

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**CÁLCULO DA CARGA DE COLAPSO PLÁSTICO
DE VIGAS PAREDE VIA MODELAGEM NUMÉRICA**

Eng^o Civil JOÃO DA COSTA PANTOJA

ORIENTADOR: WILLIAN TAYLOR MATIAS SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS
PUBLICAÇÃO EDM-010A/03

BRASÍLIA - DF
SETEMBRO / 2003

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

“CÁLCULO DA CARGA DE COLAPSO PLÁSTICO DE VIGAS
PAREDE VIA MODELAGEM NUMÉRICA”

JOÃO DA COSTA PANTOJA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, D. Ing. (UnB)
(ORIENTADOR)



ELBON LONDE MELLO, PhD (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)



GUILHERMO JUAN CREUS, D.Sc (UFRGS)
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 12 de SETEMBRO DE 2003

FICHA CATALOGRÁFICA

PANTOJA, JOÃO DA COSTA

Cálculo da Carga de Colapso Plástico de Vigas Parede Via Modelagem Numérica [Distrito Federal] 2003.

xvii, 142 p., 297 mm (ENC/FT/UnB. Mestre. Estruturas. 2003)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília.
Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil.

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| 1. Estruturas | 2. Estruturas de Concreto |
| 3. Plasticidade | 4. Elementos Finitos |
| 5. Vigas parede | 6: Análise Estrutural |
| I. ENC/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PANTOJA, J. da C. (2003). Cálculo da Carga de Colapso Plástico de Vigas Parede Via Modelagem Numérica, Publicação nº E.DM-010A/03, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 142 p.


CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: João da Costa Pantoja

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Cálculo da Carga de Colapso Plástico de Vigas Parede Via Modelagem Numérica

GRAU/ANO: Mestre / 2003

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



João da Costa Pantoja
SQS 308 Bloco I Apto 108 – Asa Sul
C.E.P. 70.355-090
Brasília - DF - Brasil
email: joao63331@uniceub.br

Incertezas

Ao longo da vida são construídas certezas absolutas,
Nesta mesma tratamos de desmoroná-las.
Limitar todas as verdades é um desafio intransponível
Nem mesmo os homens da ciência são capazes.
A cada novo entendimento
Milhares de novos rumos e caminhos se abrem
Como flores ao sol da manhã.
Com estudo e amadurecimento se aprende a intuir
Como numa ponte
O real desafio está na construção do caminho
O mais fácil é atravessá-la depois de pronta.

João da Costa Pantoja
Brasília, 20 de julho de 2001.

DEDICATÓRIA

*Dedico aos meus pais João e Eva Pantoja,
Que em todos os momentos da minha vida souberam me amar.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof^o Willian Taylor Matias da Silva, pela amizade, compreensão e apoio a mim demonstrado durante toda a elaboração dessa dissertação. Sua orientação sempre segura e precisa foi essencial para o término desse trabalho.

Ao Prof^o Eldon Londe Mello, pela idéia inicial da tese e pelo apoio e incentivo durante meus estudos na graduação e pós-graduação na área de plasticidade estrutural.

Ao Prof^o Marcello da Cunha Moraes, pelo exemplo de professor e engenheiro calculista passada a mim durante as disciplinas do curso de graduação e posterior experiência profissional compartilhada nos projetos estruturais do Metrô de Brasília - DF .

Ao doutor em geotécnia engenheiro Lenildo da Silva pelas interessantes discussões e orientações sobre plasticidade e elementos finitos e pelo total apoio fornecido a essa dissertação na adaptação do seu gerador de malhas para discretização dos exemplos numéricos.

Aos professores do Mestrado em Estruturas da Universidade de Brasília, na pessoa do seu coordenador Prof^o Paul Willian Partridge, pelo interessante desafio de implantar um programa de pós-graduação atuante.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos meus irmãos Julia e Alexandre pela amizade e incentivo de uma vida inteira.

Aos amigos que de alguma forma me auxiliaram tanto na busca de referências bibliográficas em outros estados, revisão e tradução de textos, montagem das figuras, quanto pela paciência de me ouvirem nos arroubos sobre assuntos relacionados a esta dissertação: Paulinho, Luciana, Péricles, Renato, Varejão, Érika, Mario Vinícius, Jocinez, Marcio Buzar, Marcelo, Marco Bessa, Anaxímenes e etc.

Aos meus sogros Hércules e Inêz Capibaribe por cederem gentilmente sua residência para implantação do meu escritório provisório onde uma grande parte desta dissertação foi escrita.

À minha mãe Eva Maria e irmã Maria Tereza pelo apoio financeiro e confiança a mim depositado durante toda fase desta dissertação.

À minha esposa Adriana e aos meus filhos Raissa, Camille e João Pedro pela compreensão e amor incondicional a mim fornecido.

RESUMO

Este trabalho visa oferecer uma estimativa da carga de colapso plástico para vigas parede, executadas em concreto armado com resistência convencional e alta resistência. Esta análise está baseada num modelo incremental iterativo elastoplástico simplificado que utiliza os conceitos da matriz de rigidez modular tangente consistente conjuntamente com o critério de escoamento de Drucker-Prager e Von Mises, na integração numérica da relação constitutiva dos elementos de concreto e de armadura, respectivamente, representantes da estrutura. A formulação isoparamétrica é adotada tanto para os elementos em estados planos de tensão representantes do concreto como para os elementos de barra representantes da armadura. A acoplagem entre os dois elementos é descrita de forma detalhada.

São apresentados alguns resultados obtidos através da modelagem numérica de exemplos que tiveram sua performance testada anteriormente em laboratório. Desta forma serão comparadas as cargas de colapso plástico obtidas através dos dois modos, via modelagem numérica e experimentalmente de forma a balizar alguns parâmetros existentes no modelo computacional proposto.

Uma comparação da performance dos resultados da carga de colapso plástico para diversos tipos de elementos lineares e quadráticos tanto para concreto quanto para o aço é feita. Também um refinamento nas malhas dos exemplos é mostrado e sua influência na melhora dos resultados.

Palavras-Chave:

Plasticidade – Carga de Colapso – Vigas Parede – Modelagem Numérica

ABSTRACT

The present work intends to offer an appraisal of the plastic collapse load for deep beams, built in high and conventional reinforced concrete. The analysis is based on a simplified elastoplastic iterative incremental model that utilizes the concepts of tangent consistent modular matrix together with the Ducker-Prager and Von Mises fluency criteria for numerical integration of the constitutive relations of reinforcement and concrete elements constituting the structure. The isoparametrical formulation is adopted both for plane stress elements representing concrete as well as for bar elements representing reinforcement. The linkage between the two elements is described in details.

Some results obtained by numerical modeling are compared with previous laboratory tested models presents in others works. Therefore, the plastic collapse loads obtained by both metods are compared in a way to delimit some parameters of the proposed computacional model.

A performance comparison of the results of the plastic collapse loads for different kinds of linear and quadratic elements representing concrete and reinforcement is given. Also, a refinement on the mesh of the examples is shown as well as its influence on the improvement of the results.

Key-words:

Plasticity – Collapse load – Deep beams – Numerical modeling – Reinforced concrete

ÍNDICE

Capítulo		Página
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO		
1.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVO DA PESQUISA	2
1.3	METODOLOGIA E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	3
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTOS BÁSICOS DA ELASTOPLASTICIDADE		
2.1	INTRODUÇÃO	6
2.2	FORMULAÇÃO GERAL	7
CAPÍTULO 3 – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA		
3.1	INTRODUÇÃO	15
3.2	HIPÓTESES BÁSICAS	16
3.3	FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	17
3.4	INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA	19
3.4.1	Considerações iniciais	19
3.4.2	Preditor elástico inicial	20
3.4.3	Algoritmo return mapping unidimensional	25
3.4.4	Quadro resumo do modelo constitutivo da armadura	28
3.4.4	Formulação da matriz modular tangente consistente	29
3.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	31
CAPÍTULO 4 – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO		
4.1	INTRODUÇÃO	33
4.2	HIPÓTESES BÁSICAS	34
4.3	SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO PARA CONCRETOS	35
4.4	SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE DUCKER-PRAGER	38
4.4.1	Introdução	38
4.4.2	Representação no Espaço das Tensões Principais	39

4.4.3	Definição do Vetor de Fluxo Plástico	42
4.4.4	Definição da Matriz Gradiente do Vetor de Fluxo Plástico	43
4.5	FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	43
4.6	INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL	44
4.6.1	Considerações Iniciais	44
4.6.2	Fase Preditora	45
4.6.3	Fase Corretora	47
4.7	FORMULAÇÃO DA MATRIZ MODULAR TANGENTE CONSISTENTE	49
4.8	DEFINIÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO	50
4.9	ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO	52
4.10	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	55

CAPÍTULO 5 – ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

5.1	INTRODUÇÃO	58
5.2	EXPRESSÕES GERAIS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	60
5.2.1	Esquema de Solução de Newton-Raphson	60
5.2.2	Procedimentos de Continuação na Trajetória Não Linear	63
5.2.3	Métodos de Continuação da Resposta	66
5.2.3.1	Representações Paramétricas	67
5.2.3.2	Parâmetro de Controle Simplificado	68
5.2.3.3	Trajetória de Controle Não Linear	69
5.2.3.4	Solução via Esquema Predição-Correção	72
5.2.3.5	Avanço na Trajetória de Equilíbrio	76
5.2.4	Fase Preditora	77
5.2.5	Fase Corretora	81
5.2.6	Caracterização de Pontos Críticos	83
5.2.7	Detecção de Pontos Críticos	85
5.2.8	Parâmetro de Rigidez Corrente ou de Bergan	86

5.3	ALGORITMO NUMÉRICO	87
5.4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	88
CAPÍTULO 6 – APLICAÇÕES NUMÉRICAS		
6.1	INTRODUÇÃO	92
6.2	EXEMPLOS	93
6.2.1	INTRODUÇÃO	93
6.2.2	VIGA PAREDE VP1	94
6.2.3	VIGA PAREDE VPA1	105
6.2.4	VIGA PAREDE VP2	110
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS		
7.1	CONCLUSÕES	115
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		118
ANEXO A – PLASTICIDADE CLÁSSICA		
A.1	POSTULADOS DE ESTABILIDADE DE DUCKER	123
A.2	CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER	127
ANEXO B – ACOPLAGEM ENTRE CONCRETO E ARMADURA		
B.1	INTRODUÇÃO	129
B.2	IMPLEMENTAÇÃO DA ACOPLAGEM	131
ANEXO C – GERADOR DE MALHA UTILIZADO		
C.1	INTRODUÇÃO	134
C.2	- UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE	135
ANEXO D – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA		
D.1	QUADRO RESUMO	136

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
2.1	Representação genérica da consistência de Prager	9
2.2	Endurecimentos pela teoria da plasticidade	10
3.1	Preditor elástico de um estado plástico	22
3.2	Processo incremental plástico violado $\tau \leq 0$	24
3.3	Fluxograma do algoritmo numérico para plasticidade 1D	32
4.1	Representação no espaço das tensões principais	35
4.2	Simetria no plano desviator da superfície de escoamento de concreto	36
4.3	Características gerais dos meridianos	38
4.4	Critério de fluência de Ducker-Prager no espaço de Westergard	40
4.5	Esquema preditor proposto por CRISFIELD[1992]	45
4.6	Relação entre tensão-deformação unidimensional com endurecimento	51
4.7	Fluxograma da rotina de retorno a superfície de escoamento – Parte A	56
4.8	Fluxograma da rotina de retorno a superfície de escoamento - Parte B	57
5.1	Método de Newton-Raphson para um grau de liberdade	62
5.2	Resposta de um modelo estrutural no colapso	63
5.3	Vetor da trajetória fundamental de equilíbrio	71
5.4	Solução obtida por um método preditor-corretor	73
5.5	Caracterização de pontos críticos na trajetória de equilíbrio	84
5.6	Fluxograma de resolução das equações não lineares	91
6.1	Viga parede VP1	94
6.2	Refinamento nas malhas da viga VP1	97
6.3	Influência da discretização na carga de colapso plástico VP1	100
6.4	Influência da discretização para carga de início de fissuração VP1	101
6.5	Diagrama carga versus deslocamento da malha 5 para viga VP1	102
6.6	Definição do intervalo de perda de rigidez da viga VP1	103
6.7	Viga parede VPA1	105
6.8	Malha discretizada para VPA1	107

6.9	Diagrama carga versus deslocamento da VPA1	108
6.10	Definição do intervalo de perda de rigidez da VPA1	109
6.11	Viga parede VP2	110
6.12	Discretização da malha da VP2	111
6.13	Diagrama carga versus deslocamento da VP2	113
6.14	Definição do intervalo de perda de rigidez da VP2	114
A.1	Estabilidade e instabilidade de um material plástico(processo uniaxial)	124
B.1	Exemplo da técnica de acoplagem utilizada	130
B.2	Exemplo simplificado da acoplagem concreto-armadura	131
C.1	Características do talude analisado	135
C.2	Tela inicial da aplicação desenvolvida	136
C.3	Tela de definição das propriedades	137
C.4	Blocos desenhados no AutoCAD para a geração da malha	138
C.5	Tipos de elementos finitos disponíveis no programa	139
C.6	Malha gerada com as condições de contorno	140
C.7	Tela de configurações de parâmetros de análise	141
C.8	Mecanismo gerado plotando-se o campo de velocidades na ruptura	141

LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
6.1	Propriedades dos materiais – VP1	95
6.2	Número de elementos das discretizações – VP1	98
6.3	Performance das diversas discretizações – VP1	99
6.4	Propriedades dos materiais – VPA1	106
6.5	Número de elementos das discretizações – VPA1	106
6.6	Comparação entre resultados – VPA1	107
6.7	Propriedades dos materiais – VP2	111
6.8	Número de elementos das discretizações – VP2	112
6.9	Performance das diversas discretizações – VP2	113

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

Salvo indicação contrária, a notação seguinte é utilizada em todo este trabalho.

