

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM
VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA SOB GRADIENTE DE
MOMENTO FLETOR**

JOÃO PAULO MATOS XAVIER

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM
VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA SOB GRADIENTE DE
MOMENTO FLETOR**

JOÃO PAULO MATOS XAVIER

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

COORIENTADOR: PAULO CHAVES DE REZENDE MARTINS

**TESE DE DOUTORADO
EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.TD – 3A/20

BRASÍLIA/DF: 09/2020

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM
VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA SOB GRADIENTE DE MOMENTO
FLETOR**

JOÃO PAULO MATOS XAVIER

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE
DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

APROVADO POR:



Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (ENC/UnB)
(Orientador)



Prof. Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP. (ENC/UnB)
(Coorientador)



Prof. Raúl Darío Durand Farfán, D.Sc. (ENC/UnB)
(Examinador Interno)



Prof. José Manoel Morales Sánchez, D.Sc. (FAU/UnB)
(Examinador Externo)



Prof. Jean Marie Désir, D.Sc. (UFRGS)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 18 DE SETEMBRO DE 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

XAVIER, JOÃO PAULO MATOS

Análise não linear de vigas de concreto com variação de aderência sob gradiente de momento fletor [Distrito Federal] 2020.

xxix, 178p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2020).
Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise não linear 2. Modelo de Aderência Variável
3. Tensão de aderência-deslizamento 4. Análise numérica
5. Vigas de concreto

I. Pedroso, Lineu José, orientador. II. Martins, Paulo Chaves de Rezende, coorientador
III. Título (Doutor).

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

XAVIER, J. P. M. (2020). Análise não linear de vigas de concreto com variação de aderência sob gradiente de momento fletor. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD - 3A/20, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 178p.

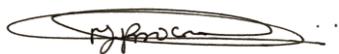
CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: João Paulo Matos Xavier.

TÍTULO: Análise não linear de vigas de concreto com variação de aderência sob gradiente de momento fletor.

GRAU: Doutorado ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



João Paulo Matos Xavier

Departamento de Engenharia e Ciências Ambientais (DECAM) – UFERSA

Av. Francisco Mota, 572 – Bairro Costa e Silva

59.625-900 Mossoró – RN – Brasil.

joapaulo@ufersa.edu.br

*Dedicado à minha esposa, Renata, e minha
filha, Amélie, pela base familiar e apoio
incondicional durante todo este período.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, por mais esta conquista e por sempre me proteger e me guiar em todos os momentos da minha vida.

Agradeço à minha esposa, Renata Xavier, por sempre estar ao meu lado, me incentivando, me apoiando, e por nunca me deixar desistir dos meus sonhos. Obrigado por tudo!

À minha filha Amélie Xavier, que nasceu durante a elaboração deste trabalho e trouxe a alegria e o incentivo que faltava em minha vida.

Aos meus pais José Xavier e Maria Aline, por sempre terem me proporcionado as melhores condições de seguir meus estudos de forma satisfatória e com qualidade.

A minha sincera gratidão ao Prof. Paulo Chaves, pela compreensão, disponibilidade e atenção nas diversas orientações durante o desenvolvimento deste trabalho. Seus ensinamentos foram fundamentais para conclusão desta pesquisa, e também, para minha vida como professor.

Ao Prof. Lineu, por ter aceitado o desafio de me orientar apenas formalmente, mas que durante o doutoramento foi fundamental para a melhoria do trabalho e das publicações.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília, pelos conhecimentos transmitidos.

À UFRSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido pelo apoio financeiro durante todo o doutoramento, viabilizando a conclusão desta tese.

Aos meus amigos/irmãos Renato e Carla (RN/DF) pela ajuda, recepção e apoio em Brasília, desde a época do mestrado. Vocês foram imprescindíveis!

Por fim, aos meus colegas de sala, ex-alunos e novos amigos que o doutorado me deu, em especial: Robson Lopes, Gelson Alves, Fabiano, Paulo Reis, Wilson, Nataly, Agno, Jerfson, Nataniel, Wanderley, Davidson, Augusto, Iago. Obrigado pela cumplicidade, ajuda e amizade!

*“Ce qui embellit le désert, c’est qu’il cache
un puits quelque part”*

(Antoine de Saint-Exupéry)

RESUMO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA SOB GRADIENTE DE MOMENTO FLETOR

Autor: João Paulo Matos Xavier

Orientador: Lineu José Pedroso

Coorientador: Paulo Chaves de Rezende Martins

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília/DF, 18 de setembro de 2020.

O objetivo deste trabalho é a análise do comportamento não linear de peças em concreto estrutural sob ação de gradientes de momento fletor, considerando-se a perda de aderência com a evolução do carregamento. Parte-se da análise de regiões delimitadas por duas seções de descontinuidade consecutivas (fissuras ou juntas abertas), admitindo-se o Modelo de Aderência Variável (MAV). Para isso, é proposto um modelo numérico que leva em consideração a variação da tensão de aderência com o deslizamento da armadura, quando a manutenção da hipótese de Bernoulli-Navier com aderência perfeita não é mais aplicável. Na metodologia desenvolvida, é proposta uma adaptação do modelo de Manfredi e Pecce (1998), em que foram incorporadas: a análise de vigas com fissuração discreta (distância qualquer entre fissuras e/ou juntas) ou repartida (distância entre fissuras e/ou juntas aproximadamente igual a distância entre estribos); a verificação de aduelas longas com altura constante e comprimento elevado (relação comprimento-altura (l/h) superior a 1,25); e a ocorrência de fissuras secundárias entre duas fissuras/juntas pré-existentes. Um programa computacional foi desenvolvido por meio da ferramenta *MatLab* para avaliar o comportamento não linear de peças, em concreto armado e/ou concreto protendido, submetidas tanto à flexão simples quanto à flexão composta. Para a validação do modelo, foram utilizados três exemplos da literatura, compostos por vigas com fissuração discreta e repartida. Os resultados numéricos obtidos apresentaram boa correlação com os dos experimentos. Verificou-se, também, que a partir da relação $l/h \geq 1,25$, as aduelas se comportam como longas. Além disso, ficou demonstrada uma diferença significativa entre os resultados obtidos pelo MAV e pelo Modelo de Aderência Perfeita (MAP), principalmente na análise de vigas segmentadas (vigas formadas por aduelas – fissuração discreta). Conclui-se que a consideração do MAV na análise do comportamento de vigas segmentadas é importante e que o programa implementado se mostra como uma boa ferramenta para avaliar o comportamento não linear de peças quando há deslizamento do aço, após abertura das fissuras.

Palavras-chave: Análise não linear. Modelo de Aderência Variável. Tensão de aderência-deslizamento. Análise numérica. Vigas de concreto.

ABSTRACT

NONLINEAR ANALYSIS OF CONCRETE BEAMS WITH ADHESION VARIATION UNDER GRADIENT OF BENDING MOMENT

Author: João Paulo Matos Xavier

Advisor: Lineu José Pedroso

Co-supervisor: Paulo Chaves de Rezende Martins

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction

Brasília/DF, 18th September 2020.

The main goal of this work is the analysis of non-linear behaviour of structural concrete elements under the action of moment gradients, considering the loss of adhesion with load increase. Regions delimited by two consecutive discontinuity sections (cracks or open joints) are the basis of analysis, by applying the Variable Adhesion Model (VAM). For that, the numerical model adopted takes into account the variation of the bond stress with reinforcement slipping, since when the Bernoulli-Navier hypothesis with perfect adhesion is no longer valid. The methodology proposed herein, is based on an adaptation of the model by Manfredi and Pecce (1998), including: the possibility of analysis of beam elements with discrete cracking (high distance between cracks and/or joints) or smeared cracking (distance between cracks and/or joints approximately equal to the distance between stirrups); the verification of long beam segments with constant height (length-height ratio (l/h) greater than 1,25); and an occurrence of secondary cracks between two previous existent cracks/joints. A computer program was developed, using the *MatLab* tool, to evaluate the non-linear behaviour of reinforced concrete and/or prestressed concrete elements, submitted to pure bending or bending and compression. The proposed model was validated, by comparison with three tests taken from the literature, concerning beams with discrete and smeared cracking. The results gotten from numerical analysis shown a good correlation with the experiments. It was also found that from the $l/h \geq 1,25$ ratio up, beam segments behave for long ones. In addition, a significant difference between the results obtained by the VAM and the Perfect Adhesion Model (PAM) was demonstrated, mainly in the case segmented beams (beams with discrete cracking). The conclusion was that the consideration of the VAM model in the analysis of behaviour of segmented beams is important and that the computational program developed works as a good tool for the evaluation of non-linear behaviour of beam that present steel slip in the concrete after crack opening.

Keywords: Nonlinear analysis. Variable adhesion model. Bond stress-slipping. Numerical analysis. Concrete beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Elemento de viga submetido à flexo-compressão	29
Figura 2.1 – Equilíbrio da seção	35
Figura 2.2 – Diagrama de deformações de acordo com a hipótese de Bernoulli-Navier	35
Figura 2.3 – Seção transversal com convenções de sinais	37
Figura 2.4 – Seção transversal de viga submetida à flexo-compressão.....	41
Figura 2.5 – Deformações na seção transversal	43
Figura 2.6 – Seção transversal retangular.....	44
Figura 2.7 – Deformações e tensões na seção transversal	44
Figura 2.8 – Resultantes das tensões na seção transversal	45
Figura 2.9 – Divisão da seção transversal em faixas para integração numérica	46
Figura 2.10 – Resultante das tensões na seção	47
Figura 2.11 – Processo da bissecante	48
Figura 2.12 – Evolução do eixo neutro de deformação e rotação das seções.....	50
Figura 2.13 – Aderência Aço-concreto.....	51
Figura 2.14 – Deslizamento da armadura	52
Figura 2.15 – Deformação do concreto no entorno da barra	54
Figura 2.16 – Tensão de aderência-deslizamento com o incremento de carregamento	54
Figura 2.17 – Diagrama tensão-deformação para o concreto à compressão	55
Figura 2.18 – Elemento de concreto submetido a força de tração axial.....	57
Figura 2.19 – Curva carga-deformação para um elemento em concreto armado.....	57
Figura 2.20 – Diagrama tensão-deformação do concreto à tração	58
Figura 2.21 – Diagrama tensão-deformação para o aço de armadura passiva	59
Figura 2.22 – Diagrama tensão-deformação para o aço de armadura ativa	60
Figura 2.23 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento	61
Figura 2.24 – Transição gradual para o Estádio II	63
Figura 2.25 – Elemento em que a lei momento-curvatura é estudada.....	64
Figura 2.26 – Seção transversal e notações para um elemento típico de concreto estrutural...	65
Figura 2.27 – Leis tensão-deformação do concreto à tração e à compressão utilizadas no modelo	68
Figura 2.28 – Leis tensão-deformação dos aços passivos e ativos utilizados no modelo	68
Figura 2.29 – Lei tensão de aderência-deslizamento proposta por Martins (1989).	68
Figura 2.30 – Equilíbrio da aduela	69
Figura 2.31 – Variação da deformação de compressão na borda mais comprimida de uma aduela.....	71
Figura 2.32 – Equilíbrio translacional de uma barra em peças de concreto armado.....	74
Figura 2.33 – Elemento de concreto armado submetido à tração uniaxial subdividida em elementos.....	75
Figura 2.34 – Diagrama de corpo livre de um elemento de viga em concreto armado. (a) elemento de viga em concreto armado; (b) tensões de aderência na interface aço-concreto ...	77
Figura 2.35 – Distribuição da curvatura idealizada	78
Figura 3.1 – (a) Modelo de viga; (b) subelemento; (c) seção transversal	81
Figura 4.1 – Análise global da peça	85
Figura 4.2 – Método <i>Regula-Falsi</i> ou Método da Falsa Posição	88
Figura 4.3 – Algoritmo do Programa Principal “MAV”	91
Figura 4.4 – Algoritmo da Sub-rotina “EQSE”	92
Figura 4.5 – Algoritmo da Sub-rotina “Busca LNFS”	93
Figura 5.1 – Esquema estrutural e detalhes da viga obtida em Álvares (1993)	95
Figura 5.2 – Esquema estrutural e detalhes da viga obtida em Araújo (2010).....	96

Figura 5.3 – Divisão da viga A1 em aduelas.....	98
Figura 5.4 – Divisão das vigas A2 e B2 em aduelas	98
Figura 5.5 – Divisão das vigas A3 em aduelas.....	98
Figura 5.6 – Posição dos carregamentos aplicados e das flechas obtidas por ensaio.....	100
Figura 6.1 – Padrão de fissuração e esquema do DMF	102
Figura 6.2 – Diagrama carga-deslocamento (meio do vão).....	102
Figura 6.3 – Diagrama deslizamento-comprimento da aduela	103
Figura 6.4 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento	103
Figura 6.5 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela.....	104
Figura 6.6 – Diagrama deformação específica do aço-comprimento da aduela.....	104
Figura 6.7 – Diagrama tensão no aço-comprimento da aduela	105
Figura 6.8 – Padrão de fissuração, esquema do DMF e detalhe das aduelas	106
Figura 6.9 – Diagrama carga-deslocamento (meio do vão).....	106
Figura 6.10 – Diagrama deslizamento-comprimento da aduela	107
Figura 6.11 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento	107
Figura 6.12 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela.....	108
Figura 6.13 – Diagrama deformação específica do aço-comprimento da aduela.....	108
Figura 6.14 – Diagrama tensão no aço-comprimento da aduela	109
Figura 6.15 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) referente ao ensaio 1 da viga A2.	111
Figura 6.16 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 1 da viga A2 ...	112
Figura 6.17 – Diagramas deslizamento-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2	113
Figura 6.18 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2.....	113
Figura 6.19 – Diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2	114
Figura 6.20 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2.....	114
Figura 6.21 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2	115
Figura 6.22 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga A2.....	115
Figura 6.23 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga A2 ...	116
Figura 6.24 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2	117
Figura 6.25 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduelas com $\Delta L = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2.....	117
Figura 6.26 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduelas com $\Delta L = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2.....	118
Figura 6.27 – Diagramas tensão de aderência-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2.....	118
Figura 6.28 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2.....	119
Figura 6.29 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2	119
Figura 6.30 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 1 da viga A3.....	120
Figura 6.31 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 1 do ensaio 1 da viga A3	121
Figura 6.32 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3	122

Figura 6.33 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3.....	122
Figura 6.34 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3	123
Figura 6.35 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3.....	123
Figura 6.36 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3	124
Figura 6.37 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 2 do ensaio 1 da viga A3	124
Figura 6.38 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 400$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3	125
Figura 6.39 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 300$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3.....	125
Figura 6.40 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 400$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3	126
Figura 6.41 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 400$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3	126
Figura 6.42 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 400$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3.....	127
Figura 6.43 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 400$ mm e $\Delta L3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3.....	127
Figura 6.44 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 3 do ensaio 1 da viga A3	128
Figura 6.45 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3	128
Figura 6.46 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 300$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3.....	129
Figura 6.47 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3.....	129
Figura 6.48 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3	130
Figura 6.49 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3	130
Figura 6.50 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3.....	131
Figura 6.51 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga A3.....	131
Figura 6.52 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga A3 ...	132
Figura 6.53 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	133
Figura 6.54 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	134
Figura 6.55 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	134
Figura 6.56 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	135

Figura 6.57 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	135
Figura 6.58 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	136
Figura 6.59 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3	136
Figura 6.60 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 3 da viga A3	137
Figura 6.61 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 3 da viga A3 ...	138
Figura 6.62 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	139
Figura 6.63 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	139
Figura 6.64 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	140
Figura 6.65 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	140
Figura 6.66 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	141
Figura 6.67 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	141
Figura 6.68 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	142
Figura 6.69 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 300$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm, $\Delta L3 = 200$ mm e $\Delta L4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3	142
Figura 6.70 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 1 da viga B2	143
Figura 6.71 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 1 da viga B2....	144
Figura 6.72 – Diagramas deslizamentos do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2.....	145
Figura 6.73 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2	145
Figura 6.74 – Diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2.....	146
Figura 6.75 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela	146
Figura 6.76 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm)	147
Figura 6.77 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga B2	147
Figura 6.78 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga B2....	148
Figura 6.79 – Diagramas deslizamentos do aço-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2	149
Figura 6.80 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 400$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2.....	149
Figura 6.81 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2.....	150
Figura 6.82 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2	150
Figura 6.83 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2	151
Figura 6.84 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2	151
Figura 6.85 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 3 da viga B2	152

Figura 6.86 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 3 da viga B2....	153
Figura 6.87 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2	154
Figura 6.88 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L1 = 400$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2.....	154
Figura 6.89 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2.....	155
Figura 6.90 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2.....	155
Figura 6.91 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2	156
Figura 6.92 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2	156
Figura 6.93 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L1 = 400$ mm, $\Delta L2 = 200$ mm e $\Delta L2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2	157

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Parâmetros para definição da curva tensão de aderência versus deslizamento para barras nervuradas.....	61
Tabela 5.1 – Dados utilizados para a análise da viga obtida em Álvares (1993).....	96
Tabela 5.2 – Dados utilizados para a análise da viga obtida em Araújo (2010).....	97
Tabela 5.3 – Resumo das principais características das vigas ensaiadas por Tavares (2000)..	97
Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados para as vigas ensaiadas por Tavares (2000).....	99
Tabela 6.1 – Comparação dos resultados obtidos para a viga obtida em Álvares (1993).....	101
Tabela 6.2 – Comparação dos resultados obtidos para a viga obtida em Araújo (2010).....	105
Tabela 6.3 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga A2.....	111
Tabela 6.4 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 1 da viga A2.....	112
Tabela 6.5 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga A2.....	116
Tabela 6.6 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga A2.....	117
Tabela 6.7 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga A3.....	120
Tabela 6.8 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 1 do ensaio 1 da viga A3.....	121
Tabela 6.9 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 2 do ensaio 1 da viga A3.....	125
Tabela 6.10 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 3 do ensaio 1 da viga A3.....	128
Tabela 6.11 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga A3.....	132
Tabela 6.12 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga A3.....	133
Tabela 6.13 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 3 da viga A3.....	137
Tabela 6.14 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 3 da viga A3.....	138
Tabela 6.15 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga B2.....	143
Tabela 6.16 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 1 da viga B2.....	144
Tabela 6.17 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga B2.....	148
Tabela 6.18 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga B2.....	149
Tabela 6.19 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 3 da viga B2.....	152
Tabela 6.20 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 3 da viga B2.....	153

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CG	Centro de gravidade da seção
CP	Concreto protendido
DMF	Diagrama de momento fletor
MAP	Modelo de aderência perfeita
<i>MatLab</i>	Matrix Laboratory
MAV	Modelo de aderência variável
NBR	Norma Brasileira
PECC	Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
RB	Relaxação baixa
UFERSA	Universidade Federal Rural do Semi-Árido
UnB	Universidade de Brasília

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ_0	perímetro das barras de aço
A_c	área da seção de concreto
A_{cc}	área da seção de concreto comprimida
A_{ct}	área da seção de concreto tracionada
A_p	área de aço de armadura ativa
A_{sc}	área de aço de armadura passiva à compressão
A_{sk}	área de uma barra, k , de aço
A_{st}	área de aço de armadura passiva à tração
E_b	inclinação da curva tensão de aderência-deslizamento
E_c	módulo de elasticidade do concreto
E_{c1}	módulo de elasticidade secante do concreto
E_{ci}	módulo de elasticidade tangente inicial do concreto
E_p	módulo de elasticidade para o aço para armadura ativa
E_s	módulo de elasticidade do aço para armadura passiva
E_t	módulo de elasticidade tangente do concreto
F_r	vetor de forças internas ou resistentes da seção
K_1	rigidez no estágio 1
M_1	momento fletor atuante na extremidade esquerda da aduela
M_2	momento fletor atuante na extremidade direita da aduela
M_d	momento fletor solicitante de cálculo
M_r	momento fletor resistente
N_1	esforço normal atuante na extremidade esquerda da aduela
N_2	esforço normal atuante na extremidade direita da aduela
N_d	esforço normal solicitante de cálculo
N_r	esforço normal resistente
$P_{u,ap}$	carga última obtida por meio do modelo de aderência perfeita
$P_{u,av}$	carga última obtida por meio do modelo de aderência variável
$P_{u,exp}$	carga última obtida no experimento
P_u	carga última
R_{cc}	resultante das forças atuantes no concreto à compressão
R_{ct}	resultante das forças atuantes no concreto à tração
R_{sc}	resultante das forças atuantes no aço à compressão
R_{st}	resultante das forças atuantes no aço à tração

Z_{cc}	braço de alavanca do concreto à compressão
Z_{ct}	braço de alavanca do concreto à tração
d_p	distância do centro geométrico dos aços para armadura ativa à borda mais comprimida da seção
d_{sc}	distância do centro geométrico dos aços para armadura passiva comprimida à borda mais comprimida da seção
d_{st}	distância do centro geométrico dos aços para armadura passiva tracionada à borda mais comprimida da seção
d_{st}	distância da borda mais comprimida ao eixo geométrico da armadura passiva;
f_{ck}	resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	resistência média à compressão do concreto
f_{cr}	resistência à tração do concreto associada ao início da fissuração
f_{pe}	tensão de protensão no aço após todas as perdas
f_{ptk}	resistência característica à tração do aço para armadura ativa
f_{pyk}	resistência característica ao escoamento do aço para armadura ativa
f_{tk}	resistência característica à tração do aço para armadura passiva
f_{yk}	resistência característica ao escoamento do aço para armadura passiva
l_a	comprimento de aderência
l_c	distância entre fissuras
s_1	deslizamento entre o aço e concreto associado ao início do trecho com tensão de aderência τ_{bmax}
s_2	deslizamento entre o aço e concreto associado ao final do trecho com tensão de aderência τ_{bmax}
s_3	deslizamento entre o aço e concreto associado ao início do trecho com tensão de aderência τ_{bf}
u_{cc}	encurtamento do concreto
u_{ccb}	encurtamento do concreto na seção "B"
u_{ct}	alongamento do concreto
u_{pB}	alongamento do aço ativo na seção "B"
u_{st}	alongamento do aço para armadura passiva
u_{stB}	alongamento do aço para armadura passiva na seção "B"
w_u	deslocamento obtido para a carga última
y_k	distância de cada armadura ao eixo vertical da seção
z_0	distância entre o eixo de rotação nula e o eixo de deformação nula
z_A	profundidade da linha neutra na seção não-fissurada "A";
z_B	profundidade da linha neutra na seção fissurada "B";

Z_G	distância do centro geométrico da seção à borda mais comprimida da seção
Z_{cc}	profundidade da linha neutra
Z_{ccA}	distância entre o eixo de deformação nula e a borda mais comprimida da seção "A"
Z_{ccB}	distância entre o eixo de deformação nula e a borda mais comprimida da seção "B"
Z_{ctB}	distância entre o eixo de deformação nula e o ponto de deformação máxima à tração na seção "B"
Z_k	distância de cada camada de armadura ao centroide da seção transversal
Z_{sc}	distância vertical do centro geométrico do aço comprimido à linha neutra
Z_{sc}	distância entre o centroide mecânico da seção transversal e a armadura comprimida
Z_{st}	distância vertical do centro geométrico do aço tracionado à linha neutra
Z_{st}	distância entre o centroide mecânico da seção transversal e a armadura tracionada
α_E	parâmetro em função da natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade
ε_0	pré-deformação do aço devido aos efeitos de aderência do aço-concreto
$\varepsilon_1(z_1)$	deformação específica do concreto na ordenada " z_1 "
$\varepsilon_2(z_2)$	deformação específica do concreto na ordenada " z_2 "
ε_b	deformação específica do concreto na base da seção
$\varepsilon_{cc,lim}$	deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
ε_{cc}	deformação específica do concreto à compressão
ε_{cc1}	deformação específica máxima do concreto
ε_{ccA}	deformação do concreto comprimido na seção "A"
ε_{ccB}	deformação do concreto comprimido na seção "B"
ε_{cr}	deformação específica do concreto à tração associada ao início da fissuração;
ε_{ct}	deformação específica do concreto à tração
ε_g	deformação específica a meia altura da seção
ε_m	deformação específica do concreto obtida no eixo médio da seção
ε_p	deformação específica do aço da armadura ativa
ε_{puk}	deformação específica característica última do aço da armadura ativa
ε_{pyk}	deformação específica característica do aço da armadura ativa
ε_s	deformação específica do aço da armadura passiva
ε_{sB}	deformação específica total do aço na seção "B"
ε_{st}	deformação específica do aço à tração

ε_{stb}	deformação específica do aço de armadura passiva na seção "B"
ε_t	deformação específica do concreto no topo da seção
ε_{tu}	deformação específica concreto à tração última associada ao término do patamar de fissuração.
ε_{uk}	deformação específica característica última do aço da armadura passiva
ε_{yk}	deformação específica característica do aço da armadura passiva
σ_{cc}	tensão no concreto à compressão
σ_{ccB}	tensão do concreto comprimido na seção "B"
σ_{ct}	tensão à tração no concreto
σ_p	tensão normal no aço de armadura ativa
σ_s	tensão normal no aço de armadura passiva
σ_{sc}	tensão no aço de armadura passiva à compressão
σ_{st}	tensão no aço de armadura passiva à tração
σ_{stB}	tensão no aço de armadura passiva na seção "B"
τ_b	tensão de aderência entre armadura e o concreto que a envolve
τ_{bf}	tensão de aderência final
τ_{bmax}	tensão de aderência máxima
χ_1	curvatura da seção no estágio 1
χ_B	curvatura da seção fissurada "B"
χ_m	curvatura média da seção
ΔL	comprimento da aduela
h	altura da seção
$\Delta\varepsilon_p$	parcela da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça na deformação específica do aço de armadura ativa
$\Delta\varepsilon_s$	parcela da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça na deformação específica do aço de armadura passiva
Δx	distância entre os pontos de integração entre duas fissuras
D	altura útil obtida na seção não fissurada "A".
EI	rigidez flexional
K	matriz de rigidez
M	momento fletor solicitante
N	esforço normal solicitante
T	força de tração
b	largura da seção
d	altura útil da seção

d'	distância vertical do centro geométrico do aço comprimido à borda da seção mais comprimida
dx	comprimento do elemento infinitesimal da peça
e	vetor de deformações generalizadas da seção
p	número total de barras de aço na seção transversal
pc	quantidade de barras de aço na seção transversal comprimidas
pt	quantidade de barras de aço na seção transversal tracionadas
s	deslizamento entre o aço e o concreto
$v(x)$	deslocamento da peça na abcissa (x)
w	largura da fissura
y	eixo das abcissas
z	eixo das ordenadas
ε	deformação específica
η	relação entre os módulos de elasticidade do aço e concreto
θ	rotação da peça
ρ	taxa geométrica de armadura
σ	tensão atuante
χ	curvatura da seção
ϕ	diâmetro da armadura

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	26
1.1	JUSTIFICATIVA	29
1.2	OBJETIVOS	31
1.2.1	Objetivo Geral	31
1.2.2	Objetivos Específicos.....	31
1.3	ASPECTOS INOVADORES E CONTRIBUIÇÃO DA PESQUISA	31
1.4	ESTRUTURA DA TESE	32
2	REVISÃO DOS MODELOS TEÓRICOS E NUMÉRICOS DA LITERATURA	34
2.1	EQUILÍBRIO DE SEÇÕES COM BASE NO MODELO DE ADERÊNCIA PERFEITA (MAP)	34
2.1.1	Hipóteses de Cálculo.....	34
2.1.2	Equações Gerais.....	36
2.1.3	Solução numérica para o equilíbrio de seções de concreto estrutural considerando o MAP (Teoria Clássica)	39
2.1.3.1	Solução numérica para o equilíbrio de seções de concreto estrutural submetidas à flexão simples	42
2.1.3.2	Solução numérica para obter a posição da linha neutra.....	47
2.2	EQUILÍBRIO DE SEÇÕES COM BASE NO MODELO DE ADERÊNCIA VARIÁVEL (MAV).....	49
2.2.1	Hipóteses de Cálculo.....	49
2.2.2	Equação Diferencial de Aderência (EDA).....	51
2.3	MODELOS CONSTITUTIVOS	55

2.3.1	Concreto	55
2.3.1.1	Concreto à compressão	55
2.3.1.2	Efeito da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça (<i>Tension Stiffening</i>)	56
2.3.1.3	Concreto à tração	58
2.3.2	Aço Passivo e Ativo.....	59
2.3.3	Aderência Aço-Concreto.....	61
2.4	MODELOS NUMÉRICOS RELACIONADOS AO MAV.....	62
2.4.1	Modelos propostos por Giuriani (1979, 1981, 1982) e Cohn e Riva (1987)	62
2.4.1.1	Leis Constitutivas	62
2.4.1.2	Modelo Analítico.....	63
2.4.1.3	Equações de Compatibilidade	64
2.4.1.4	Considerações sobre o Modelo proposto por Cohn e Riva (1987).....	66
2.4.2	Modelo proposto por Martins (1989).....	67
2.4.2.1	Leis Constitutivas	67
2.4.2.2	Modelo Analítico.....	69
2.4.2.3	Considerações sobre o Modelo proposto por Martins (1989).	72
2.4.3	Modelo proposto por Manfredi e Pecce (1998).....	73
2.4.4	Modelo proposto por Kwak e Kim (2001).....	73
2.4.4.1	Extensão do Modelo para Problemas de Flexão.....	77
2.4.4.2	Considerações sobre o Modelo proposto por Kwak e Kim (2001)	79
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	80

4	MÉTODOS DE SOLUÇÃO E DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL ..85
4.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O MAV 86
4.2	PROGRAMA PRINCIPAL “MAV” 90
4.3	SUB-ROTINA EQUILÍBRIO SEÇÃO “EQSE 92
4.4	SUB-ROTINA BUSCA LINHA NEUTRA FLEXÃO SIMPLES “BUSCA LNFS” 92
4.5	SUB-ROTINAS AUXILIARES..... 94
5	APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DAS VIGAS ANALISADAS..... 95
5.1	VIGA EXTRAÍDA DE ÁLVARES (1993) 95
5.2	VIGA EXTRAÍDA DE ARAÚJO (2010) 96
5.3	VIGAS EXTRAÍDAS DE TAVARES (2000)..... 97
6	RESULTADOS, COMPARAÇÕES E DISCUSSÕES..... 101
6.1	VIGAS COM FISSURAÇÃO REPARTIDA 101
6.1.1	Viga extraída de Álvares (1993) 101
6.1.2	Viga extraída de Araújo (2010) 105
6.1.3	Considerações sobre as vigas com fissuração repartida 109
6.2	VIGAS COM FISSURAÇÃO DISCRETA 110
6.2.1	Viga A2 111
6.2.1.1	Ensaio 1 111
6.2.1.2	Ensaio 2 115
6.2.2	Viga A3 120
6.2.2.1	Ensaio 1 120

6.2.2.2	Ensaio 2	131
6.2.2.3	Ensaio 3	137
6.2.3	Viga B2	143
6.2.3.1	Ensaio 1	143
6.2.3.2	Ensaio 2	147
6.2.3.3	Ensaio 3	152
6.2.4	Considerações sobre os resultados obtidos para a viga A2.....	157
6.2.4.1	Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes.....	157
6.2.4.2	Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico...	158
6.2.5	Considerações sobre os resultados obtidos para a viga A3.....	160
6.2.5.1	Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes.....	160
6.2.5.2	Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico...	161
6.2.6	Considerações sobre os resultados obtidos para a viga B2.....	165
6.2.6.1	Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes.....	165
6.2.6.2	Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico...	167
7	CONCLUSÕES.....	170
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	172
	REFERÊNCIAS	173

1 INTRODUÇÃO

O bom funcionamento das estruturas de concreto armado está ligado principalmente ao fenômeno da aderência que, de forma simplificada, pode ser definida como sendo a propriedade que impede o escorregamento de uma barra em relação ao concreto que a envolve. É por meio da aderência que é possível haver solidariedade entre o aço e o concreto, fazendo que os dois materiais trabalhem juntos. A partir dessa solidariedade é que ocorre a transferência de esforços entre os materiais, por compatibilidade das deformações.

Ao longo do século XX, vários estudos já quantificaram e comprovaram o fenômeno da aderência, principalmente no que se refere à tensão que surge na interface entre o aço e concreto. Entretanto, a maioria dessas pesquisas consideram a aderência uniforme, não levando em consideração a variação dessa tensão em função do deslizamento da barra. No caso da ancoragem de extremidade de barras, a simplificação de tensão constante serve para obter resultados satisfatórios para as cargas de colapso. Todavia, a consideração da variação da tensão de aderência com o deslizamento da barra é importante para que se possa realizar uma análise mais realista da estabilidade e, principalmente, da ductilidade da peça. Para isso, é necessário conhecer o comportamento não linear dos dois materiais, levando-se em conta a fissuração do concreto, de maneira que o modelo numérico reflita o comportamento real da estrutura.

Assim, a modelagem do comportamento estrutural de peças de concreto armado ao longo do processo de carregamento exige que se considere a simulação do processo de deformação e transferência de tensões ao redor dos pontos de descontinuidade do concreto que surgem com a elevação das cargas – fissuras ou abertura de juntas pré-existentes.

Nesse contexto, pode-se destacar os trabalhos de Giuriani (1979, 1981, 1982); Cohn e Riva (1987); e Martins (1989) que analisaram o comportamento de vigas em concreto estrutural, sujeitas a momentos fletores constantes nos trechos críticos, para os diversos estágios de carregamentos. Désir (1998) propôs uma modelagem numérica para simular o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica, que considera a interface como sendo uma superfície de descontinuidade. A partir desses trabalhos, surgiram modelos que avançaram no estudo do comportamento não linear de peças em concreto estrutural com foco na variação de aderência em peças submetidas a gradientes de momentos fletores, entre os quais pode-se destacar:

Manfredi e Pecce (1998); Kwak e Kim (2001); Oliveira et al. (2008) e Jayasinghe (2011). Kwak e Kim (2006), Xavier et al. (2018) e Xavier et al. (2020) realizaram a implementação de soluções numéricas para o deslizamento do aço considerando o carregamento cíclico e estático, respectivamente. Galić, Marović e Harapin (2013) descreveram uma análise numérica e paramétrica realizada para avaliar o comportamento da zona de momento constante na flexão de quatro pontos de estruturas de concreto armado. Luke (2015), desenvolveu um ambiente computacional voltado à análise numérica não linear de elementos de concreto estrutural (armado ou protendido) considerando a variação de aderência. Lee et al. (2016); Zhao e Zhu (2018) desenvolveram modelos teóricos para avaliar a região de transferência dos esforços com o efeito da variação da tensão de aderência com o deslizamento do aço.

Wolenski et al. (2015) e Grassl, Johansson e Leppänen (2018) desenvolveram modelos baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a simular a perda de aderência entre a armadura e o concreto, levando-se em consideração estudo experimental realizado. Barbosa e Sánchez Filho (2016); Máca, Panteki e Curbach (2016); e Dybel e Kucharska (2019) avaliaram a resistência de aderência aço-concreto por meio de ensaios de arrancamento. Shen et al. (2016); e Yoo e Shin (2018) ensaiaram elementos de concreto de alta resistência para avaliar a influência da fissuração na aderência entre o aço e concreto.

Hlavička (2017) apresentou um estudo experimental em que avaliou o comportamento da aderência em tubos cilíndricos de concreto armado submetidos a um carregamento térmico elevado. Wu et al. (2016) estudaram a perda de aderência em elementos de concreto com barras corroídas de diferentes diâmetros. Yang et al. (2016) avaliaram o desempenho da aderência entre barras deformadas e concreto com agregado reciclado após exposição a altas temperaturas. Blomfors et al. (2018) desenvolveram um modelo para avaliar o comprimento de ancoragem em peças com barras em estado de corrosão. Kucharska e Jaskowska-Lemanska (2019) apresentaram uma revisão dos principais modelos de aderência e de deslizamentos para diversos tipos de concreto.

É importante enfatizar, também, os trabalhos de Abdel Baky et al. (2012); Lin e Zhang (2014); Barros et al. (2015); Biscaia et al. (2015); Yan et al. (2016); Vilanova et al. (2016), Gooranorimi (2017); Zhang (2017); e Sturm e Visintin (2019) que desenvolveram modelos para o deslizamento do aço em elementos de concreto reforçados com polímeros.

Zhan et al. (2018) desenvolveram um modelo não linear em elementos, considerando o deslizamento em vigas de tubos de aço preenchidos de concreto (CFST). Wang et al. (2019) analisaram a influência do deslizamento do aço no deslocamento lateral de vigas-colunas de concreto armado. Sarhan, Hadi e Teh (2018) realizaram um estudo experimental para avaliar o comportamento da aderência em elementos de concreto reforçados com chapas de aço. Xu et al. (2019) combinaram resultados experimentais com simulações numéricas para avaliar o deslizamento entre aço e concreto. Huo, Cheng e Kong (2019) apresentaram uma revisão sobre o monitoramento do deslizamento em estruturas de concreto utilizando sensores inteligentes.

Vázquez-Herrero et al. (2013), Martí-Vargas et al. (2014), Ho et al. (2014) e Abdelatif et al. (2015), avaliaram o comprimento de transferência das tensões de aderência em estruturas de concreto protendido. Kwak e Kwon (2016) propuseram um novo modelo para avaliar o deslizamento do aço em estruturas de contenção protendidas. Moura, Real e Loriggio (2018) desenvolveram um modelo computacional para avaliar a resistência última de vigas protendidas considerando o modelo de aderência perfeita.

Marins Neto (2007) destaca que o interesse em conhecer o complexo mecanismo da aderência entre o aço e concreto nas estruturas vem, a partir da década de 40, crescendo substancialmente, por meio de análises teóricas e/ou ensaios práticos. Assim, diversos pesquisadores, dentre os quais se destacam D'Ávila (2003), Brisotto (2011), Pellegrino et al. (2015) e Rosales (2016) têm mostrado interesse em explicar esse fenômeno para que, conceituado de forma mais realista, permita o desenvolvimento de métodos e modelos aplicáveis à análise comportamental e ao cálculo de estruturas de concreto armado.

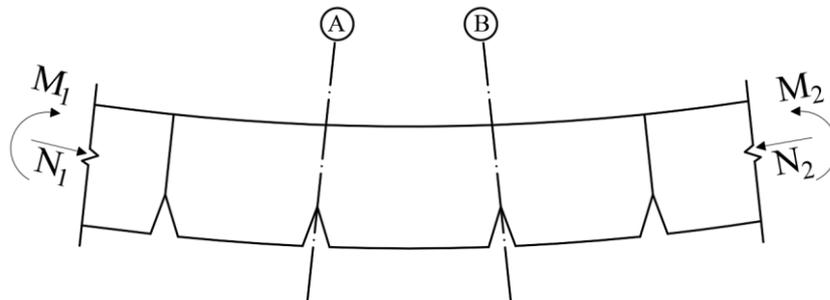
Diante do exposto, para reproduzir o comportamento não linear de peças em concreto estrutural, considerando-se a variação de aderência, partiu-se da introdução da variação da tensão de aderência com o deslizamento do aço (efeito *bond-slip*) em modelos numéricos capazes de avaliar de forma mais precisa a transferência de força do concreto para a armadura.

Quesito importante, também, é a necessidade de se dispor de ferramentas que facilitem a interpretação de resultados experimentais, que considerem os diversos parâmetros envolvidos, que auxiliem a escolha de procedimentos e variáveis relevantes durante os ensaios, além de contribuir para melhoria de projetos.

Cabe frisar a importância de se levar em consideração, na rigidez da peça, nos modelos numéricos, a variação da tensão de aderência com o deslizamento do aço associada à contribuição do concreto tracionado (*tension stiffening*), a fim de se obter resultados compatíveis com aqueles dos ensaios experimentais.

Assim, diante desses aspectos, este trabalho tem o propósito de apresentar um modelo numérico que avalie o comportamento não linear de peças em concreto estrutural (com armaduras aderentes), submetidas tanto a momentos fletores constantes ($M_1 = M_2$) quanto a gradientes de momentos ($M_1 \neq M_2$), levando-se em consideração a variação da tensão de aderência com o deslizamento da armadura, conforme a Figura 1.1.

Figura 1.1 – Elemento de viga submetido à flexo-compressão



Fonte: adaptada de Martins (1989).

Em que: (M_1, N_1) e (M_2, N_2) são os momentos fletores e esforços normais atuantes nas extremidades esquerda e direita do elemento, respectivamente.

1.1 JUSTIFICATIVA

A transferência de força de uma barra para o concreto é um fenômeno de grande dificuldade de modelagem, pelo fato dos materiais envolvidos serem diferentes e, portanto, tem propriedades mecânicas e comportamentos diferenciados. Pesquisas já mostram (item 2 deste trabalho) que há diversos fatores que influenciam o comportamento da aderência, como o diâmetro da barra, cobrimento do concreto, resistência à compressão do concreto e tensão de confinamento.

No que se refere à modelagem do comportamento de vigas, pelo método dos elementos finitos ou outros, admite-se, frequentemente, a consideração da solidariedade total entre os materiais, configurando a hipótese de aderência perfeita entre a armadura e o concreto, como destacado em D'Ávila (2003) e Machado et al. (2007).

Diante do exposto, colocou-se a seguinte questão nesta pesquisa: como avaliar o comportamento não linear de peças em concreto estrutural, considerando-se a variação de aderência com o deslizamento das armaduras com o objetivo de contribuir para as melhorias de projeto? Para respondê-la, partiu-se da premissa de que modelar o deslizamento do aço é condição relevante para avaliar de forma mais precisa a transferência de forças do concreto para a armadura e vice-versa.

A partir da consideração do deslizamento do aço, e de modelos que considerem o prejuízo de aderência, como é o caso do Modelo de Aderência Variável (MAV), no equilíbrio da peça, pode-se realizar uma análise mais adequada do comportamento: para a obtenção de deformações, deslocamentos e abertura de fissuras no ELS (Estado Limite de Serviço) com valores mais realistas. Giuriani (1979, 1981, 1982); Cohn e Riva (1987); e Martins (1989) já mostraram que para peças segmentadas (vigas separadas por aduelas ou por fissuras/juntas) é significativa a diferença entre os resultados obtidos pelo Modelo de Aderência Perfeita (MAP) e pelo MAV. Esta é, pois, uma questão a ser respondida.

Outro aspecto é a necessidade de dispor de modelos numéricos que facilitem o controle de resultados experimentais, considerando na análise parâmetros que orientem a escolha de procedimentos e variáveis importantes durante os ensaios.

É importante destacar a restrita literatura sobre modelos de barras consistentes que reflitam o comportamento não linear de elementos em concreto estrutural submetidos a gradientes de momentos fletores e que apresentem fissuração discreta (distância entre fissuras qualquer e não necessariamente igual a distância entre estribos).

Com a finalidade de resolver essas questões e contribuir com o desenvolvimento de modelos numéricos que melhor representem o comportamento do concreto estrutural, esta pesquisa se justifica e está inserida na linha de pesquisa “Métodos Numéricos e Computacionais Aplicados à Engenharia” proposta pelo PECC/UnB (Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília), que vem realizando estudos com temas afins ao deste trabalho, dos quais pode-se destacar: Luke (2015); Rosales (2016); Faria (2017); Silva (2018); e outros.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é avaliar o comportamento não linear (não-linearidades física e geométrica) de vigas de concreto estrutural (com fissuração discreta ou repartida) sob a ação de gradientes de momento fletor, considerando a variação da aderência ao redor das fissuras com a evolução do carregamento.

1.2.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, pretende-se:

- Propor um modelo numérico que reflita o comportamento não linear da interação dos dois materiais (aço e concreto), considerando-se a variação de aderência com o aumento do carregamento;
- Avaliar qual a relação comprimento/altura das aduelas a partir da qual há a possibilidade de surgimento de novas fissuras, que alterem o comportamento da peça;
- Realizar a comparação dos resultados obtidos por meio dos Modelos de Aderência Perfeita (MAP) e Aderência Variável (MAV) com os dos experimentos;
- Determinar o ponto de deslizamento nulo do aço entre duas fissuras ou juntas é único, para avaliar se a peça se comporta como aduela curta ou longa (manutenção ou não da teoria Bernoulli-Navier);
- Determinar o ponto de tensão de aderência nula entre duas fissuras ou juntas;
- Avaliar o comportamento das aduelas com o surgimento de fissuras secundárias com o aumento do carregamento;

1.3 ASPECTOS INOVADORES E CONTRIBUIÇÃO DA PESQUISA

Como caráter inovador dessa pesquisa, destaca-se a aplicação de um modelo não linear de barra que avalia o comportamento de elementos (aduelas) de concreto estrutural (armado ou protendido), curtos ou longos (relação comprimento-altura da aduela (l/h) é superior a 1,25), que apresentem fissuração discreta ou repartida, submetidos a gradiente de momentos fletores.

A validação do modelo foi feita por comparação com resultados experimentais de vigas de concreto armado e protendido obtidos na literatura sobre o assunto.

O modelo numérico desenvolvido compreende diversas rotinas computacionais que fornecem o deslizamento, as deformações e as tensões no aço e concreto, como também, a tensão de aderência na ligação aço-concreto. A metodologia proposta é inédita em sua configuração abrangente, permitindo analisar peças com qualquer tipo de fissuração. O aperfeiçoamento do programa automático permitirá a generalização da modelagem para peças de variada geometria e carregamentos.

A aplicação da presente proposta à análise de estruturas hiperestáticas se insere na continuidade da linha de pesquisa da qual este trabalho faz parte.

A partir dos resultados preliminares desta pesquisa, derivaram-se duas publicações: a primeira em anais de congresso; e a segunda em revista. Ambas listadas a seguir:

Anais de Congresso:

- Implementation of Numerical Solutions for Bond-Slip Effect Applied in Reinforced Concrete Beams considering the Variable Bond Model.

Revista:

- Nonlinear analysis of reinforced concrete beams submitted to bending moment gradients considering the variable adhesion model.

É importante ressaltar, que, como consequência dos resultados finais desta pesquisa, ainda há campo para novas publicações.

1.4 ESTRUTURA DA TESE

O presente trabalho está dividido em sete capítulos, aos quais se juntam a lista de referências, da seguinte forma:

O Capítulo 1, **Introdução**, apresenta o tema, fazendo uma abordagem geral sobre diversos trabalhos afins. São abordados também os objetivos, justificativa e originalidade.

O item 2, **Revisão dos Modelos Teóricos e Numéricos da Literatura**, sintetiza os conceitos básicos para o entendimento do problema deste trabalho. Apresenta um histórico de publicações com temas afins, como aqueles sobre o equilíbrio de seções e que utilizam o deslizamento do aço em suas análises. É realizada uma abordagem sobre os modelos de aderência perfeita, aderência variável e a contribuição do concreto íntegro entre fissuras para a rigidez da peça (*efeito tension stiffening*). Inclui-se os modelos constitutivos dos materiais que serão utilizados no modelo desta tese. Por fim, aborda os principais modelos numéricos sobre a variação da tensão de aderência com o deslizamento do aço (*efeito bond-slip*) que servirão de base para esta pesquisa. Assim, são apresentadas as principais qualidades e limitações de cada modelo, com ênfase para os avanços a serem desenvolvidos por este trabalho.

A **Fundamentação Teórica** está no Capítulo 3, que mostra com detalhes o modelo analítico, proposto nesta tese, de simulação do equilíbrio de peças por meio do Modelo de Aderência Variável (MAV). Além de funcionar não apenas para vigas com fissuração uniforme (distância entre fissuras é aproximadamente igual à distância entre estribos) como também para fissuração discreta (distancia qualquer entre fissuras).

No Capítulo 4, **Métodos de Solução e Desenvolvimento Computacional**, são apresentados a solução numérica proposta e todos os fluxogramas das rotinas computacionais desenvolvidas e, conseqüentemente, suas respectivas adaptações, quando foram implementadas por meio da ferramenta *MatLab*.

O Capítulo 5, **Apresentação e Descrição das Vigas Analisadas**, descreve os exemplos de ensaios experimentais de vigas, obtidos na literatura, e que servirão de validação para o modelo numérico.

Os **resultados, as comparações e as discussões** estão no Capítulo 6, que apresenta e detalha todos os resultados obtidos, realizando uma análise crítica das várias questões importantes que foram observadas.

O Capítulo 7, **Conclusões**, reúne as conclusões alcançadas pelos resultados obtidos por meio do modelo analítico/numérico e as sugestões para a elaboração de trabalhos futuros.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento desta pesquisa.

2 REVISÃO DOS MODELOS TEÓRICOS E NUMÉRICOS DA LITERATURA

A revisão bibliográfica feita aqui enfoca, nos dois primeiros itens a modelagem clássica e em seguida a modelagem considerando a aderência variável para a análise de segmentos de vigas.

O item 2.3 aborda as publicações relativas aos modelos constitutivos dos materiais e suas contribuições ao comportamento das peças. Finalmente, o item 2.4 traz as bases dos principais modelos de análise de peças de concreto que servirão de base ou de elemento de comparação com a proposta deste trabalho.

Como toda revisão bibliográfica de tema tão vasto e complexo, ela não pretende ser exaustiva, mas abordar as melhores publicações encontradas que tratam das questões fundamentais desta tese.

2.1 EQUILÍBRIO DE SEÇÕES COM BASE NO MODELO DE ADERÊNCIA PERFEITA (MAP)

No Modelo de Aderência Perfeita (MAP) é considerado que não há deslizamento entre a armadura e o concreto envolvente, ficando mantida a hipótese da deformação plana das seções, mesmo após fissuração e, conseqüentemente, a plastificação da seção, em que o comportamento do concreto se torna não linear.

Admitidas essas hipóteses, para realizar o equilíbrio de uma seção de concreto estrutural submetida à flexão composta reta, com par de esforços solicitantes (N, M) , pode-se obter os esforços internos resistentes (N_r, M_r) a partir apenas das deformações.

A Figura 2.1 apresenta o equilíbrio de uma seção submetida a um par de esforços (N, M) , em que: ε_t , ε_b e ε_m são as deformações no topo, na base e no meio da seção, respectivamente; h é a altura da seção; e χ é a curvatura da seção.

2.1.1 Hipóteses de Cálculo

Para o equilíbrio da seção são consideradas as seguintes hipóteses:

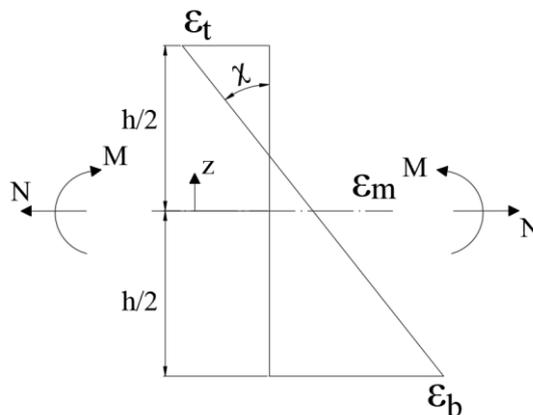
- Deformações e deslocamentos pequenos, que podem ser relacionados conforme a equação da linha elástica (2.1):

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (2.1)$$

Em que: $v(x)$ é o deslocamento transversal ao eixo da peça, na abcissa (x); M é o momento fletor; EI é a rigidez flexional.

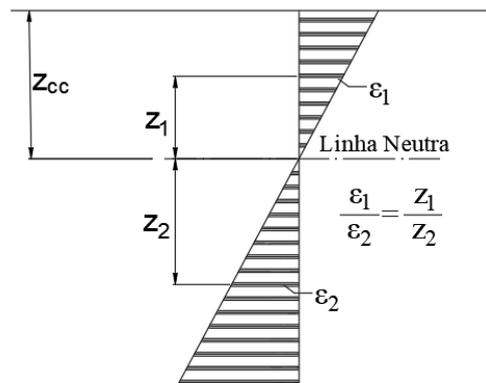
A seção homogeneizada permanece plana e perpendicular à fibra média após deformação da peça de concreto. Assim, é válida a hipótese de Bernoulli-Navier até a ruptura. A Figura 2.2 apresenta o diagrama de deformações de acordo com a hipótese considerada, em que: z_{cc} é a profundidade da linha neutra; $\varepsilon_1(z_1)$ é a deformação do concreto na ordenada " z_1 "; e $\varepsilon_2(z_2)$ é a deformação do concreto na ordenada " z_2 ".

Figura 2.1 – Equilíbrio da seção



Fonte: adaptada de Luke (2015).

Figura 2.2 – Diagrama de deformações de acordo com a hipótese de Bernoulli-Navier



Fonte: adaptada de Luke (2015).

- Usualmente a contribuição do concreto tracionado é desprezada e, conseqüentemente, todas as forças de tração são suportadas pela armadura, como admitido na ABNT NBR 6118 (2014).
- Há aderência perfeita entre o aço e concreto;
- Os diagramas tensão-deformação dos materiais são os obtidos para solicitações unidirecionais;
- As cargas são estáticas, monotônicas e crescentes;
- Considera-se interação esforço normal-momento fletor. O efeito do esforço cortante é desprezado.

2.1.2 Equações Gerais

De acordo com Martins (1989), o sistema fundamental de equações para resolver o equilíbrio da seção solicitada por um par de esforços externos (M, N) , pode ser representado pelo sistema matricial conforme Equação (2.2):

$$\begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \chi} & \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \chi} & \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \chi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para o estudo da flexão composta reta, o esforço normal resistente (N_r) pode ser obtido por meio da integração das áreas de tensões em cada ponto da seção, conforme Equação (2.3):

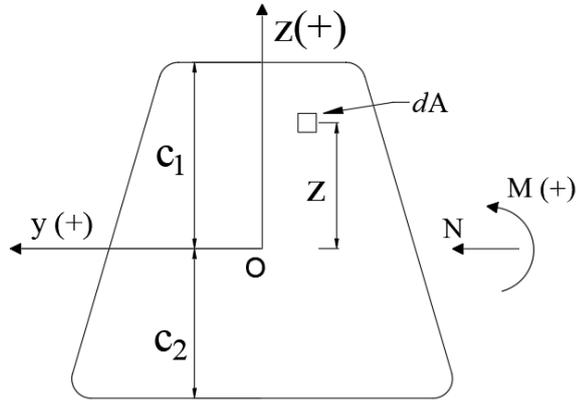
$$N_r = \int \sigma \cdot dA \quad (2.3)$$

Por sua vez, o momento fletor (M_r) pode ser calculado pela integração do produto das tensões (σ) pela ordenada "z" que corresponde à distância de cada ponto ao eixo y de referência adotado na seção, conforme Equação (2.4):

$$M_r = - \int \sigma \cdot z \cdot dA \quad (2.4)$$

A Figura 2.3 apresenta a seção transversal com a convenção de sinais adotada.

Figura 2.3 – Seção transversal com convenções de sinais



Fonte: adaptada de Luke (2015).

