



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**A Estatística como auxílio na  
seleção de carteiras de investimento  
- uma aplicação por meio do  
modelo de Markowitz**

Delmário Prates Alves

Brasília, 2020

Delmário Prates Alves

**A Estatística como auxílio na seleção de carteiras  
de investimento - uma aplicação por meio do  
modelo de Markowitz**

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Matemática da Universidade de Brasília, como  
parte dos requisitos do Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Brasília

2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AA474e Alves, Delmário Prates  
A Estatística como auxílio na seleção de carteiras de  
investimento - uma aplicação por meio do modelo de Markowitz  
/ Delmário Prates Alves; orientador Rui Seimetz. --  
Brasília, 2020.  
83 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Estatística. 2. Markowitz. 3. Teoria do Portólio. 4.  
Fronteira Eficiente. 5. Ensino. I. Seimetz, Rui, orient.  
II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# A Estatística como auxílio na seleção de carteiras de investimento - uma aplicação por meio do modelo de Markowitz

por

DELMÁRIO PRATES ALVES

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,  
como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 17 de junho de 2020.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Rui Seimetz (Orientador)

---

Prof. Jhames Matos Sampaio – EST/UnB

---

Prof. José Eduardo Castilho - FUP/UnB

# Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus pais, Mário (in memoriam) e Delorme, pilares da minha formação como ser humano. Sem eles nada seria possível.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter abençoado o meu esforço e ter me dado força e coragem para alcançar esta que é mais que uma conquista, é a realização de um sonho.

Gostaria também de agradecer à minha mãe Delorme, à minha irmã Delzimar e à minha namorada Maicira, por todo o incentivo e apoio que me deram para chegar até aqui. Obrigado ainda pela paciência e compreensão pelos momentos que tive de abdicar de estar ao lado de vocês durante esta jornada.

Agradeço também ao professor Rui Seimetz, por ter me aceitado como orientando deste mestrado e por toda a paciência, disponibilidade, empenho e ideias com que sempre me orientou neste trabalho. Também aos professores Jhames Matos e José Castilho, por terem aceitado compor a minha Comissão Examinadora e pelas sugestões e feedback valiosos.

Ao professor Vinícius, pela disponibilidade e atenção em esclarecer todas as dúvidas, e a todos os professores pela sabedoria repassada ao longo deste mestrado.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT 2018, pelos momentos maravilhosos e descontraídos, união e incentivo que tornaram esta jornada menos árdua.

Aos meus amigos e colegas da CAIXA, em especial à Ana Paula, pelas dicas e entusiasmo com que sempre me incentivou, e aos meus ex-chefes Gustavo Zillig e Élcio, pelo apoio nos momentos que precisei me ausentar para me dedicar a este mestrado. Ainda ao Élcio, pelo incentivo e dicas valiosos.

Enfim, neste importante momento, agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para o sucesso deste trabalho e alcance desta conquista.

*“A persistência é o caminho do êxito.”*

**Charles Chaplin**

*“Todas as vitórias ocultam uma abdicação.”*

**Simone de Beauvoir**

*“Ama-se mais o que se conquista com esforço.”*

**Benjamin Disraeli**

# Resumo

Todo investimento financeiro tem riscos. E quanto maior for a taxa de retorno do investimento, em geral, maiores são os riscos que o investimento embute. Qualquer tipo de investidor que deseja buscar resultados consistentes precisa lançar mão de ferramentas que possibilitem quantificar as influências e realizar projeções ou estimativas quanto à rentabilidade de seus ativos no futuro. O que poucos sabem é que a Estatística é muito utilizada como instrumento de auxílio ao investidor. Este estudo tem como objetivo geral mostrar a importância da Estatística na decisão de investimento, por meio da aplicação do modelo proposto por Markowitz, apresentando-o como uma opção de ferramenta de apoio, ao investidor iniciante, na seleção de uma carteira de ativos. Para este objetivo foi realizada uma pesquisa bibliográfica, onde foram apresentados os conceitos teóricos acerca do modelo e os principais conceitos estatísticos envolvidos. Posteriormente se fez uma aplicação prática do modelo, utilizando-se de dados de fundos de investimento de um banco brasileiro. Ao final do trabalho, discorreu-se sobre o ensino da Estatística na Educação Básica, de como ele deve ser feito de uma forma mais prática e conectada com a realidade.

**Palavras-chave:** Estatística. Ensino. Markowitz. Teoria do Portfólio. Fronteira Eficiente. Diversificação.



# Abstract

Every financial investment has risks. And the higher the rate of return on the investment, in general, the greater the risks that the investment entails. Any type of investor who wants to seek consistent results needs to use tools that make it possible to quantify influences and make projections or estimates regarding the profitability of their assets in the future. What few know is that Statistics is widely used as an aid to investors. This study has the general objective of showing the importance of Statistics in the investment decision, through the application of the model proposed by Markowitz, presenting it as an option of support tool, for the beginning investor, in the selection of an asset portfolio. For this purpose, a bibliographic research was carried out, where the theoretical concepts about the model and the main statistical concepts involved were presented. Subsequently, a practical application of the model was made, using investment fund data from a Brazilian bank. At the end of the work, the teaching of Statistics in Basic Education was discussed, how it should be done in a more practical way and connected with reality.

**Keywords:** Statistic. Teaching. Markowitz. Portfolio Theory. Efficient Frontier. Diversification.

# Lista de Figuras

1.1	Exemplos de coeficientes de correlação diferentes . . . . .	25
1.2	Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades . . . . .	26
1.3	Harry M. Markowitz . . . . .	29
1.4	Gráfico da fronteira eficiente dos ativos de risco A e B . . . . .	35
1.5	Gerenciamento de riscos: evite ter todos os seus ovos em uma cesta . . .	36
1.6	Efeito da Diversificação . . . . .	37
1.7	Fronteira eficiente dos ativos de risco . . . . .	37
1.8	Risco da carteira em função do número de ativos na carteira - Risco exclusivo (diversificável) e o risco de mercado (não diversificável) . . . .	38
1.9	O coeficiente de correlação e a redução do risco . . . . .	39
3.1	Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos dois ativos da carteira $p$	46
3.2	Solve aplicado para minimização do risco da carteira $p$ . . . . .	48
3.3	Variância da carteira $p$ minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo . . . . .	48
3.4	Coefficientes de variação da carteira $p$ e dos dois ativos . . . . .	49
3.5	Probabilidade de perdas para a carteira $p$ e dos dois ativos . . . . .	50
3.6	Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos quatro ativos da carteira $q_1$ . . . . .	51
3.7	Variância da carteira $q_1$ minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo . . . . .	52
3.8	Coefficiente de Variação e a Probabilidade de perdas para a carteira $q_1$ e dos quatro ativos . . . . .	53
3.9	Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos quatro ativos fortemente correlacionados da carteira $t$ . . . . .	54
3.10	Variância da carteira $t$ minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo . . . . .	55

3.11	Coefficiente de Variação e a Probabilidade de perdas para a carteira $t$ e dos quatro ativos . . . . .	56
3.12	Carteira $q_2$ com variância minimizada para um retorno mínimo de 1,85% e seus respectivos valores de alocação em cada ativo . . . . .	57
3.13	Gráficos dos conjuntos de carteiras formados pelos ativos $A$ e $B$ e pelos ativos $A, B, C$ e $D$ . . . . .	59
3.14	Gráficos dos conjuntos de carteiras formados pelos ativos $A, B, C$ e $D$ e pelos ativos $E, F, G$ e $H$ . . . . .	61

# Lista de Tabelas

1.1	Média e variância das rentabilidades de dois ativos . . . . .	34
3.1	Quadro resumo dos resultados das carteiras . . . . .	58

# Lista de Símbolos

+	Adição
-	Subtração
×	Multiplicação
/	Divisão
=	Igual
≠	Diferente
%	Por cento
∈	Pertence
σ	Sigma
α	Alfa
ε	Epsilon
∑	Sigma (Somatório)
ρ	Rô
Ω	Ômega (maiúsculo)
ω	Ômega (minúsculo)
μ	Mu
π	Pi (3,1415..)
e	Número neperiano (2,7178...)
∞	Infinito
∫	Integral
≤	Menor ou igual que
≥	Maior ou igual que
<	Menor que
>	Maior que
□	Fim da demonstração
√	Raiz
R\$	Reais (moeda)
a.m.	Ao mês

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1 REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>17</b>
1.1 O risco e a decisão de investir . . . . .	17
1.2 Tópicos de Estatística . . . . .	18
1.2.1 Variáveis aleatórias . . . . .	19
1.2.2 Valor Esperado ou Esperança Matemática . . . . .	20
1.2.3 Variância e Covariância . . . . .	22
1.2.4 Coeficiente de Correlação . . . . .	24
1.2.5 Coeficiente de Variação . . . . .	24
1.2.6 A distribuição normal e suas implicações para o desvio padrão .	25
1.3 A Teoria Moderna do Portfólio - o modelo de Markowitz . . . . .	26
1.3.1 Premissas . . . . .	29
1.3.2 Retorno e risco para carteiras . . . . .	30
1.3.3 Fronteira Eficiente . . . . .	32
1.3.4 O Efeito da Diversificação . . . . .	36
1.3.5 A distribuição normal na prática de investimentos . . . . .	40
<b>2 METODOLOGIA</b>	<b>41</b>
2.1 Metodologia de pesquisa . . . . .	41
2.2 Coleta de dados . . . . .	42
2.3 Aplicação do modelo . . . . .	42
<b>3 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>45</b>
3.1 Aplicação do modelo em carteiras de 2 e de 4 ativos e o impacto da diversificação na redução do risco . . . . .	45
3.1.1 Aplicação do modelo em carteiras de 2 ativos . . . . .	45
3.1.2 Aplicação do modelo em carteiras de 4 ativos . . . . .	50

3.2	Discussão e Análise geral dos Resultados . . . . .	57
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO DE ESTATÍSTICA E SUGESTÕES DE ATIVIDADES</b>	<b>64</b>
4.1	O Ensino de Estatística . . . . .	64
4.2	Sugestões de atividades . . . . .	67
4.2.1	Plano de Aula 1 . . . . .	67
4.2.2	Plano de Aula 2 . . . . .	70
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>76</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Informações Gerais dos Fundos</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Aspecto geral da planilha Excel</b>	<b>80</b>
<b>C</b>	<b>Série histórica de retornos mensais dos ativos A e B da carteira <math>p</math></b>	<b>81</b>
<b>D</b>	<b>Série histórica de retornos mensais dos ativos A, B, C e D das carteiras <math>q_1</math> e <math>q_2</math></b>	<b>82</b>
<b>E</b>	<b>Série histórica de retornos mensais dos ativos E, F, G e H da carteira <math>t</math></b>	<b>83</b>

# INTRODUÇÃO

Todo investimento financeiro tem riscos. Em geral, quanto maior a taxa de retorno de um investimento, maiores são os riscos a ele relacionados. Para qualquer investidor é normal não querer correr o risco de perder tudo por causa de uma decisão errada na hora de investir. Porém, a grande maioria dos clientes dos bancos é composta de pequenos investidores, os quais nem sempre possuem conhecimentos ou recursos para analisar com profundidade os ativos em que pretendem investir.

Qualquer tipo de investidor que deseja buscar resultados consistentes nesse mercado precisa lançar mão de ferramentas que possibilitem quantificar as influências e realizar projeções ou estimativas quanto à rentabilidade de seus ativos no futuro.

O que poucos sabem é que a Matemática, mais especificamente a Estatística, é muito utilizada como instrumento de auxílio ao investidor. O uso da estatística é de suma importância no mercado de capitais, propiciando bases sólidas para o desenvolvimento de técnicas financeiras (VIRGILLITO, 2017). Os investidores utilizam medidas e modelos estatísticos na busca pela minimização dos riscos em seus portfólios ou carteiras de investimentos.

Harry M. Markowitz ganhou o prêmio Nobel de Economia em 1990 pelo desenvolvimento da teoria de escolha de portfólio, como um reconhecimento do trabalho desenvolvido em 1952, publicado no artigo “Portfolio Selection” (MARKOWITZ, 1952) e posteriormente, de forma mais extensa, no livro “Portfolio Selection: eficiente Diversification”. Este artigo publicado foi o primeiro passo para a moderna teoria de portfólio e análise de investimentos como é chamado atualmente, o conjunto de alguma das mais utilizadas técnicas que permeiam as decisões de investimentos (SCHIROKY, 2006). Pinheiro (2006) afirma que:

“Desde que Harry Markowitz foi laureado com o Nobel em função da sua teoria do portfólio, no início dos anos 50, a construção de portfólios com base na média-variância tem sido popular no mundo acadêmico, auxiliando os agentes econômicos no mercado. ”

A Teoria Moderna do Portfólio (TMP) é um modelo matemático, apoiado em grande



parte na Estatística, de construção de carteiras de investimento que otimiza a alocação dos ativos para obter o melhor retorno possível para um dado nível de risco. A ideia presente nesta teoria é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfólio, também chamado de carteira. E também como precificar um investimento de alto risco.

A metodologia proposta por Markowitz para seleção de portfólio apresenta-se como uma boa alternativa na obtenção de uma distribuição de ativos com o objetivo de reduzir riscos e aumentar retornos, podendo ser uma opção ao investidor iniciante como ferramenta para a otimização da sua carteira de investimentos.

Dessa forma, este estudo tem como objetivo geral mostrar a importância da Estatística na decisão de investimento, por meio da aplicação do modelo proposto por Markowitz, apresentando-o como uma opção de ferramenta de apoio, ao investidor iniciante, na seleção de uma carteira de ativos. Como objetivos específicos, temos:

- Apresentar os tópicos de Estatística que permeiam a teoria de Markowitz;
- Apresentar os conceitos e o processo envolvidos no cálculo do risco-retorno e na seleção das carteiras;
- Mostrar a aplicação dos conceitos apresentados, relativos ao modelo de Markowitz, com base em dados históricos reais de fundos de investimento de um banco brasileiro, com o auxílio do software *MS Excel*.

Para este objetivo, o presente trabalho está estruturado da seguinte forma: inicialmente são apresentados os principais conceitos estatísticos que permeiam a teoria de Markowitz, bem como são apresentadas as definições, termos em finanças e os métodos matemáticos utilizados na otimização das carteiras para entendê-la; depois, é apresentada a metodologia proposta por Markowitz, mostrando como esta se utiliza da Estatística na seleção de carteiras de ativos; e, por fim, é apresentada a aplicação dos conceitos apresentados, por meio deste modelo, utilizando-se de dados reais de fundos de investimento de um banco brasileiro.

Ainda, ao final do presente trabalho, discorre-se acerca do ensino de Estatística na Educação Básica, discutindo a sua importância e utilização no mercado de trabalho.

# Capítulo 1

## REFERENCIAL TEÓRICO

### 1.1 O risco e a decisão de investir

Para Bodie, Kane e Marcus (2014), investimento é o comprometimento de dinheiro ou de outros recursos no presente na expectativa de colher benefícios futuros. Por exemplo, uma pessoa pode adquirir uma cota de ações prevendo que os futuros resultados monetários dessas ações justificarão tanto o tempo durante o qual o seu dinheiro ficou retido quanto o risco de investimento.

Assim sendo, investe-se para obter um retorno, ou seja, uma boa taxa de retorno. Em linguagem corrente, fala-se em lucro. Investir consiste, então, em deixar de gastar dinheiro agora em um artigo de consumo para gastá-lo em algo que se espera que irá produzir um bom retorno (rentabilidade) no futuro. O fato do futuro ser incerto torna a tomada de decisão bem mais complexa, pois as pessoas parecem, no mínimo, temer a incerteza. A incerteza pode causar nervosismo, medo e até pânico. E as decisões tomadas nestas circunstâncias estão longe de serem lógicas ou racionais, conforme citado por Casarotto e Kopittke (2010).

Tradicionalmente, as situações são consideradas de incerteza ou de risco que, num primeiro momento, podem parecer sinônimos. No entanto, o economista inglês Knight (1972), citado por Bruni (2013), faz uma diferenciação de ambas:

- Risco: quando as variáveis se encontram sujeitas a uma distribuição de probabilidades conhecida (ou que pode ser calculada com algum grau de precisão). Em outras palavras: representa uma incerteza que pode ser medida.
- Incerteza: quando esta distribuição de probabilidades não pode ser avaliada (envolve situações de ocorrência não repetitiva). Em outras palavras: consiste em um risco que não pode ser avaliado.

Note que a conversão de uma situação sob incerteza em uma situação sob risco demanda a existência de informações adicionais e que façam referência às probabilidades

associadas a cada resultado.

Segundo Bruni (2013), em situações de risco, parâmetros associados aos resultados podem ser calculados, como o valor esperado ou a dispersão possível para os resultados, representada por meio de Estatísticas como a variância ou o desvio-padrão, o que, em função da ausência de probabilidades, não é possível em situações de incerteza.

Daí vemos onde a Estatística se encaixa, tornando-se uma ferramenta útil na tomada de decisão do investidor.

Para Sá (1999), de acordo com a moderna teoria de finanças, o investidor no processo de seleção das alternativas de investimento leva em consideração três parâmetros:

- Retorno esperado do investimento (rentabilidade no período)
- Risco do investimento
- Liquidez do investimento (facilidade de ser convertido em dinheiro)

Em função desses três parâmetros o investidor procura maximizar o retorno para um dado nível de risco e minimizar o risco para um dado nível de retorno.

Conforme dito anteriormente, investidor não quer correr riscos. E a noção de risco está sempre associada à possibilidade de perda de alguma coisa.

A fim de minimizar os riscos e maximizar os retornos, na decisão de investir, o investidor precisa lançar mão de ferramentas que o ajudem nessa tarefa. Nisso, a Estatística surge como uma importante ferramenta de apoio à tomada de decisão, pois propicia bases sólidas para o desenvolvimento de técnicas financeiras.

Segundo Elton, Gruber e Brown (2012), a existência de risco significa que o investidor não pode mais associar um único número ou resultado ao investimento em qualquer ativo. O resultado precisa ser descrito por um conjunto de valores e suas probabilidades de ocorrência, ou seja, por uma distribuição de frequências ou de retornos. Conforme citado, os dois atributos mais frequentemente empregados de tal distribuição são uma medida de tendência central, chamada de retorno esperado, e uma medida de risco ou dispersão em torno da média, chamada desvio-padrão. Os investidores em geral não aplicam em um único ativo; eles investem em grupos ou carteiras de ativos. Isso será tratado mais adiante. Antes de aprofundarmos nesse assunto, nos próximos tópicos, apresentaremos os conceitos estatísticos que servirão de base para mostrarmos a sua aplicabilidade como ferramenta de apoio à decisão de investir, mais especificamente, o seu uso na Teoria Moderna do Portfólio.

## 1.2 Tópicos de Estatística

Para Virgillito (2017), a Estatística pode ser considerada como a ciência que se preocupa com a organização, análise e a interpretação de dados experimentais, podendo

ser dividida em duas partes: a Estatística Descritiva e a Indutiva. A primeira, se preocupa com a organização e a descrição dos dados coletados. Já a segunda, cuida da análise e da interpretação desses dados.

Segundo Salsburg (2009), citado por Inácio (2010), durante o século XX, a Estatística revolucionou a ciência por meio do fornecimento de modelos úteis que sofisticaram o processo de pesquisa na direção de melhores parâmetros de investigação, permitindo orientar a tomada de decisões nas políticas socioeconômicas. Assim, o objetivo da Estatística, segundo Salsburg (2009), é analisar os dados disponíveis e que estão sujeitos a certo grau de incerteza no planejamento e obtenção de resultados.

Nesse sentido, para Inácio (2010), a Estatística na atualidade tem contribuído de forma significativa para o processo de tomada de decisão, pois grande parte do que se faz se baseia em métodos quantitativos, e a Estatística é uma dessas áreas.

A Estatística tem grande aplicação em todos os ramos do conhecimento humano, como Economia, Biologia, Ciências Sociais, dentre outras. Nessa Seção vamos apresentar alguns tópicos de estatística, muito utilizados na economia e em outros ramos do conhecimento, e cuja aplicação será exemplificada neste trabalho.

### 1.2.1 Variáveis aleatórias

Segundo Martins (2019), conforme é visto no estudo de probabilidades, o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é o espaço amostral. Os elementos desse conjunto podem ser numéricos ou não. Como em muitas situações experimentais em que precisamos atribuir um número real  $\omega$  a todo elemento do espaço amostral, vamos definir o conceito de variável aleatória.

**Definição 1.1 (Variável aleatória)** *Seja  $\epsilon$  um experimento aleatório e  $\Omega$  o espaço amostral associado ao experimento. Uma função  $X$  que associe a cada elemento  $\omega \in \Omega$  um número real  $X(\omega)$  é denominada variável aleatória (v.a.).*

Observar que, apesar do nome, variável aleatória é uma função cujo domínio é o conjunto  $\Omega$ , e o contradomínio o conjunto de todos os valores possíveis de  $X$ , os  $X(\omega)$ .

