



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico no ensino médio: uma proposta de ensino potencialmente significativa.

Clenilson Alves Cortez

BRASÍLIA – DF
2019



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico no ensino médio: uma proposta de ensino potencialmente significativa.

Clenilson Alves Cortez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade de Brasília no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:
Prof. Dr. Olavo Leopoldino da Silva Filho

BRASÍLIA – DF
2019

RELATÓRIO DE DEFESA DE PÓS-GRADUAÇÃO
GRADUATE PROGRAM DEFENSE REPORT

1. INFORMAÇÕES DO CURSO/ PROGRAM DATA	
MESTRADO/ MASTER'S (<input checked="" type="checkbox"/>)	DOUTORADO/ DOCTORAL (<input type="checkbox"/>)
Cotutela/ Cotutelle: (<input checked="" type="checkbox"/>) Não/ No (<input type="checkbox"/>) Sim, instituição estrangeira/ Yes, partner institution:	

2. IDENTIFICAÇÃO DO(A) ALUNO(A)/ STUDENT INFORMATION		
Nome/ Name: Clenilson Alves Cortez	Matrícula/ Registration Number: 18/0069926	
Curso/ Program: Ensino de Física (Profissionalizante)		
Área de Concentração/ Field of Study:	Código/ Code: 591	Departamento/ Department: IFD

3. SESSÃO DE DEFESA/ DEFENSE SESSION	
(<input checked="" type="checkbox"/>) Dissertação/ Master's Dissertation (<input type="checkbox"/>) Tese/ Doctoral Thesis	
Título/ Title: "Utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico no ensino médio: uma proposta de ensino potencialmente significativa"	

4. PRESIDENTE DA COMISSÃO EXAMINADORA/ CHAIR OF THE EXAMINING BOARD	
Nome/ Name: Olavo Leopoldino da Silva Filho Titulação/ Education Level: Presidente - (Doutor) Unidade Acadêmica/ Academic Unity: IFD	

5. COMISSÃO EXAMINADORA/ EXAMINING BOARD		
Nome(Titulação)/ Name (Educational Level)	Função/Instituição - Role/Institution	Membro por videoconferência (sim/não) Video-conference member (yes/no)
Marcello Ferreira (Doutor)	Membro Interno vinculado ao programa Instituto de Física	Não
Carmen Pimentel Cintra do Prado (Doutor)	Membro Externo não vinculado ao programa Universidade de São Paulo	Não
Vanessa Carvalho de Andrade (Doutor)	Membro Interno (IFD) (Suplente)/ (Alternate)	Não

6. RESULTADO/ RESULT	
A Comissão Examinadora, em 18/12/2019 após exame da Defesa e arguição do(a) candidato(a), decidiu / The Examining Board, on 18/12/2019, after examining the Defense and inquiry of the candidate has decided to: (<input checked="" type="checkbox"/>) Pela aprovação do trabalho/ approve the work. (<input type="checkbox"/>) Pela aprovação do trabalho, com revisão de forma, indicando o prazo de até 30 dias para apresentação definitiva do trabalho revisado/ approve the work, pending formal review, assigning up to 30 days for the final delivery of the reviewed work. (<input type="checkbox"/>) Pela reformulação do trabalho, indicando o prazo de XX dias para nova versão/ request the reformulation of the work, assigning XX days for the new version. (<input type="checkbox"/>) Pela reprovação do trabalho/ not approve the work.	
Este relatório não é conclusivo e não tem efeitos legais sem a homologação do Decanato de Pós-Graduação da Universidade de Brasília/ This reporte is not conclusive and has no legal effects prior to validation by the Dean of Graduate Programs of the University of Brasilia.	

Em caso de revisão de forma, a homologação ficará condicionada à entrega definitiva do trabalho revisado à Coordenação do Programa, devendo este Relatório de Defesa ser acompanhado pelo Despacho do(a) coordenador(a) do programa que informará um dos seguintes resultados/ In case of formal review, the validation will be conditioned to the final delivery of the reviewed work to the Coordination of the Program. In such cases, this Defense Report must be supplemented with a notice by the coordinator with one of the following indications:

1. O (A) discente apresentou a revisão de forma e o trabalho foi aprovado/ The student presented the formal review and the work has been approved.
2. O (A) discente apresentou a revisão de forma e o trabalho foi reprovado/ The student presented the formal review and the work has not been approved.
3. O (A) discente não apresentou a revisão de forma/ The student did not present the formal review.

Declaro aceitação dos termos e condições que regem o acesso como usuário externo na Universidade de Brasília, conforme normas estabelecidas pela Universidade e demais normas aplicáveis, admitindo como válida a assinatura eletrônica por usuário e senha. É minha responsabilidade exclusiva o sigilo da senha de acesso ao sistema e o teor dos documentos e informações prestadas por mim. Comprometo-me a apresentar documentos originais inseridos por mim no sistema, que venham a ser solicitados pela Universidade de Brasília. Declaro estar ciente de que em caso de petições eletrônicas, esses, somente poderão ser realizados entre 3 horas e 23 horas e 59 minutos e 59 segundos, horário de Brasília. Estou ciente de que o acompanhamento de solicitações poderá ser realizado no ambiente de usuário externo do SEI-UnB.

I hereby declare that I accept the terms and conditions established for access as an external user of the University of Brasilia, according to the rules set forth by the University and all other applicable rules. I also accept as valid the electronic signature by user and password. It is my sole responsibility the secrecy of the password for accessing the system and the content of the documents and information provided by me. I commit to present the original documents inserted into the system by me should they be requested by the University of Brasilia. I declare to be aware electronic demands can only be send between 3:00 and 23:59, Brasilia official time. I am aware I can track the status of requests via the External User environment of SEI-UnB.

Informações/ Attention:

Documento deverá ser assinado por/ This document must be signed by:

- Presidente da Comissão Examinadora/ The Chair of the Examining Board
- Membros participantes da Comissão Examinadora/ Members of the Examining Board
- Coordenador(a) do Curso/ Coordinator of the Program
- Discente/ Student



Documento assinado eletronicamente por **Marcello Ferreira, Professor(a) do Magistério Superior do Programa de Pós-Graduação em Física**, em 18/12/2019, às 20:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Olavo Leopoldino da Silva Filho, Professor(a) do Magistério Superior do Programa de Pós-Graduação em Física**, em 18/12/2019, às 23:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Clenilson Alves Cortez, Usuário Externo**, em 19/12/2019, às 07:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Carmen Pimentel Cintra do Prado, Usuário Externo**, em 19/12/2019, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.unb.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4815516** e o código CRC **59DD92F1**.

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha catalográfica elaborada automaticamente, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

CC828u Cortez, Clenilson Alves
Utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico no ensino médio: uma proposta de ensino potencialmente significativa. /
Clenilson Alves Cortez; orientador Olavo Leopoldino da Silva Filho. -- Brasília, 2019.
137 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Ensino de Física) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Ensino de Física. 2. Aprendizagem significativa. 3. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. 4. Teoria do caos. 5. Pêndulo duplo. I. Leopoldino da Silva Filho, Olavo, orient. II. Título.

Antes, reverenciai a Cristo como Senhor em vosso coração, estando sempre preparados para responder a qualquer pessoa que vos questionar quanto à esperança que há em vós.

1Pe 3.15 - KJA 1999

Agradecimentos

A YHWH, que nos dotou de conhecimento e sabedoria para estudar e conhecer as obras das Suas mãos.

À minha esposa, Jennifer Cortez, sábia e virtuosa, pela paciência e compreensão.

Aos meus filhos, Asafe Cortez e Dário Junior, minha herança, pela maravilhosa graça de ser pai.

À Maria Glória, *in memorian*.

À minha família: pai, irmãos (ãs), tios (as), sogra, cunhada e sobrinhos (as), pelo apoio e carinho.

Às matriarcas da família: Rosilda (vovó), Hildete (tia), Ilza (tia), Preta (tia), Lúcia (tia) e Buda (tia), pelos valores ensinados e por mostrar que a educação liberta.

À família providência, pelas intercessões.

Ao meu orientador, Professor Dr. Olavo Leopoldino da Silva Filho, pela paciência e pelas preciosas dicas na elaboração da presente pesquisa.

Aos membros da banca Professor Dr. Marcello Ferreira e a Professora Dr.^a Carmen Pimentel Cintra do Prado pela presteza e disposição.

À professora Dr.^a Maria de Fátima da Silva Verdeaux pela dedicação e empenho dado ao MNPEF-UnB.

Ao corpo docente do Programa Nacional de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física da Universidade de Brasília – MNPEF-UnB, pela dedicação e pelo empenho no decorrer do curso.

Aos colegas do Mestrado, turma 01/2018, em especial, aos amigos Alex, Guilherme e Neto, pela companhia nessa jornada.

Aos estudantes da terceira série do Ensino Médio, turma G e H, e à equipe do Centro de Ensino Médio 01 de – CEM 01 de Sobradinho, Distrito Federal, pelo empenho e pela disponibilidade.

À UnB, à Sociedade Brasileira de Física – SBF e à Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal – SEEDF, pela oportunidade e pelo incentivo.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico no ensino médio: uma proposta de ensino potencialmente significativa.

Clenilson Alves Cortez

Orientador:

Prof. Dr. Olavo Leopoldino da Silva Filho

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação Universidade de Brasília (UnB) no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física

O presente estudo aborda tópicos da “teoria do caos” e os organiza em uma sequência didática na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). Com o objetivo da promoção de novos conceitos relacionados à teoria do caos, as atividades se deram pela teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel complementada pelo uso dos mapas conceituais de Novak e das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas de Moreira. O movimento do pêndulo duplo, observado nos simuladores computacionais, foi assumido como situação-problema, sendo posteriormente atrelado aos conceitos básicos da teoria do caos. Assim, mediante a análise dos dados obtidos durante a aplicação da sequência didática, foi possível afirmar que o estudo do movimento do pêndulo duplo, em turmas de Ensino Médio, pode funcionar como um material potencialmente significativo na abordagem de conceitos relacionados à teoria do caos, uma vez que os resultados apontaram indícios de aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Ensino de Física; Aprendizagem significativa; Unidade de Ensino Potencialmente Significativa; Teoria do caos; Pêndulo duplo.

Brasília - UnB

Dezembro, 2019

ABSTRACT

The use of the double pendulum in the teaching of basic concepts of deterministic chaos theory in high school: a teaching proposal potentially meaningful.

Clenilson Alves Cortez

Orientador:

Prof. Dr. Olavo Leopoldino da Silva Filho

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação Universidade de Brasília (UnB) no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The present study addresses topics of "chaos theory" and organize them as a didactic sequence in the form of a Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU). In order to promote new concepts related to chaos theory, the activities were carried out using Ausubel theory of meaningful learning together with the conceptual maps from Novak and of the Potentially Significant Education Units of Moreira. The movement of the double pendulum, observed in computer simulators, was assumed as problematic situations, being later linked to the basic concepts of chaos theory. Thus, by analyzing the data obtained during the application of the didactic sequence, it was possible to affirm that the study of the double pendulum movement in high school classes can function as a potentially meaningful material in the approach to concepts related to chaos theory, since the results indicate signs of meaningful learning.

Keywords: Physics education; Meaningful Learning; Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU), Chaos theory; Double Pendulum.

Brasília - UnB

December, 2019

Lista de Figuras

Figura 1: <i>Continuum</i> entre Aprendizagem Mecânica e Aprendizagem Significativa...	27
Figura 2: Função do organizador prévio.	29
Figura 3: Teoria da assimilação de Ausubel.	31
Figura 4: Assimilação dissociável.	31
Figura 5: Representação para a aprendizagem subordinada.	32
Figura 6: Representação para aprendizagem superordenada.	32
Figura 7: Representação para aprendizagem combinatória.....	33
Figura 8: Diferenciação progressiva e reconciliação integradora.	34
Figura 9: Um mapa conceitual com os cinco elementos de Joseph D. Novak.....	36
Figura 10: Mapa conceitual - Sistema dinâmico.....	37
Figura 11: Exemplo de um simulador de pêndulos.....	45
Figura 12: Padrões para $x(0)=5.000$ (linha azul) e $x(0)=5.005$ (linha vermelha).	48
Figura 13: Divergência de dois padrões da previsão do tempo.....	49
Figura 14: Espaço de fase de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$	50
Figura 15: Atrator de Lorenz.....	50
Figura 16: Efeito Borboleta.....	51
Figura 17: Representação de um pêndulo simples.	53
Figura 18: Representação de um pêndulo duplo.	53
Figura 19: Evolução do movimento de um pêndulo duplo.	57
Figura 20: Imagem estroboscópica do pêndulo duplo, rastro de m_2	58
Figura 21: QR Code - Site do produto educacional.	60
Figura 22: Exemplo de resposta Fuga do Tema - FT.....	67
Figura 23: Exemplo de resposta Incoerente - IN.....	68
Figura 24: Exemplo de resposta Coerente - CO.....	68
Figura 25: Exemplo de resposta Resposta Adequada - RA.	69
Figura 26: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 01.	86
Figura 27: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 02.	86
Figura 28: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 03.	87
Figura 29: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 04.	87
Figura 30: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 05.	88
Figura 31: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 06.	88
Figura 32: Mapa Conceitual – Teoria do Caos	89

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Questionário de sondagem inicial – Turma 01.	81
Gráfico 2: Questionário de sondagem inicial – Turma 02.	81
Gráfico 3: Questionário de sondagem inicial – Turma 01 e Turma 02.	82
Gráfico 4: Questionário de sondagem final – Turma 01.	82
Gráfico 5: Questionário de sondagem final – Turma 02.	83
Gráfico 6: Questionário de sondagem final – Turma 01 e Turma 02.	83
Gráfico 7: Questionário de pesquisa – Turma 01 e Turma 02.	84
Gráfico 8: Comparação das respostas das sondagens – Turma 01 e Turma 02.	84
Gráfico 9: Participação dos estudantes nas principais atividades.	85

Lista de tabelas

Tabela 1: Tabulação dos testes, sondagem inicial – Turma 01.	72
Tabela 2: Tabulação dos testes, sondagem inicial – Turma 02.	72
Tabela 3: Tabulação dos testes, sondagem final – Turma 01.	75
Tabela 4: Tabulação dos testes, sondagem final – Turma 02.	76
Tabela 5: Pesquisa de opinião, sondagem final – Turma 01.	77
Tabela 6: Pesquisa de opinião, sondagem final – Turma 01.	77
Tabela 7: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 01.	78
Tabela 8: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 02.	79
Tabela 9: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 01 e Turma 02.	79
Tabela 10: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 01.	79
Tabela 11: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 02.	80
Tabela 12: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 01 e Turma 02.	80

Sumário

INTRODUÇÃO.....	15
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2 REFERENCIAL TEÓRICO	24
2.1 A teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel	24
2.1.1 Aprendizagem Significativa.....	25
2.1.2 Aprendizagem Mecânica.....	26
2.1.3 Subsunçor e condições para a Aprendizagem Significativa	27
2.1.4 Organizadores avançados.....	28
2.1.5 Tipos de Aprendizagem Significativa e a teoria da assimilação.....	30
2.1.6 Diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.....	33
2.2 Joseph Novak.....	35
2.3 Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS.....	38
3 TEORIA DO CAOS	40
3.1 Histórico.....	40
3.2 Modelos e simuladores computacionais	44
3.3 Eduard Lorenz e a previsão do tempo.....	46
3.4 Sensibilidade às condições iniciais e efeito borboleta	47
3.5 Pêndulo Duplo	51
4 METODOLOGIA	59
4.1 Metodologia de pesquisa.....	59
4.2 Contextualização.....	59
4.3 Aplicação do produto na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa.....	60
4.4 Conexão com o referencial teórico	63
5 RESULTADO E ANÁLISE	67
5.1 Dados da aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa	69
5.2 Resultado dos Mapas Conceituais.....	85
5.3 Análise e Avaliação da UEPS.....	89
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
APÊNDICE A	94
PRODUTO EDUCACIONAL E SEQUÊNCIA DIDÁTICA	94
1 Introdução	94
2 Metodologia das aulas propostas	96
3 Proposta de UEPS para o ensino de conceitos básicos da teoria do caos.....	97

4 Atividades	100
Primeiro encontro: 1ª Aula.....	101
Plano de aula do primeiro encontro	101
Segundo encontro: 2ª Aula.....	104
Plano de aula do segundo encontro	104
Terceiro encontro: 3ª Aula	107
Plano de aula do terceiro encontro.....	107
Quarto encontro: 4ª Aula.....	108
Plano de aula do quarto encontro.....	109
Quinto encontro: 5ª Aula.....	111
Plano de aula do quinto encontro.....	111
Sexto encontro: 6ª Aula.....	113
Plano de aula do sexto encontro	113
5 Orientação	117
Construção do mapa conceitual	117
Construção de um Pêndulo duplo	118
6 Atividade Complementar	121
O Jogo “Life is Strange”	121
Canal BRKsEDU	122
Questionário	124
APÊNDICE B.....	125
APÊNDICE C.....	126
APÊNDICE D	132
REFERENCIAS	135

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares sensíveis às condições iniciais – teoria do caos determinístico – tem ganhado espaço nos centros de pesquisa acadêmicos, em especial, nos cursos de pós-graduação. De certo modo, tal estudo representa o fim de certezas oriundas da mecânica clássica newtoniana ao apresentar modelos matemáticos com previsões indeterminadas a longo prazo, ou seja, insere elementos de indeterminação quanto à previsibilidade de comportamentos futuros de sistemas dinâmicos complexos, que se opõem ao determinismo newtoniano defendido por Laplace. Indeterminações, diga-se, que se constituem a partir do comportamento caótico de alguns sistemas não-lineares.

Para Prigogine (2002), o estudo de sistemas que evoluem para o caos proporciona aos estudantes uma nova perspectiva da ciência clássica. Ao se apropriar de conceitos básicos trazidos pela teoria do caos, em especial, de sistemas dinâmicos não-lineares, da sensibilidade às condições iniciais, da irreversibilidade e aperiodicidade, os estudantes são capazes de perceber o universo como resultado de uma ciência que, mesmo fundamentada em uma perspectiva determinística, não é capaz de gerar previsões de longo prazo para o comportamento dos sistemas.

Maxwell (no estudo de sistemas gasosos), Poincaré (ao descrever a evolução de modelos solares com três corpos) e Lorenz (com seu modelo climático) sistematizaram a teoria do caos determinístico a partir de um formalismo matemático e uma base conceitual proveniente da Física; porém, sistemas que evoluem para o caos podem ser observados em outras áreas das ciências, como, por exemplo, na Biologia (ao descrever a questão do crescimento populacional), na Meteorologia (ao mensurar a previsão do tempo), na Medicina, na Economia etc.; ou seja, a teoria do caos é essencialmente interdisciplinar e seu estudo pode servir de fundamento para práticas com tais características.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN assim destacam a presença da interdisciplinaridade no ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: “De certa forma, também organizam o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade” (BRASIL, 2000, p. 4).

Por sua vez, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC assim explicita, nas competências gerais voltadas para as Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a influência da tecnologia no ensino contemporâneo: “[...] pensamento computacional:

envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos” (BRASIL, 2018, p. 474).

Diante disso, a teoria do caos se apresenta como tema atual ao fazer uso de recursos tecnológicos como ferramenta na busca de soluções e simulações de modelos matemáticos para descrever sistemas dinâmicos não-lineares. O uso do computador, por Lorenz, por exemplo, representou um marco histórico na teoria em comento, pois foi a partir das soluções computacionais que esta teoria ganhou considerável relevância popular, assim como importância na comunidade científica.

Segundo Gleick (1989), o estudo da teoria do caos deve ser difundido não somente nos centros de pesquisa, mas também no cotidiano, de modo que os estudantes possam compreender que fenômenos descritos por um simples sistema não-linear geram dinâmicas complexas.

A ciência do caos deveria ser matéria de ensino [...] Era tempo de se reconhecer que a educação padrão de um cientista dava a impressão errônea. Por mais complexa que a matemática linear pudesse ser, com suas transformadas de Fourier, suas funções ortogonais, suas técnicas de regressão, mas afirmava que ela inevitavelmente enganava os cientistas sobre o mundo, onde predominava a não-linearidade. “A intuição matemática assim desenvolvida prepara mal o estudante para enfrentar o comportamento bizarro evidenciado pelo mais simples dos sistemas discretos não-lineares”, escreveu ele. Não só na pesquisa, mas também no mundo cotidiano da política e da economia, estaríamos todos melhores se um maior número de pessoas compreendesse que os sistemas não-lineares simples não dispõem necessariamente de propriedades dinâmicas simples (GLEICK, 1989, p. 75-76).

O sistema educacional brasileiro oportuniza, ainda que não explicitamente, a divulgação do presente tema, pois sua organização é norteadada por uma série de programas, dos quais vale destacar o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, que estabelece a compreensão de fenômenos naturais alcançada somente com o uso da teoria do caos.

No que se refere ao planeta Terra, aborda fenômenos físicos e astronômicos, os movimentos do planeta, sua interação com a Lua e o Sol, além de englobar as questões geológicas da formação do planeta, da crosta terrestre, suas transformações naturais e as causadas pelos seres humanos ao longo do tempo. [...] Já nos anos finais essa visão é ampliada para uma concepção mais sistêmica, que aborda características da Terra, da Lua, de outros planetas e da galáxia (BRASIL, 2018, p. 105).

Quanto às dificuldades na divulgação da teoria do caos, Gomes (2016) esclarece que seu ensino se volta principalmente para estudantes de nível superior e em cursos de pós-graduação, alertando ainda que tal fato se dá devido à falta de pré-requisitos que fundamentam a matemática da teoria; e, ainda, sinaliza a deficiência de materiais didáticos como um dos principais fatores responsáveis pela pouca divulgação da temática entre os estudantes do Ensino Médio – afirmação, de fato, confirmada na revisão bibliográfica que se segue.

Logo, tanto por sua relevância na mudança de concepção da previsibilidade absoluta de sistemas determinísticos para aquela da imprevisibilidade mais geral, quanto por sua utilização em estudos contemporâneos, a inserção do tema “teoria do caos” no conteúdo do currículo escolar formal, em nível conceitual e introdutório, faz-se necessária na educação básica, em especial, no Ensino Médio. Nota-se, ainda, que a teoria do caos tem um formalismo relativamente simples, quando comparado com o formalismo da Física Moderna, em particular quando se trabalha com sistemas dinâmicos discretos.

É importante mencionar que a proposta do trabalho também está alinhada com as perspectivas educacionais defendidas pela Sociedade Brasileira de Física – SBF:

[...] domínio de conteúdos de Física e de técnicas atuais de ensino para aplicação em sala de aula como, por exemplo, estratégias que utilizam recursos de mídia eletrônica, tecnológicos e/ou computacionais para motivação, informação, experimentação e demonstrações de diferentes fenômenos físicos (SBF, 2019).

Diante do exposto, o presente estudo teve por objetivo desenvolver e aplicar, em turmas da terceira série do Ensino Médio, uma sequência didática na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS¹, visando à promoção da Aprendizagem Significativa de conceitos básicos da teoria do caos. Para tanto, a evolução do movimento do pêndulo duplo, observada nos simuladores computacionais, foi tomada como situação-problema.

Seguindo as orientações de Moreira (2011a) para a elaboração de uma sequência didática na forma de uma UEPS, foram observadas as seguintes etapas: levantamento

¹ A Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS, segundo Moreira (2011a), é um sequenciamento de atividades de ensino, com tópicos específicos de um conteúdo, guiadas pela teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

dos conhecimentos prévios dos estudantes relacionados à teoria do caos; apresentação de organizadores prévios, a fim de relacionar os conhecimentos prévios específicos com o novo conhecimento a ser aprendido; apresentação de conceitos da teoria do caos relacionáveis aos conhecimentos prévios específicos; relacionamento de conceitos da teoria do caos (“sistema dinâmico não-linear”; “sensibilidade às condições iniciais”; “evolução de sistemas caóticos”; “imprevisibilidade”; e, “irreversibilidade”) à evolução do movimento do pêndulo duplo; busca de indícios de Aprendizagem Significativa após as sondagens finais; e, avaliação da aplicação da sequência didática.

Cumprindo as etapas de desenvolvimento e aplicação da sequência didática, sua análise de aplicação buscou indícios de Aprendizagem Significativa, inferindo que o estudo do movimento do pêndulo duplo, a partir de simuladores computacionais, pode ser considerado um material potencialmente significativo para o ensino de conceitos básicos da teoria do caos.

No que diz respeito à organização do trabalho, tem-se a seguinte sequência:

- Primeiro capítulo: apresentação do referencial bibliográfico utilizados na pesquisa;
- Segundo capítulo: apresentação do referencial teórico que norteou a pesquisa;
- Terceiro capítulo: apresentação formal da teoria do caos, abordando seus aspectos históricos e principais conceitos, a partir do estudo da evolução do movimento do pêndulo duplo;
- Quarto capítulo: apresentação da metodologia, contextualização e proposta de sequência didática na forma de uma UEPS;
- Quinto capítulo: apresentação da análise dos dados coletados durante a aplicação da sequência didática; e
- Sexto capítulo: apresentação das considerações finais;

Por fim, têm-se os apêndices (A, B e C), que apresentam o produto educacional, os gráficos, as equações matemáticas e as soluções aproximadas de equações diferenciais obtidas via recursos computacionais.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas linhas que se seguem, foi feito o uso de materiais publicados no período 1993-2018, tais como: revistas especializadas em ensino de Física, livros didáticos, livros e artigos que versam sobre o tema “Aprendizagem Significativa”, Dissertações, Tese e artigos relacionados à teoria do caos, além de simuladores computacionais de sistema caótico.

Publicações que buscam a promoção da aprendizagem de conteúdos relacionados à teoria do caos tiveram relevância na elaboração da presente Dissertação. Quanto às publicações de teorias psicológicas e educacionais relacionadas à aprendizagem, aquelas que foram fundamentadas na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, nos mapas conceituais de Joseph D. Novak e nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativa – UEPSs de Marco Antônio Moreira, também se mostraram relevantes.

O material bibliográfico da pesquisa em questão foi resultado de busca via *internet*, por meio do motor de busca Google e do banco de Dissertações do Programa Nacional de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF, a partir das seguintes palavras-chave: “Ensino de Física”; “Aprendizagem Significativa”; “Unidade de Ensino Potencialmente Significativa”; “teoria do caos”; e, “pêndulo duplo”.

Diante do exposto, foram utilizados: quatro livros nacionais que tratam do tema “teoria do caos”, com publicações nos anos 1989 e 2019; um livro internacional que trata do tema “teoria do caos”, com publicação no ano de 1996; dois livros nacionais que tratam de teorias de aprendizagem, em especial, da Aprendizagem Significativa, com publicações nos anos 2006 e 2017; dois livros internacionais que tratam das teorias de aprendizagem, em especial, da Aprendizagem Significativa, com publicação nos anos 2003 e 2010; um periódico nacional que trata do tema “teoria do caos”, com publicação no ano de 1993; periódicos diversos especializados em ensino de Física, publicados em diversas revistas (Revista Física na Escola – período 2010-2019; Revista do Professor de Física – período 2018-2019; Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências; Revista Brasileira de Ensino de Física; e, Aprendizagem Significativa em Revista – período 2011-2018); quatro Dissertações, sendo uma publicada no ano de 2016 e as outras publicadas no ano de 2017; e, uma Tese publicada no ano de 2014. E ainda, vale destacar que as Dissertações supramencionadas fazem

parte do MNPEF e tratam de tópicos específicos relacionados ao ensino da teoria do caos no Ensino Médio.

A seguir, tem-se uma descrição das obras utilizadas na construção da presente Dissertação:

- Livros que tratam da teoria da Aprendizagem Significativa:

Ausubel (2003), em seu livro intitulado *Aquisição e Retenção de Conhecimentos*, expõe sua teoria psicológica de aprendizagem – Aprendizagem Significativa – e esclarece os principais conceitos e processos que devem ser considerados na utilização da referida teoria.

Moreira (2017), em sua obra clássica intitulada *Teorias de Aprendizagem*, apresenta um resumo das principais correntes relacionadas à aprendizagem.

Moreira e Masini (2006), na obra pioneira na divulgação da Aprendizagem Significativa no Brasil, intitulada *Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel*, apresentam os principais termos provenientes da referida teoria, além de exemplos de abordagens relacionadas ao ensino de ciências, no intuito de promover a Aprendizagem Significativa.

- Periódicos que tratam da teoria da Aprendizagem Significativa:

Moreira, principal divulgador da Aprendizagem Significativa no Brasil, fez diversas publicações relacionadas à temática supramencionada, entre as quais: o periódico intitulado *Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente*, de 2010; o periódico intitulado *O que é Afinal Aprendizagem Significativa*, de 2012; e, o periódico intitulado *Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências*, de 2016. Tais publicações nortearam diversas pesquisas voltadas à Aprendizagem Significativa no ensino de ciências, em especial, o ensino de Física.

Ribeiro, Silva e Koscianski (2012), no periódico intitulado *Organizadores Prévios para Aprendizagem Significativa em Física: o formato curta de animação*, tratam da construção de organizadores prévios na abordagem do ensino de Física.

Silva Filho e Ferreira (2018), no periódico intitulado *Teorias da Aprendizagem e da Educação como Referenciais em Práticas de Ensino: Ausubel e Lipman*, tratam da importância da utilização dos referenciais teóricos na prática docente.

- Publicações que tratam de mapas conceituais:

Novak e Cañas (2010), no periódico intitulado *A Teoria Subjacente aos Mapas Conceituais e como Elaborá-los e Usá-los*, apresentam os mapas conceituais e sua utilização para a promoção da Aprendizagem Significativa.

Moreira (2012), no periódico intitulado *Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa*, apresenta o uso de mapas conceituais para a promoção da Aprendizagem Significativa.

- Publicações que tratam da construção de uma UEPS

Moreira (2018), no periódico intitulado *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS*, apresenta o processo de construção de uma sequência didática na forma de uma UEPS.

- Documentos públicos que norteiam a educação básica brasileira:

Têm-se vários documentos públicos que norteiam a educação básica, em especial, o ensino de ciências, entre os quais: Brasil (1998): *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*; Brasil (2000): *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)*; Brasil (2018): *Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)*; e, Brasil (2018) *Base Nacional Comum Curricular*.

- Publicações de orientações:

Silva Filho e Ferreira (2018), no periódico intitulado *Proposta de Plano de Aula para o Ensino de Física*, apresentam os principais aspectos que devem ser abordados na elaboração de um plano de aula de Física.

Ferreira *et al.* (2018), no periódico intitulado *Ensinando Física Atômica para uma Turma de Terceiro Ano do Ensino Médio*, apresentam um método de categorização de resposta objetivando uma análise quantitativa dos resultados.

- Artigo que elenca a importância do uso de simuladores:

Abrantes e Miranda (2010), no periódico intitulado *Objetos de Aprendizagem no Ensino de Física: usando simulações do PhET*, apresentam a importância do uso de simuladores computacionais no ensino de Física.

- Livros didáticos que tratam de sistemas dinâmicos não lineares e da teoria do caos:

Alligood, Sauer e Yorke (1996), na obra intitulada *Chaos – An Introduction to Dynamical Systems*; Monteiro (1996), na obra intitulada *Sistemas Dinâmicos*; Fiedler-Ferrara e Prado (1994), na obra intitulada *Caos: uma introdução*; e, Prigogine e Ferreira

(2002), na obra intitulada *As Leis do Caos*, apresentam as principais propriedades relacionadas aos sistemas dinâmicos não lineares, bem como as características de sistemas que evoluem para o caos e a consequência da teoria do caos no pensamento científico moderno.

Gleick (1989), na obra intitulada *Caos: a construção de uma nova ciência*, apresenta o histórico do surgimento da teoria do caos voltado para o público leigo.

- Artigo que trata da influência da previsibilidade no pensamento científico:

Silveira (2019), no periódico intitulado *Determinismo, Previsibilidade e Caos*, trata da influência da previsibilidade no pensamento científico e a imprevisibilidade de sistemas determinísticos.

- Artigo que trata da teoria do caos:

Moreira (1993), no periódico intitulado *Sistemas Caóticos em Física – Uma Introdução*, apresenta as principais características de um sistema dinâmico não linear que evolui para o caos.

- Dissertações que tratam do tema “teoria do caos”:

Gomes (2016), em sua Dissertação intitulada *Ensino de Conceitos de Complexidade e Caos no Ensino Médio a partir do Fenômeno Tornado: uma abordagem na perspectiva da Aprendizagem significativa*, apresenta uma proposta de ensino de Física, por meio de uma sequência didática, objetivando a inserção de conceitos da teoria do caos a partir do estudo de fenômenos ambientais; e ainda, tem-se ali a proposta de um caderno paradidático que associa o fenômeno dos tornados aos conceitos da teoria do caos, ao passo que a análise dos resultados da aplicação da sequência didática aponta indícios de Aprendizagem Significativa.

Aragão (2017), em sua Dissertação intitulada *Unidade Didática Contextualizada da Teoria do Caos para o Ensino Médio*, apresenta a construção interdisciplinar de uma unidade didática da teoria do caos para o Ensino Médio relacionada a tópicos de Física. Em sua coleta de dados, aquele autor destaca a real possibilidade de inclusão tópicos relacionados à teoria do caos ao Ensino Médio, em especial, para o ensino de Física.

Pereira (2017), em sua Dissertação intitulada *Proposta de Sequência Didática visando Abordar os Fundamentos da Teoria de Caos no Ensino Médio*, apresenta uma sequência didática para o ensino de tópicos relacionados à teoria do caos para o Ensino Médio. Para tanto, ela apresenta uma série de atividades, entre as quais, a observação experimental do movimento do pêndulo duplo. E, ainda, tem-se ali o fato de que a

sequência didática é construída sobre uma perspectiva da Aprendizagem Significativa, porém, a análise não possui afirmação da presença de indícios de tal aprendizagem.