Admitindo-se a hipótese das seções planas, o estado de deformação pode ser definido por meio da deformação média, ε_m , obtida no eixo y de referência, e da curvatura χ . Logo, tem-se:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_t}{2} \quad (2.5)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_t}{h} \quad (2.6)$$

A deformação $\varepsilon(z)$ de uma fibra distante " z " do eixo y da seção em função da deformação média (ε_m) e da curvatura (χ), é dada conforme Equação (2.7):

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_m - \chi \cdot z \quad (2.7)$$

Os esforços resistentes (N_r, M_r) são funções da deformação da seção no eixo médio e da curvatura da seção: $N_r(\varepsilon_m, \chi)$ e $M_r(\varepsilon_m, \chi)$. Então, agrupando-se os esforços resistentes e as deformações generalizadas da seção, em notação vetorial, tem-se:

$$\{F_r\} = \begin{bmatrix} N_r \\ M_r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \chi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Em que: $\{F_r\}$ é o vetor de forças internas ou resistentes da seção; $\{e\}$ é o vetor de deformações generalizadas da seção.

Sabe-se que a matriz de rigidez da seção pode ser definida como a derivada do vetor de forças $\{F_r\}$ em relação ao vetor de deformações $\{e\}$, logo:

$$[K(e)] = \frac{\partial \{F_r\}}{\partial \{e\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N_r}{\partial \chi} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_r}{\partial \chi} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Substituindo-se as Equações (2.3) e (2.4) nos elementos da matriz de rigidez "K", da Equação (2.10), tem-se:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_m} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \chi)) \cdot dA \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \chi)) \cdot dA \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_m} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \chi)) \cdot z \cdot dA \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \chi} = - \frac{\partial}{\partial \chi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \chi)) \cdot z \cdot dA \quad (2.14)$$

Desenvolvendo-se as Equações (2.11) a (2.14), obtêm-se:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_m} \cdot dA \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \chi} = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \chi} \cdot dA \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = - \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_m} \cdot z \cdot dA \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \chi} = - \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \chi} \cdot z \cdot dA \quad (2.18)$$

Como $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_t(\varepsilon)$, módulo de deformação tangente, logo as Equações (2.15) a (2.18), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \int E_t(\varepsilon) \cdot dA \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \chi} = - \int E_t(\varepsilon) \cdot z \cdot dA \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = - \int E_t(\varepsilon) \cdot z \cdot dA \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \chi} = \int E_t(\varepsilon) \cdot z^2 \cdot dA \quad (2.22)$$

Substituindo-se as Equações (2.19) a (2.22) na Equação (2.10), obtém-se a matriz de rigidez "[K]", conforme apresentada na Equação (2.23):

$$[K(\bar{e})] = \frac{\partial \{F_r\}}{\partial \{e\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N_r}{\partial \chi} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_r}{\partial \chi} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} E_t(z) & -E_t(z) \cdot z \\ -E_t(z) \cdot z & E_t(z) \cdot z^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.1.3 Solução numérica para o equilíbrio de seções de concreto estrutural considerando o MAP (Teoria Clássica)

Neste item é apresentada a solução numérica proposta por Martins (1979) referente ao equilíbrio de peças de concreto estrutural solicitadas por flexão composta reta. É admitida seção transversal retangular assim como disposição da armadura pré-definida. Pode-se utilizar qualquer lei tensão-deformação para os materiais. A partir da solução encontrada pode-se obter o vetor de deformações generalizadas da seção (ε, χ) para um determinado par de esforços (M_d, N_d) .

Seja uma seção transversal qualquer de um dado elemento, com um sistema de eixos cartesianos com origem no seu centroide e solicitada por um conjunto de esforços M_d e N_d (Figura 2.4). Associadas a estas solicitações, a seção transversal mencionada apresentará as deformações: curvatura χ e a deformação axial ao nível e seu centroide, ε_g . Função dessas deformações serão gerados esforços internos M_d e N_d que equilibrarão os esforços solicitantes. Desse modo tem-se:

$$M_r(\chi, \varepsilon_g) = M_d \quad (2.24)$$

$$N_r(\chi, \varepsilon_g) = N_d \quad (2.25)$$

Obtém-se os esforços M_d e N_d , por meio de considerações de equilíbrio na seção, e os valores de ε_g e χ , que lhes são associados. De posse do termo (χ, ε_g) define-se novos valores para as rigidezes à flexão e à deformação axial da seção, consideradas por meio das Equações (2.26) e (2.27).

$$EI = \frac{M_d}{\chi} \quad (2.26)$$

$$EA = N_d/\varepsilon_g \quad (2.27)$$

Do exposto, depreende-se que a única dificuldade é encontrar o termo (χ, ε_g) , gerador dos esforços resistentes, M_r e N_r , que equilibram os esforços solicitantes em uma dada seção transversal. Esses são obtidos a partir de um sistema de duas equações não lineares, como está apresentado nas Equações (2.28) e (2.29), função de χ e ε_g , e que representam o equilíbrio da seção transversal de acordo com as notações da Figura 1.1.

$$M_r(\chi, \varepsilon_g) = - \int_{A_c} \sigma_{cc}(\varepsilon_{cc}) \cdot z \cdot dA_{cc} + \int_{A_c} \sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) \cdot z \cdot dA_{ct} + \sum_{k=1}^p \sigma_s(\varepsilon_k) \cdot z_k \cdot A_{sk} = M_d \quad (2.28)$$

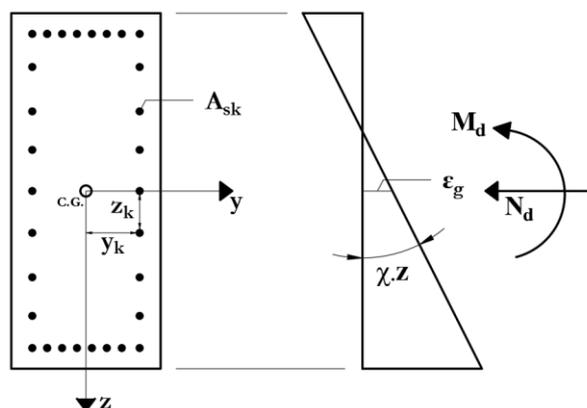
$$N_r(\chi, \varepsilon_g) = - \int_{A_c} \sigma_{cc}(\varepsilon_{cc}) \cdot dA_{cc} + \int_{A_c} \sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) \cdot dA_{ct} + \sum_{k=1}^p \sigma_s(\varepsilon_k) \cdot A_{sk} = N_d \quad (2.29)$$

Em que:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_g + \chi \cdot z \quad (2.30)$$

$\sigma_{cc}(\varepsilon_{cc})$ é a tensão no concreto à compressão para a deformação (ε_{cc}); $\sigma_{ct}(\varepsilon_{ct})$ é a tensão no concreto à tração para a deformação (ε_{ct}); $\sigma_s(\varepsilon_k)$ é a tensão numa barra, k , de aço para a deformação (ε_k); A_{cc} é a área da seção de concreto comprimida; A_{ct} é a área da seção de concreto tracionada; A_{sk} é a área de uma barra, k , de aço; p é o número total de barras de aço na seção transversal; z é a distância das camadas de concreto em relação ao centroide da seção transversal; z_k é a distância de cada camada de armadura ao centroide da seção transversal; y_k é a distância de cada armadura ao eixo vertical da seção.

Figura 2.4 – Seção transversal de viga submetida à flexo-compressão



Fonte: adaptada de Martins (1979).

Para resolver esse sistema optou-se pelo método numérico de Newton-Raphson em virtude de sua já comprovada eficiência na resolução de sistemas desse tipo. Como ponto de partida desenvolveu-se as funções M_r e N_r em séries de Taylor em torno de um ponto convenientemente escolhido $(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g)$. Desprezando-se os termos de ordem superior, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$M_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g) + \frac{\partial M_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial M_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varepsilon_g} d\varepsilon_g = M_d \quad (2.31)$$

$$N_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g) + \frac{\partial N_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial N_r(\bar{\chi}, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varepsilon_g} d\varepsilon_g = N_d \quad (2.32)$$

Colocando-se em forma matricial, tem-se: $\{\delta F\} = [K] \cdot \{\delta D\}$

Em que: $[K] \rightarrow$ matriz (2×2) em que seus elementos K_{ij} são as derivadas parciais dos esforços M_r e N_r em relação a curvatura χ e a deformação ε_g .

$$\{\partial F\} = \begin{Bmatrix} M_d - M_r \\ N_d - N_r \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\{\partial D\} = \begin{Bmatrix} \partial \chi \\ \partial \varepsilon_g \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Resolvido o sistema das Equações (2.31) e (2.32), repete-se o procedimento acima desenvolvendo as funções N_r , M_r em série, agora em torno de um novo ponto definido por: $\bar{\chi} = \bar{\chi} + \partial \chi$ e $\bar{\varepsilon}_g = \bar{\varepsilon}_g + \partial \varepsilon_g$. Dessa maneira, repete-se, sucessivamente, o processo, até que o ponto determinado seja aquele que, a menos de um erro admissível, satisfaça ao sistema das Equações (2.31) e (2.32).

É importante enfatizar que o mesmo procedimento apresentado neste item pode ser aplicado em peças de concreto protendido, apenas acrescentando nas equações de equilíbrio da seção (Equações (2.28) e (2.29)), as parcelas referentes à força de protensão e ao momento de protensão, respectivamente.

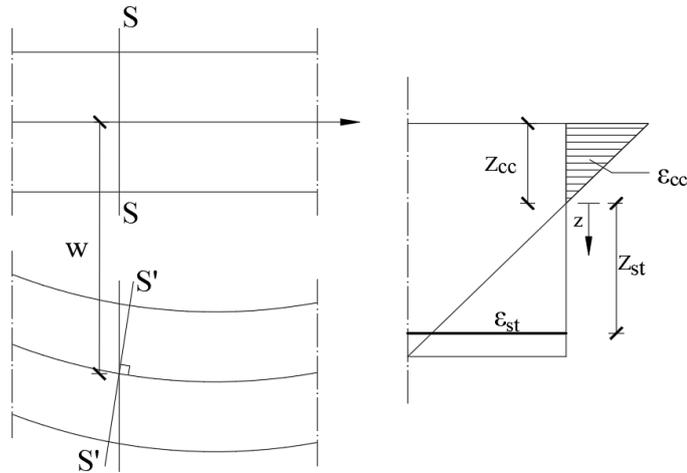
2.1.3.1 Solução numérica para o equilíbrio de seções de concreto estrutural submetidas à flexão simples

A solução numérica apresentada no item 2.1.3 deste trabalho é geral e pode ser aplicada tanto para peças submetidas à flexão simples quanto à composta. Entretanto, por questões didáticas e pela facilidade de implementação do algoritmo, preferiu-se apresentar também a solução numérica proposta por Araújo (2010) no que se refere ao equilíbrio de seções submetidas à flexão simples.

Após a escolha dos diagramas tensão-deformação dos materiais, é necessário estabelecer hipóteses sobre a configuração deformada da viga. Como é usual em toda a teoria de flexão de barras esbeltas, admite-se que as seções transversais, inicialmente planas e normais ao eixo da viga, permanecem planas e normais ao eixo deformado (hipótese Bernoulli-Navier).

Admitindo-se a hipótese das seções planas, resulta uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção transversal, como está apresentado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Deformações na seção transversal



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

Conforme indicado na Figura 2.5, a linha neutra está situada a uma distância z_{cc} da borda comprimida. A deformação ϵ_{cc} em uma fibra genérica da seção é dada por:

$$\epsilon_{cc} = -z \cdot \chi \quad (2.35)$$

Em que χ é a curvatura do eixo da viga na seção considerada e z é a distância da fibra até a linha neutra.

Observa-se que a distribuição das deformações na seção transversal fica perfeitamente definida a partir do conhecimento das variáveis z_{cc} e χ . Admitindo-se a existência de aderência perfeita entre o aço e o concreto, pode-se calcular as deformações nas barras da armadura empregando-se essa mesma relação.

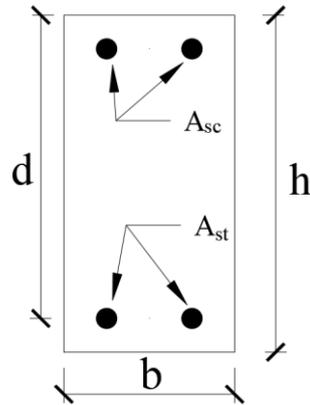
Por exemplo, a deformação ϵ_{st} na camada de aço situada a uma distância z_{st} da linha neutra é dada por:

$$\epsilon_{st} = z_{st} \cdot \chi \quad (2.36)$$

Para facilitar o entendimento, tomou-se como exemplo, a seção retangular apresentada na Figura 2.6.

Em que: A_{st} e A_{sc} representam as áreas das armaduras de tração e de compressão, respectivamente; b é a largura da seção; d é a altura útil; e h é a altura da seção.

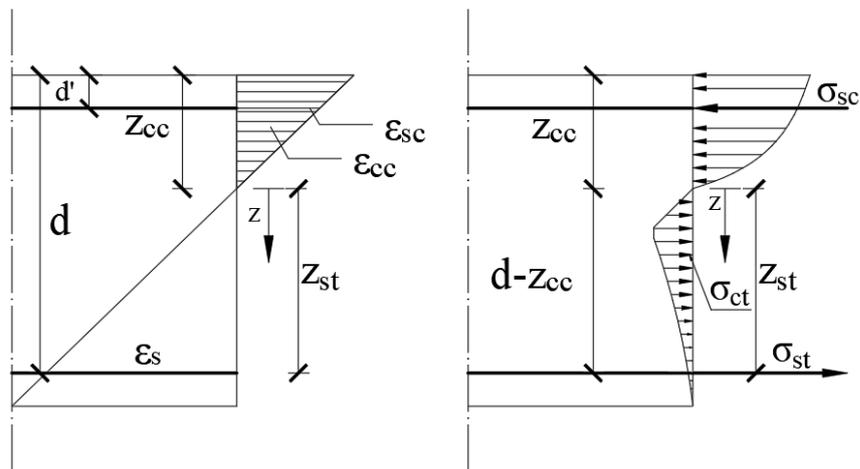
Figura 2.6 – Seção transversal retangular



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

Na Figura 2.7, estão indicadas as deformações e as tensões na seção transversal.

Figura 2.7 – Deformações e tensões na seção transversal



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

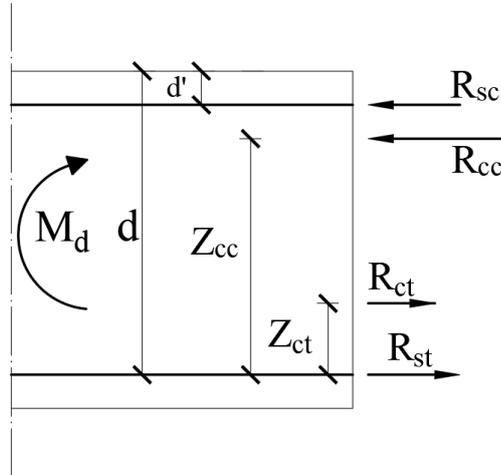
As deformações nas armaduras são dadas por:

$$\varepsilon_{sc} = (-z_{cc} + d') \cdot \chi \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_{st} = (d - z_{cc}) \cdot \chi \quad (2.38)$$

Empregando os diagramas tensão-deformação dos materiais, obtém-se as tensões indicadas na Figura 2.7. Essas tensões são dependentes de z_{cc} e χ . Integrando as tensões nas áreas correspondentes, obtém-se as resultantes da Figura 2.8, onde também é representado o momento fletor solicitante M .

Figura 2.8 – Resultantes das tensões na seção transversal



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

As resultantes das tensões e os braços de alavanca Z_c e Z_{ct} são dados por:

$$R_{cc} = R_{cc}(z_{cc}, \chi) = \int_0^{z_{cc}} b \cdot \sigma_{cc} \cdot dz \quad (2.39)$$

$$R_{ct} = R_{ct}(z_{cc}, \chi) = \int_0^{-h+z_{cc}} b \cdot \sigma_{ct} \cdot dz \quad (2.40)$$

$$R_{sc} = R_{sc}(z_{cc}, \chi) = A_{sc} \cdot \sigma_{sc} \quad (2.41)$$

$$R_{st} = R_{st}(z_{cc}, \chi) = A_{st} \cdot \sigma_{st} \quad (2.42)$$

$$Z_{cc} = \frac{1}{R_{cc}} \int_0^{z_{cc}} b \cdot \sigma_{cc} \cdot (-d + z_{cc} - z) \cdot dz \quad (2.43)$$

$$Z_{ct} = \frac{1}{R_{ct}} \int_0^{-h+z_{cc}} b \cdot \sigma_{ct} \cdot (-d + z_{cc} + z) \cdot dz \quad (2.44)$$

As integrais na seção de concreto podem ser resolvidas numericamente, dividindo-se a seção em faixas de largura b e altura Δh , como apresentado na Figura 2.9. As tensões no concreto são calculadas no centro de cada faixa e consideradas constantes na mesma. Assim, as integrais são transformadas em somas simples.

As equações de equilíbrio, obtidas em conformidade com a Figura 2.8, são as seguintes:

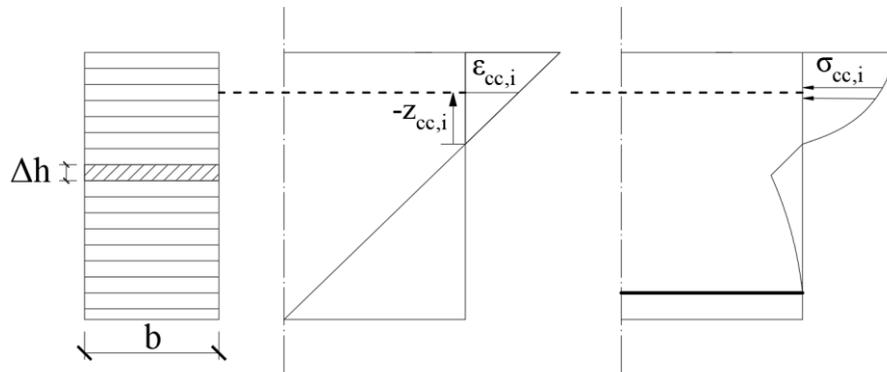
a) Equilíbrio de forças

$$f(z, \chi) = R_{cc} + R_{sc} - R_{ct} - R_{st} = 0 \quad (2.45)$$

b) Equilíbrio de momentos

$$M_r = R_{cc} \cdot Z_{cc} + R_{sc} \cdot (d - d') - R_{ct} \cdot Z_{ct} \quad (2.46)$$

Figura 2.9 – Divisão da seção transversal em faixas para integração numérica



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

As Equações (2.45) e (2.46) constituem um sistema não linear de duas incógnitas. As incógnitas do problema dependem do método empregado para o cálculo dos deslocamentos. Por exemplo, se a viga é isostática, os momentos fletores independem da variação de rigidez ao longo do eixo da viga. Neste caso, as flechas podem ser obtidas diretamente, por meio de uma dupla integração das curvaturas, e as incógnitas são z_{cc} e χ . Assim, uma vez conhecido o momento fletor solicitante M em uma seção transversal, é necessário determinar a χ nesta seção. Para isto, emprega-se um algoritmo iterativo que ajusta simultaneamente as Equações (2.45) e (2.46).

O processo pode ser iniciado com a curvatura χ_1 , dada por:

$$\chi_1 = \frac{M}{K_1} \quad (2.47)$$

Em que: K_1 é a rigidez no estágio 1.

Uma vez conhecida a curvatura χ_1 , constata-se que a Equação (2.45) depende apenas da incógnita z_{cc} . Essa equação pode ser resolvida iterativamente para a obtenção de z_{cc}

empregando-se, por exemplo, o processo da bissecante. Substituindo-se z_{cc} e χ_1 na Equação (2.46), obtém-se o momento fletor M^* correspondente a esse estado de deformações.

Evidentemente, $M^* \neq M$, sendo necessário encontrar outro valor para a curvatura que mais se aproxima da solução procurada. Encontradas as curvaturas em várias seções, tomadas ao longo do eixo da viga, pode-se obter as flechas por meio de integração numérica.

2.1.3.2 Solução numérica para obter a posição da linha neutra

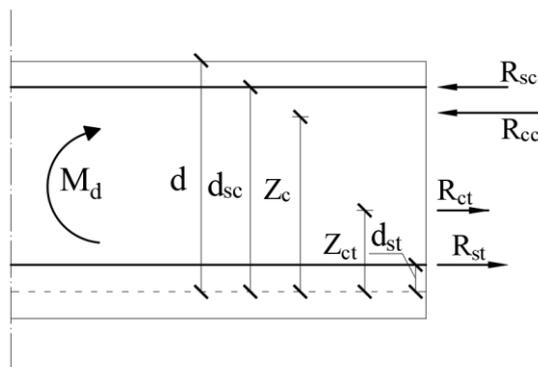
Tomando-se como exemplo a seção da Figura 2.10 e reescrevendo as Equações (2.45) e (2.46) em termos das tensões nas armaduras, resulta:

$$R_{cc} - \sum_{i=1}^{pt} A_{st} \cdot \sigma_{st,i} + \sum_{i=1}^{pc} A_{sc} \cdot \sigma_{sc,i} - R_{ct} = 0 \quad (2.48)$$

$$M_{eq} = R_{cc} \cdot Z_{cc} - \sum_{i=1}^{pt} A_{st} \cdot \sigma_{st,i} \cdot z_{st,i} + \sum_{i=1}^{pc} A_{sc} \cdot \sigma_{sc,i} \cdot (z_{sc,i}) - R_{ct} \cdot Z_{ct} = 0 \quad (2.49)$$

Em que pt e pc são as quantidades de barras de aço na seção transversal tracionadas e comprimidas, respectivamente.

Figura 2.10 – Resultante das tensões na seção



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

A Equação (2.48) fornece a profundidade da linha neutra e a Equação (2.49) fornece o momento de equilíbrio. Entretanto, a incógnita z_{cc} , que define a posição da linha neutra, não pode ser obtida diretamente da Equação (2.48). Para encontrar z_{cc} , deve-se empregar um algoritmo iterativo.

A Equação (2.48) pode ser escrita genericamente na forma $f(z_{cc}) = 0$, em que:

$$f(z_{cc}) = R_{cc}(z_{cc}) - \sum_{i=1}^{pc} A_{st} \cdot \sigma_{st,i}(z_{cc}) + \sum_{i=1}^{pt} A_{sc} \cdot \sigma_{sc,i}(z_{cc}) - R_{ct}(z_{cc}) \quad (2.50)$$

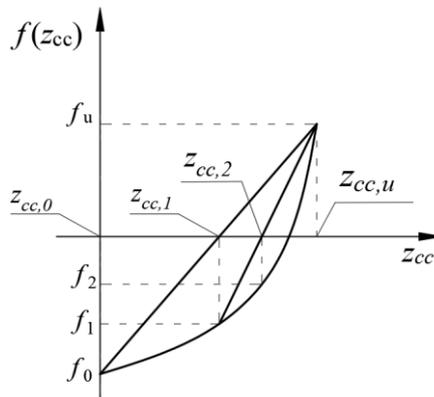
A raiz dessa equação deve se situar no intervalo $[0, d]$, que engloba os domínios de flexão simples. Para encontrar a raiz, pode-se empregar o processo da bissecante, apresentado na Figura 2.11. Os limites do intervalo onde se situa a raiz procurada são $z_{cc,0} = 0$ e $z_{cc,u} = d$. A função $f(z_{cc})$ nos extremos do intervalo vale $f_0 = f(z_{cc,0})$ e $f_u = f(z_{cc,u})$. A primeira aproximação $z_{cc,1}$ para a raiz da função $f(z_{cc})$ é tomada como a interseção da reta que passa pelos pontos $(z_{cc,0}, f_0)$ e $(z_{cc,u}, f_u)$ como o eixo das abscissas. O valor de $z_{cc,1}$ é dado por:

$$z_{cc,1} = \frac{z_{cc,0} \cdot f_u - z_{cc,u} \cdot f_0}{f_u - f_0} \quad (2.51)$$

Em seguida, calcula-se $f_1 = f(z_{cc,1})$ e testa-se a convergência. Se $|f_1| < tol$, em que tol é uma tolerância preestabelecida, a convergência foi alcançada e $z_{cc,1}$ é considerada a solução do problema. Se a convergência não for alcançada, deve-se reduzir o intervalo solução e iterar novamente. Para isto, avalia-se o produto $p_1 = f_0 \cdot f_1$. Se resultar $p_1 > 0$, como apresentado na Figura 2.11, adotam-se $z_{cc,0} = z_{cc,1}$ e $f_0 = f_1$. Se $p_1 < 0$, deve-se fazer $z_{cc,u} = z_{cc,1}$ e $f_u = f_1$.

Com o novo intervalo, desta vez menor que o anterior, repete-se o cálculo, até a convergência. Encontrada a profundidade da linha neutra, calcula-se o momento de equilíbrio com o emprego da Equação (2.49).

Figura 2.11 – Processo da bissecante



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

2.2 EQUILÍBRIO DE SEÇÕES COM BASE NO MODELO DE ADERÊNCIA VARIÁVEL (MAV)

Neste item será apresentada a abordagem sobre o equilíbrio de segmentos em concreto estrutural com base no modelo de aderência variável, em que há a perda de resistência da peça devido à degradação de aderência. Para isso, será considerado um elemento de viga (Figura 1.1) submetido à flexo-compressão reta, delimitado por duas seções de descontinuidade consecutivas (fissuras ou juntas abertas).

Para o cálculo do equilíbrio dos segmentos leva-se em consideração a perda da tensão de aderência com o deslizamento da armadura, quando a manutenção da hipótese de Bernoulli-Navier com aderência perfeita não é mais possível.

Após a formação de fissuras, o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) da teoria da elasticidade não linear clássica não é mais válido, pois há prejuízo de aderência. Luke (2015), relaciona as equações do MAP com o modelo de Aderência Variável (MAV) e preserva as variáveis independentes (ε_g e χ) que representam as deformações generalizadas para o equilíbrio das seções críticas do segmento.

No modelo proposto por Luke (2015), leva-se em consideração a influência do comportamento do concreto entre duas fissuras para estabelecimento das condições de equilíbrio nas bordas do segmento ou aduela. Isso permite considerar a influência de parâmetros importantes, tais como: relação entre o comprimento e a altura da aduela; partilha das tensões longitudinais no concreto; posição do eixo neutro ao longo da aduela; e outros.

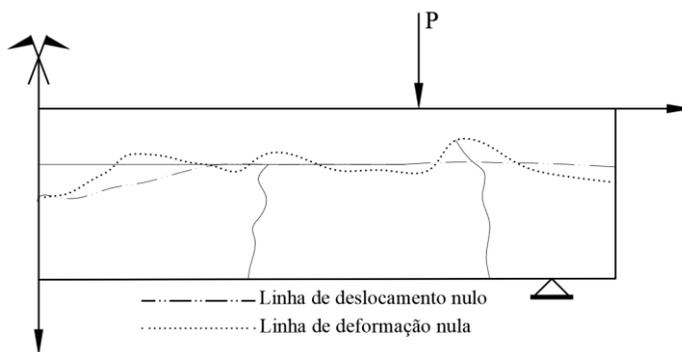
2.2.1 Hipóteses de Cálculo

Com a invalidação da hipótese de Bernoulli-Navier, por conta da perda de aderência entre o aço e concreto (após a abertura das fissuras), é necessário encontrar uma hipótese de cálculo que substitua a hipótese de seções planas com aderência perfeita, que giram em torno da linha neutra de deformação.

Giuriani (1982) complementa que uma seção, após fissurar, se deforma, girando em torno do eixo de deslocamento nulo, relativo à seção mediana entre duas fissuras consecutivas, considerando que as solicitações são idênticas em ambas as extremidades do segmento.

É importante destacar que o eixo de deslocamento longitudinal nulo é distinto da linha neutra de deformação. No caso geral, o primeiro é distinto do segundo em razão da variação da posição do eixo neutro ao longo da viga, em face das singularidades constituídas pelas fissuras/juntas, conforme Figura 2.12, em que P é carga concentrada aplicada.

Figura 2.12 – Evolução do eixo neutro de deformação e rotação das seções



Fonte: adaptada de Giuriani (1982).

De forma geral, as hipóteses necessárias para o desenvolvimento da formulação do MAV entre o aço e concreto envolvente, tal como proposto por Giuriani (1982), são:

- Carregamento quase estático, monotônico e crescente;
- Os efeitos do esforço cortante são desprezados;
- Momento fletor é considerado constante ao longo do elemento;
- As seções permanecem planas, pelo menos no concreto comprimido, após a fissuração.

É importante destacar que as hipóteses formuladas acima não implicam na particularização do comportamento do elemento, sobretudo no que concerne ao tipo de fissuração. Isto quer dizer que a separação entre duas fissuras consecutivas é qualquer, o que significa admitir que se pode passar de um pequeno espaçamento, em que o MAV pode ser aplicado, a um mais importante, do tipo fissuração discreta como, por exemplo, a abertura de junta, em que o MAV se impõe (LUKE, 2015).

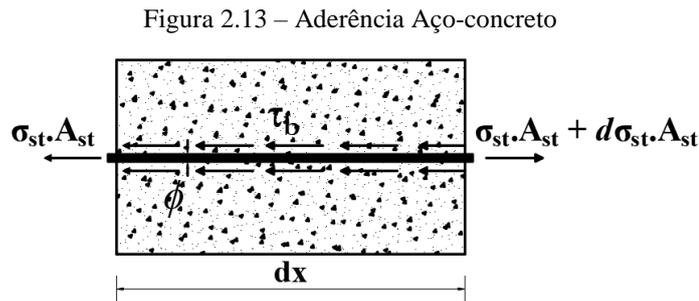
Ainda de acordo com Luke (2015), conclui-se, desse raciocínio, que o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) é uma simplificação do Modelo de Aderência Variável (MAV), caso se iguale o eixo de deslocamento nulo, $u_c = 0$, ao de deformação nula, $\varepsilon_c = 0$.

2.2.2 Equação Diferencial de Aderência (EDA)

Neste item é apresentada a Equação Diferencial de Aderência (EDA) que norteia o equilíbrio em seções de concreto estrutural no que concerne a variação de aderência.

De acordo com Barbosa (2001), pode-se obter a Equação Diferencial de Aderência (EDA) referente ao equilíbrio do elemento de concreto estrutural (Figura 2.13), por meio dos seguintes termos:

- diâmetro da barra (ϕ);
- tensão axial de tração no aço (σ_{st});
- comprimento do elemento infinitesimal da peça (dx);
- tensão de aderência entre armadura e o concreto que a envolve (τ_b), conforme Equação (2.52):



Fonte: adaptada de Barbosa (2001).

$$A_{st} \cdot \sigma_{st}(x) + \tau_b(x) \cdot \pi \cdot \phi \cdot dx = [\sigma_{st}(x) + d\sigma_{st}(x)] \cdot A_{st} \quad (2.52)$$

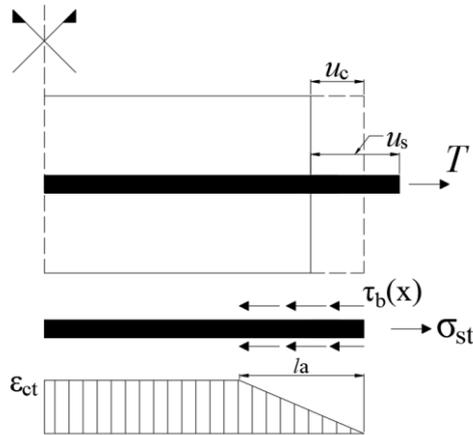
Em que: $A_{st} = \pi \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \pi \cdot \phi = \frac{4 \cdot A_{st}}{\phi}$. Simplificando-se a Equação (2.52), tem-se:

$$\frac{d\sigma_{st}(x)}{dx} = \frac{4}{\phi} \cdot \tau_b(x) \quad (2.53)$$

Seja na tração ou na compressão, admite-se que as deformações no aço e concreto são iguais ($\varepsilon_c = \varepsilon_s$) até o início da fissuração. Após esta, as deformações passam a ser diferentes e a armadura alonga-se mais que o concreto.

Essa diferença de alongamentos caracteriza o deslizamento da armadura em relação ao concreto (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Deslizamento da armadura



Fonte: adaptada de Barbosa (2001).

De acordo com Barbosa (2001), a Equação (2.53) pode ser escrita em termos de deslizamento relativo aço-concreto, supondo-se que as parcelas concernentes aos materiais são representadas por funções contínuas diferenciáveis, e que o limite de aplicação das leis de aderência fique restrito ao regime linear de comportamento mecânico das tensões σ_{st} e σ_c .

O deslizamento relativo (s) aço-concreto para o elemento diferencial é:

$$s(x) = u_s(x) - u_c(x) \quad (2.54)$$

Em que: $u_c(x)$ é o deslocamento no concreto; $u_s(x)$ é o deslocamento no aço; e $s(x)$ é o deslizamento relativo entre o aço e concreto envolvente;

Derivando-se a Equação (2.54) em relação a "x" e retirando-se os argumentos das funções para simplificar, tem-se:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du_s}{dx} - \frac{du_c}{dx} \Rightarrow s' = u_s' - u_c' \quad (2.55)$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{d^2u_s}{dx^2} - \frac{d^2u_c}{dx^2} \Rightarrow s'' = u_s'' - u_c'' \quad (2.56)$$

Como $u' = \epsilon$ é a deformação específica, a Equação (2.56) pode ser expressa como:

$$s'' = \epsilon_s' - \epsilon_c' \quad (2.57)$$

Para o regime linear, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tem-se:

$$s'' - \frac{4}{\phi \cdot E_s} \tau_b = -\varepsilon'_c \quad (2.58)$$

Explicitando-se, tem-se:

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} - \frac{4}{\phi \cdot E_s} \tau_b = -\frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} \quad (2.59)$$

As Equações (2.58) e (2.59), não homogêneas, necessitam dos seguintes parâmetros para suas resolução:

- caracterização do tipo de aço e de sua equação constitutiva, $\sigma_{st} = E_s \cdot \varepsilon_s$;
- geometria da barra (no caso particular, o seu diâmetro);
- lei de aderência $\tau_b(x)$ compatível com a sollicitação que origina o deslizamento;
- lei de distribuição das deformações específicas ao longo da barra (relacionada diretamente com a lei da aderência).

Martins (1989) apresenta uma variação da EDA obtida a partir da deformação máxima do concreto tracionado (ε_{ct}) entre duas fissuras, como apresentado a seguir:

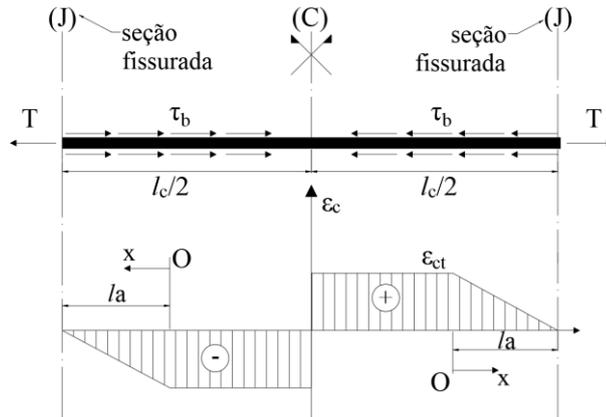
$$\varepsilon_c(x) = \frac{\varepsilon_{ct}}{l_a} (l_a - x) \quad (2.60)$$

$$\frac{d\varepsilon_c}{dx} = \frac{-\varepsilon_{ct}}{l_a} \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} - \frac{4}{E_s \cdot \phi} \cdot \tau_b(x) = \frac{\varepsilon_{ct}}{l_a} \quad (2.62)$$

Em que: l_a é o comprimento de ancoragem da barra, no qual o deslizamento relativo não é nulo; x representa a região de aderência variável e tem como origem o ponto em que " ε_c " alcança o valor de " ε_{ct} " (deformação específica do concreto à tração), e admite-se que há constância dessa deformação ao longo da barra, conforme está apresentada na Figura 2.15.

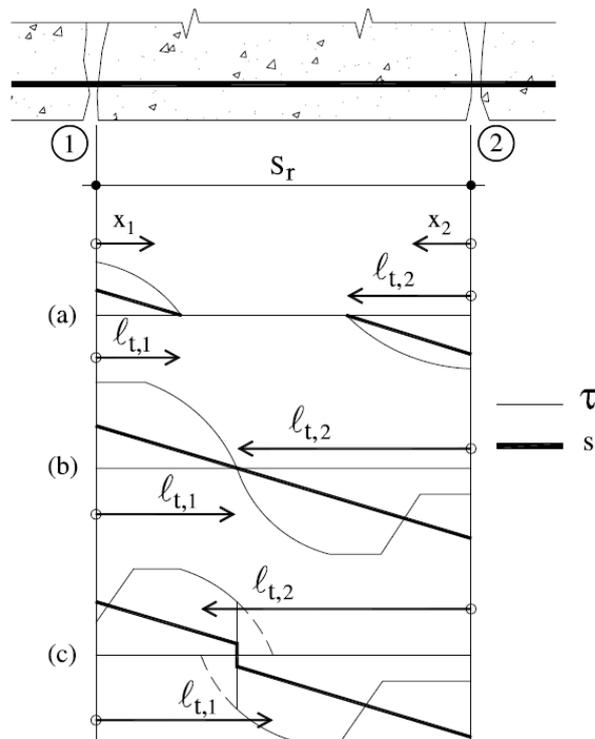
Figura 2.15 – Deformação do concreto no entorno da barra



Fonte: adaptada de Barbosa (2001).

No que se refere ao comprimento de ancoragem ou de transferência, Oliveira et al. (2008), apresentam três situações relacionadas à soma dos comprimentos de transferências ($l_{t,1} + l_{t,2}$) após a fissuração. Quando a soma é inferior ou igual ao trecho delimitado por duas fissuras “ S_r ” (Figura 2.16a e Figura 2.16b). Na última situação (Figura 2.16c), utiliza-se a proposta de Martins (1989), em que pode ser modelada por superposições fictícias de uma função de deslizamento sobre a outra, caracterizando-se um ponto de descontinuidade que divide os limites de influência de duas fissuras.

Figura 2.16 – Tensão de aderência-deslizamento com o incremento de carregamento



Fonte: adaptada de Oliveira et al. (2008).

2.3 MODELOS CONSTITUTIVOS

Neste item são apresentados os modelos constitutivos para os materiais encontrados na literatura e que serão utilizados no modelo proposto.

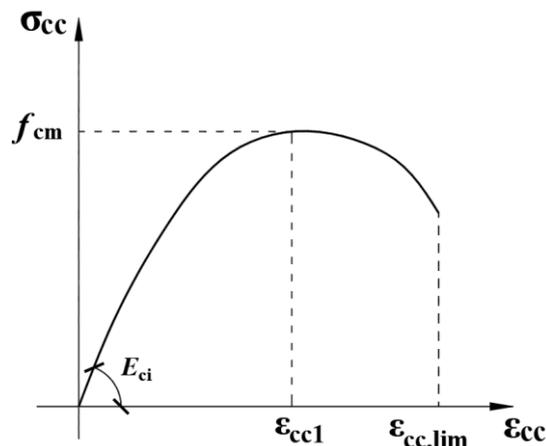
2.3.1 Concreto

Pesquisas experimentais fornecem diversos modelos constitutivos para representar o comportamento do concreto, seja à compressão ou à tração. Para uma análise mais precisa das deformações, deve-se considerar a não linearidade física decorrente do comportamento mecânico dos materiais. Então, adotou-se diagramas tensão-deformação compatíveis com os resultados experimentais.

2.3.1.1 Concreto à compressão

No que se refere à compressão, optou-se por utilizar a lei tensão-deformação de acordo com o item 5.1.8.1 do Código Modelo *fib* 2010 (2012) (Figura 2.17), pois se encontra bem fundamentada na literatura.

Figura 2.17 – Diagrama tensão-deformação para o concreto à compressão



Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Em que:

σ_{cc} é a tensão à compressão no concreto (MPa); ϵ_{cc} é a deformação específica do concreto; f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto (MPa); f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto (MPa); ϵ_{cc1} é a deformação específica máxima do concreto; $\epsilon_{cc,lim}$ é a deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura; E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto (MPa); E_{c1} é o módulo de elasticidade

secante do concreto (MPa); α_E é o parâmetro em função da natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade;

$$\frac{\sigma_{cc}}{f_{cm}} = - \left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \right) \quad \text{para } |\varepsilon_{cc}| < |\varepsilon_{cc,lim}| \quad (2.63)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (2.64)$$

$$\Delta f = 8 \text{ (MPa)} \quad (2.65)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cc1}} \quad (2.66)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (2.67)$$

$$E_{c1} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (2.68)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{cm}}{88} \leq 1,0 \quad (2.69)$$

$$E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.70)$$

$$E_{c0} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ (MPa)} \quad (2.71)$$

2.3.1.2 Efeito da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça (*Tension Stiffening*)

O efeito da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça (*tension stiffening*) pode ser definido como a contribuição da região íntegra entre as fissuras do concreto tracionado na rigidez da peça. Esse fenômeno tem influência significativa na análise da relação tensão de aderência-deslizamento em peças de concreto estrutural.

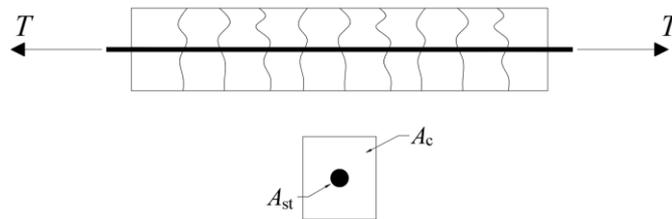
Nesse contexto, de acordo com o item 6.1 do Código Modelo *fib* 2010 (2012), a aderência tem influência nas estruturas de concreto de várias maneiras. No Estado Limite de Serviço (ELS), influencia na largura e no espaçamento das fissuras transversais, no efeito da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça e na curvatura.

Barbosa (2001), complementa que essa contribuição do concreto tracionado deve ser considerada também nas deformações das peças, já que influencia na sua rigidez até a ruptura. Para ambos os casos, torna-se fundamental a definição da lei que relaciona a tensão de aderência e os deslizamentos relativos aço-concreto a fim de se obter uma análise consistente da estabilidade e ductilidade das estruturas.

Diante desses aspectos, para facilitar o entendimento sobre a contribuição do concreto tracionado na rigidez da peça e sua influência na tensão de aderência, será apresentada a abordagem realizada por Walraven (1999).

Tomando-se como referência o elemento de concreto armado submetido à tração direta da Figura 2.18, verifica-se que com o aumento da força de tração (T), o concreto fissa, no qual é observado um padrão de fissuração relativamente regular. À medida que a carga vai aumentando novas fissuras irão surgir com espaçamento relativamente semelhante.

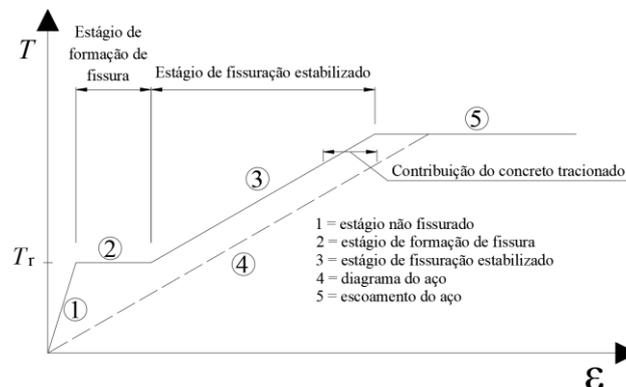
Figura 2.18 – Elemento de concreto submetido a força de tração axial



Fonte: adaptada de Walraven (1999).

Na Figura 2.19, é apresentada a relação carga-deformação linearizada, em que a deformação média foi calculada ao longo do comprimento da barra, em que ϵ é a deformação específica. Sobre esta relação, pode-se verificar alguns estágios:

Figura 2.19 – Curva carga-deformação para um elemento em concreto armado



Fonte: adaptada de Walraven (1999).

No estágio 1, a relação $T \times \varepsilon$ apresenta comportamento linear e o concreto não está fissurado. Quando a carga de fissuração é alcançada passa-se para o trecho 2 que é denominado Estágio de formação de fissura, no qual, há o aumento da deformação sem o aumento da força T , ou seja, $T = T_r$.

No final do estágio de fissuração passa-se para o trecho 3, no qual é denominado de Estágio de fissuração estabilizada, onde a força de tração aumenta à medida que a deformação também aumenta.

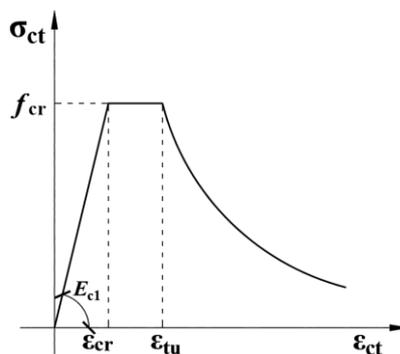
A linha tracejada representa a relação " $T \times \varepsilon$ ", considerando-se apenas o aço, sem o concreto envolvente. A linha que representa a resposta para o elemento tracionado fissurado é paralela a linha tracejada que se refere ao aço sem concreto. A distância entre as linhas representa a contribuição do concreto para a rigidez da peça (*tension stiffening*).

2.3.1.3 Concreto à tração

Em relação ao comportamento à tração, JahanMohammadi e Soltani (2016) destacam os modelos apresentados por Wang e Hsu (2001); Soltani, An e Maekawa (2003). Esses modelos avaliam o comportamento do concreto no estágio de pós-fissuração, em que há diminuição da resistência à tração, como também, a resistência média em um segmento.

Neste trabalho será utilizado o modelo proposto por JahanMohammadi e Soltani (2016), como está apresentado na Figura 2.20 (Equação (2.72) a (2.77)), que, além de considerar o estágio pós-fissuração, leva em conta a contribuição do concreto íntegro entre fissuras e do amolecimento do concreto (*tension softening*), que permitem quantificar a perda de rigidez progressiva após a fissuração por meio do parâmetro "c", tomado igual a 0,4.

Figura 2.20 – Diagrama tensão-deformação do concreto à tração



Fonte: JahanMohammadi e Soltani (2016).

Em que: σ_{ct} é a tensão à tração no concreto (MPa); ε_{ct} é a deformação específica do concreto à tração; f_{cr} é a resistência à tração do concreto associada ao início da fissuração (MPa); ε_{cr} é a deformação específica do concreto à tração associada ao início da fissuração; ε_{tu} é a deformação específica do concreto à tração última associada ao término do patamar de fissuração.

$$f_{cr} = 0,33 \cdot \sqrt{f_{cm}} \text{ (MPa)} \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{cr}}{E_{c1}} \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{tu} = 2 \cdot \varepsilon_{cr} \quad (2.74)$$

$$\sigma_{ct} = E_{c1} \cdot \varepsilon_{ct} \quad \text{para } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{cr} \quad (2.75)$$

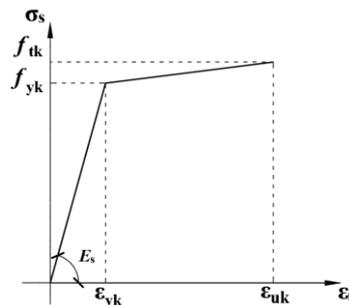
$$\sigma_{ct} = f_{cr} \quad \text{para } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{tu} \quad (2.76)$$

$$\sigma_{ct} = f_{cr} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{tu}}{\varepsilon_{ct}} \right)^c \quad \text{para } \varepsilon_{ct} > \varepsilon_{tu} \quad (2.77)$$

2.3.2 Aço Passivo e Ativo

Para avaliar o comportamento do aço de armadura passiva, optou-se pela lei tensão-deformação elástica - quase plástica, de acordo com o item 5.2.8 do Código Modelo *fib* 2010 (2012), conforme as Equações (2.78) e (2.79). Para o aço de armadura ativa, optou-se por utilizar também o diagrama tensão-deformação conforme o item 5.3.8 do Código Modelo *fib* 2010 (2012) (Figura 2.22), conforme as Equações (2.80) e (2.81).

Figura 2.21 – Diagrama tensão-deformação para o aço de armadura passiva



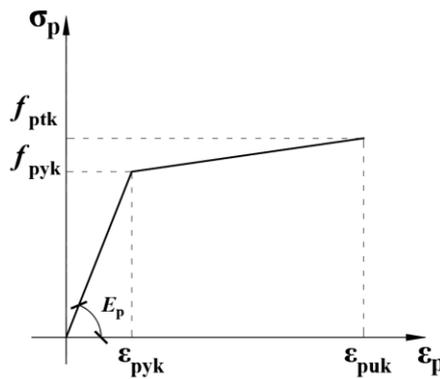
Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Em que: σ_s é a tensão normal no aço de armadura passiva; ε_s é a deformação específica do aço da armadura passiva; ε_{yk} é a deformação específica característica do aço da armadura passiva; ε_{uk} é a deformação específica característica última do aço da armadura passiva; f_{yk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura passiva; f_{tk} é a resistência característica à tração do aço da armadura passiva; E_s é o módulo de elasticidade do aço de armadura passiva.

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s \quad \text{para } \sigma_s \leq f_{yk} \quad (2.78)$$

$$\sigma_s = \left[\left(\frac{f_{tk} - f_{yk}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yk}} \right) \cdot \varepsilon_s \right] + f_{yk} \quad \text{para } \sigma_s > f_{yk} \quad (2.79)$$

Figura 2.22 – Diagrama tensão-deformação para o aço de armadura ativa



Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Em que:

σ_p é a tensão normal no aço de armadura ativa; ε_p é a deformação específica do aço da armadura ativa; ε_{pyk} é a deformação específica característica do aço da armadura ativa; ε_{puk} é a deformação específica característica última do aço da armadura ativa; f_{pyk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura ativa; f_{ptk} é a resistência característica à tração do aço da armadura ativa; E_p é o módulo de elasticidade do aço de armadura ativa.

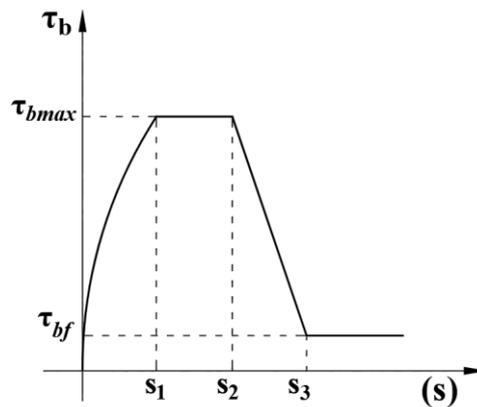
$$\sigma_p = \varepsilon_p \cdot E_p \quad \text{para } \sigma_p \leq f_{pyk} \quad (2.80)$$

$$\sigma_p = \left[\left(\frac{f_{ptk} - f_{pyk}}{\varepsilon_{puk} - \varepsilon_{pyk}} \right) \cdot \varepsilon_p \right] + f_{pyk} \quad \text{para } \sigma_p > f_{pyk} \quad (2.81)$$

2.3.3 Aderência Aço-Concreto

No que se refere ao comportamento da interface entre as armaduras e o concreto envolvente, também se optou pela relação aderência-deslizamento de acordo com o item 6.1.1.1 do Código Modelo *fib* 2010 (2012), conforme Figura 2.23 (Equação (2.82) à Equação (2.85)), que considera aderência local *versus* deslizamento local para pequenos comprimentos de ancoragem. Na Tabela 2.1 são apresentados os parâmetros da curva tensão de aderência-deslizamento.

Figura 2.23 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento



Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Tabela 2.1 – Parâmetros para definição da curva tensão de aderência versus deslizamento para barras nervuradas.

	Ruptura por Arrancamento		Ruptura por Fendilhamento			
	Condições de Aderência		Condições de Aderência			
	Boas	Todos os outros casos	Boas		Todos os outros casos	
			Concreto não confinado	Concreto confinado	Concreto não confinado	Concreto confinado
τ_{bmax}	$2,5\sqrt{f_{cm}}$	$1,25\sqrt{f_{cm}}$	$7,0 \left(\frac{f_{cm}}{25}\right)^{0,25}$	$8,0 \left(\frac{f_{cm}}{25}\right)^{0,25}$	$5,0 \left(\frac{f_{cm}}{25}\right)^{0,25}$	$5,5 \left(\frac{f_{cm}}{25}\right)^{0,25}$
s_1	1,0 mm	1,8 mm	$s(\tau_{bmax})$	$s(\tau_{bmax})$	$s(\tau_{bmax})$	$s(\tau_{bmax})$
s_2	2,0 mm	3,6 mm	s_1	s_1	s_1	s_1
s_3	c_l^*	c_l^*	$1,2 \cdot s_1$	$0,5 \cdot c_l^*$	$1,2 \cdot s_1$	$0,5 \cdot c_l^*$
α	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
τ_{bf}	$0,4\tau_{bmax}$	$0,4\tau_{bmax}$	0	$0,4 \cdot \tau_{bmax}$	0	$0,4 \cdot \tau_{bmax}$

c_l^* é o espaçamento entre nervuras.

Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (2012).

$$\tau_b = \tau_{bmax} \cdot \left(\frac{s}{s_1}\right)^\alpha \quad \text{para } 0 \leq s \leq s_1 \quad (2.82)$$

$$\tau_b = \tau_{bmax} \quad \text{para } s_1 < s \leq s_2 \quad (2.83)$$

$$\tau_b = \tau_{bmax} - (\tau_{bmax} - \tau_{bf}) \cdot \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad \text{para } s_2 < s \leq s_3 \quad (2.84)$$

$$\tau_b = \tau_{bf} \quad \text{para } s > s_3 \quad (2.85)$$

2.4 MODELOS NUMÉRICOS RELACIONADOS AO MAV

Neste item são apresentados com mais detalhes os principais modelos encontrados na literatura que tratam do comportamento não linear de peças de concreto estrutural no que concerne a variação de aderência e que servirão de base para o modelo proposto por esta pesquisa. Entre eles, pode-se destacar os modelos propostos por: Giuriani (1979, 1981, 1982); Cohn e Riva (1987); Martins(1989); Manfredi e Pecce (1998); Kwak e Kim (2001). Assim, pretende-se analisar, comparar e evidenciar semelhanças e diferenças que servirão de base para o desenvolvimento do modelo proposto.

2.4.1 Modelos propostos por Giuriani (1979, 1981, 1982) e Cohn e Riva (1987)

Com base na formulação proposta por Giuriani (1979, 1981, 1982), os autores Cohn e Riva (1987) desenvolveram uma formulação geral do comportamento à flexão em peças de concreto estrutural, à época classificados em armado, protendido e parcialmente protendido. O modelo apresenta resultados para os três tipos de peças e considera os estágios de carga até a ruptura.

