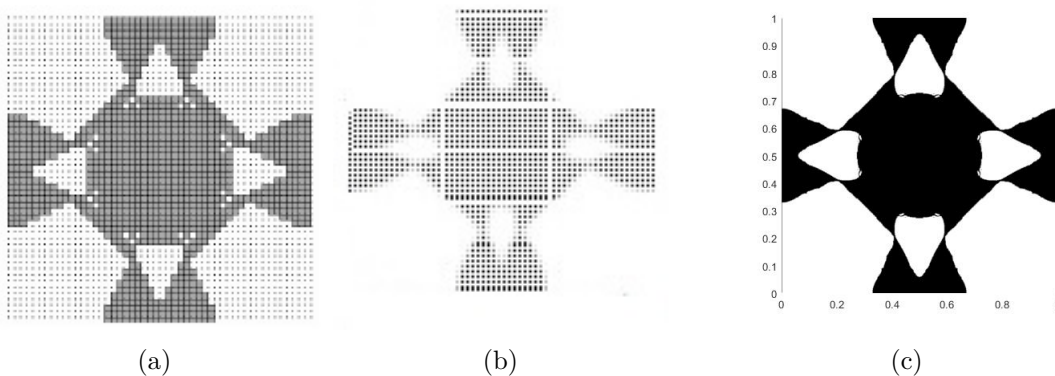


Figura 5.13 – Topologia final utilizando IP (a) MAM (b) e DT (c).

Ainda corroborando com os resultados obtidos nesse trabalho, utilizando a mesma metodologia, porém, considerando a derivada topológica associada a energia potencial total, Novotny e Sokolowski (2013) apresentam resultados de otimização topológica de placas regidas pelas hipóteses cinemáticas de Kirchhoff. Para a descrição das condições de contorno e propriedades material utilizadas, novamente considera-se uma placa quadrada

$(0, 1) \times (0, 1)m^2$ , com uma massa concentrada no canto superior direito da placa, módulo de elasticidade  $E = 1$ , Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , espessura  $h = 0.1 m$  e parâmetro de penalidade  $\mu = 1$ . Os resultados são apresentados na figura 5.14(a)-(b).

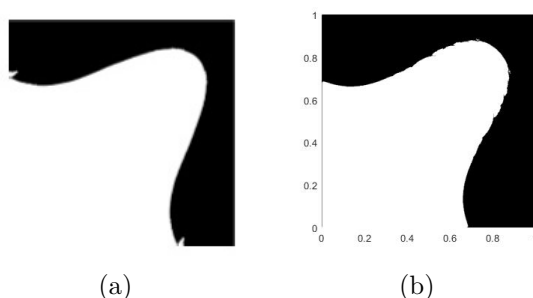


Figura 5.14 – Topologia otimizada utilizando a derivada topológica associada a Energia potencial total (a) e primeiro autovalor (b).

Neste capítulo, foi considerado a análise assintótica topológica da norma  $L^2$  e semi-normas  $H^2$  e  $H^1$  das soluções para os modelos de flexão placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, em relação à nucleação de inclusões dotadas de diferentes propriedades materiais. Em particular, argumentos sobre a existência da derivada topológica foram apresentados. As sensibilidades resultantes foram particularizadas para resolver um problema específico, ou seja, maximização do primeiro Autovalor de placas. Nos exemplos numéricos apresentados, os designs ótimos apresentaram primeira frequência natural maximizada. Vale destacar que para os modelos de placas em vibração livre o primeiro modo de vibração apresenta maiores deslocamentos, o que pode ser mais prejudicial para a estrutura, o que mostra a necessidade de maximizar o primeiro autovalor. Além disso, uma análise foi realizada comparando o primeiro e o segundo autovalor à medida que o processo iterativo evoluía. Não foi observada a ocorrência de multiplicidade de autovalores, eliminando assim qualquer presença de vibrações auto-excitadas.

## 6 Conclusão

Este trabalho objetivou essencialmente em calcular de forma explícita a DT de funcionais associados a modelos de trocadores de calor e placas. O resultado obtido é então utilizado para construir um algoritmo de otimização topológica baseado na DT, conjuntamente com o método de representação do domínio por função level-set. Posteriormente, são apresentados alguns exemplos numéricos evidenciando as potencialidades do método na otimização de topologias. Assim a DT se apresenta como uma ferramenta de grande versatilidade e com sua sólida base matemática, aliada às constantes pesquisas que resultam em maior eficiência com resultados cada vez melhores, vem tendo sua aplicação prática ampliada.

