



**UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA PERFORMANCE E DA
FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E
LÂMINAS**

SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS
E CONSTRUÇÃO CIVIL**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA
PERFORMANCE E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL
NA ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E LÂMINAS**

SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.TD-010A/19

BRASÍLIA/DF: JULHO – 2019

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA PERFORMANCE
E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE INELÁSTICA
DE PLACAS E LÂMINAS**

SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr.Ing. (UnB)
(Orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, Ph.D. (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Eder Lima de Albuquerque, D.Sc. (UnB)
(Examinador Externo)

Prof. Jorge Douglas Bonilla Rocha, Dr.Ing. (UNICA)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 12 DE JULHO DE 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA

SILVA, SEBASTIÃO SIMÃO DA

Utilização de elementos finitos de alta performance e da formulação co-rotacional na análise inelástica de placas e lâminas. [Distrito Federal] 2019. 199p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2019).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise Não Linear de Estruturas

2. Descrição Co-rotacional

3. Elementos Finitos de Alta Performance

4. Elastoplasticidade

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, S. S. (2019). Utilização de elementos finitos de alta performance e da formulação co-rotacional na análise inelástica de placas e lâminas. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD-010A/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 199p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Sebastião Simão da Silva

TÍTULO: Utilização de elementos finitos de alta performance e da formulação co-rotacional na análise inelástica de placas e lâminas.

GRAU: Doutor ANO: 2019

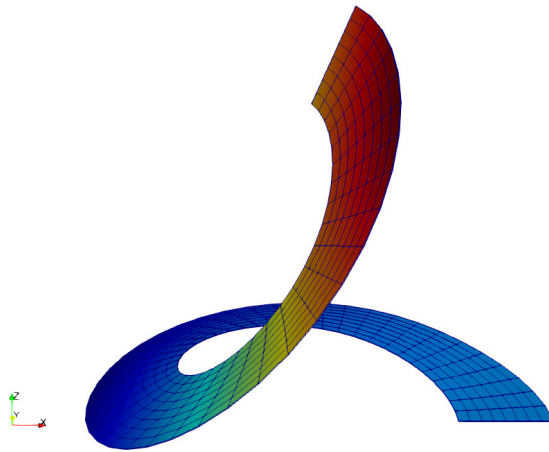
É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Sebastião Simão da Silva

Rua José Antônio da Silva, 300, Bairro Jardim Oásis

CEP: 58900-000 Cajazeiras - PB- Brasil

e-mail: sebastiao.silva@ifpb.edu.br



Dedicatória.

Dedico este trabalho à minha família... meus pais (José Simão da Silva e Francisca Maria Simão), meus irmãos, meus sobrinhos, por toda força e inspiração. À minha amada esposa Adenilda, por todo amor e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido a vida e, assim, a oportunidade de participar de maravilhosas experiências.

À minha família, pelo apoio e incentivo. À minha esposa Adenilda, por todo apoio e compreensão.

Ao meu orientador William Taylor Matias Silva, pela disponibilidade, dedicação e incentivo no decorrer desta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, por promover formação profissional de excelência. Ao Secretário Ricardo, pelo apoio. A grande Eva Veloso por todo o apoio nesta longa jornada.

Aos professores do PECC, pela dedicação na transmissão de elevados conhecimentos.

Ao professor Jorge Douglas Bonilla, por todo o incentivo e apoio na realização deste trabalho.

Aos amigos Ramon, Iure, Rogério, Elaine, Jorge, Sérgio, Cláudia Agra, Maria Paz, Diana, Cecília, Walisson, Honorato, Wellington Andrade, Wellington Vital... Renato Barbosa, Luciana Moraes, Fernanda, Danilo Vergani, Aldemir, Cláudia... Bruno Medeiros, Katharine Medeiros, Éder Leonardo, Lucrecia Teresa... por todo apoio e companheirismo.

Ao IFPB, Instituição que muda a realidade de tantas pessoas. Em especial agradeço ao campus Cajazeiras, lugar aonde contribuo com essas transformações.

Ao meu país e suas Instituições de Ensino Superior que, com muito esmero, contribuem para o desenvolvimento da nossa nação. Em especial, ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para que esse sonho um dia pudesse se tornar uma realidade.

“Não vos conformeis com este mundo, mas transformai-vos pela renovação do vosso espírito, para que possais discernir qual é a vontade de Deus, o que é bom, o que lhe agrada e o que é perfeito”. (Rm 12,2)

RESUMO

UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA PERFORMANCE E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E LÂMINAS

Autor: Sebastião Simão da Silva

Orientador: William Taylor Matias Silva

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, julho de 2019

Os conhecimentos relativos a análises linear-elásticas de estruturas por meio do Método dos Elementos Finitos já se encontram bastante consolidados. Entretanto, em situações mais complexas, ou quando se deseja entender de forma mais completa o comportamento das estruturas, a realização de análises não lineares se torna imprescindível. A simplicidade e menor custo computacional fazem com que os elementos de baixa ordem sejam preferidos nestes tipos de análises. Infelizmente, tais elementos são acometidos por um fenômeno numérico denominado travamento (*locking*), o que pode deteriorar significativamente os resultados. A fim de superar esse inconveniente, diversas tecnologias que visam melhorar sob variados aspectos a performance desses elementos têm sido propostas na literatura. Placas e cascas de pequena espessura, estruturas que são o foco de estudo dessa tese, estão em muitos produtos comerciais. As formulações e aspectos numéricos relativos a utilização de elementos finitos de placas e cascas para análises não lineares de estruturas laminares já estão bem estabelecidos. Todavia, é crescente o número de investigações que utilizam elementos sólidos de baixa ordem melhorados em análise não lineares. Em se tratando de análise não-linear geométrica, a mais recente descrição cinemática utilizada é a formulação co-rotacional e, dessa forma, ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento de outras descrições. Verifica-se que a análise não linear geométrica de placas e cascas por meio da descrição co-rotacional do contínuo, que leve em conta os efeitos da elastoplasticidade e fazendo uso de elementos sólidos de baixa ordem melhorados com recentes tecnologias, tem sido pouco explorada. O objetivo principal deste trabalho é estudar placas e lâminas utilizando elementos de baixa ordem melhorados, a formulação co-rotacional, e um modelo de elastoplasticidade de von Mises com endurecimento isotrópico linear. Para obter a trajetória de equilíbrio não-linear adota-se uma análise incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson e na técnica do comprimento de arco (*arc-length*). Vários problemas *benchmarks* são analisados afim de avaliar a formulação implementada.

ABSTRACT

APPLICATION OF ENHANCED FINITE ELEMENTS AND COROTATIONAL FORMULATION FOR INELASTIC ANALYSIS OF PLATES AND SHELLS

Author: Sebastião Simão da Silva

Supervisor: William Taylor Matias Silva

**Postgraduate Program in Structure and Civil Construction Engineering
Brasília, July of 2019**

The knowledge on linear-elastic analysis of structures by the Finite Element Method is already well established. However, in more complex situations, or when one wishes to better understand the behavior of structures, the performance of nonlinear analysis becomes essential. The simplicity and lower computational cost make low order elements preferred in these types of analysis. Unfortunately, these elements are affected by a numerical phenomenon called locking, which can significantly deteriorate the results. In order to overcome this inconvenience, several technologies that aim to improve the performance of these elements in many aspects have been proposed in the literature. Thin plates and shells, structures that are the focus of the study of this thesis are in many commercial products. Formulations and numerical aspects concerning the use of plate and shell finite elements for nonlinear analysis of laminar structures are well established. However, the number of investigations using improved low order solid elements in the nonlinear analysis is increasing. In the case of geometric nonlinear analysis, the most recent kinematic description used is the co-rotational approach and, as such, has not yet reached the same level of development as other formulations. Nonlinear geometric analysis of plates and shells by co-rotational description of the continuum, which takes into account the effects of elastoplasticity and making use of low order solid elements improved with recent technologies, has been little investigated. The main objective of this work is to study plates and shells using improved low order elements, the co-rotational formulation, and an isotropic hardening von Mises elastoplasticity model. To obtain the nonlinear equilibrium trajectory, an incremental-iterative analysis based on the Newton-Raphson method and the arc-length technique is adopted. Several problems benchmark were analyzed in order to evaluate the implemented formulation.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 2.1 – Elemento hexaédrico..... | 27 |
| Figura 2.2 – Estrutura discretizada com elementos sólidos padrão e melhorados..... | 28 |
| Figura 2.3 – Quadrilátero sob flexão pura. (a) Mecânica do contínuo (b) MEF..... | 30 |
| Figura 3.1 – Elemento finito sólido incompatível de oito nós..... | 36 |
| Figura 3.2 – Fluxograma para cálculo da matriz de rigidez..... | 45 |
| Figura 3.3 – Fluxograma para cálculo das tensões e forças internas..... | 46 |
| Figura 4.1 – Sólido sob ação de forças externas..... | 49 |
| Figura 5.1 – Bases vetoriais local e global..... | 66 |
| Figura 5.2 – Elemento sólido de oito nós..... | 66 |
| Figura 5.3 – Sistemas de coordenadas locais e global para o contínuo 2-D... | 68 |
| Figura 5.4 – Decomposição polar - estiramento seguida de uma rotação..... | 77 |
| Figura 6.1 – Relação tensão-deformação com endurecimento linear..... | 87 |
| Figura 6.2 – Preditor com posterior correção para o ponto D..... | 89 |
| Figura 6.3 – Critério de escoamento de von Mises no espaço de tensões principal..... | 93 |
| Figura 7.1 – Padrões básicos de trajetórias de equilíbrio: (a) falha linear frágil; (b) endurecimento; (c) amolecimento; e padrões mais complexos - (d) snap-through; (e) snap-back; (f) bifurcação; (g) bifurcação combinada com ponto limite e snap-back..... | 97 |
| Figura 7.2 – Arco situado entre dois pontos de uma curva..... | 99 |
| Figura 7.3 – Arco situado entre dois pontos de uma trajetória de equilíbrio.... | 100 |
| Figura 7.4 – Restrições no método do comprimento de arco: (a) restrição com hiperesfera; (b) restrição com hiperplano atualizado; (c) restrição com hiperplano fixo..... | 101 |
| Figura 7.5 – Método do comprimento de arco hiperesférico..... | 102 |
| Figura 7.6 – Componentes residual e tangencial de deslocamentos..... | 104 |
| Figura 7.7 – Ciclos do método do comprimento de arco..... | 105 |
| Figura 7.8 – Preditor ou primeira estimativa de um ciclo..... | 108 |
| Figura 7.9 – Interpretação geométrica da equação de restrição..... | 110 |
| Figura 7.10 – Trajetória de equilíbrio para dois graus de liberdade..... | 112 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 7.11 – Direção de avanço na solução. (a) δu_F tem o sentido de avanço na trajetória de equilíbrio. (b) δu_F tem o sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio..... | 113 |
| Figura 8.1 – Fluxograma das principais funções do ANLESTREM..... | 118 |
| Figura 8.2 – Fluxo de execução das principais variáveis do ANLESTREM..... | 120 |
| Figura 9.1 – Elementos de baixa ordem utilizados nas análises..... | 121 |
| Figura 9.2 – Geometria (a) e discretização (b) da viga engastada..... | 122 |
| Figura 9.3 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento normalizados..... | 123 |
| Figura 9.4 – Configuração deformada para o ultimo incremento de carga..... | 124 |
| Figura 9.5 – Geometria do arco..... | 124 |
| Figura 9.6 – Discretizações do domínio..... | 125 |
| Figura 9.7 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento na direção v | 126 |
| Figura 9.8 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento na direção v | 126 |
| Figura 9.9 – Configuração deformada para o último incremento de carga..... | 126 |
| Figura 9.10 – Tensões σ_{xx} para o último incremento de carga..... | 126 |
| Figura 9.11 – (a) Geometria e (b) discretização do domínio do portico L..... | 127 |
| Figura 9.12 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento..... | 128 |
| Figura 9.13 – Configuração deformada para o último incremento de carga..... | 128 |
| Figura 9.14 – Geometria do pórtico T..... | 129 |
| Figura 9.15 – Discretização do pórtico T. (a) 124 elementos; (b) 496 elementos..... | 129 |
| Figura 9.16 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento na direção v | 130 |
| Figura 9.17 – Configuração deformada para o último incremento de carga..... | 130 |
| Figura 9.18 – Viga de Cook. (a) Geometria e (b) discretização do domínio..... | 131 |
| Figura 9.19 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento..... | 131 |
| Figura 9.20 – (a) Configuração deformada e (b) σ_{xx} tensões para o último incremento de carga..... | 132 |
| Figura 9.21 – Geometria da viga em balanço..... | 133 |
| Figura 9.22 – Discretização do domínio. Malha: 20 elementos H8EAS30 (20×1×1)..... | 133 |
| Figura 9.23 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento (horizontal u_A e vertical w_A) na extremidade livre..... | 133 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 9.24 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 134 |
| Figura 9.25 – Geometria da viga circular..... | 134 |
| Figura 9.26 – Discretização do domínio. Malha: 16 elementos H8EAS30 (16 ×1×1)..... | 135 |
| Figura 9.27 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento (horizontal u_A e vertical w_A) na extremidade livre..... | 135 |
| Figura 9.28 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 135 |
| Figura 9.29 – Geometria da placa rectangular..... | 136 |
| Figura 9.30 – Discretização do domínio. Malha: 80 elementos H8EAS30 (10× 8×1). | 136 |
| Figura 9.31 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga..... | 137 |
| Figura 9.32 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 137 |
| Figura 9.33 – Geometria da viga torcida..... | 138 |
| Figura 9.34 – Discretização do domínio - Malha 48 × 4 × 1..... | 138 |
| Figura 9.35 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento na extremidade livre..... | 139 |
| Figura 9.36 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 139 |
| Figura 9.37 – Geometria da placa com furo..... | 140 |
| Figura 9.38 – Discretização do domínio - Malha 48 × 8 × 1..... | 140 |
| Figura 9.39 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento para os pontos A e B..... | 141 |
| Figura 9.40 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 141 |
| Figura 9.41 – Geometria da casca cilíndrica..... | 142 |
| Figura 9.42 – Discretização do domínio - Malha 4 × 4 × 2..... | 142 |
| Figura 9.43 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento para os pontos A e B..... | 143 |
| Figura 9.44 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 143 |
| Figura 9.45 – Geometria da casca cilíndrica..... | 144 |
| Figura 9.46 – Discretização do domínio - Malha 24 × 24 × 1..... | 145 |
| Figura 9.47 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga..... | 145 |
| Figura 9.48 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 145 |
| Figura 9.49 – Geometria da viga..... | 146 |
| Figura 9.50 – Discretização do domínio - Malha 12×36 ×1..... | 147 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 9.51 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga..... | 147 |
| Figura 9.52 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 147 |
| Figura 9.53 – Geometria da chapa..... | 148 |
| Figura 9.54 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento na direção da aplicação da carga..... | 148 |
| Figura 9.55 – Geometria do cubo..... | 149 |
| Figura 9.56 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento na direção da aplicação da carga..... | 149 |
| Figura 9.57 – Geometria da viga..... | 150 |
| Figura 9.58 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 8 \times 1$ | 150 |
| Figura 9.59 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento na extremidade livre..... | 151 |
| Figura 9.60 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 151 |
| Figura 9.61 – Geometria da placa..... | 152 |
| Figura 9.62 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 8 \times 1$ | 153 |
| Figura 9.63 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento na extremidade livre..... | 153 |
| Figura 9.64 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 153 |
| Figura 9.65 – Geometria da casca..... | 154 |
| Figura 9.66 – Discretização do domínio - Malha $24 \times 36 \times 1$ | 155 |
| Figura 9.67 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento para os pontos A e B..... | 155 |
| Figura 9.68 – Deformada da estrutura para o último passo de carga..... | 156 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 2.1 – Deformações espúrias em análises estruturais..... | 28 |
| Tabela 4.1 – Modos de deformação interna utilizados no EAS..... | 56 |

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

- a – Vetor normal à superfície de escoamento.
- B – Matriz deformação-deslocamento compatível.
- B_α – Matriz deformação-deslocamento incompatível.
- b – Vetor das forças de corpo.
- C – Matriz constitutiva.
- C_t – Matriz modular elastoplástica tangente padrão.
- C_{ct} – Matriz tangente consistente.
- d – Deslocamentos nodais do elemento.
- E – Módulo de elasticidade.
- E_t – Módulo tangente elastoplástico.
- f – Função de escoamento para o critério de von Mises.
- F – Gradiente de deformação.
- f_{ext} – Vetor de força externa.
- f_{int} – Vetor de força interna.
- H – Módulo de endurecimento.
- J – Matriz Jacobiano.
- J_0 – Matriz Jacobiano interpolada no centróide do elemento.
- K_{uu} – Matriz de rigidez interpolada apenas com o campo compatível.
- K_{ua} – Matriz de rigidez interpolada com o campo compatível e melhorado.
- K_{aa} – Matriz de rigidez interpolada apenas com o campo melhorado.
- $K_{\sigma g}$ – Matriz de rigidez co-rotacional.
- M – Matriz de interpolação do campo melhorado.
- N – Matriz das funções de forma.
- R – Matriz de rotação da decomposição polar.
- T – Matriz de transformação da descrição co-rotacional.
- T_0 – Matriz de mapeamento da formulação EAS.
- t – Vetor das forças de superfície.
- U – Tensor de estiramento direito.

- \mathbf{u} – Campo de deslocamentos admissível.
- W – Energia interna de um corpo.
- \mathbf{X}_g – Vetor posição na configuração inicial no sistema global.
- \mathbf{x}_g – Vetor posição na configuração atual no sistema global.
- \mathbf{X}_l – Vetor posição na configuração inicial no sistema local.
- \mathbf{x}_l – Vetor posição na configuração atual no sistema local.

- $\boldsymbol{\alpha}$ – Vetor de deslocamentos generalizados da formulação EAS.
- $\delta \mathbf{u}$ – Subincremento do vetor de deslocamento.
- $\delta \lambda$ – Subincremento do fator de carga.
- Δl – Comprimento de arco.
- $\Delta \mathbf{u}$ – Incremento do vetor de deslocamento.
- $\Delta \lambda$ – Incremento do fator de carga.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ – Campo de deformação.
- $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ – Campo de deformação melhorado.
- $\dot{\lambda}$ – Multiplicador plástico.
- $\boldsymbol{\sigma}$ – Campo de tensões admissível.
- σ_0 – Tensão de escoamento.
- ν – Coeficiente de Poisson.
- $\boldsymbol{\Omega}$ – Vetor *spin* presente na formulação co-rotacional.

- \square^{com} – Variável pertencente a um campo compatível.
- $\bar{\square}$ – Variável pertencente a um campo EAS ou incompatível.
- \square^{teor} – Variável com valores teóricos ou analíticos.
- \square_g – Variável no sistema de coordenadas global.
- \square_l – Variável no sistema de coordenadas local.

EICR – Element Independent Co-Rotational Formulation.

MEF – Método dos Elementos Finitos.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 19 |
| 1.1 | Motivações..... | 19 |
| 1.2 | Objetivos..... | 21 |
| 1.3 | Metodologia..... | 21 |
| 1.4 | Principais contribuições da pesquisa..... | 22 |
| 1.5 | Estrutura do trabalho..... | 24 |
| 2 | TRAVAMENTOS EM ELEMENTOS DE BAIXA ORDEM | 27 |
| 2.1 | Introdução..... | 27 |
| 2.2 | Travamento volumétrico..... | 29 |
| 2.3 | Travamento de cisalhamento transversal..... | 30 |
| 2.4 | Travamento de espessura..... | 31 |
| 2.5 | Técnicas para superar travamentos..... | 31 |
| 3 | MÉTODO DOS MODOS INCOMPATÍVEIS | 35 |
| 3.1 | Introdução..... | 35 |
| 3.2 | Formulação do elemento finito sólido incompatível | 36 |
| 4 | MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES ACRESCENTADAS (EAS) | 47 |
| 4.1 | Introdução..... | 47 |
| 4.2 | Formulação variacional..... | 49 |
| 4.3 | Parâmetros da formulação EAS | 54 |
| 5 | DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL DO CONTÍNUO | 57 |
| 5.1 | Introdução..... | 57 |
| 5.2 | Breve histórico da plataforma co-rotacional..... | 58 |
| 5.3 | Descrição co-rotacional independente do elemento (EICR)..... | 65 |
| 5.4 | Aplicação da descrição co-rotacional ao contínuo 2-D..... | 68 |
| 5.5 | Aplicação da descrição co-rotacional ao contínuo 3-D..... | 75 |
| 6 | ELASTOPLASTICIDADE | 85 |
| 6.1 | Introdução..... | 85 |
| 6.2 | Elastoplasticidade para o estado plano de tensão..... | 85 |
| 6.3 | Elastoplasticidade de von Mises em três dimensões..... | 91 |
| 7 | SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES | 97 |
| 7.1 | Introdução..... | 97 |
| 7.2 | Método de comprimento de arco..... | 100 |

| | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 8 | PROGRAMA COMPUTACIONAL | 115 |
| 8.1 | Introdução..... | 115 |
| 8.2 | Principais funções contidas no programa ANLESTREM..... | 116 |
| 9 | EXEMPLOS NUMÉRICOS | 121 |
| 9.1 | Introdução..... | 121 |
| 9.2 | Aplicações elásticas..... | 122 |
| 9.3 | Aplicações elastoplásticas..... | 148 |
| 10 | CONCLUSÕES | 157 |
| 10.1 | Conclusões gerais..... | 157 |
| 10.2 | Sugestões para trabalhos futuros..... | 158 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 159 |
| | APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA MATRIZ A_I | 169 |
| | APÊNDICE B - DEDUÇÃO DA MATRIZ DE TENSÃO INICIAL | 173 |
| | APÊNDICE C - VARIAÇÃO DO VETOR v | 189 |
| | APÊNDICE D - TENSOR DE MAPEAMENTO | 191 |
| | APÊNDICE E - ROTAÇÕES FINITAS NO ESPAÇO..... | 195 |

1. INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÕES

O conhecimento atual relativo à análise linear-elástica de estrutura se encontra bastante consolidado. Entretanto, em situações em que o comportamento da estrutura é mais complexo, em que seu material, configuração, ou condições de contorno passam por significativas transformações, a realização de análises não lineares pode ser imperativa.

A simplicidade e menor custo computacional fazem com que os elementos de baixa ordem sejam preferidos na mecânica estrutural não linear. Apesar dessas vantagens, estes elementos são acometidos por um fenômeno numérico conhecido na literatura por *locking*. Este pode deteriorar de maneira muito significativa os resultados da análise, fazendo com que os mesmos diverjam dos valores (analíticos ou físicos) esperados. Os efeitos deste problema são verificados mesmo em análises totalmente lineares. Em todo este trabalho, o termo *locking* será denominado travamento.

Para Nguyen (2009), os travamentos nas análises podem ser vistos como um mal condicionamento das equações diferenciais parciais que regem o problema, ou ainda devido à presença de deformações (ou tensões) parasíticas. Dentre os travamentos mais comuns, encontram-se os travamentos por cisalhamento (*shear locking*), os travamentos de membrana (*membrane locking*) e o travamento quando se está em condições próximas da incompressibilidade (*volumetric locking*).

A fim de superar os inconvenientes travamentos, diversas metodologias têm sido propostas na literatura. Nelas, o foco principal é o desenvolvimento de elementos com desempenho melhorado sob variadas situações. Assim, as tecnologias de elementos têm, entre outros aspectos, buscado tornar os mesmos livres de travamentos (*locking free*), insensíveis à distorção das malhas e capazes de gerar resultados precisos mesmo com uma malha sem muitos elementos (isto é, sem a necessidade de recorrer a refinamentos excessivos da malha).

O método dos modos incompatíveis foi uma das primeiras técnicas desenvolvidas para aumentar o desempenho dos elementos. Um procedimento mais recente é o método das “deformações acrescentadas” - EAS (*enhanced assumed strain*), o qual é considerado uma abordagem generalizada do método

dos modos incompatíveis. Ambas as formulações melhoram a performance do elemento nas análises. Entretanto, verifica-se na vasta literatura existente que os elementos incompatíveis tiveram seu desempenho pouco avaliados nas análises de *benchmarks* mais recentes.

Na análise não-linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos (MEF), três diferentes tipos de descrições cinemáticas têm sido largamente utilizadas: descrição lagrangiana total (LT), descrição lagrangiana atualizada (LA) e descrição co-rotacional (CR). Esta última deriva do teorema da decomposição polar (da Mecânica dos Meios Contínuos) o qual preconiza que o movimento de um corpo pode ser decomposto em uma parcela de corpo rígido e outra devida às deformações. De acordo com Felippa e Haugen (2005), a descrição cinemática co-rotacional é a mais recente e, em função disto, ainda não atingiu o mesmo nível relativo de desenvolvimento. A principal ideia da formulação co-rotacional consiste em adotar para cada elemento um sistema de coordenada local que rotaciona com o elemento e, dessa maneira, leva-se em conta a não linearidade geométrica. De acordo com Crisfield e Moita (1996), apesar do estabelecimento do sistema local ser relativamente mais fácil para elementos com geometria mais simples (elementos de viga e triangulares, por exemplo), o mesmo não se pode dizer quando se está lidando com estruturas contínuas.

Como pode ser visto em Owen e Hinton (1980), Chen e Han (1988), ou ainda em Lemaitre e Chaboche (1994), a não-linearidade física está diretamente relacionada com o comportamento mecânico dos materiais constituintes da estrutura. Quando a resposta do sólido que constitui a estrutura é elástica, após cessada a carga o corpo não apresenta deformações residuais. Entretanto, quando a resposta é inelástica, após cessado o carregamento, uma parte da deformação não se desfaz sendo, desse modo, irreversível (ou permanente). A teoria da plasticidade fornece leis e modelos capazes de descrever a relação tensão-deformação para materiais que apresentam uma resposta elastoplástica quando sujeitos a carregamentos externos.

As formulações e aspectos numéricos relativos à utilização de elementos de placa e casca para análises não lineares de estruturas esbeltas já se encontram bem estabelecidos. Todavia, têm sido crescente o número de investigações que

estudam a utilização de elementos sólidos de baixa ordem melhorados em análises não lineares de placas e lâminas.

Neste capítulo apresentam-se as considerações iniciais sobre o fenômeno dos travamentos que ocorre em análises numéricas de estruturas com elementos finitos de baixa ordem, os objetivos que norteiam o presente trabalho, a metodologia aplicada, bem como a organização dos capítulos subsequentes.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é realizar análises não lineares de estruturas esbeltas (dos tipos placas e lâminas) utilizando elementos de baixa ordem com performance melhorada (livres de travamentos, insensíveis à distorção de malha e que apresentem respostas satisfatórias mesmo quando são utilizadas malhas grosseiras), a formulação co-rotacional e um modelo de elastoplasticidade com endurecimento linear.

Como um objetivo complementar, pretende-se apresentar as formulações completas relativas a 6 tipos de elementos de baixa ordem: quadrilátero de 4 nós padrão (Q4P); hexaédrico de 8 nós padrão (H8P); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (Q4MI); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (H8MI); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método EAS (Q4EAS); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método EAS (H8EAS).

Por fim, um outro intento deste trabalho de pesquisa é a verificação da formulação implementada por meio de simulações de vários problemas *benchmarks* fazendo uso de um código implementado com a linguagem Matlab. As respostas numéricas obtidas com este programa são então confrontadas com as soluções disponíveis na literatura e com aquelas adquiridas por meio de um software comercial.

1.3 METODOLOGIA

As simulações numéricas apresentadas neste trabalho foram realizadas por meio de um programa de elementos finitos denominado ANLESTREM. Este foi desenvolvido no âmbito do Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília utilizando a linguagem de programação Matlab.

Os elementos quadriláteros e hexaédricos (citados na seção anterior), além de uma formulação co-rotacional para o contínuo (conforme originalmente apresentada por Moita (1994), Crisfield e Moita (1996) e, Moita e Crisfield (1996)), foram implementados no programa ANLESTREM.

Para levar em consideração a não linearidade material, foi implementado um modelo de elastoplastidade de von Mises com endurecimento isotrópico linear. A integração das relações constitutivas foi realizada por meio do método *backward Euler*.

Os vetores de força interna e as matrizes de rigidez foram descritos analiticamente e obtidos numericamente via integração cheia (quatro e oito pontos de Gauss nos elementos quadriláteros e hexaédricos, respectivamente).

No tocante ao pré-processo, para geração das malhas de todos os problemas estudados, foi desenvolvida uma rotina com o emprego de planilhas eletrônicas Microsoft Excel. Com este recurso foram obtidas as topologias das malhas, mesmo daqueles exemplos com geometrias mais complexas.

Para obter a trajetória de equilíbrio não-linear adotou-se uma análise incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson e na técnica do comprimento de arco (*arc-length*).

Na fase de pós-processo, uma rotina para a geração automática de arquivos de saída de dados foi implementada com a linguagem Matlab. O formato dos dados produzidos possibilitou a visualização das respostas da estrutura por meio do software Paraview. Assim, com a utilização desse recurso, erros ainda durante o processo de discretização puderam ser evitados. Também tornou mais eficaz a detecção de inconsistências nas análises por meio da visualização das configurações deformadas ou mediante a verificação da distribuição de valores referentes a outras variáveis de saída (como tensões ou deformações).

1.4 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA PESQUISA

Elementos finitos isoparamétricos de baixa ordem possuem cinemáticas mais simples e apresentam menor custo computacional sendo, dessa forma, preferidos na mecânica estrutural não linear. Apesar dessas vantagens, estes elementos são acometidos por travamentos. Historicamente, várias técnicas foram desenvolvidas para melhorar o desempenho destes elementos. Com este propósito

Wilson *et al* (1973) introduziram o método dos modos incompatíveis. Posteriormente, Taylor *et al* (1976) aprimoraram essa formulação propondo uma integração numérica no centróide dos elementos das parcelas correspondentes aos deslocamentos incompatíveis para o cálculo da matriz de rigidez e das forças internas. O Método dos modos incompatíveis é uma das técnicas mais simples, tanto do ponto de vista teórico quanto de implementação computacional. Uma outra tecnologia de elementos mais recente é a formulação EAS. Inicialmente proposta por Simo e Rifai (1990), este procedimento é considerado uma abordagem generalizada do método dos modos incompatíveis. Posteriormente, Andelfinger e Ramm (1993) desenvolveram diversos elementos estruturais EAS e mostraram a equivalência destes com os elementos de Hellinger-Reissner (*HR*) de Pian e Sumihara (1984).

Várias pesquisas foram realizadas com a finalidade de introduzir elementos de baixa ordem com performance superior em análises não-lineares (geométricas, do material, dinâmicas, em problemas de contato, entre outras). Em análises não-lineares geométricas, de acordo com Felippa (2001), a descrição co-rotacional (CR) é a mais recente das técnicas utilizadas e, conseqüentemente, ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento das outras formulações. Desse modo, vários assuntos podem ainda ser pesquisados utilizando a plataforma CR. A principal ideia da formulação CR consiste em adotar para cada elemento um sistema de coordenada local que rotaciona com o elemento. Neste sistema pode-se então usar a matriz de rigidez linear convencional. Muitos trabalhos foram realizados com a finalidade de desenvolver elementos de viga e triangulares, mas a extensão da formulação co-rotacional para contínuo é menos trivial e contava com a dificuldade da determinação do sistema de eixos local que passasse no teste da parcela e que fosse independente da numeração nodal. Em sua tese de doutorado, Moita (1994) apresentou o desenvolvimento da formulação co-rotacional em elementos finitos para o estudo do contínuo (bi e tridimensional). Este autor utilizou ainda elementos finitos lineares enriquecidos com modos incompatíveis. Crisfield e Moita (1996) apresentaram a formulação co-rotacional e problemas para o caso bidimensional. Moita e Crisfield (1996) estenderam o artigo anterior para considerar o contínuo em três dimensões. Finalmente, Crisfield e Moita (1996) apresentaram uma plataforma

unificada para a aplicação da formulação co-rotacional para a análise de sólidos, cascas e vigas.

A utilização de elementos EAS juntamente com a formulação co-rotacional para desenvolver elementos sólidos (*brick elements*) foi realizada por Polat (2010a). Polat (2010b) ainda apresentou um elemento sólido-casca no qual é empregado tanto o método EAS quanto a técnica ANS (*assumed natural strain*) para aliviar vários tipos de travamentos. Já a introdução de elementos EAS para simular problemas lineares geométricos com elastoplasticidade tridimensional é descrita em Andelfinger, Ramm e Roehl (1992).

A principal contribuição desta presente tese de doutorado é a inclusão de um modelo de elastoplasticidade de von Mises com endurecimento isotrópico linear dentro de uma plataforma co-rotacional que utiliza elementos de baixa ordem melhorados com os métodos dos modos incompatíveis e EAS para a análise não-linear geométrica e material de placas e lâminas.

Os elementos incompatíveis, por serem mais antigos que os enriquecidos com tecnologias como a EAS, têm sido pouco avaliados recentemente em problemas em que uma maior performance é exigida. Assim sendo, considera-se um aporte deste trabalho, a utilização de elementos incompatíveis para simulações elásticas e inelásticas de placas e cascas.

Por fim, o autor considera ainda como uma contribuição deste trabalho, o fato das malhas de todos os problemas simulados terem sido geradas por meio de simples rotinas construídas por meio de planilhas eletrônicas. Nelas, objetivou-se obter uma numeração nodal que resultasse numa menor largura de banda, tornando assim menores os esforços computacionais despendidos.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste capítulo introdutório apresenta-se de uma maneira geral as motivações para se empreender esforços numa pesquisa sobre a tecnologia de elementos finitos para análise não linear e inelástica de placas e cascas, os objetivos propostos, a metodologia utilizada no seu desenvolvimento, além das principais contribuições da tese.

No Capítulo 2 descreve-se o fenômeno dos travamentos que ocorrem nas análises com elementos de baixa ordem. Os Capítulos 3 e 4 abordaram as formulações dos métodos dos modos incompatíveis e EAS, respectivamente.

O Capítulo 5 é destinado a descrição da formulação co-rotacional para o contínuo bi e tridimensional. Os vetores de força e as matrizes de rigidez dos elementos finitos são demonstradas.

No Capítulo 6 apresenta-se a formulação sobre elastoplasticidade tanto para o estado plano quanto para o estado tridimensional de tensão. No Capítulo 7 aborda-se a solução de sistemas de equações não lineares.

No Capítulo 8 faz-se uma descrição sucinta do código ANLESTREM desenvolvido nesta pesquisa.

O Capítulo 9 é dedicado às aplicações numéricas. Vários *benchmarks* são simulados a fim de estudar as formulações apresentadas e avaliar a qualidade do código implementado. Os resultados obtidos são também analisados neste capítulo.

O Capítulo 10 apresenta as conclusões do trabalho. Neste capítulo também são apontadas sugestões para trabalhos futuros.

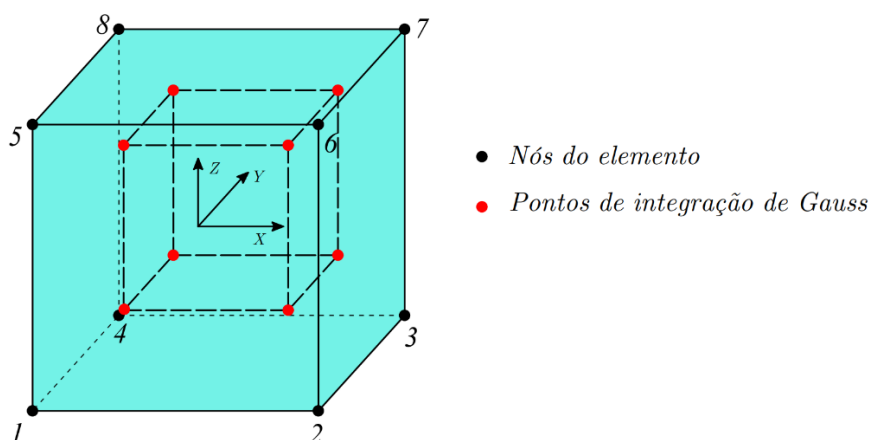
No Apêndice A apresenta-se a dedução analítica completa da matriz A_i (ou vetor a_i , no caso bidimensional) que compõe o vetor *spin* necessário para a determinação do sistema local da formulação co-rotacional. Por sua vez, no Apêndice B, descreve-se a dedução completa da matriz de tensão inicial (matriz de rigidez geométrica) para o contínuo 2D. No Apêndice C mostra-se como se obtém o vetor ν proveniente das deduções da matriz de rigidez para o contínuo 2D. No Apêndice D é mostrada a determinação do tensor de mapeamento T presente na Formulação EAS. Por fim, o Apêndice E contém a dedução da matriz de rotação R utilizada quando se considera rotações finitas no espaço.

2. TRAVAMENTOS EM ELEMENTOS DE BAIXA ORDEM

2.1 INTRODUÇÃO

Simplicidade geométrica e baixo custo computacional faz com que os elementos de baixa ordem sejam frequentemente preferidos na mecânica estrutural não linear. Não obstante, estes elementos quando modelados com formulações de deslocamentos puros apresentam travamentos. A Figura 2.1 ilustra um elemento hexaédrico de oito nós padrão, em que apenas graus de liberdade translacionais estão presentes.

Figura 2.1 – Elemento hexaédrico.



Diversos tipos de travamentos podem acometer as análises computacionais de estruturas e variadas são as abordagens para superar esses empecilhos numéricos. Dentre os tipos de travamentos mais comuns estão os travamentos por cisalhamento (*shear locking*), os travamentos de membrana (*membrane locking*) e o travamento que ocorre quando se está em condições próximas da incompressibilidade (*volumetric locking*).

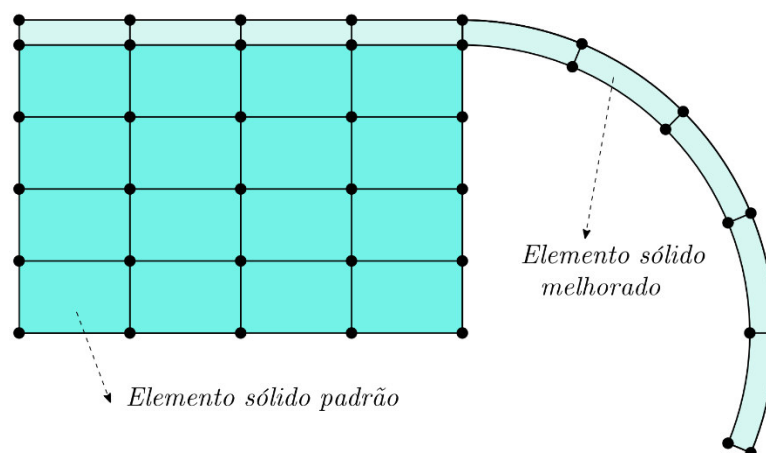
O fenômeno do enrijecimento excessivo nas respostas das análises pode, para fins didáticos, ser observado sob dois prismas – o matemático e o físico. Do ponto de vista matemático, os travamentos estão relacionados a um mal condicionamento das equações diferenciais parciais. Já do ponto de vista físico, pode-se afirmar que o problema está relacionado à presença de deformações (ou tensões) espúrias, isto é, deformações (ou tensões) que não aparecem na solução exata de um certo problema. A Tabela 2.1 apresenta algumas situações em que ocorrem deformações espúrias e o conseqüente travamento na resposta do problema.

Tabela 2.1 – Deformações espúrias em análises estruturais.

| Análise | Deformações parasíticas | Tipo de travamento |
|-------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| Flexão pura de um elemento de placa | Deformações de cisalhamento transversal | Travamento de cisalhamento transversal |
| Flexão inextensional de cascas | Deformações de membrana | Travamento de membrana |
| Comportamento incompressível | Deformações volumétricas | Travamento volumétrico |

Uma estratégia natural para superar os indesejados efeitos dos travamentos seria projetar elementos finitos de alta ordem. Entretanto, estes elementos são menos simples, com um maior número de graus de liberdade e, portanto, menos interessantes para análises estruturais não lineares. Outra opção seria discretizar a estrutura com um maior número de elementos. Todavia, devido à natureza incremental-iterativa das análises não lineares, o custo computacional de se adotar uma malha demasiadamente refinada pode tornar a análise proibitiva.

De acordo com Nguyen (2009), para certos problemas da análise estrutural, elementos com apenas graus de liberdade translacionais são mais vantajosos do que aqueles que contém também graus de liberdade rotacionais. Seja a estrutura composta por componentes espessos e delgados interligados ilustrada na Figura 2.2. Elementos sólidos e de casca padrões podem ser utilizados para discretizar cada parte respectiva. Entretanto, como mostrado na Figura 2.2, pode-se usar em toda a estrutura elementos que possuem exclusivamente graus de liberdade translacionais, dispensando assim a necessidade do emprego de elementos de transição. Para tanto, a parte esbelta da estrutura seria discretizada com elementos sólidos de baixa ordem e alta performance.

Figura 2.2 – Estrutura discretizada com elementos sólidos padrão e melhorados.

Nas próximas seções realiza-se uma descrição sucinta de alguns tipos de travamentos. As formulações de algumas das metodologias atuais de solução desses entraves serão abordadas nos capítulos seguintes.

2.2 TRAVAMENTO VOLUMÉTRICO

Em análises numéricas em que o comportamento do material é incompressível ou próximo da incompressibilidade, o elemento de baixa ordem padrão (Figura 2.1) sofre travamento volumétrico. Na mecânica dos sólidos este fenômeno pode ocorrer, por exemplo, em metais sob deformações plásticas.

Seja o campo de deslocamentos trilinear convencionalmente empregado para o elemento sólido linear padrão (Figura 2.1):

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4XY + a_5YZ + a_6XZ + a_7XYZ \\ v &= b_0 + b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4XY + b_5YZ + b_6XZ + b_7XYZ \\ w &= c_0 + c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4XY + c_5YZ + c_6XZ + c_7XYZ \end{aligned} \quad (2.1)$$

Fisicamente, a não variação de volume durante o processo de deformação pode ser expressa por:

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\varepsilon) = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z} \equiv 0 \quad (2.2)$$

Assim, com o campo de deslocamento trilinear expresso na Equação 2.1, a variação volumétrica ε_v pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= (a_1 + b_2 + c_3) + (b_4 + c_6)X + (a_4 + c_5)Y + (a_6 + b_5)Z + \\ &\quad + c_7XY + a_7YZ + b_7ZX \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para a variação volumétrica dada pela Equação 2.2 ser nula, é necessário que os coeficientes em cada termo da Equação 2.3 desapareçam, ou seja:

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0 \quad (2.4.a)$$

$$b_4 + c_6 = 0 \quad (2.4.b)$$

$$a_4 + c_5 = 0 \quad (2.4.c)$$

$$a_6 + b_5 = 0 \quad (2.4.d)$$

$$a_7 = 0; \quad b_7 = 0; \quad c_7 = 0. \quad (2.4.e)$$

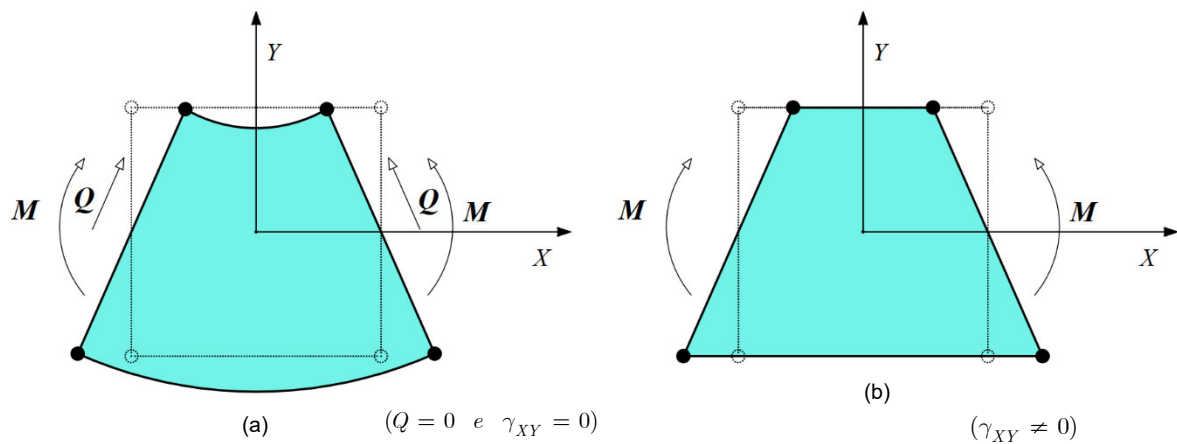
Entretanto, as constantes a_7 , b_7 e c_7 não podem ser simultaneamente nulas, pois isso implicaria na incompletude das funções de interpolação dada pela Equação 2.1. Em outras palavras, as constantes antes mencionadas fazem com que ε_v resulte diferente de zero. Dessa forma, se conclui que a restrição de um

material incompressível dada pela Equação 2.2 não pode ser totalmente cumprida pelas deformações normais dos elementos formulados com campos de deslocamentos puros.

2.3 TRAVAMENTO DE CISALHAMENTO TRANSVERSAL

Seja o elemento mostrado na Figura 2.3 (a) submetido a flexão pura indicada. De acordo com a teoria clássica da elasticidade a deformação de cisalhamento γ_{XY} não existe.

Figura 2.3 – Quadrilátero sob flexão pura. (a) Mecânica do contínuo (b) MEF.



Com o campo dado pela Equação 2.1 a deformação de cisalhamento γ_{XY}^{com} é calculada por:

$$\gamma_{XY}^{com} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} = (a_2 + b_1) + (a_5 + b_6)Z + a_4X + b_4Y + a_7XZ + b_7YZ \quad (2.5)$$

que é igual a zero apenas quando os seguintes coeficientes em cada termo desaparecerem,

$$a_2 + b_1 = 0; \quad a_5 + b_6 = 0 \quad (2.6.a)$$

$$a_4 = 0; \quad b_4 = 0; \quad a_7 = 0; \quad b_7 = 0. \quad (2.6.b)$$

Mais uma vez se observa que as constantes a_4 , b_4 , a_7 e b_7 não podem ser ao mesmo tempo nulas, pois isso implicaria na incompletude das funções de interpolação. Consequentemente, os coeficientes mencionados tornam a deformação de cisalhamento γ_{XY}^{com} diferente de zero e, dessa forma, introduzem rigidez artificial na resposta à flexão. Os mesmos argumentos podem ser usados para as outras componentes de deformação de cisalhamento γ_{YZ}^{com} e γ_{ZX}^{com} .

2.4 TRAVAMENTO DE ESPESSURA

Ainda se tratando do elemento sob flexão na Figura 2.3, verifica-se que a distribuição de deformação linear sobre a espessura (na direção de 0Y) é teoricamente esperada e dada por:

$$\varepsilon_Y^{teor} = -\frac{\nu MY}{EI} \quad (2.7)$$

em que E é o módulo de elasticidade, M é o momento fletor, I é o momento de inércia e ν é o coeficiente de Poisson. Todavia, considerando que o elemento na da Figura 2.3 possui deformação independente de Z (direção da espessura), verifica-se que sua deformação ao longo da altura Y é constante e dada por:

$$\varepsilon_Y^{com} = \frac{\partial v}{\partial Y} = b_2 + b_4 X \quad (2.8)$$

A deformação normal teórica sobre o eixo 0X é dada por:

$$\varepsilon_X^{teor} = \frac{MY}{EI} \quad (2.9)$$

Devido ao efeito de Poisson, essa deformação normal longitudinal poderá causar uma deformação transversal normal também variando linearmente ao longo do eixo 0Y ($\varepsilon_Y^{teor} = -\nu\varepsilon_X^{teor}$). Contudo, numericamente isto não é possível, pois ε_Y^{com} é constante (em relação a Y). Assim, a tensão normal transversal na direção 0Y que é calculada por:

$$\sigma_Y^{com} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_Y^{com} + \nu\varepsilon_X^{com} \right] \quad (2.10)$$

não é igual à solução analítica ao longo da espessura quando ocorre flexão e, dessa forma, um travamento indesejado surge na resposta numérica.

2.5 TÉCNICAS PARA SUPERAR TRAVAMENTOS

Nas seções anteriores foram apresentados alguns tipos de travamentos que podem aparecer nas análises computacionais de estruturas. Naturalmente, várias abordagens para superar estes problemas surgiram ao longo do tempo. Fazendo uma análise cronológica verifica-se que o surgimento dessas metodologias remonta às próprias origens e desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

De acordo com Felippa (2001), a história do MEF pode ser dividida em quatro gerações. A primeira geração (1956-1962) foi marcada pela publicação de trabalhos importantes e pioneiros, cujos autores foram engenheiros estruturais que se apoiaram na mecânica clássica. A segunda geração (1962-1972), também conhecida como a geração variacional, desvendou a relação existente entre o modelo de deslocamento clássico e o método de Rayleigh-Ritz baseado no princípio da energia potencial mínima. Além da extensão do MEF a aplicações não estruturais, muitos outros avanços foram alcançados nesta época.

Observa-se que as primeiras gerações foram primordiais para a implantação e desenvolvimento dos fundamentos do Método dos Elementos Finitos. Todavia, com a depressão econômica pós-Vietnã, segue-se um período de estagnação. Dessa forma, a terceira geração (1972–início dos anos 80) centrou esforços em melhorar os elementos (até aquele momento obtidos e formulados em deslocamentos) através de uma abordagem denominada inicialmente de “crimes variacionais”. Formulações mistas e híbridas tiveram acelerado progresso nesta época. O desenvolvimento de códigos computacionais cada vez mais complexos fez com que houvesse uma busca pela simplicidade e assim, a necessidade de voltar aos fundamentos do método.

A quarta geração (início dos anos 80 – dias atuais) procurou o desenvolvimento de elementos simples, mas que fornecessem respostas precisas mesmo quando se recorresse a malhas grosseiras. De acordo com Felippa (2001), estes foram denominados "elementos de alta performance". Elementos simples geralmente exibem deficiências (travamentos) e, desse modo, várias tecnologias de melhoramento dos mesmos entraram em cena, como o método dos modos incompatíveis (conforme Wilson *et al* (1973)); as baseadas no princípio de Hellinger-Reissner (de acordo com Pian e Sumihara (1984)); o método ANS (como descrito em Dvorkin e Bathe *et al* (1984)) e a abordagem EAS (conforme apresentado em Simo e Hughes *et al* (1986)).

No conceito ANS (*assumed natural strain*), o campo de deformações está relacionado diretamente ao campo de deslocamentos dependente em certos pontos pré-definidos, de modo que nenhum grau de liberdade independente esteja presente. Simo e Rifai (1990) mostraram que o método dos modos incompatíveis está incluso como um caso especial da formulação EAS.

Neste trabalho, implementou-se os métodos dos modos incompatíveis e EAS em elementos quadriláteros e hexaédricos de baixa ordem para superar os travamentos em análises inelásticas de estruturas do tipo placa e casca submetidas a rotações e translações finitas. Nos próximos dois capítulos, uma descrição maior dessas formulações será efetuada.

3. MÉTODO DOS MODOS INCOMPATÍVEIS

3.1 INTRODUÇÃO

Como mostrado no Capítulo 2, elementos isoparamétricos de baixa ordem não são capazes de representar de forma precisa o estado tensão oriundo de flexão. Dentre as várias técnicas conhecidas na literatura para melhorar o desempenho destes elementos, uma das mais simples tanto do ponto de vista teórico quanto de implementação computacional é o método dos deslocamentos incompatíveis. Neste capítulo descreve-se a inclusão dos modos incompatíveis em um elemento hexaédrico isoparamétrico de oito nós com o intuito de melhorar seu desempenho. Apresenta-se de maneira detalhada a obtenção da matriz de rigidez e das forças internas do elemento hexaédrico enriquecido com os modos incompatíveis para sua implementação computacional.

Uma das causas de imprecisões dos elementos finitos isoparamétricos de baixa ordem é a incapacidade dos mesmos representarem adequadamente o estado de tensão oriundo da flexão, o que leva a uma estimativa excessiva da rigidez de peças fletidas. Neste caso, em uma análise de elementos finitos pode-se melhorar os resultados com malhas mais refinadas ou com o uso de elementos de alta ordem. Às vezes, a necessidade de refinar a malha em regiões onde há variações bruscas nos gradientes de deslocamentos leva a problemas numéricos de mal condicionamento da matriz de rigidez global. Por outro lado, o uso de uma malha refinada com elementos de alta ordem pode tornar o custo computacional proibitivo. Para melhorar o desempenho dos elementos de baixa ordem Wilson *et al* (1973) introduziram o método dos deslocamentos incompatíveis sem que isso implicasse em aumento significativo de armazenamento e tempo computacional. Posteriormente, Taylor *et al* (1976) melhoraram essa formulação ao propor a integração numérica no centróide dos elementos das parcelas correspondentes aos modos incompatíveis para o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de força interna.

Em Wilson (2002) descreve-se uma resenha histórica sobre o desenvolvimento do método dos deslocamentos incompatíveis e a contribuição de diversos autores para o seu melhoramento. O desenvolvimento do método dos modos incompatíveis além de outras formulações permitiram o melhoramento da performance dos elementos finitos padrão e, dessa forma, tem reduzido a

necessidade do emprego de integração reduzida com o uso de elementos isoparamétricos de alta ordem. Um bom aporte teórico dessa formulação pode ainda ser encontrado em Krishnamoorthy (1987).

Os elementos incompatíveis tem sido empregados em diversos tipos de análises. Crisfield e Moita (1996), por exemplo, utilizaram estes elementos para realizar análise não linear geométrica do contínuo. Gharzeddine e Ibrahimbegovic (2000) empregaram os elementos incompatíveis para deformação finita (hiperelasticidade). Já Liu *et al* (2014) aplicou elementos finitos incompatíveis 3D na análise dinâmicas de mecanismos multicorpos. Silva e Silva (2017) estudaram o comportamento de vigas e placas sob flexão.

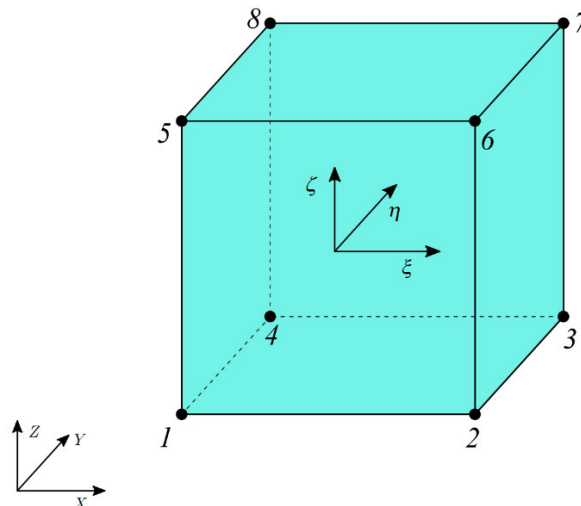
Neste capítulo, o método incompatível é apresentado como uma referência para motivar a descrição da formulação EAS que será feita no Capítulo 4.

3.2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO SÓLIDO INCOMPATÍVEL

3.2.1 – Geometria e campo de deslocamentos

Seja o elemento finito hexaédrico isoparamétrico de oito nós mostrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Elemento finito sólido incompatível de oito nós.



A geometria do elemento pode ser interpolada fazendo o emprego da Equação 3.1.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Que pode ser expressa na forma matricial pela Equação 3.2.

