



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Filtros de Kalman Adaptativos para Sistemas Não-lineares

JEAN GONZALEZ SILVA

Brasília, Novembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Filtros de Kalman Adaptativos para Sistemas Não-lineares

JEAN GONZALEZ SILVA

*Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre Engenheiro em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Daniel Mauricio Muñoz Arboleda,
ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Hugo Tadashi Muniz Kussaba, ENE/UnB
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

SILVA, JEAN GONZALEZ

Filtros de Kalman Adaptativos para Sistemas Não-lineares

[Distrito Federal] 2019.

xii, 70 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2019).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. Estimadores | 2. Filtros adaptativos |
| 3. Matriz de covariância | 4. Sistemas não-lineares |
| 5. Filtro de Kalman estendido | 6. Filtro de Kalman unscented |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, J. G. (2019). Filtros de Kalman Adaptativos para Sistemas Não-lineares, Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-71A/14, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 70 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: JEAN GONZALEZ SILVA

TÍTULO: Filtros de Kalman Adaptativos para Sistemas Não-lineares.

GRAU: Mestre ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

JEAN GONZALEZ SILVA

R. Leopoldina A. Peçanha, 44

Praia Campista

CEP 27923-120 - Macaé - RJ - Brasil

Dedicatória

Dedico os resultados deste trabalho aos meus pais, Sueli Gonzalez da Silva e Ademil Gonçalves da Silva, que me apoiaram desde o momento da decisão de ingressar no curso até seu fim.

JEAN GONZALEZ SILVA

Agradecimentos

À todos que contribuíram diretamente e indiretamente nesta fase de minha vida, incluindo minha querida Jayne Araújo da Silva, minha irmã Eliana Gonzalez Silva, todos do grande grupo (GG), Gavino Carboni, Arysselmo Lima Vieira, Lucas Teixeira F. Mendes, Eduardo Lucchesi, Tadeu Castro, Luis Guilherme Monteiro, e Álvaro Cravo Soares. À Lucas Vieira Silva Nunes, Rayline Vieira Silva Nunes, Dilson Ribeiro de Sena Nunes e Elizabeth Vieira Silva Nunes, que me receberam em sua casa.

Ao meu orientador Eugênio L. F. Fortaleza, e colegas de pesquisa, José Oniram de A. Limaverde Filho, Marco Emílio Rodrigues Miranda, Tássio Linhares, Jessé Barretos de Barro pela recepção e toda disponibilidade na Universidade de Brasília. Aos companheiros da Universidade de Campinas, Israel Assis, Adyllyson Heverton, Fernando Zucatelli, Denis Leite Gomes, e Jack Gomes, que contribuíram no início desta caminhada. Além dos professores Jorge Brandão e Roberto Mammud da Universidade Federal do Rio de Janeiro Campus Macaé, que no término de minha graduação me incentivaram a seguir na área de pesquisa.

JEAN GONZALEZ SILVA

RESUMO

O filtro de Kalman é amplamente utilizado para estimar estados em propostas de controle. Entretanto, ele requer correto conhecimento das estatísticas de incertezas para o bom desempenho em implementações em sistemas reais. Deste modo, este trabalho apresenta nova proposta de adaptação em covariância de incertezas de processo aplicada em filtro de Kalman estendido e filtro de Kalman *unscented* para sistemas não-lineares. A covariância de incertezas de processo é estimada em tempo real através de média móvel exponencial. Simulações numéricas de sistema massa-mola-amortecedor não-linear, bola e barra (instável), e quatro tanques (múltiplas entradas múltiplas saídas e fase não mínima) foram realizadas para ilustrar o bom desempenho com boas estimativas e baixos tempos de execução obtido dos algoritmos propostos.

Palavras-chaves: Estimadores. Filtros adaptativos. Matriz de covariância. Sistemas não-lineares. Filtro de Kalman estendido. Filtro de Kalman *unscented*. Massa mola amortecedor. Bola e Barra. Quatro tanques.

ABSTRACT

The Kalman filter is one of the most widely used methods for state estimation and control purposes. However, it requires correct knowledge of noise statistics in order to obtain optimal performance in real-life applications. Therefore, this work presents a novel approach to adapt the process noise covariance applied in nonlinear systems by using the extended Kalman filter and unscented Kalman filter. The changes of process noise covariance are estimated in real-time based on exponential moving average. The great performance of the proposed algorithms shown by good estimations with low execution time is demonstrated with numerical simulations through examples: nonlinear mass-spring-damper system, ball beam (unstable), and four tank (multiple input multiple output and non minimal phase).

***Keywords:* Estimators. Adaptive filters. Covariance matrices. Nonlinear systems. Extended Kalman filter. Unscented Kalman filter. Mass-spring-damper system. Ball Beam. Four tank.**

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	2
1.3	DESCRIÇÃO DO MANUSCRITO	3
2	Filtragem Kalman	4
2.1	MODELO MATEMÁTICO	5
2.2	DISCRETIZAÇÃO	5
2.3	MODELO ESTOCÁSTICO	6
2.4	FILTRO DE KALMAN (KF)	8
2.5	FILTRAGEM PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES	9
2.5.1	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (EKF)	9
2.5.2	FILTRO DE KALMAN <i>Unscented</i> (UKF)	11
2.6	PROBLEMAS ENCONTRADOS	12
3	Filtros de Kalman Adaptativos	13
3.1	MÉTODO DE CORRELAÇÃO	14
3.1.1	<i>Output Correlation Method</i>	14
3.1.2	<i>Innovation Correlation Method</i>	17
3.2	COVARIÂNCIA CORRESPONDENTE	19
3.2.1	ALGORITMO DE MYERS AND TAPLEY (MT)	19
3.3	ALGORITMO DE MAYBECK (MB)	20
3.4	MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA (ML)	20
4	Adaptação Proposta	22
4.1	MÉDIA MÓVEL EXPONENCIAL	22
4.2	ADAPTAÇÃO BASEADA EM MÉDIA MÓVEL EXPONENCIAL	23
4.2.1	COVARIÂNCIA DA MEDIÇÕES	23
4.2.2	COVARIÂNCIA DO TERMOS DE INOVAÇÃO	25
4.3	APLICAÇÃO DE ADAPTAÇÕES PROPOSTAS NO EKF	28
4.4	APLICAÇÃO DE ADAPTAÇÕES PROPOSTAS NO UKF	28
5	Resultados	30

5.1	MASSA-MOLA AMORTECEDOR NÃO-LINEAR (MMA)	30
5.1.1	MALHA ABERTA	32
5.1.2	MALHA FECHADA	37
5.2	BOLA E BARRA (BB)	39
5.3	QUATRO TANQUES (QT)	45
5.3.1	MALHA ABERTA	47
5.3.2	MALHA FECHADA	52
5.4	RESULTADOS ALCANÇADOS	56
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	57
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
	Anexos	66
I	Algoritmos em Pseudocódigo	67

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquemático das adaptações propostas	2
5.1	Simulações de sistema massa-mola amortecedor não-linear com variação em $q(k)$...	36
5.2	Esquemático do sistema bola e barra.....	39
5.3	Sistema bola e barra: estimativas de q	42
5.4	Esquemático do sistema de quatro tanques.....	45
5.5	Simulação do do sistema de quatro tanques com estados totalmente conhecidos	47
5.6	Sistema de quatro tanques em malha aberta: erros de estimação h_3 e h_4	50
5.7	Sistema de quatro tanques em malha aberta: estimativas de q_1 e q_2	52
5.8	Sistema de quatro tanques em malha fechada: estimativas de q_1 e q_2	56

LISTA DE TABELAS

5.1	Parâmetros de simulações do sistema massa-mola amortecedor não-linear	31
5.2	Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de $x_2(k)$ na segunda metade de simulações	34
5.3	Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de q_k no segundo terço de simulações.....	35
5.4	Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de q_k no terceiro terço de simulações	35
5.5	Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha fechada - desempenho de estimativas de $x_2(k)$ e estimativas de $q(k)$ na segunda metade das simulações.....	38
5.6	Parâmetros de simulações do sistema bola e barra	40
5.7	Sistema bola e barra em malha fechada - desempenho de estimativas de $x_2(k)$, $x_3(k)$, e $x_4(k)$, e de sinal de controle $V_m(k)$	43
5.8	Sistema bola e barra malha em fechada - desempenho de estimativas de $q(k)$	44
5.9	Parâmetros de simulação do sistema de quatro tanques.....	47
5.10	Sistema de quatro tanques em malha aberta - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$ e termos de inovação $\nu_3(k)$ e $\nu_4(k)$	49
5.11	Sistema de quatro tanques em malha aberta - desempenho de estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$	51
5.12	Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$, e entradas $u_1(k)$ e $u_2(k)$	53
5.13	Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$, e entradas $u_1(k)$ e $u_2(k)$	54
5.14	Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho de estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$	55

LISTA DE SÍMBOLOS

AEKF	— Filtro de Kalman Estendido Adaptativo
AUKF	— Filtro de Kalman <i>Unscented</i> Adaptativo
BB	— Bola Barra
EKF	— Filtro de Kalman Estendido
ETC	— Estados Totalmente Conhecidos
FDP	— Função de Densidade de Probabilidade
IAE	— Integral de Erros Absolutos
ISE	— Integral de Quadrado de Erros
ITAE	— Integral de Erros Absolutos Ponderados no Tempo
KF	— Filtro de Kalman
LQR	— Regulador Liner Quadrático
MAE	— Média de Erros Absolutos
MB	— Abordagem de Maybeck
MIMO	— Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas
ML	— Máxima Verossimilhança
MMA	— Massa Mola Amortecedor
MME	— Média Móvel Exponencial
MT	— Abordagem de Myers and Tapley
QT	— Quatro Tanques
RMSE	— Raiz da Média do Quadrado dos Erros
TVC	— Variância Total da ação de Controle
UKF	— Filtro de Kalman <i>Unscented</i>

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo apresenta contextualização e motivação da dissertação. Os objetivos são apresentados, visando assim satisfazer características prescritas para este trabalho. Por fim, a estrutura do manuscrito é apresentada.

1.1 Contextualização

Estimadores, genericamente chamados filtros, são implementados na predição, filtragem e suavização de sistemas dinâmicos [1]. Dentre estas funções, a filtragem tem significativa importância em grande número de técnicas de controle, na qual obtém-se a estimativa de comportamento em tempo real utilizada para estabelecer adequada atuação [2]. Os filtros, assim como os demais estimadores, além das observações (medições), utilizam-se de modelos matemáticos. Tais modelos podem ser obtidos por fenômenos físicos [3, 4] ou por representações matemáticas [5–7]. Entretanto, sistemas dinâmicos podem apresentar alto grau de não linearidade e variações com o tempo, nos quais faz-se necessário modelos não lineares e variantes no tempo [8, 9]. Assim, técnicas de filtragem não lineares e adaptativas são desenvolvidas e aplicadas [10, 11].

A teoria de filtragem de Kalman é baseada no uso de duas fontes de informações incertas: modelo de planta e de medição. Sua otimalidade depende do conhecimento de suas incertezas. No presente trabalho, investiga-se e propõe-se utilizações de adaptações para as incertezas do modelo de planta através das medições que se tornam disponíveis [12]. O filtro de Kalman permite que pequenas e suaves variações no tempo dos modelos possam ser incorporadas por tais incertezas representadas pela matriz de covariância \mathbf{Q} (incerteza do modelo de planta), e a matriz de covariância \mathbf{R} (incerteza do modelo de medição). Deste modo, através da adaptação das matrizes o filtro passa a melhor representar o sistema dinâmico, permitindo que as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} possam apresentar variações com o tempo. As metodologias de adaptação foram introduzidas em categorias por Mehra [13], nas quais estão divididas em Bayesiana [14, 15], máxima verossimilhança [16], correlação [17] e covariância correspondente [18]. Os métodos Bayesiano e de máxima verossimilhança assumem que as estatísticas são invariantes no tempo, sendo não realísticos [19]. E, com alto nível de complexidade, podem levar a um grande consumo de tempo em seus cálculos. Entretanto, são utilizados quando medidas são disponíveis em intervalos irregulares, comum em

aplicações reais [20]. O desenvolvimento dos métodos abordados e novos métodos são apresentados por [21–25].

A aplicação de filtros não lineares adaptativos em sistemas não lineares variantes no tempo demonstra-se um grande desafio. Diferindo entre abordagens e tipos de sistemas, a convergência das estimativas e sua consistência não são sempre conservadas dependendo de seus parâmetros. No entanto, a aplicação de filtros não lineares adaptativos apresenta melhoras na performance do mesmo, assumindo que o desempenho computacional exigido deixou de ser um obstáculo. Distintas aplicações se encontram, por exemplo, no setor aeroespacial [26–28], na engenharia naval [29,30], em sensoriamento e localização [31–33], em processos químicos [34,35], em sistemas de potência [36,37], na engenharia biomédica [38,39], na detecção de falhas [40–42], em sistemas caóticos [43,44], na meteorologia e oceanografia [45,46], e em geofísica e reservatórios de petróleo [47,48].

As adaptações propostas consistem na utilização da média móvel exponencial e assumem hipótese sobre a dinâmica do sistema e de sua amostragem para estimar em tempo real a matriz de covariância Q (figura 1.1). Excelente desempenho sendo seus tempos de execução baixos são atingidos sendo interessante para aplicações reais.

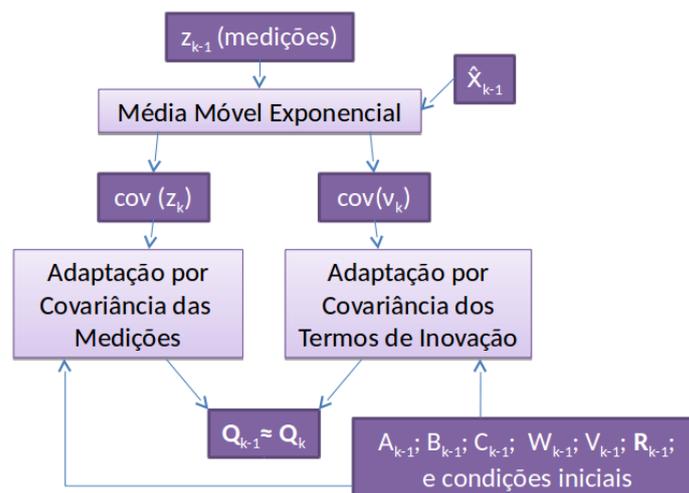


Figura 1.1: Esquemático das adaptações propostas
Fonte: Elaborada pelo autor

1.2 Objetivos da Dissertação

O objetivo deste trabalho é prover uma visão do estado da arte em filtragem para sistemas não-lineares e adaptativos, fornecer ao leitor fundamentos para compreensão de adaptações de incertezas, e desenvolver nova adaptação apresentando comparações em sistemas não lineares.

Com a utilização de filtros adaptativos, sistemas inicialmente mal condicionados, isto é, com suas incertezas expressas pela seleção errônea das matrizes de covariância, apresentam melhor desempenho através de, por exemplo, a redução o desgaste de atuadores e o aumentar a eficiência

no consumo de energia. Através de adaptação de incertezas no decorrer do processo de filtragem não linear, as estimativas dos estados são obtidas de maneira que representam melhor o sistema real apesar das aproximações realizadas.

No presente trabalho, os seguintes objetivos específicos foram estabelecidos:

- Investigar os métodos na literatura de filtros adaptativos;
- Desenvolver a adaptação baseada em média móvel exponencial;
- Implementar a adaptação proposta em filtros não-lineares (filtro de Kalman estendido e filtro de Kalman *unscented*);
- Comparar a adaptação proposta com as adaptações presentes na literatura;

1.3 Descrição do Manuscrito

O presente trabalho está composto por seis capítulos. Inicialmente, no capítulo 2, é apresentado o problema de estimação de estado e o filtro de Kalman discreto fazendo referência a implementação do filtro em sistemas não lineares, em que são detalhados o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *unscented*. No capítulo 3, adaptações do filtro utilizando método de correlação, covariância correspondente, e de máxima verossimilhança são descritas. A adaptação proposta baseada na média móvel exponencial é apresentada no capítulo 4. Neste são apresentadas abordagens através da covariância de medições e de termos de inovação. Posteriormente, no capítulo 5, apresenta-se três propostas de estudo de caso para validar numericamente a implementação da adaptação proposta, juntamente com análises de resultados obtidos. Por último, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Filtragem Kalman

Apresentação dos fundamentos e ferramentas de filtragem, assim como o filtro de Kalman e suas versões mais utilizadas para sistemas não-lineares.

O filtro de Kalman (KF), conhecido como estimador linear da média dos mínimos quadrados – ou simplesmente estimador linear quadrático –, minimiza função de erro quadrado médio para estimar em tempo real as condições atuais de sistemas dinâmicos, isto é, estados. O KF baseia-se em modelos dinâmicos estocásticos utilizando conceitos de probabilidade para lidar com incertezas na modelagem dos sistemas em análise e dos sensores utilizados.

Pelo incentivo da corrida espacial, em 1959, Rudolf Kalman, derivou o algoritmo de filtragem [49], o qual leva seu nome. O KF obtém uma estimativa dos estados conhecida como *Best Linear Unbias Estimate* (BLUE).

Com menos rigor, pode-se dizer que no universo nada é verdadeiramente constante. E faz-se impossível conhecer precisamente a dinâmica, porém a melhor expressão da ignorância é utilizar a probabilidade. O modelo matemático a ser proposto representa uma variedade de fenômenos dinâmicos sob a hipótese de que suas distribuições de probabilidade apresentam médias e segundos momentos centrais (covariâncias) finitos. Deste modo, o KF permite estimar os estados dinâmicos de um sistema com comportamentos aleatórios utilizando informações estatísticas.

Originalmente, o termo filtro tem como conceito a separação de sinais de ruído. O conceito é aplicado em circuitos analógicos que filtram os sinais eletrônicos de diferentes frequências e esses dispositivos físicos preferencialmente atenuam frequências indesejadas. Além da ideia de separação de sinais e ruído obtendo uma estimativa para os sinais, o KF inclui a ideia de solução de um problema inverso, no qual este representa as variáveis de medição como função das variáveis de interesse. Em essência, o KF inverte a relação funcional e estima as variáveis independentes como funções inversas das variáveis dependentes.

Segundo Grewal, M. e Andrews, A. [1], a equação Wiener-Hopf usada na derivação do filtro de Wiener-Kolmogorov, que utiliza de densidade espectral de potência e modelo invariante no tempo, é equivalente a uma equação diferencial matricial não-linear estudada a dois séculos antes,

conhecida como equação de Ricatti. Uma das realizações notáveis de Kalman e Richard S. Bucy foi provar que a equação de Ricatti pode ter solução estável (estado estacionário) mesmo se o sistema dinâmico for instável – provando que o sistema é observável e controlável. Com a mudança para a forma em espaço de estados, Kalman derivou o filtro de Wiener-Kolmogorov de maneira que é necessário simples conhecimento para sua implementação.

Desde sua introdução, o KF tem sido intensamente aplicado em diferentes domínios e áreas do conhecimento. Assim, é incrementado e modificado para utilização em distintas aplicações de predição, filtragem e suavização.

2.1 Modelo Matemático

Modelos matemáticos podem ser obtidos especificamente para representar a dinâmica de sistemas. Tais modelos são expressos por sistemas de equações diferenciais que descrevem deterministicamente a evolução no tempo dos estados, variáveis que caracterizam os sistemas.

Teóricos de controle usam equações diferenciais contínuas como modelo de sistemas dinâmicos oriundos de leis físicas ou resultado de experimentos. Essas equações diferenciais podem ser representadas como um sistema de equações de primeira ordem em forma matricial e linear, no qual é chamado de espaço de estado.

Através desta representação matemática, soluções para os estados são obtidas por valores iniciais e de entrada, em que saídas mensuráveis dependem dos valores iniciais, de entrada e dos parâmetros do modelo.

2.2 Discretização

Para aplicação em sistemas reais, a informação é recebida e processada digitalmente, em que são atribuídos valores discretos para os sinais contínuos (quantização). Assim, na implementação do KF, os modelos matemáticos contínuos em espaço de estado, representado por equações diferenciais, são aproximados por procedimentos numéricos em equações de diferenças.

Uma maneira simples de realizar esta aproximação é utilizar o método de Euler (*forward difference*) [50]. Através do modelo matemático contínuo em espaço de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.2)$$

é dada a aproximação

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t_k + T) - \mathbf{x}(t_k)}{T}.$$

Sendo $T \ll 1$, os erros de aproximação são muito pequenos para sistemas com faixa de banda de baixa frequência. Um valor para T , tempo de amostragem, que representa o tamanho de cada

passo é escolhido para $t_k = t_0 + kT$. Assim, o passo t_k a partir do passo anterior t_{k-1} fica definido como $t_k = t_{k-1} + T$ e $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$.

Logo, o seguinte modelo matemático discretizado pode ser obtido

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{I} + T\mathbf{A}(t_{k-1})$, $\mathbf{B}_{k-1} = T\mathbf{B}(t_{k-1})$, $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}(t_k)$.

2.3 Modelo Estocástico

Representações concisas e fiéis são fornecidas para muitos sistemas dinâmicos de importância, evidenciando todas as características relevantes em qualquer tempo. Entretanto, esta perfeita representação é somente uma das infinitas realizações prováveis de repetidos processos. A incerteza intrínseca oriunda de fatores únicos e inesperados, não envolvidos na evolução do tempo do sistema dinâmico, torna-o um processo aleatório.

Para lidar com as incertezas, os modelos matemáticos determinísticos e estatísticos são combinados em modelos estocásticos. Estes representam a evolução ao longo do tempo por parâmetros estatísticos em sistemas com dinâmica incerta. Através do conhecimento dos parâmetros estatísticos, é possível extrair a informação sobre a estimativa mais provável do estado do sistema, assim como sua incerteza.