À luz da definição de variável aleatória, apresentamos os conceitos de variável aleatória discreta e contínua, apresentados por por Morettin e Bussab (2017).

**Definição 1.2 (Variável aleatória discreta)** *Uma função  $X$ , definida no espaço amostral  $\Omega$  e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta.*

**Definição 1.3 (Função de probabilidade de uma v.a. discreta)** *Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta  $X$ , que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , a função*

$\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \dots\}$ , que a cada valor de  $x_i$  associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$$

**Definição 1.4 (Variável aleatória contínua)** Uma função  $X$ , definida sobre o espaço amostral  $\Omega$  e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua.

**Definição 1.5 (Função de probabilidade de uma v.a. contínua)** Qualquer função  $f(x)$ , não negativa, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

define uma v.a. contínua  $X$ , ou seja, cria um modelo teórico para as frequências relativas de uma v.a. contínua. A área compreendida entre dois valores,  $a$  e  $b$ , da abscissa  $x$ , sob a curva representativa de  $f(x)$ , dá a propriedade (proporção teórica) da variável pertencer a um intervalo limitado pelos dois valores. Usando o conceito da integral, podemos escrever

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

A seguir apresentaremos alguns tópicos de Estatística que serão essenciais na abordagem da Teoria Moderna do Portfólio.

## 1.2.2 Valor Esperado ou Esperança Matemática

Começemos a definição dada por Morettin e Bussab (2017):

**Definição 1.6 (Valor Esperado)** Dada a v.a.  $X$  discreta, assumindo os valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , chamamos valor esperado ou esperança matemática de  $X$  ao valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

sendo que a soma “infinita” dessa fórmula deve ser “convergente”. Para o caso de uma v.a. contínua, como a função  $f(x)$  é sempre não negativa, podemos escrever a esperança como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Em outras palavras, conforme Carvalho e Morgado (2015), o valor esperado de um resultado aleatório numérico é definido como sendo a média ponderada de seus possíveis

valores em que os pesos são as respectivas probabilidades. Isto é, se os possíveis valores para o resultado são  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , seu valor esperado é  $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$  (note que a soma de todos os pesos é igual a 1). Ainda, se todos os valores possíveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forem equiprováveis, ou seja, tenham a mesma probabilidade de ocorrer,  $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  representa a média aritmética simples dos  $n$  possíveis valores.

**Exemplo 1.1** *Suponha que determinado investidor opte por investir em três opções de investimento: investimento A, com probabilidade de 0,2 de um retorno de 8%; investimento B, com probabilidade de 0,3 para um retorno de 6%; e investimento C, com probabilidade de 0,5 para um retorno de 2%. Neste caso, o valor esperado de retorno desse investimento seria*

$$E(x) = 0,2 \times 8 + 0,3 \times 6 + 0,5 \times 2 = 4,4\%.$$

Em um modelo probabilístico adequado, a probabilidade de cada resultado deve aproximar a frequência (após um grande número de realizações do experimento aleatório) com que cada resultado é observado. Deste modo, o valor esperado representa a média ponderada, a longo prazo, dos resultados observados.

Citamos abaixo algumas propriedades do valor esperado que serão usadas adiante.

**Propriedade 1.1** *Se  $X = c$  com  $c$  uma constante real, então  $E(X) = c$*

*Demonstração.*  $\sum_{i=1} cP(X = c) = c \sum_{i=1} P(X = c) = c \cdot 1 = c$  □

**Propriedade 1.2** *Seja  $c$  uma constante real e  $X$  uma variável aleatória. Então,*

$$E(cX) = cE(X)$$

*Demonstração.* De fato, no caso discreto temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} cx_iP(X = x_i) = c \sum_{i=1}^{\infty} x_iP(X = x_i) = cE(X).$$

De modo análogo, temos no caso contínuo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cx f(x) dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = cE(X).$$

□

**Propriedade 1.3** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias. Então,*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

*Demonstração.* A demonstração deste caso pode ser conferida em Morettin e Bussab (2017), na Seção 8.3.  $\square$

**Propriedade 1.4** *Sejam  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . Então,*

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

*Demonstração.* A demonstração deste caso decorre da propriedade anterior, sendo análoga a ela, usando o princípio da indução sobre  $n$ .  $\square$

### 1.2.3 Variância e Covariância

**Definição 1.7** *Seja  $X$  uma v.a.. A variância de  $X$ ,  $Var(X)$ , ou  $\sigma^2$  é dada por*

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2.$$

A  $Var(X)$  fornece uma medida de variabilidade ao redor da esperança, ou seja, o quanto a variável se desvia em relação a média. Assim, intuitivamente, a variância é a média do quadrado dos desvios em relação a média e, portanto, expressa em unidade quadrada de  $X$ . Para evitar unidades ao quadrado tem-se uma medida de dispersão que utiliza a unidade de  $X$  e é chamada de desvio padrão,  $\sigma$ , sendo definida como

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

O desvio-padrão, assim como a variância, é uma medida de dispersão. Quando avaliamos o desvio padrão, podemos afirmar que quanto maior for o desvio-padrão, maior será a dispersão em relação à média, quanto menor o desvio-padrão, menor o desvio em relação à média.

Muitas vezes precisamos verificar como duas variáveis aleatórias variam em conjunto e medir a correlação entre elas. Daí, veremos as definições a seguir.

**Definição 1.8** *Se  $X$  e  $Y$  são duas v.a., a covariância entre elas é definida por*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))],$$

*ou seja, o valor médio do produto dos desvios de  $X$  e  $Y$  em relação às duas respectivas médias.*

**Definição 1.9** *Quando  $Cov(X, Y) = 0$ , dizemos que as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são não correlacionadas.*

A covariância é uma medida da força da correlação linear entre duas variáveis aleatórias, sendo um parâmetro de grande importância na determinação do valor da intensidade da correlação. É uma medida que reflete o comportamento da intensidade da relação entre as variáveis. Uma covariância nula reflete a não existência de relação linear entre as duas variáveis avaliadas e quanto maior o valor da covariância, maior será o grau de relação linear entre as duas variáveis.

Segue abaixo uma propriedade apresentada por Morettin e Bussab (2017):

**Propriedade 1.5** *Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias independentes, então  $Cov(X, Y) = 0$ .*

Em outras palavras, se  $X$  e  $Y$  forem independentes (ou seja, quando a ocorrência de qualquer valor de uma delas não altera a probabilidade de ocorrência de valores da outra), então elas são não correlacionadas.

Com base nas propriedades e definições anteriores, veremos agora uma propriedade importantíssima da variância que será usada na Teoria Moderna do Portfólio. Nessa propriedade veremos que a variância da soma não necessariamente é a soma da variância.

**Propriedade 1.6** *Seja  $Y = \sum_i^n \alpha_i X_i$  uma combinação de v.a.. A variância  $\sigma_Y^2$  dessa combinação linear será dada por*

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j)$$

*Demonstração.* Com base nas propriedades e definições anteriores, vamos mostrar o cálculo da variância para o caso particular  $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ , sendo que para o caso geral isso pode ser feito aplicando indução em  $n$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E \{ [Y - E(Y)]^2 \} \\ &= E \{ [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 - E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)]^2 \} \\ &= E \{ [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 - E(\alpha_1 X_1) - E(\alpha_2 X_2)]^2 \} \\ &= E \{ [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 - \alpha_1 E(X_1) - \alpha_2 E(X_2)]^2 \} \\ &= E \{ [\alpha_1 (X_1 - E(X_1)) + \alpha_2 (X_2 - E(X_2))]^2 \} \\ &= E \{ \alpha_1^2 (X_1 - E(X_1))^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) + \alpha_2^2 (X_2 - E(X_2))^2 \} \\ &= \alpha_1^2 E(X_1 - E(X_1))^2 + \alpha_2^2 E(X_2 - E(X_2))^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) \\ &= \alpha_1^2 Var(X_1) + \alpha_2^2 Var(X_2) + 2\alpha_1 \alpha_2 Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

□



Como podemos ver, se a  $Cov(X_i, X_j) = 0$ , ou seja, não correlacionadas, a variância da soma é a própria soma das variâncias. Isto significa que quando as variáveis aleatórias são independentes, implica na covariância nula, mas não o contrário. Quando existe dependência ou quando a covariância não for nula, uma nova variável aleatória contribui com o dobro da covariância podendo aumentar ou diminuir a variabilidade do sistema.

### 1.2.4 Coeficiente de Correlação

Quando o interesse está em se estudar o grau de relacionamento entre as variáveis  $X$  e  $Y$ , isto é, uma medida de covariabilidade entre elas, à princípio, poderia ser tomada a covariância entre  $X$  e  $Y$  como uma medida para essa relação. No entanto, pela própria definição de covariância vista acima (Definição 1.8) nota-se que esta pode assumir qualquer valor real. Desse modo, torna-se difícil interpretar seus valores: o que é uma relação fraca ou forte? Uma medida alternativa para isso é o coeficiente de correlação de Pearson, cuja definição dada por Morettin e Bussab (2017) está a seguir.

**Definição 1.10** *O coeficiente de correlação entre duas variáveis  $X$  e  $Y$  é definido por*

$$\rho_{XY} = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

O coeficiente de correlação é uma medida da relação linear entre  $X$  e  $Y$ . Quando  $Corr(X, Y) = 1$  ou  $Corr(X, Y) = -1$ , existe uma correlação perfeita entre  $X$  e  $Y$ , pois  $Y = aX + b$ . Se  $Corr(X, Y) = 1, a > 0$ , e se  $Corr(X, Y) = -1, a < 0$ . O grau de associação linear entre  $X$  e  $Y$  varia à medida que  $Corr(X, Y)$  varia entre  $-1$  e  $+1$ . Vide Figura 1.1.

### 1.2.5 Coeficiente de Variação

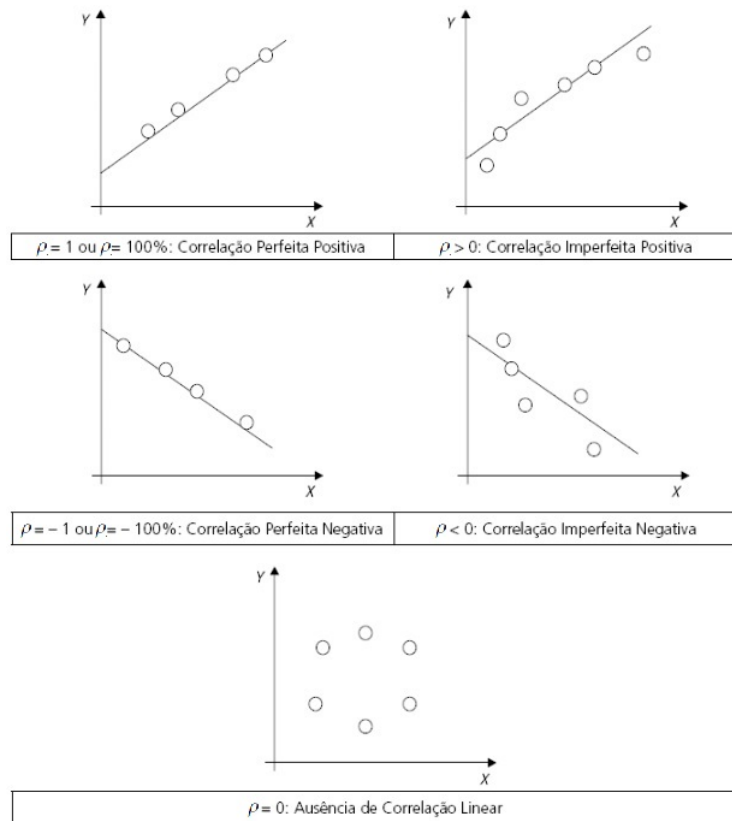
Segundo Morettin e Bussab (2017), o desvio padrão é bastante afetado pela magnitude dos dados. Se quisermos comparar a variabilidade de dois conjuntos de dados podemos usar o coeficiente de variação, cuja definição é apresentada abaixo:

**Definição 1.11** *O Coeficiente de Variação é definido como a razão entre o desvio padrão ( $\sigma$ ) e a média ( $\mu$ ) e usualmente é expresso em porcentagem:*

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} 100\%.$$

Segundo Gtiman (2004), o coeficiente de variação é uma medida relativamente útil na comparação dos riscos de ativos com retornos esperados diferentes. Quanto maior o

Figura 1.1: Exemplos de coeficientes de correlação diferentes



Fonte: Adaptado de Martins (2019)

coeficiente de variação, maior o risco. O seu uso é mais eficaz para comparar riscos de ativos, porque também considerada a magnitude relativa, ou seja, o retorno esperado dos ativos. Sua aplicação será melhor demonstrada no capítulo 3 deste trabalho.

### 1.2.6 A distribuição normal e suas implicações para o desvio padrão

Em uma distribuição de dados, a média e o desvio padrão podem se relacionar por meio de uma distribuição normal de probabilidades. Segundo Morettin e Bussab (2017), o Modelo Normal é um modelo fundamental em probabilidades e inferência. Suas origens remontam a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, daí o nome de distribuição gaussiana para tal modelo. Segue a definição dada também por Morettin e Bussab (2017):

**Definição 1.12** Dizemos que a v.a.  $X$  tem distribuição normal com parâmetros  $\mu$  (média) e  $\sigma^2$  (variância),  $-\infty < \mu < +\infty$  e  $0 < \sigma^2 < \infty$  se a sua densidade é dada

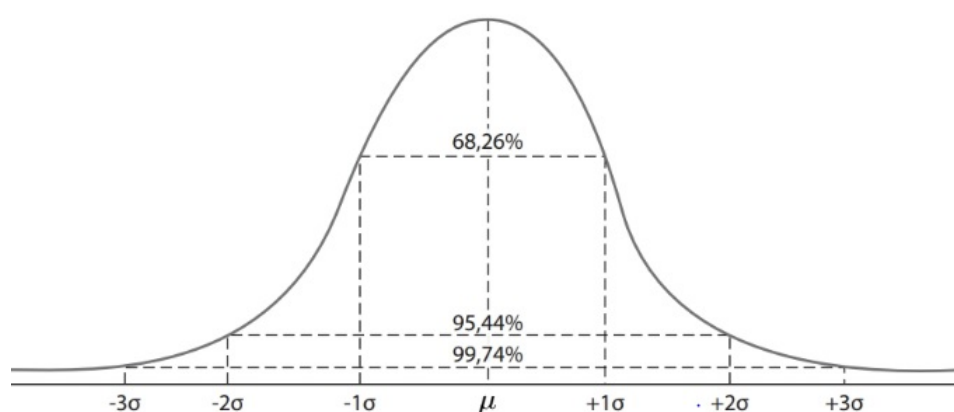
por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < \mu < +\infty,$$

com  $\pi = 3,14159$  e o número neperiano  $e = 2,7178$  aproximadamente.

Segundo Ross et al. (2015), uma amostra grande obtida de uma distribuição tem a aparência da curva em forma de sino, desenhada na Figura 1.2, simétrica ao redor da média. Ela possui a característica de ser assintótica em relação ao eixo das abscissas e sua área total, limitada pelo eixo horizontal e pela curva, é igual a 1. O gráfico da curva normal indica as áreas entre  $-1\sigma$  e  $+1\sigma$ ,  $-2\sigma$  e  $+2\sigma$  e entre  $-3\sigma$  e  $+3\sigma$ , equivalentes a 0,6826, 0,9544 e 0,9974, respectivamente. Na Estatística clássica, a distribuição normal desempenha um papel central, e o desvio padrão é a forma usual de representar a dispersão de uma distribuição normal. Para a distribuição normal, a probabilidade de se obter um retorno que esteja acima ou abaixo da média por certo valor depende apenas do desvio padrão.

Figura 1.2: Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades



Fonte: Adaptado de Bodie, Kane e Marcus (2014)

### 1.3 A Teoria Moderna do Portfólio - o modelo de Markowitz

Inicialmente vamos definir o que é ativo. Podemos definir ativos reais como aqueles que são utilizados para produzir bens e serviços, por exemplo: os terrenos, prédios, os equipamentos, etc. Em contraposição aos ativos reais, temos os ativos financeiros, que são reivindicações sobre ativos reais ou a renda gerada por eles, como, por exemplo: ações, títulos públicos e os fundos de investimento, conforme Bodie, Kane e Marcus (2014).

Enquanto os ativos reais geram renda líquida para a economia, os ativos financeiros simplesmente definem a alocação de renda ou riqueza entre os investidores. As pessoas podem escolher entre consumir a sua riqueza ou investir para o futuro. Se optarem por investir, poderão aplicar sua riqueza em ativos financeiros, comprando diversos títulos. Quando os investidores compram esses títulos das empresas, elas usam o dinheiro levantado para pagar pelos ativos reais, como equipamentos, por exemplo.

Qualquer investimento envolve riscos sobre os retornos futuros do período de manutenção do investimento e, em vários casos, esse risco é considerável. Dessa forma, antes mesmo de realizar qualquer investimento, é importante que o investidor tenha informações e conhecimentos mínimos sobre como investir.

Nesse sentido, a CVM (Comissão de Assuntos Imobiliários), que é uma entidade autárquica, em regime especial, vinculada ao Ministério da Fazenda, disponibiliza um site exclusivamente voltado à educação financeira, com informações úteis e em linguagem acessível sobre o mundo dos investimentos (CVM, 2020). Além de textos e informações sobre o mercado, é possível ler e baixar todas as publicações da CVM, como cadernos, livros, guias e informativos.

De acordo com CVM (2020), o retorno de um investimento costuma estar associado ao seu grau de risco. Expectativa de retornos melhores normalmente estão associados a um maior grau de risco. As aplicações mais conservadoras costumam apresentar uma menor rentabilidade.

Podemos considerar o risco como sendo a possibilidade de não se atingir o retorno esperado do investimento. E diversos fatores podem concorrer para isso, incluindo mudanças na política, na economia, nas regras de tributação etc. Tendo isso em mente, podemos definir os perfis de investidor que melhor reflete à propensão a riscos:

- Conservador - privilegia a segurança e faz todo o possível para diminuir o risco de perdas, para isso aceitando até uma rentabilidade menor.
- Moderado - procura um equilíbrio entre segurança e rentabilidade e está disposto a correr um certo risco para que o seu dinheiro renda um pouco mais do que as aplicações mais seguras.
- Arrojado - privilegia a rentabilidade e é capaz de correr grandes riscos para que seu investimento renda o máximo possível.

Falando em investimentos, não podemos deixar de falar em Fundo de Investimento. Podemos dizer que Fundo de Investimento é uma modalidade de investimento coletivo. É uma estrutura formal que reúne recursos financeiros de diversos investidores, para investimento conjunto. O fundo é aberto para aplicações. Isso é feito com o apoio de instituições financeiras, como os bancos, distribuidoras e corretoras, ligadas ou não ao

administrador, que oferecem o investimento aos seus clientes. É a partir desse momento que os investidores interessados aplicam seu dinheiro. Algumas classes de fundos são (CVM, 2020):

- Fundos de curto prazo: São considerados bastante conservadores quanto ao risco, sendo compatíveis com objetivos de investimento de curto prazo, pois suas cotas são menos sensíveis às oscilações das taxas de juros, devido ao curto prazo de seus títulos. São mais compatíveis com investidores perfil conservador.
- Fundos de renda fixa: Os fundos de renda fixa devem aplicar pelo menos 80% de seus recursos em ativos de renda fixa. Portanto, têm como principal fator de risco a variação da taxa de juros ou de índice de preços.
- Fundos Multimercado: Possuem política de investimento que envolve vários fatores de risco, sem o compromisso de concentração em nenhum fator em especial. São mais compatíveis com objetivos de investimento que, além de procurar diversificação, tolerem uma grande exposição a riscos na expectativa de obter uma rentabilidade mais elevada. Apesar desse tipo de fundo de investimento ser uma ótima opção para quem quer ter um bom rendimento e correr riscos moderados, os Fundos Multimercado são exemplos de investimento mais compatíveis com investidores de perfil arrojado, uma vez que há muita liberdade na composição de suas carteiras e mais exposição ao risco em busca de maior rentabilidade.
- Fundos de ações: Os fundos de ações devem investir no mínimo 67% do seu patrimônio em ações que sejam admitidas à negociação em mercado de bolsa ou balcão organizado ou em ativos relacionados. Seu principal fator de risco, portanto, é a variação do preço das ações que compõem a sua carteira. Os fundos de ações são mais compatíveis com objetivos de investimento de longo prazo, que suportem uma maior exposição a riscos em troca de uma expectativa de rentabilidade mais elevada. Os Fundos de Renda Fixa e Ações poderão ser considerados moderados ou arrojados dependendo, entre outros fatores, da política de investimento constante do Regulamento do fundo e do risco do emissor do título.