- Tese que descreve as equações de movimento do pêndulo duplo:

Calvão (2014), em sua Tese intitulada *Estudos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares: pêndulo duplo, batimentos cardíacos e coletivos de animais*, apresenta vários sistemas dinâmicos não lineares que evoluem para o caos e o formalismo matemáticos que os descrevem, com destaque para o pêndulo duplo. Aquele autor faz uso do computador como ferramenta de investigação de sistemas dinâmicos.

Visando a promoção da Aprendizagem Significativa e de conceitos relacionados à teoria do caos, a presente Dissertação também fez uso de recursos tecnológicos contemporâneos, *software* e simuladores computacionais, em conformidade com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN+.

A presença do conhecimento de Física na escola média ganhou um novo sentido a partir das diretrizes apresentadas nos PCN. Trata-se de construir uma visão da Física que esteja voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante e solidário, com instrumentos para compreender, intervir e participar na realidade (BRASIL, 1998, p. 1).

Assim, a construção do estudo em questão foi alicerçada em documentos públicos que norteiam a educação básica, além de conteúdos bibliográficos vinculados às seguintes temáticas: “teoria do caos”, “Aprendizagem Significativa” e “UEPS”, com abordagens voltadas para alunos do Ensino Médio.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo trata da base teórica que fundamenta esta pesquisa. Em nível mais básico, usa-se a teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel², complementada a partir de uma síntese dos trabalhos de Joseph D. Novak, adotando, em especial, sua proposta de mapas conceituais como instrumentos avaliativos na identificação e promoção da Aprendizagem Significativa. Por fim, desenvolve-se uma sequência de ensino e aprendizagem na forma de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS proposta por Moreira (2012a), adotando como tema a “teoria do caos”.

2.1 A teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

Desenvolvida por David Ausubel, a teoria da Aprendizagem Significativa, corrente da psicologia educacional, é uma vertente cognitivista, pois considera que o processo de aprendizagem é o resultado da interação entre o novo conhecimento e a estrutura de conhecimento do indivíduo (MOREIRA; MASINI, 2016).

Sobre a influência do cognitivismo e as tendências no contexto educativo, Moreira (2011) aponta:

No contexto educativo, hoje quase não se fala mais em estímulo, resposta, reforço positivo, objetivos operacionais, instrução programada e tecnologia educacional. Estes conceitos fazem parte do discurso usado em uma época na qual a influência comportamentalista [...]. Nessa época, o ensino e a aprendizagem eram enfocados em termos de estímulos, respostas e reforços, não de significados [...]. Atualmente as palavras de ordem são aprendizagem significativa, mudança conceitual, ensino centrado no aluno e construtivismo (MOREIRA, 2011, p. 25).

Sendo o cognitivismo oposição ao behaviorismo, aquele considera que a atenção que deve ser dada ao processo de aprendizagem não deve recair, em sua totalidade, no resultado comportamental, mas em processos que envolvem a mente, ou seja, em variáveis que são latentes.

² “David Ausubel atuou como professor Emérito da Universidade de Columbia, em Nova York. Também era médico-psiquiatra de formação e dedicou sua carreira acadêmica à psicologia educacional” (MOREIRA, 2017, p. 159).

Atualmente, as abordagens cognitivistas, no contexto educacional, são mais comuns do que as behavioristas.

Para Ausubel o processo de armazenamento de informações acontece de forma organizada e produzindo uma hierarquia conceitual em que elementos mais específicos são relacionados a conceitos mais gerais e mais inclusivos (MOREIRA, 2017).

Moreira e Masini (2006), esclarecem o conceito de *Estrutura cognitiva* a partir do conhecimento preexistente do indivíduo.

Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de subsunções que são abstrações da experiência do indivíduo (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 105).

A Aprendizagem Significativa implica no produto de novos significados do material instrucional, ou seja, ocorre uma ressignificação.

A ‘aprendizagem significativa’, por definição, envolve a aquisição de novos significados. Estes são, por sua vez, os produtos finais da aprendizagem significativa. Ou seja, o surgimento de novos significados no aprendiz reflecte a acção e a finalização anteriores do processo de aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003, p. 71).

2.1.1 Aprendizagem Significativa

Moreira (2012) destaca que a principal vertente da teoria cognitivista de Ausubel é a Aprendizagem Significativa, que descreve um processo mental específico, pelo qual o novo conhecimento a ser aprendido, possuidor de uma estrutura lógica, se relaciona com aquilo que o aprendiz já sabe.

Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2012, p. 2).

Moreira (2012) ainda esclarece que o carácter substantivo se refere a um relacionamento não global com qualquer conhecimento da estrutura cognitiva, mas com aquele relevante à Aprendizagem Significativa. Assim, na interação, a nova informação ou o novo conhecimento adquire significado, ao passo que os conhecimentos prévios se tornam mais estáveis, ainda que sofram alteração no processo, na estrutura cognitiva do aprendiz.

2.1.2 Aprendizagem Mecânica

Em oposição à Aprendizagem Significativa, Ausubel define que na Aprendizagem Mecânica não são consideradas as interações das novas informações com aquelas preexistentes (MOREIRA, 2017).

Aprendizagem Mecânica - Aquisição de informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos ou proposições relevantes existentes na estrutura cognitiva. O conhecimento é armazenado de forma literal e arbitrária (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 105).

Na Aprendizagem Mecânica, a nova informação a ser aprendida possui pouca ou nenhuma interação com aquela já armazenada na estrutura cognitiva, ou seja, a aquisição de novos conteúdos se dá arbitrariamente. Toda informação retida fica arbitrariamente distribuída e não hierarquizada na estrutura cognitiva sem relacionar-se a conceitos preexistentes específicos. A memorização isolada e as fórmulas são exemplo de Aprendizagem Mecânica.

Apesar da diferenciação entre a Aprendizagem Mecânica e Aprendizagem Significativa, Ausubel esclarece que não existe uma dicotomia entre estas, mas, um contínuo (MOREIRA, 2017).

A diferença básica entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica está na relacionabilidade à estrutura cognitiva [...]. Não se trata, pois, de uma dicotomia, mas de um contínuo no qual elas ocupam os extremos (MOREIRA, 2011, p. 26).

Novak e Cañas (2010) igualmente concordam com a inexistência da referida dicotomia.

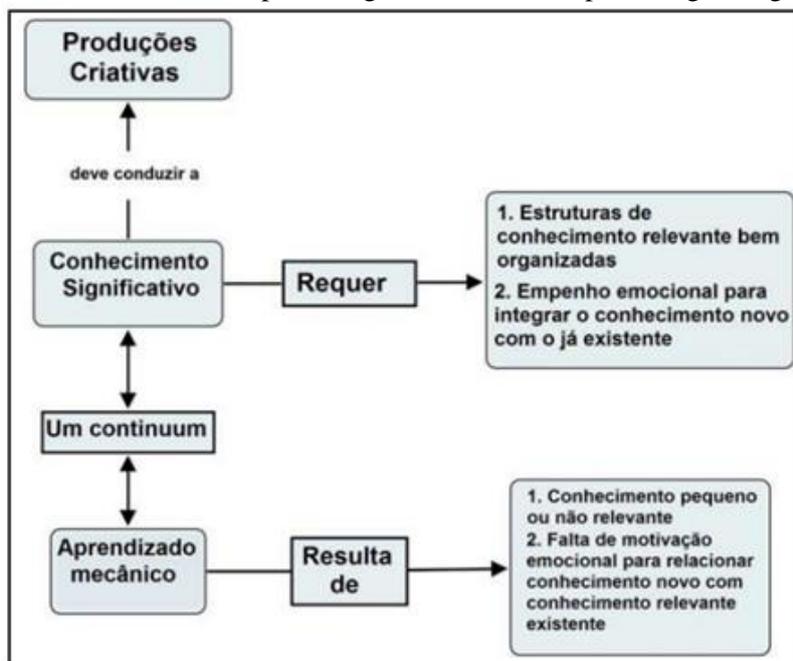
[...] pelo fato de os indivíduos variarem no que se refere à quantidade e qualidade da sua bagagem de conhecimento relevante e à intensidade de sua motivação em procurar modos de incorporar conhecimento novo ao conhecimento que já possuem (NOVAK; CAÑAS, 2010, p. 12).

Na Figura 1, a seguir, Novak e Cañas (2010) esclarecem que a distinção entre a Aprendizagem Mecânica e a Aprendizagem Significativa não é dicotômica, mas antes um *continuum*. E ainda, consideram a criatividade como um nível mais elevado de Aprendizagem Significativa.

Diante do exposto, as atividades elaboradas na presente pesquisa foram desenvolvidas a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, objetivando a promoção da Aprendizagem Significativa. Vale ainda destacar que não se deu ênfase à

Aprendizagem Mecânica, apesar de existir um *continuum* entre esta e a Aprendizagem Significativa.

Figura 1: *Continuum* entre Aprendizagem Mecânica e Aprendizagem Significativa.



Fonte: Novak e Cañas (2010, p. 12)

Diante do exposto, as atividades elaboradas na presente pesquisa foram desenvolvidas a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, objetivando a promoção da Aprendizagem Significativa.

2.1.3 Subsunçor e condições para a Aprendizagem Significativa

O conhecimento preexistente e específico na estrutura cognitiva do aprendiz é, portanto, indispensável no processo da aprendizagem. Este foi chamado por Ausubel como subsunçor ou ideia-âncora. Portanto, o subsunçor é o conhecimento específico, fundamental na promoção da Aprendizagem Significativa, que pode ser representado por uma diversidade de conceitos, ideias ou posições.

[...] subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles (MOREIRA, 2012, p. 2).

Segundo Moreira (2017), a abordagem de uma nova informação visando à Aprendizagem Significativa, em que se observe a deficiência de subsunçores pode se dar, inicialmente, pela Aprendizagem Mecânica, que se faz presente até o surgimento de conhecimentos relevantes à nova informação. A partir deste ponto, passa a ocorrer a Aprendizagem Significativa, uma vez que os novos significados passam a se relacionar com os recém-desenvolvidos subsunçores.

Para Ausubel, duas condições são essenciais para a ocorrência da aprendizagem significativa, quais sejam: 1) A relação, de forma não arbitrária, entre o conhecimento especificamente relevante preexistente na estrutura cognitiva do aprendiz e os conceitos apresentados pelo material instrucional a ser ensinado; e, 2) O desejo de aprender, ou seja, uma intencionalidade (MOREIRA, 2012, p. 8).

Portanto, para Moreira (2012), é primordial que o material instrucional, potencialmente significativo, possua conceitos claros e relacionáveis com aquilo que o aprendiz já sabe; e o aprendiz, por sua vez, queira ancorar, de modo não arbitrário, mas sim, específico, os conhecimentos prévios com a nova informação.

Quanto aos indícios de que há aprendizagem significativa, tem-se que

[...] nem sempre é fácil demonstrar que ocorreu aprendizagem significativa. A compreensão genuína implica a posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Porém, se alguém tentar testar tais conhecimentos, pedindo aos estudantes que indiquem os atributos de critérios ou os elementos essenciais de um princípio, pode simplesmente fazer com que surjam verbalizações memorizadas (AUSUBEL, 2003, p. 130).

Deste modo, Ausubel recomenda que os conhecimentos supostamente assimilados de forma significativa sejam articulados em situações diversas daquelas em que foram aprendidas, de modo a afastar a memorização e servir de indício importante para que se conclua que tal aprendizagem, de fato, ocorreu.

2.1.4 Organizadores avançados

Para Ausubel (2003), os organizadores prévios são recursos instrucionais generalizados utilizados como facilitador da aprendizagem, em que sua apresentação deve ser anterior à nova informação a ser ensinada.

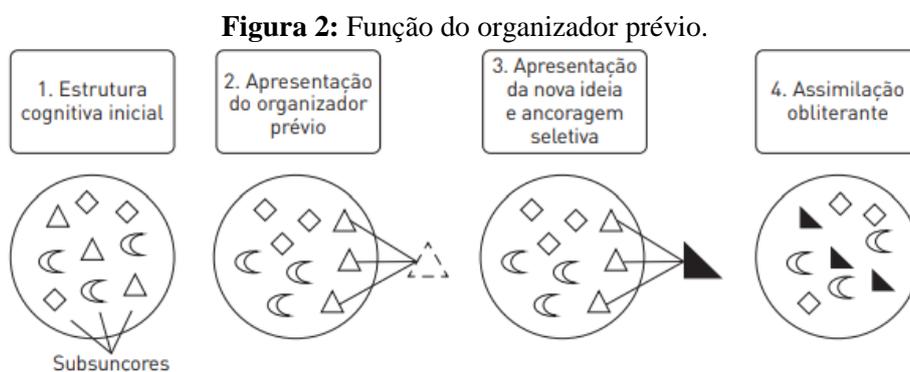
O uso dos organizadores prévios não está limitado a um déficit de subsunçores, mas também quando é perceptível que os conhecimentos preexistentes não se relacionam imediatamente à nova informação e precisam ser direcionados para tanto.

Organizador prévio é um recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem. Não é uma visão geral, um sumário ou um resumo que geralmente estão no mesmo nível de abstração do material a ser aprendido. Pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação. Pode ser também uma aula que precede um conjunto de outras aulas. As possibilidades são muitas, mas a condição é que preceda a apresentação do material de aprendizagem e que seja mais abrangente, mais geral e inclusivo do que este (MOREIRA, 2012, p. 11).

Segundo Silva Filho e Ferreira (2018), para potencializar a Aprendizagem Significativa, devem ser adotados organizadores prévios como construtos relacionais, na estrutura cognitiva, entre os subsunçores e novos conhecimentos.

Na prática, organizadores prévios funcionam melhor quando explicitam a *relacionabilidade* entre novos conhecimentos e aqueles existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Muitas vezes, o aprendiz tem o conhecimento prévio, mas não percebe que está relacionado com aquele que lhe está sendo apresentado (MOREIRA, 2011a, p. 11).

A Figura 2, a seguir, explicita a relacionabilidade entre o conhecimento preexistente na estrutura cognitiva com a nova informação e o uso dos organizadores prévios na referida relação.



Fonte: Ribeiro; Silva e Koscianski (2012, p. 171)

No presente estudo, os organizadores da UEPS versam sobre os conceitos da teoria do caos, em especial, os sistemas dinâmicos não-lineares e as sensibilidades às

condições iniciais; em princípio, os alunos aos quais a sequência didática deve ser apresentada já possuem noções de sistemas dinâmicos (newtonianos lineares) e condições iniciais, que formam seus subsunçores básicos.

O processo de organização prévia, portanto, incide na construção de uma correlação entre tais subsunçores e os conceitos extensivos de não-linearidade e de imprevisibilidade. Em particular, a distinção entre determinismo e previsibilidade é da máxima importância no processo de apresentação da sequência didática. Uma possibilidade para se construir essa correlação, efetivando a organização prévia, pode ser a própria apresentação concreta de um pêndulo duplo, solicitando aos alunos que, a cada instante, tentem “adivinhar” o movimento seguinte do pêndulo.

2.1.5 Tipos de Aprendizagem Significativa e a teoria da assimilação

Ausubel (2003) propõe a seguinte divisão, em ordem crescente de complexidade, para a Aprendizagem Significativa: representacional, de conceitos e proposicional.

- Aprendizagem representacional: é a mais fundamental; mais próxima da Aprendizagem Mecânica; confere significados a símbolos (palavras, som);
- Aprendizagem de conceitos: é categórica na representação das regularidades dos conceitos; é um caso particular de aprendizagem representacional, pois conceitos podem ser representados por símbolos; e
- Aprendizagem proposicional: é a mais complexa; se dá quando o aprendiz é capaz de identificar significados de ideias expressas por meio de proposições.

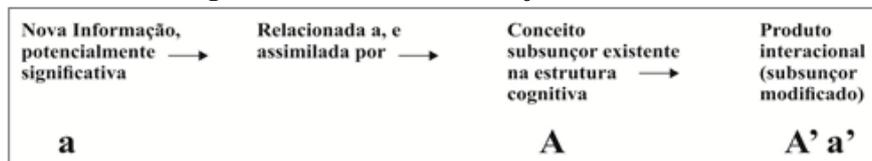
Quanto ao processo de aquisição do novo conhecimento por parte do aprendiz, Ausubel propõe a teoria da assimilação, que descreve que, após a interação entre a nova informação ou o novo conhecimento com aquela preexistente na estrutura cognitiva do aprendiz, surge um subsunçor mais geral e mais estável.

Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. A estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos

que são representações de experiências sensoriais do indivíduo. (MOREIRA, 2017, p. 161).

Na Figura 3, a seguir, Moreira (2017) apresenta o esquema da assimilação, aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva. Aqui, a nova informação, apresentada na forma de conceito ou proposição, mais inclusiva e potencialmente significativa, a ser aprendida “a” é assimilada de forma intencional e não arbitrária, ou seja, com conhecimentos especificamente relevantes na estrutura cognitiva, com a informação menos inclusiva, subsunçor, “A” preexistente na estrutura cognitiva do aprendiz. O produto das interações entre a nova informação “a” e o subsunçor “A” é “a’A’”, ou seja, o produto representa também a modificação do subsunçor.

Figura 3: Teoria da assimilação de Ausubel.



Fonte: Moreira (2017, p. 166)

Moreira e Masini (2016) esclarecem o papel da assimilação na retenção do conhecimento, além de destacarem que o recente produto “A’a’”, por um breve período, é dissociável em “A” e “a’”.

Figura 4: Assimilação dissociável.



Fonte: Moreira (2017, p. 166)

Moreira e Masini (2016) ainda descrevem o processo de assimilação obliteradora ou processo de estabilidade de “A’”, resultado mais estável do produto “A’a’”, que implica na modificação do subsunçor “A” ou no esquecimento da parte menos estável deste.

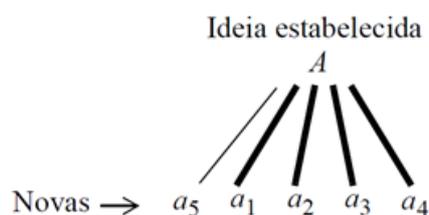
[...] pode-se dizer que, imediatamente após a aprendizagem significativa, começa um segundo estágio da subsunção: a assimilação obliteradora. As novas informações tornam-se, espontânea e progressivamente, menos dissociáveis de suas ideias-âncora (subsunçores) até que não mais estejam disponíveis, isto é, não mais

reproduzíveis como entidades individuais. Atinge-se então um grau de dissociabilidade nulo, e $A'a'$ reduz-se simplesmente a A' . O esquecimento é, portanto, uma continuação temporal do mesmo processo de assimilação que facilita a aprendizagem e a retenção de novas informações (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 27).

Segundo Ausubel (2003), as formas de assimilação têm relação com a interação entre a nova informação e aquela presente na estrutura cognitiva do aprendiz, produzindo aprendizagens do tipo subordinada, superordenada e combinatória.

Por aprendizagem subordinada entende-se a nova informação, potencialmente significativa, assimilada hierarquicamente de modo inferior ao subsunçor “A” que, por sua vez, é mais geral. Diz-se que a nova informação é subordinada ao subsunçor.

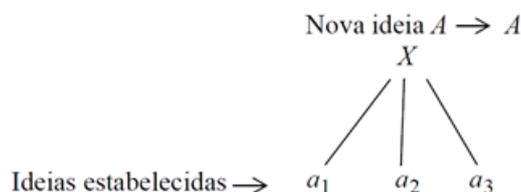
Figura 5: Representação para a aprendizagem subordinada.



Fonte: Ausubel (2003, p. 111)

Por aprendizagem superordenada entende-se a nova informação, potencialmente significativa, “a”, mais geral e mais inclusiva, assimilada hierarquicamente superior aos subsunçores “A” na estrutura cognitiva.

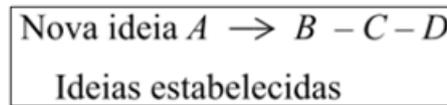
Figura 6: Representação para aprendizagem superordenada.



Fonte: Ausubel (2003, p. 111)

A aprendizagem combinatória se dá quando a nova informação, potencialmente significativa, não pode ser assimilada por subordinação nem por superordenação, isto é a nova informação possui uma relação não com conceitos específicos, mas com um todo da estrutura cognitiva.

Figura 7: Representação para aprendizagem combinatória.



Fonte: Ausubel (2003, p. 111)

Moreira (2012) destaca que o processo de assimilação de Ausubel é diferente daquele trazido por Piaget, pois descreve a interação, não arbitrária, entre o novo conhecimento e aquele existente na estrutura cognitiva, e não entre sujeito-objeto.

Ausubel chamou de assimilação e que não é a mesma assimilação de Piaget. A assimilação ausubeliana é o processo, já descrito, no qual um novo conhecimento interage, de forma nãoarbitrária e não-literal, com algum conhecimento prévio especificamente relevante. É a “ancoragem”, também já referida, na qual o novo conhecimento adquire significados e o conhecimento prévio adquire novos significados. Nessa interação, os dois se modificam, porém diz-se que houve uma assimilação do novo conhecimento. Diz-se também que a aprendizagem significativa foi subordinada. Trata-se de uma interação cognitiva entre 11 conhecimentos novos e prévios, não uma interação sujeito-objeto, como na assimilação piagetiana (MOREIRA, 2012, p. 10).

2.1.6 Diferenciação progressiva e reconciliação integrativa

Quanto à instrução ou aplicação da teoria, Ausubel esclarece as práticas norteadoras que o docente deve observar para lograr êxito no processo instrucional de ensino-aprendizagem, quais sejam:

- Tomando um conteúdo a ser ensinado: é preciso identificar o grau de relação e de detalhamento dos conceitos que o compõem; e
- Quanto à programação do conteúdo, deve ser feita a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Segundo Ausubel (2003), a diferenciação progressiva, majoritariamente presente na Aprendizagem Significativa subordinada, é imprescindível à estrutura programática de um conteúdo, pois, inicialmente, devem ser apresentadas as ideias mais gerais para, posteriormente, serem progressivamente diferenciadas em função de seus detalhes.

Ao propor isso, Ausubel baseia-se em duas hipóteses; a) é mais fácil para o ser humano captar aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir de

suas partes; b) a organização do conteúdo de uma certa disciplina, na mente de um indivíduo, é uma estrutura hierárquica na qual as idéias mais inclusivas estão no topo da estrutura e, progressivamente, incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 29).

Após a ocorrência da Aprendizagem Significativa, devido às inúmeras interações cognitivas, novos conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados. No entanto, para Ausubel, a Aprendizagem Significativa é facilitada quando, em primeiro lugar, são apresentadas as características mais gerais ou inclusivas de um conceito e, posteriormente, são progressivamente diferenciadas suas especificidades durante o processo de instrução.

A reconciliação integradora promove a reconciliação de conceitos existentes na estrutura cognitiva, menos inclusivos, com a nova informação, mais inclusiva, efetuando apontamentos de semelhança e diferenças entre estes.

[...] reconciliação integrativa é o princípio pelo qual a programação do material instrucional deve ser feita para explorar relações entre idéias, apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 29).

Assim, no modelo esquemático de Ausubel para a diferenciação conceitual e progressiva, além da reconciliação integrativa, temos o que apresenta a Figura 8, descrita pelos autores na forma:

[...] as linhas mais fortes sugerem a direção recomendada para a diferenciação progressiva de conceitos. As linhas mais fracas sugerem a reconciliação integrativa. Isto é, para se atingir a reconciliação integrativa é preciso ‘descer’ dos conceitos gerais para os particulares e ‘subir’ novamente até os gerais (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 33).

Figura 8: Diferenciação progressiva e reconciliação integradora.



Fonte: Moreira e Masini (2016, p. 33)

Diante do exposto, a construção da presente pesquisa levou em consideração as etapas e os princípios descritos por Ausubel. Logo, a sequência didática foi estruturada de modo que os conceitos foram organizados hierarquicamente, havendo sido aplicada a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa.

2.2 Joseph Novak

Joseph D. Novak³ tem como resultado de seu trabalho o refinamento e a testagem da teoria da Aprendizagem Significativa, principalmente após a descontinuidade das pesquisas desta por parte de Ausubel. No entanto, a Aprendizagem Significativa é apenas parte da proposta de Novak, pois este traz uma visão cognitivista humanista à teoria em questão ao considerar que a educação é composta por um dinamismo de experiências cognitivas, afetivas e psicomotoras.

Moreira (2017) esclarece a premissa e os eventos que norteiam a teoria de Novak ao destacar que em todo evento educativo deve estar presente os seguintes elementos: aprendiz, professor, conhecimento, contexto e avaliação.

A premissa básica da teoria de Novak é que os seres humanos fazem três coisas: *pensam, sentem e atuam* (fazem). Uma teoria de educação, segundo ele, deve considerar cada um destes elementos e ajudar a explicar como se pode melhorar as maneiras por meio das quais os seres humanos pensam, sentem e atuam (fazem). Qualquer evento educativo é, de acordo com Novak, uma ação *para* trocar *significados* (pensar) e *sentimentos* entre o aprendiz e o professor (MOREIRA, 2017, p. 176).

³ “Joseph D. Novak, Professor da Universidade de Cornell, nos Estados Unidos, é coautor da segunda edição do livro básico sobre a teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel” (MOREIRA, 2017, p. 175).

Figura 9: Um mapa conceitual com os cinco elementos de Joseph D. Novak.



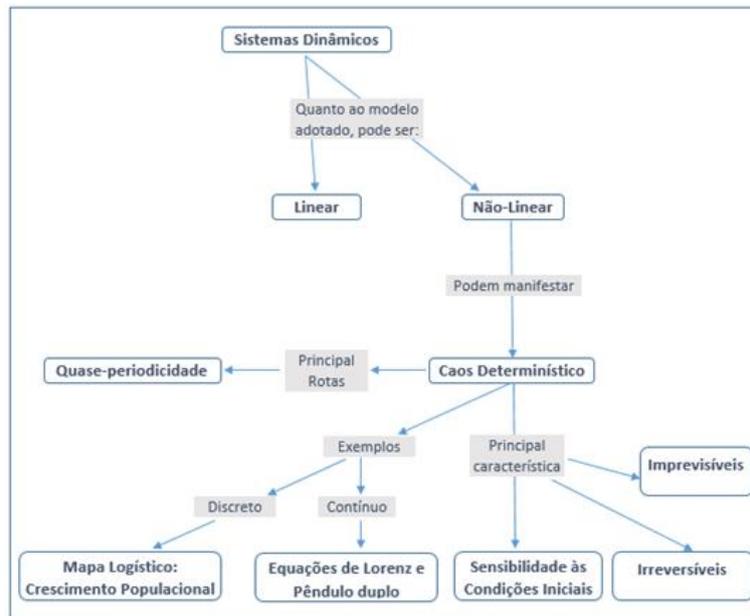
Fonte: Moreira (2017, p. 177)

Os mapas conceituais são ferramentas gráficas importantes; são utilizados para estabelecer uma organização hierárquica de conceitos, pois demonstram o grau hierárquico de compreensão sobre determinado assunto.

Mapas conceituais são diagramas conceituais, enfatizando conceitos, suas hierarquias e suas relações proposicionais no contexto de um corpo de conhecimentos (MOREIRA, 2013, p. 29)

A Figura 10, a seguir, exemplifica um mapa conceitual em que é apresentada uma hierarquia de conceitos relacionados a sistemas dinâmicos não lineares que evoluem para o caos.

Figura 10: Mapa conceitual - Sistema dinâmico



Fonte: autor.

Moreira (2017) descreve uma série de princípios⁴ – proposições norteadoras – consistentes com a teoria de Novak, em especial, o uso de mapas conceituais, conforme se segue

[...]

3 - A aprendizagem significativa requer: a) disposição para aprender, b) materiais potencialmente significativos e c) algum conhecimento relevante.

[...]

6 - O conhecimento prévio do aprendiz tem grande influência sobre a aprendizagem significativa de novos conhecimentos.

[...]

10 - A avaliação da aprendizagem deve procurar evidências de aprendizagem significativa.

[...]

12 - Mapas conceituais podem ser representações válidas da estrutura conceitual/proposicional de conhecimento de um indivíduo; podem ser instrumentos de meta-aprendizagem.

[...]

14 - Mapas conceituais e diagramas Vê podem ser instrumentos efetivos de avaliação da aprendizagem.

(MOREIRA, 2017, p. 179).

⁴ É importante ressaltar que não existe ordem de importância.

Pela descrição dos princípios supramencionados, é possível perceber que Moreira (2017) aborda princípios da Aprendizagem Significativa, aliados ao uso de mapas conceituais, como instrumentos estratégicos instrucionais na aprendizagem.

[...] Novak dedica grande parte de sua teoria ao conceito de aprendizagem significativa e à facilitação desta aprendizagem por meio de duas estratégias instrucionais, o mapeamento conceitual [...] (MOREIRA, 2017, p. 179).

Segundo Ausubel (2003), o uso de mapas conceituais é justificado para a identificação de subsunção na estrutura cognitiva, conforme se segue:

Pode verificar-se a disponibilidade de ideias relevantes na estrutura cognitiva através de testes de múltipla escolha ou pré-testes de ensaio, de entrevistas clínicas do tipo Piaget, através do questionamento socrático e de “mapas de conceitos” (AUSUBEL, 2003, p. 151).

Por fim, Moreira (2017) assim apresenta o cerne da ideia de Novak: “A aprendizagem significativa subjaz à integração construtiva entre pensamento, sentimento e ação que conduz ao engrandecimento (“*empowerment*”) humano” (Moreira, 2017, p. 179).

Portanto, partindo dos pressupostos de Ausubel e Novak, a Aprendizagem Significativa jamais oblitera totalmente, pois, haverá sempre um significado residual, isto é, cada significado faz parte do complexo cognitivo do aluno de forma única e inapagável.

2.3 Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS

Uma UEPS, segundo Moreira (2011), é uma sequência de ensino com atividades e conceitos específicos, voltada para a promoção da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Silva Filho e Ferreira (2018) esclarecem que uma UEPS, proposta por Moreira, é uma metodologia que articula teoria educacional e teoria de aprendizagem fundamentada na. Tal proposta de construção da sequência didática segue, em síntese, a seguinte estrutura:

- Levantamento dos conhecimentos prévios;
- Elaboração os organizadores prévios;
- Construção das situações-problema;

- Realização da diferenciação progressiva dos conceitos;
 - Realização da reconciliação integradora;
 - Efetivação do processo de consolidação;
 - A avaliação da aprendizagem significativa.
- (SILVA FILHO; FERREIRA, 2018, p. 108).

Os passos apresentados foram seguidos de perto na presente dissertação, como se mostrará no capítulo que versa sobre a metodologia adotada.

3 TEORIA DO CAOS

3.1 Histórico

Em 1687, Isaac Newton (1643-1727) publica sua obra prima, intitulada: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, em latim, *Philosophiae naturalis principia mathematica* ou simplesmente, *Principia*. Na referida obra, Newton postula um conjunto de leis, hoje conhecidas como leis de Newton, que descrevem o movimento dos corpos. Para tanto, apresentou um elegante formalismo matemático conhecido como cálculo diferencial.

O uso do cálculo diferencial propiciou avanços significativos no campo científico, pois a matemática se tornou ferramenta indispensável no uso da investigação científica, em especial, no que se refere à utilização de modelos matemáticos a fim de descrever a evolução de sistemas físicos.

Surge então a mecânica clássica newtoniana que consiste no uso de equações diferenciais a fim de relacionar as condições iniciais univocamente com eventos do passado, presente e futuro de sistemas físicos. Para Newton, tais relações possuem vínculos e estes podem ser determinados por meio de modelos matemáticos, ou seja, existe um modelo ideal capaz de determinar as causas (ações) e os efeitos (reações) de toda natureza.

Sir Isaac Newton trouxe ao mundo a ideia de modelar o movimento de sistemas físicos com equações. [...] Seu maior sucesso foi a descoberta de que o movimento dos planetas e luas do sistema solar resultava de uma única força fundamental: atração gravitacional dos corpos. As orbitas circulares, elípticas e parabólicas da astronomia não eram mais determinantes fundamentais do movimento, mas eram aproximações de leis especificadas com equações diferenciais (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. V).

A nova forma de fazer ciência, proposta por Newton, inicia o que posteriormente foi chamado de determinismo científico. Ao demonstrar que a simples queda de uma maçã até o movimento dos corpos celestes são descritos por leis físicas, e estas são representadas por expressões matemáticas, Newton reforça o ideário determinista.

Prigogine (2002) esclarece que os fundamentos da mecânica clássica newtoniana estabelecem uma descrição determinista de eventos naturais: “Na perspectiva clássica, uma lei da natureza estava associada a uma descrição determinista e reversível do tempo, em que o futuro e o passado desempenhavam o mesmo papel” (PRIGOGINE, 2002, p. 11).

Pierre Simon de Laplace (1724-1827) foi um notável representante do determinismo científico, este acreditava em uma “*inteligência suficientemente grande*” conhecedora, em um dado instante, de todas as variáveis que determinam o estado das partículas de um sistema, e, portanto, existe uma relação matemática que determina todos os eventos deste sistema.

Devemos considerar o estado presente do universo como efeito dos seus estados passados e como causa dos que se vão seguir. Suponha-se uma inteligência que pudesse conhecer todas as forças pelas quais a natureza é animada e o estado em um instante de todos os objetos - uma inteligência suficientemente grande que pudesse submeter todos esses dados à análise -, ela englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também dos menores átomos: nada lhe seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente ante os seus olhos (SILVEIRA, 1993, p. 138 *apud* LAPLACE. 1990, p. 326).

A expressão “*inteligência suficientemente grande*” posteriormente ficou conhecida como “demônio de Laplace”.