A fim de quantificar a incerteza, dado a distribuição de probabilidade definida em termos de função de densidade de probabilidade (FDP), $p(x) \geq 0$, utiliza-se o operador de esperança

$$E\langle f(x) \rangle = \int f(x)p(x)dx. \quad (2.5)$$

Assim, os seguintes momentos de distribuição são definidos:

- Momentos puros: $^{[N]}\mu_x = E\langle x^N \rangle$
- Momentos centrais: $^{[N]}\sigma_x = E\langle (x - ^{[1]}\mu_x)^N \rangle$

em que $N \geq 1$ define a ordem dos momentos. Estes, caso existam, são parâmetros constantes de uma distribuição. Assim:

- Momento de ordem zero: $^{[0]}\mu_x = E\langle x^0 \rangle = E\langle 1 \rangle = \int p(x)dx = 1$

– Média da distribuição (momento puro de primeira ordem): ${}^{[1]}\mu_{\mathbf{x}} = E\langle \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} E\langle x_1 \rangle \\ E\langle x_1 \rangle \\ E\langle x_1 \rangle \\ \vdots \\ E\langle x_n \rangle \end{bmatrix}$

– Matriz de covariância (momento central de segunda ordem):

$$\mathbf{P}^{xx} = {}^{[2]}\sigma_x = E\langle (\mathbf{x} - {}^{[1]}\mu_x)(\mathbf{x} - {}^{[1]}\mu_x)^T \rangle,$$

onde $p_{i,j} = E\langle (x_i - {}^{[1]}\mu_{x_i})(x_j - {}^{[1]}\mu_{x_j})^T \rangle$, em que

se $i = j$, p_{ij} é chamado de variância;
se $i \neq j$, p_{ij} é chamado de covariância cruzada.

Sendo \mathbf{X}_a e \mathbf{X}_b vetores de variáveis com alguma ou ainda não especificada distribuição de probabilidade conjunta, então o vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \in \mathbf{X}_a \\ \mathbf{x}_b \in \mathbf{X}_b \end{bmatrix}$$

terá a matriz de covariância

$$\mathbf{P}^{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{x_a x_a} & \mathbf{P}^{x_a x_b} \\ \mathbf{P}^{x_b x_a} & \mathbf{P}^{x_b x_b} \end{bmatrix}.$$

Qualquer combinação linear¹ $y = \mathbf{A}\mathbf{x}_a + \mathbf{B}\mathbf{x}_b = [\mathbf{A} \ \mathbf{B}]\mathbf{x}$ terá média e covariância:

$$\mu_y = \mathbf{A}\mu_{x_a} + \mathbf{B}\mu_{x_b};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{yy} &= [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{x_a x_a} & \mathbf{P}^{x_a x_b} \\ \mathbf{P}^{x_b x_a} & \mathbf{P}^{x_b x_b} \end{bmatrix} [\mathbf{A} \ \mathbf{B}]^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}^{x_a x_a}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^{x_a x_b}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{P}^{x_b x_a}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{P}^{x_b x_b}\mathbf{B}^T. \end{aligned}$$

Caso \mathbf{X}_a e \mathbf{X}_b são estatisticamente independentes, isto é, a distribuição de probabilidade conjunta é $p(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = p(\mathbf{x}_a)p(\mathbf{x}_b)$, então

$$\mathbf{P}^{yy} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{x_a x_a}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{P}^{x_b x_b}\mathbf{B}^T. \quad (2.6)$$

Adicionando variáveis aleatórias no modelo do processo e da medição, o modelo de sistema

¹Mais exemplos e aplicações com operações em transformações de variáveis encontram-se em Grewal, M. e Andrews, A. [1].

dinâmico pode ser representado pelo modelo estocástico em espaço de estados. Logo,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}\boldsymbol{\omega}_{k-1}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k\mathbf{v}_k, \quad (2.8)$$

em que $\mathbf{A}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C}_{k-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. E, $\mathbf{W}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ são vetores de ruído branco (variáveis aleatórias independentes entre si). Suas FDPs gaussianas são $p_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})$ e $p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_k)$, com médias nulas e matrizes de covariância expressas por \mathbf{Q}_{k-1} e \mathbf{R}_k , respectivamente. Além disso, são consideradas conhecidas a média $\hat{\mathbf{x}}_{0(+)}$ e covariância inicial da estimação $\mathbf{P}_{0(+)}^{xx}$ ¹ da FDP gaussiana do estado estimado inicial $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$.

2.4 Filtro de Kalman (KF)

Dado o modelo de equações (2.7) e (2.8), o problema de estimação de estados é definido para $k \in \mathbb{Z}_+^*$, no qual são conhecidas as medições \mathbf{z}_k , as entradas \mathbf{u}_{k-1} , e as FDPs $p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$, $p_{\boldsymbol{\omega}_{k-1}}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})$, e $p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_k)$. A solução do problema de estimação de estados é encontrar o maximizador $\hat{\mathbf{x}}_{k(+)}$ da FDP condicional $p(\mathbf{x}_k | (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k))$.

Assim, as seguintes equações são obtidas

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+)} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_{k(-)} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1(+)}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k\mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k\mathbf{R}_k\mathbf{V}_k^T]^{-1}, \quad (2.11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(+)} = \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}], \quad (2.12)$$

$$\mathbf{P}_{k(+)} = \mathbf{P}_{k(-)} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}_k\mathbf{P}_{k(-)}, \quad (2.13)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}_{k(+)}$ e $\mathbf{P}_{k(+)} = \mathbb{E}\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k(+)}]^T [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k(+)}] \rangle$ são os valores posteriores da estimativa de estado (média) e covariância. $\mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de ganho de Kalman. Além disso,

$$\mathbf{P}_{k(-)} = \mathbb{E}\langle [\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} - \mathbf{x}_k]^T [\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} - \mathbf{x}_k] \rangle,$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \mathbb{E}\langle [\boldsymbol{\omega}_{k-1} - \mathbb{E}\langle \boldsymbol{\omega}_{k-1} \rangle]^T [\boldsymbol{\omega}_{k-1} - \mathbb{E}\langle \boldsymbol{\omega}_{k-1} \rangle] \rangle,$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbb{E}\langle [\mathbf{v}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{v}_k \rangle]^T [\mathbf{v}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{v}_k \rangle] \rangle.$$

As Equações (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), e (2.13) obtidas podem ser expressas na forma preditora ou preditor de Kalman [7, 51, 52]:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k\mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k\mathbf{P}_k\mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k\mathbf{R}_k\mathbf{V}_k^T]^{-1}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{K}_{k-1}\mathbf{C}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1})\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T, \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}[\mathbf{z}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]. \quad (2.16)$$

¹O KF pode ser dividido em duas etapas: predição e correção; (+) e (-) representam a estimativa depois e antes do processo de correção (equações 2.12 e 2.13), respectivamente.

2.5 Filtragem para Sistemas Não-lineares

Apesar do amplo uso do KF por sua otimalidade e facilidade de implementação, as premissas de linearidade impossibilitam sua aplicação em sistemas não lineares sem realização de métodos de aproximação ou estratégias alternativas.

Dentre os métodos de aproximação, uma das principais modificações é o filtro de Kalman estendido (EKF). Este emprega a linearização analítica ou numérica do modelo do sistema. O EKF é conhecido por ser eficiente em inúmeras aplicações de controle [53]. No entanto, sua característica acumulativa de erros devido a linearização local torna sua performance sub-ótima. Deste modo, o EKF apresenta limitações, como sensibilidade às condições iniciais e à sintonia das matrizes de covariância de incertezas, especialmente, para sistemas fortemente não-lineares, podendo-se observar divergência ou mesmo instabilidade do estimador [54].

Alternativamente, o filtro de Kalman *unscented* (UKF), um algoritmo da família dos filtros de Kalman de pontos sigma [55, 56], foi introduzido por [57]. Por meio da técnica de transformação *unscented*, o modelo não-linear é utilizado para propagar um conjunto pequeno de amostras escolhidas deterministicamente, que representam as FDPs. Essas amostras convergem progressivamente para a verdadeira média e covariância, as quais são utilizadas para aproximar a distribuição de probabilidade do estado. Comparado com o EKF, o UKF apresenta melhor desempenho quando aplicado a sistemas com alto-grau de não-linearidade, com complexidade computacional de mesma ordem [58]. Porém depende de condições iniciais para garantia da estabilidade.

Dentre outros métodos não detalhados neste trabalho, encontram-se a filtragem de partículas [59] e a soma de gaussianas [60], que podem ser empregados para, de forma aproximada, tratar sistemas não-lineares. Já a estimação verdadeiramente não-linear de processos aleatórios tem sido estudada por algum tempo. A propagação no tempo da distribuição de probabilidade dos estados de um sistema dinâmico não-linear é descrito por uma equação parcial não-linear chamada equação de Fokker-Planck. Ela tem sido estudada por Einstein, Fooker, Planck, Kolmogorov, Stratonovich, Baras e Mirelli. Já a equação condicionada de Fokker-Planck tem sido estudada por Kushner e Bucy. Ambas utilizam o cálculo estocástico de Stratonovich ou de Itô [1].

2.5.1 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Em sistemas não-lineares, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k)$ não é completamente caracterizada pela sua média e covariância. A fim de lidar com este problema, aproximações por linearização analítica ou numérica de modelos não-lineares discretizados são realizadas para implementar as equações do KF [1, 10, 11, 61].

O modelo em espaço de estados com representação não-linear, estocástica e discreta no tempo é dado por

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}, k-1), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, k), \quad (2.18)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$. n, p, q, r, m são os números de termos generalizados dos vetores $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{z}_k$.

As matrizes jacobianas de f e h , ou seja, primeiros termos na expansão da série de Taylor, são avaliadas nas estimativas de estado mais recentes:

$$\hat{\mathbf{A}}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+), \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{q \times 1}, k-1}}, \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_{k-1}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+), \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{q \times 1}, k-1}},$$

$$\hat{\mathbf{W}}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}_{k-1}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+), \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{q \times 1}, k-1}},$$

$$\hat{\mathbf{C}}_k \triangleq \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k(-), \mathbf{0}_{r \times 1}, k}}, \quad \hat{\mathbf{V}}_k \triangleq \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k(-), \mathbf{0}_{r \times 1}, k}}.$$

Deste modo, a seguinte representação em espaço de estado pode ser obtida

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{A}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \hat{\mathbf{B}}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \hat{\mathbf{W}}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{z}_k = \hat{\mathbf{C}}_k \mathbf{x}_k + \hat{\mathbf{V}}_k \mathbf{v}_k \quad (2.21)$$

Assim, analogamente ao KF, é definido o problema de estimação de estados tal que $k \geq 1$ e são conhecidas as medições \mathbf{z}_k , as entradas \mathbf{u}_{k-1} , e as FDPs $p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$, $p_{\boldsymbol{\omega}_{k-1}}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})$, e $p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_k)$. A solução do problema de estimação de estados é encontrar o maximizador $\hat{\mathbf{x}}_{k(+)}$ da FDP condicional $p(\mathbf{x}_k | (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k))$. Logo, a solução pode ser expressa pelas seguintes equações

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+), \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{q \times 1}, k-1), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P}_{k(-)} = \hat{\mathbf{A}}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \hat{\mathbf{A}}_{k-1}^T + \hat{\mathbf{W}}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \hat{\mathbf{W}}_{k-1}^T, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)} \hat{\mathbf{C}}_k^T [\hat{\mathbf{C}}_k \mathbf{P}_{k(-)} \hat{\mathbf{C}}_k^T + \hat{\mathbf{V}}_k \mathbf{R}_k \hat{\mathbf{V}}_k^T]^{-1}, \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(+)} = \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}], \quad (2.25)$$

$$\mathbf{P}_{k(+)} = \mathbf{P}_{k(-)} - \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{C}}_k \mathbf{P}_{k(-)}. \quad (2.26)$$

E também podem ser escritas na forma preditora

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \hat{\mathbf{C}}_k^T [\hat{\mathbf{C}}_k \mathbf{P}_k \hat{\mathbf{C}}_k^T + \hat{\mathbf{V}}_k \mathbf{R}_k \hat{\mathbf{V}}_k^T]^{-1}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}_k = \hat{\mathbf{A}}_{k-1} (\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{K}_{k-1} \hat{\mathbf{C}}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}) \hat{\mathbf{A}}_{k-1}^T + \hat{\mathbf{W}}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \hat{\mathbf{W}}_{k-1}^T, \quad (2.28)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{A}}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \hat{\mathbf{B}}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \hat{\mathbf{A}}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} [\mathbf{z}_{k-1} - \hat{\mathbf{C}}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}]. \quad (2.29)$$

Desta maneira o EKF utilizado é composto pelas equações (2.19) e (2.27) a (2.29).

2.5.2 Filtro de Kalman *Unscented* (UKF)

O UKF é baseado na transformação *unscented* [62]. Dado que \mathbf{x}_k tem média $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$ e covariância $\mathbf{P}_k^{xx} = E\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k(+)}]^T [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k(+)}] \rangle \in \mathbb{R}^{n \times n}$ conhecidas por hipótese, um conjunto de vetores determinísticos $\boldsymbol{\chi}_{j,k} \in \mathbb{R}^n$ $j = 0, \dots, 2n$ são escolhidos e são chamados pontos sigma. Sendo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \boldsymbol{\chi}_{j,k} &= \hat{\mathbf{x}}_k \quad \text{e} \\ \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\boldsymbol{\chi}_{j,k} - \hat{\mathbf{x}}_k][\boldsymbol{\chi}_{j,k} - \hat{\mathbf{x}}_k]^T &= \mathbf{P}_k^{xx}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

com vetor de pesos $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ e elementos

$$\gamma_0 \triangleq \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad \gamma_j \triangleq \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (2.31)$$

em que $\sum_{j=0}^{2n} \gamma_j = 1$. A matriz de pontos sigma $\boldsymbol{\chi}_k \triangleq [\boldsymbol{\chi}_{0,k}, \boldsymbol{\chi}_{1,k} \dots \boldsymbol{\chi}_{2n,k}] \in \mathbb{R}^{n \times (2n+1)}$ é escolhida como

$$\boldsymbol{\chi}_k = \hat{\mathbf{x}}_k \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} + \sqrt{n + \lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} & (\mathbf{P}_k^{xx})^{1/2} & -(\mathbf{P}_k^{xx})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que $\lambda > -n$ determina o espaçamento dos pontos sigma [62,63], e $(\cdot)^{1/2}$ denota a raiz quadrada matricial, a qual pode ser obtida pela fatorização de Cholesky. A notação

$$[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi}_k] = \Psi_{UT}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k^{xx}, n, \lambda) \quad (2.33)$$

é definida para simplificação.

Então, seguindo as equações do KF, realiza-se a etapa de predição do UKF através das gerações dos pontos sigma e seus pesos

$$[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi}_{k-1(-)}] = \Psi_{UT}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+)}, \mathbf{P}_{k-1(+) }^{xx}, n, \lambda). \quad (2.34)$$

Assim, os pontos sigma são propagados pela função não linear de processo, gerando

$$\boldsymbol{\chi}_{j,k(-)} = f(\boldsymbol{\chi}_{j,k-1(+)}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{q \times 1}, k - 1), \quad j = 0, \dots, 2n. \quad (2.35)$$

Logo, obtém-se a estimativa dos estados e sua covariância

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \boldsymbol{\chi}_{j,k(-)}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{P}_{k(-)}^{xx} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\boldsymbol{\chi}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}][\boldsymbol{\chi}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}]^T + \mathbf{Q}_k. \quad (2.37)$$

Já as medições são obtidas pela propagação dos pontos sigma no modelo de medição não linear

$$\mathbf{Z}_{j,k(-)} = h(\boldsymbol{\chi}_{j,k(-)}, \mathbf{0}_{r \times 1}, k), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (2.38)$$

sendo suas estimativas e sua covariância

$$\hat{\mathbf{z}}_{k(-)} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \mathbf{Z}_{j,k(-)}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}_{k(-)}^{zz} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\mathbf{Z}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{z}}_{k(-)}][\mathbf{Z}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{z}}_{k(-)}]^T + \mathbf{R}_k. \quad (2.40)$$

A covariância cruzada entre os estados e medições é

$$\mathbf{P}_{k(-)}^{xz} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\boldsymbol{\chi}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}][\mathbf{Z}_{j,k(-)} - \hat{\mathbf{z}}_{k(-)}]^T. \quad (2.41)$$

E a etapa de correção de dados é dada por

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)}^{xz} (\mathbf{P}_{k(-)}^{zz})^{-1}, \quad (2.42)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(+)} = \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + \mathbf{K}_k [z_k - \hat{\mathbf{z}}_{k(-)}], \quad (2.43)$$

$$\mathbf{P}_{k(+)}^{xx} = \mathbf{P}_{k(-)}^{xx} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{k(-)}^{zz} \mathbf{K}_k^T. \quad (2.44)$$

Os pontos sigma podem ser encontrados por distintas proposições, além do formato das equações apresentadas, vide Menegaz et al. [64].

2.6 Problemas Encontrados

Atualmente, o KF é o algoritmo mais popular para estimação de estados de um sistema. Apesar de seu grande sucesso, existem limitações na utilização de métodos de aproximação ou de estratégias alternativas para aplicação em sistemas que possuem não linearidades. A partir das aproximações realizadas, a descrição incorreta das matrizes de covariância pode afetar a precisão da estimação do estado e, conseqüentemente, levar o filtro a divergência [65, 66]. Além disso, a suposição de conhecer a priori matrizes de covariância é dificilmente obtida em prática. Os valores das matrizes de covariância podem ser obtidos por extensivos testes experimentais, tornando-se uma tarefa árdua ou mesmo irrealística. Assim, nas últimas décadas, houve o interesse no desenvolvimento de métodos para lidar com a incorreta descrição e variações das matrizes de covariância.

Capítulo 3

Filtros de Kalman Adaptativos

Revisão bibliográfica dos principais algoritmos de adaptação do filtro de Kalman através da estimação das matrizes de covariância associadas.

Adaptações são designadas para reajustar parâmetros incertos ou variantes baseadas em informações obtidas. Na prática, o conhecimento das matrizes de covariância \mathbf{Q}_{k-1} e \mathbf{R}_k , que representam quantitativamente as incertezas de médias nulas gaussianas de processo e de medição, impacta diretamente o desempenho do KF. A partir de medições disponíveis, \mathbf{Q}_{k-1} e \mathbf{R}_k também podem ser estimadas.

Os processos de adaptação são dispostos em três cenários: \mathbf{R}_k varia e \mathbf{Q}_{k-1} é completamente conhecida e de valor constante; \mathbf{Q}_{k-1} varia e \mathbf{R}_k é completamente conhecida e de valor constante; e ambas matrizes variam. O segundo cenário se faz de principal interesse neste trabalho, no qual as incertezas do modelo de medições são geralmente de fácil conhecimento através de pré-experimentos. Por outro lado, a pré-determinação de \mathbf{Q}_{k-1} se torna uma difícil tarefa. Mostrado por Daley [67], em um modelo escalar simples não há como realizar a distinção entre o erro do modelo da planta e das medições, pois o atraso de covariância de termos de inovação depende da razão entre as matrizes de covariância \mathbf{Q}_{k-1} e \mathbf{R}_k . Assumindo que \mathbf{R}_k é conhecida, no capítulo 4, propõe-se a adaptação baseada na covariância das medições ou dos termos de inovação para estimar \mathbf{Q}_{k-1} em cada passo de tempo.

Na literatura, distintos métodos são propostos para estimar as covariâncias das matrizes de incertezas pela representação em espaço de estados. Tradicionalmente, como descrito em Mehra [13], estes métodos podem ser divididos em quatro categorias: *bayesianos* [68, 69], *covariância correspondente* [70, 71], *correlação* [9, 72] e *máxima verossimilhança* [73]. Alguns artigos [46, 74] e suas referências fornecem uma caracterização dos métodos mencionados com suas propriedades, vantagens, limitações e suposições relacionadas aos sistemas descritos. Há ainda métodos que utilizam múltiplos modelos para obtenção das estimativas [75, 76].

Como o método de covariância correspondente, a aproximação de Myers e Tapley [18] busca a adaptação de forma mais intuitiva. Posteriormente, Maybeck [77] desenvolveu seu procedimento para o estimador de máxima verossimilhança, considerando que a incerteza do processo é sem viés

e outras simplificações para alcançar aplicabilidade. Também baseado na abordagem de máxima verossimilhança, Dee et al. [73] apresentaram esquema de adaptação mais simples para lidar com a predição operacional meteorológica. Sendo grande influência para este trabalho, os métodos mencionados neste parágrafo, incluindo o método de correlação de Mehra [13], são brevemente descritos.

3.1 Método de Correlação

O método de correlação é utilizado para estimar através de séries temporais autocorrelacionando as medições do sistema diretamente ou conhecida a operação linear. Assim, um conjunto de equações é obtido relacionando os parâmetros do sistema e a função de autocorrelação das medições. Estas equações são resolvidas simultaneamente para os parâmetros desconhecidos. A aplicação deste método é realizada principalmente para sistemas completamente observáveis e controláveis que possuem parâmetros constantes.

O método de correlação pode ser desenvolvido por dois modos distintos, considerando a função de autocorrelação das medições ou dos termos de inovação. O segundo modo é mais eficiente do que o primeiro, pois os termos de inovação ($\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}$) são menos autocorrelacionados do que as medições (\mathbf{z}_k). Entretanto, o primeiro método é aplicado somente se as medições estão em estado estacionário ou \mathbf{A}_{k-1} é uma matriz estável.

3.1.1 Output Correlation Method

Defini-se Ψ_l como o l -ésimo atraso de autocorrelação das medições \mathbf{z}_k ,

$$\Psi_l = E\{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_{k-l}^T\}. \quad (3.1)$$

Assume-se que \mathbf{z}_k está em estado estacionário, então a autocorrelação é somente em função do atraso. Utilizando o modelo das equações (2.7) e (2.8), e considerando as entradas $\mathbf{u}_k = 0$ para todo k , tem-se

$$\Psi_l = \begin{cases} \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{R}, & l = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^l\Sigma\mathbf{C}^T, & l > 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

em que $\Sigma = E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\}$ satisfaz

$$\Sigma = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.$$

Da equação (3.2) para l de 1 a n , tem-se

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} = \Phi\Sigma\mathbf{C}^T, \quad (3.3)$$

em que $\Phi^T = [A^T C^T, \dots, (A^T)^n C^T]$.

Desde que A é não singular e o sistema é observável, $\text{posto}(\Phi) = n$. Resolvendo a equação (3.3) para ΣC^T ,

$$\Sigma C^T = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Utilizando a pseudo-inversa, simbolizada por (\dagger) , pela direita, tem-se

$$\Sigma = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} (C^T)^\dagger, \quad (3.5)$$

assim,

$$\begin{cases} Q = \Sigma - A \Sigma A^T \\ R = \Psi_0 - C \Sigma C^T. \end{cases} \quad (3.6)$$

Em geral, uma solução única de Σ não pode ser obtida, conseqüentemente, a solução única de Q também não é obtida. Entretanto, o ganho de Kalman ótimo para regime permanente pode ser determinado unicamente.