1. Tensores, Matrizes e Vetores.

σ	Tensor das tensões ou de Cauchy
E	Tensor Constitutivo Elástico
ε^p	Tensor das Deformações Plásticas
ε^e	Tensor das Deformações Elásticas
g	Tensor de Fluxo Plástico
E_T^m	Tensor de Constitutivo Elasto-plástico Tangente do Material
$\frac{\partial m_i}{\partial \sigma_n}$	Matriz Gradiente da superfície de escoamento
P	Matriz Auxiliar
K_T	Matriz de Rigidez Tangente Atualizada
Q	Matriz de Controle
m_j	Vetor gradiente da superfície de escoamento
ω	Vetor das Variáveis Internas Atualizadas
ε_{ps}	Vetor das Deformações Plásticas Equivalentes
R	Vetor das Cargas Externas Aplicadas
F	Vetor das Forças Internas Resistentes
u	Vetor dos deslocamentos nodais
$\varphi = r_i$	Vetor Residual ou Resíduo

2. Escalares e Símbolos.

$\sigma_c = f_c$	Tensão de compressão no concreto obtida em ensaio uniaxial
$\sigma_t = f_t$	Tensão de tração no concreto obtida em ensaio uniaxial
τ	Critério de Descontinuidade ou Superfície de Escoamento
G	Superfície de Potencial Plástico
K	Variável de Endurecimento Isotrópico
Q	Variável de Endurecimento Cinemático
γ	Fator de Majoração de Cargas
$\Delta\lambda = \lambda$	Multiplicador Plástico
A	Parâmetro de Endurecimento Plástico
$\bar{\sigma}$	Tensão Uniaxial Efetiva
α	Variável de Endurecimento Plástico Isotrópico
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões Principais
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	Tensões Nominiais
I_1	Primeiro Invariante do Tensor de Tensões
J_2	Segundo Invariante do Tensor Desviator de Tensões
C	Coesão entre Partículas

φ	Atrito entre Partículas
ξ	Eixo Hidrostático ou Espaço Diagonal
ρ	Raio Octaédrico
σ_e	Tensão Efetiva
σ_0	Tensão de Escoamento
a_d	Contribuição da Parte Desviadora
a_v	Contribuição da Parte Hidrostática ou Volumétrica
γ_{PN}	Distorção Plástica

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E MOTIVAÇÃO

O material concreto armado é um dos mais utilizados pela engenharia estrutural na confecção de estruturas. O projeto e execução de novas estruturas de concreto, bem como algumas de suas estruturas especiais como as vigas paredes utilizadas usualmente em fachadas de edifícios altos, vigas de transição, paredes de reservatórios e cortinas, requerem um avanço contínuo na análise e investigação do seu comportamento. Sendo assim, considerando-se que a teoria clássica de flexão proposta, por Bernoulli, não pode ser aplicada para esse tipo de estrutura e que seu dimensionamento e detalhamento são feitos com base em regras práticas, se faz necessário um estudo mais pormenorizado do seu comportamento, tanto experimental quanto através da modelagem numérica.

As principais dificuldades na modelagem do material concreto armado devem-se aos seguintes aspectos:

- . Sua resistência à tração e compressão são bastante diferentes, sendo seu módulo de resistência à compressão aproximadamente dez vezes maior do que o de tração.
- . A relação entre tensão e deformação é não-linear para níveis baixos de tensão e, além disso, sua deformação a partir de um certo limite depende não unicamente do estado de tensões atualizado e sim do histórico das mesmas a que a estrutura foi submetida.
- . A aderência entre o aço da armadura e o concreto não é perfeita.
- . Os fenômenos de fluência e retração, apresentados pelo concreto, dependem da umidade ambiente e das dimensões da estrutura considerada.

- . Durante o fenômeno da fissuração, o estado tensional é bastante complexo, podendo haver transmissão de esforços através da fissura, dependendo da abertura da mesma.

Na década de 80, a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC), manteve uma linha de pesquisa analítica e experimental, que se propunha a resolver alguns destes tipos de problemas relacionados às estruturas de concreto armado. Várias dissertações foram produzidas a partir desse modelo com uma série de contribuições nos mais diversos ramos da análise estrutural (Anexo 4). Esta dissertação deve como base os trabalhos e pesquisas desenvolvidas durante os últimos vinte anos naquela instituição, acoplando algumas modificações propostas recentemente na integração das relações constitutivas dos materiais envolvidos, propostas por ORTIZ and SIMO [1986] e CRISFIELD [1991].

Algumas técnicas de programação, via elementos finitos para resolução das equações não-lineares do tipo Newton-Raphson acoplados aos métodos incrementais iterativos com controle de resposta foram utilizadas. O acoplamento entre os elementos considerados representantes do concreto e aço foi adotado de modo que fosse possível a geração automática das malhas por meio de uma entrada gráfica correspondente.

1.2– OBJETIVO DA PESQUISA

Como o objetivo primário do cálculo e detalhamento de um projeto de estrutura é garantir sua segurança ao colapso, esta dissertação tem como objetivo principal estimar, através de um modelo numérico simplificado, aplicado ao caso de tensão plana, a carga de colapso plástico de vigas paredes de concreto armado. Isto se dá através da aplicação do método dos elementos finitos à análise de estruturas de concreto armado com a consideração do fenômeno da plasticidade.

Uma vez que as relações envolvidas num fenômeno desta natureza são não lineares, a aplicação de um esquema numérico incremental iterativo com controle da resposta é utilizado na análise de estruturas submetidas a cargas quase-estáticas. Tendo como base nos trabalhos de MATIAS [1996] e CARVALHO [2001], esquemas preditor-corretores foram acoplados ao algoritmo para o avanço da resposta na trajetória de equilíbrio e também na integração dos modelos constitutivos utilizados na estrutura analisada.

Finalmente, uma análise dos tipos de elementos isoparamétricos, utilizados para representar o concreto e a armadura e suas respectivas performances comparadas com exemplos experimentais rompidos em laboratório, é também apresentada. Um refinamento nas malhas de exemplos é discutido e seus efeitos na melhora dos resultados encontrados.

1.3– METODOLOGIA E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido em sete capítulos e três anexos, descrevendo-se, a seguir, o conteúdo contido em cada um deles.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos aplicados na teoria clássica da elastoplasticidade. É enfocada a relação incremental entre tensão e deformação, a decomposição aditiva da deformação em sua parte elástica e plástica, o conceito de superfície de escoamento ou descontinuidade, o conceito de superfície de potencial plástico, a definição de plasticidade associada e a utilização dos critérios de consistência de Prager, estabilidade de Drucker e as relações de Kuhn-Tucker. A obtenção de uma matriz de rigidez modular tangente padrão para o esquema numérico adotado é discutida.

No Capítulo 3 são desenvolvidas as equações governantes do problema constitutivo do elemento de armadura baseada no modelo de atrito de Coulomb e suas hipóteses básicas. O algoritmo de integração implícita de Backward Euler para modelos unidimensionais é demonstrado conjuntamente com a utilização do preditor elástico durante o processo iterativo de retorno à superfície de escoamento para plasticidade associada. A montagem da matriz modular tangente consistente é formulada de forma detalhada e sua implementação computacional descrita, apresentando-se o fluxograma do programa desenvolvido e especificando-se a função de cada subrotina.

No Capítulo 4 as equações governantes para um problema constitutivo bidimensional referente ao concreto são apresentadas. O algoritmo de integração implícita de Backward Euler para modelos bidimensionais é desenvolvido com base no conceito do preditor elástico. O caminho de retorno para superfície de escoamento é feito através da conceituação de um resíduo que é expandido em série de Taylor e posteriormente anulado. Uma expansão em série de Taylor também é aplicada a superfície de escoamento, de modo a garantir a

consistência do algoritmo numérico utilizado, assegurando assim a convergência quadrática própria do algoritmo de Newton-Raphson. O algoritmo de Return Mapping alternativo conforme sugerido por CRISFIELD [1980], é mostrado para caso de tensão plana com plasticidade associada. Formula-se então, a matriz modular tangente consistente para o caso bidimensional. As características do critério de Ducker-Prager como superfície de escoamento são descritas e as equações representantes deste critério no espaço de High-Westergard são mostradas. Posteriormente são descritas as equações referentes a esse critério para o caso de tensão plana. Assim, implementação computacional é demonstrada através de fluxogramas e feita a descrição das principais subrotinas.

No Capítulo 5 é descrita uma estratégia de solução para as equações não lineares envolvidas na obtenção da relação carga-deslocamento das estruturas em análise. Procedimentos do tipo Newton-Raphson puro via métodos incrementais iterativos acoplados a métodos de controle da resposta são descritos. Os pontos críticos são caracterizados e um parâmetro para controle numérico das variações ocorridas na matriz de rigidez da estrutura analisada é mostrado.

No Capítulo 6 são feitas as aplicações numéricas referentes aos exemplos ensaiados nos laboratórios da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC) e da Universidade de Brasília (UNB). Os resultados para as cargas de início de fissuração e colapso das estruturas de vigas paredes, obtidas nos ensaios, são comparadas com as obtidas numericamente com o modelo computacional proposto e as diferenças são analisadas. A influência dos tipos de elementos utilizados nos exemplos e o refinamento das malhas também são discutidos. Uma série de gráficos e tabelas com os dados referentes a cada viga parede analisada são mostrados.

No Capítulo 7 apresenta-se a conclusão dos trabalhos executados nesta dissertação e as possíveis sugestões para trabalhos futuros.

No Anexo A se detalha os conceitos referentes aos postulados de estabilidade de Ducker, as condições de consistência de Prager e as condições de Kuhn-Tucker.

No Anexo B são descritos a formulação básica utilizada pelo método dos elementos finitos e o acoplamento feito entre os elementos de concreto e aço utilizados no computacional proposto.

No Anexo C o gerador de malha utilizado para análise dos exemplos mostrados é descrito em detalhes.

No Anexo D um resumo com as principais características e resultados obtidos nas dissertações feitas na PUC-RJ é mostrado.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS BÁSICOS DA ELASTOPLASTICIDADE

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos básicos necessários ao desenvolvimento da formulação matemático-numérica do modelo constitutivo elastoplástico adotado. Maiores detalhes sobre a abordagem da teoria clássica da plasticidade e elastoplasticidade estrutural apresentada a seguir podem ser encontrados em MENDELSON [1968], KACHANOV [1974], KALISZKY [1989], PIMENTA [1987] e EBOLI [1994]. Para implementações computacionais ver OWEN and HINTON [1980], CHEN [1982], SIMO and HUGHES [1997] e CRISFIELD [1991].

A formulação necessária à descrição do fenômeno da plasticidade em mecânica dos sólidos tem como característica básica a presença de deformações irreversíveis, as quais independem do tempo, porém dependem do histórico do carregamento aplicado. Nestes casos, as variáveis representadas pelas deformações não são univocamente determinadas pelas variáveis das tensões existentes, mas dependem do caminho pelo qual o nível atual das variáveis das tensões foi atingido. Deste modo, as equações que envolvem o comportamento plástico não podem ser estabelecidas através de relações finitas entre as variáveis de tensão e deformação, e sim através de relações incrementais entre as mesmas.

2.2 – FORMULAÇÃO GERAL

Para formulação do comportamento elastoplástico de um sólido, devemos considerar as seguintes relações características que são observadas experimentalmente de modo a definir seu estado mecânico:

. Um período inicial elástico linear ou não-linear;

Um comportamento denominado elasto-plástico, que segue o período inicial onde o campo das tensões cresce de forma não proporcional ao campo das deformações. Observa-se, ainda, que as deformações resultantes totais podem ser decompostas em uma parte recuperável, representada pelo período elástico, e outra irrecuperável, representada pelo período plástico.