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{p} \quad (3.2)$$

Em que \mathbf{x} são as coordenadas de qualquer ponto do elemento, \mathbf{N} é a matriz das funções de forma e \mathbf{p} as coordenadas nodais. De maneira similar, os deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento podem ser interpolados conforme descrito pela Equação 3.3.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Ou na forma matricial pela Equação 3.4

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.4)$$

Em que \mathbf{u}_u são os deslocamentos em qualquer ponto do elemento e \mathbf{d} os deslocamentos nodais. As funções de interpolação do elemento hexaédrico isoparamétrico são dadas pela Equação 3.5.

$$N_i = \frac{1}{8} (1 - \xi_i \xi) (1 - \eta_i \eta) (1 - \zeta_i \zeta) \quad i = 1, \dots, 8 \quad (3.5)$$

Acrescenta-se aos deslocamentos no interior do elemento uma parcela de deslocamentos não conforme \mathbf{u}_α dada pela Equação 3.6.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_u + \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{N} \mathbf{d} + \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.6)$$

Em que \mathbf{M} é a matriz que contém as funções de interpolação para os modos incompatíveis. Esta matriz é expressa pela Equação 3.7.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Os coeficientes da matriz \mathbf{M} são dados pela Equação 3.8.

$$M_1 = 1 - \xi^2 \quad (3.8a)$$

$$M_2 = 1 - \eta^2 \quad (3.8b)$$

$$M_3 = 1 - \zeta^2 \quad (3.8c)$$

Por último, observa-se que α é um vetor de deslocamentos generalizados da formulação incompatível. Cabe salientar que estes deslocamentos não possuem relação com os nós do elemento. Este vetor é descrito pela Equação 3.9.

$$\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9] \quad (3.9)$$

Uma vez que se está trabalhando com coordenadas naturais, é necessário realizar um mapeamento entre estas coordenadas e o sistema de referência cartesiano. Isto é feito por meio da Equação 3.10.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Em que \mathbf{J} é a matriz Jacobiana expressa pela Equação 3.11.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Por outro lado, a relação entre os sistemas cartesianos e natural é dada pela Equação 3.12.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Em que J^{-1} é a inversa da matriz Jacobiana. Nas equações posteriores, as componentes dessa matriz serão expressas conforme a Equação 3.13.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} & \bar{J}_{32} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.2.2 – Relação deformação-deslocamento

A relação entre as deformações e os deslocamentos é expressa pela Equação 3.14.

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_\alpha = B d + B_\alpha \alpha^* \quad (3.14)$$

Em que B é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de forma; B_α é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de interpolação dos modos incompatíveis; e α^* é o vetor de deslocamentos generalizados, porém com algumas componentes com posições alteradas. A matriz B é dada pela Equação 3.15.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & | & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & | & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & | & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & | & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Por sua vez, o vetor α^* é dado pela Equação 3.16.

$$\alpha^{*T} = [\alpha_1 \quad \alpha_4 \quad \alpha_7 \quad \alpha_2 \quad \alpha_5 \quad \alpha_8 \quad \alpha_3 \quad \alpha_6 \quad \alpha_9] \quad (3.16)$$

Observa-se que algumas posições das componentes desse vetor foram alteradas em relação ao vetor α descrito na Equação 3.9. Esta alteração está relacionada com a posição das componentes do vetor de deformação de acordo com a notação de Voigt. Desta maneira, o vetor de deformação é descrito pela Equação 3.17

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Por meio das Equações 3.6, 3.7 e 3.17, obtém-se as componentes de deformação correspondentes aos modos incompatíveis, de acordo com a Equação 3.18.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_3 \quad (3.18a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_6 \quad (3.18b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_9 \quad (3.18c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_3 + \\ + \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_6 \end{aligned} \quad (3.18d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_6 + \\ + \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_9 \end{aligned} \quad (3.18e)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_3 + \\ + \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_9 \end{aligned} \quad (3.18f)$$

A Equação 3.18 pode ser colocada em forma matricial de acordo com a Equação 3.19. Nesta equação observa-se o reposicionamento dos coeficientes do vetor $\boldsymbol{\alpha}$ para manter a compatibilidade com as componentes do vetor de deformação.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \\ \alpha_7 \\ \alpha_2 \\ \alpha_5 \\ \alpha_8 \\ \alpha_3 \\ \alpha_6 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Finalmente, define-se a matriz deformação-deslocamento para os modos incompatíveis por meio da Equação 3.20.

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Uma vez que coordenadas naturais são utilizadas na definição das funções de forma para os modos incompatíveis, é necessário fazer o mapeamento deste sistema para o cartesiano. Para tanto, a inversa da matriz Jacobiana avaliada no centróide do elemento será empregada, sendo esta dada pela Equação 3.21.

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{0_{11}} & \bar{J}_{0_{12}} & \bar{J}_{0_{13}} \\ \bar{J}_{0_{21}} & \bar{J}_{0_{22}} & \bar{J}_{0_{23}} \\ \bar{J}_{0_{31}} & \bar{J}_{0_{32}} & \bar{J}_{0_{33}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

As derivadas das funções de forma incompatíveis podem ser dadas pela Equação 3.22.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{0,11} & \bar{J}_{0,12} & \bar{J}_{0,13} \\ \bar{J}_{0,21} & \bar{J}_{0,22} & \bar{J}_{0,23} \\ \bar{J}_{0,31} & \bar{J}_{0,32} & \bar{J}_{0,33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Utilizando sucessivamente a Equação 3.22, obtém-se as derivadas cartesianas dos modos incompatíveis por meio da Equação 3.23.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (3.23b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (3.23c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.23d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (3.23e)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (3.23f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (3.23g)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.23h)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (3.23i)$$

Substituindo as Equações 3.7 e 3.8 na Equação 3.6 chega-se a parcela dos deslocamentos incompatíveis u_{α} . Substituindo este resultado na Equação 3.23 produz-se à Equação 3.24

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} (-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0,12} (-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0,13} (-2\zeta\alpha_3) \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} (-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0,22} (-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0,23} (-2\zeta\alpha_6) \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} (-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0,32} (-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0,33} (-2\zeta\alpha_9) \quad (3.24c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} (-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0,22} (-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0,23} (-2\zeta\alpha_3) \quad (3.24d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} (-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0,12} (-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0,13} (-2\zeta\alpha_6) \quad (3.24e)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \bar{J}_{0_{31}} (-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0_{32}} (-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0_{33}} (-2\zeta\alpha_6) \quad (3.24f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{J}_{0_{21}} (-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0_{22}} (-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0_{23}} (-2\zeta\alpha_9) \quad (3.24g)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{J}_{0_{31}} (-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0_{32}} (-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0_{33}} (-2\zeta\alpha_3) \quad (3.24h)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{J}_{0_{11}} (-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0_{12}} (-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0_{13}} (-2\zeta\alpha_9) \quad (3.24i)$$

Fazendo a comparação entre a Equação 3.24 e a Equação 3.19, chega-se a expressão final da matriz de deformação-deslocamento B_α descrita na Equação 3.25.

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{12}} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{22}} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{33}} \\ -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{22}} & -2\eta\bar{J}_{0_{12}} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{23}} & -2\zeta\bar{J}_{0_{13}} & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & -2\eta\bar{J}_{0_{22}} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{33}} & -2\zeta\bar{J}_{0_{23}} \\ -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{12}} & -2\zeta\bar{J}_{0_{33}} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0_{13}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.2.3 – Matrizes de rigidez

A energia de deformação de um corpo elástico é dada pela Equação 3.26.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C \epsilon dV \quad (3.26)$$

Em que C é a matriz constitutiva do elemento sólido. Substituindo a Equação 3.14 na Equação 3.26, a expressão da energia pode ser reescrita pela Equação 3.27.

$$W = \frac{1}{2} \int_V [d^T B_u^T + \alpha^{*T} B_\alpha^T] C [B_u d + B_\alpha \alpha^*] dV \quad (3.27)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais na Equação 3.27 chega-se ao sistema matricial dado pela Equação 3.28.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Em que q é o vetor das forças nodais equivalentes. As submatrizes do sistema são dadas pela Equação 3.29.

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{K}_{u\alpha} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\alpha dV \quad (3.29b)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha u} = \int_V \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.29c)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_V \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\alpha dV \quad (3.29d)$$

Aplicando-se a condensação estática na Equação 3.29, obtém-se os modos incompatíveis e a matriz de rigidez do elemento de acordo com a Equação 3.30.

$$\mathbf{a}^* = -\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \mathbf{d} \quad (3.30a)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\alpha} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \quad (3.30b)$$

Calcula-se a matriz de rigidez do elemento incompatível por meio de integração numérica usando quadratura de Gauss, de acordo com a Equação 3.31.

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) |\mathbf{J}|_{ijk} \quad (3.31)$$

Em que i , j e k são as posições dos pontos de Gauss no sistema de coordenadas naturais, W_i são os respectivos pesos associados a esses pontos e $|\mathbf{J}|_{ijk}$ é o determinante da matriz Jacobiana. Na Figura 3.2 mostra-se um fluxograma detalhado para o cálculo numérico da matriz de rigidez do elemento.

3.2.4 – Tensões e forças internas

As tensões em cada ponto de Gauss é obtida por meio da Equação 3.32.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_u) \quad (3.32)$$

Substituindo a Equação 3.15 na Equação 3.32, a expressão das tensões pode ser reescrita e dada pela Equação 3.33.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{B}_\alpha \mathbf{a}^* \quad (3.33)$$

As forças internas são dadas pela Equação 3.34.

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.34)$$

Calcula-se o vetor de forças internas do elemento mediante integração numérica usando quadratura de Gauss por meio da Equação 3.35.

$$\mathbf{f} = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) |\mathbf{J}|_{ijk} \quad (3.35)$$

A Figura 3.3 mostra o fluxograma para a obtenção do vetor de forças internas do elemento.

No próximo capítulo o método EAS é apresentado. Como pontuado por Simo e Rifai (1990), esta abordagem é considerada uma generalização do método dos modos incompatíveis.

Figura 3.2 – Fluxograma para cálculo da matriz de rigidez.

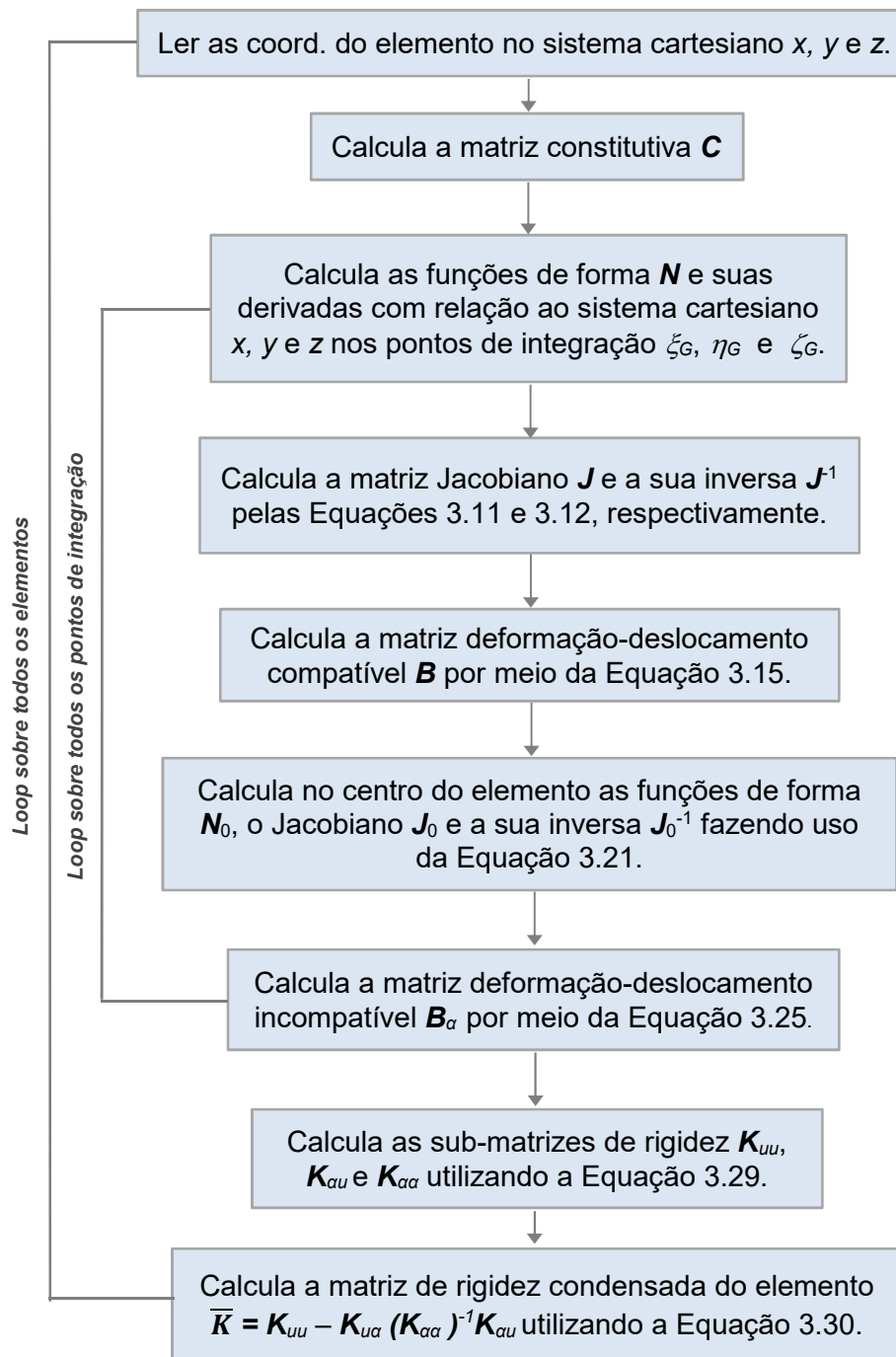
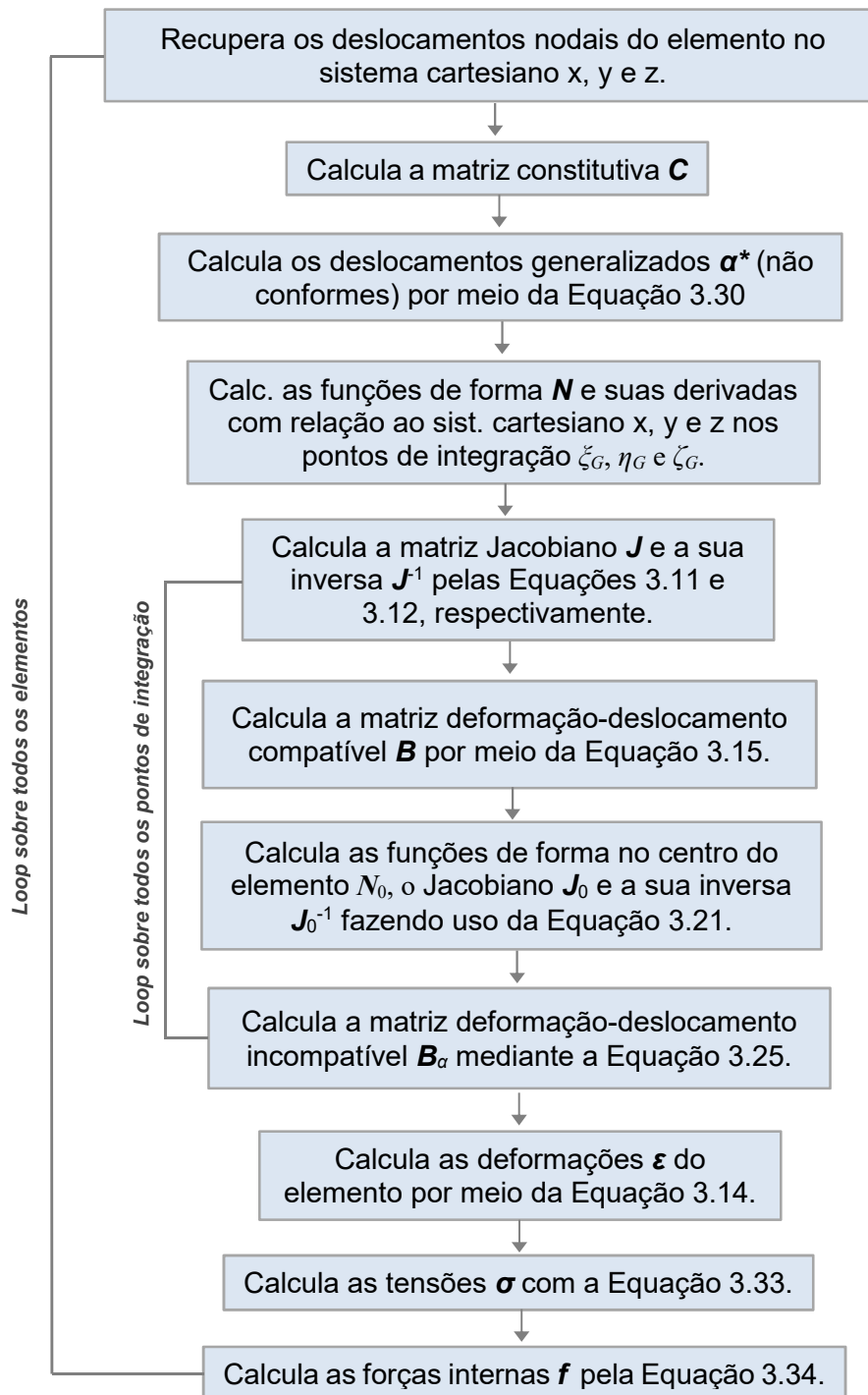


Figura 3.3 – Fluxograma para cálculo das tensões e forças internas.



4. MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES ACRESCENTADAS (EAS)

4.1 INTRODUÇÃO

O método das deformações acrescentadas (*enhanced assumed strain - EAS*), inicialmente proposto por Simo e Rifai (1990), é considerado uma abordagem generalizada do método dos modos incompatíveis apresentado no Capítulo 3. A técnica EAS tem sido bastante utilizada para o desenvolvimento de novos elementos (de membrana, placa, casca, sólidos e sólido-casca). O seu largo emprego é justificado pela capacidade que esse método tem de melhorar o desempenho de elementos de baixa ordem tornando-os livres de travamentos e, ao mesmo tempo, possibilitando a obtenção de respostas acuradas mesmo quando se trabalha com malhas irregulares e/ou pouco refinadas. Assim, uma vasta literatura relacionada ao tema pode ser encontrada.

Simo e Rifai (1990) apresentaram a abordagem EAS para problemas com pequenas deformações. Ainda no âmbito linear-elástico, Andelfinger e Ramm (1993) desenvolveram diversos elementos estruturais EAS e mostraram sua equivalência com os elementos de Hellinger-Reissner (HR) de Pian e Sumihara (1984).

A extensão da técnica EAS para a teoria das deformações finitas foi realizada por Simo e Armeno (1992). Neste trabalho, foi realizada a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em uma parte conforme e outra melhorada.

Klinkel e Wagner (1997) utilizaram o método EAS para desenvolver elementos sólidos para análise não linear geométrica. A parte compatível das deformações são as deformações de Green-Lagrange. Com poucos elementos foi possível analisar vigas e cascas delgadas com sucesso.

Brehm e Most (2003) empregaram o método EAS para enriquecer elementos finitos planos de 4 nós. Estes foram aplicados para análise estocástica não linear material.

Em sua tese de doutorado, Valente (2004) discorreu sobre desenvolvimentos na tecnologia de elementos finitos tipo casca e sólido-casca na Mecânica dos Meios Contínuos não linear. O autor empregou a técnica EAS para

enriquecer os elementos que foram aplicados para resolver *benchmarks* numéricos e em um estudo envolvendo plasticidade e contato de um componente industrial (*S-Rail benchmarks*). Ainda nesse sentido, Quak (2007) utilizou a metodologia EAS para desenvolver um elemento sólido-casca para emprego em processos de deformação de chapas.

Nguyen (2009) empregou as técnicas EAS e ANS juntas para desenvolver um elemento sólido-casca a fim de simular problemas sujeitos a grandes deformações e a predição de *springback* (fenômeno que ocorre na conformação de chapas metálicas). Ao empregar a técnica ANS, uma modificação de alguns componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange é realizada. Conseqüentemente, se fez necessário escrever a equação variacional na configuração material em termos do tensor de deformação de Green-Lagrange e do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.

Polat (2010a) aplicou a abordagem EAS juntamente com a formulação co-rotacional para desenvolver elementos sólidos (*brick elements*). A não linearidade geométrica foi dessa forma levada em consideração via rotação de um sistema de coordenada local. Polat (2010b) apresentou um elemento sólido-casca no qual foi empregado tanto o método EAS quanto a técnica ANS (*assumed natural strain*) para aliviar vários tipos de travamentos.

Mostafa (2011) também empregou o método das deformações acrescentadas, juntamente com as técnicas ANDES e ANS, para desenvolver elementos sólido-casca. As análises não lineares geométricas foram realizadas fazendo uso da plataforma co-rotacional.

Neuner, Schreter e Hofstetter (2018) combinaram a formulação EAS com um modelo de dano plástico. A insensibilidade apresentada pela malha de elementos finitos também foi discutida.

Kulikov e Plotnikova (2019) desenvolveram um elemento sólido-casca híbrido-misto de quatro nós usando a formulação *sampling surfaces* (SaS) para análise do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Para superar o fenômeno do travamento as formulações EAS, ANS e um método híbrido-misto foram utilizados.

Na seção seguinte, a base variacional do método EAS para análise não linear é apresentada. Posteriormente, faz-se um discurso acerca do número de modos adicionados que são empregados para enriquecer os elementos. Neste capítulo, para a descrição analítica das formulações tomou-se como base o trabalho do Nguyen (2009).

4.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

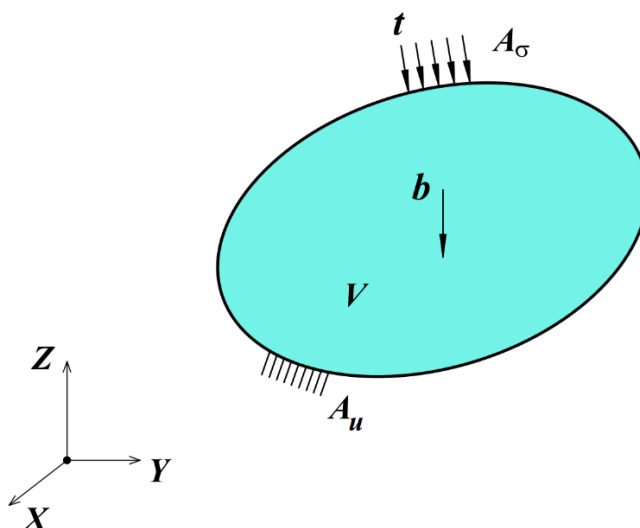
Seja o corpo da Figura 4.1, com domínio V e que tem suas condições de contorno dadas por $A = A_\sigma \cup A_u$, em que A_σ denota as forças prescritas \mathbf{t}^* e A_u os deslocamentos prescritos \mathbf{u}^* . A base variacional do método EAS é o princípio misto tricampo de Hu-Washizu, em que a energia total do corpo pode ser descrita como a soma de uma parcela interna e outra externa:

$$\begin{aligned} W_{(u,\varepsilon,\sigma)} &= W_{int} + W_{ext} \\ W_{(u,\varepsilon,\sigma)} &= \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^{com} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_{A_\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA - \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \rho dV \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que:

- \mathbf{u} é o campo de deslocamentos admissível;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{com} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ é o campo de deformações compatível;
- $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões admissível;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o campo de deformação independente;
- \mathbf{b} e \mathbf{t} são os vetores das forças de corpo e de superfície, respectivamente;
- \mathbf{C} é uma matriz que estabelece a relação tensão-deformação (matriz constitutiva).

Figura 4.1 – Sólido sob ação de forças externas.



O método EAS fundamenta-se no melhoramento do campo de deformações dependente dos deslocamentos através da adoção de um campo de deformações extra $\bar{\varepsilon}$, o qual, de acordo com o princípio variacional sublinhado, não necessita ser contínuo. Assim:

$$\varepsilon \equiv \varepsilon^{mod} = \varepsilon^{com} + \bar{\varepsilon} \quad (4.2)$$

Introduzindo a Equação 4.2 na Equação 4.1 produz-se:

$$\begin{aligned} W_{(u, \bar{\varepsilon}, \sigma)} = & \int_V (\varepsilon^{mod})^T \mathbf{C} \varepsilon^{mod} dV - \int_V \sigma \cdot \bar{\varepsilon} dV - \\ & - \int_{A_\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA - \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \rho dV \end{aligned} \quad (4.3)$$

De acordo com Simo e Rifai (1990), os campos de tensão e de deformação adicional são escolhidos de modo que eles sejam ortogonais entre si:

$$\int_V \sigma \cdot \bar{\varepsilon} dV = 0 . \quad (4.4)$$

A condição expressa na Equação 4.4 elimina o campo de tensão e, desse modo, reduz a quantidade de campos do princípio variacional misto original. A energia do corpo pode ser agora expressa por:

$$W_{(u, \bar{\varepsilon})} = \int_V (\varepsilon^{mod})^T \sigma^{mod} dV - \int_{A_\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA - \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \rho dV \quad (4.5)$$

A variação da energia do corpo $W_{(u, \bar{\varepsilon})}$ é dada por:

$$\delta W_{(u, \bar{\varepsilon})} = \delta W_{int} + \delta W_{ext} . \quad (4.6)$$

Tendo em conta que $\varepsilon^{mod} = \varepsilon^{com} + \bar{\varepsilon}$, a primeira parte da Equação 4.6 é dada por:

$$\delta W_{int(u, \bar{\varepsilon})} = \int_V (\delta \varepsilon^{com})^T \sigma^{mod} dV + \int_V (\delta \bar{\varepsilon})^T \sigma^{mod} dV . \quad (4.7)$$

Já a segunda parte da Equação 4.6 é expressa como:

$$\delta W_{ext} = \int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \rho dV \quad (4.8)$$

A condição de ortogonalidade (consistência) expresso pela Equação 4.4 pode ser entendida como uma complementariedade existente entre o campo de

tensão (variacionalmente consistente) de um elemento EAS e o campo de interpolação das deformações acrescentadas.

O tratamento discreto do problema se faz pelo Método do Elemento Finitos. Conforme visto no capítulo precedente, um elemento hexaédrico pode ter seus deslocamentos u em qualquer ponto dados pela Equação 3.4. A variação e incremento dos deslocamentos serão requeridos na linearização do variacional, sendo dados por:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}_u &= \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{u}_u &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}\end{aligned}\quad (4.9)$$

A variação e o incremento das deformações ($\delta \varepsilon$ e $\Delta \varepsilon$, respectivamente) no nível do elemento também se faz necessária e são dadas por:

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon &= \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \\ \Delta \varepsilon &= \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}\end{aligned}\quad (4.10)$$

As deformações melhoradas $\bar{\varepsilon}$ são interpoladas através de uma matriz M e são um produto desta por um vetor contendo os chamados “parâmetros de deformações internas” α :

$$\bar{\varepsilon} = M \alpha \quad (4.11)$$

Os entes M e α serão melhor discutidos na seção 4.3. As formas diferenciais e incremental do campo de deformação acrescentada são dadas por:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\varepsilon} &= M \delta \alpha \\ \Delta \bar{\varepsilon} &= M \Delta \alpha\end{aligned}\quad (4.12)$$

Reescrevendo as Equações 4.7 e 4.8 no nível do elemento tem-se:

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^e(\mathbf{u}, \bar{\varepsilon}) &= \int_V (\delta \varepsilon^{com})_{1 \times 6}^T \boldsymbol{\sigma}_{6 \times 1}^{mod} dV + \int_V (\delta \bar{\varepsilon})_{1 \times 6}^T \boldsymbol{\sigma}_{6 \times 1}^{mod} dV \\ \delta W_{ext}^e &= - \int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \rho dV\end{aligned}\quad (4.13)$$

Para realizar a linearização da forma fraca de $\delta W_{(u, \bar{\varepsilon})}^e$ faz-se uma expansão em série de Taylor e trunca-se sobre a k -ésima iteração. Assim:

$$\begin{aligned}\delta W_{(u_{k+1}, \bar{\varepsilon}_{k+1})}^e &= (\delta W_{int}^e + \delta W_{ext}^e)_{k+1} = \delta W_{(u_k, \bar{\varepsilon}_k)}^e + \frac{\partial (\delta W^e)}{\partial (\mathbf{u}, \bar{\varepsilon})} \Big|_{(u_k, \bar{\varepsilon}_k)} \cdot (\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \bar{\varepsilon}_k) \\ &= \delta W_{(u_k, \bar{\varepsilon}_k)}^e + D(\delta W^e) \Big|_{(u_k, \bar{\varepsilon}_k)} \cdot (\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \bar{\varepsilon}_k)\end{aligned}\quad (4.14)$$

em que D é o chamado operador Gateaux. Com o objetivo de calcular $(\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)$ faz-se o lado direito da Equação 4.14 igual a zero, resultando em:

$$\begin{aligned} -\delta W_{(\mathbf{u}_k, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)}^e &= -(\delta W_{int}^e + \delta W_{ext}^e)_k = D(\delta W^e)|_{(\mathbf{u}_k, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)} \cdot (\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) \\ &= \frac{\partial (\delta W_{int}^e + \delta W_{ext}^e)_k}{\partial (\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})} \cdot (\Delta \mathbf{d}, \Delta \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial (\delta W_{int}^e)_k}{\partial (\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})} \Big|_{(\mathbf{d}_k, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)} \cdot (\Delta \mathbf{d}, \Delta \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para simplificar a notação a seguir, o subíndice “ k ” inserido na formulação para designar uma quantidade da fase iterativa será omitido. Introduzindo as Equações 4.10 e 4.12 na Equação 4.13, tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta W_{int(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})} &= \int_V (\mathbf{B} \delta \mathbf{d})^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV + \int_V (\mathbf{M} \delta \boldsymbol{\alpha})^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV \\ &= (\delta \mathbf{d})^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \int_V \mathbf{M}^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV \\ &= (\delta \mathbf{d})^T \mathbf{f}_{int} + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \bar{\mathbf{f}}_{int} \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que \mathbf{f}_{int} e $\bar{\mathbf{f}}_{int}$ são, respectivamente, as forças internas compatíveis e melhoradas as quais são expressas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int} &= \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV \\ \bar{\mathbf{f}}_{int} &= \int_V \mathbf{M}^T \boldsymbol{\sigma}^{mod} dV \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo a Equação 4.9 na Equação 4.8 produz-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= -(\delta \mathbf{d})^T \int_{A_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* dA - (\delta \mathbf{d})^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}^* \rho dV \\ &= -(\delta \mathbf{d})^T \left(\int_{A_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* dA + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}^* \rho dV \right) \\ &= -(\delta \mathbf{d})^T \mathbf{f}_{ext} \end{aligned} \quad (4.18)$$

de onde se obtém o vetor das forças externas:

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{A_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* dA + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}^* \rho dV \quad (4.19)$$

Verifica-se que o vetor de força externa mostrado na Equação 4.19 tem a forma padrão encontrada nos elementos finitos formulados em deslocamentos padrão (Ver, por exemplo, Õnate (2015)). Substituindo a Equação 4.16 no lado direito da Equação 4.15, tem-se que:

$$\begin{aligned}
D(\delta W^e) \cdot (\Delta \mathbf{d}, \Delta \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{\partial(\delta W_{int}^e)}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} + \frac{\partial(\delta W_{int}^e)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} \\
&= (\delta \mathbf{d})^T \frac{\partial(\mathbf{f}_{int})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}_{int})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} + \\
&\quad + (\delta \mathbf{d})^T \frac{\partial(\mathbf{f}_{int})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}_{int})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} \\
&= \left[(\delta \mathbf{d})^T \mathbf{K}_{uu} + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{K}_{\alpha u} \right] \cdot \Delta \mathbf{d} + \left[(\delta \mathbf{d})^T \mathbf{K}_{\alpha u} + (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \right] \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A Equação 4.20 estabelece as matrizes de rigidez do elemento. Assim, \mathbf{K}_{uu} é a matriz de rigidez convencional dos elementos finitos formulados em deslocamentos:

$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{\partial(\mathbf{f}_{int})}{\partial \mathbf{d}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \tag{4.21}$$

As matrizes de rigidez $\mathbf{K}_{\alpha u}$, $\mathbf{K}_{u\alpha}$ que são interpoladas com a matriz de interpolação convencional e com o campo melhorado, são determinadas como segue:

$$\mathbf{K}_{\alpha u} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{int}}{\partial \mathbf{d}} = \int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \tag{4.22}$$

$$\mathbf{K}_{u\alpha} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{M} dV \tag{4.23}$$

Por fim, a matriz $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$, interpolada completamente com o campo assumido é obtida fazendo-se:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} dV \tag{4.24}$$

Com a substituição das Equações 4.16 e 4.18 na parte esquerda da Equação 4.15 e, da parte direita da Equação 4.20 na parte direita da Equação 4.15, tem-se que:

$$\begin{aligned}
-\left(\delta W_{int}^e + \delta W_{ext}^e\right) &= D(\delta W^e) \cdot (\delta \mathbf{u}_k, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) \\
\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}) - (\delta \boldsymbol{\alpha})^T \bar{\mathbf{f}} &= \left[\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{uu} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K}_{u\alpha} \right] \Delta \mathbf{d} + \\
&\quad + \left[\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{\alpha u} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \right] \Delta \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Para $\forall (\delta \mathbf{d}, \delta \boldsymbol{\alpha})$ se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\alpha} \\ \mathbf{K}_{\alpha u} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \\ -\bar{\mathbf{f}}_{int} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Uma vez que no campo $\bar{\varepsilon}$ não é requerida a continuidade entre elementos, pode-se (por condensação estática) eliminar $\Delta \alpha$ no nível do elemento antes da montagem da matriz de rigidez global. Da segunda linha do sistema expresso na Equação 4.26, pode-se determinar o incremento dos parâmetros de deformação interna como:

$$\Delta \alpha = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_{int} + \mathbf{K}_{u\alpha} \Delta \mathbf{d}) \quad (4.27)$$

Introduzindo a Equação 4.27 na primeira linha do sistema dado pela Equação 4.26, finalmente, tem-se como resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{u\alpha} \Delta \alpha &= \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \\ \mathbf{K}_{uu} \Delta \mathbf{d} - \mathbf{K}_{u\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_{int} + \mathbf{K}_{u\alpha} \Delta \mathbf{d}) &= \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \\ \left[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \right] \Delta \mathbf{d} &= \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} + \mathbf{K}_{u\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{int} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Verifica-se que após a condensação, o sistema obtido possui a forma similar dos elementos finitos desenvolvidos em deslocamentos com a matriz de rigidez condensada $\bar{\mathbf{K}}$ do elemento sendo dada por:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \quad (4.29)$$

e o vetor de forças residual \mathbf{r} do elemento definido por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} + \mathbf{K}_{u\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\alpha})^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{int} \quad (4.30)$$

Embora não deduzidas no Capítulo 3, expressões semelhantes para as correções dos deslocamentos generalizados e para o vetor resíduo também podem ser obtidas para o método dos modos incompatíveis.

4.3 PARÂMETROS DA FORMULAÇÃO EAS

O campo de deformações acrescentado no sistema de coordenadas natural é interpolado por:

$$\bar{\varepsilon}_{\xi} = \mathbf{M}_{\xi} \alpha \quad (4.31)$$

em que α é vetor de parâmetros de deformação interna, cuja dimensão depende da matriz de interpolação do campo adicional, que por sua vez depende dos modos

requeridos a acrescentar. Estas deformações internas preenchem o campo de deformações compatível para aliviar termos parasíticos. Para expressar os valores desse campo no sistema de coordenadas cartesianas se faz necessário uma transformação. Esta é dada por:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{|J_0|}{|J|} T_0^{-T} \bar{\varepsilon}_\xi \quad (4.32)$$

em que:

- J é a matriz Jacobiano;
- J_0 é a matriz Jacobiano calculada no centro do elemento ($\xi = 0, \eta = 0, \zeta=0.$);
- T_0 é a matriz de transformação que mapeia as quantidades do espaço físico para o espaço natural. Este ente, totalmente demonstrado no Apêndice D, é avaliado no centro do elemento e dada por:

$$T_0 = \begin{bmatrix} J_{011}^2 & J_{021}^2 & J_{031}^2 & 2J_{011}J_{021} & 2J_{011}J_{031} & 2J_{021}J_{031} \\ J_{012}^2 & J_{022}^2 & J_{032}^2 & 2J_{012}J_{022} & 2J_{012}J_{032} & 2J_{022}J_{032} \\ J_{013}^2 & J_{023}^2 & J_{033}^2 & 2J_{013}J_{023} & 2J_{013}J_{033} & 2J_{023}J_{033} \\ J_{011}J_{012} & J_{021}J_{022} & J_{031}J_{032} & J_{011}J_{022} + J_{012}J_{021} & J_{011}J_{032} + J_{012}J_{031} & J_{021}J_{032} + J_{022}J_{031} \\ J_{011}J_{013} & J_{021}J_{023} & J_{031}J_{033} & J_{011}J_{023} + J_{013}J_{021} & J_{011}J_{033} + J_{013}J_{031} & J_{021}J_{033} + J_{023}J_{031} \\ J_{012}J_{013} & J_{022}J_{023} & J_{032}J_{033} & J_{012}J_{023} + J_{013}J_{022} & J_{012}J_{033} + J_{013}J_{032} & J_{022}J_{033} + J_{023}J_{032} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

O fator adicional $|J_0|/|J|$ na Equação 4.33 é introduzido para que o elemento seja capaz de obedecer a condição de ortogonalidade (Equação 4.4). Observa-se que o mapeamento entre os sistemas natural e físico é realizado no centro do elemento para obter valores únicos para os parâmetros α_i . Combinando as Equações 4.31 e 4.32, o campo melhorado no sistema de coordenadas físico é dado por:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{|J_0|}{|J|} T_0^{-T} M_\xi \alpha = M \alpha \quad \text{com} \quad M = \frac{|J_0|}{|J|} T_0^{-T} M_\xi \quad (4.34)$$

A matriz de interpolação para os modos de deformação melhoradas, de acordo com Andelfinger e Ramm (1993), é dada por:

$$M_\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

A matriz M_ξ expande o campo de deformações compatíveis para o campo trilinear completo (EAS-30). Assim, um elemento hexaédrico de oito nós melhorado tem um total de 54 modos: 24 modos compatíveis mais 30 modos adicionais. A matriz M_ξ quando introduzida na Equação 4.34 fará com que $\bar{\epsilon}$ satisfaça à condição de ortogonalidade dada pela Equação 4.4. A matriz M_ξ é ainda projetada de tal maneira que os elementos EAS sejam livres de travamentos (*locking-free*) e ao mesmo tempo passem no teste da parcela.

A dimensão de α varia conforme o(s) tipo(s) de travamento que se deseja superar (volumétrico, de membrana e/ou de cisalhamento, etc.). Na Tabela 4.1 tem-se algumas sugestões para reduzir o número de modos adicionais a ser utilizado nos elementos.

Tabela 4.1 – Modos de deformação interna utilizados no EAS.

| Tipo de Elemento EAS | Modos adicionados ativados | Capacidade |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| EAS3v | 3v + 0c (Apenas modos 25 a 27 em (4.43) são adotados para melhorar as deformações normais) | Livra travamento volumétrico |
| EAS6c | 0v + 6c (Modos 28 a 33 em (4.43) são adotados para melhorar as deformações de cisalhamento) | Livra travamento de cisalhamento |
| EAS9 | 3v + 6c (25 a 27) + (28 a 33) | Livra travamento volumétrico e de cisalhamento |
| EAS12 | 6v + 6c (25 a 27; 40, 43, 44) + (28 a 33) | Melhor comportamento à incompressibilidade comparado ao EAS9 |
| EAS15 | 3v + 12c (25 a 27) + (28 a 39) | Melhor comportamento à flexão comparado ao EAS9 |
| EAS21 | 9v + 12c (25 a 27; 40 a 45) + (28 a 39) | Totalmente livre de travamento volumétrico e livra travamento de cisalhamento |
| EAS24 | 9v + 15c (25 a 27; 40 a 45) + (28 a 39; 46 a 48) | Totalmente livre de travamento cisalhamento e de volume |
| EAS30 | 12v + 18c (25 a 27; 40 a 45; 49 a 51) + (28 a 39; 46 a 48; 52 a 54) | Totalmente livre de travamento volumétrico e cisalhamento; Aplicados com malhas distorcidas |

Fonte: NGUYEN (2009).

5. DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL DO CONTÍNUO

5.1 INTRODUÇÃO

Para Felippa (2001), na análise não-linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos (MEF), três diferentes tipos de descrições cinemáticas lagrangianas têm sido utilizadas atualmente. Estas são: descrição lagrangiana total (LT), descrição lagrangiana atualizada (LA) e descrição co-rotacional (CR).

Na descrição lagrangiana total (LT), as equações do MEF são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura. Assim, os deslocamentos calculados numa análise incremental se referem a um mesmo referencial fixo (a origem).

A descrição lagrangiana atualizada (LA) caracteriza-se pelo fato das equações do MEF serem formuladas em relação à última configuração de equilíbrio. Para tanto, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga e, atingido o equilíbrio, os esforços internos e deformações passam a ser definidos a partir daquela nova configuração de equilíbrio.

A descrição co-rotacional está baseada na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais. A principal ideia da descrição CR consiste em adotar para cada elemento um sistema de coordenada local que rotaciona com o elemento e, dessa maneira, leva-se em conta a não linearidade geométrica. Neste sistema local, pode-se então usar a matriz de rigidez linear convencional.

Segundo Felippa (2001), a descrição cinemática co-rotacional é a mais recente das formulações utilizadas na análise não-linear geométrica de estruturas e, em função disto, ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento da formulação lagrangiana. Consequentemente, uma grande variedade de assuntos ainda pode ser pesquisada no âmbito dessa plataforma.

Neste capítulo faz-se um breve levantamento histórico da descrição co-rotacional. A formulação para contínuo bi e tridimensional é então descrita conforme originalmente apresentada por Moita (1994), Crisfield e Moita (1996) e Moita e Crisfield (1996).

5.2 BREVE HISTÓRICO DA PLATAFORMA CO-ROTACIONAL

Conforme apontado por Urthaler e Reddy (2005), a formulação CR tem origem no teorema da decomposição polar desenvolvido no âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos. De acordo com Truesdell (1966), esse foi estudado pela primeira vez por Cauchy em 1827 e, posteriormente, em problemas geológicos por Biot (1965) e estabelece que a deformação total de uma superfície contínua pode ser decomposta em um movimento de corpo rígido e uma deformação relativa. Outros avanços desta descrição cinemática se deram na indústria aeronáutica e aeroespacial nas décadas de 50 e 60 do século passado.

A extensão da ideia utilizada na indústria aeronáutica para a análise não-linear geométrica de estruturas utilizando o MEF baseou-se em um conceito bastante simples: ao invés de se utilizar um sistema de eixos único para a estrutura como um todo, deveria ser utilizado um sistema de eixos por elemento. Esta abordagem possibilitou o atendimento de uma premissa básica: que os deslocamentos e rotações deformacionais do elemento sejam pequenos em relação ao sistema de eixos local. Excluindo-se os movimentos de corpo rígido e trabalhando apenas com a parte deformacional, existe a possibilidade do uso dos melhores elementos finitos lineares em problemas envolvendo não linearidade geométrica.

O conceito da descrição cinemática CR foi introduzido em um contexto do MEF por Wempner (1969) em um estudo de rotações finitas de cascas flexíveis. Belytschko e Hsieh (1973) utilizam a abordagem em elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propõe um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominadas “*convected coordinates*”. Observa-se que estes trabalhos tem muito em comum com o conceito de decomposição do movimento de Argyris (1965), o qual foi inicialmente denominado de “aproximação natural”.

No ano de 1976, Oran estudou grandes deformações e a análise da estabilidade de pórticos estruturais. Fraeijs de Veubeke (1976) desenvolveu uma formulação co-rotacional para a análise dinâmica de estruturas na indústria aeronáutica, fazendo uso de um único sistema de eixos co-rotacionais para a estrutura como um todo (*shadow element*). Entretanto, este trabalho estava mais

voltado à uma solução analítica do problema, do que mediante uma formulação pelo MEF.

A adoção de um sistema de eixos para estrutura como um todo gerava uma série de dificuldades, de modo que o conceito de configuração fantasma (*shadow*) foi levado para o nível do elemento por vários pesquisadores, dentre eles Bergan e Horrigmoe (1976) e Bergan e Nygard (1986).

O conceito de uma configuração fantasma facilitou o entendimento da formulação co-rotacional e foi usado por vários autores para eliminar o movimento de corpo rígido de cada um dos elementos e com a parte deformacional remanescente realizar-se o cômputo do vetor de forças internas do elemento. Todavia, as derivadas do vetor de forças internas não foram utilizadas diretamente na montagem da matriz de rigidez tangente, o que conduziu a uma perda de consistência.

Belytschko e Glaum (1979) introduziram o termo “co-rotacional” para se referir ao movimento do sistema de coordenada local anexado ao elemento, e esta terminologia se tornou adotada na maior parte dos artigos publicados a partir de então.

Rankin e Brogan (1986) introduziram a formulação EICR – “*Element Independent Corotational Formulation*”, que foi posteriormente refinada por Rankin e Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid e Rankin (1991) e implementada no programa STAGS (Almroth *et al.*, 1979). A formulação EIRC não faz uso explícito do conceito “*shadow element*” na obtenção dos deslocamentos deformacionais, utilizando em vez disso operadores de projeção, processo bastante similar utilizado por Bergan e Nygard (1986). Estes autores usaram a formulação co-rotacional diretamente para obter uma matriz de rigidez tangente consistente.

A formulação proposta por Nour-Omid e Rankin (1991) ainda apresentava restrições no número de grau de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e manter simultaneamente a consistência da matriz de rigidez tangente. Haugen (1994) resolve este problema desenvolvendo um trabalho aplicado ao estudo de cascas planas discretizadas por elementos triangulares e quadrangulares que apresentavam o grau de liberdade de rotação

torcional, combinando a natureza invariável da formulação de Bergan e o equilíbrio e a consistência da formulação de Rankin.

Crisfield (1990) apresentou uma formulação consistente para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais. Peng e Crisfield (1992) apresentaram uma formulação consistente para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante.

Muitos trabalhos foram realizados com a finalidade de desenvolver elementos de viga e triangulares mas, a extensão da formulação co-rotacional para contínuo contava com a dificuldade da determinação do sistema de eixos que passasse no teste da parcela e que fosse independente da numeração nodal.

Em sua tese de doutorado, Moita (1994) apresentou o desenvolvimento de formulações em elementos finitos para o estudo do contínuo (bi e tridimensional). Inicialmente, uma introdução a problemas não lineares foi realizada através do desenvolvimento de elementos de membrana. Estes fazem uso da descrição lagrangiana total e são desenvolvidos para aplicações em estruturas hiperelásticas. Este autor então partiu da Mecânica do Contínuo para desenvolver elementos de deformação plana enriquecidos com modos de deslocamentos incompatíveis. Em seguida, o elemento é formulado dentro de uma abordagem não linear novamente com a técnica lagrangeana total. Apesar de funcionar bem, a nova formulação apresentou dificuldades de convergência quando aplicadas em análises no âmbito das grandes deformações. Para superar este problema, adotou-se a formulação co-rotacional e os elementos finitos lineares com modos incompatíveis. Essa abordagem permitiu então a extensão não convencional da formulação para o tratamento de problemas com grandes deformações.

Crisfield e Moita (1996) utilizou elementos incompatíveis e a formulação CR desenvolvida para o contínuo bidimensional. Moita e Crisfield (1996) mostraram a extensão do trabalho anterior para o contínuo tridimensional. Finalmente, Crisfield e Moita (1996) apresentaram uma plataforma unificada para a aplicação da formulação co-rotacional para a análise de sólidos, cascas e vigas sob o domínio das pequenas deformações.

Battini (2008) apresentou um elemento não-linear co-rotacional plano de baixa ordem para análise de estruturas sob grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Yaw, Sukumar e Kunnath (2009) apresentaram uma formulação CR *meshfree* para o contínuo bidimensional. Nota-se que no tocante à descrição cinemática, este artigo segue a mesma abordagem proposta por Crisfield e Moita (1996).

Polat (2010a) apresentou a formulação co-rotacional de um elemento sólido livre de travamentos. Para tanto, o mesmo foi enriquecido através do método EAS. Polat (2010b) apresentou a formulação co-rotacional de um elemento sólido-casca utilizando as técnicas EAS e ANS. Verifica-se que em ambos os trabalhos o autor adotou a mesma formulação proposta por Moita e Crisfield (1996) para descrever a cinemática do elemento no contínuo em três dimensões.

Na sua tese de doutorado, Mostafa (2011) apresentou um elemento sólido-casca não linear geométrico baseado nos conceitos ANDES, ANS e EAS. A formulação co-rotacional também é utilizada para análise não linear geométrica. Norachan, Suthasupradit e Kim (2012) apresentaram um elemento co-rotacional degenerado de 8 (oito) nós com ANS e EAS. Este foi utilizado para modelar estruturas com geometria do tipo parede delgada.

Zhen e Qin (2013) também desenvolveram um elemento sólido-casca livre de travamentos para análise não linear geométrica de estruturas tipo casca. A formulação CR é usada para permitir que o elemento linear seja utilizado para análise não linear geométrica.

Outras linhas de investigação veem se propondo a estudar problemas estruturais sob o enfoque dinâmico. Faroughi (2014), apresentou uma extensão da formulação de Battini (2008) para a análise de problemas dinâmicos não lineares.

Cho, Shin e Yoh (2017) propuseram elementos sólidos e sólido-cascas aplicáveis a estruturas sob movimentos prescritos. Termos centrífugos e inerciais foram deduzidos para analisar o comportamento do movimento da estrutura. Neste trabalho, componentes de deformação assumidas (*assumed strain*) foram definidas seguindo o princípio variacional de Hellinger–Reissner. Cho, Kim e Shin (2018) apresentaram uma formulação dinâmica não-linear baseada na abordagem co-

rotacional para elementos sólidos. Esta formulação, segundo os autores, é relativamente eficiente, mas baseada na hipótese de pequenas deformações durante os grandes deslocamentos e rotações desenvolvidos. A formulação dinâmica que foi apresentada é deduzida das equações de movimento de Lagrange.

Huang *et al* (2018) estenderam um elemento sólido-casca não linear denominado US-ATFHS8 para análise não linear geométrica por meio da formulação co-rotacional baseada na descrição lagrangeana atualizada. Problemas numéricos rigorosos foram avaliados tanto com malhas regulares quanto com malhas distorcidas.

Li *et al* (2018) apresentaram um elemento co-rotacional de casca quadrilátero curvo com um novo tratamento para rotações em interseções de estruturas multicascas dobradas. Para aliviar travamentos de membrana e de cisalhamento, os autores usaram a abordagem MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*).

Yang e Xia (2019) examinaram em detalhes os aspectos teóricos e computacionais do vetor de rotação e sua parametrização. Duas formulações de elementos co-rotacionais de casca livres de singularidades são apresentadas.

Dean, Safdar e Rolfes (2019) apresentaram uma formulação CR e implementaram um modelo de plasticidade anisotrópico para realização de análise não linear geométrica de estruturas de fibras de polímeros reforçadas.

Alguns trabalhos de pesquisa desenvolvidos no Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da UnB trataram da formulação co-rotacional, entre os quais:

- Cortivo (2004) estudou problemas de não linearidades física e geométrica de estruturas de cascas finas, no domínio de pequenas deformações, adotando o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento de von Mises. O autor utilizou, como ponto de partida, a formulação cinemática co-rotacional CSSE (*Consistent Simetrizable Self-equilibrated*), o elemento finito de casca linear elástico triangular de três nós ANDES (*Assumed Natural Deviatoric Strain*) e o método de comprimento de arco. Como extensão para acomodar a não-linearidade física (plasticidade),

- o autor adotou o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento plástico de von Mises, tanto para materiais com encruamento isotrópico quanto para materiais perfeitamente plásticos.
- o Menin (2006) aplicou a descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliça, vigas e cascas. No estudo de treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional puderam ser obtidas de forma exata, considerando apenas argumentos puramente geométricos. Para o caso de pórticos espaciais e cascas, os deslocamentos deformacionais foram obtidos utilizando operadores de projeção. Métodos indiretos como o parâmetro de rigidez *CSP – Current Stiffness Parameter* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez foram capazes de detectar e classificar com grande precisão a ocorrência de pontos críticos (limites ou de bifurcação) e *turning points*. Na resolução do sistema de equações não-lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio, foram implementados diversos métodos combinados com o método de Newton-Raphson completo.
 - o Belo (2009) desenvolveu a formulação co-rotacional em elementos finitos de casca para análises hiperelásticas. O autor avaliou o problema da não-linearidade material de estruturas submetidas a grandes deslocamentos e rotações. Elementos bidimensionais derivados do contexto da formulação de deformação deviatória natural (ANDES), da formulação co-rotacional de elemento independente (EICR) e do comprimento de arco são adaptados ao comportamento dos materiais hiperelásticos. Este tese foi realizada na Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a co-orientação do Prof. William Taylor Matias Silva (UnB).
 - o Silva (2011) estudou pórticos planos submetidos a grandes deslocamentos e rotações. O autor também avaliou o efeito da não-linearidade material por meio de um modelo de plasticidade unidimensional bilinear com encruamento isotrópico para integrar as tensões normais ao longo da altura da seção transversal dos elementos.

- Da Silva (2013) apresentou análises dinâmicas de pórticos espaciais fazendo uso da descrição cinemática co-rotacional. O autor utiliza o procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação incremental e as suas derivadas no tempo, para o tratamento dinâmico das rotações, velocidades e acelerações angulares. Para resolver os problemas dinâmicos é empregado o método de integração HHT- α em combinação com o método de Newton-Raphson.
- Cunha (2015) realizou análises não lineares geométrica de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional como descrição cinemática. As estruturas foram discretizadas com elementos de viga que unificam as teorias de Bernoulli e Timoshenko, denominados elementos de viga unificados. De acordo com o autor, a matriz de rigidez obtida neste trabalho apresenta fatores de correção que não permitem a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento.
- Oliveira (2016) descreveu a formulação co-rotacional de um elemento de viga unificado. Esta formulação engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, utilizadas para descrever problemas fortemente não-lineares e que não apresentam bloqueio por cisalhamento. O autor apresentou e implementou o método de comprimento de arco, que consiste em um método de solução numérica largamente utilizado e altamente robusto, capaz de traçar trajetórias de equilíbrio fortemente não-lineares com a presença de diversos pontos críticos.

Conforme apontado por Felippa (2001) e outros autores, dentre as principais vantagens da formulação co-rotacional em relação as outras formulações lagrangianas pode-se destacar:

- Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações, o que cobre uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais;
- Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial, se a formulação EICR for empregada;

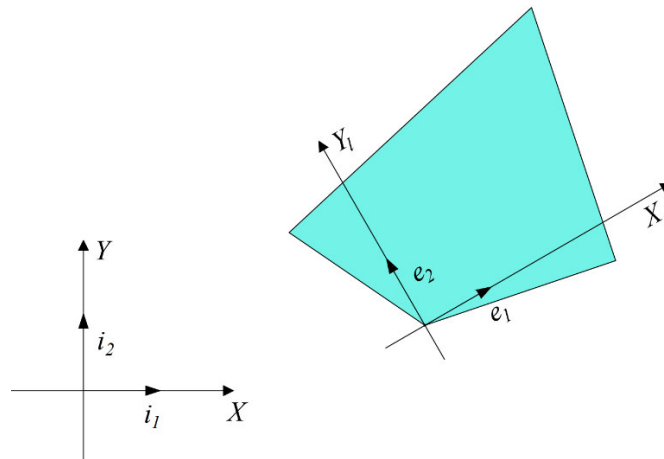
- Decompõe não-linearidades materiais, caracterizadas por pequenas deformações, de não-linearidades geométricas;
- Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas lagrangianas;
- Facilidade de interface com programas envolvendo *multibody dynamics* (MBD);
- Pode levar a uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Entretanto, conforme já foi apresentado por um grande número de pesquisadores, pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar os resultados finais ou mesmo o grau de convergência da solução.

Ainda de acordo com o autor antes mencionado, dentre as desvantagens dessa descrição cinemática do movimento, destacam-se:

- A formulação co-rotacional não é vantajosa no estudo de problemas envolvendo grandes deformações plásticas.
- Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação.