A carteira de um investidor nada mais é que um conjunto de ativos de investimento. A alocação de ativos abrange a decisão sobre a porcentagem da carteira alocada a ativos seguros em contraposição a ativos de risco. Os investidores podem investir suas economias em ativos seguros, ativos de risco ou em ambos, conforme Bodie, Kane e Marcus (2014).

Na década de 50, mais precisamente em 1952, o professor Harry Markowitz (Figura 1.3) publicou o trabalho “Portfolio Selection” que revolucionou os meios acadêmicos em relação aos estudos acerca do processo de análise de investimentos (SÁ, 1999). Este

trabalho fundamentou-se em algumas premissas racionais e estabeleceu um modelo matemático para determinação das denominadas carteiras eficientes.

Figura 1.3: Harry M. Markowitz



Fonte: Disponível em <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/markowitz/biographical/> consultado em 09.04.2020

Markowitz começa com a premissa de que o investidor necessita de informações sobre cada título em particular a fim de estimar o retorno esperado e o risco associado à distribuição dos retornos esperados, informações estas extraídas de dados históricos e de hipóteses formuladas para o futuro. A partir daí constrói-se a fronteira eficiente das carteiras e, entre estas, seleciona-se aquela que satisfaz melhor o investidor em termos de retorno esperado e risco (SÁ, 1999).

Detalharemos melhor nos próximos tópicos deste capítulo os conceitos envolvidos no modelo de Markowitz, na seleção de carterias de investimentos.

### 1.3.1 Premissas

Para Markowitz (1952), todo investimento apresenta um retorno (rentabilidade) esperado e variância de possíveis resultados em torno deste retorno esperado. Ele considerou o retorno (positivo) como desejável e a variância como indesejável. Assim, ele desenvolveu um modelo de programação quadrática capaz de maximizar os retornos e minimizar a variância dado um nível de retorno. Para montar o seu modelo de programação, Markowitz precisou adotar algumas premissas. Dentre as premissas que fundamentam todo o processo (SÁ, 1999 e MACEDO JR, 2003), podemos citar:

- Os investidores associam risco à variabilidade das taxas de retorno dos ativos em análise. Quanto mais variáveis (voláteis) essas taxas de retorno ao longo do tempo maior o risco de investimento;
- Os investidores avaliam o seu portfólio (carteira) apenas com base no valor esperado e na variância (ou desvio padrão) das taxas de retorno sobre o horizonte de

um período;

- Os investidores nunca estão satisfeitos. Quando postos a escolher entre dois portfólios de mesmo risco, sempre escolherão o de maior retorno;
- Os investidores são avessos ao risco. Quando postos a escolher entre dois portfólios de mesmo retorno, sempre escolherão o de menor risco;
- Os custos de transação e impostos são irrelevantes.

A teoria de carteiras de Markowitz objetiva determinar o conjunto de carteiras que irão compor a chamada fronteira eficiente, conjunto este onde, para determinado nível de risco, se obtém o retorno máximo. Para isso é preciso estudar como se comporta o retorno esperado e o risco de uma combinação de ativos. Assim, Markowitz utilizou-se da Estatística para desenvolver boa parte do seu modelo, onde desenvolveu uma forma de gerar estimativas para o valor esperado (retorno) das carteiras.

O risco e o retorno da carteira dependem da média e das variâncias dos ativos componentes, bem como da covariância entre seus retornos. Uma das maneiras de obter esses dados é utilizar uma análise de cenário. Uma alternativa usual para gerá-los é utilizar dados históricos. A ideia é que a variabilidade e a covariabilidade mudam lentamente ao longo do tempo. Portanto, se fizermos uma estimativa dessas Estatísticas com base em dados recentes, ela nos oferecerá previsões úteis para um futuro próximo, conforme Bodie, Kane e Marcus (2014).

### 1.3.2 Retorno e risco para carteiras

Suponhamos que um investidor possua estimativas dos retornos esperados e dos desvios padrão de ativos individuais e as correlações entre retornos desses ativos. Como o investidor consegue escolher a melhor combinação ou a melhor carteira de ativos para manter? Certamente o investidor prefere uma carteira com um retorno esperado alto e um desvio padrão de retornos baixo. Portanto, é válido considerar, conforme Ross et al. (2015):

- A relação entre os retornos esperados de ativos individuais e o retorno esperado de uma carteira formada por esses ativos;
- A relação entre os desvios padrão de ativos individuais, as correlações entre esses ativos e o desvio padrão de uma carteira formada por esses ativos.

O retorno esperado de uma carteira é uma média ponderada dos retornos esperados dos ativos individuais. Assim, a expressão do retorno esperado de uma carteira  $p$  que combine os ativos 1 a  $n$  é dada por:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(R_i),$$

onde  $\alpha_i$  é a proporção aplicada no ativo  $i$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , e  $E(R_i)$  é o retorno esperado do ativo  $i$ .

Mas como obter o retorno esperado de um ativo? Conforme citado anteriormente, uma das maneiras de obter os dados do retorno esperado de um ativo é utilizar uma análise de cenário. A análise de cenário postula uma distribuição de probabilidades de retornos futuros. Mas, de onde vêm as probabilidades e taxas de retorno? Elas provêm, em grande parte, da observação de uma amostra de retornos históricos. Suponhamos que observemos uma série de dez anos de retornos mensais em uma carteira diversificada de ações. Podemos interpretar cada uma das 120 observações de cada ativo como um “cenário” possível oferecido pelo histórico. Avaliando esse histórico, podemos desenvolver uma análise de cenário de retornos futuros. Primeiramente fazemos uma estimativa do retorno esperado e do desvio padrão da amostra histórica. Presumimos que cada um dos 120 retornos representa um desenho independente da distribuição de probabilidades histórica. Por isso, a cada retorno é atribuída uma probabilidade idêntica de  $1/120=0,0083$ . Quando você utiliza uma probabilidade fixa na equação citada na Definição 1.6, obtém a média simples de observações, com frequência empregada para prever o retorno médio (BODIE, KANE e MARCUS, 2014). Dessa forma, nesse contexto, o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $E(R_i)$ , pode ser escrito como:

$$E(R_i) = \bar{R}_i,$$

onde  $\bar{R}_i$  é a média dos retornos históricos do ativo  $i$ , ou seja, a rentabilidade média do ativo no período histórico considerado. Reescrevendo a expressão do retorno esperado de uma carteira, temos:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{R}_i.$$

Conforme dito anteriormente, a volatilidade do retorno de um ativo pode ser associada ao risco no investimento. Para medirmos essa volatilidade nos utilizamos da variância e do desvio padrão. No entanto, estamos interessados em medir a volatilidade, ou variância, de uma carteira de ativos. Segundo Elton, Gruber e Brown (2012), o retorno de uma carteira de ativos é simplesmente uma média ponderada dos retornos dos ativos individuais. O peso aplicado a cada retorno corresponde à fração do valor da carteira aplicada naquele ativo. Sendo  $R_{pq}$  o  $q$ -ésimo retorno da carteira  $p$ ,  $\alpha_i$  a fração dos fundos do investidor aplicada no  $i$ -ésimo ativo, e  $n$  o número de ativos na carteira, então:



$$R_{pq} = \sum_{i=1}^n \alpha_i R_{iq},$$

onde  $R_{iq}$  representa o  $q$ -ésimo resultado possível em termos do retorno do ativo  $i$ .

Como estamos interessados em encontrar a variância dos  $q$  retornos da carteira dado por  $R_{pq}$ , que nada mais é do que uma combinação linear, para calcularmos a variância da carteira  $p$ , com base na Propriedade 1.5, temos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j Cov(R_i, R_j),$$

onde  $Var(R_i)$  e  $\alpha_i$  são, respectivamente, a variância dos retornos e a proporção aplicada no ativo  $i$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , e  $Cov(R_i, R_j)$  é a covariância dos retornos históricos dos ativos  $i$  e  $j$ , com  $i \neq j$ . Considerando ainda a Definição 1.10, esta expressão pode ser reescrita como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j Var(R_i) Var(R_j) Corr(R_i, R_j).$$

Com base nestas expressões, vemos que a variância de uma carteira é a soma das contribuições das variâncias dos ativos componentes mais um termo que envolve a covariância (e, conseqüentemente, a correlação) entre os retornos dos ativos componentes. Quando a correlação entre os ativos componentes for pequena ou mesmo negativa, a tendência dos retornos dos ativos se compensarem será maior. Isso diminuirá o risco da carteira. Podemos observar que a variância da carteira é menor quando o coeficiente de correlação é menor.

### 1.3.3 Fronteira Eficiente

A natureza do problema de seleção de carteiras é encontrar aquelas carteiras correspondentes às combinações dos ativos existentes no mercado que:

- Para um dado nível de retorno tenham um risco mínimo; ou
- Para um dado nível de risco tenham retorno máximo.

Essas carteiras compõem no espaço retorno esperado  $\times$  risco a denominada fronteira eficiente. Neste ponto devemos considerar que o problema comporta soluções distintas conforme as seguintes situações:

- Determinação da fronteira eficiente considerando-se a possibilidade de se investir somente em ativos com risco;

- Determinação da fronteira eficiente considerando-se a possibilidade de, além de se investir em ativos com risco, poder-se também investir num ativo de renda fixa sem risco e, ainda, tomar recursos emprestados para se alavancar o investimento nos ativos com risco.

O problema geral se apresenta da seguinte forma:

*“Determinar os percentuais investidos nos vários ativos que irão compor as carteiras de tal forma que para cada nível de retorno esperado  $E(R_p)$  da carteira o risco seja mínimo, sujeito à condição de  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , ou seja, que todos os recursos sejam investidos nos ativos da carteira” (SÁ, 1999).*

Para melhor ilustrarmos como funciona a determinação da fronteira eficiente, vamos exemplificar com uma carteira constituída somente por dois ativos, A e B, e determinar a expressão do retorno esperado e do risco dessa carteira. Com relação ao retorno esperado da carteira a fórmula que permite o seu cálculo é simplesmente a média ponderada do retorno esperado de cada ativo:

$$E(R_p) = \alpha_A \bar{R}_A + \alpha_B \bar{R}_B,$$

onde  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  representam a proporção dos recursos investidos em cada um dos ativos A e B que compõem a carteira, com  $\alpha_A + \alpha_B = 1$ , e  $\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$  são os retornos médios dos ativos A e B respectivamente. Já a variância da carteira é dada por:

$$\sigma_p^2 = \alpha_A^2 Var(R_A) + \alpha_B^2 Var(R_B) + 2\alpha_A\alpha_B Cov(R_A, R_B),$$

onde  $Var(R_A)$  e  $Var(R_B)$  são as variâncias dos retornos dos ativos A e B respectivamente e  $Cov(R_A, R_B)$  é a covariância dos retornos dos ativos A e B.

Suponha que se queira aplicar a totalidade dos recursos financeiros existentes nos dois ativos, A e B, cujas rentabilidades históricas estão listadas na Tabela 1.1.

Foram efetuados os cálculos da média e da variância do rendimento de cada ativo, como indicado na referida Tabela. Estes cálculos podem ser realizados facilmente com o auxílio do software *MS Excel*. Apesar de não haver grande diferença entre a média histórica entre os dois ativos, vemos que a variância e, por consequência, o desvio padrão, do ativo A é maior do que o ativo B, caracterizando-o como mais arriscado. O valor esperado dessa carteira é dado por:

$$E(R_p) = 1,66\alpha_A + 1,42\alpha_B.$$

Já a variância dessa carteira é dada por:

Tabela 1.1: Média e variância das rentabilidades de dois ativos

	Ativo A	Ativo B
JAN	4,68	2,06
FEV	-7,82	-2,04
MAR	0,58	10,25
ABR	5,7	-2,08
MAI	6,01	-0,46
JUN	5,41	0,64
JUL	-6,72	0,41
AGO	3,78	3,68
SET	1,21	0,45
OUT	5,91	-1
NOV	2,58	3,21
DEZ	-1,44	1,96
<b>Média</b>	<b>1,66</b>	<b>1,42</b>
<b>Variância</b>	<b>22,99</b>	<b>11,20</b>
<b>Covariância</b>	<b>0,30</b>	

Fonte: autor

$$\sigma_p^2 = 22,99\alpha_A^2 + 11,2\alpha_B^2 + 2 \times 0,3\alpha_A\alpha_B$$

Com base nestas duas últimas expressões, podemos esboçar um gráfico do Retorno  $\times$  Risco (Desvio Padrão), calculados com base nas combinações possíveis dos valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$ , mostrado na Figura 1.4.

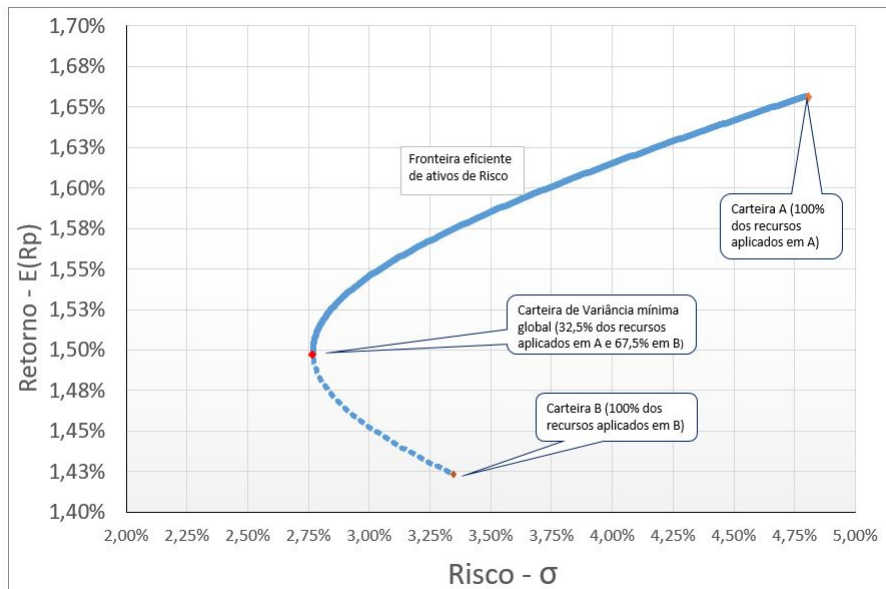
Todas as carteiras que ficam na fronteira de variância mínima em relação à carteira de variância mínima global e acima oferecem as melhores combinações de risco-retorno e, portanto, são candidatas à carteira ótima. Desse modo, a parte da fronteira que fica acima da carteira de variância mínima global é chamada de **fronteira eficiente de ativos de risco**. Para qualquer carteira na parte inferior da fronteira de variância mínima (linha pontilhada), existe uma carteira com o mesmo desvio-padrão e um retorno esperado mais alto posicionada imediatamente acima dela. Portanto, a parte inferior da fronteira de variância mínima é ineficiente (BODIE, KANE e MARCUS, 2014).

Conforme mostrado na Figura 1.4, no nosso exemplo com dois ativos, a carteira de variância mínima global é representada por aquela em que 32,5% dos recursos são aplicados no ativo A e 67,5% no ativo B. Fazendo esta aplicação, obteríamos um valor esperado para a carteira de 1,5%, com uma variância mínima de 7,66% (desvio padrão de 2,76%). Mas, como obter estes valores? Para o caso em questão, olhando para a fórmula usada no cálculo da carteira, o problema estaria em encontrar os valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  de tal forma a obter uma variância  $\sigma_p^2$  mínima. Para encontramos estes valores,

podemos aplicar o método da Programação Quadrática que consiste na minimização de uma função  $f(x)$  quadrática sujeita a restrições lineares, sendo uma extensão da Programação Linear (SIERVO, 2017). A Programação Linear é uma técnica que pressupõe a relação linear entre as características de um problema estudado, buscando para ele uma solução ótima. Essas características do problema são representadas e relacionadas por meio de uma série de equações lineares. A função que está sendo otimizada é chamada de “função objetivo” e as limitações são chamadas de “restrições”. Já a Programação Quadrática difere do problema de Programação Linear somente pelo fato da função objetivo envolver o quadrado de uma variável básica ou o produto de duas variáveis (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

Em outras palavras, matematicamente, no nosso exemplo, o problema aqui consiste em encontrar os valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  de tal forma a minimizar  $\sigma_p^2 = 22,99\alpha_A^2 + 11,2\alpha_B^2 + 2 \times 0,3\alpha_A\alpha_B$ , sujeito às restrições:  $\alpha_A, \alpha_B \geq 0$  e  $\alpha_A + \alpha_B = 1$ . Este cálculo pode ser facilmente obtido com o apoio do software *MS Excel*, por meio do seu suplemento *Solver*, cujo uso será melhor detalhado no Capítulo 3. Não é escopo deste trabalho detalhar a utilização da programação quadrática e linear na seleção das carteiras de investimento, especificamente na seleção das carteiras eficientes. Para o maior detalhamento e aprofundamento neste assunto, sugerimos a leitura do trabalho desenvolvido por Siervo (SIERVO, 2017).

Figura 1.4: Gráfico da fronteira eficiente dos ativos de risco A e B



Fonte: autor

### 1.3.4 O Efeito da Diversificação

A transferência de fundo de uma carteira de risco para um ativo isento de risco é a alternativa mais simples para diminuir o risco. Outro método é a diversificação da carteira de risco. Existe uma frase das finanças que diz que não se deve colocar todos os ovos na mesma cesta. Esta frase muito se aplica à formação de uma carteira, quando tratamos de investimentos.

Figura 1.5: Gerenciamento de riscos: evite ter todos os seus ovos em uma cesta

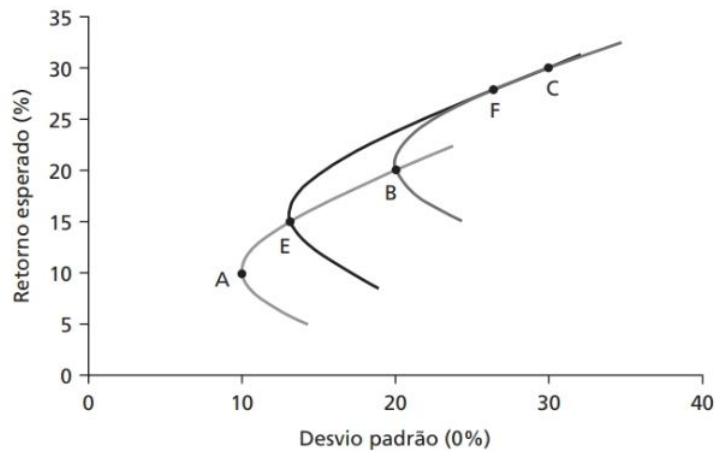


Fonte: Disponível em <<https://www.thisismoney.co.uk/money/guides/article-2289600/Asset-allocation-Make-sure-investing-eggs-arent-basket.html>> consultado em 25.02.2020

A diversificação é uma forma que temos para se proteger contra eventual desvalorização de um determinado ativo. Ou seja, diminuir os riscos, distribuindo o valor investido colocando um percentual dos investimentos em ações, outro em renda fixa, outro em cotas de fundos de investimento, etc.

Para ser ter uma ideia do quanto uma quantidade maior de ativos de risco pode melhorar as oportunidades de investimento, vamos examinar a Figura 1.6. Os pontos A, B e C representam os retornos esperados e os desvios padrão de três ativos. A curva que passa por A e B mostra as combinações de risco e retorno das carteiras formadas com esses dois ativos. De modo semelhante, a curva que passa por B e C mostra carteiras formadas com esses dois ativos. Observe agora o ponto E na curva AB e o ponto F na curva BC. Por sua vez, a curva que passa por E e F representa carteiras construídas das carteiras E e F. Como E e F são na verdade construídas de A, B e C, essa curva mostra algumas das carteiras formadas com esses três ativos. Observe que a curva EF amplia o conjunto de oportunidades de investimento para noroeste, que é a direção desejada, pois é onde obtemos menor risco e maior retorno. Agora, podemos continuar a extrair novos pontos (cada um representa uma carteira) dessas três curvas e realizar outras combinações para gerar novas carteiras, movendo o conjunto de oportunidades cada vez mais para a direção noroeste. Você pode ver que esse processo funcionaria ainda melhor com mais ações. Além disso, o limite ou “contorno” de todas as curvas desenvolvidas ficará bem distante dos ativos individuais na direção noroeste (BODIE, KANE e MARCUS, 2014).