Define-se

$$\pi = E\{\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}^T\},$$

e das equações (2.9) e (2.12) tem-se

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1(-)} = A(\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + K \nu_k).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi &= E\{A(\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + K \nu_k)(A(\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + K \nu_k))^T\} = \\ &= E\{(A \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + A K \nu_k)(\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}^T A^T + \nu_k^T K^T A^T)\} = \\ &= E\{A \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}^T A^T + A K \nu_k \nu_k^T K^T A^T\}, \end{aligned}$$

pois $\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}$ e ν_k são brancos e não correlacionados. Rearranjando os termos

$$\pi = A[\pi + K \Gamma_0 K^T] A^T, \quad (3.7)$$

em que $\Gamma_0 = E\{\nu_k \nu_k^T\}$.

Define-se a equação

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} + \mathbf{e}_k,$$

em que e_k tem matriz de covariância S . Pelo princípio de ortogonalidade

$$E\{\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}e_k^T\} = 0, \text{ e}$$

$$\Sigma = \pi + S.$$

Deste modo, o ganho de Kalman é dado por

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{C}^T\mathbf{\Gamma}_0^{-1} = (\Sigma - \pi)\mathbf{C}^T\mathbf{\Gamma}_0^{-1},$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_0 &= E\{\boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_k^T\} = \\ &E\{(z_k - \mathbf{C}_k\hat{\mathbf{x}}_{k(-)})(z_k^T - \hat{\mathbf{x}}_{k(-)}^T\mathbf{C}_k^T)\} = \\ &E\{z_k z_k^T\} + \mathbf{C}_k E\{\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}^T\}\mathbf{C}_k^T = \\ &\Psi_0 + \mathbf{C}\pi\mathbf{C}^T. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{K} = (\Sigma - \pi)\mathbf{C}^T(\Psi_0 + \mathbf{C}\pi\mathbf{C}^T)^{-1}. \quad (3.8)$$

Substituindo na equação (3.7), obtem-se

$$\pi = \mathbf{A}[\pi + (\Sigma - \pi)\mathbf{C}^T(\Psi_0 + \mathbf{C}\pi\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}(\Sigma - \pi)]\mathbf{A}^T. \quad (3.9)$$

Uma vez $\Sigma\mathbf{C}^T$ conhecido a partir das autocorrelações Ψ_0, \dots, Ψ_n , encontra-se π e, consequentemente, \mathbf{K} .

Utilizada a propriedade de ergodicidade¹ da sequência aleatória z_k , dado que por hipótese \mathbf{Q} e \mathbf{R} são constantes, as autocorrelações são estimadas como

$$\hat{\Psi}_l^N = \frac{1}{N} \sum_{k=l}^N z_k z_{k-l}^T, \quad (3.10)$$

em que N é o tamanho da amostra. As estimações $\hat{\Psi}_l^N$ podem ser realizadas recursivamente para $l = 0, \dots, n$, por

$$\hat{\Psi}_l^N = \hat{\Psi}_l^{N-1} + \frac{1}{N}(z_N z_{N-l}^T - \hat{\Psi}_l^{N-1}). \quad (3.11)$$

Além disso, pode ser mostrado que as estimações de $\hat{\Psi}_l$ são assintoticamente normais, sem viés, e consistentes. Desde que \mathbf{Q} e \mathbf{R} são linearmente relacionadas a $\hat{\Psi}_l$, suas estimações também são assintoticamente normais, sem viés, e consistentes.

¹Ergodicidade – um processo aleatório é considerado ergódico se todos os seus parâmetros estatísticos (média, variância, e demais) podem ser determinados por arbitrárias partes de sua sequência [1].

3.1.2 Innovation Correlation Method

A partir da teoria de filtragem de Kalman, a sequência de termos de inovação

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} = \mathbf{C}\mathbf{e}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3.12)$$

é uma sequência branca gaussiana de média nula.

Define-se $\boldsymbol{\Gamma}_l$ como autocorrelação da sequência de termos de inovação $\boldsymbol{\nu}_k$,

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = E\{\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_{k-l}^T\}. \quad (3.13)$$

Substituindo na equação (3.12) e considerando $l > 0$,

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = E\{(\mathbf{C}\mathbf{e}_k + \mathbf{v}_k)(\mathbf{C}\mathbf{e}_{k-l} + \mathbf{v}_{k-l})^T\} = \mathbf{C}E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k-l}^T\}\mathbf{C}^T + E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k-l}^T\}. \quad (3.14)$$

Para $l = 0$,

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}.$$

Os termos de esperança da equação (3.14) podem ser avaliados utilizando a equação de diferenças para e_i , e assumindo que o filtro usa um ganho de Kalman, \mathbf{K}_0 , a priori subótimo,

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{A}\mathbf{K}_0\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}. \quad (3.15)$$

Levando a equação (3.15) para l passos anteriores,

$$\mathbf{e}_k = [\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^l \mathbf{e}_{k-l} - \sum_{j=1}^l [\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^{j-1} \mathbf{A}\mathbf{K}_0\mathbf{v}_{k-j} + \sum_{j=1}^l [\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^{j-1} \mathbf{w}_{k-j}. \quad (3.16)$$

Entretanto,

$$E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k-l}^T\} = [\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^l \mathbf{S}_0, \quad (3.17)$$

em que $\mathbf{S}_0 = E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T\}$. Analogamente,

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k-l}^T\} = -[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^{l-1} \mathbf{A}\mathbf{K}_0\mathbf{R}. \quad (3.18)$$

Substituindo na equação (3.14), tem-se

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = \mathbf{C}[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})]^{l-1} \mathbf{A}[\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T - \mathbf{K}_0\boldsymbol{\Gamma}_0]. \quad (3.19)$$

Para o filtro ótimo,

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (3.20)$$

então $\boldsymbol{\Gamma}_l$ para $l > 0$ desaparece. Quando existe incertezas em \mathbf{Q} e \mathbf{R} , a matriz de covariância \mathbf{S}_c calculada pelo KF será diferente da real covariância \mathbf{S}_0 , e o ganho \mathbf{K}_0 será subótimo. Então, $\boldsymbol{\Gamma}_l$

será não nulo. \mathbf{K} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} podem ser obtidos por pelos seguintes:

1. Obter $\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T$ resolvendo a equação (3.19) para $l = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T = (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{CAK}_0\mathbf{\Gamma}_0 \\ \mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{CAK}_0\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{CA}^2\mathbf{K}_0\mathbf{\Gamma}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_n + \mathbf{CAK}_0\mathbf{\Gamma}_{n-1} + \dots + \mathbf{CAK}_0\mathbf{\Gamma}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

em que $\mathbf{\Phi}$ é definida na equação (3.3).

2. Calcular \mathbf{R} utilizando $\mathbf{\Gamma}_0$ e $\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}_0 - \mathbf{C}(\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T). \quad (3.22)$$

3. Denotar \mathbf{S} a covariância do erro associado com o ganho ótimo \mathbf{K} . Então, da teoria de filtragem de Kalman:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\mathbf{S} - \mathbf{KCS})\mathbf{A} + \mathbf{Q}. \quad (3.23)$$

Uma equação para \mathbf{S}_0 é derivada da equação (3.15)

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{S}_0 - \mathbf{K}_0\mathbf{CS}_0 - \mathbf{S}_0\mathbf{C}^T\mathbf{K}_0^T + \mathbf{K}_0(\mathbf{CS}_0\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}_0^T)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (3.24)$$

Subtraindo (3.23) de (3.24),

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_0 - \mathbf{KCS} + \mathbf{K}_0\mathbf{CS}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{C}^T\mathbf{K}_0^T - \mathbf{K}_0(\mathbf{CS}_0\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}_0^T)\mathbf{A}^T. \quad (3.25)$$

Assim, o ganho de Kalman pode ser escrito como

$$\mathbf{K} = (\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T + \delta\mathbf{SC}^T)(\mathbf{\Psi}_0 + \mathbf{C}\delta\mathbf{SC}^T)^{-1}, \quad (3.26)$$

em que $\delta\mathbf{S} = \mathbf{S} - \mathbf{S}_0$.

Substituindo (3.26) de (3.25),

$$\delta\mathbf{S} = \mathbf{A}[\delta\mathbf{S} - (\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T + \delta\mathbf{SC}^T)(\mathbf{\Psi}_0 + \mathbf{C}\delta\mathbf{SC}^T)^{-1}(\mathbf{CS}_0 + \mathbf{C}\delta\mathbf{S}) + \mathbf{K}_0\mathbf{CS}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{C}^T\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_0\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{K}_0^T]\mathbf{A}^T. \quad (3.27)$$

É possível notar a analogia entre (3.26) e (3.27) com (3.8) e (3.9). Resolvendo (3.25) para $\delta\mathbf{S}$, utilizando $\mathbf{S}_0\mathbf{C}^T$ de (3.21) a partir de $\mathbf{\Gamma}_0, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_N$, o ganho ótimo \mathbf{K} pode ser obtido com a equação (3.26).

O algoritmo pode ser utilizado de forma recursiva para $l = 0, \dots, n$, por

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_l^N = \hat{\mathbf{\Gamma}}_l^{N-1} + \frac{1}{N}(\boldsymbol{\nu}_N\boldsymbol{\nu}_{N-l}^T - \hat{\mathbf{\Gamma}}_l^{N-1}), \quad (3.28)$$

sendo as autocorrelações

$$\hat{\Gamma}_l^N = \frac{1}{N} \sum_{k=l}^N \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_{k-l}^T,$$

em que N é o tamanho da amostra.

3.2 Covariância Correspondente

Este método torna os resíduos consistentes com suas covariâncias teóricas. Por exemplo, dada a sequência de inovação $\boldsymbol{\nu}_k$, com covariância teórica de $(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R})$, se for notado que a covariância real de $\boldsymbol{\nu}_k$ é muito maior do que $(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R})$, obtida pelo KF, então o distúrbio de processo \mathbf{Q} deve ser aumentado. Esse efeito aumenta $\mathbf{P}_{k(-)}$ e aproxima a covariância real de $\boldsymbol{\nu}_k$ para $(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R})$.

A covariância de $\boldsymbol{\nu}_k$ é aproximada por sua covariância amostral

$$\hat{\Gamma}_0^m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T, \quad (3.29)$$

em que m é escolhido empiricamente para dar suavidade estatística.

A equação de \mathbf{Q} é obtida configurando

$$\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R} = \Gamma_0, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{C}_k (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}) \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R} = \Gamma_0, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{C}_k \mathbf{Q} \mathbf{C}_k^T = \Gamma_0 - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{C}_k^T - \mathbf{R}. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) não resulta em uma solução única para \mathbf{Q} caso \mathbf{C}_k tem posto menor que n . Entretanto, se o número de variáveis desconhecidas em \mathbf{Q} é restrito, uma única solução pode ser obtida.

3.2.1 Algoritmo de Myers and Tapley (MT)

O algoritmo tem como objetivo sequenciar o procedimento para aplicação do método de covariância correspondente, utilizando os resíduos \mathbf{r}_j . Estima-se diretamente \mathbf{Q}_k através das covariâncias amostrais $\hat{\mathbf{M}}_k^m$. Assumindo que \mathbf{R}_k é conhecido e somente \mathbf{Q}_k é estimado, e tomando o estado estimado $\hat{\mathbf{x}}_{k(-)}$, utiliza-se o seguinte procedimento:

1. Computar m vetores de resíduos ($j = 1, \dots, m$) em cada tempo k

$$\mathbf{r}_j = \hat{\mathbf{x}}_{k-j(+)} - \mathbf{A}_{k-j-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-j-1(+)} ;$$

2. Computar a matriz de covariância da amostra em cada tempo k

$$\hat{\mathbf{M}}_k^m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^T ;$$

3. Computar a matriz de covariância estimada

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \hat{\mathbf{M}}_k^m + \frac{1}{m} \sum_{j=2}^{m+1} (\mathbf{A}_{k-j} \mathbf{P}_{k-j(+)} \mathbf{A}_{k-j}^T - \mathbf{P}_{k-j+1(+)}).$$

A estimativa para \mathbf{Q}_k pode se tornar negativa definida em aplicações numéricas, em particular quando o tamanho da amostra m é pequena. Para evitar este problema, Myers e Tapley propõem a reconfiguração de todos elementos diagonais negativos para seus valores absolutos.

Em condições estacionárias, $\hat{\mathbf{Q}}_k$ se aproxima do valor real quando m aumenta. No caso de variações dos parâmetros do procedimento estocástico, quanto menor o valor de m , mais rápido é a reação do KF.

3.3 Algoritmo de Maybeck (MB)

Para obter a estimativa através da máxima verossimilhança, de maneira a ser realizável para aplicações *on-line*, Maybeck realizou algumas simplificações. Assim, considera o ruído essencialmente estacionário nos períodos de amostragem (detalhes em Maybeck [77]). Sendo \mathbf{R}_k conhecido,

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=2}^{m+1} \mathbf{K}_{k-j+1} \boldsymbol{\nu}_{k-j+1} \boldsymbol{\nu}_{k-j+1}^T \mathbf{K}_{k-j+1}^T - [\mathbf{A}_{k-j} \mathbf{P}_{k-j(+)} \mathbf{A}_{k-j}^T - \mathbf{P}_{k-j+1(+)}].$$

3.4 Máxima Verossimilhança (ML)

Detalhados em Blanchet et al. [46], é suposto que os elementos do vetor de termos de inovação $\boldsymbol{\nu}$ possuem distribuição com

$$E(\boldsymbol{\nu}_k) = 0 \text{ e } E(\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}),$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor de parâmetros desconhecidos que descreve a matriz de covariância. Dee sugeriu estimar $\boldsymbol{\alpha}$ baseado em uma única amostra de $\boldsymbol{\nu}$ maximizando sua função densidade de probabilidade condicional $p(\boldsymbol{\nu}_k | \boldsymbol{\alpha})$, assumindo ser gaussiana:

$$p(\boldsymbol{\nu}_k | \boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-p/2} [\det \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})]^{-1/2} \times \exp[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\nu}_k^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\nu}_k)].$$

A estimativa de máxima verossimilhança é

$$\boldsymbol{\alpha}_{ml} = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmax}} p(\boldsymbol{\nu}_k | \boldsymbol{\alpha}) = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmin}} f(\boldsymbol{\alpha})$$

com

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \ln[\det\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})] + \boldsymbol{\nu}_k^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\nu}_k,$$

em que $\boldsymbol{\Gamma}$ pode ser relacionado com as matrizes de covariância dos ruídos. Utilizando (3.32),

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k-1(-)} \mathbf{C}_k^T \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{Q}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k. \quad (3.33)$$

A estimação é somente relevante quando o número de medições é maior do que duas ordens de magnitude do número de parâmetros a ser estimado [73]. Então, considerando o ruído estacionário, utiliza-se uma sequência de termos de inovação, \mathbf{V}_n , em que n é o número total de elementos da sequência. Através da regra de Bayes¹, pode-se escrever

$$p[\mathbf{V}_n | \boldsymbol{\alpha}] = \prod_{i=2}^n p[\boldsymbol{\nu}(i) | \mathbf{V}(i-1), \boldsymbol{\alpha}] p[\boldsymbol{\nu}(1) | \boldsymbol{\alpha}].$$

Então, a nova função a ser minimizada é dada por

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{kstep} \ln[\det\boldsymbol{\Gamma}(i, \boldsymbol{\alpha})] + \boldsymbol{\nu}_i^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(i, \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\nu}_i.$$

Aumentando o número de passos (*kstep*) a $f(\boldsymbol{\alpha})$ se torna grande e requer uma grande quantidade de cálculo inviabilizando aplicações em tempo real.

¹Regra de Bayes: $p(x_k | y_1, \dots, y_k) = \frac{p(y_k | x_k, y_1, \dots, y_{k-1}) p(x_k | y_1, \dots, y_{k-1})}{p(y_k | y_1, \dots, y_{k-1})}$ [1].

Capítulo 4

Adaptação Proposta

Métodos propostos para estimar as matrizes de covariância associadas ao filtro de Kalman.

Neste capítulo são propostas novas abordagens de adaptação em tempo real da covariância da incerteza de processo para o KF em sistemas não-lineares. A adaptação é realizada a fim de estimar as mudanças da matriz de covariância durante a filtragem, através de estimativas da covariância das medições ou dos termos de inovação, por média móvel exponencial. A utilização da média móvel exponencial foi proposta para sistemas lineares por [78].

O KF sem adaptação, em que matrizes constantes são pré-estabelecidas para a covariância das incertezas de processo, apresentam dois possíveis cenários: aumento não necessário de desgastes no atuador ou baixo desempenho esperado pelo controle. Na prática, a adaptação aumenta a eficiência de atuadores e a robustez em relação a estabilidade em malha fechada, em que os estados são melhores estimados em tempo real.

Os métodos clássicos de adaptações mencionados utilizam aproximações por representações amostrais baseados em média móvel simples. Estas adaptações requerem a armazenagem dos últimos N conjuntos de medidas e lotes de dados processados em cada passo de tempo $k \geq N$. Além disso, as incertezas de processo são consideradas completamente estacionárias, dado o intervalo de tempo de N amostragens. O tamanho da janela N deve ser ajustado para garantia da convergência em malha fechada. Já na adaptação proposta, com média móvel exponencial, é requerido somente a última medida e seu respectivo lote de dados processados para definir as estimativas de \mathbf{Q}_{k-1} resultando redução do tempo de processamento.

4.1 Média Móvel Exponencial

A média móvel exponencial tem simples implementação e é mais sensível às novas informações em comparação a média móvel simples, considerando a mesma quantidade de atenuação de ruídos brancos [79–81]. Sendo \mathbf{s}_k um sinal qualquer, podemos definir $\mathbf{O}_k = \mathbf{E}\langle(\mathbf{s}_k - \mathbf{E}\langle\mathbf{s}_k\rangle)(\mathbf{s}_k - \mathbf{E}\langle\mathbf{s}_k\rangle)^T\rangle$

e $\mathbf{S}_k = (\mathbf{s}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{s}_k \rangle)(\mathbf{s}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{s}_k \rangle)^T$. Então, a média móvel exponencial pode ser expressa como

$$\mathbf{O}_k = \alpha \mathbf{O}_{k-1} + (1 - \alpha) \mathbf{S}_k, \quad (4.1)$$

em que α é um coeficiente de ponderação. O valor de α determina a intensidade da suavização de \mathbf{S}_k . Como a matriz de covariância de uma sequência de dados \mathbf{s}_k é definida por $\mathbf{P}^{s_k s_k} = \mathbb{E}\langle [\mathbf{s}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{s}_k \rangle]^T [\mathbf{s}_k - \mathbb{E}\langle \mathbf{s}_k \rangle] \rangle$, então uma aproximação de $\mathbf{P}^{s_k s_k}$ pode ser obtida recursivamente utilizando a equação (4.1).

4.2 Adaptação Baseada em Média Móvel Exponencial

Assumindo o conhecimento de \mathbf{R}_k , propõe-se estimar \mathbf{Q}_{k-1} em cada passo de tempo por dois métodos distintos. O primeiro utiliza média móvel exponencial para estimar a covariância das medições. O segundo utiliza média móvel exponencial para estimar a covariância dos termos de inovação.

Dentro destes dois métodos, foram implementados duas abordagens para estimar \mathbf{Q}_{k-1} a partir das covariâncias obtidas de média móvel exponencial: por solução de sistemas de equações; e por solução de equação discreta de Lyapunov.

4.2.1 Covariância da Medições

Primeiramente, aplica-se a operação de covariância nas equações (2.7) e (2.8):

$$\text{cov}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T, \quad (4.2)$$

$$\text{cov}(\mathbf{z}_k) = \mathbf{C}_k \text{cov}(\mathbf{x}_k) \mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T, \quad (4.3)$$

em que $\mathbf{Q}_{k-1} = \text{cov}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})$ e $\mathbf{R}_k = \text{cov}(\mathbf{v}_k)$ ¹. Sendo \mathbf{A}_{k-1} estável, não sendo necessário que seja não singular, e com sua dinâmica significativamente mais lenta que o tempo de amostragem, podemos assumir que, matematicamente, $\text{cov}(\mathbf{x}_k) \approx \text{cov}(\mathbf{x}_{k-1})$. Além disso, $\text{cov}(\mathbf{u}_{k-1})$ é considerada zero.

Utilizando a média móvel exponencial, $\text{cov}(\mathbf{z}_k)$ pode ser estimada, e conseqüentemente, obter-se as estimativas de \mathbf{Q}_{k-1} .

$$\text{cov}(\mathbf{z}_k) = \alpha \text{cov}(\mathbf{z}_{k-1}) + (1 - \alpha) (\mathbf{z}_{k-1} - \text{refz}_{k-1})(\mathbf{z}_{k-1} - \text{refz}_{k-1})^T, \quad (4.4)$$

em que refz_{k-1} é a referência desejada para as medições. Então, duas abordagens podem ser utilizadas.

¹Definição: $\text{cov}(\cdot) = \mathbb{E}\langle [\cdot - \mathbb{E}\langle \cdot \rangle]^T [\cdot - \mathbb{E}\langle \cdot \rangle] \rangle$.

4.2.1.1 Abordagem por Sistemas de Equações

A partir da equação (4.3), isola-se a covariância dos estados

$$\text{cov}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_k^\dagger (\text{cov}(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T) (\mathbf{C}_k^T)^\dagger, \quad (4.5)$$

em que (\dagger) é a inversa de Moore-Penrose. E utilizando a equação (4.2) e aproximações realizadas,

$$\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T = \text{cov}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{x}_k) \mathbf{A}_{k-1}^T. \quad (4.6)$$

Se $m \geq q$, isto é, a dimensão do vetor de medição é maior ou igual a dimensão de vetor de ruído de processo, e \mathbf{C}_k é matriz de posto completo, solução única para \mathbf{Q}_{k-1} é obtida através de sistema de equações. Em outros casos, deve-se impor restrições adicionais em \mathbf{Q}_{k-1} , além da positividade e simetria, para obter solução única.