5.3 DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL INDEPENDENTE DO ELEMENTO (EICR)

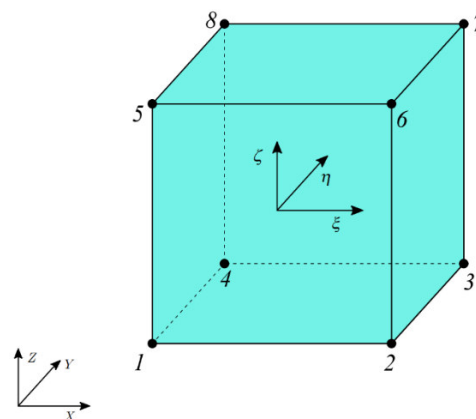
Numa formulação co-rotacional “independente do elemento” uma dada classe de elementos (isto é, um grupo de elementos que apresentam o mesmo número de nós e graus de liberdade) pode ser analisada com relação a um sistema de coordenada local pré-estabelecido e fixo em cada elemento. A não linearidade geométrica é introduzida pela rotação deste sistema local, no qual uma matriz de rigidez linear convencional pode ser utilizada. Essa abordagem fornece uma maneira fácil de introduzir não linearidade geométrica com elementos lineares existentes. Conhecendo-se a configuração atual do elemento (Figura 5.1), o sistema local é definido por meio das bases vetoriais e_1-e_3 .

Figura 5.1 – Bases vetoriais local e global.

O sistema de coordenadas local tem a origem sobre um dos nós e é definido de forma diferente conforme o tipo de elemento. Para elementos de viga 2-D ou para um elemento de casca triangular, o sistema local pode ser deduzido diretamente das coordenadas dos nós. No caso de vigas 3-D e elementos de casca quadrilátero se pode também obter este sistema por meio de um processo relativamente simples. Para o contínuo, a definição destes eixos locais é menos simples e, neste momento, com o intuito de inicialmente descrever a estrutura da formulação co-rotacional EICR, será assumido que estes eixos já são conhecidos.

Seja um elemento finito arbitrário dado na Figura 5.2. O sistema de coordenada local é definido pelo pré-estabelecimento das bases vetoriais (e_1, e_2, e_3) . Os deslocamentos nodal global estão relacionados aos deslocamentos local por alguma espécie de relação cinemática dada por:

$$u_l = f(u_g, e_1, e_2, e_3) \quad (5.1)$$

Figura 5.2 – Elemento sólido de oito nós.

Neste trabalho, os valores locais serão escritos com um subíndice l , enquanto que valores globais terão subíndice g . Desta maneira, u_l e u_g representa os deslocamentos nodais local e global, respectivamente.

Em virtude de, no nível local do elemento, a formulação utilizar a matriz linear convencional B_l , o vetor de forças internas para o sistema local pode ser calculado por meio de,

$$f_{il} = \int B_l^T \sigma_l dV_0 = K_l u_l \quad (5.2)$$

em que B_l é a matriz convencional local que relaciona as deformações de engenharia aos deslocamentos locais; σ_l são as tensões locais; e K_l é a matriz de rigidez tangente linear local convencional para pequenas deformações. Com grandes deformações ou plasticidade, aplica-se o lado esquerdo da Equação 5.2. No âmbito linear-elástico, pode-se simplesmente utilizar o lado direito.

Da variação da Equação 5.1 surge a matriz de transformação T , a qual relaciona a variação entre os deslocamentos local e global:

$$\delta u_l = T \delta u_g \quad (5.3)$$

Da equivalência entre o trabalho virtual nos sistemas local e global pode-se produzir a relação entre os vetores de forças internas global e local na forma,

$$f_{ig} = T^T f_{il} = T^T K_l u_l \quad (5.4)$$

em que o termo do lado direito na Equação 5.4 aplica-se a pequenas deformações e elasticidade linear.

Para obter a matriz de rigidez tangente global, diferencia-se a Equação 5.4. Desse modo, tem-se que:

$$\delta f_{ig} = T^T \delta f_{il} + \delta T^T f_{il} = T^T \bar{K}_{il} \delta u_l + K_{l\sigma} \delta u_g = \underbrace{T^T \bar{K}_{il} T}_{K_{ig}} \delta u_g + K_{l\sigma} \delta u_g \quad (5.5)$$

Nota-se que $K_{l\sigma}$ é a matriz de tensão inicial, enquanto \bar{K}_{il} é a matriz de rigidez tangente local. Com pequenas deformações e elasticidade linear, $\bar{K}_{il} = K_l$.

Neste trabalho se utiliza a técnica EAS e o método dos modos incompatíveis para aumentar a performance dos elementos. Como se pode verificar nos Capítulos

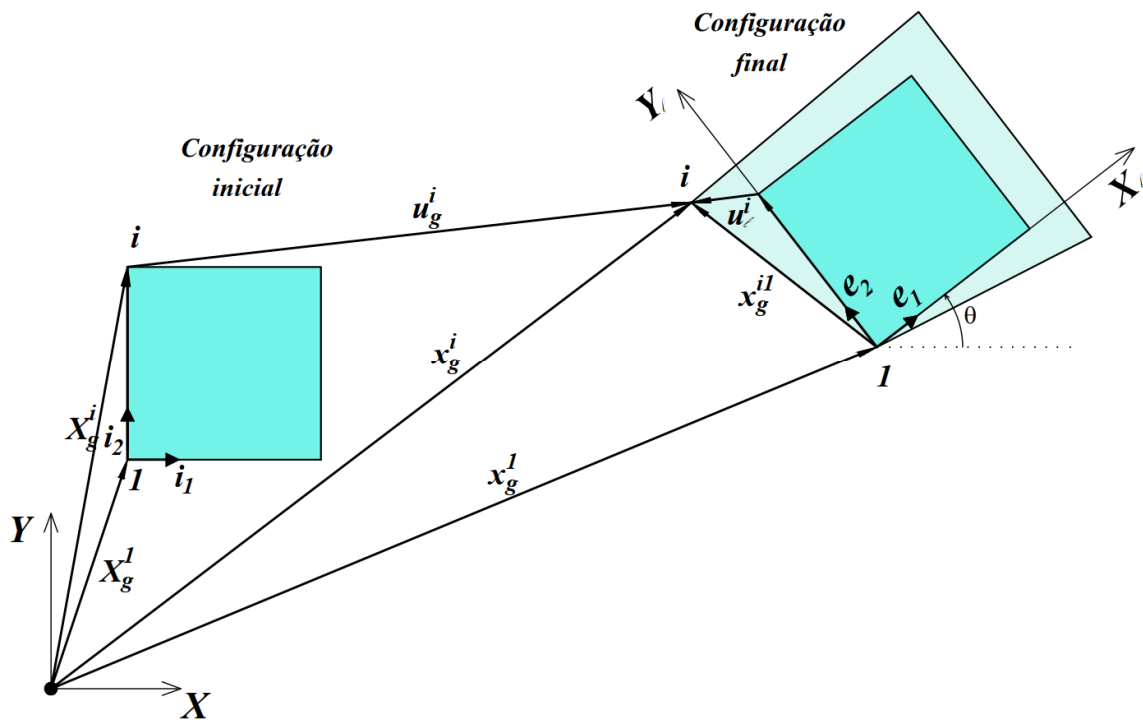
3 e 4, o emprego dessas metodologias acarretam na seguinte modificação na matriz de rigidez local: $\bar{K}_{il} = K_{uu} - K_{au}^T K_{aa}^{-1} K_{au}$.

Nas sessões 5.4 e 5.5 a seguir serão apresentadas as deduções completas da matriz $K_{i\sigma}$ para os domínios bi e tridimensional, respectivamente.

5.4 APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL AO CONTÍNUO 2-D

Seja o elemento contínuo bidimensional apresentado na Figura 5.3. Observando a sua cinemática é possível identificar que no quadrilátero ocorre uma translação seguida de uma rotação (movimentos de corpo rígido) entre a configuração inicial e uma nova configuração. Posteriormente, o mesmo sofre um processo de deformação atingindo dessa forma sua configuração final.

Figura 5.3 – Sistemas de coordenadas locais e global para o contínuo 2-D.



A rotação do sistema local do elemento pode ser definida através da base vetorial e_1-e_2 e expressa em termos do ângulo θ . A referida base é dada vetorialmente por:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Usando os vetores definidos na Equação 5.6 pode-se estabelecer a configuração atual do nó i por meio da seguinte expressão:

$$x_g^i - x_g^l = (X_g^i - u_g^i) - (X_g^l - u_g^l) = [e_1 \quad e_2] (X_l^i + u_l^i) = E^i (X_l^i + u_l^i) \quad (5.7)$$

Em que:

- x_g define as coordenadas atuais;
- X_g define as coordenadas iniciais;
- u_g^i contém os deslocamentos globais total no nó i (isto é, u_g^i e v_g^i);
- x_g^i contém as coordenadas nodais atuais do nó i , (isto é, x_g^i e y_g^i).

Ao se assumir que o sistema local inicial coincide com a direção do sistema global, a geometria inicial do elemento pode ser definida por:

$$X_l^i = X_g^i - X_g^l \quad (5.8)$$

Pode-se perceber que este vetor representa as coordenadas materiais do nó i no sistema de coordenadas local e possui o mesmo módulo em ambos os sistemas (local e global).

Da Equação 5.7 tem-se que o vetor de deslocamentos locais (movimento deformacional) do nó i é expresso por:

$$u_l^i = (E^i)^T x_g^{il} - X_l^i \quad (5.9)$$

5.4.1 Determinação do sistema de eixos locais

De acordo com Crisfield e Moita (1996), vários métodos foram utilizados para definir o sistema local, entretanto eles geralmente falhavam no teste da parcela para grandes deformações, o qual no nível mais básico, significa que para um gradiente de deformações constante, uma parcela dos elementos deve responder com as mesmas deformações constantes nos pontos de Gauss de cada elemento.

Para superar este problema, adota-se a estratégia proposta por Jetteur e Cescotto (1991) na qual se assume que o *spin* no centróide do elemento na configuração atual é zero. Assim:

$$\Omega_l = \frac{\partial u_l}{\partial Y_l} - \frac{\partial v_l}{\partial X_l} = 0 \quad (5.10)$$

Esta técnica permite o cálculo do ângulo θ (e com isso, as base vetoriais $e_1 - e_2$). A Equação 5.10 pode ser representada, em termos das funções de forma por:

$$\Omega_l = a_l (X_l)^T u_l = 0 \quad (5.11)$$

em que:

$$\mathbf{a}_l = \begin{Bmatrix} (J_0^{-1}(2,1)N_\xi^1 + J_0^{-1}(2,2)N_\eta^1) \\ -(J_0^{-1}(1,1)N_\xi^1 + J_0^{-1}(1,2)N_\eta^1) \\ (J_0^{-1}(2,1)N_\xi^2 + J_0^{-1}(2,2)N_\eta^2) \\ -(J_0^{-1}(1,1)N_\xi^2 + J_0^{-1}(1,2)N_\eta^2) \\ (J_0^{-1}(2,1)N_\xi^3 + J_0^{-1}(2,2)N_\eta^3) \\ -(J_0^{-1}(1,1)N_\xi^3 + J_0^{-1}(1,2)N_\eta^3) \\ (J_0^{-1}(2,1)N_\xi^4 + J_0^{-1}(2,2)N_\eta^4) \\ -(J_0^{-1}(1,1)N_\xi^4 + J_0^{-1}(1,2)N_\eta^4) \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

e:

$$\mathbf{u}_l^T = \{u^1 \quad v^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad u^3 \quad v^3 \quad u^4 \quad v^4\}^T \quad (5.13)$$

Por sua vez:

- J_0 é o Jacobiano calculado no centróide do elemento;
- N_ξ^i e N_η^i são as derivadas das funções de forma com relação as coordenadas naturais ξ e η , respectivamente, novamente calculadas no centróide do elemento. O superíndice i relacionado a numeração nodal.

O vetor \mathbf{a}_l é função de X_l (via J_0) sendo, portanto fixo. Uma dedução completa desse vetor (ou matriz para o caso tridimensional) é dada no Apêndice A. Conhecendo-se o deslocamento global total \mathbf{u}_g , o deslocamento local \mathbf{u}_l pode ser calculado com o ângulo θ (o qual define \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2). Este torna-se portanto a única incógnita.

Então, das Equações 5.11 e 5.12, após manipulações algébricas, tem-se que:

$$\Omega_l = a \sin \theta + b \cos \theta - c = 0 \quad (5.14)$$

com

$$a = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_g; \quad b = \mathbf{d}^T \mathbf{x}_g; \quad c = \mathbf{a}_l^T X_l \quad (5.15)$$

Pode-se demonstrar que $c = 0$ fazendo essa variável igual a:

$$c = \sum N_y^i X_l^i - \sum N_x^i Y_l^i \quad (5.16)$$

ou, por meio de:

$$c = \frac{\partial X_i}{\partial Y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \quad (5.17)$$

Sendo nula cada parcela da Equação 5.17, isto é, $\partial X_i/\partial Y_i=0$ e $\partial Y_i/\partial X_i=0$, tem-se finalmente que $c = 0$.

Observa-se que o vetor c na Equação 5.15 pode ser escrito como:

$$c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} a_i \quad (5.18)$$

e d por:

$$d = a_i$$

Por meio da Equação 5.14 obtém-se:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) \quad (5.19)$$

De acordo com Jetteur e Cescotto (1991), utilizando o ângulo θ dado na Equação 5.19, o elemento passa satisfatoriamente no teste da parcela para grandes deformações.

5.4.2 Dedução da matriz de transformação

A matriz de transformação T apresentada na Equação 5.3 é obtida mediante a variação da Equação 5.7 e envolverá as variações das bases vetoriais e_1-e_2 que por sua vez, por meio da Equação 5.6, envolverá a diferenciação da Equação 5.19. A diferenciação da Equação 5.7 produz:

$$\delta u_g^i = [e_1 \quad e_2] \delta u_i^i + x_i^i \delta e_1 + y_i^i \delta e_2 \quad (5.20)$$

Com o objetivo de obter uma expressão que estabeleça uma relação entre a variação dos deslocamentos local e a variação dos deslocamentos global, parte-se inicialmente da determinação da variação de e_1 e e_2 . Assim:

$$\delta e_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \delta\theta = e_2 \delta\theta, \quad \delta e_2 = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \delta\theta = -e_1 \delta\theta \quad (5.21)$$

A diferenciação da Equação 5.19 pode ser obtida mediante a formulação básica do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, $d(\tan^{-1}u)/dx = 1/(1+u^2) du/dx$.

Dessa forma:

$$\delta\theta = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \delta(-ba)^{-1} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} (\delta b a^{-1} + a^{-2} b \delta a) = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{b \delta a}{a^2} + \frac{a \delta b}{a^2} \right) \quad (5.22)$$

que após algum algebrismo resulta em:

$$\delta\theta = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \delta a - a \delta b) = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \mathbf{c}^T - a \mathbf{d}^T) \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (5.23)$$

Substituindo a Equação 5.23 na Equação 5.21 e este resultado dentro da Equação 5.20, tem-se que:

$$\delta \mathbf{u}_g^i = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \delta \mathbf{u}_i + x_i^i \mathbf{e}_2 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u} - y_i^i \delta \mathbf{e}_1 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (5.24)$$

Isolando do lado esquerdo os deslocamento locais do nó i na Equação 5.24 chega-se a:

$$\delta \mathbf{u}_i^i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i - x_i^i \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 - y_i^i \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \quad (5.25)$$

Assim, para um elemento, a Equação 5.25 pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{u}_i = (\mathbf{E} + \bar{\mathbf{x}}_i \mathbf{v}^T) \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{T} \delta \mathbf{u}_g \quad (5.26)$$

em que \mathbf{T} representa a matriz de transformação para a formulação co-rotacional e é fundamental em seu desenvolvimento. A matriz \mathbf{E} e o vetor $\bar{\mathbf{x}}_i$ são dados respectivamente por:

$$\mathbf{E} = \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \{y_i^1 \quad -x_i^1 \quad y_i^2 \quad -x_i^2 \quad y_i^3 \quad -x_i^3 \quad y_i^4 \quad -x_i^4\} \quad (5.28)$$

5.4.3 Obtenção da matriz de rigidez geométrica

A matrizes de rigidez do elemento é obtida a partir da variação do vetor de forças internas global $\delta \mathbf{f}_{ig}$ expresso pela Equação 5.5. A primeira parte da Equação 5.5 pode ser obtida da variação de $\delta \mathbf{f}_{il}$ (o vetor de força interna local é definido na Equação 5.2). Desse modo:

$$\delta \mathbf{f}_{il} = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV_0 \delta \mathbf{u}_l = \mathbf{K}_{il} \delta \mathbf{u}_l \quad (5.29)$$

Substituindo a Equação 5.26 na Equação 5.29, e o resultado produzido no primeiro termo do lado direito da Equação 5.5, obtém-se a primeira contribuição para a matriz de rigidez do elemento:

$$\mathbf{K}_{ig} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{il} \mathbf{T} \quad (5.30)$$

A segunda contribuição é a matriz de rigidez tensão inicial $\mathbf{K}_{\sigma g}$ a qual deriva da variação da matriz de transformação. Assim, do segundo termo do lado direito da Equação 5.5 tem-se que:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{il} = \mathbf{K}_{\sigma g} \delta \mathbf{u} \quad (5.31)$$

Relembrando a definição da matriz de transformação \mathbf{T} expressa pela Equação 5.26, verifica-se que a sua transposta é dada por:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{E}^T + \mathbf{v} \bar{\mathbf{x}}_l^T \quad (5.32)$$

O lado direito da Equação 5.31 pode ser representada por meio do seguinte somatório:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{il} = (\delta \mathbf{T}^1)^T \mathbf{f}_{il}^1 + (\delta \mathbf{T}^2)^T \mathbf{f}_{il}^2 + (\delta \mathbf{T}^3)^T \mathbf{f}_{il}^3 + \dots = \sum_{j=1}^8 (\delta \mathbf{T}^j)^T \mathbf{f}_{il}^j \quad (5.33)$$

em que:

- $(\delta \mathbf{T}^j)^T$ é a j-ésima coluna de $\delta \mathbf{T}^T$;
- \mathbf{f}_{il}^j é a j-ésima componente de \mathbf{f}_{il} .

Considerando apenas o primeiro termo do somatório na Equação 5.33, tem-se que:

$$(\delta \mathbf{T}^1)^T \mathbf{f}_{il}^1 = f_{il}^1 \delta \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{e}_l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} + y_l^1 \mathbf{v} \left\{ \right\} = f_{il}^1 \mathbf{G}^1 \delta \mathbf{u}_g \quad (5.34)$$

Desse modo, é necessário calcular $\mathbf{G}^l \delta \mathbf{u}_g$. Para tanto, desenvolve-se a parte central da Equação 5.34, de modo que:

$$\mathbf{G}^l \delta \mathbf{u}_g = \delta \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}_l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} + y_l^l \mathbf{v} = \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}_l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}}_{\text{Parte 1}} \delta \theta + \delta y_l^l \mathbf{v} + \underbrace{y_l^l \delta \mathbf{v}}_{\text{Parte 2}} \quad (5.35)$$

Observa-se que δy_l^l é obtida da Equação 5.26 cujo resultado (ver detalhadamente no Apêndice B) é:

$$\delta y_l^l = \left\{ \left[\mathbf{e}_2^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] - x_l^l \mathbf{v}^T \right\} \delta \mathbf{u}_g \quad (5.36)$$

Trabalha-se inicialmente com a parte 1 do lado direito da igualdade na Equação 5.35, o que resulta na primeira submatriz da matriz \mathbf{G}^l . Assim, das Equações 5.34, 5.35 e 5.36, $\mathbf{G}^{l,a}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{G}^{l,a} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}^T - x_l^l \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (5.37)$$

que é uma matriz simétrica.

O desenvolvimento da parte 2 do lado direito da Equação 5.35, no qual é necessário o cálculo de $\delta \mathbf{v}$, produz a outra submatriz de \mathbf{G}^l . O vetor \mathbf{v} já definido na Equação 5.23 é reescrito como:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{(a^2+b^2)} b \mathbf{c} - a \mathbf{d} = \frac{1}{(a^2+b^2)} \left[\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T \right] \mathbf{x}_g \quad (5.38)$$

em que \mathbf{x}_g é o vetor contendo as coordenadas atualizadas no sistema global. A diferenciação de \mathbf{v} leva a:

$$\delta \mathbf{v} = \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \left[2ab(\mathbf{d} \mathbf{d}^T - \mathbf{c} \mathbf{c}^T) + (a^2 - b^2)(\mathbf{c} \mathbf{d}^T + \mathbf{d} \mathbf{c}^T) \right] \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{V}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (5.39)$$

em que a matriz \mathbf{V} também é simétrica. Uma dedução completa da obtenção de $\delta \mathbf{v}$ é mostrada no Apêndice C. A matriz \mathbf{V}^T é idêntica àquela presente em Crisfield e Moita (1996), mas com uma pequena diferença que naquele trabalho o termo no denominador não se encontra elevado ao quadrado. Conforme apontado por Yaw,

Sukumar e Kunnath (2008), isso poderia tratar-se de um erro meramente tipográfico. Finalmente, a segunda submatriz de \mathbf{G}^l é obtida e expressa por:

$$\mathbf{G}^{l,b} = y_l^l \mathbf{V}^T \quad (5.40)$$

Conforme mostrado por Moita (1994), esta última parcela $\mathbf{G}^{l,b}$, a qual inclui a variação δv , não tem efeito significativo sobre a convergência e pode, portanto, ser negligenciada. Uma discussão acerca dessa questão pode ser encontrada em Nour-Omid e Rankin (1991) e, mais recentemente, em Rankin (2006).

A substituição das Equações (5.37) e (5.40) em (5.35) produz a forma final da matriz \mathbf{G}^l a qual é dada por:

$$\mathbf{G}^l = \mathbf{G}^{l,a} + \mathbf{G}^{l,b} \quad (5.41)$$

Voltando novamente a atenção para as Equações 5.33 e 5.34, verifica-se que a matriz \mathbf{G}^l representa apenas a contribuição do primeiro termo do somatório. Todas as outras matrizes $\mathbf{G}^{j,s}$ são determinadas de maneira similar e estão demonstradas no Apêndice B. Tendo obtido as $\mathbf{G}^{j,s}$ remanescentes, a forma final da matriz de tensão inicial (ou geométrica) é dada por:

$$\mathbf{K}_{\sigma g} = \sum_{j=1}^8 f_{il}^j \mathbf{G}^j \quad (5.42)$$

Por fim, a matriz de rigidez tangente global, de acordo com a Equação 5.5, é dada por:

$$\delta \mathbf{f}_{ig} = \underbrace{\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_{il} \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_{ig}} \delta \mathbf{u}_g + \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g = \bar{\mathbf{K}}_{ig} \delta \mathbf{u}_g + \mathbf{K}_{\sigma g} \delta \mathbf{u}_g \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_t = \bar{\mathbf{K}}_{ig} + \mathbf{K}_{\sigma g} \quad (5.43)$$

A matriz de rigidez tangente final \mathbf{K}_t é simétrica, uma vez que ambas as parcelas da Equação 5.41 são simétricas.

5.5 APLICAÇÃO DA DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL AO CONTÍNUO 3-D

Parte-se de uma análise das deformações no plano em um elemento quadrilátero para em seguida estender o procedimento para um elemento sólido.

5.5.1 Obtenção do sistema de eixos local

Primeiro é necessário obter o sistema de coordenadas nodais local inicial do elemento. Conforme pode-se verificar na Figura 5.3, usando os sistemas de coordenadas global pode-se obter essas coordenadas pela translação da origem

do sistema global para o nó l do elemento. Assim, as coordenadas locais para o nó i são dadas por:

$$\mathbf{X}_l^i = \mathbf{X}_g^i - \mathbf{X}_g^l \quad (5.44)$$

Contudo, os eixos locais precisam ainda ser determinados dentro do processo não linear. Conforme mostrado por Crisfield e Moita (1996), estes eixos são usados para mapear a configuração inicial do elemento para a configuração final dele. No âmbito bidimensional, para se determinar o sistema local e, ao mesmo tempo, para que o elemento passasse no teste da parcela, recorreu-se à abordagem proposta originalmente por Jetteur e Cescotto (1991), onde se assume que o *spin* local no centroide do elemento é nulo. A fim de estender este conceito para três dimensões, mostra-se que a matriz de rotação da decomposição $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ no centroide do elemento pode ser usada e, dessa forma, se consegue determinar os vetores base rotacionados os quais definem o sistema local.

Para demonstrar a última afirmação do parágrafo anterior, pode-se examinar as deformações mostradas na Figura 5.3 e, ao comparar com a Figura 5.4, nota-se que elas são equivalentes. A última ilustra um processo por meio do qual o elemento é estirado e por último rotacionado, enquanto a primeira representa uma rotação seguida de um estiramento. Desse modo, pode-se trabalhar com a situação dada pela Figura 5.4, a qual representa uma decomposição polar $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.

Conforme apontado por Moita e Crisfield (1996), rigorosamente, a analogia utilizada anteriormente pode ser empregada apenas para deformações homogêneas, isto é, deformações com gradiente de deformação \mathbf{F} constante. Contudo, na formulação co-rotacional aqui apresentada, esta abordagem será aplicada no centroide do elemento. Assim, pode-se escrever $\mathbf{R} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]$ e, como pode ser visto na Figura 5.4, \mathbf{R} rotaciona as bases vetoriais \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 para uma nova configuração \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 que representa o sistema de coordenadas local ou, em outras palavras, as bases vetoriais co-rotacionadas. Analogamente, para a formulação tridimensional, \mathbf{R} é calculada de \mathbf{F} no centróide e é dada por,

$$\mathbf{R} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad (5.45)$$

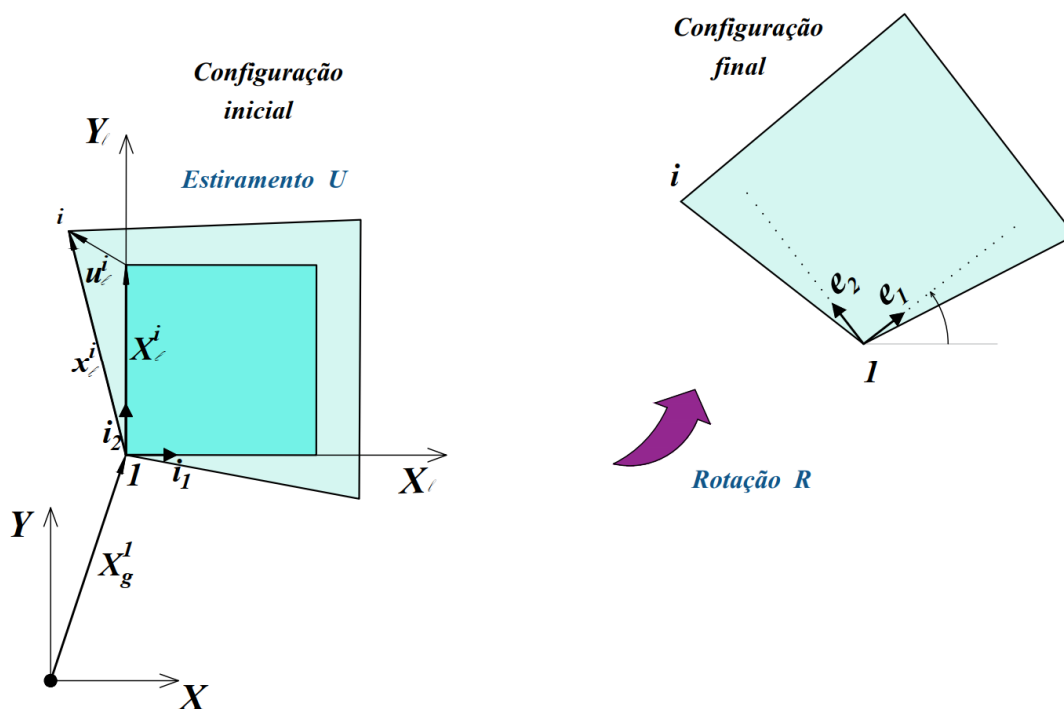
em que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são os três vetores unitários da transformação.

Como ilustrado em um plano 2-D na Figura 5.4, as coordenadas atuais do nó i é dada explicitamente por:

$$\mathbf{x}_l^i = \mathbf{X}_l^i + \mathbf{u}_l^i = \mathbf{R}^T (\mathbf{x}_g^i - \mathbf{x}_g^l) = \mathbf{R}^T \mathbf{x}_g^{il} \quad (5.46)$$

em que \mathbf{x}_l^i e \mathbf{x}_g^i são as coordenadas atuais para o nó i nos sistemas local e global, respectivamente e, \mathbf{u}_l^i é o vetor de deslocamento local (movimento deformacional) do referido nó.

Figura 5.4 – Decomposição polar - estiramento seguida de uma rotação.



Sendo $\mathbf{x}_l = \mathbf{X}_l + \mathbf{u}_l$, conforme verifica-se por meio das Figuras 5.3 e 5.4, no centroide do elemento pode-se escrever:

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{x}_l}{\partial \mathbf{X}_l} = \left[\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial \mathbf{X}_l} \right] = \mathbf{I} + \mathbf{D}_l \quad (5.47)$$

em que \mathbf{D}_l é a matriz derivada dos deslocamentos locais. Também pode-se escrever as deformações de engenharia (ainda no centroide) por meio de:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_l + \mathbf{D}_l^T) \quad (5.48)$$

As Equações 5.47 e 5.48 levam a expressão para as deformações de engenharia local ser dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \frac{1}{2} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T - \mathbf{I} = \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (5.49)$$

Na Equação 5.49 usa-se a propriedade da simetria da matriz de estiramento direito U e as relações expressas pelas Equações 5.47 e 5.48 também são válidas para o caso tridimensional. A última equação representa uma expressão equivalente à deformação de Biot e foi utilizada por Moita e Crisfield (1996) para estender a formulação aqui apresentada ao estudo de hiperelasticidade.

Enquanto uma decomposição polar é aplicada no centroide do elemento para obter R , as deformações locais nos pontos de Gauss não são calculadas por este instrumento. Assim, em vez de se utilizar a Equação 5.49, recorre-se à matriz linear convencional B_l e aos deslocamentos locais u_l , sendo estes últimos calculados mediante a Equação 5.46. Assim, tem-se que $\varepsilon_l = B_l u_l$.

O procedimento usado para determinar o sistema de eixos local neste trabalho está de acordo com as hipóteses feitas em duas dimensões uma vez que ele também produz *spin* zero no centroide. Isto é verdade, uma vez que $D_l = D_l^T$ e $\Omega_l = D_l - D_l^T$.

Na decomposição polar $F = RU$, U é o tensor de estiramento direito. A matriz de rotação R pode ser determinada através da determinação dos autovalores do tensor Cauchy-Green direito. A fim de deduzir a matriz de rotação R , obtém-se a matriz gradiente de deformação F . Esta pode ser calculada por meio do vetor gradiente de deslocamento global θ_g o qual é dado vetorialmente por:

$$\theta_g^T = \left(\frac{\partial u}{\partial X} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} \quad \frac{\partial u}{\partial Z} \quad \frac{\partial v}{\partial X} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \frac{\partial v}{\partial Z} \quad \frac{\partial w}{\partial X} \quad \frac{\partial w}{\partial Y} \quad \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \quad (5.50)$$

De θ_g pode-se formar a matriz derivada dos deslocamentos global, aqui representada por D_g . Assim, a matriz F pode ser obtida de D_g por meio de:

$$F = I + D_g \quad (5.51)$$

O tensor de Green-Cauchy pode ser calculado mediante:

$$\begin{aligned} C = F^T F &= \lambda_1^2 N_1 N_1^T + \lambda_2^2 N_2 N_2^T + \lambda_3^2 N_3 N_3^T \\ &= Q(N) \left[\text{diag}(\lambda_i^2) \right] Q(N)^T \end{aligned} \quad (5.52)$$

Os estiramentos principais e as direções principais pode ser obtido por meio da solução do problema de autovalor expresso por:

$$[C - \lambda^2 I] N = 0 \quad (5.53)$$

Antes de determinar a matriz R se faz necessário calcular a matriz de estiramento direito U a qual pode ser expressa por:

$$U = \lambda_1 N_1 N_1^T + \lambda_2 N_2 N_2^T + \lambda_3 N_3 N_3^T \quad (5.54)$$

Assim, utilizando a decomposição polar, a matriz de rotação pode ser obtida por:

$$R = F U^{-1} \quad (5.55)$$

A matriz R define o movimento entre a configuração atual e inicial do sistema e também pode ser escrita como:

$$R = Q(n)Q(N)^T \quad (5.56)$$

onde, conforme Crisfield (1991), n é o equivalente de N em relação a tríade euleriana.

5.5.2 Obtenção da matriz de transformação T

Da Equação 5.46 pode-se obter os deslocamentos locais que são dados por:

$$u_l^i = R^T (x_g^i - x_g^l) - X_l^i \quad (5.57)$$

A derivada da Equação 5.57 fornece a relação entre a variação dos deslocamentos locais e a variação dos deslocamentos globais. Assim,

$$\delta u_l^i = \delta R^T x_g^{il} + R^T \delta u_g^{il} \quad (5.58)$$

Observa-se que a Equação 5.58 assegurará que δu_l^l seja zero, isto é, $\delta u_l^l = \delta R^T x_g^{ll} + R^T \delta u_g^{ll} = 0$. No entanto, de acordo com Moita e Crisfield (1996), esta equação torna-se mais simples ao ser modificada por meio da adição de $\delta R^T \delta u_g^l$ a cada vetor de variação de deslocamentos nodal local. Ainda, segundo os autores supracitados, se nos cálculos locais do elemento os requerimentos de corpo rígido livre de deformação infinitesimal são satisfeitos, tal modificação não terá qualquer efeito. Assim:

$$\delta u_l^i = \delta R^T x_g^{il} + R^T \delta u_g^i \quad (5.59)$$

Uma breve estudo sobre as rotações no espaço e a dedução da variação da matriz R usada na Equação 5.59 é descrita no Apêndice E. Então, tem-se que:

$$\delta R = S(\delta\theta)R \quad (5.60)$$

Em que $S(\delta\theta)$ é uma matriz antissimétrica dada por:

$$\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

e $\delta\theta_1 - \delta\theta_3$ são os componentes do pseudo vetor $\delta\boldsymbol{\theta}$. Observa-se que a relação $\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta})^T = -\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta})$ é válida para uma matriz antissimétrica. Outra importante relação que vem do produto vetorial $\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0$ e será utilizada nas equações posteriores é:

$$\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta})\mathbf{r}_0 = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_0 \times \delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{S}(\mathbf{r}_0)\delta\boldsymbol{\theta} \quad (5.62)$$

A variação da Equação 5.59 pode agora ser obtida. Da Equação 5.60 tem-se que:

$$\delta\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^T\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (5.63)$$

Conseqüentemente, pelo uso da Equação 5.62 segue que:

$$\delta\mathbf{u}_l^i = \mathbf{R}^T\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{il})\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}^T\delta\mathbf{u}_g^i = \mathbf{Z}^i\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}^T\delta\mathbf{u}_g^i \quad (5.64)$$

em que $\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{il})$ é uma matriz antissimétrica dada por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{il}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_g^{il} & -y_g^{il} \\ z_g^{il} & 0 & -x_g^{il} \\ y_g^{il} & x_g^{il} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

A variação do vetor de deslocamento local no nível do elemento é obtida reescrevendo a Equação 5.64:

$$\delta\mathbf{u}_l = \underbrace{[\text{col } \mathbf{Z}^i]}_{\mathbf{Z}}\delta\boldsymbol{\theta} + [\text{diag } \mathbf{R}^T]\delta\mathbf{u}_g \quad (5.66)$$

Onde $[\text{col } \mathbf{Z}^i]$ é uma matriz 24×3 formada pela disposição de cada matriz 3×3 nodal \mathbf{Z}^i dentro de uma matriz coluna \mathbf{Z} . Em seguida, determina-se $\delta\boldsymbol{\theta}$ a ser utilizado na Equação 5.66. Para tanto, recorre-se a um procedimento similar a aquele adotado no caso bidimensional. Se um vetor *spin* $\boldsymbol{\Omega}$ é definido localmente, tem-se que:

$$\boldsymbol{\Omega}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_l}{\partial Y_l} - \frac{\partial v_l}{\partial X_l} \\ \frac{\partial u_l}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_l}{\partial X_l} \\ \frac{\partial v_l}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_l}{\partial Y_l} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_l^T \mathbf{u}_l \quad (5.67)$$

em que Ω_l é um pseudo vetor de rotações locais; A_l é uma matriz 24×3 e está totalmente demonstrada no Apêndice A. Os valores de A_l são função de X_l (via Jacobiano calculado no centróide do elemento J_0), sendo portanto fixos. Assim, sem rotações sendo produzidas no centroide, tem-se que:

$$\Omega_l = \mathbf{0} \quad (5.68)$$

Diferenciando a Equação 5.67, obtém-se:

$$\delta \Omega_l = A_l^T \delta u_l = A_l^T \left[\text{diag } R^T \right] \delta u_g + A_l^T Z \delta \theta = \mathbf{0} \quad (5.69)$$

da qual, isolando a variação do pseudo vetor de rotação:

$$\delta \theta = - \left[A_l^T Z \right]^{-1} A_l^T \left[\text{diag } R^T \right] \delta u_g = V^T \delta u_g \quad (5.70)$$

A matriz V tem dimensão 24×3 . A substituição da Equação 5.70 na Equação 5.66 produz, finalmente, a matriz de transformação T .

$$\delta u_l = \left[\left[\text{diag } R^T \right] + Z V^T \right] \delta u_g = T \delta u_g \quad (5.71)$$

5.5.3 Obtenção da matriz de rigidez tangente consistente global

O vetor de forças internas locais f_{il} para um elemento sólido de 8 nós pode ser determinado pela equação:

$$f_{il} = \int B_l^T \sigma_l dV_0 \quad (5.72)$$

onde B_l é a matriz deformação-deslocamento, e σ_l é o vetor de tensão local.

Tendo definido a relação entre a variação dos deslocamentos local e global, o princípio dos trabalhos virtuais mais uma vez é usado para estabelecer a relação entre os vetores de força interna local e global, de modo que,

$$f_{ig} = T^T f_{il} = T^T K_l u_l \quad (5.73)$$

em que onde K_l é a matriz de rigidez linear local. Seguindo o procedimento estabelecido na seção 5.3, a matriz de rigidez tangente consistente global pode ser determinada via diferenciação da Equação 5.73:

$$\delta f_{ig} = T^T K_l T \delta u_g + \delta T^T f_{il} = \left(T^T K_l T + K_{\sigma g} \right) \delta u_g = K_T \delta u_g \quad (5.74)$$

Seguindo a dedução, necessita-se da variação da matriz de transformação T a fim de se obter a matriz de tensão inicial, de modo que:

$$\delta \mathbf{T} \mathbf{f}_{il} = \delta \left[\text{diag} \mathbf{R} + \mathbf{VZ}^T \right] \mathbf{f}_{il} = \mathbf{K}_{\sigma} \delta \mathbf{u}_g \quad (5.75)$$

Neste momento, é conveniente dividir a Equação 5.75 em dois termos. Para o nó j a diferenciação do primeiro termo leva a:

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j = \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j \quad (5.76)$$

em que a identidade $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ é usada na primeira parte da Equação 5.76 e,

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j = \mathbf{R} \mathbf{f}_{i,l}^j \quad (5.77)$$

Usando a relação da Equação 5.62,

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{f}_{i,l}^j = -\mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j)^T \delta \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j) \mathbf{V}^T \delta \mathbf{u}_g^j \quad (5.78)$$

onde $\mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\theta})^T = -\mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\theta})$ é aplicada para obter a última parte da Equação 5.78.

Agora pode-se trabalhar com o segundo termo da Equação 5.75. A diferenciação deste usando a regra do produto resulta em:

$$\delta \left[\mathbf{VZ}^T \right] \mathbf{f}_{il} = \underbrace{\mathbf{V} \delta \mathbf{Z}^T}_{1^\circ \text{ termo}} \mathbf{f}_{il} + \underbrace{\delta \mathbf{VZ}^T}_{2^\circ \text{ termo}} \mathbf{f}_{il} \quad (5.79)$$

Se de início é considerado o 1º termo da Equação 5.79, se faz necessário avaliar a variação de \mathbf{Z} (definido nas Equações 5.64 e 5.66) como dado abaixo:

$$\mathbf{V} \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{f}_{il} = \mathbf{V} \delta \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{R}^T \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \right]^T \mathbf{f}_{il}^j \quad (5.80)$$

em que n é o número de nós.

Ainda é melhor isolar os vários termos e trabalhar com cada parte da Equação 5.80 separadamente, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \delta \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{R}^T \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \right]^T \mathbf{f}_{il}^j &= -\mathbf{V} \delta \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{R} \right] \mathbf{f}_{il}^j \\ &= \underbrace{-\mathbf{V} \sum_{j=1}^n \delta \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j}_{\text{parte 1}} - \underbrace{\mathbf{V} \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \delta \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j}_{\text{parte 2}} \end{aligned} \quad (5.81)$$

A parte 1 da Equação 5.81 resulta em:

$$\mathbf{V} \sum_{j=1}^n \left[-\delta \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{R} \right] \mathbf{f}_{il}^j = -\mathbf{V} \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}_g^j) \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j = \mathbf{V} \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j) \delta \mathbf{u}_g^j \quad (5.82)$$

em que aplica-se as Equações 5.62 e 5.77.

A parte 2 da Equação 5.81 envolve a variação de \mathbf{R} . Após algumas manipulações obtém-se:

$$\begin{aligned} -V \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \delta \mathbf{R} \right] \mathbf{f}_{il}^j &= -V \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j = V \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j) \delta \boldsymbol{\theta} \\ &= V \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j) \right] V^T \delta \mathbf{u}_g^j \end{aligned} \quad (5.83)$$

o qual é um termo não simétrico. A Equação 5.83 torna-se simétrica no equilíbrio e para demonstrar de maneira indireta essa afirmação, parte-se do exame dos termos que compõem o vetor de forças internas:

$$\mathbf{f}_{ig} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{il} = \left[\left[\text{diag} \mathbf{R}^T \right] + \mathbf{V} \mathbf{Z}^T \right] \mathbf{f}_{il} \quad (5.84)$$

Da definição de \mathbf{Z} (ver Equações 5.64 e 5.66), pode-se escrever o segundo termo do lado direito da Equação 5.84 como:

$$\mathbf{V} \mathbf{Z}^T \mathbf{f}_{il} = V \sum_{j=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{R} \mathbf{f}_{il}^j = V \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_g^{jl} \times \bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j \quad (5.85)$$

O termo dentro do somatório na Equação 5.85 envolve 3 equações de equilíbrio rotacionais para o elemento. Desse modo, no equilíbrio tem-se que:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_g^{jl} \times \bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j = 0 \quad (5.86)$$

Pode-se mostrar que quando a Equação 5.86 se aplica, o bloco central $\left[\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{jl}) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j) \right]$ no último termo da Equação 5.83 será simétrico. Sua parte não simétrica é dada por:

$$\text{Non-sym} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j \mathbf{x}_g^{jlT} - \mathbf{x}_g^{jl} \bar{\mathbf{f}}_{i,l}^{jT} \right) \quad (5.87)$$

que é uma matriz antissimétrica do vetor do lado esquerdo da Equação 5.86. Verifica-se que de acordo com a dedução realizada neste trabalho, os dois termos do lado direito da Equação 5.87 apresentam suas posições alteradas em relação ao que consta em Moita e Crisfield (1996) e Polat (2010).

Para uma dedução completa da matriz de rigidez tangente é preciso incluir o 2º termo da Equação 5.79 o qual envolve a diferenciação de V . Todavia, foi mostrado indiretamente a partir da Equação 5.85 que este termo envolve o produto $\delta V \mathbf{Z}^T$ o qual resulta nulo no equilíbrio.

Moita e Crisfield (1996) realizaram experimentos numéricos que comprovam que os termos não simétricos desaparecem no equilíbrio. Além disso, esses testes mostraram que não há deterioração da convergência quando estes termos são negligenciados. De acordo com estes autores, o conceito matemático por trás desses resultados foi provado matematicamente por Nour-Omid e Rankin (1991).

Tomando as Equações 5.78, 5.82 e 5.83 e substituindo na Equação 5.75, a forma final da matriz de rigidez de tensão inicial é dada por:

$$\mathbf{K}_{\sigma g} = -col[\mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j)]\mathbf{V}^T + \mathbf{V} row[\mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j)] + \mathbf{V} sym \sum_{j=1}^n [\mathbf{S}(\mathbf{x}_g^{j,l})\mathbf{S}(\bar{\mathbf{f}}_{i,l}^j)]\mathbf{V}^T \quad (5.88)$$

6. ELASTOPLASTICIDADE

6.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve a formulação clássica do fenômeno elastoplasticidade tanto para o estado plano de tensão quanto em três dimensões. Considera-se o critério de von Mises e que uma lei de endurecimento linear define a evolução do fluxo plástico do material.

De acordo com Crisfield (1991), como as regras de fluxo plástico são de natureza incremental, a solução de problemas envolvendo elastoplasticidade geralmente são alcançadas por procedimentos incrementais-iterativos.

Examinando as Equações 5.5, 5.43 ou 5.74 verifica-se que na formulação não linear a matriz de rigidez tangente do elemento é dada por duas parcelas, sendo que a segunda delas aparece quando a não linearidade geométrica está incluída na formulação. Quando a não linearidade material também é considerada, podemos reescrever aquelas equações como:

$$\mathbf{K}_{tl} = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_t \mathbf{B} dV_0 + \mathbf{K}_{t\sigma} \quad (6.1)$$

em que \mathbf{C}_t é a matriz modular elastoplástica tangente padrão. Adotando-se um método para atualização das tensões (*backward-Euler*, por exemplo), pode-se deduzir uma matriz de rigidez tangente consistente que produz uma rápida convergência quando o algoritmo de Newton-Raphson é utilizado nas iterações de equilíbrio. Todo o desenvolvimento mostrado a seguir é tomado integralmente de Crisfield (1991).

6.2 ELASTOPLASTICIDADE PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

Segundo Crisfield (1991), o estado plano de tensões é um dos mais difíceis de simular. Da teoria da elasticidade, tem-se que a relação tensão-deformação elástica para este estado é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Na Equação 6.2, σ é o vetor de tensão, C é a matriz constitutiva elástica padrão e ε^e o vetor de deformação. A função de escoamento para o critério de von Mises no estado plano é dado por:

$$f = \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 \right)^{1/2} - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) = \sigma_e - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) \quad (6.3)$$

em que σ_e é a tensão efetiva e σ_0 é a tensão de escoamento. Da Equação 6.1 e, considerando a regra de fluxo de Prandtl-Reuss, tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \mathbf{a} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} \\ 6\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

em que \mathbf{a} é um vetor normal ao fluxo e $\dot{\lambda}$ é uma constante positiva denominada multiplicador plástico. Considerando a decomposição aditiva das deformações, a taxa de tensão está relacionada a taxa de deformação elástica mediante:

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (6.5)$$

Para existir fluxo plástico, as tensões devem permanecer (condição de persistência) sobre a superfície de escoamento, de modo que:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} = 0 \quad (6.6)$$

Pré-multiplicando a Equação 6.5 pelo vetor de fluxo \mathbf{a}^T e considerando a Equação 6.6, obtém-se o multiplicador plástico:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T C \dot{\varepsilon}}{\mathbf{a}^T C \mathbf{a}} \quad (6.7)$$

que substituída na Equação 6.5 produz:

$$\dot{\sigma} = C_t \dot{\varepsilon} = C \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T C}{\mathbf{a}^T C \mathbf{a}} \right) \dot{\varepsilon} \quad (6.8)$$

em que C_t é a matriz modular elastoplástica tangencial padrão. Observa-se que, diferentemente de C , C_t é função não apenas de E e ν , mas também de \mathbf{a} .

Para levar em conta endurecimento no material considera-se que a tensão de escoamento, que aparece no segundo termo da Equação 6.3, varia a partir de

um valor de tensão de escoamento inicial σ_0 . Para uma lei de endurecimento linear tem-se que:

$$\sigma_0(\varepsilon_{ps}) = \sigma_0 + H\varepsilon_{ps} \quad (6.9)$$

Como se observa, a variável tensão de escoamento é função da deformação plástica equivalente:

$$\varepsilon_{ps} = \sum \delta\varepsilon_{ps} = \int \dot{\varepsilon}_{ps} \quad (6.10)$$

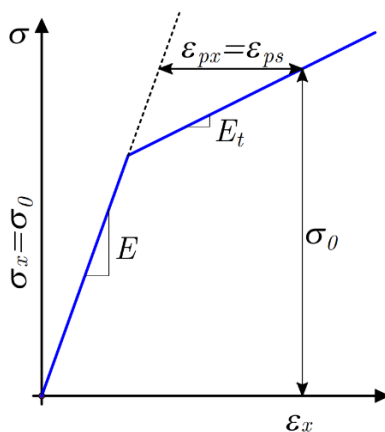
em que $\dot{\varepsilon}_{ps}$ é a taxa da deformação plástica acumulada. Esta é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\dot{\varepsilon}_{px}^2 + \dot{\varepsilon}_{py}^2 + \dot{\varepsilon}_{pz}^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{px}^2 \right)^{1/2} \quad (6.11)$$

Sob tensão uniaxial tem-se que σ_{xx} e $\dot{\varepsilon}_{py} = \dot{\varepsilon}_{pz} = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{px}$ de modo que nenhuma mudança plástica de volume ocorre e $\dot{\varepsilon}_{ps} = \dot{\varepsilon}_{px}$, enquanto $\sigma_e = \sigma_0 = \sigma_{xx}$. Consequentemente, a relação entre σ_0 e ε_{ps} pode ser tomada da relação tensão uniaxial *versus* deformação plástica. Particularmente, se requer $\partial\sigma_0/\partial\varepsilon_{ps}$, que pela Figura 6.1 é dada por:

$$H = \frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_{ps}} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{px}} = \frac{E_t}{1 - E_t/E} \quad (6.12)$$

Figura 6.1 – Relação tensão-deformação com endurecimento linear.



Uma vez que o endurecimento é introduzido, a condição de tangência expressa pela Equação 6.6 é reescrita como:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\varepsilon}_{ps} = 0 \quad (6.13)$$

Substituindo a Equação 6.4 na Equação 6.10 tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \dot{\lambda} \quad (6.14)$$

E, substituindo a Equação 6.14 na Equação 6.13:

$$\dot{f} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (6.15)$$

Então, pré-multiplicando a Equação 6.5 pelo vetor de fluxo \mathbf{a}^T e substituindo na Equação 6.15, produz-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \dot{\epsilon}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \quad (6.16)$$

que substituída na Equação 6.5 resulta em:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_t \dot{\epsilon} = \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{C}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \right) \quad (6.17)$$

Como o endurecimento considerado neste trabalho é linear, H é uma simples constante. A deformação plástica equivalente é uma variável interna enquanto que as tensões e as deformações totais são variáveis externas.

6.2.1 Integração das equações da regra de fluxo

As tensões são atualizadas em cada ponto de Gauss uma vez que sejam conhecidas as antigas tensões, as deformações, as deformações plásticas equivalentes e as novas deformações. O primeiro passo é utilizar a relação tensão-deformação elástica para atualizar as tensões. Se estas tensões atualizadas estiverem dentro da superfície de escoamento, assume-se que o material no ponto de Gauss permaneceu elástico ou descarregou elasticamente da superfície de escoamento. Nestas circunstâncias, não há necessidade de "integrar as equações da regra de fluxo". No entanto, se as tensões elásticas estiverem fora da superfície de escoamento, precisa-se adotar procedimentos de integração.

Se os incrementos de tensão e deformação forem muito pequenos, pode-se aplicar a formulação tangencial desenvolvida na seção anterior substituindo termos do tipo $\dot{\epsilon}$ por termos tipo $\delta\epsilon$. Todavia, os incrementos de deformação não são infinitesimais e por consequência, não se pode simplesmente substituir termos tipo $\dot{\epsilon}$ por termos tipo $\Delta\epsilon$.

Como as regras de fluxo plástico são de natureza incremental, a solução de problemas envolvendo elastoplasticidade geralmente são alcançadas por

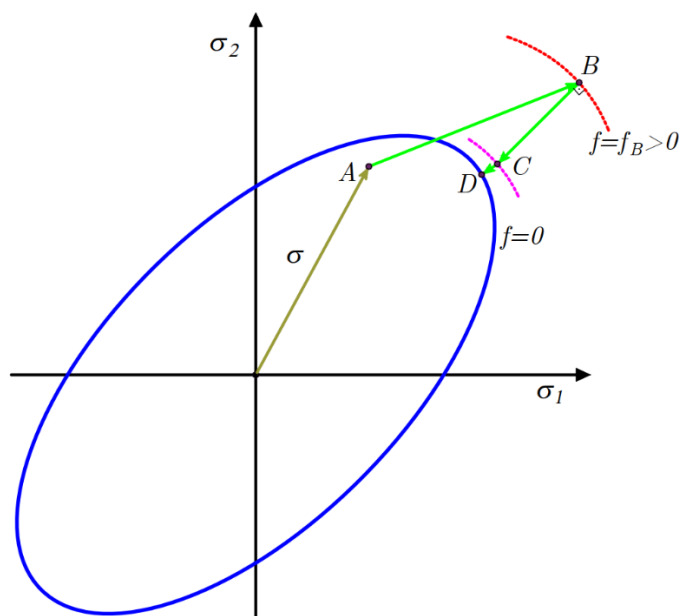
procedimentos incremental-iterativos. Nas duas seções a seguir serão descritas as formulações utilizadas para incrementar as tensões e, quando verificada que as mesmas violam a condição de escoamento, é mostrado como proceder com o retorno (*backward-Euler return*) delas para a superfície.

6.2.1.1 Preditor

O preditor mostrado na Figura 6.2 utiliza a normal ao ponto elástico *B trial*. A expansão de primeira ordem em série de Taylor sobre o ponto *B* produz:

$$f = f_B + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial f^T}{\partial \varepsilon_{ps}} \Delta \varepsilon_{ps} = f_B - \Delta \lambda \mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B - \Delta \lambda H \quad (6.18)$$

Figura 6.2 – Preditor com posterior correção para o ponto D.



A Equação 6.18 utiliza a forma incremental da Equação 6.5 com $\Delta \varepsilon = 0$ pois as deformações totais foram aplicadas para mover as tensões do ponto *A* até o ponto *B*, conforme pode-se observar na Figura 6.2. Estabelecendo que a nova superfície de escoamento é zero:

$$\Delta \lambda = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B + H} \quad (6.19)$$

em que \mathbf{a} e H são calculados em *B* e as tensões finais em σ_C são dadas por:

$$\sigma_C = \sigma_A + \Delta \sigma_e - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_B = \sigma_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_B \quad (6.20)$$

6.2.1.2 Retorno com o *backward-Euler*

O retorno *backward-euler* é baseado na Equação 6.20 anteriormente apresentada. Geralmente, aquela estimativa inicial não irá satisfazer a função de escoamento e, portanto, iterações adicionais são necessárias. Isso ocorre porque a normal na posição *trial B* (Figura 6.2) geralmente não será igual à normal final. Para deduzir tal ciclo iterativo, um vetor resíduo r pode ser estabelecido para representar a diferença entre as tensões atuais e as tensões *backward-Euler*. Este é dado por:

$$r = \sigma - (\sigma_B - \Delta\lambda C a_B) \quad (6.21)$$

Iterações são introduzidas para reduzir r para próximo de zero enquanto as tensões finais devem satisfazer a função de escoamento, $f = 0$.