Figura 1.6: Efeito da Diversificação

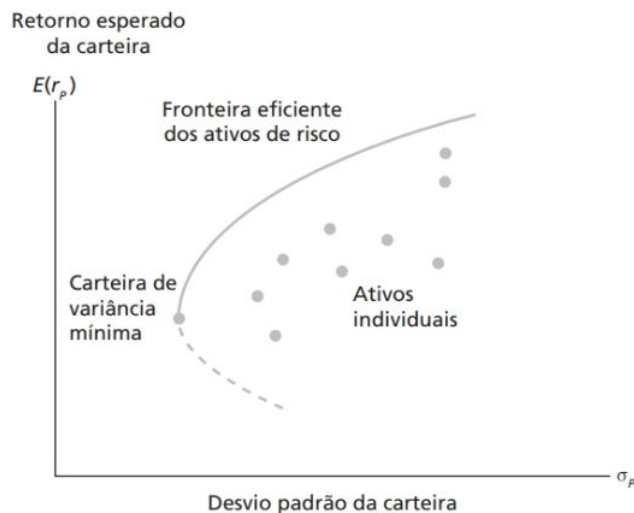


Fonte: Bodie, Kane e Marcus (2014)

Dessa forma, dado um conjunto de ativos é possível combiná-los formando infinitas diferentes carteiras. A partir dessa combinação, podemos encontrar a fronteira eficiente dos ativos, conforme ilustrado na Figura 1.7, formada pelas carteiras eficientes, que são aquelas onde é impossível encontrar outra com o mesmo desvio padrão e com maior retorno esperado.

O desvio padrão da carteira diminui à medida que o número de ativos aumenta, mas não é reduzido a zero. O risco remanescente após a diversificação é chamado de risco de mercado, que é atribuível a fontes de risco do mercado geral, ou risco sistemático ou risco não diversificável. Este risco está relacionado com as condições econômicas gerais,

Figura 1.7: Fronteira eficiente dos ativos de risco

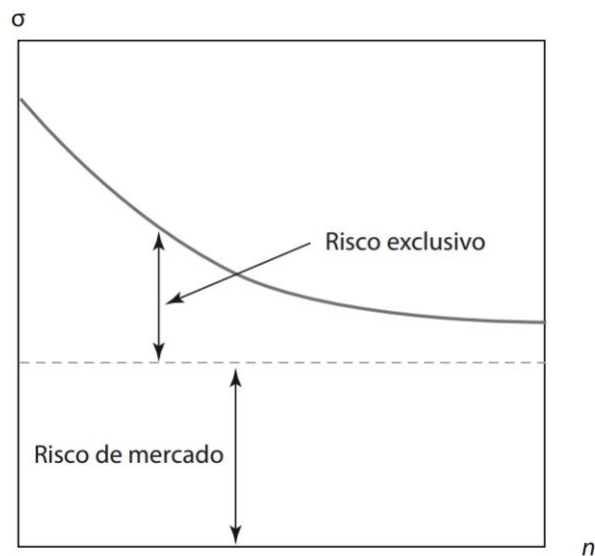


Fonte: Bodie, Kane e Marcus (2014)

como ciclos econômicos, inflação, taxas de juros, taxas de câmbio etc. Nenhum desses fatores macroeconômicos podem ser previstos com certeza. Já o risco que pode ser eliminado pela diversificação é chamado de risco exclusivo, risco específico à empresa, risco não sistemático ou risco diversificável.

Essa ideia é ilustrada na Figura 1.8. O gráfico, que relaciona o desvio padrão de uma carteira ao número de ativos  $n$  dessa carteira, mostra o risco total, ou simplesmente o risco, da carteira. A inclusão de um segundo ativo reduz o desvio padrão, ou o risco, assim como a inclusão de um terceiro ativo, e assim por diante. O risco total da carteira cai constantemente com a diversificação.

Figura 1.8: Risco da carteira em função do número de ativos na carteira - Risco exclusivo (diversificável) e o risco de mercado (não diversificável)



Fonte: Adaptado de Bodie, Kane e Marcus (2014)

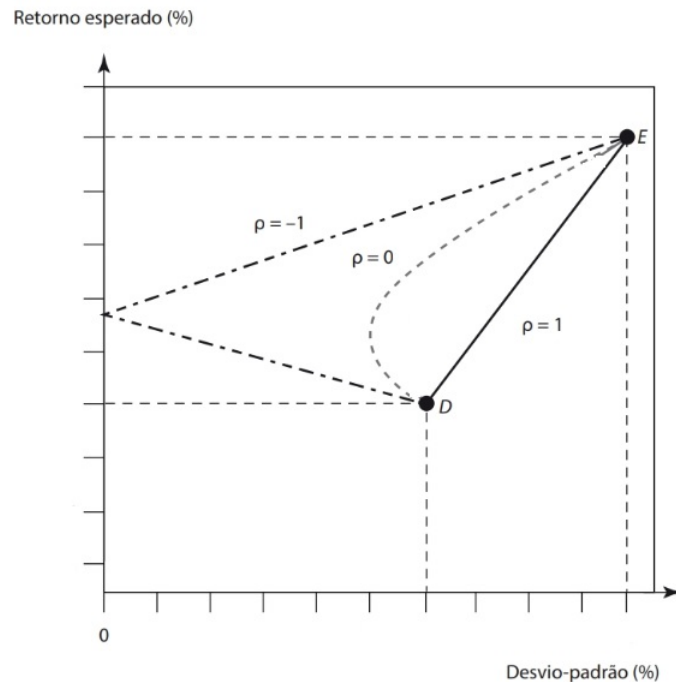
No entanto, observe que a diversificação não possibilita que o risco total seja zero. A vantagem da diversificação tem um limite, pois apenas o risco não sistemático está sendo diversificado. O risco sistemático permanece inalterado. Portanto, ao mesmo tempo em que a diversificação é fator positivo, ela não é tão vantajosa quanto podemos ter esperado. O risco sistemático simplesmente não cai por meio da diversificação (ROSS et al., 2015).

Ainda sobre a diversificação de ativos, cabe aqui analisarmos o papel da correlação entre os ativos na diminuição do risco da carteira. Na Seção 1.3.2 vimos que expressão do cálculo da variância de uma carteira de ativos pode ser escrita em termos da correlação entre os pares dos ativos envolvidos. Podemos obter maiores benefícios com a diversificação dependendo do valor do coeficiente de correlação.

Como vimos anteriormente, o coeficiente de correlação é uma medida Estatística

que indica o grau de dependência linear entre duas variáveis, no caso o retorno dos ativos. Uma redução no risco de uma carteira de dois ativos é tanto maior quanto menor do que +1 for o coeficiente de correlação entre os retornos dos dois ativos, o que é apresentado pela Figura 1.9.

Figura 1.9: O coeficiente de correlação e a redução do risco



Fonte: autor

Estes dois ativos podem ter diferentes valores de correlação, variando entre +1 e -1. No entanto, nessa figura, são exemplificados os conjuntos de oportunidades de carteiras formadas por estes dois ativos, para três casos específicos de valores do coeficiente de correlação entre eles:  $\rho = +1$ ,  $\rho = -1$  e  $\rho = 0$ . As linhas que unem esses dois ativos, uma reta quando  $\rho = +1$ , uma curva quando  $\rho = 0$  e duas retas quando  $\rho = -1$ , representam carteiras construídas com diferentes proporções dos ativos D e E. Exemplificando, quando o retorno esperado dos dois ativos está perfeitamente correlacionado de forma direta ( $\rho = +1$ ), carteiras constituídas com diferentes combinações de ativos D e E se situam sobre a reta que une os dois pontos. Nas Figuras desenhadas pode-se constatar a possibilidade da crescente redução do risco da carteira quando se combinam numa carteira de ativos com correlação de retornos cada vez menores do que +1. Se na prática existir no mercado dois ativos com  $\rho = -1$  é possível combinar esses dois ativos em determinada proporção de tal forma que a carteira assim constituída tenha risco zero (SÁ, 1999). Portanto, a diversificação oferecerá benefícios sempre que os retornos dos ativos não apresentarem uma correlação positiva perfeita.



### 1.3.5 A distribuição normal na prática de investimentos

A importância do desvio padrão do retorno esperado para decidir qual ativo irá compor a carteira, se deve ao fato de que um investimento pode ter infinitos valores de retorno e seguir uma distribuição normal de probabilidades (SOARES, 2011).

A distribuição normal é fundamental para a teoria e a prática de investimentos (BODIE, KANE e MARCUS, 2014). Além disso, segundo McClave, Benson e Sincich (2009), muitos fenômenos de negócios geram variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade que são bem aproximadas por uma distribuição normal. Por exemplo, a taxa mensal de retorno para uma ação em particular é aproximadamente uma variável aleatória normal, e a distribuição de probabilidades para as vendas semanais de uma empresa pode ser aproximada por uma distribuição normal.

Para Bodie, Kane e Marcus (2014), duas propriedades especiais da distribuição normal são responsáveis por simplificações fundamentais na gestão de investimentos quando os retornos são distribuídos normalmente:

1. O retorno sobre uma carteira composta de um ou mais ativos cujos retornos são distribuídos normalmente também será distribuído normalmente.
2. A distribuição normal é descrita completamente por sua média e seu desvio padrão. Nenhuma outra Estatística é necessária para conhecer o comportamento dos retornos distribuídos normalmente.

Por sua vez, é possível deduzir dessas duas propriedades a seguinte conclusão abrangente:

3. O desvio padrão é a medida de risco apropriada para uma carteira de ativos com retornos distribuídos normalmente. Nesse caso, nenhuma outra Estatística pode melhorar a avaliação de risco indicada pelo desvio padrão de uma carteira.

Como exemplo de aplicação deste importante tópico da Estatística, suponhamos que determinado ativo seja distribuído de uma maneira aproximadamente normal com uma média de 1% de retorno ao mês e desvio-padrão de 6%. Qual a probabilidade de o retorno sobre o índice em qualquer mês ser negativo? Podemos utilizar funções integradas do Software *MS Excel* para responder rapidamente essa pergunta. A probabilidade de observarmos um resultado inferior a algum corte de acordo com a função de distribuição normal é dada como  $\text{DIST.NORMAL}(\text{corte}, \text{média}, \text{desvio-padrão}, \text{VERDADEIRO})$ . Nesse caso, queremos conhecer a probabilidade de um resultado abaixo de zero, quando a média é 1% e o desvio-padrão é 6%. Portanto, calculamos  $\text{DIST.NORMAL}(0, 1, 6, \text{VERDADEIRO}) = 0,4338$ , ou seja, 43%.

# Capítulo 2

## METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentadas as metodologias que foram utilizadas neste trabalho, desde a revisão bibliográfica, coleta de dados, seleção dos ativos até a aplicação do modelo de Markowitz.

### 2.1 Metodologia de pesquisa

Este trabalho foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica. Segundo Gil (2002), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Para Cervo e Bervian (1983), a pesquisa bibliográfica explica um problema a partir dos referenciais teóricos publicados em documentos.

Foi realizado um apanhado geral nos diversos trabalhos, como artigos, dissertações e teses, bem como nos livros relacionados ao assunto. Houve uma preocupação em realizar uma interpretação e revisão dos conteúdos pesquisados e estruturar o trabalho de forma que não fosse de difícil compreensão para o público em geral. Ainda, em termos metodológicos, podemos dizer que se trata de uma pesquisa descritiva, de natureza aplicada e quantitativa.

Para alcançar o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho, no capítulo anterior procurou-se levantar e estruturar os tópicos da estatística utilizados no modelo de Markowitz. O foco foi apresentá-los de uma forma estruturada e sequencial como base para o entendimento do modelo. Depois, no mesmo capítulo, foi apresentado o estudo da Teoria do Portfólio, com o foco no modelo de Markowitz, mostrando como este se utiliza da estatística na seleção de carteiras de ativos, na avaliação do risco-retorno. Por fim, no próximo capítulo, com o auxílio do software *MS Excel*, será apresentada a aplicação do modelo, utilizando-se de dados reais de fundos de investimento de um banco brasileiro.

Nas próximas seções deste capítulo é detalhado o método utilizado na aplicação do

modelo de Markowitz.

## 2.2 Coleta de dados

Os dados foram coletados em 20/01/2020, no site de um banco brasileiro (*< http://www.fundos.caixa.gov.br/sipii/pages/public/listar – fundos – internet.jsf >*). As informações gerais a respeito de cada fundo escolhido neste estudo, obtidas no mesmo site, encontram-se no Apêndice A.

Conforme já citado neste trabalho, a grande maioria dos clientes dos bancos é composta de pequenos investidores, os quais nem sempre possuem conhecimentos ou recursos para analisar com profundidade os ativos em que pretendem investir. Daí a escolha por buscar os dados no site, que são públicos e pode ser feita de forma simples por qualquer investidor, como o cliente do próprio banco.

Foram coletados os dados de rendimento mensais de fundos dos últimos três anos, no período entre jan/2017 a dez/2019 (36 meses). Conforme já citado na Seção 1.3.1, a ideia é que a variabilidade e a covariabilidade mudam lentamente ao longo do tempo. Portanto, se fizermos uma estimativa com base em dados recentes, ela nos oferecerá previsões úteis para um futuro próximo (BODIE, KANE e MARCUS, 2014). Daí, a escolha pelo período de 36 meses foi a de obter um histórico que pudesse refletir melhor as tendências para uma aplicação em um igual período subsequente ao histórico extraído.

Para obtermos uma estimativa mensal de rendimento dos fundos, pesquisou-se o último dia útil de cada mês, obtendo-se o acumulado mensal.

Para a análise, utilizou-se preferencialmente os fundos Multimercado, que é uma ótima opção para quem quer ter um bom rendimento e correr risco moderados, e de Ações, que oferece maiores retornos, mas com risco mais elevado. Estes dois tipos de fundos ofereceram uma quantidade de alternativas maior, tanto na quantidade de fundos como na variabilidade dos resultados para aplicação do modelo.

Escolhidos os tipos de fundos, dentre eles foram selecionados aqueles cujo valor inicial de aplicação não fosse superior a R\$ 20.000,00, considerando que estamos partindo da perspectiva de um investidor iniciante, que pode ser o cliente do próprio banco.

## 2.3 Aplicação do modelo

Conforme citado por Gonçalves Júnior, Pamplona e Montevechi (2002), os pequenos investidores muitas vezes tomam decisões sem a aplicação de nenhum conceito sobre mercado de capitais. Dessa forma, conforme objetivo geral deste trabalho, será mostrado como a estatística pode ser usada como ferramenta de apoio, por meio do

modelo de Markowitz, na seleção de carteiras de investimento.

Para a aplicação da seleção das carteiras, utilizou-se do modelo de Markowitz e da metodologia apresentada por Gonçalves Júnior, Pamplona e Montevechi (2002), com o auxílio do Software MS Excel da Microsoft, possibilitando que mesmo os investidores que pouco conhecem sobre essas teorias possam aplicá-las sem grandes dificuldades. Assim, o Excel surge como uma importante ferramenta de apoio, para o cálculo do valor esperado, da variância da carteira, da otimização, entre outros, de acordo com as fórmulas do modelo de Markowitz apresentadas na Seção 1.3.2. O aspecto geral da planilha Excel montada para o auxílio dos cálculos é apresentado no Apêndice B deste trabalho.

Apresentamos abaixo as principais funções do Excel utilizadas para a execução dos cálculos:

- MÉDIA: Por meio dessa função foram calculados o retorno médio (média histórica) de cada ativo, possibilitando o cálculo do valor esperado da carteira.
- COVARIANÇA.S: Utilizada para o cálculo da covariância entre os ativos. Após a coleta dos dados, foram calculadas as matrizes de covariância, por meio do histórico de retorno de todos os ativos que compõem as carteiras. A matriz de covariância é uma matriz quadrada que sumariza as variâncias e covariâncias associadas entre N ativos escolhidos. O seu cálculo foi uma das bases para o cálculo da variância das carteiras.
- CORREL: Esta função foi utilizada para o cálculo da correlação entre os pares de ativos.
- DIST.NORM.N: A noção do risco está sempre associada à possibilidade de perda. O objetivo da diversificação é a redução do risco de perdas. Conforme já demonstrado na Seção 1.3.5, esta função foi utilizada para uma análise adicional quanto aos riscos da carteira escolhida, avaliando a probabilidade de perdas no seu investimento, considerando que os dados possuem uma distribuição normal. Em algumas versões do MS Excel esta função aparece como DIST.NORMAL.
- SOMARPRODUTO: Esta função multiplica cada termo de uma coluna especificada pelos termos correspondentes numa segunda coluna especificada e, em seguida, soma esses produtos. Ela foi utilizada para somar os produtos da média histórica de cada ativo com a sua correspondente proporção na carteira, fornecendo o valor do retorno esperado em cada um dos cenários. Foi utilizada ainda para o cálculo de variância da carteira, somando os produtos das variâncias/covariâncias dos ativos com as correspondentes proporções de cada ativo.

- RAIZ: Utilizada para o cálculo da raiz quadrada de determinado valor, no caso, da raiz da variância, gerando assim o valor do desvio padrão da carteira.

Além das funções apresentadas, utilizou-se do SOLVER, que é uma ferramenta do Excel que possui recurso de otimização a partir da aplicação da programação linear para encontrar a participação de cada ativo, a fim de otimizar a carteira representativa. Ele tem como objetivo aplicar fórmulas para calcular o resultado máximo ou mínimo de uma célula a partir de fórmulas e parâmetros estabelecidos em outras células na planilha. Na prática, em outras palavras, o Solver é usado para determinar o valor máximo ou mínimo de uma célula alterando outras células.

Dessa forma, com o auxílio do MS Excel, foi realizada a aplicação do modelo, com 2 ativos e com 4 ativos, mostrando ainda como a diversificação e a correlação impactam na redução do risco das carteiras e de como os conceitos estatísticos apresentados se correlacionam entre si e podem ser aplicados na avaliação das carteiras.

# Capítulo 3

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 3.1 Aplicação do modelo em carteiras de 2 e de 4 ativos e o impacto da diversificação na redução do risco

Apresentaremos aqui como o modelo de Markowitz pode ser aplicado com 2 ativos e, em seguida, com 4 ativos, aproveitando esta aplicação para demonstrar o poder da diversificação na redução do risco ao acrescentarmos mais ativos a uma carteira. Aproveitaremos ainda a aplicação da carteira com 4 ativos para mostrar o impacto da correlação entre os ativos no mesmo risco.

#### 3.1.1 Aplicação do modelo em carteiras de 2 ativos

Mostraremos inicialmente a aplicação do modelo de Markowitz com 2 ativos. Com base nas fórmulas da Seção 1.3.2, temos que o valor esperado e a variância para dois ativos são dados, respectivamente, por:

$$E(R_p) = \alpha_A \bar{R}_A + \alpha_B \bar{R}_B$$

e

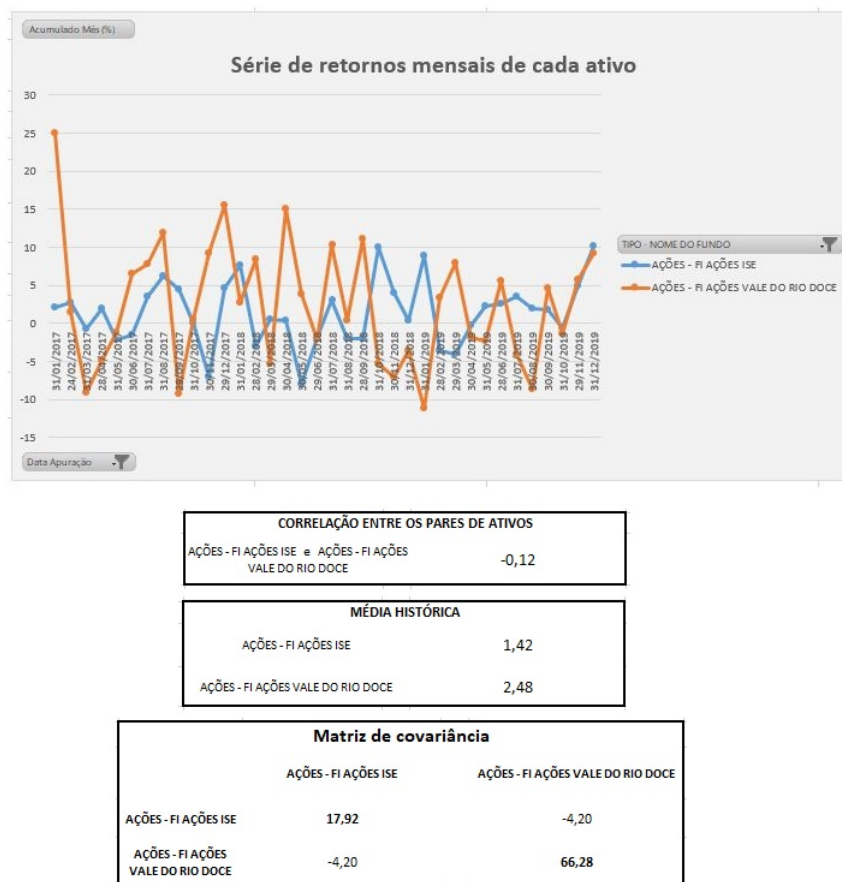
$$\sigma_p^2 = \alpha_A^2 Var(R_A) + \alpha_B^2 Var(R_B) + 2\alpha_A \alpha_B Cov(R_A, R_B),$$

onde  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$ ,  $\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$ ,  $Var(R_A)$  e  $Var(R_B)$ , e  $Cov(R_A, R_B)$  representam a proporção dos recursos investidos, os retornos médios, as variâncias dos retornos e a covariância dos retornos investidos nos ativos  $A$  e  $B$  respectivamente. Chamaremos de  $p$  esta carteira com dois ativos.