Alligood, Sauer e Yorke (2002) destacam a influência da mecânica clássica newtoniana e o comportamento de sistemas por ela descritos:

Gerações de jovens cientistas estudaram em livros exemplos de equações diferenciais com soluções regulares. Se as soluções permanecessem em uma região delimitada do espaço, elas se estabilizariam em (A) um estado estacionário, muitas vezes devido à perda de energia por atrito, ou (B) uma oscilação periódica ou quase periódica semelhante ao movimento do relógio da lua e dos planetas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. V).

No entanto, a mecânica newtoniana apresentava certas limitações. Embora os modelos matemáticos, que descrevem a evolução de sistemas, fossem suficientemente representados por equações diferenciais e estas fossem passíveis de soluções, era comum encontrar certas equações diferenciais (equações diferenciais não-lineares) de difícil solução; logo, era impossível determinar a previsão de sistemas regidos por esse tipo de equação.

Quando soluções puderam ser encontradas, estas descreviam sistemas com comportamento bastante irregular:

Por volta de 1975, após três séculos de estudos, cientistas em grande número ao redor do mundo de repente perceberam que existia um terceiro tipo de movimento, um tipo de movimento (C), que agora

chamamos de “caos”. O movimento é instável, mas não simplesmente quase-periódico com um grande número de período, e não necessariamente devido a um grande número de partículas que interagem. É um tipo de comportamento que é possível em sistemas muito simples (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. V).

Os cientistas James Clerk Maxwell (1831-1879) e Jules Henri Poincaré (1854-1912) já tinham percebido o comportamento irregular, agora chamado caótico, de alguns sistemas físicos. O primeiro descobriu que era imprevisível, a longo prazo, a previsão do movimento de um sistema composto por duas partículas gasosas. De igual modo, Poincaré observou a imprevisibilidade ao estudar a evolução de modelos solares com três corpos apenas.

Gleick (1989) destaca o pioneirismo dos trabalhos de Poincaré na investigação de sistemas dinâmicos não-lineares, sensíveis às condições iniciais e de difícil previsão a médio e longo prazo. Nesse ínterim, têm-se as palavras de Poincaré na virada do século:

Uma causa muito pequena, que nos passa despercebida, determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que o efeito é devido ao acaso. [...] mesmo que as leis naturais já não tivessem segredos para nós, ainda assim poderíamos conhecer a situação aproximadamente. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, seria tudo o que precisaríamos, e diríamos que o fenômeno tinha sido previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre é assim; pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro nas primeiras produzirá um erro enorme nas últimas. A previsão torna-se impossível (GLEICK, 1989, p. 28-29).

Fieldler-Ferrara e Prado (1994) descrevem que a imprevisibilidade, a longo prazo, de movimento descrito por sistemas dinâmicos, não-lineares e sensíveis às condições iniciais, e, portanto, um movimento caótico, está vinculada à forte dependência às condições iniciais.

[...] *imprevisibilidade*, isto é, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, sua evolução posterior. A imprevisibilidade está obviamente associada à Dependência das Condições Iniciais (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 137).

No imaginário popular, caos é sinônimo de desordem. No entanto, sistemas com características caóticas são descritos por um conjunto de leis (conceitos) específicas, não são aleatórios, nem estocásticos. Seu aparente paroxismo decorre de serem

imprevisíveis a longo prazo, ainda que regidos por equações determinísticas. Mas tal paroxismo se resolve quando se considera a questão da forte dependência das condições iniciais. Assim, sistemas cujas condições iniciais diferem na décima casa decimal, por exemplo, podem, no longo prazo, apresentar comportamentos absolutamente diferentes.

Moreira (1993) assim destaca as principais características de sistemas dinâmicos⁵ caóticos:

Podemos resumir as principais características de um sistema caótico determinístico:

- São sistemas dinâmicos possuidores de uma regra bem definida para a evolução, sem a presença de qualquer flutuação ou elemento aleatório externo;
- As regras são não-lineares, sejam elas equações diferenciais ou equações de diferença finita (discreta);
- Grande parte das trajetórias desses sistemas são instáveis (na região analisada), ou seja, uma pequena incerteza nas condições iniciais cresce exponencialmente com o tempo;
- Esses sistemas apresentam, em razão disso, dificuldades para a previsibilidade de seu comportamento a longo prazo.

(MOREIRA, 1993, p. 165).

Após a segunda metade do século XX, a partir do estudo dos modelos meteorológicos propostos Eduard Norton Lorenz (1917-2008), associados ao uso do computador como ferramenta na obtenção de solução aproximadas de equações diferenciais não-lineares, a nova teoria – teoria do caos determinístico – explicitou sua devida importância.

De fato, a nova teoria representa o fim das certezas determinísticas no que concerne aos poderes de previsão. Gleick (1989) assim destaca o dinamismo de sua construção: “[...] o caos é antes uma ciência de processo do que de estado, de vir-a-ser do que de ser” (GLEICK, 1989, p. 4).

Um dos grandes ou o maior divulgador dos trabalhos de Lorenz foi o físico matemático James A. Yorke. Este também cunhou o termo “teoria do caos” em um de seus artigos publicado no ano de 1975.

Mais tarde, diriam que James Yorke tinha descoberto Lorenz e dado à ciência do caos o seu nome. A segunda parte dessa afirmação é verdadeira (GLEICK, 1989, p. 61).

⁵ “Consiste em um conjunto de estados possíveis, juntamente com regras que determina o estado atual em termos de estados passados” (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. V).

As sessões subsequentes deste capítulo detalharão os principais conceitos relacionados à teoria do caos e exemplos de sua utilização.

3.2 Modelos e simuladores computacionais

Observar o comportamento de fenômenos naturais e estabelecer leis que determinam suas previsões não é uma tarefa fácil, pois sistemas aparentemente simples, como, por exemplo, a previsão do tempo, possuem soluções bastante complexas.

Para o estudo de tais sistemas, constroem-se modelos que são uma representação simplificada do fenômeno observado, em que as variáveis podem ser isoladas e suas características estudadas.

Juntos, Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton, considerados os precursores da ciência moderna, foram os primeiros a utilizar, de forma sistemática, modelos para descrever fenômenos naturais, em especial, modelos, que incrementam um formalismo matemático em sua constituição.

Sir Isaac Newton trouxe ao mundo a ideia de modelar o movimento de sistemas físicos com equações. [...] mas eram aproximações de leis especificadas com equações diferenciais. Seus métodos são agora usados na modelagem de movimento e mudança em todas as áreas da ciência (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p. V).

A modelagem de sistemas deu um salto significativo após o surgimento e a popularização do uso dos computadores, em especial no início dos anos de 1980, com o desenvolvimento de diversos *softwares*, entre os quais, o *Maple*⁶ e o *MatLab*, capazes de solucionar conjuntos de equações diferenciais outrora impossíveis, além de exibir em suas telas gráficos e resultados a partir de parâmetros escolhidos.

Na atualidade, instituições diversas, envolvidas com o ensino e a aprendizagem (editoras, universidades, instituições educacionais), trabalham no desenvolvimento de *softwares* e/ou aplicativos para simular sistemas físicos, como, por exemplo, simuladores de movimento retilíneo uniforme, de movimento de planetas, de movimento de queda livre etc.

⁶ É um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento teve início no ano de 1981, pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo, Waterloo, Canadá. Disponível em: < <https://pt.wikipedia.org/wiki/Maple> >. Acesso em: 16 jun. 2019.

Segundo Abrantes, Miranda e Studard (2010), os simuladores computacionais, no contexto educacional, são chamados de Objetos de Aprendizagem – OA, ou seja, são materiais didáticos digitais utilizados para a promoção da aprendizagem.

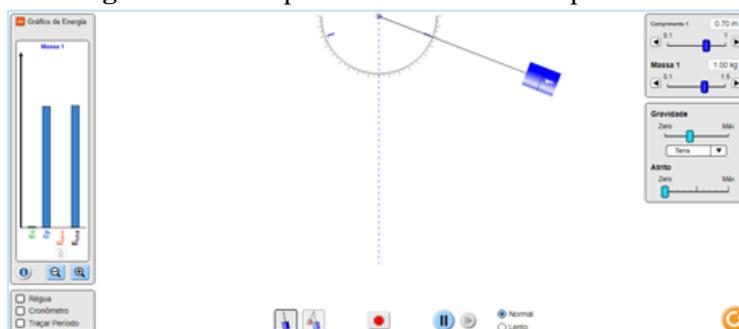
Um dos mais disseminados tipos de OA são as simulações computacionais de experimentos de física, que estão disponíveis para utilização em diversos contextos. Ainda que elas não devam substituir experimentos reais, pesquisas indicam que seu uso combinado à atividade experimental pode tornar mais eficiente o processo de aprendizagem dos alunos (ARANTES; MIRANDA; STUDART, 2010, p. 27).

A utilização dos simuladores não está condicionada ao computador, pois também é possível fazer uso das simulações via dispositivos *mobile* (celulares e *tablets*). Logo, o fácil acesso às tecnologias de simulações tem aumentado a frequência de sua utilização.

São encontradas diversas simulações nos seguintes repositórios: MERLOT – *Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching* (www.merlot.org), e PhET⁷ – Tecnologia Educacional em Física (https://phet.colorado.edu/pt_BR/ - Figura 11, a seguir).

Abrantes, Miranda e Studard (2010) assim destacam a principal função dos simuladores: ser uma efetiva ferramenta de aprendizagem. Para tanto, esclarecem os passos metodológicos estratégicos, explicitando a forma e o momento que o professor deve fazer uso dos simuladores como objeto de aprendizagem.

Figura 11: Exemplo de um simulador de pêndulos.



Fonte: Simulador PhET - Laboratório de Pêndulos.

⁷ Fundado em 2002 pelo ganhador do Prêmio Nobel, Carl Wieman, o PhET - sigla em inglês para Tecnologia Educacional em Física. “O PhET é um programa da Universidade do Colorado que pesquisa e desenvolve simulações na área de ensino de ciências (<http://phet.colorado.edu>) e as disponibiliza em seu portal para serem usadas on-line ou serem baixadas gratuitamente pelos usuários que podem ser alunos, professores ou mesmo curiosos.”, (ARANTES; MIRANDA; STUDART, 2010, p. 28).

3.3 Eduard Lorenz e a previsão do tempo

Eduard Norton Lorenz (1917-2008) – um meteorologista do *Massachusetts Institute of Technology* – MIT –, ao observar a instabilidade do tempo e as configurações que se formam e desaparecem na atmosfera, propôs um modelo matemático simplificado que buscava entender as mudanças climáticas e prever suas variações. Para tanto, fez uso de um computador que buscava solucionar o conjunto de equações diferenciais do referido modelo.

Segundo Gleick (1989), a pesquisa de Lorenz gerava bastante descrédito por parte da maioria dos cientistas de sua época, pois a meteorologia não era tida como ciência e sua investigação era tomada por intuição, além de haver desconfiança do uso do computador como instrumento de auxílio à ciência teórica.

Influenciado pelo determinismo newtoniano, e por que não dizer também laplaciano, Lorenz idealizava um modelo simplificado que governasse o tempo, bem como aquele que governa o movimento do cometa Halley, as rotas das naves espaciais e os mísseis. Sua análise resultou em um modelo determinístico e descrito por um sistema de equações diferenciais não-lineares.

Vale destacar que não é objetivo do presente estudo descrever as etapas utilizadas por Lorenz na obtenção das equações para seu sistema.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sigma [y(t) - x(t)] \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x(t)[\rho - z(t)] - y(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = x(t)y(t) - \beta z(t) \quad (3)$$

Onde:

- $x(t)$ é a função que caracteriza o fluxo de fluídos (na atmosfera);
- $y(t)$ é proporcional à diferença de temperatura entre a parte superior e inferior do movimento do fluído;

- $z(t)$ descreve a não-linearidade na diferença de temperatura ao longo do movimento do fluido;
- $\sigma = 10$;
- $\beta = 8/3$; e
- $\rho = 28$.

Após estabelecer as condições iniciais, Lorenz percebeu que a solução para seu sistema de equações era extremamente complicada, e é nesse contexto que entra o computador *Royal McBee 12*, pois, com o uso deste, Lorenz obteve soluções aproximadas para suas equações.

A máquina, um Royal McBee, era uma floresta de fios e válvulas eletrônicas que ocupava uma parte desajeitadamente grande do escritório de Lorenz, fazia um barulho surpreendente e irritante, e enguiçava quase todas as semanas (GLEICK, 1989, p. 9).

A partir das análises meteorológicas de Lorenz, os computadores se tornaram instrumentos indispensáveis para a verificação de fenômenos climáticos.

A criação de modelos no computador tinha, na verdade, conseguido transformar a meteorologia, de uma arte, numa ciência. As avaliações do Centro Europeu indicavam que o mundo tinha poupado bilhões de dólares anualmente com previsões que, estatisticamente, eram melhores do que nada (GLEICK, 1989, p. 18).

Portanto, o trabalho de Lorenz foi notável no campo da Meteorologia, pois transformou o modo de fazer previsões atmosféricas, além de utilizar o computador como ferramenta de criação e solução de sistemas complexos, fundamental em diversas áreas da ciência moderna.

3.4 Sensibilidade às condições iniciais e efeito borboleta

No modelo de Lorenz, as condições climáticas eram simuladas de modo que cada etapa dependia da etapa anterior, em um processo de iteração. Após a obtenção dos dados de uma determinada simulação, ele resolveu repeti-la, porém, não com os mesmos dados iniciais, mas com uma etapa posterior à inicial.

Para exemplificar, é preciso considerar duas simulações hipotéticas: de posse das informações impressas pelo computador, isto é, para a primeira simulação (S_1), foram obtidos os seguintes dados: S_{1x_1} , S_{1x_2} , S_{1x_3} , ... e S_{1x_n} , onde cada etapa é resultado de

uma iteração. A segunda simulação (S_2) teve início de tal forma que $S_{2x_1} = S_{1x_{30}}$, ou seja, a segunda simulação teve início em uma etapa posterior ao início da primeira simulação.

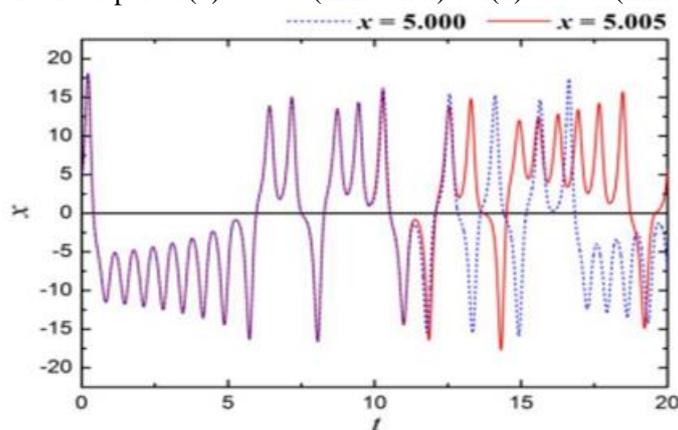
No entanto, o computador de Lorenz armazenava em sua memória seis casas decimais dos resultados de cada simulação, enquanto a impressão somente apresentava três casas. Logo, quando da segunda simulação, com os dados impressos, Lorenz desconsiderava três casas decimais, ou seja, o número $S_{1x_z}=0,506127$ armazenado na memória do computador era impresso $S_{1x_z}=0,506$, que servia de dados ou comparação para a segunda simulação.

Posteriormente, Lorenz percebeu que as pequenas diferenças dos valores iniciais eram responsáveis por acumular significativas divergências entre as simulações. Tais divergências eram imperceptíveis para um curto período; porém, para um longo período, tornavam os resultados imprevisíveis, uma vez que na evolução do seu modelo meteorológico, as duas simulações divergiam completamente depois de um longo período.

Assim, após diversas análises, Lorenz descobriu que seu sistema era sensível às condições iniciais, levando-o a desenvolver a tese de que “situações iniciais ligeiramente diferentes podem se desenvolver em situações consideravelmente diferentes”.

Fazendo uso das equações do modelo meteorológico proposto por Lorenz, a Figura 12, a seguir, demonstra duas simulações em que as condições iniciais são relativamente próximas; porém, a evolução do sistema se mostra sensível às condições iniciais, pois suas características finais são distintas.

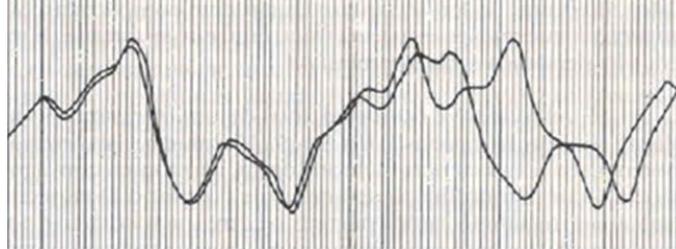
Figura 12: Padrões para $x(0)=5.000$ (linha azul) e $x(0)=5.005$ (linha vermelha).



Fonte: gerado pelo *Maple*, $y(0)=z(0)=5$, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 28$.

A Figura 13, a seguir, retrata a sensibilidade às condições iniciais da previsão do tempo registrada pelo computador de Lorenz no ano de 1961. As duas séries de registros possuem valores iniciais próximos e perdem suas semelhanças ao passar do tempo, ou seja, aproximações iniciais não produzem previsões aproximadas a longo prazo para o sistema de Lorenz.

Figura 13: Divergência de dois padrões da previsão do tempo.

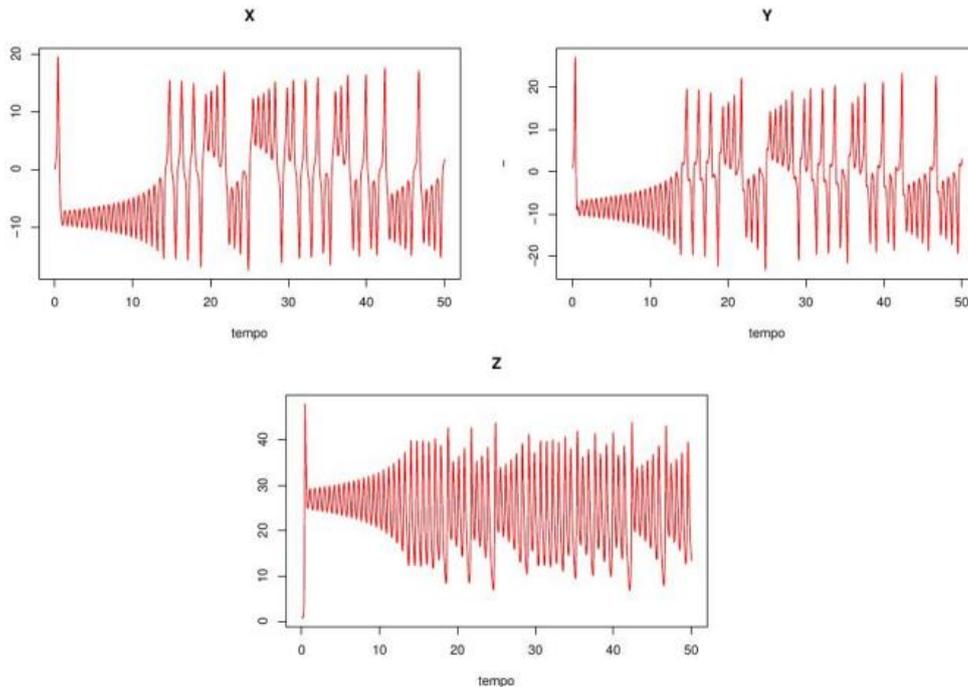


Fonte: GLEICK (1989, p. 15)

Ao analisar seu modelo simplificado de três equações diferenciais, Lorenz descobriu que o gráfico da evolução temporal produzia trajetórias que: nunca convergiam para um ponto fixo; nunca se cruzavam; não descreviam uma estabilidade periódica; nunca divergiam para o infinito; estavam confinadas em uma região finita; que os resultados futuros são imprevisíveis, pois, devido à imprecisão das condições iniciais; e, não possuíam aleatoriedade. O gráfico da evolução temporal ou representação gráfica de estado do modelo simplificado em questão é denominado “Atrator de Lorenz”, Figura 15, a seguir.

É importante destacar que o termo “atrator” já havia sido utilizado por outros cientistas.

Figura 14: Espaço de fase de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

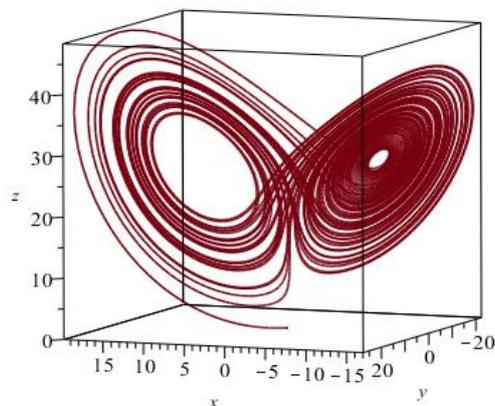


Fonte: Geradas pelo *Maple* a partir das equações de Lorenz.

O Apêndice D apresenta as equações de Lorenz, ao passo que a partir das condições de contorno, foi construído o atrator de Lorenz, fazendo uso do *software Maple*.

Na Figura 15, a seguir, tem-se a representação gráfica tridimensional das equações de Lorenz: o atrator de Lorenz.

Figura 15: Atrator de Lorenz



Fonte: Gerada pelo *Maple* a partir das equações de Lorenz.

No ano de 1972, no 139º Encontro da Associação Americana para o Progresso da Ciência, Lorenz fez uma apresentação intitulada *Predictability; does the Flap of a*

butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? (em português, *Previsibilidade: O bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?*). Ali, seu objetivo era apresentar a alta sensibilidade às condições iniciais de um sistema que busca descrever a previsão do tempo. O tema da apresentação associado ao gráfico do atrator de Lorenz e com as asas de uma borboleta, Figura 16, a seguir, foi propício para o surgimento do termo “efeito borboleta”, que se refere à sensibilidade das condições iniciais de um sistema.

Figura 16: Efeito Borboleta.



Fonte: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/images/borboleta.gif>> Acesso em: 16 set. 2019.

De fato, o trabalho de Lorenz confirmou as previsões de Henri Poincaré, no que tange à imprevisibilidade de sistemas sensíveis às condições iniciais. Logo, a contribuição de Lorenz não é restrita ao estudo de previsões meteorológicas, mas também por demonstrar características do comportamento de um sistema caótico.

Assim, o sistema de equações diferenciais proposto por Lorenz para descrever o comportamento atmosférico é dito: dinâmico, não-linear, sensível às condições iniciais, sendo que a previsão somente é possível a curto prazo, culminando, portanto, em um sistema caótico.

3.5 Pêndulo Duplo

A presente seção busca descrever, de forma sucinta, as particularidades envolvidas no estudo de pêndulos simples e duplos. Para tanto, na descrição e previsão do movimento dos pêndulos, não foram consideradas as forças dissipativas, ou seja, os modelos utilizados para os pêndulos são conhecidos como ideais. As figuras ilustrativas, as simulações computacionais da evolução do movimento de pêndulos duplos e a análise dos resultados foram, então, associadas aos conceitos existentes na teoria do

caos. Assim, as linhas que se seguiram consistiram em mostrar que a evolução do movimento de um pêndulo duplo possui comportamento caótico.

Galileu Galilei foi o primeiro a atribuir particularidades matemáticas na previsão do movimento dos pêndulos. Suas observações demonstraram que pêndulos de mesmo comprimento são isócronos, independentes de suas massas. Posteriormente, o período foi descrito pela expressão: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Segundo Monteiro (2019), Poincaré, pioneiro na investigação de sistemas dinâmicos, também fez uso de pêndulos no desenvolvimento de seus trabalhos, conforme se segue:

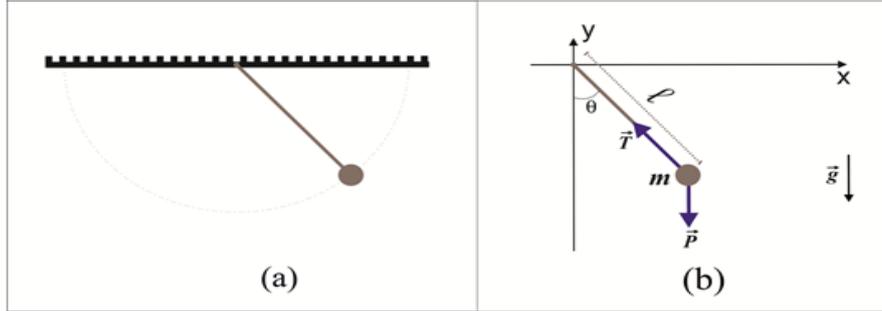
No seu trabalho premiado sobre a estabilidade do sistema solar, Poincaré usou o pêndulo simples para exemplificar conceitos e ideias. [...] o pêndulo é, de fato, um sistema paradigmático no estudo de comportamento dinâmico (MONTEIRO, 2019, p. 44).

Portanto, o estudo fenomenológico dos pêndulos, em especial dos pêndulos duplos, se revela apropriado para o estudo de sistemas dinâmicos. É importante salientar que as investigações de previsões do movimento dos pêndulos proporcionaram diversos avanços, entre os quais, a invenção do relógio pendular, por Christiaan Huygens, no ano de 1656, em Haia, Holanda.

O pêndulo simples, ilustrado na Figura 17, a seguir, consiste em um sistema físico formado de uma haste rígida de massa desprezível e comprimento (l), no qual uma de suas extremidades é acoplada em pivô, origem do sistema xOy, e a outra em um corpo de massa (m). Ao ser abandonado ou empurrado a partir de um ângulo (θ) com a vertical, o corpo começa a descrever um movimento oscilante no plano xy devido à ação de uma força restauradora proveniente do campo gravitacional (g). Para o referido corpo, não é considerado o movimento de rotações.

O formalismo matemático newtoniano, a partir da identificação das grandezas ilustradas na Figura 17 (b), a seguir, permite descrever com previsibilidade o movimento dos pêndulos simples.

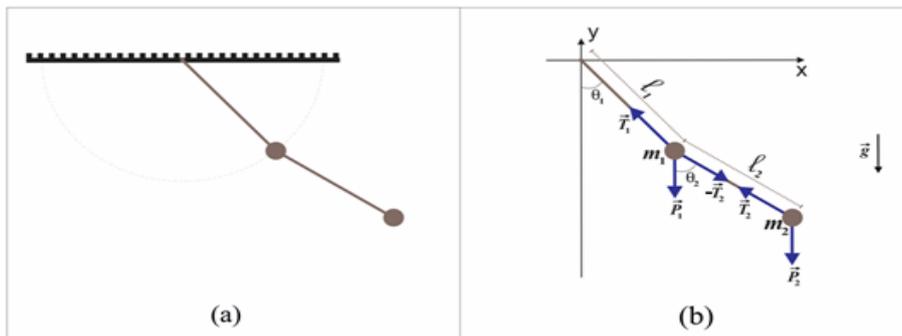
Figura 17: Representação de um pêndulo simples.



Fonte: autor.

O pêndulo duplo, ilustrado na Figura 18, a seguir, é uma extensão do pêndulo simples, pois, a este é acoplado mais uma haste e um corpo. No entanto, as características da evolução do movimento de um pêndulo duplo se mostram bastante diferente daquelas apresentadas por um pêndulo simples.

Figura 18: Representação de um pêndulo duplo.



Fonte: autor.

A seguir, tem-se o conjunto de grandezas utilizadas para determinar a previsão do movimento do pêndulo duplo.

- x_1 = variável da posição horizontal do pêndulo;
- x_2 = variável da posição horizontal do pêndulo;
- y_1 = variável da posição vertical do pêndulo;
- y_2 = variável da posição vertical do pêndulo;
- θ_1 = variável da posição angular do pêndulo 1;
- θ_2 = variável da posição angular do pêndulo 2;
- m_1 = massa do pêndulo 1, é um parâmetro que influencia no movimento do pêndulo e assume valor constante;
- m_2 = massa do pêndulo 2, é um parâmetro que influencia no movimento do pêndulo e assume valor constante;

- l_1 = comprimento do pêndulo 1, é um parâmetro que influencia no movimento do pêndulo e assume valor constante;
- l_2 = comprimento do pêndulo 2, é um parâmetro que influencia no movimento do pêndulo e assume valor constante;
- \vec{T}_1 = tração do pêndulo 1;
- \vec{T}_2 = tração do pêndulo 2;
- \vec{P}_1 = peso do pêndulo 1; e
- \vec{P}_2 = peso do pêndulo 2;

Tomando o pêndulo duplo e o conjunto de suas grandezas definidas no plano cartesiano, seu movimento é completamente descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, ou seja, o modelo que descreve o movimento de um pêndulo duplo é dito determinístico. A previsão do referido movimento implica em determinar como os ângulos θ_1 e θ_2 variam com o t (tempo), isto é, o movimento é conhecido a partir das funções $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$.

As soluções, a partir das condições de contorno, os gráficos e as derivadas das funções anteriormente descritas, bem como a determinação da função Euler-Lagrange, para o pêndulo duplo: $L = K - U$, oriunda da mecânica lagrangeana, foram obtidos por meio do *software Maple 2016*. O formalismo da referida mecânica não foi abordado no presente estudo, não sendo objeto deste.

Os simuladores computacionais aqui utilizados, que descrevem a evolução do movimento de um pêndulo duplo, estão de acordo com o conjunto de equações, descritas a seguir, onde as etapas de suas deduções são detalhadas nos Apêndices B e C.

Assim, como posições dos corpos massivos, dos pêndulos da Figura 18, no plano cartesiano, têm-se as que se seguem:

$$x_1 = l_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \quad (4)$$

$$y_1 = -l_1 \cdot \text{cos } \theta_1 \quad (5)$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \quad (6)$$

$$y_2 = y_1 - l_2 \cdot \text{cos } \theta_2 \quad (7)$$

Como derivadas das primeiras das posições, têm-se as que se seguem:

$$x_1' = \theta_1' \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (8)$$

$$y_1' = \theta_1' \cdot l_1 \cdot \sen \theta_1 \quad (9)$$

$$x_2' = x_1' + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (10)$$

$$y_2' = y_1' + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \sen \theta_2 \quad (11)$$

Como derivadas das segundas das posições, têm-se as que se seguem:

$$x_1'' = -\theta_1'^2 \cdot l_1 \cdot \sen \theta_1 + \theta_1'' \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (12)$$

$$y_1'' = \theta_1'^2 \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 + \theta_1'' \cdot l_1 \cdot \sen \theta_1 \quad (13)$$

$$x_2'' = x_1'' - \theta_2'^2 \cdot l_2 \cdot \sen \theta_2 + \theta_2'' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (14)$$

$$y_2'' = y_1'' + \theta_2'^2 \cdot l_2 \cdot \sen \theta_2 + \theta_2'' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (15)$$

Como componentes das forças atuantes nos pêndulos, têm-se as que se seguem:

$$m_1 \cdot x_1'' = -T_1 \cdot \sen \theta_1 + T_2 \cdot \sen \theta_2 \quad (16)$$

$$m_1 \cdot y_1'' = T_1 \cdot \cos \theta_1 + T_2 \cdot \cos \theta_2 - m_1 \cdot g \quad (17)$$

$$m_2 \cdot x_2'' = -T_2 \cdot \sen \theta_2 \quad (18)$$

$$m_2 \cdot y_2'' = T_2 \cdot \cos \theta_2 - m_2 \cdot g \quad (19)$$

A função lagrangeana é definida pela Equação (20), conforme se segue:

$$L = K - U \quad (20)$$

Onde:

- K representa a energia cinética; e
- U representa a energia potencial.

Logo, a função lagrangeana é obtida a partir dos valores das energias cinética e potencial. O detalhamento dos cálculos foi descrito no Apêndice B.

Como energia cinética do pêndulo duplo, têm-se a que se segue:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \\
 T &= \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (x_2'^2 + y_2'^2) = \\
 &\dots \\
 &\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot (\theta_1'^2 \cdot l_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot \theta_2'^2 \cdot l_2^2 + 2 \cdot \theta_1' \cdot l_1 \cdot \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1' - \theta_2')
 \end{aligned} \tag{21}$$

Como energia potencial do pêndulo duplo, tem-se a que se segue:

$$\begin{aligned}
 V &= m \cdot g \cdot h = \\
 V &= m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 = \\
 &\dots \\
 V &= (m_1 + m_2)(-g \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{22}$$

Para sistemas conservativos, modelo estudado, a expressão abaixo é válida, conforme se segue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_n'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = 0; \quad n = 1 \text{ para } \theta_1 \text{ e } n = 2 \text{ para } \theta_2. \tag{23}$$

Equações diferenciais de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$.

$$\theta_1'' = \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\theta_2'^2 l_2 + \theta_1'^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{24}$$

$$\theta_2'' = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\theta_1'^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \theta_2'^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{25}$$

A Figura 19, a seguir, aponta instantes diferentes da evolução do movimento de dois pêndulos duplos, em que suas posições iniciais são iguais. Neste sentido, o pêndulo duplo 1 possui os corpos verde e amarelo, e o pêndulo 2, os corpos vermelho e azul. As grandezas que diferem na simulação são apenas as massas dos corpos amarelo e azul na

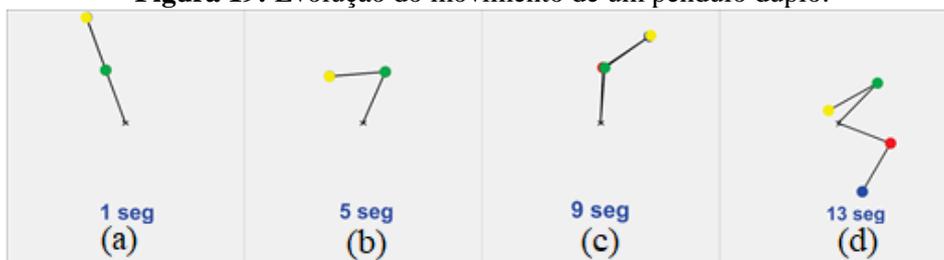
quarta casa decimal, ou seja, a massa do corpo amarelo é 1 unidade e do corpo azul 1,0001 unidade.

