

TESE DE DOUTORADO

UMA EXTENSÃO DO MODELO DE GURSON
PARA ANÁLISE DE FADIGA SEGUINDO UMA
METODOLOGIA INCREMENTAL

RANIERE SILVA NEVES

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

UMA EXTENSÃO DO MODELO DE GURSON
PARA ANÁLISE DE FADIGA SEGUINDO UMA
METODOLOGIA INCREMENTAL

RANIERE SILVA NEVES

ORIENTADOR: Dr. LUCIVAL MALCHER

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 00/2020
BRASÍLIA - DF: Junho de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UMA EXTENSÃO DO MODELO DE GURSON PARA
ANÁLISE DE FADIGA SEGUINDO UMA
METODOLOGIA INCREMENTAL

RANIERE SILVA NEVES

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Lucival Malcher, Dr. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. José Manuel de Almeida César de Sá, PhD. (DEM-FEUP)
(Examinador Externo)

Prof. Luís Augusto Conte Mendes Veloso, Dr. (ENM-UnB)
(Examinador Externo ao Programa)

Prof. José Alexander Araújo, PhD. (ENM-UnB)
(Examinador Interno ao Programa)

Prof. Thiago de Carvalho Rodrigues Doca, PhD. (ENM-UnB)
(Examinador Suplente)

Brasília - DF, 12 de Junho de 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

NEVES, RANIERE SILVA

UMA EXTENSÃO DO MODELO DE GURSON PARA ANÁLISE DE FADIGA SEGUINDO UMA METODOLOGIA INCREMENTAL [Distrito Federal] 2020.

121p., 210x297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2020)

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

1. Modelo de Gurson

2. Fadiga Multiaxial

3. Dano dúctil

4. Multiescala

I. ENM/FT/UnB

II. ENM.DT-00/2020

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Neves, R. S., (2020), Uma extensão do modelo de Gurson para análise de fadiga seguindo uma metodologia incremental. Tese de doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM-DM 00/2020, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 121p.

CESSÃO DE DIREITO

AUTOR: Raniere Silva Neves.

TÍTULO: Uma extensão do modelo de Gurson para análise de fadiga seguindo uma metodologia incremental.

GRAU: Doutor

ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Raniere Silva Neves
Correio Eletrônico: raniere_neves@hotmail.com

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder saúde e por me cercar de pessoas incríveis, família e amigos, com quem tenho a oportunidade de aprender e crescer a cada dia.

Em segundo lugar, agradeço a minha família, em especial meus pais, Edmar e Vania, por sempre me apoiarem e se doarem tanto para ajudar seus filhos a conquistarem seus sonhos, sendo exemplos não apenas de pais, mas de pessoas.

Gostaria também de agradecer ao meu orientador, Lucival Malcher, que acompanha minha jornada acadêmica desde a graduação. Durante todos esses anos, ele foi mais que só um orientador, se tornando um amigo e referência. Sem dúvidas, parte do que alcancei hoje eu devo a ele.

Agradeço também aos amigos que fiz durante o doutorado e levarei para a vida, Guilherme, Canut, Vinicius, Pedro, Cainã, Eduardo, Leonel, Caixeta e Lucas. Sempre tornando o ambiente acadêmico mais descontraído e dividindo seus conhecimentos comigo.

Não poderia esquecer de agradecer a minha namorada, Fernanda, por ter paciência e entender meus sacrifícios e aos meus amigos Victor e Lucas por sempre me motivarem a buscar o meu melhor.

Por fim, agradeço às instituições Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF), Departamento de Pós-Graduação da Universidade de Brasília (DPG-UnB), Petrogal Brasil S.A. e Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), pelos recursos financeiros que possibilitaram a realização desse trabalho e minha participação em congressos.

Raniere Silva Neves

RESUMO

Esta tese propõe uma extensão do modelo de Gurson (1977) para descrição do processo gradual de degradação sofrido por materiais dúcteis submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos, permitindo sua aplicação em previsões de vida à fadiga, sob regime de baixo e alto número de ciclos, por meio de uma metodologia incremental. Para tal, é adotada a lei de endurecimento cinemático proposta por Armstrong-Frederick (1966) e modificado o mecanismo de crescimento de defeitos, proposto originalmente por Gurson (1977), de modo a assumir taxas de evolução diferentes para as etapas de tração e compressão, proporcionando, em condições de carregamentos axiais alternados, o acúmulo de dano ao final de cada ciclo. Além disso, a incapacidade do modelo de Gurson em prever o crescimento do dano em condições de baixa triaxialidade é sanada por meio da utilização do mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008). A extensão proposta demonstra sua eficiência ao prever níveis de degradação em concordância com os apresentados por um modelo de célula unitária em elementos finitos, semelhante ao adotado por Steglich et al. (2005), possibilitando sua aplicação em uma abordagem incremental para previsões de vida em condições de fadiga de baixo número de ciclos. A abordagem é validada com base em dados experimentais, retirados da literatura, provenientes de ensaios de fadiga controlados por deformação, realizados em corpos de prova tubulares de parede fina fabricados com os aços S460N e SAE 1045. Posteriormente, a ampliação da abordagem para previsões de vida em regime de alto número de ciclos, condição em que ocorre deformação plástica apenas na escala da microestrutura do material, é feita pela adoção da estratégia de análise do comportamento do material em duas escalas, introduzida por Lemaitre et al. (1999). Por sua vez, a validação da abordagem em duas escalas é realizada com base em resultados experimentais obtidos a partir de uma série de ensaios de fadiga realizados por controle de força em corpos de prova ampulheta, fabricados com o aço *offshore* de Grau R4. Por fim, é realizado um estudo de caso em que a abordagem proposta é aplicada na previsão de vida de trechos de amarras submetidos aos mecanismos de tração e flexão fora do plano (OPB), tais mecanismos são apontados como principais responsáveis por falhas prematuras de linhas de ancoragem utilizadas em unidades flutuantes para extração de petróleo em alto mar. Os dados experimentais utilizados no estudo são obtidos por meio de ensaios de fadiga realizados em trechos de amarras compostos por nove elos comuns e com malhete, fabricados sob encomenda com o aço Grau R4. A abordagem proposta demonstra sua capacidade preditiva ao estimar vidas em concordância com os valores observados experimentalmente, apresentando um grau de precisão próximo ao obtido pelo critério de fadiga SWT (1970).

Palavras-chaves: Modelo de Gurson; Fadiga multiaxial; Dano; Multiescala.

ABSTRACT

This contribution proposes an extension of the Gurson model (1977) to describe the gradual degradation process suffered by ductile materials submitted to cyclic multiaxial loads, allowing its application in fatigue life predictions, under a low and high number of cycles, through the incremental methodology. To reach this, the kinematic hardening law proposed by Armstrong-Frederick (1966) is adopted, and the defect growth mechanism, originally proposed by Gurson (1977), is modified to assume different evolution rates for the tension and compression stages providing, cycle under conditions of alternate axial loads, the accumulation of damage at the end of each cycle. In addition, the inability of the Gurson model to predict damage growth in conditions of low triaxiality is remedied through the use of the shear mechanism proposed by Nahshon and Hutchinson (2008). The proposed extension demonstrates its efficiency in predicting levels of degradation in accordance with those presented by a unit cell model in finite elements, similar to that adopted by Steglich et al. (2005), enabling its application in an incremental approach to life predictions in conditions of low cycle fatigue. The approach is validated based on experimental data, taken from the literature, from fatigue tests controlled by strain, carried out on thin-walled tubular specimens manufactured with S460N and SAE 1045 steels. Subsequently, the expansion of the approach to life predictions under high cycle fatigue, a condition in which plastic strain occurs only on the scale of the material's microstructure, is done by adopting the strategy of analyzing the behavior of the material on two scales, introduced by Lemaitre et al. (1999). In turn, the validation of the approach on two scales is performed based on experimental results obtained from a series of fatigue tests performed by load control in hourglass specimens, manufactured with Grade R4 offshore steel. Finally, a case study is carried out in which the proposed approach is applied in life predictions of stretches of mooring chains subjected to tension and out of plane bending (OPB) mechanisms, they are pointed out as the main responsible for premature failures of mooring lines used in floating units for offshore oil extraction. The experimental data used in the study are obtained through fatigue tests on stretches of mooring chains composed for nine stud links, manufactured to order with Grade R4 steel. The proposed approach demonstrates its predictive capacity when estimating lives in agreement with the values observed experimentally, presenting a degree of precision close to that obtained by the fatigue criterion SWT (1970).

Key-Words: Gurson model; Multiaxial fatigue; Damage; Multiscale.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
1.1	Motivação	4
1.2	Objetivos.....	6
1.3	Contribuições para o estado da arte.....	7
1.4	Publicações relacionadas à tese.....	8
1.5	Estrutura do documento	8
2	Modelo de Gurson.....	9
2.1	Introdução	9
2.2	Função de escoamento.....	10
2.3	Vetor de fluxo plástico.....	11
2.4	Lei de fluxo plástico	11
2.5	Lei de evolução da variável de dano.....	11
2.6	Extensões do modelo de Gurson	13
2.6.1	Endurecimento isotrópico.....	14
2.6.2	Endurecimento cinemático	14
2.6.3	Nucleação de vazios.....	15
2.6.4	Crescimento de vazios.....	16
2.6.5	Coalescência de vazios.....	16
2.6.6	Mecanismos de cisalhamento	18
3	Extensão do modelo de Gurson para condições cíclicas	24
3.1	Introdução	24
3.2	Modelo constitutivo.....	31
3.2.1	Modelo matemático	33
3.3	Estratégia numérica	37
3.3.1	Algoritmo de retorno.....	37
3.4	Avaliação da extensão proposta	44
3.4.1	Modelo de célula unitária	44
3.4.2	Propriedades materiais	46
3.5	Resultados e discussão.....	47
3.6	Conclusões	49
4	Previsões de vida por meio de uma abordagem incremental	51
4.1	Introdução	51

4.2	Validação da abordagem proposta.....	54
4.2.1	Materiais.....	55
4.2.2	Trajetórias de carregamento	56
4.3	Parâmetros do modelo	57
4.3.1	Volume inicial de defeitos.....	57
4.3.2	Dano crítico	58
4.3.3	Parâmetro de recuperação K_1	59
4.3.4	Parâmetro de Nahshon e Hutchinson K_2	60
4.4	Resultados e discussão.....	61
4.5	Conclusões	64
5	Abordagem em duas escalas	65
5.1	Introdução	65
5.2	Modelo matemático em duas escalas.....	69
5.3	Algoritmo de retorno em duas escalas	72
5.4	Validação da abordagem em duas escalas	73
5.4.1	Material	74
5.4.2	Ensaio de fadiga	76
5.4.3	Previsões de vidas	78
5.5	Resultados e discussão.....	83
5.6	Conclusões	84
6	Estudo de caso	86
6.1	Introdução	86
6.2	Ensaio de fadiga em amarras	91
6.3	Dados experimentais.....	97
6.3.1	Material	97
6.3.2	Programa de ensaios.....	97
6.4	Resultados e discussão.....	98
6.5	Conclusões	101
7	Conclusões.....	102
8	Sugestões para trabalhos futuros.....	104
	Referências bibliográficas	105
	Anexo I.....	114
	Anexo II	117
	Anexo III	118

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Local da falha das linhas no caso da boia Girassol (adaptado de Vargas e Jean, 2005).....	5
Figura 2.1 – Mecanismos de nucleação: (a) descolamento da interface entre partículas de segunda fase e uma matriz de alumínio puro; (b) fratura das partículas de segunda fase em uma matriz de liga de alumínio 2124 (fonte: Babout et al., 2004a).....	15
Figura 2.2 – Coalescência vazios: (a) em uma matriz de alumínio puro; (b) em uma matriz de liga de alumínio 2124 (fonte: Babout et al., 2004b).....	17
Figura 2.3 – Ilustração do mecanismo de cisalhamento de vazio (adaptado de Xue, 2008).	19
Figura 2.4 – Evolução das funções de ativação propostas por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008) em função do terceiro invariante normalizado.....	23
Figura 3.1 – Crescimento do defeito devido ao acúmulo de deformação plástica: (a) célula unitária no início da simulação; (b) distorção do vazio após alguns ciclos; (c) forma do vazio no momento da falha (adaptado de Lukhi et al., 2018a).....	25
Figura 3.2 – Comportamento da variável de dano do modelo de Gurson durante carregamento axial cíclico.	26
Figura 3.3 – Evolução do dano apresentado por uma célula unitária e pelo modelo de LPD em função da deformação equivalente, considerando o aço 20MnNiMo55 e razão de triaxialidade de 1/3 (adaptado de Steglich et al., 2005).	28
Figura 3.4 – Evolução do volume do defeito em função do número de ciclos (adaptado de Nielsen et al., 2018).	30
Figura 3.5 – Mudança da forma do defeito ao longo do histórico de deformação. As etiquetas das figuras correspondem às posições marcadas na Figura 3.4 (adaptado de Nielsen et al., 2018).	30
Figura 3.6 – Evolução da variável de dano descrita pela extensão proposta (linha contínua) e pelo o modelo de Gurson (linha tracejada) durante um ciclo de carregamento axial.	32
Figura 3.7 – Evolução da variável de dano descrita pela extensão proposta (linha contínua) e pelo o modelo de Gurson (linha tracejada) durante um ciclo de carregamento cisalhante.	33
Figura 3.8 – Representação da microestrutura de um material dúctil usando um modelo célula unitária (adaptado de Rabold e Kuna, 2005).....	44
Figura 3.9 – Modelo axissimétrico em elementos finitos da célula unitária cilíndrica com vazio esférico.	45
Figura 3.10 – Laços de histerese estabilizados apresentados pelo modelo de célula unitária, utilizando os parâmetros da Tabela 3.1, e pela extensão proposta, utilizando os parâmetros da Tabela 3.2.	48

Figura 3.11 – Evolução da variável de dano em função do número de ciclos em condição de carregamento axial cíclico.	48
Figura 3.12 – Evolução da variável de dano em função do número de ciclos em condição de carregamento cisalhante cíclico.	49
Figura 4.1 – Fluxograma explicativo da abordagem incremental de previsão de vida em fadiga.	52
Figura 4.2 – Corpo tubular de parede fina padrão.	55
Figura 4.3 - Curvas tensão-deformação cíclicas obtidas para os aços: (a) S460N; (b) SAE 1045.	56
Figura 4.4 – Trajetórias de carregamento utilizadas nas simulações.	56
Figura 4.5 – Comparação entre os valores de K_1 calibrados pelo método da bissecção e os obtidos pela Equação (4.6).	59
Figura 4.6 - Comparação entre os valores de K_2 calibrados pelo método da bissecção e os obtidos pela Equação (4.8).	60
Figura 4.7 – Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço S460N.	63
Figura 4.8 – Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço SAE 1045.	63
Figura 5.1 – Inclusão menos resistente embutida em um EVR elástico.	66
Figura 5.2 – Trajetórias de carregamento adotadas nos ensaios de fadiga.	74
Figura 5.3 – Geometria do corpo de prova utilizado nos ensaios de tração com cotas em mm.	75
Figura 5.4 - Curvas tensão-deformação cíclicas obtidas para o aço Grau R4.	76
Figura 5.5 - Geometria do corpo de prova utilizado nos ensaios de fadiga com cotas em mm.	77
Figura 5.6 - Curvas S-N obtidas para o aço Grau R4.	78
Figura 5.7 - Fluxograma explicativo da abordagem incremental de previsão de vida em fadiga considerando uma abordagem em duas escalas.	79
Figura 5.8 - Valores de K_1 e K_2 calibrados pelo método da bissecção.	82
Figura 5.9 - Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço Grau R4.	83
Figura 6.1 – Mecanismo de OPB ocorrido dentro do escovém da boia CALM (adaptado de Vargas e Jean, 2005).	87
Figura 6.2 - Fairleads da FPSO Greater Plutonio.	87
Figura 6.3 - Prováveis pontos de inicialização de trincas por fadiga devido ao mecanismo de OPB (adaptado de Choung e Lee, 2018)	88
Figura 6.4 - Esquema do dispositivo utilizado por Melis et al. (2005) para ensaio de amarras (adaptado de Melis et al., 2005).	91
Figura 6.5 - Esquema do dispositivo utilizado por Rampi e Vargas (2006) para ensaio de amarras (adaptado de Rampi e Vargas, 2006).	92
Figura 6.6 – Dispositivo utilizado por Rampi et al. (2015) para ensaio de amarras (a) e detalhe do aparato preso ao elo central (b) (fonte: Rampi et al., 2015).	93

Figura 6.7- Dispositivo projetado por Mamiya et al. (2019) para ensaio de amarras em escala reduzida (a) e vista superior do mesmo (b).....	93
Figura 6.8 – Principais componentes do dispositivo projetado por Mamiya et al. (2019) (adaptado de Mamiya et al., 2019).	94
Figura 6.9 - Flange esquerdo: vista frontal (a) e vista traseira (b).	94
Figura 6.10 - Aparato central: vista frontal (a); vista lateral (b); fotografia (c).....	95
Figura 6.11 - Diagrama de corpo livre de meio trecho de amarra (adaptado de Mamiya et al., 2019)..	95
Figura 6.12 - Trecho de amarra (a) e geometria dos elos (b).....	97
Figura 6.13 - Elos fraturados devido a tensões geradas pela combinação dos mecanismos de tração e OPB.....	98
Figura 6.14 - Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas por meio da abordagem proposta e do critério SWT.....	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas do aço 20MnNiMo55 para endurecimento combinado.	47
Tabela 3.2 – Propriedades mecânicas do aço 20MnNiMo55 para endurecimento cinemático puro.	47
Tabela 4.1 – Medidas em milímetros.	55
Tabela 4.2 – Propriedades materiais dos aços S460N e SAE 1045.	55
Tabela 4.3 – Parâmetros de endurecimento cinemático obtidos para os aços S460N e SAE 1045.	56
Tabela 4.4 – Composição química dos aços S460N e SAE 1045 (%).	58
Tabela 4.5 – Parâmetros do modelo para os aços S460N e SAE 1045.	61
Tabela 4.6 - Amplitudes de deformação aplicadas e respostas experimentais e numéricas para o aço S460N.....	61
Tabela 4.7 - Amplitudes de deformação aplicadas e respostas experimentais e numéricas para o aço SAE 1045.....	62
Tabela 5.1 – Composição química do aço Grau R4 (%).	74
Tabela 5.2 – Propriedades monotônicas do aço Grau R4.....	75
Tabela 5.3 – Propriedades cíclicas do aço Grau R4.....	76
Tabela 5.4 – Ensaio de fadiga realizados por controle de força.	77
Tabela 5.5 – Parâmetros do modelo calibrados para o aço Grau R4.	82
Tabela 6.1 - Programa de ensaios de fadiga em trechos de amarra em escala reduzida.	98
Tabela 6.2 - Parâmetros de fadiga para o aço Grau R4.....	99
Tabela 6.3 – Tensões estimadas e previsões de vida.....	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1- Extensão do modelo de Gurson para condições cíclicas.....	36
Quadro 3.2 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.....	41
Quadro 3.3 - Algoritmo de Newton-Raphson para solução do sistema de equações.....	43
Quadro 5.1 - Extensão do modelo de Gurson para condições cíclicas em duas escalas.	71
Quadro 5.2 – Algoritmo de atualização do estado de tensão e variáveis internas adaptado para duas escalas.	72

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

A_N	Parâmetro da nucleação de vazios
AL	Alongamento percentual
a_e	Raio externo da esfera oca
a_i	Raio interno da esfera oca
B_N	Parâmetro da nucleação de vazios
b	Coefficiente de endurecimento cinemático
b'	Expoente de resistência à fadiga
C_α	Fator de correção geométrica
c	Expoente de endurecimento isotrópico
c_1	Parâmetro de Mear e Hutchinson (1985)
c_2	Parâmetro de LPD (1995)
\mathbb{D}	Tensor elástico isotrópico
D	Dano dúctil
D_c	Dano crítico
D_{shear}	Dano por cisalhamento
\dot{D}_{shear}	Lei de evolução do dano por cisalhamento
DR	Termo de recuperação de dano
d	Diâmetro do elo
E	Módulo de elasticidade
f	Fração volumétrica de vazios (porosidade)
\dot{f}	Taxa de evolução da variável de dano
f^*	Fração volumétrica de vazios efetiva
f_0	Fração volumétrica de vazios inicial (Volume inicial de defeitos)
f_c	Fração volumétrica de vazios crítica para coalescência
f_F	Fração volumétrica de vazios no momento da fratura monotônica
f_n	Fração volumétrica de vazios a ser nucleada
f_v	Fração volumétrica de inclusões de MnS
\dot{f}_n	Lei de nucleação de vazios
F_{H0}	Pré-carga de tração no trecho de amarra
F_H	Força horizontal no trecho de amarra
F_V	Força vertical no trecho de amarra
G	Módulo de cisalhamento
$g(\bar{\theta})$	Função de ativação de Xue (2008)
$g(\xi)$	Função de ativação de Nahshon e Hutchinson (2008)
H	Altura da célula unitária cilíndrica
H^k	Módulo de endurecimento cinemático
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
J_2	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras

J_3	Terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras
K	Módulo volumétrico
K'	Coefficiente de resistência cíclica
K_1	Parâmetro de recuperação de dano
K_2	Parâmetro de Nahshon e Hutchinson
K_1^*	Parâmetro K_1 calibrado para a amplitude de deformação normal ε_a^*
K_2^*	Parâmetro K_2 calibrado para a amplitude de deformação cisalhante γ_a^*
k	Parâmetro de Nahshon e Hutchinson (2008)
L	Distância entre o ponto de contato do elo central com seu elo adjacente e ponto de contato do último elo com o pino de fixação
M_{OPB}	Momento gerado pelo mecanismo de OPB
$Mn(\%)$	Percentuais de Manganês
\mathbf{N}	Vetor de fluxo
N_d	Parcela desviador do vetor de fluxo
N_v	Parcela hidrostática do vetor de fluxo
N_c	Número de ciclos
N_f	Número de ciclos para a falha
n	expoente de encruamento monotônico
n'	Expoente de encruamento cíclico
p	Tensão hidrostática
q	Tensão equivalente de von Mises
q_1 e q_2	Parâmetros de ajuste do modelo GT
q_3	Parâmetro de Xue
q_4	Expoente de Xue
R_{ext}	Raio da célula unitária cilíndrica
R_{int}	Raio do vazio esférico
RA	Redução na área
\mathbf{S}	Tensor das tensões desviadoras
S_n	Desvio padrão da distribuição normal
$S(\%)$	Percentuais de Enxofre e Manganês
t	Pseudo-tempo
V	Deslocamento vertical do elo central

SÍMBOLOS GREGOS

α	Parâmetro de Eshelby (1957)
$\boldsymbol{\beta}$	Tensor de endurecimento cinemático
$\dot{\boldsymbol{\beta}}$	Taxa de evolução do tensor de endurecimento cinemático
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
γ_a	Amplitude de deformação cisalhante
γ_a^*	Amplitude cisalhante usada na calibração do parâmetro K_2^*
$\Delta\varepsilon$	Incremento de deformação
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações

$\dot{\epsilon}$	Taxa de evolução da deformação
$\bar{\epsilon}$	Deformação equivalente
$\dot{\bar{\epsilon}}$	Taxa de evolução da deformação equivalente
$\dot{\epsilon}^p$	Lei de fluxo plástico
ϵ_n	Valor médio da deformação plástica na nucleação máxima
ϵ_y	Deformação de escoamento
ϵ_r^v	Deformação verdadeira no momento da ruptura
η	Razão de triaxialidade
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor relativo
ϵ_a	Amplitude de deformação normal
ϵ_a^*	Amplitude de deformação normal usada na calibração do parâmetro K_1^*
$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado
λ_σ	Razão de carregamento
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadoras
ρ	Densidade aparente do EVR
$\dot{\rho}$	Taxa de evolução da densidade aparente do EVR
ρ_m	Densidade do material
$\dot{\rho}_m$	Taxa de evolução da densidade do material
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões de Cauchy
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Estado de tensão fornecido pelo modelo
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Estado de tensão prescrito
σ_1 e σ_2	Variáveis internas associadas ao encruamento local dentro de uma matriz heterogeneamente deformada
σ_a	Amplitude de tensão normal
σ_f	Limite de resistência à fadiga
σ_F	Raio para a superfície de escoamento segundo Mear e Hutchinson (1985)
σ_m	Tensão média
σ_r	Tensão de ruptura de engenharia
σ_u	Tensão última de engenharia
σ_y	Tensão de escoamento inicial
σ_∞	Raio de saturação da superfície de escoamento
σ_{eq}	Tensão equivalente
σ_{axial}	Tensão axial no ponto crítico do elo
σ_{OPB}	Tensão de OPB no ponto crítico do elo
σ_{SWT}	Parâmetro SWT
σ_{total}	Tensão no ponto crítico do elo
σ_f'	Coefficiente de resistência à fadiga
σ_y^*	Tensão de escoamento cíclico
σ_y^{iso}	Lei de endurecimento isotrópico
σ_r^v	Tensão verdadeira no momento da ruptura
τ_a	Amplitude de tensão cisalhante
ϕ	Função de escoamento
φ	Grau de acoplamento entre duas escalas

SUBSCRITOS

<i>max</i>	Máximo
<i>min</i>	Mínimo
<i>n</i>	Pseudo-tempo n
<i>n + 1</i>	Pseudo-tempo n+1
<i>d</i>	Parcela desvidadora
<i>v</i>	Parcela hidrostática

SOBRESCRITOS

<i>j</i>	Número da iteração no método de Newton-Raphson
<i>p</i>	Plástico
<i>e</i>	Elástico
μ	Microescala
<i>num</i>	Resultado obtido numericamente
<i>exp</i>	Resultado obtido experimentalmente
<i>trial</i>	Estado de tentativa

SIGLAS

API	<i>American Petroleum Institute</i>
CALM	<i>Catenary Anchor Leg Mooring</i>
CDM	<i>Continuous Damage Model</i>
CT	<i>Compact Tension</i>
EVR	Elemento de Volume Representativo
FPSO	<i>Floating, Production, Storage and Offloading</i>
GT	Gurson-Tvergaard
GTN	Gurson-Tvergaard-Needleman
IPB	<i>In Plane Bending</i>
JIP	<i>Joint Industry Project</i>
LPD	Leblond-Perrin-Devaux
MBL	<i>Minimum Breaking Load</i>
MnS	Sulfeto de manganês
MTS	<i>Material Test System</i>
OPB	<i>Out of Plane Bending</i>
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>
SWT	Smith-Watson-Topper

1 INTRODUÇÃO

Unidades flutuantes para extração de petróleo em águas profundas operam conectadas a equipamentos submarinos através de dutos condutores responsáveis pelo transporte de fluídos de perfuração, óleo bruto, água e energia, entre outros. Contudo, esses dutos não possuem resistência mecânica considerável e a movimentação da unidade flutuante pode provocar o rompimento de um deles, ocasionando acidentes com graves prejuízos econômicos e ambientais. Portanto, sistemas de ancoragem são necessários para manter a posição da unidade flutuante e garantir sua estabilidade contra perturbações naturais, como ondas e vento, de modo que as operações das mesmas sejam realizadas de maneira segura.

Geralmente, esses sistemas são constituídos por um conjunto de linhas de ancoragem, por sua vez, formadas por longos trechos de cabo de aço ou material polimérico, ligados por meio de conectores a dois trechos de amarras (correntes) e uma âncora. Segundo Cardoso (2014), a elevada vida útil e grande resistência à abrasão, tornam as amarras ideais para esse tipo de aplicação, contudo, devido a uma questão de peso, em águas muito profundas é indicada a utilização de cabos no trecho intermediário da linha, limitando o uso das amarras apenas aos trechos em contato com o solo marinho e próximo à unidade flutuante.

As linhas de ancoragem são projetadas para durarem mais de vinte anos sem que seja necessária qualquer inspeção detalhada de fadiga ou substituição de componentes. Contudo, no início dos anos 2000, o registro de vários incidentes envolvendo falhas prematuras de linhas de ancoragem deixou a indústria *offshore* em alerta. Mesmo sendo projetadas de acordo com as recomendações da API (*American Petroleum Institute*) para análise de resistência à fadiga, algumas linhas falharam em um período de tempo muito pequeno. Ao analisar alguns casos, Vargas e Jean (2005) apontaram que o esforço de tração sobre a linha, aliado ao movimento da unidade flutuante, induzido pelas ondas e vento, provocou a falha por fadiga dos elos mais próximos à unidade flutuante devido à flexão dos mesmos fora dos seus planos principais (plano que contém a forma oval do elo).

Nessas condições, a força de atrito entre os elos é tão alta que acaba impedindo que eles rolem um sobre o outro durante a movimentação da unidade flutuante. Isso faz com que a resistência à flexão da amarra cresça consideravelmente, resultando no surgimento de esforços de flexão de natureza cíclica, que promovem, em um curto espaço de tempo, a inicialização e propagação de trincas por fadiga nos elos. De acordo com Jean et al. (2005), as tensões geradas nos elos pelo mecanismo de flexão fora do plano (*Out of Plane Bending* - OPB) são consideravelmente mais nocivas à vida em fadiga da amarra que as tensões provocadas pelos mecanismos de flexão no plano (*In Plane Bending* - IPB) e de tração, sendo grandes o suficiente para proporcionarem as falhas prematuras das linhas. Portanto, Rampi et al.

(2015) afirmam que a utilização de um critério de fadiga multiaxial é indispensável na análise da fadiga em linhas de ancoragem.

O primeiro estudo sistemático sobre fadiga multiaxial foi conduzido por Gough e Pollard (1935) e serviu de base para os critérios propostos posteriormente por Gough (1950), Sines (1959) e Findley (1959). A partir desses trabalhos, muitos outros estudos experimentais e teóricos sobre o tema foram realizados, explorando diferentes fundamentos da fadiga multiaxial e permitindo o desenvolvimento de critérios de cada vez mais precisos e confiáveis. A abordagem mais usada atualmente na análise da fadiga multiaxial se baseia em quatro componentes essenciais: um modelo constitutivo para o cálculo dos estados de tensão e deformação variantes no tempo que atuam sobre o material, um método de contagem de ciclos para identificação dos ciclos de carregamento, um parâmetro de dano em fadiga para medição do dano causado por cada ciclo identificado e uma lei de acúmulo de dano para contabilização do dano após todos os ciclos (Fatemi & Shamsaei, 2011).

Contudo, Lemaitre e Desmorat (2005) acreditam que esse tipo de abordagem apresenta limitações, principalmente quando aplicada em condições de carregamentos complexos, devido à inabilidade dos parâmetros de dano em considerar efeitos relacionados ao histórico de carregamento não contemplados pelos dados experimentais usados como base para elaboração dos mesmos. Socie e Marquis (2000) defendem que os diferentes modos de falha considerados por cada autor na elaboração dos parâmetros de dano fazem com que nenhum deles sejam capazes de correlacionar todos os dados experimentais para todas os materiais e regimes possíveis, restringindo suas aplicações. Outro problema dessa abordagem está relacionado à necessidade de utilização de métodos de contagem de ciclos e leis de acúmulo de dano, pois a identificação de ciclos, muitas vezes, não é uma tarefa simples em condições de carregamento com amplitude variada. Além disso, a utilização de leis de acúmulo de dano lineares, como a de Palmgren-Miner (1945), nem sempre representarem o real comportamento do dano por fadiga.

Devido a essas limitações e graças aos avanços na área da mecânica computacional, a utilização da mecânica do dano, associada a uma lei de endurecimento cinemático, na análise da fadiga em estruturas e componentes mecânicos tem ganhado força nos últimos anos. Desmorat et al. (2007) defendem que, ao descrever o processo de degradação sofrido por um material como sendo parte integral do seu comportamento constitutivo, a utilização de uma lei de evolução de dano garante uma tratativa mais flexível e natural do problema, eliminando a necessidade por métodos arbitrários para contagem de ciclos e acúmulo de dano.

Os modelos constitutivos com variável de dano acoplada podem ser divididos entre modelos baseados na micromecânica dos defeitos ou na mecânica do dano contínuo (CDM), de acordo com a metodologia adotada para definição da sua variável de dano. Os modelos baseados na micromecânica dos defeitos fundamentam-se nos mecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de defeitos para medir o nível de degradação de um material. Entre eles se destaca o modelo de Gurson (1977) e suas extensões fenomenológicas propostas por Chu e Needleman (1980), Tvergaard (1981,1982) e Tvergaard e Needleman (1984), que resultaram no modelo GTN. Por sua vez, nos modelos baseados na mecânica

do dano contínuo (CDM), a variável de dano é proposta com base em fundamentos da termodinâmica e simula a perda de capacidade de carga do material através da redução da sua rigidez, como é o caso dos modelos propostos por Krajcinovic (1983), Lemaitre (1985), Lemaitre e Chaboche (1985) e Rousselier (1987).

Na literatura existem inúmeros registros da aplicação de modelos baseados na mecânica do dano contínuo em previsões de vidas em fadiga, tanto em regime de baixo ciclo (Wang & Lou, 1990; Chow & Wei, 1991; Bonora & Nemaz, 1998; Lopes & Malcher, 2017; Castro & Bemfica, 2018), quanto de alto ciclo (Lemaitre et al., 1999; Lemaitre & Desmorat, 2005). Contudo, a aplicação de modelos baseados na micromecânica dos defeitos nesse tipo de análise ainda é pouco explorada. Os primeiros estudos sobre o comportamento de defeitos sob condições de carregamentos cíclicos foram realizados por Gilles et al. (1992). Por meio de simulações numéricas de um modelo de célula unitária cilíndrica com um vazio esférico central submetida a carregamentos cíclicos e com razões de triaxialidade constantes, eles mostraram que, devido à deformação plástica acumulada junto à parede do vazio, ele mudava de forma durante os ciclos de carregamento, provocando um aumento da fração volumétrica de vazio da célula unitária. Gilles et al. (1992) definiram como *ratcheting* de porosidade esse fenômeno de aumento gradual do volume do defeito em condições cíclicas.

Para confirmar a existência do fenômeno de maneira definitiva, Deuvax et al. (1997) refizeram as simulações de Gilles et al. (1992) utilizando um melhor controle da triaxialidade. Eles também evidenciaram que o modelo tradicional de Gurson (1977) é incapaz de reproduzir tal fenômeno e sugeriram a utilização do modelo Leblond-Perrin-Devaux (LPD), proposto por Leblond et al. (1995), como uma alternativa para descrever a evolução de defeitos em materiais dúcteis sob condições cíclicas através de uma lei de evolução de dano. Contudo, o modelo LPD apresentou problemas quando aplicado em situação que envolviam um grande número de ciclos.

Muitos outros estudos baseados em simulações micromecânicas de células unitárias seguindo a linha de pesquisa de Gilles et al. (1992) e Deuvax et al. (1997) foram realizados (Kuna & Ross, 1998; Brocks & Steglich, 2003; Rabold & Kuna, 2005; Steglich et al., 2005; Mbiakop et al., 2015; Nielsen et al., 2018). Apesar de não proporem novos modelos ou melhorias para o modelo de LPD (1995), esses estudos foram de grande importância ao proporcionarem uma compreensão mais clara acerca do comportamento de defeitos em condições cíclicas. Posteriormente, muitos deles serviram como base para trabalhos como o proposto por Lacroix et al. (2016), que buscaram aperfeiçoar o modelo LPD, com o propósito de melhorar quantitativamente a descrição do fenômeno de *ratcheting* de porosidade por meio da evolução da sua variável de dano.

Apesar de se tratar de mecanismos distintos, Pironi et al. (2006), Kanvinde e Deierlein (2007), Meschke e Hommel (2010), Lukhi et al. (2018a,b) e Sandoval et al. (2019) viram no fenômeno de crescimento gradual de defeitos uma poderosa ferramenta para previsões de vida de estruturas metálicas submetidas à fadiga de baixo número de ciclos. Os resultados iniciais obtidos por eles foram satisfatórios, mostrando que essa é uma abordagem promissora, porém que ainda necessita de algumas melhorias. A forte dependência entre o crescimento dos defeitos e a evolução da deformação plástica

impede a utilização dessa abordagem em situações onde as tensões responsáveis pela falha do material permanecem abaixo da tensão de escoamento do mesmo, como é o caso da fadiga de alto números de ciclos, pois sem a presença de níveis de deformação plástica consideráveis não ocorre evolução da variável de dano.

Para previsões de vida nessas condições, métodos baseados na abordagem tensão-vida são amplamente utilizados na engenharia. Esses métodos, a partir de observações experimentais, estabelecem relações matemáticas entre o nível de tensão atuante sobre um componente mecânico e o número de ciclos de carregamento necessários para sua falha, por exemplo a relação de Basquin (1910). Contudo, apesar da simplicidade e capacidade em gerar resultados confiáveis, Bhattacharyya et al. (2019) apontam que essas fórmulas empíricas não consideram em detalhes o mecanismo de falha atuante sobre o material, além de exigirem a realização de um grande número de ensaios experimentais para determinação dos parâmetros de fadiga do material, o que corresponde a custos financeiros e tempo.

Portanto, uma solução para aplicação da mecânica do dano na análise em fadiga em regime de alto ciclo seria a utilização do modelo de dano associado a uma abordagem de múltiplas escalas, onde a descrição do comportamento constitutivo do material passaria a ser feita considerando mais de uma escalas, permitindo que as previsões de vida fossem realizadas com base na evolução da variável de dano observada nas escalas mais próximas à microestrutura do material.

1.1 MOTIVAÇÃO

As unidades flutuantes para extração de petróleo são projetadas para permanecerem em uma posição fixa por períodos de quinze a vinte anos. Dependendo da sua localização, suas linhas de ancoragem precisam suportar altas cargas geradas por condições ambientais severas. Para que não ocorram falhas inesperadas das linhas é indispensável que elas sejam projetadas seguindo diretrizes confiáveis. Segundo Berthelsen (2017), a falha de uma linha de ancoragem, além de gerar custos adicionais com reparação ou substituição, pode provocar a paralisação da produção, instabilidade da unidade flutuante e, em casos extremos, até mesmo fazer com que a unidade flutuante fique à deriva em alto mar, resultando na ruptura do *riser* e derramamento de óleo.

Tradicionalmente, as linhas de ancoragem eram projetadas considerando apenas os esforços de tração que atuam sobre elas, porém isso é válido apenas para linhas de ancoragem montadas em profundidades menores. À medida que as operações *offshore* avançaram mar a dentro, aumentando a profundidade dos poços de extração, surgiu a necessidade de se utilizar linhas maiores, conseqüentemente, os esforços de tração sobre elas aumentaram e novos mecanismos de falha surgiram. Varga e Jean (2005) observaram que a carga de tração elevada, aliada à força de atrito entre as superfícies de contato dos elos, provoca o travamento inesperado dos elos, impedindo o movimento relativo entre

eles. Com o movimento ondulatório da unidade flutuante, cada elo é então sujeito a tensões de flexão no plano (IPB) e fora do plano (OPB), além das tensões associadas à tração dinâmica sobre as linhas.

A primeira falha causada pelo mecanismo de OPB foi registrada no ano de 2002 em uma boia Girassol localizada na costa da Angola. Três das nove linhas de ancoragem da boia se romperam após cerca de 235 dias de operação. Período de tempo muito pequeno, uma vez que as linhas foram projetadas para uma vida útil de vinte anos com fator de segurança de três (Vargas & Jean, 2005). As falhas ocorreram no quinto elo de cada linha, o primeiro elo livre para se movimentar após a curva do escovém, conforme apresentado na Figura 1.1.

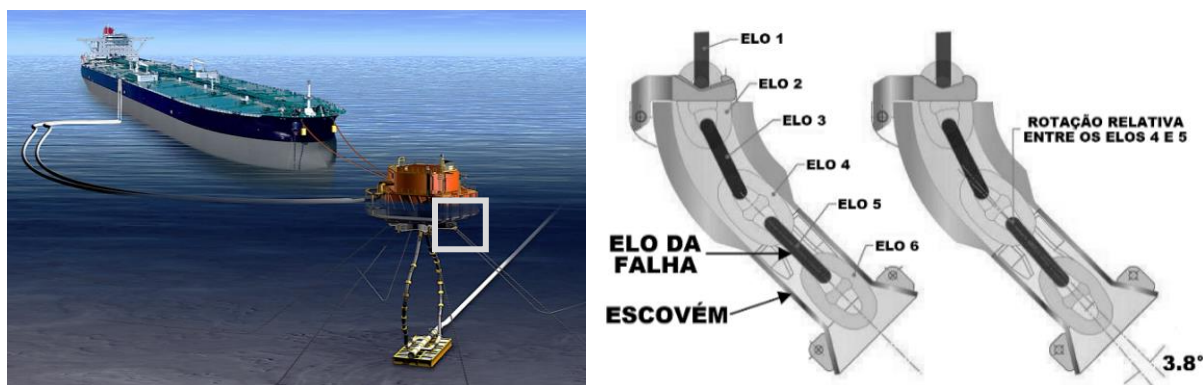


Figura 1.1 – Local da falha das linhas no caso da boia Girassol (adaptado de Vargas e Jean, 2005).

Com o objetivo de melhor compreender o mecanismo de OPB e propor diretrizes mais atualizadas para o projeto de linhas de ancoragem, em 2007 foi criado um Projeto Industrial Conjunto (JIP) reunindo vinte e oito diferentes empresas. Durante mais de seis anos, inúmeros estudos foram realizados, incluindo testes em amarras em escala real, simulações numéricas e testes em amostras menores de material para avaliar a influência do ambiente sobre a inicialização e propagação de trincas (Rampi et al., 2015). Os resultados obtidos pelo JIP serviram de base para a empresa Bureau Veritas elaborar as notas de orientações NI 604 DT R00 E no ano de 2014. Atualmente elas são as únicas diretrizes que fornecem recomendações para análises de fadiga considerando a combinação de tensões de tração, OPB e IPB no *top chain* (vinte primeiros elos da linha de ancoragem) de unidades flutuantes de ancoragem permanente para atividades *offshore*.