Inicialmente procurou-se os ativos cujo percentual médio mensal fosse superior a 1%, ou seja, superior ao rendimento mensal da poupança, e cuja correlação fosse fraca, de

preferência negativa, de forma que a covariância entre os ativos seja mínima e diminua o risco da carteira. Com base nisso, foram escolhidos os ativos FI AÇÕES ISE e FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE relacionados a fundos de ações, que aqui chamaremos de ativos *A* e *B* respectivamente. Na Figura 3.1 são apresentados o gráfico da série de retornos mensais dos ativos com os valores da correlação, bem como a média histórica dos retornos dos ativos e a matriz de covariância. Os valores históricos de retorno dos ativos desta carteira estão no Apêndice C deste trabalho.

Figura 3.1: Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos dois ativos da carteira *p*



Fonte: autor

Graficamente já podemos notar que a correlação entre os ativos de fato não é forte. Em alguns períodos quando um dos ativos teve aumento do seu retorno em um mês em comparação ao anterior, o retorno do outro ativo se manteve estagnado ou teve decréscimo.

Na matriz de covariâncias vemos as covariâncias entre os ativos. Os valores destacados em negrito (diagonal principal da matriz) representam a variância do ativo, já que a covariância de um ativo com ele mesmo é a própria variância. No caso do ativo *A* (FI AÇÕES ISE) o valor da variância é de 17,92 e do ativo *B* (FI AÇÕES VALE DO

RIO DOCE) é de 66,28. Com base na fórmula da covariância (Definição 1.9), podemos notar que o fato da correlação entre os ativos ser negativa fez com que a covariância também fosse negativa.

Com base nesses valores, podemos reescrever a fórmula para o cálculo do retorno e da variância dessa carteira da seguinte forma:

$$E(R_p) = 1,42\alpha_A + 2,48\alpha_B,$$

$$\sigma_p^2 = 17,92\alpha_A^2 + 66,28\alpha_B^2 - 2 \times 4,2\alpha_A\alpha_B.$$

Agora precisamos encontrar os valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  que minimizam o valor do risco  $\sigma_p^2$  com base nas seguintes restrições:

$$\alpha_A \geq 0$$

$$\alpha_B \geq 0$$

$$\alpha_A + \alpha_B = 1.$$

Para este cálculo utilizou-se o Solver. A Figura 3.2 mostra a janela do Solver no Excel, onde realizamos o seguinte procedimento:

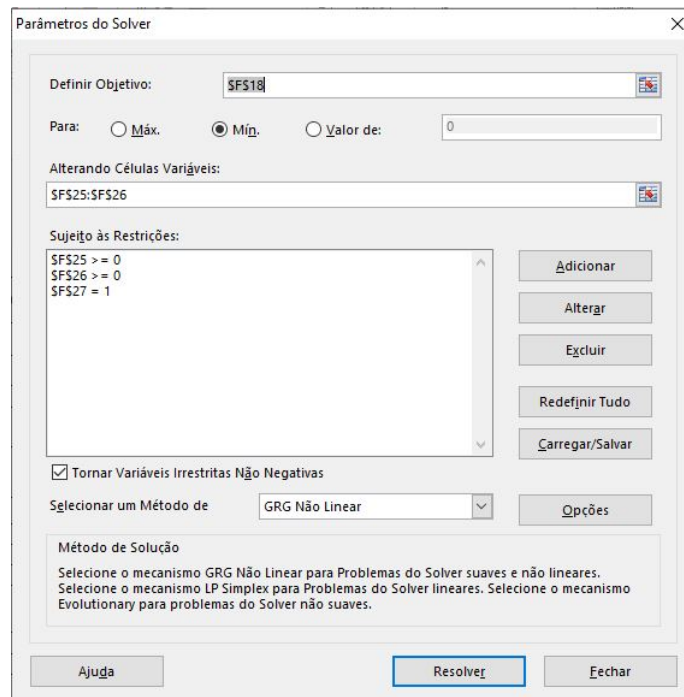
- Seleccionamos a célula na planilha Excel que representa a somatória da Variância, no campo “Definir Objetivo”;
- O problema é de minimização;
- Definimos como células variáveis os percentuais de investimento. Aqui, neste caso, elas representam os valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$ ;
- Seleccionamos as células que representam as restrições e colocamos suas condições, em “Sujeito às Restrições”;
- Como o problema é de Programação Quadrática, seleccionamos GRG Não Linear, em “Método de Solução”;
- Clicamos em Resolver.

Com isso o Solver altera as células da planilha Excel, por ela chamadas de “Células Variáveis”, fornecendo os valores de  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  que minimizam a variância  $\sigma_p^2$ . Os valores da variância, percentuais de alocação e retorno da carteira encontrados após utilizarmos o Solver são apresentados na Figura 3.3.

Após a otimização foi encontrada uma carteira cujo retorno esperado é de 1,68%, com variância de 12,64, se aplicarmos 76% dos recursos no ativo A (FI AÇÕES ISE)



Figura 3.2: Solve aplicado para minimização do risco da carteira  $p$



Fonte: autor

e 24% no ativo  $B$  (FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE). Este valor de variância é menor que as variâncias individuais dos ativos (17,92 e 66,28), mostrando que, com dois ativos, já conseguimos diminuir o risco em comparação a hipótese de aplicarmos somente no ativo  $A$  ou  $B$ .

Podemos fazer ainda algumas análises adicionais com o apoio de outros tópicos de Estatística apresentados. Vimos na Seção 1.3.1 que uma das premissas do modelo de Markowitz era a de que os investidores avaliam o seu portfólio (carteira) apenas com base no valor esperado e na variância (ou desvio padrão) das taxas de retorno. Se quisermos realizar uma avaliação adicional quanto à relação Risco  $\times$  Retorno da

Figura 3.3: Variância da carteira  $p$  minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo

Alocação ótima da carteira		Variância da Carteira:	12,64
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	0,76	Retorno da Carteira:	1,68
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	0,24		
<b>Total:</b>	<b>1,00</b>		

Fonte: autor

carteira frente aos ativos individuais, como estamos lidando com diferentes valores de desvio padrão e retornos, o coeficiente de variação (CV), apresentado na Seção 1.2.5, pode ser bem útil. Tanto nesta Seção como na próxima, o aplicaremos considerando o fato que as médias históricas dos ativos e o retorno da carteira são positivos. Os valores calculados com o apoio do Excel estão na Figura 3.4.

Figura 3.4: Coeficientes de variação da carteira  $p$  e dos dois ativos

<b>Coeficiente de Variação da Carteira:</b>	<b>2,12</b>
---	-------------

<b>Coeficiente de Variação de cada ativo</b>	
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	2,97
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	3,28

Fonte: autor

O CV da carteira foi calculado dividindo-se o valor do desvio padrão da carteira (raiz quadrada da sua variância) pelo seu respectivo valor esperado. Já os valores do CV dos ativos individuais foram calculados dividindo-se o valor do desvio padrão de cada ativo pela sua respectiva média histórica. Não foram multiplicados por 100 os valores das razões, pois a intenção aqui é apenas fazer um comparativo. Como podemos notar, o valor do CV da carteira é menor que a dos ativos individualmente, mostrando que realmente é mais vantajoso aplicar os recursos na carteira, considerando a proporção apresentada, em detrimento de aplicar todos os recursos em um dos ativos.

Uma análise adicional que pode ser realizada, com base nos valores dos retornos e dos desvios padrão da carteira e dos ativos individuais, é o da probabilidade de perdas, ou seja, da probabilidade de ter um retorno negativo aplicando os recursos na carteira ou em algum dos ativos individualmente.

Conforme apresentado nas seções 1.2.6 e 1.3.5, podemos utilizar a função `DIST.NORM` do Excel para calcularmos a probabilidade de se obter um retorno negativo em um determinado mês, se considerarmos que os retornos são distribuídos normalmente (tanto nesta Seção como na próxima consideraremos esta possibilidade ao aplicarmos este cálculo). Com o uso dessa função, obtemos os valores da Figura 3.5. De acordo com os cálculos, obtemos uma probabilidade de 32% de obter algum valor negativo de retorno se aplicarmos os recursos na carteira  $p$  e de 37% e 38% se aplicamos o valor total dos recursos nos ativos  $A$  (FI AÇÕES ISE) e  $B$  (FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE) respectivamente. Sob esta ótica, também vemos que é mais vantajoso distribuir os recursos investindo na carteira, já que esta possui uma menor probabilidade de perda.

Figura 3.5: Probabilidade de perdas para a carteira  $p$  e dos dois ativos

Probabilidade de obter um retorno negativo	
CARTEIRA	0,32
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	0,37
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	0,38

Fonte: autor

### 3.1.2 Aplicação do modelo em carteiras de 4 ativos

Mostraremos agora como podemos aplicar o modelo de Markowitz com 4 ativos. Tomaremos como base a carteira anterior ( $p$ ), onde acrescentaremos a ela outros dois ativos e, com isso, analisaremos o impacto da diversificação numa carteira com o aumento no número de ativos.

Com base nas fórmulas da Seção 1.3.2, temos que o valor esperado e a variância para uma carteira com 4 ativos são dados, respectivamente, por:

$$E(R_{q_1}) = \alpha_A \bar{R}_A + \alpha_B \bar{R}_B + \alpha_C \bar{R}_C + \alpha_D \bar{R}_D$$

e

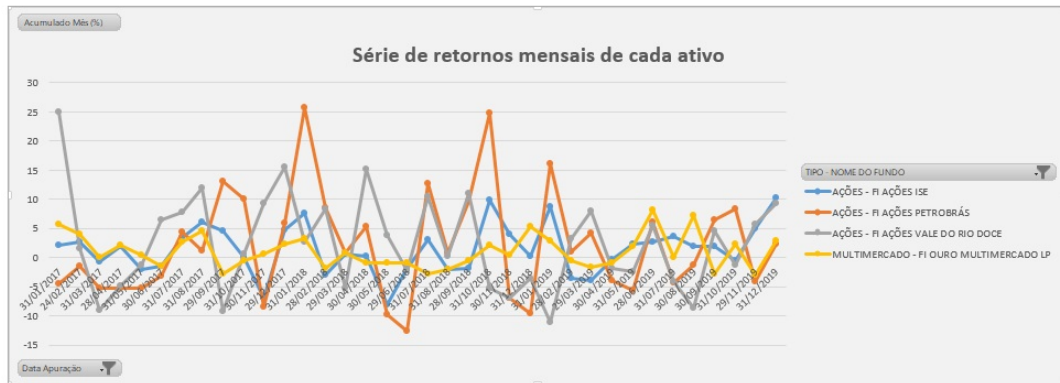
$$\begin{aligned} \sigma_{q_1}^2 = & \alpha_A^2 Var(R_A) + \alpha_B^2 Var(R_B) + \alpha_C^2 Var(R_C) + \alpha_D^2 Var(R_D) \\ & + 2\alpha_A\alpha_B Cov(R_A, R_B) + 2\alpha_A\alpha_C Cov(R_A, R_C) + 2\alpha_A\alpha_D Cov(R_A, R_D) \\ & + 2\alpha_B\alpha_C Cov(R_B, R_C) + 2\alpha_B\alpha_D Cov(R_B, R_D) + 2\alpha_C\alpha_D Cov(R_C, R_D), \end{aligned}$$

onde:  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$  representam a proporção dos recursos investidos;  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_C$  e  $\bar{R}_D$  representam os retornos médios dos ativos;  $Var(R_A)$ ,  $Var(R_B)$ ,  $Var(R_C)$  e  $Var(R_D)$  representam as variâncias dos ativos; e  $Cov(R_A, R_B)$ ,  $Cov(R_A, R_C)$ ,  $Cov(R_A, R_D)$ ,  $Cov(R_B, R_C)$ ,  $Cov(R_B, R_D)$  e  $Cov(R_C, R_D)$  representam as covariâncias entre os ativos.

Para compor esta carteira com 4 ativos, que chamaremos de  $q_1$ , procurou-se outros dois ativos com características semelhantes aos dois primeiros, ou seja, cujo percentual médio mensal fosse superior a 1% e cuja correlação fosse fraca, de preferência negativa, de forma que a covariância entre os ativos fosse mínima e reduzisse o risco da carteira. Com base nisso, com estas características, foram escolhidos a ação FI AÇÕES PETROBRÁS e o fundo multimercado FI OUTRO MULTIMERCADO LP, que aqui chamaremos de ativos  $C$  e  $D$  respectivamente. Na Figura 3.6 são apresentados o gráfico da série de retornos mensais dos ativos com os valores da correlação, bem como a média

histórica dos retornos dos ativos e a matriz de covariância. Os valores históricos de retorno dos ativos desta carteira estão no Apêndice D deste trabalho.

Figura 3.6: Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos quatro ativos da carteira  $q_1$



CORRELAÇÃO ENTRE OS PARES DE ATIVOS	
AÇÕES - FI AÇÕES ISE e AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	0,51
AÇÕES - FI AÇÕES ISE e AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	-0,12
AÇÕES - FI AÇÕES ISE e MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	0,36
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS e AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	0,02
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS e MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	0,00
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE e MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	0,01

MÉDIA HISTÓRICA	
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	1,42
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	2,11
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	2,48
MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	1,00

Matriz de covariância				
	AÇÕES - FI AÇÕES ISE	AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	17,92			
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	19,69	82,95		
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	-4,20	1,50	66,28	
MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	4,35	0,09	0,32	8,28

Fonte: autor

Com base nesses valores, podemos reescrever a fórmula para o cálculo do retorno e da variância dessa carteira da seguinte forma:

$$E(R_{q_1}) = 1,42\alpha_A + 2,48\alpha_B + 2,11\alpha_C + \alpha_D$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{q_1}^2 = & 17,92\alpha_A^2 + 66,28\alpha_B^2 + 82,95\alpha_C^2 + 8,28\alpha_D^2 \\ & - 2 \times 4,2\alpha_A\alpha_B + 2 \times 19,69\alpha_A\alpha_C + 2 \times 4,35\alpha_A\alpha_D \\ & + 2 \times 1,5\alpha_B\alpha_C + 2 \times 0,32\alpha_B\alpha_D + 2 \times 0,09\alpha_C\alpha_D. \end{aligned}$$

Da mesma forma que na carteira anterior com dois ativos, agora precisamos encontrar os valores de  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$  que minimizam o valor do risco  $\sigma_{q_1}^2$  com base nas seguintes restrições:

$$\alpha_A \geq 0$$

$$\alpha_B \geq 0$$

$$\alpha_C \geq 0$$

$$\alpha_D \geq 0$$

$$\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + \alpha_D = 1.$$

Aqui também utilizamos o Solver, de forma semelhante a aplicada na carteira  $p$ , incluindo as restrições, selecionando as células da planilha com o valor da variância que pretendemos minimizar e as células com os percentuais de investimento que queremos que a ferramenta nos forneça. Aplicando o Solver, são fornecidos os valores de  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$  que minimizaram a variância  $\sigma_{q_1}^2$ . Os valores da variância, percentuais de alocação e retorno da carteira encontrados após a aplicação do Solver são mostrados na Figura 3.7. Observamos que o valor de variância da carteira  $q_1$  (6,46) é menor que as variâncias individuais dos ativos (17,92; 82,95; 66,28 e 8,25), mostrando que, com quatro ativos, também conseguimos diminuir o risco em comparação a hipótese de aplicarmos todos os recursos somente em um dos ativos.

Figura 3.7: Variância da carteira  $q_1$  minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo

Alocação ótima da carteira	
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	0,19
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	0,03
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	0,11
MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	0,68
<b>Total:</b>	<b>1,00</b>

<b>Variância da Carteira:</b>	<b>6,46</b>
<b>Retorno da Carteira:</b>	<b>1,27</b>

Fonte: autor

De forma semelhante à carteira anterior ( $p$ ), podemos realizar mais alguns cálculos de forma a subsidiar algumas análises adicionais acerca dessa carteira  $q_1$  com 4 ativos, como o coeficiente de variação (CV) e a probabilidade de perda (obter um percentual negativo em determinado mês), cujos valores são apresentados na Figura 3.8. No caso do CV, não foram multiplicados por 100 os valores das razões, pois a intenção aqui é apenas fazer um comparativo. Aqui também observamos que tanto o valor do CV como da probabilidade da carteira encontrados são menores que as dos ativos individualmente.

Figura 3.8: Coeficiente de Variação e a Probabilidade de perdas para a carteira  $q_1$  e dos quatro ativos

<b>Coeficiente de Variação da Carteira:</b>	<b>2,00</b>
<b>Coeficiente de Variação de cada ativo</b>	
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	2,97
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	4,32
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	3,28
MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	2,87

<b>Probabilidade de obter um retorno negativo</b>	
<b>CARTEIRA</b>	<b>0,31</b>
AÇÕES - FI AÇÕES ISE	0,37
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	0,41
AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	0,38
MULTIMERCADO - FI OURO MULTIMERCADO LP	0,36

Fonte: autor

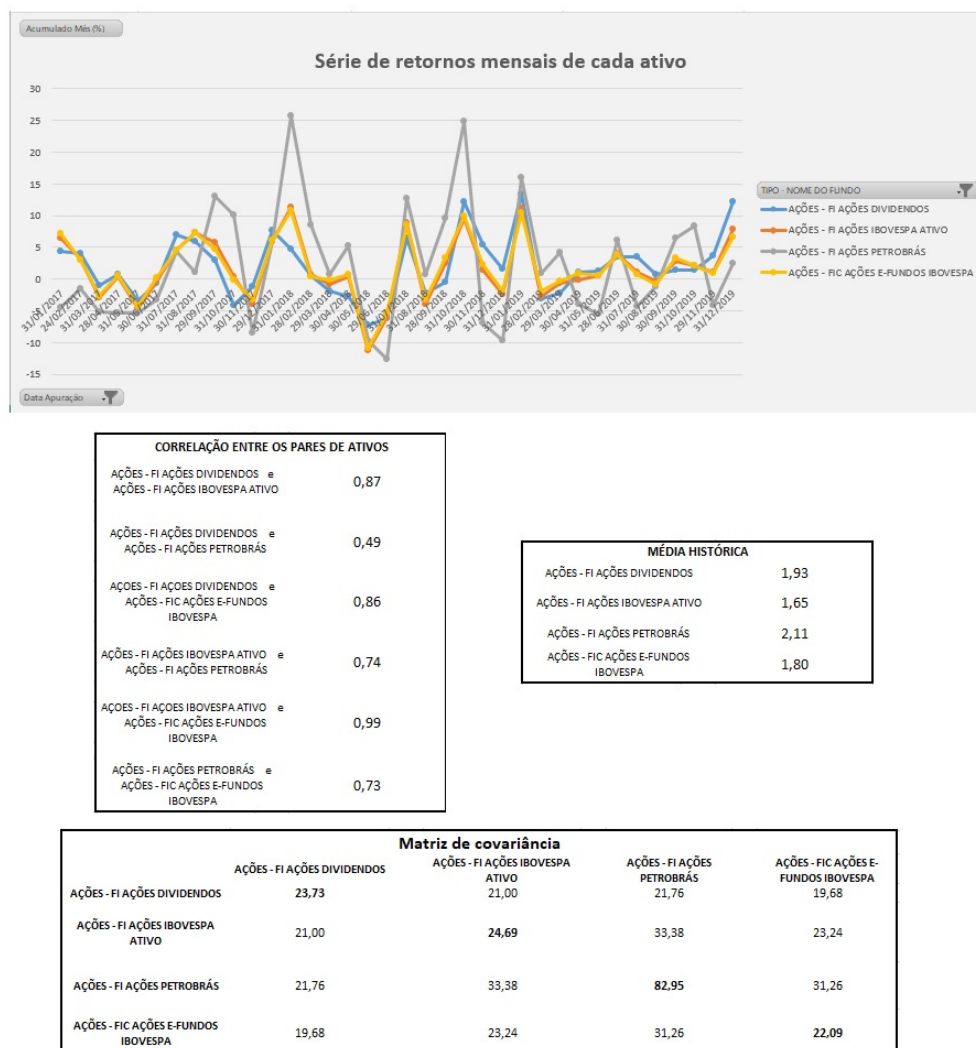
Até o momento fizemos a aplicação do modelo de Markowitz em carteiras com 2 e com 4 ativos considerados fracamente correlacionados. Segundo Martins (2019), o coeficiente de correlação ( $Corr$ ) se trata de uma medida de associação que independe das unidades de medidas das variáveis. Varia entre  $-1$  e  $+1$  e quanto maior a qualidade do ajuste (ou associação linear), mais próximo de  $-1$  ou  $+1$  estará o valor do coeficiente de correlação. Na prática, se  $Corr > 0,7$  ou  $Corr < -0,7$  e o tamanho da amostra for maior que 30, diremos que há forte correlação linear entre as variáveis.