E, ainda, a Figura 19, a seguir, apresenta uma sincronia dos movimentos dos pêndulos, bem como o início da modificação de suas posições.

A significativa divergência das posições dos corpos após 13 segundos, também registrada na Figura 19, a seguir, evidencia o grau de sensibilidade das condições iniciais de um sistema que descreve o movimento do pêndulo duplo.

Intuitivamente, a pequena diferença das massas não produziria divergências significativas na evolução dos movimentos assim como as posições finais caracterizam dois pêndulos totalmente distintos, porém, a compreensão do movimento do pêndulo duplo, representada na Figura 19, a seguir, é alcançada por meio da teoria do caos.

Figura 19: Evolução do movimento de um pêndulo duplo.



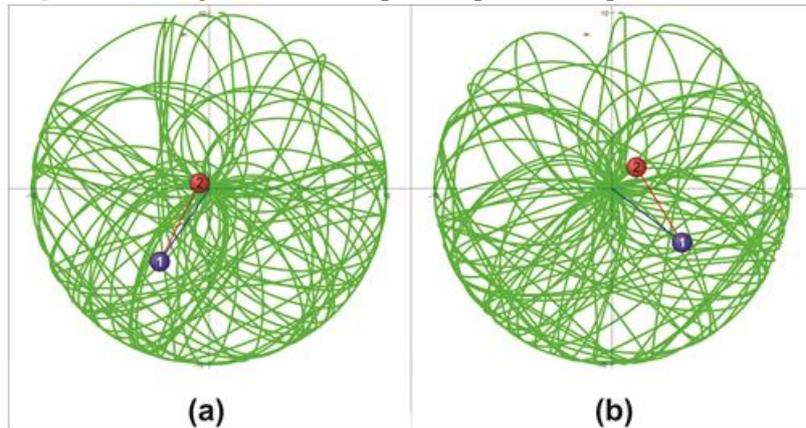
Fonte: Simulador.

Na Figura 20, a seguir, tem-se a ilustração de uma imagem estroboscópica⁸ ou rastro do centro de massa do corpo de massa m_2 , da evolução do movimento de um pêndulo duplo. Nas duas simulações, as grandezas que diferem se dão apenas no ângulo θ_2 para $t=0$, isto é, na Figura 20 (a) $\theta_2=180^\circ$ e na Figura 20 (b) $\theta_2= 179,5^\circ$.

Decorridos 45 segundos do início do movimento nas duas simulações, e comparando os padrões formados pelas figuras 20 (a) e (b), é possível perceber uma mudança significativa na trajetória descrita pelo corpo de massa m_2 , apesar de uma mínima diferença de suas condições iniciais.

⁸ O estroboscópio consiste num dispositivo óptico que permite estudar e registrar o movimento contínuo ou periódico de elevada velocidade de um corpo, com o objetivo de o fazer parecer estacionário. Obtém-se um conjunto de imagens discretas mas que são representativas do percurso que o corpo descreve. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Estrobosc%C3%B3pio>>. Acesso em: 16 jun. 2019.

Figura 20: Imagem estroboscópica do pêndulo duplo, rastro de m_2 .



Fonte: Simulador.

Considerando que as equações que descrevem o movimento de um pêndulo são equações determinísticas e que as simulações ilustradas nas Figuras 19 e 20 evidenciam um sistema dinâmico com forte sensibilidade às condições iniciais, em que as aproximações iniciais geram imprevisibilidades, instabilidade e aperiodicidade.

Portanto, a partir das observações efetuadas, por meio de simulações computacionais, no sistema que descreve o movimento de um pêndulo duplo, é possível caracterizar tais sistemas como caótico.

4 METODOLOGIA

4.1 Metodologia de pesquisa

A metodologia da pesquisa envolve as orientações proposta por Moreira (2011a) para a elaboração de uma sequência didática na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS, fazendo uso de levantamento de conhecimentos prévios, do uso de materiais potencialmente significativos e de investigações que forneçam indícios de Aprendizagem Significativa.

A proposta da pesquisa foi executada com a participação efetiva do professor pesquisador junto aos estudantes, a fim de esclarecer as etapas de estudo, fazendo uso dos elementos do referencial teórico.

4.2 Contextualização

O produto educacional na forma de uma UEPS foi aplicado no Centro de Ensino Médio 01 – CEM 01, uma escola da rede pública localizada na Região Administrativa de Sobradinho – RA V do Distrito Federal, em duas turmas aqui indicadas como Turma 01 e Turma 02, da terceira série do Ensino Médio, turno matutino, com um total de 61 estudantes frequentes, sendo os estudantes nomeados Estudante 01, Estudante 02 e assim sucessivamente.

A unidade escolar em questão tem sua oferta de aulas nos três turnos, abrangendo as seguintes etapas e modalidades de ensino: Ensino Médio em regime de semestralidade⁹ com turnos matutino e vespertino, e Educação de Jovens e Adultos – EJA turno noturno. Todas as 24 salas de aula têm acesso à rede mundial de computadores, contando ainda com três laboratórios de ciências, dois laboratórios de informática, uma biblioteca, um auditório e uma sala de vídeo.

Para a presente pesquisa, as turmas foram escolhidas aleatoriamente, pois o referencial teórico consultado não se opõe ao referido tipo de escolha. E, ainda, a escolha do tema supramencionado, utilização do pêndulo duplo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico, é condizente com o estágio de

⁹ No Distrito Federal, o Ensino Médio é dividido em semestralidade e organizado conforme o documento: *Diretrizes para a Organização do Trabalho Pedagógico na Semestralidade: Ensino Médio*, disponível em <http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/ens_medio/diretrizes_semestralidade.pdf> acessado em 18 de Nov. 2018.

desenvolvimento dos alunos da terceira série do Ensino Médio nas temáticas concernentes à disciplina de Física.

Assim, foram desenvolvidos os significados dos seguintes conceitos: modelagem, sensibilidade às condições iniciais e sistemas dinâmicos não-lineares. Portanto, como o assunto se refere ao comportamento caótico, buscou-se trabalhar sistemas cuja evolução se torna imprevisível se as condições iniciais são ligeiramente próximas.

4.3 Aplicação do produto na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

As atividades realizadas durante a aplicação do produto foram norteadas pelas orientações de Moreira (2011a) para a construção de uma UEPS. Nesse intuito, a sequência didática foi dividida em seis encontros, com planos de aulas propostos por Ferreira e Filho (2019).

Os planos de aulas (*slides*, questionários, simuladores, arquivos e imagens) de cada encontro encontram-se no corpo do produto educacional, Apêndice A, e disponíveis para consulta e ou utilização no *website*:

<https://sites.google.com/view/penduloduplocaosdeterministico>

Figura 21: QR Code - Site do produto educacional.



Para cada encontro, durante a aplicação do produto, foi construído um diário de bordo¹⁰ com intuito de manter um registro das atividades diversas. O professor pesquisador analisou a participação dos estudantes, os registros do diário de bordo, as sondagens e os mapas conceituais, a fim de identificar indícios de Aprendizagem Significativa.

A aplicação do produto se deu com quatro grupos de estudantes, tendo em vista que as turmas escolhidas, Turma 01 e Turma 02, foram divididas.

¹⁰ O diário de bordo é um bloco de registros no qual o professor relata o detalhamento das etapas realizadas durante a aplicação do produto educacional.

O primeiro e o segundo encontro tiveram por objetivo identificar os subsunçores dos estudantes, por meio da análise da sondagem inicial e dos mapas conceituais iniciais, tendo em vista que os novos conceitos serão ancorados aos conhecimentos prévios na estrutura cognitiva dos estudantes.

A reconciliação integradora foi levada em consideração para o planejamento dos encontros (ver mais adiante a explicitação deste e de outros elementos da relação entre metodologia e referencial teórico).

A seguir, tem-se a descrição de cada encontro e seus principais objetivos:

Primeiro encontro – Sondagem inicial e leitura do *gibi* do Pato Donald n. 2433, intitulado *Efeito Borboleta*.

Inicialmente, os estudantes foram informados de que participariam de uma pesquisa acadêmica, sendo a pesquisa pré-requisito para a obtenção do título de Mestrado do Programa Nacional de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF pela Universidade de Brasília – UnB, fazendo uso do tema “teoria do caos”, ao passo que a pesquisa abordaria os conceitos básicos da teoria em questão.

Em seguida, se deu a aplicação da sondagem inicial com questões sobre conceitos relacionados à teoria do caos, sendo posteriormente distribuído para cada aluno o *gibi* da série Pato Donald n. 2433 intitulado *Efeito Borboleta*, para um momento de leitura.

É importante ressaltar que alguns estudantes demonstraram desinteresse em participar da pesquisa, pois alegavam que a pesquisa não valia nota ou pontuação para a disciplina de Física; mas, no decorrer dos encontros, mudaram de opinião, ou seja, participaram da pesquisa mesmo sem a atribuição de notas para a componente curricular.

O encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada.

Segundo encontro – Exibição do filme intitulado *Durante a Tormenta* e orientações para a construção de um mapa conceitual.

O referido filme trouxe uma narrativa sobre o efeito borboleta ou a sensibilidade às condições iniciais.

Em seguida, se deu a construção dos mapas conceituais iniciais. Aqui, os estudantes manifestaram dificuldades de compreensão hierárquica de conceitos básicos da teoria do caos.

O encontro teve duração de três aulas de 45 minutos cada.

Terceiro encontro – Apresentação da evolução do movimento de um pêndulo duplo, por meio de um simulador computacional e de uma apresentação experimental.

Apresentação, a partir de simulações computacionais e experimentos, dos conceitos básicos da teoria do caos (sistemas dinâmicos determinísticos; sensibilidade às condições iniciais; evolução de sistemas caóticos; imprevisibilidade; irreversibilidade).

Os seguintes termos: “sistema dinâmico não-linear”; “sensibilidade às condições iniciais”; “evolução de sistemas caóticos”; “imprevisibilidade”; e, “irreversibilidade”, foram escritos na lousa e, a partir da leitura do *gibi* da série Pato Donald n. 2433 intitulado *Efeito Borboleta*, da exibição do filme intitulado *Durante a Tormenta* e do uso de um simulador computacional, cada conceito foi abordado.

O simulador computacional consiste em um aplicativo que modela a evolução do movimento de dois pêndulos duplos idênticos, após estabelecidas as condições de contorno. As variáveis (massa, atrito, velocidade inicial, ângulo de inclinação e comprimento) que alteram o movimento dos pêndulos podem ser alteradas. Ao diferenciar as massas dos pêndulos na quarta casa decimal é possível observar o padrão de mudança de seus movimentos ou a sensibilidade às condições iniciais.

O encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada.

Quarto encontro – Grandezas que influenciam no movimento do pêndulo duplo.

Verificar, a partir de simulações computacionais e de uma apresentação experimental, quais grandezas influenciam na evolução do movimento de um sistema de pêndulo duplo.

Com o simulador e a apresentação experimental do pêndulo duplo, foi possível perceber que pequenas alterações nas condições iniciais produzem mudanças significativas, ou seja, sistemas dinâmicos não-lineares são sensíveis às condições iniciais.

O encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada.

Quinto encontro – Reconciliação dos conceitos via simulador computacional.

Foram retomados os aspectos gerais de todo conteúdo da UEPS em um nível mais alto de complexidade em relação às aulas anteriores, efetuando-se as correções de problemas de aprendizagem apresentados pelos estudantes.

No encontro foram utilizadas as questões 01, 03, 04 e 06 do questionário de sondagem inicial, as questões 01, 03 e 05 da sondagem final, os *slides* do quarto encontro, um simulador computacional do pêndulo duplo e uma amostra experimental do pêndulo duplo.

Também foi sugerido o jogo intitulado *Life is Strange* como atividade complementar. Este tem sua divisão em episódios, em que a aventura consiste que o jogador, terceira pessoa, escolha as ações da personagem Maxine Caulfield.

Quando do início do jogo, é trazida a informação que a personagem pode retroceder o tempo e tomar novas decisões em relação às decisões anteriormente efetivadas e, por mais que a personagem volte no tempo, em qualquer momento, e tome novas decisões, suas novas escolhas sempre criam um “efeito borboleta”; logo, o jogo faz alusão direta à teoria do caos em todos os episódios.

A sugestão do jogo como atividade complementar foi positiva, pois, grande parte dos estudantes conhecia o jogo e as consequências causadas pelas escolhas dos jogadores.

O encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada.

Sexto encontro – Sondagem final e elaboração dos mapas conceituais finais.

Fez-se aqui a sondagem final e, posteriormente, a confecção dos mapas conceituais finais envolvendo o tema “teoria do caos”.

O encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada.

4.4 Conexão com o referencial teórico

A fim de nortear, no sentido de elaborar e aplicar, uma UEPS, Moreira (2011) fixa oito passos sequenciais. Seguindo as orientações outrora apontadas e o tema “teoria do caos”, a seguir apresentam-se a sequência didática e suas vinculações com o referencial teórico.

Aspectos Sequenciais:

1. Atividades iniciais: Inicialmente foi aplicado um questionário (sondagem inicial) com perguntas sobre os conceitos relacionados à teoria do caos para o levantamento dos subsunçores.

Como primeiro elemento de organização prévia, foi distribuído, para cada aluno, o *gibi* da série Pato Donald n. 2433, intitulado *Efeito Borboleta*.

Em um segundo momento do processo de organização prévia, ainda nas atividades iniciais, foi exibido o filme *Durante a Tormenta*, que mistura suspense, viagem temporal, multiplicidade de determinações, efeito borboleta e teoria do caos.

Em seguida, foram repassadas as orientações, por meio de *slide*, para a construção de um mapa conceitual inicial sobre o tema supramencionado. Ao término da aplicação da sequência didática, os estudantes também confeccionaram um mapa conceitual final, uma vez que se deu a comparação entre ambos os mapas em busca de indícios de Aprendizagem Significativa.

2. Situação-problema inicial: foram apresentados, por meio de *slides*, trechos extraídos do *gibi* Pato Donald n° 2433 e do filme *Durante a Tormenta*, que continham tópicos relevantes envolvendo conceitos da teoria do caos e os conhecimentos prévios dos estudantes observados na sondagem inicial.

Aqui, a evolução de dois sistemas acoplados, formando um pêndulo duplo, foi apresentada por meio de uma simulação computacional. Posteriormente, os estudantes se organizaram em grupos, a fim de debaterem possíveis resultados de uma nova evolução do referido sistema, para uma diferença na quarta casa decimal de suas massas. Após o acompanhamento da evolução do sistema, os estudantes expuseram suas conclusões em um segundo debate com toda a turma, refletindo sobre a evolução de outros sistemas físicos. A apresentação introduziu o tema em suas características mais gerais e inclusivas.

O professor foi o mediador do segundo debate entre os estudantes, ouvindo as opiniões, tomando notas e despertando o interesse pelo assunto abordado, mas sem apresentar uma resposta final objetiva.

3. Aprofundando conhecimentos: inicialmente foi apresentada a evolução de sistemas de pêndulos, simples e duplos, em simulações computacionais e demonstrações experimentais do pêndulo duplo. Observando a evolução dos sistemas,

prático e teórico, dos pêndulos duplos e tendo como ponto de partida o seguinte questionamento: “Por que a evolução de um sistema com pêndulo duplo caracteriza um fenômeno caótico?” (com o intuito de aprimorar a compreensão dos conceitos e da imprevisibilidade da teoria do caos determinístico), o professor apresentou, por meio de *slides*, os conceitos que deveriam ser aprendidos com a sequência didática em questão.

Os simuladores computacionais, disponíveis em <https://sites.google.com/view/penduloduplocaosdeterministico/atividades/3%C2%AA-aula?authuser=0> e https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/pendulum-lab do PhET, são modelos que descrevem a evolução de um sistema físico, em nosso caso o movimento de pêndulos duplos.

No simulador, as grandezas: velocidade, massa, ângulos de inclinação a partir de um sistema de coordenadas, atrito e comprimento dos pêndulos foram levemente alteradas, sendo possível acompanhar, em grau de comparação, as mudanças na evolução de cada movimento dos pêndulos. Logo, os simuladores representaram um facilitador na compreensão dos conceitos da teoria do caos, a partir das relações entre as grandezas envolvidas, e servem de exemplo do uso apropriado de tecnologia da informação no contexto do ensino.

4. Nova situação-problema em nível mais alto de complexidade - observação experimental: aqui se tem a apresentação das variáveis das equações que descrevem o movimento do pêndulo caótico, a iteração de um crescimento populacional, uma bifurcação construída a partir de grande número de iterações, equações de Lorenz e atrator de Lorenz. O procedimento da execução da etapa supramencionada foi descrito no plano de aula do quarto encontro, apêndice A.

Posteriormente, os estudantes devem proceder ao manuseio de dois pêndulos duplos, montados em sala de aula, supostamente idênticos e abandonados com os mesmos ângulos de inclinação e, a partir da evolução do movimento dos dois pêndulos duplos e tomando como base os conceitos abordados, quanto à teoria do caos, buscar a compreensão dos seguintes questionamentos:

- Quais grandezas físicas estão envolvidas nas diferenças do movimento dos dois pêndulos duplos?
- Existem outros sistemas físicos que evoluem para um sistema caótico? Descreva algum?

5. Reconciliação de conceitos: a partir das demonstrações experimentais, das simulações computacionais do movimento do pêndulo duplo e das respostas dos estudantes na sondagem inicial, deu-se, por meio de *slides*, a reconciliação de conceitos da teoria do caos.

6. Encontro final: diálogo com os alunos objetivando correções em conceitos mal aprendidos ou superficialmente compreendidos.

7. Avaliação – sondagem final e mapas conceituais finais: aplicação da sondagem final e elaboração dos mapas conceituais do produto educacional.

8. Avaliação da UEPS: na análise da UEPS, foram identificados indícios de Aprendizagem Significativa na aplicação do produto. Para tanto, foi considerada a participação dos alunos nas atividades realizadas, a análise dos mapas conceituais e as sondagens aplicadas – inicial e final.

Vale destacar que o professor é figura fundamental na construção de uma UEPS, pois, é o responsável pela organização e estruturação (escolha do tema, organização do ensino, proposição de situações-problema com maior complexidade, captador de significados) desta em todo o processo.

Segundo Moreira (2017), o professor assume essencialmente, quatro tarefas fundamentais, no exercício da facilitação da Aprendizagem Significativa, quais sejam:

1. Identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino [...]
2. Identificar quais os subsunçores relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado [...]
3. Diagnosticar aquilo que o aluno já sabe: determinar, dentre os subsunçores especificamente relevantes [...]
4. Ensinar utilizando recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa.

(MOREIRA, 2017, p.170).

Finalizada a aplicação do produto educacional, teve início a avaliação de todo processo, objetivando identificar indícios da Aprendizagem Significativa, conforme a proposta de uma UEPS. Os dados levantados, durante as avaliações formativas (sondagens), foram utilizados para verificar que, de fato, houve algum aprendizado por parte dos alunos. Estas análises estão apresentadas no capítulo que se segue.

5 RESULTADO E ANÁLISE

No presente capítulo tem-se a apresentação e discussão dos resultados obtidos durante a aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS. Para tanto, foram considerados as anotações do diário de bordo de cada encontro, as sondagens iniciais e finais, os mapas conceituais e as questões de pesquisa.

As análises empreendidas buscaram indícios de Aprendizagem Significativa. A análise quantitativa, dos questionários das sondagens iniciais e finais, se deu com base em um modelo de categorização das respostas dos estudantes.

Para analisar as respostas dos alunos aos questionários, sondagens iniciais e finais, as respostas foram categorizadas em cinco tipos.

- Não responderam (NR): São questões em que os alunos não responderam.
- Fuga do Tema (FT): São consideradas respostas cuja essência não se relaciona de maneira alguma com o tema abordado.
- Incoerente (IN): São respostas em que aparecem elementos relacionados ao tema, porém abordados com pouco ou nenhum rigor técnico ou científico.
- Coerente (CO): São respostas que se relacionam com o tema, porém com pouco ou nenhum detalhamento.
- Resposta Adequada (RA): São respostas coerentes e que contêm riquezas de detalhes do tema abordado.

(FERREIRA; SILVA FILHO; CORTEZ; SCHINZEL; NETO; SILVA; 2018, p. 10 – 11)

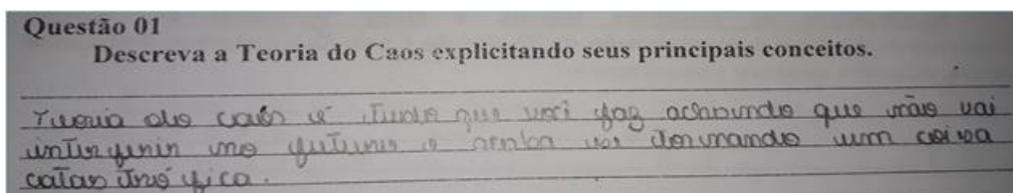
A seguir têm-se exemplos de respostas a partir da aplicação dos questionários das sondagens.

Sem Respostas (SR): questões não respondidas ou deixadas em branco pelos alunos;

- Fuga do Tema (FT): consideradas respostas cuja essência não se relaciona com o tema abordado.

Figura 22: Exemplo de resposta Fuga do Tema - FT.

(Resposta: Teoria do caos é tudo que você faz achando que não vai interferir no futuro e acaba se tornando um coisa catastrófica. [SIC])



- Incoerente (IN): respostas onde aparecem elementos relacionados ao tema, porém, tratados com pouco ou nenhum rigor técnico ou científico.

Figura 23: Exemplo de resposta Incoerente - IN.

(Resposta: A mudança de padrão pode estar relacionada com as mudanças do tempo e previsões climáticas, no máximo só se pode prever por 2 ou 3 dias, pois é um caso caótico. [SIC])

Questão 03

COMO DOIS PADRÕES DE TEMPO DIVERGEM – Partindo quase do mesmo ponto (0.506127 e 0.506), Edward Lorenz viu seu computador de previsão do tempo produzir padrões que se distanciavam cada vez mais, até que toda semelhança desaparecesse.

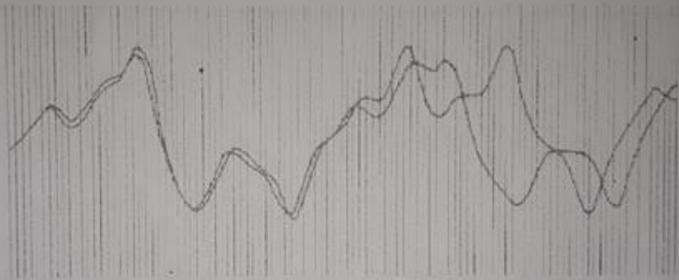


Figura 01: Fonte: GLEICK, p.14.

A parti do texto e da figura. Qual conceito, relacionado a Teoria do Caos, está associado a mudança de padrão?

A mudança de padrões pode estar relacionada com as mudanças de tempo e previsões climáticas, no máximo só se pode prever por 2 ou 3 dias, pois é um caso caótico.

- Coerente (CO): respostas que se relacionam com o tema, porém, com pouco ou nenhum detalhamento.

Figura 24: Exemplo de resposta Coerente - CO.

(Resposta: Quando você muda a massa altera o movimento, mesmo sendo uma quantidade mínima. [SIC])

Questão 02

Cite características de sistemas dinâmicos, como o pêndulo duplo, que apresentam comportamento caótico?

Quando você muda a massa altera o movimento, mesmo sendo uma quantidade de mínima.

- Resposta Adequada (RA): respostas coerentes com riquezas de detalhes do tema abordado.

Figura 25: Exemplo de resposta Resposta Adequada - RA.

posterior ao crescimento X_i .

Complete a tabela abaixo a partir de dois valores muito próximos para a população inicial.

Iteração	Tamanho da População	
	$X_i = 0.7000$	$X_i = 0.6999$
1ª	0,7980	0,7981
2ª	0,6125	0,6122
3ª	0,4019	0,4021
4ª	0,3363	0,3354
5ª	0,2881	0,2870
6ª	0,4895	0,4824
7ª	0,2486	0,2497

Handwritten calculations and annotations are present around the table, including:

- $X_{i+1} = 3,8 X_i \sqrt{1-X_i}$
- Calculations for each iteration: e.g., $3,8 \times 0,7981 \times \sqrt{1-0,7981} = 0,7981$
- Final values: $3,8 \times 0,2486 \times \sqrt{1-0,2486} = 0,2486$ and $3,8 \times 0,2497 \times \sqrt{1-0,2497} = 0,2497$

Após a categorização de todas as respostas, das sondagens iniciais e finais de cada estudante, foram construídos tabelas e gráficos visando verificar indícios de Aprendizagem Significativa.

5.1 Dados da aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

As sondagens inicial e final foram aplicadas em duas turmas, denominadas Turma 01 e Turma 02, da terceira série do Ensino Médio do Centro de Ensino Médio 01 – CEM 01, uma escola da rede pública localizada na Região Administrativa de Sobradinho – RA V do Distrito Federal, com um total de 61 estudantes frequentes. Os estudantes de cada turma foram nomeados como Estudante 01, Estudante 02, Estudante 03 e, assim, por diante.

Após a sondagem inicial das Turmas 01 e 02, foram construídas as Tabelas 01 e 02, a seguir, que apontam a categorização das respostas de cada estudante. As questões 05 e 08 não possuíam classificação em relação à referida categorização, uma vez sendo questões que buscam, respectivamente, a familiarização dos estudantes com o uso de simuladores computacionais e com o experimento do pêndulo duplo.

Questionário - Sondagem inicial: Tema – Teoria do caos

Questão 01

Supondo que você esteja lendo um texto e em determinado trecho da leitura você se depara com a palavra “caos”. Descreva sua impressão sobre a narrativa do texto.

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes sobre o termo “caos”.

Questão 02

Você já ouviu falar sobre a teoria do caos?

() Sim - Descreva sua compreensão sobre a referida teoria.

() Não - Descreva sua impressão sobre a referida teoria.

Objetivo: Verificar a compreensão/impressão dos estudantes sobre a teoria do caos.

Questão 03

“Sensibilidade às condições iniciais”, “iteração”, “atrator” e “efeito borboleta” são termos imprescindíveis para a compreensão da teoria do caos. Destes, qual(is) você já ouviu falar? Descreva qual seu entendimento.

Objetivo: verificar a familiaridade e o entendimento de alguns termos utilizados para a compreensão da teoria do caos.

Questão 04

Sistemas dinâmicos podem ser descritos quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Cite algum sistema dinâmico (linear ou não-linear) relacionado ao conteúdo de Física que você estudou.

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes a respeito do sistema dinâmico relacionado ao estudo da Física.

Questão 05

A evolução de um sistema físico pode ser descrita por modelos matemáticos e simulações virtuais. Durante o Ensino Médio, você ou seu professor fizeram uso de algum simulador computacional? Em que conteúdo de Física foram utilizadas as simulações computacionais?

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes a respeito de modelagem e das simulações computacionais de sistemas relacionados ao estudo da Física.

Questão 06

A equação $X_{i+1} = 3,8 \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ descreve, discretamente, o crescimento populacional de duas espécies: P e Q, onde X_{i+1} representa o tamanho da população em um instante posterior ao crescimento X_i .

Complete a seguinte Tabela:

Iteração	Tamanho da População		Diferença Populacional ($P_n - Q_n$) (onde n representa as iterações das populações P e Q).
	População de P, $X_i = 0,7000$	População de Q, $X_i = 0,6999$	
			0,0001
1 ^a	0,7980		
2 ^a		0,6122	
3 ^a			
4 ^a	0,3363	0,3354	0,009

Objetivo: verificar a habilidade matemática dos estudantes de produzir iterações a partir das condições de contorno.

Questão 07

“O determinismo afirma que todos os acontecimentos do mundo são preestabelecidos. Em oposição, a concepção indeterminista afirma que existem acontecimentos que não são pré-estabelecidos, ou ainda, que o futuro não é fixo”.

Na sua opinião, o estudo da ciência, em especial, de temas relacionados à Física, se relacionam mais com quais correntes de pensamento dos termos outrora destacados? E é possível um sistema ser determinístico e imprevisível?

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes sobre as correntes de pensamento do determinismo/indeterminismo e previsível/imprevisível relacionados ao estudo da Física.

Questão 08

Você já ouviu falar sobre o experimento do pêndulo duplo?

() Sim () Não

Objetivo: verificar, quantitativamente, se os estudantes conhecem o movimento de um pêndulo duplo.

Tabela 1: Tabulação dos testes, sondagem inicial – Turma 01.

Estudante	Questões							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Estudante 1	IN	NR	NR	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 2	FT	IN	FT	NR	Não	NR	CO	Não
Estudante 3	FT	NR	NR	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 4	FT	CO	NR	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 5	FT	IN	CO	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 6	FT	FT	FT	NR	Não	NR	CO	Não
Estudante 7	FT	NR	NR	NR	Não	NR	NR	Sim
Estudante 8	FT	FT	FT	CO	Sim	NR	FT	Não
Estudante 9	FT	NR	FT	NR	Não	NR	IN	Sim
Estudante 10	FT	FT	FT	IN	Não	NR	CO	Não
Estudante 11	FT	FT	FT	NR	Não	NR	IN	Sim
Estudante 12	FT	FT	FT	NR	Não	NR	IN	Sim
Estudante 13	FT	FT	NR	NR	Não	NA	FT	Sim
Estudante 14	FT	IN	NR	NR	Não	IN	FT	Não
Estudante 15	FT	FT	FT	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 16	FT	FT	IN	NR	Não	IN	FT	Não
Estudante 17	FT	FT	IN	NR	Não	NR	FT	Sim
Estudante 18	FT	NR	FT	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 19	FT	IN	IN	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 20	FT	IN	IN	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 21	FT	FT	FT	IN	Não	NR	FT	Não
Estudante 22	FT	FT	NR	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 23	FT	FT	NR	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 24	FT	FT	FT	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 25	FT	FT	FT	FT	Não	NR	FT	Não
Estudante 26	FT	FT	FT	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 27	FT	FT	FT	NR	Não	NR	FT	Sim
Estudante 28	IN	NR	FT	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 29	FT	FT	IN	IN	Não	NR	FT	Não
Estudante 30	FT	FT	FT	FT	Não	IN	FT	Não

Fonte - Autor.

Tabela 2: Tabulação dos testes, sondagem inicial – Turma 02.

Estudante	Questões							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Estudante 1	FT	FT	FT	NR	Não	IN	IN	Não
Estudante 2	FT	FT	FT	CO	Não	NR	NR	Não
Estudante 3	FT	FT	IN	IN	Não	NR	FT	Sim
Estudante 4	FT	FT	NR	FT	Não	IN	IN	Não
Estudante 5	FT	FT	FT	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 6	FT	FT	IN	NR	Não	NR	IN	Não
Estudante 7	FT	FT	FT	NR	Não	IN	NR	Não
Estudante 8	FT	FT	FT	FT	Não	NR	IN	Não
Estudante 9	FT	FT	NR	IN	Não	IN	NR	Não
Estudante 10	FT	FT	IN	IN	Não	NR	FT	Não
Estudante 11	FT	FT	NR	NR	Não	IN	IN	Não

Estudante 12	FT	FT	NR	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 13	FT	IN	CO	IN	Não	IN	NR	Não
Estudante 14	NR	FT	NR	NR	Não	NR	NR	Não
Estudante 15	FT	FT	IN	IN	Não	NR	FT	Não
Estudante 16	FT	FT	IN	NR	Não	NR	NR	Não
Estudante 17	CO	CO	CO	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 18	FT	FT	CO	NR	Não	IN	IN	Não
Estudante 19	IN	IN	IN	CO	Não	IN	FT	Não
Estudante 20	FT	FT	FT	NR	Não	NR	NR	Sim
Estudante 21	FT	IN	IN	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 22	FT	FT	FT	NR	Não	IN	NR	Não
Estudante 23	FT	IN	IN	NR	Sim	NR	FT	Não
Estudante 24	FT	IN	IN	FT	Não	NR	NR	Não
Estudante 25	FT	NR	NR	NR	Não	NR	NR	Não
Estudante 26	FT	NR	NR	NR	Não	NR	FT	Não
Estudante 27	FT	FT	NR	NR	Não	NR	NR	Sim
Estudante 28	IN	FT	IN	IN	Não	IN	NR	Não
Estudante 29	FT	FT	IN	FT	Não	CO	IN	Não
Estudante 30	FT	NR	IN	NR	Não	NR	NR	Não
Estudante 31	FT	FT	NR	NR	Não	NR	NR	Não

Fonte - Autor.

Após a sondagem final das Turmas 01 e 02, foram construídas as Tabelas 03 e 04, a seguir, que apontam a categorização das respostas de cada estudante.

Questionário - Sondagem inicial: Tema - Teoria do caos

Questão 01

Descreva a teoria do caos explicitando seus principais conceitos.

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos foi bem fixada (Diferenciação Progressiva).

Questão 02

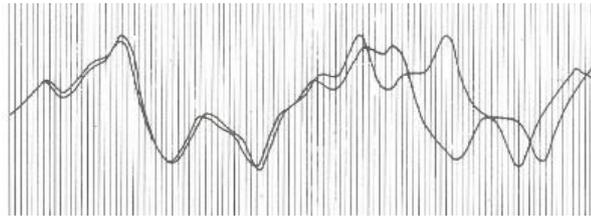
Cite características de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico?

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos foi bem fixada (Diferenciação Progressiva).

Questão 03

COMO DOIS PADRÕES DE TEMPO DIVERGEM – Partindo quase do mesmo ponto (0.506127 e 0.506), Edward Lorenz viu seu computador de previsão do tempo

produzir padrões que se distanciavam cada vez mais, até que toda semelhança desaparecesse.