A Bureau Veritas (2014) propõe que a análise da fadiga nos elos seja realizada com base em uma faixa de tensão equivalente, teoricamente, atuante sobre pontos do elo tidos como prováveis locais para a inicialização de trincas por fadiga. Essa faixa de tensão é calculada pela superposição linear das componentes nominais de tensão, geradas pelos mecanismos de tração, OPB e IPB, multiplicadas aos seus respectivos fatores concentradores de tensão, calculados por meio do critério de Dang Van (1989) considerando questões como a geometria dos elos, fatores ambientais, carga de tração na linha e ângulos entre elos. Rampi et al. (2015) explicam que o uso dos fatores concentradores de tensão multiaxiais possibilita o cálculo de um valor de tensão equivalente uniaxial que implicitamente representa o estado de tensão multiaxial atuante sobre o elo, permitindo que seja estabelecida uma relação com a tradicional curva de fadiga S-N.

Contudo, Choung e Han (2016) acreditam que as notas de orientações propostas pela Bureau Veritas (2014) apresentam algumas falhas, que fazem com que a tensão equivalente no ponto crítico do elo seja superestimada com o aumento da carga de tração sobre a linha. Uma delas é o uso de fatores concentradores de tensão constantes, quando na verdade eles deveriam variar juntamente com a carga de tração e o ângulo entre elo. Outra falha é a realização da superposição linear das componentes de tensão, pois os momentos nominais de OPB e IPB não crescem de maneira lineares. O uso do critério de Dang Van para o cálculo dos fatores concentradores de tensão também é questionado por Calf (2015), já que segundo Socie e Marquis (2000) esse critério não mostra boa concordância para carregamentos não proporcionais. Portanto, uma vez que os carregamentos de OPB possuem um caráter não proporcional, a análise em fadiga poderia ser melhorada pela escolha de um critério de fadiga mais apropriado.

A utilização da mecânica do dano para análise da fadiga em linhas de ancoragem se encaixaria bem nesse cenário. A partir de um estado de tensões e deformações multiaxiais atuantes sobre o elo, o modelo seria capaz de identificar e prever a degradação em pontos críticos por meio do crescimento da sua variável interna de dano, eliminando erros provenientes da superposição das componentes de tensão e a necessidade de cálculo de fatores concentradores. Além disso, com essa abordagem seria possível a previsão da vida em fadiga das linhas de ancoragem considerando carregamentos complexo e com amplitudes variadas produzidos por fatores ambientais, assim como ocorre em condições reais de operação.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal desse trabalho é estender a aplicação do modelo de Gurson para análises de falhas em estruturas e componentes mecânicos, fabricados com materiais dúcteis, submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos, permitindo a realização de previsões de vidas em fadiga, tanto em regime de baixo quanto de alto número de ciclos, através de uma metodologia incremental, que se baseia na evolução da variável de dano do modelo para descrever o processo gradual de degradação sofrido pelo material. Para que tal objetivo seja alcançado, foram traçados alguns objetivos secundários:

1. Elaboração de uma extensão para o modelo de Gurson (1977) capaz de descrever de maneira satisfatória, por meio da evolução da sua variável de dano, a degradação sofrida por materiais dúcteis quando submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos;
2. Elaboração de uma abordagem incremental para previsões de vida em regime de fadiga de baixo número de ciclos, baseada no fenômeno de acúmulo de dano descrito pela extensão proposta, e validação da mesma a partir de dados experimentais retirados da literatura para os aços S460N e SAE 1045;

3. Extensão e validação da abordagem incremental para previsões de vida em situações de fadiga de alto ciclo, por meio da utilização da extensão proposta associada à abordagem em duas escalas, introduzida por Lemaitre et al. (1999);
4. Realização de uma série de ensaios em corpos de prova fabricados com o aço *offshore* de Grau R4 para obtenção das suas propriedades mecânicas, monotônicas e cíclicas, bem como dados experimentais de fadiga sob trajetórias de tensão axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais e não proporcionais;
5. Realização de uma série de ensaios de fadiga em trechos de amarras compostas por nove elos comuns com malhete fabricados sob encomenda com barras de aço Grau R4, retiradas do mesmo lote de material usado para a confecção dos corpos de prova utilizados nos ensaios mencionados anteriormente;
6. Realização de um estudo de caso, comparando as previsões de vida obtidas pela abordagem proposta e pelo critério de fadiga SWT para os trechos de amarras ensaiados.

1.3 CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTADO DA ARTE

Entre as principais contribuições desse trabalho, destacam-se:

1. Extensão da aplicação do modelo de dano acoplada proposto por Gurson a problemas multiaxiais cíclicos;
2. Abordagem incremental para previsões de vida, em regime de fadiga de baixo e alto número de ciclos, baseada na evolução da variável interna de dano da extensão proposta para o modelo de Gurson;
3. Caracterização do aço *offshore* de Grau R4 e dados experimentais inéditos sobre sua vida em fadiga sob trajetórias de carregamento de tensão uniaxiais (axial e torcional) e biaxiais (proporcional e não proporcional);
4. Dados experimentais inéditos sobre o comportamento em fadiga de trecho de amarras, fabricados em escala reduzida com aço Grau R4, submetidos aos mecanismos de tração e flexão fora do plano (OPB).

1.4 PUBLICAÇÕES RELACIONADAS À TESE

- Neves, R., Ferreira, G., & Malcher, L. (2020). Gurson-based incremental damage in fatigue life estimate under proportional and non-proportional loading: constant amplitude and low cycle regime applications. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 108, 102678.
- Araújo, L., Ferreira, G., Neves, R., & Malcher, L. (2020). Fatigue analysis for the aluminum alloy 7050-T7451 performed by a two scale continuum damage mechanics model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 105, 102439.
- Castro, F., Mamiya, E., Malcher, L., Canut, F., Ferreira, G., & Neves, R. (2019). Multiaxial fatigue of quenched and tempered U2 steel: Testing and fatigue life prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 42(11), 2487-2495.
- Mamiya, E., Castro, F., Ferreira, G., Nunes Filho, E., Canut, F., Neves, R., & Malcher, L. (2019). Fatigue of mooring chain links subjected to out-of-plane bending: Experiments and modeling. *Engineering Failure Analysis*, 100, 206-213.
- Neves, R., Ferreira, G., & Malcher, L. (2018). Fatigue life prediction by extended Gurson model for SAE 1045 and S460N steels. *13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*, Nova Iorque, EUA.
- Neves, R., Ferreira, G., & Malcher, L. (2017). Application of extended Gurson model in fatigue life prediction for S460N steel. *XIV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS)*, Barcelona, Espanha.

1.5 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Esse documento é composto por duas partes organizadas em oito capítulos. A primeira parte se dedica à introdução e revisão do estado da arte. Ela contém o capítulo 1, onde são apresentadas as motivações e objetivos do presente trabalho, e o capítulo 2, que apresenta uma breve revisão acerca da proposta original de Gurson, juntamente com alguma das suas principais extensões e modificações propostas nas últimas décadas. A segunda parte do documento corresponde ao desenvolvimento da pesquisa proposta e composta pelos capítulos 3, 4, 5, 6, 7 e 8. O capítulo 3 apresenta a extensão do modelo de Gurson para condições multiaxiais cíclicas. No capítulo 4, a extensão proposta é aplicada na análise de fadiga em regime de baixo ciclo por meio da utilização de uma metodologia incremental. O capítulo 5 estende a abordagem proposta para previsões de vida em condições de fadiga de alto ciclo ao associar a extensão proposta a uma abordagem em duas escalas. No capítulo 6, a abordagem proposta é aplicada na análise da fadiga em trechos de amarras. O capítulo 7 traz um resumo do trabalho realizado e algumas considerações acerca dos resultados obtidos. Para encerrar, no capítulo 8, são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros para enriquecimento do trabalho desenvolvido.

2 MODELO DE GURSON

Este capítulo traz uma breve revisão acerca do modelo constitutivo de dano acoplado proposto por Gurson (1977) para previsão da falha dúctil em materiais porosos com base em conceitos da micromecânica dos defeitos. Também são apresentadas algumas extensões propostas para o modelo que se mostraram relevantes para o desenvolvimento desse trabalho. Por meio da consideração de aspectos inicialmente negligenciados por Gurson, as extensões buscam melhorar a capacidade preditiva do modelo e permitir sua aplicação em condições distintas das quais foi idealizado. As extensões apresentadas nesse capítulo incluem a introdução do endurecimento isotrópico proposto pelo próprio Gurson (1977) e do endurecimento cinemático proposto por Mear e Hutchinson (1985), o modelo GTN, proposto em conjunto por Chu e Needleman (1980), Tvergaard (1981,1982) e Tvergaard e Needleman (1984), e os mecanismos de cisalhamento desenvolvidos por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008).

2.1 INTRODUÇÃO

Evidências experimentais apontam que a falha dúctil em metais está associada à degradação interna do material provocada pelo crescimento ou distorção de micros vazios pré-existentes ou nucleados a partir de descontinuidades microestruturais, tais como, partículas de segunda fase, inclusões e contornos de grãos (Cao, 2015). Os primeiros modelos constitutivos baseados no comportamento de vazios para descrever numericamente a evolução do dano dúctil em materiais porosos foram desenvolvidos por McClintock (1968) e Rice e Tracey (1969), a partir da análise de um único vazio isolado em uma matriz material elastoplástica, ignorando a possível interação entre vazios vizinhos.

McClintock (1968) se baseou no estudo da deformação axissimétrica de um vazio cilíndrico infinitamente longo, embutido em uma matriz material rígida e perfeitamente plástica, para propor seu modelo. Por sua vez, o ponto de partida para o desenvolvimento do modelo para crescimento de vazios proposto por Rice e Tracey (1969) foi a análise de um vazio inicialmente esférico em uma matriz material com propriedades mecânicas semelhantes as consideradas por McClintock (1968). Ambos modelos evidenciaram os efeitos combinados da triaxialidade e da deformação plástica sobre a evolução do dano dúctil. Contudo, eles não consideram os efeitos do crescimento dos vazios sobre o comportamento macroscópico do material, negligenciando o fenômeno de amolecimento do material, explicado fisicamente pela nucleação e crescimento dos vazios (Besson, 2010).

A partir dos trabalhos realizados por Rice e Tracey (1969), Gurson (1977) propôs o primeiro modelo constitutivo baseado na micromecânica dos defeitos contendo uma variável interna de dano incorporada à resposta macroscópico do material, utilizando uma função de escoamento que relaciona fortemente os níveis de deformação plástica com o acúmulo de dano dúctil no material (Chaboche et al., 2006).

2.2 FUNÇÃO DE ESCOAMENTO

Baseando-se na resolução do problema de equilíbrio mecânico para um elemento de volume representativo (EVR) na forma de uma esfera oca, feita de material rígido e perfeitamente plástico que obedece o critério de von Mises (1913), Gurson (1977) propôs uma função de escoamento dependente do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, J_2 , e da tensão hidrostática, p , conforme apresentado na Equação (2.1).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \right] \quad (2.1)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento inicial do material que compõe a matriz do EVR e f é a fração volumétrica de vazios (porosidade), definida pela razão entre o volume de vazios e o volume total do EVR e utilizada por Gurson (1977) com variável de dano para mensurar o nível de degradação do material. O segundo invariante do tensor das tensões desviadoras e a tensão hidrostática são definidos pelas Equações (2.2) e (2.3), respectivamente.

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad (2.2)$$

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.3)$$

onde o tensor das tensões desviadoras, \mathbf{S} , é obtido a partir do tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, conforme apresentado na Equação (2.4).

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{I} é um tensor identidade de segunda ordem.

2.3 VETOR DE FLUXO PLÁSTICO

Ao considerar a lei de fluxo associativa de Prandtl-Reuss, o potencial de fluxo do modelo pode ser assumido como sendo sua própria função de escoamento. Portanto, o vetor de fluxo plástico, \mathbf{N} , pode ser definido pela derivação da função de escoamento em relação ao tensor das tensões de Cauchy, conforme apresentado pela Equação (2.5).

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.5)$$

Derivando a função de escoamento proposta por Gurson (1977), apresentada pela Equação (2.1), em relação ao tensor tensão de Cauchy, o vetor de fluxo plástico do modelo é reescrito na forma da Equação (2.6).

$$\mathbf{N} = \mathbf{S} + \frac{\sigma_y}{3} f \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (2.6)$$

2.4 LEI DE FLUXO PLÁSTICO

A taxa de crescimento do tensor das deformações plásticas para o modelo, conhecida como lei de fluxo plástico, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, é determinada em função do vetor de fluxo plástico por meio da Equação (2.7).

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.7)$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de crescimento do multiplicador plástico. Portanto, substituindo a Equação (2.6) na Equação (2.7), a lei de fluxo plástico do modelo passa a ser expressa na forma da Equação (2.8).

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\mathbf{S} + \frac{\sigma_y}{3} f \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \quad (2.8)$$

2.5 LEI DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO

A lei de evolução do dano proposta por Gurson (1977) parte do princípio de conservação de massa para um material rígido, considerado plasticamente incompressível (de Souza Neto et al., 2008). Por definição, a densidade de um EVR com vazios internos, ρ , é determinada pela Equação (2.9).

$$\rho = \rho_m \frac{V_m}{V_{EVR}} \quad (2.9)$$

onde ρ_m e V_m são, respectivamente, a densidade e o volume do material que compõe a matriz do EVR e V_{EVR} o seu volume total. Assim, a fração volumétrica de vazios do EVR, f , pode ser expressa pela Equação (2.10).

$$f = 1 - \frac{V_m}{V_{EVR}} \quad (2.10)$$

Combinando as Equações (2.9) e (2.10), é possível expressa a densidade aparente do EVR em termos da sua fração volumétrica de vazios, conforme apresentado na Equação (2.11).

$$\rho = \rho_m(1 - f) \quad (2.11)$$

Derivando a Equação (2.11) em relação ao tempo, obtém-se a taxa de evolução da densidade do EVR, $\dot{\rho}$, expressa pela Equação (2.12).

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_m(1 - f) - \rho_m \dot{f} \quad (2.12)$$

Assumindo as hipóteses de que o material que compõe a matriz do EVR é plasticamente incompressível e que as deformações elásticas hidrostáticas podem ser negligenciadas, para que ocorra conservação de massa é necessário que densidade do material permaneça constante ao longo do tempo, logo $\dot{\rho}_m$ deve ser igual a zero. Assim, a taxa de evolução da fração volumétrica de vazios, \dot{f} , pode ser representada pela Equação (2.13).

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}(1 - f) \quad (2.13)$$

Segundo o princípio de conservação de massa, a taxa de evolução da deformação hidrostática, $\dot{\epsilon}_v$, pode ser definida pela Equação (2.14).

$$\dot{\epsilon}_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (2.14)$$

Contudo, a taxa de evolução da deformação hidrostática é composta por parcelas elástica e plástica, como apresentado na Equação (2.15).

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.15)$$

Desprezando a parcela elástica, a Equação (2.13) pode ser reescrita na forma da Equação (2.16).

$$\dot{f} = (1 - f)\dot{\varepsilon}_v^p \quad (2.16)$$

onde a parcela plástica da taxa de evolução da deformação hidrostática, $\dot{\varepsilon}_v^p$, pode ser definida a partir da lei de fluxo plástico apresentada na Equação (2.8) como sendo sua componente hidrostática, definida pela Equação (2.17).

$$\dot{\varepsilon}_v^p = tr(\dot{\varepsilon}^p) = \dot{\gamma}f\sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\sigma_y}\right) \quad (2.17)$$

Portanto, a lei de evolução do dano proposta por Gurson (1977) é definida pela Equação (2.18).

$$\dot{f} = \dot{\gamma}(f - f^2)\sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\sigma_y}\right) \quad (2.18)$$

A lei de evolução para a variável de dano proposta por Gurson é inteiramente determinada pela definição da sua função de escoamento, não estando associada a nenhum mecanismo de dissipação de energia de forma direta (Besson, 2010). Outra característica dela é a necessidade de que seja definido um valor de fração volumétrica de vazios inicial não nulo, uma vez que ela descreve apenas o crescimento de vazios preexistente, desconsiderando o processo de nucleação de novos. Caso contrário a função de escoamento apresentada na Equação (2.1) se torna equivalente ao critério de von Mises.

2.6 EXTENSÕES DO MODELO DE GURSON

O modelo de Gurson (1977) é um dos modelos baseados na micromecânica dos defeitos mais conhecidos e utilizados na previsão de fratura dúctil, estabelecendo-se como ponto de partida para o desenvolvimento de novos modelos micromecânicos. Contudo, apesar da sua importância, ele é um modelo bastante simples e que naturalmente apresenta uma série de limitações. Com o objetivo de superar algumas dessas limitações, melhorando a capacidade preditiva do modelo e permitindo sua aplicação em condições distintas das quais foi idealizado, ao longo dos anos, inúmeras modificações e extensões foram propostas por meio da consideração de diferentes aspetos negligenciados inicialmente por Gurson (1977). Nesta seção, são apresentadas algumas dessas modificações e extensões disponíveis na literatura e que se mostraram relevantes para a desenvolvimento desse trabalho.

2.6.1 Endurecimento isotrópico

Baseando-se na comparação puramente fenomenológica entre as dissipações plásticas de um material heterogêneo real e um material poroso homogêneo fictício, Gurson (1977) estendeu seu modelo, inicialmente derivado a partir de uma matriz material perfeitamente plástica, para considerar o caso de materiais que exibem endurecimento isotrópico. A função de escoamento e as leis de evolução das variáveis internas foram mantidas como no modelo original. Contudo, o raio da superfície de escoamento, anteriormente definido por uma tensão de escoamento inicial constante, passou a ser representado por uma lei de endurecimento isotrópico, σ_y^{iso} , capaz de determinar, em função da deformação plástica equivalente, $\bar{\epsilon}^p$, a tensão de escoamento atual do material que compõe a matriz.

2.6.2 Endurecimento cinemático

A primeira extensão do modelo de Gurson (1977) capaz de considerar os efeitos do endurecimento cinemático foi proposta por Mear e Hutchinson (1985) com o objetivo de evidenciar os impactos da forma da curva de escoamento sobre a localização da deformação macroscópica. Sem a pretensão de lidar com carregamentos cíclicos, Mear e Hutchinson (1985) consideraram a combinação de endurecimento isotrópico e cinemático por meio da introdução de um tensor relativo, $\boldsymbol{\eta}$, à função de escoamento do modelo e da definição de um novo raio para a superfície de escoamento. O tensor relativo foi definido por Mear e Hutchinson (1985) como sendo a diferença entre o tensor das tensões desviadoras e tensor de endurecimento cinemático, $\boldsymbol{\beta}$, conforme apresentado pela Equação (2.19).

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.19)$$

Por sua vez, o novo raio da superfície de escoamento é definido pela Equação (2.20).

$$\sigma_F = c_1 \sigma_y + (1 - c_1) \sigma_y^{iso} \quad (2.20)$$

onde o parâmetro c_1 pode assumir valores entre zero (endurecimento puramente isotrópico) e um (endurecimento puramente cinemático). Portanto, para a aplicação do modelo considerando apenas o endurecimento cinemático do material, basta assumir c_1 igual à um e recalculer o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras em função do tensor relativo, conforme apresentado nas Equações (2.21).

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.21)$$

2.6.3 Nucleação de vazios

Promovida pela deformação plástica, a nucleação de vazios em materiais dúcteis ocorre devido ao descolamento da interface entre partículas de segunda fase ou inclusões e a matriz do material ou devido à fratura dessas partículas (Benzerga & Leblond, 2010). A Figura 2.1 apresenta exemplos de ambos mecanismos de nucleação, observados por meio de tomografia de raio-x durante ensaios de tração em diferentes matrizes de alumínio.

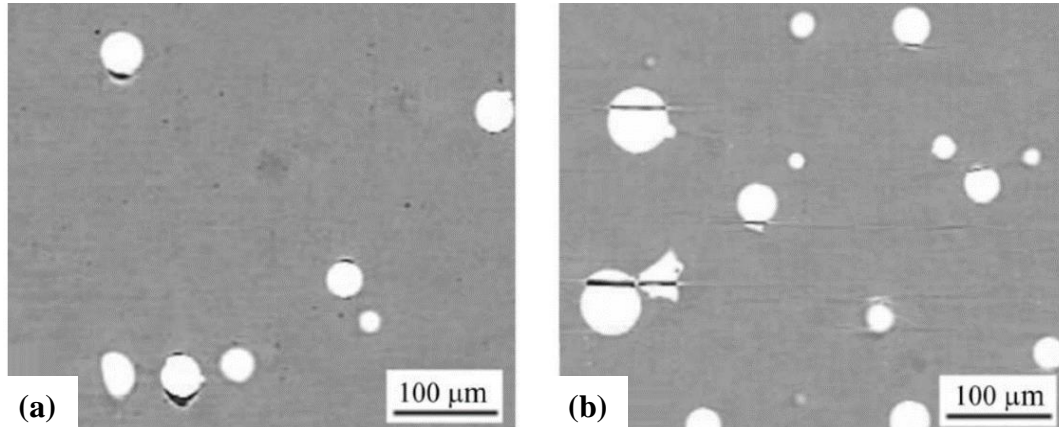


Figura 2.1 – Mecanismos de nucleação: (a) descolamento da interface entre partículas de segunda fase e uma matriz de alumínio puro; (b) fratura das partículas de segunda fase em uma matriz de liga de alumínio 2124 (fonte: Babout et al., 2004a).

Com o objetivo de incorporar ao modelo de Gurson (1977) os efeitos da nucleação de novos vazios e assim diminuir a necessidade do modelo pela definição de um valor de fração volumétrica de vazios inicial não nulo, Needleman e Rice (1978) sugeriram a inclusão de uma lei de nucleação fenomenológica, \dot{f}_n , à lei de evolução do dano, conforme apresentado pela Equação (2.22).

$$\dot{f} = \dot{\gamma}(f - f^2)\sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) + \dot{f}_n \quad (2.22)$$

A lei de nucleação proposta por Needleman e Rice (1978) é governada pelas taxas de evolução da deformação plástica equivalente, $\dot{\epsilon}^p$, e da tensão hidrostática, sendo escrita na forma da Equação (2.23).

$$\dot{f}_n = A_N \dot{\epsilon}^p + B_N \dot{p} \quad (2.23)$$

Os parâmetros A_N e B_N realizam o controle do processo de nucleação de vazios com base na deformação e na tensão, respectivamente. Assumindo o controle por deformação, conforme sugerido por Gurson (1977) a partir das análises dos dados obtidos por Gurland (1972), o parâmetro B_N assume o valor zero e a lei de nucleação passa a ser expressa pela Equação (2.24).

$$\dot{f}_n = A_N \dot{\varepsilon}^p \quad (2.24)$$

Seguindo uma distribuição normal, Chu e Needleman (1980) definiram o parâmetros A_N de maneira estatística na forma da Equação (2.25).

$$A_N = \frac{f_n}{S_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_n}{S_n} \right)^2 \right] \quad (2.25)$$

onde f_n é a fração volumétrica de vazios que pode ser nucleada, S_n é o seu desvio padrão da distribuição normal correspondente e ε_n é o valor médio da deformação plástica no momento de nucleação máxima.

2.6.4 Crescimento de vazios

Com o intuito de aumentar o grau de concordância entre as previsões obtidas pelo modelo de Gurson (1977) e resultados de simulações micromecânicas realizadas em materiais porosos, Tvergaard (1981, 1982) propôs a introdução dos parâmetros de ajuste q_1 e q_2 à função de escoamento do modelo, criando o modelo Gurson-Tvergaard (GT) apresentado pela Equação (2.26).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + (q_1 f)^2 - 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 p}{2 \sigma_y} \right) \right] \quad (2.26)$$

O parâmetro q_1 tem a função de ajustar o nível de influência da fração volumétrica de vazios sobre a função de escoamento, realizando o controle da taxa de amolecimento do material. Enquanto que o parâmetro q_2 regula o efeito da tensão hidrostática sobre a resposta do material, permitindo o controle da taxa de evolução do dano (Thomason, 1985). Tvergaard (1981) calculou os valores dos parâmetros de ajuste com base em simulações de um modelo de célula unitária cilíndrica como sendo $q_1 = 1,5$ e $q_2 = 1$. No entanto, alguns autores propuseram novos valores para esses parâmetros com o intuito de obter resultados mais precisos em seus estudos (Steglich e Brocks, 1998; Faleskog et al., 1998; Pardoen et al., 1998; Zhang et al., 2000; Nielsen e Tvergaard, 2009; Cao et al., 2014).

2.6.5 Coalescência de vazios

A coalescência de vazios é a etapa final da falha dúctil. Devido a nucleação e crescimento contínuo dos vazios, em um certo estágio de deformação, os vazios atingem tamanhos substanciais e passam a interagir entre si, levando à formação de trincas macroscópicas que se propagam rapidamente por todo o material até a sua fratura (Chen & Butcher, 2013). A Figura 2.2 traz dois exemplos de processo de coalescência de vazios observados por meio de tomografia de raio-x durante ensaios de tração em diferentes matrizes de alumínio.

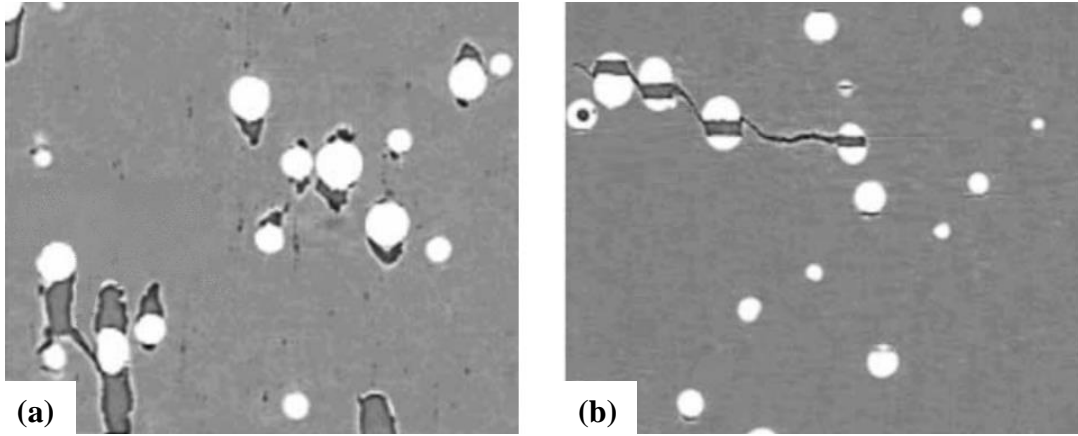


Figura 2.2 – Coalescência vazios: (a) em uma matriz de alumínio puro; (b) em uma matriz de liga de alumínio 2124 (fonte: Babout et al., 2004b).

A elaboração de um critério capaz de descrever o processo de coalescência de vazios de maneira satisfatória é extremamente importante para a previsão da inicialização e propagação de trincas. Contudo, esse fenômeno é um mecanismo físico altamente complexo, que até hoje é foco de inúmeras pesquisas. Tvergaard e Needleman (1984) incluíram os efeitos da coalescência de vazios ao modelo de Gurson (1977) através de um critério baseado na definição de um valor de fração volumétrica de vazios crítico intrínseco ao material. Quando esse valor crítico é atingido, a taxa de crescimento da variável de dano é acelerada, reproduzindo a rápida degradação do material causada pela ligação súbita entre os vazios durante o processo de coalescência. Esse critério foi introduzido à função de escoamento do modelo por meio da substituição da fração volumétrica de vazios atual, f , por uma efetiva, f^* , definida por Tvergaard e Needleman (1984) na forma de uma função bilinear expressa pela Equação (2.27).

$$f^* = \begin{cases} f & \text{para } f \leq f_c \\ f_c + \frac{1-f_c}{f_F-f_c} (f - f_c) & \text{para } f > f_c \end{cases} \quad (2.27)$$

onde f_c é o valor de fração volumétrica de vazios a partir do qual se inicia o processo de coalescência de vazios e f_F é a fração volumétrica de vazios no momento da falha do material.

A combinação das modificações propostas por Chu e Needleman (1980), Tvergaard (1981, 1982) e Tvergaard e Needleman (1984) resultaram na criação do modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman, também conhecido como modelo GTN, apresentado pela Equação (2.28).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + (q_1 f^*)^2 - 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right] \quad (2.28)$$

O conceito de porosidade efetiva introduzido por Tvergaard e Needleman (1984) para formulação do modelo GTN explica o fenômeno de coalescência de vazios de maneira bastante básica, porém eficiente (Besson, 2010). Quando devidamente calibrado para um material específico, o modelo

GTN é capaz de descrever a evolução do dano dúctil e a prever a fratura do material de maneiras satisfatórias.

2.6.6 Mecanismos de cisalhamento

Do ponto de vista da micromecânica, sob carregamentos predominantemente cisalhantes, não ocorre um crescimento considerável do volume dos vazios, sendo o processo de degradação interna do material na verdade associado à distorção dos vazios e a interligação entre eles (Xue et al., 2010). Nessas condições, a razão de triaxialidade, η , definida pela Equação (2.29) como sendo a razão entre a tensão hidrostática e a tensão equivalente de von Mises, q , tende a ser muito baixa, uma vez que a tensão hidrostática é muitas vezes nula.

$$\eta = \frac{p}{q} \quad (2.29)$$

onde q representa a tensão equivalente de von Mises, determinada pela Equação (2.30) a partir do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras.

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (2.30)$$

Portanto, embora os modelos da família Gurson sejam vastamente utilizados para a previsão de falha dúctil em condições de média e alta razão de triaxialidade, devido à lei de evolução do dano proposta por Gurson (1977) ser fortemente dependente da tensão hidrostática, em condições de baixa razão de triaxialidade esses modelos são incapazes de prever qualquer evolução da variável de dano, ignorando o amolecimento induzido pela danificação do material e impossibilitando a previsão da falha. Com o objetivo de melhorar a capacidade preditiva dos modelos da família Gurson em condições de baixa triaxialidade, autores como Xue (2008), Nahshon e Hutchinson (2008) e Butcher et al. (2009) propuseram a inclusão de um termo extra, associado à evolução do dano induzido por cisalhamento, à lei de evolução da variável de dano, conforme apresentado pela Equação (2.31).

$$\dot{f} = \dot{\gamma}(f - f^2)\sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\sigma_y}\right) + \dot{D}_{shear} \quad (2.31)$$

Essas modificações preservam a função de escoamento e potencial de fluxo originais dos modelos, enquanto que a fração volumétrica de vazios perde seu significado físico e passa a ser interpretada como um parâmetro de dano geral, composto por uma contribuição hidrostática, associada ao processo de nucleação, crescimento e coalescência de vazios, e uma contribuição desviadora, baseada na deformação plástica equivalente associada ao processo de distorção dos vazios (Zhou et al., 2014). Devido suas formulações simples e por proporcionarem uma melhoria na previsão do dano dúctil em

condições de baixa e nula triaxialidade, as modificações propostas por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008) se destacaram e têm sido amplamente utilizadas na literatura, permitindo reproduzir com sucesso simulações micromecânicas (Tvergaard & Nielsen, 2010) e ensaios experimentais (Xue et al., 2013).

Mecanismo de cisalhamento de Xue (2008)

Inspirado pela solução para coalescência de furos em uma banda de cisalhamento proposta por McClintock et al. (1966), Xue (2008) propôs uma lei de evolução de dano por cisalhante baseada nas considerações geométricas de um modelo em duas dimensões de célula unitária quadrada de comprimento L , com um vazio circular central de raio R , submetida à deformação por cisalhamento simples, conforme representado na Figura 2.3.



Figura 2.3 – Ilustração do mecanismo de cisalhamento de vazio (adaptado de Xue, 2008).

Quando a deformação cisalhante simples é aplicada à célula, o vazio central gira e se alonga na direção preferida, com isso a distância entre a superfície livre do vazio e a borda da célula diminui até que o vazio passe a interagir com os vazios das células vizinhas. Na configuração indeformada, a distância mínima, a , entre a superfície livre do vazio e a borda da célula pode ser expressa pela Equação (2.32).

$$a = \frac{L}{2} - R \quad (2.32)$$

A aplicação de uma deformação cisalhante simples, γ , leva ao aparecimento de um ângulo de deformação, α . Portanto, considerando a conservação do volume da célula, Xue (2008) assume que a posição relativa entre o vazio e a célula se mantém constante, assim a distância mínima entre a superfície livre do vazio e a borda da célula deformada é dada pela Equação (2.33).

$$a' = a \cos \alpha = a \sqrt{\frac{1}{1+\gamma^2}} \quad (2.33)$$

Com base na definição logarítmica de deformação, é possível definir uma deformação artificial, ε_{art} , associada à redução dessa distância mínima, conforme a Equação (2.34).

$$\varepsilon_{art} = \ln \frac{a}{a'} = \ln \sqrt{1 + \gamma^2} \quad (2.34)$$

McClintock et al. (1966) consideram a inicialização da fratura em uma banda de cisalhamento como sendo o momento em que a superfície livre do vazio entra em contato com a borda da célula. Para valores de fração volumétrica de vazios pequenos, a falha macroscópica por deformação cisalhante é definida pela Equação (2.35).

$$\varepsilon_{max} = \frac{L}{2R} \quad (2.35)$$

Consequentemente, o dano associado ao cisalhamento do vazio, D_{shear} , é definido pela razão entre a deformação artificial e a deformação macroscópica em uma banda de cisalhamento, conforme a Equação (2.36).

$$D_{shear} = \frac{\varepsilon_{art}}{\varepsilon_{max}} = \frac{\ln \sqrt{1 + \gamma^2}}{\frac{L}{2R}} \quad (2.36)$$

Usando a expansão de Taylor, para pequenas deformações cisalhantes, a deformação artificial pode ser simplificada na forma da Equação (2.37).

$$\varepsilon_{art} \approx \frac{1}{2} \gamma^2 \quad (2.37)$$

A deformação cisalhante pode ser reescrita em função da deformação plástica equivalente, conforme apresentado na Equação (2.38).

$$\gamma = \sqrt{3} \bar{\varepsilon}^p \quad (2.38)$$

Portanto, considerando cisalhamento simples e uma fração volumétrica pequena, o dano associado ao cisalhamento do vazio pode ser aproximado pela Equação (2.39).

$$D_{shear} \approx \frac{\frac{1}{2} \gamma^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi/f}} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{(1/2)} \bar{\varepsilon}^p{}^2 \quad (2.39)$$

Uma relação similar para o caso de três dimensões pode também ser obtida na forma da Equação (2.40).

$$D_{shear} = \frac{3}{2} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{(1/3)} f^{(1/3)} \bar{\epsilon}^p{}^2 \quad (2.40)$$

Por fim, a lei de evolução do dano por cisalhamento, também conhecida como mecanismo de cisalhamento, proposta por Xue (2008), pode ser expressa na forma da Equação (2.41).

$$\dot{D}_{shear} = q_3 f^{q_4} \bar{\epsilon}^p \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.41)$$

onde Xue (2008) define $q_3 = 1,96$ e $q_4 = 0,5$ para o caso em duas dimensões e $q_3 = 1,86$ e $q_4 = 1/3$ para o caso em três dimensões.

Mecanismo de cisalhamento de Nahshon e Hutchinson (2008)

Baseando-se em aspetos fenomenológicos, Nahshon e Hutchinson (2008) propuseram uma lei de evolução para o dano induzido por cisalhamento assumindo uma dependência linear entre a fração volumétrica de vazios atual e a parte desviadora da lei de fluxo plástico, conforme apresentado na Equação (2.42).

$$\dot{D}_{shear} = kf \frac{\mathbf{S}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{q} \quad (2.42)$$

onde k é uma constante de calibração que determina a taxa de evolução do dano induzido por cisalhamento.

Considerando a condição de cisalhamento puro, onde as tensões principais podem ser representadas como: $\sigma_1 = -\sigma_3$ ($\sigma_1 > 0$), $\sigma_2 = 0$, o tensor das tensões desviadoras assume a forma do próprio tensor tensão de Cauchy e a tensão equivalente de von Mises passa a ser definida por $\sqrt{3}\sigma_1$, logo, a Equação (2.42) pode ser reescrita na forma da Equação (2.43).

$$\dot{D}_{shear} = kf \frac{\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\sqrt{3}\sigma_1} \quad (2.43)$$

Para tal condição, a lei de evolução da deformação plástica pode ser definida conforme a Equação (2.44), uma vez que as componentes de deformação também podem ser representadas como: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_1 = -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_3$ ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_1 > 0$), $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_2 = 0$.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_1 \quad (2.44)$$

Portanto, o mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008), considerando o estado de cisalhamento puro e negligenciando a nucleação de novos vazios, é apresentada pela Equação (2.45).

$$\dot{D}_{shear} = kf \dot{\epsilon}^p \quad (2.45)$$

Função de ativação

Os mecanismos de cisalhamento propostos por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008) foram derivadas considerando apenas os estados de tensão com cisalhamento simples e cisalhamento puro, respectivamente. A extensão dessas leis para estados de tensão arbitrários é proposta por meio do uso de funções de ativação dependentes do terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadoras, ξ . Essas funções possuem o papel de diferenciarem os estados de tensão, inclusive quando eles apresentam a mesma razão de triaxialidade. A função de ativação proposta por Xue (2008) é apresentada na Equação (2.46) como uma expressão linear do ângulo de Lode normalizado, $\bar{\theta}$.

$$g(\bar{\theta}) = 1 - |\bar{\theta}| \quad (2.46)$$

O ângulo de Lode normalizado pode ser definido em função do terceiro invariante normalizado por meio da Equação (2.47).

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(\xi) \quad (2.47)$$

O terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadoras é definido pela Equação (2.48).

$$\xi = \frac{27 J_3}{2 q^3} \quad (2.48)$$

onde J_3 é o terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras, calculado de acordo com a Equação (2.49).

$$J_3 = \det(\mathbf{S}) \quad (2.49)$$

Por sua vez, Nahshon e Hutchinson (2008) preferiram utilizar o terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadoras como função de ativação, conforme apresentado na Equação (2.50).

$$g(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (2.50)$$

Ambas funções de ativação podem assumir valores entre zero e um de acordo com o estado de tensão considerado. Para estados de tensão axissimétricos elas são definidas como igual à zero, mantendo a lei de evolução de dano originalmente proposta por Gurson (1977). Em condições predominantemente cisalhantes elas assumem o valor de um, ativando os respectivos mecanismos de dano por cisalhamento. Para estados de tensões combinadas, elas assumem valores intermediários de acordo com a função proposta, conforme apresentado na Figura 2.4.

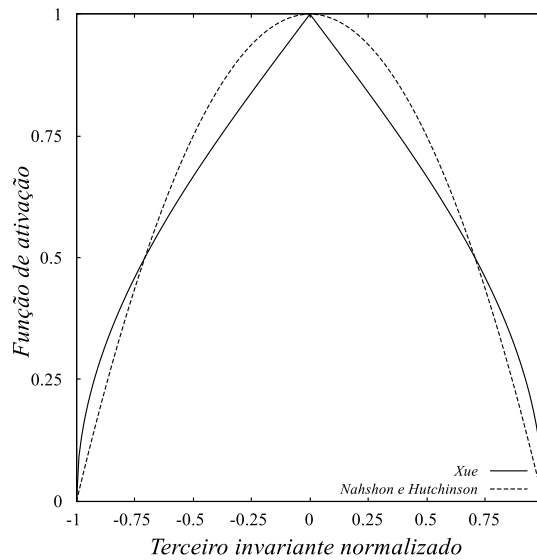


Figura 2.4 – Evolução das funções de ativação propostas por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008) em função do terceiro invariante normalizado.

Portanto, os mecanismos de cisalhamento propostos por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008), considerando suas funções de ativação, são então descritas, pelas Equações (2.51) e (2.52), respectivamente.

$$\dot{D}_{shear} = q_3 f^{q_4} \bar{\epsilon}^p \dot{\bar{\epsilon}}^p g(\bar{\theta}) \quad (2.51)$$

$$\dot{D}_{shear} = k f \bar{\epsilon}^p g(\xi) \quad (2.52)$$

Utilizando resultados experimentais obtidos em diferentes condições de carregamento, Malcher et al. (2013) compararam a capacidade preditiva de ambos mecanismos acoplados ao modelo GTN. Sob cisalhamento puro, o mecanismo de Xue (2008) apresentou um comportamento bastante conservador, atingindo o valor de dano crítico com um nível de deformação muito abaixo do observado experimentalmente. Por outro lado, para a mesma condição de carga, ao utilizar o mecanismo de Nahshon e Hutchinson (2008), o modelo previu o dano crítico em um nível de deformação bem próximo do experimental. Para as demais condições de carregamento estudadas, os mecanismos previram o dano crítico em níveis de deformação bastante parecidos, porém todos acima do observado experimentalmente, inclusive para o carregamento de tração pura.

3 EXTENSÃO DO MODELO DE GURSON PARA CONDIÇÕES CÍCLICAS

Este capítulo propõe uma extensão para o modelo original de Gurson (1977) capaz de descrever o processo de degradação gradual em materiais dúcteis submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos. O caráter simétrico apresentado pela função de escoamento proposta por Gurson permite que o modelo preveja “crescimento negativo” da sua variável de dano nas situações de tensão hidrostática negativa, impossibilitando a aplicação do mesmo em condições cíclicas, uma vez que o crescimento do dano contabilizado durante a etapa de tração é acompanhado de uma recuperação de mesma ordem durante a etapa de compressão. Para permitir que o modelo descreva a evolução do dano dúctil em função do número de ciclos é proposta a reformulação da lei de evolução da sua variável de dano por meio da inclusão de um termo dependente do terceiro invariante com a função de promover o acúmulo de dano ao final de cada ciclo. A extensão proposta também conta com a inclusão da lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966) e o mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008), como solução para a incapacidade dos modelos da família Gurson em prever a evolução do dano em condições de baixa razão de triaxialidade. Por fim, a capacidade preditiva da extensão proposta é verificada por meio da comparação entre as respostas obtidas por ela e um modelo de célula unitária simulado em elementos finitos.