O limite que marca esta separação entre estes períodos é conhecido como limite de fluência ou escoamento, para os materiais metálicos, e limite de descontinuidade para os materiais não-homogêneos, sendo definido em qualquer um dos casos, através de uma função no espaço das tensões que recebe o nome de função de escoamento.

Para descrição do comportamento do sólido no período elástico-linear podemos recorrer a uma relação constitutiva elástica explícita que é caracterizada pelo conhecido tensor constitutivo elástico E , dado pela relação:

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (2.1)$$

Posteriormente a esse período, teremos, então, o ingresso do comportamento do material na região elastoplástica, onde o campo das deformações totais pode ser obtido pela soma de uma parcela elástica e outra plástica, logo:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.2)$$

Estabelece-se, então, um critério de descontinuidade inicial que indicará um limite tensional para um ponto do sólido, a partir do qual se iniciará um processo inelástico de tensão-deformação caracterizado pelo aparecimento de deformações irrecuperáveis. Em um processo tensional uniaxial, este limite é reconhecido facilmente por se tratar de um escalar que adota um valor equivalente à tensão limite do período elástico. No entanto, para pontos do sólido

submetido a estados multiaxiais de tensão este limite não é tão facilmente definido. De modo a solucionar esta indefinição existente, formula-se, a partir de dados experimentais, uma expressão matemática chamada critério limite de descontinuidade ou de escoamento, que, dentre outras variáveis, depende do estado tensional do ponto no sólido. A missão desta função é representar o estado multiaxial do ponto através de uma característica uniaxial equivalente, comparável com os resultantes dos estudos uniaxiais simples. Sendo assim, pode-se definir o critério de descontinuidade ou escoamento como uma função escalar que depende do estado tensional atual do ponto do sólido definido por σ e de um grupo de variáveis internas w . Sendo assim podemos definir:

$$\tau = \tau[\sigma(t), w(t)] = 0 \quad (2.3)$$

$$w(t) = \{k(t), \varepsilon^p(t), q(t)\}^T \quad (2.4)$$

Onde:

$\sigma(t)$: Tensor das tensões atualizado;

$w(t)$: Vetor das variáveis internas atualizado;

$k(t)$: Variável de endurecimento plástico isotrópico;

$q(t)$: Variável de endurecimento plástico cinemático;

$\varepsilon^p(t)$: Tensor das deformações plásticas.

Utilizaremos, então, uma definição conhecida na teoria incremental da plasticidade como a condição de consistência de Prager que admite apenas dois estados tensionais para o ponto do sólido num determinado instante t de um processo de carga quasi-estático. Podemos definir então:

-Para o caso do processo de deformação ser elástico:

$$\tau(\sigma(t), w(t)) < 0 \quad (2.5a)$$

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \tau}{\partial w} dw < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (2.5b)$$

- Para o caso do processo de deformação ser elastoplástico:

$$\tau(\sigma(t), w(t)) = 0 \quad (2.6a)$$

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \tau}{\partial w} dw = 0 \quad (\text{carga}) \quad (2.6b)$$

Observa-se que a condição de Prager impõe que o estado tensional do ponto esteja sempre dentro ou sobre a superfície de escoamento, onde os estados elásticos são representados por pontos no interior da superfície ($\tau < 0$); e os plásticos por pontos sobre a superfície ($\tau = 0$) enquanto pontos exteriores a superfície ($\tau > 0$) correspondem a estados inadmissíveis, conforme pode ser observado na figura 2.1.

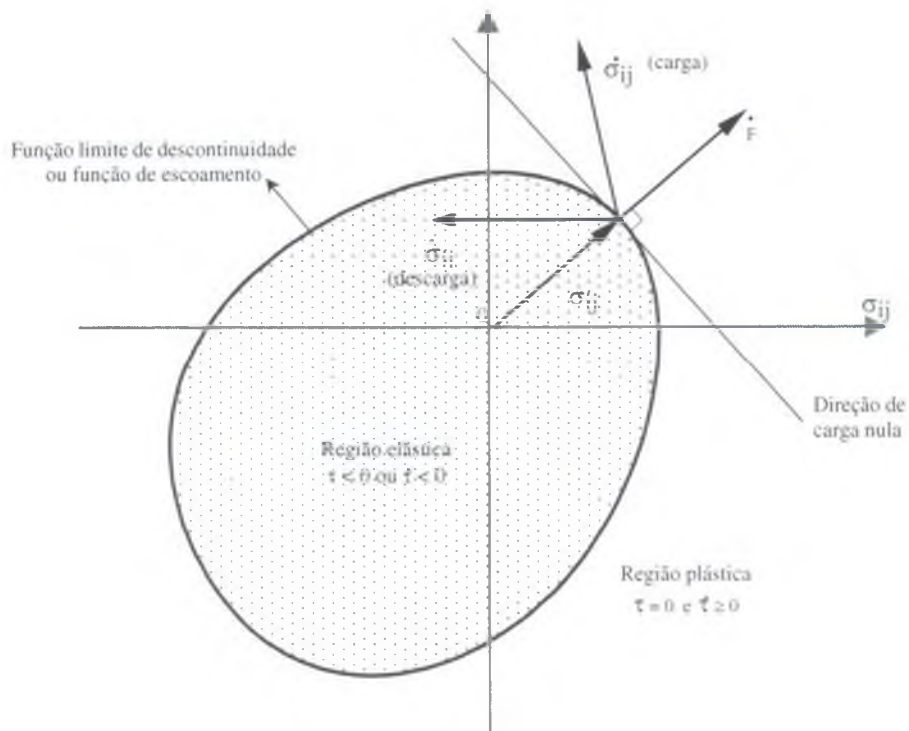


Figura 2.1: Representação genérica da condição geral de consistência plástica de Prager.

Desta maneira, as tensões admissíveis são restritas a uma região de intervalo fechado no espaço das tensões. A superfície descrita no espaço das tensões considerado corresponde ao

lugar geométrico dos estados de tensões que provocam a plastificação. Uma vez iniciado o processo de plastificação, a definição da superfície de escoamento ou descontinuidade vai depender de alguns outros fenômenos físicos envolvidos na modelagem do material. Verifica-se que para alguns materiais há uma variação nesta superfície admitida, dependendo do grau de deformação plástica existente. A este fenômeno denomina-se endurecimento. As pesquisas mostram dois modelos para modelagem de materiais com endurecimento, conforme mostrado na figura 2.2: isotrópico, representado por uma expansão uniforme na superfície inicial e denominado, no vetor das variáveis internas como k , e o cinemático no qual a superfície inicial preserva sua forma primitiva, mas sofre uma translação. Este último é representado por q e têm como objetivo simular o fenômeno físico conhecido como efeito Baushinger, conforme exposto por OLLEN [1991]. Um material dito plástico ideal não sofre este fenômeno e sua superfície têm representação constante. Podemos entender, então, que o limite entre as regiões elástica e plástica se estabelece mediante a definição da superfície de escoamento ou de descontinuidade, sendo que a partir dali a superfície adquire mobilidade no espaço das tensões à medida que o processo plástico evolui, transformando-se na denominada superfície de carga plástica. Esta função de carga significa não mais do que a atualização da função de escoamento ou descontinuidade para cada valor das variáveis internas $w(t)$ correspondentes a cada instante de pseudotempo t do processo elastoplástico.

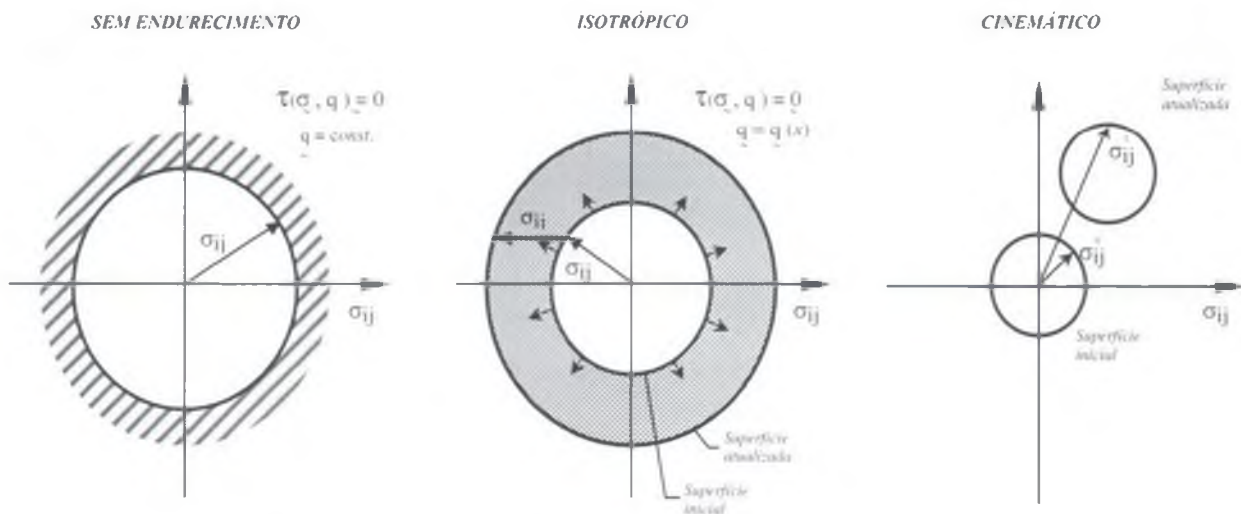


Figura 2.2: Distintos tipos de endurecimento considerados pela teoria da plasticidade.

Assim, quando o ponto se encontra no estado tensional elastoplástico, se faz necessário à definição de uma regra de fluxo generalizada que considere variação na taxa de deformação plástica ε^P como uma variável interna tensorial. Esta regra de evolução estabelece a proporcionalidade entre os componentes de $\partial\varepsilon^P$ e as componentes do tensor de fluxo plástico g definido pelas derivadas da superfície de potencial plástico no espaço das tensões. Assim:

$$d\varepsilon^P = \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \Delta\lambda g \quad (2.7)$$

Na equação acima $\Delta\lambda$ é um escalar não-negativo chamado multiplicador plástico, escalar e positivo, que representa a magnitude do incremento temporal das deformações plásticas $\partial\varepsilon^P$. A função ou superfície de potencial plástico G é formulada a partir de estudos experimentais e é ela que define a direção do incremento temporal da deformação plástica $\partial\varepsilon^P$.

Podemos, então, considerar um caso particular de fluxo plástico denominado regra de fluxo associada, em que por hipótese se considera a superfície de escoamento ou de descontinuidade coincidente com a superfície de potencial plástico, ou seja, $G \equiv \tau$. Sendo assim, podemos redefinir a equação como:

$$d\varepsilon^P = \Delta\lambda \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \quad (2.8)$$

Podemos entender a regra de fluxo plástica como uma admissão do postulado cinemático para as deformações plásticas. Uma vez atingido pelo ponto do sólido o estado tensional elastoplástico, teremos para um incremento de tensão o seguinte incremento de deformação:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^P \quad (2.9)$$

Estando o incremento da deformação elástica relacionado com incremento de tensão, no seu período elástico-linear pelo tensor constitutivo elástico C_S conforme abordado anteriormente. EBOLI [1994] cita que resultados experimentais comprovam que as superfícies de escoamento da maior parte dos materiais é contínua e convexa. Desta forma, o requisito de convexidade da superfície de escoamento pode ser imposto através do segundo postulado de Drucker, conforme apresentado no Anexo A. Desta maneira:

$$(d\varepsilon^p)^T d\sigma = 0 \quad (2.10)$$

Tendo a equação a conduzir a um produto escalar não negativo, (ver Anexo A) que o tensor $\hat{\sigma}$ forma um ângulo agudo com $\hat{\varepsilon}^p$ impondo, assim, uma condição de convexidade com a superfície de escoamento ou de descontinuidade τ e de normalidade com $\hat{\varepsilon}^p$. Uma vez atendida a convexidade da superfície de escoamento, a equação impõe que $\hat{\varepsilon}^p$ seja normal à mesma. De forma inversa, caso não aconteça a convexidade da superfície de escoamento, haverá sempre um $\hat{\sigma}$ capaz de invalidar a equação qualquer que seja a direção de $\hat{\varepsilon}^p$.