Padrões meteorológicos de Lorenz.

Fonte: Gleick (p. 14)

A partir do texto e da figura apresentados anteriormente, qual conceito, relacionado à teoria do caos, está associado à mudança de padrão?

Objetivo: investigar se a base conceitual da influência das condições iniciais na evolução do sistema foi fixada.

Questão 04

Diferencie um sistema dinâmico caótico determinista de um sistema aleatório.

Objetivo: investigar a profundidade conceitual e ligada a teoria do caos (Reconciliação Integrativa).

Questão 05

“Sensibilidade às condições iniciais” e “efeito borboleta” são termos imprescindíveis para a compreensão da teoria do caos. Sobre tais termos, descreva qual seu entendimento?

Objetivo: investigar se a base conceitual da influência das condições iniciais e do efeito borboleta foi fixada.

Questão 06

A equação $X_{i+1} = 3,8 \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ descreve, discretamente, o crescimento populacional, onde X_{i+1} representa o tamanho da população em um instante posterior ao crescimento X_i .

Complete a Tabela a seguir, a partir de dois valores muito próximos para a população inicial.

Iteração	Tamanho da População	
	$X_i = 0,7000$	$X_i = 0,6999$
1 ^a	0,7980	
2 ^a		0,6122
3 ^a		
4 ^a	0,3363	0,3354
5 ^a		
6 ^a		
7 ^a		

Objetivo: investigar se a habilidade matemática e a produção de iterações foram fixadas.

Questão 07

Você considera o tema “teoria do caos” adequado para ser ensinado em nível introdutório no Ensino Médio? Por que?

Objetivo: verificar a vontade de aprender sobre o tema “teoria do caos”.

Questão 08

Por que o movimento de um pêndulo duplo é caracterizado como um movimento caótico?

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos, aplicada ao movimento do pêndulo duplo, foi fixada.

Tabela 3: Tabulação dos testes, sondagem final – Turma 01.

Estudante	Questões							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Estudante 1	CO	RA	CO	RA	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 2	RA	CO	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 3	CO	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 4	CO	CO	IN	IN	CO	RA	Pesquisa	RA
Estudante 5	RA	CO	RA	RA	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 6	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	IN
Estudante 7	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 8	CO	CO	RA	IN	RA	RA	Pesquisa	IN
Estudante 9	RA	IN	RA	RA	RA	CO	Pesquisa	RA
Estudante 10	RA	CO	CO	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 11	RA	RA	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 12	IN	CO	CO	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 13	CO	IN	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 14	RA	CO	RA	CO	CO	CO	Pesquisa	FT
Estudante 15	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 16	CO	RA	CO	CO	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 17	CO	CO	FT	CO	IN	CO	Pesquisa	CO
Estudante 18	CO	RA	RA	CO	CO	CO	Pesquisa	CO
Estudante 19	RA	CO	IN	CO	CO	CO	Pesquisa	CO
Estudante 20	RA	RA	RA	CO	CO	CO	Pesquisa	CO

Estudante 21	FT	CO	IN	CO	CO	CO	Pesquisa	CO
Estudante 22	RA	IN	IN	CO	CO	CO	Pesquisa	CO

Fonte - Autor.

Tabela 4: Tabulação dos testes, sondagem final – Turma 02.

Estudante	Questões							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Estudante 1	CO	IN	FT	FT	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 2	CO	CO	FT	FT	IN	RA	Pesquisa	IN
Estudante 3	CO	CO	RA	CO	CO	IN	Pesquisa	RA
Estudante 4	IN	CO	CO	IN	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 5	CO	CO	CO	CO	CO	RA	Pesquisa	RA
Estudante 6	RA	CO	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 7	CO	CO	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 8	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	IN
Estudante 9	CO	CO	IN	CO	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 10	RA	CO	RA	CO	IN	RA	Pesquisa	CO
Estudante 11	RA	CO	CO	CO	IN	RA	Pesquisa	CO
Estudante 12	RA	CO	CO	IN	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 13	CO	RA	CO	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 14	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	IN
Estudante 15	RA	IN	IN	IN	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 16	RA	RA	RA	CO	RA	RA	pesquisa	RA
Estudante 17	RA	CO	CO	CO	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 18	CO	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 19	RA	CO	CO	CO	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 20	RA	CO	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 21	IN	RA	IN	CO	CO	RA	Pesquisa	IN
Estudante 22	RA	IN	CO	CO	RA	RA	Pesquisa	IN
Estudante 23	RA	RA	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 24	RA	RA	IN	IN	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 25	RA	CO	IN	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 26	RA	RA	IN	IN	CO	RA	Pesquisa	RA
Estudante 27	RA	RA	RA	CO	CO	RA	Pesquisa	CO
Estudante 28	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 29	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA
Estudante 30	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	CO
Estudante 31	RA	RA	RA	CO	RA	RA	Pesquisa	RA

Fonte - Autor.

Após a sondagem final das Turmas 01 e 02, foram construídas as Tabelas 05 e 06, a seguir, que apresenta a resposta de cada estudante referente à questão 07. Esta buscou a opinião dos estudantes em relação à inserção do tema “teoria do caos” no conteúdo curricular formal do Ensino Médio.

Tabela 5: Pesquisa de opinião, sondagem final – Turma 01.

Estudante	Questão 07 - Você considera o tema, Teoria do Caos, adequado para ser ensinado em nível introdutório no Ensino Médio? Por que?
Estudante 1	Sim, pois é uma matéria interessante e muito pouca estudada.
Estudante 2	Sim, pois é uma matéria interessante e fácil de ser estudada.
Estudante 3	Sim, além de ser um assunto diferenciado é algo que cativa o público.
Estudante 4	Sim, pois assim podemos aprender sobre efeitos causados por pequenas alterações que causam grandes efeitos.
Estudante 5	Sim, um assunto muito interessante de se aprender.
Estudante 6	Sim, um assunto muito interessante de se aprender.
Estudante 7	Sim, pois ensina que se no estudo de física nós mudarmos uma pequena coisa, no final haverá grande mudança.
Estudante 8	Sim, porque é uma teoria muito surpreendente a sua vida pode mudar por uma coisa insignificante é extraordinário e isso deve ser ensinado para nós.
Estudante 9	Sim pois em quase ninguém conhecia essa teoria.
Estudante 10	Sim, porque é um tema que concilia bem calculo e teoria.
Estudante 11	Sim porque entendemos uma teoria que faz parte do nosso dia a dia e que provavelmente no futuro estará nos vestibulares foi um bom aprendizado.
Estudante 12	Sim, porque a teoria do caos é importante, pois nos mostra que pequenas alterações podem alterar o futuro.
Estudante 13	Sim, pois além de ser legal é bastante interessante.
Estudante 14	Acho, pois useos provas fora da escola costumam cobrar tal tema.
Estudante 15	Sim, pois ensinará regras e conceitos que se aplicam nas matérias.
Estudante 16	Sim
Estudante 17	Sim pois irá trazer mais conhecimento ao aluno.
Estudante 18	Com certeza.
Estudante 19	Sim, pois esclarece muito.
Estudante 20	Sim
Estudante 21	Sim
Estudante 22	Sim

Fonte - Autor.

Tabela 6: Pesquisa de opinião, sondagem final – Turma 01.

Estudante	Questão 07 - Você considera o tema, Teoria do Caos, adequado para ser ensinado em nível introdutório no Ensino Médio? Por que?
Estudante 1	*Acredito que este tema é bastante fútil para o ensino médio, pois na minha opinião existem conteúdos mais necessário na aprendizagem dos estudantes.
Estudante 2	*Não considero, pois não entendi nada.
Estudante 3	Sim. Pois o entendimento da teoria do caos ajuda com explicações simples.
Estudante 4	Não sei exatamente dizer, mais pela as aulas que vi eu acho que sim.
Estudante 5	Sim, porque é uma matéria interessante e explica muitos dos caos do dia a dia.
Estudante 6	Sim, porque a matéria é interessante e que pode ser aplicada no dia a dia.
Estudante 7	Sim, porque é uma teoria muito importante e interessante, dos alunos de ensino médio aprenderem.
Estudante 8	Sim, pois ao conhecer seus conceitos podemos relacioná-los a outros temas e resultados.
Estudante 9	Não acho que essa teoria seja relevante para o ensino dos alunos. Na minha opinião não agrega. Mas é um assunto interessante.

Estudante 10	Sim, pois a matéria além de interessante nos acrescenta muito conhecimento.
Estudante 11	Sim, pois a matéria além de interessante nos acrescenta muito conhecimento.
Estudante 12	Sim, porque essa teoria está cada vez mais presente no nosso cotidiano, vivemos com ela o tempo todo sem sabermos.
Estudante 13	Sim, pois a teoria ajuda de uma certa maneira a tornarmos atitudes com mais responsabilidade visando os resultados futuros.
Estudante 14	Sim, ao conhecermos seus conceitos podemos relacioná-los a outros temas e resultados.
Estudante 15	Sim, porque é a base de entendimento para muitas coisas.
Estudante 16	Sim, conhecimento é sempre bom então quanto mais informações, pesquisas, estudos, teorias de todos os tipos são bons e devem ser incentivados.
Estudante 17	Sim, nos prepararia até para outras matérias.
Estudante 18	Sim, a teoria do caos explica muito bem o poder de nossas escolhas e que devemos pensar mais sobre as consequências.
Estudante 19	Sim, pois é uma matéria muito interessante e além de tudo ajuda muito.
Estudante 20	Sim, pois poucos conhecem sobre esse assunto.
Estudante 21	*Na minha opinião não é adequado, temos coisas mais importante para aprender.
Estudante 22	Sim, porque ela está no nosso dia a dia.
Estudante 23	Acho que sim.
Estudante 24	Sim, é sempre bom aprender novas coisas principalmente teorias.
Estudante 25	Sim, conhecimento sempre vai ser algo bom, e é uma matéria muito interessante.
Estudante 26	Sim, seria legal aprender mais sobre essas teorias.
Estudante 27	Sim, te dá mais aprendizado até para a vida.
Estudante 28	Sim, pois nossas escolhas hoje, vão decidir nossas vidas.
Estudante 29	Sim, porque é uma matéria é interessante e que explica muita das coisas do dia a dia.
Estudante 30	Sim, pois é uma matéria muito interessante que faz com que o jovem pense sobre suas ações.
Estudante 31	Sim, pois é uma matéria interessante e que chama a atenção do jovem, e ajuda até mesmo para o jovem perceber e entender que suas escolhas tem grandes consequências.

Fonte - Autor.

As Tabelas 07 e 08, a seguir, apontam o número de resposta de cada tipo de questão, obtido a partir da aplicação dos questionários, sondagem inicial das Turmas 01 e 02. Também a Tabela 09, a seguir, representa a somatória dos números de respostas das Tabelas 07 e 08.

Tabela 7: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 01.

Questão	Respostas					Nº de respostas
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	28	2	0	0	30
2	6	18	5	1	0	30
3	11	13	5	1	0	30
4	23	2	3	1	1	30
6	24	1	4	0	1	30
7	3	8	15	4	0	30
Total	67	70	34	7	2	180

Fonte - Autor.

Tabela 8: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 02.

Questão	Respostas					Nº de respostas
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	29	1	1	0	31
2	6	19	5	1	0	31
3	9	7	12	3	0	31
4	19	3	7	2	0	31
6	19	0	11	1	0	31
7	14	9	8	0	0	31
Total	67	67	44	8	0	186

Fonte - Autor.

Tabela 9: Tabulação do questionário, sondagem inicial – Turma 01 e Turma 02.

Questão	Respostas					Nº de respostas
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	57	3	1	0	61
2	12	37	10	2	0	61
3	20	20	17	4	0	61
4	42	5	10	3	1	61
6	43	1	15	1	1	61
7	17	17	23	4	0	61
Total	134	137	78	15	2	366

Fonte - Autor.

As Tabelas 10 e 11, a seguir, apontam o número de resposta de cada tipo de questão obtido a partir da aplicação dos questionários – sondagem final das Turmas 01 e 02. Também a Tabela 12, a seguir, representa a somatória dos números de respostas das Tabelas 10 e 11.

Tabela 10: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 01.

Questão	Respostas					Nº de respostas
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	1	1	8	12	22
2	0	0	3	10	9	22
3	0	1	4	4	13	22
4	0	0	2	17	3	22
5	0	0	1	9	12	22
6	0	0	0	8	14	22
8	0	1	4	10	7	22
Total	0	3	15	66	70	154

Fonte - Autor.

Tabela 11: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 02

Questão	Respostas					N° de respostas
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	0	2	8	21	31
2	0	0	2	14	15	31
3	0	2	6	8	15	31
4	0	2	5	24	0	31
5	0	0	3	16	12	31
6	0	0	1	0	30	31
8	0	0	10	11	10	31
Total	0	4	29	81	103	217

Fonte - Autor.

Tabela 12: Tabulação do questionário, sondagem final – Turma 01 e Turma 02.

Questão	Respostas					N° de
	NR	FT	IN	CO	RA	
1	0	1	3	16	33	53
2	0	0	5	24	24	53
3	0	3	10	12	28	53
4	0	2	7	41	3	53
5	0	0	4	25	24	53
6	0	0	1	8	44	53
8	0	1	14	21	17	53
Total	0	7	44	147	173	371

Fonte - Autor.

Após a construção das tabelas outrora apresentadas, foram plotados alguns gráficos. Assim, o Gráfico 01, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 07 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

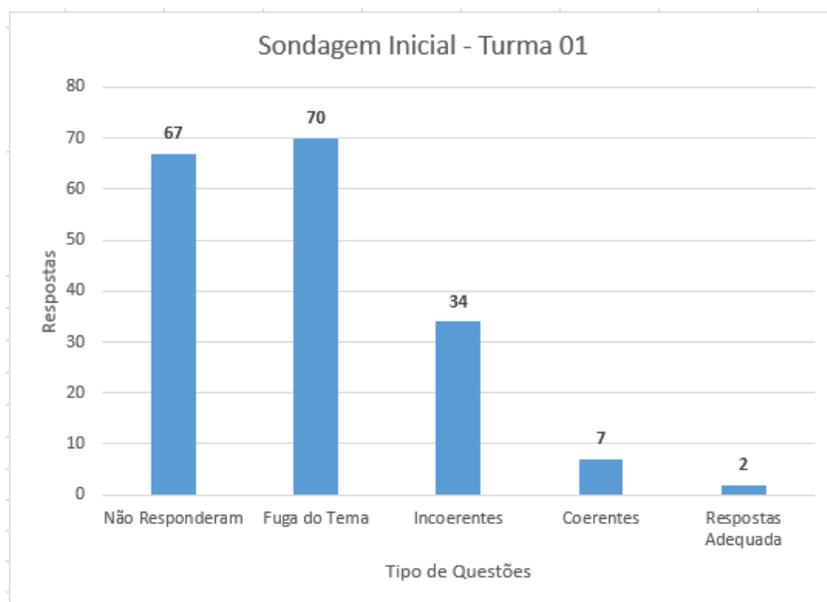


Gráfico 1: Questionário de sondagem inicial – Turma 01.
Fonte: Autor.

O Gráfico 02, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 08 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

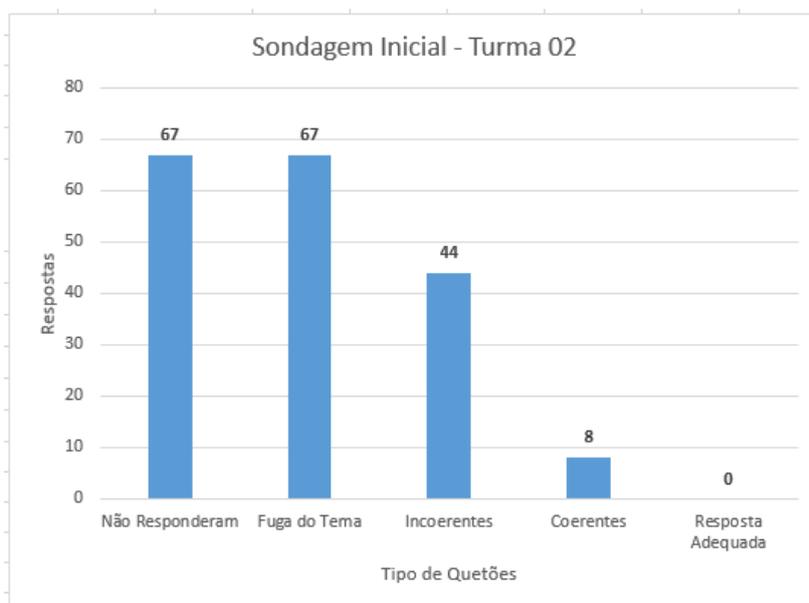


Gráfico 2: Questionário de sondagem inicial – Turma 02.
Fonte: Autor.

O Gráfico 03, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 09 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

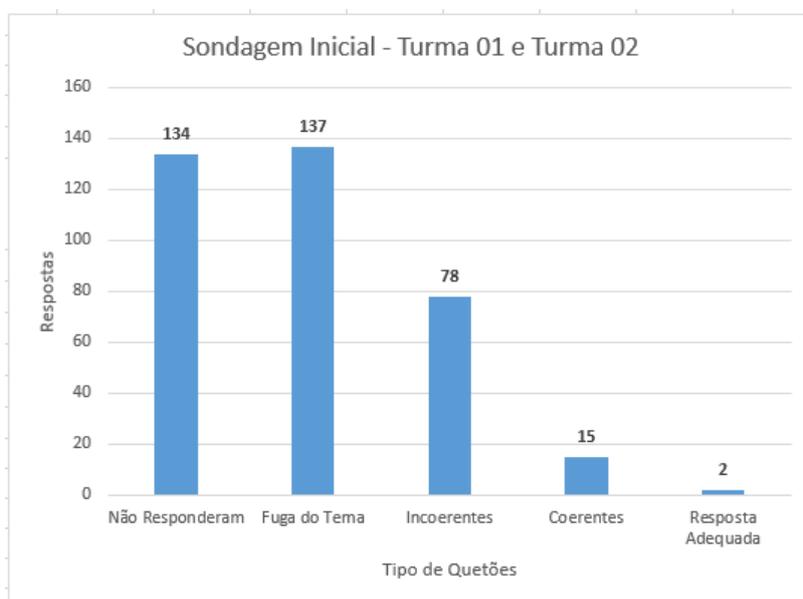


Gráfico 3: Questionário de sondagem inicial – Turma 01 e Turma 02.
Fonte: Autor.

O Gráfico 04, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 10 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

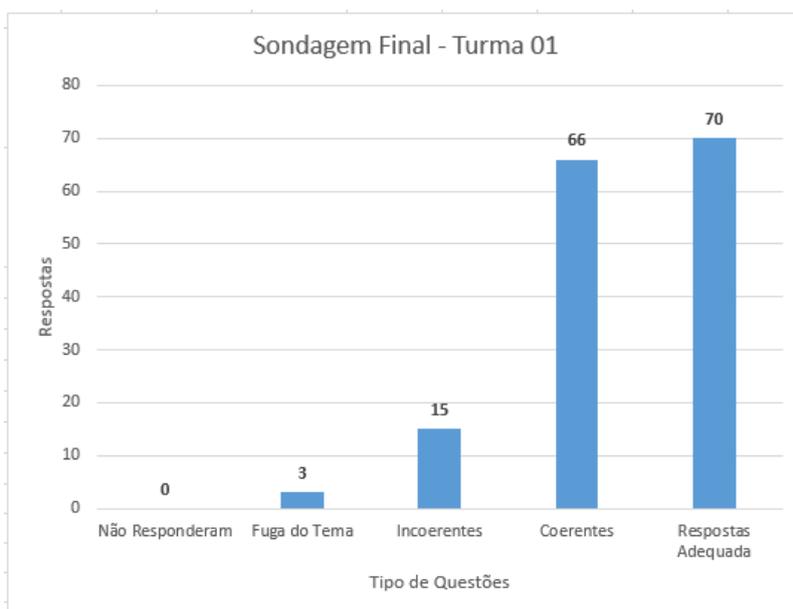


Gráfico 4: Questionário de sondagem final – Turma 01.
Fonte: Autor.

O Gráfico 05, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 11 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

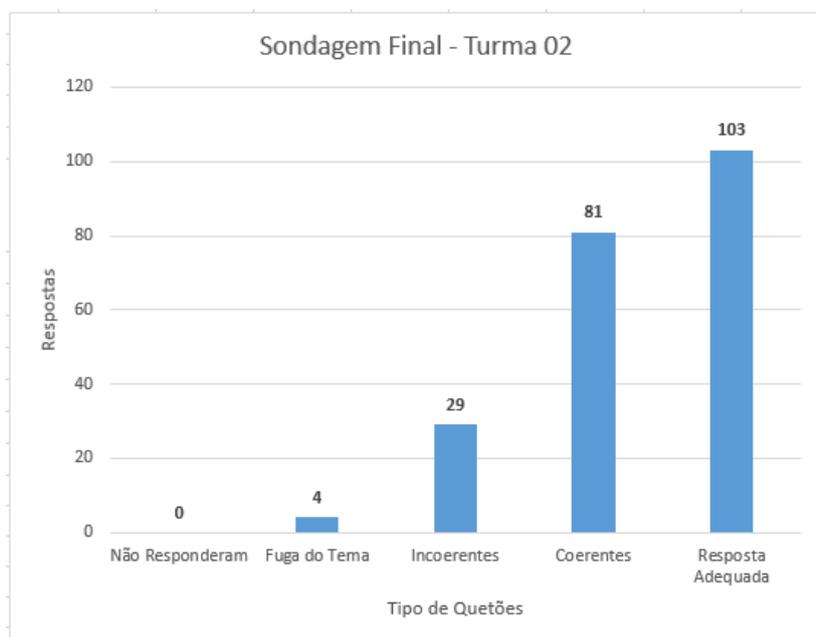


Gráfico 5: Questionário de sondagem final – Turma 02.

Fonte: Autor.

O Gráfico 06, a seguir, representa a plotagem dos dados da Tabela 12 ou a distribuição do número do tipo de respostas para cada pergunta.

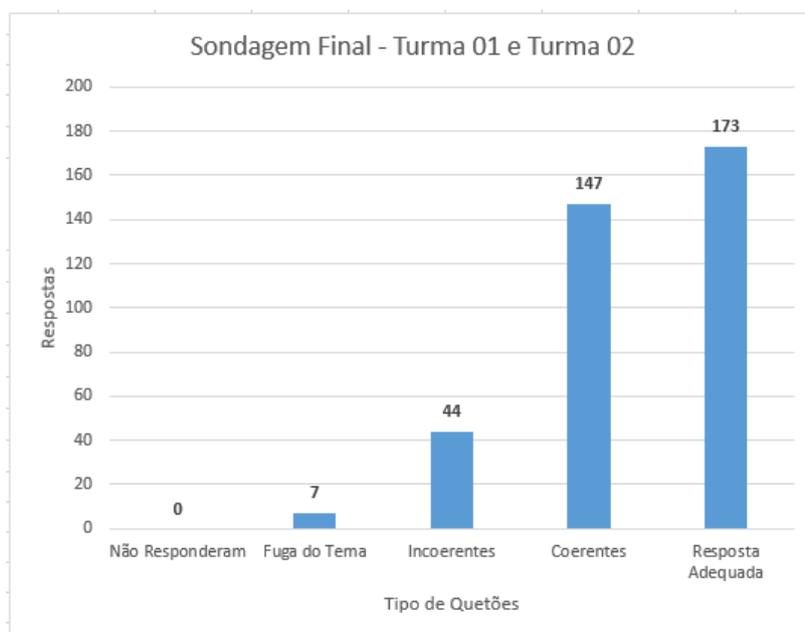


Gráfico 6: Questionário de sondagem final – Turma 01 e Turma 02.

Fonte: Autor.

O Gráfico 07, a seguir, representa a plotagem do quantitativo das respostas das questões de pesquisa das sondagens iniciais e finais a partir das Tabelas 01, 02, 05 e 06.

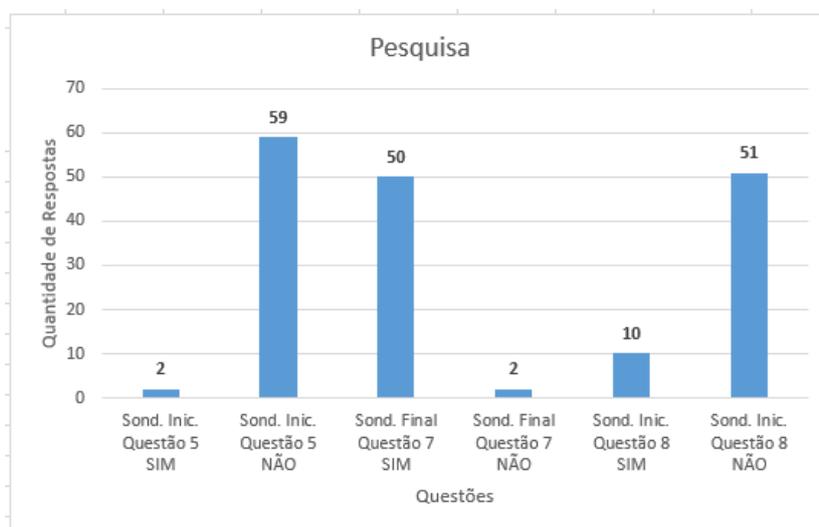


Gráfico 7: Questionário de pesquisa – Turma 01 e Turma 02.

Fonte: Autor.

O Gráfico 08, a seguir, representa a plotagem do quantitativo das respostas das questões de pesquisa das sondagens iniciais e finais das Turmas 01 e 02.

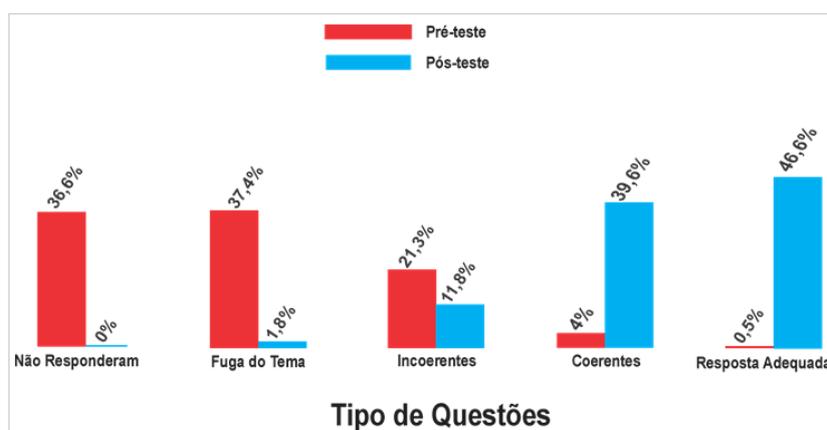


Gráfico 8: Comparação das respostas das sondagens – Turma 01 e Turma 02.

Fonte: Autor.

O Gráfico 09, a seguir, representa a participação/frequência dos estudantes nas principais atividades durante a aplicação do produto educacional.



Gráfico 9: Participação dos estudantes nas principais atividades.
Fonte: Autor.

5.2 Resultado dos Mapas Conceituais

Durante a aplicação do produto, foram elaborados 99 mapas conceituais, sendo 57 mapas iniciais e 42 mapas finais, sendo possível a comparação dos mapas iniciais e finais de 40 estudantes.

A seguir, apresenta-se a análise de 06 mapas conceituais, iniciais e finais, de seis estudantes, ou seja, 15% dos mapas possíveis de comparação, análise que se deu com o intuito de verificar os conceitos trazidos pela sequência didática, a hierarquia de conceitos e a busca de indícios de Aprendizagem Significativa.

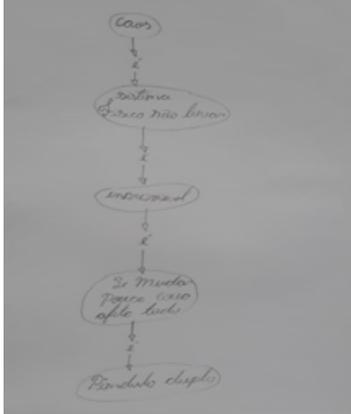
Análise dos mapas do Estudante 01 – Figura 26 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “caos”, “catástrofe”, “danos para a natureza”, “descontrole de tudo” e “bagunça”; e, para o mapa conceitual final: “sistema físico”, “dinâmico linear”, “dinâmico não linear”, “não caótico”, “caótico”, “movimento imprevisível”, “sensível às condições iniciais” e “pêndulo duplo”.

Figura 26: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 01.

Mapa Conceitual Inicial – Estudante 01	Mapa Conceitual Final – Estudante 01
	

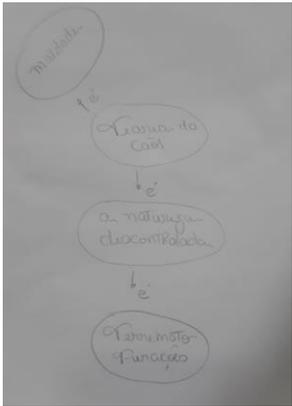
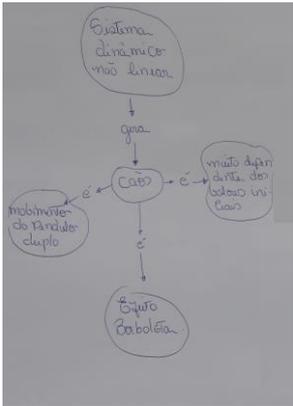
Análise dos mapas do Estudante 02 – Figura 27 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “caos”, “desordem o que era para estar organizado”, “desequilíbrio do universo” e “a natureza descontrolada”; e, para o mapa conceitual final: “caos”, “sistema físico não linear”, “imprevisível”, “se mudar pouca coisa afeta tudo” e “pêndulo duplo”.

Figura 27: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 02.

Mapa Conceitual Inicial – Estudante 02	Mapa Conceitual Final – Estudante 02
	

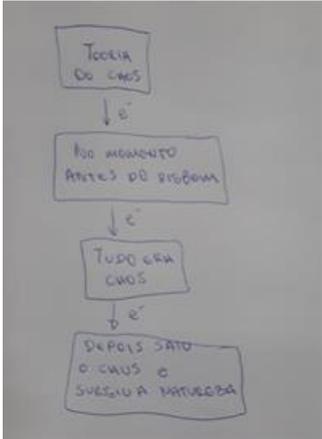
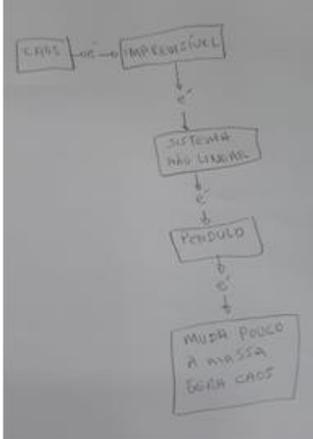
Análise dos mapas do Estudante 03 – Figura 28 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “teoria do caos”, “maldade”, “a natureza descontrolada” e “terremoto, furações”; e, para o mapa conceitual final: “sistema dinâmico não linear”, “caos”, “movimento do pêndulo duplo”, “muito dependente dos valores iniciais” e “efeito borboleta”.

Figura 28: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 03.

Mapa Conceitual Inicial – Estudante 03	Mapa Conceitual Final – Estudante 03
	

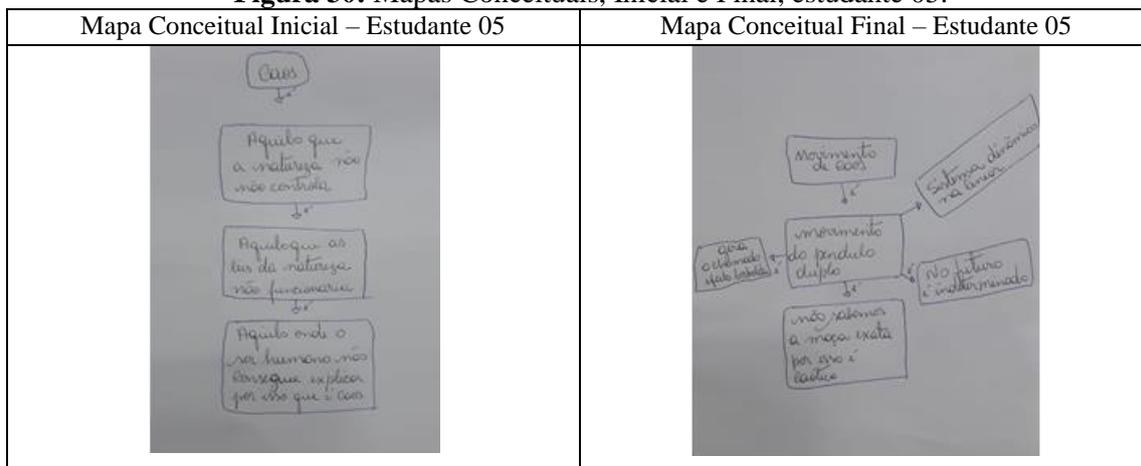
Análise dos mapas do Estudante 04 – Figura 29 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “teoria do caos”, “no momento antes do bigbem”, “tudo era caos” e “depois saiu o caos e surgiu a natureza”; e, para o mapa conceitual final: “caos”, “imprevisível”, “sistema não linear”, “pendulo” e “muda pouco a massa gera caos”.

Figura 29: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 04.