2.4.1.1 Leis Constitutivas

O modelo constitutivo adotado não se baseia na teoria clássica, pois foi considerada a contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça (*tension stiffening*), que reflete um comportamento mais realístico da peça. Resulta que não há superestimação da deformabilidade das seções no estágio fissurado.

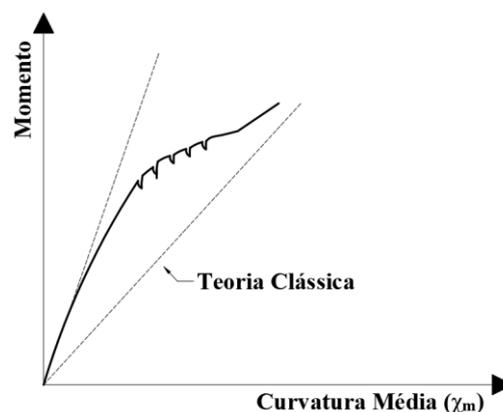
Giuriani (1981) investigou as diferenças entre leis constitutivas momento-curvatura quando se considera a curvatura média de uma região de viga sujeita a momento constante, bem como quando se utiliza a curvatura local de um elemento de comprimento igual ao espaçamento entre fissuras primárias estabilizadas e contém uma fissura secundária no ponto médio.

Os resultados mostraram que a transição do primeiro para o segundo estágio (fissurado) foi gradual quando se considera a curvatura média e foi súbita quando se considera a curvatura total como pode ser observado na Figura 2.24.

De acordo com Tavares (2000), essa diferença de comportamento é provocada pela localização da deformação na seção fissurada. No que concerne a curvatura local (χ), o efeito da deformação é distribuído em um comprimento igual ao espaçamento entre fissuras e resulta no aumento importante da curvatura. No que se refere a curvatura média (χ_m), o efeito se espalha sobre o comprimento igual a várias vezes a distância entre as fissuras e tem efeito quase desprezível na curvatura (Figura 2.24).

Giuriani (1982) conclui que a curvatura média depende do processo de formação da fissura e do comprimento do elemento considerado. A princípio pode-se obter a curvatura média a partir da local, visto que o processo de formação da fissura é conhecido. Na condição de formação de fissuras simultâneas, por sua vez, as curvaturas local e média se confundem.

Figura 2.24 – Transição gradual para o Estádio II



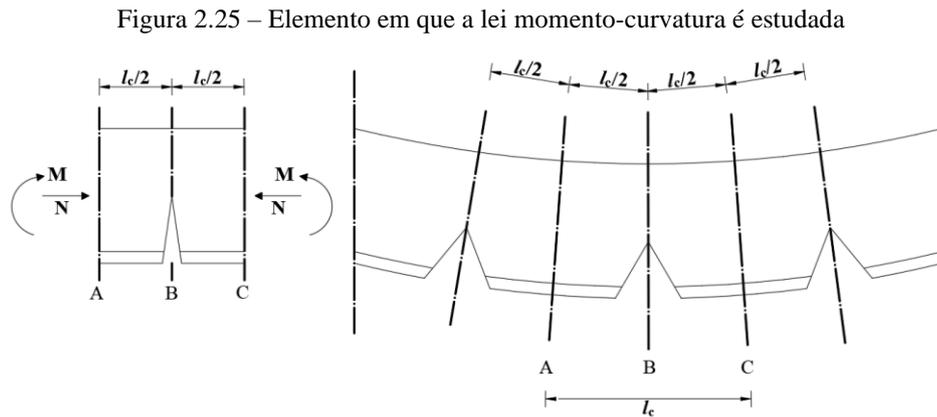
Fonte: adaptada de Cohn e Riva (1987).

2.4.1.2 Modelo Analítico

Admite-se as seguintes hipóteses para o modelo em questão:

- Carregamento quase-estático;
- Os efeitos dos esforços cortantes não são considerados;
- Distribuição linear de deformação;
- Relação tensão-deformação do material conhecida;
- Leis de tensão uniaxial válidas para as seções analisadas.

A lei constitutiva local foi determinada por meio de um elemento de comprimento igual ao espaçamento entre fissuras " l_c " e com momento fletor constante. As condições de compatibilidade e equilíbrio são obtidas com base na seção fissurada "B", apresentada na Figura 2.25. A curvatura local é definida pela razão entre a rotação relativa de duas seções (A e B) e o espaçamento l_c .



Fonte: adaptada de Cohn e Riva (1987).

2.4.1.3 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade são semelhantes às de Giuriani (1979, 1981, 1982), com a diferença de ser adicionada a contribuição do aço ativo. Consequentemente, os deslocamentos na seção "B" (seção fissurada) são obtidos por:

$$u_{ccB} = \frac{\theta}{2}(z + z_0) \quad (2.86)$$

$$u_{stB} = \frac{\theta}{2}(d_{st} - z - z_0) \quad (2.87)$$

$$u_{pB} = \frac{\theta}{2}(d_p - z - z_0) \quad (2.88)$$

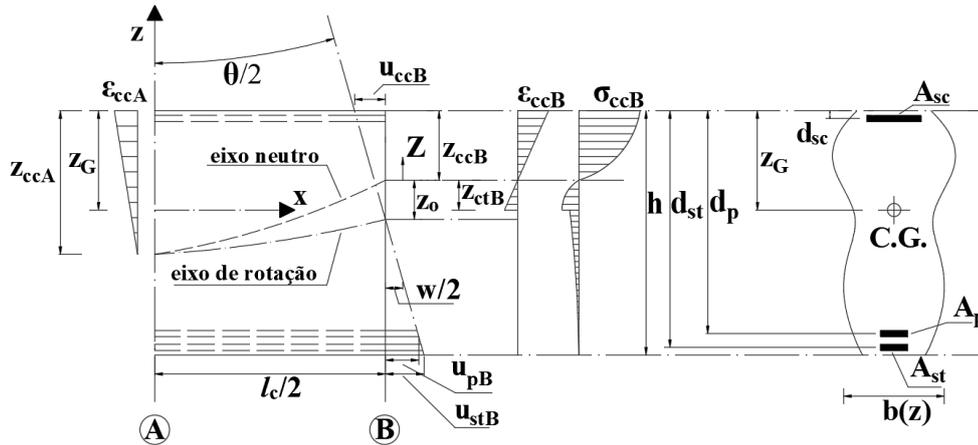
Com a consideração da aderência, as deformações do aço passivo e ativo são obtidas por:

$$\varepsilon_{stb} = \frac{2u_{sb}}{l_c} + \Delta\varepsilon_s \quad (2.89)$$

$$\varepsilon_{pb} = \frac{f_{pe}}{E_p} + \frac{2u_{pB}}{l_c} - \Delta\varepsilon_p \quad (2.90)$$

Na Figura 2.26 é apresentada uma seção transversal e suas notações para um elemento típico de concreto estrutural.

Figura 2.26 – Seção transversal e notações para um elemento típico de concreto estrutural



Fonte: adaptada de Cohn e Riva (1987).

Em que:

$(2u_{sB})/l_c$ e $(2u_{pB})/l_c$ são as deformações médias da armadura passiva e ativa, respectivamente; A_p é a área de aço de armadura ativa; A_{sc} é a área de aço comprimida de armadura passiva; A_{st} é a área de aço tracionada de armadura passiva; E_p é o módulo de elasticidade para o aço para armadura ativa; d_p é a distância do centro geométrico dos aços para armadura ativa à borda mais comprimida da seção; d_{sc} é a distância do centro geométrico dos aços para armadura passiva comprimida à borda mais comprimida da seção; d_{st} é a distância do centro geométrico dos aços para armadura passiva tracionada à borda mais comprimida da seção; f_{pe} é a tensão de protensão no aço após todas as perdas; l_a é o comprimento de aderência; l_c é o espaçamento entre as fissuras; u_{ccB} é o encurtamento do concreto na seção "B"; u_{pB} é o alongamento do aço ativo na seção "B"; u_{stB} é o alongamento do aço passivo na seção "B"; z_0 é a distância entre o eixo de rotação nula e o eixo de deformação nula; z_G é a distância do centro geométrico da seção à borda mais comprimida da seção; z_{ccA} é a distância entre o eixo de deformação nula e a borda mais comprimida da seção "A"; z_{ccB} é a distância entre o eixo de deformação nula e a borda mais comprimida da seção "B"; z_{ctB} é a distância entre o eixo de

deformação nula e o ponto de deformação máxima à tração na seção "B"; ε_{ccA} é a deformação do concreto comprimido na seção "A"; ε_{ccB} é a deformação do concreto comprimido na seção "B"; ε_{ct} é a deformação do concreto tracionado; σ_{ccB} é a tensão do concreto comprimido na seção "B"; σ_{stB} é a tensão no aço de armadura passiva na seção "B"; h é a altura da seção; $\Delta\varepsilon_s$ e $\Delta\varepsilon_p$ são as contribuições do concreto tracionado para a rigidez da peça; $C.G.$ é o centro de gravidade da seção; $b(z)$ é a largura da seção em função da ordenada "z"; w é largura da fissura; x é o eixo das abcissas; z é o eixo das ordenadas; θ é a rotação da peça; $\tau(x)$ tensão de aderência em função da abscissa "x".

2.4.1.4 Considerações sobre o Modelo proposto por Cohn e Riva (1987)

Esse trabalho obteve bons resultados no que se refere à deformação última e ductilidade dos elementos fletidos. Utilizou-se leis constitutivas mais realistas para os materiais e redefiniu-se parâmetros importantes como o índice de armadura localizada na alma, o escoamento do aço e a curvatura média.

O modelo leva em conta a contribuição do concreto tracionado na rigidez da peça para o estado pós-fissuração como também as principais variáveis no estado de pós-escoamento, entre as quais pode-se destacar: a forma da seção; a porcentagem de armadura localizada na alma; o grau de protensão; e a deformação última do aço e do concreto.

A importante contribuição desse trabalho foi estender a teoria proposta por Giuriani (1979, 1981, 1982) para seções parcialmente e totalmente protendidas. Esse estudo reformulou o problema de flexão e facilitou a compreensão do comportamento das peças de concreto armado e protendido em todos os estágios de carregamento.

Como resultado, obteve-se um melhor entendimento sobre os seguintes aspectos: o comportamento da peça nos estágios de pós-fissuração e pós-escoamento; os fenômenos plásticos; a influência do grau de protensão; a forma da seção; a deformação última do aço na ductilidade à flexão.

É importante destacar que o elemento típico está suposto sujeito apenas a momento fletor constante ao longo das aduelas. Nesse sentido, o modelo proposto por esta pesquisa busca eliminar essa restrição, pois os elementos estarão sujeitos a gradientes de momentos fletores. Serão consideradas fissuração discreta e formação de fissuras secundárias com o aumento do carregamento.

2.4.2 Modelo proposto por Martins (1989)

O modelo proposto por Martins (1989) se baseia na formulação apresentada Giuriani (1979, 1981, 1982); e Cohn e Riva (1987), em que avalia o comportamento à flexão composta em aduelas de pontes em concreto armado, concreto protendido ou parcialmente protendido. Os trechos analisados são delimitados por duas fissuras ou juntas.

Esse modelo considera a diminuição da aderência nas armaduras passantes após abertura das fissuras ou juntas e a distribuição das deformações do concreto. A influência no comportamento do concreto entre as fissuras ou juntas é considerada por meio das condições de equilíbrio nas bordas da aduela.

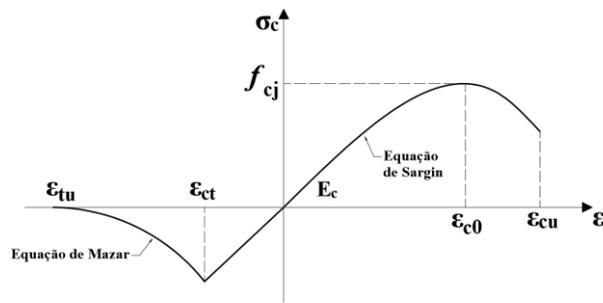
A partir dessa, permite-se avaliar parâmetros importantes, como por exemplo: a razão entre altura e comprimento da aduela, a distribuição das tensões longitudinais do concreto, a posição do eixo neutro ao longo das aduelas, e outros.

2.4.2.1 Leis Constitutivas

Martins (1989) desenvolveu uma formulação baseada nas pesquisas realizadas por Giuriani (1979, 1981, 1982); e Cohn e Riva (1987), que permite relacionar deformações no concreto e aço levando-se em consideração a perda de aderência após a abertura da fissura. Para isso, foram adotadas as seguintes hipóteses básicas:

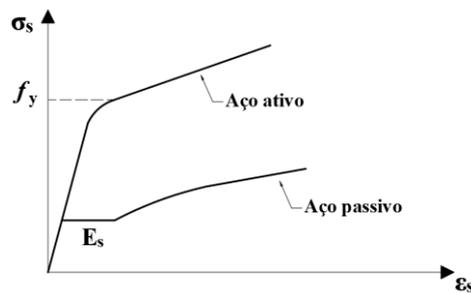
- Carregamento quase estático, monotônico e crescente;
- Não foi considerado o efeito cortante;
- As seções permanecem planas após a fissuração;
- As leis tensão-deformação do concreto à tração e à compressão, conforme Figura 2.27.
- Momento fletor constante ao longo da aduela;
- Leis tensão-deformação dos aços passivos e ativos (Figura 2.28);
- Lei tensão de aderência-deslizamento proposta por Martins (1989), conforme Figura 2.29.

Figura 2.27 – Leis tensão-deformação do concreto à tração e à compressão utilizadas no modelo



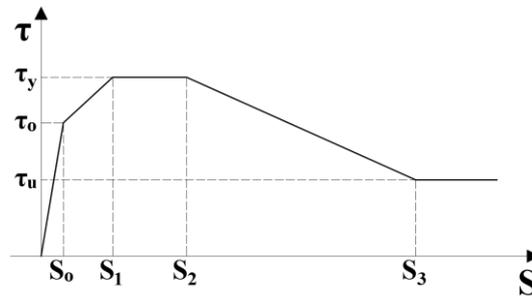
Fonte: Martins (1989).

Figura 2.28 – Leis tensão-deformação dos aços passivos e ativos utilizados no modelo



Fonte: Martins (1989).

Figura 2.29 – Lei tensão de aderência-deslizamento proposta por Martins (1989).



Fonte: Martins (1989).

Em que: E_c é o módulo de elasticidade do concreto; f_y é a tensão de escoamento do aço; ϵ_{c0} é a deformação no concreto à compressão associada a tensão máxima f_{cj} ; ϵ_{ct} é a deformação no concreto à tração; ϵ_{cu} é a deformação última no concreto à compressão; s é o deslizamento do aço; ϵ_s é a deformação no aço; ϵ_{tu} é a deformação última no concreto à tração; σ_c é a tensão no concreto; ϵ é a deformação no concreto; σ_s é a tensão no aço; τ_0 é a tensão de aderência associada ao deslizamento s_1 ; τ_u é a tensão de aderência associada ao deslizamento s_3 ; τ_y é a tensão de aderência associada ao trecho entre os deslizamentos s_1 e s_2 ; τ é a tensão de aderência;

$$u_{ccb}(Z) = \int_0^{\frac{l_c}{2}} \varepsilon_{cc}(x, Z) \cdot dx \quad (2.92)$$

$$u_{ccb}(Z) = \varepsilon_{ccb}(Z) \cdot \frac{l_c}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(Z)} \quad (2.93)$$

$$\Gamma(Z) = \frac{l_c}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ccb}}{\int_0^{\frac{l_c}{2}} \varepsilon_{cc}(x, Z) \cdot dx} \quad (2.94)$$

ε_{ccb} é a deformação do concreto na seção "B".

Expressando-se ε_{cb} em função de u_{cb} , tem-se:

$$\varepsilon_{ccb}(Z) = \frac{\theta}{l_c} (Z + z_{ctB}) \cdot \Gamma(Z) = \frac{\theta}{l_c} \cdot Z \cdot f(Z) \quad (2.95)$$

$$f(Z) = \frac{Z + z_{ctB}}{Z} \cdot \Gamma(Z) \quad (2.96)$$

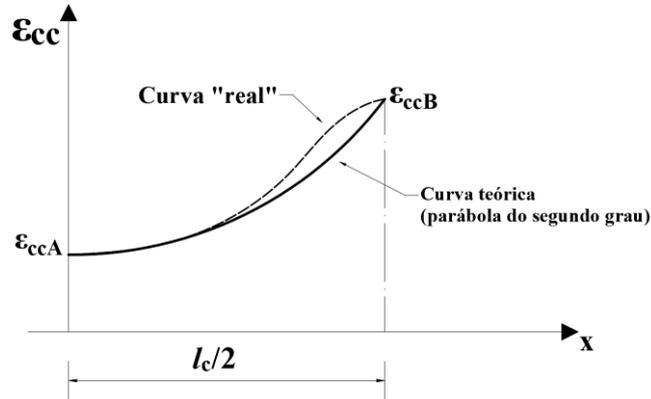
Com base na função $f(Z)$, pode-se determinar as deformações das fibras de concreto na seção da junta ou da fissura, além de ser possível considerar a influência do concreto entre fissuras e o comportamento no interior da aduela.

Com fundamento na hipótese de distribuição linear das deformações no concreto comprimido utilizada por Giuriani (1979, 1981, 1982), foi possível deduzir a deformação do concreto comprimido em função da deformação na borda mais comprimida para as seções "A" e "B".

Admitiu-se também que as áreas dos diagramas de deformação são as mesmas em "A" e "B". Essa hipótese é exata quando as tensões tangenciais são nulas ao longo da linha neutra entre "A" e "B" e para um comportamento linear do concreto.

As deformações de compressão do concreto no modelo de Martins (1989) evoluem segundo uma lei parabólica entre "A" e "B" como pode ser observado na Figura 2.31.

Figura 2.31 – Variação da deformação de compressão na borda mais comprimida de uma aduela



Fonte: Martins (1989).

Por meio das hipóteses anteriores pode-se determinar o valor do deslocamento do concreto na seção "B" em um ponto qualquer, como também, no ponto de ordenada z_{ctB} (distância entre o eixo neutro e a fibra de deslocamento longitudinal nulo). Com esse valor, pode-se determinar $f(Z)$ e $\Gamma(Z)$.

Giuriani (1981) admite que o valor da deformação na fibra mais comprimida (ordenada z_{ccA}), é constante e igual ao valor do começo da fissuração. Todavia, para o caso de aduelas curtas (pequena distância entre as fissuras), z_{ccA} evolui com a abertura da fissura sendo a relação entre z_{ccA} e z_{ccB} dada por:

$$z_{ccA} = z_{ccB} + \frac{l_c}{2} \quad (2.97)$$

No que se refere ao deslocamento do aço na seção fissurada (u_{stB}), Martins (1989) apresenta a seguinte sequência de cálculo:

$$u_{stb} = \left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot d_{st} \quad (2.98)$$

$$d_{st} = D - z_{ccB} - z_{ctB} \quad (2.99)$$

$$\theta = \chi_B / f(Z_B) \quad (2.100)$$

$$f(Z_B) = \frac{3 \cdot z_{ccA} \cdot z_{ccA}}{(z_{ccA} \cdot z_{ccA} + 2 \cdot z_{ccB} \cdot z_{ccB})} \quad (2.101)$$

$$z_{ctB} = \frac{2 \cdot z_{ccB} \cdot z_{ccB} \cdot (z_{cCA} - z_{ccB})}{z_{cCA} \cdot z_{cCA} + 2 \cdot z_{ccB} \cdot z_{ccB}} \quad (2.102)$$

Em que: χ_B é curvatura da seção fissurada "B"; d_{st} é a distância da borda mais comprimida ao eixo geométrico da armadura passiva; z_{cCA} é a profundidade da linha neutra na seção não-fissurada "A"; z_{ccB} é a profundidade da linha neutra na seção fissurada "B"; z_{ctB} é a posição do eixo de deslocamento nulo para a seção B; D é a altura útil obtida na seção não fissurada "A".

2.4.2.3 Considerações sobre o Modelo proposto por Martins (1989).

O modelo proposto por Martins (1989) resultou na modelagem do comportamento do concreto até a ruptura por flexão em vigas com protensão mista (interna aderente e externa), considerando-se a evolução da aderência entre aço e concreto.

Outro aspecto relevante é o desenvolvimento de expressões que possibilitam a transição do formalismo geral do método proposto para o método clássico da elasticidade não linear em fissuras distribuídas. Contudo, o modelo se limita as vigas submetidas a momento fletor constante e ao uso de apenas uma lei de aderência para os aços passivos e ativos que cobre toda a área de deslizamentos até a ruptura. Essa lei faz uma síntese das diferentes propostas examinadas.

É importante frisar que o modelo não determina o ponto deslizamento nulo para peças submetidas a gradientes de momentos fletores e não verifica a formação de fissuras secundárias nas peças de concreto com o aumento do carregamento.

Nesse sentido, o modelo proposto por esta pesquisa busca superar essas limitações, pois os elementos estarão sujeitos tanto a momentos constantes quanto a gradientes de momentos fletores. Dessa maneira, pretende-se obter o ponto de deslizamento nulo em elementos delimitados por duas fissuras ou juntas. Será possível considerar qualquer lei de aderência-deslizamento e qualquer lei constitutiva para os materiais, bem como a formação de fissuras secundárias com o avanço do carregamento.

2.4.3 Modelo proposto por Manfredi e Pecce (1998)

O modelo leva em consideração a contribuição concreto à tração para a rigidez da peça no cálculo do deslizamento da barra e a utilização de uma inércia média fissurada na obtenção da matriz de rigidez. Qualquer lei de aderência e de tensão-deformação para os materiais pode ser utilizada.

Nele se considera a fissuração e se pode alcançar o regime plástico. É baseado no modelo de barra que leva em conta as relações constitutivas dos materiais e considera o deslizamento entre as armaduras e o concreto.

No entanto, o modelo se limita a vigas em concreto armado, sem levar em consideração o surgimento de fissuras secundárias com o aumento do carregamento. Os elementos analisados são curtos, com distância entre fissuras de aproximadamente igual a distância entre estribos, ou seja, considera-se fissuração repartida.

O modelo proposto por esta pesquisa busca eliminar essas limitações e expandir sua utilização para vigas em concreto armado e protendido. Além de avaliar o comportamento da variação da tensão de aderência com o deslizamento do aço em aduelas longas, delimitadas por fissuras ou juntas pré-definidas (fissuração discreta), não se limitando a elementos com distância igual ao espaçamento entre estribos.

Entretanto, com as devidas adaptações, o modelo proposto por Manfredi e Pecce (1998) se apresenta como uma boa alternativa a ser utilizada nesta tese para avaliar a relação tensão de aderência-deslizamento no modelo desenvolvido e por isto será melhor descrito no capítulo 3 deste trabalho.

2.4.4 Modelo proposto por Kwak e Kim (2001)

Com base no elemento da Figura 2.32, a carga aplicada P é suportada parcialmente pelo concreto (P_c) e parcialmente pela armadura (P_s) em qualquer seção localizada a uma distância x da face fissurada.

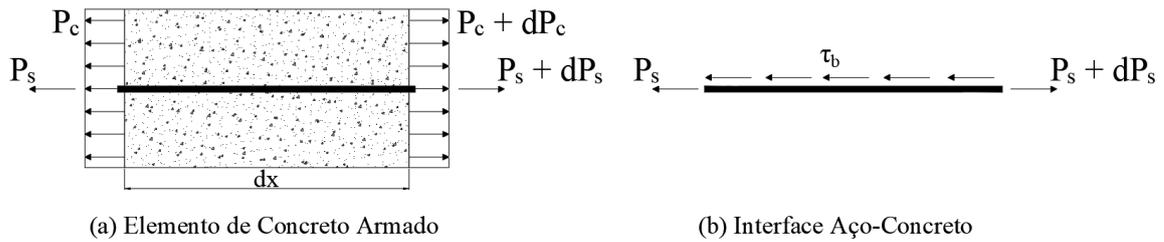
Admitindo-se que a relação tensão de aderência-deslizamento é linear, então a variação das componentes da força axial pode ser representada em termos de tensão de aderência e deslizamento:

$$dP_s = \tau_b \cdot dx \cdot \sum_0 = E_b \cdot s \cdot dx \cdot \sum_0 = A_{st} \cdot E_s \cdot d\varepsilon_{st} \quad (2.103)$$

$$dP_c = \int_{A_c} E_c \cdot d\varepsilon_{ct} \cdot dA_c = -\tau_b \cdot dx \cdot \sum_0 = A_c \cdot E_c \cdot d\varepsilon_{ct} \quad (2.104)$$

Em que: \sum_0 é o perímetro das barras de aço; A_{st} é a área de aço de armadura passiva tracionada; E_b é a inclinação da curva tensão de aderência-deslizamento; ε_{ct} é a deformação específica do concreto à tração; ε_{st} é a deformação específica do aço tracionado de armadura passiva; τ_b é a tensão de aderência na interface do aço; E_c é o módulo de elasticidade do concreto; dx é o comprimento do elemento infinitesimal; s é o deslizamento; A_c é a área da seção não fissurada.

Figura 2.32 – Equilíbrio translacional de uma barra em peças de concreto armado



Fonte: Kwak e Kim (2001).

O deslizamento (s_x) na interface aço-concreto é definido como o deslocamento relativo entre o aço e concreto ($s_x = u_{st} - u_{ct}$). As equações diferenciais de primeira e segunda ordem de s_x leva a:

$$\frac{ds_x}{dx} = \frac{du_{st}}{dx} - \frac{du_{ct}}{dx} = \varepsilon_{st} - \varepsilon_{ct} \quad (2.105)$$

$$\frac{d^2s_x}{dx^2} = \frac{d\varepsilon_{st}}{dx} - \frac{d\varepsilon_{ct}}{dx} = \frac{E_b \cdot \sum_0}{A_{st} \cdot E_s} \cdot (1 + \eta \cdot \rho) \cdot s_x \quad (2.106)$$

Em que:

$$\eta = \frac{E_s}{E_c} \text{ e } \rho = A_{st}/A_c.$$

Sabe-se que a equação diferencial governante para o deslizamento é:

$$\frac{d^2 s_x}{dx^2} - k^2 \cdot s_x = 0 \quad (2.107)$$

Em que:

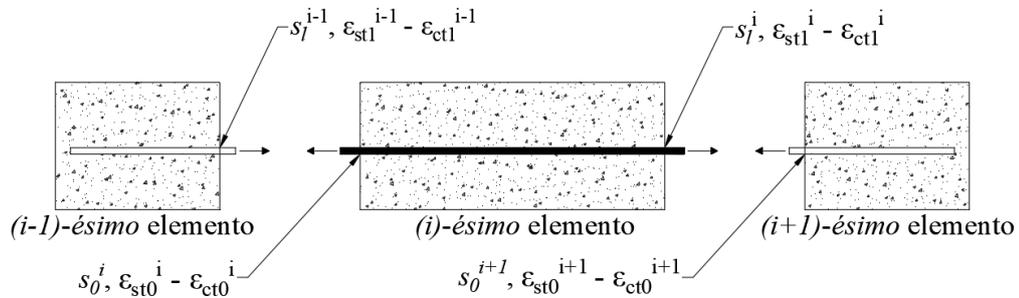
$$k^2 = \frac{E_b \cdot \Sigma_0}{A_{st} \cdot E_s} \cdot (1 + \eta \cdot \rho)$$

A solução geral pode ser dada na forma de $s_x = C_1 \cdot \sinh(k \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(k \cdot x)$, em que C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. Quando um elemento de concreto é subdividido em n elementos, a solução geral representa a força de equilíbrio e as condições de compatibilidade na interface do aço ao longo do comprimento. Observando-se o i -ésimo elemento, as condições de contorno seguintes deverão ser satisfeitas:

$$\frac{ds_x}{dx} = -(\varepsilon_{st0}^i - \varepsilon_{ct0}^i), \text{ em } x = -\frac{l_i}{2};$$

$$\frac{ds_x}{dx} = +(\varepsilon_{st1}^i - \varepsilon_{ct1}^i), \text{ em } x = \frac{l_i}{2}$$

Figura 2.33 – Elemento de concreto armado submetido à tração uniaxial subdividida em elementos



Fonte: Kwak e Kim (2001).

O deslizamento em cada extremidade do i -ésimo elemento pode ser determinado por meio das Equações (2.108) e (2.109):

$$s_x^i \left(+\frac{l_i}{2} \right) = s_l^i = \frac{\cosh(k \cdot l_i)}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)} \cdot P_i + \frac{1}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)} \cdot Q_i = A_i \cdot P_i + B_i \cdot Q_i \quad (2.108)$$

$$s_x^i \left(-\frac{l_i}{2} \right) = s_0^i = \frac{1}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)} \cdot P_i + \frac{\cosh(k \cdot l_i)}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)} \cdot Q_i = B_i \cdot P_i + A_i \cdot Q_i \quad (2.109)$$

Em que: $P_i = \varepsilon_{stl}^i - \varepsilon_{ctl}^i$, $Q_i = \varepsilon_{st0}^i - \varepsilon_{ct0}^i$, $A_i = \frac{\cosh(k \cdot l_i)}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)}$ e $B_i = \frac{1}{k \cdot \sinh(k \cdot l_i)}$

Resolvendo-se as equações acima para o deslizamento (s_l^i) e utilizando-se a diferença das deformações ($\varepsilon_{stl}^i - \varepsilon_{ctl}^i$) em $x = \frac{l_i}{2}$, tem-se:

$$\{D_l\}^i = \begin{Bmatrix} s_l^i \\ P_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_i}{B_i} & \frac{B_i^2 - A_i^2}{B_i} \\ 1 & -\frac{A_i}{B_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} s_0^i \\ Q_i \end{Bmatrix} = [C_i] \cdot \{D_0\}^i \quad (2.110)$$

Para a transição do $(i - 1)$ -ésimo elemento para o i -ésimo elemento usando-se a força de equilíbrio e as condições de compatibilidade, a equação seguinte pode ser determinada:

$$\{D_0\}^i = \begin{Bmatrix} s_0^i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} s_l^{i-1} \\ P_{i-1} \end{Bmatrix} = [S] \cdot \{D_l\}^{i-1} \quad (2.111)$$

Substituindo-se a Equação (2.110) na Equação (2.111), tem-se:

$$\{D_l\}^i = \{D_0\}^i = [C_i] \cdot [S] \cdot \{D_l\}^{i-1} = [\bar{C}_i] \cdot \{D_l\}^{i-1} \quad (2.112)$$

Esta equação relaciona a extremidade do i -ésimo elemento com as extremidades do $(i - 1)$ -ésimo elemento. Aplicando-se a Equação (2.112) sucessivamente aos elementos $i - 2, i - 3, \dots, 2, 1$ e agrupando-se os resultados e estendendo-os ao n -ésimo elemento, a relação entre o deslizamento e as diferentes deformações nas duas extremidades da interface do aço, pode-se obter:

$$\{D_l\}^i = [\bar{C}_n] \cdot [\bar{C}_{n-1}] \dots [\bar{C}_2] \cdot [\bar{C}_1] \cdot \{D_0\}^1 \quad (2.113)$$

Em que: $[\bar{C}_i] = [C_i] \cdot [S]$.

Há duas condições de contorno para quatro incógnitas, então é possível solucionar a Equação (2.113) para as duas incógnitas restantes.

Após a obtenção do deslizamento e da diferença de deformação em uma das extremidades da estrutura, essas componentes de cada nó podem ser encontradas por aplicação sucessivas das Equações (2.110) e (2.111).

Uma vez que a matriz do sistema $[R_n]$ tenha sido construída com as propriedades dos materiais atribuídas, o processo de iteração deverá ser continuado até todas as propriedades dos materiais assumidas satisfaçam as deformações correspondentes.

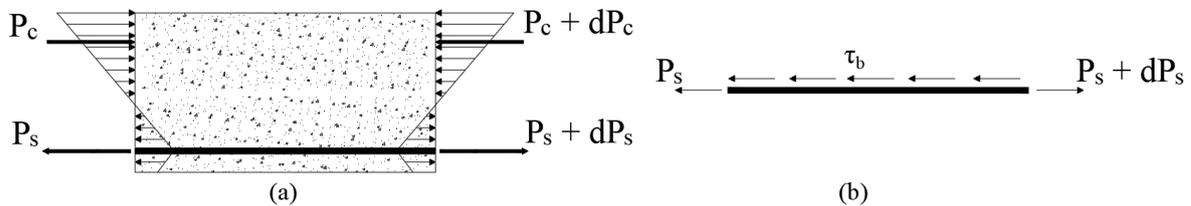
Quando o modelo introduzido é levado para a formulação em elementos finitos, deve-se notar que a aderência e a rigidez do aço não são atualizadas em cada iteração, mas somente no início de um novo incremento.

Como mostrado na obtenção do procedimento, a mesma matriz de rigidez com a condição de aderência perfeita é utilizada sem qualquer modificação. Somente a variação da força no aço de acordo com o deslizamento é considerada neste modelo.

2.4.4.1 Extensão do Modelo para Problemas de Flexão

Quando uma viga de concreto armado é submetida a uma carga concentrada Q no meio do vão, a força de equilíbrio na direção axial exige o somatório das componentes da força axial. Na Figura 2.34 é apresentado um elemento infinitesimal de comprimento dx .

Figura 2.34 – Diagrama de corpo livre de um elemento de viga em concreto armado. (a) elemento de viga em concreto armado; (b) tensões de aderência na interface aço-concreto



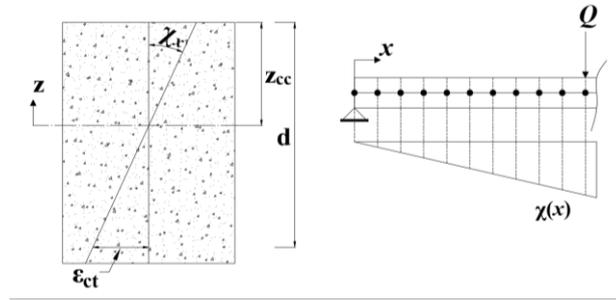
Fonte: Kwak e Kim (2001).

Uma vez que as deformações são diretamente proporcionais à distância ao eixo neutro de deformação nula, logo a variação da curvatura χ_x que representa o gradiente de deformação do perfil na seção, significa a variação de deformação. Além disso, a distribuição da curvatura real até o escoamento da armadura pode ser idealizada por meio de uma distribuição linear ao longo da peça como apresentado na Figura 2.35.

Desprezando-se a contribuição do concreto tracionado na rigidez da peça, então a variação da força axial no concreto pode ser determinada como:

$$dP_c = \tau_b \cdot \sum_0 dx = \int_{A_c} E_c \cdot d\varepsilon_{ct} \cdot dA_c = - \int_0^c E_c \cdot d\chi_x \cdot z \cdot b \cdot dz = -E_c \cdot b \cdot d \cdot \chi_x \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_{cc})^2 \quad (2.114)$$

Figura 2.35 – Distribuição da curvatura idealizada



Fonte: Kwak e Kim (2001).

Em que: b_w é a largura da seção; z_{cc} é a distância da fibra extrema comprimida ao eixo neutro; Q é a carga concentrada aplicada; d é a altura útil da seção; e z é o eixo das ordenadas.

A variação da curvatura ao longo do comprimento pode ser expressada por:

$$\frac{d\chi_x}{dx} = \frac{2 \cdot \tau_b \cdot \Sigma_0}{E_c \cdot b \cdot (z_{cc})^2}$$

Além disso, admite-se que a profundidade do eixo neutro (z_{cc}), permanece quase com valor constante, ou seja, $z_{cc} = 0,4 \cdot d$ do ponto de fissuração inicial até o escoamento do aço. Então a variação da deformação no concreto onde está localizado o aço, pode ser simplificada como:

$$\frac{d\varepsilon_{ct}}{dx} = (d - z_{cc}) \cdot \frac{d\chi_x}{dx} = (d - z_{cc}) \cdot \frac{2 \cdot \tau_b \cdot \Sigma_0}{E_c \cdot b \cdot (z_{cc})^2} \cdot s_x = 3,75 \cdot \frac{2 \cdot \tau_b \cdot \Sigma_0}{(E_s \cdot A_{st}) / \eta \cdot \rho} \cdot s_x \quad (2.115)$$

A equação diferencial de segunda ordem do deslizamento da Equação (2.106) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 s_x}{dx^2} = \frac{d\varepsilon_{st}}{dx} - \frac{d\varepsilon_{ct}}{dx} = \frac{E_b \cdot \Sigma_0}{A_{st} \cdot E_s} \cdot (1 - 7,5 \cdot \eta \cdot \rho) \cdot s_x \quad (2.116)$$

Consequentemente, a equação diferencial governante tem a mesma forma da equação para uma peça submetida à uma tração uniaxial, exceto por uma diferença em k^2 , que é o coeficiente de proporcionalidade que é igual a $(1 - 7,5 \cdot \eta \cdot \rho)$ em vez de $(1 + \eta \cdot \rho)$.

Todas as etapas restantes para a equação final do sistema, mencionada na Equação (2.113), são iguais às do problema de tração uniaxial. Portanto, tem-se duas condições de

contorno para quatro incógnitas, então é possível utilizar a Equação (2.113) para obter as duas incógnitas remanescentes.

Kwak e Kim (2001) afirmam que todos os algoritmos para análises não lineares consistem de quatro etapas básicas: a formação da matriz de rigidez corrente; a solução das equações de equilíbrio para os incrementos de deslocamentos; o estado de deformação de todos os elementos do modelo e a checagem da convergência.

Então, uma vez que a matriz de rigidez da estrutura depende dos incrementos de deslocamentos, a solução das equações de equilíbrio é tipicamente realizada com método iterativo por meio da checagem da convergência.

2.4.4.2 Considerações sobre o Modelo proposto por Kwak e Kim (2001)

O modelo proposto por Kwak e Kim (2001) apresenta algumas simplificações, das quais pode-se destacar: ausência da consideração da contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça; utilização da mesma matriz de rigidez com a condição de aderência perfeita na interface aço-concreto; a aderência e a rigidez do aço não são atualizadas em cada iteração, no entanto, somente no início de um novo incremento, pois utiliza o método da rigidez inicial.

Este trabalho busca eliminar essas limitações ao considerar vigas de concreto armado e protendido com fissuração discreta e repartida. Além de avaliar o comportamento do deslizamento do aço em aduelas mais compridas, levando-se em consideração o modelo de aderência variável.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica da pesquisa, em que são descritos os modelos teóricos e analíticos propostos para a análise não linear de elementos de vigas (aduelas curtas e longas) de concreto estrutural. Esses elementos podem ser solicitados tanto à flexão simples quanto à flexão composta, submetidos ou não a gradiente de momentos e inclui a perda de aderência com a evolução do carregamento.

É importante lembrar que no Modelo de Aderência Perfeita (MAP) é considerado que não há deslizamento entre a armadura e o concreto envolvente e, conseqüentemente, a hipótese de Bernoulli-Navier é válida.

Em relação ao Modelo de Aderência Variável (MAV), leva-se em consideração a variação da tensão de aderência com o deslizamento da armadura no cálculo do equilíbrio das seções, quando a manutenção da hipótese de Bernoulli-Navier com aderência perfeita não é mais possível.

Para esse modelo, o eixo de deslizamento longitudinal nulo é distinto da linha neutra de deformação. No caso geral, o MAP é distinto do MAV em razão da variação da posição do eixo neutro ao longo da viga, devido às singularidades constituídas pelas fissuras/juntas. Entretanto, essas singularidades não particularizam o elemento. Isto quer dizer que a separação entre duas fissuras consecutivas é qualquer, o que significa admitir que se pode passar de um espaçamento pequeno (MAP) a um mais importante, do tipo fissuração discreta como, por exemplo, a abertura de juntas entre aduelas.

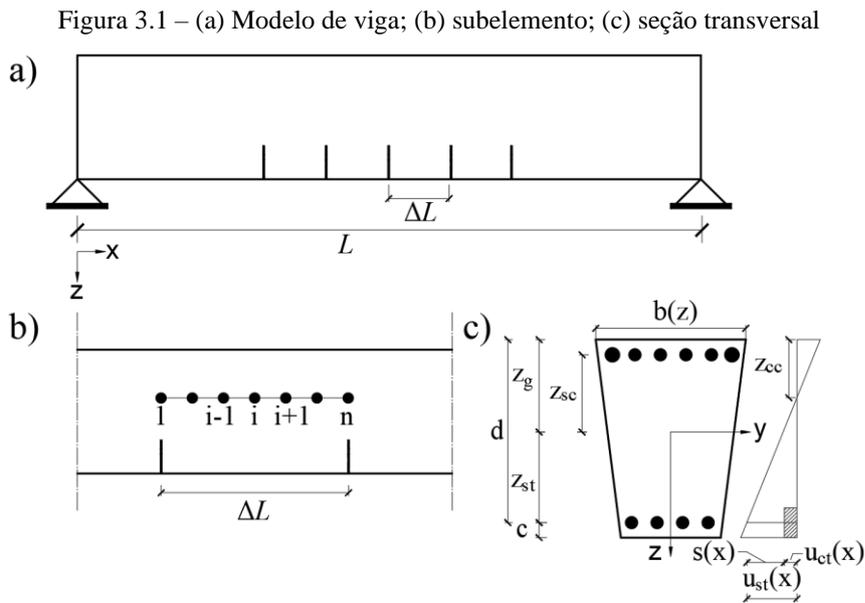
Em decorrência da revisão dos modelos feita no capítulo 2, escolheu-se como base para a proposta deste trabalho, o modelo de Manfredi e Pecce (1998) para vigas de concreto estrutural.

Para a solução analítica, introduziu-se modelos constitutivos para os materiais (aço e concreto) que melhor representassem o comportamento do ensaio, como também o deslizamento entre a armadura e o concreto envolvente.

Com estes, permite-se avaliar de forma detalhada a contribuição do concreto tracionado para a rigidez da peça, tanto no regime elástico quanto no regime de pós-fissuração.

Assim, a solução é iniciada dividindo-se a viga em análise, como, por exemplo, a da Figura 3.1a, em subelementos delimitados por duas fissuras consecutivas. Essas fissuras irão ocorrer nas seções em que as tensões no concreto alcançam a sua resistência à tração (f_{ct}).

Com base na seção transversal da Figura 3.1c, tem-se: d é a altura útil da seção; $b(z)$ é a largura da seção em função da ordenada "z"; u_{cc} , u_{ct} , u_{st} são o encurtamento do concreto à compressão e os alongamentos do concreto à tração e da armadura, respectivamente; z_G é a distância entre o centroide mecânico da seção transversal e a extremidade comprimida da seção; z_{cc} é a distância da linha neutra à borda mais comprimida da seção; z_{st} é a distância entre o centroide mecânico da seção transversal e a armadura tracionada; z_{sc} é a distância entre o centroide mecânico da seção transversal e a armadura comprimida; e "s" é o deslizamento do aço.



Fonte: adaptada de Manfredi e Pecce (1998).

O subelemento compreende o comprimento da viga entre duas fissuras adjacentes (ΔL) como apresentado na Figura 3.1b. A deformação do subelemento é definida pelos parâmetros seguintes, de acordo com o método dos deslocamentos (Figura 3.1c).

$$\varepsilon_{cc}(x, z_g) = \frac{du_{cc}}{dx} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{st}(x, z_{st}) = \frac{du_{st}}{dx} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{ct}(x) = \frac{du_{ct}}{dx} \quad (3.3)$$

$$s(x) = u_{st}(x) - u_{ct}(x) \quad (3.4)$$

A fim de solucionar o problema estático do subelemento é necessário introduzir: a lei tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$) do concreto na compressão; as do aço e do concreto na tração; a de aderência-deslizamento ($\tau - s$); que podem ser formalmente expressas como:

$$\sigma_{cc} = \sigma_{cc}(\varepsilon_{cc}) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{st} = \sigma_{st}(\varepsilon_{st}) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ct} = \sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) \quad (3.7)$$

$$\tau = \tau(s, x) \quad (3.8)$$

Em que: σ_{cc} e σ_{ct} são as tensões no concreto, na compressão e na tração, respectivamente, em uma fibra genérica da seção; σ_{st} é a tensão na armadura tracionada; ε_{cc} é a deformação da fibra mais comprimida do concreto; ε_{st} é a deformação da armadura tracionada; ε_{ct} é a deformação do concreto na região tracionada; e τ é a tensão de aderência tangencial na interface aço-concreto.

Com base na Figura 3.1, o problema estático é formalmente solucionado pelo seguinte conjunto de quatro equações:

Equilíbrio translacional da seção transversal:

$$\int_{A_{cc}} \sigma_{cc}(x, z) \cdot b(z) \cdot dz - \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x, z) \cdot b(z) \cdot dz - \sum_{k=1}^{pt} \sigma_{st}(x) \cdot A_{st} + \sum_{k=1}^{pc} \sigma_{sc}(x) \cdot A_{sc} = 0 \quad (3.9)$$

Equilíbrio rotacional sobre o eixo geométrico da seção transversal:

$$\begin{aligned}
& - \int_{A_{cc}} \sigma_{cc}(x, z) \cdot z \cdot b(z) \cdot dz + \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x, z) \cdot z \cdot b(z) \cdot dz \\
& + \sum_{k=1}^{pt} \sigma_{st}(x) \cdot A_{st} \cdot z_{st} - \sum_{k=1}^{pc} \sigma_{sc}(x) \cdot A_{sc} \cdot z_{sc} = M(x)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Equilíbrio translacional da barra:

$$\frac{d\varepsilon_{st}(x)}{dx} - \frac{4}{\Phi \cdot E_s} \cdot \tau(x) = - \frac{d\varepsilon_{ct}}{dx} \tag{3.11}$$

Para facilitar a resolução do sistema de equações, anulou-se o termo da direita da Equação (3.11), pois numericamente não há influência significativa nos resultados. Este artifício foi também utilizado por Manfredi e Pecce (1998). Logo, com esta modificação e colocando-se em termos de tensão na armadura, tem-se:

$$\frac{d\sigma_{st}(x)}{dx} - \frac{4}{\Phi} \cdot \tau(x) = 0 \tag{3.12}$$

A quarta equação é obtida desenvolvendo-se a definição do deslizamento em termos de deformação, ou seja, por considerar a derivada da Equação (3.4):

$$\frac{ds_t(x)}{dx} = \varepsilon_{st}(x) - \varepsilon_{ct}(x) \tag{3.13}$$

Em que: A_{cc} , A_{ct} são as áreas do concreto na compressão e na tração, respectivamente; A_{sc} , A_{st} são as áreas de aço à compressão e à tração, respectivamente; pt e pc são as quantidades de barras de aço na seção transversal tracionadas e comprimidas, respectivamente; e Φ é o diâmetro da barra.

Na seção de abscissa x , a deformação $\varepsilon_{cc}(x, z)$ em uma fibra genérica do concreto localizada a uma distância " z " da posição do centroide, pode ser expressa como segue:

$$\varepsilon_{cc}(x, z) = \frac{z - z_g + z_{cc}}{z_{cc}} \cdot \varepsilon_{cc}(x, z_g) \tag{3.14}$$

As funções $\varepsilon_{cc}(x)$, $\varepsilon_{st}(x)$, $\varepsilon_{ct}(x)$ e $s(x)$ são incógnitas do problema. As leis constitutivas estão expressas nas Equações (3.5) a (3.8). Assim, o problema consiste em resolver o conjunto de Equações (3.9) a (3.13).

A solução do problema pode ser obtida resolvendo-se o conjunto de equações diferenciais em cada intervalo de integração com as devidas condições de contorno. Em particular, nas seções de extremidade do subelemento, onde as fissuras ocorrem, a distribuição da deformação ao longo da seção pode ser calculada a partir da solução numérica que será apresentada no item 4.1 deste trabalho. Para as fibras do concreto nas seções fissuradas têm-se $\sigma_{ct} = 0$ e $\varepsilon_{ct} = 0$.

As Equações (3.9) e (3.10), desacopladas das outras, fornecem os valores de σ_{cc} e σ_{st} , e, portanto, os valores de ε_{cc} e ε_{st} nas extremidades dos subelementos. Logo, utilizando-se esses valores na Equação (3.13), novas condições de contorno são introduzidas na primeira derivada de "s".

Por fim, os termos do problema são bem definidos, pois nas seções das extremidades, os valores de ε_{ct} , ε_{cc} , ε_{st} e ds/dx são conhecidos. Pode-se observar que as Equações (3.9) e (3.10) são acopladas com as Equações diferenciais (3.12) e (3.13) por meio das tensões e deformações do concreto à tração.

4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO E DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL

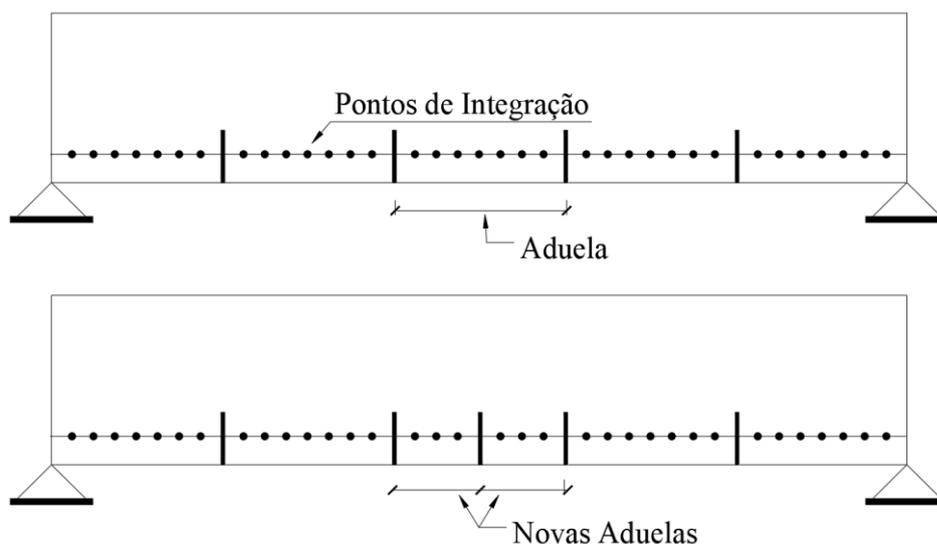
Neste capítulo são apresentados os métodos de soluções e as rotinas computacionais implementadas por meio da ferramenta *MatLab*, que compõem o programa principal que soluciona o problema descrito no capítulo anterior e objeto de estudo desta tese. Diversas sub-rotinas, que consideram os Modelos de Aderência Perfeita e Variável no cálculo do equilíbrio dos segmentos de concreto estrutural, fazem parte do programa elaborado.

Para a análise de um elemento completo, por exemplo uma viga, começa-se por uma discretização de toda a peça em segmentos que, neste caso, denominamos genericamente de aduelas. No MAV, cada aduela corresponde ao comprimento delimitado entre duas fissuras ou juntas abertas quaisquer. Essas fissuras são formadas quando a resistência do concreto à tração (f_{ct}) é alcançada.

Todas as aduelas são divididas em subelementos delimitados por pontos de integração onde são obtidos esforços, tensões, deslizamentos, curvaturas e rigidezes por meio do programa principal apresentado no item 4.2 deste capítulo.

Em cada nível de carregamento, é avaliada a formação de novas fissuras nas aduelas iniciais. Caso haja novas fissuras, as aduelas iniciais se transformarão em aduelas menores (Figura 4.1). Por integração numérica é obtida a rigidez da viga em cada nível de carregamento.

Figura 4.1 – Análise global da peça



4.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O MAV

Como já dito no item 3 deste trabalho, escolheu-se como base para a proposta deste trabalho, o modelo de Manfredi e Pecce (1998) para vigas de concreto estrutural.

A modelagem aqui proposta ajustou esse modelo para que funcione não apenas para vigas com fissuração uniforme (a distância entre fissuras é aproximadamente igual à distância entre estribos) como também para fissuração discreta (a distância é qualquer entre fissuras, maior que a uniforme). Isso permite avaliar tanto para aduelas curtas (em que há o deslizamento do aço em toda a extensão da aduela), quanto para aduelas longas (há um trecho da aduela em que se pode considerar a teoria de Bernoulli-Navier para a aderência perfeita e a possibilidade do surgimento de novas fissuras).

A solução numérica do sistema de equações introduzida no item 3 deste trabalho se apresenta, aparentemente, complicada devido à não linearidade de algumas equações. Soma-se a esses fatores, a dependência da aderência e da distância da seção genérica à fissura. Portanto, o problema deve ser resolvido numericamente.

Nesse contexto, realiza-se a discretização por meio de diferenças finitas progressivas, dividindo-se o espaço entre duas fissuras em $(n - 1)$ subintervalos com pequenos comprimentos Δx (Figura 3.1b). Para solucionar o problema por diferenças finitas, é utilizado o procedimento iterativo que é baseado no método *Regula Falsi*, ou também chamado de “Método da Falsa Posição”.

O procedimento transforma o problema de condições limites (tensões e deformações nas extremidades do subelemento conhecidas) na solução iterativa em um problema de valor inicial (atribui-se um valor para o deslizamento na primeira seção fissurada). Os valores de $\sigma_{st,1}$ e $\sigma_{st,n}$ são conhecidos da seção fissurada nos pontos das extremidades do subelemento, enquanto os valores de s_1 e s_n são incógnitas.

Para solucionar o problema, define-se um valor obtido experimentalmente para o deslizamento s_1 na primeira seção e verifica-se a convergência do método usando-se as tensões no aço para a última seção $\sigma_{st,n}$. Na iteração genérica j , o procedimento permite o cálculo dos valores dos parâmetros no nó $(i + 1)$ por valores atribuídos no nó i . As expressões obtidas por diferenças finitas progressivas das Equações (3.12) e (3.13) são utilizadas como seguem:

$$\sigma_{st,i+1}^{(j)} = \sigma_{st,i}^{(j)} + \frac{4}{\phi} \cdot \tau_i^{(j)} \cdot \Delta x \quad (4.1)$$

$$s_{st,i+1}^{(j)} = s_{st,i}^{(j)} + \Delta x \cdot \left(\frac{\varepsilon_{st,i+1}^{(j)} + \varepsilon_{st,i}^{(j)}}{2} - \frac{\varepsilon_{ct,i+1}^{(j)} + \varepsilon_{ct,i}^{(j)}}{2} \right) \quad (4.2)$$

Reescrevendo a Equação (4.1) em termos da deformação, tem-se:

$$\varepsilon_{st,i+1}^{(j)} = \varepsilon_{st,i}^{(j)} + \frac{4}{\phi \cdot E_s} \cdot \tau_i^{(j)} \cdot \Delta x \quad (4.3)$$

Em que: E_s é o módulo de elasticidade do aço.

A solução é baseada na obtenção dos valores de $\varepsilon_{st,1}^{(j)}$ e $\varepsilon_{cc,1}^{(j)}$, e, conseqüentemente, $\sigma_{st,1}^{(j)}$ e $\sigma_{cc,1}^{(j)}$ a partir das leis constitutivas do equilíbrio da seção fissurada, em que $\sigma_{ct,1}^{(j)} = 0$. Utilizando-se, também, um valor teste para $s_1^{(j)}$, por meio da lei constitutiva de $\tau_1^{(j)}$.