No problema Difusivo-Convectivo, relacionado ao projeto de trocadores de calor foi considerada nucleação de inclusões com diferentes propriedades materiais. O processo iterativo é iniciado com o domínio totalmente preenchido com material de alta condutividade térmica e durante o processo é substituído por um material de baixa condutividade térmica, até que as condições de parada do algoritmo sejam satisfeitas, obtendo um projeto ótimo. Foi possível observar ainda, maior sensibilidade à mudanças nas condições de contorno, propriedades do material e até mesmo na malha utilizada. Para o cálculo de DT é considerado um funcional de forma que ainda não encontrava-se na literatura, no qual considera-se a soma da energia potencial com a energia térmica (funcional energia modificado). As estimativas dos termos remanescentes são apresentadas com maiores detalhes.

No que diz respeito à literatura relacionada ao método da DT, o modelo da placas de Kirchhoff já foi extensivamente estudado do ponto de vista teórico e numérico. Contudo, é inovadora a utilização do primeiro autovalor como funcional de forma. Por outro lado, existem poucos trabalhos teóricos que tratam do modelo de placas Reissner-Mindlin. Em particular, apenas o funcional de forma energia foi considerado e nada pode ser encontrado do ponto de vista numérico. Neste caso, também de forma inovadora, considera-se a DT do primeiro autovalor associado ao modelo e alguns experimentos numéricos no contexto de maximização de autovalores são apresentados.

Vale ainda ressaltar que, nos problemas de autovalores, o projeto ótimo apresentou sua primeira frequência natural maximizada. É realizada uma análise com intuito de comparar o primeiro e o segundo autovalores à medida que o processo iterativo evolui. O

fenômeno de múltiplos autovalores não é observado, eliminando assim qualquer presença da não diferenciabilidade do operador considerado.

Em todos os exemplos numéricos um mínimo local foi alcançado. A tolerância numérica nos exemplos de trocadores de calor foi  $\theta < 1^\circ$  e nos exemplos de placas  $\theta < 3^\circ$ . Isso mostra a convergência do algoritmo e corrobora com a eficiência do método.

## 6.1 Trabalhos Publicados

Durante a elaboração da tese foram publicados quatro trabalhos, sendo dois em anais de congresso internacional e dois em periódicos indexados:

- **CARVALHO, F. S.**; RUSCHEINSKY, D. ; ANFLOR, C. T. M. ; NOVOTNY, A. A. . *Topological Derivative Applied in a Problem of Convection-Diffusion of a Heat Exchanger*. In: 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019, Uberlândia-MG. Proceedings of the 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019.
- RUSCHEINSKY, D. ; **CARVALHO, F. S.** ; ANFLOR, C. T. M. ; NOVOTNY, A. A.. *Topological Derivative Applied to the Eigenvalue Problem in a Membrane Structure*. In: 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019, Uberlândia-MG. Proceedings of the 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019.
- RUSCHEINSKY, D. ; **CARVALHO, F. S.** ; ANFLOR, CARLA ; NOVOTNY, A. A. . *Topological asymptotic analysis of a diffusive-convective-reactive problem*. ENGINEERING COMPUTATIONS, v. ahead-of-print, p. 1-24, 2020. (Fator de impacto: 1.322)
- **CARVALHO, F. S.**; RUSCHEINSKY, D. ; GIUSTI, S. M. ; ANFLOR, C. T. M. ; NOVOTNY, A. A. . *Topological Derivative-Based Topology Optimization of Plate Structures Under Bending Effects*. STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION (INTERNET), v. ahead-, p. 1-14, 2020. (Fator de impacto: 3.377)

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como proposta de continuidade deste trabalho, apresentam-se alguns tópicos, todos no contexto de Otimização Topológica,

1. Problema de flambagem de placas (Hipóteses de Kirchhoff e Reissner-Mindlin) sob compressão uniaxial, maximizando a carga crítica de flambagem;
2. Maximização (minimização) da distância entre autovalores consecutivos nos modelos de flexão de placas;
3. Trocadores de Calor, com imposição de condições de contorno (Dirichlet e Neumann) não-homogêneas na fronteira das inclusões.