A fim de verificamos o impacto da correlação entre os ativos na redução do risco da carteira, mostraremos agora uma aplicação do modelo com 4 ativos cujos valores de retorno são fortemente correlacionados, de forma que possamos comparar os resultados com a carteira anterior que possuía 4 ativos fracamente correlacionados.

Inicialmente foi selecionada uma carteira cujos os ativos tivessem uma média histórica de retorno maior que 1% e uma correlação mais alta positivamente, de preferência acima de 0,7. Para compor esta carteira, que chamaremos de  $t$ , foram selecionados quatro fundos de ações: FI AÇÕES DIVIDENDOS, FI AÇÕES IBOVESA ATIVO,

FI AÇÕES PETROBRÁS e FI AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA, que na aplicação da fórmula adiante os chamaremos de ativos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  respectivamente. Os valores das correlações entre os ativos, da média histórica e a matriz de covariância formada são apresentados na Figura 3.9. Os valores históricos de retorno dos ativos desta carteira estão no Apêndice E deste trabalho.

Figura 3.9: Correlação, Médias históricas e Covariâncias dos quatro ativos fortemente correlacionados da carteira  $t$



Fonte: autor

Notamos que os valores históricos médios de retorno são próximos de 2% ao mês. Além disso, o fato de não termos nenhuma correlação negativa fez com que todas as covariâncias entre os ativos fossem positivas. De forma similar ao apresentado no cálculo da carteira  $q_1$ , podemos encontrar as fórmulas do retorno esperado e da variância para esta carteira, que são:



$$E(R_t) = 1,93\alpha_E + 1,65\alpha_F + 2,11\alpha_G + 1,80\alpha_H$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & 23,73\alpha_E^2 + 24,69\alpha_F^2 + 82,95\alpha_G^2 + 22,09\alpha_H^2 \\ & + 2 \times 21\alpha_E\alpha_F + 2 \times 21,76\alpha_E\alpha_G + 2 \times 19,68\alpha_E\alpha_H \\ & + 2 \times 33,38\alpha_F\alpha_G + 2 \times 23,24\alpha_F\alpha_H + 2 \times 31,26\alpha_G\alpha_H. \end{aligned}$$

Da mesma forma que na carteira anterior, agora precisamos encontrar os valores de  $\alpha_E$ ,  $\alpha_F$ ,  $\alpha_G$  e  $\alpha_H$  que minimizam o valor do risco  $\sigma_t^2$  com base nas seguintes restrições:

$$\alpha_E \geq 0$$

$$\alpha_F \geq 0$$

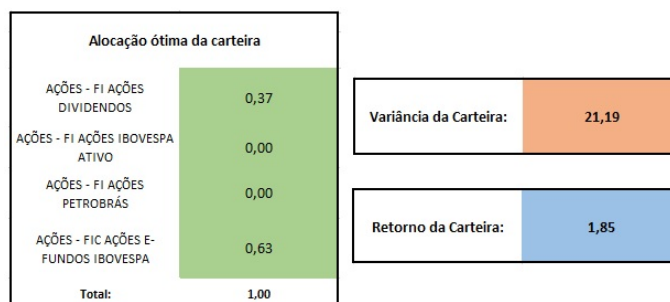
$$\alpha_G \geq 0$$

$$\alpha_H \geq 0$$

$$\alpha_E + \alpha_F + \alpha_G + \alpha_H = 1.$$

Com base nesses dados, foi utilizado o Solver de forma a obter os valores de  $\alpha_E$ ,  $\alpha_F$ ,  $\alpha_G$  e  $\alpha_H$ , que minimizam o risco da carteira  $t$ . Os valores dos percentuais de alocação, do retorno esperado e da variância minimizada são apresentados na Figura 3.10. Percebe-se que a carteira de mínima variância é formada por 37% dos recursos aplicados nos ativos FI AÇÕES DIVIDENDOS, 63% aplicados no ativo FIC AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA e nenhum recurso aplicado nos outros ativos. Mesmo assim, neste caso, se conseguiu uma combinação de ativos na carteira em que a variância é menor que a de qualquer ativo individualmente.

Figura 3.10: Variância da carteira  $t$  minimizada e seus respectivos valores de alocação em cada ativo



Fonte: autor



Assim como na Seção anterior, podemos realizar mais alguns cálculos de forma a subsidiar algumas análises adicionais acerca dessa carteira  $q_1$  com 4 ativos, como o coeficiente de variação (CV) e a probabilidade de perda (obter um percentual negativo em determinado mês), cujos valores são apresentados na Figura 3.11.

Figura 3.11: Coeficiente de Variação e a Probabilidade de perdas para a carteira  $t$  e dos quatro ativos

<b>Coeficiente de Variação da Carteira:</b>	<b>2,49</b>
---	-------------

<b>Coeficiente de Variação de cada ativo</b>	
AÇÕES - FI AÇÕES DIVIDENDOS	2,52
AÇÕES - FI AÇÕES IBOVESPA ATIVO	3,01
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	4,32
AÇÕES - FIC AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA	2,62

<b>Probabilidade de obter um retorno negativo</b>	
<b>CARTEIRA</b>	<b>0,34</b>
AÇÕES - FI AÇÕES DIVIDENDOS	0,35
AÇÕES - FI AÇÕES IBOVESPA ATIVO	0,37
AÇÕES - FI AÇÕES PETROBRÁS	0,41
AÇÕES - FIC AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA	0,35

Fonte: autor

À título de comparação, vamos retomar à carteira formada pelos 4 ativos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , cujos ativos são fracamente correlacionados. Vamos calcular novamente a sua variância mínima mas, agora, acrescentando a ela mais uma restrição: a de que o retorno esperado seja maior ou igual 1,85%, valor este alcançado com a carteira  $t$  de variância mínima. Chamaremos esta nova carteira de  $q_2$ . A intenção aqui é comparar estas duas carteiras de 4 ativos,  $q_2$  e  $t$ , quanto ao risco, considerando o mesmo valor de retorno. Dessa forma, aplicaremos o Solver na carteira formada pelos 4 ativos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  com o objetivo de encontrar os valores de  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$  que minimizam o valor do risco  $\sigma_{q_2}^2$  com base nas seguintes restrições:

$$\alpha_A \geq 0$$

$$\alpha_B \geq 0$$

$$\alpha_C \geq 0$$

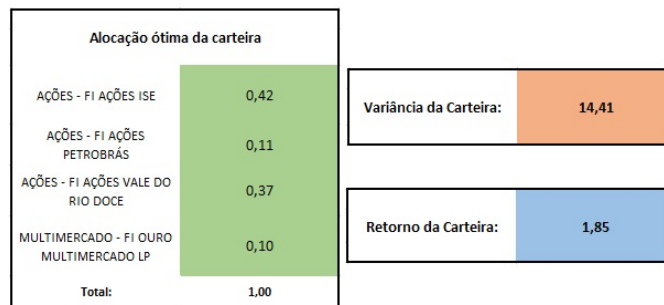
$$\alpha_D \geq 0$$

$$E(R_{q_2}) \geq 1,85$$

$$\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + \alpha_D = 1.$$

Os valores da variância, percentuais de alocação e retorno da carteira encontrados após a aplicação do Solver são mostrados na Figura 3.12. Observamos que o valor de variância da carteira  $q_2$  (14,41) é menor que a variância da carteira  $t$  (21,19) para o mesmo valor de retorno (1,85%), mostrando que a baixa correlação dos ativos na primeira carteira fez com que ela se tornasse mais vantajosa, por ter de menor risco (variância).

Figura 3.12: Carteira  $q_2$  com variância minimizada para um retorno mínimo de 1,85% e seus respectivos valores de alocação em cada ativo



Fonte: autor

## 3.2 Discussão e Análise geral dos Resultados

Na Seção anterior, foi mostrada a aplicação do modelo de Markowitz em três conjuntos de carteiras diferentes:

- Inicialmente selecionamos os ativos FI AÇÕES ISE e FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE, que intitulamos de ativos  $A$  e  $B$  respectivamente, e geramos a carteira  $p$  de variância mínima global;
- Depois, aproveitamos os dois ativos da primeira carteira e acrescentamos a ela os ativos FI AÇÕES PETROBRÁS e FI OURO MULTIMERCADO LP, que intitulamos de  $C$  e  $D$  respectivamente, onde geramos as carteiras  $q_1$  (de variância mínima global para o conjunto de carteiras) e a carteira  $q_2$  (de variância mínima para o retorno de 1,85% a. m.);
- Ainda, com a escolha dos ativos FI AÇÕES DIVIDENDOS, FI AÇÕES IBOVESPA ATIVO, FI AÇÕES PETROBRÁS e FIC AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA, fortemente correlacionados, intitulados respectivamente de ativos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , foi gerada a carteira  $t$ , de variância mínima global para o conjunto de carteiras.

Tabela 3.1: Quadro resumo dos resultados das carteiras

Nome Carteira	Ativos	Retorno dos Ativos (%)	Variância dos Ativos	Probabilidade de perdas dos Ativos	Correlação entre os ativos	Retorno da Carteira (%)	Variância da Carteira	Desvio Padrão da Carteira (%)	CV da Carteira	Probabilidade de perdas da Carteira	
<b><i>p</i></b>	A	FI AÇÕES ISE	1,42	17,92	0,37	Fraca	1,68	12,64	3,56	2,12	0,32
	B	FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	2,48	66,28	0,38						
<b><i>q<sub>1</sub></i></b>	A	FI AÇÕES ISE	1,42	17,92	0,37	Fraca	1,27	6,46	2,54	2,00	0,31
	B	FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	2,48	66,28	0,38						
	C	FI AÇÕES PETROBRÁS	2,11	82,95	0,41						
	D	FI OURO MULTIMERCADO LP	1,00	8,28	0,36						
<b><i>q<sub>2</sub></i></b>	A	FI AÇÕES ISE	1,42	17,92	0,37	Fraca	1,85	14,41	3,8	2,05	0,31
	B	FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	2,48	66,28	0,38						
	C	FI AÇÕES PETROBRÁS	2,11	82,95	0,41						
	D	FI OURO MULTIMERCADO LP	1,00	8,28	0,36						
<b><i>t</i></b>	E	FI AÇÕES DIVIDENDOS	1,93	23,73	0,36	Forte	1,85	21,19	4,6	2,49	0,34
	F	FI AÇÕES IBOVESPA ATIVO	1,65	24,69	0,37						
	G	FI AÇÕES PETROBRÁS	2,11	82,95	0,41						
	H	FI AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA	1,8	22,09	0,35						

Fonte: autor

Um quadro resumo das carteiras e dos resultados dos cálculos é apresentado na Tabela 3.1.

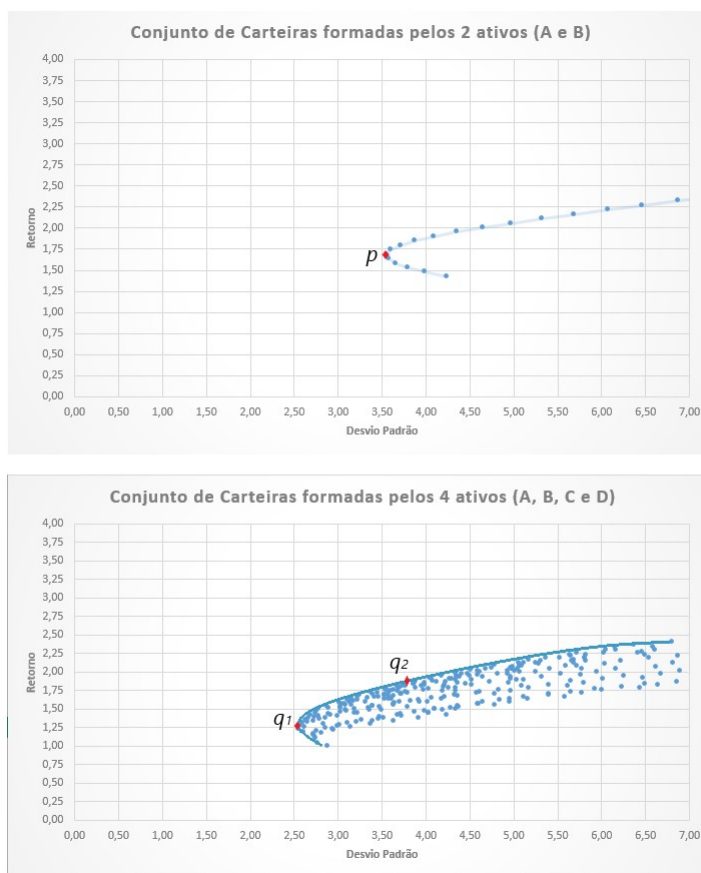
As carteiras  $p$  e  $q_1$  foram geradas com ativos fracamente correlacionados e servirão à título de comparação para avaliarmos o impacto do aumento do número de ativos na redução do risco. Já as carteiras  $q_2$  e  $t$  foram geradas com os ativos fracamente e fortemente correlacionados respectivamente, para avaliarmos o impacto da correlação na redução do risco.

Na Figura 3.13 é apresentado o gráfico do conjunto de carteiras gerados pelos ativos  $A$  e  $B$ , e o conjunto de carteiras formados pelos ativos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Podemos observar que ao aumentarmos o número de ativos obtivemos um conjunto maior de opções de carteiras, com variâncias menores que das carteiras formadas somente pelos dois ativos. Isso aumentou as oportunidades de investimento. Este resultado está de acordo com Bodie, Kane e Marcus (2014) e ilustrado na Figura 1.6, mostrados na Seção 1.3.4. Além disso, vemos graficamente que a variância mínima para o conjunto de carteiras formado por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (6,46 - desvio padrão de 2,54%, da carteira  $q_1$ ) foi menor que a do conjunto formado apenas pelas carteiras  $A$  e  $B$  (12,64 - desvio padrão de 3,56%, da carteira  $p$ ).

Ao calcularmos o CV para estas carteiras, para avaliarmos o risco considerando também o valor esperado, vemos também que a carteira  $q_1$  ( $CV = 2,00$ ) oferece menor risco que a carteira  $p$  ( $CV = 2,12$ ).

Conforme vimos nas seções anteriores, a fórmula da variância de uma carteira é composta pela soma das variâncias e das covariâncias entre os ativos. Vimos na Seção anterior que para desenvolver a fórmula, aplicamos uma matriz que reúne as variâncias e covariâncias entre os ativos (Figuras 3.6 e 3.9). Supondo que haja  $N$  ativos, escrevemos

Figura 3.13: Gráficos dos conjuntos de carteiras formados pelos ativos  $A$  e  $B$  e pelos ativos  $A, B, C$  e  $D$



Fonte: autor

ativos de 1 a  $N$  no eixo horizontal e 1 a  $N$  no eixo vertical. Isso cria uma matriz  $N \times N = N^2$  caixas. A variância da carteira é a soma dos termos de todas as caixas, multiplicados pelos respectivos valores das proporções entre os ativos. Os termos da diagonal principal da matriz contêm as variâncias dos diferentes ativos. Os termos fora da diagonal contêm as covariâncias. O número de termos da diagonal (número de termos de variância) é sempre igual ao número de ativos da carteira. Assim, numa matriz  $N \times N$ , teremos  $N$  variâncias e  $N^2 - N$  covariâncias.

Dessa forma, vemos que número de termos fora da diagonal (número de termos de covariâncias) sobe muito mais rápido que o número de termos da diagonal. Na nossa aplicação, com 2 ativos temos 2 variâncias e 2 covariâncias, já com 4 ativos temos 4 variâncias e 12 covariâncias. Com 100 ativos, teríamos 100 variâncias e 9900 termos de covariâncias. No caso das carteiras  $p$  e  $q_1$  observamos que, ao dobrarmos o número de ativos, acabamos por triplicar a quantidade de covariâncias. Com isso, obtivemos uma carteira  $q_1$  de variância mínima menor com 4 ativos (6,46 - desvio padrão de 2,54%) em

comparação com a de 2 ativos (12,64 - desvio padrão de 3,56%). Assim, este resultado está de acordo com Ross et al. (2015), que afirma que a variância dos retornos de uma carteira com vários títulos depende mais das covariâncias entre os ativos individuais do que das variâncias dos títulos individuais.

O fato da correlação entre os ativos ser baixa também influenciou na redução do risco da carteira  $q_1$  em comparação à  $p$ . O efeito da correlação na redução do risco ficou ainda mais evidente quando comparamos as carteiras  $q_2$  e  $t$ . No caso da carteira  $t$ , formada por ativos fortemente correlacionados ( $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ ), encontramos uma carteira de variância mínima global do conjunto de 21,19 (desvio padrão de 4,6%), bem superior à carteira  $q_1$ , que foi de 6,46 (desvio padrão de 2,54%), também de variância mínima para o conjunto de ativos fracamente correlacionados ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ). Quando, para o mesmo conjunto de ativos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , calculamos a carteira de mínima variância  $q_2$  para um retorno de 1,85%, vemos também que a variância é menor (14,41 - desvio padrão de 3,8%).

Dessa forma, para o investidor, a escolha da carteira  $q_2$  em relação à carteira  $t$  se justifica (Seção 1.3.1), conforme a premissa de Markowitz (SÁ, 1999 e MACEDO JR., 2003) de que os investidores postos a escolher entre dois portfólios (carteiras) de mesmo retorno, sempre escolherão o de menor risco. Dessa forma, se o investidor tiver que escolher entre as carteiras  $q_2$  e  $t$ , escolherá a  $q_2$ .

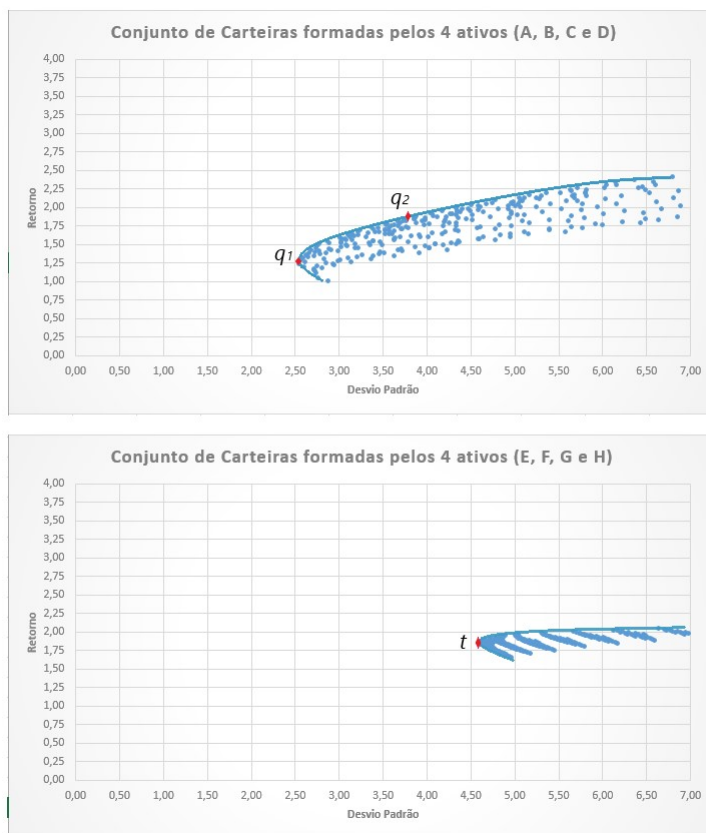
Na Figura 3.14 podemos ver graficamente o conjunto de carteiras possíveis de serem formadas pelos ativos das carteiras  $q_1$  e  $q_2$  ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) e da carteira  $t$  ( $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ ). Observamos que o conjunto de oportunidades de investimento é maior com os ativos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , onde observamos um conjunto de carteiras mais espalhado. Neste conjunto, inclusive, vemos graficamente que conseguimos uma variedade maior de carteiras com retorno esperado maior que 2% a.m. do que no conjunto de carteiras dos ativos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , para um mesmo valor de risco.