Uma vez o procedimento iniciado, em todas outras etapas, a Equação (4.1) permite a obtenção da tensão no aço no ponto $i + 1$. As condições de equilíbrio global apresentados nas Equações (3.9) e (3.10), solucionadas por uma integração numérica baseada na modelagem da fibra da seção, resultam nos valores de $\sigma_{cc,i+1}^{(j)}$ e $\sigma_{ct,i+1}^{(j)}$. Logo, por meio da Equação (4.2), obtém-se o deslizamento $s_{i+1}^{(j)}$.

Finalmente, o valor de $\sigma_{st,n}^{(j)}$, na abscissa final do subelemento, é obtido e a diferença para o valor correspondente ao limite é considerada como um parâmetro controlador para convergência. Em termos analíticos, o problema pode ser declarado como a busca por "0" da função F :

$$F(s_1^{(j)}) = \sigma_{st,n} - \sigma_{st,n}^{(j)}(s_1^{(j)}) = 0 \quad (4.4)$$

Para aduelas curtas, o problema da Equação (4.4) pode ser resolvido pelo método da tangente (Equação (4.5)), pois o intervalo de solução é conhecido e é preciso que a estimativa inicial esteja próxima da raiz.

$$s_1^{(j)} = s_1^{(j-1)} - \frac{f(s_1^{(j-1)})}{f'(s_1^{(j-1)})} \quad (4.5)$$

Entretanto, para aduelas longas, a proximidade exigida para a convergência nem sempre estará garantida, pois vai depender de cada caso, ou seja, do nível de tensão e conseqüentemente de deslizamentos a que a peça estará submetida.

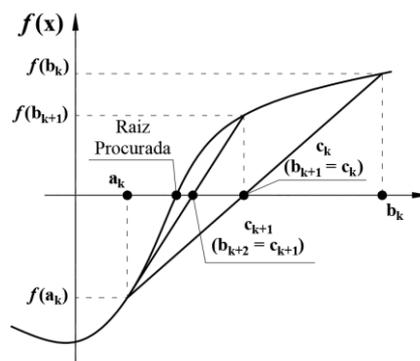
Outra condição é que a derivada (no denominador) nunca se anule. Então, mesmo para valores de derivadas próximos de zero, a interseção da tangente com o eixo das abscissas pode ser um ponto muito afastado.

Diante desses aspectos, optou-se por utilizar o método da secante, pois se mostrou uma boa alternativa para a convergência. Esse método nem sempre é convergente e apresenta desvantagem por ser mais lento. Porém, utilizado com algumas variações, pode tornar-se convergente e com solução rápida.

Além disso, empregando-se a técnica *Regula-Falsi* ou Método da Falsa Posição (Figura 4.2) torna-se o método secante sempre convergente, pois coloca a variável independente dentro do intervalo pesquisado. Parte-se de um intervalo inicial $[a_0, b_0]$, com $f(a_0)$ e $f(b_0)$ de sinais opostos, assegurando que no interior existe pelo menos uma raiz, de acordo com o Teorema do Valor Intermediário. O objetivo do algoritmo é obter em cada passo um intervalo menor $[a_k, b_k]$ que ainda contenha uma raiz da função f . Para a iteração de número k , tem-se:

$$c_k = \frac{b_k - f(b_k) \cdot (b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \quad (4.6)$$

Figura 4.2 – Método *Regula-Falsi* ou Método da Falsa Posição



Fonte: adaptada de Chapra (2013).

Em que c_k é a raiz da secante por meio de $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$. Se $f(a_k)$ e $f(b_k)$ têm o mesmo sinal, então faz-se $a_{k+1} = c_k$ e $b_{k+1} = b_k$, caso contrário, é define-se $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = c_k$. Este processo é repetido até que seja encontrada uma raiz aproximada, suficientemente compatível com o erro estimado.

Assim, a solução iterativa do problema da Equação (4.4) poderá ser expressa como:

$$s_1^{(j)} = s_1^{(j-1)} - \frac{\sigma_{st,n} - \sigma_{st,n}^{(j-1)}}{\sigma_{st,n} - \sigma_{st,n}^{(j-2)} - \sigma_{st,n}^{(j-1)}} \cdot (s_1^{(j-2)} - s_1^{(j-1)}) \quad (4.7)$$

Apesar da eficiência do método, a convergência se torna muito lenta. À vista disso, uma alternativa é o algoritmo de Illinois que é um aperfeiçoamento da técnica *Regula-Falsi*. É introduzido o fator 2 na Equação (4.6) que garante convergência superlinear em que o algoritmo executa dois passos para cada passo modificado normal, conforme Equação (4.8):

$$c_k = \frac{f(b_k) \cdot a_k - \frac{1}{2} \cdot f(a_k) \cdot b_k}{f(b_k) - \frac{1}{2} \cdot f(a_k)} \quad (4.8)$$

Esse algoritmo foi testado por Ciampi et al. (1982), que obtiveram bons resultados de convergência em intervalos próximos à raiz. Logo, a solução iterativa do problema da Equação (4.4) poderá ser expressa como:

$$s_1^{(j)} = \frac{(s_1^{(j-1)} \cdot \sigma_{st,n}^{(j-2)}) - (0,5 \cdot \sigma_{st,n}^{(j-1)} \cdot s_1^{(j-2)})}{(\sigma_{st,n}^{(j-2)} - 0,5 \cdot \sigma_{st,n}^{(j-1)})} \quad (4.9)$$

Para iniciar o procedimento, o valor de $s_1^{(0)}$ do deslizamento inicial tem que ser fornecido. Este valor pode ser escolhido levando-se em conta o seu limite superior, multiplicando-se a deformação máxima do aço na seção fissurada pela distância entre duas fissuras adjacentes.

Quando a convergência é atingida, a distribuição final da deformação do aço e a profundidade da linha neutra ao longo do subelemento são obtidas. A curvatura χ_i na i -seção pode ser calculada por meio da Equação (4.10).

$$\chi_i = \frac{\varepsilon_{st,i}}{d - z_{cc,i}} \quad (4.10)$$

Em que: $z_{cc,i}$ representa o valor da profundidade da linha neutra na i -seção; $\varepsilon_{st,i}$ é o valor da deformação específica do aço tracionado na i -seção;

Considerando-se uma variação linear entre $z_{cc,1}$ e $z_{cc,n}$ (valores nas seções das extremidades), é possível definir um valor médio da curvatura para cada distância entre duas fissuras, conforme Equação (4.11).

$$\chi_m = \frac{\varepsilon_{st,m}}{d - z_{cc,m}} \quad (4.11)$$

Em que: $z_{cc,m}$ representa o valor médio da profundidade da linha neutra; e $\varepsilon_{st,m}$ é o valor da deformação específica média do aço tracionado;

A partir das curvaturas obtidas por meio da Equação (4.10), pode-se realizar o cálculo global da peça, obtendo-se as rigidezes (K_i) para cada i -seção ao longo de todos os elementos (aduelas), conforme a Equação (4.12):

$$K_i = \frac{M_i}{\chi_i} \quad (4.12)$$

Em que M_i é o momento na i -seção.

A partir da equação da Linha Elástica (4.13), as flechas e deflexões podem ser obtidas a partir da integração da função momento fletor que atua nas seções de todo o elemento.

$$\frac{\partial^2 w}{dx^2} = \frac{\partial \chi}{dx} = -\frac{M(x)}{K} \cdot \chi \quad (4.13)$$

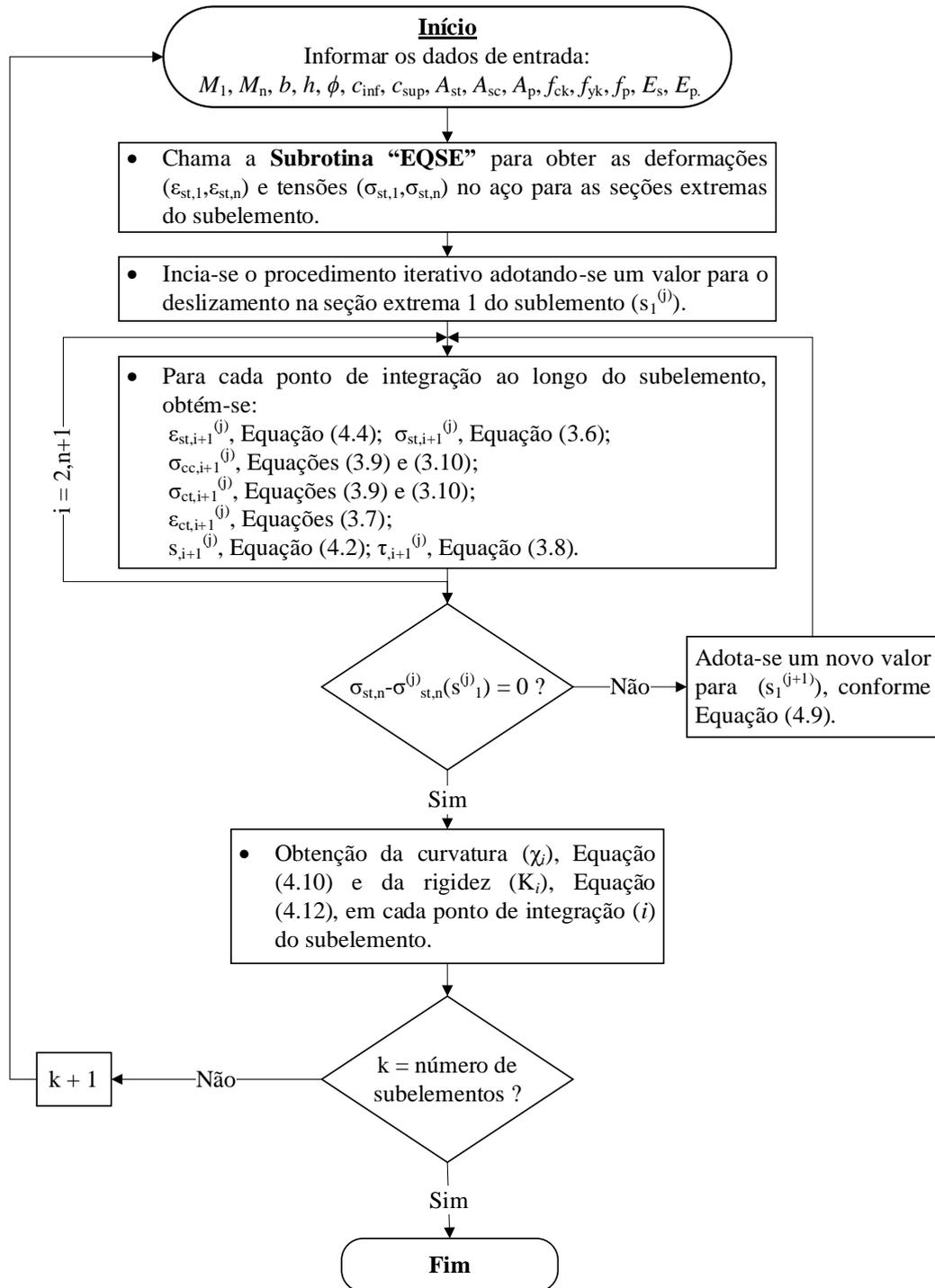
Em que w é o deslocamento vertical da peça ao longo de seu comprimento.

4.2 PROGRAMA PRINCIPAL “MAV”

Na Figura 4.3 é apresentado o fluxograma da solução numérica apresentada no item 4.1 acima, que realiza o equilíbrio da seção considerando o MAV e, conseqüentemente, considera

o deslizamento da armadura ao longo comprimento da peça. Em que: c_{inf} e c_{sup} são os cobrimentos das armaduras nas faces superior e inferior da seção. As demais variáveis já foram definidas ao longo do texto.

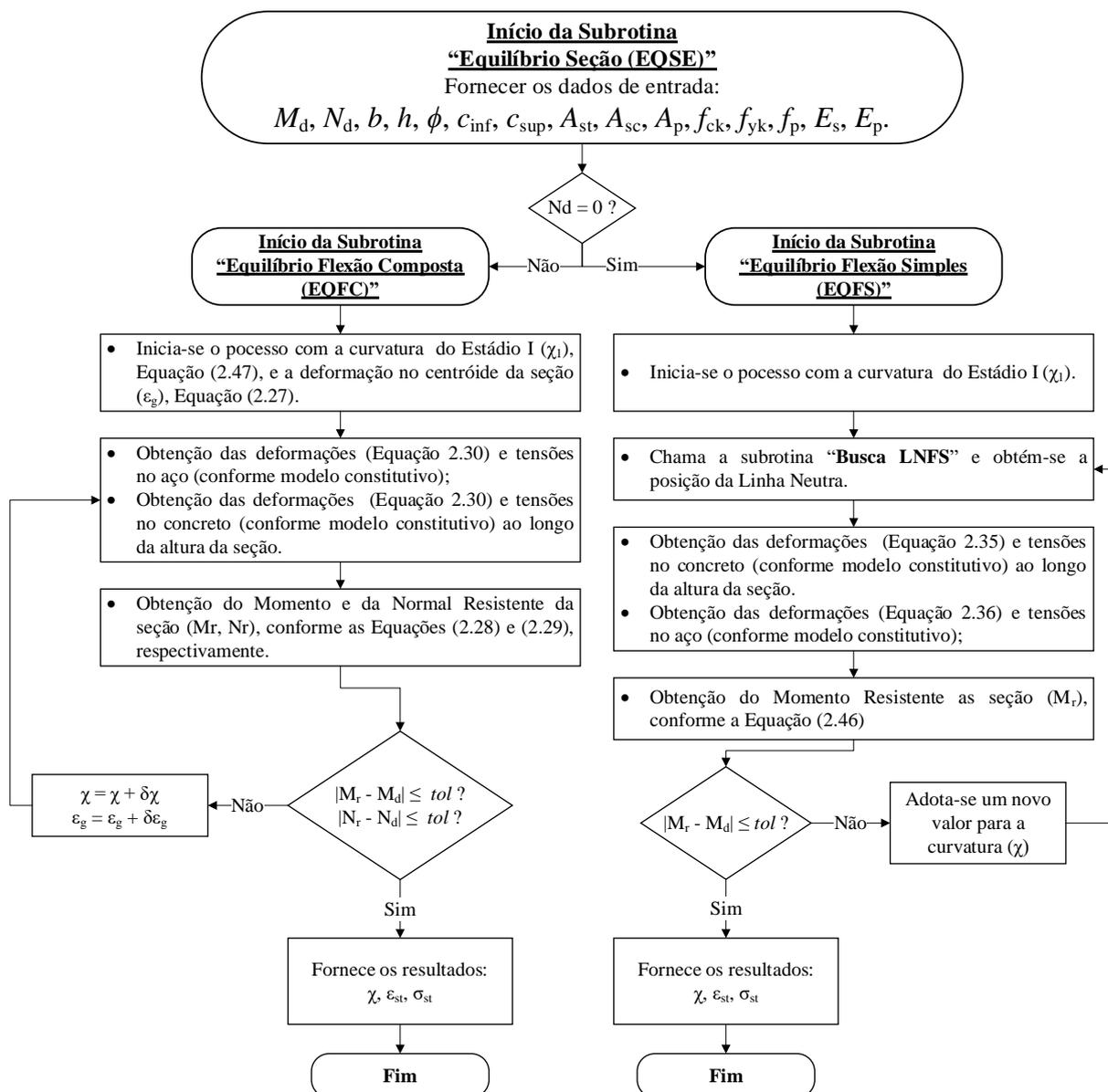
Figura 4.3 – Algoritmo do Programa Principal “MAV”



4.3 SUB-ROTINA EQUILÍBRIO SEÇÃO “EQSE”

Na Figura 4.4 é apresentado o fluxograma que engloba os algoritmos das soluções numéricas apresentadas nos itens 2.1.3 e 2.1.3.1, que tratam do cálculo do equilíbrio de seções submetidas tanto à flexão composta quanto à flexão simples, respectivamente.

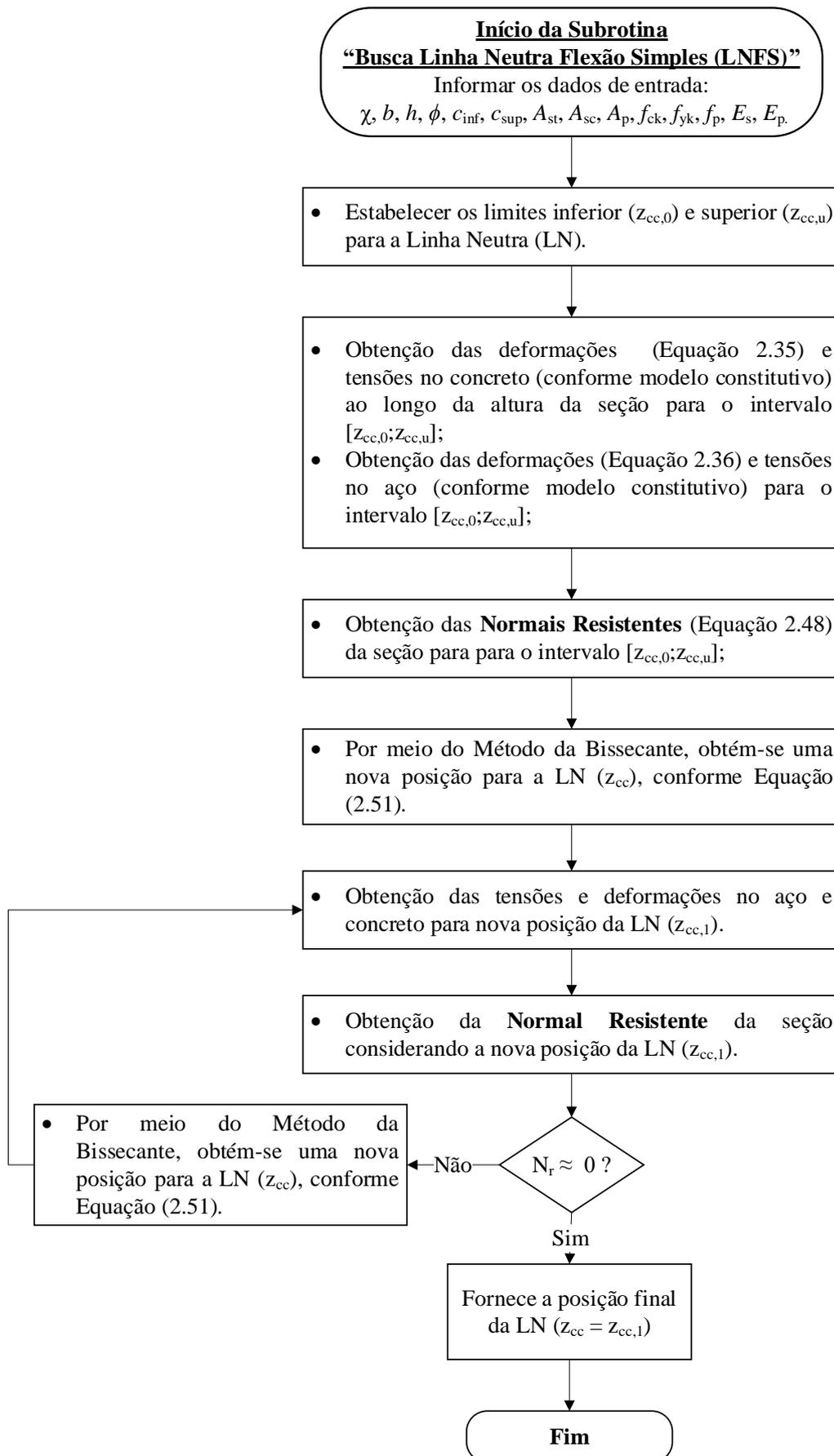
Figura 4.4 – Algoritmo da Sub-rotina “EQSE”



4.4 SUB-ROTINA BUSCA LINHA NEUTRA FLEXÃO SIMPLES “BUSCA LNFS”

Na Figura 4.5 é apresentado o fluxograma do algoritmo da solução numérica apresentada no item 2.1.3.2, que trata do cálculo da posição da linha neutra para peças submetidas à flexão simples.

Figura 4.5 – Algoritmo da Sub-rotina “Busca LNFS”



4.5 SUB-ROTINAS AUXILIARES

Foram implementadas também rotinas auxiliares para o cálculo das tensões nos aços de armadura passiva (σ_{st}) e armadura ativa (σ_p); tensões no concreto à compressão (σ_{cc}); e para as tensões de aderência entre as armaduras e o concreto envolvente, todas essas de acordo com o Código Modelo *fib* 2010 (2012). Esses modelos constitutivos estão detalhados no item 2.3 deste trabalho.

Para o concreto à tração foi implementada a sub-rotina com base no modelo constitutivo apresentados por JahanMohammadi e Soltani (2016). Esse modelo encontra-se descrito no item 2.3.1.3 deste trabalho.

5 APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DAS VIGAS ANALISADAS

A validação do modelo proposto foi feita por comparação com os resultados de programas experimentais de vigas, cujas características permitiam calibrar com fidelidade as respostas do programa computacional desenvolvido.

Neste capítulo são apresentados três exemplos de vigas, selecionados nas pesquisas estudadas, que serviram para validar o modelo numérico:

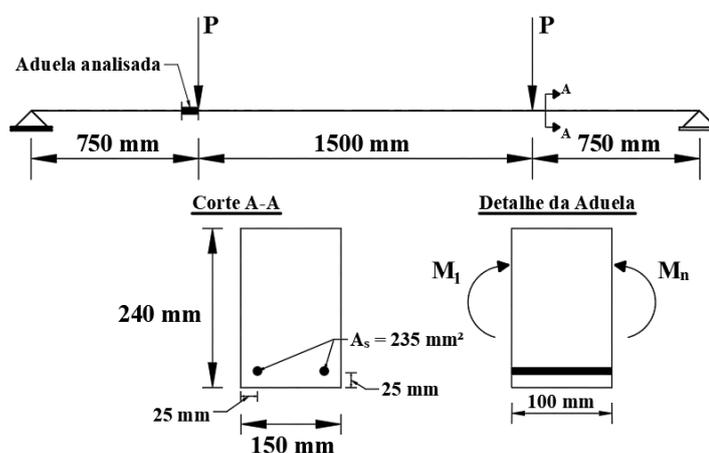
- o primeiro, a viga normalmente armada obtida em Álvares (1993), em concreto armado;
- o segundo, a viga obtida em Araújo (2010), em concreto armado;
- e, por fim, as vigas extraídas de Tavares (2000), em concreto protendido.

As duas primeiras apresentam fissuração repartida e a última fissuração discreta. Em todas essas aplicações são analisadas aduelas tanto sob momentos constantes quanto sob gradiente de momentos.

5.1 VIGA EXTRAÍDA DE ÁLVARES (1993)

A viga extraída de Álvares (1993) é simplesmente apoiada, normalmente armada e de concreto armado. Apresenta duas cargas concentradas localizadas a 750 mm e a 2250 mm do apoio esquerdo, conforme Figura 5.1. Nessa figura são apresentados também a seção transversal com o posicionamento e quantidade de armadura como também um detalhe da aduela utilizada para análise do modelo numérico.

Figura 5.1 – Esquema estrutural e detalhes da viga obtida em Álvares (1993)



Fonte: adaptada de Álvares (1993).

Em que: A_{st} é a área de aço tracionada; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita da aduela analisada, respectivamente; P é a carga concentrada atuante.

Na Tabela 5.1 são apresentados os dados utilizados para a análise da viga.

Tabela 5.1 – Dados utilizados para a análise da viga obtida em Álvares (1993)

E_c (MPa)	E_s (MPa)	f_{ck} (MPa)	f_{ct} (MPa)	f_y (MPa)	ρ (%)
29200	196000	25,50	2,044	500	1,48

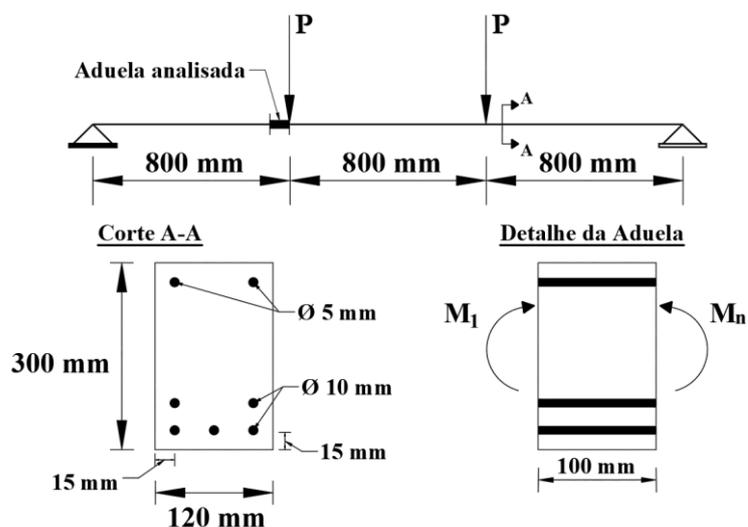
Em que: E_c é o módulo de elasticidade do concreto; E_s é o módulo de elasticidade do aço de armadura passiva; f_{ck} é a resistência à compressão do concreto; f_{ct} é a resistência à tração do concreto; f_y é a resistência ao escoamento do aço; ρ é a taxa geométrica de armadura passiva.

5.2 VIGA EXTRAÍDA DE ARAÚJO (2010)

A viga extraída de Araújo (2010) é simplesmente apoiada e de concreto armado. Apresenta duas cargas concentradas localizadas a 800 mm e a 1600 mm do apoio esquerdo, conforme Figura 5.2.

Ainda na Figura 5.2 são apresentados também a seção transversal com o posicionamento e quantidade de armadura como também um detalhe da aduela utilizada para análise do modelo numérico.

Figura 5.2 – Esquema estrutural e detalhes da viga obtida em Araújo (2010)



Fonte: adaptada de Araújo (2010).

Em que: M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita da aduela analisada, respectivamente; P é a carga concentrada atuante.

Na Tabela 5.2 são apresentados os dados utilizados para a análise da viga.

Tabela 5.2 – Dados utilizados para a análise da viga obtida em Araújo (2010)

E_c (MPa)	E_s (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	f_y (MPa)	ρ (%)
30870	200000	29,6	2,9	550	0,73

5.3 VIGAS EXTRAÍDAS DE TAVARES (2000)

Tavares (2000) ensaiou quatro vigas biapoiadas segmentadas (com aduelas), cada uma apresentava 4500 mm de vão (l) e seção retangular com 150 mm de largura (b_w) por 400 mm de altura (h). Utilizou três relações diferentes de l_a/h , em que l_a é o comprimento da aduela, para cada uma das vigas ensaiadas. Os valores utilizados para esta relação foram 1,25, 2,0 e 2,5. As vigas eram protendidas com cabos internos aderentes.

O programa de ensaios foi dividido em duas séries denominadas de A e B . Na série A foram ensaiadas três vigas representando os três tipos de aduelas centrais (curta, média, longa), com relação $l_a/h = 1,25$ (A1), 2,0 (A2) e 2,5 (A3). A série B era composta de uma única viga com as mesmas características da viga A2 tendo como finalidade o ensaio de uma viga com aduelas médias sob o efeito de um gradiente de momento.

As vigas tinham em comum: a mesma armadura interna aderente, que era composta de duas cordoalhas de 15,2 mm de diâmetro; a mesma seção transversal; a mesma tensão de protensão inicial do cabo $\sigma_{p0} = 0,70 \cdot f_{ptk}$, em que f_{ptk} é a resistência característica à tração do aço da armadura ativa.

Na Tabela 5.3 é apresentado o resumo das principais características das vigas ensaiadas.

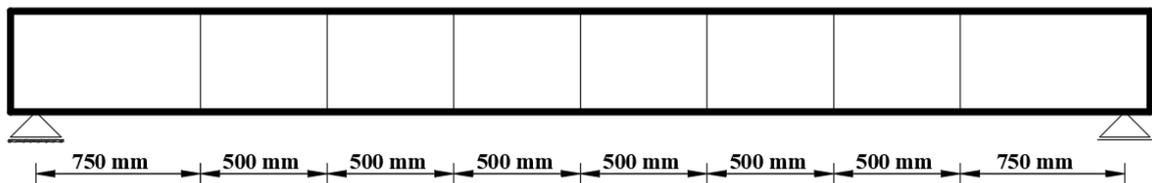
Tabela 5.3 – Resumo das principais características das vigas ensaiadas por Tavares (2000)

Vigas	Tipos	Cabo	Tensão inicial no cabo (σ_{p0})	l_a/h	Seção (mm ²)
Série A	A_1	Cabo reto	$0,70 \cdot f_{ptk}$	1,25	150mm × 400mm
	A_2	composto de		2,00	
	A_3	2Ø15,2		2,50	
Série B	B_2	Cabo reto composto de 2Ø15,2	$0,70 \cdot f_{ptk}$	2,00	150mm × 400mm

Tendo como base os valores determinados para l_a/h vistos na Tabela 5.3 e mantendo o mesmo comprimento total de 4500 mm, as quatro vigas foram denominadas A1, A2, A3 e B2. De acordo com Tavares (2000), as dimensões das aduelas centrais foram escolhidas de modo a permitir a disposição das cargas em pontos distantes da região central (região a ser estudada), de modo que não houvesse perturbação introduzida pelas cargas na área estudada.

A viga A1 possuía oito aduelas (Figura 5.3), sendo formada por duas aduelas de cabeça, com comprimentos de 750 mm, comuns a todos os tipos de viga. As demais aduelas desta viga eram de 500 mm de comprimento, sendo o total de seis aduelas e, portanto, um maior número de juntas na região entre as cargas.

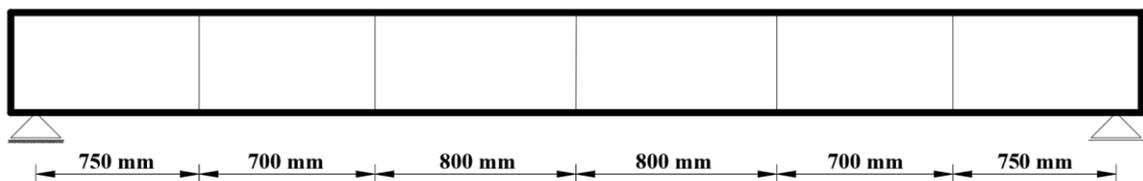
Figura 5.3 – Divisão da viga A1 em aduelas



Fonte: adaptada de Tavares (2000).

As vigas A2 e B2 possuíam duas aduelas centrais ($l_a = 800$ mm), duas intermediárias ($l_a = 700$ mm) e, duas de cabeça ($l_a = 750$ mm), conforme Figura 5.4. A viga A3 com relação $l_a/h = 2,5$ possuía duas aduelas centrais ($l_a = 1000$ mm), duas intermediárias ($l_a = 500$ mm) e as duas de cabeça semelhante as das outras três vigas anteriores, de acordo com a Figura 5.5.

Figura 5.4 – Divisão das vigas A2 e B2 em aduelas



Fonte: adaptada de Tavares (2000).

Figura 5.5 – Divisão das vigas A3 em aduelas



Fonte: adaptada de Tavares (2000).

Com relação à armadura passiva, todas as aduelas apresentam a mesma área de aço CA50 (640 mm²), sendo divididas em quatro barras tracionadas e quatro barras comprimidas. A armadura transversal foi composta de estribos com diâmetro nominal de 8,0 mm e espaçamento de 100 mm.

No que se refere à armadura ativa, todas as vigas apresentavam duas cordoalhas de diâmetro de 15,2 mm retilíneas, com área de aço igual a 287 mm² (CP190 RB) colocadas a 75 mm da borda inferior da aduela. A força aplicada nos cabos foi de 372 kN.

Os parâmetros utilizados para a análise de todas as vigas são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados para as vigas ensaiadas por Tavares (2000)

E_C (MPa)	E_s (MPa)	E_p (MPa)	f_{cm} (MPa)	f_{ctm} (MPa)	f_y (MPa)	f_{py} (MPa)	ρ (%)	ρ_p (%)
32.641	200000	19500000	40	3,47	500	14964	1,07	0,48

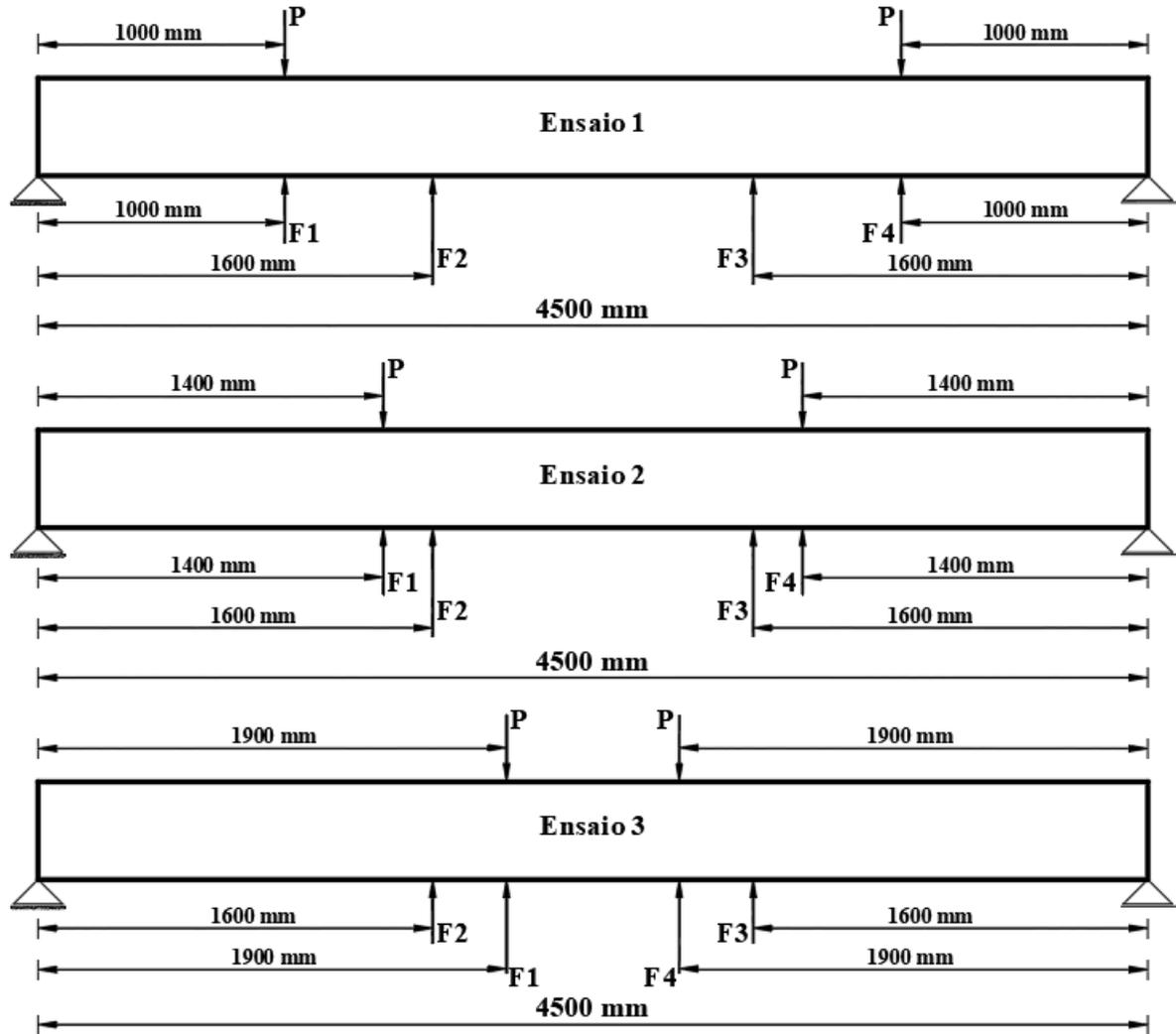
Em que: E_p é o módulo de elasticidade para o aço de armadura ativa; f_{cm} é a resistência à compressão média do concreto; f_{ctm} é a resistência à compressão média do concreto à tração; f_{py} é a resistência ao escoamento para o aço de armadura ativa; ρ_p é a taxa geométrica de armadura ativa.

Cada viga foi ensaiada duas ou três vezes, com exceção da viga A1, que rompeu no primeiro ensaio, devido a um acidente com o equipamento de aplicação de carga. Por conta disso a viga A1 não será analisada neste trabalho.

Para cada ensaio, a posição do carregamento era alterada. Assim, para o primeiro, segundo e terceiro ensaios, as cargas concentradas foram aplicadas a 1000 mm, 1400 mm e 1900 mm dos apoios.

Na Figura 5.6 são apresentadas as posições dos carregamentos aplicados e de medição das flechas obtidas por ensaio. Em que: $F1$, $F2$, $F3$ e $F4$ são os deslocamentos obtidos nos ensaios.

Figura 5.6 – Posição dos carregamentos aplicados e das flechas obtidas por ensaio



Fonte: adaptada de Tavares (2000).

6 RESULTADOS, COMPARAÇÕES E DISCUSSÕES

6.1 VIGAS COM FISSURAÇÃO REPARTIDA

Neste item são discutidos os dois exemplos de vigas com fissuração repartida que serviram de validação do modelo numérico: a viga obtida em Álvares (1993), item 6.1.1; a viga normalmente armada obtida em Araújo (2010), item 6.1.2. Esses exemplos são importantes por mostrarem boa correlação dos resultados obtidos (MAV) com os dos experimentos para aduelas submetidas a gradiente de momentos fletores.

6.1.1 Viga extraída de Álvares (1993)

Na Tabela 6.1 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). São mostrados, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção localizada no meio do vão.

Tabela 6.1 – Comparação dos resultados obtidos para a viga obtida em Álvares (1993)

	Experimental 1	Experimental 2	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	49,50	58,50	56,90	59,15
w_u (mm)	8,35	8,12	8,27	7,88
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp1}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+14,95	+19,49
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp2}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	-2,73	+1,11
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	–	+3,95

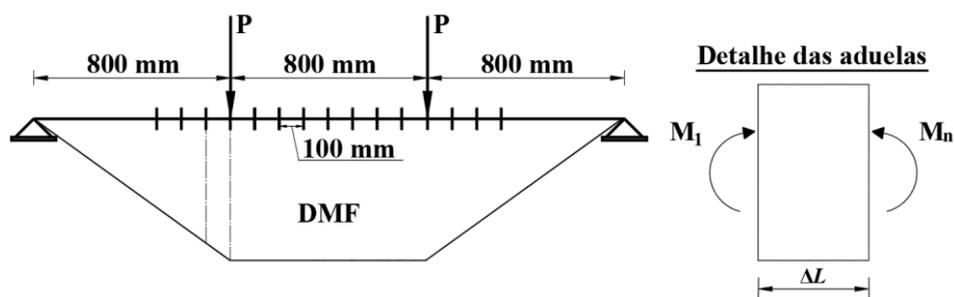
A Tabela 6.1 mostra que a carga última obtida por meio do MAV é 14,95% maior que a do experimento 1 e 2,73% inferior à do Experimento 2. A carga última do MAP é 19,49% maior que a do experimento 1 e 1,11% maior que a do Experimento 2 e 3,95% superior a do MAV.

Esses resultados destacam a influência da aderência na obtenção dos esforços e confirmam que a resposta do MAP é mais rígida que a do experimento e a do MAV. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – a aderência perfeita superestima a rigidez da peça e não se mantém ao longo do processo de evolução do carregamento, à medida que as fissuras se abrem.

Para a modelagem numérica foram consideradas fissuras a cada 100 mm de espaçamento (aproximadamente a distância entre estribos), conforme o padrão de fissuração apresentado na Figura 6.1.

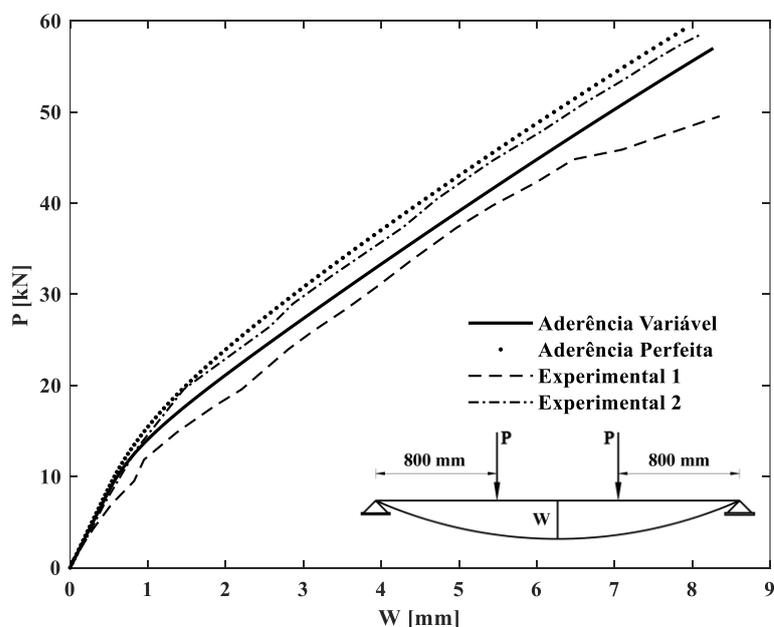
Na Figura 6.1 também é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. Nela: ΔL é o comprimento da aduela; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita das aduelas, respectivamente.

Figura 6.1 – Padrão de fissuração e esquema do DMF



É importante destacar que a ruína do ensaio se deu pelo escoamento da armadura longitudinal de tração na região no meio do vão. O mesmo ocorreu para o MAV e MAP. Na Figura 6.2 é apresentado o diagrama carga versus deslocamento no meio do vão.

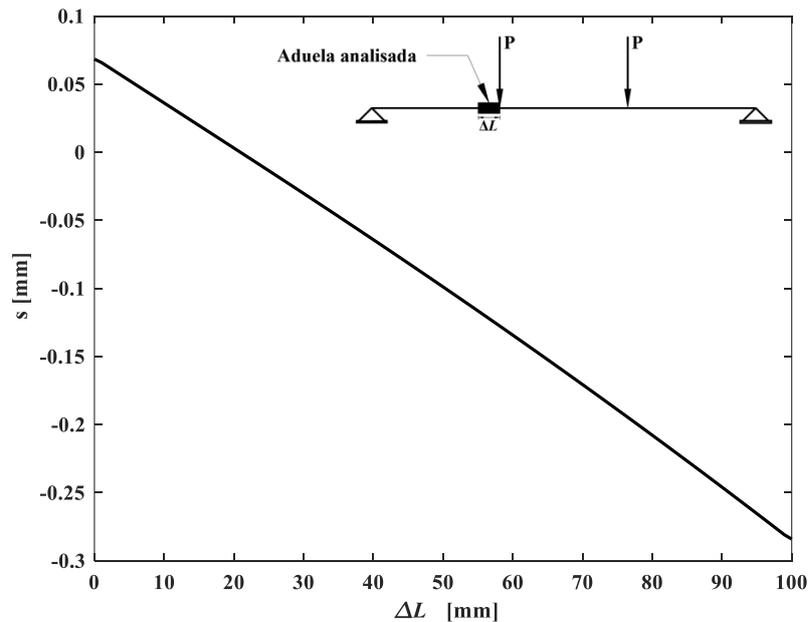
Figura 6.2 – Diagrama carga-deslocamento (meio do vão)



Com o intuito de enfatizar o comportamento das aduelas submetidas a gradiente de momentos fletores, priorizou-se por apresentar os resultados para uma aduela localizada próxima ao ponto de aplicação da carga, conforme detalhe apresentado na Figura 6.3.

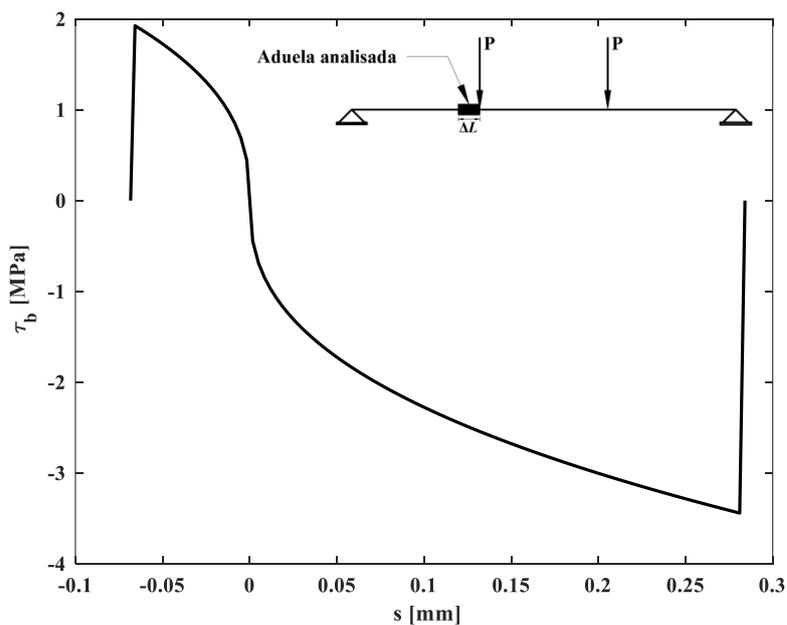
Considerou-se a carga próxima de ruptura ($\cong 57$ kN), em que os momentos nas extremidades esquerda e direita da aduela são $\cong 39,90$ kN.m e $\cong 45,60$ kN.m, respectivamente. Na Figura 6.3 também é apresentado o diagrama deslizamento do aço em função do comprimento da aduela.

Figura 6.3 – Diagrama deslizamento-comprimento da aduela



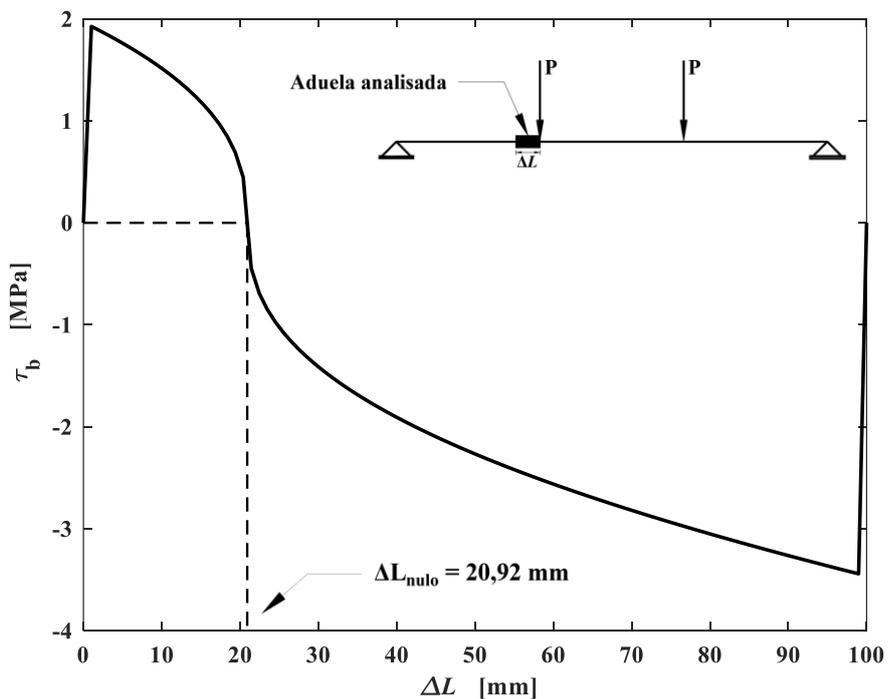
O diagrama tensão de aderência-deslizamento do aço é apresentado na Figura 6.4.

Figura 6.4 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento



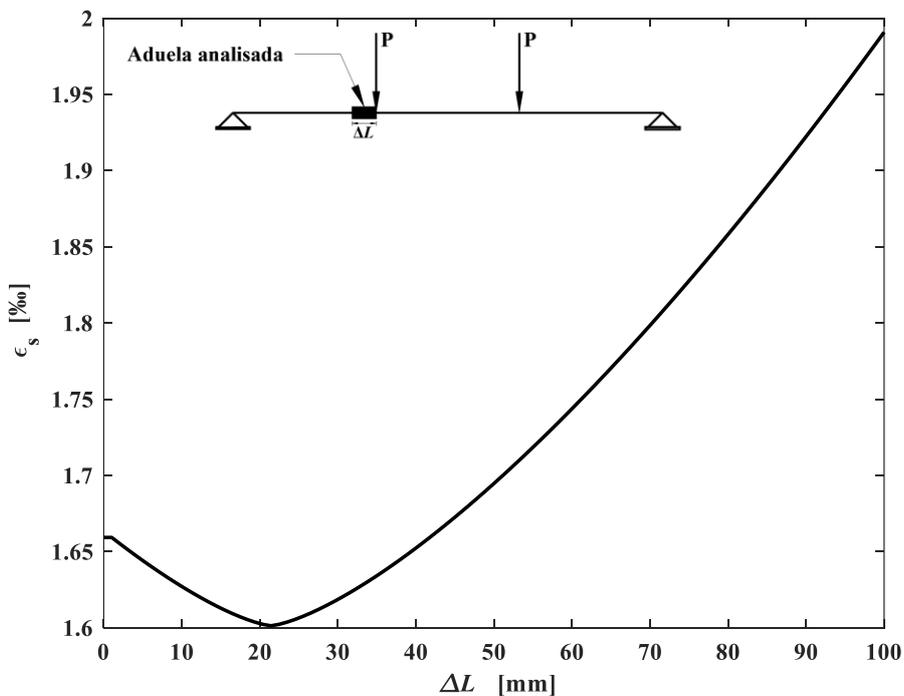
O diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.5.

Figura 6.5 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela



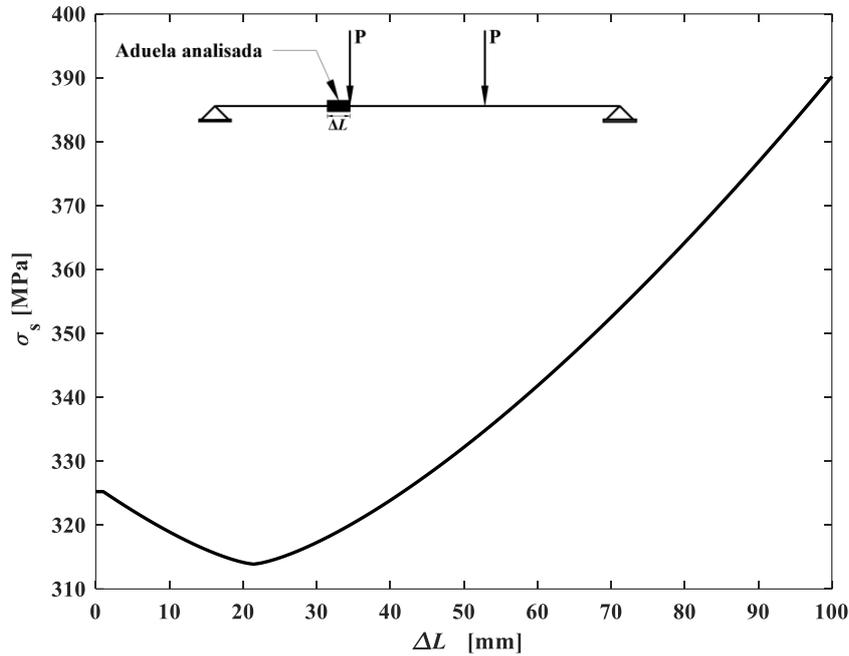
O diagrama deformação específica no aço ao longo do comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.6.

Figura 6.6 – Diagrama deformação específica do aço-comprimento da aduela



O diagrama de tensão no aço ao longo do comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.7.

Figura 6.7 – Diagrama tensão no aço-comprimento da aduela



6.1.2 Viga extraída de Araújo (2010)

Na Tabela 6.2 é apresentada a comparação da carga última (P_u), obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente, com modelos de aderência perfeita – MAP ($P_{u,ap}$) e aderência variável - MAV ($P_{u,av}$). São mostrados, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção localizada no meio do vão.

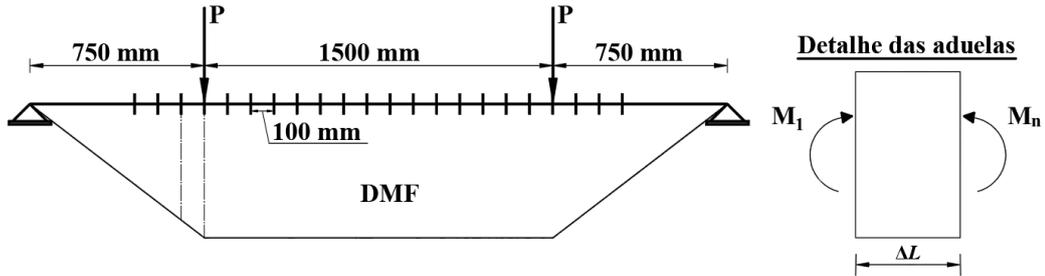
Tabela 6.2 – Comparação dos resultados obtidos para a viga obtida em Araújo (2010)

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	32,50	33,05	34,85
w_u (mm)	17,12	16,86	16,27
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+1,69	+7,23
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+5,45

Vê-se, na Tabela 6.2, que a carga última obtida por meio do MAV é 1,69% maior que a do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 7,23% maior que a experimental e 5,45% superior à do MAV. Esses resultados destacam a importância da aderência na obtenção dos esforços. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – o modelo fornece uma resposta mais rígida que a do experimento e a do MAV.

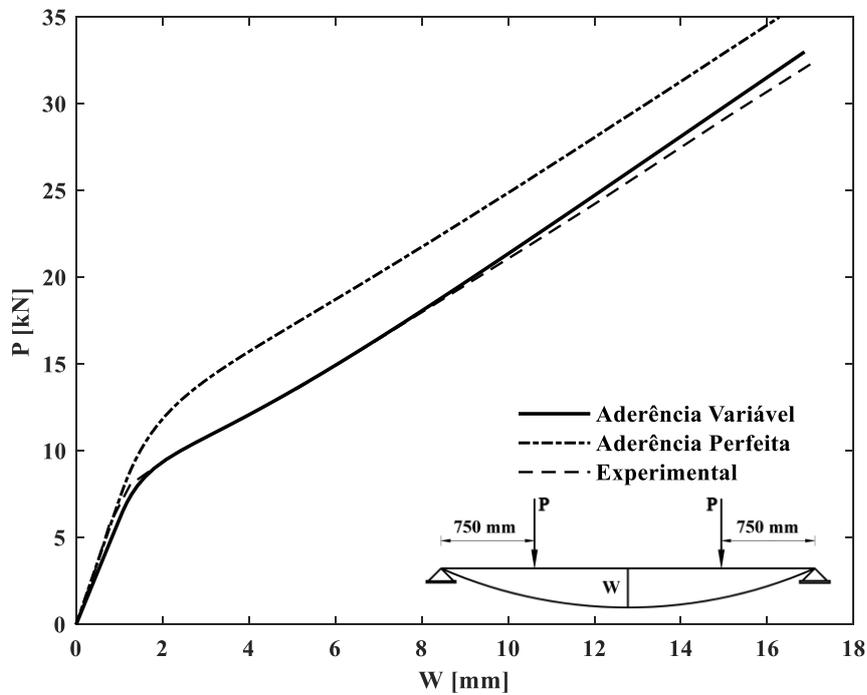
Para a modelagem numérica foram consideradas fissuras a cada 100 mm de espaçamento (aproximadamente a distância entre estribos), conforme o padrão de fissuração apresentado na Figura 6.8. Nesta figura também é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. Em que: ΔL é o comprimento da aduela; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita das aduelas, respectivamente.