# Referências

- [1] ALMEIDA, A.R.; COTTA, R. M. *Integral Transform Methodology for Convection-Diffusion problems in Petroleum Reservoir Engineering*. International Journal of Heat and Mass Transfer. Volume 38, Issue 18, December 1995, p. 3359-3367.
- [2] AMAD, A. A. S., LOULA A. F. D., NOVOTNY A. A. *A new method for topology design of electromagnetic antennas in hyperthermia therapy*. Applied Mathematical Modelling, 42, 209 - 222, (2017). 9
- [3] AMMARI, H., KANG, H., LEE, H., LIM, J. Boundary perturbations due to the presence of small linear cracks in an elastic body. Journal of Elasticity, 113:75-91, 2013.
- [4] AMIGO, R. C. R.; GIUSTI, S. M., NOVOTNY, A. A., SILVA, E. C. N., ; SOKOLOWSKI, J., *Optimum Design of Flexensional Piezoelectric Actuators into two Spatial Dimensions*. SIAM Journal on Control e Optimization, Vol. 54 (2), 760 - 790, (2016). 9
- [5] AMMARI, H.; KANG, H. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*. Lectures Notes in Mathematics 1846, Springer 2000. 1
- [6] AMMARI H., KHELIFI A. (2003) Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 82:749–842
- [7] AMSTUTZ, S. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique*. Ph.D.Thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, (2003). 7
- [8] AMSTUTZ, S. *Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE systems*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 85(4): 540-557,2006. 8
- [9] AMSTUTZ, S.; ANDRA H. *A new algorithm for topology optimization using a level-set method*. Journal of Computational Physics 2006; 216(2):573–588.
- [10] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A.A.; NETO, E.A.S.. *Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker–Prager stress constraints*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2012; 233–236:123–136.
- [11] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A.A. *Topological Asymptotic Analysis of the Kirchhoff Plate Bending Problem*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 17(3):705 - 721, 2011. 4, 8, 48, 60, 61

- [12] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A.; GOETHEM, N. V. *Topological Sensitivity Analysis for Elliptic Differential Operators of Order 2m*. Journal of Differential Equations, 256, p.1735-1770, 2014. 8
- [13] AMSTUTZ, S.; GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; NETO, E. A. S. *Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 84:733-756, 2010.
- [14] ANFLOR, C.T.M. *Otimização Evolucionária e Topológica em Problemas Governados pela equação de Poisson Empregando o Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007. 9
- [15] ANFLOR, C.T.M; GOULART, J.N.V.; MARCZAK, R.J. *Topological Optimization for Solids Under Heat and Mass Transfer Using Boundary Element*. Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, v. 65, p. 126-138, 2012. 9
- [16] ANFLOR, C.T.M.; MARCZAK, R. J. *A Boundary Element Approach for Topology Design in Diffusive Problems Containing Heat Sources*. International Journal of Heat and Mass Transfer. v. 52, p. 4604-4611, 2009.
- [17] ANFLOR, C. T. M.; TEOTÔNIO, K. L.; GOULART, J. N. V. *Structural optimization using the boundary element method and topological derivative applied to a suspension trailing*. Engineering Optimization, 50(10):1662-1680, 2018.
- [18] AULIG, N.; OLHOFER, M.. *Evolutionary Computation for Topology Optimization of Mechanical Structures: An Overview of Representations*. In IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2016), 1948–1955. Vancouver, BC: IEEE, 2016. 49
- [19] ANSARI, M.; KHAJEPOUR, A.; ESMAILZADEH, E. *Application of Level Set Method to Optimal Vibration Control of Plate Structures*. Journal of Sound and Vibration 332 (4): 687–700, 2013. 49
- [20] BALIGA, B. R.; TATANKAR, S. V. *A New Finite-Element Formulattion for Convection-Diffusion Problems*. Numerical Heat Transfer. Volume 3, p. 393-409, 2007.
- [21] BATOZ, J. L.; LARDEUR, P. *A Discrete Shear Triangular Nine d.o.f. Element for the Analysis of Thick to Very thin Plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 28, p.533 – 560, 1989. 15
- [22] BATOZ, J. L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. *A study of three-node triangular plate bending elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volumre 15, p. 1771 – 1812, 1980. 15
- [23] BENDSØE, M. P. *Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem*. Structure Optimization. 1:193-202, 1989. 7