4.2.1.2 Abordagem por Equações Discretas de Lyapunov

Uma solução discreta de Lyapunov pode ser obtida para $\text{cov}(\mathbf{x}_k)$ na equação (4.2), em que \mathbf{A}_{k-1} é sempre estável, $\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T$ é matriz hermitiana ($\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T = (\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T)^T$) e positiva definida.

Então,

$$\text{cov}(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i$$

é solução positiva definida para a equação discreta de Lyapunov

$$\mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{x}_k) \mathbf{A}_{k-1}^T - \text{cov}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T = 0.$$

A equação discreta de Lyapunov tem solução única se os autovalores a_1, a_2, \dots, a_n de \mathbf{A}_{k-1} satisfaz $a_i a_j \neq 1$ para todo (i, j) [82].

Dado por modelagem, assumindo que \mathbf{Q}_{k-1} é uma matriz diagonal com a estrutura preestabelecida,

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{qq} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

o princípio de superposição pode ser aplicado na solução da equação de Lyapunov para obter expressões com os termos individuais de \mathbf{Q}_{k-1} .

$$\text{cov}(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^q q_{jj,k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{S}_{j,k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i$$

$$= \sum_{j=1}^q q_{jj,k-1} \mathbf{T}_{j,k-1}, \quad (4.8)$$

em que $\mathbf{T}_{j,k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{S}_{j,k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i$ e $\mathbf{S}_{j,k-1}$, seguindo que

$$\mathbf{S}_{1,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots,$$

$$\mathbf{S}_{q,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Através da substituição de (4.8) em (4.3) e da obtenção das covariâncias de medição por média móvel exponencial, obtém-se

$$\text{cov}(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R} \mathbf{V}_k^T = \sum_{j=1}^q q_{jj,k-1} \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j,k-1} \mathbf{C}_k^T. \quad (4.9)$$

Por simplificação

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{j=1}^q q_{jj,k-1} \bar{\mathbf{T}}_{j,k-1},$$

em que $\bar{\mathbf{T}}_{j,k-1} = \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j,k-1} \mathbf{C}_k^T$. Logo, $\mathbf{Y}_k = \text{cov}(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R} \mathbf{V}_k^T$. Assim, os termos de \mathbf{Q}_{k-1} podem ser numericamente obtidos através dos termos diagonais, sendo m maior ou igual a q .

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,11,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11,k-1} \\ q_{22,k-1} \\ \vdots \\ q_{qq,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{mm,k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} q_{11,k-1} \\ q_{22,k-1} \\ \vdots \\ q_{qq,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \dots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{mm,k} \end{bmatrix}$$

4.2.2 Covariância do Termos de Inovação

O termo de inovação definido como $\boldsymbol{\nu}_k$ é uma sequência de média zero gaussiana. Através da equação (2.8),

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{e}_k, \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. A utilização do termo de inovação é adotada pois este é menos autocorrelacionado do que as medições \mathbf{z}_k [13].

A partir da subtração das equações (2.7) e (2.16), obtém-se

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}\boldsymbol{\nu}_{k-1}. \quad (4.11)$$

Deste modo, é aplicada a operação de covariância em (4.10) e (4.11). Uma vez que $\boldsymbol{\nu}_{k-1}$ e \mathbf{e}_k são variáveis independentes entre si, assim como \mathbf{e}_{k-1} , $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$, e $\boldsymbol{\nu}_{k-1}$, obtém-se

$$\text{cov}(\boldsymbol{\nu}_k) = \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \hat{\mathbf{V}}_k^T + \mathbf{C}_k \text{cov}(\mathbf{e}_k) \mathbf{C}_k^T, \quad (4.12)$$

$$\text{cov}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{e}_{k-1}) \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T - \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} \text{cov}(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1})^T. \quad (4.13)$$

Como \mathbf{A}_{k-1} é estável, não necessariamente não singular, e possui dinâmica significativamente mais lenta que o tempo de amostragem, podemos assumir que, matematicamente, $\text{cov}(\mathbf{e}_k) \approx \text{cov}(\mathbf{e}_{k-1})$.

Utilizando a média móvel exponencial, $\text{cov}(\boldsymbol{\nu}_k)$ pode ser estimada

$$\text{cov}(\boldsymbol{\nu}_k) = \alpha \text{cov}(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) + (1 - \alpha) \boldsymbol{\nu}_{k-1} \boldsymbol{\nu}_{k-1}^T. \quad (4.14)$$

Assim, aplica-se a abordagem por sistema de equações ou por equações discretas de Lyapunov para obter estimativas de \mathbf{Q}_{k-1} .

4.2.2.1 Abordagem por Sistemas de Equações

A partir da equação (4.12), isola-se a covariância do erro dos estados

$$\text{cov}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{C}_k^\dagger (\text{cov}(\boldsymbol{\nu}_k) - \mathbf{R}_k) (\mathbf{C}_k^T)^\dagger, \quad (4.15)$$

e utilizando a equação (4.13),

$$\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T = \text{cov}(\mathbf{e}_k) - \mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{e}_k) \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} \text{cov}(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1})^T. \quad (4.16)$$

Se $m \geq q$, isto é, a dimensão do vetor de medição (igual a dimensão da covariância do termo de inovação) é maior ou igual a dimensão de vetor de ruído de processo, e \mathbf{C}_k é matriz de posto completo, uma solução única para \mathbf{Q}_{k-1} é obtida através de sistema de equações. Em outros casos, deve-se impor restrições adicionais em \mathbf{Q}_{k-1} , além da positividade e simetria, para obter solução única.

4.2.2.2 Abordagem por Equações Discretas de Lyapunov

Uma solução discreta de Lyapunov pode ser obtida para $cov(\mathbf{e}_k)$ na equação (4.13), em que \mathbf{A}_{k-1} é sempre estável, e $\mathbf{W}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T$ e $\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1})(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^T$ são matrizes hermitianas.

Então,

$$cov(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1})(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i],$$

é solução para a equação de Lyapunov [82]

$$\mathbf{A}_{k-1}cov(\mathbf{e}_k)\mathbf{A}_{k-1} - cov(\mathbf{e}_k) + \mathbf{W}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1})(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^T = 0.$$

Sabendo-se que \mathbf{Q}_{k-1} é matriz diagonal com a estrutura preestabelecida

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

o princípio de superposição pode ser aplicado na solução da equação de Lyapunov para obter expressões com os termos individuais de \mathbf{Q}_{k-1} .

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{e}_k) &= \sum_{j=1}^q \{q_{jj,k-1} \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1}\mathbf{S}_{j,k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i]\} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}cov[\boldsymbol{\nu}_{k-1}] (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i] \\ &= \sum_{j=1}^q \{q_{jj,k-1}\mathbf{T}_{j,k-1}\} - \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}cov[\boldsymbol{\nu}_{k-1}] (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i], \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que $\mathbf{T}_{j,k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{W}_{k-1}\mathbf{S}_{j,k-1}\mathbf{W}_{k-1}^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i]$ e $\mathbf{S}_{j,k-1}$, seguindo que

$$\mathbf{S}_{1,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$\mathbf{S}_{q,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Através da substituição de (4.18) em (4.12) e da obtenção de $cov(\boldsymbol{\nu}_k)$ por média móvel exponencial, obtém-se

$$cov(\boldsymbol{\nu}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R} \mathbf{V}_k^T = \sum_{j=1}^q \{q_{jj,k-1} \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j,k-1} \mathbf{C}_k^T\} - \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1})^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i \mathbf{C}_k^T].$$

Por simplificação

$$Y_k = \sum_{j=1}^q q_{jj,k-1} \bar{\mathbf{T}}_{j,k-1} - Z_k,$$

em que $\bar{\mathbf{T}}_{j,k-1} = \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j,k-1} \mathbf{C}_k^T$, $Z_k = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1}^i (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1})^T) (\mathbf{A}_{k-1}^T)^i \mathbf{C}_k^T]$ e, $Y_k = cov(\boldsymbol{\nu}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R} \mathbf{V}_k^T$. Assim, os termos de \mathbf{Q}_{k-1} podem ser numericamente obtidos através dos termos diagonais, sendo m maior ou igual a q .

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11,k-1} \\ q_{22,k-1} \\ \vdots \\ q_{qq,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{mm,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11,k} \\ Z_{22,k} \\ \vdots \\ Z_{mm,k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} q_{11,k-1} \\ q_{22,k-1} \\ \vdots \\ q_{qq,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{mm,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11,k} \\ Z_{22,k} \\ \vdots \\ Z_{mm,k} \end{bmatrix} \right)$$

4.3 Aplicação de Adaptações Propostas no EKF

O filtro de Kalman estendido adaptativo (AEKF) é desenvolvido para estimar a dinâmica real dos estados de sistemas não-lineares e, em concomitância, estimar a covariância de incerteza de processo. Por meio deste, a característica subótima do EKF no processo é melhorada, uma vez conhecendo as estimativas da covariância de incerteza de processo. As adaptações propostas no EKF se fazem de maneira análoga às adaptações propostas para o KF. Nas quais utilizam-se as matrizes jacobianas (2.19) no lugar das matrizes lineares das equações (4.2) e (4.3).

4.4 Aplicação de Adaptações Propostas no UKF

Já para a aplicação das adaptações propostas no UKF, a alternativa utilizada foi calcular as matrizes jacobianas, avaliar-las individualmente nos distintos pontos sigma ($\boldsymbol{\chi}_k$) e obter suas médias em cada passo de tempo. Isto proporciona uma maior representatividade da não-linearidade e a utilização de maneira análoga das adaptações propostas para o KF. Logo, o filtro de Kalman *unscented* adaptativo (AUKF) proposto utiliza de aproximações por linearização, assim como no

EKF, implementada somente na etapa de adaptação da covariância da incerteza de processo.

Capítulo 5

Resultados

Apresentação dos resultados numéricos obtidos com os algoritmos propostos e comparação com algoritmos presentes na bibliografia.

Neste capítulo, os sistemas massa-mola amortecedor não-linear, bola e barra, e quatro tanques são utilizados como exemplos. Deste modo, algoritmos foram implementados em linguagem MATLAB[®] e executados em computador Intel Core i7 com clock de 2.00 GHz e 8 GB de memória RAM para ilustração da efetividade das adaptações propostas. O tempo de simulação (ou simplesmente tempo) é o tempo total de execução dos algoritmos em cada simulação nos intervalos definidos.

A efetividade das adaptações propostas (algoritmos em pseudocódigo no anexo I) são avaliadas através da raiz do erro quadrado médio (RMSE) e erro absoluto médio (MAE) [83] dos estados estimados com relação às condições ideais. As condições ideais são obtidas por simulações realizadas sem adição de incertezas. O MAE representa a média em magnitude dos erros absolutos, significando que todos os erros influenciam igualmente no seu valor. Já o RMSE é um critério quadrático, assim grandes erros possuem maior influência do que pequenos erros no seu valor. Os dois critérios de desempenho proporcionam distintas visões do desempenho da estimação utilizados nos sistemas de malha aberta.

Já em sistemas de malha fechada, para mensurar o desempenho da estimação dos estados, foram utilizados a integral de quadrado de erros (ISE), a integral de erros absolutos (IAE), e a integral de erros absolutos ponderados no tempo (ITAE). Enquanto, para avaliar a magnitude da saída manipulada, a variância total da ação de controle (TVC) é computada [84]. Além destes, são calculados a média no tempo, RMSE, e MAE dos termos da covariância da incerteza de processo \mathbf{Q}_k em intervalos definidos.

5.1 Massa-mola Amortecedor Não-linear (MMA)

O seguinte cenário é proposto para a análise dos filtros adaptativos: o sistema massa-mola amortecedor não-linear (MMA) é inicializado em posição não-nula, e por ser estável, tende ao

estado estacionário. Além disso, é utilizado um controle em malha fechada para otimizar sua dinâmica e auxiliar sua aproximação ao estado estacionário.

Um modelo MMA [85] é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_1^3 - cx_2 + u \\ z = x_1 \end{cases}, \quad (5.1)$$

em que x_1 e x_2 são posição e velocidade, respectivamente, de um corpo de massa m . A massa é fixada pelo amortecedor com parâmetro de amortecimento c e uma mola não-linear com parâmetros k_1 e k_2 [8]. A entrada de força externa e a medição de posição são u e z , respectivamente. Discretizando (5.1) e adicionando variáveis aleatórias com média zero e independentes entre si, o modelo se torna estocástico, como em (2.17) e (2.18):

$$\begin{cases} x_1(k) = x_1(k-1) + Tx_2(k-1) \\ x_2(k) = x_2(k-1) + T\left(-\frac{k_1}{m}x_1(k-1) - \frac{k_2}{m}x_1^3(k-1) - \frac{c}{m}x_2(k-1) + \frac{1}{m}u(k-1) + \frac{1}{m}\omega(k-1)\right) \\ z(k) = x_1(k) + v(k), \end{cases} \quad (5.2)$$

em que T é o período de amostragem e k é a iteração. Assim,

$$\mathbf{R}(k) = r^2(k) \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2(k) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Os parâmetros constantes do modelo utilizados nas simulações estão na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros de simulações do sistema massa-mola amortecedor não-linear

Parâmetros	Valores
Massa (m)	2 [kg]
Constante de mola 1 (k_1)	3 [kg/s ²]
Constante de mola 2 (k_2)	1 [kg/s ²]
Coefficiente de amortecimento (c)	1 [kg/s]
Período de amostragem (T)	0,01 [s]
Condição inicial de posição	2 [m]
Condição inicial de velocidade	0 [m/s]
Desvio padrão de incerteza de medição ideal (r_{id})	10 ⁻²
Desvio padrão de incerteza de processo ideal (q_{id})	10 ⁻²
Condição inicial de posição dos filtros	2 [m]
Condição inicial de velocidade dos filtros	0 [m/s]
Covariância inicial do estado (\mathbf{P}_0)	100* \mathbf{I}
α (coef. de peso MME de adap. por covariância de medições)	0,8
α (coef. de peso MME de adap. por covariância de termos de inovação)	0,95
λ (UKF)	1

5.1.1 Malha Aberta

Em malha aberta, os filtros para estimar estados foram implementados em modelo estocástico discretizado (5.2), em que $u(k) = 0$ para todo k . Foi gerado um par de vetores contantes de incerteza gaussiana branca, $w(k)$ e $v(k)$, e utilizado em todas as simulações desta seção. Os desvios padrão q_{id} e r_{id} constantes são usados na geração do par de vetores, em que sequencialmente $q(k) = q_{id}$ e $r(k) = r_{id}$ para todo $k > 0$. E, para as adaptações propostas neste sistema, $q_e(k)$ (estimativas de $q(k)$) assumem seus valores absolutos para $q_e(k) < 0$ [18].

5.1.1.1 Análise dos filtros

As seguintes simulações foram realizadas:

- Estados totalmente conhecidos (ETC);
- Estados estimados por EKF com $q(k) = q_{id}$ (EKF1);
- Estados estimados por EKF com $q(k) = 100q_{id}$ (EKF2);
- Estados estimados por EKF com $q(k) = 0,01q_{id}$ (EKF3);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q(0) = q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP1);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP2);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP3);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE1);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE2);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE3);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP1);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP2);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AEKFMMEiLYAP3);

- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de termo de inovação com $q_e(0) = q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE1);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE2);
- Estados estimados por AEKF baseado em MME por covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando solução de sistema de equações(AEKFMMEiSE3);
- Estados estimados por UKF com $q(k) = q_{id}$ (UKF1);
- Estados estimados por UKF com $q(k) = 100q_{id}$ (UKF2);
- Estados estimados por UKF com $q(k) = 0,01q_{id}$ (UKF3);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEmedLYAP1);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEmedLYAP2);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME por covariância de medição com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEmedLYAP3);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEiLYAP1);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 100q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEiLYAP2);
- Estados estimados por AUKF baseado em MME pela covariância de termo de inovação com $q_e(0) = 0,01q_{id}$ utilizando função de Lyapunov (AUKFMMEiLYAP3);

Através das simulações realizadas em MATLAB[®], a utilização da função *solve*, para abordagem por sistemas de equações, obteve menor eficiência do que utilizando a função *dlyap*, para abordagem por equações discretas de Lyapunov. Além do elevado tempo de simulação, a abordagem por sistemas de equações obteve um desempenho inferior (tabela 5.2). Logo, é utilizada ao longo do trabalho a abordagem por equações discretas de Lyapunov.

Neste sistema e configuração, as adaptações com covariância de medições apresentou melhor desempenho comparado com as adaptações com covariância de termos de inovação, visto nos índices realizados no estado estacionário com q_{id} constante.

Tabela 5.2: Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de $x_2(k)$ na segunda metade de simulações

Filtros	RMSE de $x_2(k)$	MAE de $x_2(k)$	Tempo de simulação [s]
ETC	$6,3892 \cdot 10^{-4}$	$5,0537 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$
EKF1	$2,5112 \cdot 10^{-4}$	$2,0979 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$
EKF2	$9,1278 \cdot 10^{-3}$	$7,2806 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$
EKF3	$1,4589 \cdot 10^{-5}$	$7,5430 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmLYAP1	$1,8611 \cdot 10^{-3}$	$1,4316 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmLYAP2	$1,8611 \cdot 10^{-3}$	$1,4316 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmLYAP3	$1,8611 \cdot 10^{-3}$	$1,4316 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmSE1	$1,1855 \cdot 10^{-1}$	$1,9254 \cdot 10^{-2}$	$1,123 \cdot 10^3$
AEKFMMEmSE2	$1,1855 \cdot 10^{-1}$	$1,9254 \cdot 10^{-2}$	$1,123 \cdot 10^3$
AEKFMMEmSE3	$1,1855 \cdot 10^{-1}$	$1,9254 \cdot 10^{-2}$	$1,123 \cdot 10^3$
AEKFMMEmiLYAP1	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	1,52
AEKFMMEmiLYAP2	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	1,52
AEKFMMEmiLYAP3	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	1,52
AEKFMMEmiSE1	$1,2657 \cdot 10^{-2}$	$7,8011 \cdot 10^{-3}$	$1,285 \cdot 10^3$
AEKFMMEmiSE2	$1,2657 \cdot 10^{-2}$	$7,8011 \cdot 10^{-3}$	$1,285 \cdot 10^3$
AEKFMMEmiSE3	$1,2657 \cdot 10^{-2}$	$7,8011 \cdot 10^{-3}$	$1,285 \cdot 10^3$
UKF1	$2,5147 \cdot 10^{-4}$	$2,0957 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$
UKF2	$9,05513 \cdot 10^{-3}$	$7,2226 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$
UKF3	$1,0293 \cdot 10^{-6}$	$5,1161 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEEmLYAP1	$2,1201 \cdot 10^{-3}$	$1,6394 \cdot 10^{-3}$	1,24
AUKFMMEEmLYAP2	$2,1201 \cdot 10^{-3}$	$1,6394 \cdot 10^{-3}$	1,24
AUKFMMEEmLYAP3	$2,1201 \cdot 10^{-3}$	$1,6394 \cdot 10^{-3}$	1,24
AUKFMMEEmiLYAP1	$2,62 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	1,9
AUKFMMEEmiLYAP2	$2,62 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	1,9
AUKFMMEEmiLYAP3	$2,62 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	1,9

5.1.1.2 Comparação entre adaptações

Afim de comparar os métodos de adaptação, as seguintes simulações foram realizadas:

- EKF com adaptação de Myers and Tapley (AEKFMT);
- EKF com adaptação de Maybeck (AEKFMB);
- AEKFMMEmLYAP1;
- AEKFMMEmiLYAP1;
- AUKFMMEEmLYAP1.
- AUKFMMEEmiLYAP1.

Neste sistema em específico, não é possível a implementação das adaptações de \mathbf{Q}_k pelo método ML. Pois o termo $\mathbf{C}_k \mathbf{Q}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{C}_k^T$ da equação (3.33) assume valor zero. Para contornar tal situação, a medição deveria ser de velocidade, isto é, o método possui restrição nas medições a serem realizadas.

Utilizam-se variações de grau na geração de incertezas, através dos desvios padrão:

$$q(k) = \begin{cases} 0,01 & \text{se } t_s < (1/3)100\text{s} \\ 1 & \text{se } (1/3)100\text{s} < t_s < (2/3)100\text{s} \\ 0,01 & \text{se } t_s > (2/3)100\text{s} \end{cases}$$

As adaptações, dado \mathbf{Q}_k variável, são apresentadas na figura 5.1. Já as tabelas 5.3 e 5.4 demonstram quantitativamente os desempenhos obtidos no segundo terço e no terceiro terço das simulações, respectivamente.

Tabela 5.3: Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de q_k no segundo terço de simulações

Adaptações	Média de $q_e(k)$	RMSE de $q_e(k)$	MAE de $q_e(k)$
AEKFMT	0,4309	0,7106	0,6276
AEKFMB	0,3022	0,7301	0,6979
AEKFMME _m LYAP1	0,8530	1,2404	0,8840
AEKFMME _i LYAP1	2,5003	4,0378	2,0769
AUKFMME _m LYAP1	1,2161	1,7699	1,1083
AUKFMME _i LYAP1	38,1566	75,3467	37,3105

Tabela 5.4: Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha aberta - desempenho de estimativas de q_k no terceiro terço de simulações

Adaptações	Média de $q_e(k)$	RMSE de $q_e(k)$	MAE de $q_e(k)$
AEKFMT	0,0794	0,0786	0,0694
AEKFMB	0,1273	0,1293	0,1174
AEKFMME _m LYAP1	0,0953	0,2606	0,0876
AEKFMME _i LYAP1	4,1798	6,8229	4,1710
AUKFMME _m LYAP1	0,1369	0,3775	0,1286
AUKFMME _i LYAP1	74,857	150,4035	74,8694

Para a obtenção dos resultados do AEKFMT e AEKFMB, foi necessário a realização de distintas simulações para encontrar o melhor tamanho de janela, $m = 50$, para ambos, nos quais convertam para os valores aproximados de \mathbf{Q}_k . Isto é, variando o tamanho de janela tem-se uma grande variação em relação à convergência e ao rastreamento do AEKFMT e AEKFMB.