Uma lei constitutiva elastoplástica tangente pode ser formulada a partir das equações representantes das condições de consistência de Prager (Anexo A). Logo:

$$\tau(\sigma, \kappa) = \tau(\sigma) - K(\kappa) = 0 \quad (2.11)$$

$$d\tau(\sigma, d\sigma, d\kappa) = \left\{ \frac{\partial \tau(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \left\{ \frac{\partial \tau(\sigma, \kappa)}{\partial \kappa} \right\} d\kappa = 0 \quad (2.12)$$

Substituindo uma na outra, teremos:

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma = -\frac{\partial \tau}{\partial \kappa} d\kappa = \frac{\partial K(\kappa)}{\partial \kappa} d\kappa \quad (2.13)$$

Considerando que uma função de endurecimento pode ser expressa em função da variável interna de endurecimento plástico k durante o processo de carga, matematicamente podemos dizer:

$$dk = h_k^T(\sigma, k) d\varepsilon^p \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.12) em (2.11):

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma = -\frac{\partial \tau}{\partial \kappa} (h_k^T d\varepsilon^p) \quad (2.15)$$

Considerando a regra de fluxo generalizada da equação (2.7), ficamos com:

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma = -\Delta\lambda \frac{\partial \tau}{\partial \kappa} \left(h_k^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \quad (2.17)$$

Podemos escrever o incremento temporal de tensão, durante o carregamento plástico, na forma:

$$d\sigma = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = E \left(d\varepsilon - \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \quad (2.16)$$

Voltando em (2.14) e agrupando os termos obteremos o multiplicador plástico na forma:

$$\Delta\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T E d\varepsilon}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T E \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right]} \quad (2.18)$$

Onde:

A é um parâmetro de endurecimento plástico definido para cada tipo de material e definido na forma:

$$A = \left[-\frac{\partial \tau}{\partial \kappa} \left(h_k^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \right] \text{ sen do } \bar{\sigma} = \left(h_k^T \frac{\partial G}{\partial g} \right) \quad (2.19)$$

$\bar{\sigma}$ - Tensão uniaxial efetiva definida para um material genérico.

Combinando (2.16) e (2.15) teremos finalmente:

$$d\sigma = E_e^p d\varepsilon \quad (2.20)$$

$$E_e^p = E - \frac{\left[E \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T E \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right\}^T E \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right]}$$

Este tensor de quarta ordem tem validade em todo processo elasto-plástico. Assim, para o caso particular de um processo puramente elástico, se têm que:

$$(2.21)$$

$$-\frac{\partial \tau}{\partial k} = \frac{\partial K(k)}{\partial k} \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

Logo:

$$A \rightarrow \infty \quad e \quad E_T^{ep} = E \quad (2.23)$$

Denominamos essa grandeza de tensor de rigidez tangente algorítmico. Para um caso mais geral onde exista plasticidade não-associada é um tensor não simétrico. O ambiente conveniente para obtenção numérica deste tensor em estruturas de concreto em estado plano de tensões e armaduras unidimensionais acopladas, via método dos elementos finitos sob integração implícita para o caso simplificado de plasticidade associada, é apresentado esta dissertação.

CAPÍTULO 3

INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA

3.1 - INTRODUÇÃO

Para implementação de qualquer esquema numérico aplicado na análise de problemas elastoplásticos, é eventualmente necessário a integração das equações governantes do comportamento do material em questão. Analisando uma classe de algoritmos de integração aplicada a essas relações constitutivas elastoplásticas, ORTIZ and SIMO [1986] observaram que se a meticulosidade na formação da matriz de rigidez tangente necessária a análise pode ser substancialmente relaxada apenas com o custo da rapidez na convergência da resposta do problema apresentado; a precisão na qual as relações constitutivas são integradas têm um impacto direto em toda precisão da análise. Assim, a importância do entendimento e controle deste tipo de erro numérico tem motivado um grande número de estudos, conforme mostrado em ORTIZ and POPOV [1985]. A formulação a ser apresentada a seguir tem como base os trabalhos apresentados por ORTIZ and POPOV [1985] e desenvolvido por SIMO and HUGHES [1997] sobre algoritmos de integração para relações constitutivas elastoplásticas.

Descreve-se a seguir um roteiro específico para implementação numérica em modelos de plasticidade unidimensional, que é o caso do elemento de armadura em estudo, via método dos elementos finitos, levando-se em consideração os fenômenos de endurecimento isotrópico e cinemático. Desta maneira, apresenta-se de forma detalhada a formulação matemática das equações governantes básicas relacionadas a um problema de valores de contorno na forma elastoplástica unidimensional, de maneira consistente, adequando-as a subsequente análise numérica necessária a descrição da ocorrência do fenômeno da plasticidade nos elementos de armadura. Noções de resposta irreversível, conceituadas na plasticidade, são utilizadas e desenvolvidas através das condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*. A integração

numérica do modelo constitutivo adotado é apresentada e os conceitos fundamentais do algoritmo de *return mapping* são desenvolvidos de forma a explicitar a solução adotada. O esquema de integração utilizado é o da regra do ponto médio generalizada com o coeficiente $\beta=1$, conforme sugerido por SIMO and HUGHES [1997], que conduz ao conhecido esquema de integração implícita denominado *Backward Euler*. Esta metodologia adotada conduz a uma sistemática precisa de avaliação para as propriedades de estabilidade numérica nas regras de integração de relações constitutivas elastoplásticas.

A formulação algorítmica da matriz da rigidez modular tangente consistente é desenvolvida em termos da superfície de escoamento, da normal a superfície de escoamento, da direção do fluxo plástico e do módulo tangente elástico. A obtenção dos gradientes de algumas destas variáveis também se faz necessária. Deste modo, a atualização do estado tensional do ponto do elemento de armadura ou do seu ponto de *gauss* correspondente é feita com convergência quadrática garantida, conforme mostrado em SIMO and TAYLOR [1986].

Os trabalhos de SOUZA [1981], CAMPOS [1987], CHEN[1982], OLIVER[1993] e FARIA,POUCA and DELGADO[2000], apresentaram diversos tipos de modelos para discretização e respectiva integração de elementos de armadura em estruturas de concreto armado. Optou-se por uma formulação discreta para as armaduras, ou seja, as barras existentes no interior das vigas-parede de concreto serão consideradas nas suas posições reais, sendo representadas por elementos de barras submetidos apenas a esforços axiais e sendo sempre coincidentes com um dos lados dos elementos bidimensionais representantes do concreto. Sendo assim, também teremos os nós dos elementos de armadura coincidentes com os nós dos elementos de concreto.

3.2 – HIPÓTESES BÁSICAS

As seguintes hipóteses básicas foram admitidas para implementação da formulação a ser desenvolvida posteriormente:

- . Regime das pequenas deformações e deslocamentos;
- . Material homogêneo, isotrópico, elástico e elastoplástico;

- . São considerados na fase elastoplástica os fenômenos de endurecimento isotrópico e cinemático do material;
- . A ductibilidade apresentada pelo material é suficiente para o aparecimento de deformações plásticas ;
- . As regras de fluxo apresentadas são consideradas associadas, ou seja, há coincidência entre a superfície de potencial plástico e a superfície de escoamento;
- . Não se considera o fenômeno da viscoplasticidade;
- . A atuação da matriz modular tangente consistente se dará sob fluxo plástico constante ;
- . As cargas às quais a estrutura é submetida são quasi-estáticas;
- . As relações constitutivas plásticas são linearizadas em trechos finitos;
- . O fenômeno da descarga elástica é considerado;
- . Não há consideração do fenômeno de aderência entre o elemento de armadura e o elemento de concreto.

3.3 – FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

O problema a ser enfrentado é puramente local, ou seja, acontece durante a integração em cada ponto de Gauss do elemento de armadura considerado. Assim teremos que $x \in B$ é um dado ponto de interesse pertencente a um elemento de armadura que obedece ao modelo constitutivo apresentado pelas equações (3.1). Considera-se que o estado atual do elemento de armadura no ponto $x \in B$ e no tempo atual, dito t_n , é completamente definido, ou seja, isto significa que os valores de $\epsilon_n(x)$, $\epsilon_n^p(x)$, $\alpha_n(x)$ e $q_n(x)$, são conhecidos de modo que o estado tensional dado pela equação (3.1a) também é conhecido. Sendo assim, o estado tensional será atualizado através de um dado passo de deformação denominado $\Delta\epsilon(x)$, que controla o estado tensional do ponto para o tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Logo, o problema básico apresentado é a atualização das variáveis envolvidas no tempo t_n , de maneira consistente com o modelo constitutivo das equações (3.1).

Consideremos um ponto de interesse localizado dentro do elemento de armadura e que é representado por $x \in B = [0, L]$, e que segue a um modelo constitutivo uni-dimensional que obedece as equações governantes apresentadas abaixo:

a) Relações tensão-deformação elásticas

$$\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^P) \quad (3.1a)$$

b) Regra de Fluxo Plástico Associada

$$\varepsilon^P = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma - q) \quad (3.1b)$$

c) Leis de endurecimento isotrópico e cinemático

$$\begin{aligned} q &= \lambda \cdot H \cdot \text{sign}(\sigma - q) \\ \alpha &= \lambda \end{aligned} \quad (3.1c)$$

d) Condições de escoamento e região elástica fechada

$$\tau(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - [\sigma_y + K_\alpha] \leq 0 \quad (3.1d)$$

$$E\sigma = \{(\sigma, \alpha, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / \tau(\sigma, \alpha, q) \leq 0\} \quad (3.1e)$$

e) Condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*

$$\begin{aligned} \lambda &\geq 0 \\ \tau(\sigma, q, \alpha) &\leq 0 \\ \lambda \tau(\sigma, q, \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1f, g, h)$$

f) Condição de consistência de *Prager*

$$\lambda \cdot \tau(\sigma, q, \alpha) = 0 \quad (3.1i)$$

Para maiores detalhes da obtenção dessas equações através da utilização do modelo de atrito de *Coulomb* e da teoria clássica da plasticidade ver SIMO & HUGHES [1997].

A integração do modelo elastoplástico incremental de um tempo t_n para t_{n+1} é considerado como um processo de deformação dirigido ou controlado, em que a deformação total ϵ é a principal variável independente. Será mostrado a seguir que esta é precisamente a estrutura apropriada para a solução numérica do problema em questão. Vale salientar novamente que esse processo de integração é local, sendo assim, toma lugar em pontos específicos da armadura, mais especificamente nos pontos da quadratura de *Gauss* adotada para o elemento finito de barra representante da armadura existente.

3.4. – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA

3.4.1 – Considerações Iniciais

Ilustraremos, a seguir, a aplicação numérica dos algoritmos que seguem a regra do ponto médio generalizado na integração de um problema elastoplástico de valor inicial com endurecimento isotrópico e cinemático.

Consideremos um caso simples da regra do ponto médio generalizada em que a variável $\beta = 1$. Isso nos leva ao método de *Backward-Euler* na forma implícita ou também conhecido como algoritmo clássico de *Return Mapping*. Aplicando no caso em questão teremos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \Delta \lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta \lambda \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta \lambda\end{aligned}\tag{3.2a}$$

Onde:

$$\Delta \lambda = \lambda_{n+1} \times \Delta t\tag{3.2b}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n\end{aligned}\quad (3.2c)$$

Assim, conjuntamente com $\Delta\lambda$, são restringidos pela versão discreta das condições de *Kuhn-Tucker*, ou seja:

$$\begin{aligned}\tau_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - [\sigma_Y + K\alpha_{n+1}] \leq 0 \\ \Delta\lambda &\geq 0 \\ \Delta\lambda \cdot \tau_{n+1} &= 0\end{aligned}\quad (3.2d)$$

Uma vez que $\Delta\varepsilon_n$ é dado, a posterior resolução da equação (3.17b) pode ser obtida pela definição de ε_{n+1} nota-se, com isso, que a aplicação do algoritmo implícito de *Backward-Euler* transformou um problema de evolução restrita inicial num problema algébrico de restrição discreto para as variáveis:

$$\varepsilon_{n+1}^p \quad \alpha_{n+1}$$

3.4.2 – Preditor Elástico Inicial

Consideremos um estado tensional auxiliar denominado preditor inicial que não necessariamente corresponde ao estado real de tensão no ponto da armadura e que pode ser obtido considerando-se o fluxo plástico constante durante o processo de carga. Assumindo que o incremento de deformação é referente a um passo puramente elástico e considerando as variáveis de endurecimento isotrópico e cinemático envolvidas no processo, teremos:

$$\sigma_{n+1}^{pred} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \cong \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{n+1}^{pred} = \sigma_{n+1}^{pred} - q_n$$

$$\tau_{n+1}^{pred} = \left| \xi_{n+1}^{pred} \right| - \left[\sigma_y + k\alpha \right] \quad (3.3)$$

$$\alpha_{n+1}^{pred} = \alpha_n$$

$$q_{n+1}^{pred} = q_n$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ pred} = \varepsilon_n^p$$

Das equações anteriores podemos observar que o preditor inicial do ponto considerado é determinado somente em termos das condições iniciais do problema:

$$\left(\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n \right)$$

Inicialmente também é fornecida uma deformação incremental $\Delta\varepsilon_n$. Em geral, este estado admitido para o ponto tensional em questão não corresponderá a nenhum estado fisicamente admissível atual, a não ser que o processo incremental em questão esteja na sua fase elástica. Esta primeira iniciativa adotada visa a uma aproximação simplista o tanto quanto possível de um maneira já conhecida e que é a determinada por um passo incremental elástico.