Mapa Conceitual Inicial – Estudante 04	Mapa Conceitual Final – Estudante 04
	

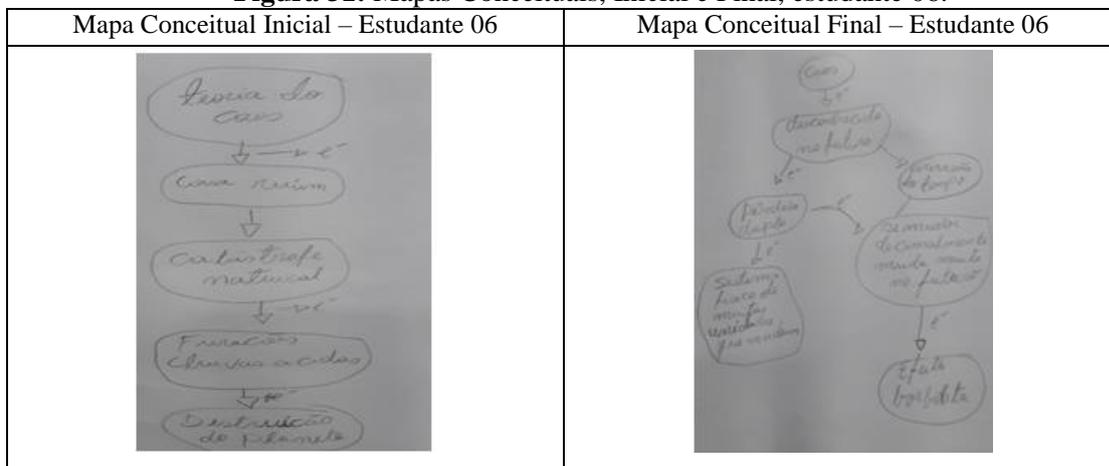
Análise dos mapas do Estudante 05 – Figura 30 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “caos”, “aquilo que a natureza não controla”, “aquilo que as leis da natureza não funciona”, “efeito borboleta” e “aquilo onde o ser humano não consegue explicar por isso que é o caos”; e, para o mapa conceitual final: “movimento de caos”, “gera o chamado efeito borboleta”, “movimento do pendulo duplo”, “sistema dinâmico não linear”, “no futuro é indeterminado” e “não sabemos a massa exata por isso é caótico”.

Figura 30: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 05.



Análise dos mapas do Estudante 06 – Figura 31 (a seguir): o estudante assim hierarquizou os conceitos para o mapa conceitual inicial: “teoria do caos”, “coisa ruim”, “catástrofe natural”, “chuvas ácidas” e “destruição do planeta”; e, para o mapa conceitual final: “caos”, “desconhecido no futuro”, “pêndulo duplo”, “previsão do tempo”, “se mudar decimalmente muda muito no futuro” e “efeito borboleta”.

Figura 31: Mapas Conceituais, Inicial e Final, estudante 06.

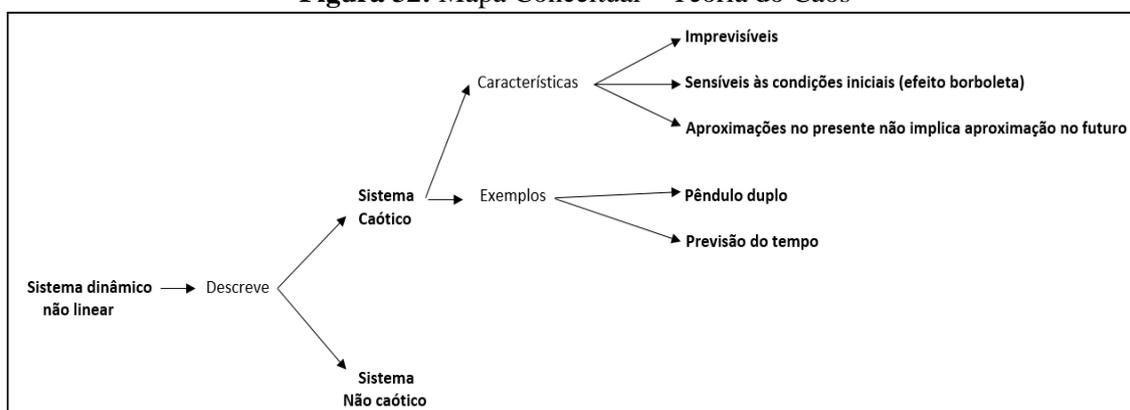


Como se pode observar dos exemplos anteriores, os mapas conceituais iniciais relacionam conceitos como, por exemplo, “descontrole”, “catástrofe”, “desordem”, “desequilíbrio” e “inexplicável”, com a teoria do caos. Tais conceitos são sinônimos de imprevisibilidade e sensibilidade.

Já os mapas conceituais finais contêm detalhes relevantes e hierarquia de conceitos associados à teoria do caos e que foram trabalhados na UEPS. Assim, têm-se conceitos como, por exemplo, “sistema dinâmico não linear”, “sistema caótico”, “sensível às condições iniciais”, “imprevisibilidade”, “efeito borboleta” etc.

A Figura 32, a seguir, descreve um mapa conceitual, da teoria do caos, construído a partir dos mapas conceituais final dos estudantes.

Figura 32: Mapa Conceitual – Teoria do Caos



Após a comparação entre os mapas conceituais – inicial e final – dos estudantes outrora apresentados, foi possível inferir que estes construíram relações a partir de seus conhecimentos prévios e os mapas finais apontam uma mudança conceitual na estrutura cognitiva dos estudantes caracterizando indícios de Aprendizagem Significativa.

5.3 Análise e Avaliação da UEPS

Após a aplicação da sondagem inicial, da categorização das respostas de cada estudante (e para facilitar análise das respostas), foram construídas as Tabelas 01, 02, 07, 08 e 09, além dos Gráficos 01, 02 e 03. As questões 05 e 08, da sondagem inicial, apontam, respectivamente, o uso de simuladores virtuais pelos estudantes e familiarização com o experimento do pêndulo duplo.

No intuito de buscar o conhecimento prévio dos estudantes, os dados da sondagem inicial apontaram que do total de estudantes partícipes da pesquisa, apenas

3,27% fizeram uso de simuladores computacionais, sendo que somente 16,39% conheciam o experimento do pêndulo duplo, ao passo que 74,04% das respostas possíveis foram classificadas sem respostas e fuga do tema.

Os subsunçores mais frequentes associados às respostas dos estudantes foram: bagunça, desordem, catástrofe, tragédia.

As questões 03, 04 e 06 trouxeram conceitos (sistema dinâmico não-linear, evolução de sistema dinâmico, simuladores computacionais, sensibilidade às condições iniciais, efeito borboleta e iteração) imprescindíveis para a compreensão da teoria do caos, sendo que do total de respostas possíveis, 57,37% foram classificadas como não respondidas e 14,20% como fuga do tema.

Logo, a sondagem inicial aponta para a deficiência de conceitos relacionados à teoria do caos na estrutura cognitiva dos estudantes.

O *gibi* Pato Donald n. 2433, além do filme *Durante a Tormenta* – organizadores prévios da sequência didática – exploraram essencialmente o efeito borboleta ou a sensibilidade às condições iniciais. A participação dos estudantes na leitura do *gibi*, foi satisfatória, pois, eles ficaram curiosos para saber qual a ligação narrativa do *gibi* com a teoria do caos. Após a leitura deste, alguns alunos comentavam de como o cotidiano é influenciado por pequenas decisões, ou seja, o conceito, de sensibilidade às condições iniciais, foi relacionado com conhecimentos prévios existentes.

Vale destacar que em outro encontro, um grupo de estudantes indicou um filme intitulado Projeto Almanaque, que explora o efeito borboleta nas tomadas de decisões dos personagens. O fato de os estudantes sugerirem outro filme expõe a vontade de aprender e o interesse do tema abordado pela sequência didática.

As etapas da sequência didática de mais destaque quanto à participação, ao interesse e ao envolvimento dos estudantes foram aquelas em que se deu a utilização dos simuladores computacionais ou modelos computacionais do pêndulo duplo, gráficos das equações de Lorenz, exemplos de iterações populacionais e manuseio do pêndulo duplo experimental, pois, nas referidas etapas foram abordados os conceitos básicos da teoria do caos a partir do simulador do pêndulo duplo.

De posse dos dados da sondagem final, da categorização das respostas de cada estudante e para facilitar a análise das respostas, foram construídas as tabelas 03, 04, 05, 06, 10, 11 e 12, além dos gráficos 04, 05, 06, 07 e 8.

Em busca de indícios de Aprendizagem Significativa, fez-se uma análise dos questionários – sondagem final. Assim, das 371 respostas possíveis, 173 respostas

foram classificadas como adequadas e 142, respostas como coerentes, perfazendo um índice de 84,90% das respostas totais.

Na comparação percentual dos questionários referentes às sondagens iniciais e finais, percebeu-se um aumento significativo das respostas coerentes e adequadas, pois, nas sondagens iniciais, as respostas representaram apenas 4,64% das respostas totais possíveis, enquanto que nas sondagens finais, as respostas representaram 84,9%. Logo, o aumento considerável do número de respostas adequadas e coerentes é um indício de aprendizagem significativa.

Na comparação percentual dos questionários referentes às sondagens iniciais e finais, percebeu-se um aumento significativo do padrão de respostas coerentes e adequadas, pois, nas sondagens iniciais, as respostas representaram apenas 4,64% das respostas totais possíveis, enquanto nas sondagens finais, os referidos padrões de respostas representaram 84,9%. Logo, o aumento do número de respostas adequadas e coerentes é um de indício de aprendizagem significativa.

A questão 06 – sondagem inicial e final –, por exemplo, representa uma avaliação somativa, pois ambas verificam a habilidade matemática dos estudantes em produzir iterações a partir das condições iniciais.

Avaliação Somativa: é aquela que busca avaliar o alcance de determinados objetivos de aprendizagem ao final de uma fase de aprendizagem; é usualmente baseada em provas de final de unidade, em exames finais (MOREIRA, 2011a, p. 8).

Tomando as respostas da sondagem inicial e final da referida questão, apenas duas respostas foram classificadas como adequadas, para a sondagem inicial, e 44 respostas para sondagem final, ou seja, um aumento de 79,7% no padrão de resposta adequada para habilidade em produzir iteração.

A questão 07 – sondagem final – representou uma pesquisa de opinião e teve por objetivo verificar a opinião dos estudantes quanto à inserção do tema “teoria do caos” no conteúdo curricular formal do Ensino Médio; ou seja, verificar a vontade de aprender.

As respostas, questão 07 – sondagem final, de cada estudante para a referida questão foram transcritas para as Tabelas 05 e 06. Apenas três estudantes manifestaram opinião contrária à inserção do tema em questão no Ensino Médio, ou seja, 94,3% dos estudantes são favoráveis à inserção do conteúdo, em nível introdutório, no Ensino Médio.

Finalizada a aplicação da sequência didática na forma de uma Unidade Potencialmente Significativa – UEPS, e de posse dos dados apresentados nas tabelas, nos gráficos, nas imagens e nos mapas conceituais, foi significativo o aumento do número de respostas coerentes e adequadas. Logo, é possível afirmar a interação dos novos conceitos com conceitos preexistentes na estrutura cognitiva dos estudantes; ou seja, se tem **indícios** de aprendizagem significativa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve por objetivo elaborar e aplicar uma sequência didática abordando o tema “conceitos básicos da teoria do caos determinístico”, além de obter indícios de Aprendizagem Significativa ao ensinar a temática supramencionada, a partir da evolução do movimento (por meio de simuladores computacionais) de um pêndulo duplo para estudantes da terceira série do Ensino Médio.

Para tanto, a pesquisa foi norteada pela teoria psicológica da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), pelas teorias educacionais de aprendizagem propostas pelos mapas conceituais de Novak (2010) e pelas Unidades de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS de Moreira (2012a).

O professor pesquisador teve fundamental importância na construção da sequência didática, pois, seguindo os pressupostos da Aprendizagem Significativa e as etapas propostas na construção de uma UEPS, as atividades da pesquisa foram desenvolvidas considerando os conhecimentos prévios dos estudantes, relacionando-os via situações-problema a conceitos básicos da teoria do caos.

De posse da coleta de dados nas sondagens e nos mapas conceituais, bem como das tabelas e dos gráficos construídos com os referidos dados e a análise dos resultados, foi possível encontrar indícios de Aprendizagem Significativa.

A aplicação da sequência didática também evidenciou, por meio dos questionários de opinião, o interesse dos estudantes pela temática abordada.

Diante do exposto, o objetivo relacionado à construção e aplicação de uma sequência didática na forma de uma UEPS, abordando conceitos básicos da teoria do caos, foi cumprido, bem como a obtenção de indícios de Aprendizagem Significativa, a partir das análises qualitativa e quantitativa da coleta de dados da aplicação da sequência didática.

Por fim, a utilização do pêndulo duplo se mostrou um possível material potencialmente significativo no ensino de conceitos básicos da teoria do caos para estudantes da terceira série do Ensino Médio.

APÊNDICE A

PRODUTO EDUCACIONAL E SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1 Introdução

Professor (a),

O presente produto educacional tem por finalidade nortear profissionais de Educação Básica, Ensino Médio, na elaboração de sequências didáticas que visem a promoção da Aprendizagem Significativa de conceitos básicos da teoria do caos determinístico. A referida aprendizagem, segundo a teoria de David Ausubel¹¹, se dá quando o aprendiz incorpora, à sua estrutura cognitiva, novo conhecimento relacionado aos conhecimentos prévios existentes, denominados subsunçores ou ideia-âncora.

O produto foi elaborado no primeiro semestre do corrente ano, durante o Programa Nacional de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF¹², vinculado à Universidade de Brasília – UnB – Polo 01, e aplicado com estudantes da terceira série do Ensino Médio em turmas regulares.

No que tange às atividades empreendidas, a atividade sondagem inicial busca levantar os conhecimentos prévios dos estudantes no que diz respeito à teoria do caos, relacionando-os ao novo conteúdo a ser ensinado, que interage com o conteúdo específico pré-existente, facilitando a aquisição e retenção de novos conceitos relacionados à teoria do caos determinístico.

De fato, nas linhas que se seguem, tem-se a promoção da Aprendizagem Significativa de conceitos básicos da teoria do caos, tais como: sistemas dinâmicos determinísticos, sistema de tempo discreto, evolução de sistemas caóticos, sensibilidade às condições iniciais, imprevisibilidade, irreversibilidade, iteração, atrator de Lorenz e efeito borboleta.

¹¹ “David Ausubel atuou como professor Emérito da Universidade de Columbia, em Nova York. Também era médico-psiquiatra de formação e dedicou sua carreira acadêmica à psicologia educacional” (MOREIRA, 2017, p. 159).

¹² O Programa Nacional de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF – é um programa da Sociedade Brasileira de Física – SBF e vinculado a Universidade de Brasília – UnB (Polo 01 – UnB).

O produto educacional tem por finalidade funcionar como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS¹³, assim estruturado:

- I) Metodologia das aulas propostas;
- II) Contextualização;
- III) Proposta de UEPS para o ensino de conceitos básicos da teoria do caos determinístico;
- IV) Atividades;
- V) Orientações; e
- VI) Atividades Complementares.

Na seção 3, em que se apresenta uma proposta de UEPS, bem como os conceitos básicos da teoria do caos, tem-se a estrutura das etapas da proposta de ensino e as atividades a serem desenvolvidas. As seções 4 e 5 evidenciam a organização de cada aula.

Por fim, a seção 6 apresenta uma atividade complementar, buscando aprimorar a Aprendizagem Significativa de conceitos da teoria do caos. A atividade é proposta a partir de um jogo em que, em seus episódios, são abordados conceitos da teoria do caos.

O produto educacional e o planejamento de cada aula (*slides*, questionários, simuladores, arquivos e imagens) estão disponíveis para consulta e ou no *website*:

<https://sites.google.com/view/penduloduplocaosdeterministico>



Imagem 01: QR Code - Site do produto educacional.

¹³ A Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS, segundo Moreira (2011a), é um sequenciamento de atividades de ensino, com tópicos específicos de um conteúdo, guiadas pela teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

2 Metodologia das aulas propostas

A metodologia da sequência didática envolve o levantamento de conhecimentos prévios, o uso de materiais potencialmente significativos e investigações que apontam indícios de Aprendizagem Significativa. A proposta de toda a pesquisa deve ser executada com a participação efetiva dos pesquisadores junto aos estudantes, buscando esclarecer as etapas de estudo, fazendo uso das variáveis do referencial teórico.

A sequência didática tem seu direcionamento para a aplicação em turmas do Ensino Médio, turmas regulares. As respostas dos questionários, sondagens inicial e final, devem ser analisadas para verificação de indícios de Aprendizagem Significativa.

3 Proposta de UEPS para o ensino de conceitos básicos da teoria do caos

Objetivo Geral: Promover a aquisição dos seguintes conceitos relacionados à teoria do caos determinístico: sistemas dinâmicos determinísticos, sistema de tempo discreto, evolução de sistemas caóticos, sensibilidade às condições iniciais, imprevisibilidade, irreversibilidade, iteração, atrator de Lorenz e efeito borboleta.

Sequência:

1. Atividades iniciais: aplicação de um questionário (sondagem inicial) com questões sobre conceitos relacionados à teoria do caos. Após a aplicação da sondagem, deve ser distribuído, para cada aluno, o gibi da série Pato Donald n°2433 intitulado *Efeito Borboleta*.

Em um segundo momento, ainda nas atividades iniciais, tem-se a exibição do filme *Durante a Tormenta*, que mistura suspense, viagem temporal, multiplicidade de determinações, efeito borboleta e teoria do caos.

A leitura do gibi e a exibição do filme servem como organizadores prévios da sequência didática.

Em seguida, foram dadas as orientações, por meio de *slide*, para a construção de um mapa conceitual inicial sobre o tema supramencionado. Os estudantes também confeccionarão um mapa conceitual final ao término da aplicação da sequência didática e a comparação entre ambos os mapas deverá buscar indícios de Aprendizagem Significativa.

2. Situação-problema inicial: apresentação, por meio de *slides*, de trechos extraídos do gibi Pato Donald n°2433, do filme *Durante a Tormenta* e dos conhecimentos prévios dos estudantes observados na sondagem inicial que contenham tópicos relevantes envolvendo conceitos da teoria do caos.

Nesta etapa a evolução de um sistema acoplado, formado de pêndulos duplos, deve ser apresentada por meio de uma simulação computacional. Posteriormente, os estudantes se organizarão em grupos, a fim de debater possíveis resultados de uma nova evolução do referido sistema para uma diferença na quarta casa decimal de suas massas. Após terem acompanhado a evolução do sistema, os estudantes poderão expor suas

conclusões em um segundo debate com toda a turma, além de refletir sobre a evolução de outros sistemas físicos.

O professor deve ser o mediador do segundo debate entre os estudantes, ouvir as opiniões e despertar o interesse pelo assunto abordado, contudo, sem necessariamente chegar a uma resposta final objetiva.

3. Aprofundando conhecimentos: apresentação da evolução de sistemas de pêndulos simples e duplos em simulações computacionais e demonstrações experimentais do pêndulo duplo.

Observando a evolução dos sistemas, prático e teórico, dos pêndulos duplos e tendo como ponto de partida o seguinte questionamento: “Por que a evolução de um sistema com pêndulo duplo caracteriza um fenômeno caótico?” (com o intuito de aprimorar a compreensão dos conceitos e da imprevisibilidade da teoria do caos determinístico), o professor deve apresentar, por meio de *slides*, os conceitos que devem ser aprendidos com a referida sequência didática.

Os simuladores computacionais, disponível em <https://sites.google.com/view/penduloduplocaosdeterministico/atividades/3ª-aula?authuser=0> e https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/pendulum-lab do PhET¹⁴, são modelos que descrevem a evolução de um sistema físico, em particular, o movimento de pêndulos duplos.

No simulador, as grandezas: velocidade, massa, ângulos de inclinação a partir de um sistema de coordenadas, atrito e comprimento, dos pêndulos podem ser levemente alteradas, sendo possível acompanhar, em grau de comparação, as mudanças na evolução de cada movimento dos pêndulos. Logo, os simuladores representam um facilitador na compreensão dos conceitos da teoria do caos mediante as relações entre as grandezas envolvidas.

4. Nova situação-problema em nível mais alto de complexidade – observação experimental: apresentação das variáveis das equações que descrevem o movimento do pêndulo caótico, da iteração de um crescimento populacional, de uma

¹⁴ “Fundado em 2002 pelo ganhador do Prêmio Nobel, Carl Wieman, o PhET - sigla em inglês para Tecnologia Educacional em Física, é um programa da Universidade do Colorado que pesquisa e desenvolve simulações na área e ensino de ciências e matemática (https://phet.colorado.edu/pt_BR/) e com distribuição gratuita” (ARANTES, MIRANDA e STUDART, 2010).

bifurcação construída a partir de um grande número de iterações, das equações de Lorenz e do atrator de Lorenz. O procedimento da execução tem sua descrição no plano de aula do quarto encontro.

Posteriormente, os estudantes farão o manuseio de dois pêndulos duplos, montados em sala de aula, supostamente idênticos e abandonados com os mesmos ângulos de inclinação e, a partir da evolução do movimento destes e tomando como base os conceitos abordados, quanto à teoria do caos, buscarão a compreensão dos seguintes questionamentos:

- Quais grandezas físicas estão envolvidas nas diferenças do movimento dos dois pêndulos duplos? e
- Existem outros sistemas físicos que evoluem para um sistema caótico? Descreva algum?

5. Reconciliação de conceitos: a partir das demonstrações experimentais, das simulações computacionais do movimento do pêndulo duplo e das respostas dos estudantes na sondagem inicial, far-se-á, por meio de *slides*, a reconciliação de conceitos da teoria do caos.

6. Encontro final: diálogo com os alunos, objetivando correções em conceitos mal aprendidos ou superficialmente compreendidos.

7. Avaliação – sondagem final e mapas conceituais finais: aplicação da aplicada a sondagem final e elaboração dos mapas conceituais do produto educacional.

8. Avaliação da UEPS: identificação de indícios de Aprendizagem Significativa na aplicação do produto, considerando a participação dos alunos nas atividades realizadas e a análise do mapa conceitual final e das sondagens, inicial e final, aplicadas.

4 Atividades

As atividades serão realizadas seguindo o cronograma evidenciado na Tabela 1, a seguir, além dos planos das aulas.

Tabela 01: Cronograma das atividades a serem desenvolvidas.

Aula	Atividades Propostas	Tempo	Data
01	Pesquisa, sondagem inicial (questionários, diálogo) para o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema “caos determinístico” e leitura do gibi Pato Donald n°2433.	__ min	__/__/20__
02	Exibição do filme <i>Durante a Tormenta</i> e orientação para a construção de um mapa conceitual.	__ min	__/__/20__
03	Discussão de conceitos da teoria do caos extraídos do gibi Pato Donald n°2433 e do filme <i>Durante a Tormenta</i> (explicação das grandezas relacionadas às sucessivas mudanças dos eventos); Apresentação experimental do comportamento de um pêndulo duplo; Simulações computacionais sobre a evolução de sistemas dinâmicos não-lineares envolvendo o pêndulo duplo.	__ min	__/__/20__
04	Apresentação da evolução de sistemas físicos caóticos, em especial, do pêndulo duplo e as variáveis de suas equações de movimento; Apresentação experimental do movimento do pêndulo duplo.	__ min	__/__/20__
05	Aula expositiva dialogada integradora final: retomar todo o conteúdo da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS, bem como os conceitos trabalhados nas aulas anteriores.	__ min	__/__/20__
06	Questionário de sondagem final e construção de um mapa conceitual; <i>Feedback</i> para avaliar o desempenho dos estudantes (Aprendizagem Significativa).	__ min	__/__/20__

Primeiro encontro: 1ª Aula

Pesquisa, sondagem inicial (questionários, diálogo) para o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema “caos determinístico” e leitura do gibi Pato Donald n°2433.

Plano de aula do primeiro encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Sondagem inicial
Título (Tópico) da aula	Sondagem inicial – Teoria do caos determinístico
Tipo predominante	Teórica
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Sondagem inicial dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre a teoria do caos.

3. Objetivos complementares

Verificar a existência e profundidade do conhecimento dos estudantes relacionados à teoria do caos.

Armazenar as respostas fornecidas sobre a temática para uma futura análise da Aprendizagem Significativa.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Funções lineares e não-lineares e conceito de sistema físico.

5. Metodologia

Aula expositiva, exposição da pesquisa e do tema proposto, questionário de sondagem inicial e leitura do gibi Pato Donald n°2433 intitulado *Efeito Borboleta*.

5.1. Estratégias didáticas

No primeiro encontro se tem um momento duplo, com a aplicação de um questionário de sondagem inicial para o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes e a leitura do gibi Pato Donald nº2433 intitulado *Efeito Borboleta*.

Questionário - Sondagem inicial: Tema – Teoria do caos

Questão 01

Supondo que você esteja lendo um texto e em determinado trecho da leitura você se depara com a palavra “caos”. Descreva sua impressão sobre a narrativa do texto.

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes sobre o termo “caos”.

Questão 02

Você já ouviu falar sobre a teoria do caos?

() Sim - Descreva sua compreensão sobre a referida teoria.

() Não - Descreva sua impressão sobre a referida teoria.

Objetivo: Verificar a compreensão/impressão dos estudantes sobre a teoria do caos.

Questão 03

“Sensibilidade às condições iniciais”, “iteração”, “atrator” e “efeito borboleta” são termos imprescindíveis para a compreensão da teoria do caos. Destes, qual(is) você já ouviu falar? Descreva qual seu entendimento.

Objetivo: verificar a familiaridade e o entendimento de alguns termos utilizados para a compreensão da teoria do caos.

Questão 04

Sistemas dinâmicos podem ser descritos quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Cite algum sistema dinâmico (linear ou não-linear) relacionado ao conteúdo de Física que você estudou.

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes a respeito do sistema dinâmico relacionado ao estudo da Física.

Questão 05

A evolução de um sistema físico pode ser descrita por modelos matemáticos e simulações virtuais. Durante o Ensino Médio, você ou seu professor fizeram uso de algum simulador computacional? Em que conteúdo de Física foram utilizadas as simulações computacionais?

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes a respeito de modelagem e das simulações computacionais de sistemas relacionados ao estudo da Física.

Questão 06

A equação $X_{i+1} = 3,8 \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ descreve, discretamente, o crescimento populacional de duas espécies: P e Q, onde X_{i+1} representa o tamanho da população em um instante posterior ao crescimento X_i .

Complete a seguinte Tabela:

Iteração	Tamanho da População		Diferença Populacional ($P_n - Q_n$) (onde n representa as iterações das populações P e Q).
	População de P, $X_i = 0,7000$	População de Q, $X_i = 0,6999$	
1ª	0,7980		0,0001
2ª		0,6122	
3ª			
4ª	0,3363	0,3354	0,009

Objetivo: verificar a habilidade matemática dos estudantes de produzir iterações a partir das condições de contorno.

Questão 07

“O determinismo afirma que todos os acontecimentos do mundo são preestabelecidos. Em oposição, a concepção indeterminista afirma que existem acontecimentos que não são pré-estabelecidos, ou ainda, que o futuro não é fixo”.

Na sua opinião, o estudo da ciência, em especial, de temas relacionados à Física, se relacionam mais com quais correntes de pensamento dos termos outrora destacados? E é possível um sistema ser determinístico e imprevisível?

Objetivo: verificar a compreensão dos estudantes sobre as correntes de pensamento do determinismo/indeterminismo e previsível/imprevisível relacionados ao estudo da Física.

Questão 08

Você já ouviu falar sobre o experimento do pêndulo duplo?

() Sim () Não

Objetivo: verificar, quantitativamente, se os estudantes conhecem o movimento de um pêndulo duplo.

6. Recursos necessários

Questionário, sondagem inicial impresso, para a coleta das respostas dos estudantes e gibi Pato Donald n°2433 intitulado *Efeito Borboleta*.

7. Proposta de Avaliação (com referencial teórico)

Avaliação, sondagem inicial, cuja parte qualitativa será mais importante que a quantitativa. Tal processo servirá de base para a análise posterior de indícios de Aprendizagem Significativa de Ausubel. E ainda, verificar-se-á o engajamento dos estudantes na construção do mapa conceitual, a fim de evitar a flutuação nos dados durante a avaliação final.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. *Caos: a construção de uma nova ciência*. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

Segundo encontro: 2ª Aula

Exibição do filme *Durante a Tormenta* e orientação, por meio de *slide*.

Plano de aula do segundo encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Filme
Título (Tópico) da aula	Exibição do filme <i>Durante a Tormenta</i> e orientações para a construção de um mapa conceitual
Tipo predominante	Teórica
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Apresentar a exibição do filme e a leitura do gibi como organizadores prévios da UEPS e, posteriormente, prestar orientação para a construção de um mapa conceitual.

3. Objetivos complementares

Ilustrar o efeito borboleta, isto é, a evolução de um sistema dinâmico sensível às condições iniciais e à orientação para a construção de um mapa conceitual.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Funções lineares e não-lineares e conceito de sistema físico.

5. Metodologia

Exibição do filme *Durante a Tormenta* e orientações para a construção de um mapa conceitual.

5.1. Estratégias didáticas

O filme *Durante a Tormenta*, em paralelo com o gibi Pato Donald nº2433 intitulado *Efeito Borboleta*, são os organizadores prévios de conceitos da teoria do caos exemplificados em aulas futuras. E ainda, será necessária a orientação, por meio de *slides*, para a construção de um mapa conceitual, a fim de hierarquizar os conceitos envolvidos na teoria do caos.

Tabela 02: Orientações para a construção do mapa conceitual.

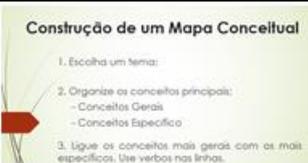
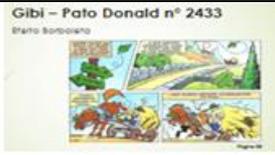
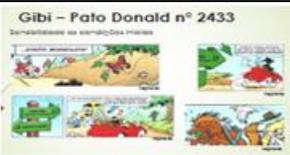
 <p>Mapas Conceituais Organizadores de ideias</p>	 <p>Estrutura de um Mapa Conceitual Um Mapa Conceitual # O Mapa Conceitual</p>	 <p>Construção de um Mapa Conceitual</p> <ol style="list-style-type: none">1. Escolha um tema;2. Organize os conceitos principais:<ul style="list-style-type: none">- Conceitos Gerais- Conceitos Específicos3. Ligue os conceitos mais gerais com os mais específicos. Use verbos nas linhas.
 <p>Exemplo de um Mapa Conceitual</p>	 <p>O que é um mapa conceitual Um Mapa Conceitual # O Mapa Conceitual</p>	 <p>Construa um Mapa Conceitual Tema: "Teoria do Caos"</p>

Tabela 03: Organizadores prévios.

 <p>Gibi - Pato Donald nº 2433</p>	 <p>Gibi - Pato Donald nº 2433 Pato Borboleta</p>	 <p>Gibi - Pato Donald nº 2433 Zumbido de um sistema dinâmico</p>
---	--	--

 <p>Slide 04</p>	 <p>Slide 05</p>	 <p>Slide 06</p>
 <p>Slide 07</p>	 <p>Slide 08</p>	 <p>Slide 09</p>
 <p>Slide 10</p>	 <p>Slide 11</p>	 <p>Slide 12</p>
 <p>Slide 13</p>	 <p>Slide 14</p>	

6. Recursos necessários

Equipamento de multimídia: computador, caixas de som e *Data Show*.

7. Proposta de Avaliação

A avaliação da aula terá por norte evidenciar o aumento do nível de complexidade do assunto, ao passo que se espera que o mapa conceitual possua elementos que relacionem hierarquicamente os conceitos da teoria do caos.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. **Caos: a construção de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

PROJETO almanaque. Direção de Dean Israelite. Paramount Pictures, 2015. (106 min.).

Terceiro encontro: 3ª Aula

Discussão de conceitos da teoria do caos extraídos do gibi Pato Donald nº2433 e do filme *Durante a Tormenta* (quais grandezas estão atreladas às sucessivas mudanças dos eventos), além de simulações computacionais, por meio de *software*, da evolução de sistemas dinâmicos não-lineares envolvendo o pêndulo duplo.

Plano de aula do terceiro encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Conceitos da teoria do caos
Título (Tópico) da aula	Conceitos da teoria do caos a partir de simulações computacionais do movimento do pêndulo duplo.
Tipo predominante	Teórica
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Apresentar a evolução do movimento de um pêndulo duplo, por meio de um simulador computacional e, a partir das simulações, evidenciar os seguintes conceitos:

- Sistemas dinâmicos determinísticos;
- Sistema de tempo discreto;
- Evolução de sistemas caóticos;
- Sensibilidade às condições iniciais;
- Imprevisibilidade; e
- Irreversibilidade.

3. Objetivos complementares

A partir dos conceitos abordados na evolução do sistema de um pêndulo duplo, o estudante deverá conceituar o comportamento de um sistema caótico qualquer.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Evolução de um sistema dinâmico.

5. Metodologia

Aula expositiva e com uso da lousa e de simuladores computacionais do pêndulo duplo. E ainda, abordagem dos conceitos da teoria do caos extraídos da leitura do gibi Pato Donald nº2433 intitulado *Efeito Borboleta*, e da exibição do filme *Durante a Tormenta*, e das simulações computacionais do pêndulo duplo.

5.1. Estratégias didáticas

Os seguintes termos: “sistemas dinâmicos determinísticos”, “sistema de tempo discreto”, “evolução de sistemas caóticos”, “sensibilidade às condições iniciais”, “imprevisibilidade”, “irreversibilidade”, “sistema não periódico/quasiperiódico”, “iteração”, “atrator de Lorenz” e “efeito borboleta”, devem ser apresentados na lousa. A partir da leitura do gibi e da exibição do filme supramencionado e das simulações computacionais, cada conceito deve ser explorado para o caso do pêndulo duplo.

6. Recursos necessários

Equipamento de multimídia (computador, *software Maple*¹⁵, caixas de som e data show).