As adaptações baseadas na média móvel exponencial utilizando os termos de medição apresentam bom desempenho de convergência e rastreamento. Embora a média, RMSE, e MAE são melhores com o AEKFMT e AEKFMB no terceiro terço (tabelas 5.3 e 5.4), o desempenho das

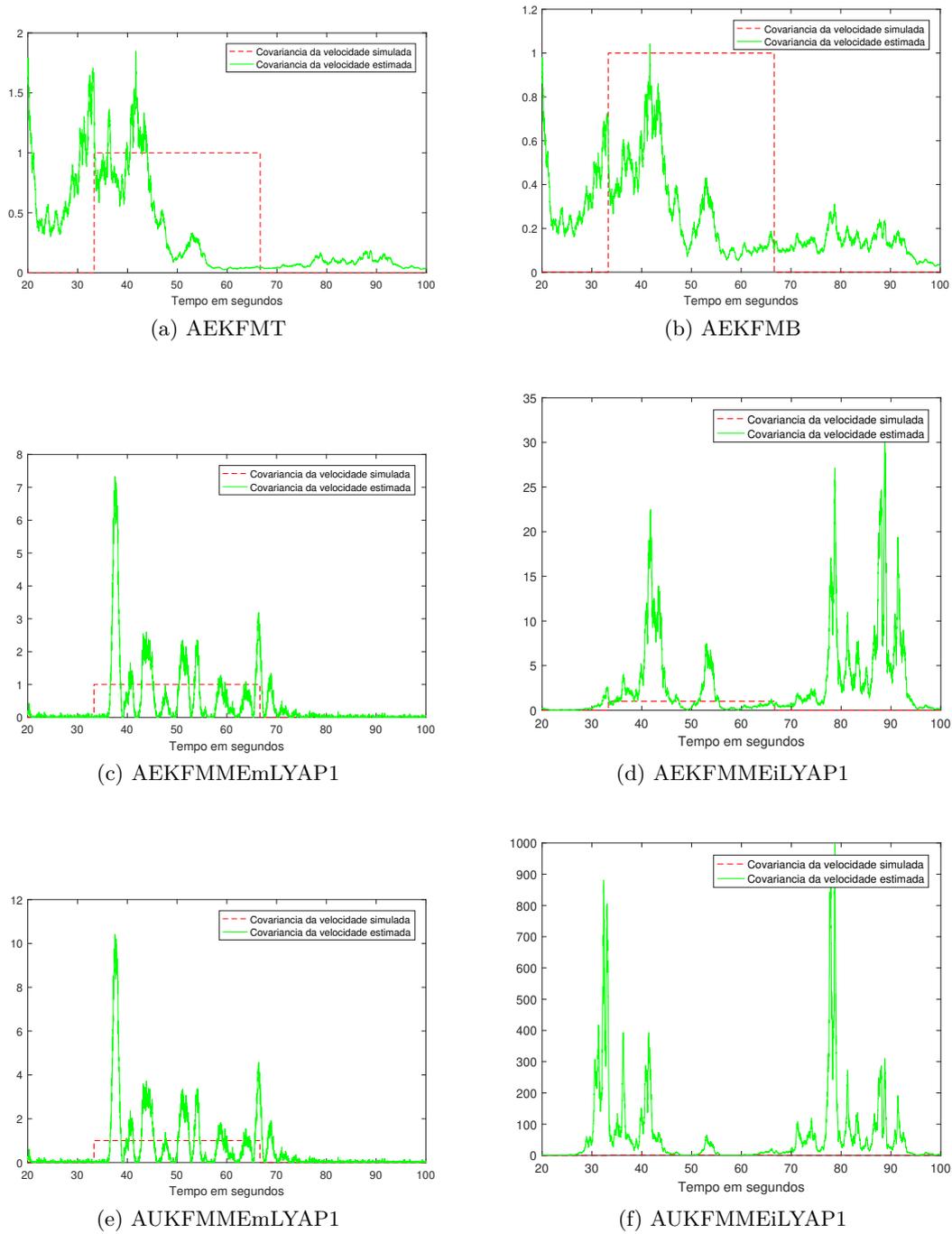


Figura 5.1: Simulações de sistema massa-mola amortecedor não-linear com variação em $q(k)$

adaptações propostas é melhor visualizado na figura 5.1.

Já as adaptações baseadas na média móvel exponencial utilizando os termos de inovação se mostraram muito reativas e não apresentaram boa convergência e rastreabilidade. Os seus resultados demonstraram inferioridade nesta configuração em malha aberta.

5.1.2 Malha Fechada

Em projetos de controle de sistemas dinâmicos, todos os estados não são sempre disponíveis por medição e, há ainda, estados que não representam nenhuma grandeza física. Em grande parte dos problemas de controle em malha fechada é necessário a utilização de estimadores para a obtenção de estados desconhecidos. Uma estratégia de controle que pode ser utilizada no sistema MMA é baseada na realimentação completa de estado estimados:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_c \hat{\mathbf{x}}_k, \quad (5.4)$$

em que \mathbf{K}_c é a matriz de ganho de controle. Esta pode ser obtida por Regulador Linear Quadrático (LQR) [2, 86].

Assim, para determinar \mathbf{K}_c constante, utilizou-se a simulação ETC. Desta maneira, foi observado bom desempenho para

$$\mathbf{K}_c = [0, 0333 \ 0, 4605],$$

obtida por

$$\mathbf{A}_c = [0 \ 1; -(k_1/m) - 3(k_2/m)x_1(0)^2 \ - (c/m)],$$

$$\mathbf{B}_c = [0; 1/m],$$

$$\mathbf{Q}_c = \text{diag}[1 \ 1],$$

$$\mathbf{R}_c = [1].$$

5.1.2.1 Análise dos filtros

AEKFMT1, AEKFMT2, e AEKFMT3 são simulações do EKF com a adaptação de Myers e Tapley com $m = 50$ e $q_e(0) = q_{id}$, $q_e(0) = 100q_{id}$, e $q_e(0) = 0,01q_{id}$, respectivamente. Já AEKFMB1, AEKFMB2, e AEKFMB3 são simulações do EKF com a adaptação de Maybeck com $m = 50$ e $q_e(0) = q_{id}$, $q_e(0) = 100q_{id}$, e $q_e(0) = 0,01q_{id}$, respectivamente.

Para cada simulação mencionada, a partir da metade dos períodos de simulação em que o sistema já se encontra em estado estacionário, os índices de desempenho ISE, IAE, e ITAE foram calculados para os estados não medidos $x_2(k)$, além do TVC. Adicionalmente, foram calculados a média, RMSE, e MAE de $q_e(k)$ (tabela 5.5).

Assim, o AEKFMMEm apresentou o melhor resultado de adaptação para o MMA e, adicionalmente, para os três diferentes cenários, os mesmos valores dos índices foram obtidos demonstrando a consistência da convergência.

Além disso, nota-se melhor desempenho de adaptação baseadas na média móvel exponencial utilizando os termos de inovação em malha fechada comparado a malha aberta.

Tabela 5.5: Sistema massa-mola amortecedor não-linear em malha fechada - desempenho de estimativas de $x_2(k)$ e estimativas de $q(k)$ na segunda metade das simulações

Filtros	ISE de $x_2(k)$	IAE de $x_2(k)$	ITAE de $x_2(k)$	TVC de $u(k)$	média de $q_e(k)$	RMSE de $q_e(k)$	MAE de $q_e(k)$	Tempo de simulação [s]
ETC	$6,80 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$4,05 \cdot 10^{-1}$	$4,69 \cdot 10^{-4}$	-	-	-	$2,2 \cdot 10^{-2}$
EKF1	$9,78 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-1}$	$2,89 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	-	-	$1,26 \cdot 10^{-1}$
EKF2	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,81 \cdot 10^{-1}$	6,84	$4,1 \cdot 10^{-2}$	1	-	-	$1,26 \cdot 10^{-1}$
EKF3	$7,44 \cdot 10^{-8}$	$6,14 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$4,12 \cdot 10^{-6}$	10^{-4}	-	-	$1,26 \cdot 10^{-1}$
AEKFMT1	$3,32 \cdot 10^{-4}$	$7,21 \cdot 10^{-2}$	2,65	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$1,78 \cdot 10^{-1}$	$1,44 \cdot 10^{-1}$	1,80
AEKFMT2	$3,32 \cdot 10^{-4}$	$7,21 \cdot 10^{-2}$	2,65	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$1,78 \cdot 10^{-1}$	$1,44 \cdot 10^{-1}$	1,80
AEKFMT3	$3,32 \cdot 10^{-4}$	$7,21 \cdot 10^{-2}$	2,65	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$1,78 \cdot 10^{-1}$	$1,44 \cdot 10^{-1}$	1,80
AEKFMB1	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$4,77 \cdot 10^{-2}$	1,76	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-2}$	$6,38 \cdot 10^{-2}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	1,42
AEKFMB2	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$4,77 \cdot 10^{-2}$	1,76	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$5,95 \cdot 10^{-2}$	$6,38 \cdot 10^{-2}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	1,42
AEKFMB3	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$4,77 \cdot 10^{-2}$	1,76	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-2}$	$6,38 \cdot 10^{-2}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	1,42
AEKFMMEmLYAP1	$7,61 \cdot 10^{-5}$	$3,38 \cdot 10^{-2}$	1,31	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,14 \cdot 10^{-2}$	$2,11 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$7,65 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmLYAP2	$7,61 \cdot 10^{-5}$	$3,38 \cdot 10^{-2}$	1,31	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,14 \cdot 10^{-2}$	$2,11 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$7,65 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmLYAP3	$7,61 \cdot 10^{-5}$	$3,38 \cdot 10^{-2}$	1,31	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,14 \cdot 10^{-2}$	$2,11 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$7,65 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEmiLYAP1	$1,83 \cdot 10^{-4}$	$4,87 \cdot 10^{-2}$	1,91	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$	$5,09 \cdot 10^{-2}$	1,32
AEKFMMEmiLYAP2	$1,83 \cdot 10^{-4}$	$4,87 \cdot 10^{-2}$	1,91	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$	$5,09 \cdot 10^{-2}$	1,32
AEKFMMEmiLYAP3	$1,83 \cdot 10^{-4}$	$4,87 \cdot 10^{-2}$	1,91	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$	$5,09 \cdot 10^{-2}$	1,32
UKF1	$9,85 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$1,64 \cdot 10^{-1}$	$2,77 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	-	-	$3,35 \cdot 10^{-1}$
UKF2	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,80 \cdot 10^{-1}$	6,79	$4,07 \cdot 10^{-2}$	1	-	-	$3,35 \cdot 10^{-1}$
UKF3	$7,40 \cdot 10^{-8}$	$6,13 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$4,11 \cdot 10^{-6}$	10^{-4}	-	-	$3,35 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEmLYAP1	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$3,93 \cdot 10^{-2}$	1,53	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-2}$	$3,27 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-2}$	1,10
AUKFMMEmLYAP2	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$3,93 \cdot 10^{-2}$	1,53	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-2}$	$3,27 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-2}$	1,10
AUKFMMEmLYAP3	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$3,93 \cdot 10^{-2}$	1,53	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-2}$	$3,27 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-2}$	1,10
AUKFMMEmiLYAP1	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	6,94	$4,39 \cdot 10^{-2}$	1,53	2,84	1,52	1,67
AUKFMMEmiLYAP2	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	6,94	$4,39 \cdot 10^{-2}$	1,53	2,84	1,52	1,67
AUKFMMEmiLYAP3	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	6,94	$4,39 \cdot 10^{-2}$	1,53	2,84	1,52	1,67

5.2 Bola e Barra (BB)

O sistema bola e barra (BB) é amplamente utilizado como plataforma de validação em projeto de controle não-linear. Ele possui simples modelagem, termos altamente não-lineares e é um sistema instável.

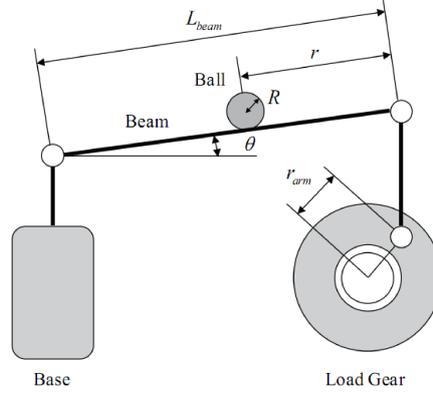


Figura 5.2: Esquemático do sistema bola e barra
Fonte: Filho, J.O.A.L. e Fortaleza, E.L.F. (2014)

Um modelo matemático que representa o sistema bola e barra [87] é

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{mr_{arm}gR^2}{L_{beam}(mR^2 + J_b)} \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{\tau_m}\dot{\theta} + \frac{K_1}{\tau_m}V_m \end{cases}, \quad (5.5)$$

em que r e θ são a posição da bola e o ângulo da barra, respectivamente. Também, τ_m é a constante de tempo, K_1 é o ganho estacionário, L_{beam} é o comprimento da barra, m e J_b são a massa e o momento de inércia da bola, respectivamente. Além disso, R é o raio da bola, g é a aceleração da gravidade, r_{arm} é o comprimento do braço motor. A entrada do sistema é dado pela tensão do motor V_m .

Definindo $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$, (5.5) pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = K_{bb} \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \beta_1 x_4 + \beta_2 V_m \end{cases}, \quad (5.6)$$

em que

$$\beta_1 = -\frac{1}{\tau_m}, \quad \beta_2 = \frac{K_1}{\tau_m}, \quad K_{bb} = \frac{mr_{arm}gR_{ball}^2}{L_{beam}(mR_{ball}^2 + J_b)}. \quad (5.7)$$

Para a realização das simulações, o modelo em (5.6) é discretizado e são incorporadas incertezas de medição e de processo (a incerteza de processo é modelada como incerteza de entrada do

sistema):

$$\begin{cases} x_{1(k+1)} = x_{1(k)} + T x_{2(k)} \\ x_{2(k+1)} = x_{2(k)} + T K_{bb} \sin(x_{3(k)}) \\ x_{3(k+1)} = x_{3(k)} + T x_{4(k)} \\ x_{4(k+1)} = x_{4(k)} + T(\beta_1 x_{4(k)} + \beta_2(V_{m(k)} + \omega_{(k)})) \\ y_{(k+1)} = x_{1(k+1)} + v_{(k+1)} \end{cases} \quad (5.8)$$

Os parâmetros e constantes utilizadas nas simulações estão na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Parâmetros de simulações do sistema bola e barra

Parâmetros	Valores
Massa da bola (m)	0,064 [kg]
Momento de inércia da bola J_b	4,129 10^6 [kg.m ²]
Raio da bola R	0,0127 [m]
Comprimento da barra (L_{beam})	0,4255 [m]
Comprimento do braço motor r_{arm}	0,0254 [m]
τ_m é constante de tempo	0,0248 [s]
K_1 é ganho estacionário	1,5286 [rad/(V.s)]
Aceleração da gravidade g	9,8 [m/s ²]
Período de amostragem (T)	0,01 [s]
Desvio padrão de incerteza de medição ideal (r_{id})	10^{-3}
Desvio padrão de incerteza de processo ideal (q_{id})	10^{-3}
Condição inicial do estado	[0, 0, 0, 0]
Condição inicial do estado nos filtros	[0, 0, 0, 0]
Covariância inicial do estado (\mathbf{P}_0)	0,0001* \mathbf{I}
α (coef. de peso MME de adap. por covariância de medição)	0,8
λ (UKF)	1

Com o tempo de simulação $t_s = 10$ s e, dado o valor de referência da posição da bola 0,05 m ($\mathbf{x}_{ref} = [0,05; 0; 0; 0]$), o controle baseado na realimentação completa de estado da equação (5.9) é realizado para o estado alcançar a referência:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_c(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_{ref}). \quad (5.9)$$

Através do Regulador Linear Quadrático (LQR), \mathbf{K}_c constante é determinada, na qual observa-se um bom desempenho para

$$\mathbf{K}_c = [1 \ 0,7399 \ 6,8247 \ 0,6301],$$

obtido com

$$\mathbf{A}_c = [0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ K_{bb} \cos(\hat{x}_3(0)) \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0 \ b_1],$$

$$\mathbf{B}_c = [0; 0; 0; b_2],$$

$$\mathbf{Q}_c = \text{diag}[1 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$\mathbf{R}_c = [1].$$

Por ser um sistema instável em malha aberta, a solução da equação discreta de Lyapunov não é alcançada, sendo os autovalores de \mathbf{A}_{k-1} não dentro do círculo unitário. Entretanto, a implementação da adaptação proposta através das medições é possível utilizando o sistema aumentado.

Das equações (2.20), (2.29), e (5.9),

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \hat{\mathbf{B}}_{k-1}[-\mathbf{K}_c(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{x}_{ref})] + \hat{\mathbf{W}}_{k-1}\boldsymbol{\omega}_{k-1}, \quad (5.10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \hat{\mathbf{B}}_{k-1}[-\mathbf{K}_c(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{x}_{ref})] + \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}[\mathbf{z}_{k-1} - \hat{\mathbf{C}}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]. \quad (5.11)$$

Utilizando (2.21), tem-se o sistema aumentado

$$\mathbf{X}_k = \hat{\mathbf{\Lambda}}_{k-1}\mathbf{X}_{k-1} + \hat{\mathbf{W}}_{aug\ k-1}\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \hat{\mathbf{V}}_{aug\ k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \hat{\mathbf{\Omega}}_{k-1}\mathbf{x}_{ref}, \quad (5.12)$$

em que $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k]$, $\hat{\mathbf{W}}_{aug\ k-1} = [\hat{\mathbf{W}}_{k-1}; \mathbf{0}_{n \times n_w}]$, $\hat{\mathbf{V}}_{aug\ k-1} = [\mathbf{0}_{n \times p}; \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}\hat{\mathbf{V}}_{k-1}]$, $\hat{\mathbf{\Omega}}_{k-1} = [\hat{\mathbf{B}}_{k-1}\mathbf{K}_c; \hat{\mathbf{B}}_{k-1}\mathbf{K}_c]$, e

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{k-1} & -\hat{\mathbf{B}}_{k-1}\mathbf{K}_c \\ \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}\hat{\mathbf{C}}_{k-1} & \hat{\mathbf{A}}_{k-1} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1}\mathbf{K}_c - \hat{\mathbf{A}}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1}\hat{\mathbf{C}}_{k-1} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{z}_k = \hat{\mathbf{C}}_{aug\ k}\mathbf{X}_k + \hat{\mathbf{V}}_{k-1}\mathbf{v}_k, \quad (5.13)$$

em que $\hat{\mathbf{C}}_{aug\ k-1} = [\hat{\mathbf{C}}_{k-1}\mathbf{0}_{p \times n}]$.

Aplicando-se a operação de covariância em (5.12) e (5.13), sendo $\text{cov}(\mathbf{x}_{ref}) = 0$, tem-se

$$\text{cov}(\mathbf{X}_k) = \hat{\mathbf{\Lambda}}_{k-1}\text{cov}(\mathbf{X}_{k-1})\hat{\mathbf{\Lambda}}_{k-1}^T + \hat{\mathbf{W}}_{aug\ k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\hat{\mathbf{W}}_{aug\ k-1}^T + \hat{\mathbf{V}}_{aug\ k-1}\mathbf{R}_{k-1}\hat{\mathbf{V}}_{aug\ k-1}^T, \quad (5.14)$$

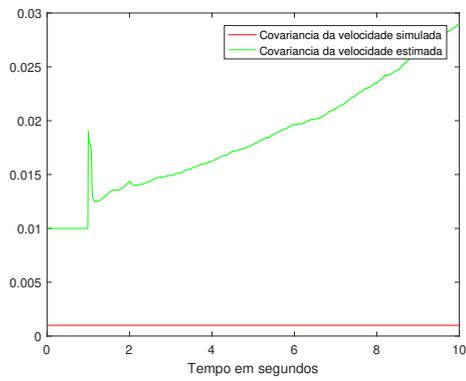
$$\text{cov}(\mathbf{z}_k) = \hat{\mathbf{C}}_{aug\ k}\text{cov}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{C}}_{aug\ k}^T + \mathbf{V}_k\mathbf{R}_k\mathbf{V}_k^T. \quad (5.15)$$

As equações obtidas são equivalentes a (4.2) e (4.3), assim sendo possível a aplicação da adaptação proposta, pois $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{k-1}$ é estável, isto é, seus autovalores se encontram dentro do círculo unitário.

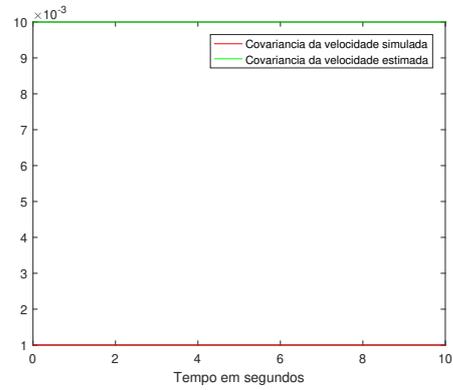
Os índices de desempenho foram calculados para estados estimados e estimativas de $q(k)$ (tabela 5.7 e 5.8). Para as adaptações propostas foi utilizada a abordagem de Groutage [88], em que se $q_e(k) < 10^{-6}$, seu valor assume o valor de $q_e(k-1)$.

Nos resultados obtidos, o AEKFMT apresenta uma constante e lenta divergência nas estimativas de $q_e(k)$ com tamanho de janela $m = 100$. Já no AEKFMB, as estimativas de $q_e(k)$ mantêm-se praticamente constantes ao valor inicial (figura 5.3) com tamanho de janela $m = 100$. Não foi possível a implementação do AEKFML, pois novamente o termo $\mathbf{C}_k\mathbf{Q}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{C}_k^T$ da equa-

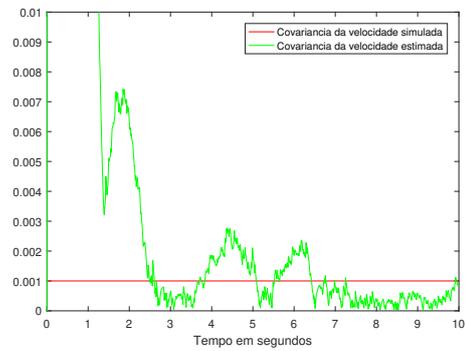
ção (3.33) obtém valor zero. Enfim, utilizando as adaptações propostas, tanto AEKFMMEm, quanto AUKFMMEEm, realizadas através do sistema aumentado, apresentaram boa convergência e rastreabilidade, embora foi observado grande valores no período de transição.