A figura 3.1 descreve de maneira clara um passo incremental elástico que leva o ponto tensional considerado para dentro de uma região elástica. Observe que neste caso a solução final é coincidente com o estado experimental proposto pelo preditor inicial. Pode-se entender fisicamente este fato como uma forma restritiva representativa do nível tensional no ponto de gauss do elemento de armadura analisado. Assim sendo, o nível tensional alcançado pelo preditor inicial manteve-se dentro dos limites impostos às relações tensão-deformação elásticas não havendo, desta maneira, presença do fenômeno da plasticidade.

ERROR: limitcheck
OFFENDING COMMAND: imagemask

STACK:

```
(  
)  
[1 0 0 -1 -1 35]  
true  
35  
35
```

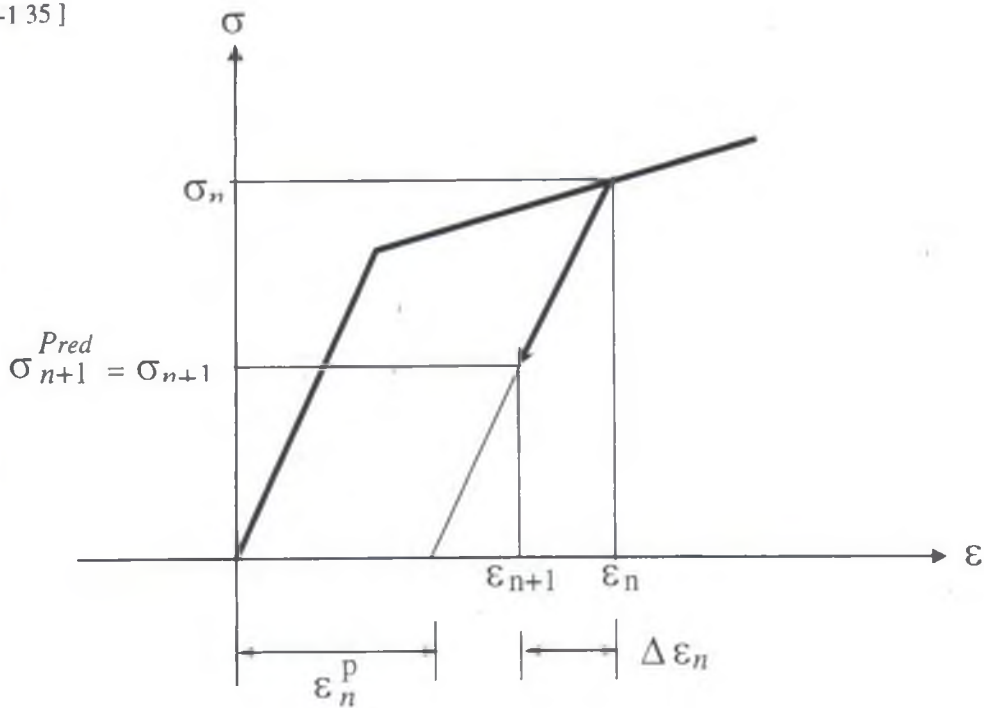


Figura 3.1: Preditor elástico de um estado plástico

Uma vez que o estado tensional definido pelo preditor inicial do ponto é computado pelas equações (3.2), devemos considerar dois casos possíveis:

A)

$$\tau_{n+1}^{pred} \leq 0$$

Isso significa que o estado tensional experimental adotado para o ponto do sólido na armadura é admissível, uma vez que as variáveis de tensão, deformação e endurecimento isotrópico e cinemático atualizadas são coincidentes com seus valores admitidos, ou seja:

$$\epsilon_{n+1}^{p^{pred}} = \epsilon_n^p \quad q_{n+1} = q_n \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n$$

Desta forma, são satisfeitas as relações tensão-deformação, a regra de fluxo plástico, as leis de endurecimento e as condições de *Kuhn-Tucker*. Observe a consistência das condições de *Kuhn-Tucker* com as equações envolvidas.

B)

$$\tau_{n+1}^{pred} > 0 \quad (3.4b)$$

Neste caso, o estado tensional do ponto do sólido na armadura não pode ser admitido como a solução do problema incremental proposto, uma vez que as variáveis de tensão e endurecimento $(\sigma_{n+1}, \alpha_n, q_n)$ violam a condição de restrição da superfície de plastificação

$$\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_{n+1}^p$$

Então, devemos ter o multiplicador plástico $\Delta\lambda$ maior que zero, sendo que:

$$\tau(\sigma, \alpha, q) \leq 0$$

Obtêm-se assim:

$$\sigma_{n+1}^{pred} \neq \sigma_{n+1}$$

Logo, retornaremos às condições de *Kuhn-Tucker* de forma consistente tendo $\Delta\lambda > 0$ e $\Delta\lambda \cdot \tau_{n+1} = 0$, de onde podemos concluir que $\tau_{n+1} = 0$ e definir o processo como incrementalmente plástico. A figura 3.2 mostra a violação da condição de restrição $\tau \leq 0$, o que conseqüentemente nos leva a um processo incremental plástico uma vez que $\Delta\lambda > 0$ em ordem de realizar:

$$\sigma_{n+1}^{pred} \neq \sigma_{n+1}$$

A figura 3.2 mostra graficamente a ocorrência do fenômeno acarretado pela realização da equação (3.4b) e o modo como as variáveis tensionais são conduzidas no retorno à superfície de potencial plástico representada pela reta em questão.

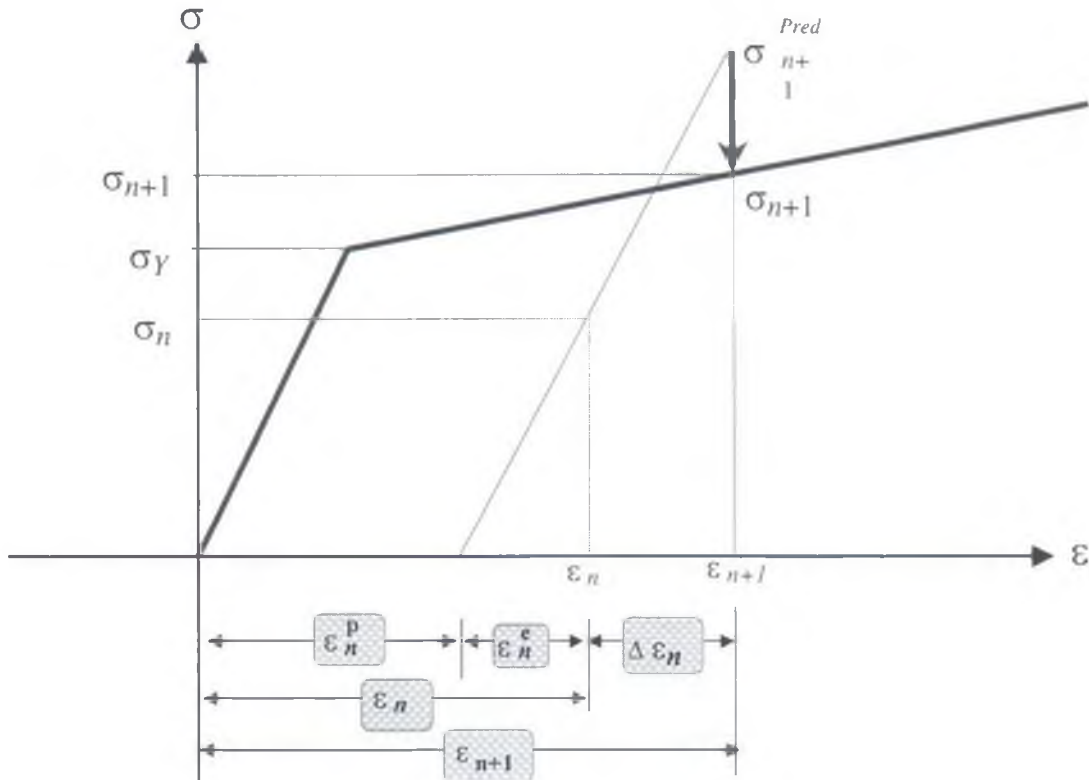


Figura 3.2: Processo incremental plástico violando $\tau \leq 0$

Conclui-se, desta forma, que o processo incremental para uma dado passo de deformação é elástico ou plástico, considerando-se como base o preditor inicial do ponto da armadura, de acordo com o critério:

$$\tau_{n+1}^{pred} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \textit{elástico} & \Delta\lambda = 0 \\ > 0 \Rightarrow \textit{plástico} & \Delta\lambda > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Podemos notar que as condições denominadas de carga e descarga, respectivamente para as equações 3.3 e 3.4, são resultado direto das condições de *Kuhn-Tucker* representadas pelas equações 3.1 (f,g,h).

3.4.3 – Algoritmo *Return Mapping* Unidimensional

Consideremos a condição inicial para implementação do processo incremental plástico determinada pela equação 3.4, que nos leva a:

$$\tau_{n+1}^{pred} > 0 \Rightarrow \tau(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, q_{n+1}) = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\Delta\lambda > 0$$

O objetivo é determinar a solução para as variáveis envolvidas, quais sejam:

$$\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}, \sigma_{n+1}, \Delta\lambda$$

de modo consistente com as equações (3.2). Sendo assim, expressaremos o estado tensional final do ponto da armadura em termos da tensão obtida do preditor inicial e do multiplicador plástico, como se segue:

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (3.7.1)$$

$$\sigma_{n+1} = E \cdot \varepsilon_{n+1} - E\varepsilon_{n+1}^p \quad (3.7.2)$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \quad (3.7.3)$$

Subtraindo e adicionando o valor de ε_n^p das duas parcelas no direito da equação:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{pred} - E\Delta\lambda \cdot \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (3.7.4)$$

Assim, uma vez que $\Delta\lambda > 0$, as equações (3.2) podem ser reescritas, considerando a equação 3.7.4, logo:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{pred} - \Delta\lambda \cdot E \cdot \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (3.8.a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \cdot \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (3.8.b)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda \quad (3.8.c)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\lambda \cdot H \cdot \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (3.8.d)$$

$$\tau_{n+1} = |\xi_{n+1}| - [\sigma_y + K\alpha_{n+1}] = 0 \quad (3.8.e)$$

$$\xi_{n+1} = \sigma_{n+1} - q_{n+1} \quad (3.8.f)$$

As equações (3.8) podem assim serem resolvidas explicitamente em termos da variável ξ_{n+1} considerada na equação (3.8.c). Sendo assim, subtraindo a equação (3.8.d) da equação (3.8.a) e utilizando (3.8.f), teremos:

$$\xi_{n+1} = (\sigma_{n+1}^{pred} - q_n) - \Delta\lambda \cdot (E + H) \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (3.9)$$

Utilizando as definições (3.8.f) e (3.9) podemos redefinir:

$$\left[|\xi_{n+1}| + \Delta\lambda \cdot (E + H) \right] \text{sign}(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{pred}| \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) \quad (3.10)$$

Uma vez que $\Delta\lambda > 0$ e $E+H > 0$, nota-se que os termos entre parênteses são necessariamente positivos. Isso implica no resultado:

$$\text{sign}(\xi_{n+1}) = \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) \quad (3.11)$$

Levando também a condição:

$$|\xi_{n+1}| + \Delta\lambda \cdot [H + E] = |\xi_{n+1}^{pred}| \quad (3.12)$$

Dessa forma, o multiplicador plástico $\Delta\lambda$ pode ser determinado pela equação (3.8.e) com a utilização das equações (3.12) e (3.8.c). Assim teremos:

$$\tau_{n+1} = |\xi_{n+1}^{pred}| - (E + H)\Delta\lambda - [\sigma_n + K\alpha_{n+1}] \quad (3.13)$$

Desenvolvendo os termos multiplicadores em K e adicionando-se os termos $-K\alpha_n$ e $K\alpha_n$, considerando a equação 3.13 teremos:

$$\tau_{n+1} = |\xi_{n+1}^{pred}| - (E + H)\Delta\lambda - [\sigma_n + K\alpha_n] - K(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \quad (3.14)$$

Da equação (3.2.6), ficamos com:

$$\tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{pred} - \Delta\lambda[E + (K + H)] = 0 \quad (3.15)$$

Isolando o termo $\Delta\lambda$, teremos:

$$\Delta\lambda = \frac{\tau_{n+1}^{pred}}{E + [K + H]} > 0 \quad (3.16)$$

Uma vez que a equação (3.11) e (3.16) determinam completamente o algoritmo das equações, (3.8) conforme mostrado por SIMO & HUGHES [1997], o estado tensional final do ponto significa a projeção da tensão preditora elástica inicial admitida para o mesmo, sobre a superfície de potencial plástico. Em razão a esse fato, o algoritmo desenvolvido anteriormente é conhecido como algoritmo de *Return Mapping*.