7. Proposta de Avaliação

Durante o encontro, observar-se-á, tomado nota, a participação dos alunos, a fim de verificação futura da hierarquia dos conceitos e indícios de aprendizagem significativa.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. *Caos: a construção de uma nova ciência*. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

Quarto encontro: 4ª Aula

Apresentação de nova situação-problema em nível mais alto de complexidade. E ainda, apresentação, por meio de simulações computacionais e do *software Maple*, da evolução de sistemas físicos caóticos, em especial, do pêndulo duplo e as variáveis de suas equações.

¹⁵ É um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento teve início no ano de 1981, pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo, Waterloo, Canadá. Disponível em: < <https://pt.wikipedia.org/wiki/Maple> >. Acesso em: 16 jun. 2019.

Plano de aula do quarto encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Sondagem inicial
Título (Tópico) da aula	Grandezas que influenciam no movimento do pêndulo duplo.
Tipo predominante	Teórica e apresentação experimental
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Verificar, a partir de simulações computacionais e de uma apresentação experimental, quais grandezas que influenciam na evolução do movimento de um sistema de pêndulo duplo, evidenciando os seguintes conceitos:

- Sistemas dinâmicos determinísticos;
- Sistema de tempo discreto;
- Evolução de sistemas caóticos;
- Sensibilidade às condições iniciais;
- Imprevisibilidade;
- Irreversibilidade;
- Iteração; e
- Atrator de Lorenz.

3. Objetivos complementares

A partir da observação experimental da evolução de dois pêndulos duplos, inferir quais grandezas estão envolvidas na diferença de seus movimentos.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Conceitos da teoria do caos.

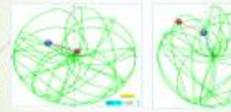
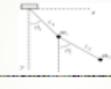
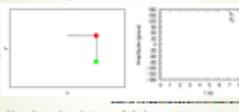
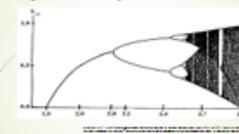
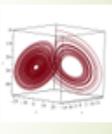
5. Metodologia

Aula expositiva, por meio de *slides*, explanando os conceitos da teoria do caos e as grandezas envolvidas no movimento do pêndulo duplo.

5.1. Estratégias didáticas

A aula deve ter como ponto de partida os conceitos da teoria do caos, as simulações computacionais e as observações experimentais da evolução do movimento do pêndulo duplo, apresentados nas aulas anteriores. A sequência dos *slides* deve evidenciar a evolução do movimento de um pêndulo duplo, trabalhando, a partir daí, os conceitos da teoria do caos.

Tabela 04: Conceitos relevantes na teoria do caos.

<p>Teoria do Caos "Uma nova ciência"</p> <ul style="list-style-type: none"> - Processo e não de estado (de vir-a-ser do que de ser); - Não determinístico; - Sensibilidade as Condições Iniciais; - Nuvem de resultados; - Desordem ordenada. <p>Como é o estudo de sistemas determinísticos, que operam com forte dependência aos parâmetros, iniciais, que sofrem resultados aparentemente aleatórios, ou caóticos.</p> <p>Slide 01</p>	<p>*Sensibilidade as Condições Iniciais</p>  <p>Não mudamos ligeiramente das condições iniciais, mas o sistema evolui de maneira exponencialmente</p> <p>Slide 02</p>	<p>Sistema Dinâmico Determinístico</p>  <p>Para cada um para um mesmo sistema, há duas condições iniciais diferentes.</p> <p>Um sistema dinâmico determinístico é um sistema regido por leis que determinam sua evolução. Tomando valores de seus variáveis, como que condições iniciais ou estados, rapidamente ao passar o tempo (o sistema de maneira exponencial com o tempo).</p> <p>Slide 03</p>																																																																																																																																																									
<p>Evolução de Sistema Dinâmico (Contínuo, Discreto)</p>  <p>Não chamamos sistemas dinâmicos o tempo aparece como variável independente e o estado do sistema é caracterizado por um conjunto de grandezas (variáveis dependentes).</p> <p>Slide 04</p>	<p>Imprevisibilidade e Irreversibilidade</p>  <ul style="list-style-type: none"> - Não é possível prever o comportamento do sistema durante sua evolução temporal como acontece com fenômenos periódicos e lineares. - É impossível retornar ao seu estado passado. <p>Slide 05</p>	<p>Iteração</p> <p>Equação para gerar os termos futuros de uma população:</p> $X_{t+1} = K X_t (1 - X_t)$ <p>Onde:</p> $X_{t+1} = K X_t - K X_t^2$ <p>X_t é o tamanho da população no um certo instante.</p> <p>X_{t+1} é o tamanho da população no um certo período de tempo.</p> <p>K é determinado pelo nível de sobrevivência.</p> <p>Veremos as duas populações decaírem antes de atingir os pontos fixos, assim, sem chance de sobreviverem que a zero.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Iteração</th> <th>0,000</th> <th>0,000</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>11</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>12</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>13</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>14</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>15</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>16</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>17</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>18</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>19</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>21</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>22</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>23</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>24</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>25</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>26</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>27</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>28</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>29</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>30</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>31</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>32</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>33</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>34</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>35</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>36</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>37</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>38</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>39</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>40</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>41</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>42</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>43</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>44</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>45</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>46</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>47</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>48</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>49</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> <tr><td>50</td><td>0,000</td><td>0,000</td></tr> </tbody> </table> <p>Slide 06</p>	Iteração	0,000	0,000	1	0,000	0,000	2	0,000	0,000	3	0,000	0,000	4	0,000	0,000	5	0,000	0,000	6	0,000	0,000	7	0,000	0,000	8	0,000	0,000	9	0,000	0,000	10	0,000	0,000	11	0,000	0,000	12	0,000	0,000	13	0,000	0,000	14	0,000	0,000	15	0,000	0,000	16	0,000	0,000	17	0,000	0,000	18	0,000	0,000	19	0,000	0,000	20	0,000	0,000	21	0,000	0,000	22	0,000	0,000	23	0,000	0,000	24	0,000	0,000	25	0,000	0,000	26	0,000	0,000	27	0,000	0,000	28	0,000	0,000	29	0,000	0,000	30	0,000	0,000	31	0,000	0,000	32	0,000	0,000	33	0,000	0,000	34	0,000	0,000	35	0,000	0,000	36	0,000	0,000	37	0,000	0,000	38	0,000	0,000	39	0,000	0,000	40	0,000	0,000	41	0,000	0,000	42	0,000	0,000	43	0,000	0,000	44	0,000	0,000	45	0,000	0,000	46	0,000	0,000	47	0,000	0,000	48	0,000	0,000	49	0,000	0,000	50	0,000	0,000
Iteração	0,000	0,000																																																																																																																																																									
1	0,000	0,000																																																																																																																																																									
2	0,000	0,000																																																																																																																																																									
3	0,000	0,000																																																																																																																																																									
4	0,000	0,000																																																																																																																																																									
5	0,000	0,000																																																																																																																																																									
6	0,000	0,000																																																																																																																																																									
7	0,000	0,000																																																																																																																																																									
8	0,000	0,000																																																																																																																																																									
9	0,000	0,000																																																																																																																																																									
10	0,000	0,000																																																																																																																																																									
11	0,000	0,000																																																																																																																																																									
12	0,000	0,000																																																																																																																																																									
13	0,000	0,000																																																																																																																																																									
14	0,000	0,000																																																																																																																																																									
15	0,000	0,000																																																																																																																																																									
16	0,000	0,000																																																																																																																																																									
17	0,000	0,000																																																																																																																																																									
18	0,000	0,000																																																																																																																																																									
19	0,000	0,000																																																																																																																																																									
20	0,000	0,000																																																																																																																																																									
21	0,000	0,000																																																																																																																																																									
22	0,000	0,000																																																																																																																																																									
23	0,000	0,000																																																																																																																																																									
24	0,000	0,000																																																																																																																																																									
25	0,000	0,000																																																																																																																																																									
26	0,000	0,000																																																																																																																																																									
27	0,000	0,000																																																																																																																																																									
28	0,000	0,000																																																																																																																																																									
29	0,000	0,000																																																																																																																																																									
30	0,000	0,000																																																																																																																																																									
31	0,000	0,000																																																																																																																																																									
32	0,000	0,000																																																																																																																																																									
33	0,000	0,000																																																																																																																																																									
34	0,000	0,000																																																																																																																																																									
35	0,000	0,000																																																																																																																																																									
36	0,000	0,000																																																																																																																																																									
37	0,000	0,000																																																																																																																																																									
38	0,000	0,000																																																																																																																																																									
39	0,000	0,000																																																																																																																																																									
40	0,000	0,000																																																																																																																																																									
41	0,000	0,000																																																																																																																																																									
42	0,000	0,000																																																																																																																																																									
43	0,000	0,000																																																																																																																																																									
44	0,000	0,000																																																																																																																																																									
45	0,000	0,000																																																																																																																																																									
46	0,000	0,000																																																																																																																																																									
47	0,000	0,000																																																																																																																																																									
48	0,000	0,000																																																																																																																																																									
49	0,000	0,000																																																																																																																																																									
50	0,000	0,000																																																																																																																																																									
<p>Bifurcação e Mapa do Caos</p>  <p>Colinas de tamanho de população (2), após um grande número de iterações, em função do parâmetro de sobrevivência (3).</p> <p>Slide 07</p>	<p>Efeito Borboleta</p>  <ul style="list-style-type: none"> - Mapa de estado (uma a mais parâmetro) - Dependência de tempo (o sistema evolui e por isso é imprevisível) - Espaço e o sistema evolui e impede o regresso ao estado anterior <p>Slide 08</p>	<p>Atrator de Lorenz</p>  <p>a animação mostra graficamente o efeito borboleta no sistema caótico, atrator de Lorenz, sendo animado a partir de dois parâmetros iniciais distintos, vermelho e azul.</p> <p>Slide 09</p>																																																																																																																																																									

Posteriormente, os estudantes devem manusear dois pêndulos duplos, montados em sala de aula, supostamente idênticos e abandonados com os mesmos ângulos de inclinação, e, a partir da evolução do movimento de ambos os pêndulos duplos e tomando como base os conceitos abordados em relação à teoria do caos, buscar a compreensão dos seguintes questionamentos:

- Quais grandezas físicas estão envolvidas nas diferenças do movimento dos dois pêndulos duplos? e
- Existem outros sistemas físicos que evoluem para um sistema caótico? Descreva algum.

Os estudantes devem perceber que pequenas alterações nas condições iniciais produzirão, no futuro, mudanças significativas, ou seja, sistemas dinâmicos não-lineares podem apresentar sensibilidade às condições iniciais.

6. Recursos necessários

Equipamento de multimídia (computador, *software Maple*, caixas de som e *Data Show*), dois pêndulos duplos e roteiro de construção nas orientações.

7. Proposta de Avaliação

Durante o encontro, observar-se-á, tomado nota, a participação dos alunos, para verificação futura da hierarquia dos conceitos e de indícios de Aprendizagem Significativa.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. **Caos: a construção de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

Quinto encontro: 5ª Aula

Aula expositiva dialogada integradora final: retomar todo o conteúdo da UEPS e os conceitos trabalhados nas aulas anteriores, porém, em maior nível de complexidade em relação à primeira apresentação.

Plano de aula do quinto encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Reconciliação dos conceitos
Título (Tópico) da aula	Retomar o conteúdo da UEPS em um nível mais alto de complexidade
Tipo predominante	Teórica
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Retomar os aspectos mais gerais, estruturantes, porém, em maior nível de complexidade em relação à primeira apresentação.

3. Objetivos complementares

Correções de problemas de aprendizagem apresentados pelos estudantes.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Conceitos da teoria do caos.

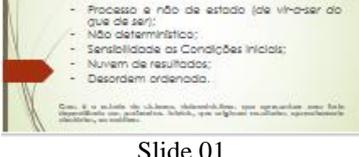
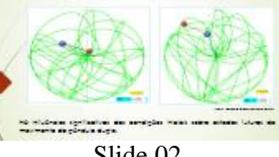
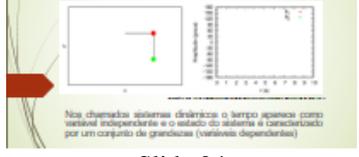
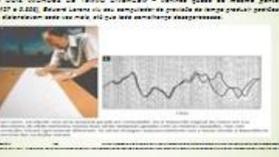
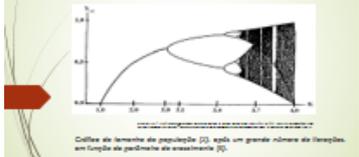
5. Metodologia

Aula expositiva dialogada integradora final.

5.1. Estratégias didáticas

Serão retomados, por meio dos *slides* da aula 04, os aspectos mais gerais da temática, porém, em maior nível de complexidade em relação às aulas anteriores, efetuando-se as correções de problemas de aprendizagem apresentados pelos estudantes. E ainda, a sugestão do jogo intitulado *Life is Strange* como atividade complementar.

Tabela 05: Reconciliação integradora.

<p>Teoria do Caos "Uma nova ciência"</p> <ul style="list-style-type: none">- Processo e não de estado (de vir-a-ser do que ele é);- Não determinístico;- Sensibilidade as Condições Iniciais;- Nuvem de resultados;- Desordem ordenada. <p>Como é o estado do sistema, determinístico, que apresenta um fato inesperado em qualquer situação, que segundo resultados aproximadamente idênticos, no estado.</p> 	<p>"Sensibilidade as Condições Iniciais"</p>  <p>Nas situações aplicáveis as condições iniciais mais exatas, temos as melhores condições para o sistema.</p>	<p>Sistema Dinâmico Determinístico</p>  <p>"Tudo o que tem que ser feito" é o comportamento. Já a trajetória é o comportamento.</p> <p>Um sistema dinâmico determinístico é um sistema regido por leis que determinam sua evolução. Formando valores de suas variáveis, mesmo que pequenas mudanças se alterem rapidamente ao passar o tempo (se o sistema de medida experimental não o tempo).</p>
<p>Evolução de Sistema Dinâmico</p>  <p>Nas chamadas sistemas dinâmicos o tempo aparece como variável independente e o estado do sistema é caracterizado por um conjunto de grandezas (variáveis dependentes).</p>	<p>Imprevisibilidade e Irreversibilidade</p>  <ul style="list-style-type: none">- Não é possível prever o comportamento do sistema durante sua evolução temporal como acontece com fenômenos periódicos e lineares.- É impossível retornar ao seu estado passado.	<p>Efeito Borboleta</p>  <p>Um sistema dinâmico determinístico é um sistema regido por leis que determinam sua evolução. Formando valores de suas variáveis, mesmo que pequenas mudanças se alterem rapidamente ao passar o tempo (se o sistema de medida experimental não o tempo).</p>
<p>Atrator de Lorenz</p>  <p>o atrator é muito parecido com o efeito borboleta no sistema caótico. O atrator de Lorenz sendo observado a partir de condições iniciais distintas, formando a sua.</p>	<p>Experimento de Lorenz</p>  <p>COMO ODE DIFERENÇAS DE TEMPO DIFERENÇAS - Diferença quase de mesma ordem (0,00007 e 0,0001). Mostra como os seus resultados de grande de tempo podem ser precisos que se descrevem entre os mais 40 que são característicos experimentais.</p>	<p>Iteração</p> <p>Equação para gerar as iterações de uma população.</p> $X_{i+1} = K \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ <p>Onde:</p> $X_{i+1} = K \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ <p>Se K é o tamanho da população em um certo instante.</p> <p>Se K é o tamanho da população em um certo período de tempo.</p> <p>K é o crescimento populacional de um indivíduo.</p> <p>Se K é o crescimento populacional de um indivíduo em um certo período de tempo.</p> <p>K é o crescimento populacional de um indivíduo em um certo período de tempo.</p>
<p>Bifurcação e Mapa do Caos</p>  <p>Como as iterações de população (X) após um grande número de iterações, em função de parâmetros de crescimento (K).</p>	<p>Conclusão</p> <p>A teoria do caos não é uma teoria de desordem, mas busca no aparente acaso uma ordem intrínseca determinada por leis precisas.</p> <p>Além do clima, outros processos aparentemente casuais apresentam certa ordem, como por exemplo o crescimento populacional, arritmias cardíacas, flutuação do mercado financeiro, etc...</p>	

6. Recursos necessários

Equipamento de multimídia: computador, caixas de som e *Data Show*.

7. Proposta de Avaliação

Durante o encontro, observar-se-á, tomado nota, a participação dos alunos, para verificação futura da hierarquia dos conceitos de indícios de Aprendizagem Significativa.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. **Caos: a construção de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

Sexto encontro: 6ª Aula

Questionário de sondagem final e construção de um mapa conceitual, além de *feedback* para avaliar o desempenho dos estudantes (Aprendizagem Significativa).

Plano de aula do sexto encontro

1. Identificação

Nível de ensino	Ensino Médio
Instituição	
Natureza	Aplicação de uma UEPS
Docente responsável	
Modalidade	Presencial
Área do conhecimento	Física
Tema da aula	Sondagem final
Título (Tópico) da aula	Questionário e construção de mapa conceitual para sondagem final
Tipo predominante	Teórica
Duração prevista	

2. Objetivo principal

Sondagem final, questionário de sondagem e construção de um mapa conceitual.

3. Objetivos complementares

A partir da sondagem final, verificar os indícios de Aprendizagem Significativa.

4. Conhecimentos introdutórios relevantes

Conceitos da teoria do caos: “sistemas dinâmicos determinísticos”, “sistema de tempo discreto”, “evolução de sistemas caótico”, “sensibilidade às condições iniciais”, “imprevisibilidade”, “irreversibilidade”, “iteração”, “atrator de Lorenz” e “efeito borboleta”.

5. Metodologia

Sondagem final, questionário e mapa conceitual.

5.1. Estratégias didáticas

Aplicação de um questionário de sondagem final e construção de um mapa conceitual para avaliar o desempenho dos estudantes (Aprendizagem Significativa).

Questionário - Sondagem inicial: Tema - Teoria do caos

Questão 01

Descreva a teoria do caos explicitando seus principais conceitos.

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos foi bem fixada (Diferenciação Progressiva).

Questão 02

Cite características de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico?

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos foi bem fixada (Diferenciação Progressiva).

Questão 03

COMO DOIS PADRÕES DE TEMPO DIVERGEM – Partindo quase do mesmo ponto (0.506127 e 0.506), Edward Lorenz viu seu computador de previsão do tempo produzir padrões que se distanciavam cada vez mais, até que toda semelhança desaparecesse.

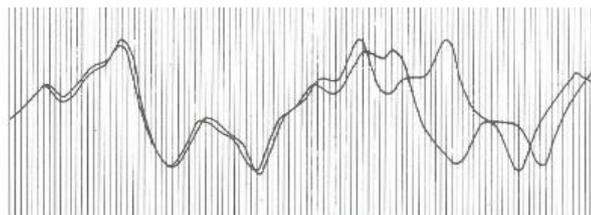


Imagem 02: Padrões meteorológicos de Lorenz.
Fonte: GLEICK, p. 14.

A partir do texto e da figura apresentados anteriormente, qual conceito, relacionado à teoria do caos, está associado à mudança de padrão?

Objetivo: investigar se a base conceitual da influência das condições iniciais na evolução do sistema foi fixada.

Questão 04

Diferencie um sistema dinâmico caótico determinista de um sistema aleatório.

Objetivo: investigar a profundidade conceitual e ligada a teoria do caos (Reconciliação Integrativa).

Questão 05

“Sensibilidade às condições iniciais” e “efeito borboleta” são termos imprescindíveis para a compreensão da teoria do caos. Sobre tais termos, descreva qual seu entendimento?

Objetivo: investigar se a base conceitual da influência das condições iniciais e do efeito borboleta foi fixada.

Questão 06

A equação $X_{i+1} = 3,8 \cdot X_i \cdot (1 - X_i)$ descreve, discretamente, o crescimento populacional, onde X_{i+1} representa o tamanho da população em um instante posterior ao crescimento X_i .

Complete a Tabela a seguir, a partir de dois valores muito próximos para a população inicial.

Iteração	Tamanho da População	
	$X_i = 0,7000$	$X_i = 0,6999$
1ª	0,7980	
2ª		0,6122
3ª		
4ª	0,3363	0,3354
5ª		
6ª		
7ª		

Objetivo: investigar se a habilidade matemática e a produção de iterações foram fixadas.

Questão 07

Você considera o tema “teoria do caos” adequado para ser ensinado em nível introdutório no Ensino Médio? Por que?

Objetivo: verificar a vontade de aprender sobre o tema “teoria do caos”.

Questão 08

Por que o movimento de um pêndulo duplo é caracterizado como um movimento caótico?

Objetivo: investigar se a base conceitual da teoria do caos, aplicada ao movimento do pêndulo duplo, foi fixada.

6. Recursos necessários

Questionário, sondagem final – impresso para os estudantes responderem – e folhas em branco para a construção de mapas conceituais.

7. Proposta de Avaliação

Durante o encontro, observar-se-á, tomado nota, a participação dos alunos, para verificação futura da hierarquia dos conceitos e de indícios de Aprendizagem Significativa.

8. Sugestões de Leituras complementares

GLEICK, J. J. **Caos: a construção de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

5 Orientação

Construção do mapa conceitual

Os mapas conceituais são ferramentas gráficas importantes, utilizados para estabelecer uma organização hierárquica de conceitos, que demonstram o grau hierárquico de compreensão dos estudantes sobre a temática em questão.

Mapas conceituais são diagramas conceituais, enfatizando conceitos, suas hierarquias e suas relações proposicionais no contexto de um corpo de conhecimentos. (MOREIRA, 2013, p.29)

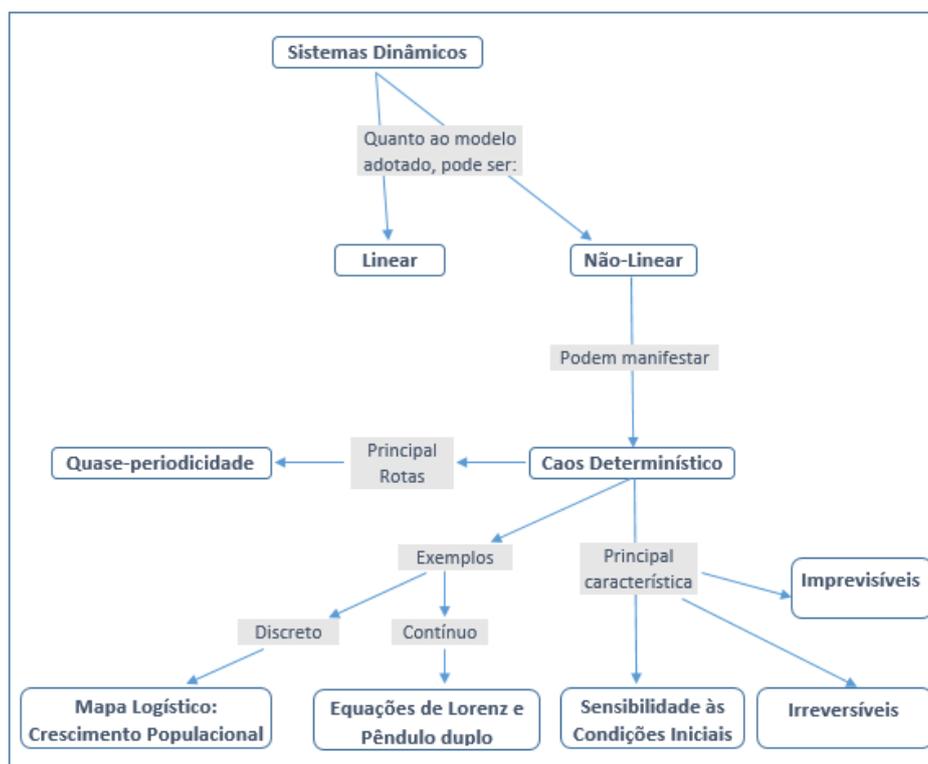


Imagem 03: Modelo de mapa conceitual – Teoria do caos

Tabela 06: Slides com as orientações para construção de um mapa conceitual.

SLIDE 1	SLIDE 2

SLIDE 3	SLIDE 4
<p>Construção de um Mapa Conceitual</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Escolha um tema; 2. Organize os conceitos principais; <ul style="list-style-type: none"> - Conceitos Gerais - Conceitos Específico 3. Ligue os conceitos mais gerais com os mais específicos. Use verbos nas linhas. 	<p>Exemplo de um Mapa Conceitual</p> <p><small>Figura 2. Um mapa conceitual para forças (Marini, 1977, 1979, 1983; Marini e Balthazar, 1987)</small></p>
SLIDE 5	SLIDE 6
<p>O que é um mapa Conceitual</p> <p>Um Mapa Conceitual ≠ O Mapa Conceitual</p>	<p>Construa um Mapa Conceitual</p> <p>Tema: "Teoria do Caos"</p> <p>Atividade individual: Construa um Mapa conceitual a partir do tema acima</p> <p><small>1987. Teoria do caos: introdução à teoria do caos. São Paulo: Ed. Conhecimento, 1987, 200p.</small></p>

Construção de um Pêndulo duplo

Materiais utilizados na construção de dois pêndulos duplos:

Tabela 07: Material para a construção de um pêndulo duplo.

Imagens	Descrição do material
 <p>Imagem 04</p>	<p>4 barras de ferro de comprimento 25,0 cm e 9,0 mm de diâmetro.</p>



Imagem 05

4 porcas N12 e 4 arruelas diâmetros 1,2 cm



Imagem 06

2 barras de ferro de comprimento 5,0 cm e 1,1 cm de diâmetro.



Imagem 07

2 barras de ferro de comprimento 2 cm e 1,1 cm de diâmetro.

 <p>Imagem 08</p>	<p>4 rolamentos n 21, diâmetro de 1,1 cm.</p>
 <p>Imagem 09</p>	<p>Tinta spray branca 200 ml</p>
 <p>Imagem 10</p>	<p>Local das soldas</p>
 <p>Imagem 11</p>	<p>Pêndulos prontos</p>

6 Atividade Complementar

Objetivo: extrair conceitos básicos da teoria do caos a partir do jogo intitulado *Life Is Strange*¹⁶.

O Jogo “Life is Strange”

O jogo *Life Is Strange* está disponível nas plataformas móveis *Play Story* (*Android*) e *Apple Store* (*IOS*). Ele é dividido em episódios, sendo que a aventura de cada episódio consiste em que o jogador, terceira pessoa, escolha as ações da personagem Maxine Caulfield. Logo no início do jogo é trazida a informação que a personagem pode retroceder o tempo e tomar novas decisões que já tinha feito.

Por mais que a personagem volte no tempo, em qualquer momento, e tome novas decisões, suas novas escolhas sempre criam um “efeito borboleta”. Assim, o jogo faz alusão direta à teoria do caos em todos os episódios.

Imagens de propagandas disponíveis nas plataformas *Play Story* (*Android*) e *Apple Store* (*IOS*).

Tabela 08: Imagem do Jogo *Life is Strange*, disponível na loja *Play Store*.

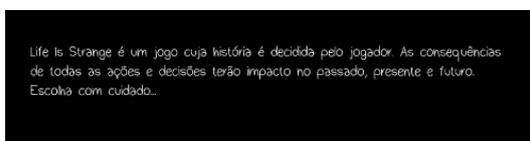


Imagem 12: Início do jogo, 'Life is Strange' é um **jogo cuja história é decidida** pelo jogador. As consequências de todas as ações e decisões terão impacto no passado, presente e futuro. Escolha com cuidado...

Dados do app	
Downloads	Mais de 1.000.000 downloads
Oferecido por	SQUARE ENIX Ltd
Lançado em	18 de jul de 2018
Permissões do app	Ver mais

Imagem 13: Dados de gerais

¹⁶ *Life Is Strange* é um jogo eletrônico episódico de aventura desenvolvido pelo estúdio francês *Dontnod Entertainment* e publicado pela *Square Enix*. Ele consiste em cinco episódios lançados periodicamente entre janeiro e outubro de 2015 para as plataformas *Linux*, *Microsoft Windows*, OS X, *PlayStation 3*, *PlayStation 4*, *Xbox 360* e *Xbox One*. Em dezembro de 2017, foi lançado para as plataformas móveis *IOS* e, em janeiro de 2018, para a plataforma *Android*. Informações gerais do jogo disponíveis em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Life_Is_Strange Acesso em: 08 abr. 2019.



Imagem 14: Encarte do jogo, Catástrofes provocadas pelas escolhas



Life is Strange é um jogo premiado no qual as suas escolhas afetam a história

Imagem 15: Volte no tempo para controlar seu destino



Imagem 16: Um mundo que reage a suas escolhas

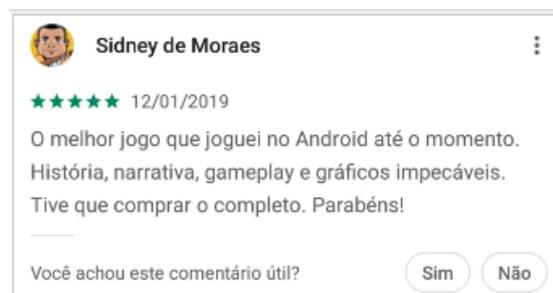


Imagem 17: comentário de usuário na plataforma *Play Story (android)*

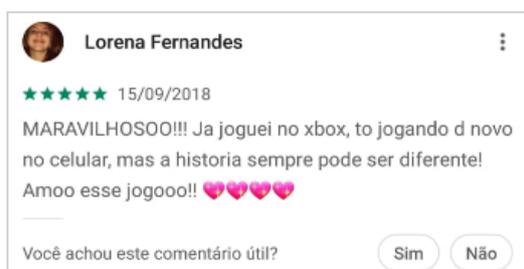


Imagem 18: comentário de usuário na plataforma *Play Story (android)*

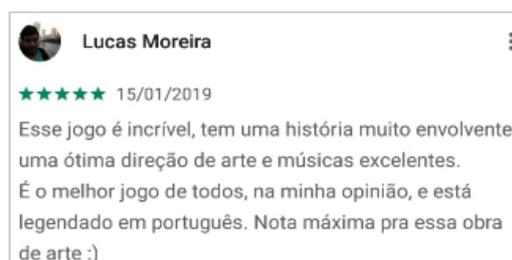


Imagem 19: comentário de usuário na plataforma *Play Story (android)*

Canal¹⁷ BRKsEDU

Eduardo Benvenuti – conhecido como Edu, do canal BRKsEDU – é um dos mais conhecidos *YouTubers* nacionais no ramo de *games*. Seu canal possui mais de

¹⁷ Com mais de 1,9 bilhão de usuários o *YouTube* é uma plataforma de compartilhamento e visualização de vídeos online com sede em San Bruno (Califórnia). O acesso aos vídeos ocorre por meio de dispositivos móveis e computadores conectados à rede mundial de computadores. Os vídeos dos episódios jogados do game *Life is Strange* estão disponíveis no Canal do Edu (BRKsEDU): <https://www.youtube.com/watch?v=AQha3wxuVYQ> Acesso em: 08 abr. 2019.

7.671.000 inscritos. Ele divulga vídeos diversos sobre as principais tendências de *games*.

Recentemente, Edu publicou em seu canal 22 vídeos com a conclusão de todo o jogo *Life is Strange*, segundo as suas escolhas para a personagem Maxine Caulfield. Caso o internauta não queira jogar o referido gameo, a opção de visualização dos vídeos é interessante, pois minimiza tempo, além da série ser envolvente e empolgante a cada escolha. O vídeo do primeiro episódio possui mais de 860.000 visualizações.

Na conclusão do jogo, episódio de número 22, Edu afirma que *Life is Strange* foi o melhor jogo que ele já jogou.

Tabela 09: Imagens do canal BRKsEDU.



Imagem 20: Canal do Edu **BRKsEDU**



Imagem 21: Cena do início do jogo.



Imagem 22: Efeito borboleta



Imagem 23: Referência do jogo ao efeito borboleta



Imagem 24: Episódio 3 – Teoria do Caos



Imagem 25: cena final do jogo.

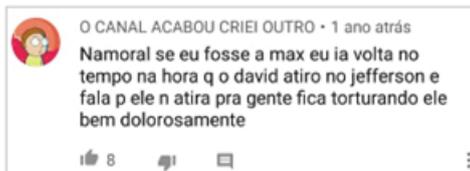


Imagem 26: Comentário de usuário do canal

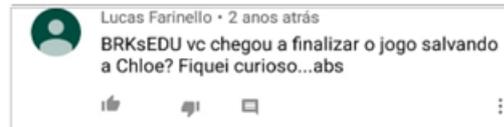


Imagem 27: Comentário de usuário do canal

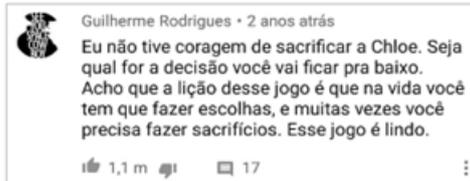


Imagem 28: Comentário de usuário do canal

Questionário

- 1) O que você entende por sensibilidade às condições iniciais? Exemplifique com alguma cena do jogo *Life is Strange*.
- 2) A rigor, sistemas dinâmicos não-lineares caóticos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por estados que mudam com o tempo, sendo irreversíveis. Nesse sentido, em que parte do jogo *Life is Strange* é possível extrair o conceito aqui sublinhado?
- 3) No jogo *Life is Strange*, em diversos momentos se tem a ilustração de uma borboleta, a partir de alguma cena. Assim, segundo a teoria do caos, o que é o efeito borboleta? Exemplifique com uma cena do jogo.
- 4) Descreva porque a teoria do caos retrata fenômenos imprevisíveis.
- 5) Exemplifique algum sistema físico, real, que pode ser descrito como um sistema caótico.