Com a tensão elástica *trial* σ_B mantida fixa, uma expansão em série de Taylor truncada pode ser aplicada à Equação 6.20 de forma a produzir um novo resíduo r_n , logo:

$$r_n = r_0 + \dot{\sigma} + \dot{\lambda} C a + \Delta\lambda C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (6.22)$$

Na equação precedente, $\dot{\sigma}$ é a variação de σ ; $\dot{\lambda}$ é a variação de $\Delta\lambda$; e $\partial a / \partial \sigma$ é dada por:

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma_e} a a^T \quad (6.23)$$

Estabelecendo r_n como sendo zero, tem-se que:

$$\dot{\sigma} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \right)^{-1} (r_0 + \dot{\lambda} C a) = -\mathbf{Q}^{-1} r_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} C a \quad (6.24)$$

De forma semelhante ao realizado na Equação 6.18, procedendo uma expansão em série de Taylor truncada na função de escoamento, produz-se:

$$f_{Cn} = f_{Co} + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = f_{Co} + a_C^T \dot{\sigma} + H_C \dot{\lambda} = 0 \quad (6.25)$$

de forma que, omitindo o subscrito C, tem-se que:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_o - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \quad (6.26)$$

A Equação 6.24 pode ser resolvida para obter a variação das tensões no ciclo iterativo, $\dot{\sigma}$. Além disso, de acordo com Equação 6.14, a variação da deformação plástica equivalente na fase iterativa é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \dot{\lambda} \quad (6.27)$$

6.2.1.3 Matriz modular elastoplástica tangente consistente

Conforme expresso pela Equação 6.20 o algoritmo *backward-Euler* é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (6.28)$$

em que foi omitido o subscrito \mathbf{C} relacionado à configuração atual posterior ao retorno, de modo que as variáveis sem subscrito indicam que elas estão relacionadas a essa configuração. O subscrito B na Equação 6.28 indica que $\boldsymbol{\sigma}_B$ são as tensões elásticas *trial*. A diferenciação da Equação 6.28 produz:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a} - \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.29)$$

Verifica-se que o último termo na Equação 6.29 não aparece na dedução da matriz modular tangente padrão. Da Equação 6.29 tem-se que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) = \mathbf{R} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (6.30)$$

Para permanecer sobre a superfície de escoamento, \dot{f} deve ser zero, e então, da Equação 6.15:

$$\mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (6.31)$$

e então, tem-se que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ct} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + H} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.32)$$

em que \mathbf{C}_{ct} é a matriz tangente consistente.

6.3 ELASTOPLASTICIDADE DE VON MISES EM TRÊS DIMENSÕES

Da teoria da elasticidade, a relação tensão-deformação elástica para o estado tridimensional de tensões é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

No estado em questão, a função de escoamento para o critério de von Mises é dada por:

$$f = \sigma_e - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) \quad (6.34)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{s}^T \mathbf{L} \mathbf{s})^{\frac{1}{2}} - \sigma_0(\varepsilon_{ps})$$

em que \mathbf{s} é o vetor de tensões desviadoras dado por:

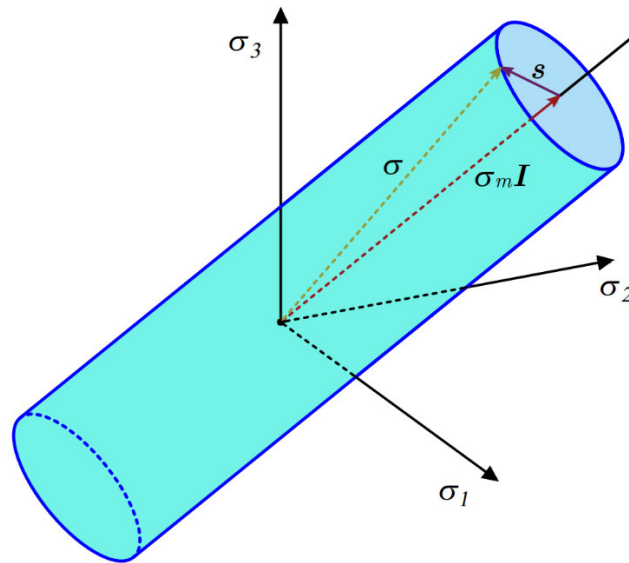
$$\mathbf{s}^T = \{s_{xx} \quad s_{yy} \quad s_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \quad (6.35)$$

e \mathbf{L} é uma matriz dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Na Figura 6.3 ilustra-se o critério de escoamento de von Mises no espaço tridimensional de tensões principais. Nela, σ_m é a média das tensões principais e \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 .

Figura 6.3 – Critério de escoamento de von Mises no espaço de tensões principal.



Considerando uma lei de endurecimento linear do material, a evolução da tensão de escoamento a partir de um valor de tensão de escoamento inicial σ_0 , é também expressa pela Equação 6.9. Naquela equação observa-se que a tensão de escoamento $\sigma_0(\varepsilon_{ps})$ é função da deformação plástica equivalente sendo dada pela Equação 6.10, em que $\dot{\varepsilon}_{ps}$ é a taxa da deformação plástica acumulada. Esta, para o estado tridimensional é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} [\dot{\varepsilon}_{px}^2 + \dot{\varepsilon}_{py}^2 + \dot{\varepsilon}_{pz}^2 + 1/2 (\dot{\gamma}_{pxy}^2 + \dot{\gamma}_{pyz}^2 + \dot{\gamma}_{pzx}^2)]^{1/2} \quad (6.37)$$

Da Equação 6.33 e, considerando a regra de fluxo de Prandtl-Reuss, tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \mathbf{a} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sigma_e} \begin{Bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \\ 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz} \\ 2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{yz} \\ 6\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

em que \mathbf{a} e $\dot{\lambda}$ são um vetor normal ao fluxo e o multiplicador plástico, respectivamente. Levando em conta o endurecimento, a decomposição aditiva das deformações e a condição de permanência do fluxo sobre a superfície de escoamento pode-se obter o multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ e a matriz modular

elastoplástica padrão C_t . Estes entes têm fundamentalmente as mesmas formas dadas pelas Equações 6.16 e 6.17, respectivamente (embora com dimensões maiores).

6.3.1 Integração da equações da regra de fluxo

Mais uma vez usa-se a relação tensão-deformação elástica para atualizar as tensões. Se estas tensões atualizadas estiverem dentro da superfície de escoamento, assume-se que o material no ponto de Gauss permaneceu elástico ou descarregou elasticamente da superfície de escoamento, não havendo portanto a necessidade de "integrar as equações da regra de fluxo". No entanto, se as tensões elásticas estiverem fora da superfície de escoamento, precisa-se adotar procedimentos de integração.

6.3.1.1 Preditor

O preditor mostrado na Figura 6.2 utiliza a normal ao ponto elástico B *trial*. Procedendo uma expansão de primeira ordem em série de Taylor sobre o ponto B , pode-se determinar as tensões em um ponto C dadas por:

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta\lambda C a_B \quad (6.39)$$

em que a e H são calculados em B .

6.3.1.2 Retorno com o *backward-Euler*

O retorno *backward-euler* mais uma vez baseia-se na Equação 6.39 antes desenvolvida. Aquela estimativa inicial não irá satisfazer a função de escoamento e, portanto, iterações são necessárias. Para deduzir este ciclo iterativo, um vetor resíduo r pode ser estabelecido para representar a diferença entre as tensões atuais e as tensões *backward-Euler*. Este é dado por:

$$r = \sigma - (\sigma_B - \Delta\lambda C a_B) \quad (6.40)$$

e iterações são introduzidas para reduzir r para próximo de zero e as tensões finais satisfazerem a função de escoamento, $f = 0$. Com a tensão elástica *trial* σ_B mantida fixa, uma expansão em série de Taylor truncada pode ser aplicada à Equação (6.40) de forma a produzir um novo resíduo, r_n . Assim:

$$r_n = r_0 + \dot{\sigma} + \dot{\lambda} C a + \Delta\lambda C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (6.41)$$

Na equação precedente, a derivada $\partial \mathbf{a} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ no estado tridimensional é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad (6.42)$$

Estabelecendo r_n como sendo zero, tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (6.43)$$

Procedendo uma série de Taylor truncada na função de escoamento, produz-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_o - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \quad (6.44)$$

6.3.1.3 Matriz modular elastoplástica tangente consistente

Como expresso pela Equação 6.39 o algoritmo *backward-Euler* é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (6.45)$$

Por meio da diferenciação da Equação 6.45 e após algum algebrismo pode-se obter a expressão para a matriz tangente consistente. Esta é dada por:

$$\mathbf{C}_{ct} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + H} \quad (6.46)$$

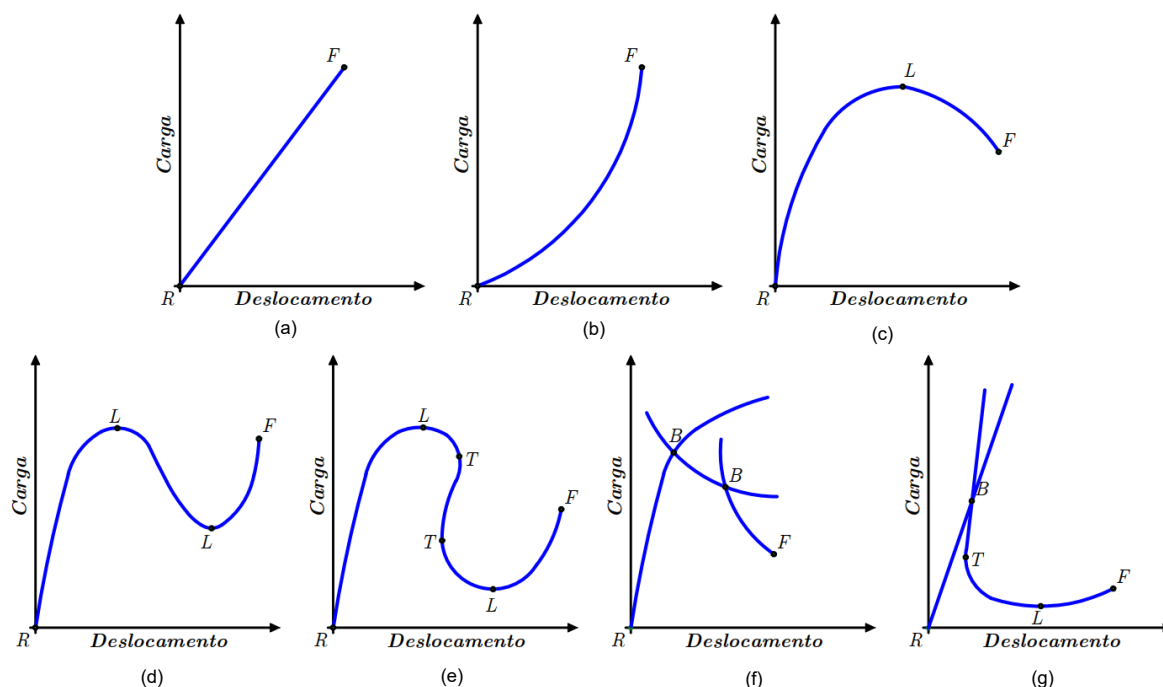
7. SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

7.1 INTRODUÇÃO

Análises não lineares consideram grandes deslocamentos e rotações, relações constitutivas dos materiais fora do escopo linear ou ainda a alterações nas condições de contorno. Assim, para tais análises são requeridas soluções de sistemas de equações não lineares.

Em problemas estruturais não lineares, as estruturas ou seus componentes geralmente alcançam um nível de carga máximo, ficando incapazes de resistir a carregamentos mais elevados sem que uma mudança significativa na sua geometria ou na constituição do seu material ocorra. Estes níveis de cargas são denominados pontos críticos, sendo caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular. Na Figura 7.1, ilustram-se algumas trajetórias com pontos críticos.

Figura 7.1 – Padrões básicos de trajetórias de equilíbrio: (a) falha linear frágil; (b) endurecimento; (c) amolecimento; e padrões mais complexos - (d) *snap-through*; (e) *snap-back*; (f) bifurcação; (g) bifurcação combinada com ponto limite e *snap-back*.



As letras R , L , T , B e F na Figura 7.1 expressam: configuração de referência, ponto limite, *turning point*, ponto de bifurcação e falha, respectivamente. Nos “*turnings points*”, a tangente à trajetória de equilíbrio é vertical, o que pode afetar a

performance de certos métodos de solução. Pontos de falha são aqueles nos quais a trajetória é repentinamente interrompida devido à falha física, podendo o fenômeno se dar a nível local ou global. Por outro lado, a presença de pontos de bifurcação indica que mais de uma trajetória de equilíbrio é possível.

Até meados da década de setenta do século passado, os problemas envolvendo não-linearidade em estruturas eram solucionados através de métodos puramente incrementais sob controle de carga. Estas estratégias não fazem a verificação de forças residuais (ou desequilibradas) e dessa forma, o erro associado é dependente do passo de carga e, frequentemente, cumulativo durante a análise. Assim, são requeridos passos de carga muito pequenos para uma análise mais precisa. Os métodos baseados em controle de carga podem estar aptos a detectar um ponto limite, mas em geral, são incapazes de ir além desse ponto. A necessidade de atravessar um ponto limite e descrever o que ocorre doravante é importante por diversos fatores, dentre os quais:

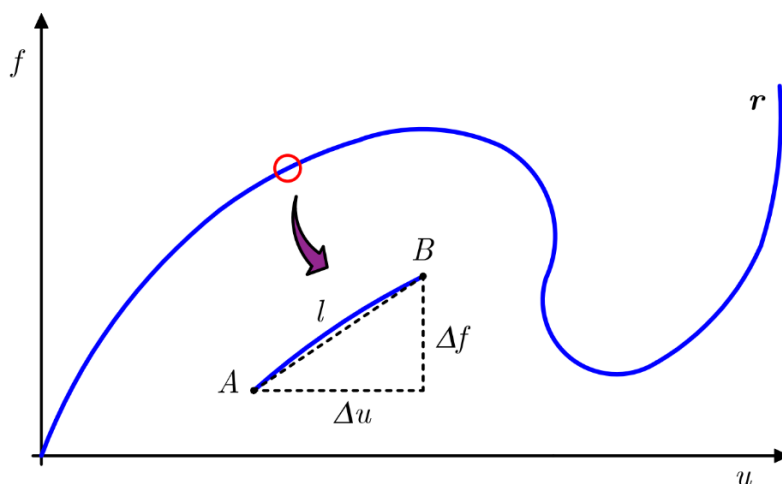
- O ponto limite pode ser apenas um máximo local, podendo a estrutura ainda possuir capacidade resistente que pode ser aproveitada;
- Se a estrutura analisada for apenas um componente, pode ser desejável incorporar a resposta carga/deslocamento deste componente dentro de uma futura análise da estrutura completa;
- Melhor entendimento do comportamento de ruptura da estrutura (dúctil/frágil);
- Identificar com uma maior clareza se a estrutura atingiu um ponto limite ou apenas iniciou um trecho de instabilidade;
- Investigar o real estado (tensões, deformações, deslocamentos, zonas plásticas etc.) pós-crítico de uma estrutura e, assim, entender melhor como se deu sua falha.

As limitações dos métodos puramente incrementais e as vantagens de se obter a continuação da resposta após os pontos críticos motivaram o desenvolvimento dos métodos incrementais-iterativos. Nestes, os incrementos que caracterizam a fase preditora são seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio (ou fase corretora) que trazem a solução para a trajetória de equilíbrio.

Dessa maneira, o algoritmo passa a ser menos dependente do tamanho do passo de carga utilizado. Na literatura existem diversas estratégias computacionais baseadas no controle carga-deslocamento por meio das quais se pode ultrapassar um ponto limite e continuar capturando a resposta. Nas últimas décadas, importantes avanços têm sido alcançados na resolução de sistemas de equações não-lineares, possibilitando que tanto a carga quanto o deslocamento possam variar simultaneamente durante os passos incrementais. Isso permitiu que os algoritmos fossem capazes de atravessar o ponto limite e, com isso, obter maior êxito na captura da resposta de problemas acometidos por não linearidades. Dentre os citados avanços, destaca-se o método de comprimento de arco. Segundo Haugen (1994) e Crisfield (1991) esta técnica consegue abranger uma ampla gama de problemas da engenharia estrutural.

Os métodos para a determinação da trajetória de equilíbrio controlando a carga ou o deslocamento apresentam suas limitações, tais como quando a tangente é horizontal nos pontos limite e em trechos da trajetória em que aparece o fenômeno *snap-back*. O método do comprimento de arco supera todos estes problemas de uma forma elegante e eficiente. Seja a curva não linear r ilustrada na Figura 7.2, em que l é um trecho da curva entre dois pontos quaisquer A e B ; Δu é um incremento de u ; e Δf é um incremento de f .

Figura 7.2 – Arco situado entre dois pontos de uma curva.



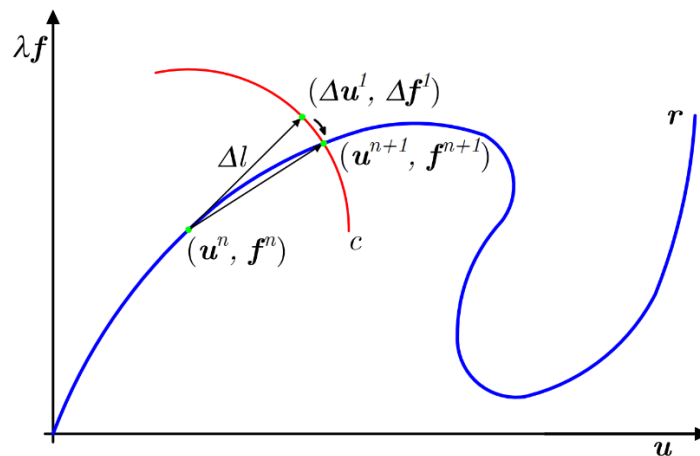
De acordo com o Cálculo Diferencial e Integral, o comprimento do arco entre os pontos A e B pode ser aproximado por:

$$\Delta l^2 = \Delta u^2 + \Delta f^2 \quad (7.1)$$

7.2 MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

A ideia básica do método de comprimento de arco para obtenção da trajetória de equilíbrio é ilustrada na Figura 7.3. Nesta vê-se que o estado de equilíbrio mais recente conhecido (ou atual) é denotado por $(\Delta u^n, f^n)$. Um incremento de deslocamento e carga inicial $(\Delta u^1, \Delta \lambda^1 \hat{f}_{ext})$ é efetuado resultando em um ponto geralmente fora da trajetória de equilíbrio. Então, iterações de equilíbrio restritas por uma hipersuperfície são realizadas até que se atinja a convergência. O próximo estado de equilíbrio se dá na interseção da trajetória de equilíbrio com a hipersuperfície.

Figura 7.3 – Arco situado entre dois pontos de uma trajetória de equilíbrio.

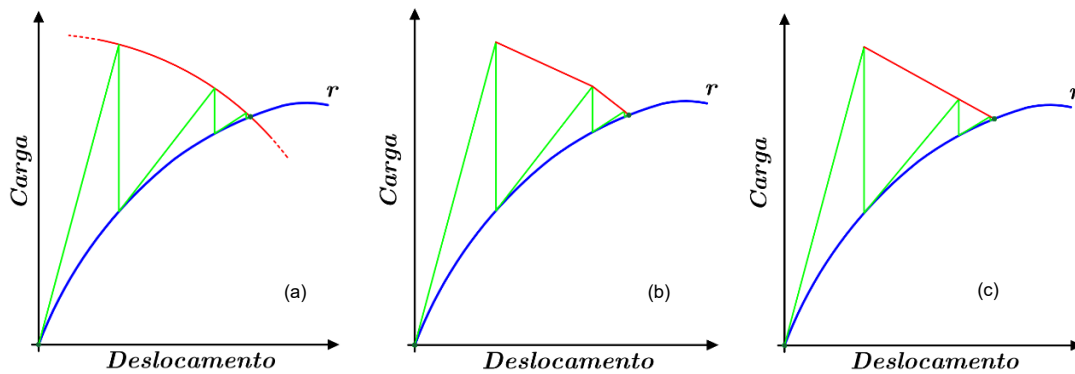


Resumindo o antes exposto, pode-se afirmar que o método de comprimento de arco têm como objetivo encontrar a interseção da trajetória de equilíbrio com o comprimento de arco dado por Δl . As iterações para alcançar a interseção ocorrem mediante uma superfície de restrição c . Há várias superfícies na literatura e a seguir serão descritos os métodos de restrição com uma hiperesfera, para uma superfície genérica, e com hiperplanos.

7.2.1 Fase corretora

No método do comprimento de arco incrementa-se carga e deslocamento simultaneamente. No desenvolvimento do método, adiciona-se uma nova equação (de uma superfície de restrição) no sistema de equações não lineares, além de uma nova incógnita denominada fator de carga. A Figura 7.4 ilustra o processamento do método do comprimento de arco para diferentes tipos de restrições utilizando iterações do método de Newton-Raphson.

Figura 7.4 – Restrições no método do comprimento de arco: (a) restrição com hiperesfera; (b) restrição com hiperplano atualizado; (c) restrição com hiperplano fixo.



A equação de equilíbrio global para problemas não lineares na mecânica estrutural é dada por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (7.2)$$

em que:

- \mathbf{r} é o vetor resíduo (ou de forças desequilibradas);
- \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas;
- $\hat{\mathbf{f}}_{ext}$ é o vetor de forças externa (fixo);
- \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos;
- λ é um fator de carga.

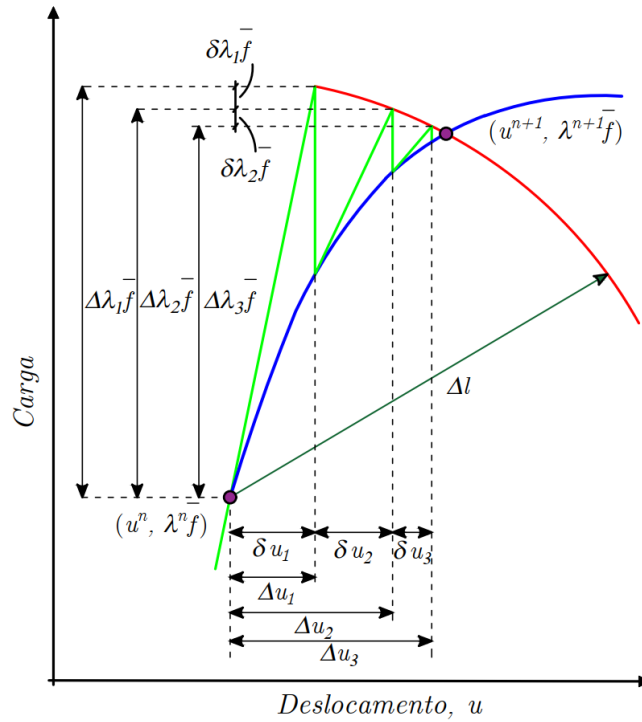
7.2.1.1 Restrição por meio de uma hiperesfera

No método de comprimento de arco controlam-se os incrementos de carga e deslocamento. O incremento do deslocamento é representado por $\Delta \mathbf{u}$ e o incremento de carga é representado por $\Delta \lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext}$. A restrição por meio de uma hiperesfera é apresentada na Figura 7.5 e expressa pela seguinte equação:

$$c = \left(\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \beta^2 \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} \right) - \Delta l^2 = 0 \quad (7.3)$$

Em que Δl é o valor do comprimento de arco. Geralmente β é um fator de escala necessário para o termo de carga porque unidades diferentes são usadas para carga e para deslocamentos. Todavia, utiliza-se $\beta = 0$ e, desse modo, a restrição dada pela Equação 7.3 passa a ser cilíndrica.

Figura 7.5 – Método do comprimento de arco hipersférico.



Adicionando a Equação 7.3 à equação da trajetória de equilíbrio dada pela Equação 7.1, obtém-se um novo sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{f}_{int} - \lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbf{0} \\ c = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \beta^2 \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext}) - \Delta l^2 = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Resolvendo este sistema, obtêm-se $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \lambda$, que são incrementos relativos a um ponto $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$ qualquer na trajetória de equilíbrio. Em outras palavras, a solução do sistema gera um novo ponto $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1})$ da trajetória de equilíbrio dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{f}^{n+1} &= (\lambda^n + \Delta \lambda) \hat{\mathbf{f}}_{ext} = \lambda^{n+1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} \end{aligned} \quad (7.5)$$

A expansão em série de Taylor do sistema expresso pela Equação 7.4 produz:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}^k} \delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \lambda^k} \delta \lambda^{k+1} + \dots = \mathbf{r}^k + \mathbf{K}_t^k \delta \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{f}_{ext}^k \delta \lambda^{k+1} = \mathbf{0} \quad (7.6)$$

$$c^{k+1} = c^k + 2(\Delta \mathbf{u}^k)^T \delta \mathbf{u}^{k+1} + 2\Delta \lambda^k \delta \lambda^{k+1} \beta^2 (\hat{\mathbf{f}}_{ext}^k)^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} = 0 \quad (7.7)$$

em que:

$$\mathbf{K}_t^k = \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}^k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^k}{\partial \mathbf{u}^k} + \frac{\partial (\lambda^k \hat{\mathbf{f}}_{ext})}{\partial \mathbf{u}^k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^k}{\partial \mathbf{u}^k} \text{ é a matriz de rigidez tangente;}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{ext} = -\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \lambda^k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^k}{\partial \lambda^k} - \frac{\partial (\lambda^k \hat{\mathbf{f}}_{ext})}{\partial \lambda^k}.$$

Estabelecendo \mathbf{r}^{k+1} e c^{k+1} como sendo nulos, o sistema representado pelas Equações 7.6 e 7.7 torna-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^k & -\hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ 2(\Delta \mathbf{u}^k)^T & 2\Delta \lambda^k \beta^2 (\hat{\mathbf{f}}_{ext})^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \delta \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{r}^k \\ c^k \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Isolando os termos $\delta \mathbf{u}^{k+1}$ e $\delta \lambda^{k+1}$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \delta \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^k & -\hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ 2(\Delta \mathbf{u}^k)^T & 2\Delta \lambda^k \beta^2 (\hat{\mathbf{f}}_{ext})^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^k \\ c^k \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Por sua vez, determinadas as variações $\delta \mathbf{u}^{k+1}$ e $\delta \lambda^{k+1}$ obtém-se as atualizações para o ciclo iterativo $k + 1$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^{k+1} &= \Delta \mathbf{u}^k + \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \Delta \lambda^{k+1} &= \Delta \lambda^k + \delta \lambda^{k+1} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Verifica-se que a matriz de rigidez aumentada presente na Equação 7.9 não possui boas propriedades numéricas (não é simétrica e nem em banda). Por causa disso, em vez de calcular diretamente as correções $\delta \mathbf{u}^{k+1}$ e $\delta \lambda^{k+1}$ através daquela equação, outra abordagem é empregada.

Inicialmente, é tomada a primeira linha do sistema exposto na Equação 7.8. Assim, tem-se que:

$$\mathbf{K}_t^k \delta \mathbf{u}^{k+1} - \delta \lambda^{k+1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} = -\mathbf{r}^k \Rightarrow \delta \mathbf{u}^{k+1} = \delta \lambda^{k+1} (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} - (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \mathbf{r}^k \quad (7.11)$$

Para simplificar os termos do lado direito da Equação 7.11 define-se os seguintes componentes de deslocamentos:

$$\delta \mathbf{u}_F^{k+1} = (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (7.12)$$

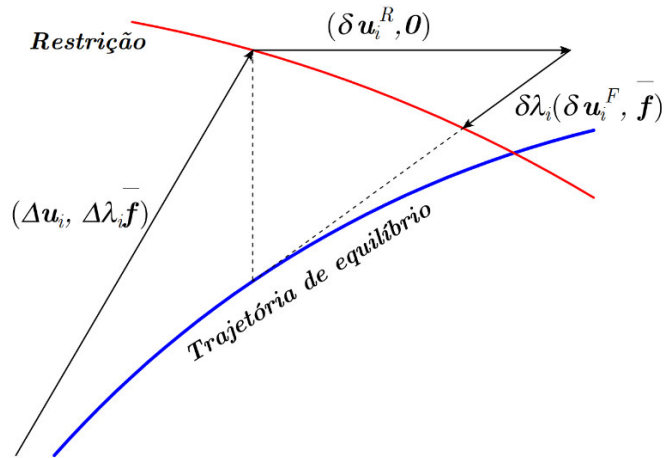
$$\delta \mathbf{u}_R^{k+1} = -(\mathbf{K}_t^k)^{-1} \mathbf{r}^k \quad (7.13)$$

que substituídos novamente na Equação 7.11 produz:

$$\delta \mathbf{u}^{k+1} = \delta \lambda^{k+1} \delta \mathbf{u}_F^{k+1} + \delta \mathbf{u}_R^{k+1} \quad (7.14)$$

Conforme pode ser observado na Figura 7.6, o componente $\delta \mathbf{u}_R^{k+1}$ é gerado pela força residual \mathbf{r}^k e corresponde ao incremento do método de Newton-Raphson usado no procedimento incremental-iterativo. Já o componente $\delta \mathbf{u}_F^{k+1}$ é um incremento de retorno para ajustar a carga a fim de satisfazer a restrição. O vetor $\delta \mathbf{u}_F^{k+1}$ é tangente à trajetória de equilíbrio (no espaço de deslocamentos).

Figura 7.6 – Componentes residual e tangencial de deslocamentos.



A substituição da Equação 7.14 no sistema expresso pela Equação 7.8 resulta na seguinte equação quadrática:

$$a_1 (\delta \lambda^{k+1})^2 + a_2 \delta \lambda^{k+1} + a_3 = 0 \quad (7.15)$$

em que:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\delta \mathbf{u}_F^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_F^{k+1} + \beta^2 (\hat{\mathbf{f}}_{ext})^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ a_2 &= 2 (\Delta \mathbf{u}^{k+1} + \delta \mathbf{u}_R^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_F^{k+1} + 2 \beta^2 \Delta \lambda^k (\hat{\mathbf{f}}_{ext})^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ a_3 &= (\Delta \mathbf{u}^{k+1} + \delta \mathbf{u}_R^{k+1})^T (\Delta \mathbf{u}^{k+1} + \delta \mathbf{u}_R^{k+1}) + \beta^2 \Delta \lambda^k (\hat{\mathbf{f}}_{ext})^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Resolvendo a Equação 7.15 obtém-se $\delta \lambda^{k+1}$ e, dessa maneira, pode-se determinar $\Delta \mathbf{u}^{k+1}$ pelas Equações 7.14 e 7.10. No entanto, pode haver duas raízes $(\delta \lambda^{k+1})'$ e $(\delta \lambda^{k+1})''$, o que por sua vez possibilita duas soluções:

$$(\Delta \mathbf{u}^{k+1})' = \Delta \mathbf{u}^k + \delta \mathbf{u}_R^{k+1} + (\delta \lambda^{k+1})' \delta \mathbf{u}_F^{k+1} \quad (7.17)$$

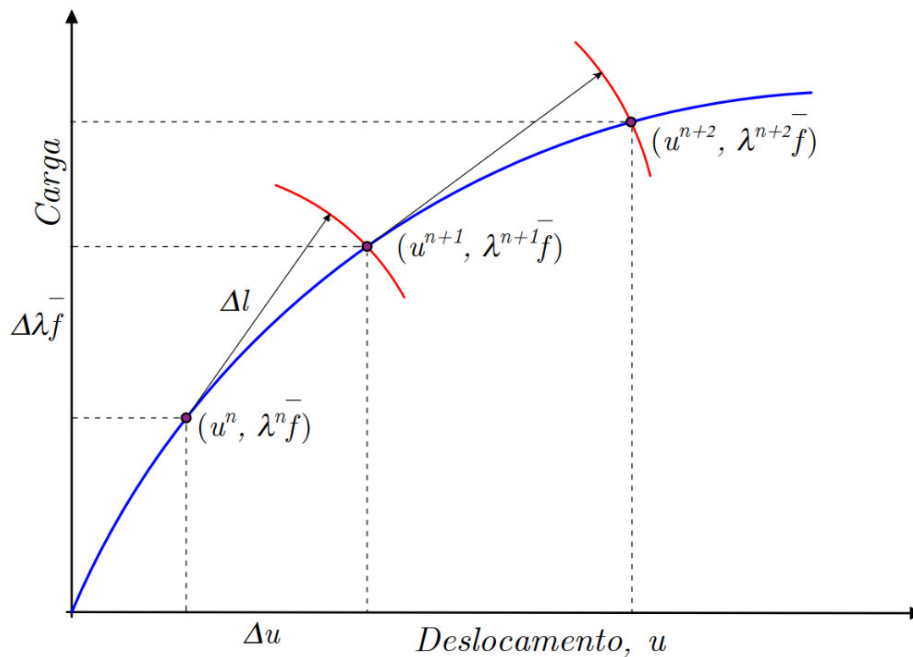
$$(\Delta \mathbf{u}^{k+1})'' = \Delta \mathbf{u}^k + \delta \mathbf{u}_R^{k+1} + (\delta \lambda^{k+1})'' \delta \mathbf{u}_F^{k+1} \quad (7.18)$$

Resolve-se esse empecilho escolhendo a raiz que se encontra mais próxima do incremento anterior $\Delta \mathbf{u}^k$ e, dessa forma, previne-se que se “caminhe para trás” na trajetória de equilíbrio. Isto é feito escolhendo a opção de raiz que forma o menor ângulo com $\Delta \mathbf{u}^k$. Estes ângulos são dados por:

$$\cos \theta' = \frac{(\Delta \mathbf{u}^k)'^T (\Delta \mathbf{u}^{k+1})'}{\Delta l^2}, \quad \cos \theta'' = \frac{(\Delta \mathbf{u}^k)''^T (\Delta \mathbf{u}^{k+1})''}{\Delta l^2} \quad (7.19)$$

É possível que a equação quadrática possua raízes complexas e isto ocasione problemas de divergência. Uma vez escolhida a solução para a Equação 7.15, obtêm-se $\Delta \mathbf{u}^{k+1}$ e $\Delta \lambda^{k+1}$ a partir de 7.14 e 7.10. As demais iterações de Newton-Raphson são processadas da mesma forma. Após convergirem, obtêm-se $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1})$ usando a Equação 7.5 e assim é processado um novo ciclo para obter o ponto seguinte $(\mathbf{u}^{n+2}, \mathbf{f}^{n+2})$ da trajetória de equilíbrio, conforme pode ser observado por meio da Figura 7.7.

Figura 7.7 – Ciclos do método do comprimento de arco.



7.2.1.2 Restrição genérica

Seja um ponto da trajetória de equilíbrio dado por $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$. No método de comprimento de arco tem-se o seguinte sistema para resolver e, assim, chegar ao próximo ponto em equilíbrio da trajetória:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{f}_{int} - \lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbf{0} \\ c = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

em que c é uma equação de restrição qualquer. Uma expansão em série de Taylor sobre ambas as equações produz:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{p}^k} \delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \lambda^k} \delta \lambda^{k+1} + \dots = \mathbf{r}^k + \mathbf{K}_t^k \delta \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{f}_{ext}^k \delta \lambda^{k+1} = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

$$c^{k+1} = c^k + \frac{\partial c^k}{\partial \mathbf{u}^k} \delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial c^k}{\partial \lambda^k} \delta \lambda^{k+1} + \dots = c^k + (\mathbf{a}^k)^T \delta \mathbf{u}^{k+1} + g^k \delta \lambda^{k+1} + \dots = 0 \quad (7.22)$$

em que:

$$(\mathbf{a}^k)^T = \frac{\partial c^k}{\partial \mathbf{u}^k}; \quad g^k = \frac{\partial c^k}{\partial \lambda^k}.$$

Estabelecendo nulos \mathbf{r}^{k+1} e c^{k+1} e isolando os termos $\delta \mathbf{u}^{k+1}$ e $\delta \lambda^{k+1}$, pode-se obter o seguinte sistema para uma formulação mais geral do método de comprimento de arco:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \delta \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^k & -\hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ (\mathbf{a}^k)^T & g^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^k \\ c^k \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Tomando-se a primeira equação do sistema dado pela Equação 7.23, como na seção precedente, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t^k \delta \mathbf{u}^{k+1} - \delta \lambda^{k+1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} &= -\mathbf{r}^k \\ \delta \mathbf{u}^{k+1} &= \delta \lambda^{k+1} (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} - (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \mathbf{r}^k \\ \delta \mathbf{u}^{k+1} &= \delta \lambda^{k+1} \delta \mathbf{u}_F^{k+1} - \delta \mathbf{u}_R^{k+1} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Como definido anteriormente:

$$\delta \mathbf{u}_F^{k+1} = (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (7.25)$$

$$\delta \mathbf{u}_R^{k+1} = (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \mathbf{r}^k \quad (7.26)$$

A substituição da Equação 7.24 na segunda linha da Equação 7.23 produz:

$$\begin{aligned} \delta\lambda^{k+1} \left[(\mathbf{a}^k)^T \delta\mathbf{u}_F^{k+1} + g^k \right] &= -c^k - (\mathbf{a}^k)^T \delta\mathbf{u}_R^{k+1} \\ \delta\lambda^{k+1} &= -\frac{c^k + (\mathbf{a}^k)^T \delta\mathbf{u}_R^{k+1}}{g^k (\mathbf{a}^k)^T + \delta\mathbf{u}_F^{k+1}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Uma vez convergidas as iterações, obtêm-se um novo ponto da trajetória de equilíbrio que tem suas componentes dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \Delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext} \end{aligned} \quad (7.28)$$

7.2.1.3 Restrição por meio de um hiperplano

A restrição de hiperplano é uma versão linearizada da restrição de hiperesfera. Há duas versões: uma com hiperplano atualizado e outra com hiperplano fixo. Como pode ser observado na Figura 7.4 (b), a restrição de hiperplano atualizado condiciona o sub-incremento $(\delta\mathbf{u}, \delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao incremento atual $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext})$.

Matematicamente:

$$c = (\Delta\mathbf{u}, \beta\Delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext})^T (\delta\mathbf{u}, \beta\delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext}) = 0 \quad (7.29)$$

onde a constante β foi introduzida aqui pelo mesmo motivo que existe na Equação 7.3, isto é, como um fator de escala para as cargas pois elas são expressas em uma unidade diferente dos deslocamentos. Desenvolvendo, tem-se:

$$c = \Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u} + \beta^2 \delta\lambda \Delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} = 0 \quad (7.30)$$

que é a restrição de hiperplano atualizado. Aplicando esta restrição na Equação 7.27 da formulação genérica apresentada na seção precedente produz-se:

$$\delta\lambda^{k+1} = -\frac{(\Delta\mathbf{u}^{k+1})^T \delta\mathbf{u}_R^{k+1}}{(\Delta\mathbf{u}^{k+1})^T \delta\mathbf{u}_F^{k+1} + \beta^2 \Delta\lambda^{k+1} \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext}} \quad (7.31)$$

A restrição de hiperplano fixo é bem similar - Figura 7.4(c). A diferença é que ela condiciona o subincremento $(\delta\mathbf{u}, \delta\lambda \hat{\mathbf{f}}_{ext})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao primeiro incremento $(\Delta\mathbf{u}_1, \Delta\lambda_1 \hat{\mathbf{f}}_{ext})$. Ou seja:

$$c = \Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u} + \beta^2 \delta\lambda \Delta\lambda_1 \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext} = 0 \quad (7.32)$$

e, conseqüentemente:

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{(\Delta \mathbf{u}_I^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_R^{k+1}}{(\Delta \mathbf{u}_I^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_F^{k+1} + \beta^2 \Delta \lambda_I^{k+1} \hat{\mathbf{f}}_{ext}^T \hat{\mathbf{f}}_{ext}} \quad (7.33)$$

Esse é o método originalmente proposto por Riks (1972). Pode-se verificar numericamente que o valor de β não exerce muita influência no desempenho do método e, assim o valor $\beta = 0$ tem sido usado na prática. Isso remove a componente da carga. Neste caso, tem-se para o hiperplano atualizado:

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{(\Delta \mathbf{u}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_r^{k+1}}{(\Delta \mathbf{u}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{f_{ext}}^{k+1}} \quad (7.34)$$

e para o hiperplano fixo:

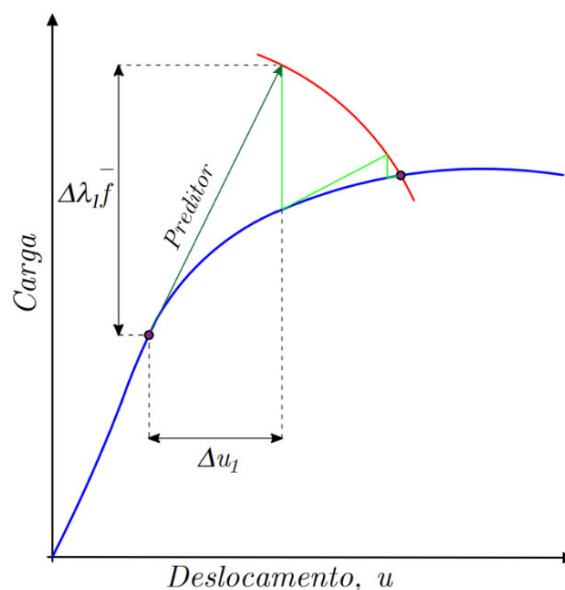
$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{(\Delta \mathbf{u}_I^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_r^{k+1}}{(\Delta \mathbf{u}_I^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{f_{ext}}^{k+1}} \quad (7.35)$$

Verifica-se que a restrição de hiperplano não requer o cálculo de raízes, enquanto que a restrição hiperesférica sempre intercepta a trajetória de equilíbrio.

7.2.2 Fase preditora

Esta seção dedica-se a determinar a primeira estimativa de um ciclo n incremental denominado preditor. Conforme mostrado na Figura 7.8, o preditor possui direção tangente a trajetória de equilíbrio e tem como componentes os incremento iniciais $(\Delta \mathbf{u}_I, \Delta \lambda_I \hat{\mathbf{f}}_{ext})$.

Figura 7.8 – Preditor ou primeira estimativa de um ciclo.



7.2.2.1 Formulação genérica e contínua do preditor mediante parametrização

O sistema aumentado da Equação 7.20 possui $n + 1$ variáveis independentes, em que n representa os graus de liberdade contidos no vetor \mathbf{u} e l se refere ao parâmetro de carga λ . Assim, o espaço a ser trabalhado é de $n + 1$ dimensões. Essas variáveis podem ser parametrizadas como uma função da curva s ao longo da resposta carga *versus* deslocamentos da estrutura. Desse modo, fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$ e $\lambda = \lambda(s)$, o sistema apresentado na Equação 7.20 torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}(s), \lambda(s)) - \lambda(s) \hat{\mathbf{f}}_{ext} &= \mathbf{0} \\ c(\mathbf{u}(s), \lambda(s), s) &= 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

em que s uma grandeza escalar obtida da superfície $c(\mathbf{u}(s), \lambda(s), s) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Expandindo em série de Taylor o sistema dado pela Equação 7.36, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}^k} \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial s^k} \delta s^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial \lambda^k}{\partial s^k} \delta s^{k+1} + \dots = \\ &= \mathbf{r}^k + \mathbf{K}_t^k \mathbf{u}^k \delta s^{k+1} + \hat{\mathbf{f}}_{ext}^k \lambda^k \delta s^{k+1} + \dots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= c^k + \frac{\partial c^k}{\partial \mathbf{u}^k} \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial s^k} \delta s^{k+1} + \frac{\partial c^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial \lambda^k}{\partial s^k} \delta s^{k+1} + \frac{\partial c^k}{\partial s^k} \delta s^{k+1} \dots = \\ &= c^k + (\mathbf{a}^k)^T \mathbf{u}^k \delta s^{k+1} + g^k \lambda^k \delta s^{k+1} + h^k \delta s^{k+1} \dots = 0 \end{aligned} \quad (7.38)$$

em que:

$$\left(\mathbf{a}^k\right)^T = \frac{\partial c^k}{\partial \mathbf{u}^k}; \quad g^k = \frac{\partial c^k}{\partial \lambda^k}; \quad \dot{\mathbf{u}}^k = \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial s^k}; \quad \dot{\lambda}^k = \frac{\partial \lambda^k}{\partial s^k}; \quad h^k = \frac{\partial c^k}{\partial s^k}; \quad s^{k+1} = s^k + \delta s^{k+1} \quad (7.39)$$

Considerando que no passo preditor $\mathbf{r}^k = \mathbf{0}$ e $c^k = 0$, as Equações 7.37 e 7.38 resultam no sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^k & -\hat{\mathbf{f}}_{ext} \\ (\mathbf{a}^k)^T & g^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^k \\ \dot{\lambda}^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ h^k \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

Tomando-se a primeira linha do sistema expresso pela Equação 7.40 pode-se então calcular as predições $(\dot{\mathbf{u}}^k, \dot{\lambda}^k)$ na iteração $k = 0$:

$$\mathbf{K}_t^k \dot{\mathbf{u}}^k - \dot{\lambda}^k \hat{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}^k = \dot{\lambda}^k (\mathbf{K}_t^k)^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{ext} \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}^k = \dot{\lambda}^k \delta \mathbf{u}_F^k \quad (7.41)$$

Tomando-se agora a segunda linha da Equação 7.40 na iteração $k = 0$:

$$\dot{\lambda}^k = \frac{\Delta \lambda^k}{\Delta s^k} \quad (7.47)$$

A equação para uma restrição hiperplanos é dada por:

$$c(\mathbf{u}, \lambda) = \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \dot{\lambda} (\lambda - \bar{\lambda}) - \Delta s \Rightarrow c = \mathbf{x}^T \mathbf{t} - \Delta s \quad (7.48)$$

em que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \\ \lambda - \bar{\lambda} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}; \quad \Delta s = s - \bar{s} \quad (7.49)$$

Levando em consideração as expressões definidas na Equação 7.39:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^k)^T &= \frac{\partial c^k}{\partial \mathbf{u}^k} = \frac{(\Delta \mathbf{u}^k)^T}{\Delta s^k} \\ \frac{\partial c^k}{\partial \lambda^k} &= g^k = \dot{\lambda}^k = \frac{\Delta \lambda^k}{\Delta s^k} \\ \frac{\partial c^k}{\partial s^k} &= h^k = -1 \end{aligned} \quad (7.50)$$

Substituindo esses resultados na Equação 7.43 obtêm-se:

$$\dot{\lambda}^k = -\frac{h^k}{(\mathbf{a}^k)^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + g^k} \Rightarrow \dot{\lambda}^k = \frac{I}{(\dot{\mathbf{u}}^k)^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + \dot{\lambda}^k} \quad (7.51)$$

Substituindo a Equação 7.44 na Equação 7.49:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^k &= \frac{I}{\dot{\lambda}^k (\delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + \dot{\lambda}^k} \\ \dot{\lambda}^k &= \frac{I}{\dot{\lambda}^k \left[(\delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + I \right]} \\ \dot{\lambda}^k &= \pm \frac{I}{\sqrt{(\delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + I}} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Finalmente, substituindo $\dot{\lambda}^k$ (dado na Equação 7.47) na Equação 7.50:

$$\Delta \lambda = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{(\delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1})^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{F}}^{k+1} + I}} \quad (7.53)$$

7.2.3 Direção do avanço da solução

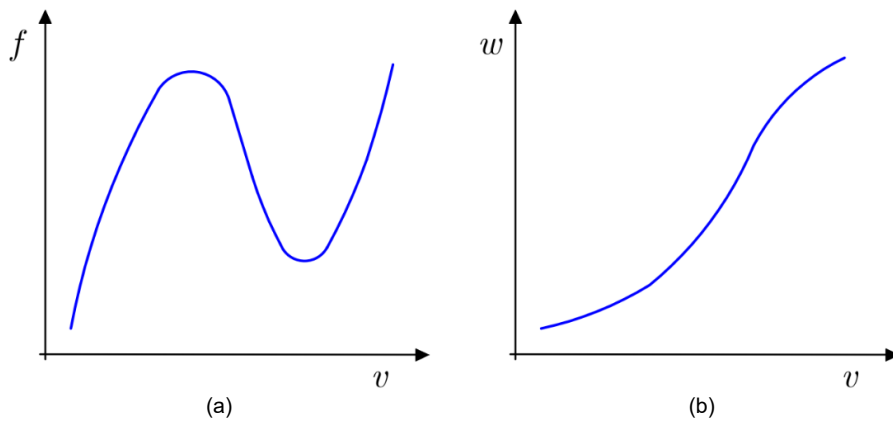
Determinar o sentido de avanço do preditor é importante e consiste em verificar se $\Delta\lambda_I$ está aumentando ou diminuindo no fim de um incremento. Um procedimento muito utilizado para tal finalidade é a aplicação da função sinal:

$$\text{sgn}(\Delta\lambda_I) = \text{sgn}\left[\left(\Delta\mathbf{u}^{k-1}\right)^T \delta\mathbf{u}_F^{k+1}\right] \quad (7.54)$$

em que $\Delta\mathbf{u}^{k-1}$ é o incremento do ciclo anterior (resultado da convergência).

Uma interpretação geométrica deste critério é dada nas Figuras 7.10 e 7.11. Considere uma estrutura com dois graus de liberdade cujo deslocamento é representado pelo vetor $\mathbf{u} = (w, v)^T$. Suponha que a Figura 7.10 (a) representa uma trajetória de equilíbrio $u \times f$ típica desta estrutura. A Figura 7.10(b) representa a trajetória de equilíbrio no plano $w \times v$, ou seja, no espaço de deslocamentos. Esta curva também representa a trajetória que os incrementos $\Delta\mathbf{u}$ deveriam seguir durante as iterações do algoritmo.

Figura 7.10 – Trajetória de equilíbrio para dois graus de liberdade.

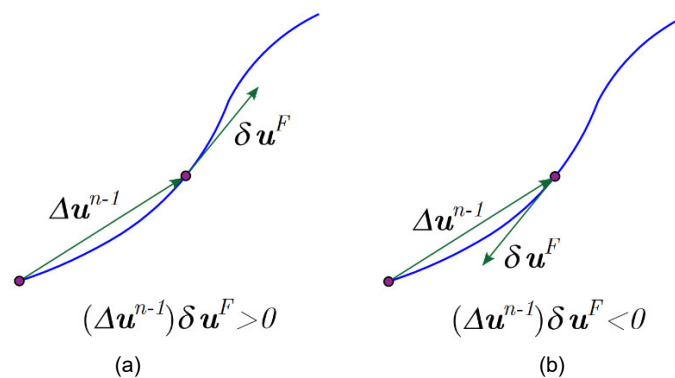


A Figura 7.11 mostra dois vetores. O primeiro representa o vetor tangente à trajetória de equilíbrio $\delta\mathbf{u}_F$. O segundo, $\Delta\mathbf{u}^{n-1}$, representa o incremento total do ciclo anterior (resultado da convergência) e, por isso, o incremento $\Delta\mathbf{u}^{n-1}$ conecta dois pontos sobre a trajetória de equilíbrio.

Dois casos podem ocorrer como mostra a Figura 7.11. No primeiro caso, Figura 7.11(a), o vetor $\delta\mathbf{u}_F$ tem o sentido de avanço da trajetória de equilíbrio e o

produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}_F > 0$. Já no segundo caso, Figura 7.10 (b), o vetor $\delta \mathbf{u}_F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço na trajetória de equilíbrio e o produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}_F < 0$. No último caso, o preditor não poderia ter o mesmo sentido de $\delta \mathbf{u}_F$ pois assim o método iria “caminhar para trás”. Desse modo, o correto seria o preditor ter o sentido contrário ao de $\delta \mathbf{u}_F$.

Figura 7.11 – Direção de avanço na solução. (a) $\delta \mathbf{u}_F$ tem o sentido de avanço na trajetória de equilíbrio. (b) $\delta \mathbf{u}_F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio.



7.2.4 Tamanho do incremento de arco

A ideia básica na determinação do tamanho do comprimento de arco a ser utilizado é que ele seja grande em regiões com poucas não-linearidades e pequeno em regiões com forte comportamento não-linear. Um mecanismo automático para atualização do comprimento de arco sugerido por Crisfield (1991) é o seguinte:

$$\Delta l^n = \Delta l^{n-1} \sqrt{\frac{I_d^n}{I^{n-1}}}, \quad (7.55)$$

em que:

- Δl^{n-1} o comprimento de arco no passo;
- I^{n-1} o número de iterações necessárias para convergir no passo $n - 1$;
- I_d^n o número de iterações desejadas no passo n (sendo $I_d^n \approx 3$, segundo Crisfield (1991));
- Δl^n o comprimento de arco a ser utilizado no passo n .

Caso a Equação 7.15 tenha duas raízes complexas, então não existem interseções entre a esfera (ou o cilindro) de raio Δl e a trajetória de equilíbrio. Isto

indica que o comprimento de arco é muito longo e o método perdeu a capacidade de prever a continuação da resposta. Assim, pode-se reduzir o comprimento de arco por meio de:

$$\Delta l^{atual} = \frac{1}{2} \Delta l . \quad (7.56)$$

8. PROGRAMA COMPUTACIONAL

8.1 INTRODUÇÃO

O ANLESTREM (sigla para Análise Não Linear de Estruturas com Elementos Melhorados) é um programa em elementos finitos desenvolvido com a linguagem de programação *MATLAB* no Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (UnB) pelo autor desta tese de doutorado, sob orientação do Professor *Dr. Ing. William Taylor Matias Silva* (UnB).

O ANLESTREM destina-se a realizar análises não-lineares inelásticas de estruturas discretizadas em elementos finitos quadriláteros e sólidos. Estes elementos são “melhorados” através das técnicas *EAS (Enhanced Assumed Strain)* e do método dos modos incompatíveis.

A não linearidade geométrica das estruturas é considerada neste programa através da inserção dos seus elementos numa plataforma co-rotacional (que descreve seus movimentos). A não linearidade material, por sua vez, é considerada por meio de um modelo de elastoplasticidade de von Mises com endurecimento linear.

A utilização de elementos quadriláteros e hexaédricos de baixa ordem com performance melhorada permite obter respostas livres de bloqueios e insensíveis a distorções de malha, quando se analisam estruturas submetidas a não linearidades geométricas e/ou físicas. As estruturas que se pode analisar com este programa são as do tipo paredes espessas e principalmente delgadas (placas e cascas).

A biblioteca disponível no programa apresenta seis tipos de elementos: quadrilátero de 4 nós padrão (Q4P); hexaédrico de 8 nós padrão (H8P); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (Q4MI); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (H8MI); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método EAS (Q4EAS); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método EAS (H8EAS). A opção por um destes elementos se dá mediante preenchimento no arquivo de entrada externo com o valor do *ITYPE* correspondente.

No ANLESTREM, quando se utiliza o elemento EAS, dependendo do tipo de capacidade que se deseja modificar no elemento (Tabela 4.1, Capítulo 4), se faz a opção de com quantos “parâmetros de deformação interna” se efetuará a análise. Assim, no arquivo de entrada de dados externo, indicar-se-á este parâmetro com o valor I_EAS correspondente. De maneira similar, o usuário poderá optar por uma análise com elementos enriquecidos com os modos incompatíveis. Neste caso, a quantidade de modos é fixa para cada domínio de análise escolhida – 2D ou 3D.

Com relação ao sistema de equações não lineares, o programa ANLESTREM conta com várias estratégias diferentes baseadas no método de Newton-Raphson e na técnica do comprimento de arco (*arc-length*).

6.2 PRINCIPAIS FUNÇÕES CONTIDAS NO PROGRAMA ANLESTREM

O ANLESTREM é o programa principal que executa várias funções que, por sua vez, solicita várias outras sub funções auxiliares naquele diretório até a completa realização da análise.

As funções contidas no programa principal são: INFILE, INDEXA, FUERZAS, INICIA, UPDATED_ARC_LENGTH, ASSEM, SKYDEC, SKYSOL, PREDICT, TESTE_FUNCTION, SKYSOL_CORRECTOR, LENGTH, UPDATE_LOAD_DISPLACEMENT, TENSION, RESIDUAL_FORCE, CONVERGENCE_CHECK, UPDATE_CONVERGENCE_VARIABLES e OUTPUT. Na Figura 8.1 é apresentado um fluxograma com a estrutura das principais funções implementadas no ANLESTREM. Por outro lado, na Figura 8.2 ilustra-se o fluxo de execução das principais variáveis do programa.

O programa ANLESTREM inicia executando a função INFILE. Através desta, lê-se os dados de entrada contidos em um arquivo de dados externo. Para tanto, dentro desta função é chamada uma outra função denominada READ_INPUT_FILE. Na função INFILE ainda são processados outros comandos que se referem a dados de caráter global necessários à execução do programa. A segunda função do ANLESTREM é a INDEXA. Esta calcula um vetor (IPOS) que contém as posições dos pivôs da matriz de rigidez da estrutura.