- [24] BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using an Homogenization Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 71:197-224, 1988. 7, 12
- [25] BENDSØE, M. P.; OLHOFF, N.. *A Method of Design Against Vibration Resonance of Beams and Shafts*. Optimal Control Applications and Methods 6 (3): 191–200, 1985. 49
- [26] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Material interpolation schemes in topology optimization*. Archive of Applied Mechanics, v. 69, p. 635 – 654, 1999. 12
- [27] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [28] BEJAN, A.; TSATSARONIS, G.; MORAN, M. J. *Thermal Design and Optimization*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [29] BEJAN, A. *Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 40(4):799 - 816, 1997.
- [30] BOJCZUK, D.; MRÓZ, Z. *Topological Sensitivity and Finite Topology Modifications: Application to Optimization of Plates in Bending*. Structural Multidisciplinary Optimization. 39: 1-15, 2009. 8
- [31] BOJCZUK, D.; MRÓZ, Z. *Topological sensitivity derivative with respect to area, shape and orientation of an elliptic hole in a plate*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 45(2):153-169, 2012.
- [32] BONNET, M.; CORNAGGIA, R. *Higher order topological derivatives for three-dimensional anisotropic elasticity*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 51, 2069 - 2092, (2017). 9
- [33] BRENNER, S. C.; MONK, P.; SUN, J..  *$C^0$  Interior Penalty Galerkin Method for Biharmonic Eigenvalue Problems*. Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM, p. 3-15, 2015.
- [34] BREZIS, H. *Functional Analysis*, Masson, Paris (1983).
- [35] BURGER, M., HACKL, B., RING, W. *Incorporating topological derivatives into level set methods*. Journal of Computational Physics, 194(1), 344 - 362, (2004). 8
- [36] BRUGGI, M., TALIERCIO, A.. *Maximization of the Fundamental Eigenfrequency of Micropolar Solids Through Topology Optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization 46 (4): 549–560, 2012.
- [37] CAMPEÃO, D. E., GIUSTI, S. M., NOVOTNY, A.A. *Topology Design of plates Considering Different Volume Control Methods*. Engineering Computations, v.31, p.826-842, 2014. 8

- [38] CARDONE, G.; NAZAROV, S.A.; SOKOLOWSKI, J. *Asymptotic Analysis, Polarization Matrices, and Topological Derivatives for Piezoelectric Materials with Small Voids*. SIAM, Journal on Control and Optimization, 48(6), 3925–3961, 2010. [71](#)
- [39] CÉA, J.; GARREAU, S.; et al. *The shape and Topological Optimizations Connection*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188(4):713-726, 2000. [5](#), [7](#)
- [40] CZARNECKI, S.; LEWINSKI, T. *On minimum compliance problems of thin elastic plates of varying thickness*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1):17-31, 2013.
- [41] DBOUK, T. *A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization*. Applied Thermal Engineering, 112:841 - 854, 2017.
- [42] DÍAAZ, A. R.; KIKUCHI, N.. *Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 35 (7): 1487–1502, 1992. [49](#)
- [43] ESCHENAUER, H.A., OLHOFF, N. *Topology Optimization of Continuum Structures: A Review*. Applied Mechanics Reviews. 54:331-390, 2001. [5](#)
- [44] ESHELBY, J. D. *The determination of the elastic of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proceedings of the Royal Society: Section A, 241: 376-396, 1957. [79](#)
- [45] ESHELBY, J. D. *The elastic outside an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proceedings of the Royal Society: Section A, 252:561-569, 1959. [79](#)
- [46] ESCHENAUER, H.A., KOBELLEV, V.V. et al. *Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures*. Structural Optimization, 8:42-51, 1994. [5](#), [7](#)
- [47] FEIJÓO, R.; NOVOTNY, A.A.; TAROCO, E. *Derivada Topológica Via Análise de Sensibilidade à Mudança de forma na Otimização Topológica*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol.18, 4, 499-519 (2002).
- [48] FEIJÓO, R. A., *A new method in inverse scattering based on the topological derivative*. Inverse Problems, 20(6), 1819 - 1840, (2004). [8](#)
- [49] FERREIRA, A. D.; NOVOTNY, A. A., *A new non-iterative reconstruction method for the electrical impedance tomography problem*. Inverse Problems, 33, 1 - 27, (2017a). [9](#)
- [50] GAZZOLA, F.; GRUNAU, H. C.; SWEERS, G.. *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*. Springer, 2010. [68](#)
- [51] GESBORG-HANSEN, A.; BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 31(4):251 - 259, 2006.