APÊNDICE B

Algumas derivadas foram obtidas pela regra do produto:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Energia Cinética

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (x_2'^2 + y_2'^2) =$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 \cdot [(\theta_1' \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1)^2 + (\theta_1' \cdot l_1 \cdot \sin \theta_1)^2] + \frac{1}{2} m_2 [(x_1' + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2)^2 + (y_1' + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \sin \theta_2)^2] =$$

$$K =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot [\theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + \theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \sin^2 \theta_1] + \frac{1}{2} m_2 [(\theta_1' \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2)^2 + (\theta_1' \cdot l_1 \cdot \sin \theta_1 + \theta_2' \cdot l_2 \cdot \sin \theta_2)^2] =$$

$$K =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot [\theta_1'^2 \cdot l_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1)] +$$

$$\frac{1}{2} m_2 [(\theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + 2 \cdot \theta_1' \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 + \theta_2'^2 \cdot l_2^2 \cdot \cos^2 \theta_2) +$$

$$(\theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \sin^2 \theta_1 + 2 \cdot \theta_1' \cdot l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \theta_2' \cdot l_2 \cdot \sin \theta_2 + \theta_2'^2 \cdot l_2^2 \cdot \sin^2 \theta_2)] =$$

Usando as identidades trigonométricas: $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$ e $\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$, temos:

$$K =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \theta_1'^2 \cdot l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [(\theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \theta_2'^2 \cdot l_2^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2) + \theta_1'^2 \cdot l_1^2 \cdot \theta_2'^2 \cdot l_2^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2) + 2 \cdot \theta_1' \cdot l_1 \cdot \theta_2' \cdot l_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)] =$$

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot (\theta_1'^2 \cdot l_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot \theta_2'^2 \cdot l_2^2 + 2 \cdot \theta_1' \cdot l_1 \cdot \theta_2' \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Energia potencial

$$V = m \cdot g \cdot h =$$

$$V = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 =$$

$$V = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot (y_1 - l_1 \cdot \cos \theta_1) =$$

$$V = -m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot g \cdot (-l_1 \cdot \cos \theta_1 - l_2 \cdot \cos \theta_2) =$$

$$V = -m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 =$$

$$V = (m_1 + m_2)(-g \cdot l_1 \cdot \cos \theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2$$

APÊNDICE C

As soluções das equações diferenciais foram obtidas utilizando o *software Maple*¹⁸ 2016, a documentação completa, solução das equações e simulações, de um modelo de pêndulo duplo está disponível, *open source*, para utilização no *website*: <https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4873> e <https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>.

A partir do conjunto de equações 04 a 25 e tomando $\theta_1=a1$ e $\theta_2=a2$, temos:

restart;

$$\begin{aligned} \text{meqns} := & \text{diff}(x1(t), t, t) = -(\text{diff}(a1(t), t))^2 * L1 * \sin(a1(t)) + (\text{diff}(a1(t), t, t)) * L1 * \cos(a1(t)), \text{diff}(y1(t), t, t) \\ & = (\text{diff}(a1(t), t))^2 * L1 * \cos(a1(t)) + (\text{diff}(a1(t), t, t)) * L1 * \sin(a1(t)), \text{diff}(x2(t), t, t) = \text{diff}(x1(t), t, t) - \\ & (\text{diff}(a2(t), t))^2 * L2 * \sin(a2(t)) + (\text{diff}(a2(t), t, t)) * L2 * \cos(a2(t)), \text{diff}(y2(t), t, t) = \text{diff}(y1(t), t, t) \\ & + (\text{diff}(a2(t), t))^2 * L2 * \cos(a2(t)) + (\text{diff}(a2(t), t, t)) * L2 * \sin(a2(t)), \sin(a1(t)) * (m1 * (\text{diff}(y1(t), t, t)) \\ & + m2 * (\text{diff}(y2(t), t, t)) + m2 * g + m1 * g) = -\cos(a1(t)) * (m1 * (\text{diff}(x1(t), t, t)) + m2 * (\text{diff}(x2(t), t, t))), \\ & \sin(a2(t)) * (m2 * (\text{diff}(y2(t), t, t)) + m2 * g) = -\cos(a2(t)) * m2 * (\text{diff}(x2(t), t, t)) \\ \frac{d^2}{dt^2} x1(t) = & - \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \cos(a1(t)), \frac{d^2}{dt^2} y1(t) = \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \sin(a1(t)), \frac{d^2}{dt^2} x2(t) = \frac{d^2}{dt^2} x1(t) \\ & - \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \cos(a2(t)), \frac{d^2}{dt^2} y2(t) = \frac{d^2}{dt^2} y1(t) + \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \sin(a2(t)), \\ \sin(a1(t)) \left(m1 \left(\frac{d^2}{dt^2} y1(t) \right) + m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y2(t) \right) + m2 g + m1 g \right) = & -\cos(a1(t)) \left(m1 \left(\frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) + m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) \right), \sin(a2(t)) \left(m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y2(t) \right) + m2 g \right) = \\ & -\cos(a2(t)) m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) \end{aligned}$$

Obtendo as equações diferenciais a1" e a2":

solve({meqns}, {diff(a1(t), t, t), diff(a2(t), t, t)})

neweqn1 := subs(subs({meqns[1], meqns[2]}, {meqns[3], meqns[4]}))

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} y2(t) = \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \sin(a2(t)), \frac{d^2}{dt^2} x2(t) = \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \cos(a1(t)) - \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \cos(a2(t)) \right\} \end{aligned}$$

neweqns := subs({meqns[1], meqns[2], neweqn1[1], neweqn1[2]}, {meqns[5], meqns[6]})

$$\begin{aligned} \left\{ \sin(a1(t)) \left(m1 \left(\left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \sin(a1(t)) \right) + m2 \left(\left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \sin(a1(t)) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \sin(a2(t)) + m2 g + m1 g \right) = -\cos(a1(t)) \left(m1 \left(- \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \cos(a1(t)) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + m2 \left(- \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \cos(a1(t)) - \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \cos(a2(t)) \right) \right), \\ \sin(a2(t)) \left(m2 \left(\left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \sin(a2(t)) + m2 g \right) = \right. \\ \left. -\cos(a2(t)) m2 \left(- \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a1(t) \right) L1 \cos(a1(t)) - \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a2(t)) + \left(\frac{d^2}{dt^2} a2(t) \right) L2 \cos(a2(t)) \right) \right\} \end{aligned}$$

soln := solve(neweqns, {diff(a1(t), t, t), diff(a2(t), t, t)})

¹⁸ É um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento teve início no ano de 1981, pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo, Waterloo, Canadá. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Maple>>. Acesso em: 16 jun. 2019.

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{dt^2} a1(t) = \left(\sin(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t)) + 2 \cos(a1(t)) m2 \cos(a2(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) - \cos(a1(t)) m2 \cos(a2(t)) \sin(a2(t)) g \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(a2(t))^2 \sin(a1(t)) m2 g - \cos(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a2(t)) - \sin(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) \right. \right. \\ \left. \left. - 2 m2 \sin(a2(t)) \cos(a2(t)) \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t))^2 + \sin(a1(t)) m1 g + m2 \sin(a2(t)) \cos(a2(t)) \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \right) / (L1(-m1 - m2 \cos(a1(t)))^2 \right. \\ \left. + 2 \cos(a2(t))^2 m2 \cos(a1(t))^2 - \cos(a2(t))^2 m2 + 2 \sin(a1(t)) m2 \sin(a2(t)) \cos(a2(t)) \cos(a1(t))) \right), \frac{d^2}{dt^2} a2(t) = \\ - \left(2 \cos(a1(t)) \sin(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a2(t))^2 - 2 \cos(a2(t)) \sin(a2(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \cos(a1(t))^2 + \cos(a2(t)) \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) m1 \right. \\ \left. + \cos(a2(t)) \sin(a2(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 + \cos(a2(t)) \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(a1(t)) m2 + \cos(a2(t)) \cos(a1(t)) \sin(a1(t)) m2 g \right. \\ \left. + \cos(a2(t)) \cos(a1(t)) \sin(a1(t)) m1 g - \cos(a1(t))^2 m2 \sin(a2(t)) g - \sin(a2(t)) g m1 \cos(a1(t))^2 - \sin(a2(t)) \cos(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \right. \\ \left. - \sin(a2(t)) \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \cos(a1(t)) m1 - \cos(a1(t)) \sin(a1(t)) m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \right) / ((-m1 - m2 \cos(a1(t)))^2 + 2 \cos(a2(t))^2 m2 \cos(a1(t))^2 \\ - \cos(a2(t))^2 m2 + 2 \sin(a1(t)) m2 \sin(a2(t)) \cos(a2(t)) \cos(a1(t)) L2) \end{aligned}$$

dqqnew1 := combine(soln[1], trig)

$$\frac{d^2}{dt^2} a1(t) = \frac{2 m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(a1(t) - a2(t)) + m2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 \sin(2 a1(t) - 2 a2(t)) + m2 g \sin(-2 a2(t) + a1(t)) + \sin(a1(t)) m2 g + 2 \sin(a1(t)) m1 g}{-2 m1 L1 - m2 L1 + L1 m2 \cos(2 a1(t) - 2 a2(t))}$$

dqqnew2 := combine(soln[2], trig)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} a2(t) = \frac{1}{2 L2 m1 + L2 m2 - L2 m2 \cos(2 a1(t) - 2 a2(t))} \left(m2 \left(\frac{d}{dt} a2(t) \right)^2 L2 \sin(2 a1(t) - 2 a2(t)) + 2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 m1 \sin(a1(t) - a2(t)) \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{d}{dt} a1(t) \right)^2 L1 m2 \sin(a1(t) - a2(t)) + m2 g \sin(2 a1(t) - a2(t)) + m1 g \sin(2 a1(t) - a2(t)) - m2 \sin(a2(t)) g - \sin(a2(t)) g m1 \right) \end{aligned}$$

Exemplo de solução numérica:

m1 := 1; m2 := .5; L1 := 1; L2 := .5; g := 9.8

9.8

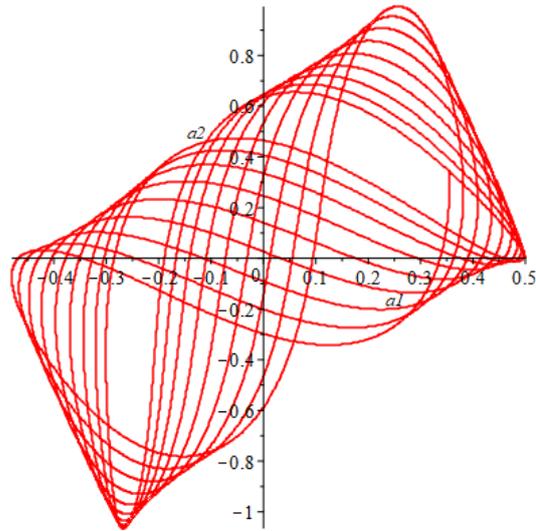
Definindo valores iniciais dos ângulos:

$$\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0, \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \frac{d\theta_2}{dt} = 0.5 \quad \text{ou} \quad a_1 = 0.5, a_2 = 0, \frac{da_1}{dt} = 0, \frac{da_2}{dt} = 0.5$$

slnew := dsolve({dqqnew1, dqqnew2, a1(0) = .5, a2(0) = 0, (D(a1))(0) = 0, (D(a2))(0) = .5}, {a1(t), a2(t)}, numeric)

proc(x_r, 45) ... end proc

`odeplot(slnew, [a1(t), a2(t)], t = 0 .. 20, numpoints = 10000, labels = [a1, a2])`



(Rastro m2)

Exemplo de solução numérica:

`m1 := 1; m2 := .5; L1 := .5; L2 := 1; g := 9.8`

9.8

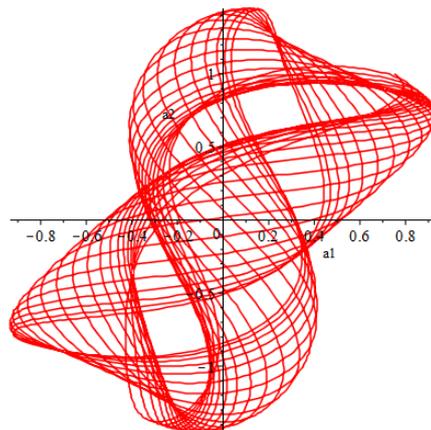
`slnn := dsolve({dqqnew1, dqqnew2, a1(0) = .75, a2(0) = 1, (D(a1))(0) = 1, (D(a2))(0) = -1}, {a1(t), a2(t)}, numeric)`

`proc(x_rig45) ... end proc`

Definindo valores iniciais dos ângulos:

$$\theta_1 = 0.75, \theta_2 = 0, \frac{d\theta_1}{dt} = 1, \frac{d\theta_2}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_1 = 0.75, a_2 = 0, \frac{da_1}{dt} = 1, \frac{da_2}{dt} = 0$$

`odeplot(slnn, [a1(t), a2(t)], t = 0 .. 50, numpoints = 5000)`

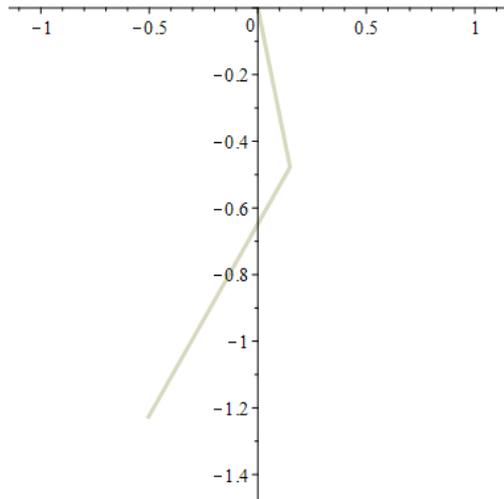


(Rastro m2)

Segue exemplos de animações do pêndulo duplo:

```
for i from 0 to 300 do pt // i := plot([[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2])), -L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2])),
[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2]))+L2*sin(rhs(slenn(.1*i)[4])), -L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2]))-
L2*cos(rhs(slenn(.1*i)[4]))]], style = point, symbol = circle, symbolsize = 20); ptl // i := plot([[0, 0],
[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2])), -L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2])),
[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2]))+L2*sin(rhs(slenn(.1*i)[4])), -L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2]))-
L2*cos(rhs(slenn(.1*i)[4]))]], style = line, color = [wheat, tan], thickness = 3) end do
```

```
AA := display([pt // (0 .. 300)], insequence = true);
BB := display([ptl // (0 .. 300)], insequence = true);
```



```
display({AA, BB}, axes = none)
```



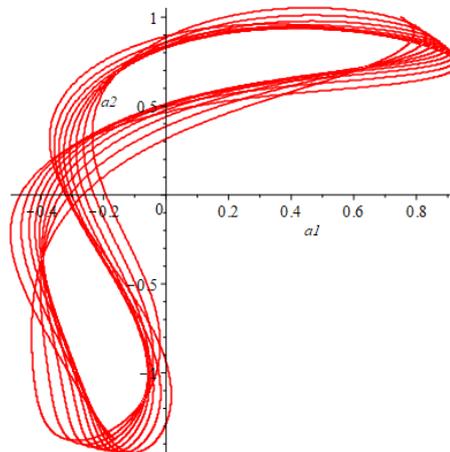
Modificando os parâmetros m_1 , m_2 , L_1 e L_2 e as variáveis Θ_1 e Θ_2 , é possível criar diversas simulações.

```
Drawpend:=proc(mm1,mm2,LL1,LL2,ang1,ang2,dang1,dang2,n) local
sysdeqq,slnnn,phsplt,inits;sysdeqq:=subs({m1=mm1,m2=mm2,L1=LL1,L2=LL2,g=9.81},{dqqnew1,dqq
new2}):inits:={a1(0)=ang1,a2(0)=ang2,D(a1)(0)=dang1,D(a2)(0)=dang2};slnnn:=dsolve(sysdeqq
union inits, {a1(t),a2(t)},numeric): for i from 0 to n do ptt|i:=plot([L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2])),
-L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2])),[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2]))+L2*sin(rhs(slenn(.1*i)[4])),
-L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2]))-
L2*cos(rhs(slenn(0.1*i)[4]))]],style=point,symbol=circle,symbolsize=20):ptl1|i:=plot([[0,0],[L1*sin(rhs
(slenn(.1*i)[2])),
-L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2]))]],style=line,color=wheat,thickness=3):ptl2|i:=plot([L1*sin(rhs(slenn(.1*i)
[2])),
-L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2])),[L1*sin(rhs(slenn(.1*i)[2]))+L2*sin(rhs(slenn(.1*i)[4])),
-L1*cos(rhs(slenn(.1*i)[2]))-L2*cos(rhs(slenn(0.1*i)[4]))]],style=line,color=[tan],thickness=3):end
do:AAA:=display([ptt|(1..n)],insequence=true):BBB:=display([ptl1|(1..n)],insequence=true):CCC:=dis
play([ptl2|(1..n)],insequence=true):display({AAA,BBB,CCC},axes=None);end proc:
Drawpend(1, .5, .5, 1, .75, 1, 1, -1, 300)
```



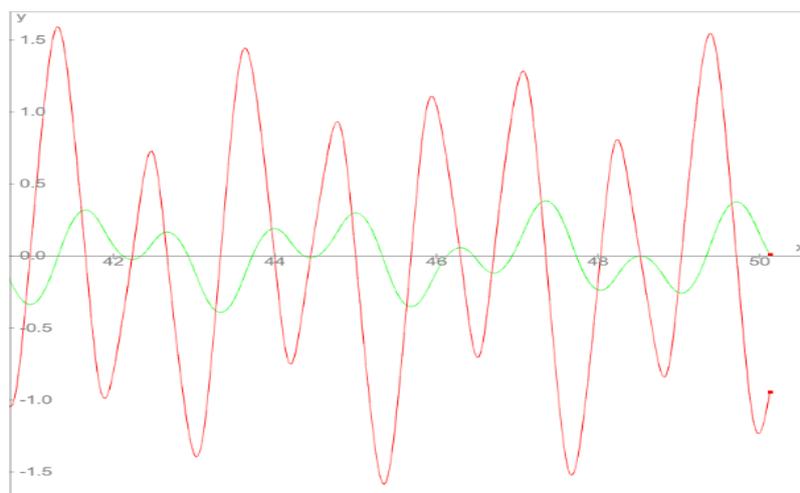
Plano de Fase

```
Drawphs := proc (mm1, mm2, LL1, LL2, ang1, ang2, dang1, dang2, n) local sysdeqq, slnnn, phsplt,
inits; sysdeqq := subs({L1 = LL1, L2 = LL2, g = 9.81, m1 = mm1, m2 = mm2}, {dqqnew1, dqqnew2});
inits := {a1(0) = ang1, a2(0) = ang2, (D(a1))(0) = dang1, (D(a2))(0) = dang2}; slnnn := dsolve(sysdeqq
union inits, {a1(t), a2(t)}, numeric); phsplt := odeplot(slnnn, [a1(t), a2(t)], t = 0 .. 20, numpoints =
10000, labels = [a1, a2]); display(phsplt) end proc;
Drawphs(1, .5, .5, 1, .75, 1, 1, -1, 300)
```



(Rastro de m_2)

Amplitude dos pêndulos:



APÊNDICE D

Solução, utilizando o *Maple*, das Equações de Lorenz, modelo meteorológico simplificado.

restart;

$\sigma := 10;$

10

$\rho := 28;$

28

$\beta := 8/3;$

8/3

$eqa := \text{diff}(x(t), t) - \sigma*(y(t) - x(t)) = 0;$

$eqb := \text{diff}(y(t), t) - \rho*x(t) + y(t) + x(t)*z(t) = 0;$

$eqc := \text{diff}(z(t), t) - x(t)*y(t) + \beta*z(t) = 0;$

$$\frac{d}{dt} x(t) - 10y(t) + 10x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} y(t) - 28x(t) + y(t) + x(t)z(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} z(t) - x(t)y(t) + \frac{8}{3}z(t) = 0$$

$inic1 := x(0) = 0; inic2 := y(0) = 1; inic3 := z(0) = 0;$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = 0$$

$sol := \text{dsolve}(\{eqa, eqb, eqc, inic1, inic2, inic3\}, \{x(t), y(t), z(t)\}, \text{numeric}); s2 := sol(2);$

$[t = 2., x(t) = -7.70907406350548, y(t) = -8.44950968330774, z(t) = 24.9925162485068]$

Gráfico bidimensional para t e $x(t)$, atrator de Lorenz.

$\text{with}(plots); \text{odeplot}(sol, [t, x(t)], 0..50, \text{numpoints} = 100, \text{axes} = \text{boxed});$

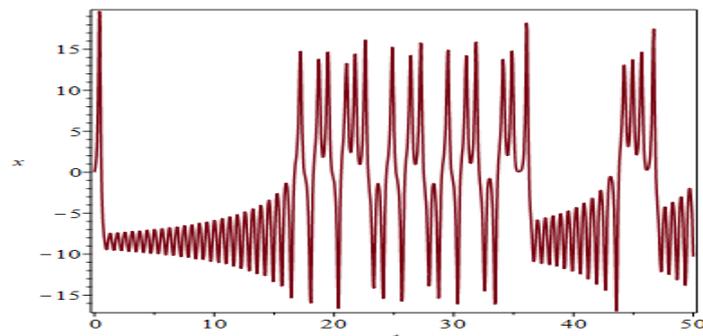


Gráfico bidimensional para t e $y(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [t, y(t)], 0 .. 50, numpoints = 100, axes = boxed);`

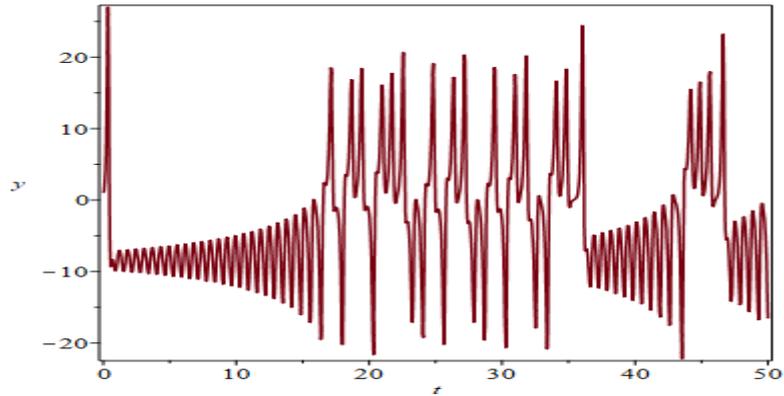


Gráfico bidimensional para t e $z(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [t, z(t)], 0 .. 50, numpoints = 100, axes = boxed);`

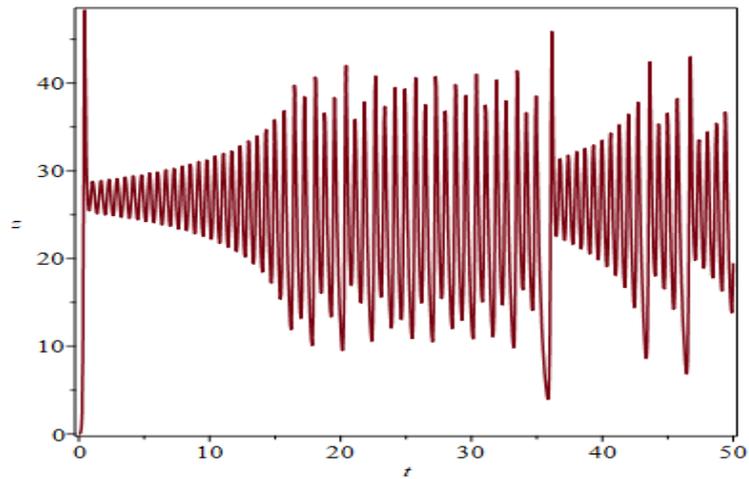


Gráfico bidimensional para $x(t)$ e $z(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [x(t), y(t)], 0 .. 70, numpoints = 10000, axes = boxed);`

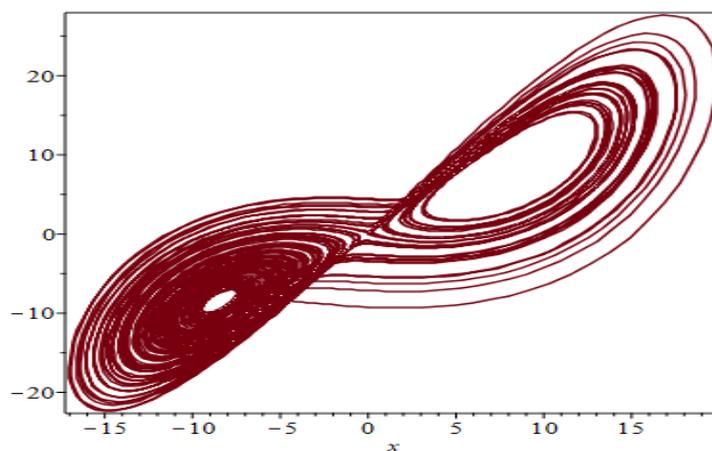


Gráfico bidimensional para $x(t)$ e $z(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [x(t), z(t)], 0 .. 70, numpoints = 10000, axes = boxed);`

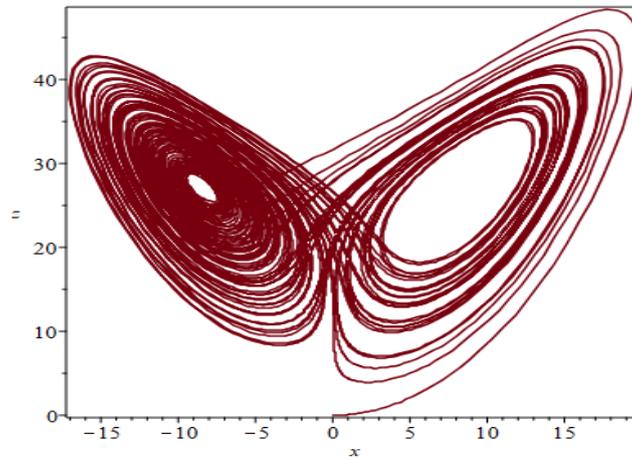


Gráfico bidimensional para $y(t)$ e $z(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [y(t), z(t)], 0 .. 70, numpoints = 10000, axes = boxed);`

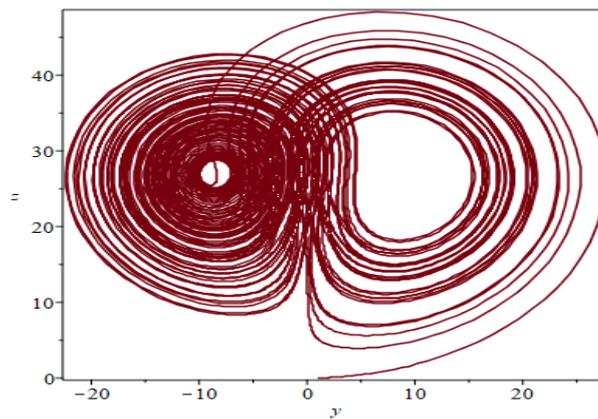
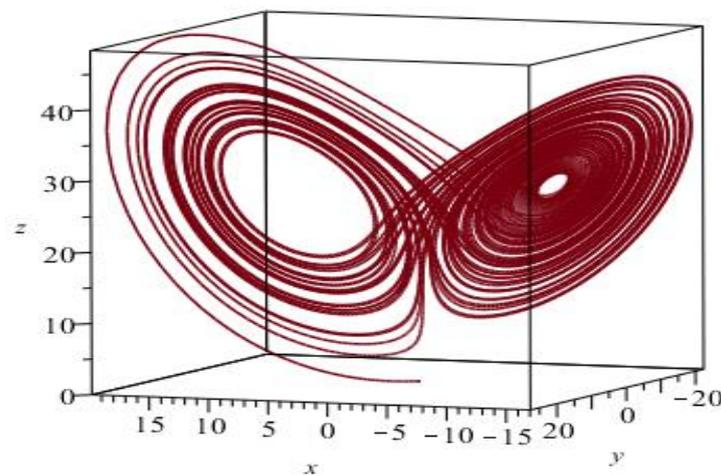


Gráfico tridimensional para $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, atrator de Lorenz.

`with(plots); odeplot(sol, [x(t), y(t), z(t)], 0 .. 70, numpoints = 10000, axes = boxed);`



REFERENCIAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. Chaos - An Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1996.

ARAGÃO, W. W. S. **Unidade didática contextualizada da teoria do caos para o ensino médio.** São Cristóvão – Sergipe – UFS, 2017. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física) - Disponível em: <http://www1.fisica.org.br/mnpef/sites/default/files/Dissertacao_Wildson.pdf>. Acesso em: 19 set. 2019.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos:** uma perspectiva cognitiva. 1ª. ed. Lisboa: Plátano, 2003. Disponível em: <<http://files.mestrado-em-ensino-de-ciencias.webnode.com/200000007-610f46208a/ausebel.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

ARANTES, A. R.; MIRANDA, M. S.; STUDART, N. Objetos de aprendizagem no ensino de física: usando simulações do PhET. **Física na Escola**, v. 11, n. 1, 2010. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol11/Num1/a08.pdf>>. Acesso em: 30 mar. 2019.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 28 out. 2019.

BRASIL. MEC. PCN Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Física. Brasília, 1998. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/arquivos/PCN_FIS.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Brasília: MEC, Secretária de Educação Básica, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 25 out. 2019.

BRASIL. SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (SAEB), Brasília, 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/saeb_documento_s_de_referencia_versao_1.0.pdf>. Acesso em: 24 out. 2019.

CALVÃO, A. M. **Estudos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Pêndulo Duplo, Batimentos Cardíacos e Coletivos de Animais.** Universidade Federal Fluminense – UFF. Tese - Instituto de Física. Niterói 2014 - Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/6167/1/Tese_Angelo.pdf>. Acesso em: 19 set. 2019.

FERREIRA, M.; FILHO, O. L. S. Proposta de plano de aula para o ensino de física. *Physicae Organum*, v. 5, n. 1, p. 39-44, Brasília, 2019. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/physicae/article/view/23074/21239>>. Acesso em: 20 jul. 2019

FERREIRA, M.; SILVA FILHO, O.; CORTEZ, C.; SCHINZEL, G.; NETO, J.; SILVA, A. S. ENSINANDO FÍSICA ATÔMICA PARA UMA TURMA DE TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO. **Revista do Professor de Física**, v. 2, n. 3, p. 43-58, 4 dez. 2018. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/19923/18363>>. Acesso em: 20 jul. 2019

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. *Caos uma introdução* - São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1994.

GLEICK, J. J. **Caos: a construção de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1989.

GOMES, M. S. **Ensino de Conceitos de Complexidade e Caos no Ensino Médio a partir do Fenômeno Tornado: Uma Abordagem na Perspectiva da Aprendizagem significativa** – Feira de Santana: UEFS/IF, 2016. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física) - Disponível em: <http://www1.fisica.org.br/mnpef/sites/default/files/dissertacao_moacyr.pdf>. Acesso em: 19 set. 2019.

MOREIRA, I. C. *Sistemas Caóticos em Física – Uma Introdução* – **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 15 nºs 1 a 4 – São Paulo: USP, 1993.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E.F.S. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo, Centauro, 2006. 2ª ed.

MOREIRA, M. A. **Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências** — Comportamentalismo, Construtivismo e Humanismo. 2. ed. Porto Alegre, Brazil: UFRGS, 2016.

_____. *Aprendizagem significativa: um conceito subjacente*. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, p. 25-46, 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID16/v1_n3_a2011.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2018.

_____. *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas-UEPS*. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011a. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/UEPSport.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2018.

_____. **O que é afinal aprendizagem significativa**. *Quriculum*, n. 25, p. 29-56, 2012. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/oqueefinal.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2018.

_____. *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas-UEPS*. **Temas de Ensino e Formação de Professores de Ciências**. Natal, RN: EDUFRN, p. 45-57, 2012a. Disponível em: <http://ppgect.ufsc.br/files/2013/05/LivroCasadinho_V2_2013.pdf>. Acesso em: 16 de jun. 2018.

_____. *Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa*. 2012b. **Revisado em 2012**. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2018.

_____. Mapas Conceituais e Teorias de Aprendizagem. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 3, n. 3, p. 29-40, 2013. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID75/v3_n3_a2013.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2018.

_____. **Teorias de Aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: EPU, 2017.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**, 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 5, n. 1, p. 9-29, jan.-jun. 2010. Disponível em: <<http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/1298>>. Acesso em: 16 set. 2019.

PEREIRA, F. **Proposta de sequência didática visando abordar os fundamentos da teoria de Caos no Ensino Médio** - Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física) - Santa Catarina: UFSC /SC, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/178271/Dissertacao_Francisca.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19 set. 2019.

PRIGOGINE, I.; FERREIRA, R. L. **As leis do caos**. Unesp, 2002.

RIBEIRO, R. J.; SILVA, S. C. R.; KOSCIANSKI, A. Organizadores prévios para aprendizagem significativa em Física: o formato curta de animação. **Revista Ensaio**, v. 14, n. 3, p. 167-183, set-dez. 2012. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/epec/v14n3/1983-2117-epec-14-03-00167.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2018.

Sociedade Brasileira de Física (SBF) – Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física. Disponível em: <<http://www1.fisica.org.br/mnpef/?q=node/61>>. Acesso em: 25 out. 2019.

SILVA FILHO, O.; FERREIRA, M. TEORIAS DA APRENDIZAGEM E DA EDUCAÇÃO COMO REFERENCIAIS EM PRÁTICAS DE ENSINO: AUSUBEL E LIPMAN. **Revista do Professor de Física**, v. 2, n. 2, 28 ago. 2018. <<http://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/12315/10793>>. Acesso em: 19 set. 2019.

SILVEIRA, F. L. Determinismo, previsibilidade e caos. *Cad. Cat. Ens. Fís.*, v10, n.2: p.137-147, 1993. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Determinismo_previsibilidade_caos.pdf>. Acesso em: 19 set. 2019.