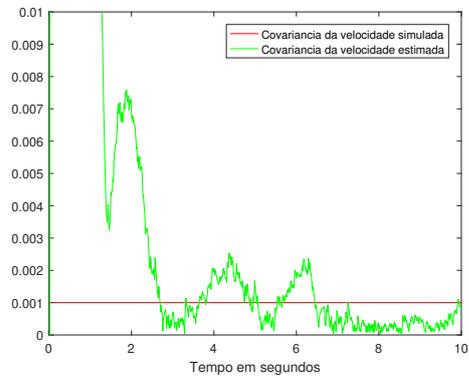
(a) Estimativas de $q(k)$ com AEKFMT2



(b) Estimativas de $q(k)$ com AEKFMB2



(c) Estimativas de $q(k)$ com AEKFMMEm2



(d) Estimativas de $q(k)$ com AUKFMMEEm2

Figura 5.3: Sistema bola e barra: estimativas de q

Tabela 5.7: Sistema bola e barra em malha fechada - desempenho de estimativas de $x_2(k)$, $x_3(k)$, e $x_4(k)$, e de sinal de controle $V_m(k)$

Filtros	ISE de $x_2(k)$	IAE de $x_2(k)$	ITAE de $x_2(k)$	ISE de $x_3(k)$	IAE de $x_3(k)$	ITAE de $x_3(k)$	ISE de $x_4(k)$	IAE de $x_4(k)$	ITAE de $x_4(k)$	TVC de $V_m(k)$
ETC	$1,23 \cdot 10^{-7}$	$6,09 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$2,14 \cdot 10^{-9}$	$8,21 \cdot 10^{-5}$	$6,41 \cdot 10^{-4}$	$1,99 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
EKF1	$2,73 \cdot 10^{-5}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$6,17 \cdot 10^{-2}$	$3,18 \cdot 10^{-7}$	$9,81 \cdot 10^{-4}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$6,66 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$3,33 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
EKF2	$6,38 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$1,05 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$6,25 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$
EKF3	$2,94 \cdot 10^{-5}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$7,22 \cdot 10^{-2}$	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$9,76 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$	$3,47 \cdot 10^{-4}$
AEKFMT1	$9,99 \cdot 10^{-5}$	$1,78 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-1}$	$3,42 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,59 \cdot 10^{-2}$	$2,07 \cdot 10^{-4}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$2,19 \cdot 10^{-2}$
AEKFMT2	$1,13 \cdot 10^{-5}$	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$1,41 \cdot 10^{-1}$	$4,61 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$3,01 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^{-4}$	$3,06 \cdot 10^{-2}$	$2,33 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$
AEKFMT3	$9,97 \cdot 10^{-5}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-1}$	$3,40 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$2,18 \cdot 10^{-2}$
AEKFMB1	$4,49 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$8,28 \cdot 10^{-2}$	$5,40 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$
AEKFMB2	$6,2 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$6,22 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$
AEKFMB3	$4,48 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$8,27 \cdot 10^{-2}$	$5,39 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$3,03 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm1	$3,09 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-2}$	$3,41 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$8,04 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm2	$3,09 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-2}$	$3,41 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$8,04 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm3	$3,09 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-2}$	$3,41 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$8,04 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
UKF1	$2,57 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$5,88 \cdot 10^{-2}$	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$9,37 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$6,68 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
UKF2	$3,73 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$7,38 \cdot 10^{-2}$	$4,04 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$1,97 \cdot 10^{-5}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$5,69 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$
UKF3	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$6,68 \cdot 10^{-2}$	$3,51 \cdot 10^{-7}$	$9,65 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$3,14 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^{-2}$	$7,04 \cdot 10^{-4}$
AUKFMMEm1	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$5,11 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-7}$	$8,98 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$6,97 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm2	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$5,11 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-7}$	$8,98 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$6,97 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm3	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$5,11 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-7}$	$8,98 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$6,97 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$

Tabela 5.8: Sistema bola e barra malha em fechada - desempenho de estimativas de $q(k)$

Filtros	média de $q_e(k)$	RMSE de $q_e(k)$	MAE de $q_e(k)$	Tempo de simulação [s]
EKF1	10^{-3}	0	0	$8,0 \cdot 10^{-2}$
EKF2	10^{-2}	0	0	$8,0 \cdot 10^{-2}$
EKF3	10^{-4}	0	0	$8,0 \cdot 10^{-2}$
AEKFMT1	$1,76 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-2}$	$7,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMT2	$2,28 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,18 \cdot 10^{-2}$	$7,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMT3	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$7,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMB1	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$3,29 \cdot 10^{-12}$	$3,29 \cdot 10^{-12}$	$6,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMB2	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$6,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMB3	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$9,01 \cdot 10^{-4}$	$9,02 \cdot 10^{-4}$	$6,20 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm1	$6,84 \cdot 10^{-4}$	$6,36 \cdot 10^{-4}$	$5,78 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm2	$6,84 \cdot 10^{-4}$	$6,36 \cdot 10^{-4}$	$5,78 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm3	$6,84 \cdot 10^{-4}$	$6,36 \cdot 10^{-4}$	$5,78 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-1}$
UKF1	10^{-3}	0	0	$1,35 \cdot 10^{-1}$
UKF2	10^{-2}	0	0	$1,35 \cdot 10^{-1}$
UKF3	10^{-4}	0	0	$1,35 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEm1	$6,31 \cdot 10^{-4}$	$6,55 \cdot 10^{-4}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$6,10 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEm2	$6,31 \cdot 10^{-4}$	$6,55 \cdot 10^{-4}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$6,10 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEm3	$6,31 \cdot 10^{-4}$	$6,55 \cdot 10^{-4}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$6,10 \cdot 10^{-1}$

5.3 Quatro Tanques (QT)

O sistema de quatro tanques (QT) é amplamente utilizado como plataforma de validação em projeto de controle não linear, por possuir múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO).

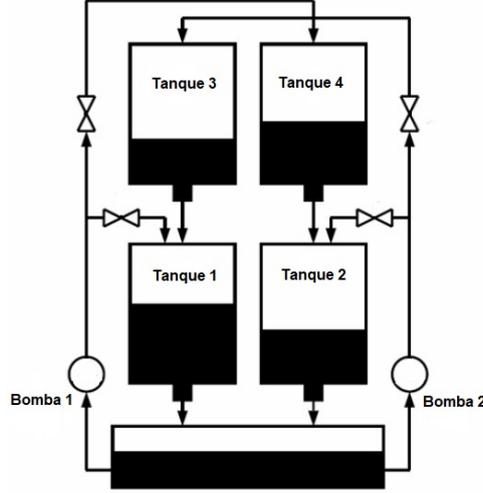


Figura 5.4: Esquemático do sistema de quatro tanques
Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo modelo do sistema QT [89], este apresenta quatro estados, teoricamente quatro incertezas de processo e somente duas medições, isto é, $m < n$. Assim, o seguinte modelo não linear estocástico é construído representando as incertezas nas entradas afim de obter restrições adicionais em \mathbf{Q}_{k-1} pelo conjunto de equações:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = a_3 \sqrt{2gh_3} + \gamma_1 \kappa_1 (u_1 + \omega_1) - a_1 \sqrt{2gh_1} \\ A_2 \dot{h}_2 = a_4 \sqrt{2gh_4} + \gamma_2 \kappa_2 (u_2 + \omega_2) - a_2 \sqrt{2gh_2} \\ A_3 \dot{h}_3 = (1 - \gamma_2) \kappa_2 (u_2 + \omega_2) - a_3 \sqrt{2gh_3} \\ A_4 \dot{h}_4 = (1 - \gamma_1) \kappa_1 (u_1 + \omega_1) - a_4 \sqrt{2gh_4} \end{cases}, \quad (5.16)$$

em que g é a aceleração da gravidade, enquanto que h_i , A_i , e a_i correspondem ao nível de água, a área da secção transversal do tanque, e a área da secção transversal do orifício de saída do tanque i , respectivamente, em que $i = 1, 2, 3, 4$. Os coeficientes de proporcionalidade γ_j , em que $j = 1, 2$, representam a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4 e para os tanques 2 e 3, respectivamente. A constante de fluxo e o sinal de controle aplicado na bomba p são dados por κ_p e u_p , em que $p = 1, 2$.

Assumindo os níveis de água h_1 e h_2 como saídas do sistema, tem-se como medições:

$$\begin{cases} y_1 = h_3 + v_1 \\ y_2 = h_4 + v_2 \end{cases}. \quad (5.17)$$

Nesta modelagem foram incluídas as incertezas nos sinais de controle ω_1 e ω_2 , e as incertezas de medição v_1 e v_2 .

O sistema apresenta a característica de mudança de comportamento a depender da configuração das válvulas, que determinam a razão entre os fluxos. Esta configuração define se o sistema é de fase mínima ou de fase não mínima. Neste trabalho, utilizaremos a configuração de fase não mínima ($0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$).

Para implementar os estimadores, as equações (5.16) e (5.17) são discretizadas:

$$\begin{cases} h_1(k+1) = h_1(k) + T(1/A_1)(a_3\sqrt{2gh_3(k)} + \gamma_1\kappa_1(u_1(k) + \omega_1(k)) - a_1\sqrt{2gh_1(k)}) \\ h_2(k+1) = h_2(k) + T(1/A_2)(a_4\sqrt{2gh_4(k)} + \gamma_2\kappa_2(u_2(k) + \omega_2(k)) - a_2\sqrt{2gh_2(k)}) \\ h_3(k+1) = h_3(k) + T(1/A_3)((1 - \gamma_2)\kappa_2(u_2(k) + \omega_2(k)) - a_3\sqrt{2gh_3(k)}) \\ h_4(k+1) = h_4(k) + T(1/A_4)((1 - \gamma_1)\kappa_1(u_1(k) + \omega_1(k)) - a_4\sqrt{2gh_4(k)}) \end{cases}, \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} y_1(k) = h_3(k) + v_1(k) \\ y_2(k) = h_4(k) + v_2(k) \end{cases}. \quad (5.19)$$

E obtém-se as matrizes em representação de espaço de estado a partir da discretização:

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} 1 - T(1/A_1)a_1\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_1(k)})) & 0 \\ 0 & 1 - T(1/A_2)a_2\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_2(k)})) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} T(1/A_1)a_3\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_3(k)})) & 0 \\ 0 & T(1/A_2)a_4\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_4(k)})) \\ 1 - T(1/A_3)a_3\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_3(k)})) & 0 \\ 0 & 1 - T(1/A_4)a_4\sqrt{2g}(1/(2\sqrt{h_4(k)})) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_k = \hat{\mathbf{W}}_k = \begin{bmatrix} T(1/A_1)\gamma_1\kappa_1 & 0 \\ 0 & T(1/A_2)\gamma_2\kappa_2 \\ 0 & T(1/A_3)(1 - \gamma_2)\kappa_2 \\ T(1/A_4)(1 - \gamma_1)\kappa_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{C}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{V}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Tabela 5.9: Parâmetros de simulação do sistema de quatro tanques

Parâmetros	Valores
$A_1; A_3$	28 [cm] ²
$A_2; A_4$	32 [cm] ²
$a_1; a_3$	0,071 [cm] ²
$a_2; a_4$	0,057 [cm] ²
g	981 [kg/s ²]
$\kappa_1; \kappa_2$	3,14; 3,29 [cm] ² / [V][s]
$\gamma_1; \gamma_2$	0,43; 0,34
$u_1; u_2$	0 < u_1, u_2 < 10 [V]
T	0,1 [s]
$\mathbf{h}(0)$	[1; 1; 1; 1] [cm]
r_{id1}	10 ⁻²
r_{id2}	2 10 ⁻²
q_{id1}	2 10 ⁻¹
q_{id2}	10 ⁻¹

5.3.1 Malha Aberta

As simulações do modelo de quatro tanques em malha aberta são inicializadas no estado não-nulo, $\mathbf{h}_0 = [1; 1; 1; 1]$, com entrada constante, $\mathbf{u}_k = [1; 1; 1; 1]$. Assim, o estado tende ao estado estacionário $\mathbf{h}_{ss} \approx [1,2552; 1,3295; 0,4772; 0,5031]$ sem incertezas do processo e de medição (figura 5.5).

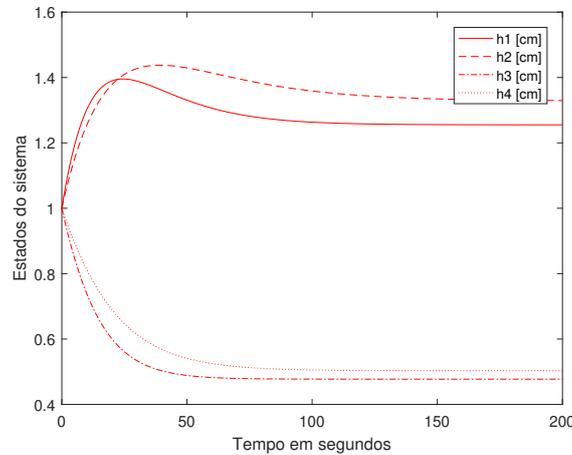


Figura 5.5: Simulação do do sistema de quatro tanques com estados totalmente conhecidos

Nas simulações são incluídas as incertezas de processo e de medições, nas quais os desvios padrão são $q_1(k) = q_{id1}$, $q_2(k) = q_{id2}$, $r_1(k) = r_{id1}$ e $r_2(k) = r_{id2}$, para todo $k > 0$. Sendo uma vez geradas, as mesmas incertezas são utilizadas em todas as simulações da secção.

Foram simulados três cenários distintos para cada método. Os valores iniciais de $q_{e1}(0) = q_{id1}$ e $q_{e2}(0) = q_{id2}$ para denominações 1; $q_{e1}(0) = 10q_{id1}$ e $q_{e2}(0) = 10q_{id2}$ para denominações 2;

e $q_{e_1}(0) = 0,1 q_{id_1}$, e $q_{e_2}(0) = 0,1 q_{id_1}$ para denominações 3. Já a covariância do estado inicial estimado é $\mathbf{P}_0 = 0,1 \mathbf{I}$.

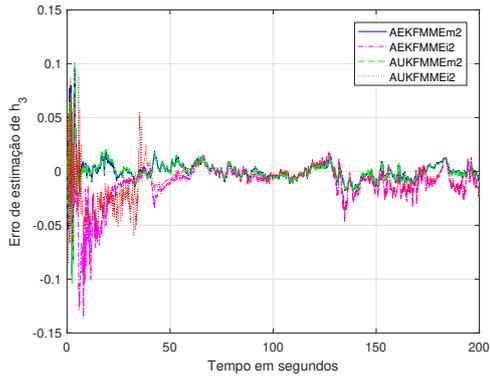
Em AEKFMT1, AEKFMT2, AEKFMT3, AEKFMB1, AEKFMB2, AEKFMB3, AEKFML1, AEKFML2, e AEKFML3 foram utilizados os tamanhos de janela $m = 100$.

Para as adaptações propostas foi utilizada a abordagem de Groutage [88], em que se $q_{e_1}(k)$ ou $q_{e_2}(k) < 10^{-6}$ seus valores assumem os do passo anterior.

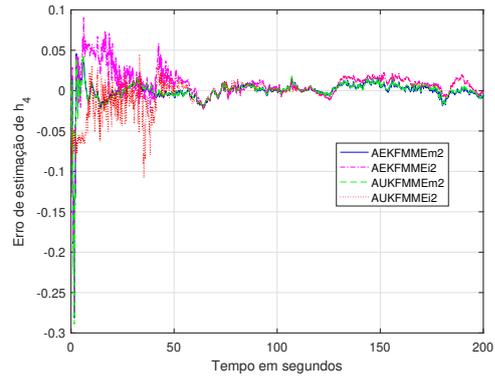
Assim, são obtidos da segunda metade das simulações os índices RMSE e MAE dos estados $h_3(k)$ e $h_4(k)$, com referência aos estados ideais; RMSE e MAE dos termos de inovação $\hat{h}_3(k) - y_3(k)$ e $\hat{h}_4(k) - y_4(k)$; média, RMSE e MAE de $q_{e_1}(k)$ e $q_{e_2}(k)$ com referência à seus valores ideais (tabela 5.10).

Tabela 5.10: Sistema de quatro tanques em malha aberta - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$ e termos de inovação $\nu_3(k)$ e $\nu_4(k)$

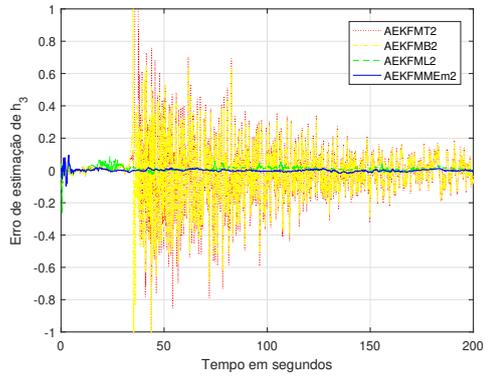
Filtros	RMSE $h_3(k)$	MAE $h_3(k)$	RMSE $h_4(k)$	MAE $h_4(k)$	RMSE $\nu_3(k)$	MAE $\nu_3(k)$	RMSE $\nu_4(k)$	MAE $\nu_4(k)$
ETC	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-
EKF1	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$
EKF2	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$
EKF3	$9,57 \cdot 10^{-4}$	$7,56 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$
AEKFMT1	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-1}$	$1,39 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMT2	$1,08 \cdot 10^{-1}$	$8,29 \cdot 10^{-2}$	$9,51 \cdot 10^{-2}$	$7,37 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$8,26 \cdot 10^{-2}$	$9,42 \cdot 10^{-2}$	$7,31 \cdot 10^{-2}$
AEKFMT3	$1,53 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMB1	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$1,16 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$
AEKFMB2	$9,70 \cdot 10^{-2}$	$7,46 \cdot 10^{-2}$	$8,58 \cdot 10^{-2}$	$6,64 \cdot 10^{-2}$	$9,66 \cdot 10^{-2}$	$7,42 \cdot 10^{-2}$	$8,49 \cdot 10^{-2}$	$6,57 \cdot 10^{-2}$
AEKFMB3	$1,53 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$
AEKFML1	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$1,22 \cdot 10^{-2}$
AEKFML2	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$1,22 \cdot 10^{-2}$
AEKFML3	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$
AEKFMMEm1	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,50 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm2	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,50 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm3	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,50 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMIEi1	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$7,30 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMIEi2	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$6,80 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMIEi3	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$
UKF1	139,76	$1,14 \cdot 10^{-2}$	$9,16 \cdot 10^{-1}$	147,66	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$
UKF2	162,16	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$9,97 \cdot 10^{-1}$	158,09	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$
UKF3	81,40	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$6,13 \cdot 10^{-1}$	101,24	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm1	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm2	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm3	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMIEi1	$1,49 \cdot 10^{-2}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$5,70 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMIEi2	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMIEi3	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$



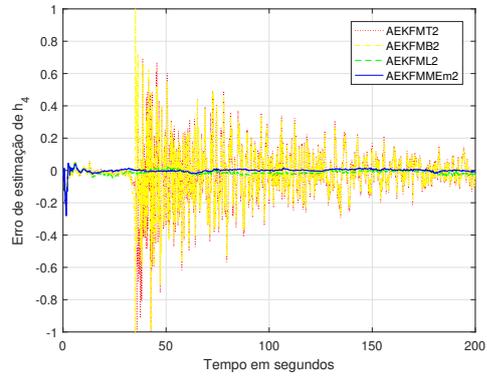
(a) Erros de estimação de $h_3(k)$ com adaptações baseadas em MME



(b) Erros de estimação de $h_4(k)$ com adaptações baseadas em MME



(c) Erros de estimação de $h_3(k)$ com adaptações presentes na literatura

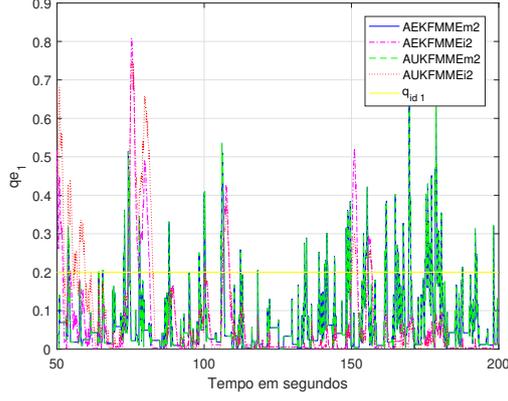


(d) Erros de estimação de $h_4(k)$ com adaptações presentes na literatura

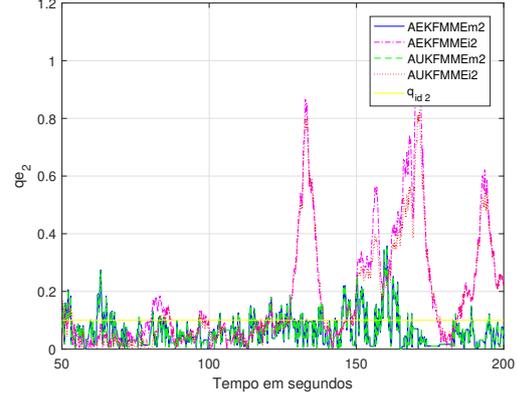
Figura 5.6: Sistema de quatro tanques em malha aberta: erros de estimação h_3 e h_4

Tabela 5.11: Sistema de quatro tanques em malha aberta - desempenho de estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$