- [52] GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. *Topological derivative for Steady-State Orthotropic Heat Diffusion Problem*. Structural and Multidisciplinary Optimization, v.40, p.53-64, 2010. [8](#)
- [53] GIUSTI, S. M.; MRÓZ, Z.; SOKOLOWSKI, J.; NOVOTNY, A. A. *Topology design of thermomechanical actuators*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 55:1575-1587, 2017.
- [54] GOO, S.; WANG, S.; HYUN, J.; JUNG, J. *Topology optimization of thin plate structures with bending stress constraints*. Computers e Structures, 175:134-143, 2016. [2](#)
- [55] GUILLAUME, P., IDRIS, K.S. *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*. SIAM Journal on Control and Optimization, 43 (1), 1 - 31, 2004. [8](#)
- [56] GUO, X.; ZHANG, W.; ZHONG, W. *Doing Topology Optimization Explicitly and Geometrically—A New Moving Morphable Components Based Framework*. Journal of Applied Mechanics 81 (8): 081009, 2014. [49](#)
- [57] HINTERMULLER, M.; LAURIAN, A. *Multiphase image segmentation and modulation recovery based on shape and topological sensitivity*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 35(1):1-22, 2009.
- [58] KHOZA, D. *Topology Optimization of Plate-Like Structures*, 2006, Tese de Doutorado, Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, University of Pretoria
- [59] KIRCHHOFF, G. (1850). *Über das Gleichgewicht und Die Bewegung Einer Elastischen Scheibe*. J.Math., n.40, p.51-58. [4](#)
- [60] KOZLOV, V.A.; MAZ'YA, V.G.; MOVCHAN, A.B. *Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures*. Clarendon Press. Oxford. 1999. [1](#)
- [61] KROG, L. A.; OLHOFF, N.. *Optimum Topology and Reinforcement Design of Disk and Plate Structures with Multiple Stiffness and Eigenfrequency Objectives*. Computers & Structures 72 (4-5): 535–563, 1999. [49](#)
- [62] KROPIOWSKA, D.; MIKULSKI, L.; SZEPTYNSKI, P. *Optimal design of a kirchhoff-love plate of variable thickness by application of the minimum principle*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 59(5):1581-1598, 2019. [2](#)
- [63] LEAL, R. P.; SOARES C. A. *Mixed elements in the optimal design of plates*. Structural optimization, 1(2):127-136, 1989. [2](#)
- [64] LIANG, Q.Q.; XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. *A Performance Index for Topology and Shape Optimization of Plate Bending Problems with Displacement Constraints*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.21, N.5, p.393-399, 2001. [87](#)
- [65] LITTLE, R.W.. *Elasticity*. Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

- [66] LOPES, C. G., *Síntese de Mecanismos Flexíveis com Restrição em Tensão e Otimização Topológica de Estruturas Sujeitas a Contato e Atrito*. Tese de doutorado - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brasil, 2017. [9](#)
- [67] LOPES, C. G.; SANTOS, R. B.; NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. *Asymptotic analysis of variational inequalities with applications to optimum design in elasticity*. *Asymptotic Analysis*, 102:227-242, 2017.
- [68] LOHAN, J. D.; DEDE, M.E. and ALLISON, J. T. *Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(3):1063-1077, 2017.
- [69] LUO, J.; GEA, H.. *A Systematic Topology Optimization Approach for Optimal Stiffener Design*. *Structural Optimization* 16 (4): 280–288,1998. [49](#)
- [70] MACHADO, T. J.; ANGELO, J. S.; NOVOTNY, A. A., *A new one-shot pointwise source reconstruction method*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 40 (5), 1367 - 1381, 2017.
- [71] MACHADO, T. J., CANELAS, A., NOVOTNY, A. A., ROCHE, J. R., *Fast solution of the inverse electromagnetic casting problem*. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 1 - 9, (2017).
- [72] MAEDA, Y.; NISHIWAKI, S.; IZUI, K.; YOSHIMURA, M.; MATSUI, K.; TERADA, K. *Structural Topology Optimization of Vibrating Structures with Specified Eigenfrequencies and Eigenmode Shapes*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67 (5): 597–628, 2006. [49](#)
- [73] MAMA, B.O., et al. *Solution of free harmonic vibration equation of simply supported Kirchhoff plate by Galerkin-Vlasov method*. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*, Vol. 36, No. 2, April 2017, pp. 361 – 365.
- [74] MESKE, R.; LAUBER, B.; SCHNACK, E. *A New Optimality Criteria for Shape Optimization of Natural Frequency Problems*. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2006, p.295-310. [68](#)
- [75] MINDLIN, R. D.. *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31-38, 1951. [15](#), [71](#)
- [76] NAZAROV, S. A., SOKOLOWSKI, J. *The topological derivative of the Dirichlet integral due to formation of a thin ligament*. *Siberian Mathematical Journal*, 45 (2), 341 - 355, 2004. [8](#)
- [77] NAZAROV S. A., SOKOLOWSKI J. *Spectral problems in the shape 685 optimisation Singular boundary perturbations*. *Asymptot Anal* 686 56(3-4):159–204, 2008.