A próxima função a ser processada é a FUERZAS. Nela calculam-se as forças nodais equivalentes. Dependendo do tipo de carga (nodais,

gravitacionais, distribuída e/ou de superfícies), podem ser chamadas funções (FNODO, FGRAV, FLADO e/ou FSUPER) que leem as informações sobre cada tipo de esforço. Ainda dentro da função principal FUERZAS, o cálculo das forças nodais equivalentes (ALOAD) é realizado e finalmente introduzidas as condições de contorno.

A quarta função executada é a INICIA que, como seu próprio nome sugere, inicializa algumas variáveis (contadores, *arrays*, etc.) essenciais à execução do programa ANLESTREM. Neste momento o programa ANLESTREM está apto a iniciar o seu ciclo incremental. Um laço de *FOR* (faça) é então executado de 1 (um) até um número de incrementos (*NINC*) pré-estabelecido.

A primeira função executada dentro do laço incremental é a UPDATED_ARC_LENGTH que realiza o incremento automático do comprimento de arco (*ARCL*) ou o corte (*CUT*) se necessário.

Em seguida, é inicializado o contador das iterações de equilíbrio (*ITEQ*) e a variável de controle relacionada ao erro da força (*ERRORF*).

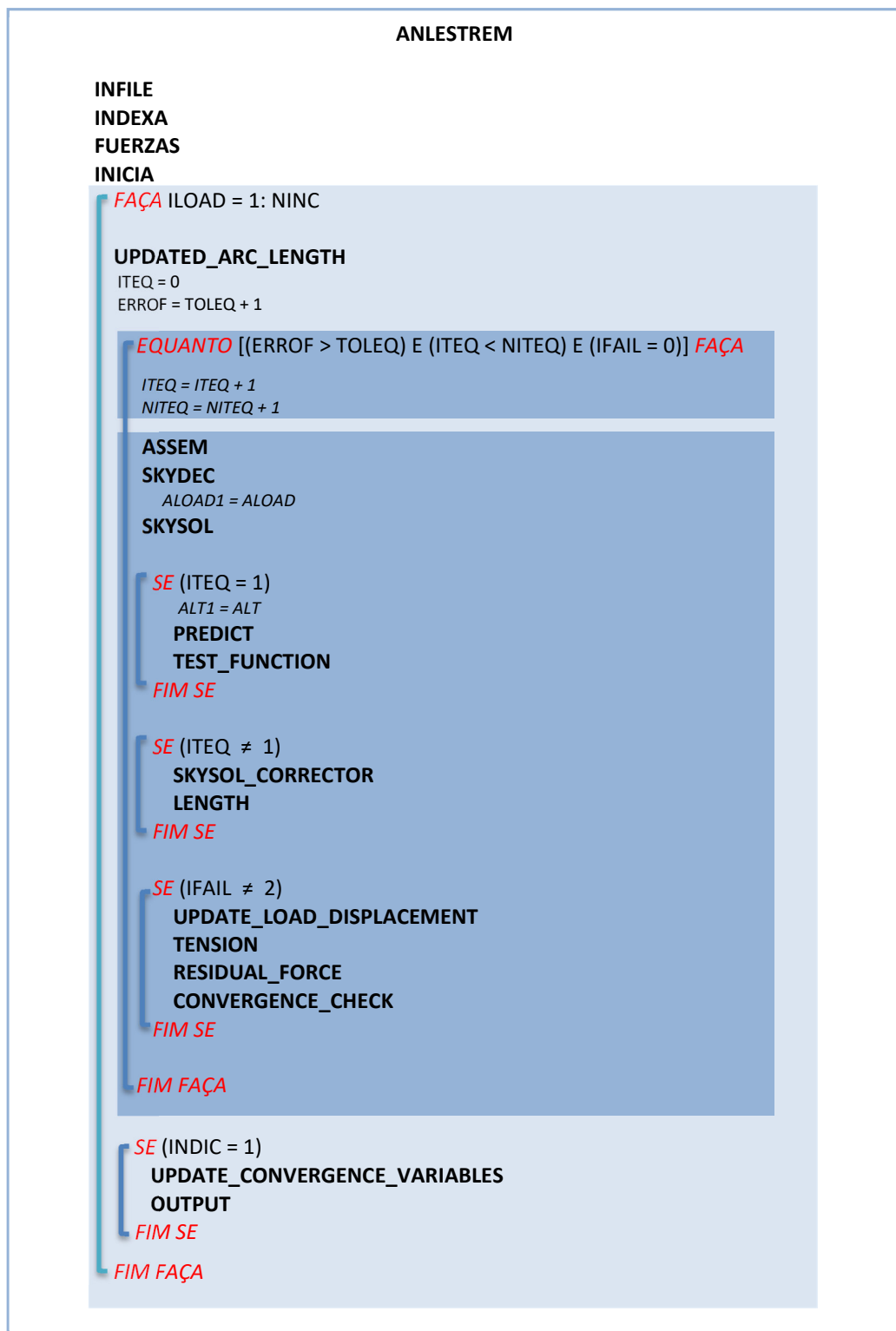
Neste ponto, começa o laço iterativo que é executado com um *WHILE* (enquanto) e, assim, verificando se as condições $ERRORF > TOLEQ$, $ITEQ < NITEQ$ e $IFAIL = 0$ são simultaneamente satisfeitas.

Os primeiros comandos executados no *loop* iterativo são contadores do número das iterações de equilíbrio *ITEQ* e do número máximo de iterações de equilíbrio *NITEQ* (definido no arquivo de entrada externo e que serve para controlar a execução do programa, evitando o seu processamento infinito).

A função vindoura é a ASSEM que monta a matriz de rigidez global da estrutura. Dentro desta função, outras funções são chamadas como a STIFF que calcula, via integração numérica de Gauss, a matriz de rigidez de cada elemento.

A SKYDEC é a próxima função executada. Através desta, triangulariza-se a matriz de rigidez pelo método de Crout (Ver Capítulo 4 de Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas – Amos Gilat, 2008). A função SKYSOL é chamada dentro do ANLESTREM para resolução do sistema linear de equações. A saída desta função é um vetor com deslocamentos nodais (*DESL*).

Figura 8.1 – Fluxograma das principais funções do ANLESTREM.

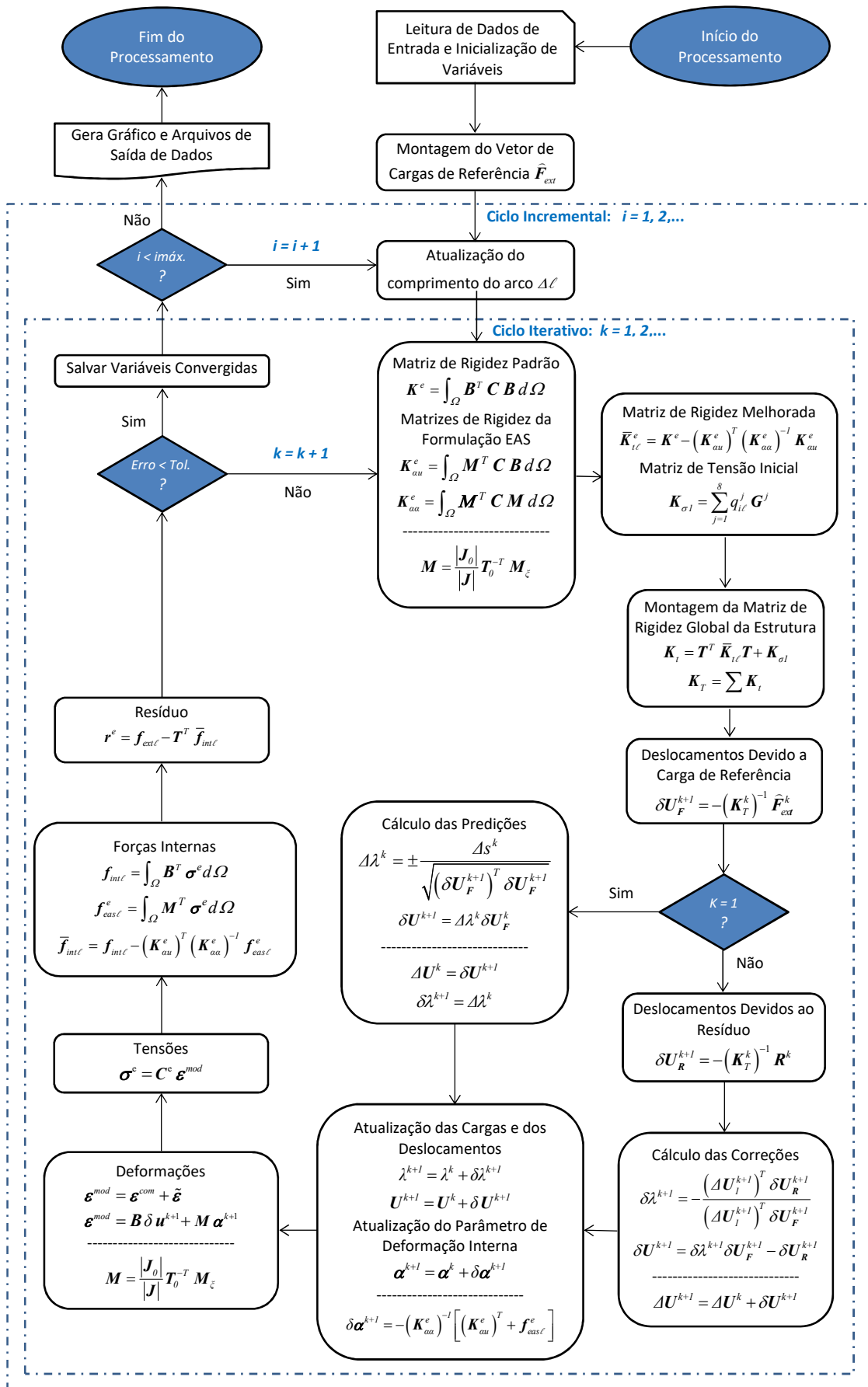


Na primeira iteração ($ITEQ = 1$) dentro do ciclo iterativo são executadas as funções PREDICT e TEST_FUNCTION. Na PREDICT calcula-se o parâmetro CST (current stiffness parameter) e o preditor ($DFACT$) para obtenção da trajetória de equilíbrio. A segunda executa funções teste para detecção da singularidade da matriz de rigidez tangente.

Se o valor de IFAIL (inicializado na função INICIA) é diferente de 2 (dois) então dá-se início a um laço de *IF* (se) com a execução das seguintes funções: UPDATED_LOAD_DISPLACEMENT, TENSION, RESIDUAL_FORCE, CONVERGENCE_CHECK. Se IFAIL for igual a 2 equivale à existência de duas raízes complexas na solução da equação quadrática pela função ROOT). Na função UPDATED_LOAD_DISPLACEMENT é feita uma atualização dos deslocamentos (*AL* e *DESL*) e fatores de carga (*DFACT* e *FACT*) incremental e total, respectivamente. Na TENSION, através de integração numérica, inicialmente se obtêm as tensões, deformações e força interna em cada elemento. Em seguida é feito o cálculo das reações nodais. A RESIDUAL_FORCE calcula as forças residuais. Já a CONVERGENCE_CHECK avalia a convergência do sistema de equações em deslocamento. Se ERRORF (erro das forças) for menor que uma tolerância pré-definida, atualizam-se as variáveis INDIC (INDIC = 1) e ICUT (ICUT = 0). Neste momento se sai do laço iterativo, já que para sua continuação implicaria em ERRORF > TOLEQ. Caso contrário teríamos uma nova iteração: ITEQ = ITEQ + 1.

Em um problema linear deve haver convergência já na primeira iteração. Entretanto, se estamos diante de um problema não-linear, provavelmente uma nova iteração se daria e, assim, seria novamente executado a soma dos contadores da iteração (ITEQ) no início do laço. Em seguida se atualizaria a matriz de rigidez que neste caso dependeria dos deslocamentos e também estaria em função das forças internas. Para ITEQ > 1 não há cálculo do preditor (DFACT) na PREDICT. Em vez disso, chama-se a SKYSOL_CORRECTOR e a LENGTH (onde se calcula o FAC – incremento de carga). Se INDIC = 1, a função UPDATED_CONVERGENCE_VARIABLES é executada, de modo que são salvas as variáveis do passo convergido (apenas estes valores e o número de passos requeridos interessam para serem salvos na prática). Em seguida, a função OUTPUT que imprime os resultados da análise (tensão (*TENS*); deslocamento (*DESL*) e reações (*REAC*), em coordenadas globais) é executada. Na continuação da execução do programa ANLESTREM é dado um novo incremento de carga (NINC) prosseguindo-se dessa maneira até a solução completa do problema estrutural.

Figura 8.2 – Fluxo de execução das principais variáveis do ANLESTREM.



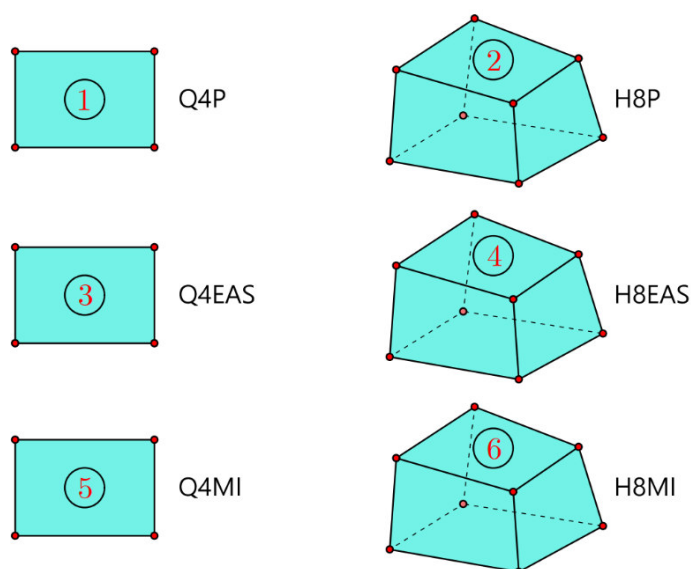
9. EXEMPLOS NUMÉRICOS

9.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são analisados 18 exemplos numéricos não lineares conhecidos da literatura. Dessa forma, pode-se avaliar a performance da formulação e da implementação realizada.

As estruturas são discretizadas com 6 tipos diferentes de elementos: quadrilátero de 4 nós padrão (Q4P); hexaédrico de 8 nós padrão (H8P); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (Q4MI); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método dos modos incompatíveis (H8MI); quadrilátero de 4 nós melhorado com o método EAS (Q4EAS); hexaédrico de 8 nós melhorado com o método EAS (H8EAS). A Figura 9.1 ilustra os elementos utilizados.

Figura 9.1 – Elementos de baixa ordem utilizados nas análises.



Inicialmente avaliou-se a utilização de elementos de baixa ordem em análises não lineares elásticas de estruturas. Posteriormente, verificou-se o emprego dos elementos implementados na análise elastoplástica de placas e cascas submetidas a grandes deslocamentos e rotações. Os resultados foram comparados com os encontrados em outras literaturas e também com aqueles obtidos por meio do software comercial ABAQUS.

Para tornar mais fácil a visualização e análise dos resultados, utilizou-se o software *open source* Paraview. As malhas de todas as estruturas analisadas foram obtidas por meio de planilhas eletrônicas do software Microsoft Excel. Os gráficos carga *versus* deslocamentos foram gerados fazendo uso do software Matlab. As

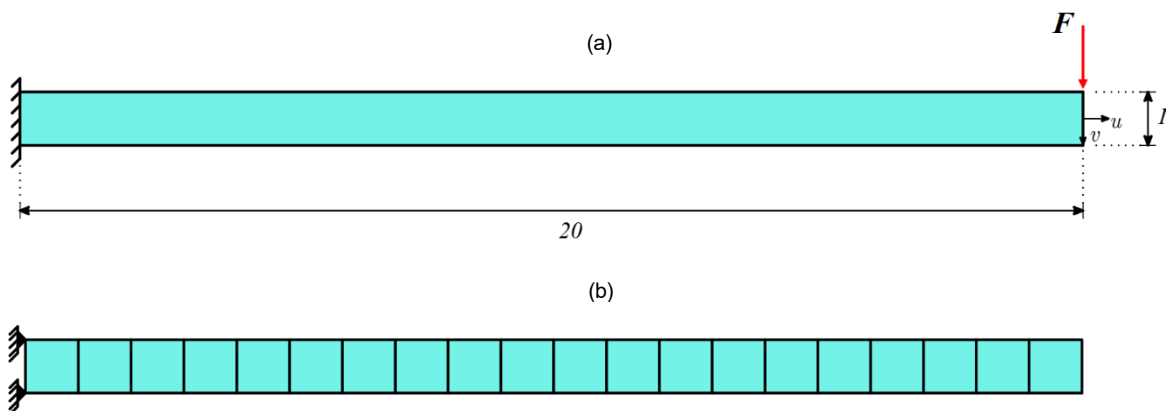
tensões calculadas nos pontos de Gauss são suavizadas por uma abordagem tal como apresentada em Durand (2014).

9.2 APLICAÇÕES ELÁSTICAS

9.2.1 Viga engastada

A estrutura trata-se de uma viga engastada que possui comprimento $L = 20$, altura $h = 1$ e espessura $b = 1$ como ilustrado em escala na Figura 9.2 (a). Adota-se um módulo de elasticidade $E = 4,8 \times 10^8$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. A viga está sujeita a uma carga de cisalhamento total de $F = 1000000$ aplicada na extremidade livre. Seguindo os trabalhos de Liu, Belytschko e Chen (1988), bem como o de Moita (1994), as unidades referentes aos dados de geometria e propriedades materiais não são especificadas.

Figura 9.2 – Geometria (a) e discretização (b) da viga engastada.



Por se tratar de um problema clássico, as soluções analíticas lineares e não lineares estão disponíveis. Assim, de acordo com Timoshenko e Gere (1972), considerando a teoria dos pequenos deslocamentos e rotações, o deslocamento vertical na extremidade livre da viga é dado por:

$$v^{max} = \frac{FL^3}{3EI} \quad (9.1)$$

Ainda de acordo com a referência antes mencionada, considerando a teoria dos grandes deslocamentos e rotações, os deslocamentos horizontais e verticais da extremidade livre podem ser calculados por:

$$\frac{\delta v}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} [H(k) - H(k, \phi)] \quad (9.2)$$

$$\frac{\delta u}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EIsen\beta}{PL^2}}$$

Em que nas expressões anteriores F é uma carga concentrada na extremidade livre; I é o momento de inércia; β é a rotação da extremidade livre da viga; H são integrais elípticas que podem ter seus valores obtidos em manuais de referência como Belyakov (1965) ou Keisan, (2018).

Dada a simplicidade do problema, na análise numérica foram utilizados apenas 20 elementos ao longo do comprimento da peça. Na Figura 9.2 (b) mostra-se a discretização da estrutura. Para se fazer uma comparação com os resultados analíticos, foram considerados como valores numéricos a média dos deslocamentos obtidos nos dois nós situados na extremidade livre da peça.

O método de Newton-Raphson com 10 passos de carga e uma tolerância de 10^{-5} foi utilizado na obtenção da resposta. Na Figura 9.3 plotam-se com curvas cheias os resultados de carga *versus* deslocamentos normalizados obtidos pelas teorias de pequena e grandes deflexões. Sobre estes resultados são plotados os valores obtidos com elementos incompatíveis Q4MI. Verifica-se uma boa convergência entre os resultados. Ainda na Figura 9.3 observam-se os resultados em linhas tracejadas obtidos com o elemento de padrão Q4P em que se verifica uma rigidez artificial da resposta quando comparado com o elemento incompatível. Na Figura 9.4, apresenta-se a configuração deformada para o último passo de carga. Um total de 45 iterações foram necessárias para realizar a análise.

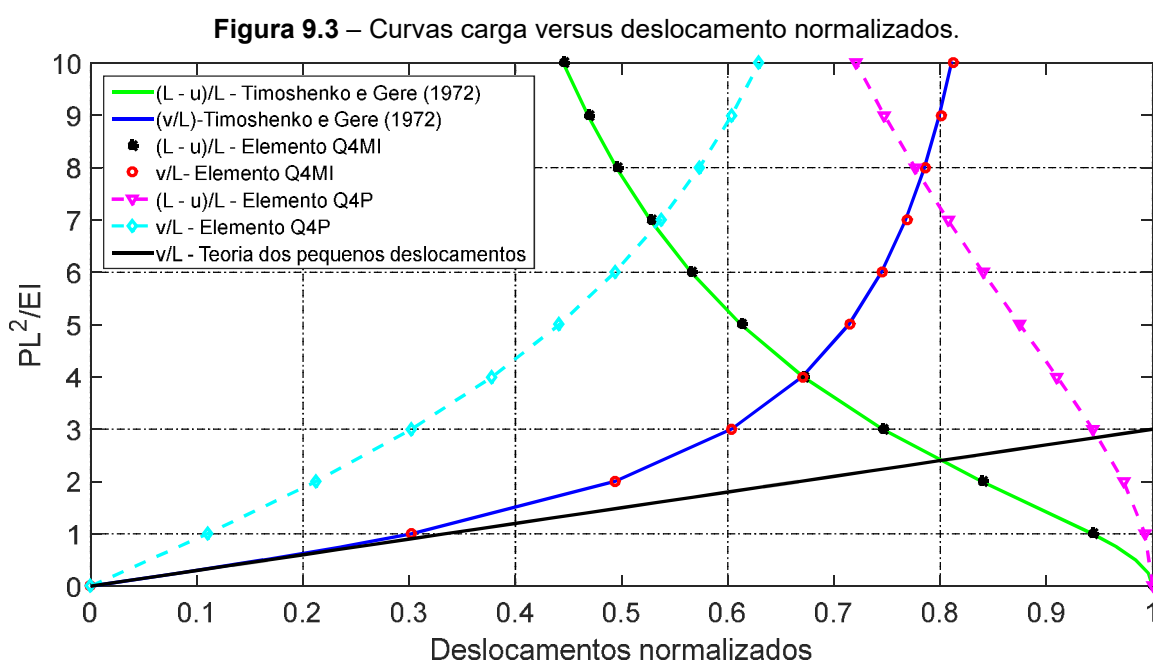
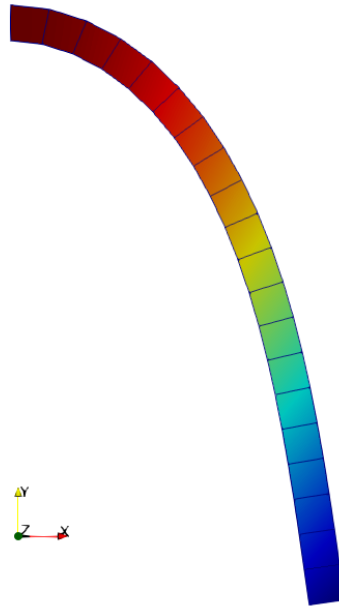


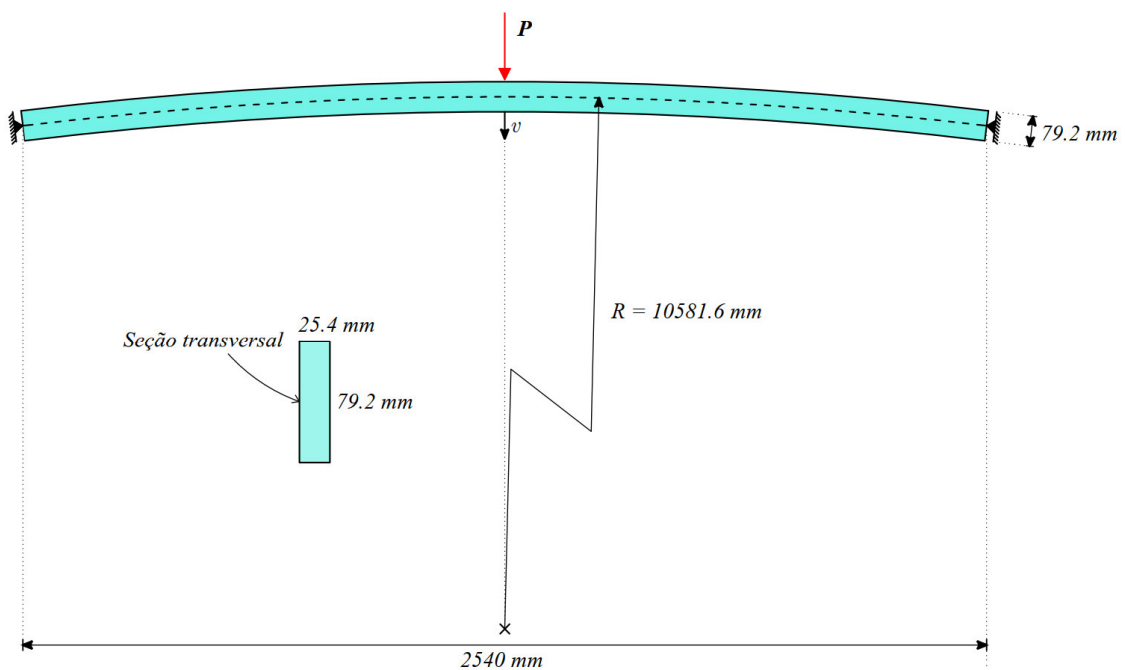
Figura 9.4 – Configuração deformada para o ultimo incremento de carga.



9.2.2 Arco circular abatido

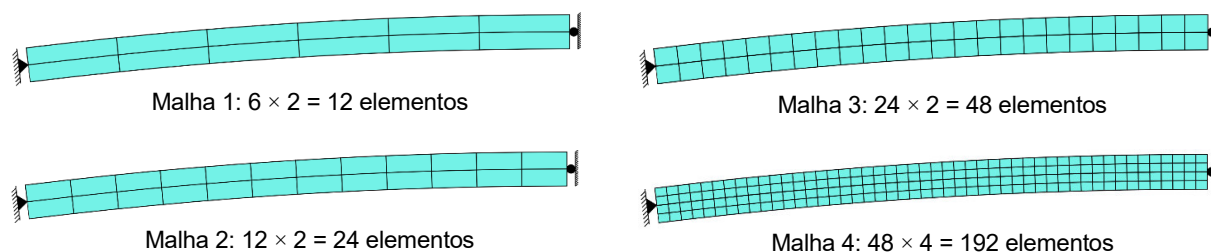
A estrutura analisada refere-se a um arco circular abatido, rotulado nas suas extremidades e submetido a uma carga concentrada no seu centro conforme ilustrado na Figura 9.5. Este exemplo é apresentado no artigo de Yaw, Sukumar e Kunnath (2009), do qual a geometria e propriedades materiais são tomados. A geometria do arco é definida por um raio $R = 10581,6 \text{ mm}$; uma seção transversal com altura radial $79,2 \text{ mm}$ e espessura $25,4 \text{ mm}$; e um vão entre os apoios de 2540 mm . Adota-se um módulo de elasticidade $E = 68,948 \text{ kN/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$.

Figura 9.5 – Geometria do arco.



O arco foi analisado tanto com o programa implementado nesta pesquisa quanto por meio do software ABAQUS. Devido à simetria, apenas metade da estrutura foi discretizada. Adotou-se 4 malhas com 12, 24, 48 e 192 elementos, como mostrado na Figura 9.6.

Figura 9.6 – Discretizações do domínio.



O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante juntamente com o método de Newton-Raphson foram utilizados na obtenção da resposta. O comprimento de arco e a tolerância para a convergência usados foram $\Delta l = 7,8$ e 10^{-5} , respectivamente. No ABAQUS o comprimento de arco inserido foi $\Delta l = 0,0087$. Na Figura 9.7 plotam-se os resultados de carga *versus* deslocamentos obtidos com elementos incompatíveis Q4MI para as quatro malhas estudadas. Verifica-se uma ligeira redução na previsão da capacidade resistente da estrutura quando se utiliza uma malha de 192 elementos. Estes resultados mostram o bom desempenho dos elementos enriquecidos em determinar a capacidade resistente do arco mesmo quando são utilizadas malhas grosseiras. Utilizou-se 20 passos de carga e um total de 60 interações foram necessárias para realizar a análise. Na análise com o ABAQUS, trabalhou-se com 1000 passos de carga e contabilizou-se 1000 interações ao final da análise.

Na Figura 9.8 são mostradas as curvas carga *versus* deslocamento obtidas com a estrutura discretizada com a malha 24×2 e utilizando os elementos Q4P, Q4MI, Q4EAS-4, Q4EAS-7. Os elementos EAS e incompatíveis apresentam resposta idênticas. A análise da estrutura com o ABAQUS é feita utilizando o elemento CPS4 e, como se pode observar, apresenta resposta muito próxima em relação àquelas obtidas com a formulação implementada no presente trabalho. Como era previsto, dada a sua incapacidade de simular certas condições, o elemento Q4P apresenta uma sobrerigidez na resposta. Na Figura 9.9 apresenta-se a configuração deformada para o último passo de carga da simulação com o elemento Q4EAS-7. Na Figura

9.10, apresentam-se a distribuição de tensões σ_{xx} na estrutura para o último passo de carga e fazendo uso do elemento Q4EAS-7.

Figura 9.7 – Curvas carga versus deslocamento na direção v .

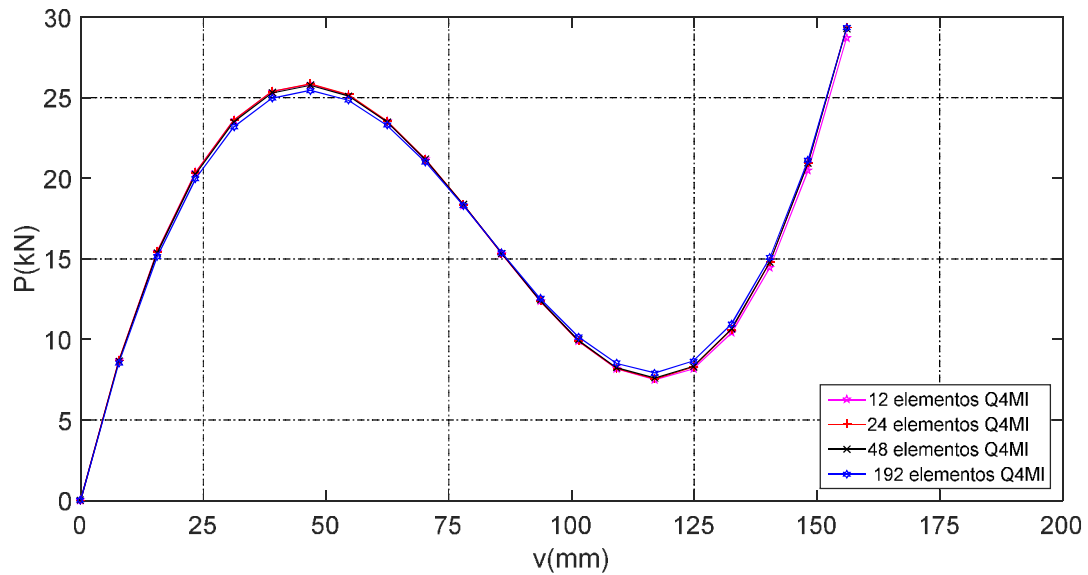


Figure 9.8 – Curvas carga versus deslocamento na direção v .

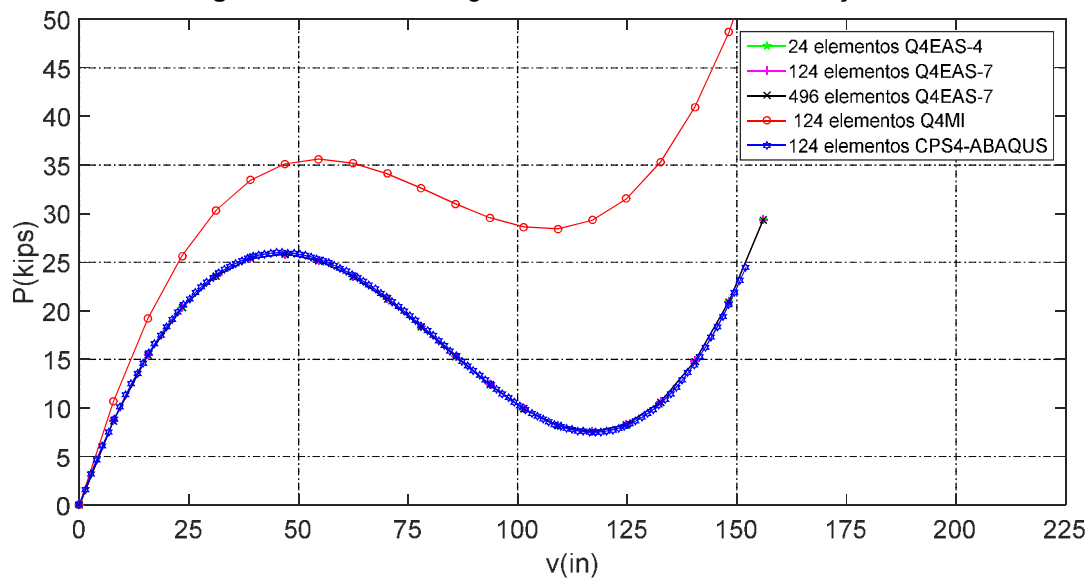


Figura 9.9 – Configuração deformada para o último incremento de carga

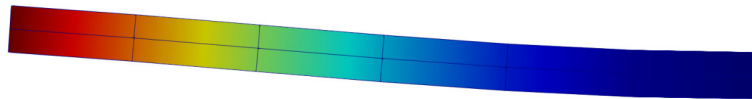
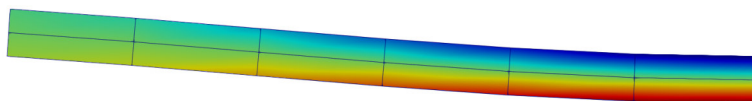


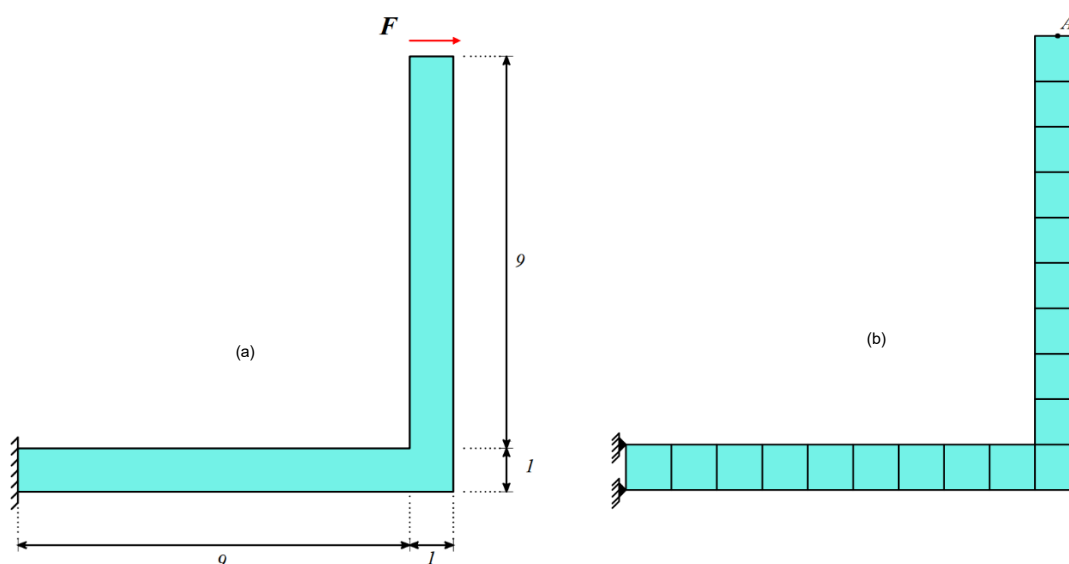
Figura 9.10 – Tensões σ_{xx} para o último incremento de carga.



9.2.3 Pórtico L

O pórtico tem sua geometria, condições de contorno e carregamento ilustrados na Figura 9.11 (a). Uma das extremidades está totalmente engastada e a outra extremidade encontra-se livre e submetida a uma carga de cisalhamento horizontal. Adota-se um módulo de elasticidade $E = 3,0 \times 10^7$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Este exemplo é apresentado em Battini (2008) e mais recentemente em Karkon e Pajand (2016). Acompanhando essas referências, as unidades relacionadas a geometria e propriedades materiais não são também especificadas. A Figura 9.11(b) mostra a estrutura discretizada com 19 elementos (19×1). Como procedido em Battini (2008), os deslocamentos foram tomados no ponto A que está sobre o eixo do pórtico e, para essa discretização, foram considerados como os valores numéricos médios dos deslocamentos obtidos nos dois nós situados na extremidade livre. O método de Newton-Raphson com 20 passos de carga e uma tolerância de 10^{-5} foram utilizados na obtenção da resposta. Um total de 4 iterações por passo de carga foram necessárias para realizar a análise. Na análise com o ABAQUS foram utilizados 10 passos de carga e contabilizaram-se 1000 iterações ao final da análise.

Figura 9.11 – (a) Geometria e (b) discretização do domínio do portico L.



Na Figura 9.12 apresentam-se as curvas carga *versus* deslocamento das análises numéricas realizadas com os elementos Q4MI, Q4EAS-4, Q4EAS-7. Verifica-se que as respostas praticamente se superpõem. A análise da estrutura com o ABAQUS é novamente feita utilizando o elemento CPS4 e, como pode ser

observado, a resposta praticamente se confunde com as obtidas neste trabalho. Na Figura 9.13, apresenta-se a configuração deformada para o último passo de carga e utilizando-se o elemento Q4EAS-7.

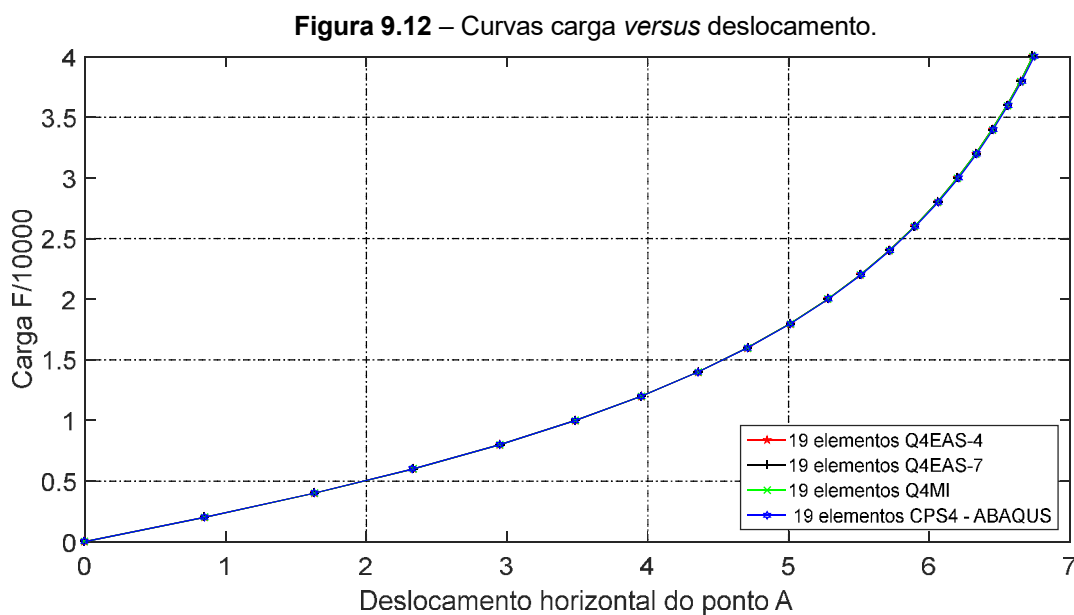
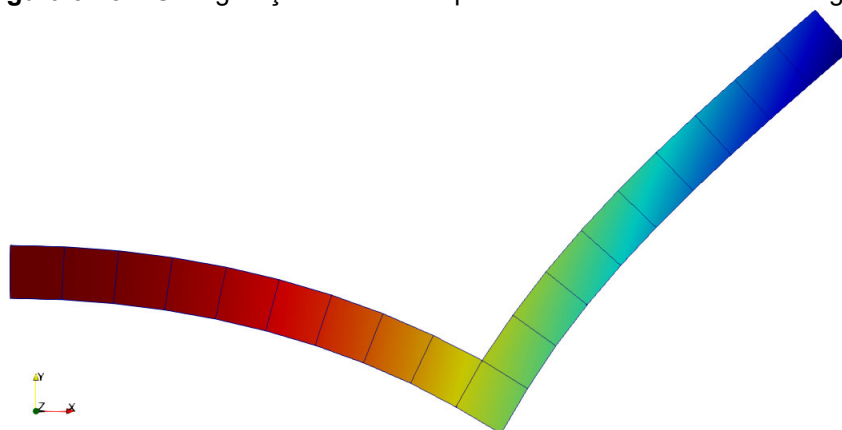


Figura 9.13 – Configuração deformada para o último incremento de carga.



9.2.4 Pórtico T

A geometria, condições de contorno e carregamento do pórtico são ilustrados na Figura 9.14. A seção transversal possui altura 4 in e largura 1 in. Os apoios são rótulas que se situam nas extremidades e sobre os eixos. Na extremidade esquerda o apoio permite apenas deslocamento horizontal e nas extremidades inferior e direita os apoios restringem deslocamentos na horizontal e vertical. Uma carga concentrada está verticalmente aplicada no ponto A. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 29000 \text{ ksi}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Este problema também é apresentado em Yaw, Sukumar e Kunnath (2009), do qual a geometria e propriedades materiais são

tomados. A Figura 9.15 mostra a estrutura discretizada com (a) 124 elementos e (b) 496 elementos, respectivamente. Observa-se que, dada as condições de contornos, no mínimo 2 elementos são necessários ao longo da altura da seção transversal da estrutura.

O comprimento de arco e a tolerância para a convergência utilizadas nas análises foram $\Delta l = 0,3$ e 10^{-5} , respectivamente. No ABAQUS o comprimento de arco inserido foi $\Delta l = 0,014275$. Trabalhou-se com 74 passos de carga e um total de 232 iterações foram necessárias para realizar a análise. Na simulação com o ABAQUS, utilizaram-se 1000 passos de carga e foram contabilizados 1000 iterações ao final do processo.

Figura 9.14 – Geometria do pórtico T.

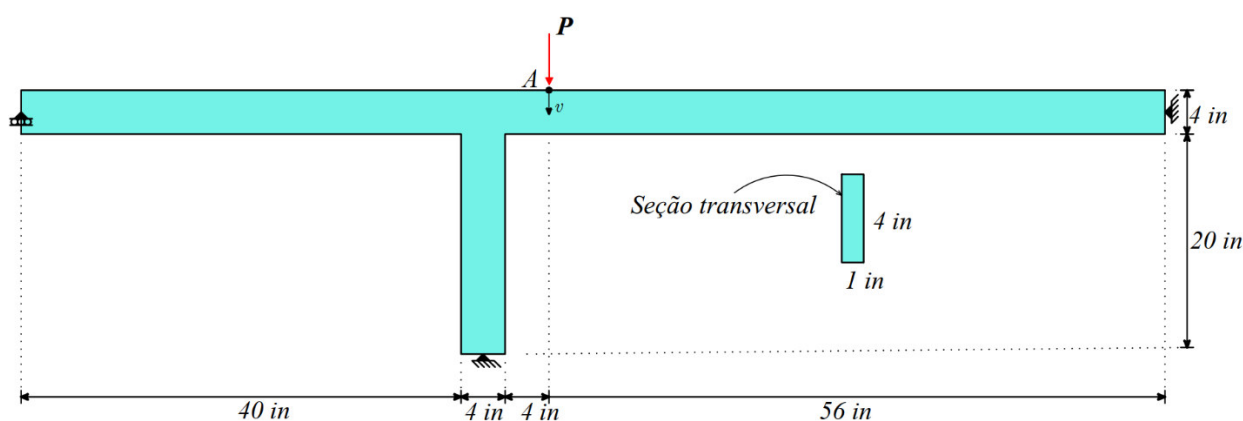
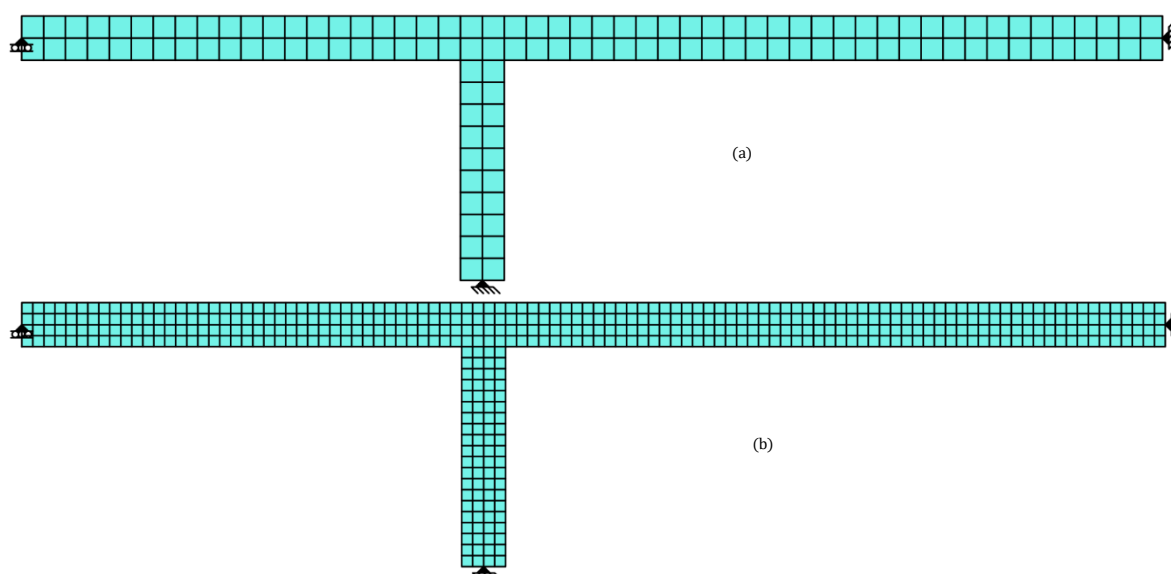


Figura 9.15 – Discretização do pórtico T. (a) 124 elementos; (b) 496 elementos.



Na Figura 9.16 apresentam-se as curvas carga *versus* deslocamento da análise numérica realizada com os elementos Q4P, Q4MI, Q4EAS-4 e Q4EAS-7 e com as duas malhas antes descritas. Verifica-se que as respostas com 124

elementos enriquecidos são praticamente coincidentes com aquela produzida com o elemento CPS4 no programa ABAQUS. Uma pequena redução no valor da capacidade resistente da estrutura só é verificada quando se utiliza uma malha com 496 elementos. Este fato mais uma vez atesta a performance dos elementos mesmo quando são utilizadas malhas grosseiras. Por fim, na Figura 9.16, observa-se que utilizando o elemento padrão Q4P, obtêm-se respostas mais rígidas. Na Figura 9.17, apresenta-se a configuração deformada para o último passo de carga.

Figura 9.16 – Curvas carga versus deslocamento na direção v .

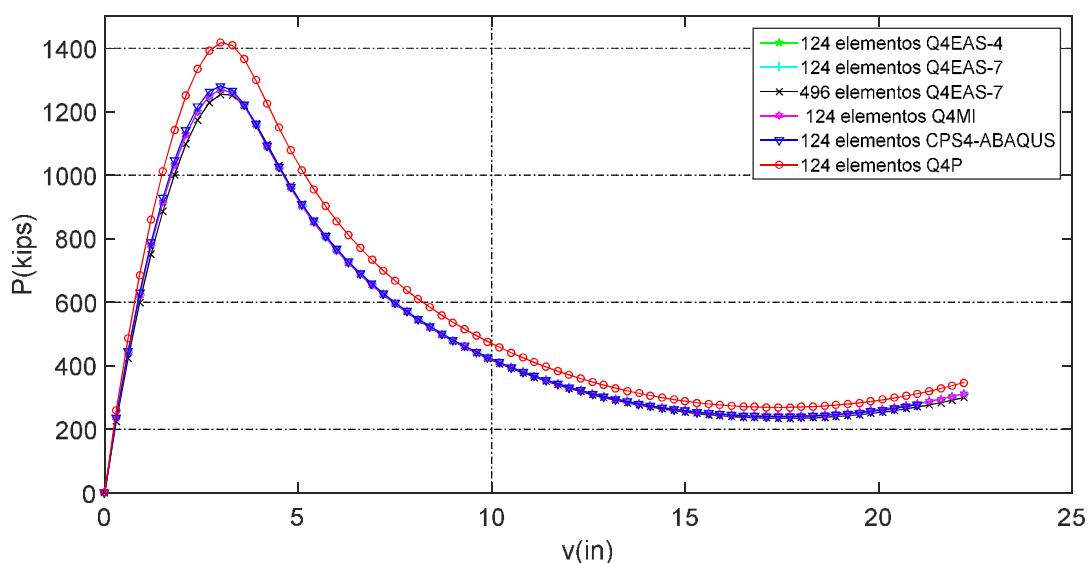
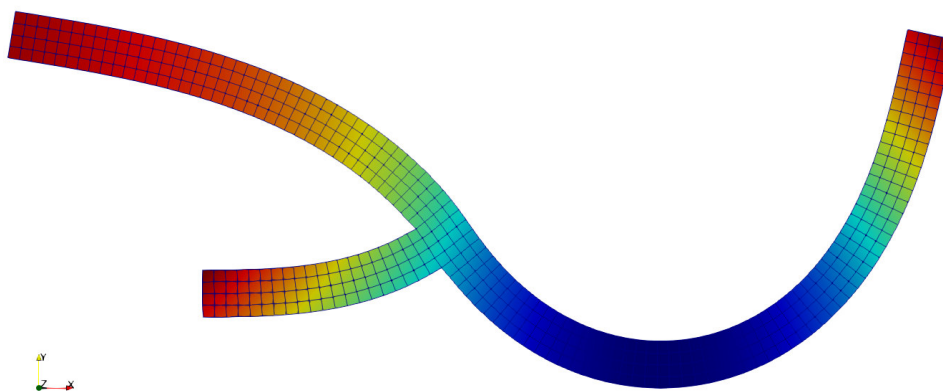


Figura 9.17 – Configuração deformada para o último incremento de carga.

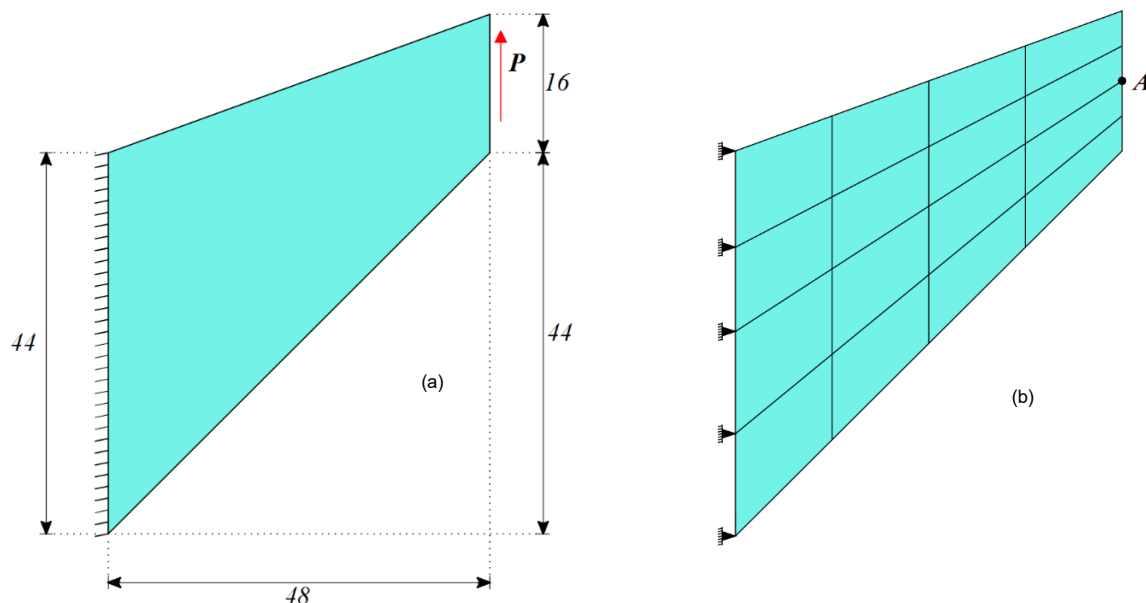


9.2.5 Viga de Cook

A viga tem a geometria, condições de contorno e carregamento ilustrados na Figura 9.18(a). A estrutura está engastada do lado esquerdo e livre no lado da extremidade oposta. Uma carga de valor total $F = 1$ está distribuída sobre a aresta livre. O módulo de elasticidade é $E = 1$, o coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$ e a espessura $t = 1$. Este exemplo, clássico em análises lineares, é apresentado no âmbito não linear geométrico por Karkon e Pajand (2016). Acompanhando esse

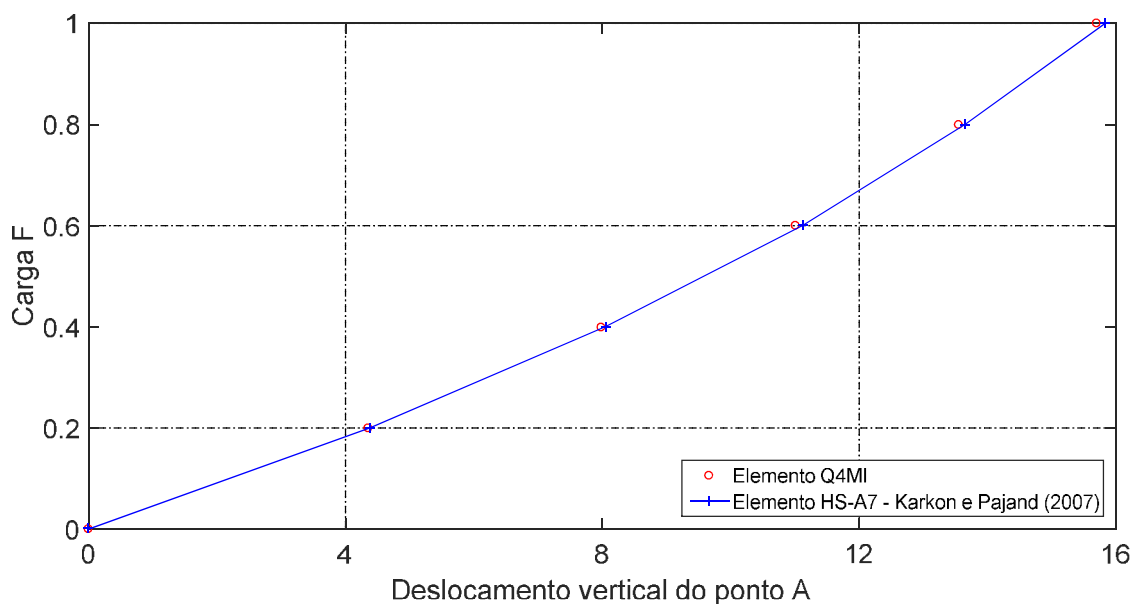
trabalho, as unidades relacionadas a geometria, propriedades materiais e carregamento não são também aqui estabelecidas. A Figura 9.18(b) mostra a estrutura discretizada com uma malha 16 (4 x 4) elementos quadriláteros. O método de Newton-Raphson com apenas 5 passos de carga e uma tolerância de 10^{-5} foi utilizada na obtenção da resposta. Um total de 4 iterações por passo de carga foram necessárias para realizar a análise.

Figura 9.18 – Viga de Cook. (a) Geometria e (b) discretização do domínio.