3.1 INTRODUÇÃO

O estudo da micromecânica dos defeitos em condições de carregamento cíclico iniciou-se com Gilles et al. (1992). Analisando os resultados dos ensaios de propagação de trincas conduzidos por Schmidt et al. (1991) e Kobayashi et al. (1992), respectivamente, em tubos e corpos de prova do tipo CT (*Compact Tension*), observou-se uma redução substancial da resistência à fratura de materiais dúcteis quando submetidos a carregamentos cíclicos. Isso significa que para um dado nível de carga, a deformação na fratura era consideravelmente menor ao ser atingida sob condições cíclicas em vez de monotônicas. Gilles et al. (1992) propuseram que essa redução da ductilidade sob condições cíclicas estaria ligada a um eventual crescimento de defeitos já existentes no material na forma de micro vazios.

Por meio de simulações em elementos finitos de um modelo de célula unitária cilíndrica com um defeito central representado por um vazio esférico, Gilles et al. (1992) comprovou que a cada ciclo de carregamento o acúmulo da deformação plástica próximo a superfície do defeito provocava uma distorção da sua forma, resultando em um aumento gradual do seu volume que após repetidos ciclos seria responsável pelo surgimento de trincas e conseqüentemente a falha do material, conforme apresentado na Figura 3.1. Esse fenômeno foi então definido por eles como *ratcheting* de porosidade.

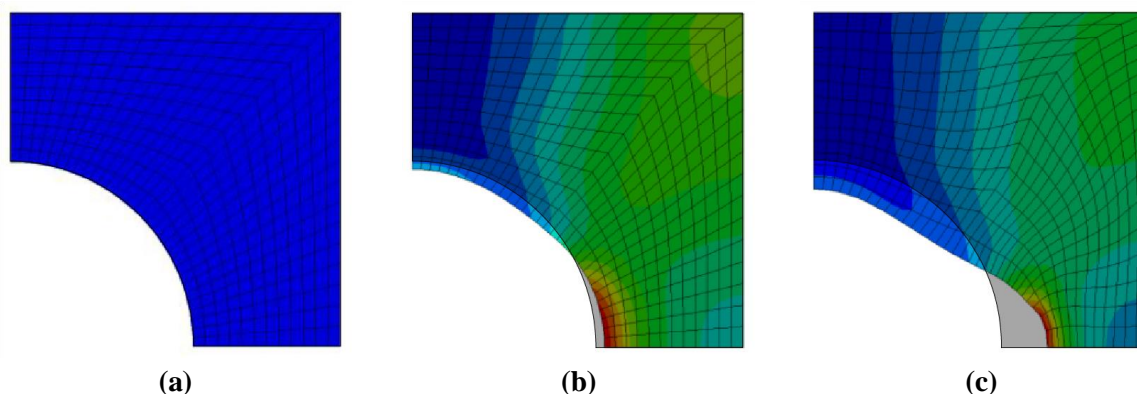


Figura 3.1 – Crescimento do defeito devido ao acúmulo de deformação plástica: (a) célula unitária no início da simulação; (b) distorção do vazio após alguns ciclos; (c) forma do vazio no momento da falha (adaptado de Lukhi et al., 2018a)

Contudo, devido ao fato das simulações realizadas por Gilles et al. (1992) envolverem variações de triaxialidade na ordem de até um por cento, podendo ter afetado as análises dos resultados, uma vez que Rice e Tracey (1969) mostraram que a razão de triaxialidade exerce forte influência sobre a taxa de crescimento de vazios, Deuvax et al. (1997) refizeram as simulações e análises utilizando um melhor controle da triaxialidade. As novas simulações confirmaram a existência do fenômeno de *ratcheting* de porosidade de maneira definitiva e também evidenciaram que o modelo original de Gurson (1977) é incapaz de descreve-lo através da sua variável interna de dano.

Segundo Deuvax et al. (1997), a função de escoamento proposta por Gurson (1977) apresenta um caráter simétrico em relação ao plano das tensões desviadoras, permitindo que o modelo preveja um “crescimento negativo” da sua variável de dano em condições de tensão hidrostática negativa. Portanto, quando aplicado em condições cíclicas, onde existe uma alternância entre tensões hidrostáticas positivas e negativas, o modelo não prever evolução do dano dúctil em função do número de ciclos. Em carregamentos axiais cíclicos com amplitude constante, qualquer crescimento do dano contabilizado pelo modelo durante as etapas de tração é acompanhado por uma recuperação de mesma ordem durante as etapas de compressão, não sendo registrado acúmulo de dano de um ciclo para outro. A Figura 3.2 apresenta o comportamento da variável de dano do modelo original de Gurson (1977) durante esse tipo de carregamento. A linha contínua representa a evolução do dano durante os ciclos e a linha tracejada a evolução contabilizada ao final de cada ciclo.

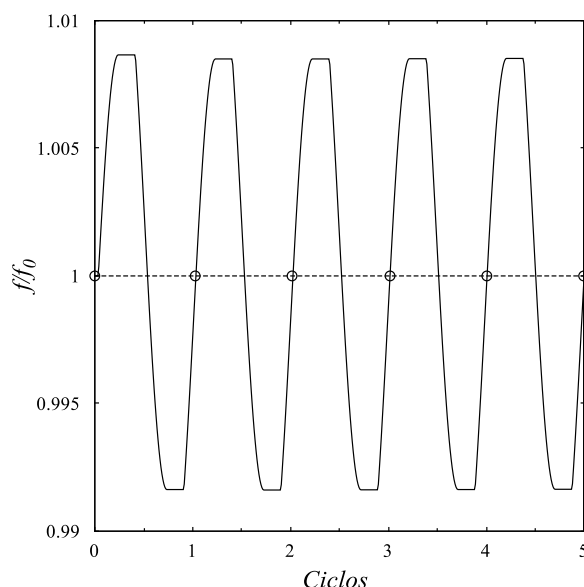


Figura 3.2 – Comportamento da variável de dano do modelo de Gurson durante carregamento axial cíclico.

Como uma primeira alternativa para descrever o processo de degradação sofrido por materiais dúcteis em condições cíclicas utilizando um modelo constitutivo baseado na micromecânica dos defeitos, Deuvax et al. (1997) sugeriram a utilização do modelo Leblond-Perrin-Devieux (LPD), inicialmente proposto por Leblond et al. (1995) como uma extensão do modelo de Gurson (1977) capaz de modelar mais precisamente o estado de tensão do material sob carregamentos monotônicos, graças à substituição da abordagem fenomenológica adotada por Gurson (1977) por uma análise micromecânica para descrever os efeitos do endurecimento isotrópico em materiais dúcteis.

Apesar do modelo original de Gurson (1977), considerando plasticidade ideal, ter sido deduzido a partir de análises micromecânicas, sua extensão para considerar o caso de uma matriz endurecível foi baseada em uma abordagem puramente fenomenológica, resultando na incompatibilidade entre ela e a solução analítica para o caso de uma célula unitária na forma de uma esfera oca, feita de material rígido e endurecível, submetida a carregamentos arbitrários esfericamente simétricos (a mudança de forma da célula é provocada apenas pela parte hidrostática do carregamento, permitindo que a célula mantenha sua forma esférica). Nessas condições, o modelo original de Gurson (1977) não obedece a relação entre as tensões de escoamento globais observadas em condições de carregamentos puramente desviadores (quando a tensão hidrostática é nula) e puramente hidrostáticos (quando o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras é nulo) apresentada pela solução analítica do problema na forma da Equação (3.1).

$$\frac{q}{1-f} < -\frac{3}{2} \frac{p}{\ln(f)} \quad (3.1)$$

onde o lado esquerdo da Equação (3.1) refere-se à tensão de escoamento global para condições de carregamentos puramente desviadores e o lado direito representa a tensão de escoamento global nos casos de carregamentos puramente hidrostáticos.

Considerando a função de escoamento apresentada pela Equação (2.1), as tensões de escoamento globais calculadas em ambas condições de carregamento são equivalentes à tensão de escoamento do material. Portanto, o modelo original de Gurson (1977) descumpra a relação estabelecida pela resposta analítica igualando ambos os lados da Equação (3.1). Para superar tal incompatibilidade, Leblond et al. (1995) propuseram a utilização de duas variáveis internas distintas para descrever o endurecimento do material, conforme apresentado na Equação (3.2).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_1^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_2} \right) \right] \quad (3.2)$$

onde σ_1 e σ_2 são variáveis internas relacionadas à distribuição espacial da tensão de escoamento local ao longo da matriz material da esfera oca. Elas governam o processo de encruamento sob condições de carregamentos puramente desviadores e puramente hidrostáticos, respectivamente, permitindo que a relação estabelecida pela resposta analítica seja atendida.

As variáveis σ_1 e σ_2 são determinadas em função da distribuição da tensão de escoamento local na esfera oca por meio das Equações (3.3) e (3.4), deduzidas a partir da estimativa da tensão de escoamento global da esfera sob carregamentos puramente desviadores e puramente hidrostáticos, respectivamente.

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_e^3 - a_i^3} \int_{a_i^3}^{a_e^3} \sigma_y(\langle \bar{\epsilon} \rangle_r) dr^3 \quad (3.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\ln(a_e^3/a_i^3)} \int_{a_i^3}^{a_e^3} \sigma_y(\langle \bar{\epsilon} \rangle_r) \frac{dr^3}{r^3} \quad (3.4)$$

onde a_i e a_e são os raios internos e externos da esfera oca, $\sigma_y(\langle \bar{\epsilon} \rangle_r)$ é a lei de encruamento do material em função do valor médio da deformação equivalente acumulada $\langle \bar{\epsilon} \rangle$ sobre a superfície de uma esfera de raio r .

Leblond et al. (1995) também propuseram uma versão do modelo capaz de considerar uma combinação entre o endurecimento isotrópico e cinemático, conforme apresentado na Equação (3.5).

$$\phi = J_2 - \frac{(c_2 \sigma_y + (1-c_2) \sigma_1)^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{c_2 \sigma_y + (1-c_2) \sigma_2} \right) \right] \quad (3.5)$$

onde J_2 e p são determinados em função do tensor relativo, definido pela operação $\mathbf{S} - c_2 \mathbf{B}$, e o parâmetro c_2 corresponde a proporção de endurecimento cinemático da matriz. Ele é assumido como

uma constante e pode variar entre um e zero, caso com endurecimento puramente cinemático ou puramente isotrópico, respectivamente. Quando c_2 assume o valor de um, o modelo LPD assume a forma do modelo apresentado por Mear e Hutchinson (1985).

Apesar de não ter sido proposto para tal fim, ao ser aplicado em condições cíclicas, o modelo LPD (1995) foi capaz de descrever qualitativamente, por meio da sua variável de dano, o crescimento do defeito observado nas simulações micromecânicas da célula unitária realizadas por Deuvax et al. (1997). Contudo, do ponto de vista quantitativo os resultados obtidos não foram satisfatórios. Como evidenciado mais detalhadamente por Brocks et al. (2003) e Steglich et al. (2005), o modelo LPD (1995) descreve o crescimento do defeito durante o ciclo de carregamento com amplitude maior que o observado nas simulações da célula unitária, conforme apresentado na Figura 3.3. Além disso, ele prevê uma estabilização no crescimento do defeito após poucos ciclos. Ao final dos primeiros ciclos, o modelo descreve o acúmulo de dano de um ciclo para outro, porém, depois de alguns ciclos a evolução do dano satura e a variável deixa de crescer em função do número de ciclos, sendo seu comportamento em função da deformação equivalente descrito por um laço fechado.

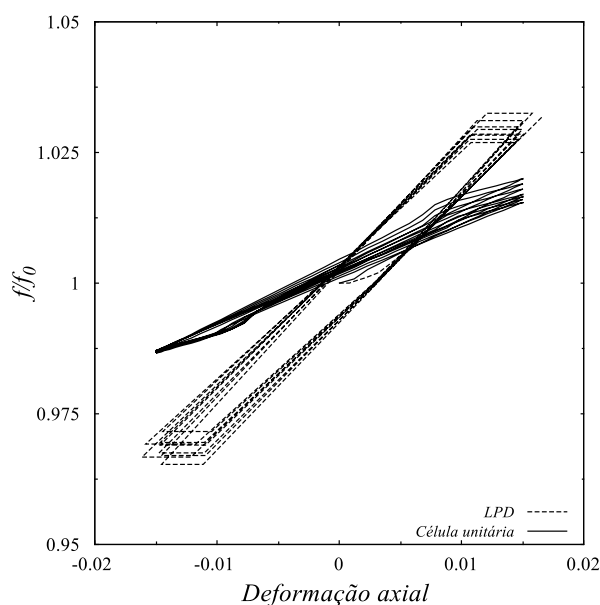


Figura 3.3 – Evolução do dano apresentado por uma célula unitária e pelo modelo de LPD em função da deformação equivalente, considerando o aço 20MnNiMo55 e razão de triaxialidade de 1/3 (adaptado de Steglich et al., 2005).

Esse comportamento se deve ao fato de Leblond et al. (1995), para simplificar os cálculos da deformação equivalente acumulada, terem considerado que a esfera oca estaria submetida apenas à carregamentos monotônicos, onde a taxa de crescimento da deformação é sempre positiva. Hipótese inadequada para condições cíclicas, onde a taxa de deformação se alterna entre positiva e negativa a cada semi-ciclo de carregamento.

Muitos outros estudos baseados em simulações micromecânicas de células unitárias foram desenvolvidos seguindo a linha de pesquisa de Gilles et al. (1992) e Deuvax et al. (1997). Dentre eles vale a pena ressaltar os realizados por Kuna e Ross (1998), Rabold e Kuna (2005) e Mbiakop et al. (2015). Apesar de não proporem novos modelos ou melhorias para o modelo de LPD (1995), esses

estudos foram de grande importância ao proporcionarem uma compreensão mais clara sobre a micromecânica dos defeitos em condições cíclicas, servindo de base para trabalhos mais recentes como o de Lacroix et al. (2016). Com o objetivo de aprimorar a descrição da evolução gradual do dano em condições cíclicas, Lacroix et al. (2016) reformularam o modelo LPD (1995) descartando a hipótese de taxas de deformações sempre positivas, realizando o cálculo das variáveis internas σ_1 e σ_2 por meio de integração numérica a partir da discretização de uma célula unitária esférica oca em um número N de camadas. Portanto, as variáveis internas σ_1 e σ_2 passam a ser definidas pelas Equações (3.6) e (3.7).

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_e^3 - a_i^3} \sum_{i=1}^N \sigma_y(\langle \bar{\epsilon} \rangle_i) (r_i^3 - r_{i-1}^3) \quad (3.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\ln(a_e^3/a_i^3)} \sum_{i=1}^N \sigma_y(\langle \bar{\epsilon} \rangle_i) [\ln(r_i^3/r_{i-1}^3)] \quad (3.7)$$

O uso da integração numérica permitiu descrever de forma mais precisa a distribuição do endurecimento ao redor do defeito, proporcionando uma melhor estimativa das variáveis internas σ_1 e σ_2 e conseqüentemente uma boa correlação entre o modelo proposto e as simulações micromecânicas. Contudo, Lacroix et al. (2016) se limitaram em considerar apenas o endurecimento isotrópico para descrever o comportamento da matriz material da célula unitária. Além disso, o modelo não chegou a ser aplicado no estudo da falha de componentes reais submetidos a carregamentos cíclicos, tais como corpos de provas ou estruturas metálicas, sendo avaliado apenas para condições teóricas envolvendo um número pequeno de ciclos.

O comportamento dos defeitos em condições de carregamentos cíclicos com baixa razão de triaxialidade ainda é um assunto pouquíssimo explorado. Para casos monotônicos, a incapacidade dos modelos da família Gurson em prever a evolução da variável de dano já foi amplamente estudada e solucionada, tais como os mecanismos de cisalhamentos propostos por Xue (2008) e Nahshon e Hutchinson (2008) apresentados no capítulo anterior, foram propostas. Contudo, há poucos registros na literatura de trabalhos considerando carregamentos cíclicos com baixas razões de triaxialidade. Utilizando modelos em elementos finitos de células unitárias cúbicas com um vazio esférico, Mbiakop et al. (2015) e Kiran e Khandelwal (2015) observaram que, sob altas razões de triaxialidade, o crescimento do volume do defeito é mais pronunciado. Por esse motivo, a maioria dos trabalhos que se propuseram a estudar o fenômeno *ratcheting* de porosidade se concentraram em investigar o comportamento de defeitos em condições de alta triaxialidade, negligenciando os casos de baixa triaxialidade.

Um dos primeiros trabalhos dedicados ao estudo da evolução de defeitos sob condições cíclicas com baixa triaxialidade foi proposto recentemente por Nielsen et al. (2018). Baseando-se nos estudos realizados por Tvergaard (2008) sobre o mecanismo de coalescência de vazios em materiais porosos submetidos a carregamentos cisalhantes monotônicos, Nielsen et al. (2018) investigou o comportamento

de um vazio esférico embutido em uma célula unitária cilíndrica submetida à combinação de tração constante e carregamentos cíclicos cisalhantes com largas amplitudes. Os resultados obtidos por eles confirmaram o crescimento de defeitos mesmo em baixas triaxialidades. Logo no início da deformação, o vazio originalmente circular é achatado e toma a forma de um navete (forma que lembra um barco). Com a repetição dos ciclos de carga, deformações locais severas evoluem nos cantos do vazio de tal forma que a protuberância se espalha em direção a vizinhança, provocando consequentemente a coalescência de vazios, conforme evidenciado nas Figuras 3.4 e 3.5.

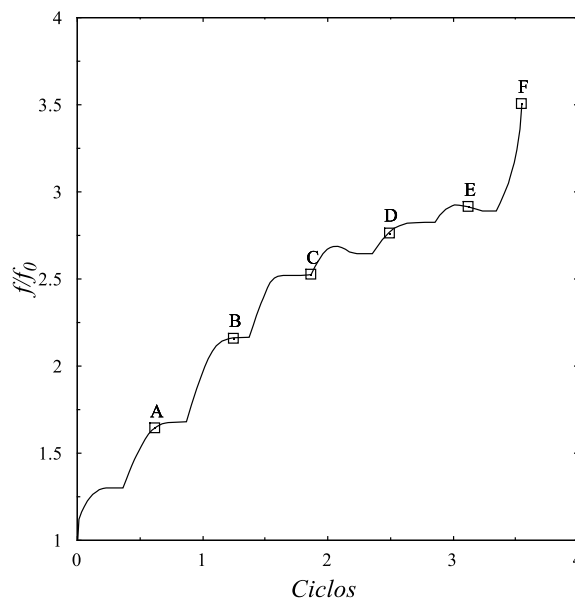


Figura 3.4 – Evolução do volume do defeito em função do número de ciclos (adaptado de Nielsen et al., 2018).

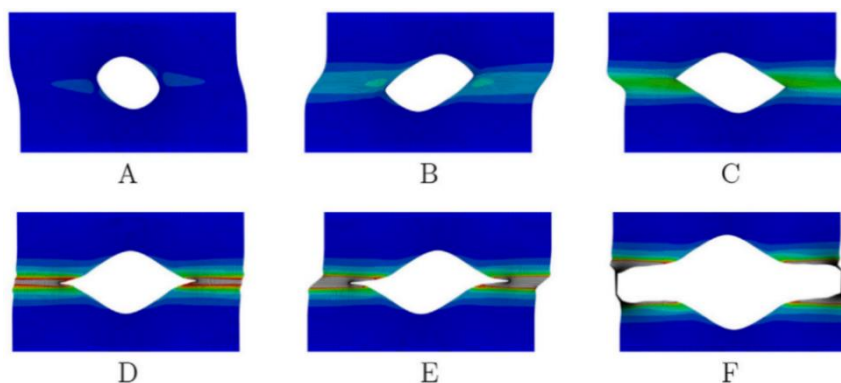


Figura 3.5 – Mudança da forma do defeito ao longo do histórico de deformação. As etiquetas das figuras correspondem às posições marcadas na Figura 3.4 (adaptado de Nielsen et al., 2018).

O objetivo desse capítulo é apresentar uma extensão para o modelo de Gurson (1977) capaz de descrever de maneira satisfatória processo de crescimento de defeitos em materiais dúcteis submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos por meio da sua variável de dano. Para tal, é proposta a inclusão da lei de endurecimento cinemático proposta por Armstrong-Frederick (1966) e uma reformulação da lei de evolução da variável de dano do modelo, por meio da inclusão do mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008) e de um termo definido com base no terceiro invariante

normalizado com a função promover um crescimento assimétrico da variável de dano durante o carregamento, permitindo a evolução do dano em função do número de ciclos.

Esse capítulo é estruturado da seguinte forma: Na seção 3.2 é apresentada a formulação matemática para uma extensão proposta para o modelo de Gurson. A seção 3.3 traz o algoritmo de integração numérica para a extensão proposta. Na seção 3.4, sua capacidade preditiva é avaliada através da comparação dos resultados obtidos por ela e resultados provenientes de simulações numéricas em elementos finitos de um modelo de célula unitária cilíndrica com um vazão esférico. Por fim, a seção 3.5 traz algumas considerações sobre o trabalho apresentado nesse capítulo.

3.2 MODELO CONSTITUTIVO

A incapacidade do modelo original de Gurson (1977) em descrever o crescimento gradual de defeitos em função do número de ciclos de carregamento foi inicialmente evidenciada por Devaux et al. (1997). Porém, muitos outros trabalhos subsequentes, como os de Bonora e Pironi (2001), Brocks et al. (2003), Steglich et al. (2005), Mbiakop et al. (2015), Klingbeil et al. (2016) e Lacroix et al. (2016), confirmaram essa deficiência apresentada pelo modelo. O fato da lei de evolução do dano proposta por Gurson ser dependente da tensão hidrostática e possuir a forma de uma função seno hiperbólica, confere um caráter simétrico ao crescimento da variável de dano em condições cíclicas. Portanto, o modelo prevê de maneira errônea que a danificação sofrida pelo material durante a etapa de tração é recuperada durante a etapa de compressão, considerando que ele nunca falhará quando submetido a carregamentos cíclicos.

Com o intuito de permitir a aplicação do modelo de Gurson (1977) na previsão de falhas em condições multiaxiais cíclicas considerando um número maior de ciclos e levando em conta os efeitos do endurecimento cinemático do material, esse trabalho propõe uma extensão do modelo de Gurson (1977) baseada na reformulação da lei de evolução da sua variável de dano e na inclusão da lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966). Seguindo a proposta de Mear e Hutchinson (1985), foi introduzido à função de escoamento, apresentada na Equação (2.1), um tensor relativo, $\boldsymbol{\eta}$, definido como a diferença entre o tensor das tensões desviadoras, \boldsymbol{S} , e tensor de endurecimento cinemático, $\boldsymbol{\beta}$, cuja taxa de evolução é descrita pela lei de endurecimento cinemático proposta por Armstrong-Frederick (1966) e apresentada na forma da Equação (3.8).

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - b \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \boldsymbol{\beta} \quad (3.8)$$

onde H^k e b são respectivamente o módulo e o coeficiente de endurecimento cinemático.

À lei de evolução do dano, foi introduzido um termo dependente do terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadoras, ξ , com a função de identificar por qual etapa do carregamento o material está passando e com isso alterar a taxa de evolução da variável de dano, fazendo com que ela evolua de forma desigual em tração e compressão, promovendo o acúmulo de dano de um ciclo para o outro. O termo proposto nesse trabalho foi definido como DR (*Damage Recovery*) e é apresentado pela Equação (3.9).

$$DR = (1 - K_1) + K_1 \langle \xi \rangle \quad (3.9)$$

onde K_1 representa o percentual do crescimento do dano contabilizado durante a etapa de tração que será mantido após a etapa de compressão, $\langle \cdot \rangle$ representa o operador de Macaulay, expresso pela Equação (3.10).

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Sendo assim, para o caso de tração uniaxial, onde ξ é igual a um, o termo DR assume o valor de um e a taxa de evolução da variável de dano se mantém com no modelo original. Para o caso de compressão uniaxial, onde ξ é igual a menos um, o termo DR assume o valor de $(1 - K_1)$ e a taxa de evolução do dano é reduzida, permitindo que parte do dano contabilizado durante a tração seja mantido ao fim do ciclo completo, conforme apresentado na Figura 3.6.

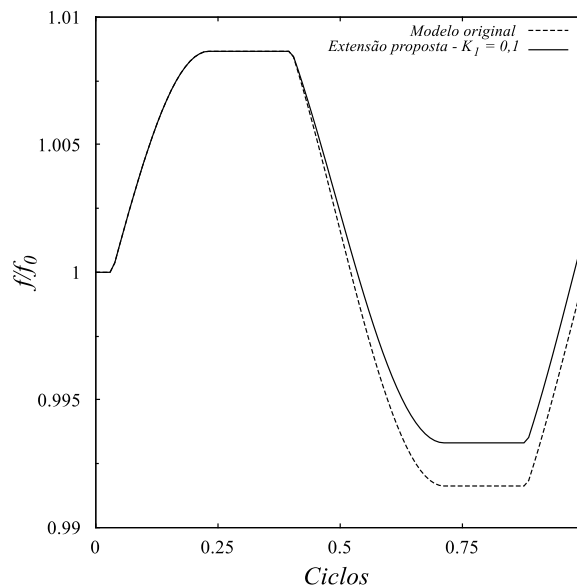


Figura 3.6 – Evolução da variável de dano descrita pela extensão proposta (linha contínua) e pelo o modelo de Gurson (linha tracejada) durante um ciclo de carregamento axial.

Contudo, para condições de cisalhamento puro, em que tanto o terceiro invariante normalizado quanto a tensão hidrostática são nulos, o modelo continua não sendo capaz de prever crescimento do

dano dúctil, mesmo em condições monotônicas. Para superar tal deficiência, foi introduzido à lei de evolução do dano o mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008), apresentado no capítulo anterior na forma da Equação (2.52). Para condições cíclicas, o mecanismo de cisalhamento permite que o modelo preveja crescimento contínuo da variável de dano. Ao contrário do caso axial, em condições cisalhantes o modelo passa a descrever um crescimento sempre positivo do dano, não sendo necessária nenhuma alteração adicional para que ele seja aplicado em condições cíclicas, conforme mostrado na Figura 3.7. Nesse trabalho, a constante k introduzida por Nahshon e Hutchinson (2008) passa a ser chamada de K_2 e utilizada para acelerar ou desacelerar a taxa de evolução do dano em função do número de ciclos.

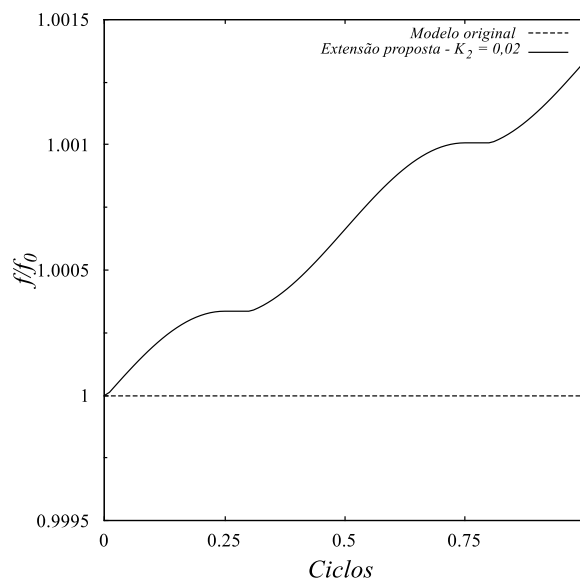


Figura 3.7 – Evolução da variável de dano descrita pela extensão proposta (linha contínua) e pelo o modelo de Gurson (linha tracejada) durante um ciclo de carregamento cisalhante.

Após as alterações, a lei de evolução do modelo para condições multiaxiais cíclicas pode ser escrita na forma da Equação (3.11).

$$\dot{f} = DR(1 - f)\dot{\gamma}\sigma_y f \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\sigma_y}\right) + K_2 f \dot{\epsilon}^p g(\xi) \quad (3.11)$$

3.2.1 Modelo matemático

Esta seção apresenta a formulação matemática da extensão elastoplástica proposta para o caso tridimensional, considerando o modelo de Gurson (1977) com a lei de endurecimento cinemático proposta por Armstrong-Frederick (1966), mecanismo de cisalhamento de Nahshon e Hutchinson (2008) e efeito de acúmulo de dano introduzido por meio da assimetria da lei de evolução da variável de dano.

Decomposição aditiva das deformações

Dentro do contexto de pequenas deformações, assume-se que a deformação total sofrida por um corpo possa ser decomposta em duas parcelas, uma elástica e outra plástica. Essa decomposição aditiva pode ser representada pela soma dos tensores de deformação elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e deformação plástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, conforme a Equação (3.12).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.12)$$

Lei elástica

Para esse estudo, assume-se um comportamento elástico isotrópico para a relação tensão-deformação durante o regime elástico, podendo ser descrito pela lei de Hooke generalizada, definida pela Equação (3.13).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.13)$$

onde \mathbb{D} é o tensor elástico isotrópico.

Função de escoamento

A função de escoamento utilizada nesse trabalho corresponde à extensão proposta por Mear e Hutchinson (1985) para modelo de Gurson (1977) com o objetivo de considerar o endurecimento cinemático. Portanto, a função de escoamento pode ser escrita na forma da Equação (3.14).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \right] \quad (3.14)$$

onde o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, J_2 , passa a ser definido em função do tensor relativo, $\boldsymbol{\eta}$, conforme apresentado na Equações (2.21).

Vetor de fluxo plástico

O vetor de fluxo plástico para a extensão proposta é definido conforme a Equação (2.5). Portanto, derivando a função de escoamento apresentada na Equação (3.14) em relação ao tensor das tensões de Cauchy (procedimento detalhado no Anexo I), o vetor de fluxo plástico do modelo é expresso pela Equação (3.15).

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\eta} + \frac{\sigma_y}{3} f \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (3.15)$$

O vetor de fluxo plástico pode ser decomposto em parcelas desviadora e hidrostática, conforme apresentado na Equação (3.16).

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + N_v \mathbf{I} \quad (3.16)$$

onde as parcelas desviadora e hidrostática são definidas pelas Equações (3.17) e (3.18).

$$\mathbf{N}_d = \boldsymbol{\eta} \quad (3.17)$$

$$N_v = \frac{\sigma_y}{3} f \operatorname{senh} \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \quad (3.18)$$

Lei de evolução do fluxo plástico

A lei de fluxo plástico para a extensão proposta é definida conforme a Equação (2.7). Logo, substituindo a Equação (3.15) na (2.7), a lei de fluxo plástico do modelo passa a ser expressa na forma da Equação (3.19) .

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\eta} + \frac{\sigma_y}{3} f \operatorname{senh} \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right] \quad (3.19)$$

Deformação plástica equivalente

A lei de evolução para a deformação plástica equivalente é determinada através da Equação (3.20).

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (3.20)$$

Portanto, para o modelo que está sendo elaborado ela é definida pela Equação (3.21) (procedimento detalhando no Anexo II).

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f \operatorname{senh} \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (3.21)$$

Lei de evolução do endurecimento cinemático

A lei de evolução para o endurecimento cinemático adotada nesse trabalho foi proposta por Armstrong-Frederick (1966) e é expressa pela Equação (3.8).

Lei de evolução da variável de dano

O crescimento da variável de dano da extensão proposta é regido pela lei de evolução expressa pela Equação (3.11).

Lei da complementaridade de Kuhn-Tucker

A condição de complementaridade de Kuhn-Tucker é parte fundamental da modelagem do comportamento elastoplástico e estabelece que a evolução da deformação plástica pode ocorrer somente quando o estado de tensão estiver definido sobre a superfície de escoamento. Formalmente, essa relação é expressa como:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \phi \leq 0; \dot{\gamma}\phi = 0$$

Portanto, se $\phi < 0$, situação em que o estado de tensão está no regime elástico, $\dot{\gamma}$ deve ser nulo para que o produto $\dot{\gamma}\phi$ ser igual a zero, não havendo evolução da deformação plástica. Por outro lado, quando há evolução da deformação plástica, $\dot{\gamma} > 0$, é necessário que ϕ seja igual a zero, significando que o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento. A formulação matemática da extensão proposta nesse capítulo é apresentada de maneira resumida no Quadro 3.1.

Quadro 3.1- Extensão do modelo de Gurson para condições cíclicas.

1.	Decomposição aditiva da deformação;		
		$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$	
2.	Lei elástica;		
		$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	
3.	Função de escoamento;		
		$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]$	
	onde		
	$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}$	$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$	
	com		
		$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta}$	
4.	Lei de fluxo plástico;		
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[\dot{\gamma} \sigma_y f \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right] \mathbf{I}$	
5.	Lei de evolução das demais variáveis internas;		
		$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \boldsymbol{\beta}$	
		$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}$	
		$\dot{f} = DR(1-f) \dot{\gamma} \sigma_y f \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) + K_2 f \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p g(\xi)$	
	onde		
	$DR = (1 - K_1) + K_1 \langle \xi \rangle$	$g(\xi) = 1 - \xi^2$	
6.	Lei da complementaridade de Kuhn-Tucker:		
	$\dot{\gamma} \geq 0;$	$\phi \leq 0;$	$\dot{\gamma}\phi = 0.$

3.3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

A utilização de modelos constitutivos com comportamento dependente da trajetória, como é o caso da extensão proposta na seção anterior, exige a adoção de estratégias numéricas para solução do conjunto de equações que os compõem, uma vez que as soluções analíticas para esse tipo de problema são muitas das vezes desconhecidas. A estratégia adotada nesse trabalho consiste na formulação de um procedimento de integração numérica capaz de atualizar as variáveis internas conhecidas no tempo t_n para obtenção das variáveis internas no tempo t_{n+1} , onde o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é conhecido. Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ se base no esquema implícito de Euler (Simo & Hughes, 1998).

O processo para atualização das tensões e demais variáveis internas é realizado por meio de um algoritmo de retorno que segue a metodologia da decomposição do operador (Simo & Hughes, 1998; de Souza Neto, et al. 2008). Essa metodologia consiste na divisão do algoritmo em duas partes: Um preditor elástico, onde, a partir de um incremento de deformação conhecido, se constrói um chamado estado de tentativa assumindo o problema como completamente elástico, e um corretor plástico, onde, a partir da violação da condição de escoamento, uma correção do estado elástico previamente construído é proposta com base na solução do sistema não linear de equações formado pela lei elástica e as equações de evolução de algumas variáveis internas. Essa metodologia é especialmente adequada para a integração numérica do problema de evolução e tem sido amplamente utilizado na plasticidade computacional. Por sua vez, o método de Newton-Raphson foi escolhido para resolver o sistema de equações devido às taxas quadráticas de convergência alcançadas, resultando em procedimentos de mapeamento de retorno computacionalmente eficientes.

3.3.1 Algoritmo de retorno

Nesta seção é apresentada a elaboração do algoritmo de retorno para a formulação matemática da extensão do modelo original de Gurson (1977) para aplicação em condições multiaxiais cíclicos. O primeiro passo é a construção de um estado elástico de tentativa, onde o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é assumido como puramente elástico. O tensor das deformações elásticas e as demais variáveis internas que compõem o estado de tentativa são dadas pelas Equações de (3.22) à (3.26).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (3.23)$$

$$f_{n+1}^{trial} = f_n \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\beta}_n \quad (3.25)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\,trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \quad (3.26)$$

Para o cálculo do tensor das tensões de tentativa, o tensor das deformações elásticas de tentativa foi dividido em duas partes, uma desviadora e outra hidrostática, como mostrado pela Equação (3.27).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial} + \frac{1}{3} \varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial} \mathbf{I} \quad (3.27)$$

onde as parcelas hidrostática e desviadora são definidas pelas Equações (3.28) e (3.29).

$$\varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial} = tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}) \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \frac{1}{3} \varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial} \mathbf{I} \quad (3.29)$$

Utilizando as Equações (3.28) e (3.29) é possível determinar o tensor das tensões desviadoras e a tensão hidrostática no estado de tentativa na forma das Equações (3.30) e (3.31).

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial} \quad (3.30)$$

$$p_{n+1}^{trial} = K \varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial} \quad (3.31)$$

onde as constantes do material G e K representam o módulo de cisalhamento e o módulo volumétrico, respectivamente. Ambas constantes podem ser definidas a partir do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson do material, conforme apresentado nas Equações (3.32) e (3.33).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.32)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.33)$$

Finalmente, o tensor das tensões de tentativa é definido pela soma do tensor das tensões desviadoras com a tensão hidrostática, como mostrado na Equação (3.34).

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} + p_{n+1}^{trial} \mathbf{I} \quad (3.34)$$

A próxima etapa é verificar se o tensor das tensões de tentativa calculado está dentro ou fora da superfície de escoamento definida pela Equação (3.35).

$$\phi_{n+1}^{trial} = J_{2n+1}^{trial} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f_{n+1}^{trial^2} - 2f_{n+1}^{trial} \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}^{trial}}{\sigma_y}\right) \right] \quad (3.35)$$

onde J_{2n+1}^{trial} é o segundo invariante do tensor relativo, $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$, e é definido pela Equação (3.36).

$$J_{2n+1}^{trial} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} \quad (3.36)$$

Se $\phi_{n+1}^{trial} \leq 0$, o estado elástico de tentativa é de fato elástico e pode ser assumido como o estado atualizado no tempo t_{n+1} , logo, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Caso contrário, se $\phi_{n+1}^{trial} > 0$, é necessário ativar o corretor plástico para obtenção dos valores atualizados das variáveis do problema. A correção do estado de tentativa é realizada pela subtração do incremento da deformação plástica no tensor das deformações elásticas de tentativa, que pode então ser expresso pela Equação (3.37).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.37)$$

onde o incremento de deformação plástica, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$, é determinado pela Equação (3.38), com base na lei de fluxo plástico e adotando o incremento do multiplicador plástico, $\Delta\gamma$.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.38)$$

Portanto, os tensores das deformações elásticas e plásticas passam a ser escritos na forma das Equações (3.39) e (3.40).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.40)$$

Por sua vez, o tensor das deformações elásticas pode ser dividido em duas parcelas, uma desviadora e outra hidrostática, expressas pelas Equações (3.41) e (3.42).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{d_{n+1}} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^e = \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} - \Delta\gamma N_{v_{n+1}} \quad (3.42)$$

onde $N_{d_{n+1}}$ e $N_{v_{n+1}}$ são as parcelas desviadora e hidrostática da lei de fluxo plástico, definidas pelas Equações (3.43) e (3.44).

$$N_{d_{n+1}} = \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (3.43)$$

$$N_{v_{n+1}} = \frac{\sigma_y}{3} f_{n+1} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \quad (3.44)$$

Logo, o tensor das tensões desviadoras e a tensão hidrostática passam a ser definidos pelas Equações (3.45) e (3.46).

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}} \quad (3.45)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial} - K\Delta\gamma N_{v_{n+1}} \quad (3.46)$$

O tensor das tensões permanece sendo definido como a soma do tensor das tensões desviadoras e da tensão hidrostática, conforme mostrado na Equação (3.47).

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} p_{n+1} \mathbf{I} \quad (3.47)$$

A deformação plástica equivalente, variável de dano e o tensor de endurecimento cinemático são obtidos a partir das Equações de (3.48) à (3.50).

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} + \Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (3.48)$$

$$f_{n+1} = f_{n+1}^{trial} + DR(1 - f_{n+1})\Delta\gamma f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) + g(\xi)_{n+1} K_2 f_{n+1} \Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (3.49)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} + \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma (N_{d_{n+1}} + N_{v_{n+1}} \mathbf{I}) - b \Delta\bar{\varepsilon}^p \boldsymbol{\beta}_{n+1} \quad (3.50)$$

onde o incremento de tensão plástica equivalente, $\Delta\bar{\varepsilon}^p$, é definido pela Equação (3.51).

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \sqrt{A} \quad (3.51)$$

onde \sqrt{A} representa a Equação (3.52).

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f_{n+1} \sinh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (3.52)$$

Por fim, a função de escoamento no estado real é definida de acordo com a Equação (3.53).

$$\phi_{n+1} = J_{2n+1} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right) \right] \quad (3.53)$$

Para obtenção dos valores atualizados das variáveis \mathbf{S}_{n+1} , p_{n+1} , f_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ é necessário resolver o sistema não linear de formado pelas Equações (3.45), (3.46), (3.49), (3.50) e (3.53). O algoritmo geral para integração numérica da extensão proposta é apresentado de forma resumida no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

1. Dado um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e as variáveis de estado no t_n , determinar o estado elástico de tentativa;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\beta}_n \qquad f_{n+1}^{trial} = f_n \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + p_{n+1}^{trial} \mathbf{I}$$

onde

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial} \qquad p_{n+1}^{trial} = K\varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial}$$

2. Verificar a admissibilidade plástica;

$$\phi_{n+1}^{trial} = J_{2n+1}^{trial} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f_{n+1}^{trial\,2} - 2f_{n+1}^{trial} \cosh \left(\frac{3 p_{n+1}^{trial}}{2 \sigma_y} \right) \right]$$

Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*_{n+1})^{trial}$;
Se $\phi^{trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno.