3.4.4 - Quadro Resumo do Modelo Constitutivo da Armadura

Algoritmo *Return Mapping* para plasticidade unidimensional com endurecimento isotrópico e cinemático

1.) Dados de entrada do ponto $x \in B$: $[\varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n]$

2.) Dado um campo de deformações em $x \in B$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$$

3.) Calcular o preditor elástico inicial e testar para o carregamento plástico:

$$\sigma_{n+1}^{pred} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$\xi_{n+1}^{pred} = \sigma_{n+1}^{pred} - q_n$$

$$\tau_{n+1}^{pred} = |\xi_{n+1}^{pred}| - [\sigma_y + K\alpha_n]$$

4.) Se:

$$[\tau_{n+1}^{pred} \leq 0] \longrightarrow \text{Passo elástico}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{pred}$$

5.) Se:

$$[\tau_{n+1}^{pred} > 0] \longrightarrow \text{Passo plástico}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\tau_{n+1}^{pred}}{E + [K + H]} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{pred} - \Delta\lambda E \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred})$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\lambda H \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda$$

3.5 – FORMULAÇÃO DA MATRIZ MODULAR TANGENTE CONSISTENTE - 1D

Para completar o procedimento algoritmo discutido anteriormente, Simo & Taylor desenvolveram uma expressão explícita para o coeficiente que relaciona as taxas de tensão e deformação definida como a expressão para a matriz modular tangente consistente. O procedimento usado para derivar uma expressão de forma fechada para esse procedimento algorítmico passa pela diferenciação das fórmulas de atualização do modelo apresentado no item 3.4.3.

Desse modo, podemos representar a expressão da matriz definida anteriormente na forma:

$$C_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \quad (3.18)$$

Para maior clareza, o índice (k) será omitido nas deduções que se seguem. Assim do passo(3.) do quadro resumo teremos:

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{pred}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial \xi_{n+1}^{pred}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E \quad (3.19)$$

Podemos observar que as variáveis ε_n^p e q_n são consideradas constantes no processo de derivação. Usando estes resultados e diferenciando a equação (3.16) assumindo a condição do passo 4.) do quadro resumo, teremos:

$$\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{E + [K + H]} \cdot \frac{\partial \tau_{n+1}^{pred}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{E + [K + H]} \cdot \frac{\partial |\xi_{n+1}^{pred}|}{\partial \xi_{n+1}^{pred}} \cdot \frac{\partial \xi_{n+1}^{pred}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{E}{E + [K + H]} \cdot \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) \quad (3.20c)$$

Logo, modificando a equação (3.20c) podemos fazer:

$$\sigma_{n+1} = (\sigma_{n+1}^{pred} - q_n) + q_n - \Delta\lambda E \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) \quad (3.21a)$$

$$\sigma_{n+1} = q_n + \xi_{n+1}^{pred} - \Delta\lambda E \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) \quad (3.21b)$$

$$\sigma_{n+1} = q_n + \left[1 - \frac{\Delta\lambda E}{|\xi_{n+1}^{pred}|} \right] \xi_{n+1}^{pred} \quad (3.21c)$$

Finalmente, diferenciando as equações constitutivas algoritmáticas representadas pelas equações (3.20) com respeito a ε_{n+1} , e utilizando a regra de derivação em cadeia com as equações (3.19b) e (3.20), obteremos:

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left[1 - \frac{\Delta\lambda E}{|\xi_{n+1}^{pred}|} \right] E + \frac{\Delta\lambda E}{|\xi_{n+1}^{pred}|^2} \xi_{n+1}^{pred} \frac{\partial |\xi_{n+1}^{pred}|}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{E}{|\xi_{n+1}^{pred}|} \frac{E}{E + [K + H]} \xi_{n+1}^{pred} \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred})$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left[1 - \frac{\Delta\lambda E}{|\xi_{n+1}^{pred}|} \right] E + \frac{\Delta\lambda E^2}{|\xi_{n+1}^{pred}|^2} \xi_{n+1}^{pred} \text{sign}(\xi_{n+1}^{pred}) - \frac{E^2}{E + [K + H]}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left[1 - \frac{\Delta\lambda E}{|\xi_{n+1}^{pred}|} \right] E + \frac{\Delta\lambda E^2}{|\xi_{n+1}^{pred}|} - \frac{E^2}{E + [K + H]}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{E[K + H]}{E + [K + H]} \quad (\tau_{n+1}^{pred} > 0) \quad (3.22)$$

Logo, podemos definir de forma final a matriz modular tangente consistente através das seguintes expressões:

$$C_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} = \begin{cases} E & (\tau_{n+1}^{pred} \leq 0) \\ \frac{E[K+H]}{E+[K+H]} & (\tau_{n+1}^{pred} > 0) \end{cases} \quad (3.23)$$

O desenvolvimento mostrado anteriormente é todo formulado com bases no modelo de atrito de Coulomb, na relação constitutiva elástica e nos conceitos fundamentais abordados na plasticidade clássica. A equação 3.25b corresponde assim a matriz modular tangente consistente unidimensional que relaciona os incrementos de tensão e deformação durante o processo de elastoplástico e que representa a relação constitutiva considerada no modelo computacional proposto.

3.6 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A subrotina Mapping1 é a responsável pela integração numérica do elemento de barra representante da armadura. Sua implementação computacional é descrita no quadro resumo apresentado no item 3.4.4 e mostrado no fluxograma da figura 3.3.

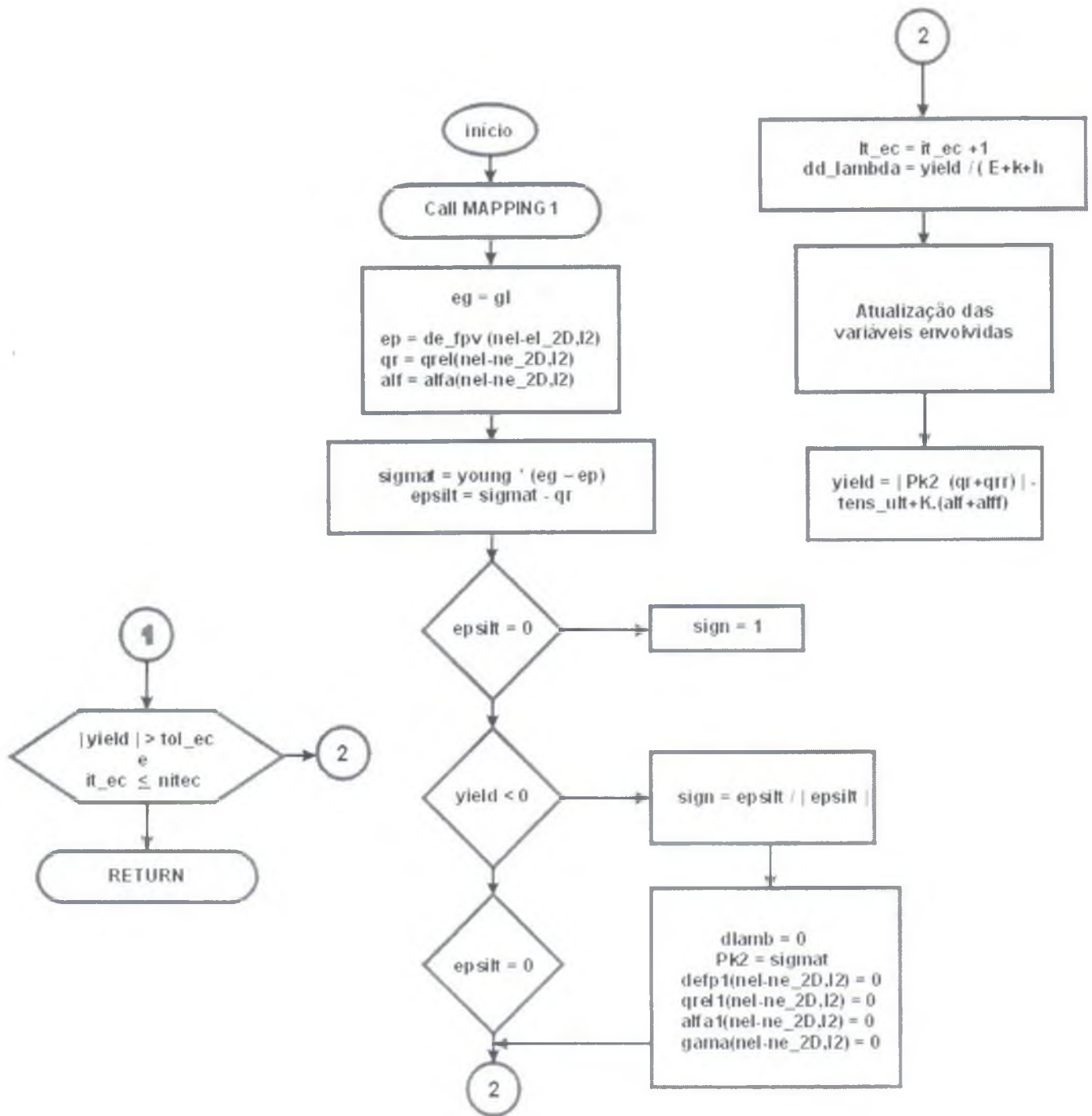


Figura 3.3: Fluxograma do algoritmo numérico para plasticidade 1D

CAPÍTULO 4

INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

4.1- INTRODUÇÃO

Serão apresentados neste capítulo os conceitos relativos a integração do modelo constitutivo utilizado para representar o elemento de concreto. Uma solução numérica baseada no modelo dos elementos finitos aplicada ao caso de tensão plana é desenvolvida. O critério de escoamento de Drucker-Prager é abordado com a utilização da sua superfície de escoamento para definição do controle da plastificação do ponto de Gauss a ser integrado no elemento considerado. Devido à natureza incremental das regras de fluxo plástico nos problemas elastoplásticos, serão utilizados pequenos passos de deformação de modo que o equilíbrio local seja assegurado. A adoção de um preditor inicial elástico para o estado tensional do ponto do elemento de concreto bem como seu caminho corretor no retorno a superfície de escoamento é desenvolvido de forma integral com base nos trabalhos de SIMO and TAYLOR [1986], CRISFIELD [1991] e BELYTSCHKO, LIU and MORAN [2000].

O conceito da formulação de uma matriz para atualização do estado tensional que seja consistente com a técnica numérica adotada é utilizada de forma semelhante a do elemento de armadura. No caso do elemento de concreto define-se a denominada matriz de rigidez modular tangente consistente para o caso de tensão plana segundo o critério de escoamento de Ducker-Prager. De acordo com CRISFIELD [1991] essa técnica utilizada conjuntamente com o algoritmo de Newton-Raphson para resolução das iterações de equilíbrio local leva a uma taxa mais rápida de convergência, se comparada com outras técnicas empregadas como a da matriz de rigidez modular tangente padrão. O detalhamento da obtenção da matriz modular tangente consistente será descrito com posterior utilização do procedimento de integração implícita para resolução do algoritmo da relação constitutiva.

As equações para o caso tensão plana serão desenvolvidas de modo a serem implementadas num esquema numérico de solução via o método dos elementos finitos. Um algoritmo do tipo preditor-corretor será utilizado de modo manter o nível tensional nos pontos de Gauss dos elementos de concreto sobre a superfície de escoamento. O algoritmo de retorno conhecido como de Backward Euler é detalhado e sua implementação mostrada conforme sugerido em CRISFIELD [1991].

4.2 – HIPÓTESES BÁSICAS

Na formulação a ser desenvolvida a seguir foram obedecidas as seguintes hipóteses básicas:

- . Não foram considerados os efeitos de endurecimentos isotrópico nem cinemático;
- . As regras de fluxo apresentadas são admitidas associadas, ou seja, há coincidência da superfície de potencial plástico com superfície de escoamento;
- . Não se considera o fenômeno da viscoplasticidade;
- . A atuação da Matriz de Modular Tangente Consistente se dará sob fluxo plástico constante;
- . Não importa que precisão seja utilizada, depois de cada incremento de deformação que satisfaça as regras de fluxo e mantenha o ponto na superfície de escoamento, a solução só estará equilibrada no final de cada incremento depois das iterações de equilíbrio.
- . É válido o regime dos pequenos deslocamentos e deformações;
- . O material em análise é considerado homogêneo, isotrópico, elástico ou elastoplástico perfeito;
- . O espalhamento da plasticidade é considerado em cada ponto de gauss dos elementos de concreto da estrutura de considerada;
- . As relações constitutivas plásticas serão linearizadas em trechos finitos;
- . O material é dúctil suficiente para desenvolver deformações plásticas;
- . O fenômeno da descarga elástica é considerado.

4.3 – SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO PARA CONCRETO

Uma forma geral para superfície de escoamento pode ser convenientemente interpretada por uma série de variáveis(ξ, ρ, θ) no sistema de coordenadas das tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 , conforme apresentado na figura 4.1. Segundo CHEN [1982], as características gerais de uma superfície de escoamento para o material concreto devem ser determinadas através de dados experimentais. Sendo assim, os resultados experimentais serão utilizados para balizar o desenvolvimento das formas geométricas dos diversos modelos matemáticos simples ou refinados a serem aplicados ao material concreto.