Para melhor analisarmos o impacto da correlação em ativos fortemente correlacionados no risco das carteiras por eles formadas, tomemos como base a fórmula da variância para os quatro ativos, em função das correlações, variâncias e desvios padrão, dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_E^2 Var(R_E) + \alpha_F^2 Var(R_F) + \alpha_G^2 Var(R_G) + \alpha_H^2 Var(R_H) \\ &+ 2\alpha_E\alpha_F\sigma_E\sigma_F Corr(R_E, R_F) + 2\alpha_E\alpha_G\sigma_E\sigma_G Corr(R_E, R_G) \\ &+ 2\alpha_E\alpha_H\sigma_E\sigma_H Corr(R_E, R_H) + 2\alpha_F\alpha_G\sigma_F\sigma_G Corr(R_F, R_G) \\ &+ 2\alpha_F\alpha_H\sigma_F\sigma_H Corr(R_F, R_H) + 2\alpha_G\alpha_H\sigma_G\sigma_H Corr(R_G, R_H).\end{aligned}$$

Vamos supor que a correlação entre os ativos é a mais alta possível, ou seja, igual

Figura 3.14: Gráficos dos conjuntos de carteiras formados pelos ativos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  e pelos ativos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$



Fonte: autor

a +1. Neste caso temos que a variância da carteira é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_E^2 Var(R_E) + \alpha_F^2 Var(R_F) + \alpha_G^2 Var(R_G) + \alpha_H^2 Var(R_H) \\ &+ 2\alpha_E\alpha_F\sigma_E\sigma_F + 2\alpha_E\alpha_G\sigma_E\sigma_G + 2\alpha_E\alpha_H\sigma_E\sigma_H \\ &+ 2\alpha_F\alpha_G\sigma_F\sigma_G + 2\alpha_F\alpha_H\sigma_F\sigma_H + 2\alpha_G\alpha_H\sigma_G\sigma_H. \end{aligned}$$

Sabemos ainda que a fórmula do quadrado da soma de 4 termos é dada por:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Comparando as duas fórmulas anteriores e fazendo:  $a = \alpha_E\sqrt{Var(R_E)}$ ;  $b = \alpha_F\sqrt{Var(R_F)}$ ;  $c = \alpha_G\sqrt{Var(R_G)}$  e  $d = \alpha_H\sqrt{Var(R_H)}$ ; e sabendo que o desvio padrão  $\sigma$  é dado por  $\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)}$ , para cada ativo  $i$ , temos que o risco da carteira (desvio padrão), para a correlação dos ativos igual a +1, será dado por:

$$\sigma_t = \alpha_E \sigma_E + \alpha_F \sigma_F + \alpha_G \sigma_G + \alpha_H \sigma_H,$$

onde,  $\alpha_i$  e  $\sigma_i$  são a proporção e o desvio padrão de cada ativo  $i$  respectivamente.

Observamos com este resultado que, quando o coeficiente de correlação é máximo (igual a +1), o risco (desvio padrão) e o retorno da carteira são simplesmente combinações lineares do risco (desvio padrão) e do retorno de cada ativo. Neste caso, não há redução de risco com a compra dos ativos, conforme Elton, Gruber e Brown (2012). Isso mostra que, para obtermos uma maior redução no risco da carteira, devemos procurar ativos cuja correlação seja a mais baixa e distante possível de +1. No entanto, mesmo em ativos fortemente correlacionados, jamais o risco da carteira será maior que o ativo de maior risco.

Percebemos assim que, quanto menor (mais próximo de -1) for o coeficiente de correlação entre os ativos, mantidos os outros atributos constantes, maior será o benefício proporcionado pela diversificação. Isso mostra porque o conjunto de carteiras formados pelos ativos fracamente correlacionados ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) apresentou uma variedade maior de carteiras com riscos menores, se comparado ao conjunto de carteiras formados pelos ativos fortemente correlacionados ( $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ ), estando o primeiro conjunto mais à noroeste que este último. Este resultado está conforme apresentado por Bodie, Kane e Marcus (2014) e ilustrado na Figura 1.9 (Seção 1.3.4). Além do mais, conforme citado anteriormente, a variância dos retornos de uma carteira com vários títulos depende mais das covariâncias entre os ativos individuais do que das variâncias dos títulos individuais. Como a covariância e a correlação são diretamente proporcionais, quanto menor a correlação, menor a covariância e, por consequência, menor o risco da carteira.

Assim, conforme visto nos casos estudados neste trabalho, o aumento do número de ativos e o coeficiente de correlação impactaram na redução do valor do risco da carteira e deve ser levado em consideração pelo investidor para a seleção dos ativos. Para finalizar, complementamos com algumas análises adicionais:

- Pode ser percebida uma relação próxima entre os retornos dos investimentos e as variâncias (desvios padrão). Variâncias dos ativos maiores estão associados a riscos mais altos e a retornos maiores. No mercado, os participantes exigem retornos mais altos para compensar riscos maiores, conforme Gitman (2004);
- O risco das carteiras de mínima variância global  $p$ ,  $q_1$  e  $t$  obtiveram um menor valor de risco que dos seus ativos individuais, mostrando que mesmo em ativos fortemente correlacionados, como na carteira  $t$ , houve redução do risco;
- O coeficiente de variação (CV) serviu como uma análise adicional da carteira, no sentido em que possibilitou comparar o risco-retorno da carteira frente aos ativos

indivualmente, que tinham diferentes retornos e riscos;

- O cálculo da probabilidade para o risco de se obter um valor negativo aplicando na carteira, serviu também como uma análise adicional, que deve ser feita em conjunto com a análise do risco e do retorno da carteira. No caso das carteiras  $q_1$  e  $q_2$ , por exemplo, vemos que a probabilidade é a mesma (0,31), no entanto a variância de  $q_2$  é bem maior (14,41) se comparada com a  $q_1$  (6,46). Logo, caso o investidor opte pela carteira  $q_2$ , se ele obter um valor negativo de retorno, este tende a ser maior (em valor absoluto) que o da carteira  $q_1$ .



## Capítulo 4

# CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO DE ESTATÍSTICA E SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Neste capítulo, discorreremos acerca do ensino de Estatística, na Educação Básica, e das habilidades esperadas conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dada a sua importância e utilização no mercado de trabalho. Ao final serão apresentadas algumas sugestões de atividades, no formato de dois planos de aula, que podem ser desenvolvidas em sala de aula levando em consideração as habilidades inerentes ao ensino da estatística que aqui serão discutidas.

### 4.1 O Ensino de Estatística

Conforme já citado no primeiro capítulo deste trabalho, a estatística tem grande aplicação em todos os ramos do conhecimento humano, como Economia, Biologia, Ciências Sociais, entre outras. No entanto, muitas vezes, os alunos estudam a estatística de forma separada da realidade, sem entender a sua aplicabilidade.

Segundo Lopes (1998), o ensino, tanto da Matemática como da Estatística, não deve ser baseado em aulas que tratem apenas dos conceitos sem atrelá-los à questões do cotidiano, pois a simples repetição de um conceito não é suficiente para levar a aprendizagem de forma efetiva.

Segundo Virgillito (2017), mesmo em cursos acadêmicos, a Estatística é apresentada de forma excessivamente teórica, contendo ainda uma dose elevada de demonstrações dessa natureza em detrimento de exemplos de aplicação prática. Segundo ele, nas literaturas existentes alguns tópicos são apresentados com aprofundamento excessivo, enquanto em outros não; e mais, não há clareza quanto às ferramentas estatísticas a serem aplicadas nas mais diversas situações e em que sequência, o que impossibilita

uma visão global do processo estatístico. É comum encontrar em sala de aula alunos que ficam ansiosos por saber a aplicabilidade das técnicas estatísticas, seja porque ainda não adquiriram a experiência necessária para sua aplicação no dia a dia, porque não perceberam ainda tal necessidade nas funções que exercem nas empresas em que trabalham, ou ainda por pensarem que a Estatística deva ser aplicada sempre por empresas especializadas para tal.

Segundo Crespo (2009), a direção de uma empresa, de qualquer tipo, incluindo as estatais e governamentais, exige de seu administrador a importante tarefa de tomar decisões, e o conhecimento e o uso da Estatística facilitarão seu tríplice trabalho de organizar, dirigir e controlar a empresa. Seu uso vem a melhorar o conhecimento em várias áreas de forma a alcançar os objetivos e metas de curto, médios e longos prazos, selecionando, organizando, verificando e avaliando estratégias que possibilitem saber a qualidade e quantidade do produto, bem como, os possíveis lucros ou perdas.

Uma empresa, por sua vez, também necessita acompanhar várias rotinas do dia a dia. Para tal finalidade existem sistemas de grande porte, que ajudam a gerenciar desde estoques, lançamentos contábeis, emissão de notas, fluxo de caixa e compras até centrais de atendimento e relacionamento com o cliente etc. Nesses sistemas existe, de forma quase imperceptível, a Estatística. As ferramentas estatísticas indicam tendências e propiciam bases para a tomada de decisão em vários momentos da vida empresarial.

Apesar de grande aplicabilidade da Estatística em vários ramos do conhecimento, no entanto ela é utilizada em sala de aula, na maioria das vezes, somente como uma forma de organização de dados, através de gráficos e tabelas e muitas das atividades propostas são repetições previamente estabelecidas.

De forma a nortear a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares de todo o Brasil, indicando as competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade, em 2017 foi publicada a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BNCC, 2020). Ele é um documento de caráter normativo, que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Neste documento estão descritas as Habilidades relativas a diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio.

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística).

Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes têm oportunidades não apenas de interpretar Estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo repre-

sentações gráficas adequadas. Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

Abaixo selecionamos as habilidades voltadas à Estatística, na BNCC, para o ensino médio, que são:

- (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas Estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas;
- (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos;
- (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);
- (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras Estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem Estatística, geometria e álgebra;
- (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

É importante que a BNCC norteie o professor da Educação Básica na melhor forma possível para que ele desenvolva nos alunos as habilidades necessárias que os tornem preparados para o mercado de trabalho, tendo uma compreensão da matemática e da Estatística e que possam aplicá-las também no seu dia a dia.

## 4.2 Sugestões de atividades

Nesta Seção serão apresentadas algumas sugestões de atividades, no formato de dois planos de aula, que podem ser desenvolvidas em sala de aula levando em consideração as habilidades inerentes ao ensino da Estatística que aqui foram discutidas.

Sabemos que as realidades das escolas de ensino médio no Brasil são bem distintas entre si. Há escolas com muitos recursos materiais e informáticos e outras não. Nesse sentido, no primeiro plano de aula foram sugeridas atividades que podem ser desenvolvidas com recursos materiais simples. No segundo plano de aula são sugeridas atividades que demandam recursos de informática. No entanto, tanto um plano como o outro pode ser adaptado pelo professor conforme a realidade da sua escola.

### 4.2.1 Plano de Aula 1

#### TEMA:

Análise e interpretação de tabelas e gráficos em meios de comunicação.

#### SÉRIE:

3º ano do ensino médio.

#### DURAÇÃO:

As atividades têm duração total de 4h30min, sendo realizadas em três partes.

#### CONTEÚDO

- Tratamento da informação;
- Representação e análise de dados em tabelas e gráficos.

#### OBJETIVOS:

- Geral: Promover a leitura e a interpretação de gráficos e tabelas como textos de divulgação de informação presentes nas mídias impressas, de modo que os alunos

tenham subsídios para a sua análise, tornando-se críticos, e tenham condições de escolher a melhor forma para comunicar suas conclusões.

- Específicos:
  - Compreender as diversas formas de representação de gráficos e tabelas;
  - Ler e interpretar dados expressos em gráficos de barras, de colunas e de setores;
  - Observar a aplicação de dados estatísticos no mundo em que vivemos, reconhecendo assim a importância da Estatística.

### DESENVOLVIMENTO - SEQUÊNCIA DIDÁTICA:

A sequência de atividades vai desde uma aula expositiva, incentivando a participação ativa dos alunos, além de momentos onde ocorrerão a interação proporcionada pela atividade em grupo e socialização dos resultados.

Na primeira parte (1h30min) haverá uma aula expositiva, onde o professor deve:

- Recordar conceitos que podem ser utilizados na resolução das atividades, tais como: porcentagem, tabelas e variados tipos de gráficos;
- Apresentar o conceito de Tabela e falar dos elementos que compõem este tipo de representação, como: título, subtítulo, texto explicativo, cabeçalho e colunas indicadoras, corpo e fonte;
- Apresentar o conceito de Gráfico e falar dos seus principais requisitos fundamentais, como: simplicidade, clareza e veracidade. Falar também dos seus elementos: título, subtítulo ou texto explicativo, fonte, eixos verticais e horizontais, legendas, etc;
- Mostrar como estes elementos estatísticos podem ser encontradas com facilidade nas mídias impressas. Aqui o professor deve ir além das propostas dos textos didáticos onde, em geral, por exemplo, aparecem tabelas de dupla entrada com apenas duas variáveis. Deve mostrar como na mídia as tabelas assumem formas mais complexas e sua leitura muda em função da informação que buscamos;
- Solicitar aos alunos, para a próxima atividade, que tragam à sala de aula materiais como jornais, revistas e anúncios publicitários que contenham informações em gráficos de barras, de setor, linhas e tabelas.

Na segunda parte (1h30min), o professor:

- Irá dividir a turma em grupos de 5 ou 6 alunos;

- Realizará a distribuição de material adicional relativo a jornais diários e revistas semanais de notícias;
- Solicitará aos participantes que manuseiem as publicações recebidas e recortem todas as notícias que com elementos de Estatística;
- Conduzirá as atividades de maneira a contemplar esta sequência e procurando interferir o mínimo no desenvolvimento dos procedimentos, de forma que a apropriação dos elementos em estudo, em cada grupo, ocorrerá pela interação entre os participantes;
- Oferecerá aos grupos suporte bibliográfico por meio de livros didáticos de matemática de Ensino Fundamental e Médio, para que o grupo possa manusear os livros e procurar sanar suas dúvidas com a finalidade de classificar os elementos de Estatística presentes no material recortado;
- Após a classificação por eles elaborada, será entregue uma folha de papel pardo ou cartolina a cada grupo para a confecção de um cartaz com o objetivo de organizar uma apresentação dos elementos coletados e selecionados. O cartaz deverá conter um título e cada uma das reportagens utilizadas deverá citar a fonte, isto é, o nome e a data do periódico da qual foi retirada. Também na composição dos cartazes deverá constar a análise dos elementos estatísticos, presentes nas reportagens e sua relevância ao entendimento das notícias veiculadas;
- Fomentará, ao longo do trabalho, a parceria entre os grupos de forma que eles possam se ajudar. O professor deve sempre apoiar os alunos em suas dificuldades, mas sempre procurando não interferir diretamente na realização da atividade;

A terceira parte (1h30min) deve consistir, por parte de cada grupo, numa apresentação oral dos cartazes (de 10 a 15 min cada) e do que foi vivenciado nas etapas anteriores, com a participação de todos os componentes de cada grupo. Os grupos que apresentarem, devem ressaltar os elementos estatísticos contidos em cada recorte, falando da importância dos gráficos e das tabelas para um melhor entendimento das notícias.

#### RECURSOS:

- Quadro, pincel para quadro branco (ou giz se for o caso) e apagador;
- Um computador e um projetor;
- Jornais e revistas;

- Papel pardo ou cartolina, cola, fita adesiva e pincéis para escrita dos cartazes.

#### AValiação:

- Avaliar durante as atividades: estimulando, orientando e desafiando os alunos;
- Avaliar a participação e o envolvimento de cada participante dentro do seu respectivo grupo;
- Avaliar, durante a apresentação oral dos cartazes, a assimilação dos conceitos aprendidos.

#### BIBLIOGRAFIA:

- DANTE, L. R. 3º volume da Coleção Contextos e Aplicações. 4ª edição, 2016. Editora ática;
- IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D. N. A.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R. Coleção Matemática: Ciências e Aplicações. São Paulo: Saraiva, 2016. 9ª edição;
- LIMA, E. L., CARVALHO, P. C., MORGADO, A. e WAGNER, E. Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

### **4.2.2 Plano de Aula 2**

#### TEMA:

A aplicação da Estatística na análise de investimento.

#### SÉRIE:

3º ano do ensino médio.

#### DURAÇÃO:

A atividade tem duração total de 1h30min.

#### CONTEÚDO:

- Medidas de tendência central e dispersão;
- Aplicação prática dos conceitos revisados com o uso do MS Excel.

## OBJETIVOS:

- Geral: Aplicar os conceitos relativos às medidas de tendência central e de dispersão numa situação problema, numa análise inicial de investimento.
- Específicos:
  - Revisar os conceitos de medidas de tendência central (média, moda e mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);
  - Compreender os conceitos básicos de investimento e ativos financeiros (ações e fundos de investimento), entendendo como o risco e o retorno influencia na escolha dos investimentos;
  - Aplicar os conceitos estatísticos revisados numa situação problema relacionada à uma análise inicial de alguns investimentos.

## DESENVOLVIMENTO - SEQUÊNCIA DIDÁTICA:

Inicialmente o professor fará uma aula expositiva (45 minutos), onde o professor deve:

- Revisar os conceitos de medidas de tendência central (média, moda e mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). Considera-se aqui que os alunos já tenham estudados estes conceitos em aulas anteriores;
- Apresentar os conceitos básicos de investimento, ativos financeiros (ações e fundos de investimento), risco e retorno, entendendo como estes dois últimos influenciam na escolha dos investimentos e estão associados aos conceitos de média e variância/desvio padrão;
- Mostrar exemplos de sites onde aluno pode obter dados de fundos de investimento e/ou ações.

Depois da aula expositiva o professor procederá a atividade prática (45 minutos) com o uso do MS Excel (caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, o professor poderá dividir a turma em grupos de 2 ou 3 alunos). Nela o professor irá:

- Apresentar os dados de retornos mensais de ao menos 10 ações, nos últimos 12 meses;
- Fornecer um arquivo pré-formatado, em Excel, onde estará disponível uma tabela em que os alunos irão escolher 3 das ações apresentadas e incluirão os dados de retorno nela. Neste arquivo também terá um gráfico pré-formatado onde, ao incluir os dados, aparecerá o gráfico da série dos retornos mensais, semelhante à apresentada na Figura 3.1 deste trabalho;



- Com base no gráfico, pedir aos alunos que calculem a amplitude;
- Pedir para os alunos utilizarem as funções MÉDIA, MED, VAR.A e RAIZ para calcular a média aritmética, a mediana, a variância e o desvio padrão de cada ação. O professor deve demonstrar aqui como fazer e sempre auxiliá-los em eventuais dificuldades;
- Questionar os alunos com base nos cálculos apresentados (outros questionamentos podem ser feitos):
  - Qual ação ofereceu maior média (retorno)?
  - Qual ação ofereceu maior risco?
  - Em quais casos tivemos a média maior que a mediana? E o inverso? Qual a razão de um ou outro ocorrer? (Importante aqui o professor conduzir os alunos para que verifiquem e descubram que para que a média seja maior do que a mediana, os retornos acima da mediana devem, em média, se afastar mais dela do que as situadas abaixo da mediana).
  - Se você tivesse R\$ 1.000,00 e quisesse investir em uma das ações, qual escolheria? Por quê?

Ao final da atividade, ressaltar aos alunos que rentabilidade passada dos fundos não é garantia de rentabilidade futura e que há outros fatores a serem considerados. No entanto, aqui nesta atividade prática, o objetivo foi o de mostrar, mesmo que numa forma mais superficial, como a Estatística é usada em análises financeiras.

#### RECURSOS:

- Quadro, pincel para quadro branco (ou giz se for o caso) e apagador;
- Um computador e um projetor;
- Computadores com o MS Excel instalado.

#### AValiação:

- Avaliar durante as atividades: estimulando, orientando e desafiando os alunos;
- Registrar os avanços da turma de uma forma geral e de cada aluno individualmente, acompanhando, dessa forma, o desenvolvimento dos estudantes.

#### BIBLIOGRAFIA:

- DANTE, L. R. 3º volume da Coleção Contextos e Aplicações. 4ª edição, 2016. Editora ática;
- IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D. N. A.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R. Coleção Matemática: Ciências e Aplicações. São Paulo: Saraiva, 2016. 9ª edição;
- LIMA, E. L., CARVALHO, P. C., MORGADO, A. e WAGNER, E. Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Recorda-se que o presente trabalho teve como objetivo mostrar a importância da Estatística na decisão de investimento, por meio da aplicação do modelo proposto por Markowitz, apresentando-o como uma opção de ferramenta de apoio, ao investidor iniciante, na seleção de carteiras de investimento. Além disso, esta análise motivou as sugestões de atividades em sala de aula, no Ensino Básico, apresentadas no capítulo anterior.