3. Algoritmo de retorno: Resolver o Sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo com incógnitas \mathbf{S}_{n+1} , p_{n+1} , $\Delta\gamma$, f_{n+1} e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{d\,n+1} \\ p_{n+1} - p_{n+1}^{trial} + K\Delta\gamma N_{v\,n+1} \\ J_{2n+1} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right) \right] \\ f_{n+1} - f_{n+1}^{trial} - DR(1 - f_{n+1})\Delta\gamma f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right) - g(\xi)_{n+1} K_2 f_{n+1} \Delta\gamma \sqrt{A} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} - \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma (\mathbf{N}_{d\,n+1} + N_{v\,n+1} \mathbf{I}) + b\Delta\gamma \sqrt{A} \boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

onde

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f_{n+1} \sinh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}$$

continuação do Quadro 3.2.

<p>4. Atualizar as variáveis internas:</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}$
<p>5. Fim</p>	

Adotando o de método de Newton-Raphson para solução do problema, o sistema de equações pode ser reescrito na forma de um sistema linear, conforme apresento pela Equação (3.54).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^j \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{S}_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{bmatrix}^{j+1} = - \begin{bmatrix} R_{\mathbf{S}_{n+1}} \\ R_{p_{n+1}} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^j \quad (3.54)$$

onde as equações residuais são definidas pelas Equações de (3.55) à (3.59).

$$R_{\mathbf{S}_{n+1}} = \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{d_{n+1}} \quad (3.55)$$

$$R_{p_{n+1}} = p_{n+1} - p_{n+1}^{trial} + K\Delta\gamma N_{v_{n+1}} \quad (3.56)$$

$$R_{\Delta\gamma} = J_{2_{n+1}}^{trial} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \right] \quad (3.57)$$

$$R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_{n+1}^{trial} - DR(1 - f_{n+1})\Delta\gamma f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) - g(\xi)_{n+1} K_2 f_{n+1} \Delta\gamma \sqrt{A} \quad (3.58)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} = \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} - \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma (\mathbf{N}_{d_{n+1}} + N_{v_{n+1}} \mathbf{I}) + b\Delta\gamma \sqrt{A} \boldsymbol{\beta}_{n+1} \quad (3.59)$$

O sistema linear apresentado pela Equação (3.54) é composto por uma matriz com as derivadas de cada equação residual em relação as incógnitas do problema na iteração j . Ela é multiplicada por um vetor com os valores incrementais de cada incógnita na iteração $j + 1$ e o vetor no lado direito representa os valores das equações residuais na iteração j . Na a primeira iteração, $j = 0$, o estado de tentativa anteriormente construído é assumido como estado inicial do sistema. A cada iteração os valores das

variáveis são atualizados pela adição dos incrementos $\delta(*)_{n+1}$ obtidos a partir da resolução do sistema de equações. Esse procedimento se repete até que o erro relativo estimado para cada incógnita do sistema seja menor que o valor de tolerância pré-estabelecido. O erro relativo pode ser calculado de maneira geral por meio da Equação (3.60).

$$erro = \frac{|\delta(*)_{n+1}^{(j+1)} - \delta(*)_{n+1}^{(j)}|}{|\delta(*)_{n+1}^{(j)}|} \quad (3.60)$$

O algoritmo geral para solução do sistema de equações pelo método de Newton-Raphson é apresentado de forma resumida no Quadro 3.3.

Quadro 3.3 - Algoritmo de Newton-Raphson para solução do sistema de equações.

1. Dado o estado de tentativa como parâmetros iniciais;

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \quad p_{n+1}^{(0)} = p_{n+1}^{trial} \quad f_{n+1}^{(0)} = f_n \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}_n$$

2. Resolver o sistema de equações pelo método de Newton-Raphson;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^j \cdot \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{bmatrix}^{j+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{p_{n+1}} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^j$$

3. Calcular;

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(j+1)} = \mathbf{S}_{n+1}^{(j)} + \delta \mathbf{S}_{n+1}^{(j+1)} \quad p_{n+1}^{(j+1)} = p_{n+1}^{(j)} + \delta p_{n+1}^{(j+1)} \quad f_{n+1}^{(j+1)} = f_{n+1}^{(j)} + \delta f_{n+1}^{(j+1)}$$

$$\Delta\gamma^{(j+1)} = \Delta\gamma^{(j)} + \delta \Delta\gamma^{(j+1)} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(j+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(j)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(j+1)}$$

4. Verificar a convergência;

$$erro = \frac{|\delta(*)_{n+1}^{(j+1)} - \delta(*)_{n+1}^{(j)}|}{|\delta(*)_{n+1}^{(j)}|}$$

Se $erro \leq tolerância$, então retornar para o Quadro 3.2;
Caso contrário, repetir passo (2).

Mais detalhes sobre a obtenção das derivadas que compõem o sistema linear apresentado pela Equação (3.54) podem ser encontrados no Anexo III.

3.4 AVALIAÇÃO DA EXTENSÃO PROPOSTA

Com base no algoritmo de retorno apresentado na seção anterior, foi criada uma rotina em linguagem Fortran que permite a aplicação da extensão proposta na simulação da resposta constitutiva do material em um ponto de Gauss. A avaliação da sua capacidade em descrever o estado de tensão e a evolução do dano em condições de carregamentos cíclicos foi feita com base em resultados obtidos a partir de simulações de um modelo de célula unitária realizadas no *software* de elementos finitos ABAQUS. Para que fosse possível descrever o processo de degradação sofrido pela célula unitária durante as simulações, foi adotado um modelo de célula cilíndrica com um defeito central na forma de um vazio esférico. Assim, a evolução da variável de dano prevista pela extensão proposta pode ser comparada ao nível de danificação observado na célula unitária, definido como a razão entre suas frações volumétricas de vazio antes e depois da aplicação do carregamento.

3.4.1 Modelo de célula unitária

O comportamento micromecânico de materiais dúcteis pode ser estudado por meio da representação da sua microestrutura como um arranjo de células unitárias idênticas dispostas em um padrão regular. Embora na vida real essas células não possuam tamanhos e propriedades exatamente iguais, Ristinmaa (1997) sugere que os cálculos baseados em uma única célula são suficientes para auxiliar na compreensão do comportamento macroscópico do material. Modelos em elementos finitos de células unitárias cúbicas (McMeeking e Horn, 1990; Kuna e Sun, 1997; Mbiakop et al., 2015) e até mesmo esféricas (Lacroix et al., 2016) são encontrados na literatura. Contudo, a utilização de modelos de células prismáticas hexagonais é mais frequente, pois essa configuração de célula pode ser simplificada para a forma de um cilindro circular, permitindo o cálculo axissimétrico, conforme apresentado na Figura 3.8.

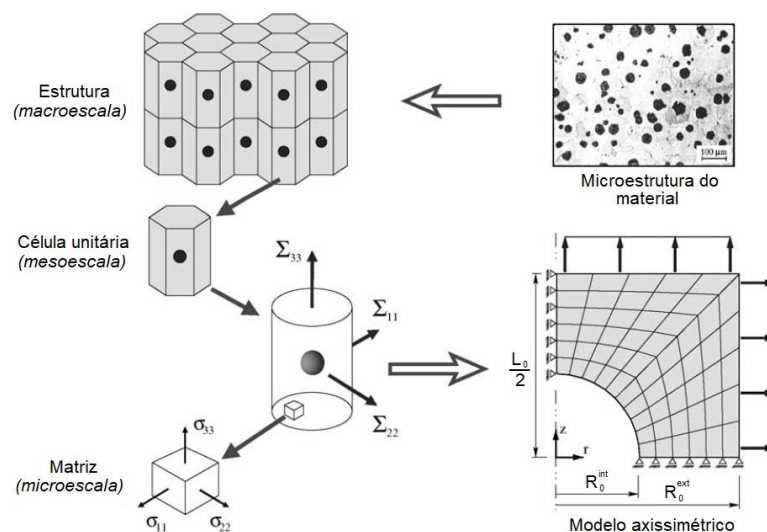


Figura 3.8 – Representação da microestrutura de um material dúctil usando um modelo célula unitária (adaptado de Rabold e Kuna, 2005).

O estudo comparativo realizado por Tvergaard (1982) mostrou que simulações em elementos finitos de modelos de células unitárias cilíndricas com um vazio esférico central são capazes de apresentar boa correlação com os resultados obtidos pelo modelo constitutivo de Gurson em condições de carregamentos monotônicos e estado plano de deformações. Isso motivou a utilização dessa abordagem no estudo do comportamento microestrutural de materiais dúcteis, permitindo uma melhor compreensão dos mecanismos de crescimento e coalescência de vazios e conseqüentemente, modificações e melhorias para o modelo de Gurson, como no caso dos trabalhos de Koplik e Needleman (1988) e Brocks et al. (1995).

Como já mencionado, as primeiras simulações numéricas utilizando modelos de célula unitária para estudo do comportamento de defeitos sob condições cíclicas foram conduzidas por Gilles et al. (1992). Utilizando um modelo de célula muito parecido ao usado por Tvergaard (1982), exceto pelo fato dele ter sido adaptado para considerar carregamentos cíclicos, Gilles et al. (1992) observaram pela primeira vez o fenômeno de *ratcheting* de porosidade e abriram caminho para o desenvolvimento de novas pesquisas na busca de uma melhor compreensão acerca da micromecânica dos defeitos em condições cíclicas.

Para avaliar a capacidade preditiva da extensão proposta para o modelo de Gurson nesse capítulo, foi realizado um estudo comparativo entre as respostas obtidas por ela e por simulações em elementos finitos de um modelo de célula unitária, inspirado no trabalho realizado por Steglich et al. (2005), onde eles investigam a possibilidade de simular o crescimento do defeito presente na célula unitária, quando submetida a carregamentos cíclicos, por meio de dois modelos constitutivos com variável de dano acoplado, o modelo LPD (1995) e o modelo de mecânica do dano contínuo desenvolvido por Pironi e Bonora (2003).

As simulações foram realizadas utilizando o *software* ABAQUS e, aproveitando a simetria do problema, apenas um quarto da seção transversal da célula unitária foi discretizado, por meio de 697 elementos axissimétricos quadriláteros lineares com integração reduzida do tipo CAX4R. A malha do modelo em elementos finitos na sua configuração inicial é apresentada na Figura 3.9.

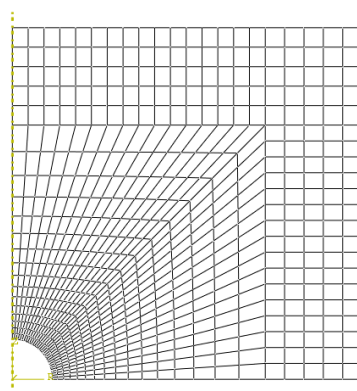


Figura 3.9 – Modelo axissimétrico em elementos finitos da célula unitária cilíndrica com vazio esférico.

O carregamento cíclico foi imposto através da prescrição de deslocamento uniforme axial ao topo da célula. Para manter a geometria da estrutura compatível e permitir que o valor absoluto da razão

de triaxialidade se mantivesse constante, foram aplicadas restrições à lateral da célula para que ela se movesse livremente na direção radial, mas permanecendo sempre reta e perpendicular ao topo da célula. A razão entre as frações volumétricas de vazio atual e inicial da célula unitária foi utilizada para quantificar o nível de degradação sofrido por ela. Por sua vez, a fração volumétrica de vazio foi definida como sendo a razão entre o volume do vazio e o volume total da célula cilíndrica, conforme apresentado na Equação (3.61).

$$f = \frac{V_{vazio}}{V_{célula}} = \frac{4}{3} \frac{R_{int}^3}{HR_{ext}^2} \quad (3.61)$$

onde R_{int} representa o raio do vazio esférico e R_{ext} e H são, respectivamente, o raio e a altura da célula cilíndrica. Os valores desses parâmetros foram definidos de tal forma que a fração volumétrica de vazio inicial da célula unitária fosse de aproximadamente 0,001, conforme adotado por Steglich et al. (2005).

3.4.2 Propriedades materiais

Assumindo que a matriz da célula unitária é constituída por um material elastoplástico que obedece a teoria de plasticidade de von Mises, o aço 20MnNiMo55 foi escolhido para representá-la. Suas propriedades mecânicas foram retiradas do trabalho realizados por Steglich et al. (2005), que adota uma combinação de endurecimento cinemático e isotrópico para descrever o encruamento cíclico da matriz, sendo o endurecimento cinemático comandado pela lei de Ziegler (1959), definida pela Equação (3.62).

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left[\frac{H^k}{\sigma_y^{iso}} \boldsymbol{\eta} - b\boldsymbol{\beta} \right] \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.62)$$

onde a lei de endurecimento isotrópico é definida em função da deformação plástica equivalente através da relação analítica apresentada na Equação (3.63).

$$\sigma_y^{iso} = \sigma_y + \sigma_\infty [1 - \exp(-c\bar{\epsilon}^p)] \quad (3.63)$$

Os parâmetros de endurecimento e propriedades mecânicas do aço 20MnNiMo55 utilizados nas simulações em elementos finitos estão listados na Tabela 3.1. Eles foram calibrados por Steglich et al. (2005) a partir de ensaios cíclicos realizados em corpos de prova cilíndricos. Contudo, devido ao fato da extensão para o modelo de Gurson proposta na seção anterior considerar o endurecimento da matriz metálica como sendo puramente cinemático e comandado pela lei de Armstrong-Frederick (1966), os parâmetros de endurecimento tiveram que ser novamente calibrados com base nos laços de histerese estabilizados observados durante as simulações do modelo de célula unitária. Os novos parâmetros

encontrados para o aço 20MnNiMo55, assumindo o decimo quinto ciclo como sendo o ciclo estabilizado, são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas do aço 20MnNiMo55 para endurecimento combinado.

Símbolo	Descrição	Valor
E	Módulo de elasticidade	204 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,3
σ_y	Tensão de escoamento inicial	396,6 MPa
σ_∞	Raio de saturação da superfície de escoamento	471,6 MPa
c	Expoente de endurecimento isotrópico	8
H^k	Módulo de endurecimento cinemático	7500 MPa
b	Coefficiente de endurecimento cinemático	70

Tabela 3.2 – Propriedades mecânicas do aço 20MnNiMo55 para endurecimento cinemático puro.

Símbolo	Descrição	Valor
σ_y^*	Tensão de escoamento cíclico	847 MPa
H^k	Módulo de endurecimento cinemático	8490 MPa
b	Coefficiente de endurecimento cinemático	89

3.5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 3.10 compara os laços de histerese estabilizados para cinco diferentes amplitudes de deformação axial observados durante as simulações em elementos finitos do modelo de célula, assumindo uma combinação de endurecimentos para descrever o comportamento da matriz metálica, e os laços obtidos por meio da extensão proposta para o modelo de Gurson, considerando apenas o endurecimento cinemático do material. É possível observar que, para a faixa de amplitude de deformação considerada, os parâmetros calibrados para endurecimento cinemático puro permitiram que a extensão proposta descrevesse de maneira satisfatória os estados de tensão e deformação apresentados pela célula unitária durante as simulações, assumindo um comportamento de endurecimento combinado para a matriz metálica.

A avaliação da habilidade da extensão proposta em descrever a evolução do dano dúctil em condições axiais cíclicas foi realizada por meio da comparação entre o crescimento da variável de dano previsto por ela ao final de cada ciclo e os níveis de danificação sofridos pela célula unitária quando submetida a um carregamento cíclico como amplitude de deformação axial constante igual à 1,5% e razão de carregamento -1, a exemplo de Steglich et al. (2005). Com o intuito de mensurar a influência do parâmetro K_1 sobre a taxa de evolução da variável de dano, foram realizadas simulações adotando os valores de 0, 0,035 e 0,05 para o parâmetro. As evoluções das variáveis de dano observadas após quinze ciclos, bem como a degradação da célula unitária, são apresentadas na Figura 3.11. Importante ressaltar que ao definir o parâmetro K_1 igual a zero, a extensão proposta retornou para a forma do modelo original de Gurson (1977).

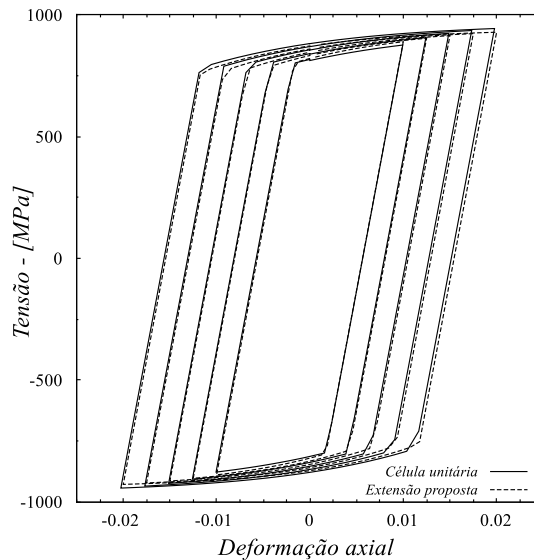


Figura 3.10 – Laços de histerese estabilizados apresentados pelo modelo de célula unitária, utilizando os parâmetros da Tabela 3.1, e pela extensão proposta, utilizando os parâmetros da Tabela 3.2.

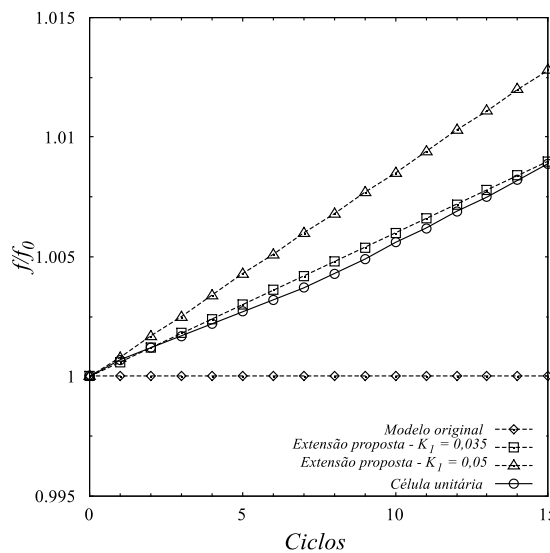


Figura 3.11 – Evolução da variável de dano em função do número de ciclos em condição de carregamento axial cíclico.

A extensão proposta se mostrou apta a descrever o processo de danificação experimentalado pela célula unitária ao ser submetida a um carregamento axial cíclico, cumprindo seu objetivo. A escolha adequada do parâmetro K_1 permitiu controlar a taxa de crescimento da variável de dano, proporcionando um bom grau de concordância entre a sua evolução e o nível de degradação apresentado pela célula ao final dos quinze ciclos.

A capacidade da extensão proposta em prever o crescimento do dano dúctil em condições de carregamentos cisalhantes cíclicos foi avaliada de maneira qualitativa, sem o auxílio de simulações em elementos finitos de modelos de células unitárias. Utilizando a rotina em Fortran, foram simulados cinco ciclos de carregamento com amplitude de deformação cisalhante constante igual à 3% e razão de carregamento -1. Três diferentes valores para o parâmetro K_2 foram adotados, eles foram: 0, 0,02 e 0,01. A Figura 3.12 compara a evolução da variável de dano para os três valores de K_2 , onde as linhas

continuas representa o crescimento da variável durante os ciclos, já as linhas tracejadas representam o crescimento contabilizado ao fim de cada ciclo.

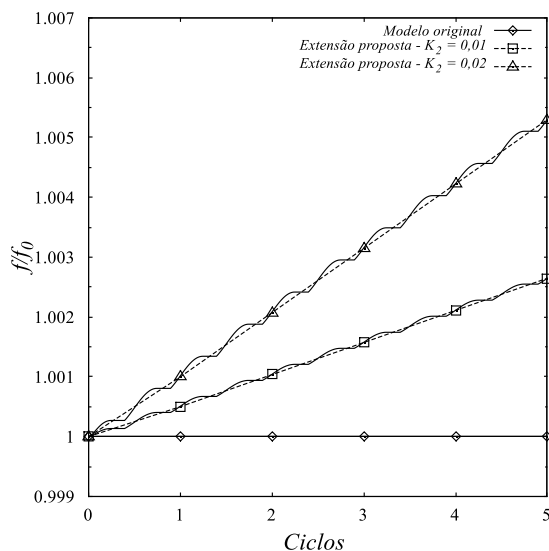


Figura 3.12 – Evolução da variável de dano em função do número de ciclos em condição de carregamento cisalhante cíclico.

A utilização de K_2 com valor igual a zero faz com que a extensão proposta retorne para a forma do modelo original de Gurson (1977) e não preveja nenhuma evolução do dano, mesmo quando aplicado em condições monotônicas. Diferentemente dos casos axiais, em condições de cisalhamento puro, a extensão proposta prevê um crescimento sempre positivo da variável de dano. Contudo, assim como nos casos axiais, a taxa de evolução do dano pode ser facilmente controlada a partir da determinação do parâmetro K_2 . Portanto, a calibração adequada dos parâmetros K_1 e K_2 está diretamente ligada o nível de precisão apresentado pela extensão proposta.

Um ponto forte apresentado pela extensão proposta é o fator dela não demonstrar sinal de uma possível saturação na evolução da variável de dano em função do aumento do número de ciclos, seja em condições axiais ou cisalhantes, diferentemente do modelo LPD (1995), que prevê saturação após poucos ciclos. Essa característica é essencial para a utilização da extensão proposta na previsão de falhas em situações que envolvam um número maior de ciclos de carregamento, como por exemplo, análises de falhas por fadiga.

3.6 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, a inclusão da lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966) e a reformulação da lei de evolução do dano por meio das introduções de um termo dependente do terceiro invariante normalizado, com o papel de promover o crescimento assimétrico da variável de dano

em condições de carregamento axial cíclico, e do mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008), como solução para a incapacidade dos modelos da família Gurson de prever o crescimento do dano dúctil sob condições de baixa triaxialidade, permitiram a elaboração de uma extensão para o modelo de Gurson apta a prever o processo de degradação sofrido por materiais dúcteis quando submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos.

Ao ser aplicada na obtenção da resposta constitutiva do aço 20MnNiMo55 em um ponto de Gauss, a extensão proposta, mediante a calibração adequada dos parâmetros K_1 e K_2 , foi capaz de descrever de maneira satisfatória o estado de tensão e a evolução do dano dúctil, em condições de baixa e alta razão de triaxialidade. Mesmo considerando apenas o endurecimento cinemático do material, ela apresentou resultados em concordância com os observados através de simulações em elementos finitos de um modelo de célula unitária, semelhante ao utilizado por Steglich et al. (2005).

A extensão proposta também demonstrou potencial promissor para aplicações em situações que envolvam um número maior de ciclos de carregamento, tais como estudos de falhas por fadiga, uma vez que ela não apresentou sinal de saturação para a evolução da variável de dano em função do aumento do número de ciclos, diferentemente do modelo LPD (1995).

4 PREVISÕES DE VIDA POR MEIO DE UMA ABORDAGEM INCREMENTAL

Este capítulo propõe uma abordagem incremental para previsões de vida de materiais dúcteis, submetidos à fadiga de baixo número de ciclos, baseadas no fenômeno de acúmulo de dano descrito pela extensão proposta para o modelo de Gurson, apresentada no capítulo anterior. A validação da abordagem proposta é feita por meio da sua aplicação na análise da fadiga em corpos de prova tubulares de parede fina fabricados com dois diferentes materiais, o aço estrutural S460N e o aço SAE 1045 laminado a quente normalizado. Os dados experimentais e as propriedades mecânicas de ambos os materiais utilizados nessa etapa do trabalho foram retirados da literatura. Por fim, a capacidade preditiva da abordagem proposta é avaliada através da comparação entre os valores de vida e amplitudes de tensões previstas numericamente e os resultados experimentais obtidos para seis diferentes trajetórias de carregamentos.

4.1 INTRODUÇÃO

A abordagem tradicional para análises de fadiga multiaxial baseia-se em quatro componentes básicos: um método para obtenção das respostas de tensão e deformação variantes no tempo atuantes sobre o componente analisado, um método de identificação e contagem de ciclos, um parâmetro de dano para mensurar a degradação gerada a cada ciclo e uma lei de acúmulo de dano. Contudo, Socie e Marquis (2000) afirmam que os diferentes modos de falha, adotados pelos autor na elaboração de cada parâmetro de dano, geram limitações para a aplicação desse tipo de abordagem, uma vez que os parâmetros de dano são incapazes de descrever efeitos do material ou carregamento que não são considerados durante a obtenção dos dados experimentais, utilizados em suas calibrações.

Outro problema dessa abordagem está relacionado à necessidade de utilização de métodos de contagem de ciclos e leis de acúmulo de dano, pois, em carregamentos multiaxiais e/ou com amplitude variada, a tarefa de identificação de ciclos muitas vezes não é algo simples e a utilização de leis de acúmulo de dano lineares, como a de Palmgren-Miner (1945), pode não representar o real comportamento do dano por fadiga no material. Como alternativa, a utilização da mecânica do dano em análises de fadiga multiaxial em materiais dúcteis vem ganhando força nas últimas décadas. Desmorat et al. (2007) defendem que a utilização de uma lei de evolução de dano permite uma tratativa mais

flexível e natural do problema, descrevendo a danificação do material como parte integral do comportamento constitutivo do mesmo, além de dispensar a necessidade de métodos arbitrários para contagem de ciclos e acúmulo de dano.

Seguindo uma metodologia incremental, nesse tipo de análise de fadiga, a degradação gradual do material é descrita pelo crescimento ciclo a ciclo da variável interna de dano, acoplada ao modelo constitutivo. Considerando um ponto de Gauss, o modelo calcula o estado de tensão do material e contabiliza o crescimento do dano a cada ciclo de carregamento. Esse processo se repete até que o valor da variável de dano atinja um valor crítico, então entende-se que o número de ciclos simulados até o momento é a vida em fadiga do material e a análise é encerrada. A abordagem proposta é apresentada de forma resumida pelo fluxograma da Figura 4.1.

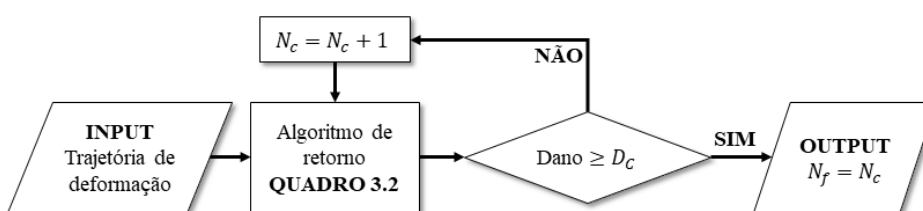


Figura 4.1 – Fluxograma explicativo da abordagem incremental de previsão de vida em fadiga.

Uma das principais características desse tipo de abordagem é que, além de prever o momento da falha de um componente mecânico como nas abordagens tradicionais de fadiga, ela realiza um acompanhamento direto do processo de danificação sofrido por ele, descrevendo a evolução do dano por fadiga a cada ciclo de carregamento até o momento da falha. Esse tipo de informação permite a elaboração de planos de manutenção mais eficientes, onde a substituição ou reparação de um dado componente passa a ser realizada por ele ter alcançado um nível de deterioração crítico e não mais por ter atingido um tempo de utilização definido previamente como sendo sua vida útil, mesmo ainda estando em condições de uso.

Os modelos constitutivos com variável de dano acoplado podem ser divididos em dois grupos principais, de acordo com a metodologia adotada para definição da sua variável de dano. Os modelos baseados na micromecânica dos defeitos fundamentam-se nos mecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de defeitos para descrever o processo de degradação sofrido por um material. O modelo mais conhecido desse grupo é o proposto por Gurson (1977), juntamente com suas extensões fenomenológicas propostas por Chu e Needleman (1980), Tvergaard (1981,1982) e Tvergaard e Needleman (1984) que resultaram no modelo GTN.

Nos modelos baseados na mecânica do dano contínuo (CDM), os efeitos do dano são explicados por uma variável interna, proposta com base em fundamentos da termodinâmica, que promove uma redução na rigidez do material para simular sua perda de capacidade de carga durante sua degradação. Dentro desse grupo vale ressaltar os modelos propostos por Krajcinovic (1983), Lemaitre (1985), Lemaitre e Chaboche (1985) e Rousselier (1987). Os modelos de dano baseados na CDM já são bastante utilizados em análises de fadiga, sendo aplicados tanto em previsões de vida em fadiga de baixo ciclo,

por meio das abordagens propostas por Wang e Lou (1990), Chow e Wei (1991), Bonora e Nemaz (1998), Lopes e Malcher (2017) e Castro e Bemfica (2018), quanto em fadiga de alto ciclo, como apresentado nos trabalhos propostos por Lemaitre, et al. (1999) e Lemaitre e Desmorat (2005).

Contudo, a aplicação de modelos baseados na micromecânica dos defeitos nesses tipos de análises ainda é pouco explorada. Os trabalhos propostos por Pirondi et al. (2006), Kanvinde e Deierlein (2007), Meschke e Hommel (2010), Lukhi et al. (2018a, 2018b) e Sandoval et al. (2019) se destacam por descreverem a evolução do dano por fadiga em materiais dúcteis com base nos conceitos de nucleação e crescimento de defeitos, permitindo a realização de previsões de vida, mesmo a falha por fadiga sendo comandada por mecanismos diferentes, como a movimentação das discordâncias e formação de planos de deslizamento.

Utilizando o modelo LPD (1995) associando a uma forte lei de nucleação de vazios, Pirondi et al. (2006) simularam em elementos finitos a resposta macroscópica local e a evolução do dano em corpos de provas entalhados submetidos à plasticidade cíclica. As vidas previstas apresentaram boa concordância com as vidas experimentais. Em contra partida, o modelo sempre previu a inicialização da falha no centro do corpo de prova, em desacordo com o observado experimentalmente.

Seguindo uma abordagem de variável de dano desacoplada, Kanvinde e Deierlein (2007) propuseram uma extensão do modelo de crescimento de vazios de Rice e Tracey (1969) capaz de prever vidas em condições de fadiga de ultra baixo ciclo. Com base nos níveis de deformação plástica e razão de triaxialidade, o modelo calcula o crescimento de vazios no material e o compara com um valor crítico, definido a partir do valor da fração volumétrica de vazios observada no momento da fratura monotônica. Portanto, Kanvinde e Deierlein (2007) assumem que a fratura do material ocorrerá no momento em que esse valor crítico de fração volumétrica de vazios for atingido.

Meschke e Hommel (2010) propuseram um estratégia híbrida que combina análises realizadas à nível microscópico, por meio de modelos de células unitárias, com o modelo LPD (1995) para prever a vida de estruturas metálicas submetidas à fadiga de ultra baixo ciclo através do crescimento do dano descrito pelo modelo ao longo dos ciclos. Os resultados provenientes da análise da célula unitária são usados na calibração dos parâmetros do modelo, validado em seguida com base em resultados experimentais provenientes de ensaios de fadiga em corpos de prova entalhados. Por fim, com o intuito de demonstrar a aplicabilidade da estratégia proposta em problemas estruturais reais, ela foi utilizada na avaliação da integridade de um vaso de pressão esférico submetido a cargas cíclicas, simulando a ação de um terremoto.

Mais recentemente, Lukhi et al. (2018a) modelaram o mecanismo de falha por fadiga de baixo ciclo em uma matriz de ferro fundido nodular por meio de simulações em elementos finitos utilizando um modelo de célula unitária, obtendo previsões de vidas em concordância com os dados experimentais. Em seguida, Lukhi et al. (2018b) investigaram os efeitos das propriedades mecânicas, temperatura e sequencia de carregamento sobre o comportamento do material em fadiga.

Por sua vez, Sandoval et al. (2019) sugeriram uma extensão do modelo de Gurson para aplicação em condições cíclicas parecida com a proposta nesse trabalho. Contudo, eles optaram pela utilização do

mecanismo de cisalhamento proposto por Xue (2008) e o foco principal do estudo era a previsão de vidas em fadiga, sob condições de *fretting*, a partir da análise do campo de deformação plástica observado em corpos de prova do tipo *dog-bone*, feitos com a liga de alumínio 7050-T7451.

O objetivo desse capítulo é propor, seguindo uma metodologia incremental, a realização de previsões da vida em fadiga baseando-se no fenômeno de acúmulo de dano, descrito pela extensão proposta para o modelo de Gurson, para descrever o processo de degradação sofrido por componentes mecânicos, abstraindo a mecânica da falha por fadiga em materiais dúcteis. A validação dessa abordagem é feita com base em dados experimentais, retirados da literatura, gerados a partir de ensaios de fadiga realizados em corpos de prova tubulares de parede fina submetidos a trajetórias de deformações axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais e não proporcionais.

Esse capítulo é estruturado da seguinte forma: Na seção 4.2 são apresentados os dados experimentais retirados da literatura para o aço estrutural S460N e o aço SAE 1045 laminado a quente normalizado. Na seção 4.3 são apresentados os processos de calibração dos parâmetros f_0 , D_C , K_1 e K_2 utilizados pela extensão proposta. A seção 4.4 compara as vidas estimadas pela abordagem proposta e as vidas observadas experimentalmente para ambos os aços. Por fim, a seção 4.5 traz algumas considerações sobre os resultados apresentados.

4.2 VALIDAÇÃO DA ABORDAGEM PROPOSTA

Para validar a abordagem incremental para previsões de vida, ela foi aplicada na análise da fadiga em corpos de prova tubulares de parede fina, fabricados com o aço estrutural S460N e o aço SAE 1045 laminado a quente normalizado, submetidos a ensaios de fadiga realizados por controle de deformação. Os resultados obtidos por ela foram comparados com as vidas observadas experimentalmente utilizando seis diferentes trajetórias de carregamento.

Os dados experimentais e propriedades materiais do aço S460N foram retiradas dos trabalhos realizados por Döring et al. (2006) e Jiang et al. (2007), onde uma série de ensaios de fadiga em corpos de prova tubulares de parede fina foram realizados com o propósito de avaliar a capacidade preditiva de alguns critérios de fadiga. As informações acerca do aço SAE 1045 foram retiradas dos trabalhos realizados por Lesse e Morrow (1985) e Fatemi e Socie (1988). Esses trabalhos fizeram parte de um programa de testes conduzidos pela *Society of Automotive Engineers* (SAE) com o intuito de melhorar o entendimento acerca da vida em fadiga de componentes mecânicos submetidos a estados de tensão multiaxiais.

Assim como nos ensaios de fadiga realizados para o aço S460N, também foram utilizados corpos de prova tubulares de parede fina para os ensaios do aço SAE 1045. Segundo Brown (1978), nesse tipo de corpo de prova a determinação das tensões cisalhantes a partir de um valor de torque aplicado é bastante simples, uma vez que a tensão cisalhante pode ser assumida como uniformemente

distribuída ao longo da parede do corpo de prova. A geometria de um corpo de prova tubular de parede fina padrão é apresentada na Figura 4.2. A Tabela 4.1 traz as medidas adotadas para os corpos de provas utilizados nos trabalhos citados.

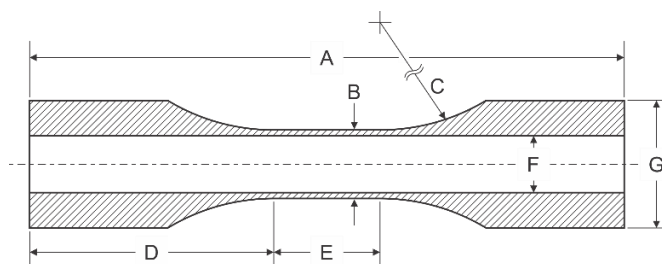


Figura 4.2 – Corpo tubular de parede fina padrão.

Tabela 4.1 – Medidas em milímetros.

Material	A	B	C	D	E	F	G
S460N	297	Ø 41	R 120	142,3	2	Ø 36	65
SAE 1045	210	Ø 30,48	R 86	88	33	Ø 25,4	50

4.2.1 Materiais

As propriedades mecânicas dos aços S460N e SAE 1045 retiradas da literatura são apresentadas de forma resumida na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Propriedades materiais dos aços S460N e SAE 1045.

Símbolo	Descrição	Valor	
		S460N	SAE 1045
E	Módulo de Elasticidade	208,5 GPa	204 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,3	0,3
σ_y	Tensão de escoamento inicial	500 MPa	380 MPa
K'	Coefficiente de resistência cíclica	1115 MPa	1258 MPa
n'	Expoente de encruamento cíclico	0,161	0,208

Para ambos os materiais, os parâmetros da lei de Armstrong-Frederick (1966) foram identificados por meio do ajuste numérico entre as curvas tensão-deformação cíclicas definidas pela relação analítica estabelecida por Chaboche (1986) na forma da Equação (4.1), e a pela relação de Ramberg-Osgood (1943), definida pela Equação (4.2).

$$\sigma_a = \frac{H^k}{b} \tanh(b\varepsilon_a^p) + \sigma_y \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'} \quad (4.2)$$

Os valores os parâmetros da lei de Armstrong-Frederick (1966) encontrados para ambos os materiais são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Parâmetros de endurecimento cinemático obtidos para os aços S460N e SAE 1045.

Símbolo	Descrição	Valor	
		S460N	SAE 1045
σ_y^*	Tensão de escoamento cíclico	279,9 MPa	265,2 MPa
H^k	Módulo de endurecimento cinemático	78010 MPa	31842,2 MPa
b	Coefficiente de endurecimento cinemático	370,6	113,3

Na Figura 4.3 são apresentadas as curvas tensão-deformação cíclicas obtidas os aços materiais por meio da relação de Ramberg-Osgood (1943) e pela lei de Armstrong-Frederick (1966).

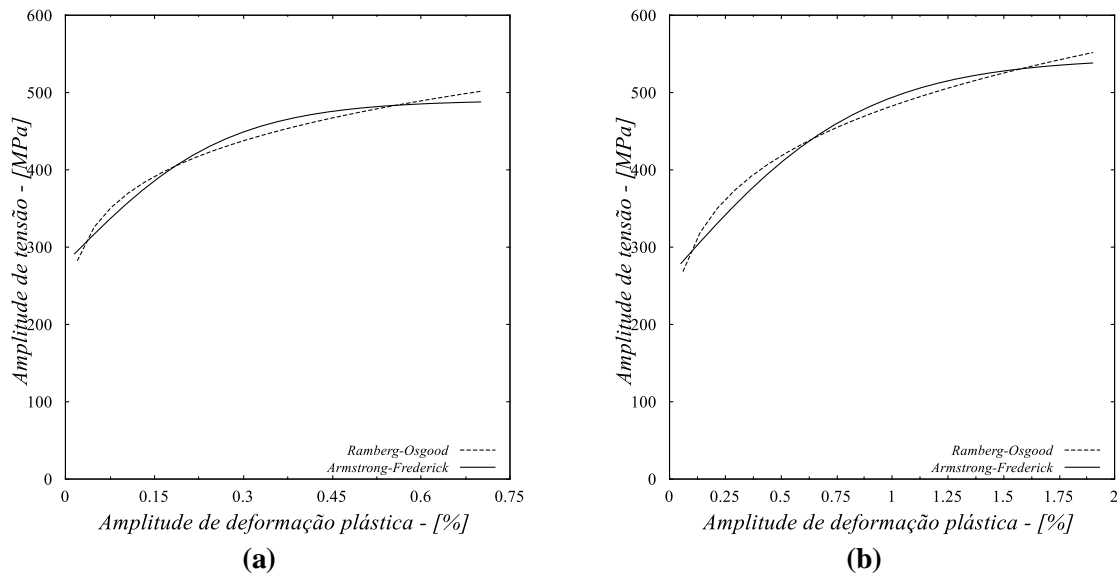


Figura 4.3 - Curvas tensão-deformação cíclicas obtidas para os aços: (a) S460N; (b) SAE 1045.

4.2.2 Trajetórias de carregamento

Os ensaios de fadiga para ambos materiais foram realizados sob controle de deformação e amplitude constante, utilizando diferentes trajetórias de carregamento com razão -1. As seis trajetórias selecionadas para esse trabalho são apresentadas nas Figura 4.4. As trajetórias A e B representam os carregamentos uniaxiais de tração-compressão axial e torção, respectivamente, a trajetória C descreve um carregamento biaxial proporcional e as trajetórias D, E e F, carregamentos biaxiais não proporcionais.

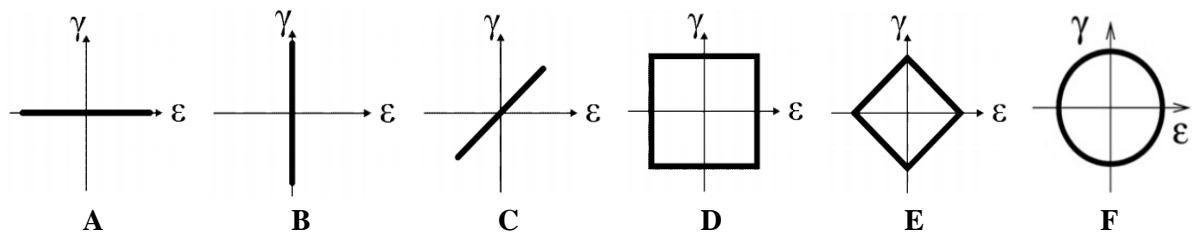


Figura 4.4 – Trajetórias de carregamento utilizadas nas simulações.

4.3 PARÂMETROS DO MODELO

A abordagem proposta requer, além da calibração das propriedades do material, apresentadas na Tabela 4.2, e dos parâmetros da lei de Armstrong-Frederick (1966), apresentados na Tabela 4.3, a calibração de mais quatro parâmetros. Esses parâmetros são o volume inicial de defeitos, f_0 , dano crítico, D_C , parâmetro de recuperação axial, K_1 , e parâmetro de Nahshon-Hutchinson, K_2 .