Uma superfície de escoamento para concreto será descrita no espaço tri-dimensional das tensões pela forma da seção transversal nos planos desviadores e seus meridianos nos planos meridianos (ver figura 4.3). As seções transversais da superfície de escoamento podem ser representadas por curvas de intersecção entre a própria superfície e o plano desviador que é perpendicular ao eixo hidrostático com ξ constante. Os planos meridianos da superfície de escoamento são curvas de intersecção entre a superfície e o plano meridiano que contém o eixo hidrostático com θ constante.

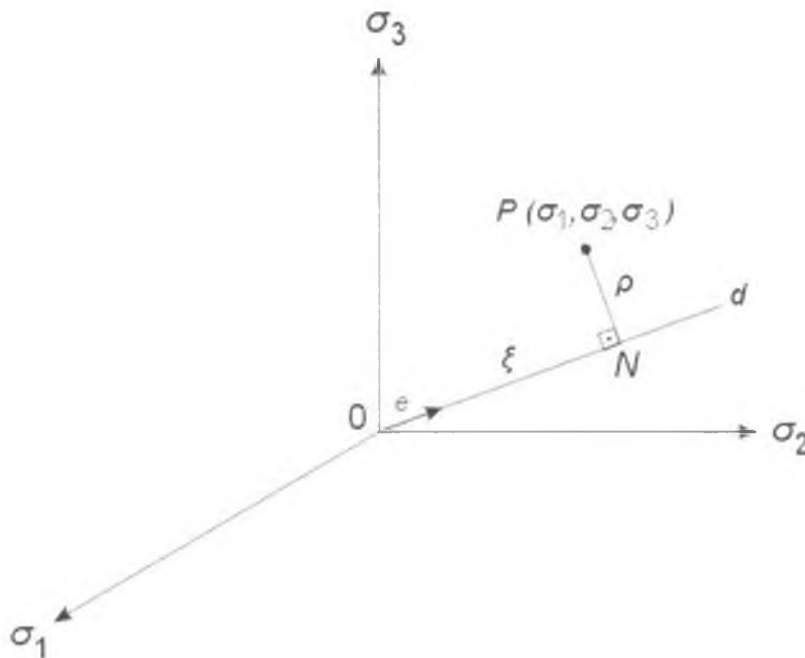


Figura 4.1: Representação no espaço das tensões principais

Sendo assim, para um material isotrópico, os índices 1,2 e 3 adotados para os eixos coordenados são arbitrários e a forma da seção transversal da superfície de escoamento deve ter a simetria da figura 4.2.

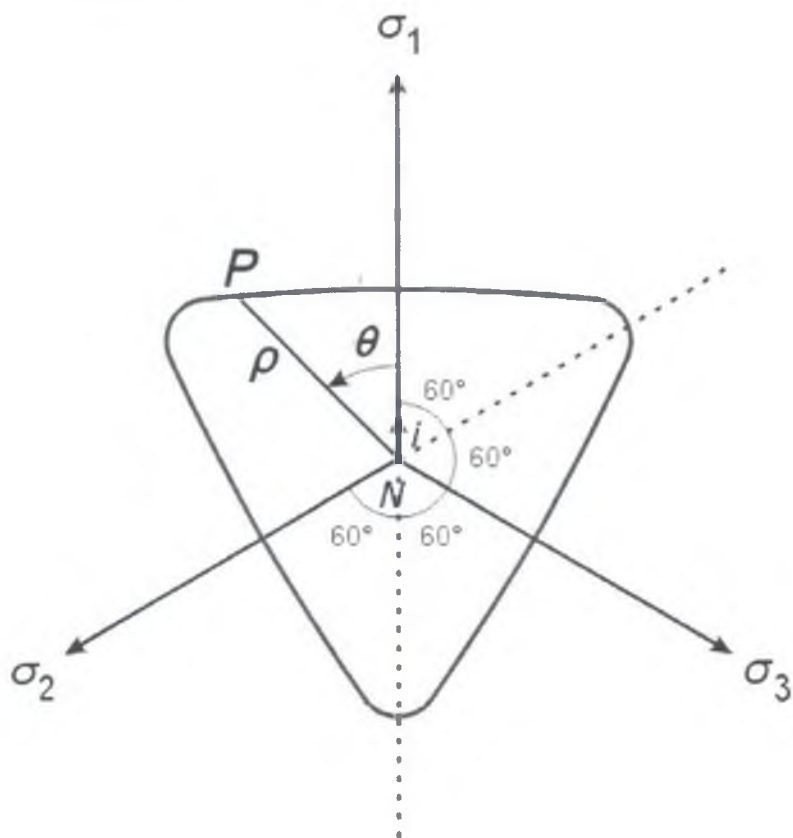


Figura 4.2: Simetria no plano desviador da superfície de escoamento de concreto

Assim, quando os experimentos forem executados, será necessário explorar apenas o setor onde θ variará de 0 a 60 graus, sendo os outros setores conhecidos por simetria.

Os resultados dos experimentos apresentados em CHEN [1982] e MEHTA & MONTEIRO [1994], indicam que a curva de escoamento no plano desviador deve ter as seguintes características gerais:

- . A curva de escoamento é suave e convexa,
- . A forma da curva segue a forma elíptica da figura 4.2,
- . A curva de escoamento é similar a um triângulo para tração e pequenos valores de compressão, correspondentes a pequenos valores de ξ perto do plano π e torna-se uma elipse

para grandes tensões de compressão, correspondendo a incrementos nos valores de ξ ou a grandes pressões hidrostáticas.

Existem dois planos meridianos extremos correspondentes a $\theta = 0$ graus e $\theta = 60$ graus. São denominados: plano meridiano de tração e plano meridiano de compressão, respectivamente. Quando o concreto é testado num ensaio triaxial de tensão na compressão, o cilindro de concreto é carregado de duas maneiras:

- (1) Uma pressão hidrostática é exercida na direção radial e uma força é incrementada pelo piston na direção axial. Assim teremos:

$$\sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_z = \sigma_3$$

Este estado de tensão corresponde ao estado tensional hidrostático com uma tensão de compressão superimposta numa direção. Estes resultados implicam em $\theta=60$ graus. O meridiano associado a este teste é denominado meridiano de compressão. Um caso particular deste meridiano é o ensaio de resistência uniaxial a compressão $f'_c (f'_c > 0)$.

- (2) Uma força é exercida na direção axial e uma pressão hidrostática é incrementada por uma célula de pressão na direção radial. Isso corresponde a:

$$\sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_z = \sigma_3$$

Isto corresponderá a um estado tensional hidrostático com uma tensão de tração superimposta em uma direção. Estes resultados implicam em $\theta = 0$ graus. O meridiano associado a este teste é denominado meridiano de compressão.

No plano meridiano a curva de escoamento segue as seguintes características gerais:

- . As curvas de escoamento dependem da componente hidrostática das tensões, ou seja, I_1 ou ξ ;
- . As superfícies de escoamento são curvas, suaves e convexas;
- . A relação $r_t/r_c < 1$, onde os índices t e c correspondem aos meridianos de tração e compressão respectivamente;

. Os valores de r_1/r_c são incrementados com o incremento das pressões hidrostáticas. Seus valores mínimo e máximo são 0,5 perto do plano π e 0,8 perto da pressão hidrostática $\xi = -7f'_c$, conforme mostra a figura 4.3.

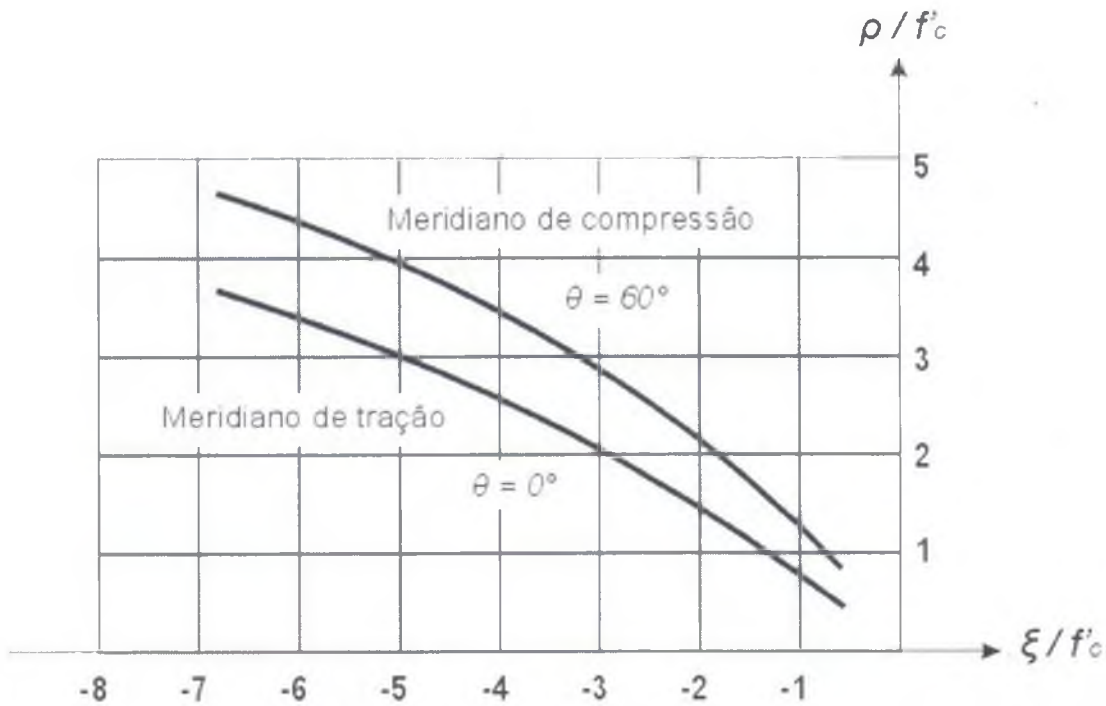


Figura 4.3: Características gerais dos meridianos

4.4 – SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE DUCKER-PRAGER

4.4.1 – Introdução

Existe uma grande quantidade de modelos constitutivos que permitem descrever o comportamento dos materiais submetidos a estados de carga. Estes modelos tentam simular o comportamento de um material ideal o que resulta na consideração de certas hipóteses simplificadoras no sólido real. Vários autores têm dedicado uma grande quantidade de trabalhos de pesquisa na classificação, ordenação e análise de grande parte destes modelos

constitutivos conforme mostrado nos trabalhos de CHEN [1982], OLLEN [1991], CRISFIELD [1991].

Existem distintos pontos de vista para classificar os modelos constitutivos aplicados ao concreto. Segundo OLLEN [1992], parece razoável definir quatro grupos principais: os modelos baseados nas teorias de elasticidade linear e não linear, modelos baseados na teoria da plasticidade, modelos baseados na teoria endócrina da plasticidade e modelos de fratura. Cada um destes grupos inclui modelos constitutivos que reproduzem, em forma numérica, o comportamento do concreto dentro de certas relações mais ou menos limitadas. Nesta dissertação utilizou-se o modelo pertencente ao segundo grupo, ou seja, em que a teoria clássica de plasticidade é aplicada.

Uma vez que resultados experimentais confirmam que o comportamento não linear do concreto se deve fundamentalmente a um fenômeno altamente inelástico onde se pode recuperar uma pequena parte da deformação total ocorrida devido à micro-fissuração; justifica-se a utilização da teoria clássica da plasticidade para análise deste tipo de fenômeno dividindo-se então o comportamento tensão-deformação numa parcela recuperável e outra irre recuperável. Entretanto, no intuito de montar um modelo inicial que possuísse poucos problemas no que tange aos aspectos numéricos de instabilidade devido a vértices ou cantos que poderiam a levar a problemas de convergência nos algoritmos numéricos, optou-se pelo modelo de simplificado de Ducker-Prager. Uma outra série de modelos mais sofisticada pode ser encontrada na literatura corrente conforme apresentado em CHEN [1982].

4.4.2 - Representação no Espaço das Tensões Principais

Este critério formulado por Drucker e Prager (1952) trata a superfície como um cone circular adicionando o termo referente à pressão hidrostática influenciada por uma função do ângulo de atrito interno, ao critério de Von Mises. Desta maneira, os vértices presentes nos critérios de Tresca e Mohr-Coulomb também são eliminados de forma a não causar nenhum problema numérico na utilização da teoria de plasticidade associada para determinar o incremento de deformação plástica. A figura 4.4 mostra a superfície de Ducker-Prager no espaço das tensões principais.