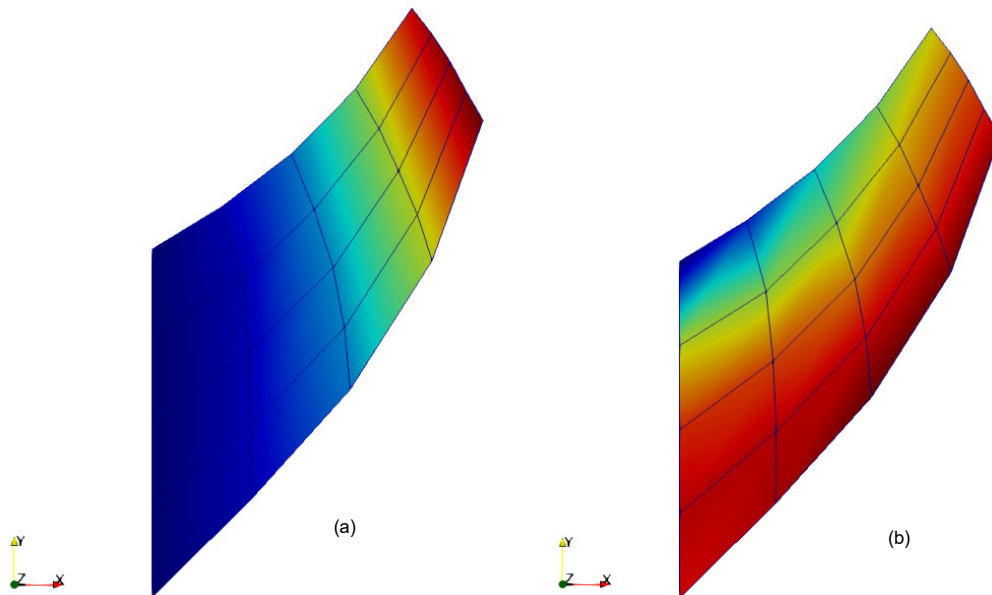
Na Figura 9.19 apresenta-se a curva carga *versus* deslocamento no ponto A da análise numérica realizada com o elemento Q4MI. Os resultados obtidos foram confrontados com os encontrados em Karkon e Pajand (2016).

Figura 9.19 – Curvas carga *versus* deslocamento.



Verifica-se que as curvas são praticamente coincidentes e atestam o bom desempenho da formulação implementada, mesmo quando são utilizadas malhas grosseiras e elementos distorcidos. Na Figura 9.20(a) apresenta-se a configuração deformada e na Figura 9.20(b) as tensões σ_{xx} sobre a estrutura para o último passo de carga.

Figura 9.20 – (a) Configuração deformada e (b) σ_{xx} tensões para o último incremento de carga.



9.2.6 Viga engastada sujeita a carga de cisalhamento

A geometria, condições de contorno e carregamento da viga engastada são ilustrados na Figura 9.21. A viga engastada tem comprimento de $L = 10$. Sua seção transversal possui largura $b = 1$ e altura $h = 0,1$. A peça está engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma carga de cisalhamento F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^6$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. A Figura 9.22 mostra a discretização adotada, em que 20 elementos H8EAS30 foram utilizados ao longo do comprimento, 1 na largura e 1 ao longo da espessura. Este problema é apresentado em Polat (2010). Seguindo essa publicação, as unidades relacionadas a geometria, propriedades materiais e carregamento não são especificadas.

Os resultados da análise são mostrados nas Figuras 9.23 e 9.24. Na primeira, as curvas carga \times deslocamento são apresentadas. Pode-se verificar uma boa concordância das respostas quando comparadas com as obtidas por Polat

(2010), que também simulou o problema com a mesma malha adotada neste presente trabalho. A deformada da estrutura é exposta na Figura 9.23.

Figura 9.21 – Geometria da viga em balanço.

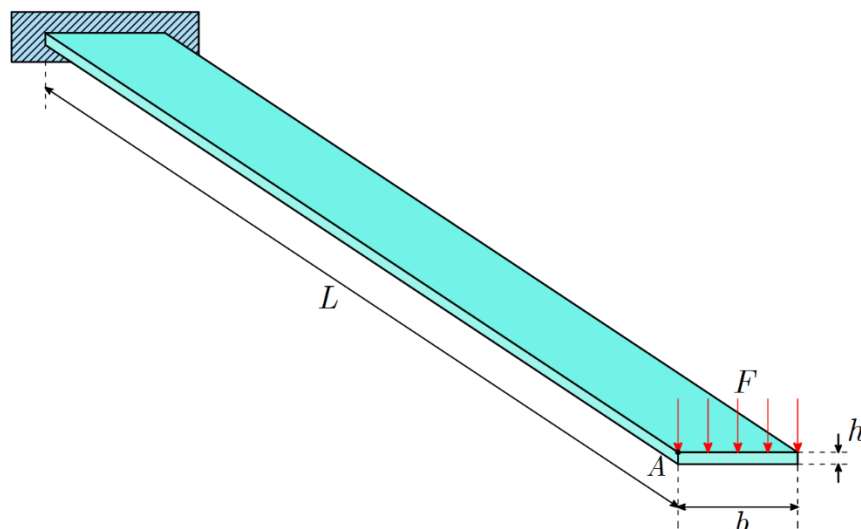


Figura 9.22 – Discretização do domínio. Malha: 20 elementos H8EAS30 ($20 \times 1 \times 1$).

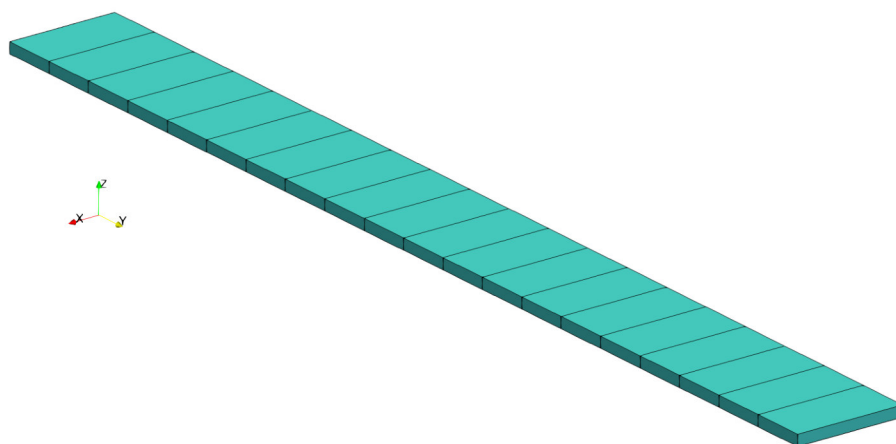


Figura 9.23 – Curva carga versus deslocamento (horizontal u_A e vertical w_A) na extremidade livre.

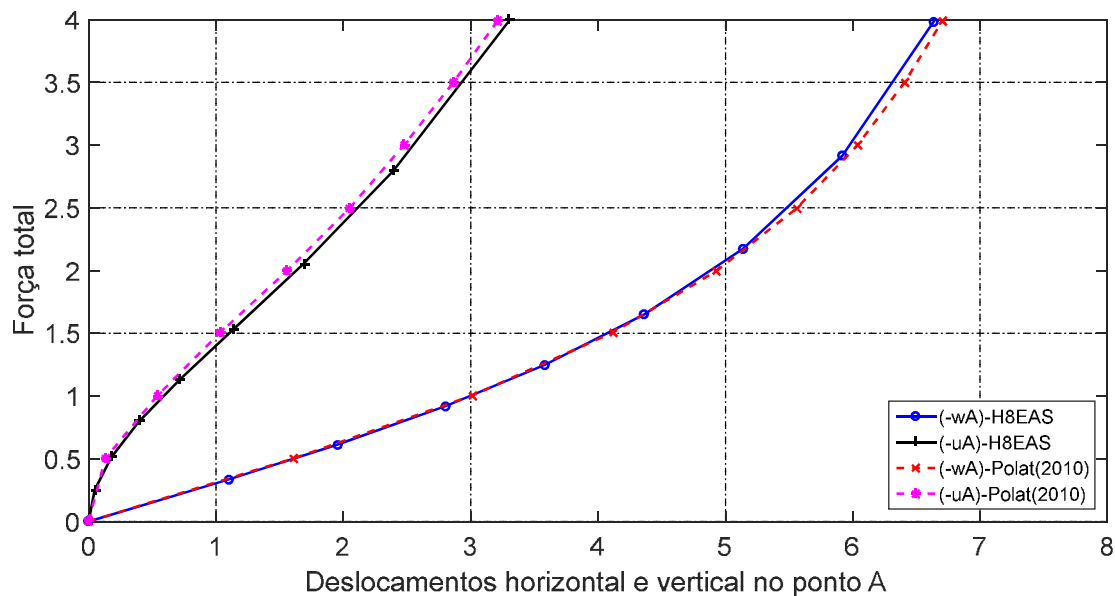
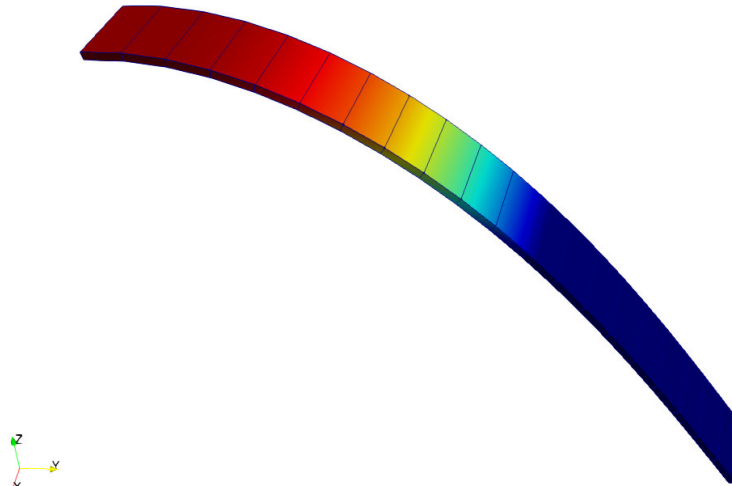


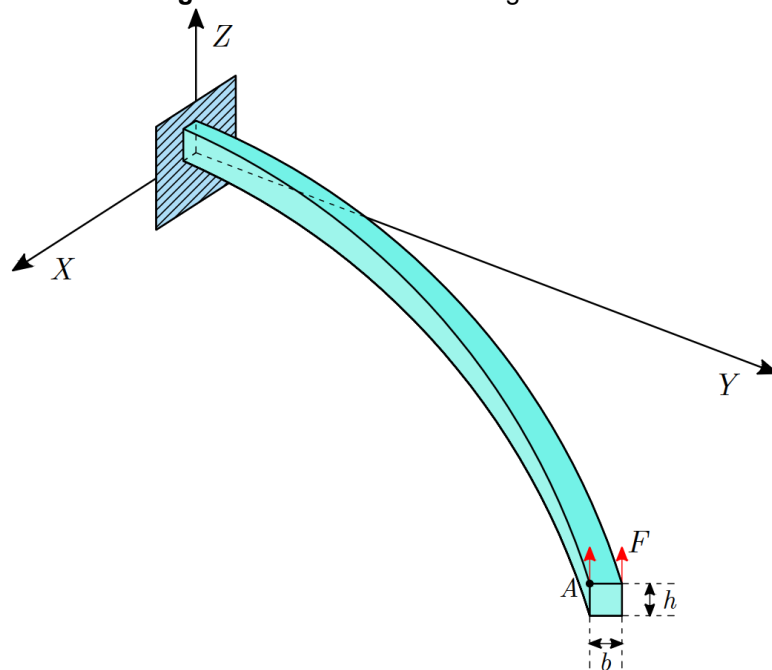
Figura 9.24 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.7 Viga circular 45° em balanço

As características da geometria, condições de contorno e carregamento da estrutura são ilustradas na Figura 9.25. O eixo da viga possui uma curvatura cujo raio é igual a $R = 100$. A seção transversal possui largura $b = 1$ e altura $h = 1$. Uma carga concentrada F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^7$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. Também, seguindo Polat (2010), as unidades relacionadas a geometria, propriedades materiais e carregamento não são aqui especificadas.

Figure 9.25 – Geometria da viga circular.



A Figura 9.26 mostra a malha adotada na análise. O método de Newton-Raphson com apenas 4 passos de carga e uma tolerância de 10^{-5} foram utilizados na obtenção da resposta. Um total de 6 iterações por passo de carga foram

necessárias para realizar a análise. Por meio da Figura 9.27, verifica-se que mesmo com essa malha com poucos elementos, obtêm-se resultados idênticos aqueles presentes em Polat (2010). Este autor utiliza uma discretização mais refinada: $20 \times 2 \times 2$ elementos. A deformada final da estrutura é apresentada na Figura 9.28.

Figura 9.26 – Discretização do domínio. Malha: 16 elementos H8EAS30 ($16 \times 1 \times 1$).

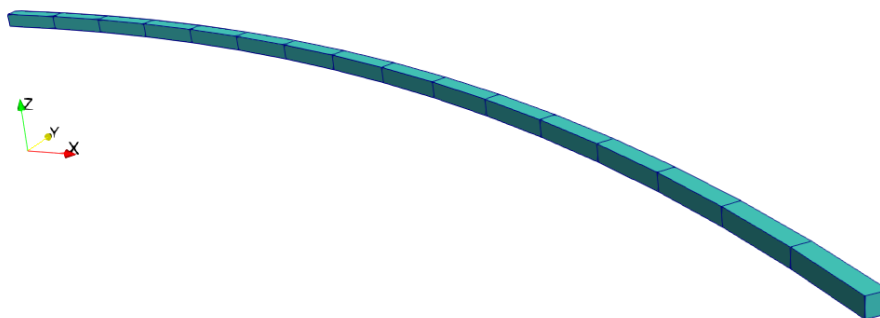


Figura 9.27 – Curva carga versus deslocamento (horizontal u_A e vertical w_A) na extremidade livre.

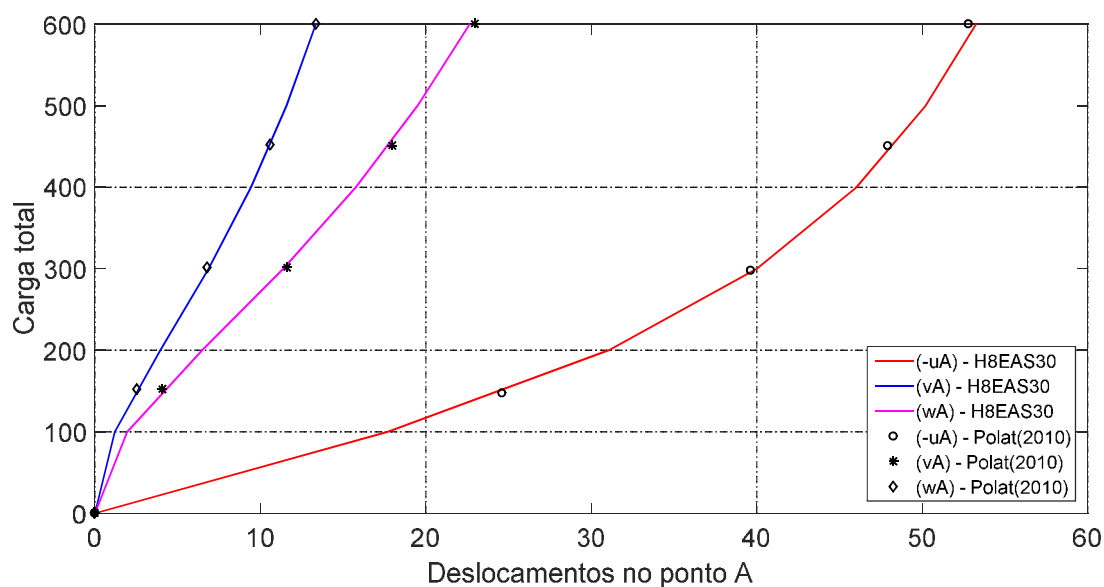
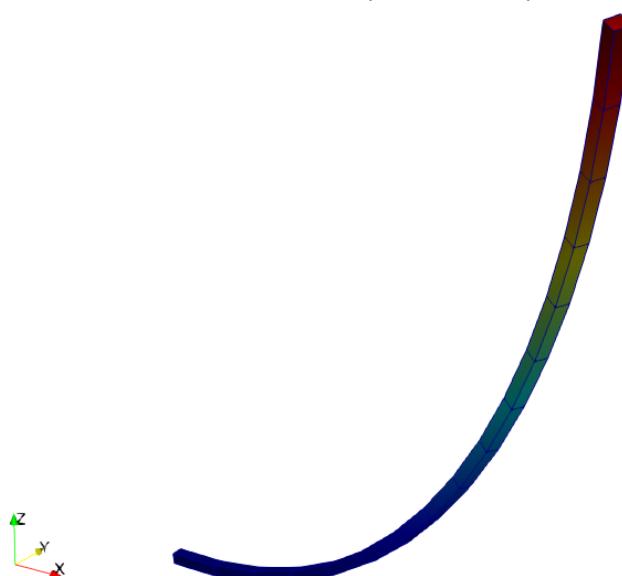


Figura 9.28 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.8 Placa retangular em balanço com carga concentrada no canto

A geometria, condições de contorno e carregamento da placa são ilustrados na Figura 9.29. A estrutura possui largura $l = 30\text{ m}$, comprimento $c = 40\text{ m}$ e espessura $h = 0,4\text{ m}$. A peça está engastada em uma das face e livre nas outras extremidades. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^8\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Este problema é apresentado no artigo de Shi e Voyiadjis (1991), do qual as unidades referentes a geometria, propriedades materiais e carregamento são tomados. Mais recentemente, o mesmo exemplo é explorado por Filho (2002). A Figura 9.30 mostra a estrutura discretizada.

Figura 9.29 – Geometria da placa rectangular.

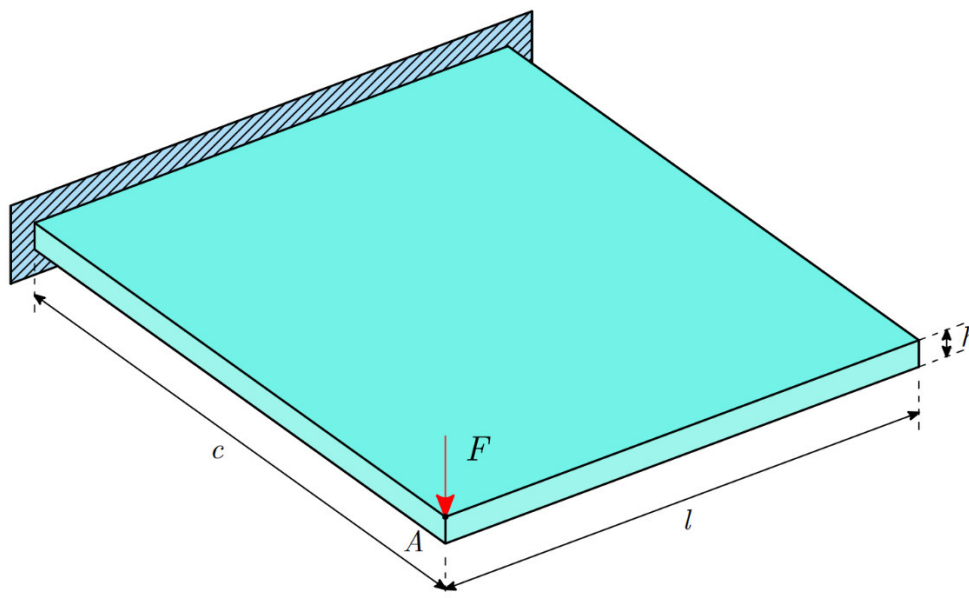
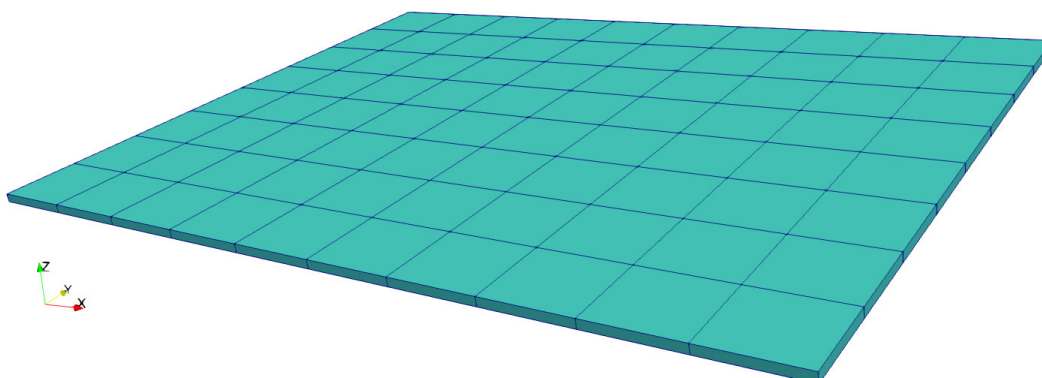


Figura 9.30 – Discretização do domínio. Malha: 80 elementos H8EAS30 ($10 \times 8 \times 1$).



O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado na obtenção da resposta. O comprimento de arco e a tolerância para a convergência empregadas foram $\Delta l = 1,58$ e 10^{-5} , respectivamente. Trabalhou-se com apenas 18 passos de carga e um total de 78 iterações foram necessárias para

realizar a análise. A curva carga *versus* deslocamento da estrutura no ponto A onde a carga é aplicada é mostrada na Figura 9.31. Verifica-se que mesmo com uma malha com apenas 80 elementos, obtêm-se resultados idênticos àqueles presentes em Filho (2002). Vale salientar que este autor utiliza uma discretização um pouco mais refinada: $10 \times 8 \times 4$ elementos. A deformada final da estrutura é apresentada na Figura 9.32. Observa-se que a formulação implementada é capaz de capturar os grandes deslocamentos e rotações que se desenvolvem na placa.

Figura 9.31 – Curva carga *versus* deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.

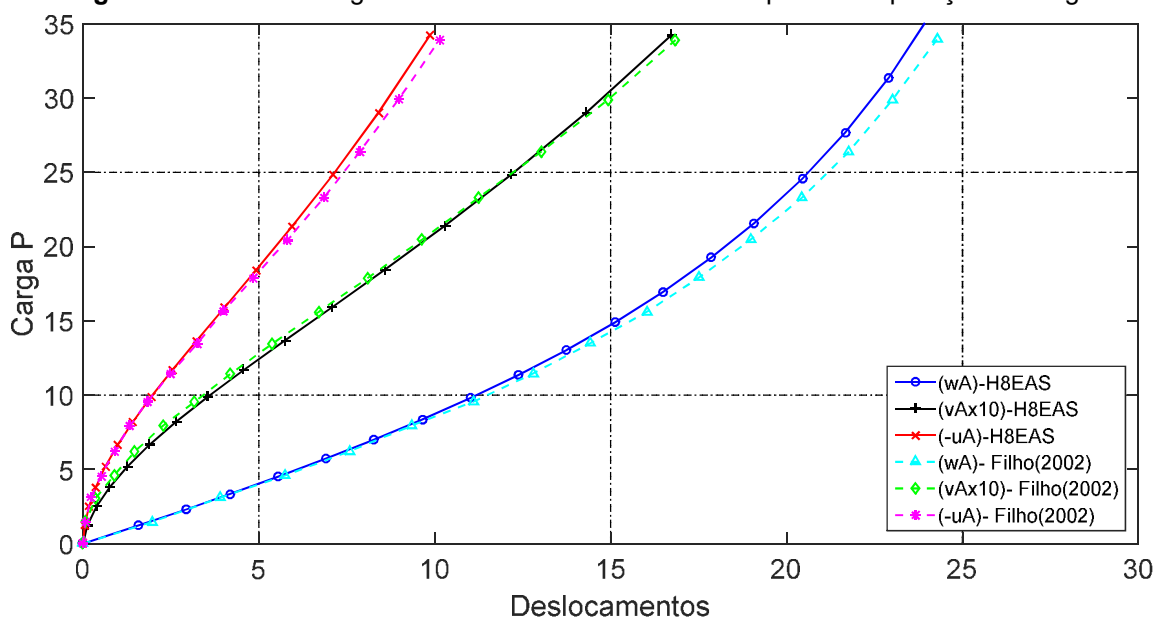
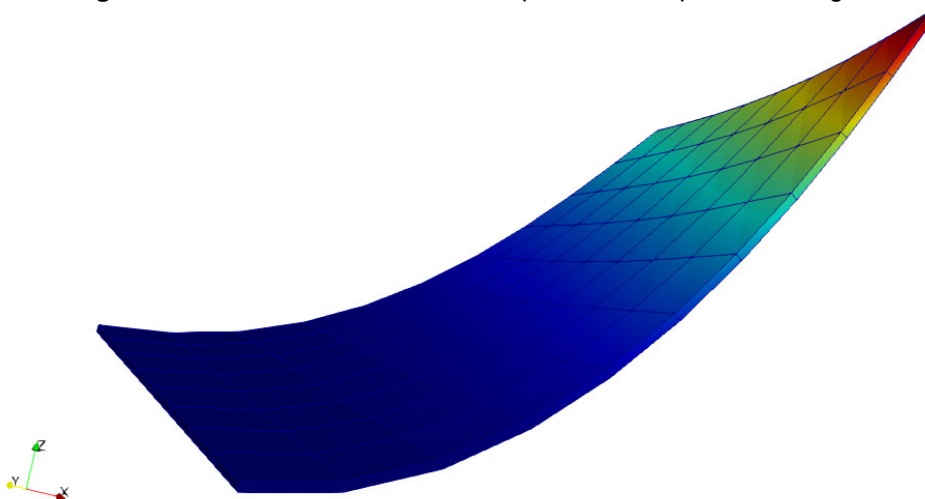


Figura 9.32 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.9 Viga torcida com carga fora do plano

De acordo com Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013), este *benchmark* proposto por MacNeal e Harder (1985) destina-se a avaliar o desempenho de um elemento ao ser distorcido. A geometria, condições de contorno e carregamento da

viga torcida são apresentadas na Figura 9.33. A peça tem um comprimento de $L = 12 \text{ mm}$. Sua seção transversal possui altura $h = 1,1 \text{ mm}$ e espessura $b = 0,05 \text{ mm}$. A peça está engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma carga F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 29 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,22$. Toma-se as mesmas unidades de geometria, propriedades materiais e carregamento constantes em Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013). A Figura 9.34 mostra a estrutura discretizada com 192 elementos hexaédricos.

Figura 9.33 – Geometria da viga torcida.

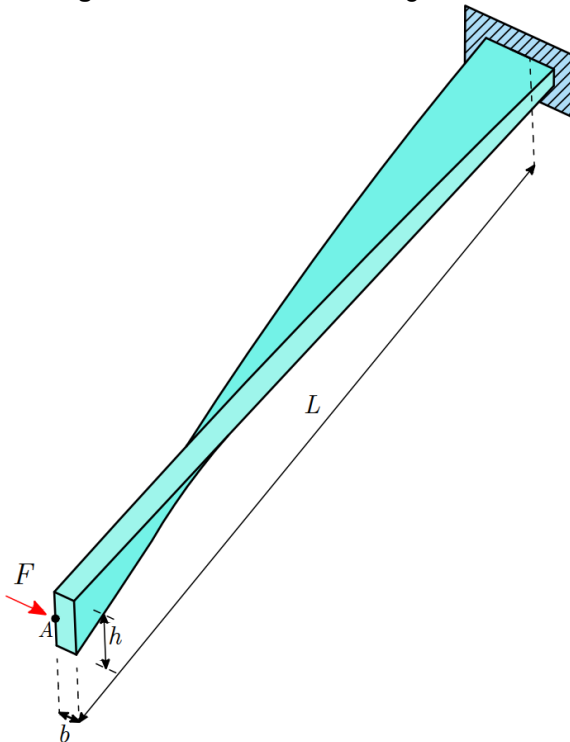
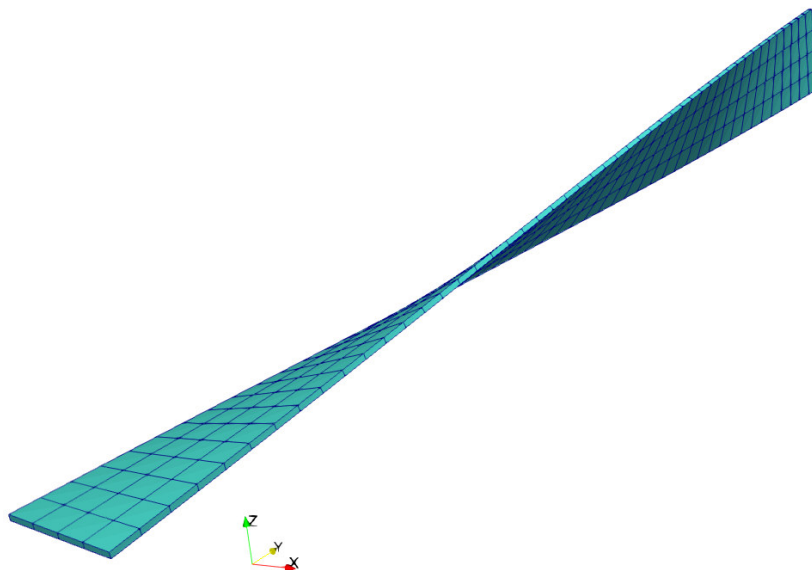


Figura 9.34 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 4 \times 1$.



O método comprimento de arco com controle de deslocamento atualizado foi utilizado na solução. O comprimento de arco e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,3$ e 10^{-3} , respectivamente. Para obter a trajetória, 32 passos de carga e 152 iterações foram necessárias. Na Figura 9.35 verifica-se que os resultados são muito próximos dos obtidos por Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013). Esta referência utiliza elementos sólido-casca e assim, adota uma malha um pouco mais grosseira: $24 \times 4 \times 1$ elementos. A deformada da estrutura é mostra na Figura 9.36.

Figura 9.35 – Curva carga versus deslocamento na extremidade livre.

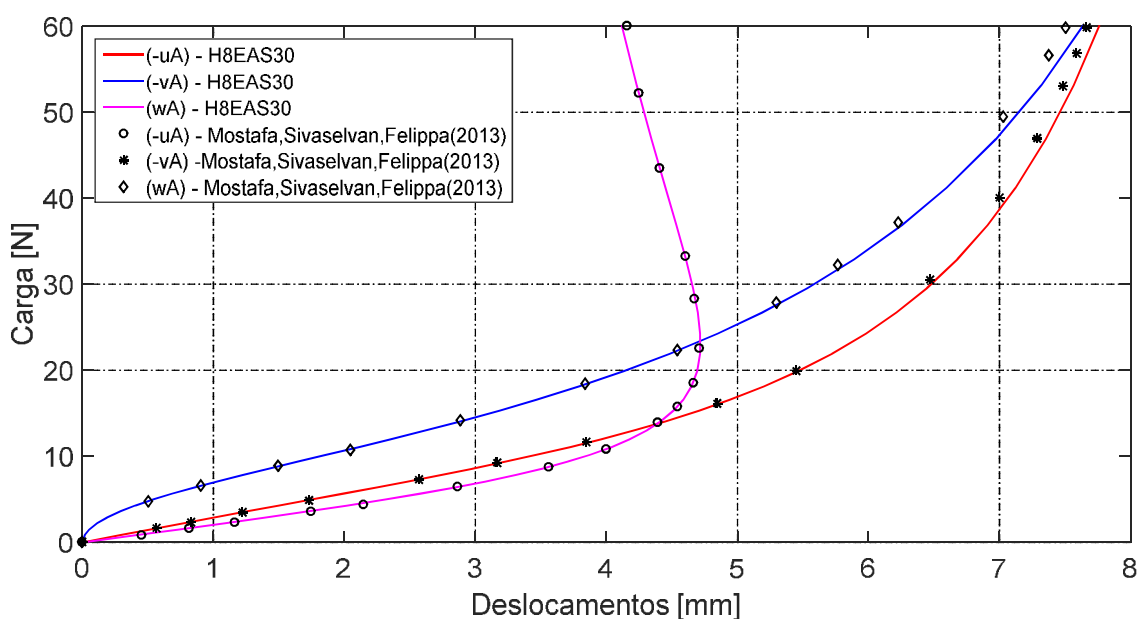
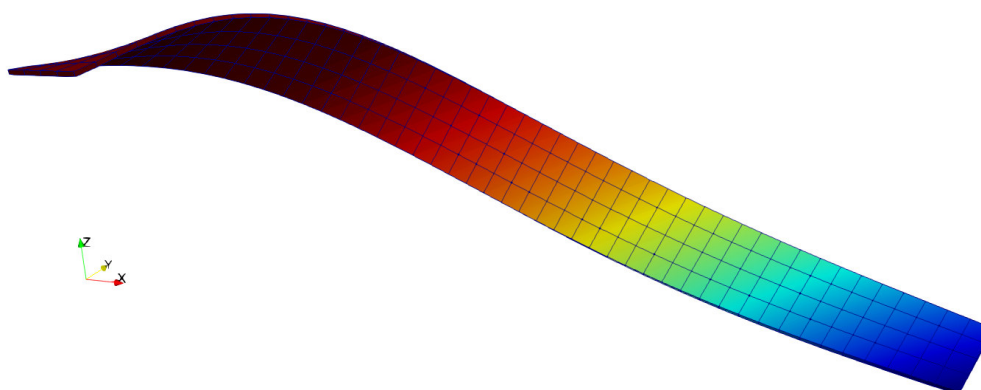


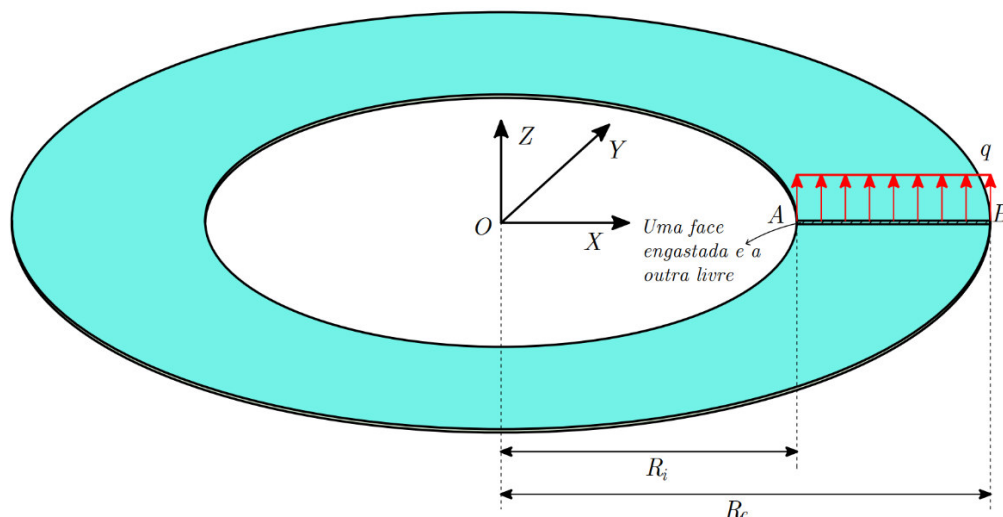
Figura 9.36 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.10 Placa com abertura anular sujeita a uma carga uniformemente distribuída

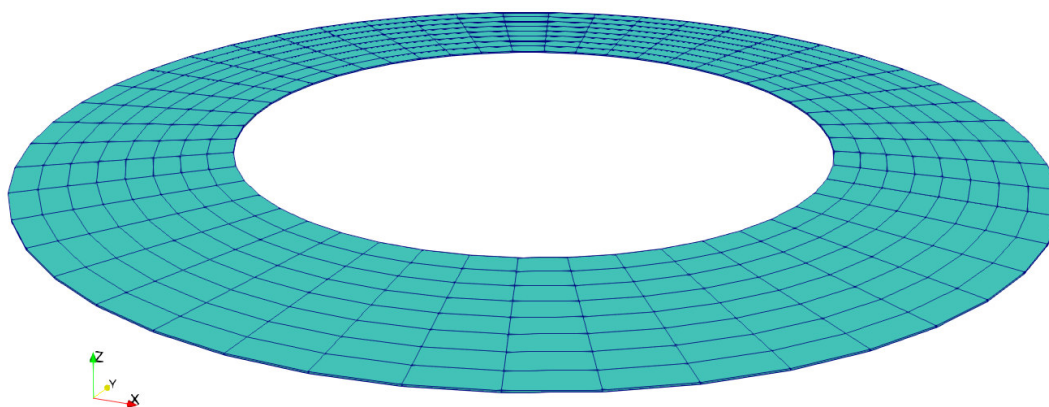
De acordo com Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013), este *benchmark* também é utilizado para avaliar a performance de formulações de casca com pequena espessura sob rotações finitas. Este exemplo foi inicialmente proposto por Basar e Ding (1990), Basar e Ding (1992) e depois trabalhado por outros autores. A geometria, condições de contorno e carregamento são ilustradas na Figura 9.37.

Figura 9.37– Geometria da placa com furo.



A peça tem raio externo $R_e = 10$ mm, raio interno $R_i = 6$ mm e espessura $t = 0,03$ mm. O anel está seccionado na direção radial na direção AB. Uma face na seção está engastada e a outra face está livre. Nesta, uma carga uniformemente distribuída q é aplicada no sentido positivo do eixo Z sobre a aresta superior provocando o içamento da estrutura. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 21 \times 10^6$ N/mm² e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. Também neste exemplo, adota-se as mesmas unidades de geometria, propriedades materiais e carregamento presentes em Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013). A Figura 9.38 mostra a estrutura discretizada. Os dois tipos de elementos hexaédricos enriquecidos implementados foram utilizados na análise.

Figura 9.38 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 8 \times 1$.



O método de Newton-Raphson com 20 passos de carga e uma tolerância de 10^{-4} foram utilizados na obtenção da resposta. Um total de 162 iterações foram necessárias para completar a análise. Na Figura 9.37 verifica-se que os resultados são próximos dos obtidos por Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013). Esta referência

fez uso de uma malha um pouco mais refinada: $64 \times 8 \times 1$ elementos. Observa-se que a análise com o elemento incompatível apresenta uma resposta mais rígida que aquela realizada com o método EAS. Ainda assim, nota-se que em parte da trajetória de equilíbrio a diferença entre as respostas é pequena e que se pode obter o comportamento não linear completo, mesmo utilizando o elemento mais simples H8MI. A deformada final da estrutura é apresentada na Figura 9.40, em que se pode perceber os grandes deslocamentos desenvolvidos, chegando a superar em valores as próprias dimensões da placa.

Figura 9.39 – Curva carga versus deslocamento para os pontos A e B.

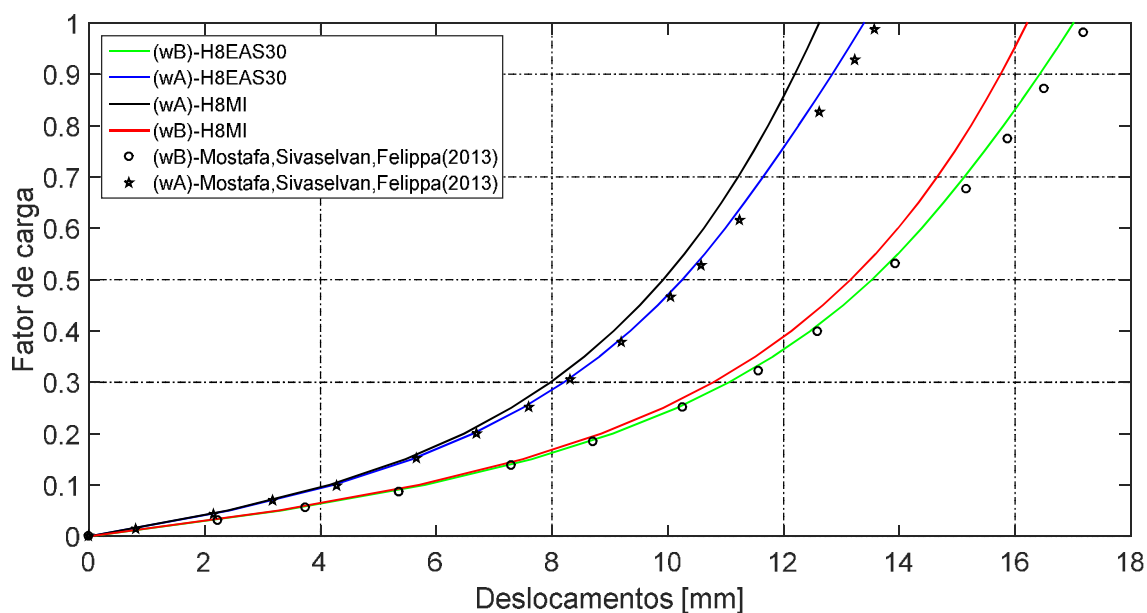
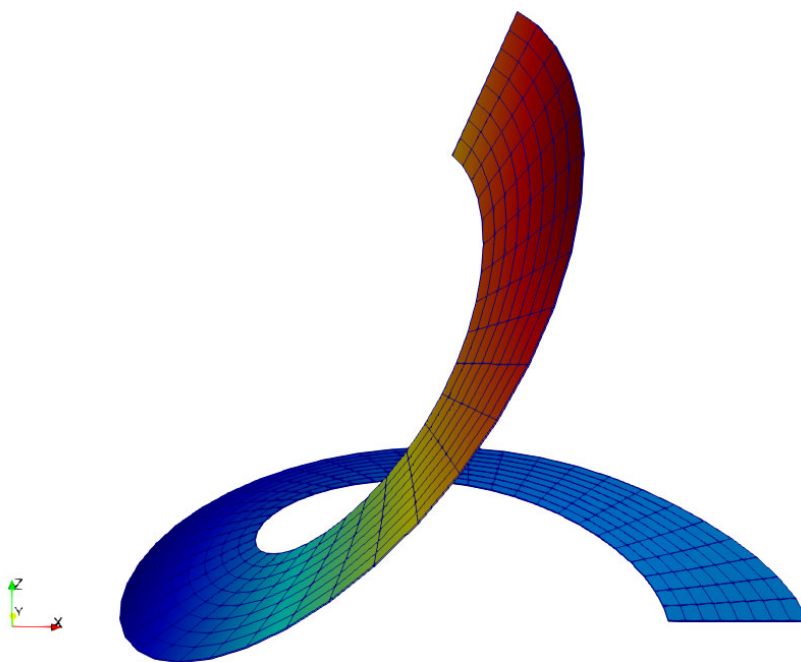


Figura 9.40 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.11 Casca cilíndrica sob carga concentrada

Este exemplo é clássico e permite avaliar a robustez da implementação em obter a trajetória de equilíbrio. As características da casca são ilustradas na Figura 9.41. A geometria é definida por $R = 2540 \text{ mm}$; $\theta = 0,1 \text{ rad}$; e $L = 508 \text{ mm}$ e; espessura $t = 6,35 \text{ mm}$. A borda curva se encontra livre enquanto o bordo reto está simplesmente apoiado. Uma carga pontual F é aplicada no ponto A. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 3102,75 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Neste problema, adota-se as mesmas unidades de geometria, propriedades materiais e carregamento presentes em Schwarze e Reese (2010). A Figura 9.42 mostra a estrutura discretizada. Devido à simetria, apenas um quarto da estrutura foi simulado.

Figura 9.41 – Geometria da casca cilíndrica.

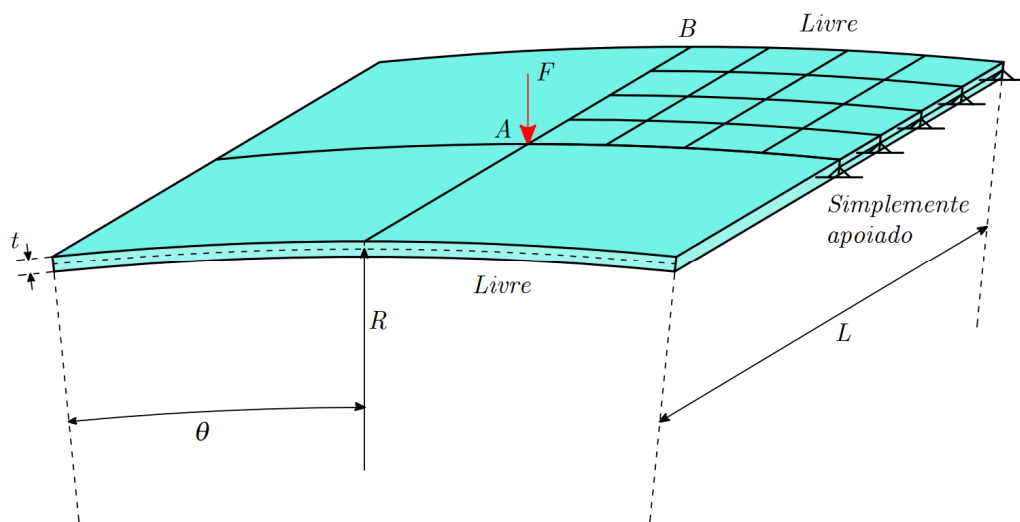
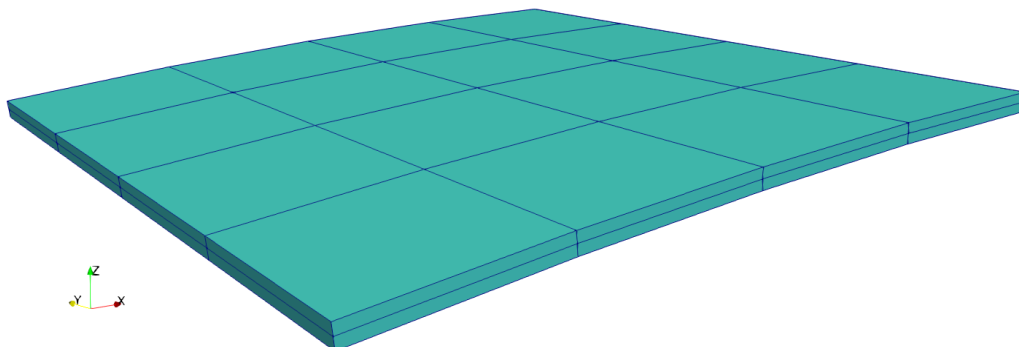


Figura 9.42 – Discretização do domínio - Malha $4 \times 4 \times 2$.



O método comprimento de arco com restrição cilíndrica atualizado foi utilizado na solução do sistema de equações. O comprimento de arco inicial e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 2,6$ e 10^{-3} , respectivamente. Para obter a trajetória de

equilíbrio 80 passos de carga e um total de 236 iterações foram contabilizadas. Na Figura 9.43 verifica-se que os resultados obtidos são praticamente iguais aqueles encontrados em Schwarze e Reese (2010). Esta referência utilizou uma malha um pouco mais grosseira contendo 16 (4×4) elementos. Verifica-se que apesar da estrutura passar por vários pontos limites, o algoritmo implementado consegue obter a trajetória de equilíbrio completa. A deformada final da estrutura é apresentada na Figura 9.44.

Figura 9.43 – Curva carga versus deslocamento para os pontos A e B.

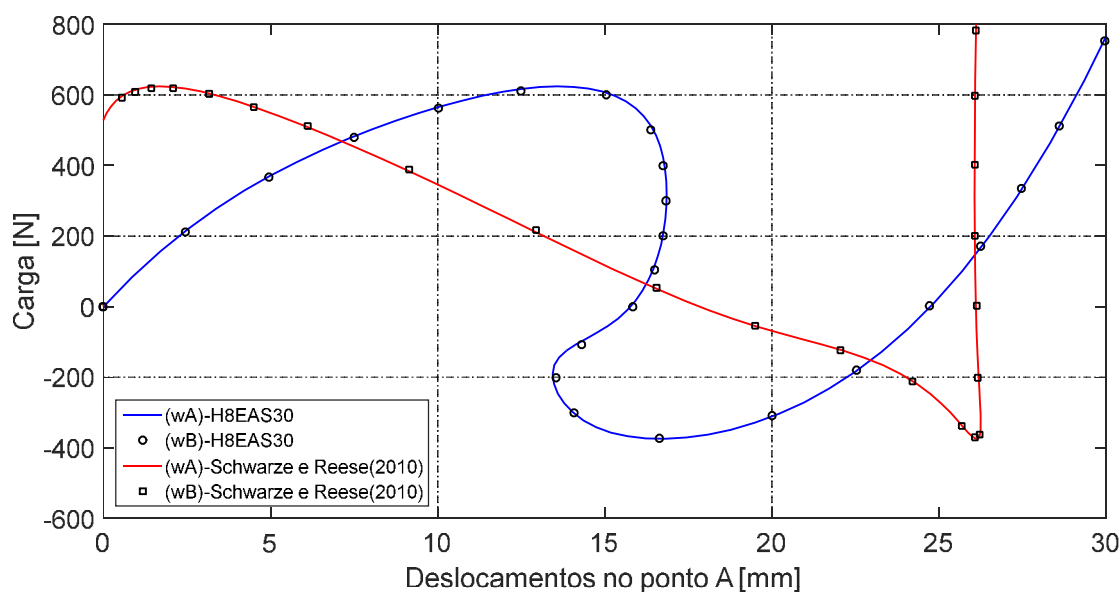
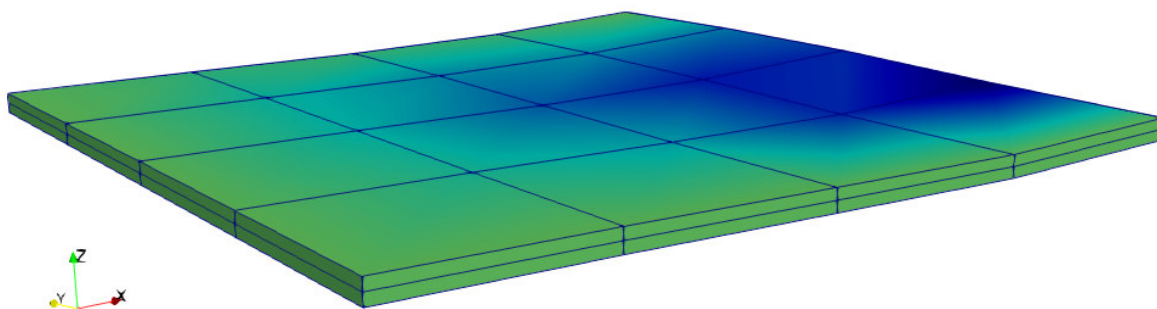


Figura 9.44 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.

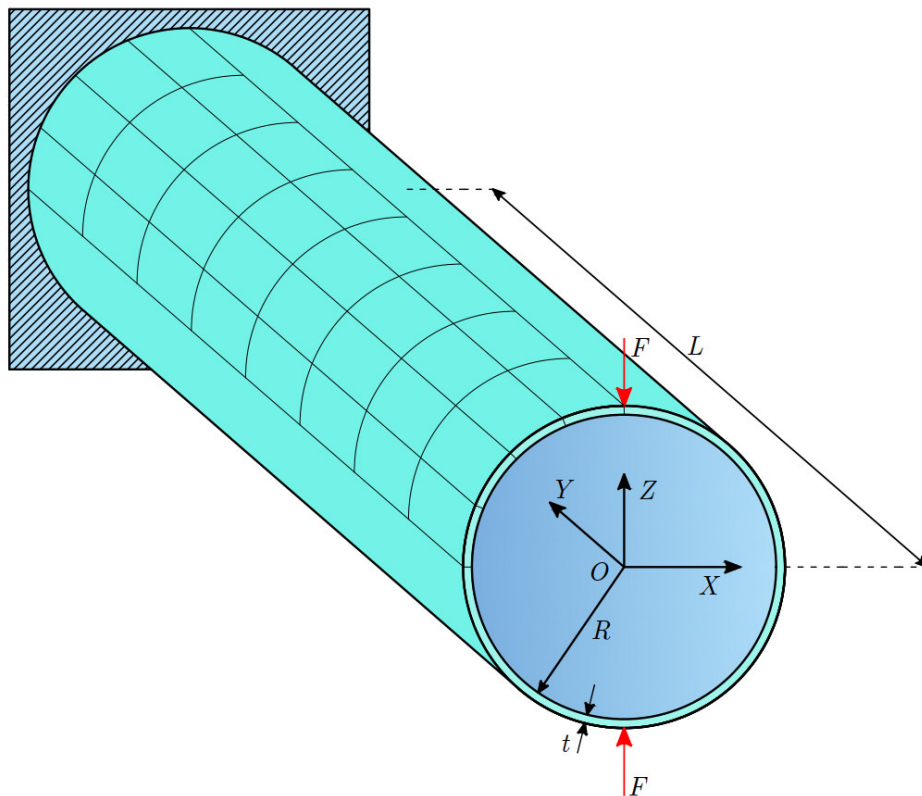


9.2.12 Casca cilíndrica engastada

A estrutura é caracterizada por um cilindro engastado em uma extremidade e livre na outra, onde forças colineares são aplicadas. Para Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013), este é um teste exigente para elementos sólido-casca pois estes são propensos ao bloqueio trapezoidal quando se realiza modelagens de estruturas com geometrias curvas. A geometria, condições de contorno e carregamento do

cilindro são ilustrados na Figura 9.45. A superfície média da estrutura é definida pelo raio $R = 1,016 \text{ mm}$; comprimento $L = 3,048 \text{ mm}$ e; espessura $t = 0,03 \text{ mm}$. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 2,0685 \times 10^7 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Neste exemplo, adota-se as mesmas unidades de geometria, propriedades materiais e carregamento presentes em Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013). A Figura 9.46 mostra a discretização da casca, e que verifica-se que apenas um quarto da estrutura foi modelada.

Figura 9.45 – Geometria da casca cilíndrica.



O método comprimento de arco atualizado com restrição cilíndrica foi utilizado na solução do sistema de equações não lineares. O comprimento de arco inicial e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,4$ e 10^{-3} , respectivamente. Para obter a trajetória de equilíbrio, 57 passos de carga e um total de 221 iterações foram necessárias. Na Figura 9.47 verifica-se que mesmo utilizando um elemento sólido EAS, os resultados são idênticos aos obtidos por Mostafa, Sivaselvan e Felippa (2013), que usam uma malha de de $16 \times 16 \times 1$ elementos. Na Figura 9.48 é apresentada a deformada da estrutura.

Figura 9.46 – Discretização do domínio - Malha $24 \times 24 \times 1$.

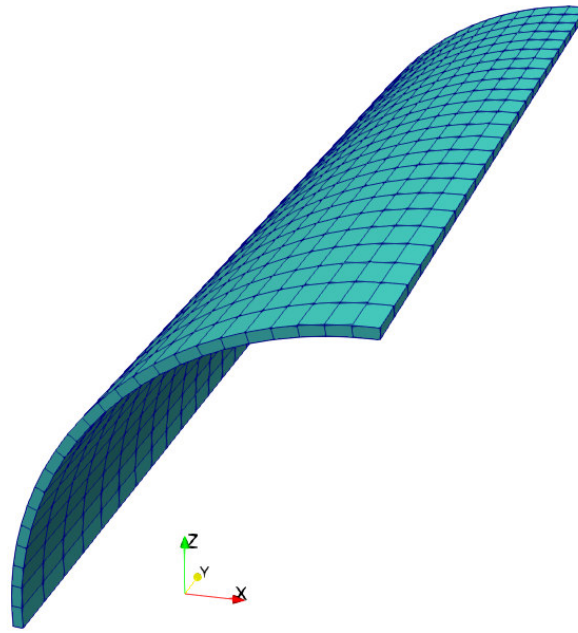


Figura 9.47 – Curva carga versus deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.