Figura 6.8 – Padrão de fissuração, esquema do DMF e detalhe das aduelas



É importante destacar que a ruína, no ensaio, se deu pelo escoamento da armadura longitudinal de tração na região no meio do vão, o mesmo ocorreu para o MAV e MAP. Na Figura 6.9 é apresentado o diagrama carga versus deslocamento no meio do vão.

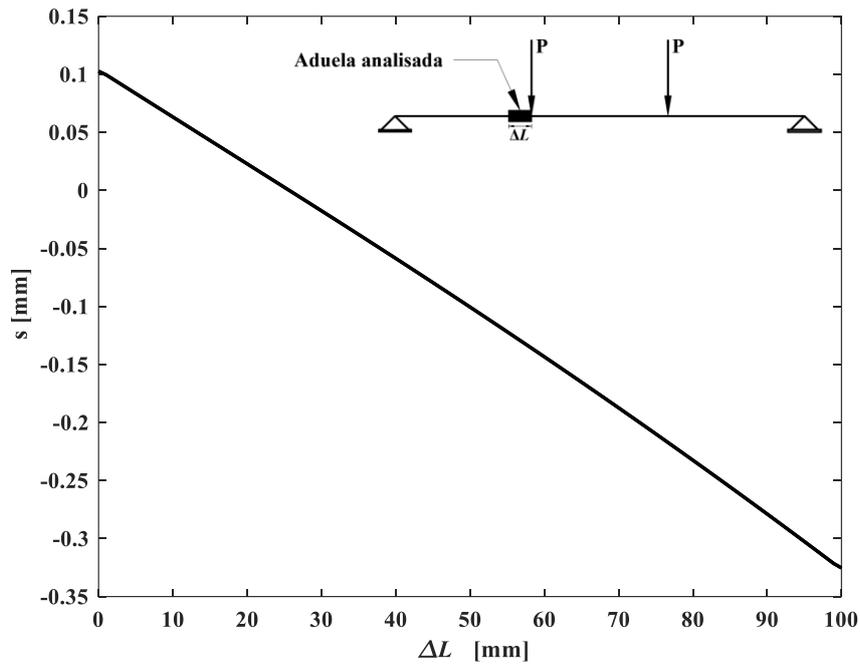
Figura 6.9 – Diagrama carga-deslocamento (meio do vão)



A fim de destacar o comportamento das aduelas submetidas a gradiente de momentos fletores, optou-se por apresentar os resultados para uma aduela localizada próxima ao ponto de aplicação da carga, conforme detalhe apresentado na Figura 6.10.

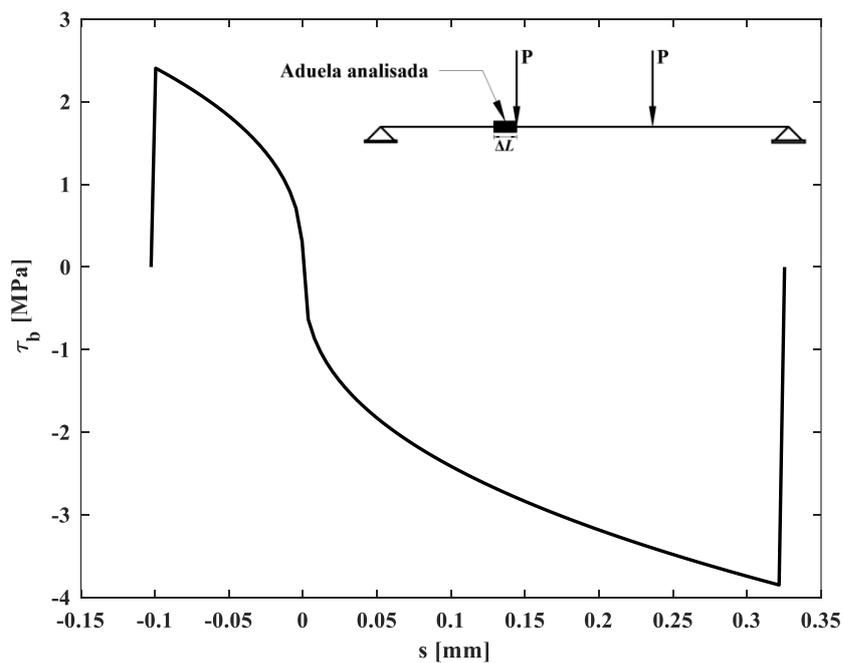
Considerou-se a carga próxima de ruptura ($P \cong 33 \text{ kN}$), em que os momentos nas extremidades esquerda e direita da aduela são $M_1 \cong 21,45 \text{ kN.m}$ e $M_n \cong 24,75 \text{ kN.m}$, respectivamente. Na Figura 6.10 também é apresentado o diagrama deslizamento do aço em função do comprimento da aduela.

Figura 6.10 – Diagrama deslizamento-comprimento da aduela



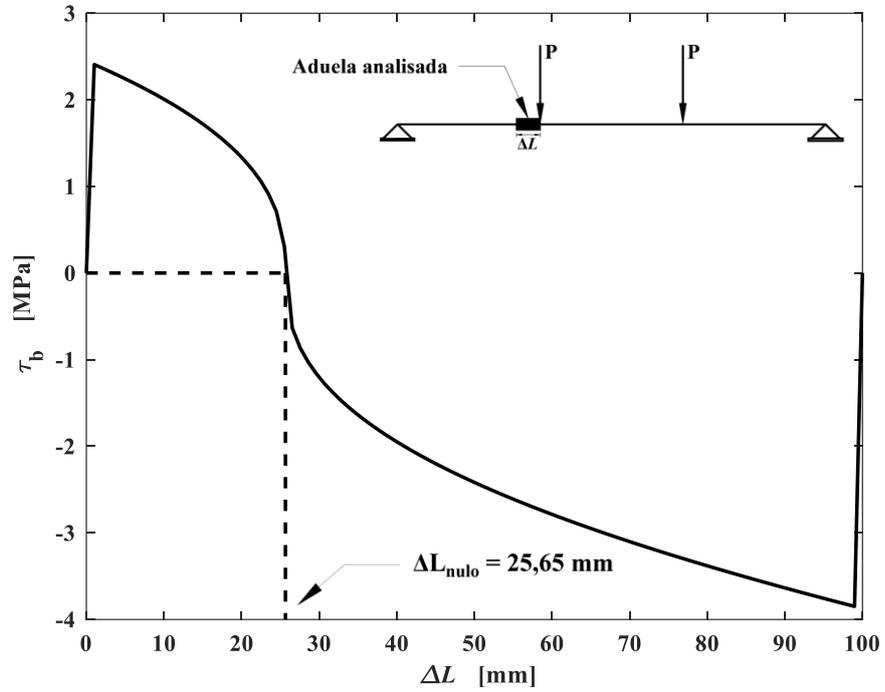
O diagrama tensão de aderência-deslizamento do aço é apresentado na Figura 6.11.

Figura 6.11 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento



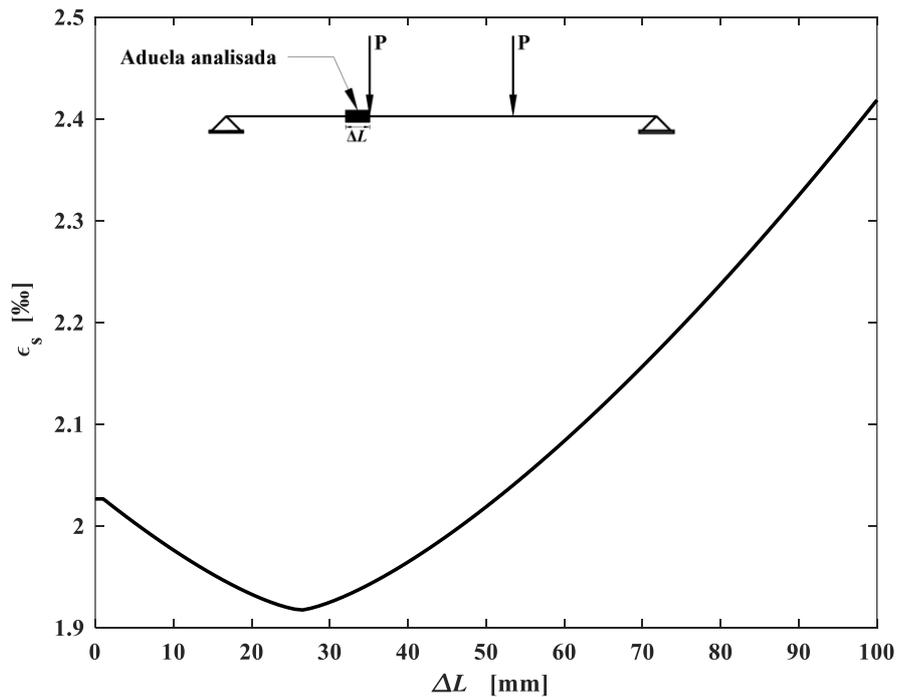
O diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.12.

Figura 6.12 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela



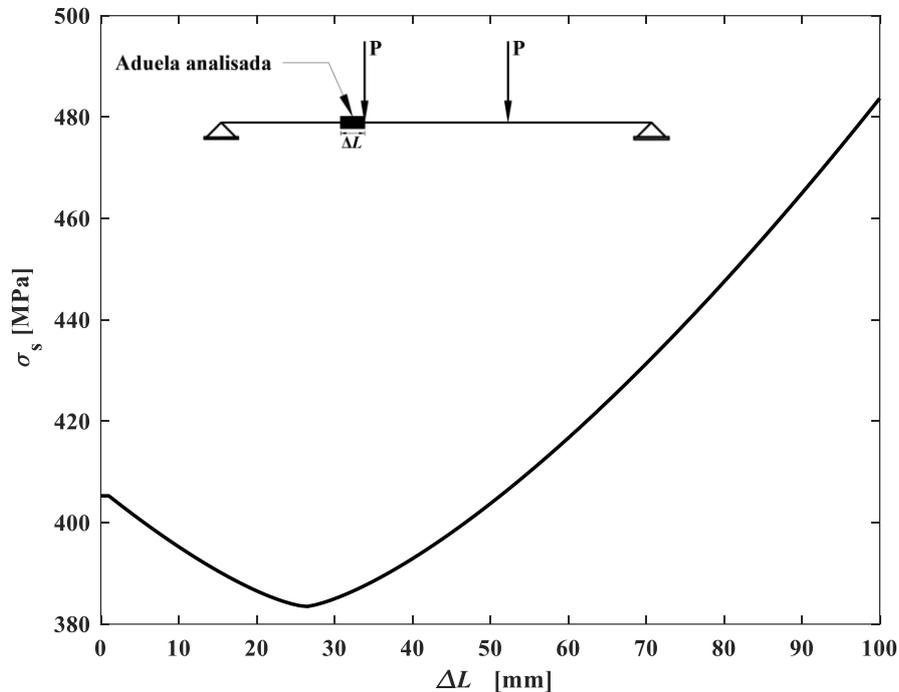
O diagrama deformação específica-comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.13.

Figura 6.13 – Diagrama deformação específica do aço-comprimento da aduela



O diagrama de tensão no aço-comprimento da aduela é apresentado na Figura 6.14.

Figura 6.14 – Diagrama tensão no aço-comprimento da aduela



6.1.3 Considerações sobre as vigas com fissuração repartida

Na Figura 6.3 e Figura 6.10 são apresentados os diagramas deslizamento do aço em função do comprimento da aduela para ambas as vigas. Observa-se que o deslizamento diminui das extremidades para o interior da aduela e o ponto de deslizamento nulo está mais próximo da extremidade que está submetida a momentos fletores menores, o que está de acordo com Giuriani (1979, 1981, 1982), Cohn e Riva (1987) e Martins (1989).

Os diagramas tensão de aderência versus deslizamento são apresentados na Figura 6.4 e Figura 6.11. É possível verificar que as curvas estão em conformidade com os modelos de aderência variável (MAV) adotados na análise numérica.

Os diagramas de tensão de aderência ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.5 e na Figura 6.12 para ambas as vigas, respectivamente. A partir desses resultados, é possível observar que o ponto de tensão de aderência nula (ΔL_{nulo}) está mais próximo das extremidades que apresentam menores valores de momentos fletores. Consequentemente, os pontos de deslizamentos nulos são mais desviados para essas extremidades, confirmando que o modelo de aderência perfeita não é mais possível. Uma

variação significativa das tensões de aderência nas extremidades das aduelas é observada, pois nas seções fissuradas, essas tensões são consideradas nulas.

Os diagramas de deformação específica no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.6 e na Figura 6.13 para ambas as vigas, respectivamente. Os diagramas de tensão no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.7 e na Figura 6.14 para ambas as vigas, respectivamente.

É possível verificar a partir desses resultados que as deformações específicas e as tensões no aço diminuem das extremidades para o interior das aduelas e os seus menores valores estão mais próximos das extremidades menos solicitadas, o que está de acordo com Giuriani (1979, 1981, 1982), Cohn e Riva (1987) e Martins (1989).

Outro detalhe observado é que o ponto de deslizamento nulo da Figura 6.11 e, conseqüentemente, o de tensão de aderência nula (Figura 6.12) coincidem com os pontos de inflexão das curvas da Figura 6.13 e da Figura 6.14, confirmando que os menores valores de tensão e deformação no aço ocorrem onde a aderência é nula. O mesmo comportamento é observado nos resultados apresentados da Figura 6.3 à Figura 6.7.

É importante enfatizar que quanto maior a diferença dos momentos fletores nas extremidades das aduelas, mais próximos da extremidade menos solicitada estarão os pontos de deslizamento nulo, tensão de aderência nula, além dos menores valores de deformação específica e tensão no aço.

Para ambas as vigas, é observado que as curvas fornecidas pelo modelo numérico mostram uma boa correlação com as curvas experimentais, sendo capaz de identificar o ponto de início da fissuração do elemento. O modelo apresentou carga última próxima às obtidas nos ensaios (diferença inferior a 3% para a maioria dos ensaios). É importante enfatizar que a ruína do ensaio se deu pelo escoamento da armadura longitudinal de tração na região no meio do vão, o mesmo ocorreu para o MAV e MAP.

6.2 VIGAS COM FISSURAÇÃO DISCRETA

Neste item são apresentados três exemplos de vigas, obtidas em Tavares (2000), com fissuração discreta com o objetivo, também, de validação do modelo numérico. Esses exemplos são importantes para demonstrar a eficiência do modelo numérico para aduelas longas e curtas,

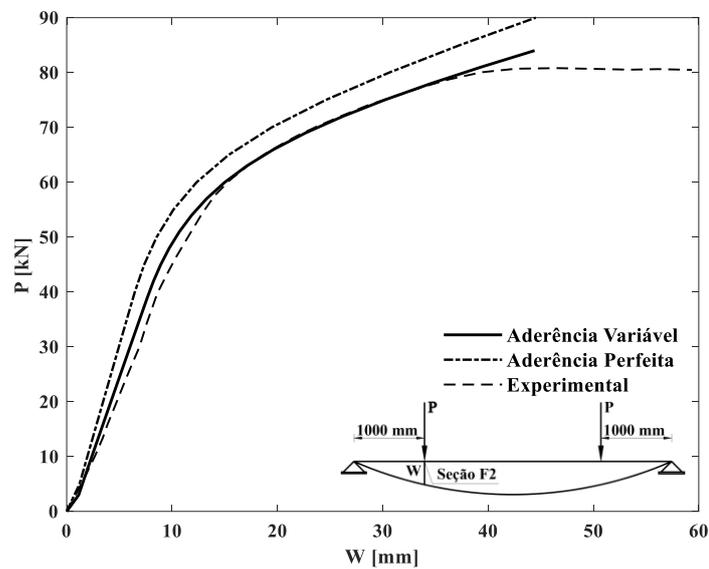
submetidas tanto a gradiente quanto a momentos fletores constantes. A discussão detalhada dos resultados para essas vigas será apresentada nos itens 6.2.4, 6.2.5 e 6.2.6 deste trabalho.

6.2.1 Viga A2

6.2.1.1 Ensaio 1

Na Figura 6.15 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento para a seção F2.

Figura 6.15 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) referente ao ensaio 1 da viga A2



Na Tabela 6.3 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Vê-se, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.3 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga A2

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	80,79*	84,53**	90,05
w_u (mm)	46,57*	44,41**	44,53
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+4,63	+11,46
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+6,53

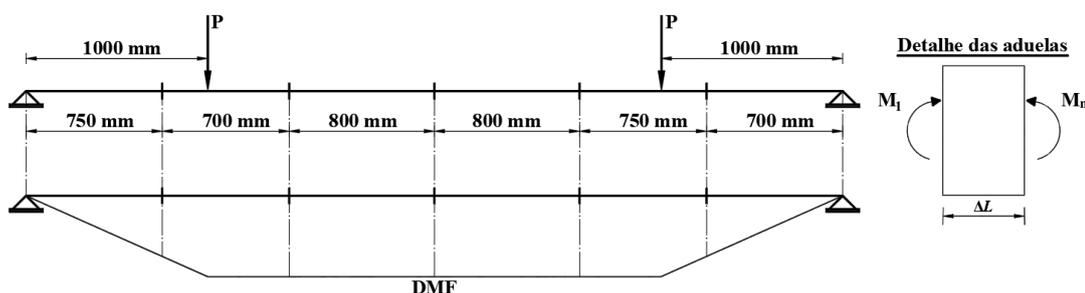
*Valores obtidos no momento da interrupção do ensaio e não da ruptura da peça;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

Para a modelagem numérica foram consideradas apenas as seções das juntas preexistentes como fissuradas, pois não surgiram fissuras durante o ensaio 1. Na Figura 6.16 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas.

Em que: ΔL é o comprimento da aduela; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita das aduelas, respectivamente. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central.

Figura 6.16 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 1 da viga A2



Com o intuito de enfatizar o comportamento das aduelas mais carregadas e com maior potencial de fissuração, priorizou-se por apresentar os resultados para a aduela localizada próxima a junta central, conforme detalhe apresentado na Figura 6.17.

Na Tabela 6.4, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

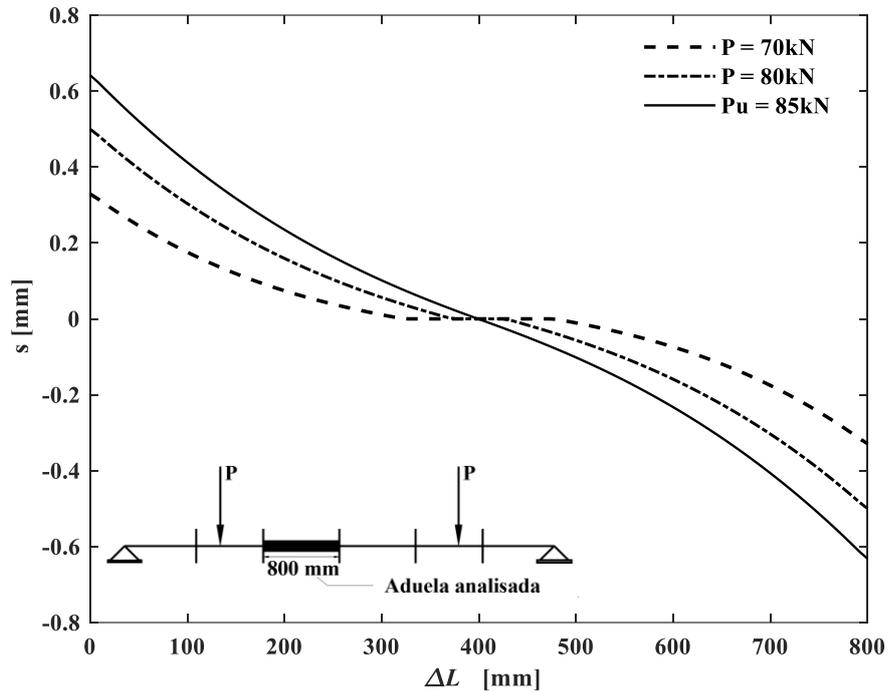
Tabela 6.4 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 1 da viga A2

$\Delta L(mm)$	$P(kN)$	$M_1(kN.m)$	$M_n(kN.m)$
	70,00	70,00	70,00
800	80,00	80,00	80,00
	84,53	84,53	84,53

Da Figura 6.17 à Figura 6.21 são apresentados os resultados, considerando a aduela de 800 mm de comprimento (submetida a momentos fletores constantes), antes de aparecer a primeira fissura. São apresentados os resultados para três níveis de carregamentos em cada figura.

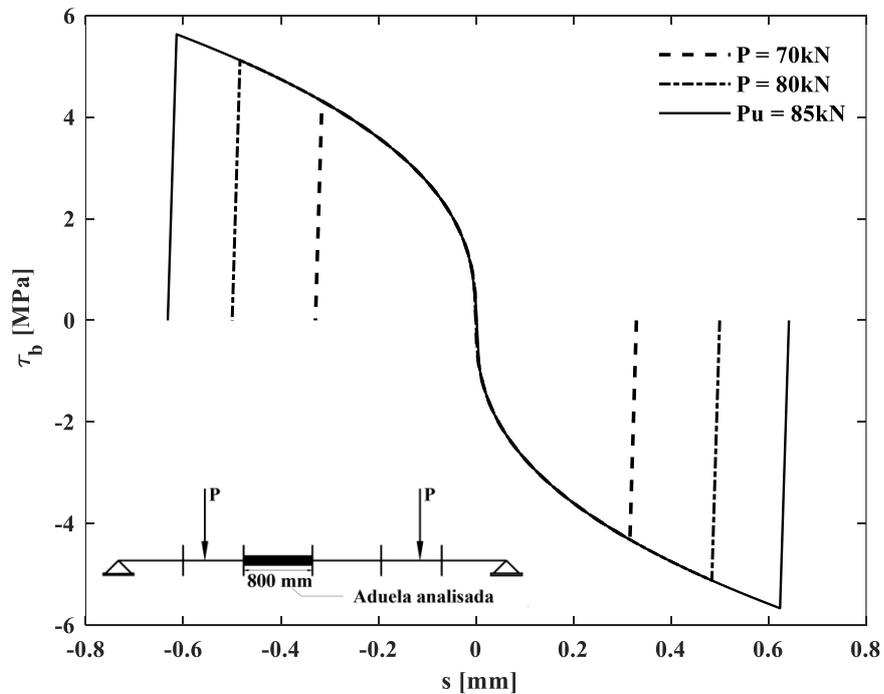
Na Figura 6.17 são apresentados os diagramas deslizamento-comprimento da aduela.

Figura 6.17 – Diagramas deslizamento-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2



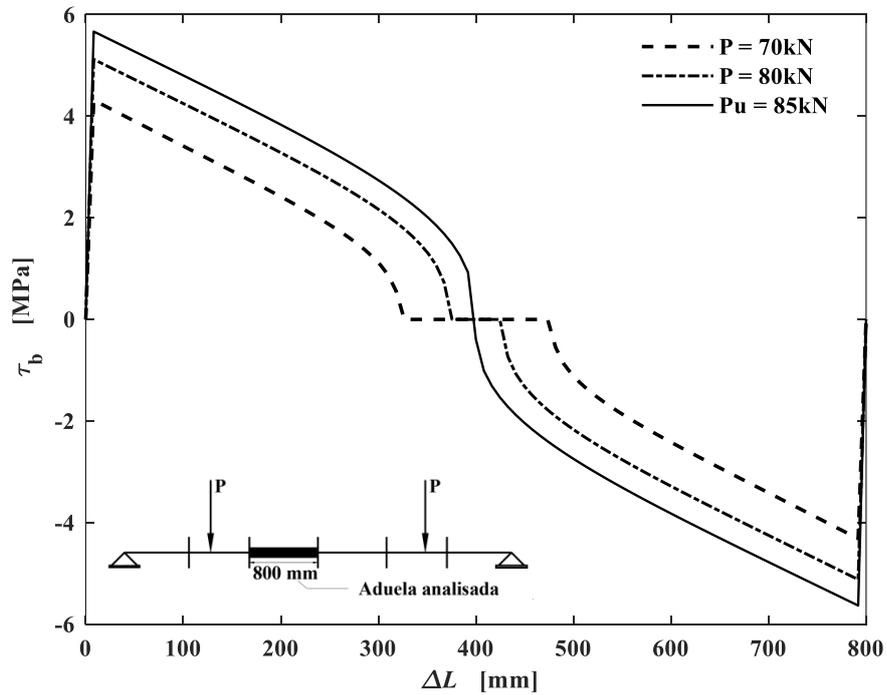
Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço são apresentados na Figura 6.18.

Figura 6.18 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2



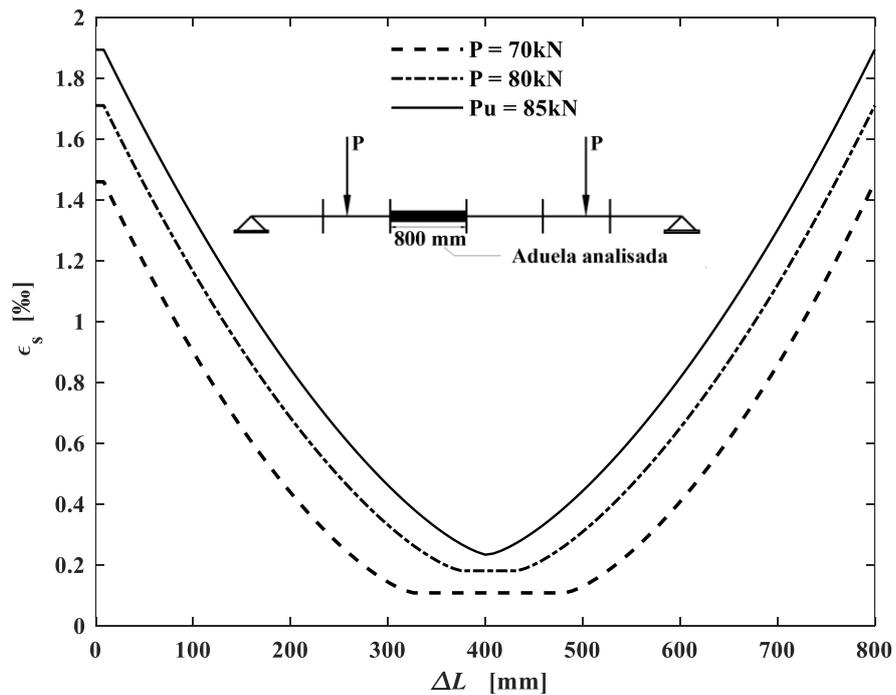
Os diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.19.

Figura 6.19 – Diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2



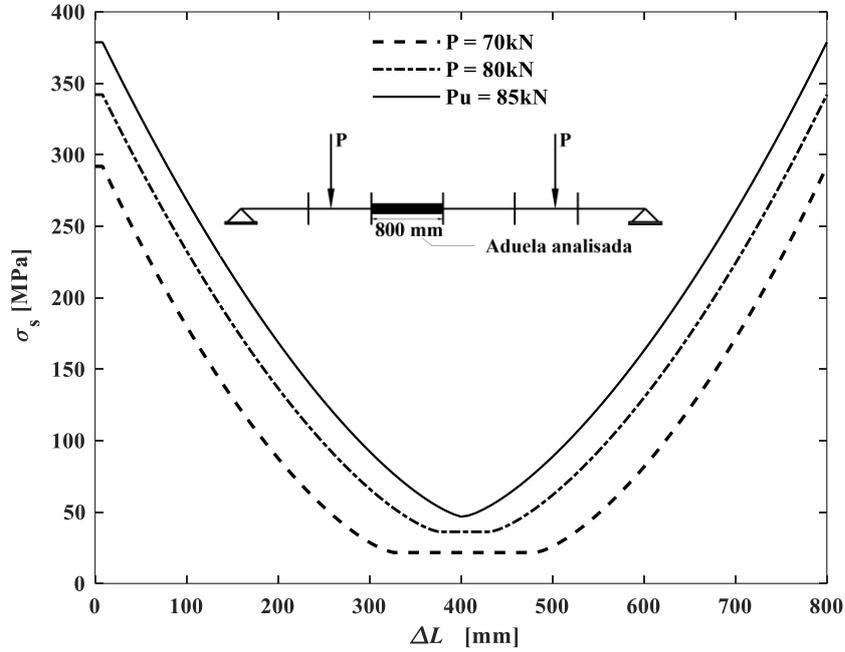
Os diagramas deformação específica no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.20.

Figura 6.20 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2



Os diagramas de tensão no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.21.

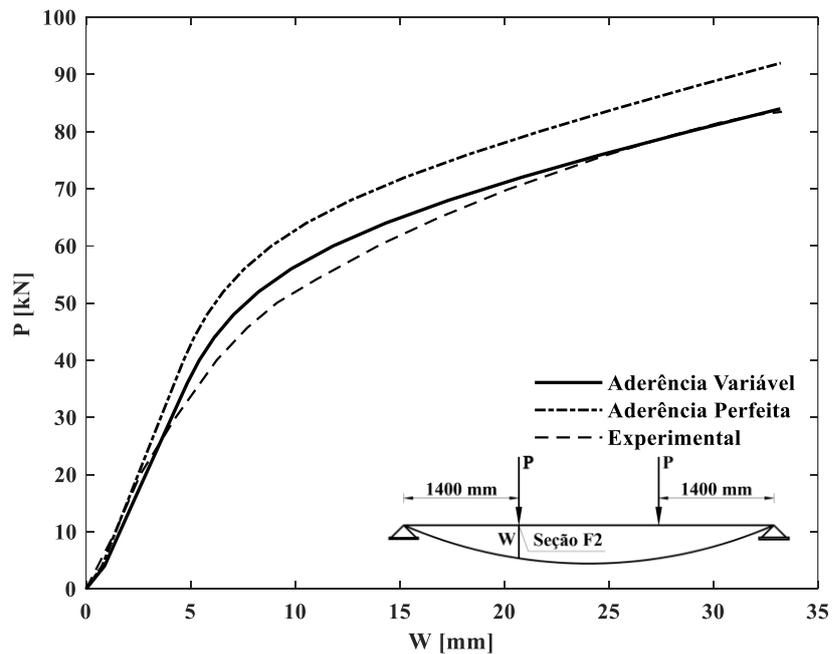
Figura 6.21 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga A2



6.2.1.2 Ensaio 2

Na Figura 6.22 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento para a seção F2.

Figura 6.22 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga A2



Na Tabela 6.5 é apresentado a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). São visíveis também os deslocamentos últimos (w_u) para a seção localizada no meio do vão.

Tabela 6.5 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga A2

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	83,47*	84,23**	91,89
w_u (mm)	33,28*	33,20**	33,12
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+0,91	+10,87
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+9,09

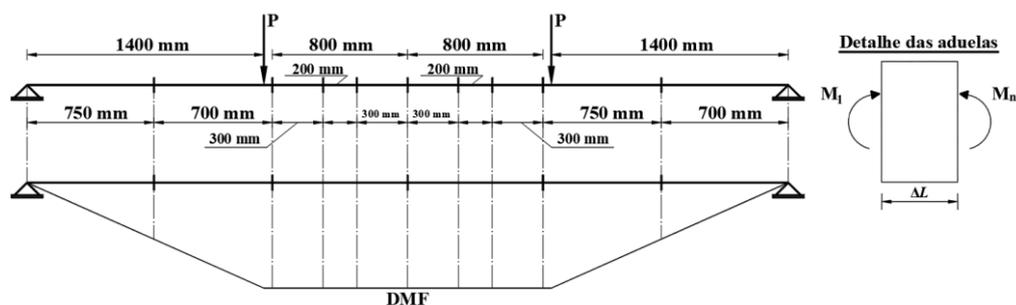
*Valores obtidos no momento da ruptura da peça por esmagamento do concreto na região das juntas;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

O ensaio 1 foi interrompido quando a carga atuante alcançou aproximadamente 81 kN. A peça foi novamente ensaiada, partindo-se de zero, até 84 kN, aproximadamente. Durante o ensaio 2 houve o surgimento de duas fissuras quando se atingiu a carga de 69 kN, aproximadamente: a primeira localizada a 300 mm e a segunda a 500 mm da junta central, respectivamente.

Logo, a aduela inicial de 800 mm de comprimento passou a ser dividida em três outras de comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm e 200 mm, a partir da junta central (Figura 6.23). É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central, como ocorreu no ensaio.

Figura 6.23 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga A2



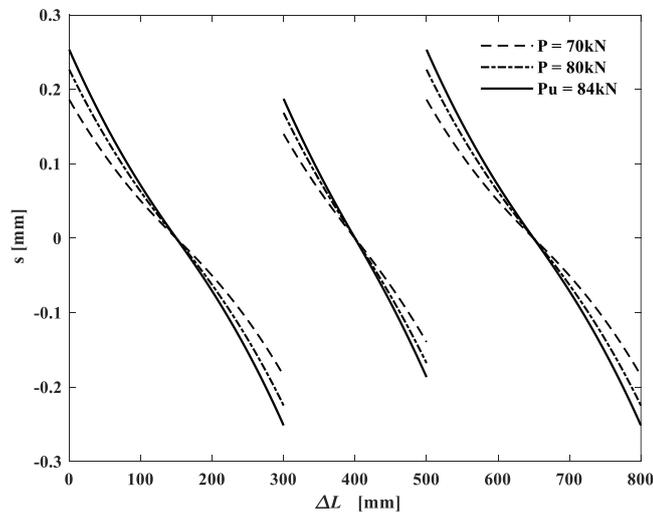
Na Tabela 6.6, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.6 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga A2

ΔL (mm)	P (kN)	M_1 (kN.m)	M_n (kN.m)
	70,00	98,00	98,00
300 – 200 - 300	80,00	112,00	112,00
	84,23	117,92	117,92

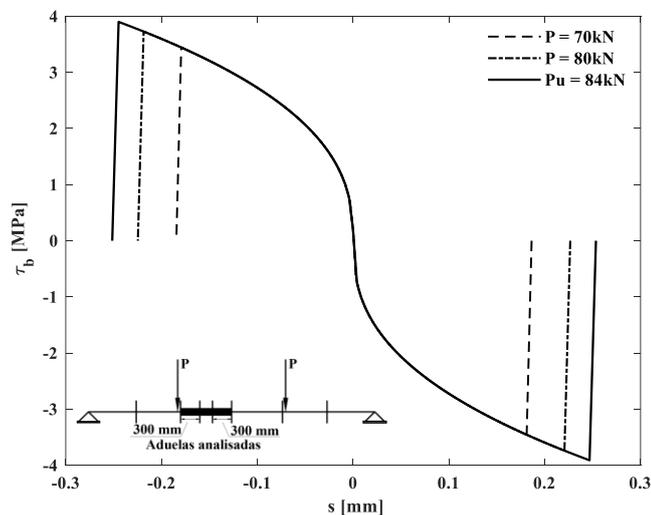
Na Figura 6.24 são apresentados os diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas. São apresentados os resultados para três níveis de carregamentos em cada figura.

Figura 6.24 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2



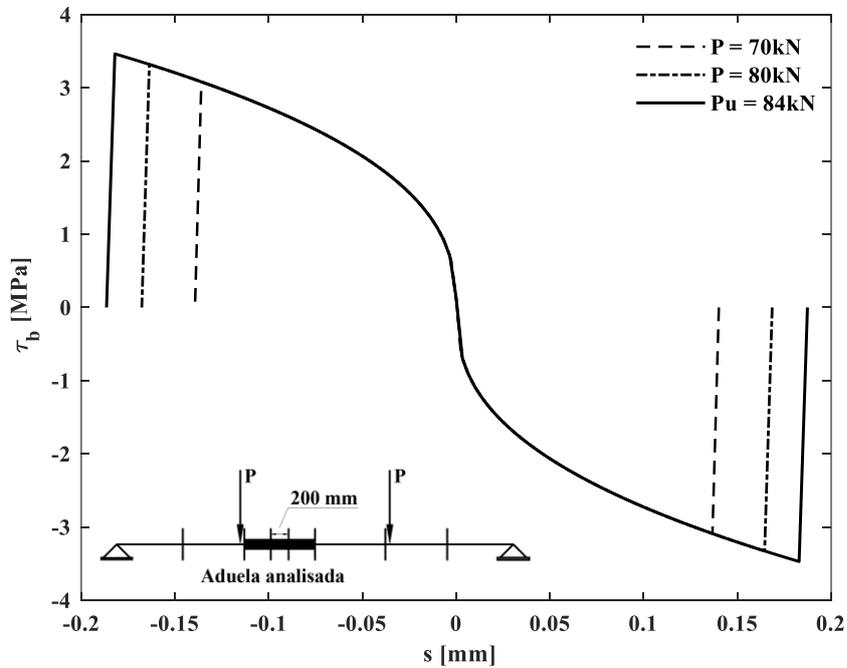
Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para as aduelas de comprimento igual a 300 mm são apresentados na Figura 6.25.

Figura 6.25 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduelas com $\Delta L = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2



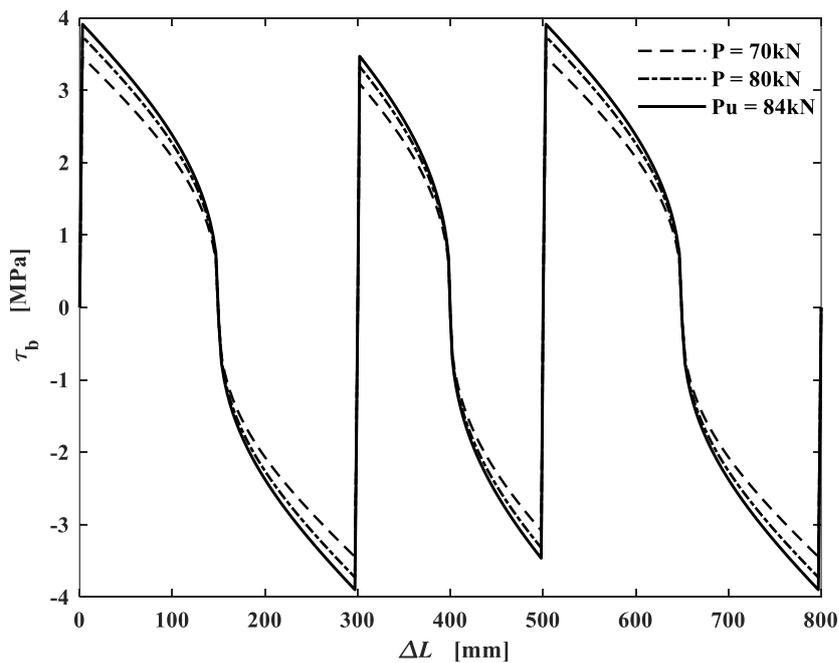
Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para a aduela de comprimento igual a 200 mm são apresentados na Figura 6.26.

Figura 6.26 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduelas com $\Delta L = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2



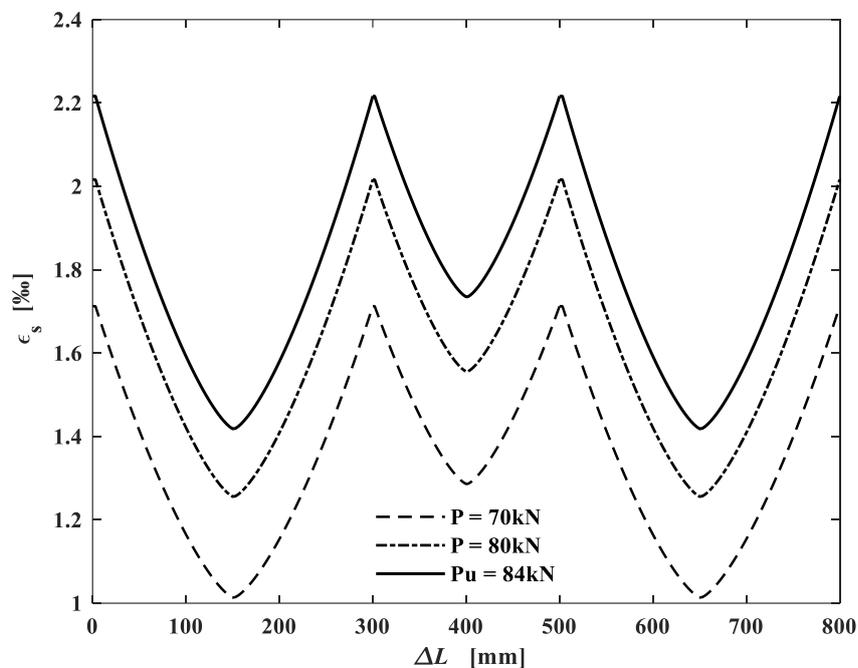
Os diagramas tensão de aderência-comprimento para as três aduelas são apresentados na Figura 6.27.

Figura 6.27 – Diagramas tensão de aderência-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2



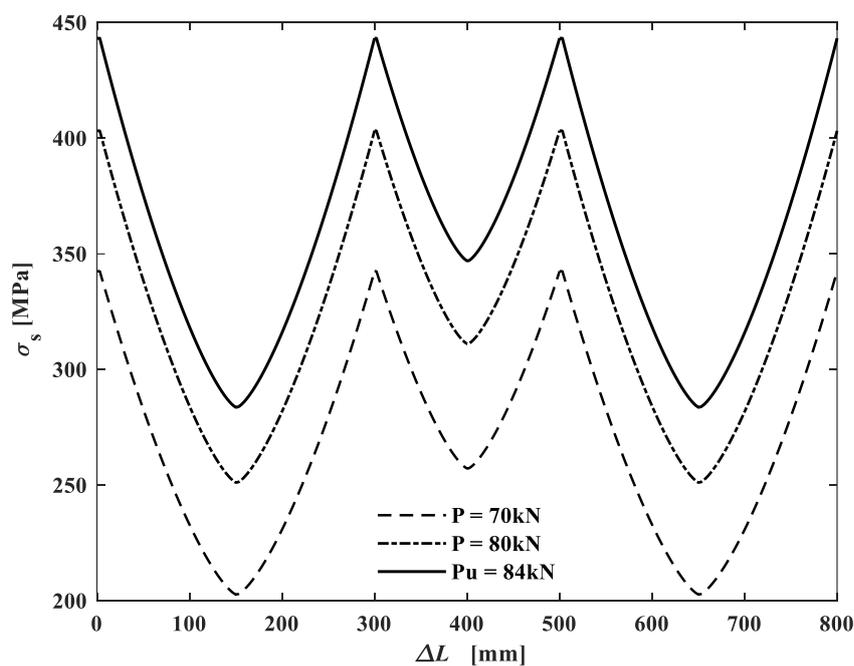
Os diagramas de deformação específica no aço ao longo do comprimento das aduelas são apresentados na Figura 6.28.

Figura 6.28 – Diagramas de deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2



Os diagramas de tensão no aço ao longo do comprimento das aduelas são apresentados na Figura 6.29.

Figura 6.29 – Diagramas de tensão no aço-comprimento da aduela das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A2

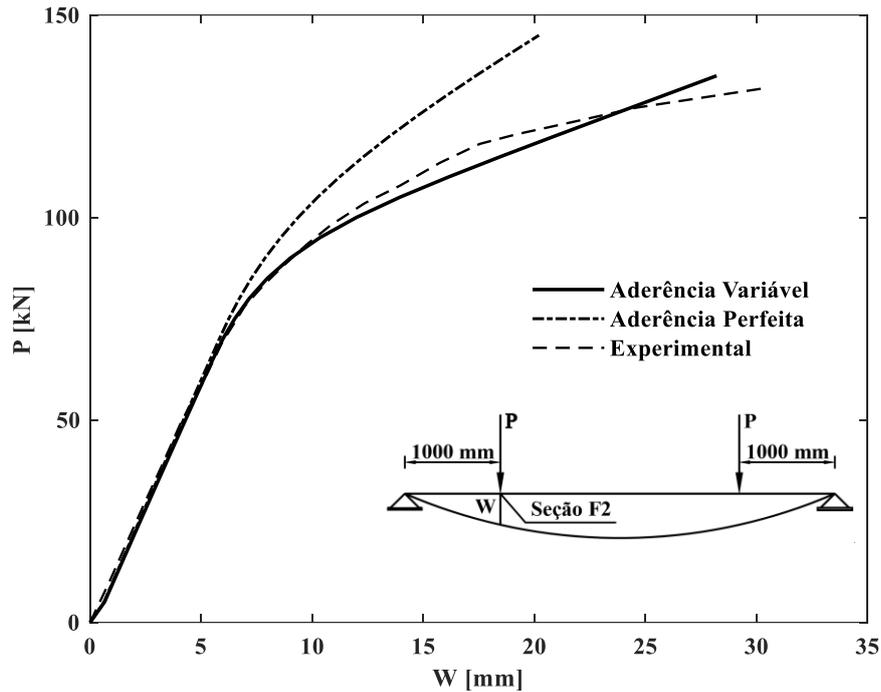


6.2.2 Viga A3

6.2.2.1 Ensaio 1

Na Figura 6.30 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento para a seção F2.

Figura 6.30 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 1 da viga A3



Na Tabela 6.7 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida nos ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente pelos modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). São mostrados, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.7 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga A3

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	131,83*	135,15**	139,79
w_u (mm)	30,24*	28,20**	20,20
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+2,40	+9,99
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+7,41

*Valores obtidos no momento da interrupção do ensaio e não da ruptura da peça;

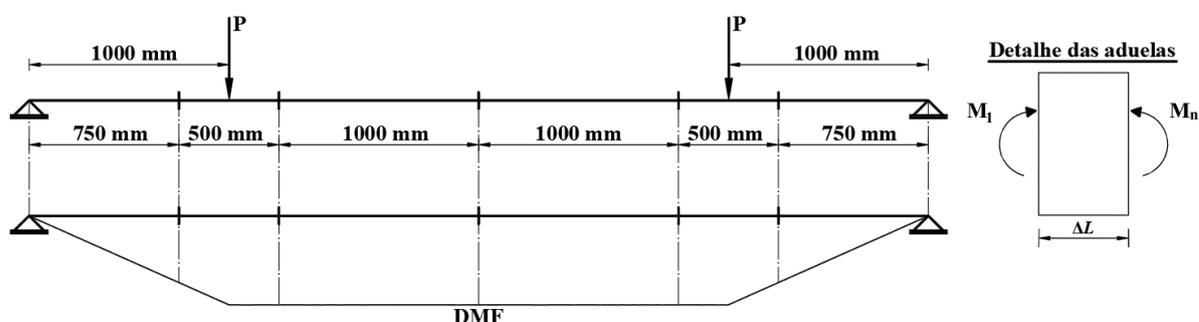
**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

Para a modelagem numérica referente a primeira etapa do ensaio (de zero até 120 kN), foram consideradas apenas as seções das juntas preexistentes como fissuradas, pois não surgiram fissuras durante esta etapa.

Na Figura 6.31 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas.

Em que: ΔL é o comprimento da aduela; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda e direita das aduelas, respectivamente. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central.

Figura 6.31 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 1 do ensaio 1 da viga A3



Com o intuito de enfatizar o comportamento das aduelas mais carregadas e com maior potencial de fissuração, priorizou-se por apresentar os resultados para a aduela localizada próxima a junta central, conforme detalhe apresentado na Figura 6.32.

Na Tabela 6.8, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

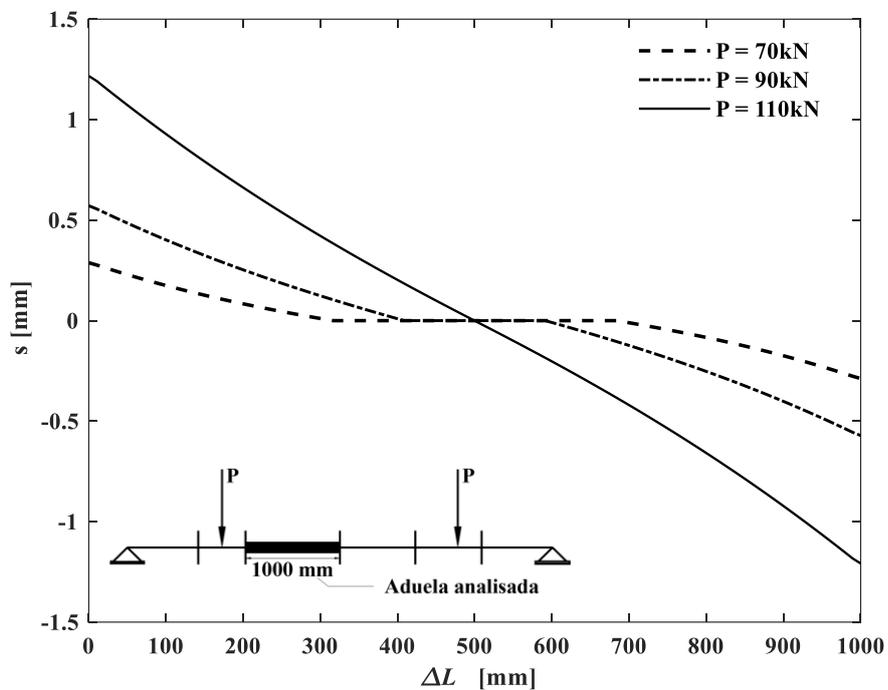
Tabela 6.8 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 1 do ensaio 1 da viga A3

$\Delta L(mm)$	$P(kN)$	$M_1(kN.m)$	$M_n(kN.m)$
	70,00	70,00	70,00
1000	90,00	90,00	90,00
	110,00	110,00	110,00

Da Figura 6.32 à Figura 6.36 são apresentados os resultados para a aduela de 1000 mm de comprimento (submetida a momentos fletores constantes), antes de aparecer a primeira fissura. São apresentados os resultados para três níveis de carregamentos em cada figura.

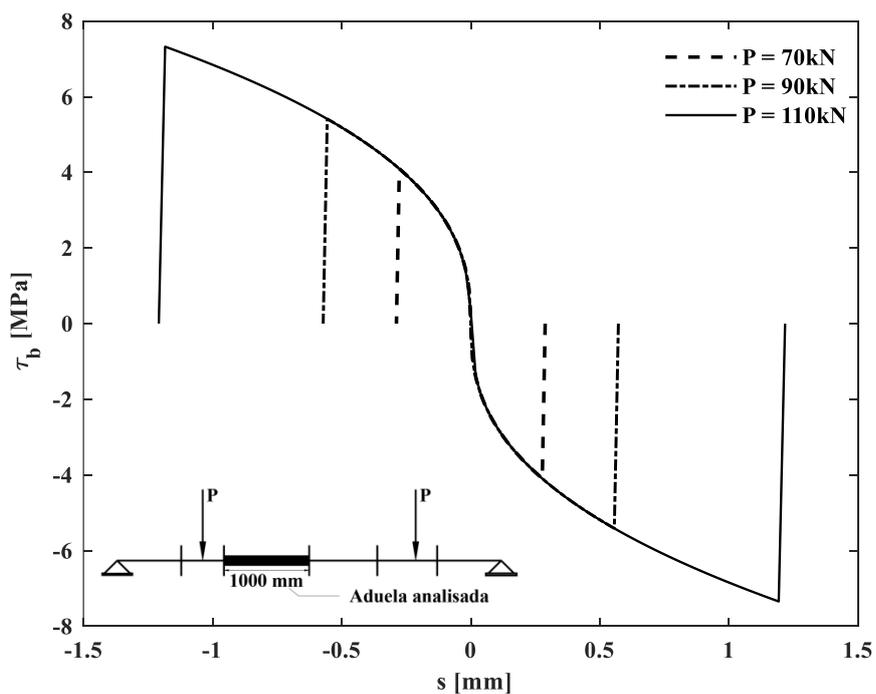
Na Figura 6.32 são apresentados os diagramas deslizamentos-comprimento da aduela.

Figura 6.32 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3



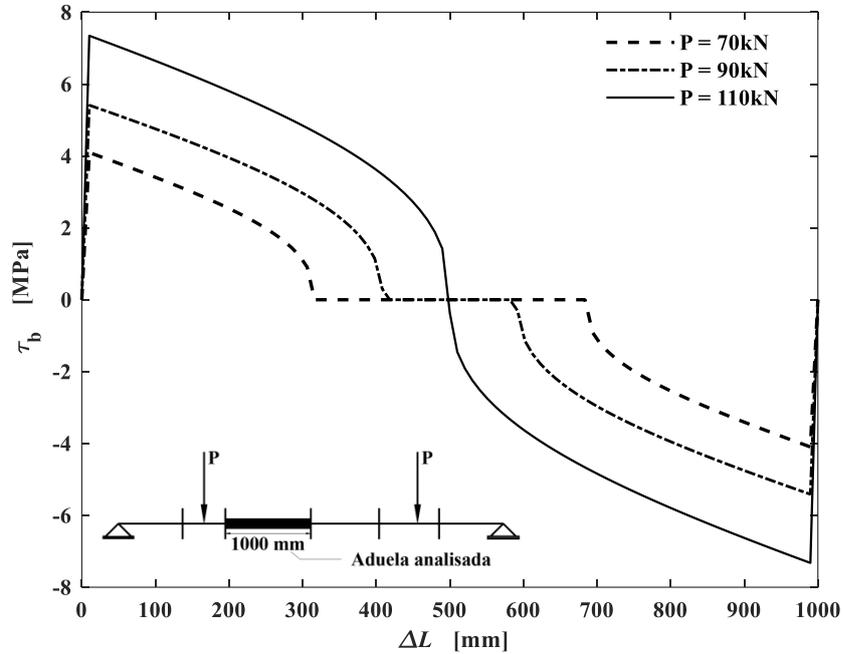
Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço são apresentados na Figura 6.33.