4.3.1 Volume inicial de defeitos

Devido a extensão proposta, assim como o modelo original de Gurson (1977), não possui um mecanismo responsável por incluir os efeitos da nucleação de novos defeitos, se faz necessário a definição de um estado inicial do material com defeitos pré-existentes que irão evoluir devido a aplicação dos carregamentos até atingirem um valor crítico, representando a falha do material. Nesse trabalho, os estados iniciais de ambos materiais foram definidos com base na fração volumétrica de inclusões não metálicas presentes em suas microestruturas, mais precisamente das inclusões de sulfeto de manganês (MnS). Nakamura (2019) afirma que em aços ferrosos, partículas de fase secundária, tais como sulfetos e óxidos, são muitas vezes responsáveis pela nucleação de defeitos logo no início da aplicação da carga. As inclusões de MnS e outras inclusões de óxido são as principais partículas envolvidas no processo de fratura dúctil, pois segundo Zhang et al. (2018) elas se separam facilmente da matriz metálica durante o processo de deformação, se comportando como vazios.

A definição da fração volumétrica de inclusões de MnS presentes no material pode ser feita por meio de análise metalográfica quantitativa, como os métodos adotados por Decamp et al. (1997) e Nonn e Kalwa (2010). Contudo, esses métodos são bastante complexos e caros, pois exigem equipamentos sofisticados para observação da microestrutura do material e métodos avançados para tratamentos de imagens. Uma alternativa, vastamente explorada para aços ferrosos, é a obtenção da fração volumétrica de inclusões de MnS por meio de um simples cálculo estequiométrico a partir dos teores de Enxofre e Manganês presentes na composição química do material, para isso basta utilizar a formulação proposta por Franklin (1969) e apresentada na forma da Equação (4.3).

$$f_v = 0,054 \left[S(\%) - \frac{0,001}{Mn(\%)} \right] \quad (4.3)$$

onde f_v é a fração volumétrica de inclusões de MnS e $S(\%)$ e $Mn(\%)$ representam, respectivamente, os percentuais de Enxofre e Manganês presentes nos materiais.

O fato de as informações sobre ambos materiais terem sido retiradas da literatura, impossibilitou a realização de análises metalográficas nos materiais, uma vez que não haviam amostras dos materiais disponíveis para tal. Portanto os estados iniciais de ambos os aços foram determinados como sendo as

frações volumétricas de inclusões de MnS calculadas por meio da Equação (4.3) a partir das composições químicas dos aços, apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Composição química dos aços S460N e SAE 1045 (%).

Material	C	Mn	P	S	Si	Cu	Al	Ti	Cr	Ni
S460N	0,20	1,60	0,03	0,025	0,60	0,55	0,02	0,05	0,30	0,80
SAE 1045	0,44	0,70	0,019	0,046	0,23	0,03	0,05	0,002	0,05	0,03

Com base nas composições químicas, os volumes iniciais de defeitos dos aços S460N e SAE 1045 foram definidos como sendo $1,3 \times 10^{-3}$ e $2,4 \times 10^{-3}$, respectivamente.

4.3.2 Dano crítico

Um dos pontos-chaves dessa abordagem é a escolha do critério de parada para a simulação de previsão de vida. Inspirado pelos estudos de Kanvinde e Deierlein (2007), nesse trabalho foi adotada como definição de falha do material o momento em que a variável de dano do modelo atinge o valor da fração volumétrica de vazios observada no material no momento da fratura em condição monotônica, f_F . Devido à dificuldade em encontrar registros na literatura acerca de valores de fração volumétrica de vazios no momento da fratura em condições cíclicas, o uso do valor obtido em condições monotônicas pode ser considerado como uma estimativa inicial razoável.

Na literatura não há um consenso acerca da metodologia para determinação desse parâmetro. A estratégia mais comum é sua calibração por meio do ajuste numérico dos dados experimentais proveniente de um ensaio de tração. Contudo, devido às referências Lesse e Morrow (1985), Fatemi e Socia (1988), Döring et al. (2006) e Jiang et al. (2007) não disponibilizarem as curvas tensão-deformação monotônicas completas de ambos os aços, é inviável a obtenção dos valores de f_F por meio desse método. Alternativamente, na literatura é possível encontrar trabalhos que sugerem valores predefinidos para esse parâmetro. Inicialmente, Tvergaard e Needleman (1984), com base nos estudos realizados por Andersson (1977), sugeriram que uma boa estimativa para o valor da fração volumétrica de vazios no momento da fratura monotônica em aços estaria em uma faixa entre 0,2 e 0,25. Contudo, Gao et al. (1998), por meio de simulações numéricas de um modelo de célula, observaram que o valor do parâmetro está ligado ao nível de defeitos inicialmente presente no material e que para aços é razoável adotar valores de f_F entre 0,15 e 0,2.

Seguindo essas orientações, nesse trabalho foi adotado um valor da fração volumétrica de vazios no momento da fratura monotônica de 0,2 para ambos os aços considerados, assim como nos trabalhos realizados por Abendroth e Kuna (2003) e Li et al. (2018), que apontam 0,2 como valor ideal do parâmetro em aços.

4.3.3 Parâmetro de recuperação K_1

A calibração do parâmetro K_1 foi realizada por meio do método da bissecção onde buscou-se, para cada amplitude de carregamento, um valor ótimo de K_1 em que o número de ciclos necessários para que a variável de dano atingisse o valor crítico fosse correspondente ao valor da vida observada experimentalmente. Analisando os valores de K_1 encontrados, observou-se que o parâmetro K_1 é fortemente dependente da amplitude de deformação do carregamento, variando bastante de uma amplitude para a outra, em ambos os aços. Isso impede que o parâmetro K_1 seja tratado como uma constante material, portanto, sendo necessário definir uma expressão para sua obtenção a cada valor de amplitude de carregamento.

Devido à evolução quase linear apresentada pelo parâmetro e assumindo que não há evolução do dano no regime elástico, foi proposta uma expressão linear para o cálculo do parâmetro K_1 em função da amplitude do carregamento normal, ε_a , na forma da Equação (4.6).

$$K_1(\varepsilon_a) = \frac{K_1^*}{\varepsilon_a^* - \varepsilon_y} (\varepsilon_a - \varepsilon_y) \quad (4.6)$$

onde K_1^* é o valor do parâmetro K_1 calibrado para a amplitude de deformação normal ε_a^* e ε_y é a deformação de escoamento definida pela razão entre a tensão de escoamento cíclico e o módulo de elasticidade, conforme apresentado na Equação (4.7).

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y^*}{E} \quad (4.7)$$

A Figura 4.5 apresenta uma comparação entre os valores de K_1 calibrados por meio do método da bissecção para cada valor de amplitude e os valores obtidos pela Equação (4.6) para ambos os aços.

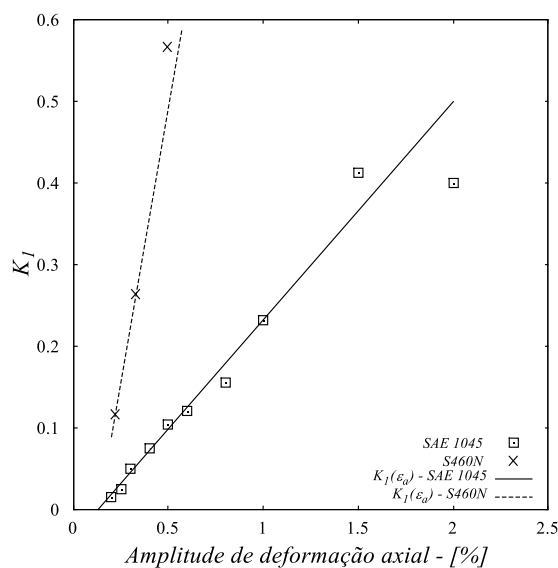


Figura 4.5 – Comparação entre os valores de K_1 calibrados pelo método da bissecção e os obtidos pela Equação (4.6).

4.3.4 Parâmetro de Nahshon e Hutchinson K_2

O parâmetro K_2 foi introduzido por Nahshon e Hutchinson como uma constante numérica responsável por definir a taxa de crescimento de dano em estados de cisalhamento puro. Contudo, ao realizar a calibração do parâmetro para cada valor de amplitude de deformação através do método da bissecção, assim como no caso do parâmetro K_1 , os valores obtidos para K_2 se mostraram linearmente dependentes da amplitude de deformação do carregamento para ambos os aços. Por esse motivo, foi proposta uma expressão análoga à Equação (4.6) para o cálculo do parâmetro K_2 em função da amplitude de deformação cisalhante γ_a do carregamento. A expressão é apresentada pela Equação (4.8).

$$K_2(\gamma_a) = \frac{K_2^*}{\gamma_a^* - 2\varepsilon_y} (\gamma_a - 2\varepsilon_y) \quad (4.8)$$

onde K_2^* é o valor do parâmetro K_2 calibrado para a amplitude de deformação cisalhante γ_a^* . A Figura 4.6 apresenta uma comparação entre os valores de K_2 calibrados para cada amplitude de deformação cisalhante e os valores obtidos pela Equação (4.8) para ambos os aços.

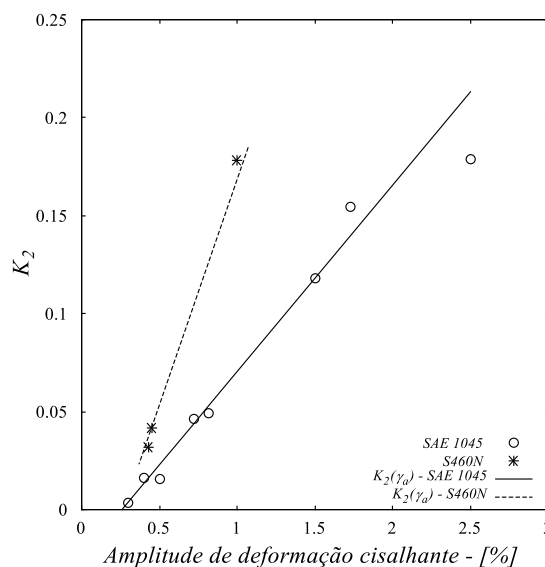


Figura 4.6 - Comparação entre os valores de K_2 calibrados pelo método da bissecção e os obtidos pela Equação (4.8).

Pelo fato dos parâmetros K_1 e K_2 apresentarem um comportamento quase linear em relação as amplitudes de carregamento, as escolhas das amplitudes ε_a^* e γ_a^* para calibração dos respectivos K_1^* e K_2^* não afetam significativamente a capacidade preditiva da abordagem. Portanto, a realização de apenas dois ensaios de fadiga por controle de deformação, um sob trajetória axial e outro torcional, seriam suficientes para calibrar as Equações (4.6) e (4.8).

Os quatro parâmetros do modelo definidos nessa seção estão interligados, logo os efeitos negativos de uma estimativa equivocada dos parâmetros f_0 e D_c podem ser facilmente minimizados pela calibração adequada dos parâmetros K_1 e K_2 . Os valores dos parâmetros adotados nas simulações são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Parâmetros do modelo para os aços S460N e SAE 1045.

Símbolo	Descrição	Valor	
		S460N	SAE 1045
f_0	Volume inicial de defeitos	0,0013	0,0024
f_F	Fração volumétrica de vazios na fratura monotônica	0,2	0,2
K_1^*	Parâmetro de recuperação calibrado	0,263	0,232
ε_a^*	Amplitude de deformação axial usada na calibração	0,33 %	1,00 %
K_2^*	Parâmetro de Nahshon e Hutchinson calibrado	0,042	0,118
γ_a^*	Amplitude de deformação cisalhante usada na calibração	0,45 %	1,50 %

4.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As previsões de vidas obtidas pela abordagem proposta, juntamente com os valores experimentais e numéricos das amplitudes de tensões observadas na meia vida em cada caso, são apresentadas pelas Tabelas 4.5 e 4.6, para os aços S460N e SAE 1045 respectivamente. Importante ressaltar que para os ensaios realizados com as mesmas amplitudes de deformação e trajetórias de carregamento, as tabelas apresentam apenas os valores mínimos e máximos das vidas e amplitudes de tensões experimentais.

Tabela 4.6 - Amplitudes de deformação aplicadas e respostas experimentais e numéricas para o aço S460N.

Trajectoria de carregamento	ε_a %	γ_a %	σ_a^{exp} MPa	τ_a^{exp} MPa	σ_a^{num} MPa	τ_a^{num} MPa	N_f^{exp} Ciclos	N_f^{num} Ciclos
A	0,50		450 - 468		437		1600 - 1630	1860
	0,33		385		378		7690	7691
	0,22		334 - 338		324		33100 - 50100	42288
B		1,00		258		266	1820	1925
		0,45		211 - 213		206	23000 - 30000	26516
		0,43		204		203	38250	32390
C	0,17	0,30	244	147	233	145	31100	65227
	0,14	0,25	217	147	217	137	130300	615424
D	0,17	0,30	338 - 362	218 - 227	311	186	4565 - 6730	32424
	0,14	0,25	277 - 290	188 - 191	282	170	18000 - 18300	291454
E	0,23	0,40	414 - 419	246 - 251	304	185	6000 - 9600	14020
	0,17	0,30	344	215	286	174	26800	96548
F	0,17	0,30	319 - 325	184 - 200	294	177	22800 - 39670	48083
	0,23	0,40	392	231	325	195	6570	8870
	0,14	0,25	284 - 295	183 - 196	280	168	30000 - 51900	519384
	0,40	0,70	481	269	402	239	540	1149

Comparando os valores experimentais das amplitudes de tensões normais e cisalhantes e os valores obtidos numericamente, nota-se que para os casos uniaxiais e multiaxiais proporcionais, a extensão proposta foi capaz de descrever de maneira satisfatória os estados de tensão em ambos os aços, uma vez que os valores numéricos ficaram relativamente próximos dos experimentais. Contudo, para os

carregamentos não proporcionais, devido a lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966), utilizada pela extensão proposta, não ser capaz de considerar os efeitos do endurecimento não proporcional sobre o comportamento do material, os valores de amplitudes de tensões obtidos numericamente ficaram, em sua maioria, abaixo dos valores observados experimentalmente, principalmente para o aço S460N, que se mostrou mais sensível ao fenômeno de endurecimento não proporcional que o aço SAE 1045.

Tabela 4.7 - Amplitudes de deformação aplicadas e respostas experimentais e numéricas para o aço SAE 1045.

Trajectoria de carregamento	ε_a %	γ_a %	σ_a^{exp} MPa	τ_a^{exp} MPa	σ_a^{num} MPa	τ_a^{num} MPa	N_f^{exp} Ciclos	N_f^{num} Ciclos
A	2,00		524		553		257	207
	1,50		499		502		385	434
	1,00		450 - 508		452		1107 - 1527	1287
	0,80		440 - 473		419		2046 - 3044	2352
	0,60		400 - 434		379		4145 - 6825	5152
	0,50		371 - 394		355		4959 - 12920	8575
	0,40		351 - 370		331		9650 - 20200	16480
	0,30		311 - 323		305		24500 - 36940	41961
	0,25		298 - 302		292		79500 - 122200	83705
	0,22		270		284		94525	147077
0,20		269 - 281		279		142500 - 387500	239538	
B		2,50		259 - 272		291	470 - 541	423
		1,73		248 - 251		265	889 - 890	982
		1,50		232 - 237		253	1269 - 1467	1375
		0,82		194 - 200		206	5505 - 8360	6402
		0,72		196		197	8710	9344
		0,50		161 - 168		178	35020 - 60750	30325
C		0,40		159 - 160		170	41840 - 72950	68163
	0,94	0,47	425	79	432	73	1258	1237
	0,87	0,87	385 - 394	135 - 136	392	132	1229 - 1616	1027
	0,64	1,29	289	197	294	200	1758	1030
	0,42	0,21	337	56	326	55	11780	14499
	0,37	0,37	304 - 305	104 - 107	294	100	10380 - 11610	12650
	0,26	0,52	229 - 234	152 - 154	218	147	16890 - 20030	13362
	0,14	0,56	138	173	128	173	19770	17421
	0,04	0,37	45,2	160	46	165	66810	107377
	0,21	0,10	261 - 266	49 - 53	273	48	80000 - 115500	159559
0,19	0,19	234 - 238	87 - 88	244	85	90000 - 123500	248678	
0,15	0,29	176 - 179	127	183	128	87500 - 98780	354196	
D	0,27	0,53	380	208	312	189	4350	7563
	0,15	0,29	274	168	262	159	18330	182086
F	0,41	0,19	353	111	321	147	5260	14010
	0,37	0,37	348	151	303	159	5119	10555
	0,26	0,51	300	180	227	143	5262	10678
	0,21	0,16	281	78	276	146	58530	144039
	0,19	0,19	285 - 289	133 - 134	271	148	49140 - 64650	202607
	0,15	250 - 272	157	259	155	34720 - 38930	321211	

A avaliação da capacidade da abordagem proposta em prever vidas em fadiga de baixo número de ciclos é feita por meio da comparação entre os valores de vida estimados por ela e os observados

experimentalmente. Para auxiliar nas análises são adotadas faixas de tolerância com fatores de dois (linha tracejada) e de quatro (linha traço e ponto), conforme apresentado nas Figuras 4.7 e 4.8.

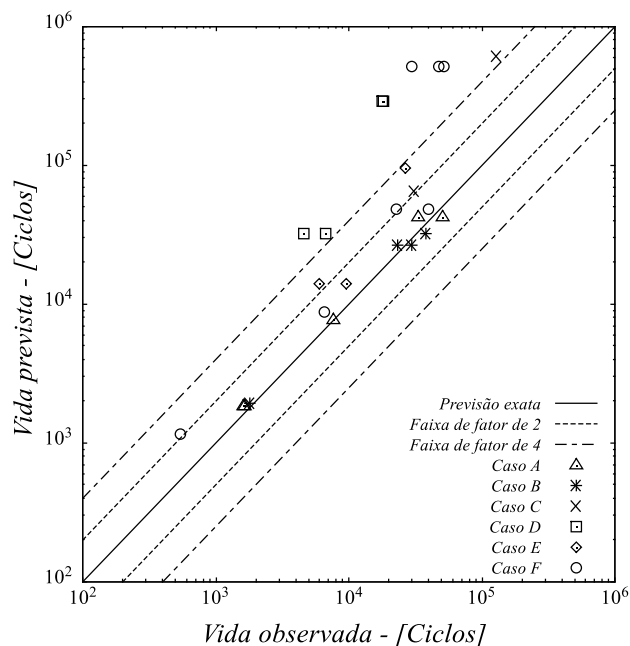


Figura 4.7 – Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço S460N.

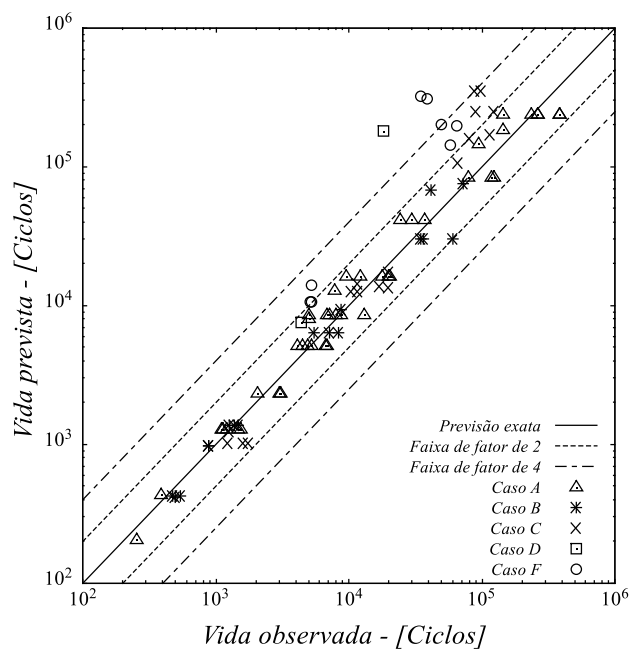


Figura 4.8 – Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço SAE 1045.

Para as condições uniaxiais, a abordagem proposta previu vidas próximas das observadas experimentalmente para ambos os aços, sendo 100% das previsões dentro da faixa de fator de dois. Analisando as previsões obtidas para os casos multiaxiais proporcionais, a abordagem apresentou resultados melhores para o aço SAE 1045, com 100% das previsões na faixa de fator de quatro, sendo 82% delas na faixa de fator de dois. No caso do aço S460N, a abordagem realizou previsões otimistas, sendo uma delas fora da faixa de fator de quatro.

Para os casos multiaxiais não proporcionais, foi observado uma tendência de previsões de vidas otimistas para ambos os aços. Pelo fato de a lei de endurecimento cinemático utilizada ser insensível aos efeitos do endurecimento não proporcional, a evolução da variável de dano foi comprometida, uma vez que as amplitudes de tensões calculadas foram menores que as observadas experimentalmente, resultando em 54% das previsões na faixa de fator de quatro, estando apenas 17% de todas elas dentro da faixa de fator de dois. Para o aço S460N, 50% das previsões ficaram fora até mesmo da faixa de fator de quatro, sendo que em apenas 21% dos casos os valores de vida estimados ficaram dentro da faixa de fator de dois. Por sua vez, 60% das previsões para o aço SAE 1045 ficaram dentro da faixa de fator de quatro, mostrando que o aço SAE 1045 é menos sensível ao fenômeno de endurecimento não proporcional, contribuindo para previsões de vidas melhores.

4.5 CONCLUSÕES

Nesse capítulo foi proposta uma abordagem para previsões de vida em condições de fadiga de baixo número de ciclos que se baseia na evolução da variável de dano, acoplada à extensão proposta para o modelo de Gurson, para descrever, seguindo uma metodologia incremental, o processo de degradação sofrido por materiais dúcteis submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos. Com o intuito de avaliar a capacidade preditiva da abordagem, ela foi aplicada na simulação de ensaios de fadiga realizados por controle de deformação em corpos de prova tubulares de parede fina, feitos de aços S460N e SAE 1045. Os dados experimentais utilizados nessa etapa foram retirados da literatura e abrangem ensaios realizados com seis diferentes trajetórias de carregamentos, incluindo carregamentos uniaxiais e multiaxiais proporcionais e não proporcionais.

A utilização da lei de endurecimento cinemática de Armstrong-Frederick (1966) permitiu que a extensão proposta descrevesse de maneira satisfatória as amplitudes de tensões normais e cisalhantes para as trajetórias uniaxiais e proporcional. Contudo, para as trajetórias multiaxiais não proporcionais, devido à lei de endurecimento escolhida negligenciar os efeitos do endurecimento não proporcional, a extensão estimou amplitudes de tensões menores que as experimentais, principalmente para o caso do aço S460N. Esse fato prejudicou as previsões de vida para os carregamentos não proporcionais, já que a extensão não foi capaz de contabilizar de maneira precisa a evolução da deformação plástica, prevendo uma taxa menor para o crescimento do dano.

Contudo, considerando todas as trajetórias de carregamento, a abordagem proposta para análise de fadiga apresentou um elevado grau de precisão, mesmo com os parâmetros K_1 e K_2 tendo sido determinados a partir de apenas dois ensaios de fadiga uniaxiais. Ao estimar vidas dentro da faixa de dispersão de fator de quatro em 90% dos casos, estando 78% de todas as previsões realizadas por ela dentro da faixa de fator de dois, ela demonstrou ser uma ferramenta eficiente na análise de fadiga multiaxial em condições de baixo número de ciclos e amplitude constante.

5 ABORDAGEM EM DUAS ESCALAS

Este capítulo propõe a utilização da extensão proposta para o modelo de Gurson associada à abordagem em duas escalas introduzida por Lemaitre et al. (1999) com o objetivo de realizar previsões de vida de materiais dúcteis submetidos à fadiga de alto número de ciclos. Nessa condição de carregamento, a deformação plástica ocorre apenas na escala microestrutural do material, impossibilitando a utilização de modelos de danos tradicionais, cujas leis de evolução do dano são governadas pela plasticidade observada na escala clássica adotada pela mecânica do contínuo. Como uma saída, Leimatre et al. (1999) propuseram uma abordagem onde o comportamento do material é separado em duas escalas, uma microscópica e outra macroscópica, e uma lei de localização é utilizada para relacionar o comportamento do material em ambas escalas. A capacidade preditiva da abordagem proposta nesse capítulo é avaliada por meio da comparação entre os valores de vida previstos por ela e os observados experimentalmente a partir de ensaios de fadiga realizados por controle de força em corpos de prova ampulheta, feitos do aço Grau R4, material utilizado pela indústria offshore na fabricação de amarras de ancoragem.

5.1 INTRODUÇÃO

O comportamento microestrutural do material exerce forte influência sobre sua resposta macroscópica a solicitações externas. Um exemplo disso é o mecanismo de falha por fadiga de alto número de ciclos, onde mesmo um componente mecânico sendo submetido a níveis de tensão inferiores à tensão de escoamento do material utilizado na sua fabricação, a falha ocorre após repetidos ciclos de carregamento. Dang Van (1999) explica que isso acontece pois, diferentemente da fadiga de baixo ciclo, onde a evolução do dano dúctil pode ser diretamente relacionada aos níveis de deformação plástica apresentados pelo material em escala macroscópica, na fadiga de alto ciclo, o processo de degradação pelo qual o material passa está ligado à presença de deformações plásticas locais na sua escala microestrutural.

Na engenharia são amplamente utilizados métodos baseados na abordagem tensão-vida para realização de previsões nessas condições. Esses métodos se baseiam em observações experimentais para estabelecer relações matemáticas entre o nível de tensão atuante sobre um componente mecânico e o número de ciclos de carregamento necessários para sua falha, alguns exemplos são as relações propostas

por Goodman (1899) e Basquin (1910). Porém, Bhattacharyya et al. (2019) defende que essas fórmulas empíricas, apesar de serem simples e capazes de gerar estimativas de vida confiáveis, não conseguem descrever em detalhes o mecanismo de falha por fadiga e nem o processo de degradação sofrido pelo material. Além disso, para determinação dos parâmetros de fadiga utilizados por elas é necessária a realização de um grande número de ensaios experimentais, o que corresponde a gastos com material, equipamento e tempo.

Contudo, a inexistência de níveis consideráveis de deformações plásticas em escala macroscópica inviabiliza a utilização de abordagens para previsões de vida baseadas na mecânica do dano, uma vez que nos modelos de dano tradicionais, tais como os de Lemaitre (1985) e Gurson (1977), a evolução das suas variáveis de dano é dependente apenas do acúmulo de deformação plástica que ocorre na macroescala, sendo o comportamento microscópico do material ignorado. Como uma alternativa, Lemaitre et al. (1999) propuseram uma abordagem baseada no conceito de múltiplas escalas capaz de relacionar os comportamentos macro e micro do material através de uma lei de transição entre escalas, definida a partir de procedimentos clássicos de homogeneização, permitindo assim que, na ausência de deformações plásticas macroscópicas, a degradação sofrida pelo material seja mensurada com base nos níveis de deformação plástica observados na sua microescala.

A escala macroscópica é assumida por Lemaitre et al. (1999) como sendo a escala do EVR, enquanto que a escala microscópica corresponderia à escala dos defeitos presentes na microestrutura do material, por sua vez representados como uma única inclusão de material menos resistente embutida na matriz material que compõe o EVR. Portanto, o comportamento macroscópico do material seria equivalente ao da matriz material e o comportamento microscópico ao da inclusão menos resistente. Vale ressaltar que a inclusão menos resistente não corresponde necessariamente a uma fase específica do material. Ela possui o papel apenas de representar fisicamente uma região do material fragilizada devido à presença de defeitos microestruturais, tais como microvazios ou inclusões de segunda fase, permitindo o cálculo do dano localizado na escala microscópica. A ideia básica dessa abordagem é apresentada na Figura 5.1.

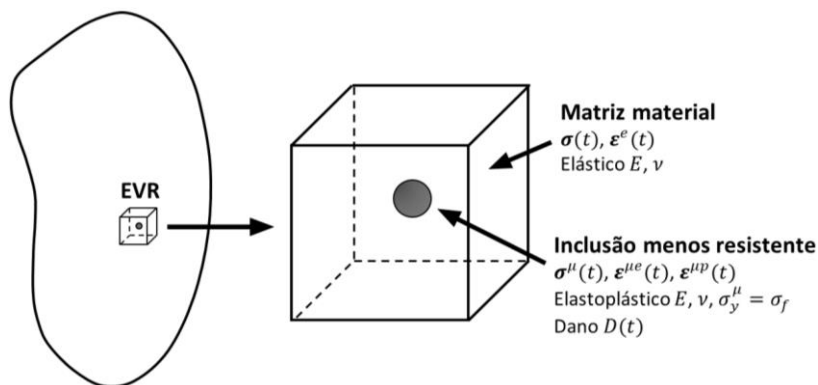


Figura 5.1 – Inclusão menos resistente embutida em um EVR elástico.

Baseando-se na ideia de que em condições de fadiga de alto ciclo os níveis de tensão observados na escala macroscópica são menores que a tensão de escoamento do material, Lemaitre et al. (1999)

assume um comportamento linear elástico para a matriz material (escala macroscópica). Por sua vez, é atribuído um comportamento elastoplástico à inclusão (escala microscópica), pois sua tensão de escoamento é assumida como sendo o limite de resistência à fadiga do material que compõe a matriz material. Isso permite que a inclusão entre no regime plástico mesmo a matriz material permanecendo em regime elástico, sendo necessário a utilização de um modelo constitutivo elastoplástico para descrever sua resposta às solicitações provenientes da escala macroscópica.

Lemaitre et al. (1999) estabelecem a relação entre o comportamento do material em ambas as escalas através da lei de localização de Eshelby-Kröner (1957-1961). Desconsiderando a possível interação entre inclusões, Eshelby (1957) propôs uma solução analítica para calcular o estado de tensão atuante sobre uma inclusão elástica embutida em uma matriz material, por sua vez submetida a um estado de tensão conhecido. Posteriormente, Kröner (1961) modificou a solução proposta por Eshelby (1957) ao considerar o caso de inclusões com comportamento elastoplásticas. A lei de localização de Eshelby-Kröner (1957-1961) é utilizada para calcular o tensor das deformações na escala microscópica a partir do tensor das deformações observadas na escala macroscópica, conforme apresentado pela Equação (5.1).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu} = \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (5.1)$$

onde o sobrescrito μ é adotado para diferenciar os termos provenientes da microescala e o parâmetro α é definido por Eshelby (1957) para uma inclusão esférica por meio da Equação (5.2).

$$\alpha = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \quad (5.2)$$

Importante ressaltar que segundo a lei de localização adotada, o comportamento do material na microescala não exerce qualquer influência sobre seu comportamento na macroescala, exceto no momento da falha, definida por Lemaitre et al. (1999) como sendo o momento em que a variável de dano na escala microscópica atinge um valor crítico, representando por tanto a fratura da inclusão menos resistente e o aparecimento de uma trinca no material.

Utilizando o modelo constitutivo de Lemaitre (1985) com variável de dano isotrópico para descrever o comportamento elastoplástico do material em escala microscópica, trabalhos com os de Desmorat et al. (2007), Lautrou et al. (2009) e Araújo et al. (2020) atestaram a viabilidade da aplicação desse tipo abordagem para previsão de vidas em condições de fadiga de alto ciclo sob carregamentos cíclicos uniaxiais, biaxiais, com variação térmica e até mesmo com amplitudes variadas. Com o passar dos anos modificações e melhorias foram propostas para a abordagem em duas escalas de Lemaitre et al. (1999). Entre as mais recentes se destacam as realizadas por Tang et al. (2017), Bhattacharyya et al. (2019) e Yang et al. (2020).

Buscando uma melhor descrição do comportamento de materiais dúcteis na região de transição entre a fadiga de baixo e alto ciclo, Tang et al. (2017) estenderam a abordagem de Lemaitre et al. (1999) ao assumirem um comportamento elastoplástico para a matriz material e adotar a hipótese de Lin-Taylor (1953-1938) como lei de localização, assumindo que a inclusão estaria submetida ao mesmo estado de deformação que a matriz material. Tang et al. (2017) obtiveram previsões de vida consistentes quando comparados a resultados experimentais de fadiga em baixo ciclo e na região de transição. No entanto, as modificações introduzidas afetaram negativamente as previsões nos casos de fadiga de alto ciclo.

Por sua vez, Bhattacharyya et al. (2019) propuseram a introdução de um acoplamento reverso entre as variáveis de dano de ambas escalas, onde o dano observado na microescala possui influência direta sobre o dano na macroescala, conforme apresentado pela Equação (5.3).

$$D = 1 - (1 - D^\mu)^\varphi \quad (5.3)$$

onde o parâmetro φ define o grau de acoplamento entre as duas escalas. Quando φ foi igual a um, o acoplamento entre as escalas é o mais forte possível, sendo o dano da macroescala igual ao da microescala. Por outro lado, quando φ foi igual a zero, as escalas estão totalmente desacopladas.

Bhattacharyya et al. (2019) também incluíram à abordagem o mecanismo de fechamento de trinca proposto por Ladevèze e Lemaitre (1984), onde um parâmetro é utilizado para quantificar a diferença entre a taxa de crescimento do dano em tração e compressão. Para diminuir o custo computacional das simulações, eles adotaram uma estratégia de *cycle-jump* semelhante à utilizada por Bhattacharyya et al. (2018), em que apenas alguns ciclos de interesse são simulados e a evolução das variáveis internas entre esses ciclos é interpolada no tempo por meio de funções de forma, assim como nos métodos de elementos finitos convencionais.

Inspirados pelo trabalho de Lemaitre et al. (1999), Hu et al. (2020) propuseram um novo modelo de fadiga em duas escalas com o objetivo de realizar previsões mais precisas em uma faixa maior de amplitudes carregamentos. Inicialmente, eles estabeleceram um novo modelo de EVR composto por inclusões esféricas com mesmas propriedades mecânicas esparsamente distribuídas em uma matriz metálica. Assumindo que as inclusões não interagem entre si e que tanto elas quanto a matriz metálica possuem comportamento homogêneo e isotrópico, a degradação das propriedades mecânicas do EVR é mensurada a partir da evolução do dano da matriz e das inclusões, sendo os estados de tensão e deformação dentro de cada inclusão é calculado por meio do esquema de Mori-Tanaka (1973).

Além de fornecer novas ideias sobre o mecanismo de evolução do dano dúctil em condições de fadiga de alto ciclo, o modelo proposto por Yang et al. (2020) conseguiu apresentar bons resultados quando comparados a simulações em elementos finitos de corpos de prova entalhados submetidos à fadiga de alto número de ciclos. Contudo, a grande concentração de deformação plástica, observadas nas simulações em elementos finitos junto a raiz do entalhe, fez com que o modelo proposto por eles previsse tensões locais residuais, afetando significativamente as estimativas da vida em alguns casos.

Seguindo a abordagem em duas escalas proposta por Lemaitre et al. (1999), o objetivo desse capítulo é estender, para situações de fadiga de alto ciclo, a aplicação da abordagem incremental para previsões de vida apresentada no capítulo anterior. A utilização da lei de localização de Eshelby-Kröner (1957-1961) é mantida, porém passa a ser assumido comportamento elastoplástico para ambas as escalas do material, permitindo sua utilização na região de transição entre os regimes de fadiga de baixo e alto números de ciclo. Para descrever o comportamento elastoplástico do material é adotada a extensão do modelo de Gurson proposta nesse trabalho, contrariando o fato da abordagem em duas escalas proposta por Lemaitre et al. (1999) sempre ter sido associada a modelos baseados na CDM.

Esse capítulo é estruturado da seguinte forma: Nas seções 5.2 e 5.3 são apresentadas, respectivamente, as modelagens matemática e numérica da abordagem para previsões de vida proposta seguindo o conceito de duas escalas introduzida por Lemaitre et al. (1999). Na seção 5.4, a abordagem é aplicada na previsão de vida de ensaios de fadiga realizados por controle de força em corpos de prova ampulheta feitos do aço *offshore* de Grau R4. Por fim, na seção 5.5 os resultados de vida obtidos numericamente são comparados aos observados experimentalmente e a capacidade preditiva da abordagem em situação de fadiga de alto ciclo é avaliada na seção 5.6.

5.2 MODELO MATEMÁTICO EM DUAS ESCALAS

Na abordagem em duas escalas proposta por Lemaitre et al. (1999), a definição do estado de deformação na microescala depende do estado de deformação na macroescala. Em condições de fadiga de alto número de ciclos, o comportamento do material na escala macroscópica pode ser simplificado como linear elástico. Contudo, para aplicações da abordagem na faixa de transição entre os regimes de fadiga, onde não é possível assegurar que os níveis de tensão na escala macroscópica estarão sempre abaixo da tensão de escoamento do material, é indispensável a utilização de modelos constitutivos para descrever de maneira confiável o estado de deformação também na macroescala.

Nesse trabalho, o modelo matemático apresentado em detalhes na seção 3.2 é utilizada para descrever o comportamento macroscópico do material. Contudo, para descrever seu comportamento na escala microscópica é necessário realizar algumas adaptações no modelo, uma vez que a entrada do problema passa a ser o tensor das deformações na microescala definido por meio da lei de localização de Eshelby-Kröner (1957-1961), apresentada pela Equação (5.1), a partir do estado de deformação observado na escala macroscópica. Portanto, seguindo o conceito de decomposição aditiva das deformações, o tensor das deformações elásticas na microescala é definido pela Equação (5.4).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} = (\alpha - 1)(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.4)$$

Durante o regime elástico, assume-se um comportamento elástico isotrópico para a relação tensão-deformação na microescala. Essa relação podendo ser descrita pela lei de Hooke generalizada, como apresentado pela Equação (5.5).

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} \quad (5.5)$$

O dano dúctil na microescala passa a ser representado pela variável f^μ e a função de escoamento na microescala é apresentada pela Equação (5.6).

$$\phi^\mu = J_2^\mu - \frac{\sigma_y^\mu}{3} \left[1 + f^{\mu 2} - 2f^\mu \cosh\left(\frac{3 p^\mu}{2 \sigma_y^\mu}\right) \right] \quad (5.6)$$

onde σ_y^μ é a tensão de escoamento do material da inclusão, definido por Lemaitre et al. (1999) como sendo igual ao limite de resistência à fadiga, σ_f , do material da matriz.

O vetor de fluxo plástico, a lei de evolução do fluxo plástico e a deformação plástica equivalente na microescala são definidos de forma análoga aos apresentados na seção 3.2 para a macroescala. Eles são expressos pelas Equações de (5.7) à (5.9).

$$\mathbf{N}^\mu = \boldsymbol{\eta}^\mu + \frac{\sigma_y^\mu}{3} f^\mu \sinh\left(\frac{3 p^\mu}{2 \sigma_y^\mu}\right) \mathbf{I} \quad (5.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\eta}^\mu + \frac{1}{3} \left[\dot{\gamma} \sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3 p^\mu}{2 \sigma_y^\mu}\right) \right] \mathbf{I} \quad (5.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}^\mu : \boldsymbol{\eta}^\mu + \frac{1}{3} \left[\sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3 p^\mu}{2 \sigma_y^\mu}\right) \right]^2 \right\}} \quad (5.9)$$

A lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966) é considerado na microescala para modelar os efeitos da plasticidade cíclica. Ela é apresentada na forma adaptada para a microescala pela Equação (5.10).

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} - b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} \boldsymbol{\beta}^\mu \quad (5.10)$$

A lei de evolução da variável de dano na escala microscópica é apresentada pela Equação (5.11).

$$\dot{f}^\mu = DR(1 - f^\mu) \dot{\gamma} \sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3 p^\mu}{2 \sigma_y^\mu}\right) + K_2 f^\mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} g(\xi^\mu) \quad (5.11)$$

E por fim, a condição de complementaridade de Kuhn-Tucker na microescala é expressa como:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \phi^\mu \leq 0; \dot{\gamma}\phi^\mu = 0$$

A formulação matemática da abordagem em duas escalas proposta nessa seção é apresentada de forma resumida no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 - Extensão do modelo de Gurson para condições cíclicas em duas escalas.

1. Estado de tensão na macroescala:

a. *Quadro 3.1;*

2. Lei de localização de Eshelby-Kröner (1957-1961):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

onde

$$\alpha = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)}$$

3. Estado de tensão na microescala:

a. *Decomposição aditiva da deformação;*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} = (\alpha - 1)(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

b. *Lei elástica;*

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}$$

c. *Função de escoamento;*

$$\phi^\mu = J_2^\mu - \frac{\sigma_y^{\mu 2}}{3} \left[1 + f^{\mu 2} - 2f^\mu \cosh\left(\frac{3p^\mu}{2\sigma_y^\mu}\right) \right]$$

d. *Lei de fluxo plástico;*

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\eta}^\mu + \frac{1}{3} \left[\dot{\gamma} \sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3p^\mu}{2\sigma_y^\mu}\right) \right] \mathbf{I}$$

e. *Lei de evolução das demais variáveis internas;*

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}^\mu : \boldsymbol{\eta}^\mu + \frac{1}{3} \left[\sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3p^\mu}{2\sigma_y^\mu}\right) \right]^2 \right\}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} - b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} \boldsymbol{\beta}^\mu$$

$$f^\mu = DR(1 - f^\mu) \dot{\gamma} \sigma_y^\mu f^\mu \sinh\left(\frac{3p^\mu}{2\sigma_y^\mu}\right) + K_2 f^\mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} g(\xi^\mu)$$

f. *Lei da complementaridade de Kuhn-Tucker:*

$$\dot{\gamma} \geq 0; \phi^\mu \leq 0; \dot{\gamma}\phi^\mu = 0$$

5.3 ALGORITMO DE RETORNO EM DUAS ESCALAS

A implementação numérica do modelo em duas escalas envolve a definição do estado de tensão na escala macroscópica utilizando o algoritmo de retorno apresentado em detalhes na seção 3.3 e o cálculo das variáveis internas e dos estados de tensão e deformação na escala microscópica por meio de um esquema de integração numérica capaz de atualizar as variáveis internas conhecidas no tempo t_n para obtenção seus respectivos valores no tempo t_{n+1} . A estratégia numérica utilizada nesse trabalho para obtenção do comportamento constitutivo do material na microescala é a mesma apresentada no capítulo 3, onde é realizada a discretização das equações constitutivas dentro de um pseudo-tempo com base no esquema implícito de Euler (Simo et al., 1998).