Para o alcance deste objetivo, foram apresentados os conceitos teóricos acerca do modelo e os conceitos estatísticos envolvidos. Posteriormente se fez uma aplicação prática do modelo e, com isso, realizou-se uma abordagem que une a teoria à prática a partir do momento que busca operacionalizar os conceitos teóricos. Ressaltamos ainda a importância do ensino da Estatística e de como esta deve ser ensinada de uma forma mais aplicada e conectada com a realidade, de forma que, no futuro, tendo os alunos entendido a aplicabilidade dos conceitos, estejam preparados para aplicar a Estatística no seu dia a dia e no mercado de trabalho. E este trabalho é um exemplo de como a Estatística pode ser aplicada num contexto real, onde foi possível mostrar a sua utilização como um importante instrumento de auxílio ao investidor.

A literatura fala constantemente sobre as vantagens da diversificação de um investimento para a redução do risco e a aplicação neste trabalho foi mostrada num exemplo prático. Procurou-se mostrar que a diversificação de ativos melhora o desempenho de um investimento, ao contrário do que ocorre com o investidor que aplica todo o seu capital em um único ativo. Os resultados apresentados neste trabalho mostram a eficiência da diversificação de ativos partindo-se do pressuposto de que o objetivo do investidor é maximizar o seu retorno minimizando o seu risco.

Muitos trabalhos ao longo do tempo atestaram a eficácia do modelo e há uma vasta literatura a respeito, como a já citada ao longo deste trabalho. Trabalhos como os de Gonçalves Júnior, Pamplona e Montevechi (2002), Soares (2011), Guimarães (2018), dentre outros, ratificaram os seus benefícios. A importância do modelo foi tamanha

que rendeu ao próprio Markowitz o prêmio Nobel em Economia no ano de 1990, em reconhecimento à sua relevância à análise de investimentos.

O uso do MS Excel, que é uma ferramenta bem conhecida e acessada pelos usuários, facilitou o trabalho na realização dos cálculos das carteiras, possibilitando que mesmo os investidores com poucos conhecimentos do mercado possam selecionar carteiras que atendam suas exigências.

Dessa forma, esta teoria e prática mostrou que o modelo de Markowitz, com o apoio de um software como o Excel, pode sim ser usada como uma ferramenta de apoio, ao investidor iniciante na decisão dos investimentos.

No entanto, é importante ressaltar que não foi pretensão deste trabalho sugerir a utilização do modelo de Markowitz como a única ferramenta ao investidor iniciante para a seleção de carteiras de investimento. O mercado financeiro é muito mais complexo que o apresentado nas análises deste trabalho.

No que se refere à decisão de investimento, é importante que o investidor esteja ciente de que não há garantia quanto à rentabilidade. Ressalta-se que a rentabilidade passada não é garantia de rentabilidade futura. Os investimentos realizados no mercado envolvem riscos, podendo haver perda do capital investido. Assim, é necessária uma avaliação ponderada e refletida acerca da adequação da aplicação escolhida em relação aos objetivos pretendidos (de curto ou longo prazo) e ao perfil do investidor (mais ou menos avesso ao risco).

Por isso é recomendado ao investidor iniciante procurar conhecer melhor o mercado financeiro e sobre as técnicas de investimento. O Portal do Investidor (CVM, 2020) pode ser um ótimo ponto de partida e uma opção, ao investidor iniciante, para começar a adquirir este conhecimento antes de realizar os seus investimentos.

Como sugestão de trabalhos futuros, pode-se comparar o desempenho previsto de uma carteira ótima de ações ou fundos de investimento com o desempenho real obtido por esta carteira, com o objetivo de verificar se os seus resultados estão de acordo com o que aconteceu na realidade, usando como base os dados históricos. Podem-se fazer comparações também em outros períodos onde houve situações externas que influenciaram o mercado de ações, como num período de crise econômica. Sobre o Ensino de Estatística, estudos podem ser realizados no sentido de oferecer ao professor sugestões de outras aplicações práticas (seja na área de investimentos ou mesmo em outras áreas) e contextualizadas desta disciplina em sala de aula, utilizando outros softwares (além do Excel) acessíveis aos alunos.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: < <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/> >. Acesso em: 15 Mai. 2020.

BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan. **Fundamentos de investimentos**. AMGH Editora, 2014.

BRUNI, Adriano Leal. **Avaliação de investimentos**. Atlas, 2013.

CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A.C. **Matemática Discreta**. SBM (Coleção PROF-MAT, 2ª edição, 2015).

CASAROTTO Filho, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Análise de investimentos**. Atlas, 2010.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino. **Metodologia científica: para uso dos estudantes universitários**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística fácil**. Editora Saraiva, 2009.

CVM. **Portal do Investidor**. Disponível em: < <https://www.investidor.gov.br/> >. Acesso em: 07 Jan. 2020.

ELTON, Edwin; GRUBER, Martin; BROWN, Stephen. **Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos**. Elsevier Brasil, 2012.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. Atlas São Paulo,

2002.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração Financeira**. 10ª Edição. São Paulo: Person Addison Wesley, 2004.

GONÇALVES JUNIOR, Cleber; PAMPLONA, Edson de O.; MONTEVECHI, José A. **Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)**. IX SIMPEP - Simpósio de Engenharia de Produção, 2002.

GUIMARÃES, Igor Silva. **Análise de investimento pela ótica da fronteira eficiente de Markowitz: Ativos brasileiros selecionados em 2016**. Ebook Kindle-Amazon, 2018.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

IGNÁCIO, Sergio Aparecido. **Importância da estatística para o processo de conhecimento e tomada de decisão**. Revista Paranaense de Desenvolvimento, (118):175-192, 2010.

KNIGHT, Frank Hyneman. **Risco, incerteza e lucro**. Expressão e Cultura, 1972.

LOPES, C. A. E. et al. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular**. 1998.

MACEDO JR., Jurandir Sell. **Teoria do prospecto: uma investigação utilizando simulação de investimento**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio selection**. The journal of Finance, 7(1):77-91, 1952.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estatística geral e aplicada**. Atlas, 6ª edição, 2019.

McCLAVE, J. T.; BENSON, P. G.; SINCICH, T. **Estatística para administração e economia**. Traduzido por Fabrício Pereira Soares e Fernando Sampaio Filho. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton Oliveira. **Estatística básica**. Editora Saraiva, 9ª edição, 2017.

NOGUEIRA, Paulo Apolinário; VICTER, Eline das Flores; NOVIKOFF, Cristina. **Roteiro didático para o ensino de estatística: a cidadania na/pela matemática**. Escola de Educação, ciências, letras, artes e humanidades. Universidade Unigranrio. < [http : //www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/relatorios/produto-paulo - apolinario.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/relatorios/produto-paulo-apolinario.pdf) >.

PINHEIRO, Carlos. **Investimentos: teoria e prática através do Excel**. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2006.

ROSS, Stephen A. et al. **Administração Financeira**. AMGH Editora, 2015.

SÁ, Geraldo Tosta de. **Administração de investimentos: teoria de carteiras e gerenciamento do risco**. Qualitymark, 1999.

SCHIROKY, Marco Moises. **Seleção de carteira através do modelo de Markowitz**. Trabalho de conclusão de curso de especialização, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

SIERVO, Juliano Squarson Di. **Aplicação de programação linear na seleção de carteiras de investimento**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

SOARES, Vanessa de Carvalho Alves. **Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

VIRGILLITO, Salvatore Benito. **Estatística Aplicada**. Saraiva, São Paulo, 1ª edição, 2017.

# Apêndice A

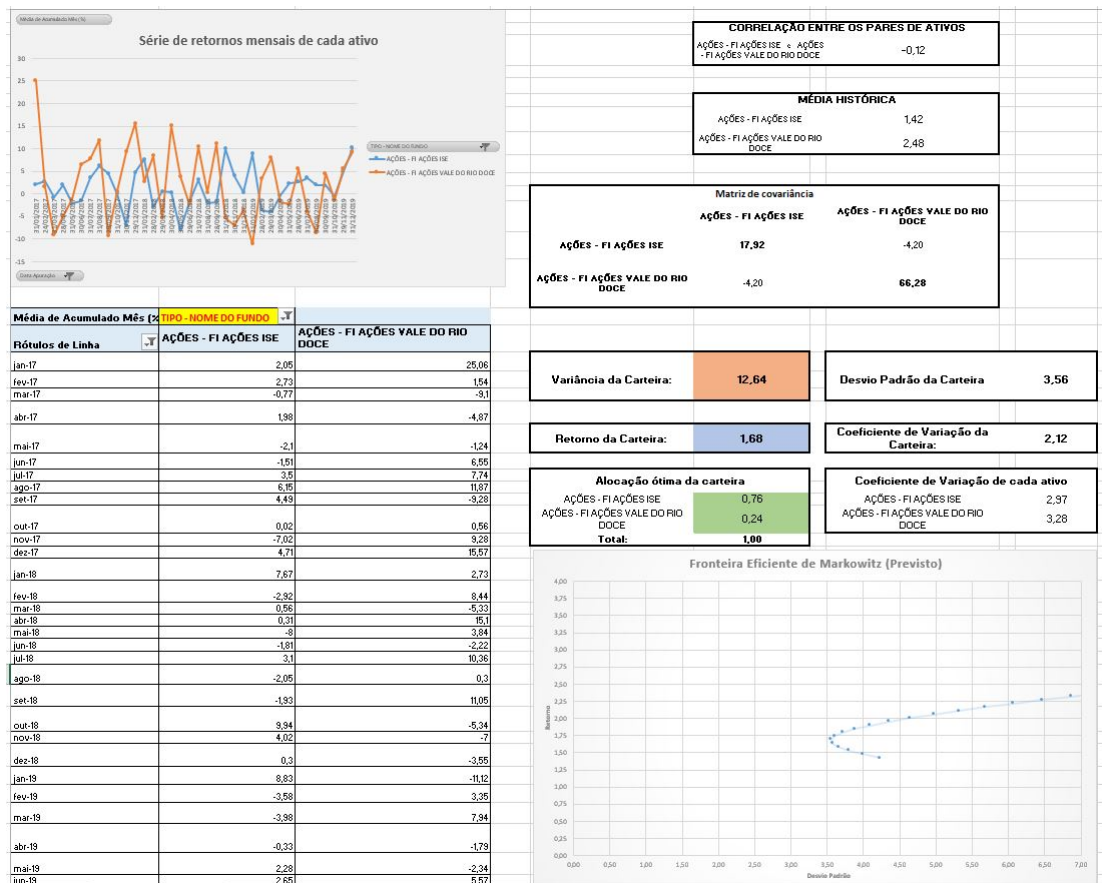
## Informações Gerais dos Fundos

Fundos	Visão Geral	Aplicação Inicial (R\$)	Taxa de Administração (% a.a)
A FI AÇÕES ISE	O CAIXA FI Ações ISE tem o objetivo de alocar recursos em carteira composta prioritariamente por ações de empresas que se destaquem em sustentabilidade empresarial e responsabilidade social, a fim de obter rentabilidade compatível à variação do ISE - Índice de Sustentabilidade Empresarial. O ISE é indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de empresas com reconhecido comprometimento com a sustentabilidade empresarial, baseada em eficiência econômica, equilíbrio ambiental, justiça social e governança corporativa.	500,00	1,50
B FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	O CAIXA FI Ações Vale do Rio Doce tem o objetivo de alocar recursos em carteira composta preponderantemente por ações de emissão da Companhia Vale do Rio Doce S.A. (VALE). A Vale é uma companhia de destaque mundial na produção mundial de minérios como o ferro, pelotas e níquel.	1000,00	2,00
C FI AÇÕES PETROBRÁS	O CAIXA FI Ações Petrobras tem o objetivo de alocar recursos em carteira composta preponderantemente por ações de emissão da Petróleo Brasileiro S.A. -Petrobras. O Fundo tem como indicador de desempenho a variação das ações ordinárias, Petro ON Fechamento (PETR3). A Petrobrás é uma empresa com destaque mundial no setor energético, com a exploração de óleo e gás.	1000,00	1,50
D FI OURO MULTIMERCADO LP	Indicado para quem busca no metal ouro uma reserva de valor e proteção do patrimônio, o CAIXA FI Ouro Multimercado Longo Prazo tem como objetivo alocar recursos em carteira diversificada de ativos financeiros e demais modalidades operacionais disponíveis no âmbito do mercado financeiro e de capitais, nacional e internacional, investindo preferencialmente em ativos que tenham como principal fator de risco a variação do preço do índice Gold London PM Fixing ("GOLDLNPM Index"), buscando assim retornos atrelados à variação do preço do ouro na Bolsa de Londres.	5000,00	1,50
E FI AÇÕES DIVIDENDOS	O CAIXA FI Ações Dividendos tem o objetivo de investir em carteira composta prioritariamente de ações de companhias com histórico e/ou potencial de distribuição de resultados por meio do pagamento de dividendos, juros sobre o capital e outros direitos. A distribuição destes resultados são incorporados ao patrimônio do Fundo.	1.000,00	1,50
F FI AÇÕES IBOVESPA ATIVO	O objetivo do fundo é alocar recursos em ativos financeiros, prioritariamente ações, a fim de obter rentabilidade superior a variação do índice Bovespa. O Ibovespa é o indicador de desempenho médio das cotações de ações de companhias listadas na B3 de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.	1.000,00	3,00
G FI AÇÕES PETROBRÁS	O CAIXA FI Ações Petrobras tem o objetivo de alocar recursos em carteira composta preponderantemente por ações de emissão da Petróleo Brasileiro S.A. -Petrobras. O Fundo tem como indicador de desempenho a variação das ações ordinárias, Petro ON Fechamento (PETR3). A Petrobrás é uma empresa com destaque mundial no setor energético, com a exploração de óleo e gás.	1.000,00	1,50
H FIC AÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA	O FIC em Fundos de Investimentos em Ações Caixa E-Fundo Ibovespa é um fundo de ações comercializado exclusivamente via Internet Banking Caixa, que oferece ao cliente a praticidade e comodidade de aplicar de qualquer lugar, sem a necessidade de deslocamento até uma das agências da Caixa. O objetivo do Fundo é alocar recursos em cotas de fundos de investimentos cujos ativos financeiros sejam, prioritariamente ações, a fim de obter rentabilidade compatível à variação do Ibovespa. O Ibovespa é o indicador de desempenho médio das cotações de ações de companhias listadas na B3 de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.	500,00	1,60



# Apêndice B

## Aspecto geral da planilha Excel



# Apêndice C

## Série histórica de retornos mensais dos ativos A e B da carteira $p$

Acumulado Mês (%)	TIPO - NOME DO FUNDO	
Rótulos de Linha	AÇÕES - FI AÇÕES ISE	AÇÕES - FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE
jan-17	2,05	25,06
fev-17	2,73	1,54
mar-17	-0,77	-9,1
abr-17	1,98	-4,87
mai-17	-2,1	-1,24
jun-17	-1,51	6,55
jul-17	3,5	7,74
ago-17	6,15	11,87
set-17	4,49	-9,28
out-17	0,02	0,56
nov-17	-7,02	9,28
dez-17	4,71	15,57
jan-18	7,67	2,73
fev-18	-2,92	8,44
mar-18	0,56	-5,33
abr-18	0,31	15,1
mai-18	-8	3,84
jun-18	-1,81	-2,22
jul-18	3,1	10,36
ago-18	-2,05	0,3
set-18	-1,93	11,05
out-18	9,94	-5,34
nov-18	4,02	-7
dez-18	0,3	-3,55
jan-19	8,83	-11,12
fev-19	-3,58	3,35
mar-19	-3,98	7,94
abr-19	-0,33	-1,79
mai-19	2,28	-2,34
jun-19	2,65	5,57
jul-19	3,55	-4,04
ago-19	2,01	-8,63
set-19	1,87	4,58
out-19	-0,58	-1,31
nov-19	4,93	5,7
dez-19	10,22	9,27

## Apêndice D

Série histórica de retornos mensais dos ativos A, B, C e D das carteiras  $q_1$  e  $q_2$

Acumulado Mês (%)	TIPO - NOME DO FUNDO			
Rótulos de Linha	FI AÇÕES ISE	FI AÇÕES PETROBRÁS	FI AÇÕES VALE DO RIO DOCE	FI OURO MULTIMERCADO LP
jan-17	2,05	-4,55	25,06	5,63
fev-17	2,73	-1,52	1,54	3,96
mar-17	-0,77	-5,19	-9,1	0,02
abr-17	1,98	-5,3	-4,87	2,1
mai-17	-2,1	-5,27	-1,24	0,42
jun-17	-1,51	-3,2	6,55	-1,5
jul-17	3,5	4,41	7,74	2,67
ago-17	6,15	1,09	11,87	4,52
set-17	4,49	13,01	-9,28	-2,83
out-17	0,02	10,03	0,56	-0,56
nov-17	-7,02	-8,54	9,28	0,67
dez-17	4,71	5,88	15,57	2,36
jan-18	7,67	25,76	2,73	3,29
fev-18	-2,92	8,56	8,44	-1,8
mar-18	0,56	0,77	-5,33	0,77
abr-18	0,31	5,29	15,1	-0,98
mai-18	-8	-9,75	3,84	-0,94
jun-18	-1,81	-12,57	-2,22	-0,94
jul-18	3,1	12,79	10,36	-2,79
ago-18	-2,05	0,73	0,3	-1,95
set-18	-1,93	9,59	11,05	-0,61
out-18	9,94	24,89	-5,34	2,18
nov-18	4,02	-6,97	-7	0,45
dez-18	0,3	-9,61	-3,55	5,33
jan-19	8,83	16,1	-11,12	2,86
fev-19	-3,58	0,93	3,35	-0,52
mar-19	-3,98	4,18	7,94	-1,7
abr-19	-0,33	-3,91	-1,79	-0,98
mai-19	2,28	-5,53	-2,34	1,93
jun-19	2,65	6,17	5,57	8,2
jul-19	3,55	-4,22	-4,04	-0,02
ago-19	2,01	-1,22	-8,63	7,28
set-19	1,87	6,46	4,58	-2,8
out-19	-0,58	8,33	-1,31	2,4
nov-19	4,93	-4,09	5,7	-2,95
dez-19	10,22	2,39	9,27	2,93

# Apêndice E

## Série histórica de retornos mensais dos ativos E, F, G e H da carteira $t$

Acumulado Mês (%)	TIPO - NOME DO			
Rótulos de Linha	ÁÇÕES - FI ÁÇÕES DIVIDENDOS	ÁÇÕES - FI ÁÇÕES IBOVESPA ATIVO	ÁÇÕES - FI ÁÇÕES PETROBRÁS	ÁÇÕES - FI ÁÇÕES E-FUNDOS IBOVESPA
jan-17	4,45	6,53	-4,55	7,13
fev-17	4,05	3,14	-1,52	2,98
mar-17	-0,96	-2,9	-5,19	-2,65
abr-17	0,79	0,33	-5,3	0,55
mai-17	-3,49	-4,65	-5,27	-4,22
jun-17	-0,6	-0,25	-3,2	0,15
jul-17	6,92	4,61	4,41	4,63
ago-17	5,97	7,35	1,09	7,26
set-17	2,94	5,84	13,01	4,7
out-17	-4,21	0,32	10,03	-0,12
nov-17	-1,26	-3,94	-8,54	-3,24
dez-17	7,74	5,95	5,88	6,08
jan-18	4,81	11,33	25,76	10,88
fev-18	0,56	0,76	8,56	0,45
mar-18	-1,81	-0,88	0,77	-0,09
abr-18	-2,7	0,31	5,29	0,74
mai-18	-7,21	-11,27	-9,75	-10,91
jun-18	-6,27	-6,1	-12,57	-5,27
jul-18	6,52	8,98	12,79	8,62
ago-18	-2,29	-3,92	0,73	-3,21
set-18	-0,47	2,44	9,59	3,33
out-18	12,27	9,58	24,89	9,92
nov-18	5,44	1,4	-6,97	2,22
dez-18	1,61	-2,32	-9,61	-1,84
jan-19	13,35	11,12	16,1	10,51
fev-19	-3,11	-2,81	0,93	-1,9
mar-19	-2,27	-0,71	4,18	-0,28
abr-19	1,11	-0,07	-3,91	0,86
mai-19	1,2	0,63	-5,53	0,59
jun-19	3,44	4,01	6,17	3,85
jul-19	3,51	1,05	-4,22	0,67
ago-19	0,72	-0,29	-1,22	-0,78
set-19	1,4	2,8	6,46	3,38
out-19	1,48	2,21	8,33	2,17
nov-19	3,62	1,15	-4,09	0,87
dez-19	12,21	7,78	2,39	6,67