- [78] NECHES, L C; CISILINO, A. P., *Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements*. Engineering Analysis with Boundary Elements 32, 533–544, 2008. 9
- [79] NORATO, J. A.; BENDSØE, M. P.; HABER, R. B.; TORTORELLI, D. *A topological derivative method for topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 33 (4-5):375-386, 2007.
- [80] NOVOTNY, A. A.. *Análise de Sensibilidade Topológica*. Tese de Doutorado; Laboratório Nacional de Computação Científica, 2003.
- [81] NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. *Topological derivatives of shape functionals. Part I: Theory in singularly perturbed geometrical domains*. Journal of Optimization Theory and Applications, 180(2):341-373, 2019a.
- [82] NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. *Topological derivatives of shape functionals. Part II: First order method and applications*. Journal of Optimization Theory and Applications, 180(3):683-710, 2019b.
- [83] NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. *Topological derivatives of shape functionals. Part III: Second order method and applications*. Journal of Optimization Theory and Applications, 181(1):1-22, 2019c.
- [84] NOVOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; PADRA, C.; TAROCO, E. *Topological Sensitivity Analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192:803-829, 2003. 5, 7
- [85] NOVOTNY, A. A. *Adaptatividade h na Otimização Topológica e Projeto Ótimo de Malhas hp Adaptativas*. Dissertação de Mestrado, GRANTE-EMC-UFSC, Florianópolis, Brasil, 1998.
- [86] NONOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; PADRA, C.; TAROCO, E.. *Topological derivative for linear elastic plate bending problems*. Control and Cybernetics, 34(1):339–361, 2005. 8
- [87] NONOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; PADRA, C.; TAROCO, E. *The Topological Derivative for the Poisson's Problem*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol.13, p.1825-1844, 2003. 7
- [88] NONOTNY, A. A.; Feijóo, R. A.; PADRA, C.; TAROCO, E. *Derivada Topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma na otimização topológica*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 18, 4, 499-519 (2002). 7, 8
- [89] NOVOTNY, A.A.; SALES, V.. *Energy change to insertion of inclusions associated with a diffusive/convective steady-state heat conduction problem*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015. 4, 8