A atualização das variáveis internas é feita com base na metodologia da decomposição do operador (de Souza Neto et al., 2008), onde o problema é dividido em um preditor elástico e um corretor plástico. No preditor elástico é calculado um estado de tentativa assumidamente elástico para a microescala a partir do estado de deformação definido para a macroescala. Caso ocorra a violação da condição de escoamento na microescala, é ativado um corretor plástico que corrige o estado elástico de tentativa proposto anteriormente com base na solução, pelo método de Newton-Raphson, do sistema não linear de equações formado pelas equações de evolução de variáveis internas. O algoritmo de integração para o modelo de duas escalas é apresentado de forma resumida no Quadro 5.2, onde as equações do sistema não linear para a microescala são definidas de forma análoga às apresentadas na seção 3.3.

Quadro 5.2 – Algoritmo de atualização do estado de tensão e variáveis internas adaptado para duas escalas.

1. Dado um incremento de deformação macroscópica $\Delta \varepsilon$ e as variáveis de estado em t_n , determinar o estado elástico na macroescala seguindo os procedimentos estabelecidos no Quadro 3.2;
2. A partir do estado elástico na macroescala, calcular o estado elástico de tentativa na microescala por meio da lei de localização;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^{\mu e trial} &= (\alpha - 1)(\varepsilon_n^{\mu p} - \varepsilon_{n+1}^p) + \varepsilon_{n+1}^e & \varepsilon_{n+1}^{\mu p trial} &= \varepsilon_n^{\mu p} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p trial} &= \bar{\varepsilon}_n^{\mu p} & \beta_{n+1}^{\mu trial} &= \beta_n^{\mu} \\ f_{n+1}^{trial} &= f_n & \sigma_{n+1}^{\mu trial} &= S_{n+1}^{\mu trial} + p_{n+1}^{\mu trial} \mathbf{I} \end{aligned}$$

onde

$$S_{n+1}^{\mu trial} = 2G \left[\varepsilon_{n+1}^{\mu e trial} - \frac{1}{3} tr(\varepsilon_{n+1}^{\mu e trial}) \mathbf{I} \right] \quad p_{n+1}^{\mu trial} = K tr(\varepsilon_{n+1}^{\mu e trial})$$

3. Verificar a admissibilidade plástica na microescala;

$$\phi_{n+1}^{\mu trial} = J_{2n+1}^{\mu trial} - \frac{\sigma_y^{\mu 2}}{3} \left[1 + f_{n+1}^{trial 2} - 2f_{n+1}^{trial} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^{\mu trial}}{2\sigma_y^{\mu}}\right) \right]$$

continuação do Quadro 5.2.

Se $\phi_{n+1}^{\mu trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1}^{\mu} = (*)_{n+1}^{\mu trial}$;

Se $\phi_{n+1}^{\mu trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno.

4. Algoritmo de retorno: Resolver o Sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo com variáveis $S_{n+1}^{\mu}, p_{n+1}^{\mu}, \Delta\gamma, f_{n+1}$ e β_{n+1}^{μ} ;

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{n+1}^{\mu} - S_{n+1}^{\mu trial} + 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}}^{\mu} \\ p_{n+1}^{\mu} - p_{n+1}^{\mu trial} + K\Delta\gamma N_{v_{n+1}}^{\mu} \\ J_{2_{n+1}}^{\mu trial} - \frac{\sigma_y^{\mu 2}}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^{\mu}}{2\sigma_y^{\mu}}\right) \right] \\ f_{n+1} - f_{n+1}^{trial} - DR(1 - f_{n+1})\Delta\gamma f_{n+1} \sigma_y^{\mu} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}^{\mu}}{2\sigma_y^{\mu}}\right) - g(\xi^{\mu})_{n+1} K_2 f_{n+1} \Delta\gamma \sqrt{A} \\ \beta_{n+1}^{\mu} - \beta_{n+1}^{\mu trial} - \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma (N_{d_{n+1}}^{\mu} + N_{v_{n+1}}^{\mu} \mathbf{I}) + b\Delta\gamma \sqrt{A} \beta_{n+1}^{\mu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

onde

$$N_{d_{n+1}}^{\mu} = \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu} \qquad N_{v_{n+1}}^{\mu} = \frac{1}{3} \sigma_y^{\mu} f_{n+1} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}^{\mu}}{2\sigma_y^{\mu}}\right)$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y^{\mu} f_{n+1} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}^{\mu}}{2\sigma_y^{\mu}}\right) \right]^2 \right\}}$$

5. Atualizar as demais variáveis internas na microescala;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e trial} - \Delta\gamma N_{n+1}^{\mu}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p trial} + \Delta\gamma N_{n+1}^{\mu}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\mu p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\mu p trial} + \Delta\gamma \sqrt{A}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mu} = \boldsymbol{S}_{n+1}^{\mu} + p_{n+1}^{\mu} \mathbf{I}$$

6. Fim

O algoritmo para solução do sistema não linear de equações pelo método de Newton-Raphson para a escala microscópica é o mesmo apresentado no Quadro 3.3.

5.4 VALIDAÇÃO DA ABORDAGEM EM DUAS ESCALAS

A validação da abordagem para previsões de vida proposta nesse capítulo foi realizada com base em resultados experimentais de ensaios de fadigas realizados por controle de força em corpos de prova feitos do aço Grau R4, material utilizado pela indústria *offshore* para a confecção de amarras utilizadas em linhas de ancoragem para unidades flutuantes de extração de petróleo. Durante a realização dos ensaios de fadiga foram adotadas quatro diferentes trajetórias de carregamento de tensão com razão -1. Tais trajetórias são apresentadas na Figura 5.2, onde as trajetórias A e B representam os carregamentos

uniaxiais de tração-compressão axial e torção, respectivamente, e as trajetórias C e D descrevem carregamentos biaxiais, sendo a trajetória C proporcional e a trajetória D não proporcional.

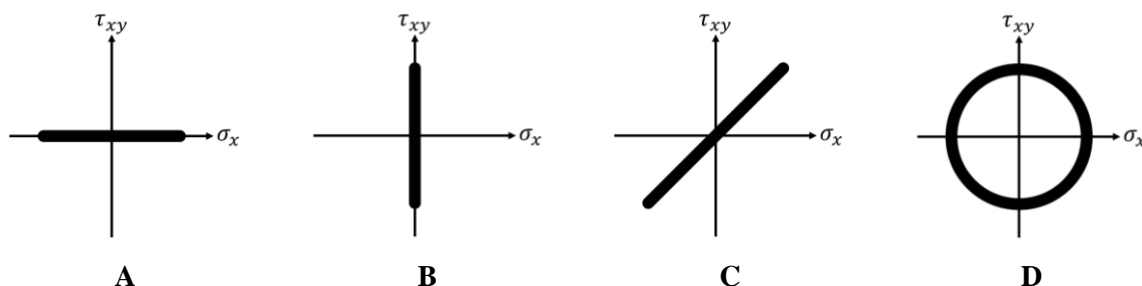


Figura 5.2 – Trajetórias de carregamento adotadas nos ensaios de fadiga.

5.4.1 Material

Para atender as propriedades mecânica exigidas pela norma IACS W22 (2006), os corpos de prova de aço Grau R4, tantos os utilizados nos ensaios monotônicos quanto nos ensaios cíclicos, passaram pelos tratamentos térmicos de normalização a temperatura de 900 °C por 60 minutos, têmpera a temperatura de 890 °C por 30 minutos e revenido a temperatura de 650 °C por 60 minutos. No tratamento de normalização o resfriamento foi realizado ao ar, enquanto que nos tratamentos de têmpera e revenido o resfriamento foi realizado em água.

Após os tratamentos térmicos optou-se em não realizar nenhum tipo de acabamento superficial nos corpos de prova. Uma vez que os dados experimentais obtidos nessa etapa do trabalho serão utilizados mais à frente na análise da fadiga em trechos de amarras, compostas por elos de aço Grau R4, submetidas a carregamentos cíclicos, assegurar a mesma condição superficial para elos e corpos de prova permite que possíveis influências do acabamento superficial do elo sobre sua vida possam ser consideradas durante a obtenção das propriedades mecânicas do material e calibração dos parâmetros do modelo constitutivo. A Tabela 5.1 apresenta a composição química de uma amostra de aço Grau R4 retirada do lote de material utilizado para confecção dos corpos de prova.

Tabela 5.1 – Composição química do aço Grau R4 (%).

Material	C	Mn	P	S	Si	Cu	Al	Ti	Cr	Ni
Grau R4	0,21	1,04	0,012	0,01	0,25	0,18	0,02	0,0018	1,12	0,53

Propriedades monotônicas

As propriedades monotônicas do aço Grau R4 foram obtidas a partir de ensaios de tração realizados na máquina servo-hidráulica uniaxial MTS 810 *Material Test System* com capacidade de carga de ± 100 kN. Para execução dos testes foram adotados corpos de prova cilíndricos sem entalhe, cujas dimensões são apresentadas na Figura 5.3.

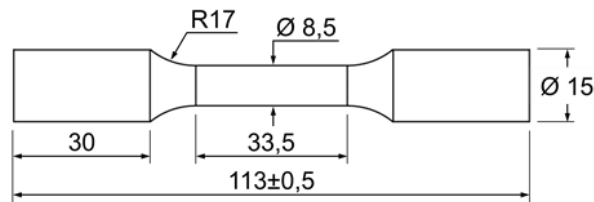


Figura 5.3 – Geometria do corpo de prova utilizado nos ensaios de tração com cotas em mm.

Durante os ensaios, a medição da deformação na região útil dos corpos de prova foi realizada por meio de um extensômetro uniaxial MTS com região útil de 25 mm e faixa de mediação de -10% à 20% de deformação. As propriedades monotônicas obtidas para o aço Grau R4 são apresentadas de maneira resumida na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Propriedades monotônicas do aço Grau R4.

Símbolo	Descrição	Valor
E	Módulo de elasticidade	207,4 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,3
σ_y	Tensão de escoamento inicial	836,6 MPa
σ_u	Tensão última de engenharia	888,7 MPa
σ_r	Tensão de ruptura de engenharia	475 MPa
AL	Alongamento percentual	24,2 %
RA	Redução na área	0,693

Propriedades cíclicas

A curva tensão-deformação cíclica para o aço Grau R4 foi obtida por meio da formulação proposta por Zhang et al. (2009), onde coeficiente de resistência cíclica, K' , e o expoente de encruamento cíclico, n' , que compõem a relação de Ramberg-Osgood (1943) são definidos através das Equações (5.12) e (5.13) a partir de propriedades monotônicas do material.

$$K' = 57 \left[\frac{\sigma_r^v \sigma_y}{\sigma_u} (\varepsilon_r^v)^{-n} \right]^{0,545} - 1220 \quad (5.12)$$

$$n' = \frac{\sigma_y}{\sigma_r^v - \sigma_u} n \quad (5.13)$$

onde σ_r^v e ε_r^v representam, respectivamente, a tensão e a deformação verdadeiras no momento da ruptura e o parâmetro n corresponde ao expoente de encruamento axial monotônico do material. Eles podem ser determinados através das Equações de (5.14) à (5.16) com base nos valores de redução de área, tensão de escoamento e tensão última de engenharia obtidos por meio do ensaio monotônico de tração.

$$\sigma_r^v = \sigma_u (1 + RA) \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_r^v = -\ln(1 - RA) \quad (5.15)$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{(\sigma_F^p)^2}{\sigma_y \sigma_u}\right]}{2 \log(500 \varepsilon_r^p)} \quad (5.16)$$

Por sua vez, os parâmetros de endurecimento cinemático que compõe a lei de Armstrong-Frederick (1966) foram obtidos através do ajuste entre a curva obtida pela relação de Ramberg-Osgood (1943) e a curva descrita pela relação analítica proposta por Chaboche (1986), apresentada pela Equação (4.1). Os parâmetros encontrados para a relação de Ramberg-Osgood (1943), assim como os parâmetros de endurecimento cinemático, são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Propriedades cíclicas do aço Grau R4.

Símbolo	Descrição	Valor
K'	Coefficiente de resistência cíclica	1730,2 MPa
n'	Expoente de encruamento cíclico	0,1185
H^k	Módulo de endurecimento cinemático	52151,5 MPa
b	Coefficiente de endurecimento cinemático	181,3
σ_y^*	Tensão de escoamento cíclico	720,3 MPa

A Figura 5.4 compara as curvas tensão-deformação cíclica obtidas pela relação de Ramberg-Osgood (1943) e pela lei de Armstrong-Frederick (1966).

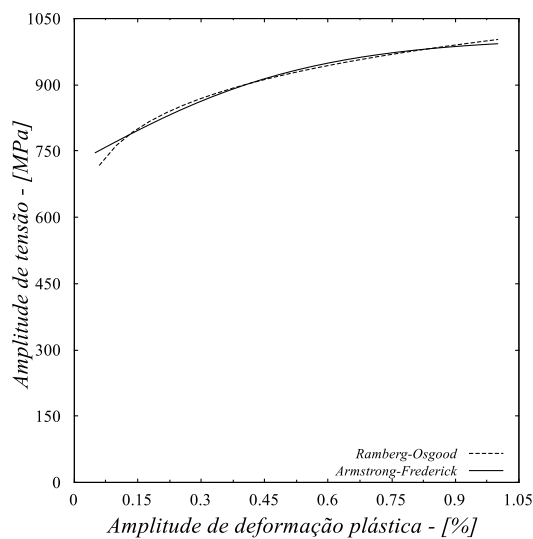


Figura 5.4 - Curvas tensão-deformação cíclicas obtidas para o aço Grau R4.

5.4.2 Ensaios de fadiga

Os ensaios axiais de fadiga por controle de força foram realizados na mesma na máquina servo-hidráulica que os ensaios monotônicos de tração, enquanto que os ensaios torcionais e biaxiais foram realizados na máquina servo-hidráulica axial/torcional MTS 809 *Material Test System* com capacidade de carga de ± 100 kN na direção axial e ± 1100 Nm na direção torcional. Todos os ensaios de fadiga

foram realizados em corpos de prova em forma de ampulheta, cujas dimensões são apresentadas na Figura 5.5.

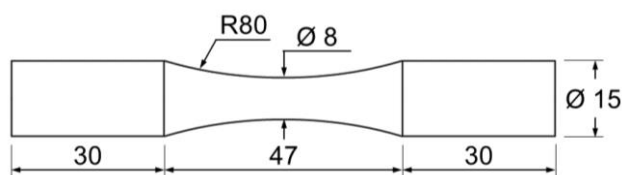


Figura 5.5 - Geometria do corpo de prova utilizado nos ensaios de fadiga com cotas em mm.

Nos ensaios de fadiga, a falha do corpo de prova foi definida como o momento da sua fratura completa. Contudo, por questão de limitação de tempo e disponibilidade do maquinário, os ensaios em que os corpos de prova não falharam antes de 1 milhão de ciclos foram interrompidos e considerados como *runout* experimental. Os números de ciclos até a falha observados em cada ensaio são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Ensaios de fadiga realizados por controle de força.

Tipo de carregamento	ID do corpo de prova	σ_{eq} MPa	σ_a MPa	τ_a MPa	λ_σ MPa	f Hz	N_f Ciclos
Axial, R = -1	R4 OX 3A 03	500	500		0	8	74354
	R4 OX 3A 02	475	475		0	8,5	99475
	R4 OX 3A 01	450	450		0	8,5	124816
	R4 OX 3A 07	425	425		0	8	123294
	R4 OX 3A 09	410	410		0	8	101451
	R4 OX 3A 05	390	390		0	6	171840
	R4 OX 3A 04	375	375		0	7,5	163409
	R4 OX 3A 08	360	360		0	7,5	301207
	R4 OX 3A 06	350	350		0	8,5	<i>runout</i>
Torcional, R = -1	R4 OXT 3A 05	551		318	∞	8	139142
	R4 OXT 3A 07	525		303	∞	8	232892
	R4 OXT 3A 02	501		289	∞	10	202156
	R4 OXT 3A 04	475		274	∞	8	380996
	R4 OXT 3A 06	461		266	∞	10	262230
	R4 OXT 3A 03	447		258	∞	10	<i>runout</i>
	R4 OXT 3A 01	352		203	∞	10	<i>runout</i>
	Axial-torcional proporcional, R = -1	R4 OXP 3A 04	500	485	70	0,25	8
R4 OXP 3A 02		500	447	129	0,50	8	77266
R4 OXP 3A 01		500	354	204	1,00	8	115816
R4 OXP 3A 03		500	224	258	2,00	8	251512
R4 OXP 3A 05		500	121	280	4,00	8	281426
Axial-torcional não-proporcional, R = -1	R4 OXC 3A 01	708	500	289	1,00	6	9738
	R4 OXC 3A 05	500	485	70	0,25	8	75848
	R4 OXC 3A 04	500	121	280	4,00	8	97632
	R4 OXC 3A 03	500	447	129	0,50	8	84489
	R4 OXC 3A 06	500	224	258	2,00	8	44984
	R4 OXC 3A 02	500	354	204	1,00	8	60930

onde os parâmetros de amplitude de tensão equivalente, σ_{eq} , e razão de carregamento, λ_σ , definidos respectivamente pelas Equações (5.17) e (5.18), foram adotados para auxiliar na caracterização dos ensaios.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} \quad (5.17)$$

$$\lambda_\sigma = \frac{\sqrt{3}\tau_a}{\sigma_a} \quad (5.18)$$

As curvas do número de ciclos para falha pela amplitude de tensão equivalente obtidas para o aço Grau R4 a partir dos resultados dos ensaios de fadiga uniaxiais são apresentadas na Figura 5.6.

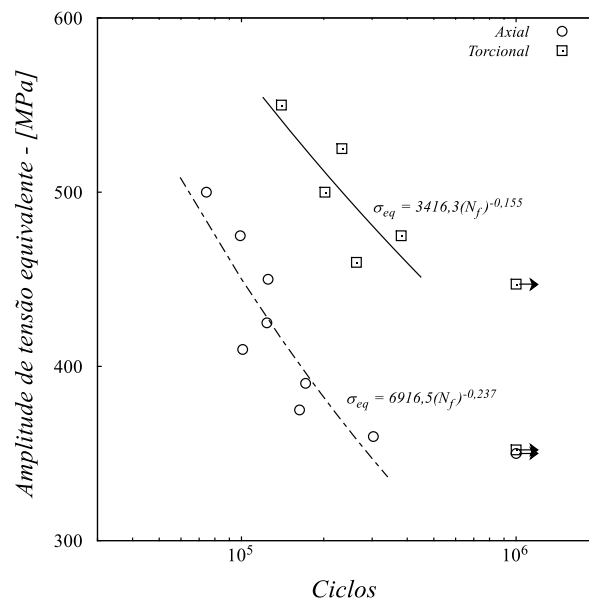


Figura 5.6 - Curvas S-N obtidas para o aço Grau R4.

O limite de resistência à fadiga para o aço Grau R4 foi definido com base nos resultados dos ensaios de fadiga axiais como sendo 350 MPa, por esse ser o valor de amplitude de tensão do primeiro e único ensaio axial a ser considerado *runout* experimental.

5.4.3 Previsões de vidas

As estimativas de vidas realizadas nesse capítulo seguiram uma metodologia incremental parecida com a adotada no capítulo anterior. Contudo, para que a abordagem em duas escalas pudesse ser considerada, foram necessárias algumas alterações. O processo de degradação do material passa a ser descrito pela evolução ciclo a ciclo do dano na escala microscópica. Considerando um ponto de Gauss, o modelo calcula o estado de deformação macroscópico no material a cada ciclo de carregamento. Só então, por meio da lei de localização, é obtido o estado de deformação microscópico,

utilizado pelo modelo para prever o estado de tensão e a evolução do dano na escala microscópica. Esse processo se repete até que o dano microscópico atinja um valor crítico, então entende-se que ocorreu a falha da inclusão menos resistente e o surgimento de uma trinca macroscópica. Portanto, o número de ciclos simulados até então é assumido como a vida em fadiga do material e a análise é encerrada. A abordagem proposta é apresentada de forma resumida pelo fluxograma da Figura 5.7.

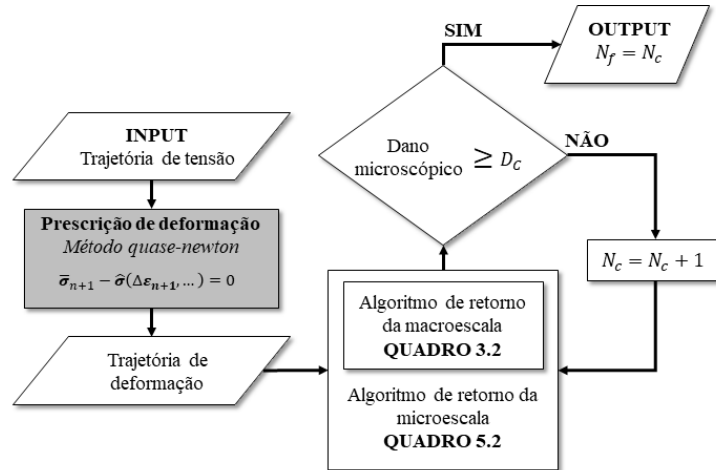


Figura 5.7 - Fluxograma explicativo da abordagem incremental de previsão de vida em fadiga considerando uma abordagem em duas escalas.

Para realização das simulações foram necessárias algumas adaptações para permitir que os algoritmos de retorno propostos fossem capazes de descrever a evolução da variável de dano a partir de trajetórias de tensão, e não mais de deformação. Além disso, é preciso definir as propriedades mecânicas do material adotadas em ambas as escalas, assim como os parâmetros do modelo: volume inicial de defeitos, dano crítico e parâmetros K_1 e K_2 .

Prescrição de deformação

Devido ao fato dos ensaios de fadiga terem sido conduzidos por controle de força, foi necessário a elaboração de uma rotina em linguagem Fortran para elaboração de trajetórias de deformações capazes de proporcionar estados de tensão semelhantes aos impostos a cada corpo de prova durante a realização dos ensaios. Ao impor uma trajetória de carregamento de tensão, a rotina busca por meio de um método quase-Newton os incrementos de deformação adequados para que o modelo constitutivo consiga atingir os valores prescritos para cada componente de tensão.

Considerando que os valores de tensão no tempo t_{n+1} são previstos pelo modelo constitutivo em função dos valores de deformação adotados e das suas variáveis internas, nesse caso o tensor das tensões pode ser representado na forma da Equação (5.19).

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\Delta \epsilon_{n+1}, \dots) \quad (5.19)$$

onde $\widehat{\sigma}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \dots)$ representam o estado de tensão fornecido pelo modelo a partir dos incrementos de deformação no tempo t_{n+1} e das suas variáveis internas, representadas pelas reticências.

Portanto, os incrementos de deformação ideais seriam aqueles capaz de igualar $\widehat{\sigma}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \dots)$ ao estado de tensão prescrito pelo carregamento, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, zerando em todas as componentes de tensão a equação residual proposta pela Equação (5.20).

$$R_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \dots) = 0 \quad (5.20)$$

A solução para esse problema não linear pode ser obtida numericamente. De acordo com o método de Newton-Raphson, o sistema de equações pode ser representado de maneira linear por meio da Equação (5.21).

$$\left[\frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right]^j \cdot [\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}]^{j+1} = -[R_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}]^j \quad (5.21)$$

onde $\left[\frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right]$ representa a matriz com as derivadas parciais das equações residuais para cada componente de tensão em relação aos incrementos de deformação para cada componente de deformação na iteração j . Ela é multiplicada pelo vetor $[\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}]$, que traz os valores incrementais das deformações na iteração $j + 1$. Por fim, o vetor do lado direito representa os valores das equações residuais na iteração j . Considerando apenas as componentes de tensão e deformação em x e xy , a matriz das derivadas parciais pode ser escrita na forma da Equação (5.22).

$$\frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\varepsilon_{x n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\gamma_{xy n+1}} \\ \frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}}{\partial \Delta\varepsilon_{x n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}}{\partial \Delta\gamma_{xy n+1}} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Contudo, a resolução analítica dessas derivadas pode se tornar uma tarefa bastante trabalhosa. Portanto, utilizando o método quase-Newton, as derivadas são calculadas numericamente por meio do método das diferenças finitas, conforme apresentado pelas Equações de (5.23) à (5.26).

$$\frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\varepsilon_{x n+1}} \approx \frac{1}{\epsilon} \left[R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1} + \epsilon, \Delta\gamma_{xy n+1}) - R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1}, \Delta\gamma_{xy n+1}) \right] \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\gamma_{xy n+1}} \approx \frac{1}{\epsilon} \left[R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1}, \Delta\gamma_{xy n+1} + \epsilon) - R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1}, \Delta\gamma_{xy n+1}) \right] \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}}{\partial \Delta\varepsilon_{x n+1}} \approx \frac{1}{\epsilon} \left[R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1} + \epsilon, \Delta\gamma_{xy n+1}) - R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\varepsilon_{x n+1}, \Delta\gamma_{xy n+1}) \right] \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy} n+1}}{\partial \Delta \gamma_{xy} n+1} \approx \frac{1}{\epsilon} \left[R_{\bar{\tau}_{xy} n+1} (\Delta \epsilon_{x n+1}, \Delta \gamma_{xy n+1} + \epsilon,) - R_{\bar{\tau}_{xy} n+1} (\Delta \epsilon_{x n+1}, \Delta \gamma_{xy n+1}) \right] \quad (5.26)$$

onde ϵ é uma perturbação introduzida aos incrementos de deformação. Seu valor deve ser definido com ordem de grandeza inferior ao dos incrementos de deformação.

A cada iteração os valores dos incrementos de deformação são atualizados pela adição dos incrementos $\delta \Delta \epsilon_{n+1}$ obtido a partir da resolução do sistema, conforme apresentado na Equação (5.27).

$$\Delta \epsilon_{n+1}^{j+1} = \delta \Delta \epsilon_{n+1}^j + \Delta \epsilon_{n+1}^j \quad (5.27)$$

Esse procedimento se repete até que a diferença entre os estados de tensão prescrito e obtido com o uso dos incrementos de deformação fornecidos pela rotina seja inferior à um valor de tolerância pré-estabelecido. Então os incrementos encontrados são adotados como entradas do algoritmo de retorno, apresentado de maneira resumida pelo Quadro 3.2, para obtenção das variáveis de estado na escala macroscópica no tempo t_{n+1} . Importante ressaltar que esse controle de força é realizado apenas na escala macroscópica, uma vez que na escala microscópicas os incrementos de deformação que servem de entradas para o algoritmo de retorno, apresentado de maneira resumida pelo Quadro 5.2, são fornecidos pela lei de localização com base do estado de deformação obtido para a macroescala.

Propriedades mecânicas na escala microscópica

Para realização das simulações numéricas considerando a abordagem em duas escalas as propriedades mecânicas da matriz material (macroescala) foram assumidas como sendo as propriedades obtidas para o aço Grau R4, apresentadas nas Tabelas 5.2 e 5.3. Para descrever o comportamento da inclusão menos resistente (microescala) foram adotados os mesmos parâmetros de endurecimento cinemático, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson utilizados na macroescala. Contudo, a tensão de escoamento cíclico na microescala foi definido como sendo o limite de fadiga definido para o material, conforme sugerido por Lemaitre et al. (1999).

Parâmetros do modelo

A calibração do parâmetro de volume inicial de defeitos, assim como na seção 4.3, foi realizada por meio da formulação proposta por Franklin (1969), apresentada na Equação (4.3). Com base na composição química apresentada pela Tabela 5.1, o volume inicial de defeitos para o aço Grau R4 foi definido como sendo 5×10^{-4} . Por sua vez, o valor de dano crítico para o material foi definido numericamente como sendo 6×10^{-2} , valor máximo atingido pela variável de dano nas simulações das trajetórias axiais.

Os parâmetros K_1 e K_2 foram determinados para cada caso uniaxial através do método da bissecção. O método buscou, para cada valor de amplitude de carregamento axial e torcional, os valores ótimos para os parâmetros que permitissem que o número de ciclos necessários para que a variável de

dano na escala microscópica atingisse o valor de dano crítico correspondesse ao valor de vida observado experimentalmente.

Conforme exposto na seção 4.3, a amplitude de carregamento possui forte influência sobre esses parâmetros, fazendo com que eles assumam valores diferentes para varrer faixas maiores de amplitudes de carregamento. Contudo, devido aos ensaios de fadiga terem sido realizados com amplitudes de tensão equivalente entre 550 e 350 MPa, correspondendo a uma faixa de amplitude de deformação inferior à 0,085%, os valores encontrados para ambos os parâmetros não apresentaram grande dispersão, conforme apresentado pelo Figura 5.8. Isso permite que, para a faixa de amplitude de carregamento analisada, os parâmetros possam ser assumidos como constantes, eliminando a necessidade da aplicação das Equações (4.6) e (4.8).

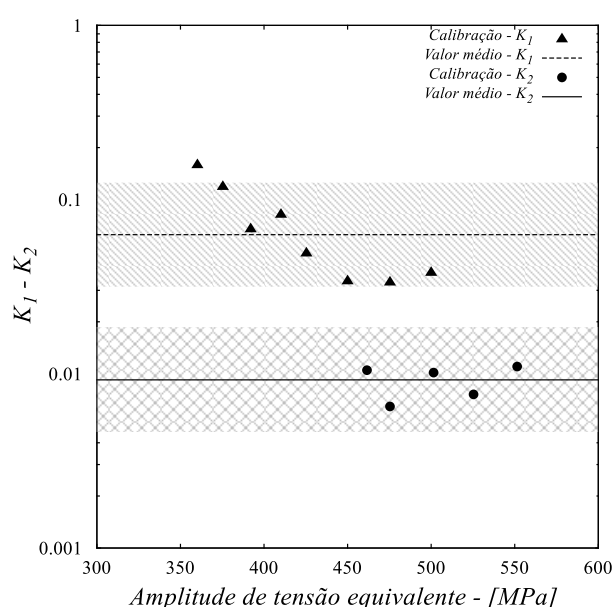


Figura 5.8 - Valores de K_1 e K_2 calibrados pelo método da bissecção.

Na Figura 5.8 as linhas horizontais tracejada e contínua representam as médias aritméticas dos valores obtidos para os parâmetros K_1 e K_2 , respectivamente. As áreas hachuradas indicam intervalos em que, ao definir os parâmetros com sendo iguais as suas respectivas médias, é possível obter previsões de vida dentro de uma faixa de tolerância de fator de dois. O fato dos valores ideais encontrados para os parâmetros na grande maioria dos casos estarem dentro dessas áreas atestam a viabilidade da adoção de valores constantes para os parâmetros. Vale ressaltar que para melhor visualização, o eixo y do gráfico apresentado pela Figura 5.8 está em escala logarítmica. Os parâmetros do modelo para o aço Grau R4 utilizados durante as simulações numéricas são apresentados na Tabela 5.5.

Símbolo	Descrição	Valor
f_0	Volume inicial de defeitos	5×10^{-4}
D_c	Dano crítico	6×10^{-2}
K_1	Parâmetro de recuperação	$6,3 \times 10^{-2}$
K_2	Parâmetro de Nahshon e Hutchinson	$9,2 \times 10^{-3}$

5.5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A avaliação da capacidade preditiva da abordagem para previsões de vida em condições de fadiga de alto números de ciclos, proposta seguindo uma metodologia incremental e utilizando uma abordagem de dano em duas escala, é feita por meio da comparação entre os valores de vidas previstos por ela e os observados experimentalmente considerando faixas de dispersão com fatores de dois (linha tracejada) e de quatro (linha traço e ponto), conforme apresentado na Figura 5.9.

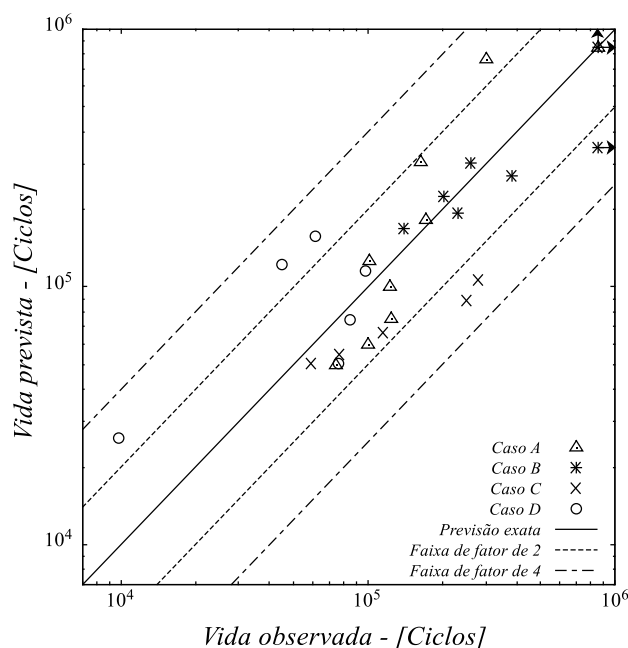


Figura 5.9 - Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas para o aço Grau R4.

As previsões realizadas por meio da abordagem proposta apresentaram um elevado nível de precisão. Desconsiderando os casos de *runout* experimentais e *runout* numéricos, quando não foi observado crescimento considerável da variável de dano na escala microscópica durante as simulações, todos os valores de vida previstos ficaram dentro da faixa de tolerância de fator de quatro, sendo 75% deles na faixa de fator de dois.

Para as trajetórias de carregamento uniaxiais, apenas a previsão realizada para o caso axial com menor amplitude de tensão ficou fora da faixa de fator de dois. Analisando a Figura 5.8 é possível observar que ele também é o único caso em que o valor para o parâmetro K_1 , calibrado pelo método da bissecção, ficou fora da área hachurada, indicando a necessidade da adoção de um valor maior para o parâmetro. Contudo, como a estratégia de calibração adotada proporcionou cerca de 93% das previsões para as trajetórias uniaxiais e 55% das previsões para as trajetórias biaxiais dentro da faixa de fator de dois, é possível afirmar que as estratégias de calibração adotadas para os parâmetros do modelo foram assertivas.

Analisando os valores de vida obtidos para as trajetórias proporcionais, nota-se que a abordagem proposta apresentou um perfil conservador, algo preferível do ponto de vista da segurança em projetos.

Para todos os casos a abordagem previu vidas menores que as observadas experimentalmente, sendo 60% delas dentro da faixa de fator de dois. As que ficaram apenas dentro da faixa de fator de quatro foram as previsões para os casos com amplitudes de tensão cisalhante mais pronunciadas, casos com λ_σ maiores que um, onde experimentalmente observou-se as maiores vidas.

As previsões para os casos não proporcionais foram as que apresentaram o maior grau de dispersão, sendo apenas 50% delas dentro da faixa de fator de dois. Assim como exposto no capítulo 4 para condições de fadiga de baixo número de ciclos, a abordagem realizou estimativas otimistas. Isso ocorre devido à simplicidade da lei de endurecimento cinemático adotada para descrever o comportamento do material sob condições cíclicas, tanto na escala macroscópica quanto microscópica. Ao não considerar os possíveis efeitos do endurecimento não proporcional na escala microscópica, a lei de Armstrong-Frederick (1966) gera um retardo na evolução da variável de dano, proporcionando estimativas de vidas mais longas.

Os casos de *runout* numéricos observados durante as simulações estão diretamente relacionados à definição do *runout* experimental. Possivelmente, a utilização de um *runout* experimental com ordem de grandeza superior proporcionaria um limite de resistência à fadiga menor para o material, consequentemente, diminuindo o valor da tensão de escoamento na escala microscópica. Isso permitiria que o modelo constitutivo previsse a evolução da variável de dano em faixas de tensões ainda menores do que a varrida pelos ensaios de fadiga realizados. Contudo, a adoção de um *runout* experimental maior foi inviabilizado pela disponibilidade das máquinas de ensaios.

5.6 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, a extensão proposta para o modelo de Gurson foi associada à abordagem em duas escalas introduzidas por Lemaitre et al. (1999) e aplicada na previsão de vidas de materiais dúcteis submetidos à fadiga de alto número de ciclos, seguindo uma metodologia incremental semelhante à adotada no capítulo anterior. Considerando o conceito de duas escalas, o processo de degradação gradual do componente mecânico analisado passou a ser descrito por meio da evolução da variável de dano na escala microscópica prevista pelo modelo constitutivo a cada ciclo.

A validação da abordagem para previsões de vida proposta foi realizada através da comparação entre resultados experimentais e valores de vida estimados para ensaios de fadiga realizados em corpos de prova em formato ampulheta feitos de aço Grau R4, material utilizado pela indústria *offshore* para a fabricação de amarras de ancoragem. Para realização dos ensaios, foram adotadas quatro diferentes trajetórias de carregamento com tensão prescrita, sendo duas uniaxiais e duas biaxiais, uma proporcional e outra não.

A análise dos valores de vida estimados pela abordagem indica uma elevada capacidade preditiva por parte da mesma, prevendo 100% dos casos com um fator de tolerância de quatro vezes e

75% deles com um fator de dois. Contudo, novamente a utilização da lei de endurecimento cinemática de Armstrong-Frederick (1966), por ser insensível aos efeitos do endurecimento não proporcional possivelmente apresentado pelo material em escala microscópica, resultou em previsões de vidas otimistas para a maioria dos casos com trajetória de carregamento não proporcional, mas mesmo assim dentro da faixa de fator de quatro.

Mesmo com a forte influência da amplitude de carregamento sobre os valores dos parâmetros K_1 e K_2 evidenciada no capítulo 4, os resultados obtidos mostram que, pelo menos para a faixa de amplitude de carregamento varrida pelos ensaios de fadiga, a estratégia de utilização de parâmetros constantes funcionou de maneira satisfatória, não comprometendo a precisão da abordagem e eliminando a necessidade de utilização das Equações (4.6) e (4.8) para determinação dos valores dos parâmetros. Contudo, a definição do *runout* experimental se mostrou determinante na definição da faixa de aplicação da abordagem. Aumentar sua ordem de grandeza, expandiria o intervalo de amplitudes de carregamento coberta por meio da diminuição dos valores do limite de resistência à fadiga e a tensão de escoamento na microescala, possibilitando que o modelo previsse dano na microescala para amplitudes ainda mais baixas e reduzindo as chances de *runout* numérico.

Portanto, como a abordagem proposta considera um comportamento elastoplástico do material em ambas as escalas, a faixa de carregamento a qual essa abordagem pode ser aplicada é limitada pela definição do limite de resistência à fadiga do material, dependente do valor de *runout* experimental assumido. Sendo possível aplicá-la tanto em fadiga de baixo número de ciclos, onde a degradação do material pode ser descrita pela evolução do dano em ambas as escalas, quanto em fadiga de alto número de ciclos, onde na ausência de dano na escala macroscópica, a degradação é descrita pelo dano na escala microscópica, permitindo a utilização da abordagem até mesmo na zona de transição entre os regimes de fadiga.

6 ESTUDO DE CASO

Neste capítulo a aplicabilidade prática da abordagem em duas escalas proposta para análise da fadiga em materiais dúcteis é avaliada por meio da sua utilização em um contexto real de engenharia. Ela é empregada na previsão da falha de elos, fabricados com aço Grau R4, submetidos a carregamentos cíclicos combinados de tração e flexão fora do plano (OPB). Os dados experimentais utilizados nas análises foram obtidos por meio de ensaios de fadiga realizados em trechos de amarras, compostas por nove elos comuns com malhete, utilizando o aparato experimental projetado por Mamiya et al. (2019). Para avaliar a capacidade preditiva da abordagem, as estimativas de vida realizadas por ela são comparadas aos resultados observados experimentais e às previsões obtidas por meio do critério de fadiga proposto por Smith–Watson–Topper (1970).

6.1 INTRODUÇÃO

No início dos anos 2000, falhas prematuras em linhas de ancoragem de uma boia de transferência de petróleo do tipo CALM (*Catenary Anchor Leg Mooring*) ancorada na costa da Angola chamou a atenção da indústria *offshore*. Apesar das linhas terem sido projetadas seguindo as recomendações da API (*American Petroleum Institute*) para resistirem por vinte anos, entre os anos de 2002 e 2003 foram registrados cerca de cinco casos de rompimentos de linhas com menos de 2 anos de serviço, tendo os casos mais críticos ocorridos em menos de oito meses após a instalação das linhas. Esses incidentes motivaram o grupo empresarial SBM *Offshore* a desenvolver uma série de estudos, incluindo testes em amarras em escala real, simulações em elementos finitos e testes em amostras de material, na busca de uma melhor compreensão dos possíveis fatores que teriam causado o rompimento das linhas (Melis et al., 2005; Vargas e Jean, 2005; Jean e Goessens, 2005; Rampi e Vargas, 2006). Os estudos apontaram que as falhas, ocorridas em cada uma das linhas no primeiro elo livre para se movimentar após a curva do escovém, teriam sido causadas por um mecanismo de falha até então desconhecido, a flexão dos elos fora dos seus planos principais (plano que contém a forma oval do elo), conforme apresentado na Figura 6.1.