Filtros	média de $q_{e1}(k)$	RMSE de $q_{e1}(k)$	MAE de $q_{e1}(k)$	média de $q_{e2}(k)$	RMSE de $q_{e2}(k)$	MAE de $q_{e2}(k)$	Tempo de simulação [s]
EKF1	$2 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1,70 \cdot 10^{-1}$
EKF2	2	0	0	1	0	0	$1,70 \cdot 10^{-1}$
EKF3	$2 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1,70 \cdot 10^{-1}$
AEKFMT1	$4,16 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$9,64 \cdot 10^{-2}$	$9,64 \cdot 10^{-2}$	1,69
AEKFMT2	$6,15 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^{-1}$	$1,39 \cdot 10^{-1}$	$7,95 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$5,99 \cdot 10^{-2}$	1,69
AEKFMT3	$3,78 \cdot 10^{-2}$	$1,65 \cdot 10^{-1}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$9,64 \cdot 10^{-2}$	$9,64 \cdot 10^{-2}$	1,69
AEKFMB1	$3,52 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-1}$	$1,65 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$9,732 \cdot 10^{-2}$	$9,732 \cdot 10^{-2}$	1,41
AEKFMB2	$5,18 \cdot 10^{-2}$	$1,525 \cdot 10^{-1}$	$1,482 \cdot 10^{-1}$	$8,37 \cdot 10^{-2}$	$7,09 \cdot 10^{-2}$	$5,99 \cdot 10^{-2}$	1,41
AEKFMB3	$3,19 \cdot 10^{-2}$	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$9,74 \cdot 10^{-2}$	$9,74 \cdot 10^{-2}$	1,41
AEKFML1	$2,93 \cdot 10^{-1}$	$4,16 \cdot 10^{-1}$	$3,01 \cdot 10^{-1}$	$6,10 \cdot 10^{-1}$	1,43	$6,59 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^4$
AEKFML2	$2,93 \cdot 10^{-1}$	$4,16 \cdot 10^{-1}$	$3,01 \cdot 10^{-1}$	$6,10 \cdot 10^{-1}$	1,43	$6,59 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^4$
AEKFML3	$2,92 \cdot 10^{-1}$	$4,16 \cdot 10^{-1}$	$3,01 \cdot 10^{-1}$	$6,09 \cdot 10^{-1}$	1,43	$6,58 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^4$
AEKFMMEm1	$7,58 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,51 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm2	$7,58 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,51 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm3	$7,58 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,51 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEi1	$4,33 \cdot 10^{-2}$	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$1,74 \cdot 10^{-1}$	$2,43 \cdot 10^{-1}$	$2,68 \cdot 10^{-1}$	$1,82 \cdot 10^{-1}$	1,07
AEKFMMEi2	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$1,74 \cdot 10^{-1}$	$2,46 \cdot 10^{-1}$	$2,72 \cdot 10^{-1}$	$1,81 \cdot 10^{-1}$	1,07
AEKFMMEi3	$4,42 \cdot 10^{-2}$	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$1,74 \cdot 10^{-1}$	$2,43 \cdot 10^{-1}$	$2,65 \cdot 10^{-1}$	$1,78 \cdot 10^{-1}$	1,07
UKF1	$2 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1 \cdot 10^{-1}$	0	0	$3,72 \cdot 10^{-1}$
UKF2	2	0	0	1	0	0	$3,72 \cdot 10^{-1}$
UKF3	$2 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1 \cdot 10^{-2}$	0	0	$3,72 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEm1	$7,56 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,52 \cdot 10^{-2}$	$5,51 \cdot 10^{-2}$	1,07
AUKFMMEm2	$7,56 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,52 \cdot 10^{-2}$	$5,51 \cdot 10^{-2}$	1,07
AUKFMMEm3	$7,56 \cdot 10^{-2}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,52 \cdot 10^{-2}$	$5,51 \cdot 10^{-2}$	1,07
AUKFMMEi1	$4,23 \cdot 10^{-2}$	$1,75 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	$2,28 \cdot 10^{-1}$	$2,39 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,32
AUKFMMEi2	$3,68 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-1}$	$1,71 \cdot 10^{-1}$	$2,24 \cdot 10^{-1}$	$2,26 \cdot 10^{-1}$	$1,57 \cdot 10^{-1}$	1,32
AUKFMMEi3	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$1,74 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	$2,27 \cdot 10^{-1}$	$2,38 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,32



(a) Estimativas de $q_1(k)$ com adaptações baseadas em MME



(b) Estimativas de $q_2(k)$ com adaptações baseadas em MME

Figura 5.7: Sistema de quatro tanques em malha aberta: estimativas de q_1 e q_2

Dentre todas as adaptações implementadas em malha aberta, o AEKFMMEmLYAP apresentou, para os três diferentes cenários, os mesmos valores dos índices com o melhor resultado de adaptação para o QT proposto.

5.3.2 Malha Fechada

O controle LQR obtém melhor desempenho dentre os controles propostos em Altabey [86]. Assim, este foi utilizado para o estado seguir a referência \mathbf{h}_{ss} . A lei de controle baseada na realimentação completa de estado é

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_c \hat{\mathbf{h}}_k + \mathbf{K}_c \mathbf{h}_{ss}, \quad (5.20)$$

em que $\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 21,8683 & 12,4153 & -4,9757 & 7,8147 \\ 10,2751 & 15,8846 & 6,9915 & -7,9983 \end{bmatrix}$ é obtida por

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} (1/A_1)\gamma_1\kappa_1 & 0 \\ 0 & (1/A_2)\gamma_2\kappa_2 \\ 0 & (1/A_3)(1-\gamma_2)\kappa_2 \\ (1/A_4)(1-\gamma_1)\kappa_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_c = \text{diag}[10 \ 10 \ 0 \ 0],$$

$$\mathbf{R}_c = \text{diag}[0, 01 \ 0, 01].$$

Na implementação dos métodos, as adaptações MT e MB divergem em malha fechada.

Tabela 5.12: Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$, e entradas $u_1(k)$ e $u_2(k)$

Filtros	ISE de $h_3(k)$	IAE de $h_3(k)$	ITAE de $h_3(k)$	ISE de $h_4(k)$	IAE de $h_4(k)$	ITAE de $h_4(k)$	TVC de $u_1(k)$	TVC de $u_2(k)$
ETC	$5,64 \cdot 10^{-2}$	2,37	357,34	$5,03 \cdot 10^{-4}$	$1,80 \cdot 10^{-1}$	27,68	2,51	$9,36 \cdot 10^{-1}$
EKF1	$6,19 \cdot 10^{-2}$	2,48	374,80	$7,20 \cdot 10^{-4}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$	34,04	2,31	$6,21 \cdot 10^{-1}$
EKF2	$6,31 \cdot 10^{-2}$	2,46	370,87	$6,90 \cdot 10^{-4}$	$6,66 \cdot 10^{-1}$	100,11	17,78	4,82
EKF3	$6,12 \cdot 10^{-2}$	2,47	373,64	$2,05 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-1}$	19,03	$1,93 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$
AEKFML1	$5,42 \cdot 10^{-2}$	2,26	337,77	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,52 \cdot 10^{-1}$	53,67	4,35	3,55
AEKFML2	$4,81 \cdot 10^{-2}$	2,12	319,18	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$4,15 \cdot 10^{-1}$	62,74	4,36	3,55
AEKFML3	$5,48 \cdot 10^{-2}$	2,27	339,65	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,48 \cdot 10^{-1}$	53,06	4,35	3,55
AEKFMMEm1	$6,45 \cdot 10^{-2}$	2,44	369,78	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^{-1}$	38,96	$2,31 \cdot 10^{-1}$	$6,21 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm2	$6,73 \cdot 10^{-2}$	2,51	378,97	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-1}$	45,34	17,78	4,82
AEKFMMEm3	$6,3 \cdot 10^{-2}$	2,42	366,35	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,53 \cdot 10^{-1}$	96,20	$1,93 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$
AEKFMM Ei1	$6,03 \cdot 10^{-2}$	2,45	371,95	$8,28 \cdot 10^{-4}$	$2,28 \cdot 10^{-1}$	36,22	2,40	1,60
AEKFMM Ei2	$5,67 \cdot 10^{-2}$	2,31	354,04	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$6,84 \cdot 10^{-1}$	102,85	15,83	4,21
AEKFMM Ei3	$5,66 \cdot 10^{-2}$	2,38	358,30	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-1}$	22,19	2,12	1,48
UKF1	$6,09 \cdot 10^{-2}$	2,46	371,95	$6,46 \cdot 10^{-4}$	$2,06 \cdot 10^{-1}$	32,18	2,31	$6,26 \cdot 10^{-1}$
UKF2	$5,46 \cdot 10^{-2}$	2,28	344,91	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$6,70 \cdot 10^{-1}$	100,85	18,29	4,95
UKF3	$6,1 \cdot 10^{-2}$	2,46	373,21	$1,99 \cdot 10^{-4}$	$1,11 \cdot 10^{-1}$	18,67	$1,93 \cdot 10^{-1}$	$7,22 \cdot 10^{-2}$
AUKFMMEm1	$8,14 \cdot 10^{-2}$	2,83	428,41	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,39 \cdot 10^{-1}$	52,83	3,24	5,33
AUKFMMEm2	$7,7 \cdot 10^{-2}$	2,74	415,9	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,96 \cdot 10^{-1}$	47,34	3,26	5,04
AUKFMMEm3	$8,14 \cdot 10^{-2}$	2,83	428,39	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,39 \cdot 10^{-1}$	52,78	3,24	5,33
AUKFMM Ei1	$5,31 \cdot 10^{-2}$	2,23	341,32	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$3,26 \cdot 10^{-1}$	50,94	1,86	3,55
AUKFMM Ei2	$6,09 \cdot 10^{-2}$	2,41	364,61	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,42 \cdot 10^{-1}$	53,46	1,87	3,59
AUKFMM Ei3	$5,24 \cdot 10^{-2}$	2,22	339,24	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$3,30 \cdot 10^{-1}$	51,15	1,83	3,65

Tabela 5.13: Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho na segunda metade das simulações de estimativas de $h_3(k)$ e $h_4(k)$, e entradas $u_1(k)$ e $u_2(k)$

Filtros	RMSE de $h_3(k)$	MAE de $h_3(k)$	RMSE de $h_4(k)$	MAE de $h_4(k)$	cov($u_1(k)$)	cov($u_2(k)$)
ETC	$2,37 \cdot 10^{-2}$	$2,37 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$
EKF1	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$
EKF2	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$
EKF3	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$8,93 \cdot 10^{-5}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$
AEKFML1	$2,33 \cdot 10^{-2}$	$2,26 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$
AEKFML2	$2,19 \cdot 10^{-2}$	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$
AEKFML3	$2,34 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm1	$2,54 \cdot 10^{-2}$	$2,44 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-4}$
AEKFMMEm2	$2,59 \cdot 10^{-2}$	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEm3	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$2,42 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$8,93 \cdot 10^{-5}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$
AEKFMMEI1	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEI2	$2,38 \cdot 10^{-2}$	$2,31 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-2}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$
AEKFMMEI3	$2,38 \cdot 10^{-2}$	$2,38 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
UKF1	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$
UKF2	$2,34 \cdot 10^{-2}$	$2,28 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$
UKF3	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-5}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$
AUKFMMEm1	$2,85 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$
AUKFMMEm2	$2,77 \cdot 10^{-2}$	$2,74 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEm3	$2,85 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$
AUKFMMEI1	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$2,23 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEI2	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,41 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$
AUKFMMEI3	$2,29 \cdot 10^{-2}$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$

Tabela 5.14: Sistema de quatro tanques em malha fechada - desempenho de estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$

Filtros	média de $q_{e1}(k)$	RMSE de $q_{e1}(k)$	MAE de $q_{e1}(k)$	média de $q_{e2}(k)$	RMSE de $q_{e2}(k)$	MAE de $q_{e2}(k)$	Tempo simulação [s]
EKF1	$2 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1,50 \cdot 10^{-1}$
EKF2	2	0	0	1	0	0	$1,50 \cdot 10^{-1}$
EKF3	$2 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1,50 \cdot 10^{-1}$
AEKFML1	$2,67 \cdot 10^{-1}$	$3,88 \cdot 10^{-1}$	$2,82 \cdot 10^{-1}$	$5,84 \cdot 10^{-1}$	1,38	$6,34 \cdot 10^{-1}$	$1,21 \cdot 10^5$
AEKFML2	$2,68 \cdot 10^{-1}$	$3,88 \cdot 10^{-1}$	$2,83 \cdot 10^{-1}$	$5,86 \cdot 10^{-1}$	1,39	$6,36 \cdot 10^{-1}$	$1,21 \cdot 10^5$
AEKFML3	$2,67 \cdot 10^{-1}$	$3,88 \cdot 10^{-1}$	$2,82 \cdot 10^{-1}$	$5,84 \cdot 10^{-1}$	1,38	$6,34 \cdot 10^{-1}$	$1,21 \cdot 10^5$
AEKFMMEm1	$9,52 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-1}$	$1,48 \cdot 10^{-1}$	$4,44 \cdot 10^{-1}$	$3,85 \cdot 10^{-1}$	$3,48 \cdot 10^{-1}$	$9,08 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm2	$1,03 \cdot 10^{-1}$	$1,58 \cdot 10^{-1}$	$1,39 \cdot 10^{-1}$	$4,54 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$3,57 \cdot 10^{-1}$	$9,08 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEm3	$1,04 \cdot 10^{-1}$	$1,63 \cdot 10^{-1}$	$1,42 \cdot 10^{-1}$	$4,02 \cdot 10^{-1}$	$3,72 \cdot 10^{-1}$	$3,08 \cdot 10^{-1}$	$9,08 \cdot 10^{-1}$
AEKFMMEI1	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$6,24 \cdot 10^{-1}$	$5,57 \cdot 10^{-1}$	1,09
AEKFMMEI2	2,96	3,16	2,76	$5,60 \cdot 10^{-1}$	$6,88 \cdot 10^{-1}$	$4,76 \cdot 10^{-1}$	1,09
AEKFMMEI3	$4,35 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-1}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$4,14 \cdot 10^{-2}$	$6,59 \cdot 10^{-2}$	$5,98 \cdot 10^{-2}$	1,09
UKF1	$2 \cdot 10^{-1}$	0	0	$1 \cdot 10^{-1}$	0	0	$2,92 \cdot 10^{-1}$
UKF2	2	0	0	1	0	0	$2,92 \cdot 10^{-1}$
UKF3	$2 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1 \cdot 10^{-2}$	0	0	$2,92 \cdot 10^{-1}$
AUKFMMEm1	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,73 \cdot 10^{-1}$	$1,46 \cdot 10^{-1}$	$4,38 \cdot 10^{-1}$	$3,94 \cdot 10^{-1}$	$3,43 \cdot 10^{-1}$	1,05
AUKFMMEm2	$1,27 \cdot 10^{-1}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	$1,55 \cdot 10^{-1}$	$4,09 \cdot 10^{-1}$	$3,77 \cdot 10^{-1}$	$3,14 \cdot 10^{-1}$	1,05
AUKFMMEm3	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,73 \cdot 10^{-1}$	$1,46 \cdot 10^{-1}$	$4,38 \cdot 10^{-1}$	$3,94 \cdot 10^{-1}$	$3,43 \cdot 10^{-1}$	1,05
AUKFMMEI1	$3,89 \cdot 10^{-2}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$2,22 \cdot 10^{-1}$	$2,30 \cdot 10^{-1}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	1,25
AUKFMMEI2	$3,96 \cdot 10^{-2}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$2,23 \cdot 10^{-1}$	$2,29 \cdot 10^{-1}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	1,25
AUKFMMEI3	$3,76 \cdot 10^{-2}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1,71 \cdot 10^{-1}$	$2,26 \cdot 10^{-1}$	$2,30 \cdot 10^{-1}$	$1,59 \cdot 10^{-1}$	1,25

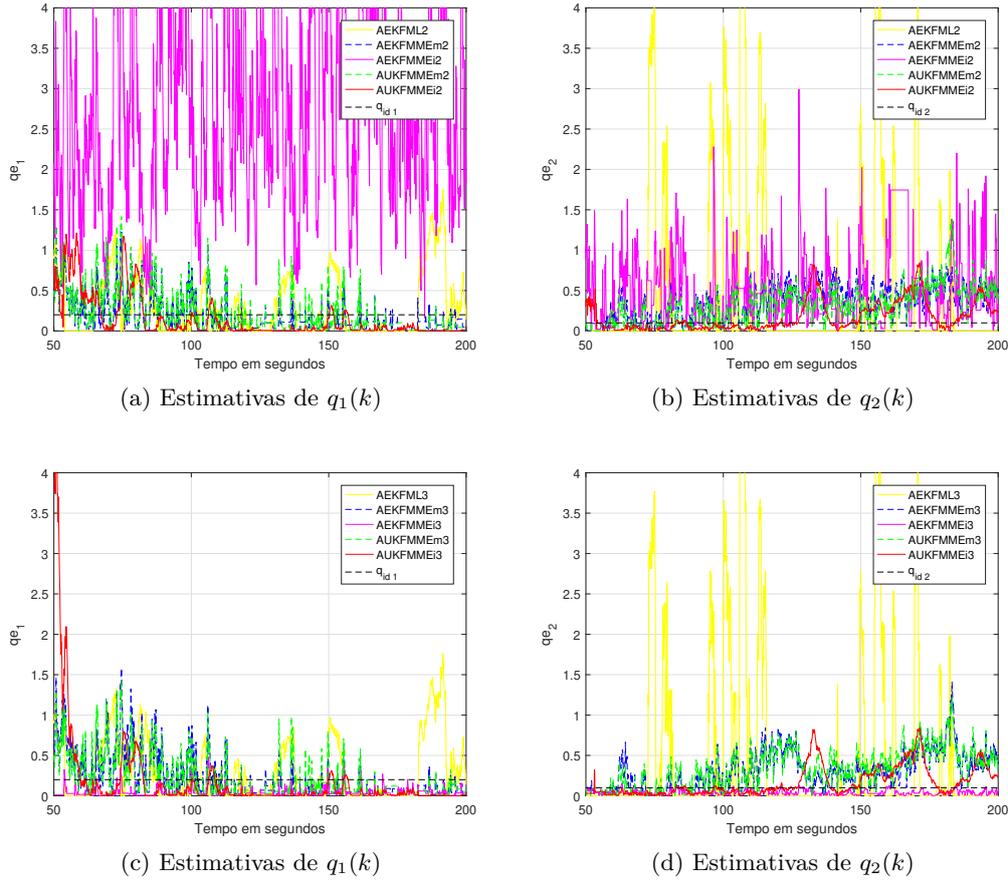


Figura 5.8: Sistema de quatro tanques em malha fechada: estimativas de q_1 e q_2

As estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$ com $q_{e1}(0) = 100q_{id1}$ e $q_{e2}(0) = 100q_{id2}$ são plotadas nas figuras 5.8 (a) e 5.8 (b), em que visualiza-se uma má interpretação do AEKFMMEm2. Já o AEKFMMEm2, o AUKFMMEm2, e o AEKFMMEm2 apresentam melhor desempenho em relação ao AEKFML2.

Nas figuras 5.8 (c) e 5.8 (d), as estimativas de $q_1(k)$ e $q_2(k)$ com $q_{e1}(0) = 0,01q_{id1}$ e $q_{e2}(0) = 0,01q_{id2}$, com as adaptações baseadas em MME, apresentam melhores desempenhos do que AEKFML3.

5.4 Resultados Alcançados

A adaptação proposta baseada em média móvel exponencial apresentou bons resultados numéricos comparados as adaptações presentes na literatura. Assim, a metodologia se torna promissora para implementação em controle de sistemas reais.

Além disso, a exposição categórica dos métodos foi elaborada a fim de auxiliar a realização de aplicações de estimadores adaptativos não-lineares.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Como resultado deste trabalho, as adaptações propostas para estimar as matrizes de covariância de incerteza de processo com a utilização da média móvel exponencial apresentam resultados satisfatórios de desempenho obtendo estimativas com relação precisão e exatidão/custo computacional superior as adaptações encontradas na literatura, descritas como algoritmo de Myers and Tapley (MT), algoritmo de Maybeck (MB) e máxima verossimilhança (ML). Estas adaptações são simuladas numericamente nos sistemas não-lineares: massa-mola amortecedor não-linear (MMA), bola e barra (BB) e quadro tanques (QT); utilizando o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF).

No primeiro sistema, MMA, dentre as adaptações simuladas, a adaptação proposta com covariância das medições com o EKF, em malha aberta e fechada, apresentou melhor desempenho com melhor rastreabilidade e convergência. Já a adaptação proposta com covariância dos termos de inovação em malha aberta apresenta o pior desempenho. Por outro lado, em malha fechada, a adaptação proposta com covariância dos termos de inovação apresenta um desempenho satisfatório utilizando o EKF, em que esta supera as adaptações MT e MB. Além disso, é observado melhor desempenho e tempo de processamento superior em três ordens de grandeza na abordagem por equações discretas de Lyapunov em relação a abordagem por sistemas de equações.

Já no segundo sistema, BB, por ser um sistema instável, as simulações são realizadas em malha fechada e se faz necessário a utilização de sistema aumentado para implementação da adaptação proposta com covariância das medições. Neste caso, tanto no EKF quanto no UKF, a adaptação proposta com covariância das medições possui rastreabilidade e convergência não obtidas pelas adaptações MT e MB. Sendo que pela instabilidade do BB não foi possível durante este trabalho a implementação da adaptação proposta com covariância dos termos de inovação.

Por fim, o terceiro sistema MIMO, QT, é observado em malha aberta um bom desempenho tanto para a adaptação proposta com covariância das medições quanto para a adaptação proposta com covariância dos termos de inovação em relação as adaptações presentes na literatura. Os resultados em malha fechada se mostram também equivalentes obtendo estimativas consistentes.

Em suma, as adaptações propostas se mostraram promissoras, enfatizando a adaptação proposta com covariância das medições, visto que as estimativas da covariância de incertezas do

processo apresentaram boa rastreabilidade e convergência nas distintas aplicações simuladas comparadas com os métodos da literatura. Embora exista a limitação na aplicação em sistemas com dinâmica ultra rápida, que vai contra a hipótese da relação entre a dinâmica do sistema e do tempo de amostragem, as adaptações propostas possuem baixo tempo de processamento devido a natureza recursiva apresentando melhor eficiência sendo atrativas para processos industriais. Além disso, com este trabalho é possível uma maior compreensão dos métodos de adaptação de incertezas e aproximações não lineares.