Figura 6.33 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3



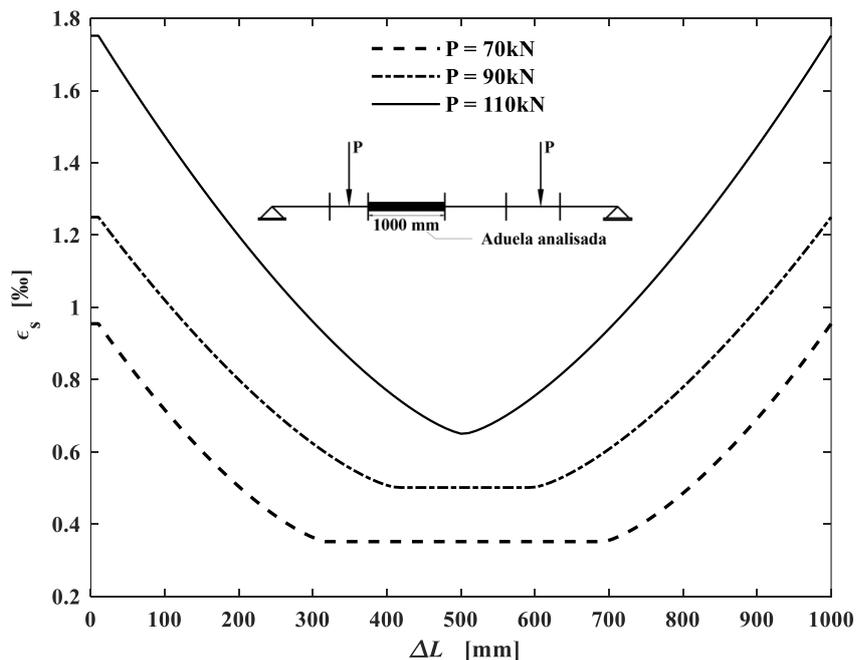
Os diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.34.

Figura 6.34 – Diagrama tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3



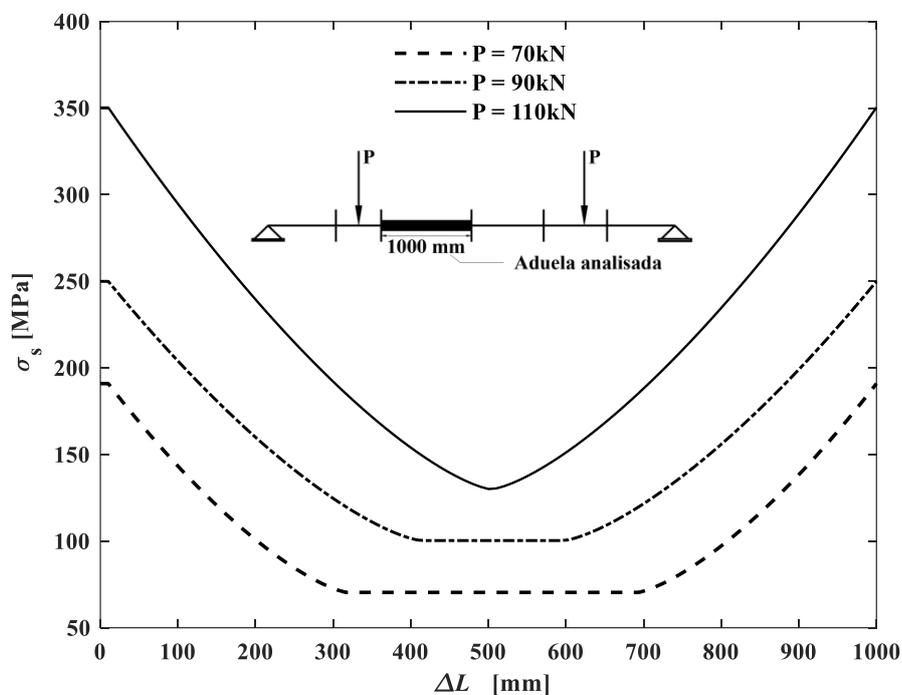
Os diagramas deformação específica no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.35.

Figura 6.35 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3



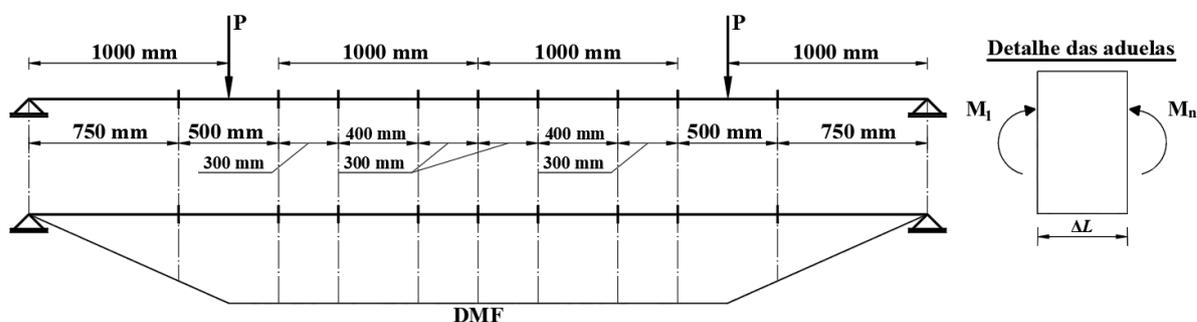
Os diagramas de tensão no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.36.

Figura 6.36 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 1000$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 1) da viga A3



Ao atingir a carga de 120 kN, a aduela inicial (1000 mm de comprimento) apresentou duas fissuras, a primeira localizada a 300 mm e a segunda a 700 mm da junta central, respectivamente. A aduela original passou a ser dividida em três outras de comprimentos de 300 mm, 400 mm e 300 mm, a partir da junta central. Na Figura 6.37 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas.

Figura 6.37 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 2 do ensaio 1 da viga A3



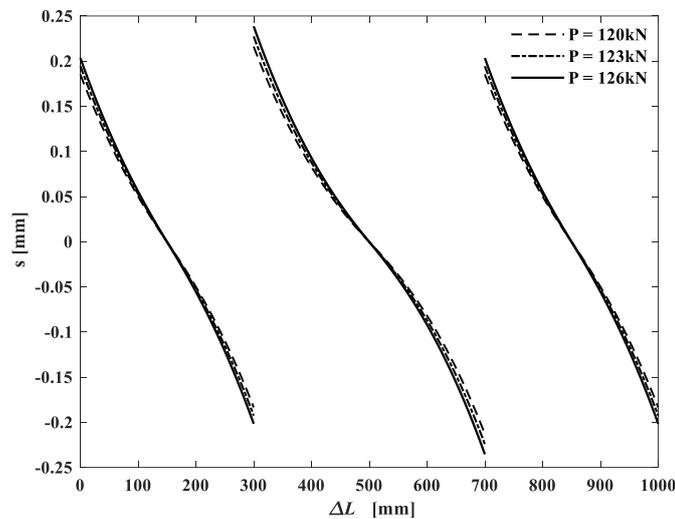
Na Tabela 6.9, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela.

Tabela 6.9 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 2 do ensaio 1 da viga A3

ΔL (mm)	P (kN)	M_1 (kN.m)	M_n (kN.m)
	120,00	120,00	120,00
300-400-300	123,00	123,00	123,00
	126,00	126,00	126,00

Na Figura 6.38 são apresentados os diagramas deslizamento-comprimentos das aduelas.

Figura 6.38 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 400$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para as aduelas de 300 mm e 400 mm são apresentados na Figura 6.39 e Figura 6.40, respectivamente.

Figura 6.39 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 300$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3

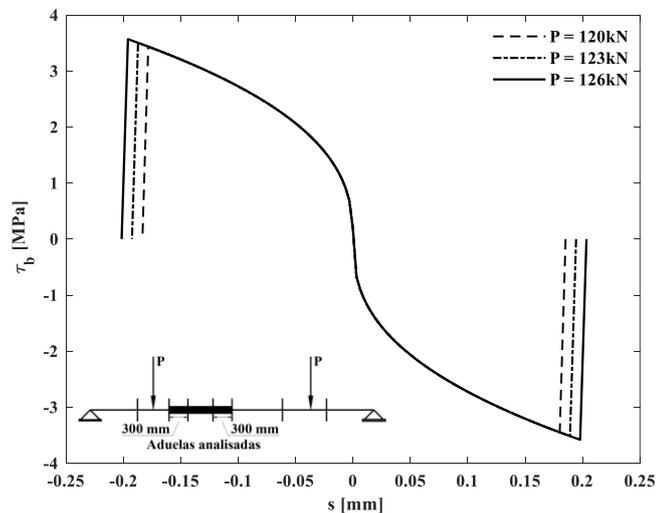
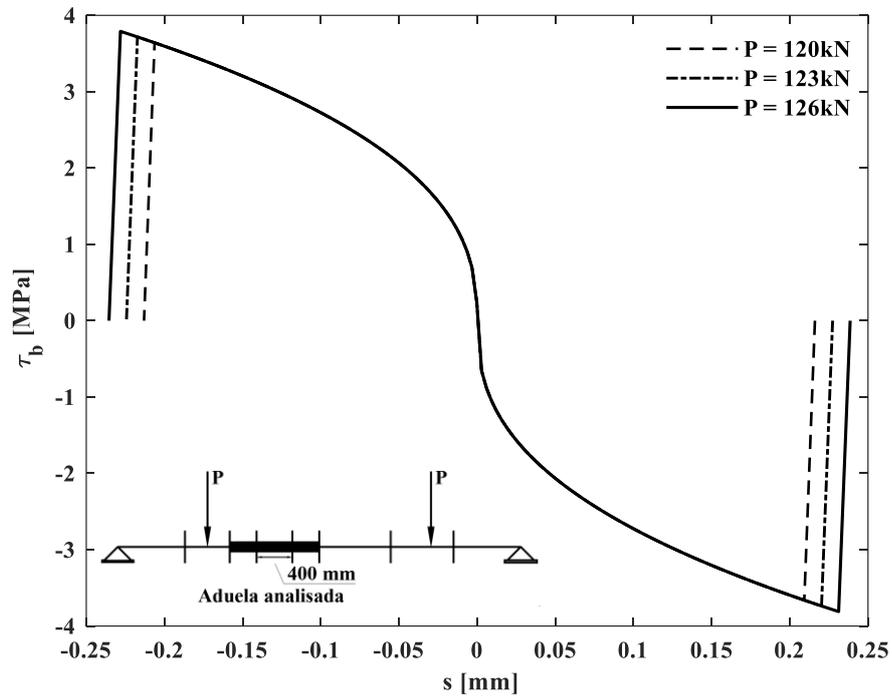
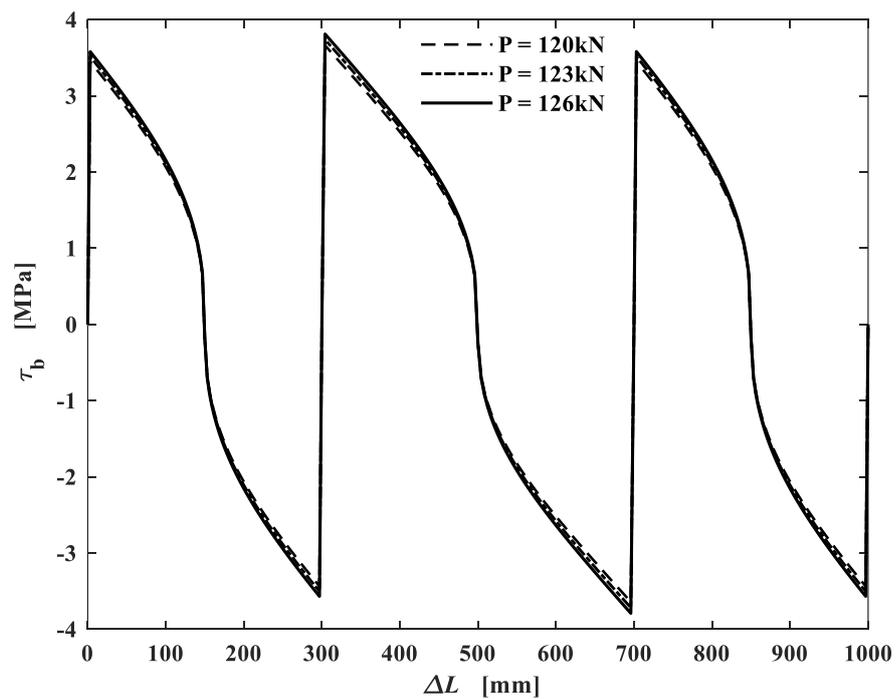


Figura 6.40 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 400$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3



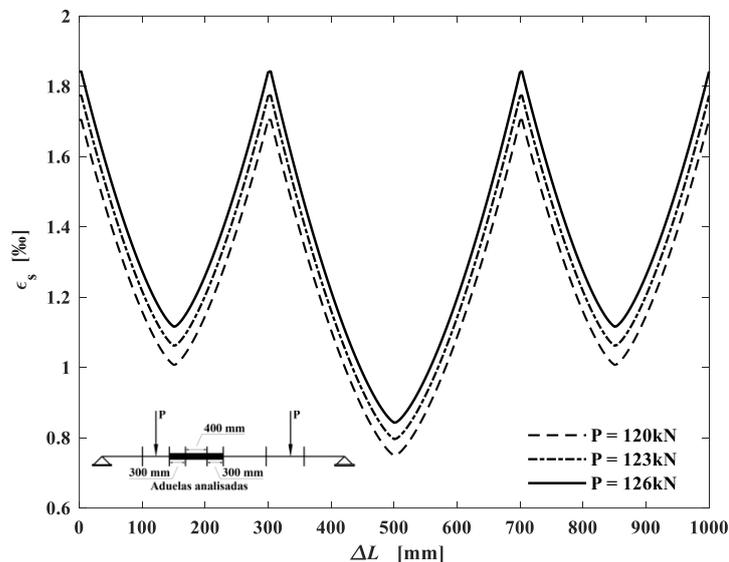
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.41.

Figura 6.41 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 400$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3



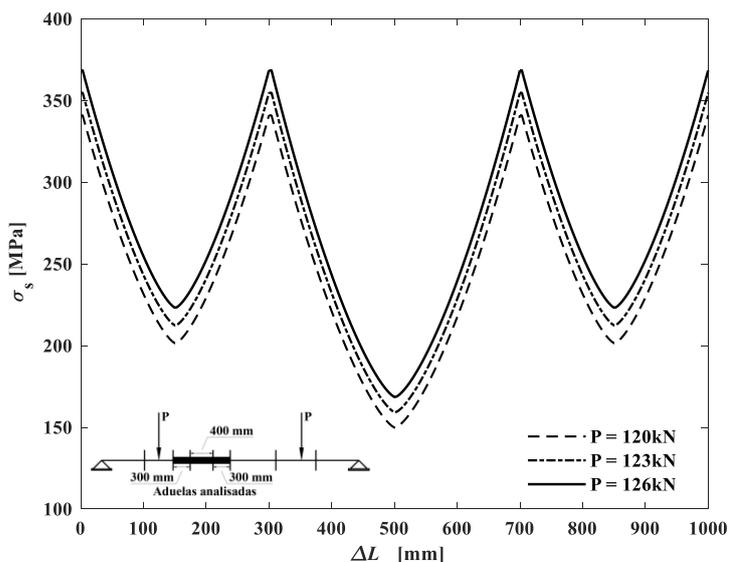
Os diagramas de deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.42.

Figura 6.42 – Diagramas de deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 400$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.43.

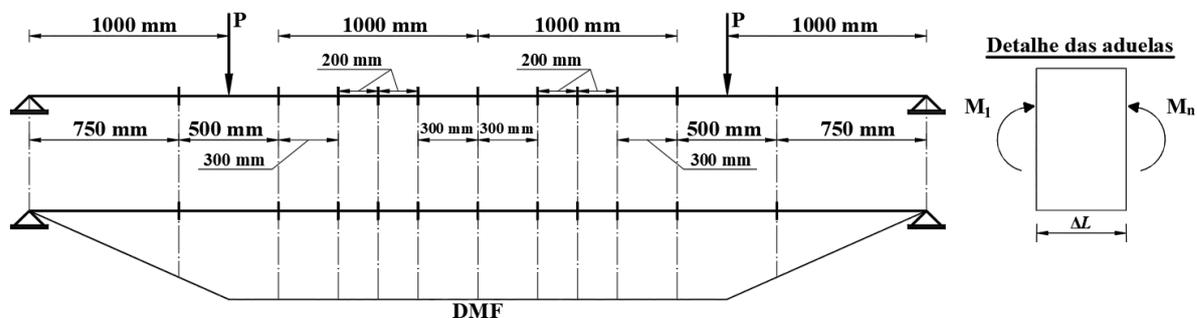
Figura 6.43 – Diagramas de tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 400$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 2) da viga A3



Ao atingir a carga de 127 kN, surgiu mais uma fissura localizada a 500 mm da junta central. Logo, passaram a existir quatro aduelas de comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm,

200 mm e 300 mm, a partir da junta central, respectivamente. Na Figura 6.44 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas.

Figura 6.44 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente à etapa 3 do ensaio 1 da viga A3



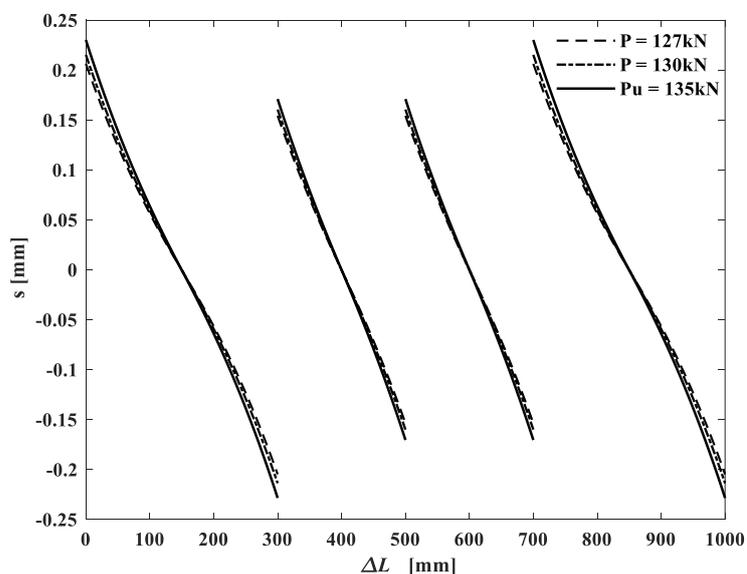
Na Tabela 6.10, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela.

Tabela 6.10 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente à etapa 3 do ensaio 1 da viga A3

$\Delta L (mm)$	$P (kN)$	$M_1 (kN.m)$	$M_n (kN.m)$
	127,00	127,00	127,00
300-200-200-300	130,00	130,00	130,00
	135,00	135,00	135,00

Na Figura 6.45 são apresentados os diagramas deslizamento-comprimentos das aduelas.

Figura 6.45 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para as aduelas de 300 mm e 200 mm são apresentados na Figura 6.46 e Figura 6.47, respectivamente.

Figura 6.46 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 300$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3

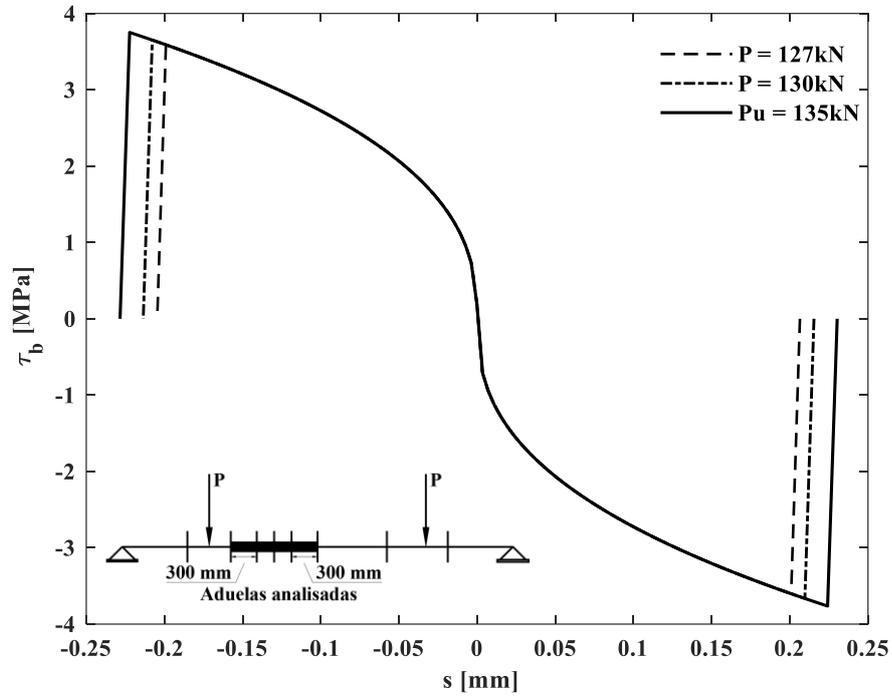
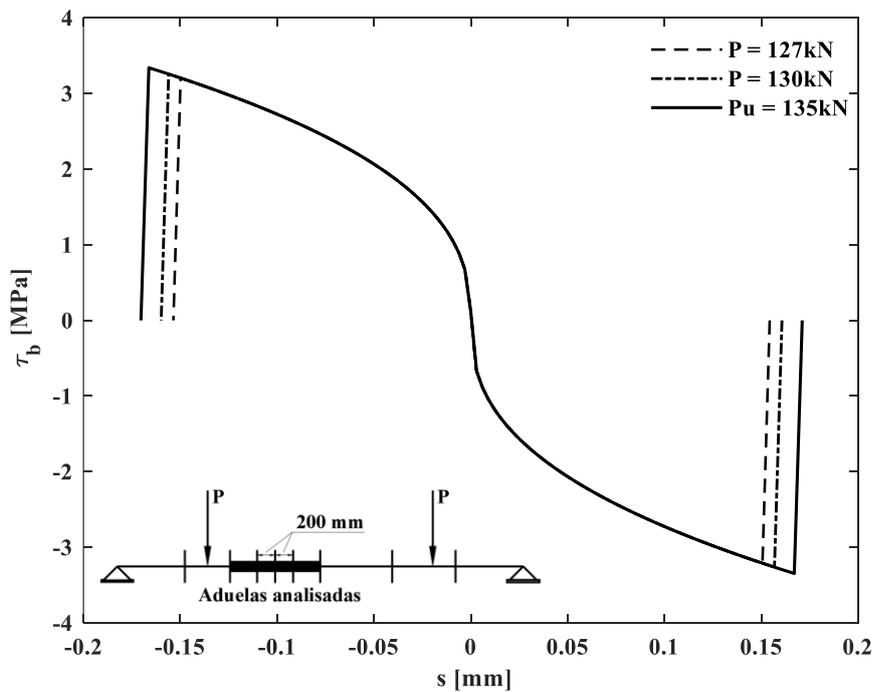
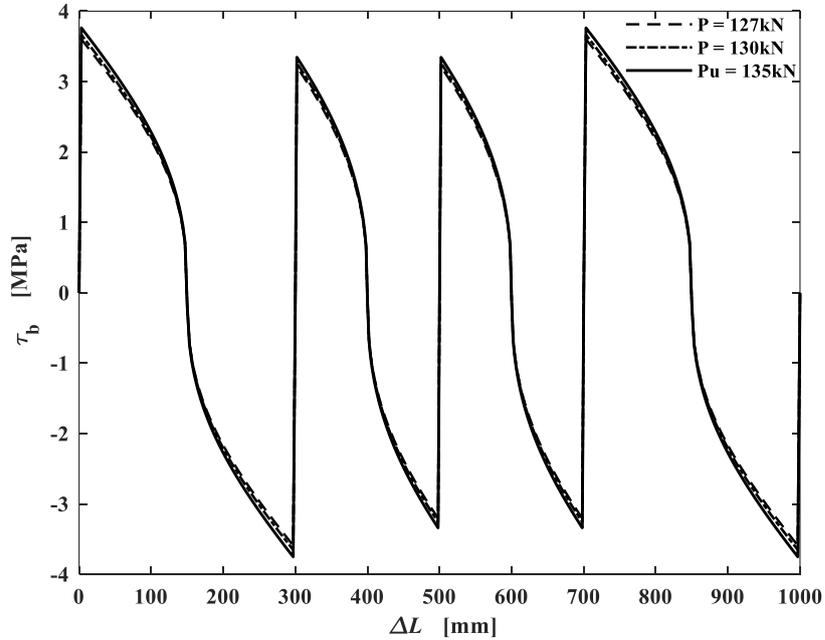


Figura 6.47 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3



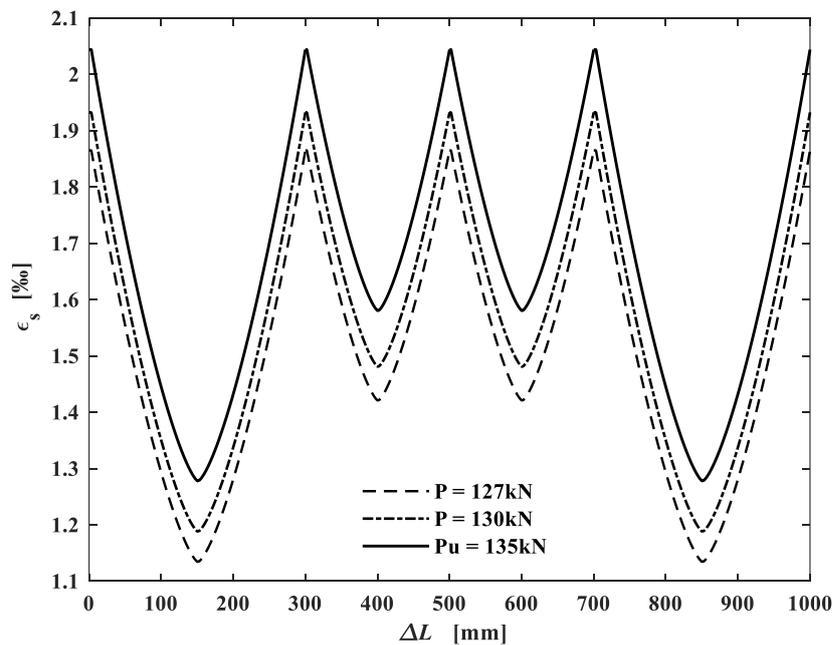
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.48.

Figura 6.48 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3



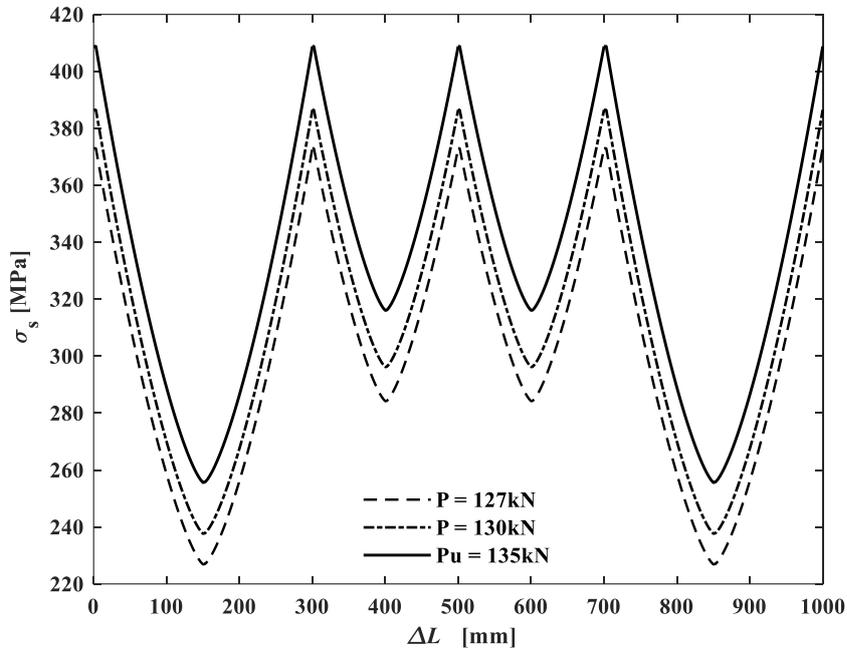
Os diagramas deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas é apresentado na Figura 6.49.

Figura 6.49 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.50.

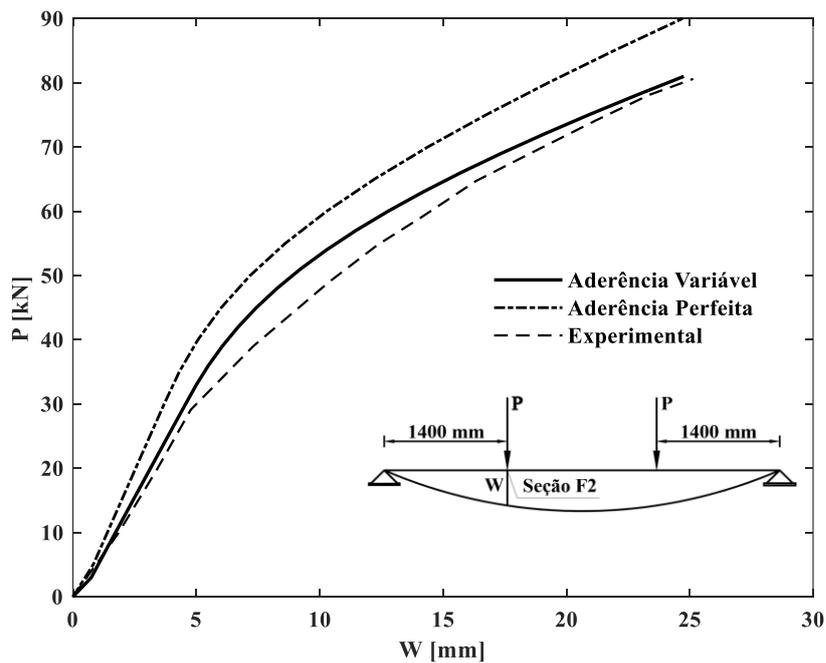
Figura 6.50 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 1 (etapa 3) da viga A3



6.2.2.2 Ensaio 2

Na Figura 6.51 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento (seção F2).

Figura 6.51 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga A3



Na Tabela 6.11 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Vê-se, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.11 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga A3

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	80,60*	81,23**	92,95
w_u (mm)	25,13*	24,76**	24,71
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+0,78	+15,32
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+14,43

*Valores obtidos no momento da interrupção do ensaio e não da ruptura da peça;

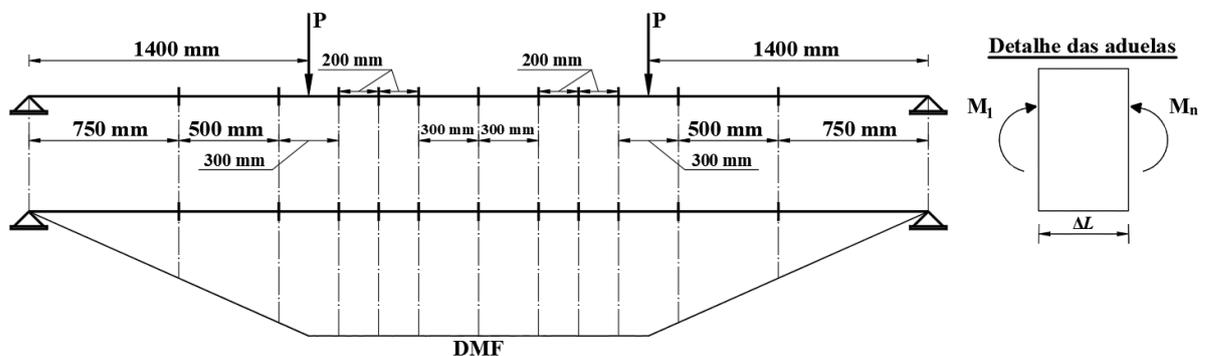
**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

O ensaio 1 foi interrompido quando a carga atuante alcançou aproximadamente 132 kN. A peça foi novamente ensaiada, partindo-se de zero até 81 kN, aproximadamente, quando o ensaio foi interrompido novamente.

Durante o ensaio 2 não houve o surgimento de novas fissuras. Logo, mantiveram-se as quatro aduelas do ensaio 1, com comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm, 200 mm e 300 mm, a partir da junta central, respectivamente.

Na Figura 6.52 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central.

Figura 6.52 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga A3



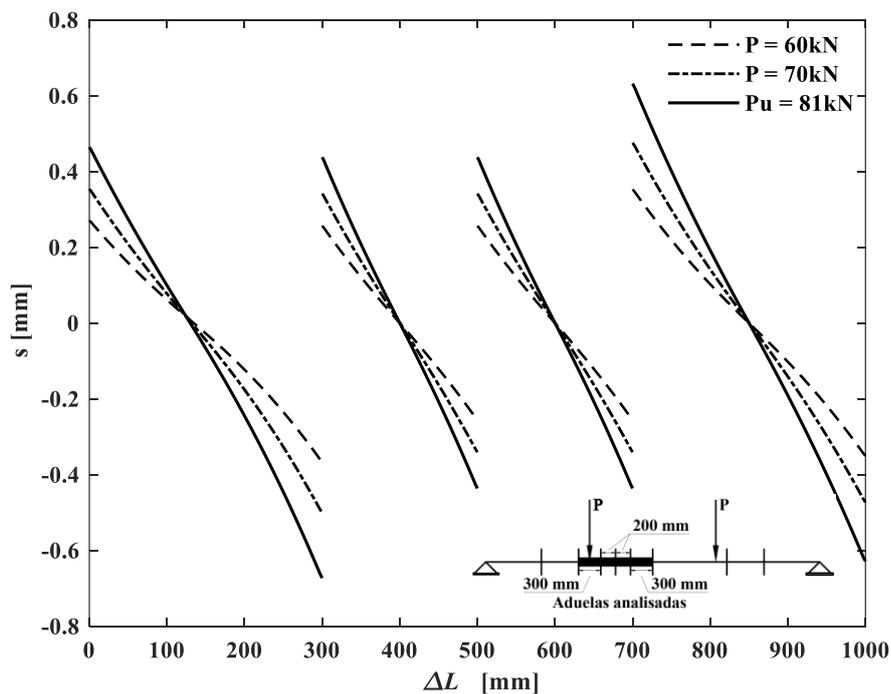
Na Tabela 6.12, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.12 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga A3

ΔL (mm)	P (kN)	M_1 (kN.m)	M_n (kN.m)
300	60,00	75,00	84,00
	70,00	87,50	98,00
	81,23	101,54	113,72
200-200-300	60,00	84,00	84,00
	70,00	98,00	98,00
	81,23	113,72	113,72

Na Figura 6.53 são apresentados os diagramas deslizamento do aço-comprimentos das aduelas.

Figura 6.53 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para a aduela de 300 mm (submetida a gradiente de momento fletor), para as duas de 200 mm (submetidas a momentos fletores constantes) e para a de 300 mm (submetida a momentos fletores constantes) são apresentados na

Figura 6.54, Figura 6.55 e Figura 6.56, respectivamente.

Figura 6.54 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3

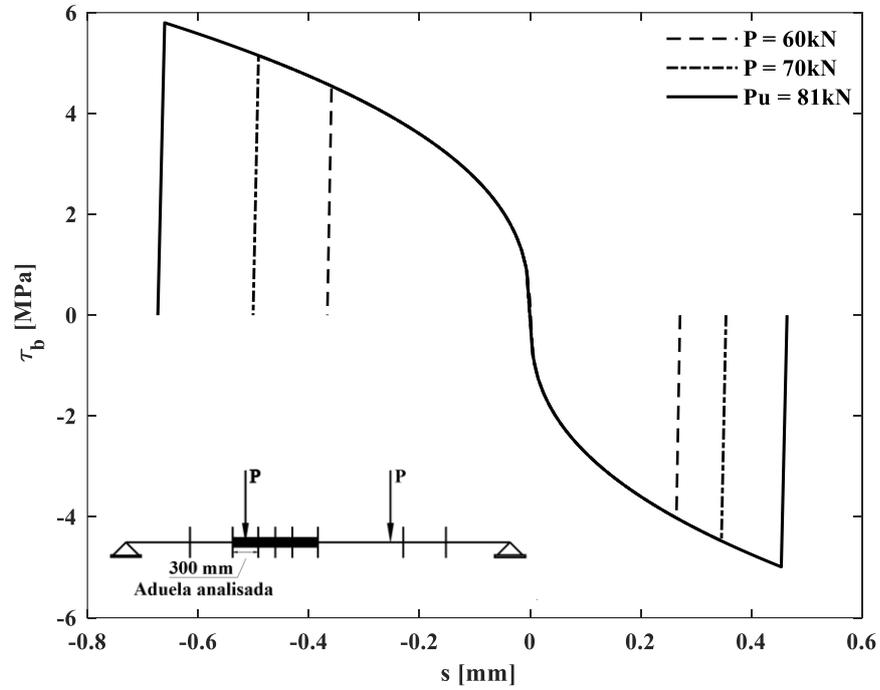


Figura 6.55 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3

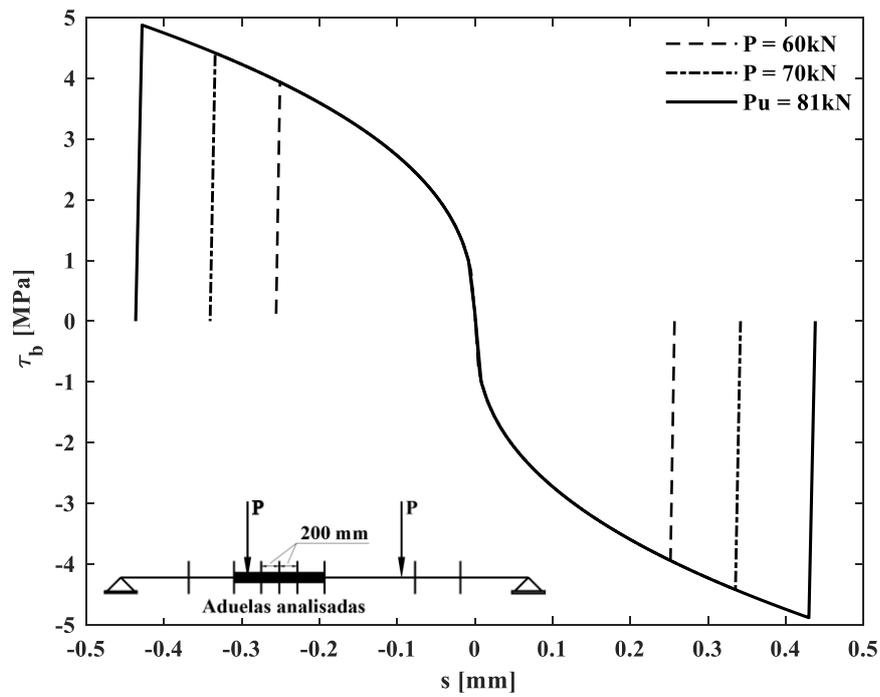
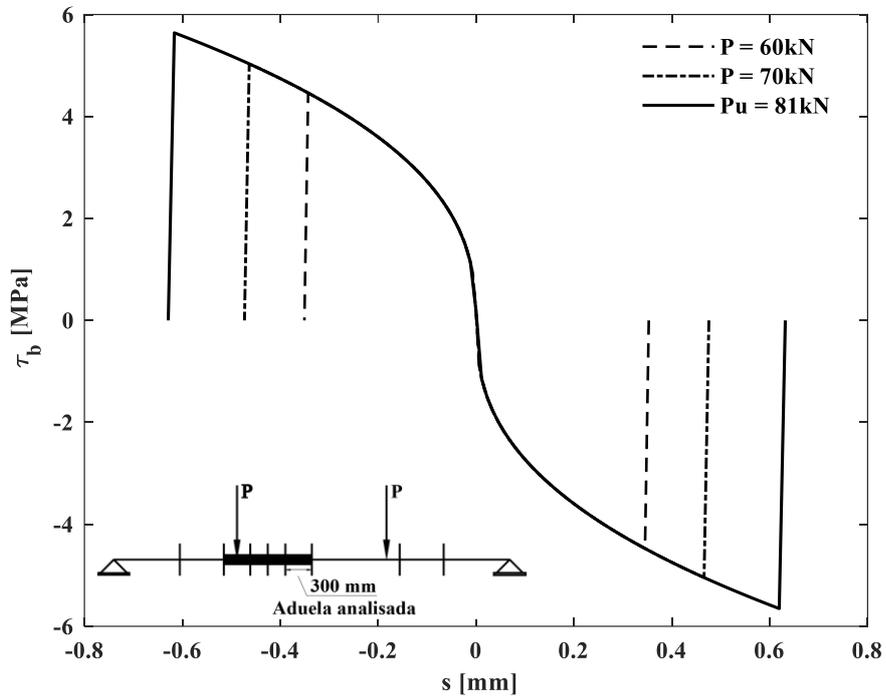
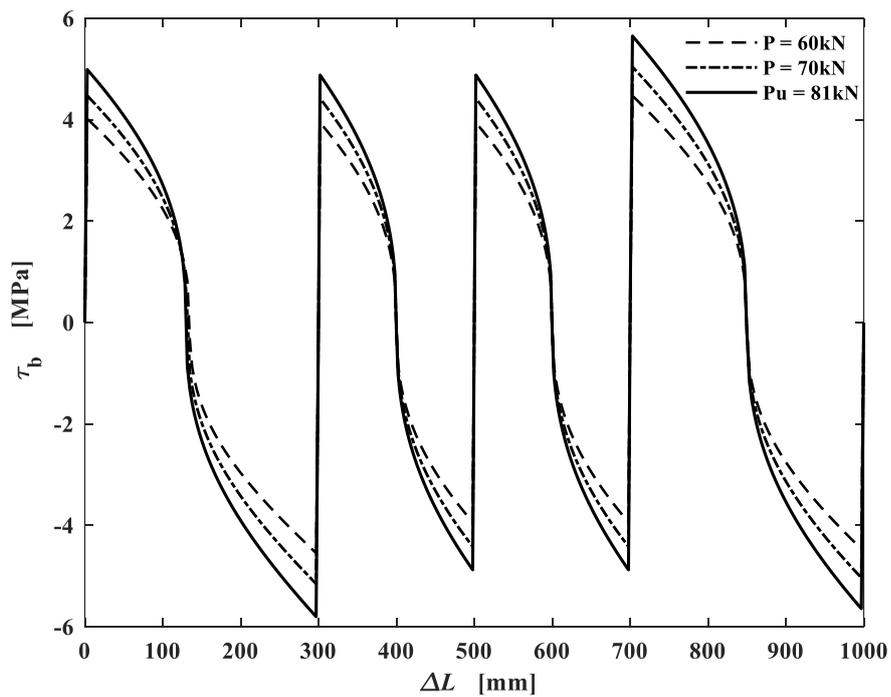


Figura 6.56 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3



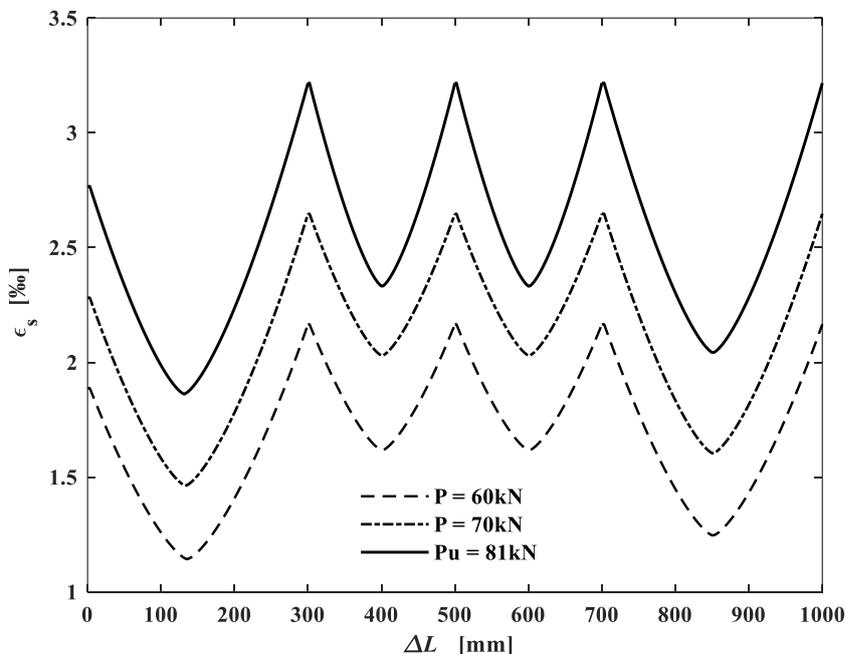
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.57.

Figura 6.57 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3



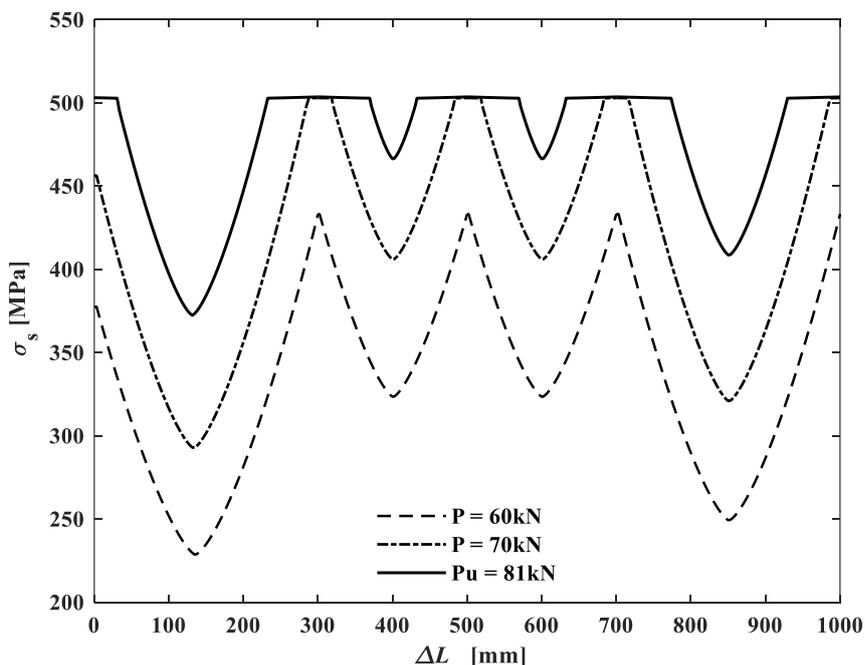
Os diagramas de deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.58.

Figura 6.58 – Diagramas de deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.59.

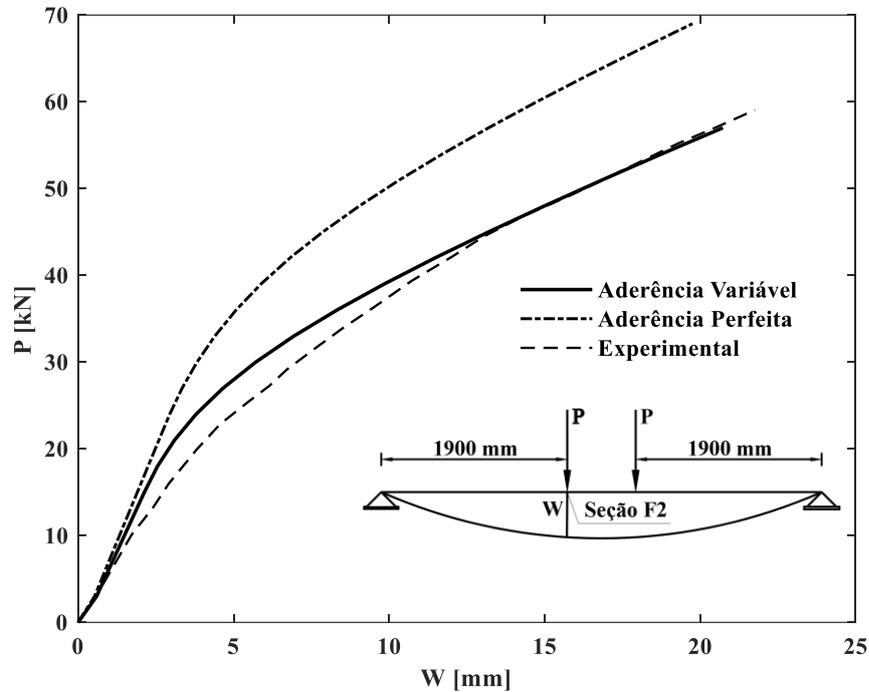
Figura 6.59 – Diagramas de tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 2 da viga A3



6.2.2.3 Ensaio 3

Na Figura 6.60 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento (Seção F2).

Figura 6.60 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 3 da viga A3



Na Tabela 6.13 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Vê-se, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.13 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 3 da viga A3

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	59,05*	56,87**	68,79
w_u (mm)	21,76*	20,73**	19,75
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	-3,69	+16,49
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+20,96

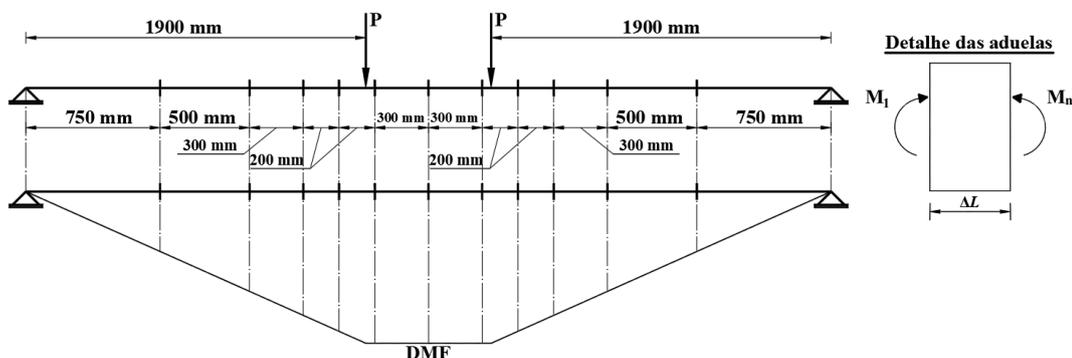
* Valores obtidos no momento da ruptura da peça por esmagamento do concreto na região das juntas;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

O ensaio 2 foi interrompido quando a carga atuante alcançou aproximadamente 81 kN. A peça foi novamente ensaiada, partindo-se de zero até 59 kN, aproximadamente, quando a peça atingiu a ruptura.

Durante o ensaio 3 não houve o surgimento de novas fissuras. Logo, mantiveram-se as quatro aduelas do ensaio 2 com comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm, 200 mm e 300 mm, a partir da junta central, respectivamente. Na Figura 6.61 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central, como ocorreu no ensaio.

Figura 6.61 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 3 da viga A3



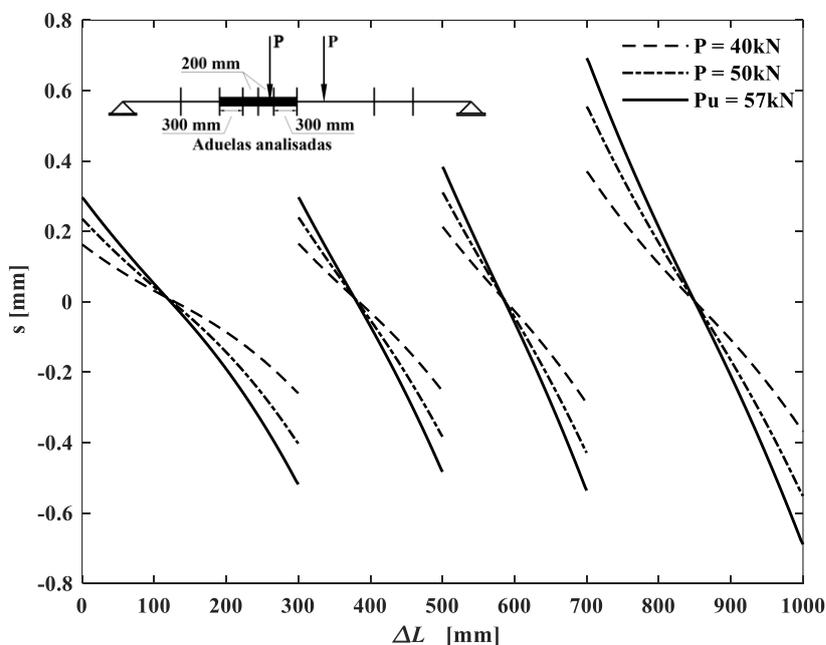
Na Tabela 6.14, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.14 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 3 da viga A3

$\Delta L (mm)$	$P (kN)$	$M_1 (kN.m)$	$M_n (kN.m)$
300	40,00	50,00	62,00
	50,00	62,50	77,50
	56,87	71,09	88,15
200	40,00	62,00	70,00
	50,00	77,50	87,50
	56,87	88,15	99,52
200	40,00	70,00	76,00
	50,00	87,50	95,00
	56,87	99,52	108,05
300	40,00	76,00	76,00
	50,00	95,00	95,00
	56,87	108,05	108,05

Na Figura 6.62 são apresentados os diagramas deslizamento do aço-comprimentos das aduelas.

Figura 6.62 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para a aduela de 300 mm (submetida a gradiente de momento fletor), para as duas de 200 mm (submetidas a gradiente de momento fletor) e para a de 300 mm (submetida a momentos fletores constantes) são apresentados na Figura 6.63, Figura 6.64, respectivamente.