- [90] NOVOTNY, A.A.; SOKOLOWSKI, J. *Análise de Sensibilidade Topológica - Teoria e Aplicações*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Notas de Matemática Aplicada; vol. 73, Ed. rev. - São Carlos-SP, 2016. [50](#)
- [91] NOVOTNY, A.A.; SOKOLOWSKI, J. *An Introduction to the Topological Derivative Method*. Springer, 2020. [5](#)
- [92] NOVOTNY, A.A.; SOKOLOWSKI, J. *Topological Derivative in Shape Optimization*. Springer, 2013. [58](#), [61](#)
- [93] OJALVO, I. U. *Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies*. AIAA Journal, vol 26(3), p. 361-366, 1998. [67](#)
- [94] OWEN, M.P. *Asymptotic First Eigenvalue Estimates for the Biharmonic Operator on a Rectangle*. Journal of Differential Equations 136, 166-190 (1997).
- [95] PARK, K.S.; YOUN, S.K.. *Topology Optimization of Shell Structures Using Adaptive Inner-Front (AIF) Level Set Method*. Structural and Multidisciplinary Optimization 36 (1): 43–58, 2008. [49](#)
- [96] REISSNER, E. *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. ASME Journal of Applied Mechanics, 12:68 - 77, 1945. [4](#), [71](#)
- [97] ROSA, V.S.D. *Análise de Sensibilidade Topológica do Modelo de Flexão de Placas de Reissner-Mindlin*. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), 2015. [4](#), [71](#)
- [98] RUCHEINSKY, D; CARVALHO, F. S.; ANFLOR, C. T. M.; NOVOTNY, A. A.. *Topological Asymptotic Analysis of a Diffusive-Convective-Reactive Problem*. Engineering Computations, 2020.
- [99] SÁ, L. F. N.; AMIGO, R. C. R.; NOVOTNY, A. A.; SILVA, E. C. N. *Topological derivatives applied to fluid flow channel design optimization problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 54 (2), 249 - 264, 2016. [9](#)
- [100] SALES, V.; NOVOTNY, A.A.; RIVERA, J.E.M.. *Energy change to insertion of inclusions associated with the Reissner–Mindlin plate bending model*. International Journal of Solids and Structures, Volume 59, 1 May 2015, Pages 132-139. [9](#), [71](#), [83](#)
- [101] SEYRANIAN, A. P., LUND, E., OLHOFF, N. *Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 8, p. 207-227, 1994. [67](#)
- [102] SEYRANIAN, A. P. *Sensitivity Analysis of Multiple Eigenvalues*. Mech. Strut. Math. 21:261-284;1993.



- [103] SCHUMACHER, A. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien*. Tese de Doutorado, FOMMAS-Report Nr T09-01.96. Universitat der Siegen, Siegen, Alemanha, 1996. [7](#)
- [104] SOKOLOWSKI, J., ZOCHOWSKI, A., *On the topological derivative in shape optimization*. SIAM Journal on Control and Optimization, v. 37, n. 4, 1251 -1272, (1999). [5](#), [7](#), [12](#)
- [105] SOKOLOWSKI, J.; ZOLÉSIO, J. P. *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag, 1992. [7](#)
- [106] STANFORD, B.; BERAN, P.; BHATIA, M.. *Aeroelastic Topology Optimization of Blade-Stiffened Panels*. Journal of Aircraft 51 (3): 938–944, 2014. [49](#)
- [107] SVANBERG, K. *MMA and some modelling aspects*. In Optimization systems and theory, KTH, May 1999. [87](#)
- [108] TORII, A. J., NONOTNY, A. A., SANTOS, R. B. *Robust Compliance Topology Optimization based on the Topological Derivative Concept*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 106 (11), 889-903, 2016. [9](#)
- [109] TORII, A. J.; FARIA, J.. *Structural Optimization Considering Smallest Magnitude Eigenvalues: A Smooth Approximation*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2016. [67](#)
- [110] VIANA, H. R. G. *Análise estática e vibratória de placas utilizando-se do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado), Centro de Tecnologia. Universidade Federal da Paraíba, 2008. [15](#)
- [111] XAVIER, M.D.; NOVOTNY, A.A. *Análise de Sensibilidade Topológica no Processo de Fraturamento Hidráulico Tridimensional*. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017. [13](#)
- [112] XIE, Y.M.; STEVEN, G. P. *Evolutionary structural optimization for dynamic problems*. Computers and Structures, v. 58, p. 1067 – 1073, 1996.
- [113] WANG, L.; Basu, P. K.; Leiva, J. P.. *Automobile Body Reinforcement by Finite Element Optimization*. Finite Elements in Analysis and Design 40 (8): 879–893, 2004. [49](#)
- [114] WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. *A level set method for structural topology optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 192, p. 227 - 246, 2003. [12](#)
- [115] WELDEYESUS, A. G.; STOLPE, M. *Free material optimization for laminated plates and shells*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 53(6):1335-1347, 2016. [2](#)
- [116] ZHU, J.; ZHANG, W.; QIU, K.. *Bi-directional Evolutionary Topology Optimization Using Element Replaceable Method*. Computational Mechanics 40 (1): 97, 2007. [49](#)