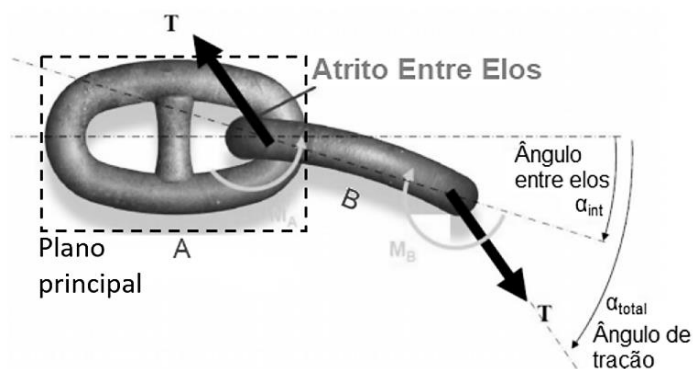


Figura 6.1 – Mecanismo de OPB ocorrido dentro do escovém da boia CALM (adaptado de Vargas e Jean, 2005)

Após a fabricação das amarras, as mesmas são submetidas a cargas de prova equivalentes à 70 ou 80% sua carga mínima de ruptura (*Minimum Breaking Load – MBL*). A aplicação da carga de prova é parte essencial do controle de qualidade do processo de soldagem dos elos, além de aumentar substancialmente a vida de fadiga por tração-tração da amarra ao introduzir tensões residuais de compressão em alguns pontos do elo, conforme exposto por Shoup et al. (1992). Contudo, a carga de prova provoca a deformação plástica dos elos, principalmente na região de contato entre eles, introduzindo uma resistência ao rolamento de um elo sobre o outro.

Durante a vida útil de uma linha de ancoragem, as elevadas cargas de tração atuando sobre ela contribuem para que as forças de atrito entre as superfícies de contato dos elos aumentem de tal forma a ponto de causar o travamento completo dos elos, impedindo o movimento relativo entre eles. Portanto, com a movimentação da unidade flutuante, causada por fatores ambientais com ondas e vento, faz com que surjam, além de esforços de tração, esforços transversais às linhas que associados à articulação deficiente do *fairlead* (coroa responsável pelo direcionar a amarra, ver Figura 6.2) ou escovém resultam no aparecimento de momentos fletores nos elos.



Figura 6.2 - Fairleads da FPSO Greater Plutonio.

Teoricamente, a flexão dos elos pode ocorrer em qualquer ponto da amarra onde haja movimento relativo entre os elos. Contudo, os maiores ângulos relativos são observados entre os elos mais próximos à conexão da amarra com a unidade flutuante, feita normalmente pelo *fairlead*, seja com ou sem escovém. Além disso a flexão pode ocorrer em duas direções, para fora do plano principal, sendo

definida como *Out of Plane Bending* (OPB), ou no plano, definida como *In Plane Bending* (IPB). Porém, estudos realizados por Melis et al. (2005) indicam que, por ser capaz de provocar a inicialização e propagação de trincas em um curto espaço de tempo, o mecanismo de OPB é consideravelmente mais prejudicial para a vida em fadiga dos elos que os mecanismos de fadiga por tração ou IPB, tornando essencial sua consideração durante o projeto das linhas de ancoragem para unidades flutuantes de ancoragem permanente para operações em águas profundas.

Com o objetivo de desenvolver pesquisas para compreender melhor o mecanismo de OPB e com isso propor novas diretrizes para projeto de linhas de ancoragem, no ano de 2007, vinte e oito empresas do ramo *offshore* se reuniram para a criação de um Projeto Industrial Conjunto (JIP). O projeto durou até o ano de 2013 e as principais descobertas feitas durante esse período podem ser encontradas em Rampi et al. (2015) e Rampi et al. (2016a,b). Elas serviram de base para a empresa Bureau Veritas na elaboração das notas de orientações NI 604 DT R00 E no ano de 2014, atualmente uma das únicas orientações disponíveis para a análise da fadiga no *top chain* (20 primeiros elos da linha de ancoragem após o *fairlead*) considerando a combinação dos efeitos causados pelos mecanismos de tração, OPB e IPB.

As diretrizes propõem que a análise da fadiga nos elos seja realizada com base em tensões equivalentes, determinadas por meio de formulas empíricas, atuantes em pontos do elo tidos como prováveis locais de inicialização de trincas por fadiga. Tais tensões são calculadas pela superposição linear das componentes de tensão induzidas pelas cargas de tração e momentos de OPB e IPB. Cada componente de tensão é assumida como sendo o produto entre as tensões nominais atuante no elo e seus respectivos fatores concentradores de tensão, calculados por meio do critério de Dang Van (1989) considerando questões como a geometria dos elos, fatores ambientais, carga de tração na linha e ângulos entre elos. Os pontos críticos adotados pela diretriz foram definidos por Rampi et al. (2015) com base em simulações numéricas e observações experimentais, eles são apresentados na Figura 6.3.

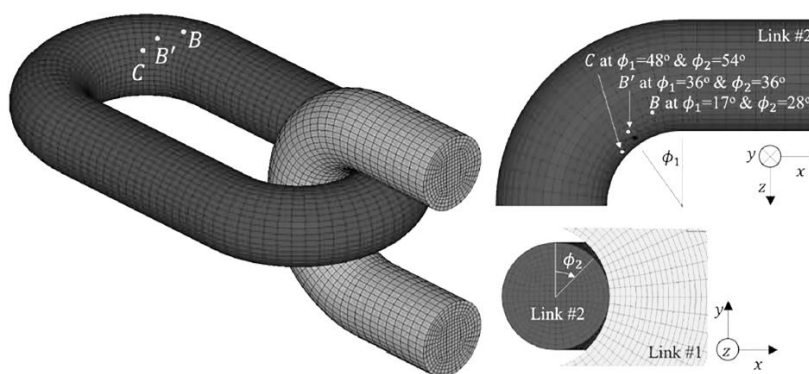


Figura 6.3 - Prováveis pontos de inicialização de trincas por fadiga devido ao mecanismo de OPB (adaptado de Chung e Lee, 2018)

Contudo, as notas de orientações propostas pela Bureau Veritas (2014) apresentam alguns pontos fracos, como exposto por Calf (2015), que critica o uso do critério de Dang Van para o cálculo dos fatores de concentração de tensão, critério apontado por Socie e Marquis (2000) como inadequado

para uso em casos de carregamentos não proporcionais. Uma vez que os carregamentos de OPB possuem um caráter não proporcional, a análise em fadiga poderia ser melhorada pela seleção de um critério de fadiga mais apropriado.

A confiabilidade do modelo em elementos finitos adotado pela Bureau Veritas para estudar a relação entre a tração da amarra e sua rigidez à flexão foi questionada por Nilakash (2016). Segundo ele, ao considerar todos os elos como vigas idênticas, a Bureau Veritas não estaria representando de maneira fiel um trecho de amarra real, onde os planos principais dos elos estão perpendiculares um em relação ao outro. Além disso, o limite de deslizamento proposto estaria superestimado, pois a deformação dos elos devido a carga de prova não teria sido levada em conta.

Choung e Han (2016) apontam como uma das principais falhas das diretrizes propostas a superposição linear das componentes de tensão. Uma vez que os valores de cada componente são dependentes de fatores que variam no tempo, como a carga de tração e o ângulo entre elos, elas podem atingir seus valores máximos em instantes de tempo diferentes, de maneira não proporcional. Portanto, a superposição linear dos valores máximos de cada componente pode resultar em valores superestimados de tensão nos pontos críticos do elo. Outra incoerência, seria o uso de fatores concentradores de tensão constantes. Por meio de simulações em elementos finitos de modelos compostos por três elos, eles observaram que esses fatores variam de maneira não linear com o aumento dos ângulos entre elos e da carga de tração. Portanto, ao serem assumidos como constantes, eles estariam descrevendo de forma correta a relação entre as tensões induzidas pelo mecanismo de OPB e os ângulos entre elos apenas uma pequena faixa de carga de tração, superestimando os valores de tensão para cargas de tração elevadas e subestimando para cargas mais baixas.

As diretrizes propostas pela Bureau Veritas também desconsideram os possíveis efeitos gerados pela interação entre elos e *fairlead*, uma vez que a grande maioria dos estudos realizados durante o JIP focavam apenas em entender o comportamento entre dois elos adjacentes. Após realizarem uma detalhada análise numérica do mecanismo de OPB em elos de um trecho de amarra passando por um *fairlead* de sete bolsos, Luo e Heyl (2017) concluíram que a presença do *fairlead* afeta a resistência à fadiga da amarra devido ao atrito adicionais gerado pelo contato entre os elos e sua estrutura. Além disso, foi demonstrado que, mesmo o elo estando totalmente apoiado no bolso do *fairlead*, ele está sujeito a tensões de OPB.

Apesar dos inúmeros trabalhos realizados durante o projeto JIP, as informações geradas ainda são insuficientes para a elaboração de diretrizes para projeto de amarras mais abrangentes e coerentes com a realidade, sendo necessária uma maior compreensão acerca do comportamento do mecanismo de OPB em diferentes circunstâncias e configurações de amarras, pois só assim será possível propor uma abordagem de análise que apresente metodologias e procedimentos confiáveis para determinação das tensões de OPB e avaliação dos seus efeitos sobre a vida em fadiga dos elos. Alguns trabalhos na área numérica foram propostos nos últimos anos sugerindo novas abordagens, tanto para a determinação das tensões geradas pelo mecanismo de OPB quanto para a realização das previsões de vida em elos.

Entre eles vale ressaltar o realizado por Choung e Lee (2018), que propuseram uma nova abordagem numérica para determinação das tensões induzidas pelos mecanismos de OPB e IPB nos pontos críticos dos elos sem o uso de fatores concentradores de tensão e da relação entre os momentos e o ângulo entre elos. Ao contrário da abordagem numérica tradicional proposta por Vargas e Jean (2005), que adota um modelo em elementos finitos composto por três elos para simular a interação entre elos onde o momento de OPB é imposto ao elo central pela prescrição de rotação nos elos adjacentes, na abordagem proposta o momento de OPB no elo central passa a ser gerado pela aplicação de uma força oblíqua no terceiro elo.

Choung e Lee (2018) defendem que esse método é mais realista, porém eles próprios reconhecem que falta uma base quantitativa para essa afirmação. Estudos posteriores realizados por Lee et al. (2018), Choung et al. (2018) e Choung e Lee (2019) mostraram que, dependendo da abordagem numérica adotada, os valores de tensão nos pontos críticos podem variar bastante. Por exemplo, para baixas cargas de tração a abordagem tradicional é mais conservadora, prevendo valores de tensão menores nos pontos críticos do elo, porém, para cargas de tração elevadas, ambas abordagens proporcionam respostas similares.

Como alternativa para realização de análises de fadiga em elos, Xue et al. (2018) sugeriram a utilização da mecânica da fratura. Em previsões de vida dos elos que compõem uma linha de ancoragem de uma plataforma semissubmersível ancorada no Golfo do México, a mecânica da fratura foi capaz de proporcionar resultados compatíveis os obtidos através das abordagens tradicionais de curvas T-N (API, 2008) e S-N (DNVGL, 2015), porém mediante à escolha adequada dos os fatores concentradores de tensão utilizados por elas.

Como parte de um projeto de pesquisa financiado pela empresa Petrogal Brasil, Mamiya et al. (2019) desenvolveram um aparato experimental para realização de ensaios de fadiga em trecho de amarras com escala reduzida de com o objetivo de investigar a influência da carga de tração na amarra e do ângulo entre elos sobre a vida em fadiga de elos. Os ensaios de fadiga consistiam em tracionar um trecho de amarra com uma carga constante por meio de um atuador hidráulico horizontal enquanto um atuador hidráulico vertical impunha deslocamento vertical cíclico ao elo central da amarra, gerando momentos de OPB nos elos adjacentes a ele.

Com base nos resultados experimentais obtidos para trechos de amarras compostas por elos comuns de diâmetro 19,05 mm e com malhete, produzidos com o aço naval Graus U2, foi desenvolvida uma nova formulação matemática para determinação das tensões no ponto crítico do elo dependente apenas dos parâmetros diâmetro dos elos, carga de tração e ângulo entre elos, eliminando a necessidade de utilização de fatores concentradores de tensão. Ao aplicar os valores de tensão determinados pela formulação proposta ao critério de fadiga SWT (Smith-Watson-Topper), Mamiya et al. (2019) obtiveram estimativas de vida com um alto grau de concordância com os danos experimentais, atestando a eficiência da metodologia proposta.

O objetivo desse capítulo é avaliar a eficiência da abordagem para previsões de vida em fadiga, apresentada no capítulo anterior, em uma situação real de engenharia, no caso, análise da fadiga de elos

fabricados com aço Grau R4 que compõem trechos de amarras semelhantes as utilizadas pela indústria *offshore* em linhas de ancoragem de unidades flutuante em alto mar, exceto pelo fato delas estarem em escala reduzida. A análise se baseara nos resultados experimentais de ensaios realizados em trechos de amarras utilizando o aparato experimental projetado por Mamiya et al. (2019) e estimativas de vidas obtidas por meio do critério de fadiga SWT.

Esse capítulo é estruturado da seguinte forma: Nas seções 6.2 é apresentado o aparato experimental utilizado, bem como a metodologia adotada para realização dos ensaios de fadiga em trechos de amarras. As previsões de vidas realizadas pela abordagem proposta e pelo critério SWT são apresentadas na seção 6.3. Por fim, a seção 6.4 traz algumas considerações acerca da capacidade preditiva apresentada pela abordagem em um contexto real de engenharia.

6.2 ENSAIOS DE FADIGA EM AMARRAS

Os primeiros ensaios em amarras com o intuito de estudar o mecanismo de OPB foram realizados por Melis et al. (2005) em trechos de amarras em escala real. Os ensaios foram realizados com quatro diferentes configurações de amarras (Elos de aço Grau R3S com 81 mm de diâmetro e sem malhete; Elos de aço Grau RQ3 com 107 mm de diâmetro e sem malhete; Elos de aço Grau R4 com 124 mm de diâmetro e sem malhete; Elos de aço Grau RQ4 com 146 mm de diâmetro e sem malhete). Os ensaios consistiam em aplicar uma carga de tração pré-definida à amarra por meio de um atuador hidráulico horizontal e em seguida impor um deslocamento vertical a um dos elos através de uma sapata, gerando o mecanismo de OPB nos elos adjacentes, conforme apresentado na Figura 6.4.

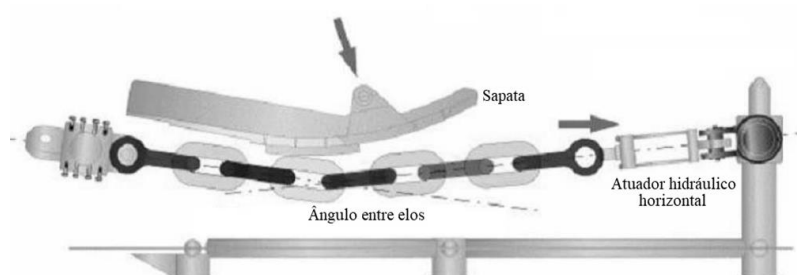


Figura 6.4 - Esquema do dispositivo utilizado por Melis et al. (2005) para ensaio de amarras (adaptado de Melis et al., 2005).

Devido os ensaios terem como principal objetivo estudar apenas o comportamento quase-estático entre dois elos adjacentes, foram realizados apenas um pequeno número de ciclos de carregamento por ensaio. Além disso, para que a única variação de tensão medida pelos extensômetros presos aos elos fosse devida as tensões geradas pelo mecanismo de OPB o atuador hidráulico horizontal foi dimensionado de tal maneira que não houvesse grandes variações da força de tração sobre a amarras mesmo com a aplicação do deslocamento vertical a um dos elos.

A primeira análise laboratorial da falha por fadiga causada pelo mecanismo de OPB foi realizada por Rampi e Vargas (2006), que conduziram uma série de ensaios cíclicos em trechos de amarras compostos por vinte três elos de aço Grau R3 com 40 mm de diâmetro e malhete. A configuração do aparato utilizado por eles para realização dos ensaios é bastante parecida com a apresentada por Melis et al. (2005), porém a sapata foi substituída por um modelo de escovém em escala reduzida, conforme apresentado na Figura 6.5.

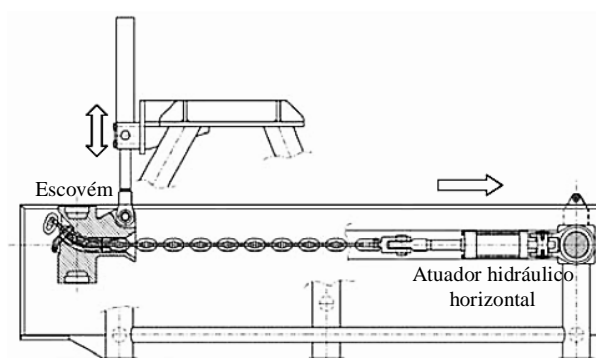


Figura 6.5 - Esquema do dispositivo utilizado por Rampi e Vargas (2006) para ensaio de amarras (adaptado de Rampi e Vargas, 2006).

Assim como nos ensaios realizados por Melis et al. (2005), era aplicado à amarra uma carga de tração pré-definida através de um atuador hidráulico horizontal, porém o mecanismo de OPB passa a ser gerado pelo deslocamento vertical cíclico imposto ao escovém por um outro atuador hidráulico até que ocorra o rompimento da amarra. Rampi e Vargas (2006) observaram que a relação empírica proposta por Melis et al. (2005) não funciona muito bem em condições cíclicas, podendo superestimar os valores de tensão induzidos pelo mecanismo de OPB.

Com uma configuração de aparato experimental um pouco diferente, onde o mecanismo de OPB era gerado pela aplicação de um ângulo de rotação ao final do trecho de amarra, Lassen et al. (2009) realizou uma série de ensaios de fadiga em trechos de amarras de aproximadamente doze metros, compostas por elos de aço Grau R3 com 125 mm de diâmetro e sem malhete. Ao contrário de Melis et al. (2005) e Rampi e Vargas (2006), Lassen et al. (2009) não se preocuparam em manter a carga de tração da amarra constante durante o ensaio. Os resultados experimentais obtidos serviram como base para a realização de simulações em elementos finitos para determinação das tensões máximas no ponto crítico do elo, posteriormente utilizadas em uma abordagem de curva S-N para previsão de vida das amarras.

Agora como parte do JIP, Rampi et al. (2015) fizeram mais uma nova série de ensaios de fadiga em trechos de amarras com o objetivo de esclarecer a influência de parâmetros, como a carga de tração sobre a amarra, frequência do ensaio, ambiente, tamanho dos elos e faixa de tensão, sobre a vida em fadiga de uma amarra. Foram realizados doze ensaios com duas diferentes configurações de amarras (Elos de aço Grau R4 com 84 mm e 127 mm de diâmetro, ambos os casos sem malhete). Desses ensaios, dez foram realizados com as amarras submersa em uma solução de água e sal, reproduzindo a água do mar. Devido a diferença de tamanho dos elos, foram projetados dois aparatos experimentais para

realização dos ensaios, ambos com o mesmo princípio de funcionamento. O aparato utilizado para ensaiar as amarras com diâmetro de 84 mm é apresentado na Figura 6.6.



Figura 6.6 – Dispositivo utilizado por Rampi et al. (2015) para ensaio de amarras (a) e detalhe do aparato preso ao elo central (b) (fonte: Rampi et al., 2015).

Para realização do ensaio, o trecho de amarra é tracionado por um atuador hidráulico horizontal, em seguida o deslocamento vertical imposto por um atuador vertical é transmitido ao elo central da amarra por meio de um aparato preso a ele, gerando o mecanismo de OPB nos elos adjacentes a ele. O aparato preso ao elo central, também é preso ao atuador vertical, permitindo que o elo se mova para baixo ou para cima, produzindo ângulos entre elos positivos e negativos. Os resultados experimentais obtidos serviram de base para avaliação das notas de orientações NI 604 DT R00 E propostas pela empresa Bureau Veritas em 2014.

Com o propósito de reproduzir em trechos de amarras em escala reduzida o mecanismo de OPB gerado na prática pela interação cíclica entre elos e *fairlead* ao longo da vida útil de amarras utilizadas em linhas de ancoragem de unidades flutuantes de produção, armazenamento e transferência (*Floating Production Storage and Offloading – FPSO*) de petróleo em águas profundas, Mamiya et al. (2019) projetaram um aparato experimental que consiste em um *frame* metálico montado sobre uma máquina servo-hidráulica uniaxial MTS 322 *Material Test System* com capacidade de carga de ± 100 kN. O aparato experimental é apresentado na Figura 6.7.

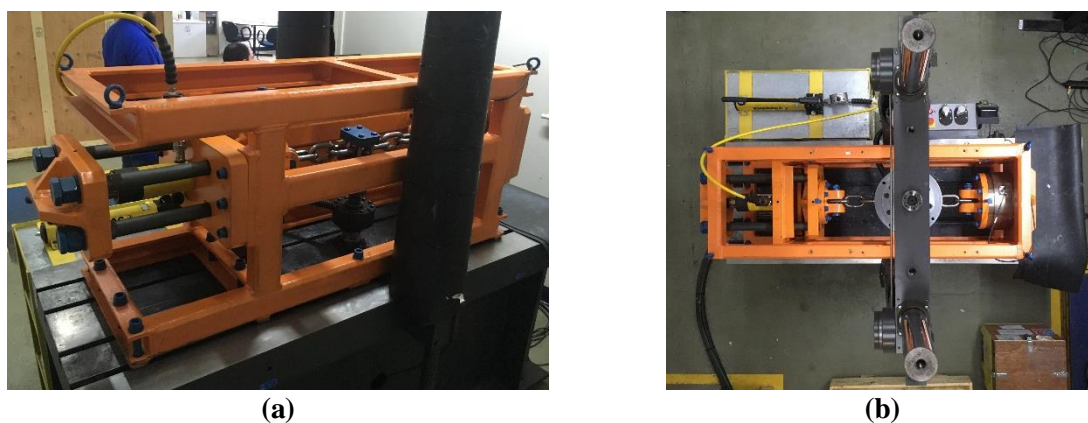


Figura 6.7- Dispositivo projetado por Mamiya et al. (2019) para ensaio de amarras em escala reduzida (a) e vista superior do mesmo (b).

Um desenho esquemático do aparato onde seus principais componentes são identificados é apresentado na Figura 6.8.

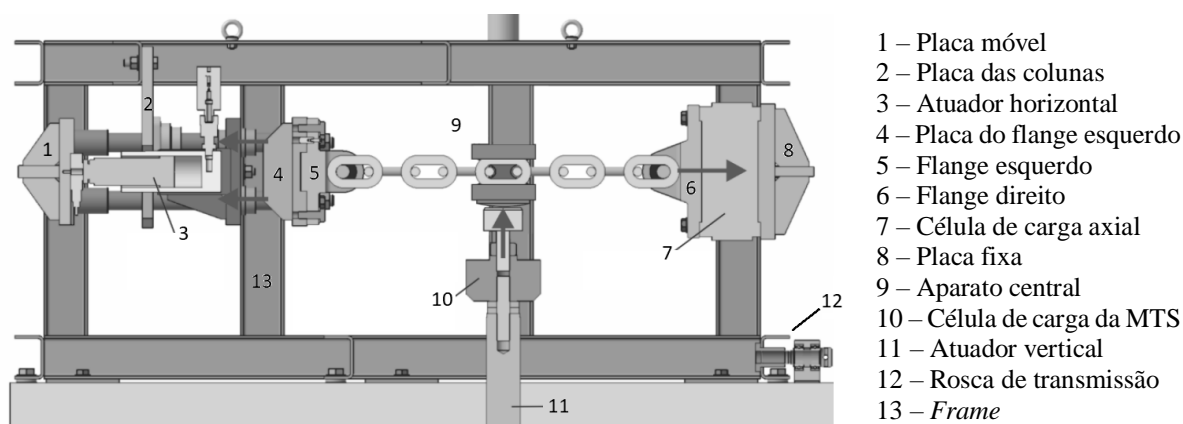
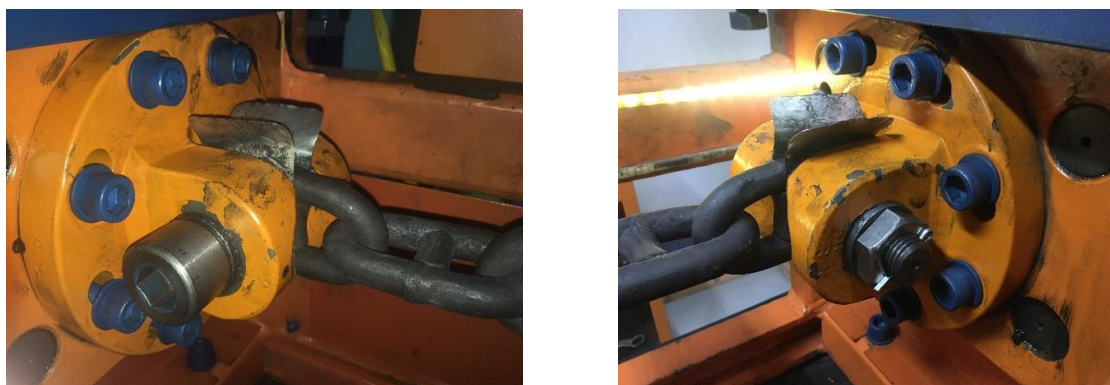


Figura 6.8 – Principais componentes do dispositivo projetado por Mamiya et al. (2019) (adaptado de Mamiya et al., 2019).

Para a realização do ensaio, o trecho de amarra é preso ao *frame* por meio de flanges com o auxílio de pinos, conforme apresentado na Figura 6.9. Esse tipo de fixação impede o movimento horizontal da amarra, possibilitando que ela seja tracionada, porém permite que as extremidades da amarra girem durante a aplicação da carga vertical.



(a) (b)
Figura 6.9 - Flange esquerdo: vista frontal (a) e vista traseira (b).

O flange da direita é fixado por parafusos a uma célula de carga axial que tem como função medir a força horizontal, F_H , atuante sobre a amarra. Por sua vez essa célula de carga é presa a uma placa fixada ao *frame*. A outra extremidade da amarra é fixada ao flange esquerdo, preso à uma placa móvel. Ao ser acionado, o atuador hidráulico horizontal movimenta a placa móvel na direção horizontal, tracionando o trecho de amarra. Importante ressaltar que o atuador horizontal mantém a posição fixa após acionado, impedindo que o valor da pré-carga de tração, F_{H0} , aplicada à amarra varie durante o ensaio.

Devido às variações dimensionais dos elos causadas pelo processo de fabricação, o aparato experimental foi projetado para que o *frame* possa se movimentar na direção horizontal sobre a mesa da máquina servo-hidráulica por meio de um sistema de rosca de transmissão, permitindo que o elo central seja alinhado ao atuador hidráulico vertical após a pré-carga de tração ser aplicada a amarra. Com o alinhamento garantido, o atuador vertical aplica deslocamento vertical cíclico ao elo central por meio de um aparato preso a elo, conforme apresentado na Figura 6.10. A força vertical, F_V , gerada pelo atuador vertical é medida por uma célula de carga axial localizada entre o atuador vertical e o aparato do elo central.

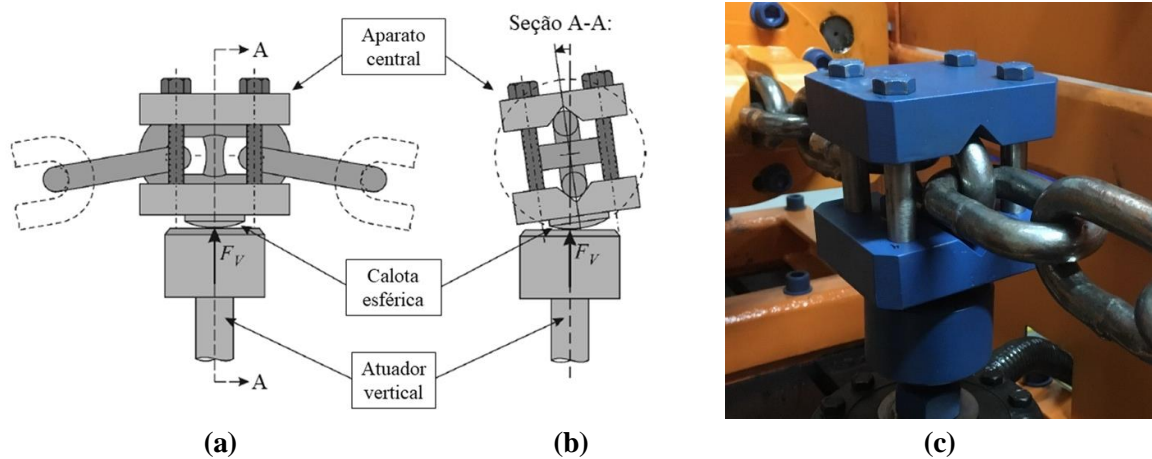


Figura 6.10 - Aparato central: vista frontal (a); vista lateral (b); fotografia (c).

Com base no equilíbrio de forças e momento, representados no diagrama de corpo livre de metade da amarra apresentado na Figura 6.11, Mamiya et al. (2019) propuseram uma formulação para determinação das tensões no ponto crítico do elo considerando apenas as dimensões da amarra e cargas aplicadas sobre ela, eliminando a necessidade de utilização de fatores concentradores de tensão. Eles acreditam que essa abordagem de engenharia é mais adequada que análises em elementos finitos devido às dificuldades em descrever o problema do contato entre os elos numericamente (lei de atrito, deformações plásticas localizadas e desgaste).

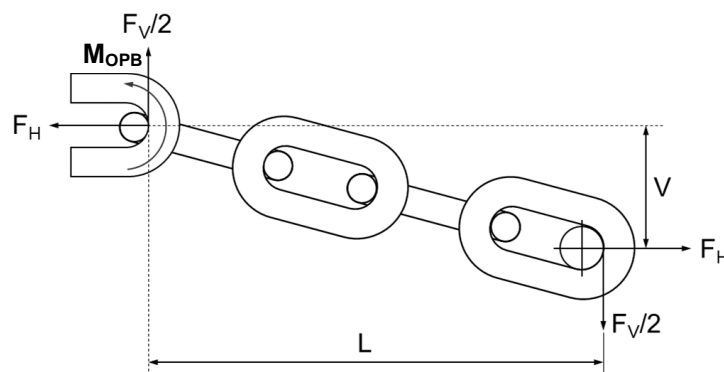


Figura 6.11 - Diagrama de corpo livre de meio trecho de amarra (adaptado de Mamiya et al., 2019).

Mamiya et al. (2019) afirmam que com a aplicação da pré-carga de tração e deslocamento vertical do elo central, o elo adjacente à ele é submetido a uma força de contato, que pode ser decomposta em componentes horizontais F_H e verticais $F_V/2$, e um momento fletor M_{OPB} . De acordo com a terceira lei de Newton, para que o sistema esteja em equilíbrio, são impostas forças de reação na região de contato entre o elo e o pino de magnitudes iguais e sentidos opostos. Contudo, assumindo que os pinos que prendem as extremidades da amarra aos flanges não transmitem momento devido à lubrificação das suas superfícies de contato com os elos, o momento fletor resultante do balanço de momentos é definido por Mamiya et al. (2019) por meio da Equação (6.1).

$$M_{OPB} = \frac{F_V}{2}L - F_HV \quad (6.1)$$

onde V é o deslocamento vertical do elo central em relação ao ponto de referência medido com a amarra tracionada apenas com a pré-carga e L é a distância entre o ponto de contato do elo central com seu elo adjacente e ponto de contato do último elo com o pino de fixação.

Portanto, Mamiya et al. (2019) assumem que a tensão responsável pela inicialização e propagação da trinca por fadiga na região crítica do elo pode ser estimada como a soma das componentes de tensão atuantes sobre o elos devido aos mecanismos de tração e OPB, conforme apresentado na Equação (6.2).

$$\sigma_{total} = \sigma_{axial} + \sigma_{OPB} \quad (6.2)$$

A componente de tensão axial e de OPB são definidas por Mamiya et al. (2019) na forma das Equações (6.3) e (6.4).

$$\sigma_{axial} = 2C_\alpha \frac{F_H}{\pi d^2} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{OPB} = \frac{16L}{\pi d^3} \left(\frac{F_V}{2} - F_H \frac{V}{L} \right) \quad (6.4)$$

onde C_α é um fator de correção geométrica proposto por Mamiya et al. (2019) e definido como sendo a razão entre a tensão de ruptura do material e a tensão nominal de ruptura do elo atuante na sua seção reta, calculada a partir da carga mínima de ruptura da amarra, e d é o diâmetro do elo.

6.3 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais utilizados para realização desse estudo de caso foram obtidos a partir de ensaios realizados em trechos de amarras utilizando o aparato experimental projetado por Mamiya et al. (2019). Com base nas forças adotadas para realização dos ensaios, os valores das tensões máximas e mínimas no ponto crítico dos elos, utilizadas como entradas para a abordagem de previsão de vida em duas escalas, foram estimados através das Equações (6.3) e (6.4).

6.3.1 Material

Os ensaios de fadiga foram realizados em trechos de amarras compostos por nove elos comuns com diâmetro de 19,05 mm e malhete. As amarras foram fabricadas mediante encomenda pela empresa Coforja com barras de aço Grau R4 retiradas do mesmo lote de material usado para a confecção dos corpos de prova utilizados nos ensaios de fadiga mencionados no capítulo anterior. A Figura 6.12 apresenta um dos trechos de amarra antes do ensaio de fadiga e as dimensões nominais de cada elo.

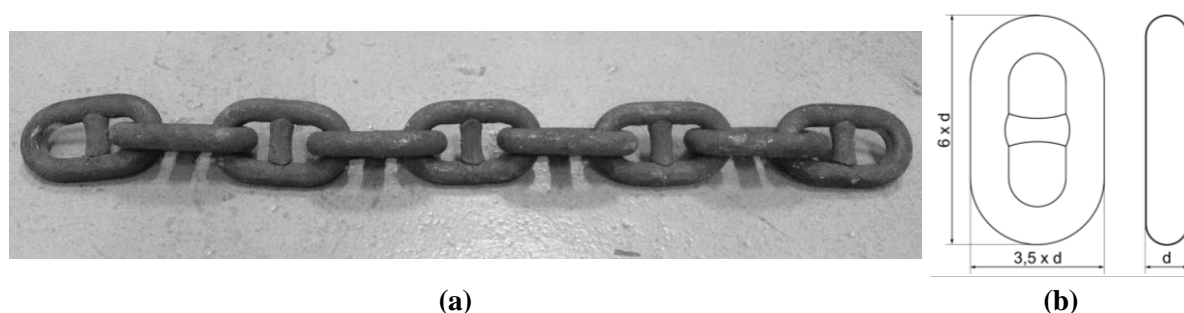


Figura 6.12 - Trecho de amarra (a) e geometria dos elos (b).

Seguindo o processo padrão de fabricação adotados nas amarras em escala real, após a fabricação das amarras, elas passaram pela mesma série de tratamentos térmicos que os corpos de provas utilizados na seção anterior passaram: normalização, tempera e revenido. Em seguida alguns trechos de amarra foram submetidos a ensaios de tração até a ruptura completa para determinação da carga mínima de ruptura do lote de amarras, que no caso foi de 353 kN. Por fim, os outros trechos de amarras foram submetidos à carga prova correspondente à 70% do valor dessa carga mínima de ruptura. Portanto, considerando a tensão de ruptura do aço Grau R4 apresentado na Tabela 5.2, o fator de correção geométrica adotado para as amarras ensaiadas foi de 1,435.

6.3.2 Programa de ensaios

Para realização dos ensaios foram definidos os valores da pré-carga inicial e das forças horizontais máximas e mínimas, logo, os valores de deslocamento prescritos pelo atuador vertical foram estimados para que esses valores de forças horizontais forem atingidos. Nos ensaios de fadiga, a falha

da amarra foi definida como o momento da fratura completa de pelo menos de uma das seções do elo e o *runout* foi assumido para os ensaios em que não houve falha dos elos após 1 milhão de ciclos. Os parâmetros de forças adotados e o número de ciclos observados até a falha para cada ensaio são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Programa de ensaios de fadiga em trechos de amarra em escala reduzida.

ID da amarra	F_{H0} kN	F_{Hmax} kN	F_{Hmin} kN	F_{Vmax} kN	F_{Vmin} kN	V_{max} mm	V_{min} mm	L mm	f Hz	N_f Ciclos
R4A01	52,0	109,9	55,2	24,0	3,0	29,5	16,1	308,4	1,0	34323
R4A02	50,4	109,5	55,3	24,3	3,3	30,1	16,6	306,9	1,0	16409
R4A03	41,1	71,0	45,9	11,3	2,8	19,2	10,8	303,9	1,5	<i>runout</i>
R4A04	40,9	81,0	45,8	14,9	2,4	23,8	13,8	309,9	1,0	149698
R4A05	41,3	90,8	46,0	18,4	1,8	26,2	13,7	311,4	1,0	89332
R4A07	41,2	99,6	45,4	21,3	2,2	29,1	15,3	311,4	1,0	79321
R4A13	41,4	109,8	45,3	25,9	2,4	34,9	19,9	315,4	1,0	57591
R4A19	40,8	75,8	45,6	13,5	3,3	21,3	12,2	303,4	1,5	<i>runout</i>

Em todos os ensaios que houve falha, observou-se que a inicialização das trincas ocorreram na região do elo apontadas pelas notas de orientações NI 604 DT R00 E e Rampi et al. (2015) como pontos críticos (ver Figura 6.3), conforme apresentado na Figura 6.13. Isso indica que o aparato experimental obteve sucesso em reproduzir a falha por fadiga causada pela combinação dos mecanismos de tração e OPB.

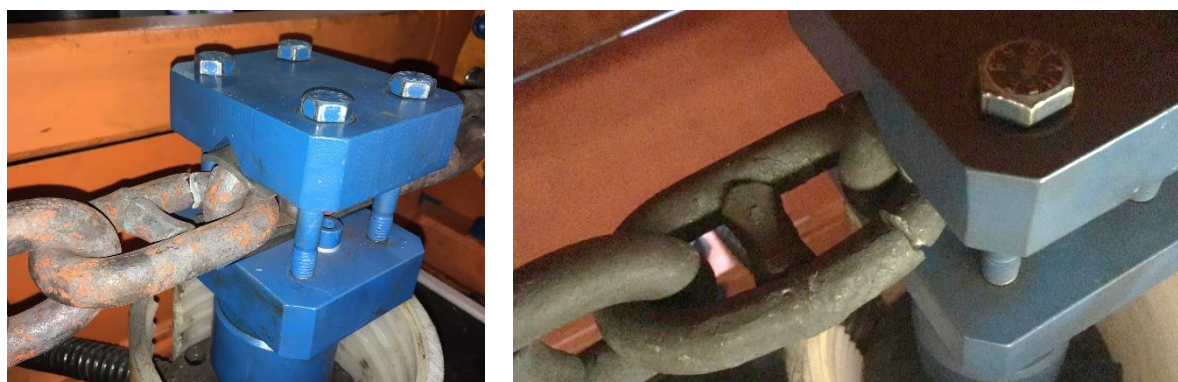


Figura 6.13 - Elos fraturados devido a tensões geradas pela combinação dos mecanismos de tração e OPB.

6.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicando as Equações (6.3) e (6.4) aos parâmetros de ensaio apresentados na Tabela 6.1, foi possível estimar os valores máximos e mínimos das tensões responsáveis pelas falhas por fadiga. Utilizando esses valores para construção dos históricos de carregamentos e assumindo as propriedades mecânicas e parâmetros do modelo definidos para o aço grau R4 no capítulo anterior (ver Tabelas 5.2, 5.3 e 5.5), a abordagem em duas escalas foi aplicada nas previsões das vidas dos elos ensaiados.

Com o intuito de comparar o grau de acurácia da abordagem proposta com o de um critério de fadiga tradicional e bastante utilizado na engenharia, seguindo o exemplo de Mamiya et al. (2019), os valores de tensão estimados também foram utilizados para a previsão das vidas por meio do critério de fadiga proposto por Smith–Watson–Topper (1970). O critério SWT segue a abordagem tensão-vida, muito utilizada em situações onde as tensões atuantes sobre o componente analisado se mantém abaixo da tensão de escoamento do material, como foi o caso dos ensaios realizados nas amarras. Nesse tipo de abordagem a relação proposta por Basquin (1910) é utilizada para estimar o número de ciclos para a falha de um componente com base na amplitude de tensão atuante sobre ele. A relação é apresentada pela Equação (6.5).

$$\sigma_a = \sigma_f' (N_f)^{b'} \quad (6.5)$$

onde σ_f' e b' representam o coeficiente e expoente de resistência à fadiga do material, respectivamente. A Tabela 6.2 apresenta os valores desses parâmetros encontrados para o aço Grau R4 com base nos valores de vida observados no ensaios de fadiga axiais.

Tabela 6.2 - Parâmetros de fadiga para o aço Grau R4.

Símbolo	Descrição	Valor
σ_f'	Coeficiente de resistência à fadiga	6916,5
b'	Expoente de resistência à fadiga	-0,237

Com o objetivo de levar em consideração o efeito da tensão média na vida em fadiga de componentes submetidos a carregamentos uniaxial, Smith–Watson–Topper (1970) propuseram a substituição do valor de amplitude de tensão na relação de Basquin (1910) por um valor equivalente de tensão definido como parâmetro SWT e expresso em função amplitude de tensão e da tensão máxima do ciclo de carregamento, conforme apresentado pela Equação (6.6).

$$\sigma_{SWT} = \sqrt{\sigma_a \sigma_{max}} \quad (6.6)$$

Portanto, para previsão de vidas por meio do critério SWT basta substituir o valor da amplitude de tensão da Equação (6.5) pelo parâmetro SWT, calculado pela Equação (6.6). Os valores de amplitude de tensão e tensão médias estimados pela relação proposta por Mamiya et al. (2019) no ponto crítico do elo, bem como os valores de vida estimados por ambas as abordagens de fadiga são apresentados na Tabela 6.3. Vale ressaltar que as previsões de vida realizadas por meio da abordagem em duas escalas se basearam na evolução da variável de dano em escala microescala, uma vez que as tensões estimadas a partir das forças atuantes sobre as amarras durante os ensaios não foram suficientes para proporcionar o crescimento considerável da variável de dano na macroescala.

Tabela 6.3 – Tensões estimadas e previsões de vida.