Figura 6.63 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3

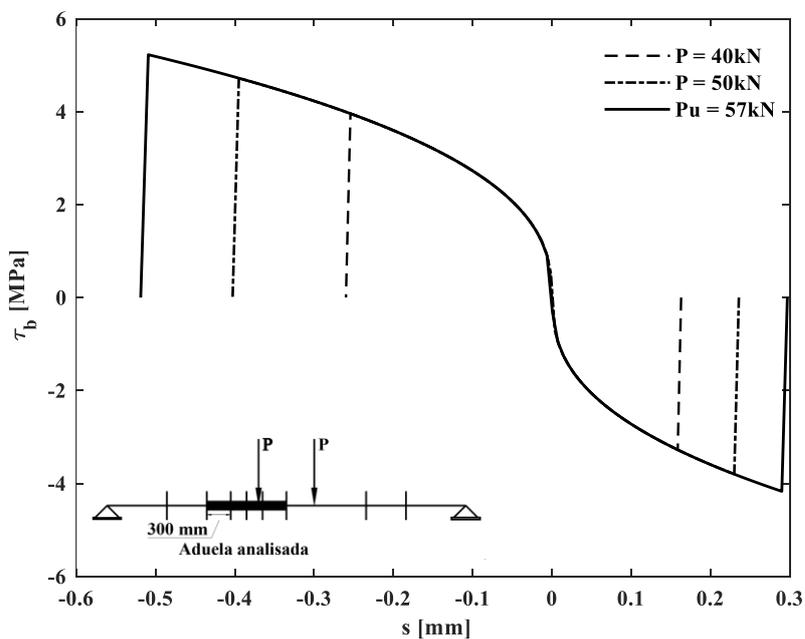


Figura 6.64 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3

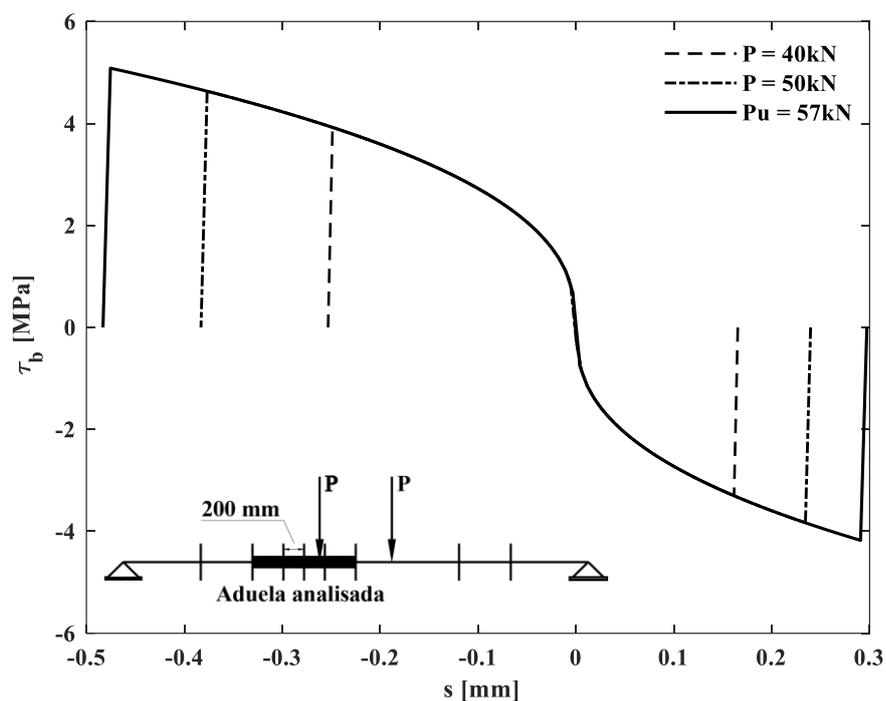


Figura 6.65 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3

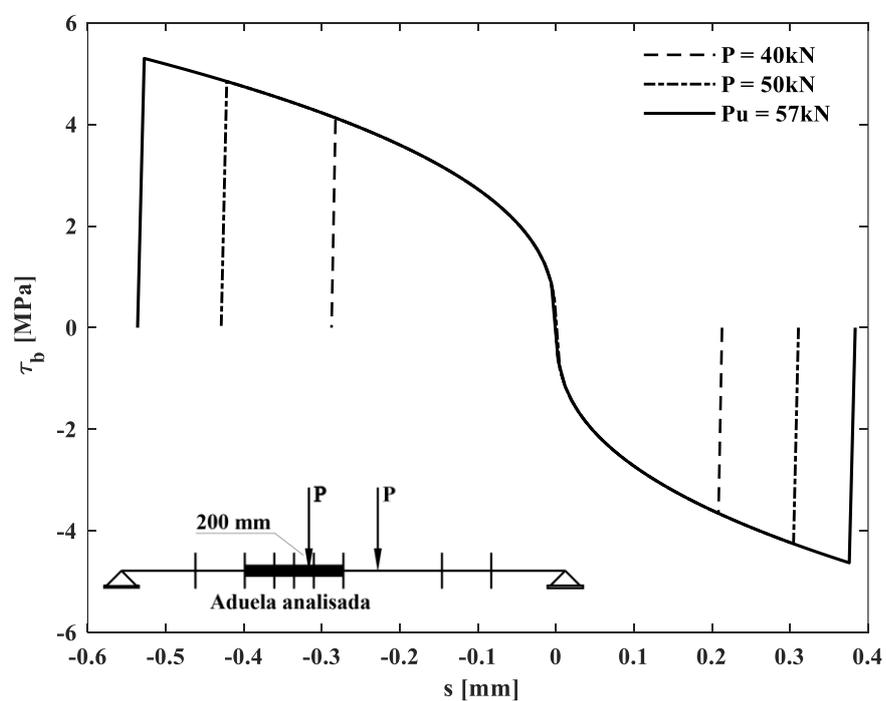
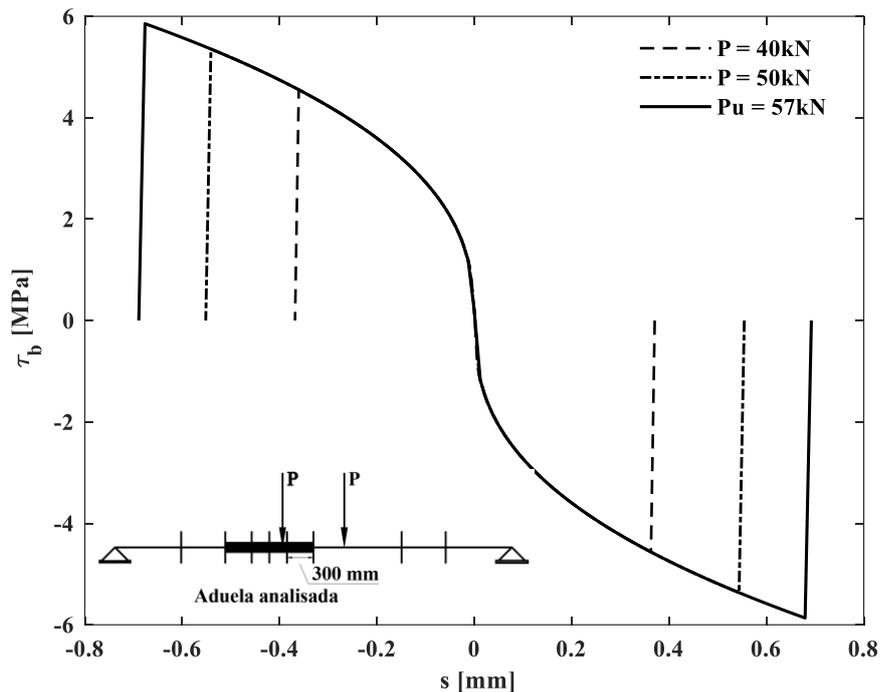
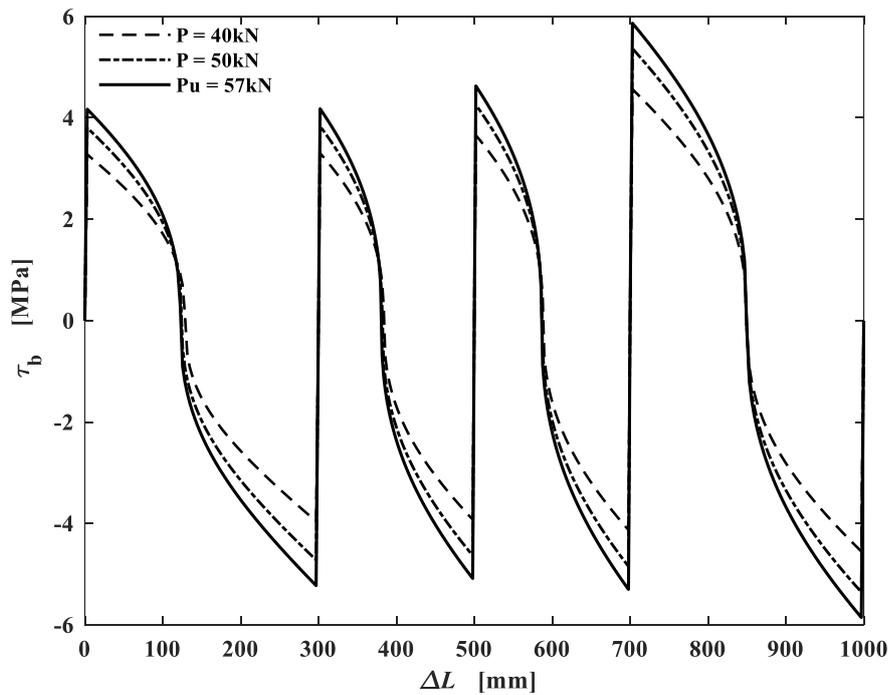


Figura 6.66 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3



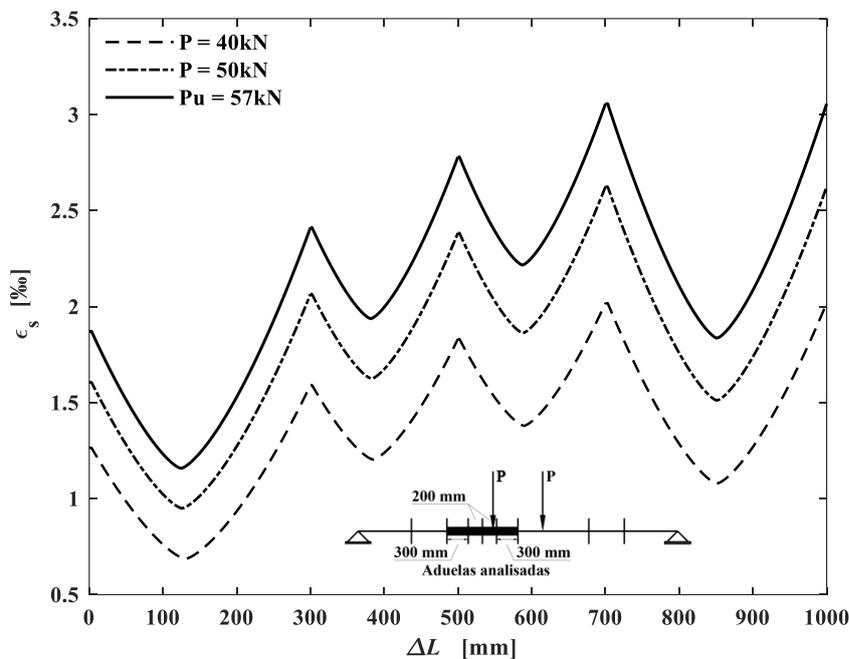
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.67.

Figura 6.67 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3



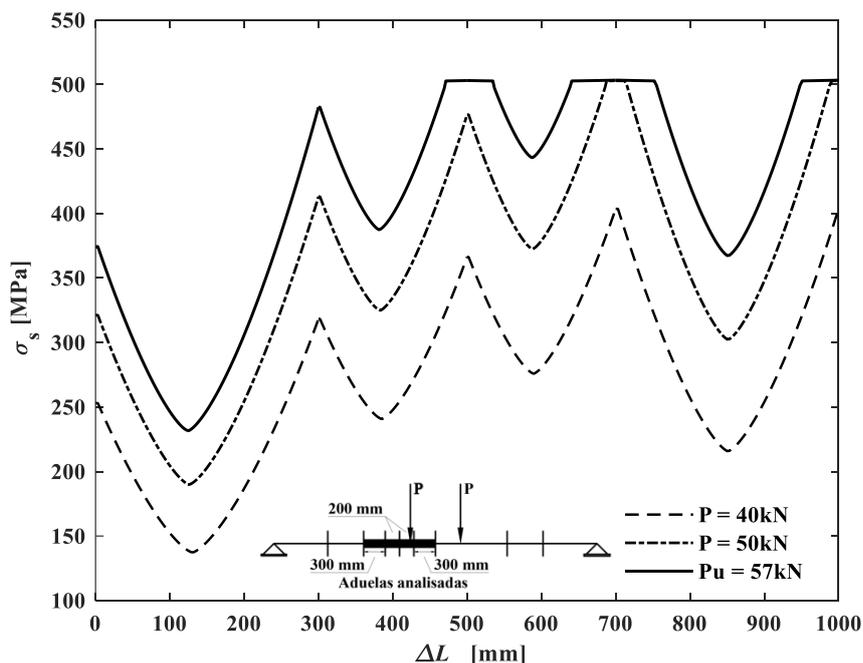
Os diagramas de deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.68.

Figura 6.68 – Diagramas de deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.69.

Figura 6.69 – Diagramas de tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) referente ao ensaio 3 da viga A3

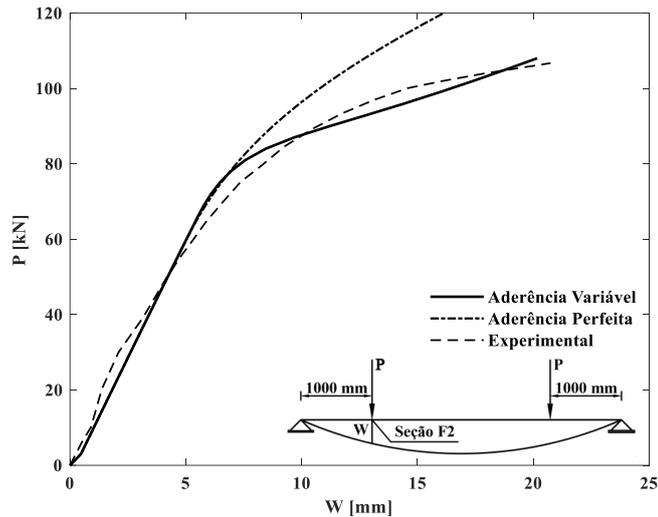


6.2.3 Viga B2

6.2.3.1 Ensaio 1

Na Figura 6.70 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento (seção F2).

Figura 6.70 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 1 da viga B2



Na Tabela 6.15 é apresentada a comparação da carga última (P_u) obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Pode-se, também, ver os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.15 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 1 da viga B2

	Experimental	Aderência Variável (MAV)	Aderência Perfeita (MAP)
P_u (kN)	106,71*	108,15**	119,89
w_u (mm)	20,75*	20,09**	18,58
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+1,34	+12,35
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+10,86

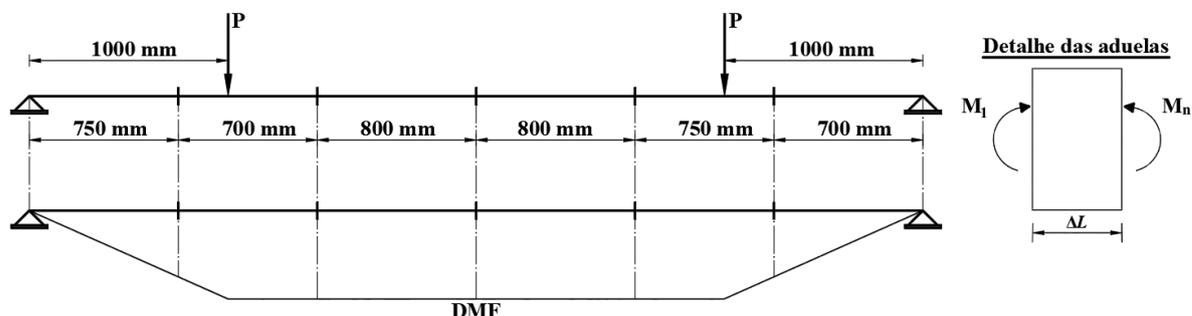
*Valores obtidos no momento da interrupção do ensaio e não da ruptura da peça;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

Para a modelagem numérica foram consideradas apenas as seções das juntas preexistentes como fissuradas, pois não surgiram fissuras durante o ensaio 1. Na Figura 6.71 é apresentado o esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. Em que: ΔL é o comprimento da aduela; M_1 e M_n são os momentos nas extremidades esquerda

e direita das aduelas, respectivamente. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central.

Figura 6.71 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 1 da viga B2



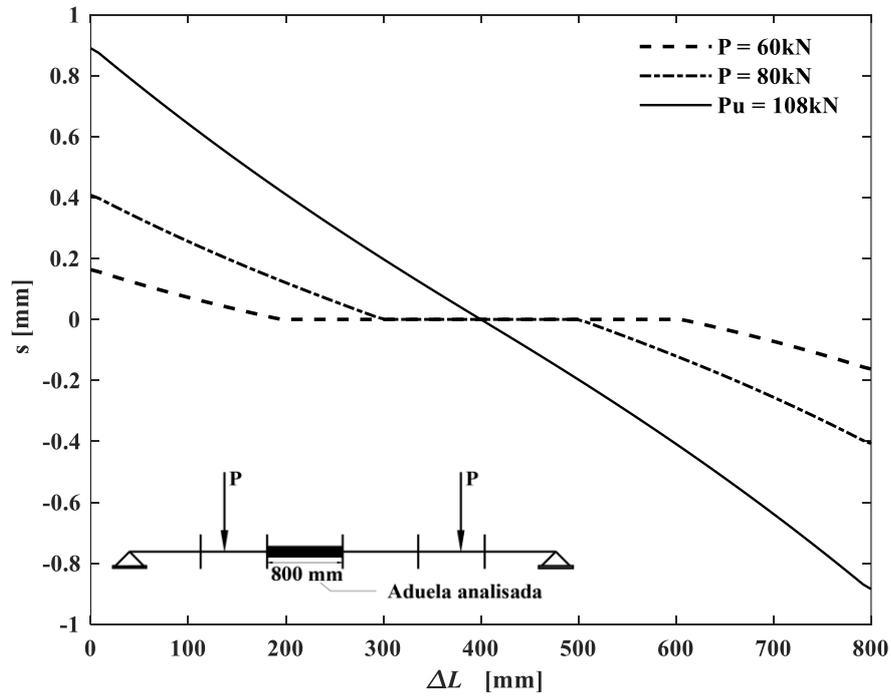
Com o intuito de enfatizar o comportamento das aduelas mais carregadas e com maior potencial de fissuração, priorizou-se por apresentar os resultados para a aduela localizada próxima a junta central, conforme detalhe apresentado na Figura 6.72. Na Tabela 6.16, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.16 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 1 da viga B2

$\Delta L(mm)$	$P(kN)$	$M_1(kN.m)$	$M_n(kN.m)$
	60,00	60,00	60,00
800	80,00	80,00	80,00
	108,15	108,15	108,15

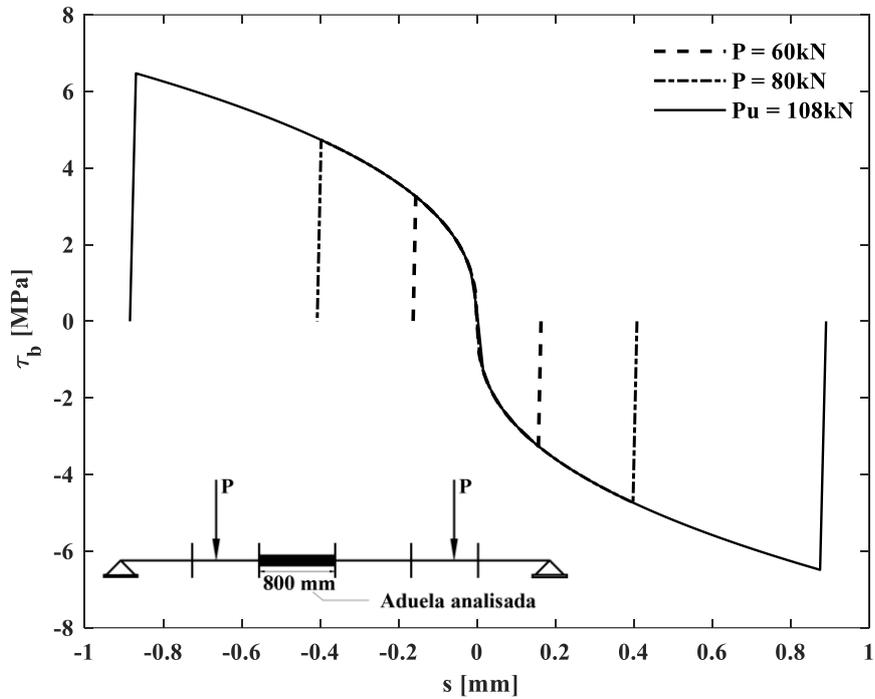
Na Figura 6.72 são apresentados os diagramas deslizamentos do aço-comprimento da aduela.

Figura 6.72 – Diagramas deslizamentos do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2



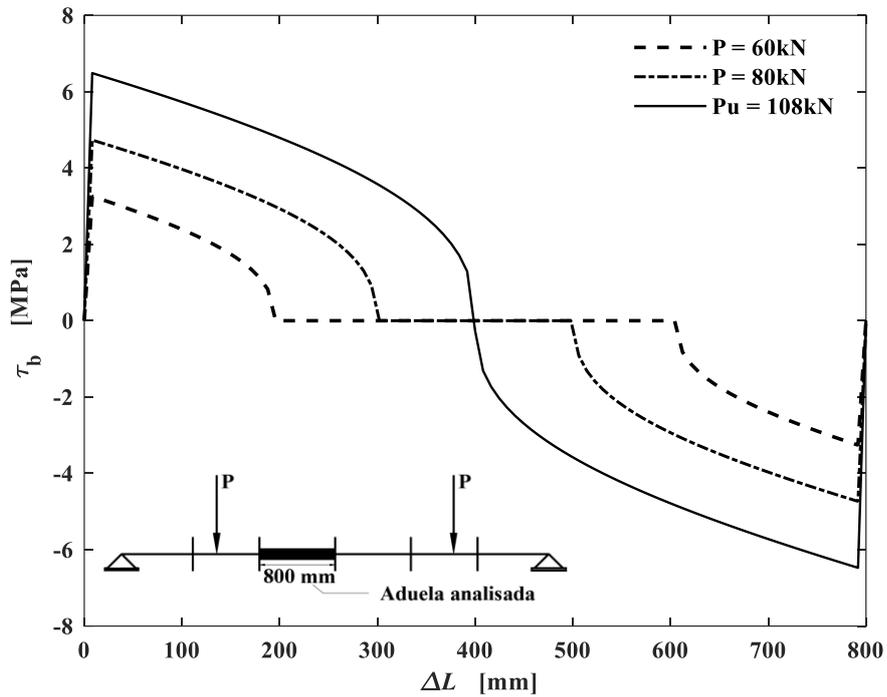
Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço são apresentados na Figura 6.73.

Figura 6.73 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço (aduela com $\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2



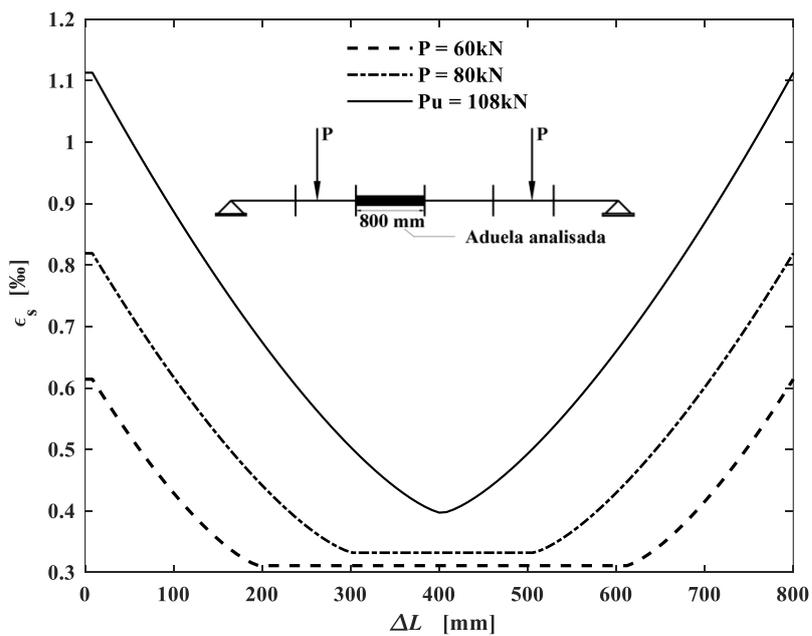
Os diagramas tensão de aderência-comprimento são apresentados na Figura 6.74.

Figura 6.74 – Diagramas tensão de aderência-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2



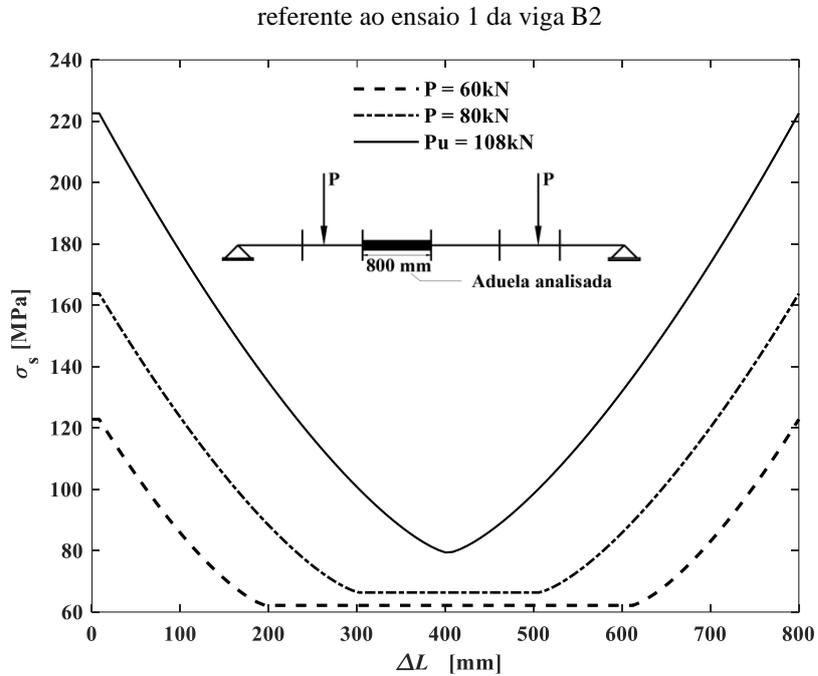
Os diagramas deformação específica no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.75.

Figura 6.75 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm) referente ao ensaio 1 da viga B2



Os diagramas de tensão no aço ao longo do comprimento da aduela são apresentados na Figura 6.76.

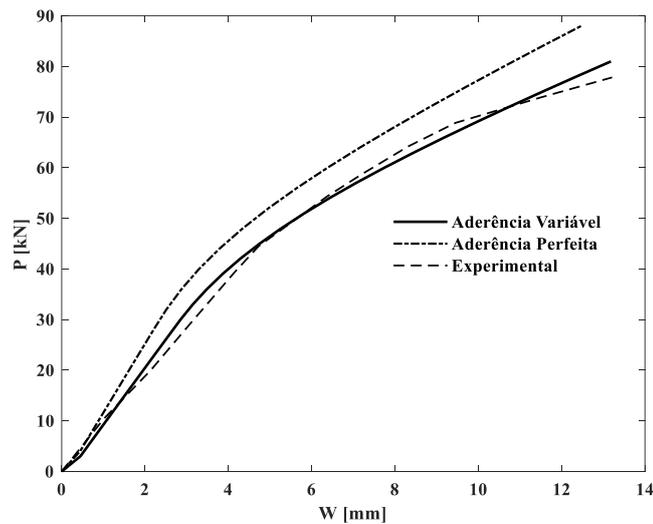
Figura 6.76 – Diagramas tensão no aço-comprimento da aduela ($\Delta L = 800$ mm)



6.2.3.2 Ensaio 2

Na Figura 6.77 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento (seção F2).

Figura 6.77 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 2 da viga B2



Na Tabela 6.17 é apresentada a comparação da carga última (P_u), obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de

aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Vê-se. Também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.17 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 2 da viga B2

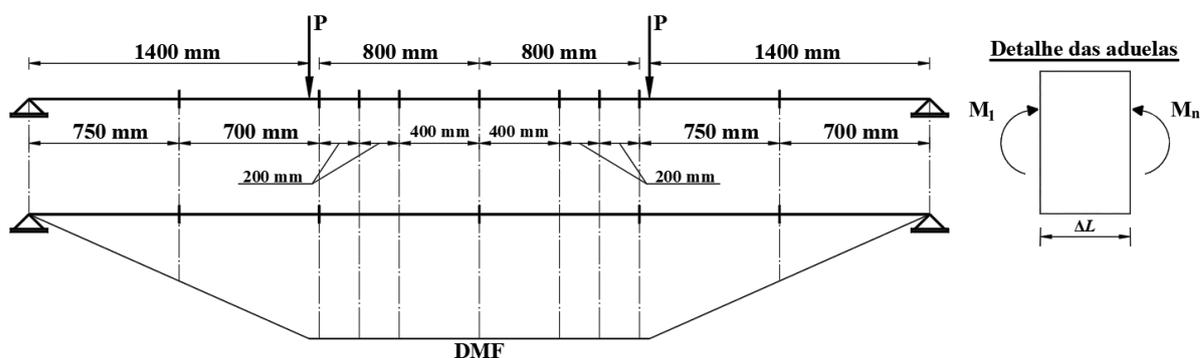
	Experimental	Aderência Variável	Aderência Perfeita
P_u (kN)	77,84*	80,57**	89,65
w_u (mm)	13,21*	13,18**	12,47
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+3,51	+15,17
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+11,27

*Valores obtidos no momento da interrupção do ensaio e não da ruptura da peça;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

O ensaio 1 foi interrompido quando a carga atuante alcançou aproximadamente 107 kN. A peça foi novamente ensaiada, partindo-se de zero até 78 kN, aproximadamente. Durante o ensaio 2 houve o surgimento de duas fissuras quando se atingiu a carga de 65 kN, aproximadamente: a primeira localizada a 400 mm e a segunda a 600 mm à esquerda da junta central, respectivamente. Portanto, a aduela original de 800 mm de comprimento passou a ser dividida em três outras de comprimentos iguais a 400 mm, 200 mm e 200 mm, a partir da junta central. Na Figura 6.78 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central.

Figura 6.78 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 2 da viga B2



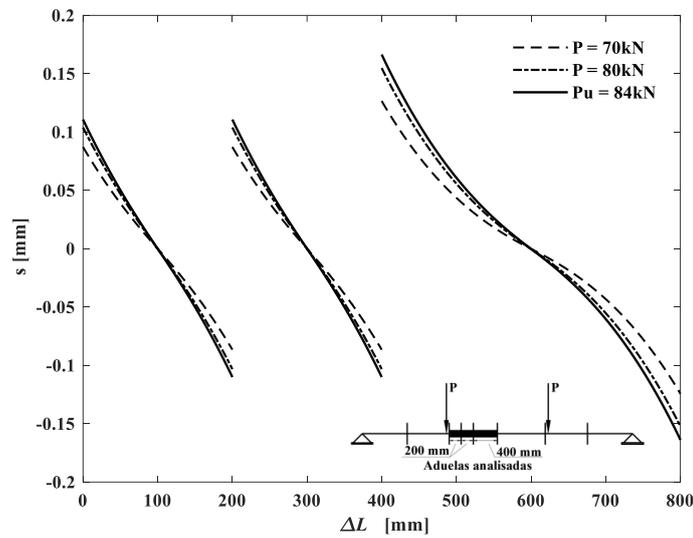
Na Tabela 6.18, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.18 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 2 da viga B2

ΔL (mm)	P (kN)	M_1 (kN.m)	M_n (kN.m)
	60,00	84,00	84,00
200-200-400	70,00	98,00	98,00
	80,57	112,80	112,80

Na Figura 6.79 são apresentados os diagramas deslizamentos-comprimentos das aduelas.

Figura 6.79 – Diagramas deslizamentos do aço-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_2 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para as aduelas de 400 mm e 200 mm são apresentados na Figura 6.80 e Figura 6.81, respectivamente.

Figura 6.80 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 400$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2

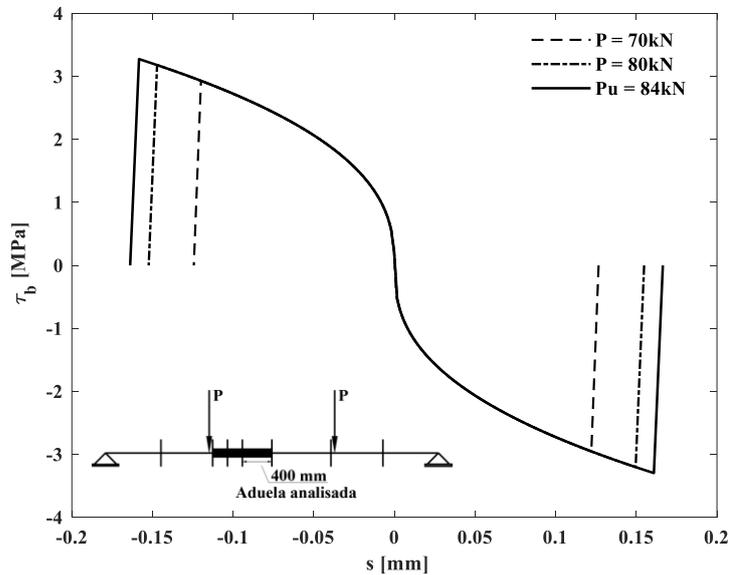
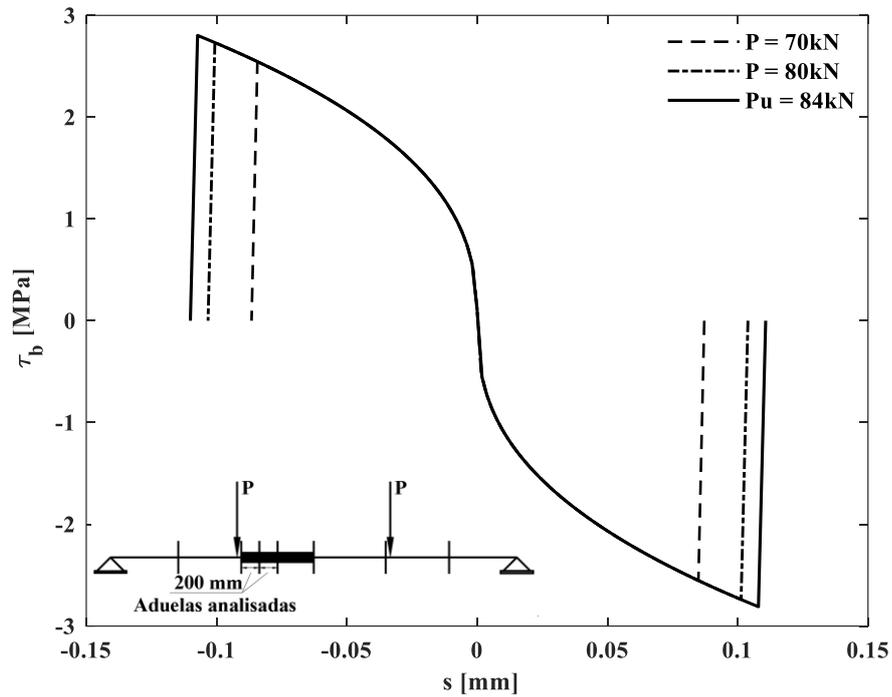
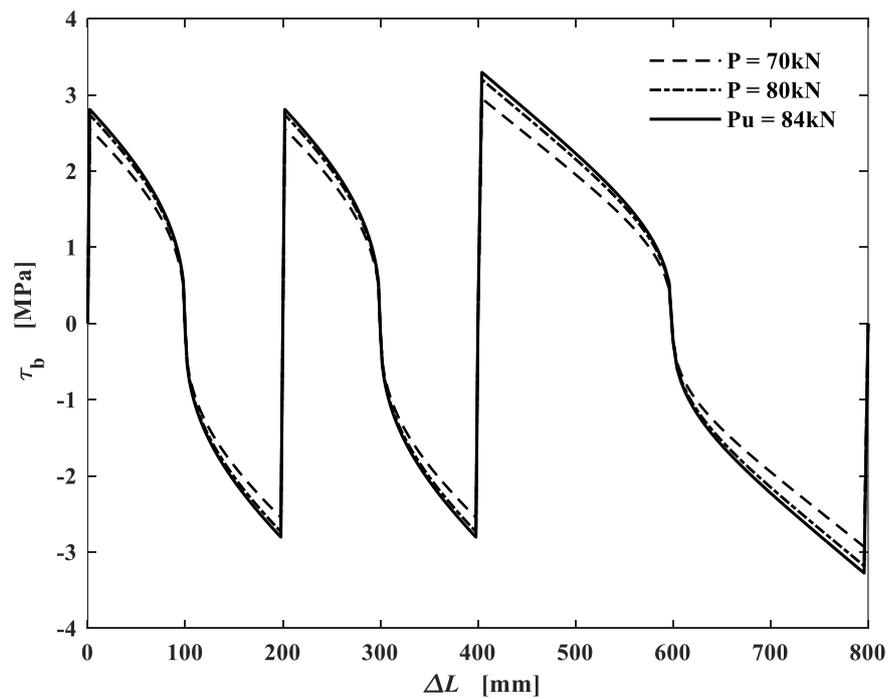


Figura 6.81 – Diagrama tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2



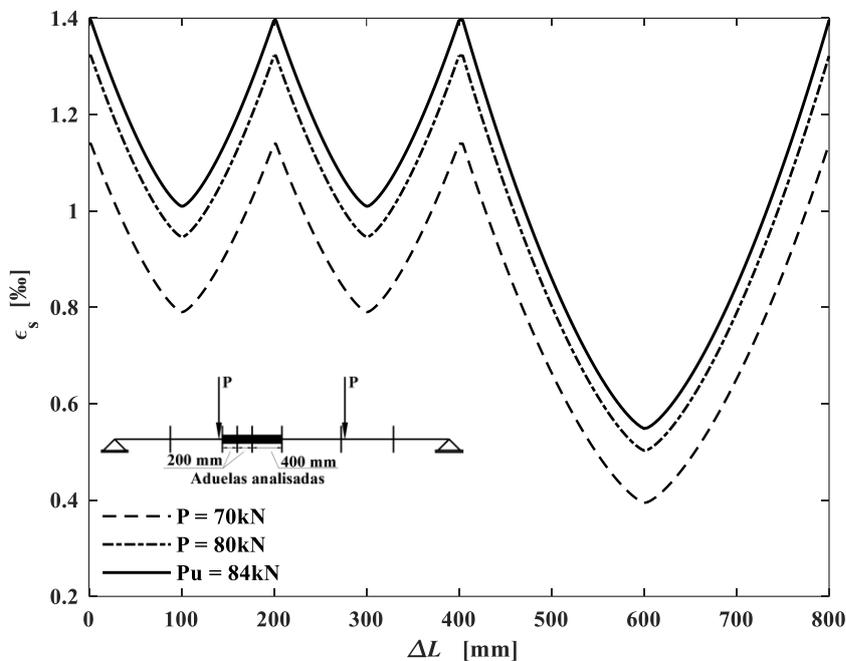
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.82.

Figura 6.82 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2



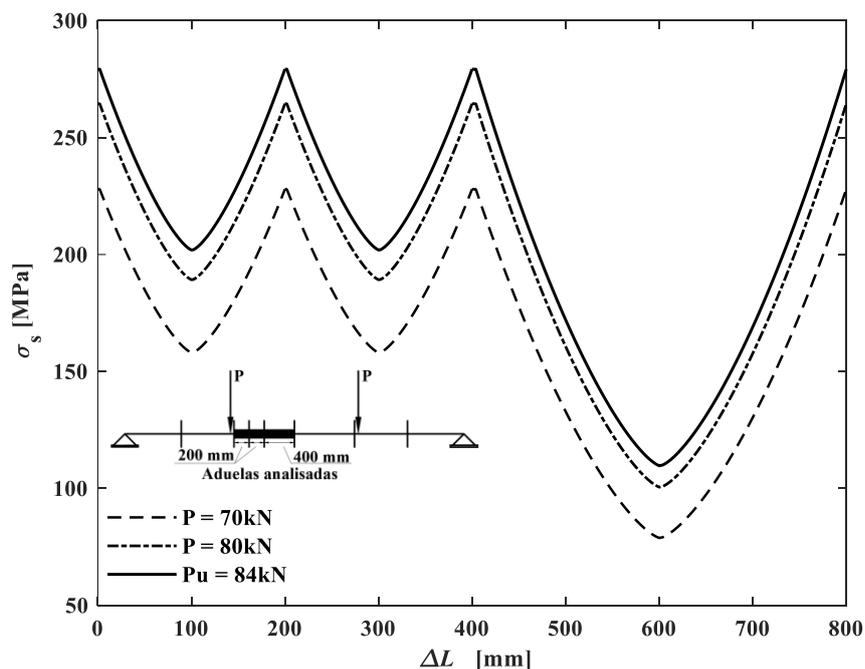
Os diagramas de deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.83.

Figura 6.83 – Diagramas de deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.84.

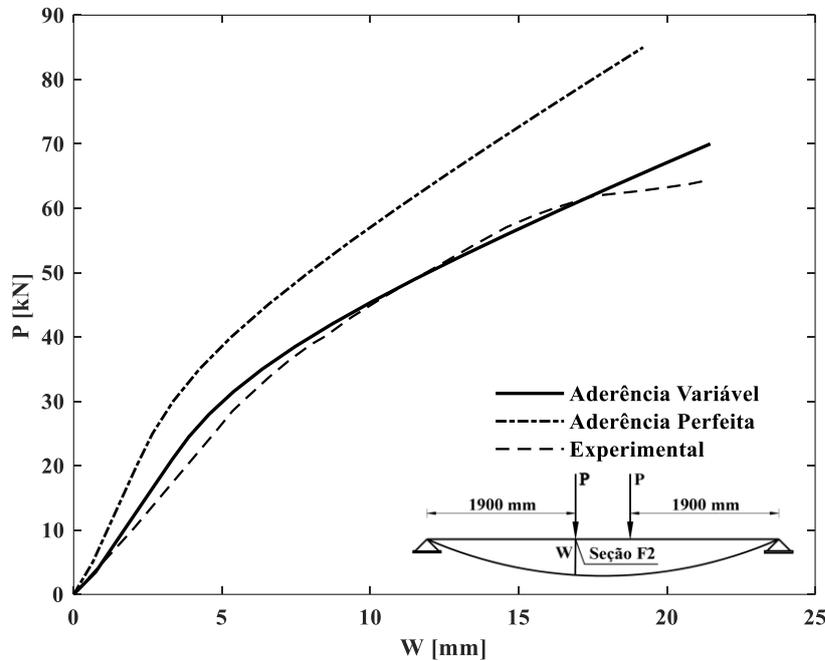
Figura 6.84 – Diagramas de tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 2 da viga B2



6.2.3.3 Ensaio 3

Na Figura 6.85 são apresentados os diagramas carga versus deslocamento (seção F2).

Figura 6.85 – Diagramas carga-deslocamento (seção F2) para o ensaio 3 da viga B2



Na Tabela 6.19 é apresentada a comparação da carga última (P_u), obtida a partir de ensaios experimentais ($P_{u,exp}$), com aquelas obtidas numericamente com os modelos de aderência perfeita ($P_{u,ap}$) e aderência variável ($P_{u,av}$). Vê-se, também, os deslocamentos últimos (w_u) para a seção F2.

Tabela 6.19 – Comparação dos resultados obtidos para o ensaio 3 da viga B2

	Experimental	Aderência Variável	Aderência Perfeita
P_u (kN)	64,29*	69,87**	84,76
w_u (mm)	21,31*	21,46**	19,20
$\left[\left(\frac{P_u}{P_{u,exp}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	+8,68	+31,84
$\left[\left(\frac{P_{u,ap}}{P_{u,av}} - 1 \right) \times 100 \right]$ (%)	–	–	+21,31

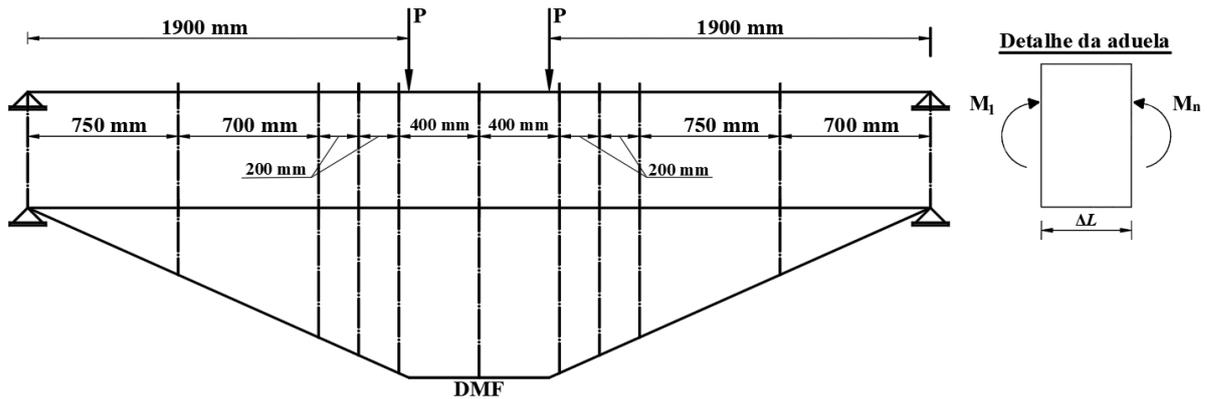
*Valores obtidos no momento da ruptura da peça por esmagamento do concreto na região das juntas;

**Valores obtidos para a carga última (ruptura) obtidos pelo modelo numérico.

O ensaio 2 foi interrompido quando a carga atuante alcançou aproximadamente 78 kN. A peça foi novamente ensaiada, partindo-se de zero até aproximadamente 64 kN, quando atingiu a ruptura. Durante o ensaio 3 não houve o surgimento de novas fissuras. Logo,

mantiveram-se as três aduelas do ensaio 2, com comprimentos iguais a 400 mm, 200 mm e 200 mm, a partir da junta central, respectivamente. Na Figura 6.86 é apresentado um esquema do diagrama de momentos fletores (DMF) e um detalhe das aduelas. É importante destacar que as ruínas obtidas pelo MAV e MAP foram por esmagamento do concreto na região da junta central, como ocorreu no ensaio.

Figura 6.86 – Padrão de fissuração e esquema do DMF referente ao ensaio 3 da viga B2



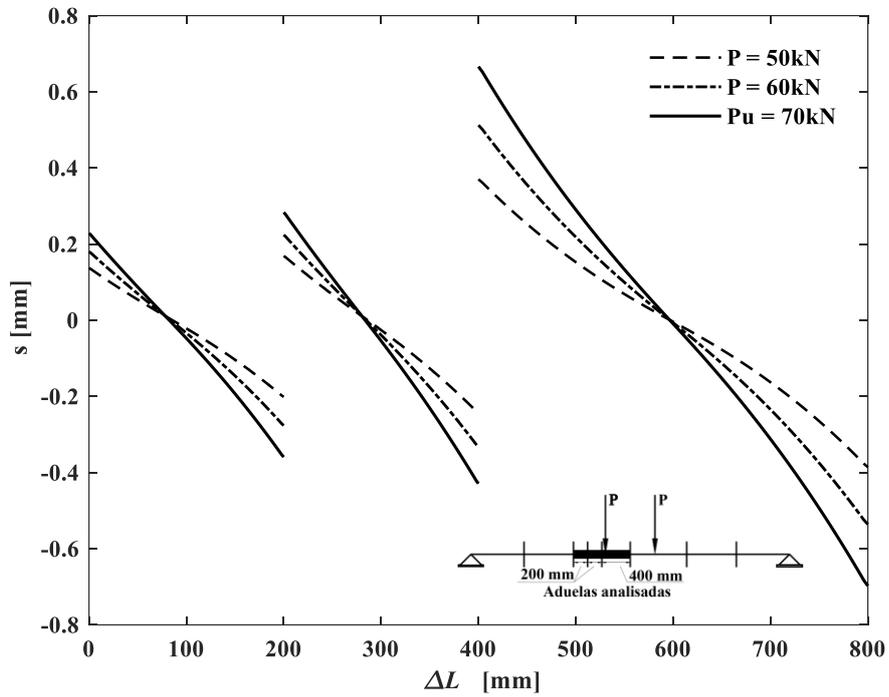
Na Tabela 6.20, são apresentadas as cargas e os momentos atuantes nas extremidades da aduela. Para melhor avaliar o comportamento das aduelas, optou-se por apresentar três níveis de carregamentos próximo a interrupção do ensaio.

Tabela 6.20 – Cargas e momentos atuantes nas extremidades da aduela referente ao ensaio 3 da viga B2

$\Delta L (mm)$	$P (kN)$	$M_1 (kN.m)$	$M_n (kN.m)$
200	50,00	72,50	82,25
	60,00	87,00	99,00
	69,87	101,31	115,29
200	50,00	82,25	92,50
	60,00	99,00	111,00
	69,87	115,29	129,26
400	50,00	92,50	95,00
	60,00	111,00	114,00
	69,87	129,26	132,75

Na Figura 6.87 são apresentados os diagramas deslizamento-comprimentos das aduelas.

Figura 6.87 – Diagramas deslizamento do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2



Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço para cada aduela são apresentados da Figura 6.88 à Figura 6.90.

Figura 6.88 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_1 = 400$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2

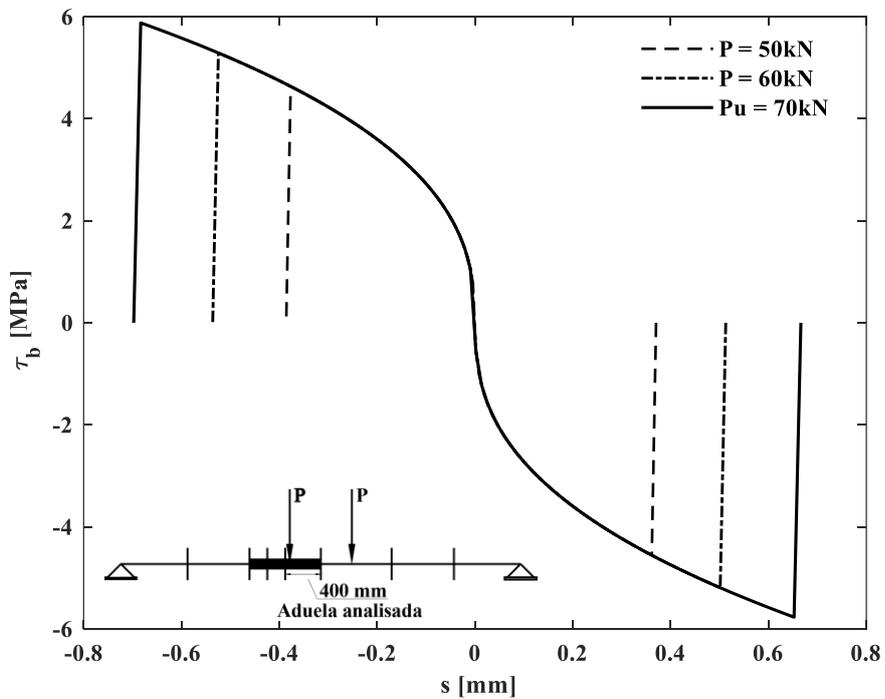


Figura 6.89 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2

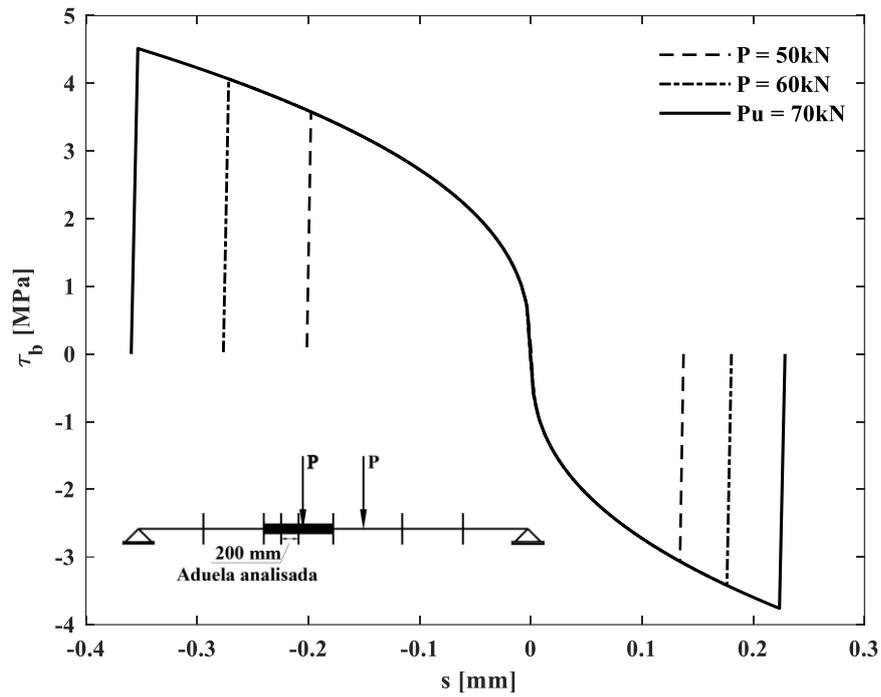
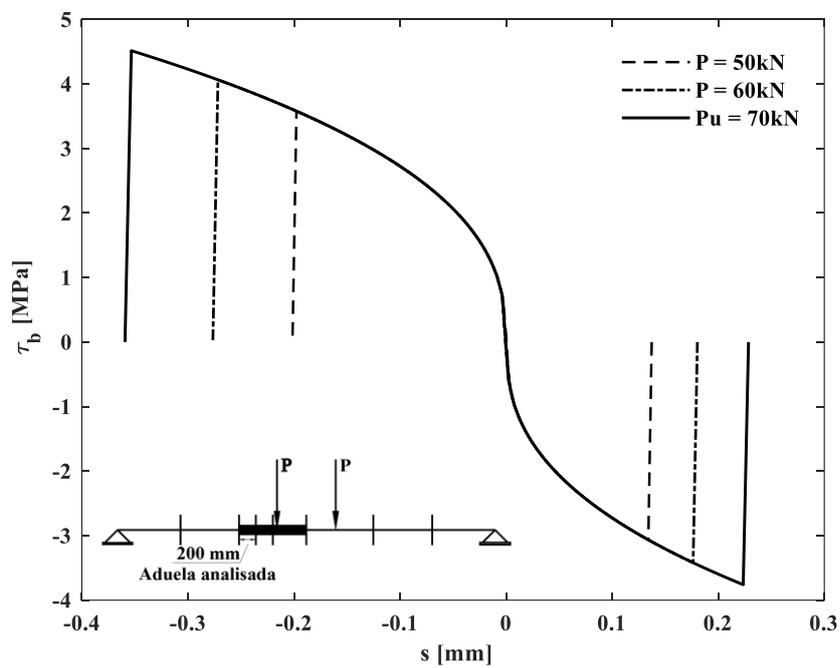
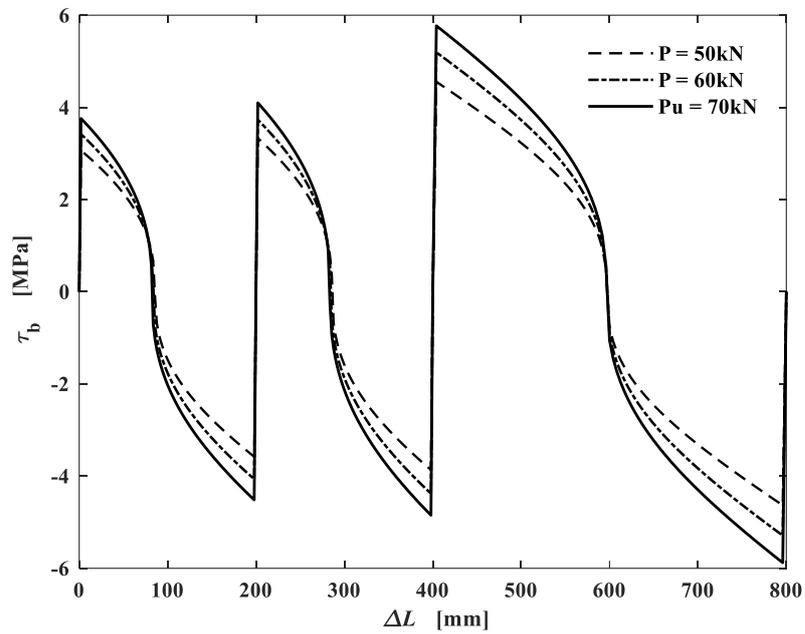


Figura 6.90 – Diagramas tensão de aderência-deslizamento ($\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2



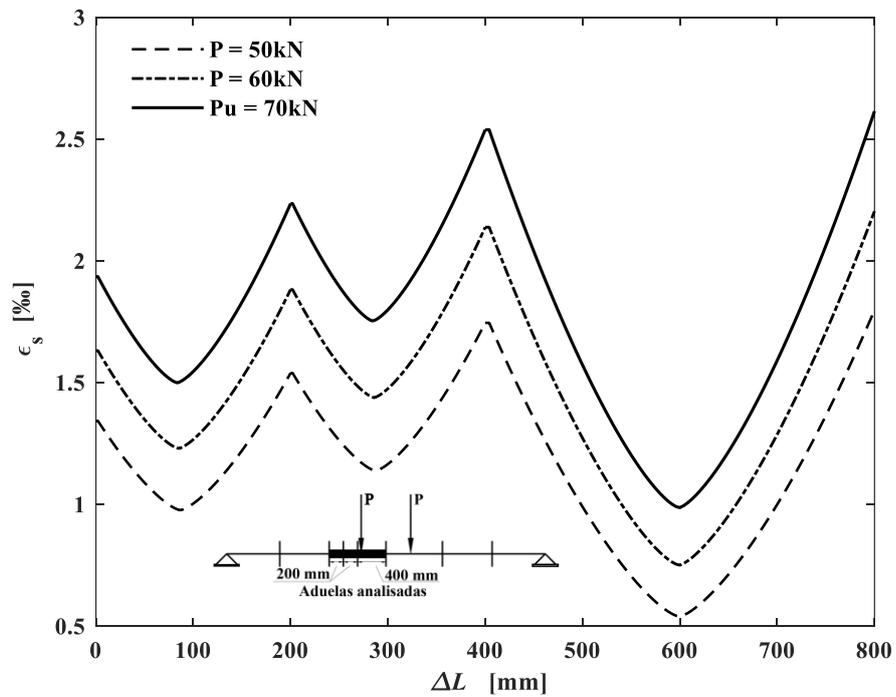
Os diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.91.