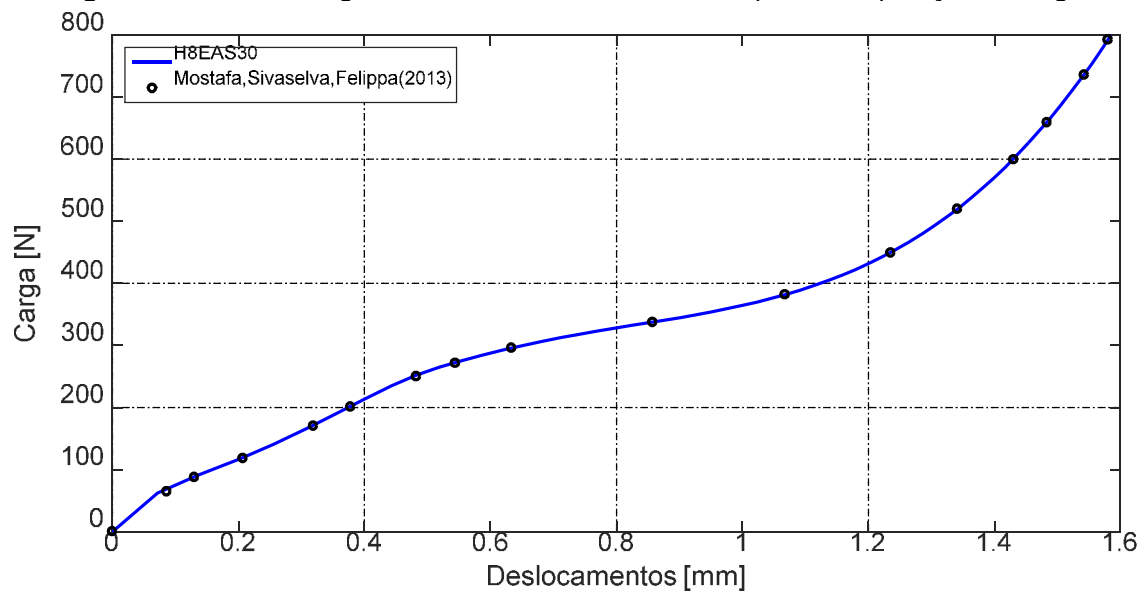
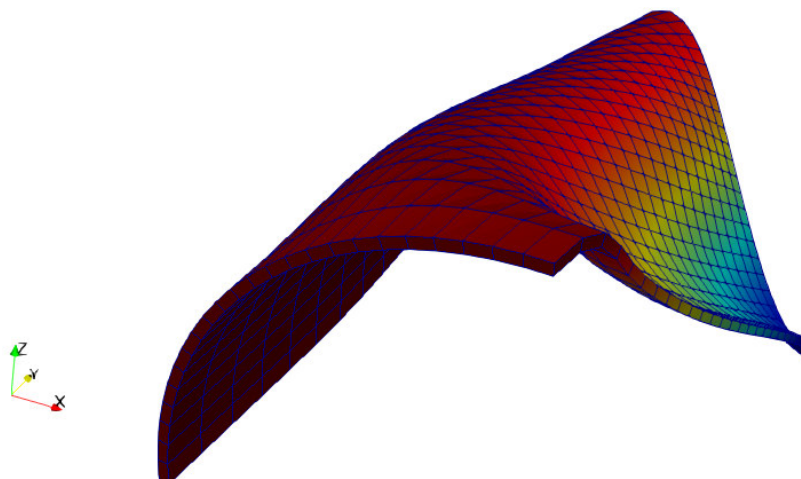


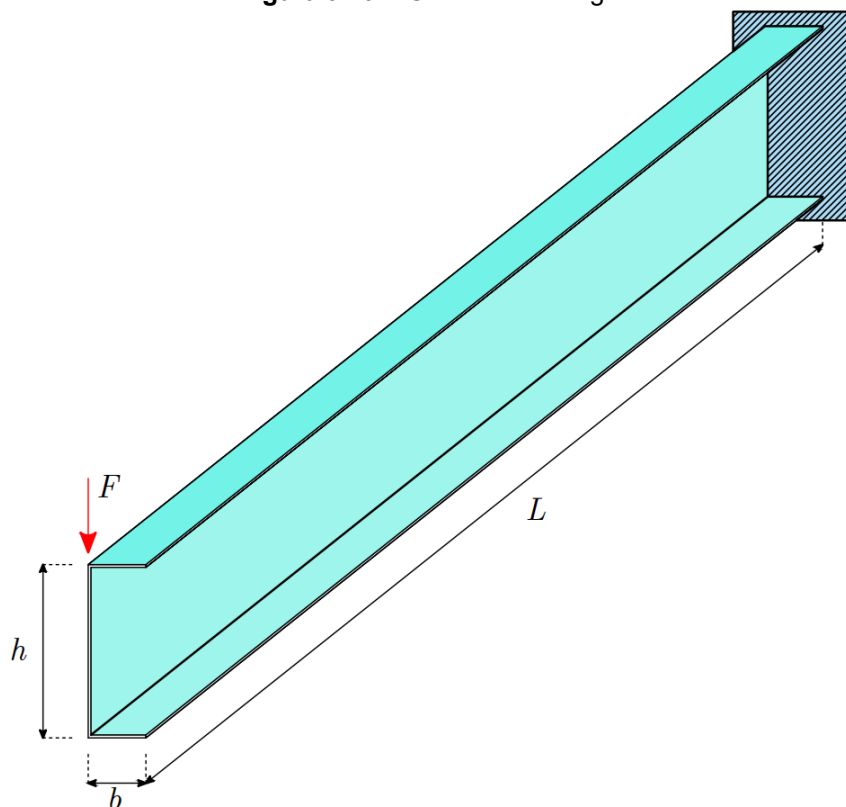
Figura 9.48 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.2.13 Viga engastada com seção U

Este teste avalia a aplicação dos elementos melhorados em estruturas tipo casca com efeitos de instabilidade local. De acordo com Klinkel e Wagner (1997), este problema demanda alta acurácia do modelo de elementos finitos. A geometria, condições de contorno e de carregamento da viga seção U são ilustrados na Figura 9.49. A estrutura possui comprimento $L = 36$ e sua seção transversal têm largura da aba $b = 2$, altura da alma $h = 6$ e espessura $t = 0,05$. A peça está engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma carga pontual F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 10^7$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. Seguindo Klinkel e Wagner (1997), as unidades relacionadas a geometria, propriedades materiais e carregamento não são especificadas. Na Figura 9.50 tem-se a estrutura discretizada.

Figura 9.49 – Geometria da viga.



O método comprimento de arco atualizado com restrição cilíndrica foi utilizado na solução. O comprimento de arco inicial e a tolerância estabelecida foram $\Delta l = 0,03$ e 10^{-3} , respectivamente. Foram necessários 650 passos de carga e 1409 iterações. Na Figura 9.51 verifica-se que os resultados são próximos dos obtidos por Betsch, Gruttmann e Stein (1996) e Klinkel e Wagner (1997) que usaram uma malha de $10 \times 36 \times 1$ elementos. A deformada da estrutura é mostrada na Figura 9.52.

Figura 9.50 – Discretização do domínio - Malha $12 \times 36 \times 1$.

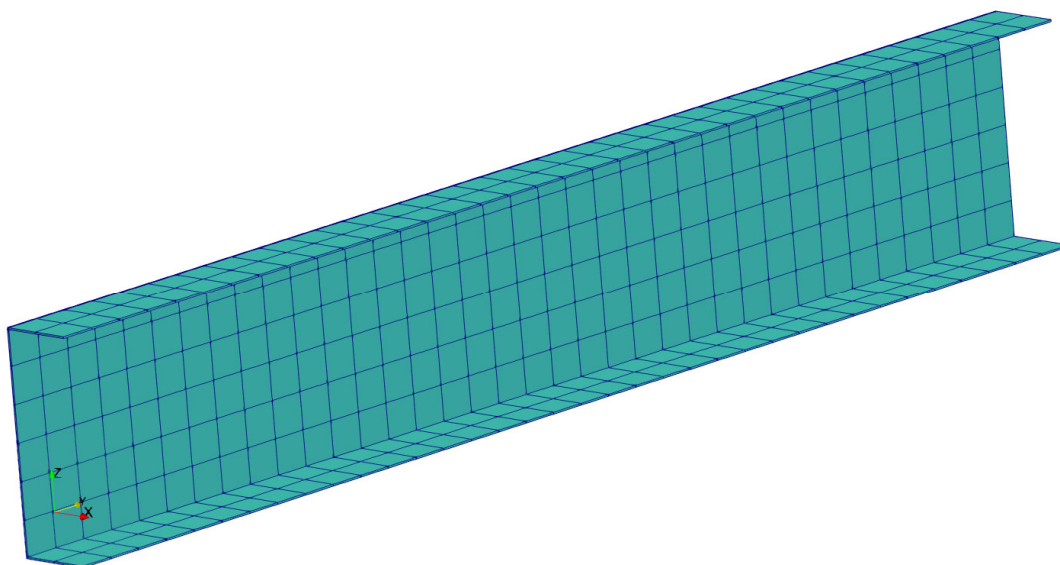


Figura 9.51 – Curva carga *versus* deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.

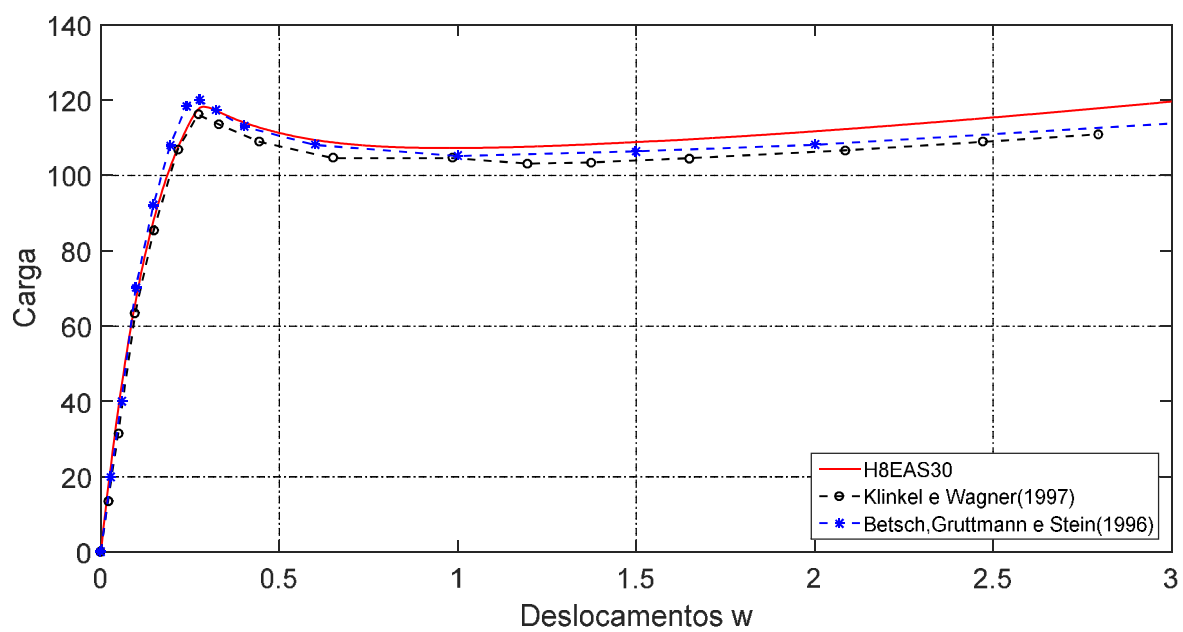
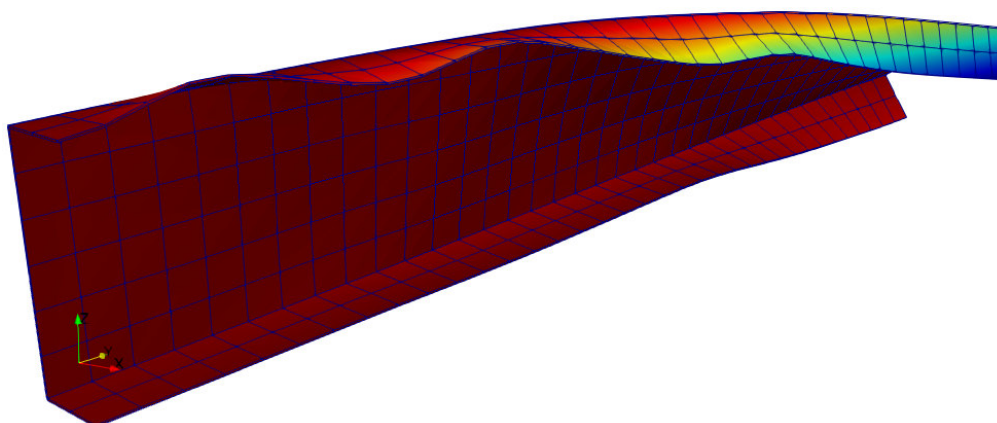


Figura 9.52 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.3 APLICAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS

9.3.1 Chapa sob tração

Neste exemplo apresentado em Oliveira (2016), uma chapa quadrada submetida a tração é discretizada com apenas um elemento quadrilátero. Objetiva-se verificar o modelo de elastoplasticidade implementado para o estado plano de tensão. Não se considera a não linearidade geométrica. A geometria, condições de contorno e carregamento dadas na Figura 9.53 são as mesmas presentes em Oliveira (2016). A chapa possui lado $b = 0,250$ m; $E = 1,0 \times 10^5$ MPa; $H = 500$ MPa; $\sigma_0 = 50$ MPa; e $\nu = 0,2$. O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado. O comprimento de arco e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,000015$ e 10^{-4} , respectivamente. Para realizar a análise completa, foram necessários 1335 passos de carga e 1335 iterações. Na Figura 9.54 observa-se que os resultados são idênticos aos obtidos por Oliveira (2016).

Figure 9.53 – Geometria da chapa.

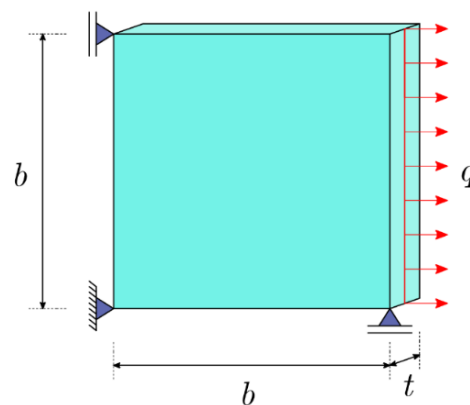
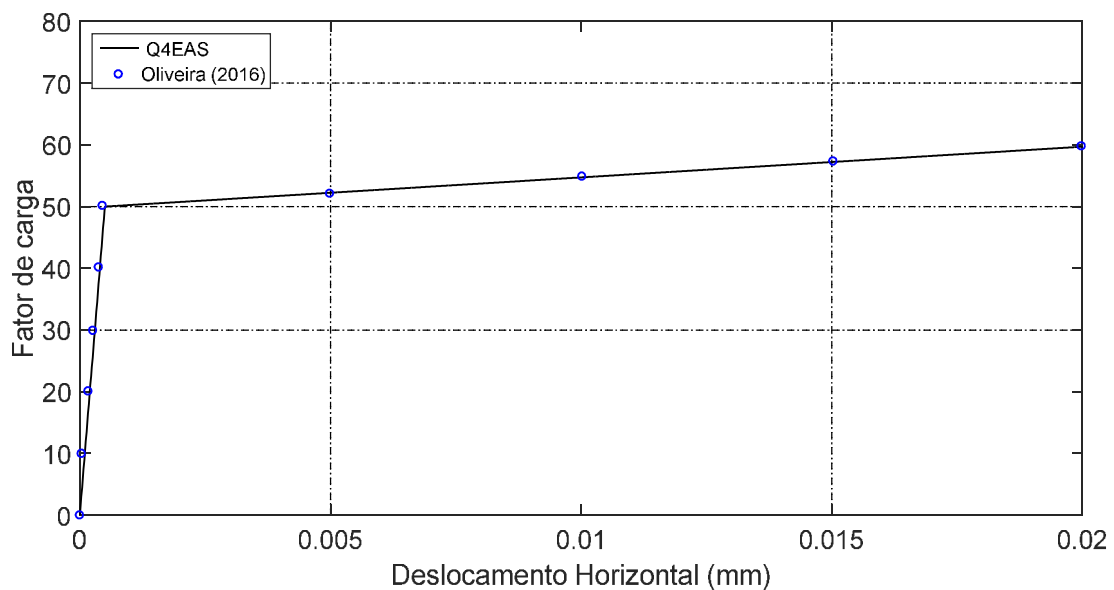


Figura 9.54 – Curva carga versus deslocamento na direção da aplicação da carga.



9.3.2 Cubo sob tração

O cubo submetido à tração na sua face superior é discretizado com apenas um elemento hexaédrico. Objetiva-se avaliar o modelo de elastoplasticidade para o estado tridimensional de tensão, também sem considerar a não linearidade geométrica. A geometria, condições de contorno e carregamento ilustradas na Figura 9.55 são adotadas de Schmidt (2006). A estrutura possui aresta $b = 1,0$ m; $E = 1,2 \times 10^7$ kN/m²; $E_t = 1,2 \times 10^5$ kN/m²; $\sigma_0 = 2,4 \times 10^4$ kN/m²; e $\nu = 0,0$. A carga aplicada em cada nó da face superior é $F = 6,5$ kN. O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado. O comprimento de arco e a tolerância utilizada foram $\Delta l = 0,0005$ e 10^{-4} , respectivamente. Para a simulação completa foram necessários 50 passos de carga e 50 iterações. Na Figura 9.56 verifica-se que os resultados são semelhantes aos obtidos por Schmidt (2006).

Figura 9.55 – Geometria do cubo.

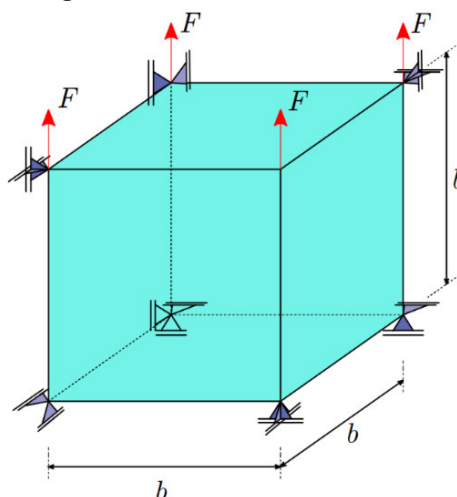
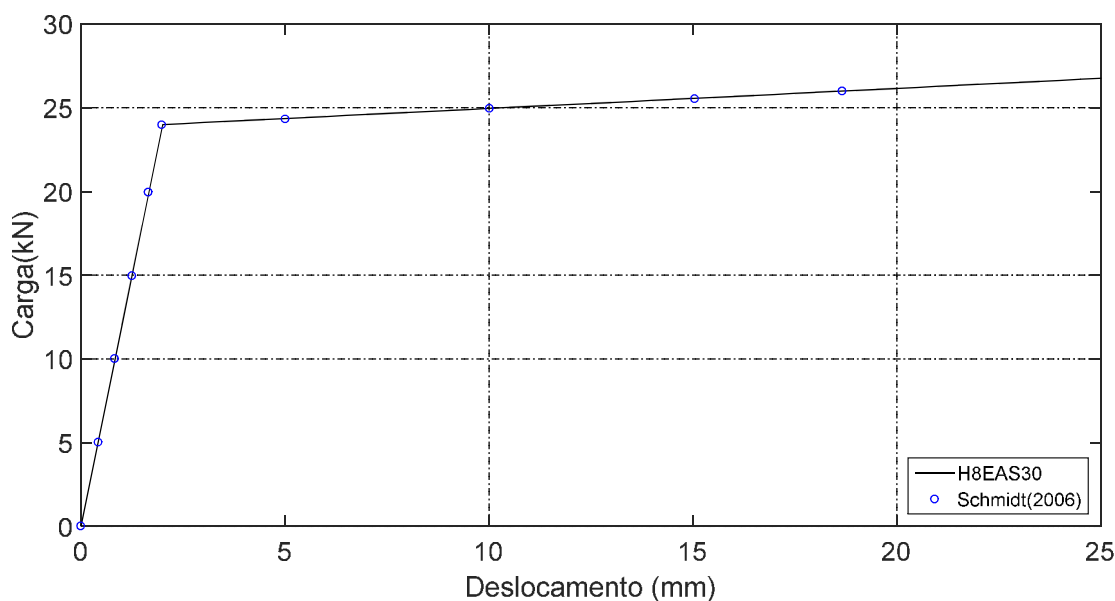


Figura 9.56 – Curva carga versus deslocamento na direção da aplicação da carga.



9.3.3 Viga elastoplástica engastada

A geometria, condições de contorno e carregamento da viga engastada são mostradas na Figura 9.57. A estrutura tem comprimento de $L = 24\text{ m}$, largura $b = 1\text{ m}$ e altura $h = 4\text{ m}$. Uma carga de cisalhamento F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^4\text{ kN/m}^2$; módulo tangente $E_t = 1,0 \times 10^3\text{ kN/m}^2$; tensão de escoamento $\sigma_0 = 3,0 \times 10^2\text{ kN/m}^2$; e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Tomou-se as mesmas unidades de geometria, propriedades materiais e carregamento presentes em Schmidt (2006). A Figura 9.58 mostra a discretização adotada, em que 384 elementos foram utilizados.

Figura 9.57 – Geometria da viga.

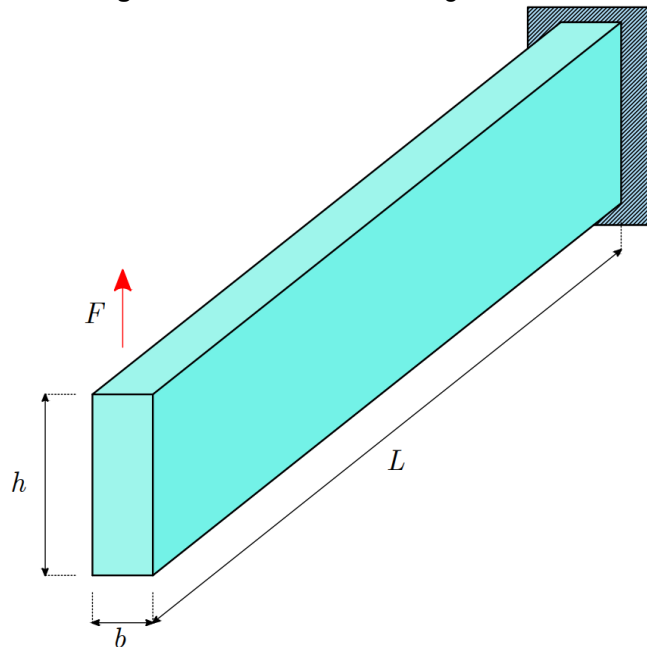
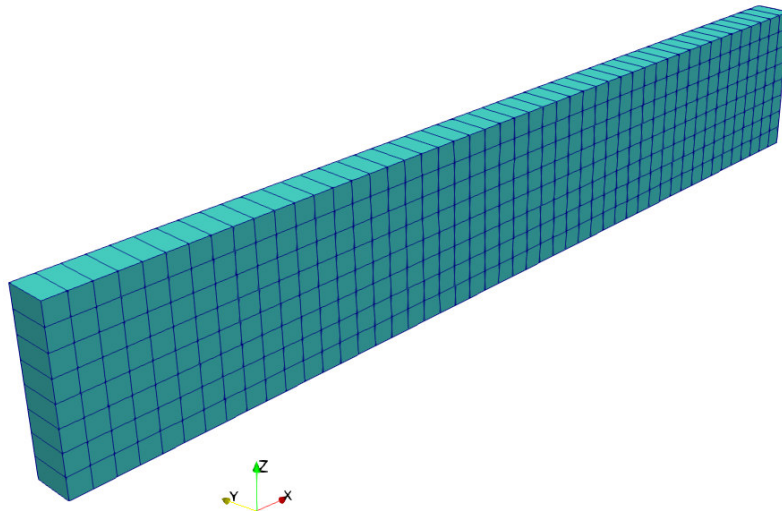


Figura 9.58 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 8 \times 1$.



O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado na solução. O comprimento de arco e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,25$ e 10^{-4} , respectivamente. Foram necessários 52 passos de carga e 175 iterações. Na Figura 9.59 verifica-se que os resultados são próximos dos obtidos por Schmidt (2006) que também usa uma malha de $48 \times 8 \times 1$ elementos. Nota-se que a formulação consegue capturar o fenômeno da elastoplasticidade de uma estrutura relativamente espessa. A deformada da peça é mostrada na Figura 9.60.

Figura 9.59 – Curva carga versus deslocamento na extremidade livre.

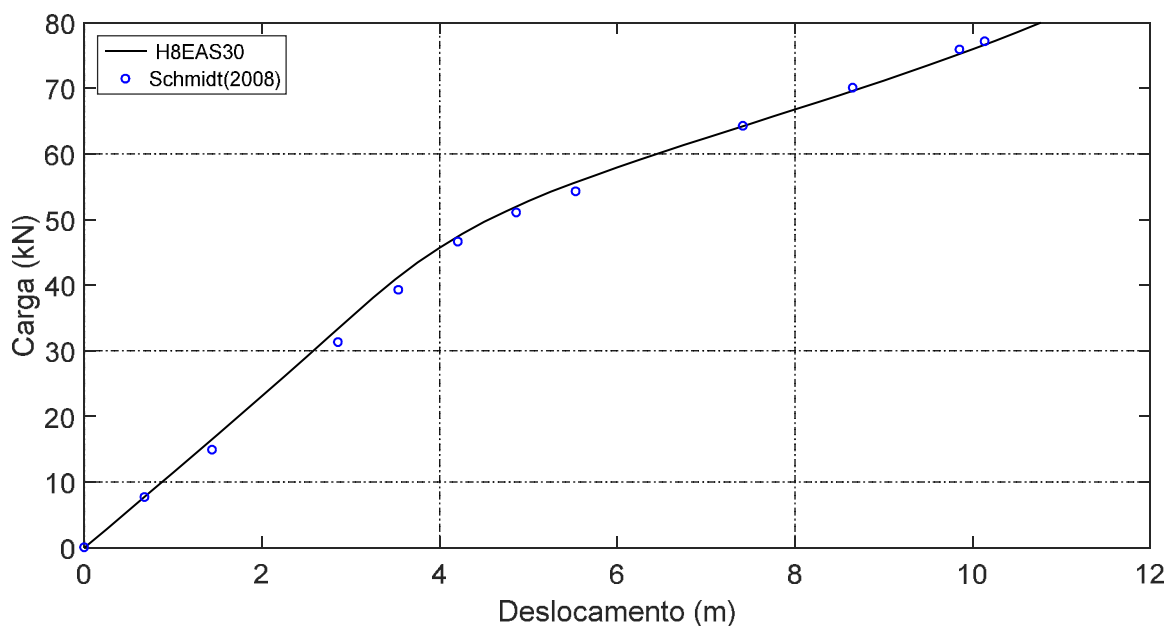
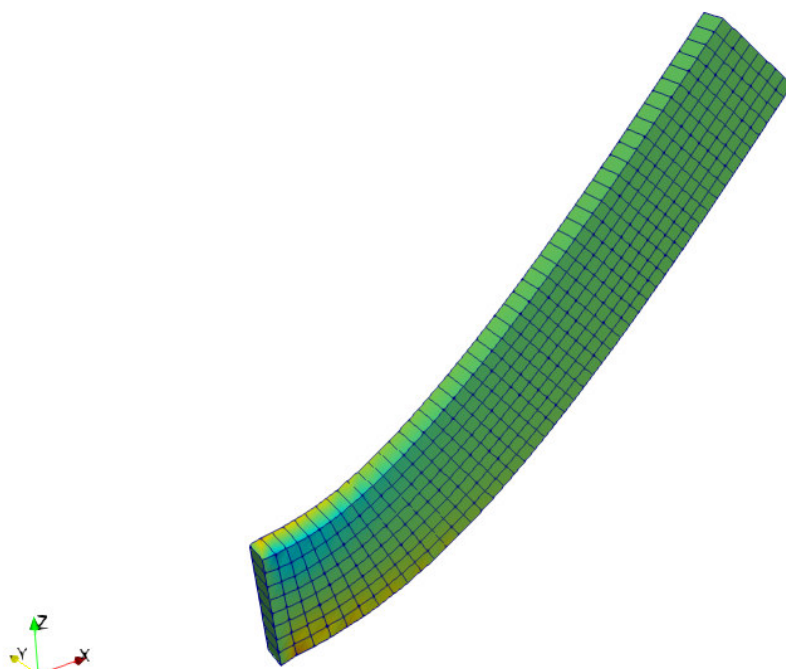


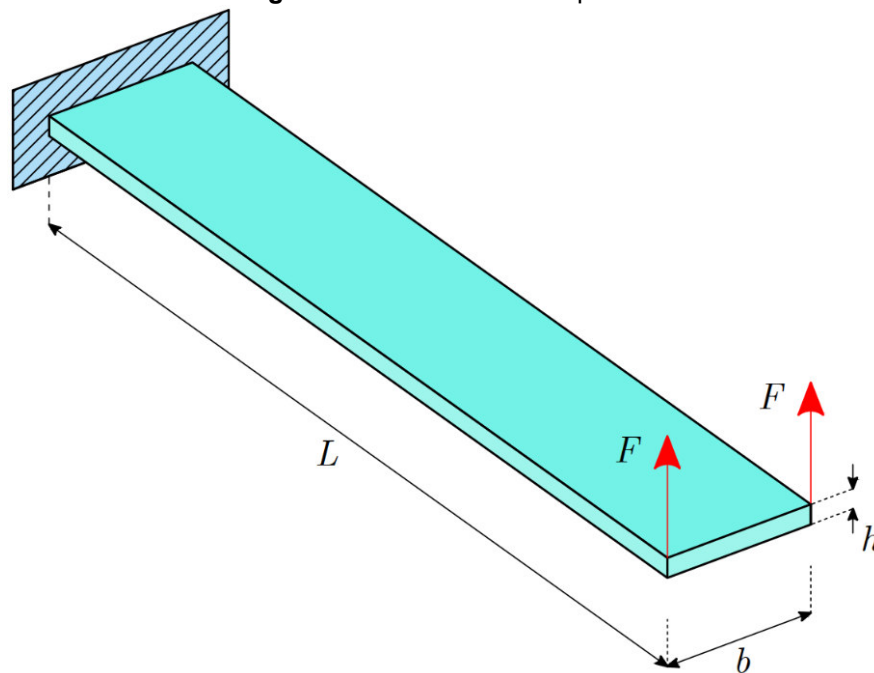
Figura 9.60 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



9.3.4 Placa em balanço com carga na extremidade

A geometria, condições de contorno e carregamento da placa estão ilustradas na Figura 9.61. Este problema, apresentado no artigo de Dvorkin, Pantuso e Repetto (1995), é posteriormente simulado por Eberlein e Wriggers (1999), Masud e Tham (2000), e ainda por Filho (2002). Mais recentemente, o mesmo problema é tratado por Valente (2004). As unidades referentes a geometria, propriedades materiais e carregamento são tomados de Masud e Tham (2000). A estrutura tem comprimento de $L = 10\text{ m}$, largura $b = 1\text{ m}$ e altura $h = 0,1\text{ m}$. A placa está engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma carga concentrada F é aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consistem de um módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^7\text{ kN/m}^2$; módulo tangente $E_t = 1,2 \times 10^5\text{ kN/m}^2$; tensão de escoamento $\sigma_0 = 2,4 \times 10^4\text{ kN/m}^2$; e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A Figura 9.62 mostra a discretização adotada para estrutura, em que 384 elementos foram utilizados.

Figura 9.61 – Geometria da placa.



O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado na solução. O comprimento de arco e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,05$ e 10^{-4} , respectivamente. Foram necessários 70 passos de carga e 302 iterações. Na Figura 9.63 verifica-se que os resultados são muito próximos dos obtidos por Valente (2004) que usa $20 \times 1 \times 1$ elementos de casca na sua análise. A deformada da placa fletida é mostrada na Figura 9.64.

Figura 9.62 – Discretização do domínio - Malha $48 \times 8 \times 1$.

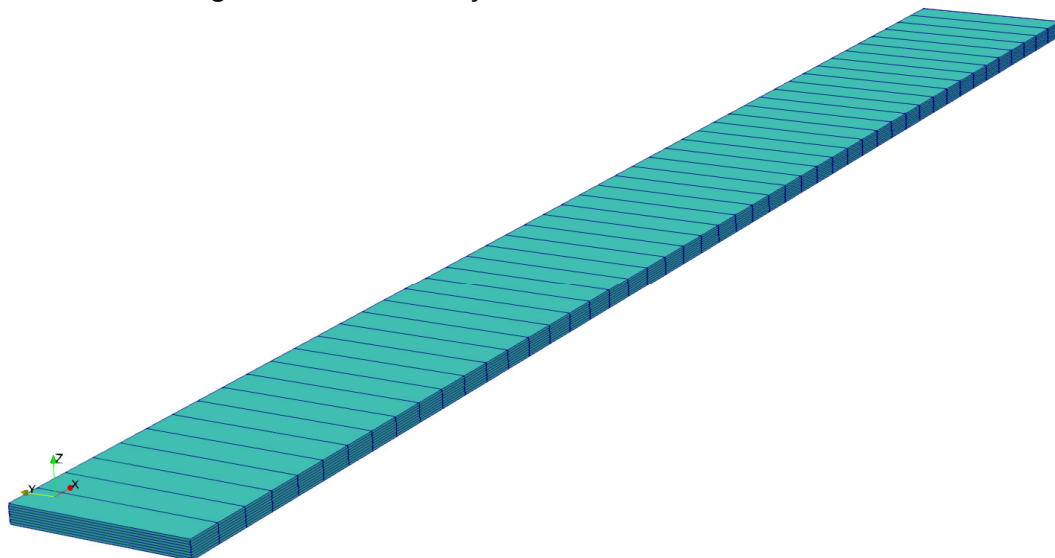


Figura 9.63 – Curva carga versus deslocamento na extremidade livre.

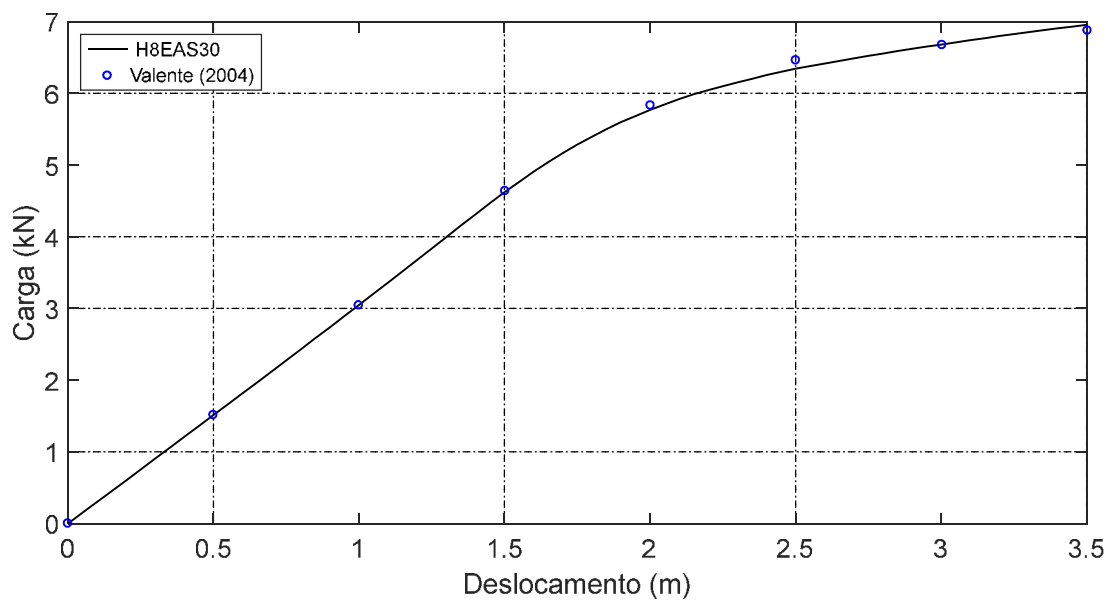
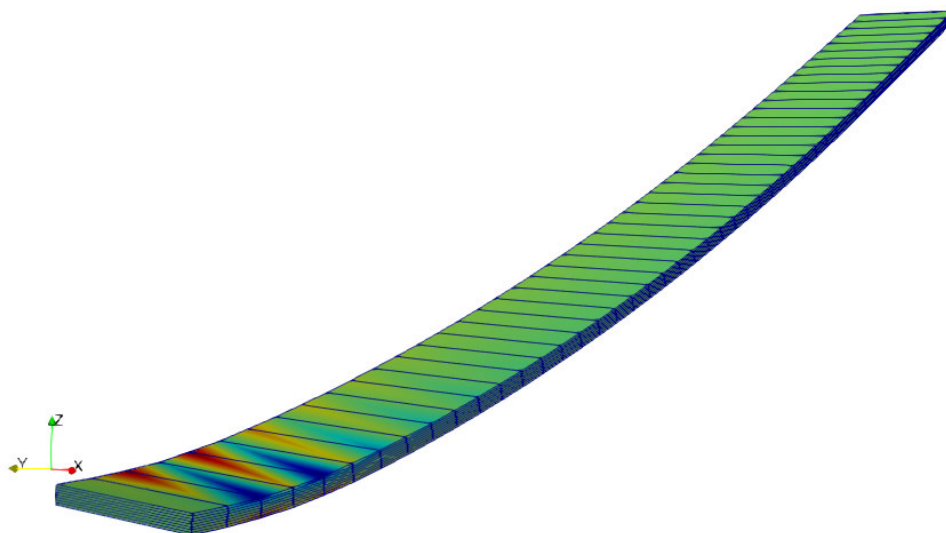


Figura 9.64 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



Pela análise realizada pode-se notar que a formulação implementada também é capaz de simular elastoplasticidade em placas esbeltas sujeitas à flexão e com grandes deslocamentos e rotações.

9.3.5 Casca cilíndrica com extremidades livres

Neste exemplo, uma casca cilíndrica é submetida a um par de cargas concentradas colineares induzindo seu o içamento e, dessa forma, provocando grandes deslocamentos e rotações. Este problema é clássico, sendo apresentado, por exemplo, em Masud e Tham (2000), Filho (2002), e ainda por Valente (2004). As unidades referentes a geometria, propriedades materiais e carregamento são tomados de Filho (2002). Como se pode verificar na Figura 9.65, geometricamente, o cilindro é caracterizado por um comprimento de $L = 10,35$ m, raio $R = 4,953$ m e uma espessura constante $t = 0,094$ m. O material possui endurecimento isotrópico linear e suas características consistem de um módulo de elasticidade $E = 10,5 \times 10^3$ kN/m²; módulo tangente $E_t = 10,5 \times 10^2$ kN/m²; tensão de escoamento $\sigma_0 = 1,05 \times 10^2$ kN/m²; e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3125$. A Figura 9.66 mostra a discretização adotada para estrutura.

Figura 9.65 – Geometria da casca.

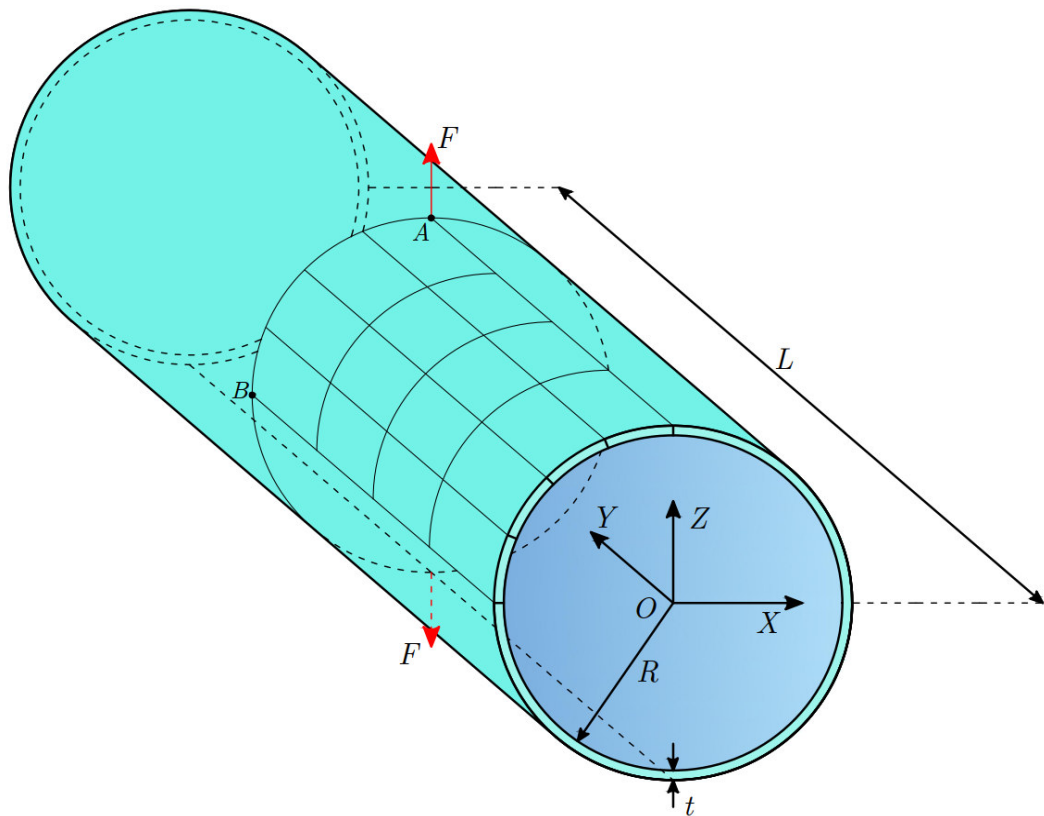
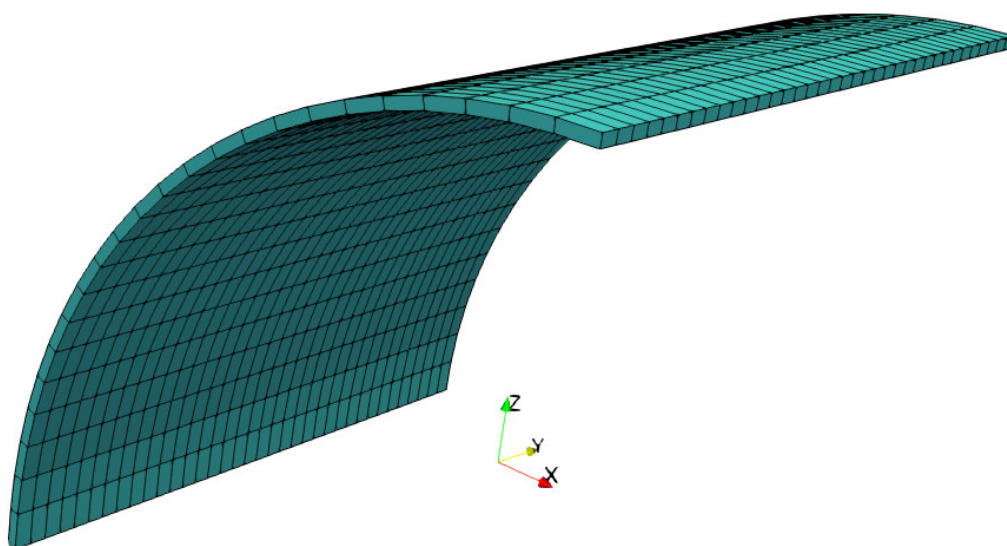


Figura 9.66 – Discretização do domínio - Malha $24 \times 36 \times 1$.



Devido à simetria, somente um oitavo do cilindro é discretizado com uma malha contendo $24 \times 36 \times 1$ elementos sólidos (circunferência \times comprimento \times espessura). O método comprimento de arco com controle de deslocamento constante foi utilizado na análise. O comprimento de arco e a tolerância estabelecidas foram $\Delta l = 0,015$ e 10^{-3} , respectivamente. Foram necessários 207 passos de carga e 535 iterações. Na Figura 9.67 verifica-se que os resultados são próximos dos obtidos por Valente (2004) e Schmidt (2006) que utiliza uma malha de $16 \times 8 \times 6$ elementos.

Figura 9.67 – Curva carga versus deslocamento para os pontos A e B.

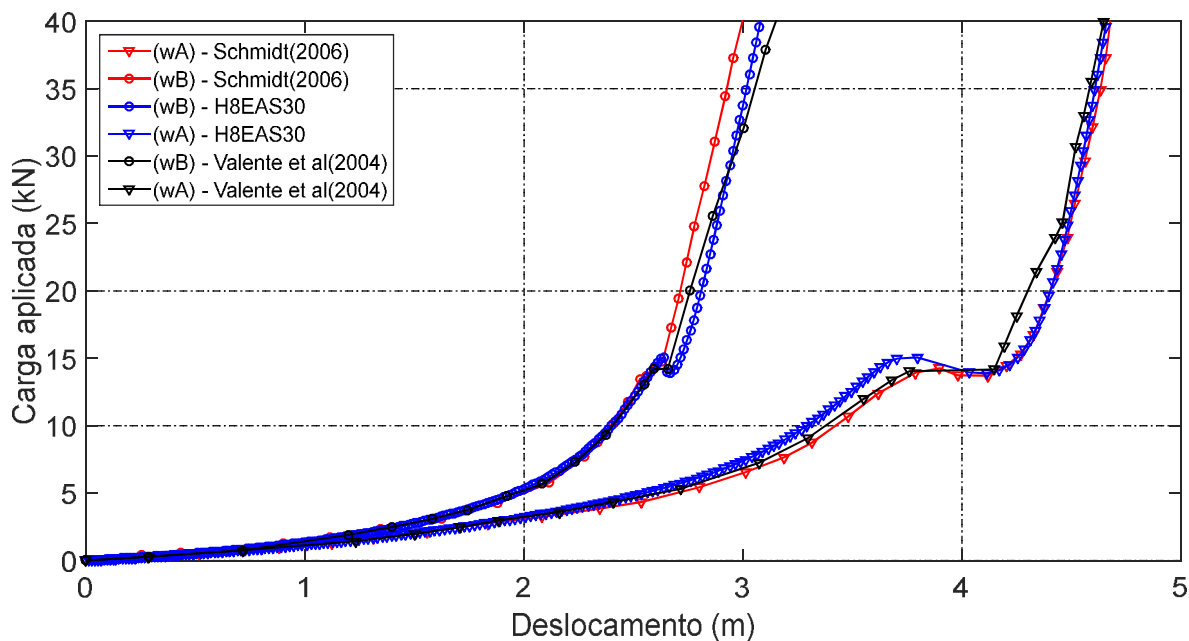
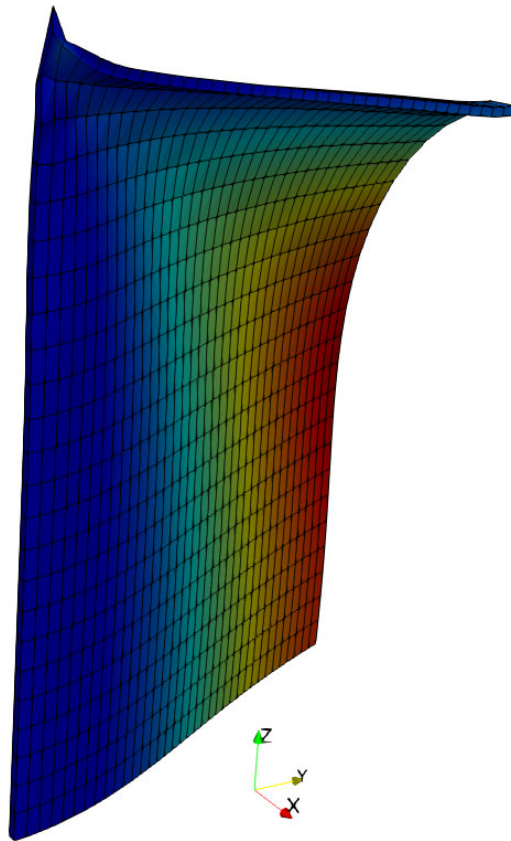


Figura 9.68 – Deformada da estrutura para o último passo de carga.



10. CONCLUSÕES

Nesta tese realizou-se o estudo e análise não linear geométrica e material de placas e lâminas com elementos de baixa ordem incompatíveis e EAS. Para considerar a não linearidade geométrica, uma formulação co-rotacional proposta por Moita (1994), Crisfield e Moita (1996) e Moita e Crisfield (1996), foi implementada. Acoplado à plataforma co-rotacional, um modelo de elastoplasticidade (descrito em Crisfield (1991)) foi programado tanto para o estado plano quanto para o estado tridimensional de tensão. A partir do estudo e dedução completa das formulações contidas nestas referências principais, foi efetuada a construção de um código por meio do qual foi possível realizar análises não lineares elásticas e elastoplásticas de vários *benchmarks* recentes destinados a verificar o desempenho de placas e cascas sob condições de carregamento e geometria severas.

10.1 CONCLUSÕES GERAIS

A análise das curvas de carga *versus* deslocamento dos diversos exemplos simulados, permite concluir que a formulação co-rotacional programada é hábil em capturar grandes deslocamentos e rotações.

Na simulação de estruturas com baixa espessura discretizadas com elementos EAS observa-se, pelas respostas, a praticamente inexistência de travamentos. Quando se utiliza elementos melhorados com o método dos modos incompatíveis nesses tipos de estruturas, verifica-se uma deterioração na resposta. Apesar da sobrerigidez verificada com modos incompatíveis em estruturas tipo placas finas e lâminas, observa-se que é possível obter a resposta completa, e dessa forma ter informações sobre o que acontece após a trajetória passar por um ponto limite. Como discutido no Capítulo 7, essas informações podem ser muito importantes em algumas análises.

Várias simulações foram realizadas para verificar o modelo de elastoplasticidade de von Mises. Os exemplos 9.3.1 e 9.3.2 são destinados a inicialmente verificar a performance da implementação, considerando apenas a não linearidade material. Observa-se que o código consegue capturar eficazmente o comportamento elastoplástico do material. Nos exemplos subsequentes estruturas mais complexas foram avaliadas. Apesar da simplicidade da formulação,

excelentes resultados foram obtidos, mesmo quando placas e cascas com espessuras muito baixas são analisadas.

10.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A formulação co-rotacional, por ser a mais recente das descrições cinemáticas, ainda possui vários temas a serem tratados. Esta tese focou na descrição do contínuo para análise de placas e lâminas fazendo uso de elementos com desempenho melhorado. Faroughi (2014) apresenta uma extensão da formulação apresentada em Battini (2008) para a análise de problemas dinâmicos não lineares do contínuo bi-dimensional. Verifica-se que apenas recentemente Cho, Kim e Shin (2017) apresentaram uma formulação dinâmica não-linear baseada na abordagem co-rotacional para elementos sólidos. Assim, verifica-se que a análise dinâmica com sólidos utilizando a formulação co-rotacional ainda está muito incipiente, o que abre possibilidades de investigações nessa área.

Nesta tese implementou-se um modelo de elastoplasticidade apresentado em Crisfield (1991). Verifica-se que, apesar das respostas obtidas terem sido bastante satisfatórias, outros modelos constitutivos podem ser implementados e acoplados à formulação. Assim, leis de endurecimento isotrópico e cinemático não lineares podem ser incluídas. Modelos de dano elastoplásticos, como o apresentado em Doghri (1993), também poderiam ser incorporados.

No tocante às tecnologias para o aumento da performance de elementos, duas delas foram estudadas neste trabalho. Como mencionado nos Capítulos 1 e 2, existem várias outras abordagens. Ao elemento hexaédrico EAS desenvolvido nesta pesquisa pode ser introduzida a técnica ANS (Assumed Natural Strain), resultando em um elemento sólido-casca. Modelos elastoplásticos mais complexos poderiam ser acoplados, afim de verificar a performance desses elementos mais recentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDELFINGER, U.; RAMM, E. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, p. 311–1337, 1993.

ANDELFINGER, U.; RAMM, E.; ROEHL, D. **2D-and 3D-enhanced assumed strain elements and their application in plasticity**. In D.R.J.Owen, E.Onate, and E.Hinton, editors, Computational Plasticity, Proceedings of the 4th International Conference, pages 1997–2007. Pineridge Press, Swansea, U. K, 1992.

ALMROTH, B. O.; BROGAN, F. A.; STANLEY, G. M. **Structural Analysis of General Shells**, Vol. II: User Instructions for STAGSC. Lockheed Missiles & Space Co., Inc., Palo Alto, Calif., Rept. LMSC-D633873, 1979.

ALWATHAF, A. H. Development of 3D Finite Element Code of Incompatible Displacement Mode for Flexural Analysis. **Arabian Journal for Science and Engineering**, v. 39, Issue 8, p. 6009–6016, 2014.

ARGYRIS, J. H. Continua and discontinua. In: **1St Conference On Matrix Methods In Structural Mechanics**, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Tecnology, Dayton, Ohio-USA, 1965.

ARGYRIS, J. H. An excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 85-155, 1982.

BASAR, Y; DING, Y.. Finite-rotation elements for the non-linear analysis of thin shell structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 26, p. 83-97, 1990.

BASAR, Y; DING, Y. Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**; 34(1):165–169, 1992.

BATTINI, J. M. A non-linear corotational 4-node plane element. **Mechanics Research Communications**, v. 35, Issue 6, p. 408–413, 2008.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R.; MAZUREK, D. F.; EISENBERG, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros. Estática.** 9 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

BELO, I. M. **Desenvolvimento da formulação corotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica.** Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina-SC, Brasil, 2009.

BELYAKOV, V. M.; KRAVTSOVA, P. I.; RAPPOPORT, M. G. **Tables of Elliptic Integrals.** Translated by Prasenjit Basu, MacMillan, New York, 1965.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. Application of high order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 10, p. 175–182, 1979.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates. **Int. J. Numer. Methods in Engineering**, v. 7, p. 255-271, 1973.

BETSCH P, GRUTTMANN F, STEIN E. A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 130 p. 57–79, 1996.

BERGAN, P. G.; NYGARD, M. K. **Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements.** In: EUROPE-US SYMPOSIUM THE NORWEGIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 1985, Trondheim. Proceedings... Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer Verlag, Berlin, p. 317-338, 1986.

BERGAN, P. G.; HERRIGMOE, G. Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mech. Engineering**, v. 7p. 201-217, 1976.

BIOT, M. A. **The mechanics of incremental deformations.** McGraw-Hill, New York, USA, 1965.

BREHM, M.; MOST, T. A Four-Node Plane EAS-Element for Stochastic Nonlinear Materials. **Proceedings of 16th IKM 2003**, Gürlebeck, Hempel and Könke (eds.), Weimar, Germany, June 10-12, 2003.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers.** Springer-Verlag, New York, USA, 1988.

CHO, H.; KIM, H.; SHIN, S. Geometrically nonlinear dynamic formulation for three-dimensional co-rotational solid elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 328, 301-320, 2018.

CHO, H.; SHIN, S.; YOH, J. J. Geometrically nonlinear quadratic solid/solid-shell element based on consistent corotational approach for structural analysis under prescribed motion. **Int J Numer Methods Eng.** 112 (5), 434–458, 2017.

CORTIVO, N. **Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES.** Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília/DF, Brasil, 2004.

COOK, R. D. Avoidance of parasitic shear in plane element. **J. Structural Division**, ASCE, 101, 6, 1239-11253, 1975.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures** - Vol. 1: Essentials. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures** - Vol. 2 Advanced Topics. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1997.

CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, No 20-22, p. 2969-2992, 1996.

CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes. **Int. J. Numer. Methods in Engineering**, v. 39, p. 2619–2633, 1996.

CRISFIELD, M.A. A consistent co-rotational formulation for non-linear three dimensional beam elements. **Computer Methods Appl. Mech. Engineering**, v. 81, p. 131-150, 1990.

CUNHA, A. A. **Análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional e elementos de viga unificados Bernoulli-Timoshenko.** Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil, 2015.

DA SILVA, W. A. **Análise dinâmica não-linear de pórticos espaciais utilizando a formulação corrotacional**. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil, 2013.

DEAN, A.; SAFDAR, N.; ROLFES, R. A Co-Rotational Based Anisotropic Elasto-Plastic Model for Geometrically Non-Linear Analysis of Fibre Reinforced Polymer Composites: Formulation and Finite Element Implementation. **Materials**, 12 (11), 1816, 2019.

DOGHRI, I. Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity. **Int. J. Numer. Methods in Engineering**, v. 36, p. 3915–3932, 1993.

DURAND, R.M.M. Farias. A local extrapolation method for finite elements. **Advances in Engineering Software**. v. 67, p. 1–9, 2014.

DVORKIN, E. N.; BATHE, K. J. A continuum mechanics based four-node shell elemento for general nonlinear analysis. **Engineering Computations**, 1(1), 77–88, 1984.

DVORKIN E. N.; PANTUSO, D.; REPETTO, E. A. A formulation of the MITC4 shell element for finite strain elasto-plastic analysis. **Comput. Mech. Engrg.**, 125, 17–40, 1995.

EBERLEIN, R.; WRIGGERS, P. Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 171:243–279, 1999.

FAROUGHI, S. Dynamic Nonlinear Co-rotational Formulation for Two-dimensional Continua. **Latin Am J Solids Struct**. V. 12, p. 477–91, 2014.