Para trabalhos futuros é necessário aprimorar as adaptações propostas a fim de solucionar problemas encontrados. O primeiro problema encontrado está nos casos em que a matriz de covariância das incertezas de medição não é conhecida. Já o outro problema é a validação experimental para confirmar as vantagens das adaptações propostas em aplicações reais, em que a utilização de distinto método de discretização e o estudo para sistemas com tempo de amostragem irregular se tornam interessantes. Por último, o comportamento das adaptações em sistemas de grande dimensões, isto é, número elevado de variáveis, se mostra como desafio para a estimação de estados, e um possível caminho é considerar modelos com número reduzido de estado que guarde a representatividade do modelo original.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GREWAL, M.; ANDREWS, A. *Kalman Filtering: Theory and Practice with MATLAB*. [S.l.]: Wiley, 2014. (Wiley - IEEE). ISBN 9781118984918.
- [2] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. (Instrumentation and controls series). ISBN 9780136156734.
- [3] GARCIA, C. *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos Vol. 1*. [S.l.]: EDUSP, 2005. ISBN 9788531409042.
- [4] KARNOPP, D.; MARGOLIS, D.; ROSENBERG, R. *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems: Fifth Edition*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2012. ISBN 9780470889084.
- [5] LJUNG, L. *System Identification*. 2nd. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [6] PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. *System Identification*. 2nd. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, 2012.
- [7] AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2000. ISBN 9788570415844.
- [8] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002. ISBN 0-13-067389-7.
- [9] BELANGER, P. R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 5, n. 1, p. 265–271, 1972. ISSN 14746670.
- [10] SIMON, D. J. *Optimal State Estimation: Kalman, Hinf, and Nonlinear Approaches*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006. ISBN 9780471708582.
- [11] CHUI, C.; CHEN, G. *Kalman Filtering: with Real-Time Applications*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. ISBN 9783319476124.
- [12] GELB, A. *Applied Optimal Estimation*. [S.l.]: The MIT Press, 1974. ISBN 9780262570480.
- [13] MEHRA, R. K. Approaches to Adaptive Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 5, p. 693–698, 1972. ISSN 15582523.
- [14] ALSPACH, D.; SCHARF, L.; ABIRI, A. A Bayesian solution to the problem of state estimation in an unknown noise environment. *International Journal of Control*, v. 19, n. 2, p. 265–287, 1974. ISSN 0020-7179.

- [15] LAINIOTIS, D. Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaption. *IEEE Trans. Autom. Control.*, v. 16, n. 2, p. 160–170, 1971.
- [16] KASHYAP, R. Maximum likelihood identification of stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 15, n. 1, p. 25–34, 1970. ISSN 0018-9286.
- [17] ODELSON, B. J.; RAJAMANI, M. R.; RAWLINGS, J. B. A new autocovariance Least-Squares method for estimating noise covariance. *Journal of Chemical Information and Modeling*, v. 53, n. 9, p. 1689–1699, 2006. ISSN 1098-6596.
- [18] MYERS, K. A.; TAPLEY, B. D. Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, n. 4, p. 520–523, 1976. ISSN 15582523.
- [19] MOGHADDAMJOO, A.; KIRLIN, R. Robust adaptive Kalman filtering with unknown inputs. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n. 8, p. 1166–1175, 1989. ISSN 00963518.
- [20] BAVDEKAR, V. A.; DESHPANDE, A. P.; PATWARDHAN, S. C. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter. *Journal of Process Control*, 2011. ISSN 09591524.
- [21] VERDÚ, S.; POOR, H. V. Minimax Linear Observers and Regulators for Stochastic Systems with Uncertain Second-Order Statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 29, n. 6, p. 499–511, 1984. ISSN 15582523.
- [22] BOS, R.; BOMBOIS, X.; VAN DEN HOF, P. M. *Designing a Kalman Filter When No Noise Covariance Information Is Available*. [S.l.]: IFAC, 2005. 1275–1280 p. ISSN 14746670.
- [23] WANG, H. et al. An adaptive Kalman filter estimating process noise covariance. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 223, p. 12–17, 2017. ISSN 18728286.
- [24] ZANNI, L. et al. A Prediction-Error Covariance Estimator for Adaptive Kalman Filtering in Step-Varying Processes: Application to Power-System State Estimation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 25, n. 5, p. 1683–1697, 2017. ISSN 10636536.
- [25] DUNÍK, J. et al. Noise covariance matrices in state-space models: A survey and comparison of estimation methods - part i. *Int J Adapt Control Signal Process*, Wiley Online Library, v. 31, n. 11, p. 1505–1543, 2017.
- [26] HAJIYEV, C.; SÖKEN, H. E. Adaptive Kalman filter with multiple fading factors for UAV state estimation. *IFAC*, v. 42, n. 8, p. 77–82, 2009. ISSN 14746670.
- [27] MENDONCA, C. B. D.; HEMERLY, E. M.; GOES, L. C. S. Adaptive Stochastic Filtering for Online Aircraft Flight Path Reconstruction. *Journal of Aircraft*, v. 44, n. 5, p. 1546–1558, 2007.
- [28] HAJIYEV, C.; SOKEN, H. E. Robust adaptive unscented kalman filter for attitude estimation of pico satellites. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 107–120, 2014.

- [29] TANNURI, E. A.; KUBOTA, L. K.; PESCE, C. P. Adaptive techniques applied to offshore dynamic positioning systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXVIII, n. 3, p. 323–330, 2006. ISSN 16785878 18063691.
- [30] POPOV, I. et al. Adaptive kalman filtering for dynamic positioning of marine vessels. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier B.V., v. 50, n. 1, p. 1121–1126, 2017. ISSN 24058963.
- [31] CHEN, H. et al. An Artificial Measurements-Based Adaptive Filter for Energy-Efficient Target Tracking via Underwater Wireless Sensor Networks. *Sensors*, v. 17, n. 5, p. 971, 2017. ISSN 1424-8220.
- [32] DING, W. et al. Improving Adaptive Kalman Estimation in GPS/INS Integration. *Journal of Navigation*, v. 60, n. 03, p. 517, 2007. ISSN 0373-4633.
- [33] FANG, S.; WANG, Z.; ZHONG, W. Measurement and Analysis of a Field Area Based on an Adaptive Kalman Filter. *Engenharia Agrícola*, v. 37, n. 5, p. 867–876, 2017. ISSN 0100-6916.
- [34] ZHOU, J.; LUECKE, R. H. Estimation of the covariances of the process noise and measurement noise for a linear discrete dynamic system. *Computers and Chemical Engineering*, v. 19, n. 2, p. 187–195, 1995. ISSN 00981354.
- [35] RASHEDI, M.; LIU, J.; HUANG, B. Distributed adaptive high-gain extended Kalman filtering for nonlinear systems. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier Ltd., v. 28, n. 8, p. 158–163, 2015. ISSN 24058963.
- [36] CARDOSO, R. et al. Estruturas de sincronismo monofásica e trifásica baseadas no filtro de kalman. *Revista Controle & Automação*, v. 17 no.4, n. 4, p. 21, 2006. ISSN 01031759.
- [37] YU, K. K. C.; WATSON, N. R.; ARRILLAGA, J. An adaptive Kalman filter for dynamic harmonic state estimation and harmonic injection tracking. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 20, n. 2, p. 1577–1584, 2005. ISSN 08858977.
- [38] TRIGO, F. C.; GONZALEZ-LIMA, R.; AMATO, M. B. P. Electrical impedance tomography using the extended Kalman filter. *IEEE Trans Biomed Eng*, v. 51, n. 1, p. 72–81, 2004. ISSN 0018-9294.
- [39] ROKHFOROZ, P.; JAMSHIDI, A. A.; SARVESTANI, N. N. Adaptive robust control of cancer chemotherapy with extended Kalman filter observer. *Informatics in Medicine Unlocked*, Elsevier, v. 8, p. 1–7, 2017. ISSN 23529148.
- [40] YANG, J. N. et al. An adaptive extended Kalman filter for structural damage identification. *Structural Control and Health Monitoring*, 2006. ISSN 15452255.
- [41] LIU, Z.; HE, H. Sensor fault detection and isolation for a lithium-ion battery pack in electric vehicles using adaptive extended Kalman filter. *Applied Energy*, Elsevier, v. 185, p. 2033–2044, 2017. ISSN 03062619.
- [42] ZHANG, Q. Adaptive Kalman Filter for Actuator Fault Diagnosis. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier B.V., v. 50, n. 0, p. 14837–14842, 2017. ISSN 24058963.

- [43] AGUIRRE, L. A.; TEIXEIRA, B. O. S.; TORRES, L. A. B. Using data-driven discrete-time models and the unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 72, n. 2, p. 1–12, 2005. ISSN 15393755.
- [44] SOORAKSA, P.; JANDAENG, P. Improvement of state estimation for systems with chaotic noise. In: _____. *Advances in Industrial Engineering and Operations Research*. Boston, MA: Springer US, 2008. p. 315–325. ISBN 978-0-387-74905-1.
- [45] DEE, D. et al. An efficient algorithm for estimating noise covariances in distributed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 11, p. 1057–1065, 1985. ISSN 0018-9286.
- [46] BLANCHET, I.; FRANKIGNOUL, C.; CANE, M. A. A comparison of adaptive kalman filters for a tropical Pacific Ocean model. *AMS Monthly Weather Review*, v. 125, n. 1, p. 40–58, 1997.
- [47] NORIEGA, G.; PASUPATHY, S. Adaptive estimation of noise covariance matrices in real-time preprocessing of geophysical data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 35, n. 5, p. 1146–1159, 1997. ISSN 01962892.
- [48] EVENSEN, G. *Data Assimilation*. [S.l.]: Springer, 2009. ISBN 9783642037900.
- [49] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.*, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- [50] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Pearson, 2005.
- [51] CRASSIDIS, J. L.; JUNKINS, J. L. *Optimal estimation of dynamic systems*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2011.
- [52] LEWIS, F. L. *Applied optimal control & estimation: digital design & implementation*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [53] SCHMIDT, S. F. The kalman filter-its recognition and development for aerospace applications. *J. Guid. Control Dyn.*, v. 4, n. 1, p. 4–7, 1981.
- [54] REIF, K. et al. Stochastic stability of the discrete-time extended kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 4, p. 714–728, 1999. ISSN 00189286.
- [55] LEFEBVRE, T.; BRUYNINCKX, H.; SCHUTTER, J. D. Comment on "a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators". *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 8, p. 1406–1408, 2002. ISSN 00189286.
- [56] VANDERMERWE, R.; WAN, E.; JULIER, S. Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion: Applications to Integrated Navigation. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2004.

- [57] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In: SIGNAL PROCESSING, SENSOR FUSION, AND TARGET RECOGNITION VI. [S.l.]: International Society for Optics and Photonics, 1997. p. 182–193.
- [58] WAN, E. A.; VANDERMERWE, R. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: . [S.l.]: IEEE, 2000. p. 153–158.
- [59] ARULAMPALAM, M. S. et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 2, p. 174–188, 2002. ISSN 1053-587X.
- [60] TEREJANU, G. et al. Adaptive Gaussian Sum Filter for Nonlinear Bayesian Estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 9, p. 2151–2156, 2011. ISSN 0018-9286.
- [61] JAZWINSKI, A. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. [S.l.]: Elsevier Science, 1970. (Mathematics in Science and Engineering). ISBN 9780080960906.
- [62] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, v. 92, n. 3, p. 401–422, 2004. ISSN 0018-9219.
- [63] HAYKIN, S.; ARASARATNAM, I. Cubature Kalman Filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 6, p. 1254–1269, 2009. ISSN 0018-9286.
- [64] MENEGAZ, H. M. T. et al. A systematization of the unscented kalman filter theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 60, n. 10, p. 2583–2598, 2015. ISSN 0018-9286.
- [65] FITZGERALD, R. J. Divergence of the kalman filter. *IEEE Trans. Autom. Control.*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 736–747, 1971.
- [66] SANGSUK-IAM, S.; BULLOCK, T. E. Analysis of discrete-time kalman filtering under incorrect noise covariances. *IEEE Trans. Autom. Control.*, IEEE, v. 35, n. 12, p. 1304–1309, 1990.
- [67] DALEY, R. The Effect of Serially Correlated Observation and Model Error on Atmospheric Data Assimilation. v. 120, n. 1, p. 164–177, 1992. ISSN 0027-0644.
- [68] MATISKO, P.; HAVLENA, V. Noise covariance estimation for kalman filter tuning using bayesian approach and monte carlo. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, Wiley Online Library, v. 27, n. 11, p. 957–973, 2013.
- [69] MAGNANT, C. et al. Bayesian non-parametric methods for dynamic state-noise covariance matrix estimation: Application to target tracking. *Signal Process.*, v. 127, p. 135 – 150, 2016.
- [70] DUROVIC, Z. M.; KOVACEVIC, B. D. Robust estimation with unknown noise statistics. *IEEE Trans. Autom. Control.*, v. 44, n. 6, p. 1292–1296, 1999.
- [71] WANG, X. et al. A novel approach of noise statistics estimate using h_∞ filter in target tracking. *Front. Inform. Technol. Electron. Eng.*, v. 17, n. 5, p. 449–457, 2016.

- [72] MEHRA, R. On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Trans Autom Control.*, v. 15, n. 2, p. 175–184, 1970.
- [73] DEE, D. P. et al. Maximum-Likelihood Estimation of Forecast and Observation Error Covariance Parameters. Part II: Applications. *Monthly Weather Review*, v. 127, n. 1992, p. 1835–1849, 1999. ISSN 0027-0644.
- [74] DUNÍK, J.; SIMANDL, M.; STRAKA, O. Methods for estimating state and measurement noise covariance matrices: Aspects and comparison. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 42, n. 10, p. 372 – 377, 2009. 15th IFAC Symposium on System Identification.
- [75] LI, X. R.; BAR-SHALOM, Y. A recursive multiple model approach to noise identification. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, IEEE, v. 30, n. 3, p. 671–684, 1994.
- [76] LI, B. et al. Design and implementation of an adaptive kalman filtering for the launcher of multiple launch rocket system. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, Wiley Online Library, v. 32, n. 3, p. 447–463, 2018.
- [77] MAYBECK, P. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. [S.l.]: Elsevier Science, 1982. (Mathematics in Science and Engineering). ISBN 9780080960036.
- [78] FILHO, J. L. *Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial*. Tese (Doutorado), 2019.
- [79] SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. *Time series analysis and its applications: with R examples*. [S.l.]: Springer, 2017.
- [80] SMITH, S. *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*. [S.l.]: Newnes, 2013.
- [81] BROWN, R. *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. [S.l.]: Little, Cambridge, 1956.
- [82] BARRAUD, A. A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$. *IEEE Trans Autom Control.*, IEEE, v. 22, n. 5, p. 883–885, 1977.
- [83] CHAI, T.; DRAXLER, R. R. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? *Geoscientific Model Development Discussions*, v. 7, p. 1525–1534, fev. 2014.
- [84] SEBORG, D. E. et al. *Process Dynamics and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- [85] SILVA, J. G.; FILHO, J. O. D. A. L.; FORTALEZA, E. L. F. Adaptive extended kalman filter using exponential moving average. *IFAC-PapersOnLine*, v. 51, n. 25, p. 208 – 211, 2018. ISSN 2405-8963.
- [86] ALTABEY, W. A. Model optimal control of the four tank system. *International Journal of Systems Science and Applied Mathematics*, v. 1, n. 4, p. 30–41, 2016.
- [87] FILHO, J. O. A. L.; FORTALEZA, E. L. F. Control of the ball and beam using kalman filter - a flatness based approach. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2014)*, SBA, Belo Horizonte, Minas Gerais, p. 2601–2606, 2014.

- [88] GROUTAGE, F. D.; JACQUOT, R. G.; KIRLIN, R. L. Techniques for adaptive state estimation through the utilization of robust smoothing. In: LEONIDES, C. (Ed.). *System Identification and Adaptive Control, Part 1 of 3*. [S.l.]: Academic Press, 1987. (Control and Dynamic Systems, v. 25), p. 273 – 308.
- [89] JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000.

ANEXOS

I. ALGORITMOS EM PSEUDOCÓDIGO

Algoritmo 1: ADAPTAÇÃO MME BASEADA NAS MEDIÇÕES POR EQUAÇÕES DISCRETAS DE LYAPUNOV

Entrada: $\mathbf{z}_k, \text{refz}_k, \text{cov}(\mathbf{z}_0), \alpha, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{C}_k, \mathbf{V}_k, \mathbf{R}_k$

Saída: $\hat{\mathbf{Q}}_k$

1 início

2 **para** $k = 1$ até k **faça**

3 $\text{cov}(\mathbf{z}_k) = \alpha \text{cov}(\mathbf{z}_{k-1}) + (1 - \alpha)(\mathbf{z}_k - \text{refz}_k)(\mathbf{z}_k - \text{refz}_k)^T$

4 **para** $j = 1$ até $j = n$ **faça**

5 defina $\mathbf{S}_{j, k-1}$

6 $\mathbf{T}_{j, k-1} = \text{dlyap}(\mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{S}_{j, k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T)$

7 $\bar{\mathbf{T}}_{j, k-1} = \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j, k-1} \mathbf{C}_k^T$

8 $\mathbf{Y}_k = \text{cov}(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T$

9 **fim**

10
$$\begin{bmatrix} q_{11, k-1} \\ q_{22, k-1} \\ \vdots \\ q_{qq, k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11, k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11, k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,11, k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22, k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22, k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22, k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm, k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm, k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm, k-1} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} Y_{11, k} \\ Y_{22, k} \\ \vdots \\ Y_{mm, k} \end{bmatrix}$$

11 **fim**

12 **fim**

13 **retorna** $\hat{\mathbf{Q}}_k$

Algoritmo 2: ADAPTAÇÃO MME BASEADA NOS TERMOS DE INOVAÇÃO POR EQUAÇÕES DISCRETAS DE LYAPUNOV

Entrada: $z_k, cov(\nu_0), \alpha, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{C}_k, \mathbf{V}_k, \mathbf{R}_k, \hat{\mathbf{x}}_k$

Saída: $\hat{\mathbf{Q}}_k$

1 início

2 **para** $k = 1$ até k **faça**

3 $\nu_k = z_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k$

4 $cov(\nu_k) = \alpha cov(\nu_{k-1}) + (1 - \alpha) \nu_k \nu_k^T$

5 **para** $j = 1$ até $j = n$ **faça**

6 defina $\mathbf{S}_{j,k-1}$

7 $\mathbf{T}_{j,k-1} = dlyap(\mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{S}_{j,k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T)$

8 $\bar{\mathbf{T}}_{j,k-1} = \mathbf{C}_k \mathbf{T}_{j,k-1} \mathbf{C}_k^T$

9 $\mathbf{Z}_k = \mathbf{C}_k dlyap(\mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} cov[\nu_k] (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1})^T) \mathbf{C}_k^T$

10 $\mathbf{Y}_k = cov(\nu_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T$

11 **fim**

12
$$\begin{bmatrix} q_{11,k-1} \\ q_{22,k-1} \\ \vdots \\ q_{qq,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,11,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{mm,k} \end{bmatrix} +$$

13
$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{1,11,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,11,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,11,k-1} \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,22,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,22,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,22,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{T}}_{1,mm,k-1} & \bar{\mathbf{T}}_{2,mm,k-1} & \cdots & \bar{\mathbf{T}}_{q,mm,k-1} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} Z_{11,k} \\ Z_{22,k} \\ \vdots \\ Z_{mm,k} \end{bmatrix}$$

13 **fim**

14 **fim**

15 **retorna** $\hat{\mathbf{Q}}_k$

Algoritmo 3: ADAPTAÇÃO MME BASEADA NAS MEDIÇÕES POR SISTEMA DE EQUAÇÕES

Entrada: $\mathbf{z}_k, \text{refz}_k, \text{cov}(\mathbf{z}_0), \alpha, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{C}_k, \mathbf{V}_k, \mathbf{R}_k,$

Saída: $\hat{\mathbf{Q}}_k$

1 **início**

2 **para** $k = 1$ até k **faça**

3 $\text{cov}(\mathbf{z}_k) = \alpha \text{cov}(\mathbf{z}_{k-1}) + (1 - \alpha)(\mathbf{z}_k - \text{refz}_k)(\mathbf{z}_k - \text{refz}_k)^T$

4 $\mathbf{C1}_k = (\mathbf{C}_k)^\dagger$

5 $\mathbf{C2}_k = (\mathbf{C}_k^T)^\dagger$

6 $\mathbf{Y}_k = \text{cov}(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T$

7 $\text{cov}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C1}_k \mathbf{Y}_k \mathbf{C2}_k$

8 somam-se a $\text{cov}(\mathbf{x}_k)$ incógnitas auxiliares nos elementos indeterminados de $\mathbf{C1}_k$ e

$\mathbf{C2}_k$

9 $\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T$ (em função das incógnitas a serem estimadas) = $\text{cov}(\mathbf{x}_k)$ (em

 função das incógnitas auxiliares) - $\mathbf{A}_{k-1} \text{cov}(\mathbf{x}_k)$ (em função das incógnitas

 auxiliares) \mathbf{A}_{k-1}^T

10 $q_{jj,k-1} = \text{solve}$ (equações), sendo número de incógnitas menor ou igual ao número de equações.

11 **fim**

12 **fim**

13 **retorna** $\hat{\mathbf{Q}}_k$

Algoritmo 4: ADAPTAÇÃO MME BASEADA NOS TERMOS DE INOVAÇÃO POR SISTEMA DE EQUAÇÕES

Entrada: \mathbf{z}_k , $cov(\boldsymbol{\nu}_0)$, α , \mathbf{A}_{k-1} , \mathbf{W}_{k-1} , \mathbf{C}_k , \mathbf{V}_k , \mathbf{R}_k , $\hat{\mathbf{x}}_k$

Saída: $\hat{\mathbf{Q}}_k$

1 início

2 **para** $k = 1$ até k **faça**

3 $\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k$

4 $cov(\boldsymbol{\nu}_k) = \alpha cov(\boldsymbol{\nu}_{k-1}) + (1 - \alpha) \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T$

5 $\mathbf{C1}_k = (\mathbf{C}_k)^\dagger$

6 $\mathbf{C2}_k = (\mathbf{C}_k^T)^\dagger$

7 $\mathbf{Y}_k = cov(\boldsymbol{\nu}_k) - \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T$

8 $cov(\mathbf{e}_k) = \mathbf{C1}_k \mathbf{Y}_k \mathbf{C2}_k$

9 somam-se a $cov(\mathbf{e}_k)$ incógnitas auxiliares nos elementos indeterminados de $\mathbf{C1}_k$ e

$\mathbf{C2}_k$

10 $\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T$ (em função das incógnitas a serem estimadas) = $cov(\mathbf{e}_k)$ (em função das incógnitas auxiliares) - $\mathbf{A}_{k-1} cov(\mathbf{e}_k)$ (em função das incógnitas auxiliares) $\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1} cov(\boldsymbol{\nu}_k) \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{K}_{k-1}^T$

11 $q_{jj,k-1} = solve$ (equações), sendo número de incógnitas menor ou igual ao número de equações.

12 **fim**

13 **fim**

14 **retorna** $\hat{\mathbf{Q}}_k$