Figura 6.91 – Diagramas tensão de aderência-comprimentos das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2



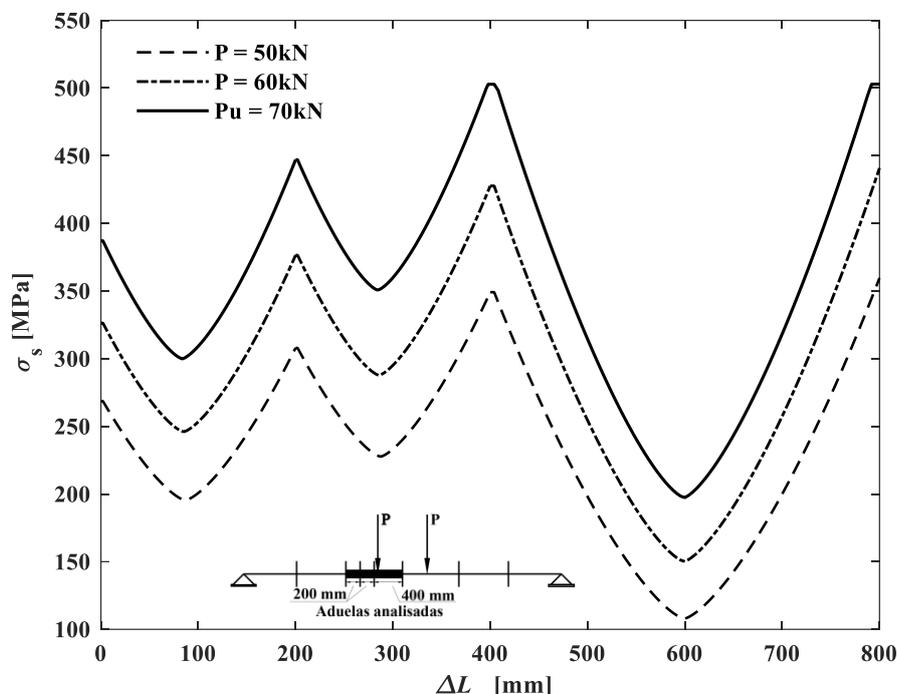
Os diagramas deformação específica no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.92.

Figura 6.92 – Diagramas deformação específica do aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_2 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2



Os diagramas de tensão no aço ao longo dos comprimentos das aduelas são apresentados na Figura 6.93.

Figura 6.93 – Diagramas tensão no aço-comprimento das aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) referente ao ensaio 3 da viga B2



6.2.4 Considerações sobre os resultados obtidos para a viga A2

6.2.4.1 Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes

O ensaio 1 foi interrompido quando se atingiu a carga de aproximadamente 81 kN (antes da ruptura). Durante o ensaio não houve o surgimento de fissuras. Assim, nas análises, considerou-se a aduela de 800 mm de comprimento.

É verificado na Tabela 6.3 que a carga última obtida por meio do MAV é 4,63% superior à do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 11,46% maior que a do experimento e 6,53% superior à do MAV. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – a peça tem uma resposta mais rígida que a do experimento e a do MAV. É importante destacar que os modos de rupturas obtidos pelo MAV e MAP se deram pelo esmagamento do concreto na região da junta central.

O ensaio 2 foi interrompido quando se atingiu a carga de ruptura da peça por esmagamento do concreto na região da junta central ($\cong 84$ kN). Ao atingir a carga de 69 kN,

surgiram de duas fissuras localizadas a 300 mm e 500 mm à esquerda da junta central, respectivamente. Logo, a aduela inicial de 800 mm de comprimento, passou a ser dividida em três aduelas com 300 mm, 200 mm e 300 mm, a partir da junta central, respectivamente.

É observado na Tabela 6.5 que a carga última obtida por meio do MAV é 0,91% maior que a do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 10,87% maior que a experimental e 9,09% superior à do MAV. Esses resultados destacam a importância da aderência, ou seja, à medida que a rigidez vai diminuindo devido à menor contribuição do concreto, a diferença entre o MAP e o experimento ou entre o MAP e o MAV, vai aumentando. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – a peça tem uma resposta mais rígida que a do experimento e a do MAV. É importante enfatizar que a ruína do ensaio se deu pelo esmagamento do concreto na região da junta central, a mesma ocorreu para o MAV e MAP.

No ensaio 1, a análise do diagrama carga-deslocamento, e, conseqüentemente, para o cálculo da rigidez, considerou-se apenas as seções das juntas como fissuradas. Esse padrão de fissuração da modelagem está em acordo com os resultados dos ensaios de Tavares (2000). Os desenhos esquemáticos das aduelas podem ser vistos nos diagramas apresentados nos itens 6.2.1.1 e 6.2.1.2 deste trabalho. Para o ensaio 2, considerou-se até a carga de 69 kN apenas as seções das juntas como fissuradas e, após essa carga, utilizou-se o padrão de fissuração descrito no parágrafo terceiro deste item.

A partir dos diagramas carga-deslocamentos para a seção F2, ensaios 1 e 2 (Figura 6.15, Figura 6.22, respectivamente), verifica-se boa correlação entre os resultados obtidos por meio do modelo numérico (MAV) com os do experimento. O que pode ser comprovado com os valores apresentados na Tabela 6.3 e Tabela 6.5, referentes aos ensaios 1 e 2, respectivamente.

6.2.4.2 Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico

Na Figura 6.17 e na Figura 6.24, são apresentados os diagramas deslizamento do aço em função do comprimento da aduela, para os ensaios 1 e 2, respectivamente. Verificou-se para os ensaios 1 e 2 que à medida que se aumenta o carregamento, o ponto de deslizamento nulo se afasta das extremidades. Como os momentos são constantes, os pontos de deslizamentos nulos são equidistantes de ambas as extremidades em cada aduela.

No ensaio 1, observa-se, para a maioria das cargas, que há um trecho no meio da aduela em que a teoria de Bernoulli-Navier para aderência perfeita é válida, pois não há deslizamento. Logo essa aduela poderia ser classificada como aduela longa, pois não houve prejuízo de aderência em toda sua extensão. Para cargas mais altas (próximas da carga de ruptura do MAV), a aduela passa a se comportar como aduela curta, pois há o deslizamento do aço em toda a sua extensão. O ponto de deslizamento nulo mantém-se no meio da aduela, já que os momentos permanecem iguais nos extremos. Para o ensaio 2, todas as aduelas se comportam como curtas e os deslizamentos nas extremidades de cada aduela são iguais, devido à constância de momentos.

Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço são apresentados na Figura 6.18 (ensaio 1), na Figura 6.25 (ensaio 2, com $\Delta L_1 = \Delta L_3 = 300$ mm) e na Figura 6.26 (ensaio 2, $\Delta L_2 = 200$ mm). Para ambos os ensaios, a tensão de aderência é maior nas extremidades. No modelo numérico considerou-se que nas seções fissuradas (neste caso, as extremidades) a tensão de aderência é nula, logo há um salto no diagrama partindo-se de zero até o valor máximo, próximo aos extremos da peça.

Na Figura 6.19 (ensaio 1) e na Figura 6.27 (ensaio 2) são apresentados os diagramas tensão de aderência-comprimento. O comportamento desses diagramas é semelhante aos da Figura 6.18 (ensaio 1), da Figura 6.25 (ensaio 2, com $\Delta L_1 = \Delta L_3 = 300$ mm) e da Figura 6.26 (ensaio 2, $\Delta L_2 = 200$ mm). À medida que o carregamento vai aumentando, o ponto em que a tensão de aderência é nula (ponto de deslizamento nulo) se afasta das extremidades para o meio da peça. Devido à constância dos momentos, o comportamento para ambas extremidades é o mesmo, e os pontos de tensões de aderência nulas está no meio de cada aduela.

Na Figura 6.20 e na Figura 6.21 são apresentados os diagramas de deformação específica do aço e tensão no aço para o ensaio 1, ambos em função do comprimento, respectivamente. Na Figura 6.28 e na Figura 6.29 são apresentados os diagramas deformação específica do aço e tensão do aço para o ensaio 2, respectivamente, ambos em função do comprimento da aduela. Para ambos ensaios, as deformações e tensões no aço diminuem das extremidades para o meio da aduela. Logo, seus maiores valores estão nas extremidades, onde a tensão de aderência é nula. À medida que o carregamento aumenta, os menores valores de deformação e de tensão vão se aproximando no meio da peça. Para cargas maiores (próximas da interrupção do ensaio 1), como há o deslizamento do aço em toda extensão, o ponto de inflexão do diagrama se encontra no meio da aduela.

6.2.5 Considerações sobre os resultados obtidos para a viga A3

6.2.5.1 Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes

O ensaio 1 foi interrompido quando se atingiu a carga de aproximadamente 132 kN (antes da ruptura). Apresentou dois padrões de fissuração: o primeiro ao atingir a carga de 120 kN, houve o surgimento de duas fissuras localizadas a 300 mm e 700 mm da junta central, respectivamente; o segundo, ao atingir a carga de 127 kN, houve o surgimento de mais uma fissura localizada a 500 mm da junta central.

Para a análise do diagrama carga-deslocamento do ensaio 1 e, conseqüentemente, para o cálculo da rigidez, considerou-se que a seção não fissurou até atingir uma carga imediatamente inferior a 120 kN (carga de fissuração) e após a esta carga, foram consideradas duas fissuras na aduela. Ao atingir 127 kN, considerou-se mais uma fissura. Esse padrão de fissuração está de acordo com os resultados dos ensaios de Tavares (2000). Os desenhos esquemáticos das aduelas, referentes ao ensaio 1, podem ser vistos nos diagramas apresentados nos itens 6.2.2.1, 6.2.2.2 e 6.2.2.3 deste trabalho.

O ensaio 2 foi interrompido quando se atingiu a carga de aproximadamente 81 kN (antes da ruptura). O padrão de fissuração se manteve o mesmo do final do ensaio 1, com quatro aduelas de comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm, 200 mm e 300 mm, a partir da junta central.

O ensaio 3 foi interrompido quando se atingiu a carga de ruptura da peça por esmagamento do concreto na região das juntas ($\cong 59$ kN). O padrão de fissuração se manteve o mesmo do ensaio 2, com quatro aduelas de comprimentos iguais a 300 mm, 200 mm, 200 mm e 300 mm, a partir da junta central.

A partir dos diagramas carga-deslocamentos na seção F2 para os ensaios 1 (Figura 6.30), 2 (Figura 6.51) e 3 (Figura 6.60), verifica-se boa correlação entre os resultados obtidos por meio do modelo numérico (MAV) e os experimentais. O que pode ser comprovado pelos valores apresentados na Tabela 6.7 (ensaio 1), na Tabela 6.11 (ensaio 2) e na Tabela 6.13 (ensaio 3).

Com relação ao diagrama carga-deslocamento da Figura 6.30 (ensaio 1), o modelo numérico é interrompido após a carga última efetiva do experimento. Até atingir o pico de carga, o comportamento obtido pelo modelo numérico (MAV) se aproximou do experimento.

É verificado na Tabela 6.7 (ensaio 1) que a carga última obtida por meio do MAV é 2,40% maior que a do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 9,99% maior que a do experimento e 7,41% superior à do MAV. Esses resultados destacam a importância da aderência na obtenção dos esforços. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – a peça tem uma resposta mais rígida que a do experimento e a do MAV. É importante destacar que os modos de rupturas obtidos pelo MAV e MAP se deram pelo esmagamento do concreto na região da junta central.

A Tabela 6.11 (ensaio 2) mostra que a carga última obtida por meio do MAV é apenas 0,78% maior que a do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 15,32% maior que a experimental e 14,43% superior à do MAV. À medida que a rigidez vai diminuindo, devido a menor contribuição do concreto, por força do deslizamento do aço em seu interior, a diferença entre o MAP e o experimento ou entre o MAP e o MAV, vai aumentando. O menor deslocamento foi o do MAP e os modos de rupturas obtidos pelo MAV e MAP se deram pelo esmagamento do concreto na região da junta central.

Na Tabela 6.13 (ensaio 3), a carga última obtida por meio do MAV é 3,69% inferior à do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 16,49% maior que a do experimento e 20,96% superior à do MAV. O menor deslocamento obtido foi o do MAP. A ruína do ensaio se deu pelo esmagamento do concreto na região da junta central, a mesma ocorreu para o MAV e MAP.

6.2.5.2 Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico

Na Figura 6.32 (ensaio 1) são apresentados os diagramas deslizamento do aço em função do comprimento da aduela. Inicialmente analisou-se a aduela de 1000 mm de comprimento submetida a momentos fletores constantes, antes de atingir a carga de fissuração. Verificou-se que à medida que se aumenta o carregamento, o ponto de deslizamento nulo se afasta das extremidades. E devido aos momentos serem constantes, os pontos de deslizamentos nulos são equidistantes de ambas as extremidades. Observa-se também que há um trecho no meio da aduela em que a teoria de Bernoulli-Navier para aderência perfeita é válida, pois não há deslizamento. Logo essa aduela poderia ser classificada como aduela longa, pois não houve prejuízo de aderência em toda sua extensão.

Na Figura 6.38 (etapa 1 do ensaio 1) e na Figura 6.45 (etapa 2 do ensaio 1) são apresentados os diagramas deslizamento do aço em função do comprimento da aduela, considerando o elemento da viga com três aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 400$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) - após atingir a carga de 120 kN, e quatro aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) - após atingir a carga de 127 kN, respectivamente.

Observa-se que os diagramas da Figura 6.38, referentes às aduelas de 300 mm de comprimento, são idênticos, devido à constância dos momentos ao longo das aduelas. Os maiores valores de deslizamentos são observados para a aduela de 400 mm devido ao comprimento ser maior. O mesmo comportamento é observado nos diagramas da Figura 6.45.

Como os momentos fletores nos extremos da aduela são iguais, os diagramas para ambas extremidades, de cada aduela, são idênticos. Os pontos de deslizamentos nulos obtidos por meio do modelo numérico estão localizados no meio cada aduela. Outro aspecto que merece destaque é que o aço de cada aduela deslizou em toda sua extensão, caracterizando que todas apresentam comportamento de aduelas curtas.

Na Figura 6.53 e na Figura 6.62 são apresentados os diagramas deslizamento do aço em função do comprimento da aduela para os ensaios 2 e 3, respectivamente. Os elementos das vigas apresentam quatro aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm).

Observa-se, para o ensaio 2, um comportamento semelhante ao das aduelas do ensaio 1. Entretanto, a primeira aduela ($\Delta L_1 = 300$ mm) está submetida a gradiente de momento, logo os deslizamentos nas extremidades são diferentes e o ponto de deslizamento nulo está mais desviado para o lado de menor momento. Para as outras aduelas, que estão submetidas a momentos constantes, os deslizamentos nas extremidades são iguais e o ponto de deslizamento nulo está situado no meio de cada aduela. Observa-se, em nas aduelas, que houve o deslizamento do aço em toda extensão, comportando-se como aduelas curtas.

Para o ensaio 3, o comportamento é diferente da maioria das aduelas do ensaio 2, pois as três primeiras aduelas ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) estão submetidas a gradientes de momentos. Resulta que os deslizamentos nas extremidades dessas aduelas são diferentes e o ponto de deslizamento nulo está mais desviado para o lado de menor momento. Para a quarta aduela ($\Delta L_4 = 300$ mm) que está submetida a momentos constantes, os

deslizamentos nas extremidades são iguais e o ponto de deslizamento nulo está situado no seu ponto médio. Nessas aduelas, houve deslizamento do aço em toda extensão, comportamento característicos de aduelas curtas.

O diagrama tensão de aderência-deslizamento do aço, referente ao ensaio 1 (etapa 1), para a aduela de 1000 mm de comprimento é apresentado na Figura 6.33. Observa-se que a tensão de aderência é maior nas extremidades. No modelo numérico considerou-se que nas seções fissuradas (neste caso, as extremidades) a tensão de aderência é nula, logo há um salto no diagrama partindo-se de zero até o valor máximo, próximo aos extremos da peça. Na Figura 6.34 (etapa 1) são apresentados os diagramas tensão de aderência-comprimento para a mesma aduela. O comportamento desses diagramas é semelhante ao da Figura 6.33.

Na Figura 6.39 ($\Delta L_1 = 300$ mm e $\Delta L_3 = 300$ mm) e Figura 6.40 ($\Delta L_2 = 400$ mm) são apresentados os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço referente ao ensaio 1 (etapa 2), considerando o elemento de viga com três aduelas. Na Figura 6.46 ($\Delta L_1 = 300$ mm e $\Delta L_4 = 300$ mm) e Figura 6.47 ($\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm) são apresentados os mesmos diagramas referentes ao elemento de viga com quatro aduelas (etapa 2 do ensaio 1).

Os diagramas tensão de aderência-comprimento das aduelas para os elementos de viga com três e quatro aduelas são apresentados na Figura 6.41 (etapa 2) e Figura 6.48 (etapa 3) referentes ao ensaio 1, respectivamente.

Na Figura 6.34 são apresentados os diagramas tensão de aderência-comprimento para a aduela de 1000 mm de comprimento (ensaio 1), antes de fissurar. O comportamento desses diagramas é semelhante ao da Figura 6.33. À medida que o carregamento vai aumentando, o ponto em que a tensão de aderência é nula (ponto de deslizamento nulo) se afasta das extremidades para o meio da peça. Devido à constância dos momentos, o comportamento para ambas extremidades é o mesmo, e os pontos de tensões de aderência nulas são equidistantes de ambas.

Todos esses diagramas apresentam comportamentos semelhantes. As tensões de aderência são iguais para ambas extremidades e os pontos de tensão de aderência nula estão no meio de cada aduela. Esses aspectos ocorrem, tendo em vista que a aduela está submetida a momentos fletores constantes ao longo de todo seu comprimento e há o deslizamento do aço em toda extensão da aduela.

Na

Figura 6.54 ($\Delta L_1 = 300$ mm), Figura 6.55 ($\Delta L_2 = \Delta L_3 = 200$ mm) e Figura 6.56 ($\Delta L_4 = 300$ mm) são apresentados os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço referente ao ensaio 2. Na Figura 6.63 ($\Delta L_1 = 300$ mm), Figura 6.64 ($\Delta L_2 = 200$ mm), Figura 6.65 ($\Delta L_3 = 200$ mm) e Figura 6.66 ($\Delta L_4 = 300$ mm) são apresentados os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço referentes ao ensaio 3. Os diagramas tensão de aderência-comprimento dessas aduelas são apresentados na Figura 6.57 e na Figura 6.67, referente aos ensaios 2 e 3, respectivamente.

Para o ensaio 2, a maioria dos diagramas apresentam comportamentos semelhantes. As tensões de aderência são iguais para ambas extremidades e o ponto de tensão de aderência nula está no meio de cada aduela.

Essa semelhança ocorre, sempre que a aduela está submetida a momentos fletores constantes ao longo de seu comprimento e há o deslizamento do aço em toda extensão da aduela. A exceção é a primeira aduela ($\Delta L_1 = 300$ mm), que está submetida a gradiente de momento.

No ensaio 3, as tensões de aderência são diferentes para ambas extremidades e os pontos de tensão de aderência nula estão mais desviados para a extremidade de menor momento de cada aduela, já que essas aduelas estão submetidas a gradiente de momentos fletores. A exceção é a quarta aduela ($\Delta L_4 = 300$ mm), que está submetida a momentos fletores constantes.

Na Figura 6.35 e na Figura 6.36 são apresentados os diagramas de deformação específica do aço e tensão no aço, ambos em função do comprimento, respectivamente, para a aduela de 1000 mm de comprimento, referente à etapa 1 do ensaio 1. Os maiores valores estão nas extremidades, pois a tensão de aderência é nula. À medida que o carregamento aumenta, os menores valores de deformação e de tensão vão se aproximando no meio da peça.

Na Figura 6.42 e Figura 6.43 são apresentados os diagramas deformação específica do aço e tensão do aço, respectivamente, ambos em função do comprimento da aduela para o elemento de viga com três aduelas (etapa 2 do ensaio 1).

Na Figura 6.49 e Figura 6.50 são apresentados os diagramas deformação específica do aço e tensão do aço, respectivamente, ambos em função do comprimento da aduela para o elemento de viga com quatro aduelas (etapa 3 do ensaio 1).

Na Figura 6.58 e Figura 6.59 são apresentados os diagramas de deformação específica do aço e tensão do aço, respectivamente, ambos em função do comprimento da aduela para o elemento de viga com quatro aduelas (ensaio 2).

Na Figura 6.68 e Figura 6.69 são apresentados os diagramas de deformação específica do aço e tensão do aço, respectivamente, ambos em função do comprimento da aduela para o elemento de viga com quatro aduelas (ensaio 3).

É observado nesses diagramas que as deformações e tensões diminuem das extremidades para o meio da aduela. Isto se deve ao aumento da contribuição do concreto à medida que se aproxima do meio da aduela – essa contribuição é tanto menor quanto menor for o deslizamento aço-concreto nas seções.

Para o ensaio 1, o comportamento dos diagramas para ambas extremidades e para as aduelas de mesmo comprimento é igual, pois a peça está submetida a momentos fletores constantes ao longo de todo seu comprimento.

No ensaio 2, apenas a primeira aduela ($\Delta L_1 = 300$ mm), está submetida a gradiente de momento, logo o ponto de inflexão do gráfico está mais desviado para a extremidade de menor momento. Outro aspecto observado é que para cargas maiores (próximas das cargas de ruptura obtidas pelo MAV), o aço atinge o escoamento.

O comportamento dos diagramas do ensaio 3 é semelhante aos do ensaio 2. Para as aduelas submetidas a gradiente de momentos ($\Delta L_1 = 300$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm e $\Delta L_3 = 200$ mm), as deformações nas extremidades são diferentes e o ponto de inflexão desses diagramas estão mais desviados para a extremidade de menor momento. Entretanto, para a quarta aduela ($\Delta L_4 = 300$ mm), as tensões e deformações são iguais nos extremos e o ponto de inflexão está em sua seção mediana.

6.2.6 Considerações sobre os resultados obtidos para a viga B2

6.2.6.1 Sobre os ensaios e comparação dos resultados obtidos com os existentes

O ensaio 1 foi interrompido quando se atingiu a carga de aproximadamente 107 kN (antes da ruptura). Durante o ensaio não houve o surgimento de fissuras. Assim, nas análises, considerou-se a aduela de 800 mm de comprimento.

O ensaio 2 foi interrompido quando se atingiu a carga aproximada de 78 kN (antes da ruptura). Ao atingir a carga de 65 kN, houve o surgimento de duas fissuras localizadas a 400 mm e 600 mm da junta central, respectivamente. Logo, a aduela inicial de 800 mm de comprimento, passou a ser dividida em três aduelas com 400 mm, 200 mm e 200 mm, a partir da junta central, respectivamente.

O ensaio 3 foi interrompido quando se atingiu a carga de ruptura da peça por esmagamento do concreto na região da junta central ($\cong 64$ kN). O padrão de fissuração se manteve o mesmo do ensaio 2.

Para a análise do diagrama carga-deslocamento e, conseqüentemente, para o cálculo da rigidez, considerou-se apenas as seções das juntas como fissuradas. Para a análise do diagrama carga-deslocamento do ensaio 2 e, conseqüentemente, da rigidez, considerou-se até a carga de 65 kN apenas as seções das juntas como fissuradas e, após essa carga, utilizou-se o padrão de fissuração descrito no segundo parágrafo deste item.

O padrão de fissuração dos três ensaios está de acordo com os resultados dos ensaios de Tavares (2000). Os desenhos esquemáticos das aduelas podem ser vistos nos diagramas apresentados nos itens 6.2.3.1, 6.2.3.2 e 6.2.3.3 deste trabalho.

A partir dos diagramas carga-deslocamentos para a seção F2, ensaios 1 (Figura 6.70), 2 (Figura 6.77) e 3 (Figura 6.85), verifica-se boa correlação entre os resultados obtidos por meio do modelo numérico (MAV) com os do experimento -ver os valores apresentados na Tabela 6.15 (ensaio 1), Tabela 6.17 (ensaio 2), Tabela 6.19 (ensaio 3).

A Tabela 6.15 (ensaio 1) mostra que a carga última obtida por meio do MAV é 1,34% superior à do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 12,35% maior que a do experimento e 10,86% superior à do MAV. O menor deslocamento obtido foi o do MAP, confirmando o que é observado na literatura – a peça tem uma resposta mais rígida que a do experimento e a do MAV. É importante destacar que os modos de rupturas obtidos pelo MAV e MAP se deram pelo esmagamento do concreto na região da junta central.

É verificado na Tabela 6.17 (ensaio 2) mostra que a carga última obtida por meio do MAV é 3,51% maior que a do experimento, mostrando boa concordância do modelo numérico. A carga última do MAP é 15,17% maior que a experimental e 11,27% superior à do MAV.

Esses resultados destacam a importância da aderência, ou seja, à medida que a rigidez vai diminuindo, devido a menor contribuição do concreto, a diferença entre o MAP e o experimento ou entre o MAP e o MAV, vai aumentando. O menor deslocamento obtido foi o do MAP e os modos de rupturas obtidos pelo MAV e MAP se deram pelo esmagamento do concreto na região da junta central.

A Tabela 6.19 (ensaio 3) mostra que a carga última obtida por meio do MAV é 8,68% inferior à do experimento. A carga última do MAP é 31,84% maior que a do experimento e 21,31% superior à do MAV. O menor deslocamento obtido foi o do MAP e a ruína do ensaio se deu pelo esmagamento do concreto na região da junta central, a mesma ocorreu para o MAV e MAP.

6.2.6.2 Sobre o comportamento dos resultados auxiliares obtidos no modelo numérico

Na Figura 6.72 são apresentados os diagramas deslocamento do aço em função do comprimento da aduela para o ensaio 1. Analisou-se a aduela de 800 mm de comprimento submetida a momentos fletores constantes. Verificou-se que à medida que se aumenta o carregamento, o ponto de deslocamento nulo se afasta das extremidades. Como os momentos são constantes, os pontos de deslocamentos nulos permanecem equidistantes de ambas as extremidades.

Observa-se também (para a maioria das cargas) que há um trecho no meio da aduela em que a teoria de Bernoulli-Navier para aderência perfeita é válida, pois não há deslizamento. Logo, essa aduela poderia ser classificada como aduela longa, pois não houve alteração de aderência em toda sua extensão.

Para cargas mais altas (próximas da interrupção do ensaio), a aduela passa a se comportar como aduela curta, pois há o deslizamento do aço em toda a sua extensão. O ponto de deslocamento nulo se encontra no meio da aduela, já que os momentos são iguais nos extremos.

Na Figura 6.79 e Figura 6.87 são apresentados os diagramas deslocamento do aço em função do comprimento da aduela para o ensaios 2 e 3, respectivamente. Considerou-se o elemento da viga com três aduelas ($\Delta L_1 = 400$ mm, $\Delta L_2 = 200$ mm, $\Delta L_3 = 200$ mm).

Observa-se que todas as aduelas se comportam como curtas e que o ponto de deslizamento nulo está no meio de cada aduela. No ensaio 2, os deslizamentos nas extremidades de cada aduela são iguais, devido à constância de momentos. A aduela com 400 mm de comprimento apresenta deslizamentos maiores por conta da sua dimensão e as aduelas com 200 mm de comprimento apresentam comportamentos idênticos, também devido à constância de momentos.

Em relação ao ensaio 3, o comportamento é diferente do das aduelas do ensaio 2, pois todas as três estão submetidas a gradientes de momentos, logo os deslizamentos nas extremidades dessas aduelas são diferentes e o ponto de deslizamento nulo está mais desviado para o lado de menor momento.

Os diagramas tensão de aderência-deslizamento do aço são apresentados na Figura 6.73 (ensaio 1); Figura 6.80 ($\Delta L_1 = 400$ mm) e Figura 6.81 ($\Delta L_2 = \Delta L_3 = 200$ mm), ensaio 2; e Figura 6.88 ($\Delta L_1 = 400$ mm), Figura 6.89 ($\Delta L_2 = 200$ mm) e Figura 6.90 ($\Delta L_3 = 200$ mm), ensaio 3. Observa-se que a tensão de aderência é maior nas extremidades. Para o modelo numérico considerou-se que nas seções fissuradas (neste caso, as extremidades) a tensão de aderência é nula, logo há um salto no diagrama partindo-se de zero até o valor máximo, próximo aos extremos da peça.

Na Figura 6.74 são apresentados os diagramas tensão de aderência-comprimento para o ensaio 1. O comportamento desses diagramas é semelhante aos da Figura 6.73. À medida que o carregamento vai aumentando, o ponto em que a tensão de aderência é nula (ponto de deslizamento nulo) se afasta das extremidades para o meio da peça.

No ensaio 1, devido à constância dos momentos, o comportamento para ambas extremidades é o mesmo, e o ponto de tensões de aderência nulas são equidistantes das extremidades. Para cargas elevadas (próximas da interrupção do ensaio) o ponto de deslizamento nulo e, conseqüentemente, de tensão de aderência nula está no meio da aduela. Para o ensaio 2, os diagramas apresentam comportamentos semelhantes ao do final do ensaio 1.

Para o ensaio 3, a maioria dos diagramas apresentam comportamentos semelhantes. As tensões de aderência são diferentes nas extremidades e os pontos de tensão de aderência nula

estão mais desviados para a extremidade de menor momento de cada aduela. Esses aspectos ocorrem tendo em vista que a aduela está submetida a gradiente de momentos fletores.

Na Figura 6.75 e na Figura 6.76 são apresentados os diagramas de deformação específica do aço e tensão no aço para o ensaio 1, ambos em função do comprimento, respectivamente. Na Figura 6.83 e na Figura 6.84, para o ensaio 2. Figura 6.92 e na Figura 6.93, referente ao ensaio 3.

Observa-se que as deformações e tensões no aço diminuem das extremidades para o meio da aduela. Isto se deve ao aumento da contribuição do concreto à medida que se aproxima do meio da aduela. Logo, seus maiores valores estão nas extremidades, onde o concreto ainda não intervém na resistência.

Para o ensaio 1, à medida que o carregamento aumenta, os menores valores de deformação e de tensão vão se concentrando no meio da peça. Para cargas elevadas (próximas da interrupção do ensaio), como há deslizamento do aço em toda extensão, o ponto de inflexão do diagrama se encontra no meio da aduela.

No ensaio 2, o comportamento dos diagramas para ambas extremidades e para as aduelas de mesmo comprimento é igual, pois a peça está submetida a momentos fletores constantes ao longo de todo seu comprimento.

Para o ensaio 3, as deformações e tensões nas extremidades são diferentes e o ponto de inflexão desses diagramas estão mais desviados para a extremidade de menor momento, pois as aduelas estão submetidas a gradiente de momento.

7 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi avaliar o comportamento não linear de vigas de concreto estrutural submetidas a gradiente de momento fletor com variação de aderência ao redor das seções de descontinuidade, após abertura de fissuras.

O modelo escolhido para tal análise, aqui denominado de Modelo de Aderência Variável (MAV), foi implementado por meio da ferramenta *MatLab*, que se mostrou adequada para os objetivos propostos e forneceu resultados de grande valia para o estudo das peças em concreto.

A formulação, tomando por base a proposição inicial de Manfredo e Manfredi e Pecce (1998), foi aplicada na comparação com resultados experimentais com grande sucesso.

A conclusão de ordem geral, confirmada por mais este estudo, é que, mais a distribuição das fissuras se afastam de uma repartição uniforme (espaçamento da ordem daquele existente entre estribos), mais a modelagem da teoria clássica de flexão, baseada na hipótese de Bernoulli-Navier, perde acuidade, afastando-se da realidade experimental.

A modelagem implementada aqui, que considera que a aderência entre o aço e o concreto é variável, permitindo o deslizamento do primeiro no segundo, à medida que as fissuras se abrem, é a que melhor representa o comportamento geral de peças fissuradas.

O objetivo principal foi o de validar um modelo de análise de elementos de concreto solicitados por gradiente de momentos em seu comprimento. Sabendo que o caso de momento constante ao longo dos elementos já dispõe de modelagem comprovada, como visto na revisão bibliográfica, a construção de modelo consistente para o caso de gradiente de momentos constituiu a contribuição relevante buscado nesta tese. Logrou-se sucesso nessa empreitada, como foi demonstrado nos capítulos anteriores.

Os resultados obtidos permitiram discernir, com clareza, que:

- a) É possível determinar a posição de deslizamento nulo no interior um subelemento de concreto entre duas fissuras, o que tem como consequência a obtenção da repartição das tensões ao longo do aço em toda a sua extensão, prescindindo da hipótese de deformação média entre fissuras;
- b) Para a validação do modelo, utilizou-se exemplos da literatura, relatando ensaios de vigas com fissuração discreta e repartida.

- c) Os resultados das vigas com fissuração repartida evidenciaram que o modelo clássico da elasticidade não linear permanece um poderoso e útil instrumento de análise desse tipo de peça.
- d) Os resultados da comparação com as vigas em fissuração discreta permitiram discernir que a modelagem incorporando a variação da aderência é um imperativo, sem o qual não é possível avaliar a deformabilidade de modo compatível com a realidade. Essa constatação é tanto mais importante quanto o fato evidencia sua aplicabilidade na análise de vigas confeccionadas por aduelas, nas quais as fissuras são as juntas entre elas, estruturas de grande importância no mundo das construções.
- e) O estudo das peças segmentadas por aduelas esclareceu que, em função da relação entre a altura e o comprimento das aduelas, podem surgir novas fissuras no interior desses subelementos, o que impõe a adaptação do modelo de análise para novas configurações de aduelas, agora redefinidas pelas fissuras geradas pelo carregamento e as anteriores. Confirma-se, então, o conceito de aduelas curtas e longas, antecipado em Martins (1989), e que pôde ser identificado neste trabalho. A relação comprimento-altura da aduela $l/h \geq 1,25$ parece ser a fronteira entre aduelas curtas e longas. Maiores estudos paramétricos precisam ser empreendidos para validar definitivamente o valor desta relação, inclusive na consideração da taxa de variação do momento entre as extremidades das aduelas.
- f) Para as aduelas longas, percebeu-se que há um trecho central em que a teoria de Bernoulli-Navier pode ser ainda considerada válida, pois não há deslizamento e, conseqüentemente, não houve perda de aderência em toda sua extensão. A repercussão do deslizamento de aço na distribuição das tensões no interior das aduelas se faz progressivamente, na medida do aumento do carregamento da peça.
- g) O comportamento como aduela longa é alterado a cada vez que é detectada uma nova fissura no interior da aduela original, impondo a reavaliação da distribuição da rigidez nos elementos a partir na nova configuração das fissuras.
- h) A modelagem aqui apresentada permite que se possa obter resultados de comportamento local dos materiais, que usualmente não são analisados na teoria clássica. Dentre esses, podemos destacar a distribuição longitudinal das deformações no concreto e no aço, incorporando as suas variações, mesmo em regiões onde os esforços externos são constantes.

- i) O controle da abertura das fissuras, dado fundamental para a durabilidade das peças, pode ser gerado, no caso de investigações para o comportamento em serviço.
- j) A evolução da rigidez das peças permite a obtenção de forma bem apurada dos diagramas carga-deslocamento de modo a controlar a sua ductilidade.
- k) A modelagem, sendo sensível à queda da rigidez da peça com a elevação do carregamento, permite obter o ramo da curva carga-deslocamento mesmo em níveis em que a rigidez tende a zero. Para tanto é necessário exercer rigoroso controle nos parâmetros de cálculo da rigidez.
- l) Por sua generalidade a formulação apresentada pode ser aplicada em vigas isostáticas ou hiperestática sem necessidade de alteração do algoritmo de equilíbrio e deformação das aduelas.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com o intuito de entender melhor o comportamento não linear de vigas segmentadas de concreto submetidas a gradiente de momentos e com foco na variação de aderência, fica claro a necessidade de mais estudos, que possam avaliar:

- a) a influência da combinação do esforço cortante com o momento fletor no deslizamento do aço;
- b) aplicação do modelo de variação da tensão de aderência-deslizamento a vigas hiperestáticas de concreto armado e protendido;
- c) a variação da tensão de aderência-deslizamento em vigas de armação aderente inclinada em relação ao eixo da peça;
- d) o surgimento de fissuras secundárias com o avanço do carregamento (considerando-se a perda de aderência com o deslizamento do aço) de forma que haja maior precisão no posicionamento das fissuras. Desenvolvimento de algoritmo adaptativo que permita alterar a discretização da peça à medida que surjam novas fissuras.

REFERÊNCIAS

- ABDEL BAKY, H.; EBEAD, U. A.; NEALE, K. W. Nonlinear micromechanics-based bond–slip model for FRP/concrete interfaces. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 39, p. 11–23, 2012. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.01.010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.01.010>.
- ABDELATIF, A. O.; OWEN, J. S.; HUSSEIN, M. F. M. Modelling the prestress transfer in pre-tensioned concrete elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, Amsterdam, v. 94, n. C, p. 47–63, 2015. DOI: 10.1016/j.finel.2014.09.007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2014.09.007>.
- ÁLVARES, Manoel Silva. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. 123 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ARAÚJO, José Milton. **Curso de concreto armado**. v. 2, 3ª ed. Rio Grande: Dunas, 2010.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento**. Rio de Janeiro.
- BARBOSA, M. T. G. **Avaliação do Comportamento da Aderência em Concretos de Diferentes Classes de Resistência**. 2001. 203 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Departamento de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- BARBOSA, M. T. G.; SÁNCHEZ FILHO, E. S. The bond stress x slipping relationship. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 9, n. 5, p. 745–753, 2016. DOI: 10.1590/s1983-41952016000500006.
- BARROS, Joaquim A. O.; TAHERI, Mahsa; SALEHIAN, Hamidreza. A model to simulate the moment-rotation and crack width of FRC members reinforced with longitudinal bars. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 100, p. 43–56, 2015. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.05.036.
- BISCAIA, Hugo C.; CHASTRE, Carlos; SILVA, Manuel A. G. Bond-slip model for FRP-to-concrete bonded joints under external compression. **Composites Part B**, Amsterdam, v. 80, p. 246–259, 2015. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.06.004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.06.004>.
- BLOMFORS, Mattias; ZANDI, Kamyab; LUNDGREN, Karin; CORONELLI, Dario. Engineering bond model for corroded reinforcement. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 156, n. December 2017, p. 394–410, 2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.11.030. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.11.030>.
- BRISOTTO, Daiane Sena. **Um modelo elasto-plástico para a análise da aderência em peças de concreto armado**. 2011. 116 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- CHAPRA, Steven C. **Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas**. 3ª ed. Porto Alegre: Hill, Mc Graw, 2013.
- CIAMPI, Vincenzo; ELIGEHAUSEN, R.; POPOV, Egor P.; BERTERO, V. V. **Analytical Model for Concrete Anchorages of Reinforcing Bars under Generalized Excitations**. Report N° UCB/EERC-82/23. Berkeley. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.18419/opus-8475>.

CÓDIGO MODELO FIB-MC2010. **The International Federation for Structural Concrete, fib Model Code 2010 Final draft**. Lausanne: International Federation for Structural Concrete (fib), 2012.

COHN, M.Z.; RIVA, Paolo. **A Comprehensive Study of the Flexural Behaviour of Structural Concrete Elements**. 1987. 49 p. Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato - Politecnico di Milano, Milão, 1987.

D'ÁVILA, Virgínia Maria Rosito. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. 2003. 259 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DESIR, Jean Marie. **Interface aço-concreto: reformulando os modelos constitutivo e numérico**. 1998. 111 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

DYBEL, Piotr; KUCHARSKA, Milena. Development of Bond Strength of Reinforcement Steel in New Generation Concretes. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, Bristol, v. 471, n. 5, 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/471/5/052058.

FARIA, Thalles Morais. **Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos**. 2017. 78 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

GALIĆ, M.; MAROVIĆ, P.; HARAPIN, A. Parametric analysis of constant-moment zone length in four point bending of reinforced concrete beams. **Materialwissenschaft und Werkstofftechnik**, Weinheim, v. 44, n. 5, p. 449–457, 2013. DOI: 10.1002/mawe.201300149.

GIURIANI, E. **L'influenza del softening, della'aderenza e degli effetti diffusivi nella fessurazione di una trave in cemento armato**. Bérgamo: Politecnico di Milano, Studi e Ricerche, v. 1, Italcementi S.p.^a, Bergamo Ed., 1979.

GIURIANI, E. Experimental Investigation on the Bond-Slip of Deformed bars in Concrete. **In: Colloquium: Advanced Mechanics of R.C.**, Delft, Holanda, 1981.

GIURIANI, E. **Studio della Redistribuzione dei momenti provocata della Fissurazione nelle Travi continue di C.A.** Bérgamo: Politecnico di Milano, Studi e Ricerche, v. 4, Italcementi S.p.^a, 1982. v. 4

GOORANORIMI, Omid; SUARIS, Wimal; NANNI, Antonio. A model for the bond-slip of a GFRP bar in concrete. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 146, p. 34–42, 2017. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.05.034.

GRASSL, Peter; JOHANSSON, Morgan; LEPPÄNEN, Joosef. On the numerical modelling of bond for the failure analysis of reinforced concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdam, v. 189, p. 13–26, 2018. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.10.008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.008>.

HLAVIČKA, Éva Lubl6y Viktor. Bond after fire. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 132, p. 210–218, 2017. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.11.131.

HO, Siu Chun M.; REN, Liang; LABIB, Emad; KAPADIA, Aadit; MO, Yi-lung. Inference of

bond slip in prestressed tendons in concrete bridge girders. **Structural Control and Health Monitoring**, Nova Jersey, 2014. DOI: 10.1002/stc.

HUO, Linsheng; CHENG, Hao; KONG, Qingzhao. Bond-Slip Monitoring of Concrete Structures Using. **Sensors**, Basileia, v. 19, n. 5, 2019. DOI: 10.3390/s19051231.

JAHANMOHAMMADI, Atefeh; SOLTANI, Masoud. Toward combined local-average stress field modeling of reinforced concrete. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 111, p. 394–410, 2016. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.11.035.

JAYASINGHE, Thamarie. **Prediction of Time-dependent Deformations in Post-tensioned Concrete Suspended Beams and Slabs in Tall Buildings**. 2011. 277 p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Escola em Engenharia Civil, Ambiental e Química, RMIT University, Melbourne, 2011.

KUCHARSKA, Milena; JASKOWSKA-LEMANSKA, Justyna. Properties of a bond between the steel reinforcement and the new generation concretes - a review. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, Bristol, v. 603, n. 4, 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/603/4/042057.

KWAK, Hyo-Gyoung; KIM, Jin-Kook. Implementation of bond-slip effect in analyses of RC frames under cyclic loads using layered section method. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 28, n. 12, p. 1715–1727, 2006. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.03.003.

KWAK, Hyo-Gyoung; KIM, Sun-Pil. Bond-slip behavior under monotonic uniaxial loads. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 23, n. 3, p. 298–309, 2001. DOI: 10.1016/S0141-0296(00)00008-0.

KWAK, Hyo-Gyoung; KWON, Yangsu. Nonlinear analysis of containment structure based on modified tendon model. **Annals of Nuclear Energy**, Amsterdam, v. 92, p. 113–126, 2016. DOI: 10.1016/j.anucene.2016.01.040. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0306454916300500>.

LEE, Chadon; LEE, Songhee; SHIN, Sangmin. Modeling of Transfer Region with Local Bond-Slip Relationships. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, v. 114, n. 1, p. 187–197, 2016. DOI: 10.14359/51689253. Disponível em: <http://www.concrete.org/Publications/InternationalConcreteAbstractsPortal.aspx?m=details&i=51689253>.

LIN, Xiaoshan; ZHANG, Y. X. Evaluation of bond stress-slip models for FRP reinforcing bars in concrete. **Composite Structures**, Amsterdam, v. 107, n. 1, p. 131–141, 2014. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.07.037.

LUKE, Washington Gultenberg Moura. **Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência**. 2015. 148 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

MÁCA, P.; PANTEKI, E.; CURBACH, M. Bond stress-slip behaviour of concrete and steel under high-loading rates. **International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements**, Ashurst, v. 4, n. 3, p. 221–230, 2016. DOI: 10.2495/CMEM-V4-N3-221-230.

MACHADO, Marcelo Augusto Silva; TRAUTWEIN, Leandro Mouta; CAMPOS FILHO, Américo; BITTENCOURT, Túlio Nogueira. Modelos de Fissuração em Estruturas de Concreto Armado Via Método dos Elementos Finitos. **Cilamce 2007**, São Paulo, v. 1, p. 16, 2007.

MANFREDI, Gaetano; PECCE, Marisa. A refined R.C. beam element including bond–slip relationship for the analysis of continuous beams. **Computers & Structures**, Amsterdam, v. 69, n. 1, p. 53–62, 1998. DOI: 10.1016/S0045-7949(98)00078-9.

MARINS NETO, Joaquim. **Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto**. 2007. 192 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

MARTÍ-VARGAS, J. R.; HALE, W. M.; GARCÍA-TAENGUA, E.; SERNA, P. Slip distribution model along the anchorage length of prestressing strands. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 59, p. 674–685, 2014. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.11.032.

MARTINS, Paulo Chaves Rezende. **Análise não-linear de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado**. 1979. 177 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1979.

MARTINS, Paulo Chaves Rezende. **Modelisation du comportement jusqu’à la rupture en flexion de poutres en beton a precontrainte exterieure ou mixte**. 1989. 367 p. Tese (Doutorado em Mecânica dos Solos e Estruturas) - Escola Central de Paris, França, Paris, 1989.

MOURA, M. W.; REAL, M. V; LORIGGIO, D. D. Ultimate flexural strength of prestressed concrete beams : validation and model error evaluation. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 11, n. 2, 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1983-41952018000200006>.

OLIVEIRA, R. S.; RAMALHO, M. A.; CORRÊA, M. R. S. A layered finite element for reinforced concrete beams with bond – slip effects. **Cement & Concrete Composites**, Amsterdam, v. 30, p. 245–252, 2008. DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2007.09.007.

PELLEGRINO, Carlo; ZANINI, Mariano Angelo; FALESCHINI, Flora; CORAIN, Livio. Predicting bond formulations for prestressed concrete elements. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 97, n. 10, p. 105–117, 2015. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.04.013.

ROSALES, Yadian Menéndez. **Análise numérica-experimental do comportamento da aderência aço-concreto**. 2016. 119 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

SARHAN, Mazin M.; HADI, Muhammad N. S.; TEH, Lip H. Bond behaviour of steel plate reinforced concrete beams. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 189, p. 751–756, 2018. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.09.024. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.09.024>.

SHEN, Dejian; SHI, Xiang; ZHANG, Hui; DUAN, Xiaofang; JIANG, Guoqing. Experimental study of early-age bond behavior between high strength concrete and steel bars using a pull-out test. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 113, p. 653–663, 2016. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.03.094. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.03.094>.

SILVA, Patrícia Cândida Souza. **Resistência à tração de diferentes tipos de ancoragens embutidas em elementos de concreto armado**. 2018. 128 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SOLTANI, Masoud; AN, Xuehui; MAEKAWA, Koichi. Computational model for post cracking analysis of RC membrane elements based on local stress-strain characteristics. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 25, n. 8, p. 993–1007, 2003. DOI: 10.1016/S0141-0296(03)00042-7.

STURM, Alexander B.; VISINTIN, Phillip. Local bond slip behavior of steel reinforcing bars embedded in ultra high performance fibre reinforced concrete. **Structural Concrete**, Lausanne, n. May 2018, p. 108–122, 2019. DOI: 10.1002/suco.201700149.

TAVARES, Maria Elizabeth Nóbrega. **Estudo experimental de vigas de concreto protendido - influência da variação da aderência aço-concreto na flexão**. 2000. 297 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2000.

VÁZQUEZ-HERRERO, Cristina; MARTÍNEZ-LAGE 1, Isabel; MARTÍNEZ-ABELLA, Fernando. Transfer length in pretensioned prestressed concrete structures composed of high performance lightweight and normal-weight concrete. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 56, p. 983–992, 2013. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.06.020.

VILANOVA, I.; TORRES, L.; BAENA, M.; LLORENS, M. Numerical simulation of bond-slip interface and tension stiffening in GFRP RC tensile elements. **Composite Structures**, Amsterdam, v. 153, p. 504–513, 2016. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.048.

WALRAVEN, Joost C. **fib Bulletin 1: Textbook on behavior, design and performance**. Vol. 1 ed. Lausanne: International Federation for Structural Concrete, 1999.

WANG, Taijun; HSU, Thomas T. C. Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models. **Computers & Structures**, Amsterdam, v. 79, n. 32, p. 2781–2791, 2001. DOI: 10.1016/S0045-7949(01)00157-2.

WANG, Zhuo Han; LI, Lei; ZHANG, Yi Xin; ZHENG, Shan Suo. Reinforcement model considering slip effect. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 198, n. August, p. 109493, 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109493. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109493>.

WOLENSKI, A. R. V.; CASTRO, S. S.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. S.; SILVA, B. V.; BARBOSA, M. P. Experimental and finite element analysis of bond-slip in reinforced concrete. **IBRACON Structures and Materials Journal**, São Paulo, v. 8, n. 6, p. 787–799, 2015. DOI: 10.1590/s1983-41952015000600004.

WU, Yuan-Zhou; LV, Heng-Lin; ZHOU, Shu-Chun; FANG, Zhong-Nian. Degradation model of bond performance between deteriorated concrete and corroded deformed steel bars. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 119, p. 89–95, 2016. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.04.061. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061816306080>.

XAVIER, J.; PEREIRA, R.; PEDROSO, L.; MARTINS, P. Implementation of Numerical Solutions for Bond-Slip Effect Applied in Reinforced Concrete Beams considering the Variable Bond Model. *In*: XXXIX IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2018) 2018, Paris/Compïenha, França. ISBN: 978-2-9565961-0-3. **Anais [...]**. Paris/Compïenha, França. ISBN: 978-2-9565961-0-3 p. 442–445.

XAVIER, J. P. M.; PEREIRA, R. L.; PEDROSO, L. J.; MARTINS, P. C. R. Nonlinear analysis of reinforced concrete beams submitted to bending moment gradients considering the variable adhesion model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and**

Engineering, Berlin, v. 42, p. 29–40, 2020. DOI: 10.1007/s40430-019-2115-y. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-019-2115-y>.

XU, Gang; XIANG, Jian; WANG, Qing; XIANG, Xuan; ZHANG, Ya li. Calculation of relative slip between steel bars and concrete. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 202, p. 537–545, 2019. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.12.208. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.12.208>.

YAN, Fei; LIN, Zhibin; YANG, Mijia. Bond mechanism and bond strength of GFRP bars to concrete: A review. **Composites Part B: Engineering**, Amsterdam, v. 98, p. 56–69, 2016. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.04.068.

YANG, Haifeng; LAN, Wenwu; QIN, Yinghong; WANG, Jiang. Evaluation of bond performance between deformed bars and recycled aggregate concrete after high temperatures exposure. **Construction and Building Materials**, Amsterdam, v. 112, p. 885–891, 2016. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.220. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.220>.

YOO, Doo Yeol; SHIN, Hyun Oh. **Bond performance of steel rebar embedded in 80–180 MPa ultra-high-strength concrete**. Amsterdam: Elsevier Ltd, 2018. v. 93 DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2018.07.017.

ZHAN, Yulin; ZHANG, Lei; ZHAO, Renda; ZHANG, Qiang; DUAN, Zengqiang; HE, Jiale. Theoretical and Experimental Study on the Bond – Slip Relationship in Prestressed CFST Beams. **International Journal of Civil Engineering**, Berlin, v. 17, n. 5, p. 629–643, 2018. DOI: 10.1007/s40999-018-0344-6. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s40999-018-0344-6>.

ZHANG, Wei. Prediction of the Bond – Slip Law Between Externally Bonded Concrete Substrates and CFRP Plates Under Fatigue Loading. **International Journal of Civil Engineering**, Berlin, v. 16, n. 9, p. 1085–1096, 2017. DOI: 10.1007/s40999-017-0258-8. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s40999-017-0258-8>.

ZHAO, WEIPING; ZHU, Binrong. Theoretical model for the bond – slip relationship between ribbed steel bars and confined concrete. **Structural Concrete**, Lausanne, v. 19, n. 2, p. 548–558, 2018. DOI: 10.1002/suco.201700008.