ID da amarra	σ_a MPa	σ_m MPa	N_f^{exp} Ciclos	N_f^{num} Ciclos	N_f^{SWT} Ciclos
R4A01	393,1	213,5	34323	8847	70957
R4A02	378,3	212,3	16409	13392	81367
R4A03	184,5	252,7	runout	runout	696348
R4A04	280,2	208,9	149698	runout	227823
R4A05	365,8	221,0	89332	22731	88542
R4A07	353,6	205,2	79321	96528	105376
R4A13	363,3	93,3	57591	54119	152348
R4A19	220,5	292,4	runout	runout	341321

O gráfico apresentado na Figura 6.14 compara as previsões de vidas obtidas por ambas abordagens em relação às vidas observadas experimentalmente.

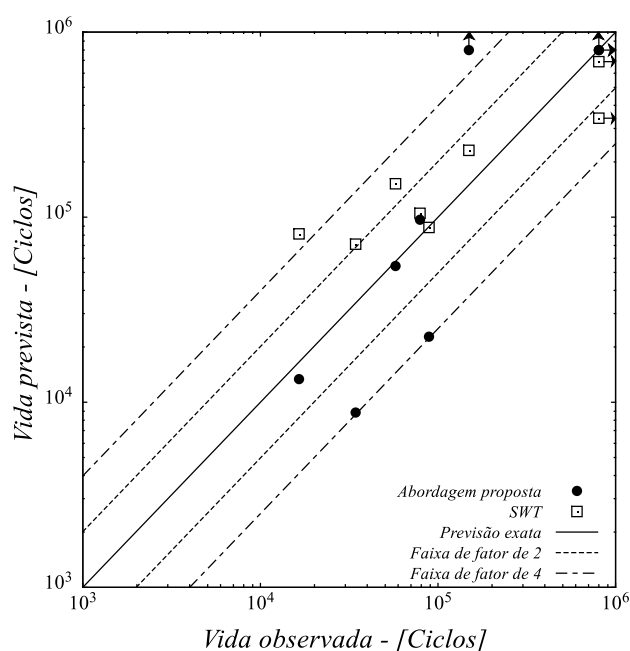


Figura 6.14 - Comparação dos valores de vida experimentais com as previsões obtidas por meio da abordagem proposta e do critério SWT.

Desconsiderando os dois casos de *runout* experimentais, os valores de vida estimados por ambas as abordagens ficaram dentro da faixa de fator de quarto em 83% dos casos, sendo 50% do total de previsões dentro da faixa de dois. Contudo, a abordagem em duas escalas se mostrou mais conservadora, prevendo na maioria dos casos valores de vida menores que os observados experimentalmente e estimados pelo critério SWT. Para o caso do ensaio R4A04, devido aos baixos valores de tensão, a abordagem proposta não foi capaz de prever evolução da variável de dano, mesmo na escala microscópica, prevendo *runout* numérico. O mesmo ocorreu para os casos de *runout* experimentais. Por outro lado, o critério SWT obteve estimativas de vida para todos os casos, até mesmo para os casos de *runout* experimental. Contudo, ele se mostrou bastante otimista, prevendo vidas numéricas maiores que as observadas experimentalmente para todos os casos, exceto para o caso do ensaio R4A05.

6.5 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, a abordagem em duas escalas proposta foi utilizada, seguindo uma metodologia incremental, na análise da fadiga em componentes reais da engenharia, elos em escala reduzida que compõem trechos de amarras semelhantes às usadas pela indústria *offshore* em linhas de ancoragem de unidades flutuantes para produção de petróleo. Os dados experimentais utilizado na análise foram obtidos a partir de ensaios de fadiga realizados com o aparato experimental projetado por Mamiya et al. (2019) em trechos de amarra compostas por nove elos fabricados com aço Grau R4. Os valores de tensão utilizados para construção dos históricos de carregamentos utilizados pela abordagem em duas escalas foram definidas, com base nas dimensões das amarras e na forças medidas durante os ensaios, através da formulação proposta por Mamiya et al. (2019) para determinação das tensões responsáveis pela inicialização de trincas em elos submetidos a tensões geradas pelos mecanismos de tração e OPB.

A comparação entre as previsões de vida obtidas pela abordagem proposta e os valores observados experimentalmente, mostra que ela foi capaz de prever de maneira satisfatória o momento da falha nas maiorias dos trechos de amarras, apresentando um grau de precisão próximo ao obtido pelo critério SWT, mesmo sendo aplicada em condições de carregamentos com tensão média, situação a qual ela ainda não havia sido testada. Isso comprova sua aplicabilidade em situações reais da engenharia. Contudo, a abordagem apresentou dificuldade na previsão de casos onde os valores de tensão eram muito baixos, mostrando mais uma vez que a calibração os parâmetros do modelo e propriedades materiais, como o limite de resistência à fadiga, possui papel fundamental na determinação da sua faixa de aplicação.

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi proposta uma abordagem baseada em conceitos micromecânica dos defeitos destinada à análise da fadiga em estruturas e componentes mecânicos, feitos de materiais dúcteis, submetidos a condições de fadiga multiaxial de baixo e alto número de ciclos. Para tal, a evolução da variável interna de dano de uma extensão do modelo de Gurson (1977), proposta para considerar carregamentos multiaxiais cíclicos, foi utilizada para descrever o processo de degradação do material ao longo da sua vida útil, seguindo uma metodologia incremental e abstraindo a mecânica da falha por fadiga.

A extensão proposta para o modelo de Gurson nesse trabalho, além da lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick (1966), conta com o mecanismo de cisalhamento proposto por Nahshon e Hutchinson (2008) e com a inclusão, na lei de evolução do dano proposta por Gurson, de um termo dependente do terceiro invariante. Essas modificações permitem que a extensão descreva de maneira satisfatória o estado de tensão e a evolução do dano no material em função do número de ciclos de carregamento em altas e baixas razões de triaxialidade, apresentando respostas próximas das obtidas por meio de simulações em elementos finitos de um modelo de célula unitário, quando aplicada na obtenção da resposta constitutiva do aço 20MnNiMo55 em um ponto de Gauss.

O fato da extensão proposta não prever a saturação da evolução da variável de dano, diferentemente do modelo LPD (1995), permitiu sua utilização em uma abordagem incremental para previsão de vida de materiais dúcteis submetidos à fadiga de baixo número de ciclos. Apesar da extensão proposta utilizar uma lei de endurecimento cinemático insensível aos efeitos do endurecimento não proporcional do material, a abordagem proporcional estimativas de vida em concordância com os valores observados experimentalmente em ensaios de fadiga realizados por controle de deformação em corpos de prova tubulares de parede fina, feitos com os aços S460N e SAE 1045.

Com o propósito de estender a aplicação da abordagem proposta para previsões de vida em condições de fadiga de alto número de ciclos, onde a evolução da deformação plástica ocorre apenas na escala da microestrutura do material, a extensão do modelo de Gurson foi associada à abordagem em duas escalas, proposta por Lemaitre et al. (1999), e validada com base em resultados experimentais obtidos a partir de ensaios de fadiga realizados por controle de força em corpos de prova ampulheta feitos com o aço *offshore* de Grau R4.

Por fim, a aplicabilidade da abordagem proposta em problemas reais da engenharia foi demonstrada por meio da sua utilização na previsão das vidas em fadiga de trechos de amarras, fabricadas em escala reduzida com aço Grau R4, semelhantes as utilizadas pela indústria *offshore* em linhas de ancoragem de unidades flutuantes para extração de petróleo em alto mar. Apesar de apresentar

dificuldades nas previsões de vida nos casos onde os níveis de tensão observados estavam abaixo do limite de fadiga do material, a abordagem obteve estimativas em concordância com os valores observados experimentalmente, demonstrando um grau de precisão satisfatório e próximo do apresentado pelo critério de fadiga SWT, amplamente utilizado na engenharia. Portanto, a abordagem para previsões de vida proposta nesse trabalho mostrou ser uma ferramenta promissora para análises de falhas por fadiga, proporcionando previsões satisfatórias quando aplicada em diferentes condições: fadiga de baixo e alto número de ciclos, carregamentos uniaxiais e multiaxiais, sendo proporcionais ou não proporcionais, e até mesmo carregamentos com tensão média.

Apesar de exigir um custo computacional mais elevado que as abordagens tradicionais de fadiga, principalmente para os casos de fadiga de alto ciclo, a abordagem proposta se destacou por sua capacidade em proporcionar boas previsões de vida necessitando de um número menor de ensaios experimentais. Para casos de fadiga de baixo ciclo, além do ensaio de tração usado para determinar as propriedades monotônicas do material, a abordagem necessita apenas da curva tensão-deformação cíclica do material, que pode ser obtida pelo método do ensaio cíclico com múltiplos estágios utilizando apenas um corpo de prova, e de dois ensaios de fadiga controlados por deformação, um axial e outro torcional, para calibração das Equações (4.6) e (4.8).

Para casos de fadiga de alto ciclo, além do ensaio de tração, que nesse trabalho também foi utilizado para determinação da curva tensão-deformação cíclica do material por meio da formulação proposta por Zhang et al. (2009), eliminando a necessidade de realização de ensaios cíclicos por controle de deformação, seria necessário a realização apenas de quatro ensaios de fadiga controlados por força. Uma vez que os parâmetros K_1 e K_2 foram estabelecidos com sendo a média dos valores encontrados pelo método da bissecção para cada amplitude de tensão, com base na Figura 5.8, é possível afirmar que a calibração dos mesmos poderia ter sido feita considerando apenas os ensaios com amplitudes de tensão axial e cisalhante máximas de mínimas.

8 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Ao fim desse trabalho, são apontados alguns tópicos para evolução e enriquecimento do trabalho desenvolvido:

1. Adoção de uma lei de endurecimento cinemático capaz de considerar os efeitos do endurecimento não proporcionais apresentados pelo material, melhorando a capacidade preditiva da abordagem proposta em condições de carregamentos cíclicos não proporcionais;
2. Aperfeiçoamento da estratégia de calibração dos parâmetros de recuperação K_1 e Nahshon e Hutchinson K_2 com o intuito de reduzir a influência da amplitude de deformação sobre eles, permitindo a aplicação da abordagem em análises de fadiga considerando carregamentos com amplitude variada;
3. Realização dos ensaios de fadiga controlados por força considerando o *runout* experimental com um maior número de ciclos com o propósito de aumentar a faixa de aplicação da abordagem e diminuir a ocorrência de *runouts* numéricos;
4. Realização de ensaio cíclicos por controle de deformações em corpos de prova de aço Grau R4 para obtenção experimental da curva tensão-deformação cíclica do material;
5. Implementação da abordagem proposta em uma ferramenta de elementos finitos com o intuito de possibilitar sua aplicação em análises de estruturas e componentes mecânicos com geometrias mais complexas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abendroth, M., & Kuna, M. (2003). Determination of deformation and failure properties of ductile materials by means of the small punch test and neural networks. *Computational Materials Science*, 28, 633–644.
- Andersson, H. (1977). Analysis of a model for void growth and coalescence ahead of a moving crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25, 217-233.
- API. (2008). API RP 2SK. *Design and Analysis of Stationkeeping Systems for Floating Structures*. American Petroleum Institute.
- Araújo, L., Ferreira, G., Neves, R., & Malcher, L. (2020). Fatigue analysis for the aluminum alloy 7050-T7451 performed by a two scale continuum damage mechanics model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 105, 102439.
- Armstrong, P., & Frederick, C. (1966). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Report RD/B/N731*. Central Electricity Generating Board, Berkeley, Inglaterra.
- Babout, L., Brechet, Y., Maire, E., & Fougères, R. (2004a). On the competition between particle fracture and particle decohesion in metal matrix composites. *Acta Materialia*, 52, 4517-4525.
- Babout, L., Maire, E., & Fougères, R. (2004b). Damage initiation in model metallic materials: X-ray tomography and modelling. *Acta Materialia*, 52, 2475-2487.
- Basquin, O. (1910). The exponential law of endurance tests. *Proceedings-American society for testing and materials*, 10, 625-630.
- Benzerga, A., & Leblond, J. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 44, 69–305.
- Berthelsen, K. (2017). Out of plane bending of mooring chains finite element analysis of a 7-link model. *Dissertação de mestrado*. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.
- Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture: A review. *International Journal of Damage Mechanics*, 19, 3-52.
- Bhattacharyya, M., Fau, A., Desmorat, R., Alameddine, S., Néron, D., Ladevèze, P., & Nackenhorst, U. (2019). A kinetic two-scale damage model for high-cycle fatigue simulation using multi-temporal Latin framework. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77, 103808.
- Bhattacharyya, M., Fau, A., Nackenhorst, U., Néron, D., & Ladevèze, P. (2018). A multi-temporal scale model reduction approach for the computation of fatigue damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340, 630-656.
- Bonora, N., & Newaz, G. (1998). Low cycle fatigue life estimation for ductile metals using a nonlinear continuum damage mechanics model. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 1881-1894.

- Bonora, N., & Pironi, A. (2001). Ductile damage accumulation under cyclic deformations and multiaxial state of stress conditions. *10th International Conference on Fracture*. Honolulu, EUA.
- Brocks, W., & Steglich, D. (2003). Damage models for cyclic plasticity. *Key Engineering Materials*, 251–252, 389–398.
- Brocks, W., Sun, D., & Hömig, A. (1995). Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. *11*, 971-989.
- Brown, M. (1978). Torsional stresses in tubular specimens. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 13, 23–28.
- Butcher, C., Chen, Z., Bardelcik, A., & Worswick, M. (2009). Damage-based finite element modeling of tube hydroforming. *International Journal of Fracture*, 155, 55-65.
- Calf, I. (2015). Multiaxial fatigue criteria for offshore mooring chain links subjected to out-of-plane bending. *Dissertação de mestrado*. Delft University of Technology, Delf, Holanda.
- Cao, T. S. (2015). Models for ductile damage and fracture prediction in cold bulk metal forming processes: a review. *International Journal of Material Forming*, 10, 139-171.
- Cao, T., Maire, E., Verdu, C., Bobadilla, C., Lasne, P., Montmitonnet, P., & Bouchard, P. (2014). Characterization of ductile damage for a high carbon steel using 3D X-ray micro-tomography and mechanical tests e application to the identification of a shear modified GTN model. *Computational Materials Science*, 84, 175-187.
- Cardoso, A. (2014). Otimização de ancoragem para sondas de perfuração e intervenção. *Projeto de graduação*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Castro, F., & Bemfica, C. (2018). Calibration and evaluation of the Lemaitre damage model using axial-torsion fatigue tests on five engineering alloys. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15.
- Chaboche, J. (1986). Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2, 149-188.
- Chaboche, J., Boudifa, M., & Saanouni, K. (2006). A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility. *International Journal of Fracture*, 137, 51–75.
- Chen, Z., & Butcher, C. (2013). *Micromechanics modelling of ductile fracture*. Dordrecht, Holanda: Springer.
- Choung, J., & Han, S. (2016). A novel procedure for mooring chain fatigue prediction based on maximum principal stress considering out-of-plane and in-plane bending effects. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 53, 237–248.
- Choung, J., & Lee, J. (2018). Study on prediction of stresses by out-of-plane and in-plane bending moments in offshore mooring chain. *Ships and Offshore Structures*, 13, 98-112.
- Choung, J., & Lee, J. (2019). Out-of-plane bending stiffness and hotspot stress based on advanced numerical analysis techniques. *Ships and Offshore Structures*, 14, 148-160.
- Choung, J., Lee, J., & Kim, Y. (2018). Out-of-plane bending stiffnesses in offshore mooring chain links based on conventional and advanced numerical simulation techniques. *Journal of Ocean Engineering and Technology*, 32, 297-309.

- Chow, C., & Wei, Y. (1991). A model of continuum damage mechanics for fatigue failure. *International Journal of Fracture*, 50, 301–316.
- Chu, C., & Needleman, A. (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102, 249–256.
- Dang Van, K. (1999). Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach. *High-cycle metal fatigue* (pp. 57-88). Viena, Áustria: Springer.
- Dang Van, K., Griveau, B., Brown, M., & Miller, K. (1989). On a new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application. Em M. Brown, & K. Miller (Ed.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue EGF*, 3, pp. 479-496.
- de Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2008). *Computational methods for plasticity: theory and applications*. Nova Jérsei, EUA: John Wiley & Sons.
- Decamp, K., Bauvineau, L., Besson, J., & Pineau, A. (1997). Size and geometry effect on ductile rupture of notched bars in a C-Mn steel: Experiments and modelling. *International Journal of Fracture*, 88, 1-18.
- Desmorat, R., Kane, A., Seyedi, M., & Sermage, J. (2007). Two scale damage model and related numerical issues for thermo-mechanical high cycle fatigue. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26, 909–935.
- Devaux, J., Gologanu, M., Leblond, J., & Perrin, G. (1997). On continued void growth in ductile metals subjected to cyclic loadings. *IUTAM Symposium on nonlinear analysis of fracture* (pp. 299-310). Dordrecht: Springer.
- DNVGL. (2015). DNVGL OS E302. *Offshore Mooring Chain*. Det Norske Veritas and Germanischer Lloyd SE.
- Döring, R., Hoffmeyer, J., Seeger, T., & Vormwald, M. (2006). Short fatigue crack growth under nonproportional multiaxial elastic–plastic strains. *International Journal of Fatigue*, 28, 972-982.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 241, 376-396.
- Faleskog, J., Gao, X., & Shih, C. (1998). Cell model for nonlinear fracture analysis – I. Micromechanics calibration. *International Journal of Fracture*, 89, 355–373.
- Fatemi, A., & Shamsaei, N. (2011). Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation. *International Journal of Fatigue*, 33, 948–958.
- Fatemi, A., & Socie, D. (1988). A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 11, 149-165.
- Findley, W. (1959). A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry*, 81, 301-306.
- Franklin, A. (1969). Comparison between a quantitative microscope and chemical methods for assessment of non-metallic inclusions. *Journal of the Iron and Steel Institute*, 207, 181-186.
- Gao, X., Faleskog, J., & Shih, C. F. (1998). Cell model for nonlinear fracture analysis–II. Fracture-process calibration and verification. *International Journal of Fracture*, 89, 375-398.

- Gilles, P., Jullien, B., & Mottet, G. (1992). Analysis of cyclic effects on ductile tearing strength by a local approach of fracture. *Advances in Fracture/Damage Models for the Analysis of Engineering Problems*, 137, 269-284.
- Goodman, J. (1899). *Mechanics applied to Engineering*. Londres: Longmans, Green & Co.
- Gough, H. (1950). Engineering steels under combined cyclic and static stresses. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 113–125.
- Gough, H. J., & Pollard, H. V. (1935). The strength of metals under combined alternating stresses. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 131, 3-103.
- Gurland, J. (1972). Observations on the fracture of cementite particles in a spheroidized 1.05% C steel deformed at room temperature. *Acta Metallurgica*, 20, 735-741.
- Gurson, A. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I e yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15.
- IACS. (2006). IACS W22. *Offshore Mooring Chan*. International Association of Classification Societies.
- Jean, P., Goessens, K., & L'Hostis, D. (2005). Failure of chains by bending on deepwater mooring systems. *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference.
- Jiang, Y., Hertel, O., & Vormwald, M. (2007). An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria. *International Journal of Fatigue*, 29, 1490–1502.
- Kanvinde, A. M., & Deierlein, G. G. (2007). Cyclic void growth model to assess ductile fracture initiation in structural steels due to ultra low cycle fatigue. *Journal of engineering mechanics*, 133, 701-712.
- Kiran, R., & Khandelwal, K. (2015). A micromechanical cyclic void growth model for ultra-low cycle fatigue. *International Journal of Plasticity*, 70, 24-37.
- Klingbeil, D., Svendsen, B., & Reusch, F. (2016). Gurson-based modelling of ductile damage and failure during cyclic loading processes at large deformation. *Engineering Fracture Mechanics*, 160, 95-123.
- Kobayashi, H., Kusumoto, T., & Nakazawa, H. (1992). The cyclic JR curve and upper-limit characteristic of fatigue-crack growth in 2 1/2 Cr-Mo steel. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 52, 337-356.
- Koplik, J., & Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24, 835–853.
- Krajcinovic, D. (1983). Creep of Structures - A Continuous Damage Mechanics Approach. *Journal of Structural Mechanics*, 11, 1-11.
- Kröner, E. (1961). On the plastic deformation of polycrystals. *Acta Metallurgica*, 9, 155–161.
- Kuna, M., & Roos, E. (1998). Cell model analysis for the void behaviour under cyclic plastic loading. *Fifth International Conference Localized Damage 98*, (pp. 585-594). Bolonha, Itália.
- Kuna, M., & Sun, D. (1997). Three-dimensional cell model analyses of void growth in ductile materials. *International Journal of Fracture*, 81, pp. 352-383.

- Lacroix, R., Leblond, J., & Perrin, G. (2016). Numerical study and theoretical modelling of void growth in porous ductile materials subjected to cyclic loadings. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 55, 100–109.
- Ladevèze, P., & Lemaitre, J. (1984). Damage effective stress in quasi-unilateral conditions. *16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Lyngby, Dinamarca.
- Lassen, T., Storvoll, E., & Bech, A. (2009). Fatigue life prediction of mooring chains subjected to tension and out of plane bending. *28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering* (pp. 229-239). American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Lautrou, N., Thevenet, D., & Cognard, J. Y. (2009). Fatigue crack initiation life estimation in a steel welded joint by the use of a two-scale damage model. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 32, 403-417.
- Leblond, J., Perrin, G., & Devaux, J. (1995). An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 14, 499–527.
- Lee, J., Koo, W., & Choung, J. (2018). Out-of-plane bending moment-induced hotspot stress evaluation using advanced numerical technique. *37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Leese, G., & Morrow, J. (1985). Low cycle fatigue properties of a 1045 steel in torsion. *Multiaxial Fatigue: A Symposium*. 853, pp. 482-496. American Society for Testing and Materials.
- Lemaitre, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107, 83–89.
- Lemaitre, J., & Desmorat, R. (2005). *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer: New York.
- Lemaitre, J., Chaboche, J., & Germain, P. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Paris: Dunod.
- Lemaitre, J., Sermage, J., & Desmorat, R. (1999). A two scale damage concept applied to fatigue. *International Journal of Fracture*, 97, 67–81.
- Li, K., Peng, J., & Zhou, C. (2018). Construction of whole stress-strain curve by small punch test and inverse finite element. *Results in Physics*, 11, 440-448.
- Lopes, J., & Malcher, L. (2017). Fatigue life estimates under non-proportional loading through continuum damage evolution law. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 88, 64-73.
- Lukhi, M., Hütter, G., & Kuna, M. (2018b). A novel micromechanics approach for understanding of fatigue in nodular cast iron. *Procedia Structural Integrity*, 13, 607-612.
- Lukhi, M., Kuna, M., & Hütter, G. (2018a). Numerical investigation of low cycle fatigue mechanism in nodular cast iron. *International Journal of Fatigue*, 113, 290-298.
- Luo, M., & Heyl, C. (2017). Numerical study on the out-of-plane bending (OPB) behaviors of studless mooring chain links in fairlead structures. *The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers.
- Malcher, L., Reis, F., Pires, F., & de Sá, J. (2013). Evaluation of shear mechanisms and influence of the calibration point on the numerical results of the GTN model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75, 407-422.

- Mamiya, E. N., Castro, F. C., Ferreira, G. V., Nunes Filho, E. L., Canut, F. A., Neves, R. S., & Malcher, L. (2019). Fatigue of mooring chain links subjected to out-of-plane bending: Experiments and modeling. *Engineering Failure Analysis*, *100*, 206-213.
- Mbiakop, A., Constantinescu, A., & Danas, K. (2015). On void shape effects of periodic elasto-plastic materials subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *49*, 481-499.
- McClintock, F. (1968). A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, *35*, 363-371.
- McClintock, F., Kaplan, S., & Berg, C. (1966). Ductile fracture by hole growth in shear bands. *International Journal of Fracture Mechanics*, *2*, 614-627.
- McMeeking, R., & Horn, C. (1990). Finite element analysis of void growth in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*, *42*, 1-19.
- Mear, M., & Hutchinson, J. (1985). Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mechanics of Materials*, *4*, 395-407.
- Melis, C., Jean, P., & Vargas, P. (2005). Out-of-plane bending testing of chain links. *24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering* (pp. 163-172). American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Meschke, G., & Hommel, J. H. (2010). A hybrid modeling concept for ultra low cycle fatigue of metallic structures based on micropore damage and unit cell models. *International Journal of Fatigue*, *32*, 1885-1894.
- Miner, M. (1945). Cumulative Damage in Fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, *67*, A159-A164.
- Mori, T., & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, *21*, 571-574.
- Nahshon, K., & Hutchinson, J. (2008). Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *27*, 1-17.
- Nakamura, H. (2019). Consideration of a stress-based criterion for local failure and its implementation in a damage mechanics model. *Journal of Pressure Vessel Technology*, *141*.
- Needleman, A., & Rice, J. R. (1978). Limits to ductility set by plastic flow localization. *Mechanics of sheet metal forming* (pp. 237-267). Boston, EUA: Springer.
- Nielsen, K., & Tvergaard, V. (2009). Effect of a shear modified Gurson model on damage development in a few tensile specimen. *International Journal of Solids and Structures*, *46*, 587-601.
- Nielsen, K., Andersen, R., & Tvergaard, V. (2018). Void coalescence mechanism for combined tension and large amplitude cyclic shearing. *Engineering Fracture Mechanics*, *189*, 164-174.
- Nilakash, D. (2016). Models to explain out-of-plane bending mechanism in mooring chain links. *Dissertação de mestrado* . Delft University of Technology, Delft, Holanda.
- Nonn, A., & Kalwa, C. (2010). Modelling of damage behaviour of high strength pipeline steel. *18th European Conference on Fracture*. Dresden, Alemanha.
- Pardoën, T., Doghri, I., & Delannay, F. (1998). Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for the prediction of ductile fracture in copper bars. *Acta Materialia*, *46*, 541-552.

- Pirondi, A., & Bonora, N. (2003). Modeling ductile damage under fully reversed cycling. *Computational Materials Science*, 26, 129–141.
- Pirondi, A., Bonora, N., Steglich, D., Brocks, W., & Hellmann, D. (2006). Simulation of failure under cyclic plastic loading by damage models. *International Journal of Plasticity*, 22, 2146–2170.
- Rabold, F., & Kuna, M. (2005). Cell model simulation of void growth in nodular cast iron under cyclic loading. *Computational Materials Science*, 32, 489-497.
- Ramberg, W., & Osgood, W. R. (1943). Description of stress-strain curves by three parameters. *Technical Report N° 092*. Washington, EUA: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Rampi, L., & Vargas, P. (2006). Fatigue testing of out-of-plane bending mechanism of chain links. *25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering* (pp. 609-618). American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Rampi, L., Bignonnet, A., Le Cunff, C., Bourgin, F., & Vargas, P. (2016b). Chain out of plane bending (OPB) fatigue joint industry project (JIP) FEA results and multiaxiality study results. *35th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Rampi, L., Dewi, F., & Vargas, P. (2015). Chain out of plane bending (OPB) joint industry project (JIP) summary and main results. *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference.
- Rampi, L., Gerthoffert, A., Francois, M., Bignonnet, A., & Vargas, P. (2016a). Chain out of plane bending (OPB) fatigue joint industry project (JIP) fatigue test program results and methodology. *35th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Rice, J., & Tracey, D. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17, 201-217.
- Rice, J., & Tracey, D. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17, 201-217.
- Ristinmaa, M. (1997). Void growth in cyclic loaded porous plastic solid. *Mechanics of Materials*, 26, 227–245.
- Rousselier, G. (1987). Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105, 97-111.
- Sandoval, C. F., Malcher, L., Canut, F. A., Araújo, L. M., Doca, T. C., & Araújo, J. A. (2019). Micromechanical Gurson-based continuum damage under the context of fretting fatigue: influence of the plastic strain field. *International Journal of Plasticity*, 125, 235-264.
- Schmidt, R., Wilkowski, G., & Mayfield, M. (1991). The International Piping Integrity Research Group (IPIRG) program - an overview. *11th international conference on structural mechanics in reactor technology*.
- Shoup, G., Tipton, S., & Sorem, J. (1992). The influence of proof loading on the fatigue life of anchor chain. *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference.
- Simo, J., & Hughes, T. (1998). *Computational inelasticity*. Verlag: Springer.
- Sines, G. (1959). Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal Fatigue*, 1, 145-169.

- Smith, K., Watson, P., & Topper, T. (1970). A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, 5, 767-778.
- Socie, D., & Marquis, G. (2000). *Multiaxial fatigue*. Warrendale, PA, EUA: Society of Automotive Engineers.
- Steglich, D., & Brocks, W. (1998). Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 21, 1175-1188.
- Steglich, D., Pironi, A., Bonora, N., & Brocks, W. (2005). Micromechanical modelling of cyclic plasticity incorporating damage. *International Journal of Solids and Structures*, 42, 337-351.
- Tang, J., Hu, W., Meng, Q., Sun, L., & Zhan, Z. (2017). A novel two-scale damage model for fatigue damage analysis of transition region between high-and low-cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 105, 208-218.
- Thomason, P. (1985). A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. *Acta Metallurgica*, 33, 1087-1095.
- Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17, 389-407.
- Tvergaard, V. (1982). On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18, 237-252.
- Tvergaard, V. (2008). Shear deformation of voids with contact modeled by internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 1439-1465.
- Tvergaard, V., & Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32, 157-169.
- Tvergaard, V., & Nielsen, K. (2010). Relations between a micro-mechanical model and a damage model for ductile failure in shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58, 1243-1252.
- Vargas, P., & Jean, P. (2005). FEA of out-of-plane fatigue mechanism of chain links. *24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering* (pp. 173-182). American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- Veritas, B. (2014). Guidance Note NI 604 DT R00 E. *Fatigue of top chain of mooring lines due to inplane and out-of-plane bendings*. Bureau Veritas.
- von Mises, R. (1913). Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, I*, 582-592.
- Wang, T., & Lou, Z. (1990). A continuum damage model for weld heat affected zone under low cycle fatigue loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 37, 825-829.
- Wang, X., & Qiang, B. (2019). Ductile crack growth behaviors at different locations of a weld joint for an X80 pipeline steel: A numerical investigation using GTN models. *Engineering Fracture Mechanics*, 213, 264-279.
- Xue, L. (2008). Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 3343-3366.
- Xue, X., Chen, N., Wu, Y., Xiong, Y., & Guo, Y. (2018). Mooring system fatigue analysis for a semi-submersible. *Ocean Engineering*, 156, 550-563.

- Xue, Z., Faleskog, J., & Hutchinson, J. (2013). Tension-torsion fracture experiments - Part II: simulations with the extended Gurson model and a ductile fracture criterion based on plastic strain. *International Journal of Solids and Structures*, 50, 4258-4269.
- Xue, Z., Pontin, M., Zok, F., & Hutchinson, J. (2010). Calibration procedures for a computational model of ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 492-509.
- Yang, S., Hu, W., Meng, Q., & Zhao, B. (2020). A new continuum damage mechanics-based two-scale model for high-cycle fatigue life prediction considering the two-segment characteristic in S-N curves. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 43, 387-402.
- Zhang, Y., Lorentz, E., & Besson, J. (2018). Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113, 1871-1903.
- Zhang, Z., Qiao, Y., Sun, Q., Li, C., & Li, J. (2009). Theoretical estimation to the cyclic strength coefficient and the cyclic strain-hardening exponent for metallic materials: preliminary study. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 18, 245-254.
- Zhang, Z., Thaulow, C., & Odegard, J. (2000). A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67, 155-168.
- Zhou, J., Gao, X., Sobotka, J., Webler, B., & Cockeram, B. (2014). On the extension of the Gurson-type porous plasticity models for prediction of ductile fracture under shear-dominated conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 51, 3273-3291.
- Ziegler, H. (1959). A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied Mathematics*, 17, 55-65.

ANEXO I

Ao assumir a lei de fluxo associativa de Prandtl-Reuss, o vetor de fluxo plástico passa a ser definido como a derivada da função de escoamento do modelo, ϕ , em relação ao tensor das tensões de Cauchy, σ , conforme apresentado pela Equação (I.1).

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (\text{I.1})$$

onde a função de escoamento do modelo em questão é dada pela Equação (I.2).

$$\phi = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right] \quad (\text{I.2})$$

Derivando a Equação (I.2) em relação a tensor das tensões de Cauchy, obtém-se a Equação (I.3).

$$\mathbf{N} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + f \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \frac{\partial p}{\partial \sigma} \quad (\text{I.3})$$

onde o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, J_2 , é definido pela Equação (I.4) em função do tensor relativo, η , representado pela diferença entre o tensor das tensões desviadoras, \mathbf{S} , e o tensor de endurecimento cinemático, β , conforme apresentado pela Equação (I.5).

$$J_2 = \frac{1}{2} \eta : \eta \quad (\text{I.4})$$

$$\eta = \mathbf{S} - \beta \quad (\text{I.5})$$

Por sua vez, o tensor das tensões desviadoras é representado pela Equação (I.6) como a diferença entre o tensor das tensões de Cauchy e a tensão hidrostática, p , dada pela Equação (I.7).

$$\mathbf{S} = \sigma - p\mathbf{I} \quad (\text{I.6})$$

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (\text{I.7})$$

Portanto, a derivada do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras em relação ao tensor das tensões de Cauchy é definida pela Equação (I.8).

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\eta})}{\partial \sigma} \quad (\text{I.8})$$

onde a derivada da operação de dupla contração entre o tensor relativo e ele mesmo em relação ao tensor das tensões de Cauchy é expressa pela Equação (I.9).

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\eta})}{\partial \sigma} = 2\boldsymbol{\eta}:\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \sigma} \quad (\text{I.9})$$

Considerando a Equação (I.5), a derivada do tensor relativo em relação ao tensor das tensões de Cauchy pode ser representada pela Equação (I.10).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \mathbf{I} \quad (\text{I.10})$$

onde a derivada do tensor de endurecimento cinemático em relação ao tensor das tensões de Cauchy sabe-se que é nula e a derivada do tensor das tensões desviadoras é dada pela Equação (I.11).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma} - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \mathbf{I} \quad (\text{I.11})$$

Derivando o tensor das tensões de Cauchy em relação a ele mesmo, tem-se o tensor identidade de quarta ordem, \mathbf{I}^4 . Por sua vez, a derivada da tensão hidrostática em relação ao tensor das tensões de Cauchy é determinada pela Equação (I.12).

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{1}{3} \frac{\partial \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma} \quad (\text{I.12})$$

onde a derivada do traço do tensor das tensões de Cauchy em relação a ele mesmo é igual ao tensor identidade de segunda ordem, \mathbf{I} . Logo, a Equação (I.11) pode ser reescrita na forma da Equação (I.13).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \sigma} = \mathbf{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{I.13})$$

Portanto, a derivada do tensor relativo em relação ao tensor das tensões de Cauchy pode ser definida pela Equação (I.14).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \sigma} = \mathbf{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{I.14})$$

Substituindo a Equação (I.14) na Equação (I.9), tem-se a Equação (I.15).

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\eta})}{\partial\sigma} = 2\boldsymbol{\eta}:\left(\mathbf{I}^4 - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) \quad (\text{I.15})$$

Sabendo que a operação de dupla contração entre um tensor de segunda ordem e o tensor identidade de quarta ordem resulta no próprio tensor de segunda ordem e a mesma operação, mas agora entre um tensor de segunda ordem e o tensor identidade, também de segunda ordem, equivale ao traço do desse tensor, a Equação (I.15) pode ser simplificada por meio do uso das Equações (I.16) e (I.17).

$$\boldsymbol{\eta}:\mathbf{I}^4 = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{I.16})$$

$$\boldsymbol{\eta}:\mathbf{I} = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Então, a Equação (I.15) pode ser reescrita na forma da Equação (I.18).

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\eta})}{\partial\sigma} = 2\boldsymbol{\eta} \quad (\text{I.18})$$

Substituindo a Equação (I.18) na Equação (I.8), a derivada do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras em relação ao tensor das tensões de Cauchy é expressa pela Equação (I.19).

$$\frac{\partial J_2}{\partial\sigma} = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{I.19})$$

Por fim, o vetor de fluxo plástico para o modelo proposto é expresso pela Equação (I.20).

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\eta} + \frac{\sigma_y}{3} f \text{senh}\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (\text{I.20})$$

ANEXO II

A lei de evolução da deformação plástica equivalente é determinada pela Equação (II.1).

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (\text{II.1})$$

onde $\dot{\epsilon}^p$ representa a lei de fluxo plástica, definida para o modelo em questão pela Equação (II.2)

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\eta} + \frac{\sigma_y}{3} f \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right] \quad (\text{II.2})$$

Substituindo a Equação (II.2) na Equação (II.1) obtém-se a Equação (II.3).

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} : \mathbf{I} \left[\frac{2}{3} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right] + \mathbf{I} : \mathbf{I} \left[\frac{\sigma_y}{3} f \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (\text{II.3})$$

Sabendo que a operação de dupla contração entre um tensor de segunda ordem e o tensor identidade também de segunda ordem resulta no traço desse tensor, é possível simplificar a Equação (II.3) utilizando as Equações (II.4) e (II.5).

$$\boldsymbol{\eta} : \mathbf{I} = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\mathbf{I} : \mathbf{I} = \text{tr}(\mathbf{I}) = 3 \quad (\text{II.5})$$

Portanto, a lei de evolução da deformação plástica equivalente para o modelo proposto passa a ser escrita na forma da Equação (II.6).

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (\text{II.6})$$

ANEXO III

As derivadas de cada equação residual em relação a cada variável do problema, juntamente com algumas derivadas importantes, são apresentadas nas Equações de (III.1) à (III.41).

Derivadas da equação residual $R_{S_{n+1}}$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = I^4 + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{d_{n+1}} \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} \quad (\text{III.5})$$

Derivadas da equação residual $R_{p_{n+1}}$

$$\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = 1 + K\Delta\gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = K\Delta\gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = KN_{v_{n+1}} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = 0 \quad (\text{III.10})$$

Derivadas da equação residual $R_{f_{n+1}}$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = \Delta\gamma f_{n+1} \left[K_1 \sigma_y (f_{n+1} + 1) \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \frac{\partial \langle \xi_{n+1} \rangle}{\partial S_{n+1}} - K_2 \left(\frac{\partial g(\xi)_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \sqrt{A} + g(\xi)_{n+1} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial S_{n+1}} \right) \right] \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = -\frac{3}{2} \Delta\gamma DR (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) - \Delta\gamma K_2 f_{n+1} g(\xi)_{n+1} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = 1 - \left[DR (1 - 2f_{n+1}) \Delta\gamma \sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \right] - K_2 g(\xi)_{n+1} \left(\Delta\gamma \sqrt{A} + \Delta\gamma f_{n+1} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} \right) \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -DR (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) - K_2 f_{n+1} g(\xi)_{n+1} \sqrt{A} \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = -\Delta\gamma K_2 f_{n+1} g(\xi)_{n+1} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \beta_{n+1}} \quad (\text{III.15})$$

Derivadas da equação residual $R_{\Delta\gamma}$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} = \eta_{n+1} \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} = 2f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} = -\frac{\sigma_y}{3} \left[2f_{n+1} - 2 \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p_{n+1}}{\sigma_y}\right) \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}} = -\eta_{n+1} \quad (\text{III.20})$$

Derivadas da equação residual $R_{\beta_{n+1}}$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = -\frac{2}{3} H^k \Delta \gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} + b \Delta \gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial S_{n+1}} \otimes \beta_{n+1} \quad (\text{III.21})$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = -\frac{2}{3} H^k \Delta \gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} \mathbf{I} + b \Delta \gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} \beta_{n+1} \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = -\frac{2}{3} H^k \Delta \gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} \mathbf{I} + b \Delta \gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} \beta_{n+1} \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma} = -\frac{2}{3} H^k (N_{d_{n+1}} + N_{v_{n+1}} \mathbf{I}) + b \sqrt{A} \beta_{n+1} \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = \mathbf{I}^4 - \frac{2}{3} H^k \Delta \gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} + b \Delta \gamma \left(\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \beta_{n+1}} \otimes \beta_{n+1} + \sqrt{A} \cdot \mathbf{I}^4 \right) \quad (\text{III.25})$$

Outras derivadas importantes

$$\frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = \mathbf{I}^4 \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = -\mathbf{I}^4 \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{2} \cosh\left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y}\right) \quad (\text{III.28})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = \frac{\sigma_y}{3} \sinh\left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y}\right) \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{\partial \beta_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}} = \mathbf{I}^4 \quad (\text{III.31})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial S_{n+1}} = \frac{2}{3\sqrt{A}} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} = \frac{\sigma_y}{3\sqrt{A}} f_{n+1}^2 \sinh\left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y}\right) \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} = \frac{2 \sigma_y^2}{9 \sqrt{A}} f_{n+1} \sinh \left(\frac{3 p_{n+1}}{2 \sigma_y} \right)^2 \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} = -\frac{2}{3 \sqrt{A}} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (\text{III.35})$$

$$\frac{\partial g(\xi)_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = -2 \xi_{n+1} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} \quad (\text{III.37})$$

$$\frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = \frac{27}{2 q_{n+1}^3} \left(\frac{\partial J_{3n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} - 3 \frac{J_{3n+1}}{q_{n+1}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} \right) \quad (\text{III.38})$$

$$\frac{\partial \langle \xi_{n+1} \rangle}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi_{n+1} \leq 0 \\ \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} & \text{se } \xi_{n+1} > 0 \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

$$\frac{\partial J_{3n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = J_{3n+1} \mathbf{S}_{n+1}^T \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = \frac{3 \mathcal{S}_{n+1}}{2 q_{n+1}} \quad (\text{III.41})$$