FELIPPA, C.A. **Non-linear finite element methods / NFEM. Lecture notes for the Course Non-Linear Finite Element Methods, Center for Aerospace Structures**, University of Colorado, Boulder/USA, 2001. Disponível em: < <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/Home.html> > Acesso em 01 de abril de 2017, 02:00:05.

FELIPPA, C.A; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 194(21-24), 2285–2335, 2005.

FILHO, L. A. D. **Análise estática, linear e não-linear geométrica através de elementos hexaédrico de oito nós com um ponto de integração.** Dissertação de Mestrado, Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-Rio Grande do Sul, Brasil 2002.

FRAEIJIS DE VEUBEKE, B.M. The dynamics of flexible bodies. **Int. J. Engineering Science**, Pergamon Press, p. 895-913, 1976.

GHARZEDDINE, F., and A. Ibrahimbegovic. Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity. **Computational mechanics**, 24.6, 419-425, 2000.

GILAT, A. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas.** Editora Bookman. Porto Alegre, 2008.

HAUGEN, B. **Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements.** Ph.D Thesis, University of Colorado, USA, 1994.

HUANG, J.; CEN, S.; LI, Z.; Li, C-F. An unsymmetric 8-node hexahedral solid-shell element with high distortion tolerance: Geometric nonlinear formulations. **Int J Numer Methods Eng.**, 116 (12-13), 759-783, 2018.

KARKON, M.; PAJAND, M. R. Geometrical Nonlinear Analysis of Plane Problems by Corotational Formulation. **Journal of Engineering Mechanics-ASCE**, (ISI), v. 95, No 1, p. 1-11, 2016.

KATTAN, P. I. **MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach.** Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003.

KESIAN (2018). Elliptic integral. Available in: < <https://keisan.casio.com/> > Accessed in april 12, 2018.

KLINKEL S.; WAGNER, W. A geometrical non-linear brick element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 4529–4545, 1997.

KRISHNAMOORTHY, C. S. **Finite Element Analysis: Theory and Programming.** McGraw-Hill Education Pvt. Ltd, 1987.

KULIKOV, G. M.; PLOTNIKOVA, S. V. Finite rotation exact geometry solid-shell element for laminated composite structures through extended SaS formulation and 3D analytical integration. **Int J Numer Methods Eng.** 119 (9), 852-878, 2019.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of Solids Materials**, Cambridge University Press, Cambridge, U.K, 1994.

LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; CHEN, J. S. Nonlinear versions of flexurally superconvergent elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, (in press), 1988.

LI, Z. X.; LI, T. Z.; VU-QUOC, L.; IZZUDDIN, B. A.; ZHUO, X.; FANG, Q. Geometrically nonlinear dynamic formulation for three-dimensional co-rotational solid elements. **Int J Numer Methods Eng.**, 116 (8), 570-600, 2018.

LIU, S. B., CAO, D. Z., ZHAO, Z. H. The Study on 3D Incompatible Element in Flexible Multibody System Dynamics. **Applied Mechanics and Materials**, Vols. 543-547, pp. 1282-1285, 2014.

MASUD, A.; THAM, C. L. Three-dimensional corotational framework for elasto-plastic analysis of multilayered composite shells. **AIAA Journal**, 38(12), 2320-2327, 2000.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. Tese de doutorado, E.TD-004A/06, Brasília: ENC/FT/UnB, 2006.

MOITA, G. F. **Non-linear finite element analysis of continua with emphasis on hyperelasticity**. Thesis (Ph.D.), Imperial College London (University of London), Londres, 1994.

MOITA, G. F.; CRISFIELD, M.A. A finite element formulation for 3-D continua using the co-rotational technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 39, p. 3775–3792, 1996.

MOSTAFA, M. **A geometric nonlinear solid-shell element based on ANDES, ANS and EAS concepts**. Thesis (Ph.D.), University of Colorado, US, 2011.

MOSTAFA, M. SIVASELVAN, M. V. AND FELIPPA, C. A. A solid-shell corotational element based on ANDES, ANS EAS for geometrically nonlinear structural analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 95, p. 145–180, 2013.

NEUNER, M.; MAGDALENA, M.; HOFSTETTER, G. Enhanced Assumed Strain Methods for Implicit Gradient-Enhanced Damage-Plasticity. **Proc. Appl. Math. Mech.** 18 (1), 2018.

NORACHAN, P.; SUTHASUPRADIT, S.; KIM, K. D. A co-rotational 8-node degenerated thin-walled element with assumed natural strain and enhanced assumed strain, **Finite Elem. Anal. Des.** 50, 70–85, 2012.

NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. **Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, p. 353-384, 1991.

NGUYEN, N. H. **Development of solid-shell elements for large deformation simulation and springback prediction.** Ph.D. Thesis, University of Liège, Belgium, 2009.

OLIVEIRA, G. C. **Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos.** Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil, 2016.

OLIVEIRA, D. B. **Implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 2016.

OWEN, D. R. J., HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**, Pineridge. Swansea, U.K, 1980.

PENG, X.; M. A. CRISFIELD. A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle. **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering** 35, pp. 1829–1847, 1992.

PIAN, T. H. H.; SUMIHARA, K. Rational approach for assumed stress finite elements. **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 1685–1695, 1984.

POLAT, C. An assessment of a co-rotational EAS brick element. **Latin American Journal of Solids & Structures**, vol. 7, Issue 1, p. 77-89, 2010.

POLAT, C. Co-rotational formulation of a solid-shell element utilizing the ANS and EAS methods. **Journal of Theoretical And Applied Mechanics**, v. 48, p. 771-788, 2010.

QUAK, W. **A solid-shell element for use in sheet deformation processes**. Master Thesis, University of Twente, 2007.

RANKIN, C. C. **Application of linear finite elements to finite strain using corotation**. In: STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE, 47, 2006, Newport. Proceedings... Newport, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, 2006, paper N° AIAA-2006-1751. p. 1-28.

RANKIN, C.C.; BROGAN, F.A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. **ASME J. Pressure Vessel Technology**, v. 108, p. 165-174, 1986.

RANKIN, C. C., NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. **Computers & Structures**, v. 30, p. 257-267, 1988.

RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, 39, 1060-1065, 1972.

RODRIGUES, O. B. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. **J. Math. Pures Appl.**, v. 5, p. 380-440, 1840.

VALENTE, R. A. F.; SOUSA, R. J.; JORGE, R. M. N. An enhanced strain 3D element for large deformation elastoplastic thin-shell applications. **Computational Mechanics**, v. 34, p. 38-52, 2004.

SCHMIDT, D. **Análise elastoplástica com não-linearidade geométrica de estruturas através de elementos hexaédricos tri-lineares com um ponto de integração**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, Brasil, 2006.

SCHWARZE, M.; REESE, S. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept - Large deformation problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, p. 289-329, 2010.

SILVA, S. S. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil, 2011.

SILVA, S. S.; SILVA, W. T. M. Aplicação do método dos modos incompatíveis na análise de peças fletidas. **Science and Engineering Journal**. v. 26, p. 27–37, 2017.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, p. 1595–1638, 1990.

SIMO, J. C.; ARMERO, F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 33:1413–1449, 1992.

SOUSA, R. J. A.; CARDOSO, R. P. R.; VALENTE, R. A. F.; YOON, J. W.; GRACIO, J. J.; JORGE, R. M. N. A new one-point quadrature enhanced assumed strain solid-shell element with multiple integration points along thickness. Part II – Nonlinear Applications. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 67, p. 160–188, 2006.

TAYLOR, R. L.; BERESFORD, R. J.; WILSON, E. L. A non-conforming element for stress analysis. **Int. J. Numer. Method Eng.**, v.10, p. 1211–1219, 1976.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. **Mechanics of Materials**. Van Nostrand, New York, USA, 1972.

TRUESDELL, C. **Continuum mechanics I: the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics**, Gordon & Breach, New York, USA, 1966.

URTHALER, Y.; REDDY, J. N. A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams. **Commun. Numer. Meth. Engng.**, v. 21, p. 553–570, 2005.

VOYIADJIS, G. Z.; SHI, G.; Refined two-dimensional theory for thick cylindrical shells. **Int. J. Solids Struct.** 27, 261–282, 1991.

WILSON, E.L.; TAYLOR, R. L.; DOHERTY, W. P.; GHABOUSSI, J. **Incompatible displacement models**. In: **ONR SYMPOSIUM ON NUMERICAL AND COMPUTER METHOD IN STRUCTURAL MECHANICS**, University of Illinois,

1971, Urbana. Proceedings... S.J. Fenves et al. (Eds.), Numerical and Computer Models in Structural Mechanics, Academic Press, New York, 1973.

WEMPNER, G. A. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **Int. J. Solids and Structures**, v. 5, p. 117-153, 1969.

WILSON, E. L. **Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures**, ISBN 0-923907-00-9, Third Edition, Berkeley, California, USA, 2002.

YANG, J.; XIA, P. Rotation vector and its complement parameterization for singularity-free corotational shell element formulations. **Computational Mechanics**, 64 (3), 789-805, 2019.

YAW, L. L., SUKUMAR N. e KUNNATH S. K. Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua. **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, pp. 0–38, 2008.

ZHEN, W.; QIN, S. H. Large deformation analysis of shell structures using a corotational solid-shell element. **Proceedings International Conference on Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer (MEC)**, 2838-2842, 2013.

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DA MATRIZ A_i

O vetor *spin* é dado por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial Y_l} - \frac{\partial v_i}{\partial X_l} \\ \frac{\partial u_i}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_i}{\partial X_l} \\ \frac{\partial v_i}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_i}{\partial Y_l} \end{bmatrix} = A_i^T \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Determinação da matriz A_i^T :

A) Cálculo do coeficiente Ω_{il} do vetor *spin*:

$$\begin{aligned} \Omega_{il} &= \frac{\partial u_i}{\partial Y_l} - \frac{\partial v_i}{\partial X_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial Y_l} u_{il} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial X_l} v_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial Y_l} u_{il} - \frac{\partial N_i}{\partial X_l} v_{il} \right) \end{aligned}$$

A derivada das funções de forma com relação as coordenadas locais podem ser obtidas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z_l} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1}(1,1) & J^{-1}(1,2) & J^{-1}(1,3) \\ J^{-1}(2,1) & J^{-1}(2,2) & J^{-1}(2,3) \\ J^{-1}(3,1) & J^{-1}(3,2) & J^{-1}(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial X_l} &= J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y_l} &= J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z_l} &= J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \end{aligned}$$

Substituindo as equações na expressão do *spin* local, temos:

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial Y_l} u_{il} - \frac{\partial N_i}{\partial X_l} v_{il} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) u_{il} - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) v_{il} \right]\end{aligned}$$

B) Cálculo do coeficiente Ω_{12} do vetor *spin*:

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= \frac{\partial u_l}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_l}{\partial X_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial Z_l} u_{il} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial X_l} w_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial Z_l} u_{il} - \frac{\partial N_i}{\partial X_l} w_{il} \right)\end{aligned}$$

Substituindo as equações na expressão do *spin* local, temos:

$$\Omega_{12} = \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) u_{il} - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) w_{il} \right]$$

C) Cálculo do coeficiente Ω_{13} do vetor *spin*:

$$\begin{aligned}\Omega_{13} &= \frac{\partial v_l}{\partial Z_l} - \frac{\partial w_l}{\partial Y_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial Z_l} v_{il} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial Y_l} w_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial Z_l} v_{il} - \frac{\partial N_i}{\partial Y_l} w_{il} \right)\end{aligned}$$

Substituindo as equações na expressão do *spin* local, temos:

$$\Omega_{13} = \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) v_{il} - \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) w_{il} \right]$$

Assim:

$$\Omega = \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) u_{il} - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) v_{il} \right] \\ \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) u_{il} - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) w_{il} \right] \\ \sum_{i=1}^n \left[\left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) v_{il} - \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_l} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_l} \right) w_{il} \right] \end{array} \right]$$

Um rearranjo pode ser efetuado, o que torna o vetor spin o produto de uma matriz A_i^T pelo vetor dos deslocamentos u_i :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & 0 & \\ \left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & 0 & - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) \\ 0 & \left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & - \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{il} \\ v_{il} \\ w_{il} \end{bmatrix}$$

Finalmente, A_i^T é dada por:

$$A_i^T = \begin{bmatrix} \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & 0 & \\ \left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & 0 & - \left(J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) \\ 0 & \left(J^{-1}(3,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) & - \left(J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial N_i}{\partial \eta_i} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i} \right) \end{bmatrix}$$

APÊNDICE B

DEDUÇÃO COMPLETA DA MATRIZ DE TENSÃO INICIAL $K_{t\sigma}$ PARA O ELEMENTO CO-ROTACIONAL CONTÍNUO 2D

A matriz de rigidez tangente global do elemento é obtida pela variação do vetor de forças internas global ($\mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{iL}$). Assim, através da derivada do produto produz-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_i &= \mathbf{T}^T \delta \mathbf{f}_{iL} + \delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{iL} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{iL} \delta \mathbf{u}_L + \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{iL} \mathbf{T} \delta \mathbf{u}_g + \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g \\ &= \mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_g + \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g \\ &= (\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_{t\sigma}) \delta \mathbf{u}_g \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Dessa forma, vê-se que a matriz de rigidez tangente é a contribuição de duas parcelas sendo que a última delas expressa na Equação (B.1), é a matriz de tensão inicial e, pode ser obtida pela variação da transposta da matriz de transformação:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{iL} = \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.2})$$

De acordo com a equação (5.26), a transposta da matriz de transformação é dada por:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{E}^T + \mathbf{v} \bar{\mathbf{x}}_L^T \quad (\text{B.3})$$

Expandindo a Equação (B.3) tem-se:

$$\mathbf{T}^T = \begin{vmatrix} |e_1 & e_2| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |e_1 & e_2| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |e_1 & e_2| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |e_1 & e_2| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_L^1 & -x_L^1 & y_L^2 & -x_L^2 & y_L^3 & -x_L^3 & y_L^4 & -x_L^4 \end{vmatrix}$$

As oito colunas da matriz \mathbf{T}^T podem ser dadas por:

$$\mathbf{T}^{T(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{T(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{T(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}^{T(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}^{T(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{T(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{T(7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} + y_L^4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}^{T(8)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} - x_L^4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}.$$

A variação da transposta da matriz de transformação pode ser apresentada como o seguinte somatório:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{iL} = \delta \mathbf{T}^{T(1)} f_{iL}^1 + \delta \mathbf{T}^{T(2)} f_{iL}^2 + \delta \mathbf{T}^{T(3)} f_{iL}^3 + \dots = \sum_{j=1}^8 \delta \mathbf{T}^{T(j)} f_{iL}^j = \sum_{j=1}^8 f_{iL}^j \mathbf{G}^j \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.4})$$

onde $\delta \mathbf{T}^{T(j)}$ é a variação da j -ésima coluna de \mathbf{T}^T , f_{iL}^j é a j -ésima componente de \mathbf{f}_{iL} e \mathbf{G}^j a j -ésima matriz a ser determinada a seguir.

Pode-se obter o primeiro termo da soma em (B.4) através de:

$$\delta \mathbf{T}^{T(1)} f_{iL}^1 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^1 = f_{iL}^1 \mathbf{G}^1 \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.5})$$

O valor de $\mathbf{G}^1 \delta \mathbf{u}_g$ pode, dessa forma, ser determinado por:

$$\mathbf{G}^1 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^1 \mathbf{v} + y_L^1 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.6})$$

onde $\delta \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \delta \theta$ e $\delta \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \delta \theta$. O último termo presente na equação (B.6) não será tratado neste primeiro momento. Dessa forma considerando apenas os dois primeiros termos tem-se:

$$\mathbf{G}^{1,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^1 \mathbf{v}. \quad (\text{B.7})$$

Observa que no segundo termo de (B.7) aparece a variação das coordenadas espaciais locais. Estas podem ser determinadas pela variação da expressão que estabelece a relação entre as coordenadas nodais do elemento nos sistemas global e local ($\delta \mathbf{X}_L + \delta \mathbf{u}_L = \delta \mathbf{x}_L \Rightarrow \delta \mathbf{u}_L = \delta \mathbf{x}_L$). Da equação (5.21) sabe-se que a variação dos deslocamentos locais é dada por:

$$\delta \mathbf{p}_L = (\mathbf{E} + \bar{\mathbf{x}}_L \mathbf{v}^T) \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.8})$$

Expandindo a equação (B.8) tem-se:

$$\delta \begin{bmatrix} x_L^1 \\ y_L^1 \\ x_L^2 \\ y_L^2 \\ x_L^3 \\ y_L^3 \\ x_L^4 \\ y_L^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \mathbf{e}_1^T \right| & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left| \mathbf{e}_2^T \right| & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_1^T \right| & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_2^T \right| & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_1^T \right| & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_2^T \right| & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_1^T \right| \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left| \mathbf{e}_2^T \right| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left| y_L^1 \right| \\ -x_L^1 \\ y_L^2 \\ -x_L^2 \\ y_L^3 \\ -x_L^3 \\ y_L^4 \\ -x_L^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \\ p^5 \\ p^6 \\ p^7 \\ p^8 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a variação dos deslocamentos locais em cada nó e direção é dada por:

$$\delta x_L^1 = \left[\left| \mathbf{e}_1^T \right| \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] + y_L^1 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.9})$$

$$\delta y_L^1 = \left[\left| \mathbf{e}_2^T \right| \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] - x_L^1 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.10})$$

$$\delta x_L^2 = \left[\mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_1^T \right| \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] + y_L^2 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.11})$$

$$\delta y_L^2 = \left[\mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_2^T \right| \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] - x_L^2 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.12})$$

$$\delta x_L^3 = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_1^T \right| \quad \mathbf{0} \right] + y_L^3 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.13})$$

$$\delta y_L^3 = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_2^T \right| \quad \mathbf{0} \right] - x_L^3 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.14})$$

$$\delta x_L^4 = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_1^T \right| \right] + y_L^4 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.15})$$

$$\delta y_L^4 = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \left| \mathbf{e}_2^T \right| \right] - x_L^4 \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, sabe-se da equação (5.18) que $\delta \theta = \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g$. Retornando à Equação (B.7) e substituindo o valores de $\delta \theta$ e δy_L^1 (dado pela equação (B.10)) obtém-se:

$$\mathbf{G}^{1,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \left| \mathbf{e}_2 \right| \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g + \mathbf{v} \begin{bmatrix} \left| \mathbf{e}_2 \right|^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_g - x_L^1 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.17})$$

Observa-se que se pode eliminar a variação dos deslocamentos globais $\delta \mathbf{u}_g$ na Equação (B.17) e, assim, obter a primeira parcela da expressão \mathbf{G}^l :

$$\mathbf{G}^{l,a} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T - x_L^1 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (\text{B.18})$$

A segunda parte de \mathbf{G}^l ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.6) e envolve a variação de \mathbf{v} :

$$\mathbf{G}^{l,b} \delta \mathbf{u}_g = y_L^1 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.19})$$

Rescrevendo a equação obtida em (5.18) que estabelece a variável \mathbf{v} tem-se:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{(a^2 + b^2)} (b\mathbf{c} + a\mathbf{d}).$$

A variação desta expressão fornece:

$$\delta \mathbf{v} = \delta \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) (b\mathbf{c} + a\mathbf{d}) + \frac{1}{a^2 + b^2} \delta (b\mathbf{c} + a\mathbf{d}). \quad (\text{B.20})$$

Desenvolvendo a variação no primeiro termo de (B.20),

$$\delta \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) = \delta \left((a^2 + b^2)^{-1} \right) = -(a^2 + b^2)^{-2} (\delta(a^2) + \delta(b^2)) \quad (\text{B.21})$$

onde $a = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_g$ e $b = \mathbf{d}^T \mathbf{x}_g$. Assim:

$$\delta \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) = -(a^2 + b^2)^{-2} (2a(\mathbf{x}_g \delta \mathbf{c}^T + \delta \mathbf{x}_g \mathbf{c}^T) + 2b(\mathbf{x}_g \delta \mathbf{d}^T + \delta \mathbf{x}_g \mathbf{d}^T)). \quad (\text{B.22})$$

As variações de \mathbf{c} e \mathbf{d} resultam nulas uma vez que, conforme expresso na Equação (5.14), tratam-se de entidades que possuem seus valores dependentes de \mathbf{a}_l e, como visto na Equação (5.10), este vetor tem seus componentes em função de coordenadas materiais no sistema local. Por outro lado, sabe-se que as variações das coordenadas espaciais e dos deslocamentos são equivalentes ($\delta \mathbf{x}_g = \delta \mathbf{u}_g$). Desse modo:

$$\delta\left((a^2 + b^2)^{-1}\right) = -(a^2 + b^2)^{-2} (2a\delta\mathbf{u}_g \mathbf{c}^T + 2b\delta\mathbf{u}_g \mathbf{d}^T) = \frac{-2(a\mathbf{c}^T + b\mathbf{d}^T)}{(a^2 + b^2)^2} \delta\mathbf{u}_g. \quad (\text{B.23})$$

Desenvolvendo a variação presente no segundo termo de (B.20) através da derivada do produto tem-se:

$$\begin{aligned} \delta(bc - ad) &= \delta(bc) - \delta(ad) = \delta b c + b \delta c - \delta a d - a \delta d \\ \delta(bc - ad) &= \left(\mathbf{x}_g \delta \mathbf{d}^T + \delta \mathbf{x}_g \mathbf{d}^T \right) \mathbf{c} - \left(\mathbf{x}_g \delta \mathbf{c}^T + \delta \mathbf{x}_g \mathbf{c}^T \right) \mathbf{d} \\ \delta(bc - ad) &= (\delta \mathbf{x}_g \mathbf{d}^T) \mathbf{c} - (\delta \mathbf{x}_g \mathbf{c}^T) \mathbf{d} \\ \delta(bc - ad) &= (\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T) \delta \mathbf{x}_g \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Dessa forma, substituindo (B.23) e (B.24) em (B.20):

$$\delta \mathbf{v} = \frac{-(2b\mathbf{c}^T + 2a\mathbf{d}^T)}{(a^2 + b^2)^2} (b\mathbf{d} - a\mathbf{d}) \delta \mathbf{u}_g + \frac{(\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T)}{a^2 + b^2} \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.25})$$

Após alguma álgebra aplicada à Equação (B.25) tem-se:

$$\delta \mathbf{v} = \left| \frac{2ab(\mathbf{d} \mathbf{d}^T - \mathbf{c} \mathbf{c}^T) + (a^2 - b^2)(\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T)}{(a^2 + b^2)^2} \right| \delta \mathbf{u}_g \equiv \mathbf{V}^T \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.26})$$

Substituindo (B.26) em (B.19), pode-se obter a segunda parcela de \mathbf{G}^I :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{I,b} \delta \mathbf{u}_g &= y_L^1 \mathbf{V}^T \delta \mathbf{u}_g \\ \mathbf{G}^{I,b} &= \mathbf{V}^T \delta \mathbf{u}_g \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

onde \mathbf{V} é uma matriz simétrica.

Finalmente, tem-se a primeira das matrizes que compõe o somatório dado na Equação (B.4):

$$\mathbf{G}^I = \mathbf{G}^{I,a} + \mathbf{G}^{I,b}. \quad (\text{B.28})$$

Conforme apontado por Yaw (2008), a última parcela da Equação (B.28) tem efeito insignificante sobre a convergência e pode ser negligenciada. Discussões acerca da importância desse valor podem ser encontradas em Crisfield (1997) e, mais recentemente, no trabalho de Rankin (2006).

A matriz \mathbf{G}^1 é necessária para se determinar o primeiro termo da soma expressa na Equação (B.4). As outras \mathbf{G}^j 's matrizes são obtidas de maneira semelhante, isto é, pela variação das demais colunas da matriz de transformação \mathbf{T} .

Cálculo das demais matrizes \mathbf{G}^j

- Determinação da matriz \mathbf{G}^2

Efetuada uma variação sobre a segunda coluna da transposta da matriz de transformação \mathbf{T} , tem-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(2)} f_{iL}^2 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^2 = f_{iL}^2 \mathbf{G}^2 \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.29})$$

A parcela $\mathbf{G}^2 \delta \mathbf{u}_g$ pode ser determinada por:

$$\mathbf{G}^2 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta - \delta x_L^1 \mathbf{v} - x_L^1 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.30})$$

Considerando os dois primeiros termos de (B.30) tem-se:

$$\mathbf{G}^{2,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta - \delta x_L^1 \mathbf{v} \quad (\text{B.31})$$

A equação (B.9) contém a expressão para a variação δx_L^1 , que substituída em (B.31) produz o primeiro termo de \mathbf{G}^2 :

$$\mathbf{G}^{2,a} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}^T - \mathbf{v} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T - y_L^1 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (\text{B.32})$$

A segunda parte de \mathbf{G}^2 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.30) e envolve a variação de \mathbf{v} . Tendo este ente já sido determinado na Equação (B.26), pode-se então escrever aquele termo restante como:

$$\mathbf{G}^{2,b} = -x_L^1 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.33})$$

E assim, a expressão final para \mathbf{G}^2 :

$$\mathbf{G}^2 = \mathbf{G}^{2,a} + \mathbf{G}^{2,b}. \quad (\text{B.34})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^3

Realizando uma variação da terceira coluna da transposta da matriz de transformação \mathbf{T} :

$$\delta \mathbf{T}^{T(3)} f_{iL}^3 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^3 = f_{iL}^3 \mathbf{G}^3 \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.35})$$

$\mathbf{G}^3 \delta \mathbf{u}_g$ pode ser determinado por:

$$\mathbf{G}^3 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^2 \mathbf{v} + y_L^2 \delta \mathbf{v}. \quad (\text{B.36})$$

Considerando os dois primeiros termos de (B.36) tem-se:

$$\mathbf{G}^{3,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^2 \mathbf{v}. \quad (\text{B.37})$$

Substituindo a variação δy_L^2 dada por (B.12) na equação (B.37), a expressão para o primeiro termo de \mathbf{G}^3 resulta em :

$$\mathbf{G}^{3,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T - x_L^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \quad (\text{B.38})$$

A segunda parte de \mathbf{G}^3 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.36) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{3,b} = y_L^2 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.39})$$

Finalmente, a expressão completa para \mathbf{G}^3 é:

$$\mathbf{G}^3 = \mathbf{G}^{3,a} + \mathbf{G}^{3,b}. \quad (\text{B.40})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^4

Procedendo uma variação da quarta coluna da transposta da matriz de transformação \mathbf{T} tem-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(4)} f_{iL}^4 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - x_L^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^4 = f_{iL}^4 \mathbf{G}^4 \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{B.41})$$

$\mathbf{G}^4 \delta \mathbf{u}_g$ pode ser determinado por:

$$\mathbf{G}^4 \delta \mathbf{u}_g = \delta \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \\ \hline \mathbf{e}_2 & \\ \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \end{array} \right] - x_L^2 \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \\ \hline -\mathbf{e}_1 & \\ \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \end{array} \right] \delta \theta - \delta x_L^2 \mathbf{v} - x_L^2 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.42})$$

Levando em conta inicialmente os dois primeiros termos de (B.42) tem-se:

$$\mathbf{G}^{3,a} \delta \mathbf{u}_g = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \\ \hline -\mathbf{e}_1 & \\ \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \end{array} \right] \delta \theta - \delta x_L^2 \mathbf{v} \quad (\text{B.43})$$

Substituindo a variação δx_L^2 contida na Equação (B.11) na Equação (B.43) obtém-se o primeiro termo de \mathbf{G}^4 :

$$\mathbf{G}^{4,a} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{e}_1 & \mathbf{v}^T - \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] - y_L^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \quad (\text{B.44})$$

A segunda parte de \mathbf{G}^4 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.42) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{4,b} = -x_L^2 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.45})$$

Finalmente, a expressão última para \mathbf{G}^4 é dada por:

$$\mathbf{G}^4 = \mathbf{G}^{4,a} + \mathbf{G}^{4,b}. \quad (\text{B.46})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^5

Com uma variação na quinta coluna da transposta da matriz de transformação \mathbf{T} tem-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(5)} f_{iL}^5 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^5 = f_{iL}^5 \mathbf{G}^5 \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.47})$$

$\mathbf{G}^5 \delta \mathbf{u}_g$ é então dada por:

$$\mathbf{G}^5 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y_L^3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta\theta + \delta y_L^3 \mathbf{v} + y_L^3 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.48})$$

Levando-se em conta inicialmente os dois primeiros termos de (B.48):

$$\mathbf{G}^{5,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta\theta + \delta y_L^3 \mathbf{v}. \quad (\text{B.49})$$

A variação δy_L^3 é dada em (B.14). Substituindo a mesma na Equação (B.49), obtém-se o primeiro termo de \mathbf{G}^5 :

$$\mathbf{G}^{5,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T - x_L^3 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (\text{B.50})$$

A segunda parte de \mathbf{G}^5 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.48) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{5,b} = y_L^3 \mathbf{V}^T \quad (\text{B.51})$$

A expressão final para \mathbf{G}^5 é:

$$\mathbf{G}^5 = \mathbf{G}^{5,a} + \mathbf{G}^{5,b}. \quad (\text{B.52})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^6

Pela variação da sexta coluna da transposta da matriz de transformação \mathbf{T} tem-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(6)} f_{iL}^6 = \delta \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{array} \right| - x_L^3 \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \right] \end{array} \right] f_{iL}^6 = f_{iL}^6 \mathbf{G}^6 \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.53})$$

$\mathbf{G}^6 \delta \mathbf{u}_g$ é então dada por:

$$\mathbf{G}^6 \delta \mathbf{u}_g = \delta \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{array} \right| - x_L^3 \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \right] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \delta \theta - \delta x_L^3 \mathbf{v} - x_L^3 \delta \mathbf{v} \quad (\text{B.54})$$

Tendo em conta os dois primeiros termos de (B.54) tem-se:

$$\mathbf{G}^{6,a} \delta \mathbf{u}_g = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \delta \theta - \delta x_L^3 \mathbf{v}. \quad (\text{B.55})$$

A variação δx_L^3 é dada em (B.13). Substituindo aquela expressão na equação (B.55), obtém-se o primeiro termo de \mathbf{G}^6 :

$$\mathbf{G}^{6,a} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right]^T - y_L^3 \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \quad (\text{B.56})$$

A segunda parte da matriz \mathbf{G}^6 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.54) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{6,b} = -x_L^3 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.57})$$

A expressão final para a matriz \mathbf{G}^6 é:

$$\mathbf{G}^6 = \mathbf{G}^{6,a} + \mathbf{G}^{6,b}. \quad (\text{B.58})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^7

Procedendo uma variação na sétima coluna da transposta matriz de transformação \mathbf{T} tem-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(7)} f_{iL}^7 = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} + y_L^4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} f_{iL}^7 = f_{iL}^7 \mathbf{G}^7 \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.59})$$

$\mathbf{G}^7 \delta \mathbf{u}_g$ é então dada por:

$$\mathbf{G}^7 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} + y_L^4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^4 \mathbf{v} + y_L^4 \delta \mathbf{v}. \quad (\text{B.60})$$

Considerando-se num primeiro momento os dois primeiro termos de (B.60):

$$\mathbf{G}^{7,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \delta \theta + \delta y_L^4. \quad (\text{B.61})$$

A variação δy_L^4 é dada em (B.16). Efetuando a substituição daquela expressão na equação (B.61), obtém-se o primeiro termo de \mathbf{G}^7 :

$$\mathbf{G}^{7,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}^T - x_L^4 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (\text{B.62})$$

A segunda parcela da matriz \mathbf{G}^7 ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.60) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{7,b} = y_L^4 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.61})$$

A expressão final para a matriz \mathbf{G}^7 é:

$$\mathbf{G}^7 = \mathbf{G}^{7,a} + \mathbf{G}^{7,b}. \quad (\text{B.62})$$

- Determinação da matriz \mathbf{G}^8

Fazendo uma variação na oitava coluna da transposta matriz de transformação \mathbf{T} produz-se:

$$\delta \mathbf{T}^{T(8)} f_{iL}^8 = \delta \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{array} \right| - x_L^4 \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \end{bmatrix} f_{iL}^8 = f_{iL}^8 \mathbf{G}^8 \delta \mathbf{u}_g. \quad (\text{B.63})$$

$\mathbf{G}^8 \delta \mathbf{u}_g$ é então dada por:

$$\mathbf{G}^8 \delta \mathbf{u}_g = \delta \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{array} \right| - x_L^4 \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \end{array} \right| \delta\theta - \delta x_L^4 \mathbf{v} - x_L^4 \delta \mathbf{v}. \end{bmatrix} \quad (\text{B.64})$$

Considerando-se inicialmente os dois primeiros termos de (B.64):

$$\mathbf{G}^{8,a} \delta \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \end{array} \right| \delta\theta - \delta x_L^4 \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (\text{B.65})$$

A variação δx_L^4 é dada em (B.15). Efetuando a substituição daquela expressão na equação (B.65), obtém-se o primeiro termo de \mathbf{G}^8 :

$$\mathbf{G}^{\delta,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_l \end{bmatrix} \mathbf{v}^T - \mathbf{v} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_l \end{bmatrix} - \gamma_L^4 \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \quad (\text{B.66})$$

A segunda parte da matriz \mathbf{G}^δ ainda não obtida é a última parcela da Equação (B.64) e é dada por:

$$\mathbf{G}^{\delta,b} = -x_L^4 \mathbf{V}^T. \quad (\text{B.67})$$

A expressão final para a matriz \mathbf{G}^δ é:

$$\mathbf{G}^\delta = \mathbf{G}^{\delta,a} + \mathbf{G}^{\delta,b}. \quad (\text{B.68})$$

Finalmente, a forma última da expressão da matriz de tensão inicial é obtida:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{iL} = \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{u}_g &= \sum_{j=1}^8 \delta \mathbf{T}^{T(j)} \mathbf{f}_{iL}^j = \sum_{j=1}^8 \mathbf{f}_{iL}^j \mathbf{G}^j \delta \mathbf{u}_g \\ \mathbf{K}_{t\sigma} &= \sum_{j=1}^8 \mathbf{f}_{iL}^j \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

APÊNDICE C

OBTENÇÃO DA VARIAÇÃO DO VETOR \mathbf{v}

O vetor \mathbf{v} definido na Equação (5.18) é reescrito como:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) = (a^2 + b^2)^{-1} (b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) \quad (\text{C.1})$$

Fazendo uso da regra do produto, a diferenciação de \mathbf{v} produz inicialmente:

$$\delta\mathbf{v} = \delta(a^2 + b^2)^{-1} (b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) + (a^2 + b^2)^{-1} \delta(b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) \quad (\text{C.2})$$

Resolvendo a variação no primeiro termo do lado direito da Equação (C.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta(a^2 + b^2)^{-1} &= -(a^2 + b^2)^{-2} \delta(a^2 + b^2) \\ \delta a^2 &= 2a\delta a = 2a\delta(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) = 2a \left(\frac{\delta \mathbf{c}^T}{\delta \mathbf{u}_g} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \delta \mathbf{x} \right) = 2a \mathbf{c}^T \delta \mathbf{x} = 2a \mathbf{c}^T \delta \mathbf{u}_g \\ \delta b^2 &= 2b\delta b = 2b\delta(\mathbf{d}^T \mathbf{x}) = 2b \left(\frac{\delta \mathbf{d}^T}{\delta \mathbf{u}_g} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \delta \mathbf{x} \right) = 2b \mathbf{d}^T \delta \mathbf{x} = 2b \mathbf{d}^T \delta \mathbf{u}_g \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\delta(a^2 + b^2)^{-1} = -(a^2 + b^2)^{-2} (2a \mathbf{c}^T + 2b \mathbf{d}^T) \delta \mathbf{u}_g = \frac{-2(a \mathbf{c}^T + b \mathbf{d}^T)}{(a^2 + b^2)^2} \delta \mathbf{u}_g$$

Resolvendo a variação no segundo termo do lado direito da Equação (C.2):

$$\begin{aligned} \delta(b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) &= \delta(b\mathbf{c}) - \delta(a\mathbf{d}) = \delta b \mathbf{c} + b \frac{\delta \mathbf{c}}{\delta \mathbf{u}_g} - \delta a \mathbf{d} - a \frac{\delta \mathbf{d}}{\delta \mathbf{u}_g} = \delta(\mathbf{d}^T \mathbf{x}) \mathbf{c} - \delta(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{c} \frac{\delta \mathbf{d}^T}{\delta \mathbf{u}_g} \mathbf{x} + \mathbf{c} \mathbf{d}^T \delta \mathbf{x} - \mathbf{d} \frac{\delta \mathbf{c}^T}{\delta \mathbf{u}_g} \mathbf{x} - \mathbf{d} \mathbf{c}^T \delta \mathbf{x} = (\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T) \delta \mathbf{u}_g \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Substituindo o resultado de (C.4) e (C.3) em (C.2) produz-se:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v} &= \frac{-2(a \mathbf{c}^T + b \mathbf{d}^T)}{(a^2 + b^2)^2} (b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) \delta \mathbf{u}_g + \frac{(\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T)}{(a^2 + b^2)} \delta \mathbf{u}_g \\ &= \frac{-2(a \mathbf{c}^T + b \mathbf{d}^T)(b\mathbf{c} - a\mathbf{d}) \delta \mathbf{u}_g + (a^2 + b^2)(\mathbf{c} \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^T) \delta \mathbf{u}_g}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{-2(abc \mathbf{c}^T - a^2 \mathbf{d} \mathbf{c}^T + b^2 \mathbf{c} \mathbf{d}^T - abd \mathbf{d}^T) + (a^2 \mathbf{c} \mathbf{d}^T - a^2 \mathbf{d} \mathbf{c}^T + b^2 \mathbf{c} \mathbf{d}^T - b^2 \mathbf{d} \mathbf{c}^T)}{(a^2 + b^2)^2} \delta \mathbf{u}_g \end{aligned}$$

Finalmente, a variação de \mathbf{v} pode ser dada por:

$$\delta\mathbf{v} = \frac{2ab(\mathbf{d} \mathbf{d}^T - \mathbf{c} \mathbf{c}^T) + (a^2 - b^2)(\mathbf{c} \mathbf{d}^T + \mathbf{d} \mathbf{c}^T)}{(a^2 + b^2)^2} \delta \mathbf{u}_g \quad (\text{C.5})$$

APÊNDICE D

DEDUÇÃO DO TENSOR DE MAPEAMENTO 7

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = J_{11}\mathbf{g}^1 + J_{12}\mathbf{g}^2$$

$$\mathbf{t}_2 = J_{21}\mathbf{g}^1 + J_{22}\mathbf{g}^2$$

$$A_{11} = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{t}_1) = (J_{11}\mathbf{g}^1 + J_{12}\mathbf{g}^2) \cdot \left[\mathbf{A}(J_{11}\mathbf{g}^1 + J_{12}\mathbf{g}^2) \right]$$

$$A_{11} = J_{11}^2 \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{11}J_{12} \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2) + J_{12}J_{11} \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{12}^2 \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2)$$

$$A_{11} = J_{11}^2 A^{11} + J_{11}J_{12} A^{12} + J_{12}J_{11} A^{21} + J_{12}^2 A^{22}$$

$$\boxed{A_{11} = J_{11}^2 A^{11} + J_{12}^2 A^{22} + 2J_{11}J_{12} A^{12}}$$

$$A_{12} = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{t}_2) = (J_{11}\mathbf{g}^1 + J_{12}\mathbf{g}^2) \cdot \left[\mathbf{A}(J_{21}\mathbf{g}^1 + J_{22}\mathbf{g}^2) \right]$$

$$A_{12} = J_{11}J_{21} \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{11}J_{22} \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2) + J_{12}J_{21} \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{12}J_{22} \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2)$$

$$A_{12} = J_{11}J_{21} A^{11} + J_{11}J_{22} A^{12} + J_{12}J_{21} A^{21} + J_{12}J_{22} A^{22}$$

$$\boxed{A_{12} = J_{11}J_{21} A^{11} + J_{12}J_{22} A^{22} + (J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21}) A^{12}}$$

$$A_{22} = \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{t}_2) = (J_{21}\mathbf{g}^1 + J_{22}\mathbf{g}^2) \cdot \left[\mathbf{A}(J_{21}\mathbf{g}^1 + J_{22}\mathbf{g}^2) \right]$$

$$A_{22} = J_{21}^2 \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{21}J_{22} \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2) + J_{22}J_{21} \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^1) + J_{22}^2 \mathbf{g}^2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}^2)$$

$$A_{22} = J_{21}^2 A^{11} + J_{21}J_{22} A^{12} + J_{22}J_{21} A^{21} + J_{22}^2 A^{22}$$

$$\boxed{A_{22} = J_{21}^2 A^{11} + J_{22}^2 A^{22} + 2J_{21}J_{22} A^{12}}$$

Assim,

$$\boxed{A_{11} = J_{11}^2 A^{11} + J_{12}^2 A^{22} + 2J_{11}J_{12} A^{12}}$$

$$\boxed{A_{22} = J_{21}^2 A^{11} + J_{22}^2 A^{22} + 2J_{21}J_{22} A^{12}}$$

$$\boxed{A_{12} = J_{11}J_{21} A^{11} + J_{12}J_{22} A^{22} + (J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21}) A^{12}}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{11} \\ A^{22} \\ A^{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = J_{11}\mathbf{g}^1 + J_{12}\mathbf{g}^2 + J_{13}\mathbf{g}^3$$

$$\mathbf{t}_2 = J_{21}\mathbf{g}^1 + J_{22}\mathbf{g}^2 + J_{23}\mathbf{g}^3$$

$$\mathbf{t}_3 = J_{31}\mathbf{g}^1 + J_{32}\mathbf{g}^2 + J_{33}\mathbf{g}^3$$

$$\begin{aligned}
&= J_{31}^2 A^{11} + J_{32}^2 A^{22} + J_{33}^2 A^{33} + (J_{31} J_{32} + J_{32} J_{31}) A^{12} + (J_{31} J_{33} + J_{33} J_{31}) A^{13} + (J_{32} J_{33} + J_{33} J_{32}) A^{23} \\
&= J_{31}^2 A^{11} + J_{32}^2 A^{22} + J_{33}^2 A^{33} + 2J_{31} J_{32} A^{12} + 2J_{31} J_{33} A^{13} + 2J_{32} J_{33} A^{23}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A_{11} &= J_{11}^2 A^{11} + J_{12}^2 A^{22} + J_{13}^2 A^{33} + 2J_{11} J_{12} A^{12} + 2J_{11} J_{13} A^{13} + 2J_{12} J_{13} A^{23} \\
A_{12} &= J_{11} J_{21} A^{11} + J_{12} J_{22} A^{22} + J_{13} J_{23} A^{33} + A^{12} (J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21} A^{21}) + A^{13} (J_{11} J_{23} + J_{13} J_{21}) + A^{23} (J_{12} J_{23} + J_{13} J_{22}) \\
A_{13} &= J_{11} J_{31} A^{11} + J_{12} J_{32} A^{22} + J_{13} J_{33} A^{33} + (J_{11} J_{32} + J_{12} J_{31}) A^{12} + (J_{11} J_{33} + J_{13} J_{31}) A^{13} + (J_{12} J_{33} + J_{13} J_{32}) A^{23} \\
A_{22} &= J_{21}^2 A^{11} + J_{22}^2 A^{22} + J_{23}^2 A^{33} + 2J_{21} J_{22} A^{12} + 2J_{21} J_{23} A^{13} + 2J_{22} J_{23} A^{23} \\
A_{23} &= J_{21} J_{31} A^{11} + J_{22} J_{32} A^{22} + J_{23} J_{33} A^{33} + (J_{21} J_{32} + J_{22} J_{31}) A^{12} + (J_{21} J_{33} + J_{23} J_{31}) A^{13} + (J_{22} J_{33} + J_{23} J_{32}) A^{23} \\
A_{33} &= J_{31}^2 A^{11} + J_{32}^2 A^{22} + J_{33}^2 A^{33} + 2J_{31} J_{32} A^{12} + 2J_{31} J_{33} A^{13} + 2J_{32} J_{33} A^{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 & 2J_{11}J_{12} & 2J_{11}J_{13} & 2J_{12}J_{13} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 & 2J_{21}J_{22} & 2J_{21}J_{23} & 2J_{22}J_{23} \\ J_{31}^2 & J_{32}^2 & J_{33}^2 & 2J_{31}J_{32} & 2J_{31}J_{33} & 2J_{32}J_{33} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{13}J_{23} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21} & J_{12}J_{23} + J_{13}J_{22} \\ J_{11}J_{31} & J_{12}J_{32} & J_{13}J_{33} & J_{11}J_{32} + J_{12}J_{31} & J_{11}J_{33} + J_{13}J_{31} & J_{12}J_{33} + J_{13}J_{32} \\ J_{21}J_{31} & J_{22}J_{32} & J_{23}J_{33} & J_{21}J_{32} + J_{22}J_{31} & J_{21}J_{33} + J_{23}J_{31} & J_{22}J_{33} + J_{23}J_{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} \\ A^{22} \\ A^{33} \\ A^{12} \\ A^{13} \\ A^{23} \end{pmatrix}$$

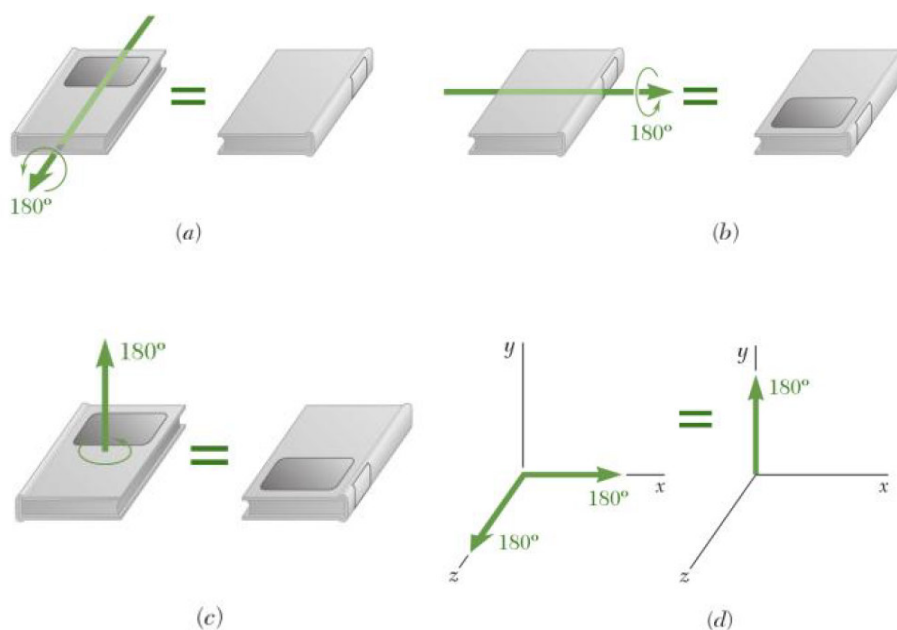
APÊNDICE E

ROTAÇÕES FINITAS NO ESPAÇO

E1. INTRODUÇÃO

As rotações no âmbito bidimensional (plano xy , por exemplo) são definidas por um único escalar, ou seja, um ângulo de rotação em torno do eixo z , sendo válida, portanto a propriedade da comutatividade. Por sua vez, quando se está estudando rotações no espaço, verifica-se que o fenômeno é mais complexo e, conforme apontado por Crisfield (2001), este se encontra fundamentado no teorema de Euler o qual afirma que “o movimento de um corpo rígido, fixado em um ponto, pode ser descrito por uma única rotação em torno de um eixo que passa por tal ponto”. Logo, para se definir uma rotação no âmbito espacial, além do ângulo se faz necessário a direção ou eixo em que essa ocorre. Apesar dessas características serem as mesmas que definem um vetor, verifica-se que as rotações finitas no espaço são quantidades não vetoriais e dessa forma não se soma segundo a lei do paralelogramo, Beer *et al* (2009). Isso pode ser visualizado na Figura E.1, na qual um livro é colocado numa posição de leitura, com a capa para cima e a lombada para esquerda.

Figura E.1 – Rotações finitas de um corpo rígido.



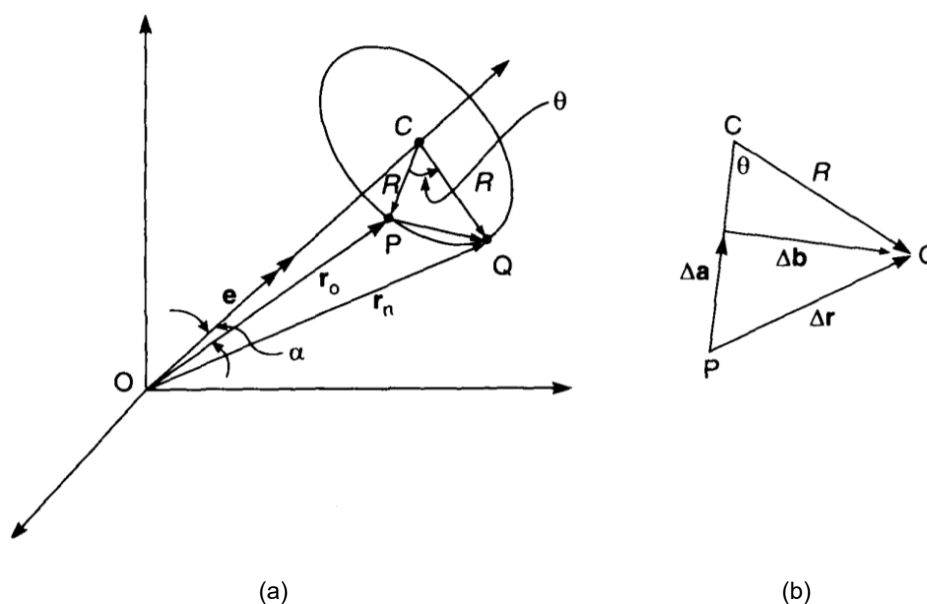
Fonte: Beer et al (2009).

Pode se girar este livro 180° em torno de um eixo paralelo à lombada obtendo o resultado mostrado na Figura E.1 (a) e, em seguida, mais 180° em torno de um eixo perpendicular à lombada chegando-se a posição ilustrada na Figura E.1 (b). Entretanto, o livro poderia ter sido colocado nessa posição final simplesmente por meio de uma rotação única de 180° em torno de um eixo vertical, conforme visto na Figura E.1 (c). Vê-se portanto, pela Figura E.1 (d) que as duas rotações de 180° representadas pelas setas direcionadas ao longo dos eixos z e x é igual a uma rotação de 180° representada por uma seta direcionada ao longo do eixo y . Assim, fica claro que as rotações finitas de um corpo rígido não obedecem à lei do paralelogramo para adição e, conseqüentemente, não podem ser representadas por vetores. Isto implica na necessidade de utilização de técnicas adequadas para a sua consideração. Nesta seção é realizada uma apresentação da fórmula de Rodrigues (1840, apud CRISFIELD, 1997) a qual é aplicada no estudo de grandes rotações. Em seguida, faz-se uma expansão em série de potência dessa fórmula com a finalidade de se obter uma expressão pra variação da matriz de rotação.

E2. MATRIZ DE ROTAÇÃO – FÓRMULA DE RODRIGUES

Sejam os vetores r_0 e r_n representando, respectivamente, as posições inicial e final de um vetor r após uma rotação finita, conforme mostrado na Figura E.2.

Figura E.2 – Rotação tridimensional. (a) Rotação sobre OC. (b) Detalhe da operação.



Fonte: Crisfield (1997).

A matriz de rotação \mathbf{R} relaciona um vetor antes da rotação a outro vetor após a rotação de modo que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}\mathbf{r}_0 \quad (\text{E.1})$$

Assume-se que a rotação envolve um pseudo vetor expresso por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 + \theta_3 \mathbf{e}_3 = \theta \mathbf{e} \quad (\text{E.2})$$

em que \mathbf{e} é um vetor unitário e sobre o qual a rotação ocorre e θ pode ser definido por:

$$\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (\text{E.3})$$

Da Figura E.2 (b) tem-se que:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b} \quad (\text{E.4})$$

Em que $\Delta \mathbf{a}$ e $\Delta \mathbf{b}$ são ortogonais e o comprimento de $\Delta \mathbf{b}$ é dado por:

$$\Delta b = R \text{sen} \theta \quad (\text{E.5})$$

Assim:

$$\Delta \mathbf{b} = \Delta b \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}\|} = R \text{sen} \theta \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}\|} \quad (\text{E.6})$$

Uma vez que \mathbf{e} é um vetor unitário, tem-se que:

$$\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\| = r_0 \text{sen} \alpha = R \quad (\text{E.7})$$

Dessa forma, tendo em conta que $\mathbf{e} = \boldsymbol{\theta}/\theta$, pode-se reescrever (E.6) como:

$$\Delta \mathbf{b} = \text{sen} \theta (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0) = \frac{\text{sen} \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0) \quad (\text{E.8})$$

Ainda de acordo com a Figura E.2, o vetor $\Delta \mathbf{a}$ é ortogonal a \mathbf{e} e $\Delta \mathbf{b}$. Assim:

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a \frac{\mathbf{e} \times \Delta \mathbf{b}}{\|\mathbf{e} \times \Delta \mathbf{b}\|} \quad (\text{E.9})$$

em que a norma de $\Delta \mathbf{a}$ é dada por:

$$\Delta a = R(1 - \cos \theta) \quad (\text{E.10})$$

Substituindo (E.8) e (E.10) em (E.9) produz-se:

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a \frac{(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0))}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\|} = \frac{\Delta a}{R} (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0)) = \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0)) \quad (\text{E.11})$$

Então de (E.11) e (E.8) em (E.4) tem-se que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\text{sen} \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0)) \quad (\text{E.12})$$

O produto vetorial entre dois vetores \mathbf{m} e \mathbf{n} pode ser escrito através da transformação linear definida em Argyris (1982):

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{S}_m \mathbf{n} \quad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

em que m_i são os componentes do vetor \mathbf{m} . Assim, a matriz antissimétrica $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$ está associada ao pseudo vetor $\boldsymbol{\theta}$ por:

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}_0 \quad (\text{E.14})$$

A expressão (E.14) substituída em (E.12) produz:

$$\mathbf{r}_n = \left[\mathbf{I} + \frac{\text{sen} \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \right] \mathbf{r}_0 = \mathbf{R} \mathbf{r}_0 \quad (\text{E.15})$$

Em que \mathbf{R} representa a chamada fórmula de Rodrigues (1840, apud CRISFIELD, 1991), define a matriz de rotação no espaço para grandes rotações e é dada por:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{I} + \frac{\text{sen} \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (\text{E.16})$$

E3. VARIAÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO

Para realizar a variação da fórmula de Rodrigues, recorre-se a expansões em série de potências. A expansão de $\text{sen} \theta$ e $\text{cos} \theta$ são definidas por:

$$\begin{aligned} \text{sen} \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ \text{cos} \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Se $\delta \mathbf{r}_0$ é a rotação infinitesimal de \mathbf{r}_0 para \mathbf{r}_n , tem-se que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}_0 = \left[\mathbf{I} + \frac{\text{sen}(\delta\theta)}{\delta\theta} \mathbf{S}(\delta\theta) + \frac{(1 - \cos(\delta\theta))}{\delta\theta^2} \mathbf{S}(\delta\theta) \mathbf{S}(\delta\theta) \right] \mathbf{r}_0 \quad (\text{E.18})$$

Logo,

$$\delta \mathbf{r}_0 = \left[\frac{\text{sen}(\delta\theta)}{\delta\theta} \mathbf{S}(\delta\theta) + \frac{(1 - \cos(\delta\theta))}{\delta\theta^2} \mathbf{S}(\delta\theta) \mathbf{S}(\delta\theta) \right] \mathbf{r}_0 \quad (\text{E.19})$$

Negligenciando os termos de alta ordem e considerando que para rotações pequenas $\text{sen}(\delta\theta)/\delta\theta \approx 1$, tem-se que:

$$\delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\delta\theta) \mathbf{r}_0 \quad (\text{E.20})$$

A variação em (E.20) pode ser usada para reescrever a matriz \mathbf{R} . Dessa forma, tem-se:

$$\delta \mathbf{R} = \mathbf{S}(\delta\theta) \mathbf{R} \quad (\text{E.21})$$