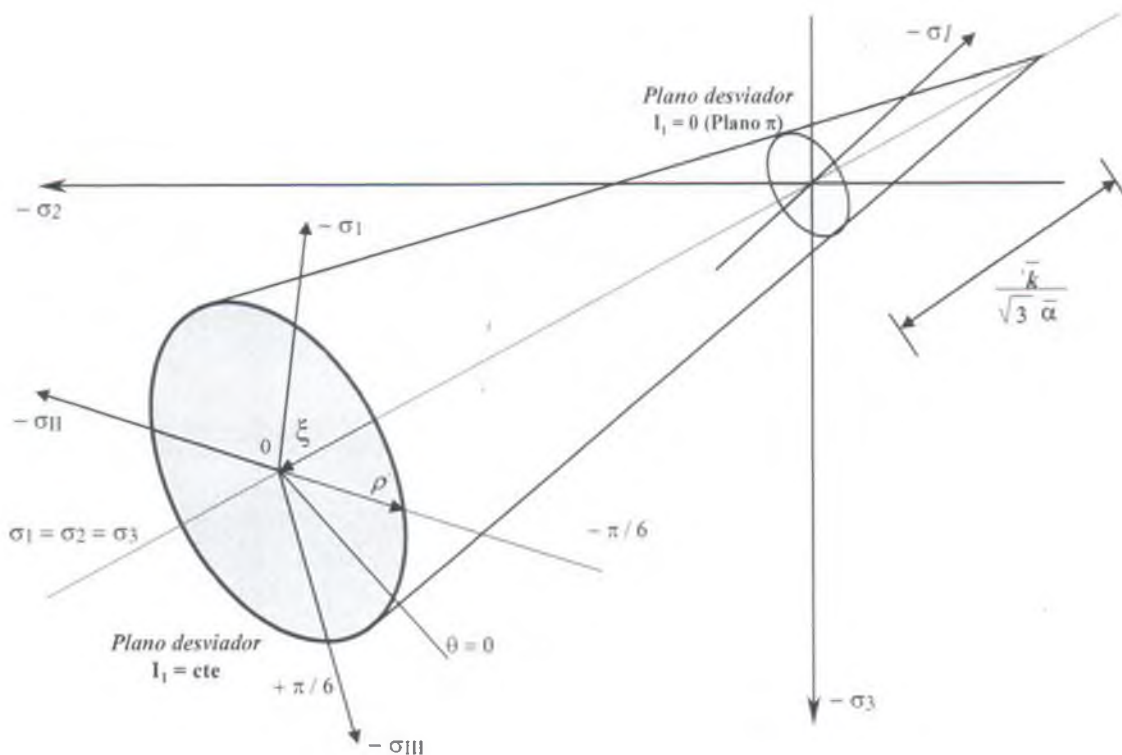


Figura 4.4: Critério de Ducker-Prager no espaço das tensões principais ou de Westergard

Observa-se que além de depender da função do ângulo de atrito interno α e do primeiro invariante do tensor de tensões I_1 , o critério depende do segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 e dos parâmetros referentes as constantes do material denominados c e ϕ , que são respectivamente coesão e atrito entre as partículas. Sua expressão matemática em função dos invariantes do tensor de tensões e seu tensor desviador são:

$$\tau(I_1, J_2, c, \phi) = \sqrt{3J_2} + \alpha \frac{I_1}{3} - \sigma_0 = \sigma_v - \sigma_0 = 0 \quad (4.1)$$

Sua expressão em função das tensões nominais é mostrada na seguinte forma:

$$\tau(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \varphi, c) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma\sigma_y + 3\sigma_{xy}^2} + \frac{\alpha}{3}(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_0 \quad (4.2)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{6\sin\varphi}{3 \pm \sin\varphi}, \quad \sigma_0 = \frac{6c\cos\varphi}{3 \pm \sin\varphi} \quad e \quad \sigma_e = \sqrt{3J_2} + \alpha \frac{I_1}{3} \quad (4.3)$$

As variáveis σ_e e σ_0 são denominadas tensão efetiva e tensão de escoamento, respectivamente. Os parâmetros c e φ são usualmente determinados através de dados experimentais via ensaios uniaxiais para determinação da tensão de máxima compressão σ_c e tensão máxima a tração σ_t . Assim, os dois parâmetros necessários para a definição do modelo de Ducker-Prager, são determinados pelas equações:

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right) \quad (4.4)$$

$$c = \frac{\sigma_c \sigma_t}{(\sigma_c + \sigma_t) \cos \varphi} \quad (4.5)$$

Conforme mencionado anteriormente, a relação entre as variáveis ξ e r (ou I_1 e $\sqrt{J_2}$) obtida em ensaios experimentais é curva e não linear conforme o modelo simplificado de Ducker-Prager. Também o traçado da superfície de escoamento nos planos desviadores é elíptico e não circular. Isto impõem ao modelo adotado, restrições quanto à utilização e interpretação de resultados. No entanto, sua utilização satisfaz as propriedades de suavidade, convexidade, simetria, etc, dando uma estimativa razoável para níveis tensionais a serem considerados em peças de concreto, o que justifica sua utilização neste trabalho de dissertação.

4.4.3 – Definição do Vetor de Fluxo Plástico

Em conjunto com a equação (4.1), uma regra de fluxo plástico para plasticidade associada pode ser definida por:

$$\dot{\varepsilon}_{Pj} = \Delta\lambda \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_j} = \Delta\lambda m_j \quad (4.6)$$

O vetor m_j é normal à superfície de escoamento e o primeiro termo uma constante positiva referida como multiplicador plástico das taxas de deformação. As variáveis da equação (4.18) representam pequenas mudanças ou variações nas suas quantidades conforme já apresentado no capítulo 2. Desta maneira, podemos então definir o gradiente de 1ª ordem da função de escoamento de Ducker-Prager na forma:

$$\nabla_{\sigma} \tau = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_j} = m_j = \frac{1}{\sigma_c} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ -\sigma_x - \sigma_y \\ 6\sigma_{xy} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Onde separando as parcelas referentes à parte desviadora a_d e a hidrostática a_v podem ser redefinidas:

$$a_d = \frac{1}{\sigma_c} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ -\sigma_x - \sigma_y \\ 6\sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad e \quad a_v = \frac{\alpha}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.4.4 – Definição da Matriz Gradiente do Vetor de Fluxo Plástico

Como no algoritmo de retorno a superfície de escoamento adotado necessitaremos calcular a matriz gradiente do vetor de fluxo plástico devido à montagem da matriz modular tangente consistente conforme será exposto mais adiante devemos diferenciar a equação (4.19) com relação às tensões. Verificando-se que a parte hidrostática não entrará na contribuição da montagem desta matriz uma vez que sua derivada é nula, teremos:

$$\frac{\partial m_j}{\partial \sigma_\alpha} = 3 \frac{1}{2\sigma_e} P - \frac{1}{\sigma_e} m_j^T m_j \quad (4.9)$$

Sendo P uma matriz auxiliar que possui os valores:

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.5 – FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A modelagem do problema elastoplástico em tensão plana é resolvida utilizando o critério de Ducker-Prager como definidor da superfície de escoamento, considerando apenas o fenômeno do endurecimento isotrópico. As equações governantes para o problema em questão podem ser sistematicamente desenvolvidas como se segue. Consideremos as seguintes relações constitutivas:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (4.11.a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma(\varepsilon^e, q) \quad (4.11.b)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda m_{ij}(\sigma, q) \quad (4.11.c)$$

$$q_\alpha = \Delta \lambda(\sigma, q) \quad (4.11.d)$$

As variáveis apresentadas anteriormente denotam os tensores de deformação elástica e plástica; enquanto σ_{ij} é conhecido como o tensor das tensões de Cauchy e q_α significa um seletor conjunto de variáveis plásticas. O conjunto das equações (4.1a,b,c,d) expressa a hipótese da decomposição aditiva da deformação em partes elástica e plástica.

4.6 – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL

4.6.1 – Considerações Iniciais

ORTIZ & POPOV [1985] demonstraram e do mesmo modo CRISFIELD [1991] sugeriu a adoção do algoritmo de Backward-Euler ou do ponto fechado como uma simplificação dos algoritmos que seguem a regra trapezoidal generalizada, como viáveis para análise de alguns tipos de superfícies de plastificação em problemas elastoplásticos. Deste modo, teremos:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda[(1-\alpha)m_n + \alpha m_{n+1}] \quad (4.12a)$$

$$\sigma_{n+1} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.12b)$$

$$\tau_{n+1} = 0 \quad (4.12c)$$

Nas equações (4.2) ε_n , ε_n^p e σ_n são os conhecidos vetores das variáveis de deformação, deformação plástica e tensão no tempo t_n . Assim, ε_{n+1}^p e σ_{n+1} são os correspondentes vetores das variáveis desconhecidas no tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, sendo Δt o espaço de tempo inicial. As deformações atualizadas são assumidas como conhecidas ou adotadas de forma que:

$$m_n = m(\sigma) \quad ; \quad m_{n+1} = m(\sigma_{n+1}) \quad (4.13)$$

Nas equações (4.2), $\Delta\lambda$ será entendido como o multiplicador plástico incremental a ser determinado conjuntamente com a condição de consistência de Prager (ver anexo A) na sua forma incremental dada pela equação (4.2c).

4.6.2 – Fase Preditora

Um esquema predictor proposto por CRISFIELD [1991], sugere o uso da normal ao ponto predictor elástico inicial e posteriormente, caso necessário, aplica-se um procedimento corretivo para retorno do ponto a superfície de escoamento. Este tipo de procedimento evita a necessidade de computar o ponto de intersecção entre com a superfície de escoamento e o predictor elástico inicial, conforme pode ser observado na figura 4.5.

Partindo de um nível tensional anterior existente no ponto, podemos calcular o ponto elástico inicial no ponto B na forma:

$$\sigma_i^B = \sigma_i + \Delta\sigma_e \quad (4.14)$$

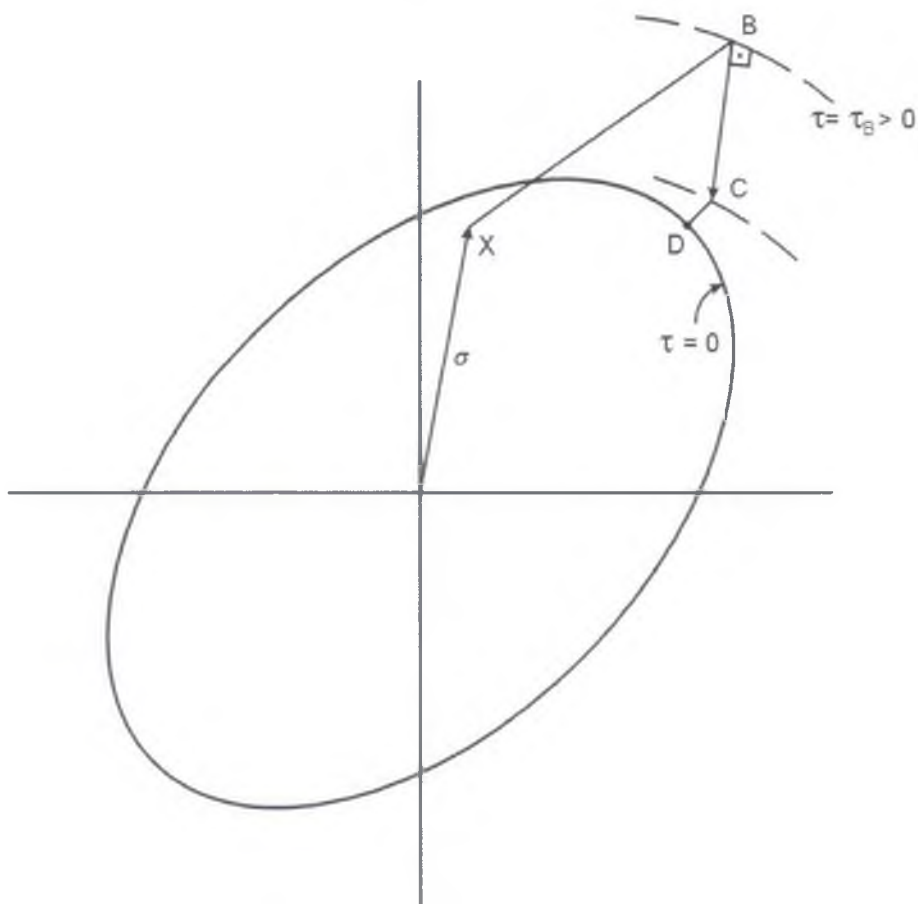


Figura 4.5: Esquema predictor proposto por CRISFIELD[1991]

Observe que σ_i é a tensão anterior existente no ponto, $\Delta\sigma_e$ é o incremento de tensão adicionado a tensão anterior existente calculado via a matriz de rigidez tangente do passo anterior multiplicado por um incremento de deformação adotado $\Delta\varepsilon$ e ${}^B\sigma_i$ é o nível tensional preditor elástico inicial.

Devemos então, calcular a normal ao ponto preditor elástico inicial em B aplicando uma expansão em série de Taylor na equação da superfície de escoamento. Desconsiderando os termos de ordem superior teremos:

$$\tau = \tau_B + \frac{\partial \tau_B^T}{\partial \sigma_i} \Delta\sigma \quad (4.15)$$

Como teremos o incremento de tensão $\Delta\sigma_e$ nulo, uma vez que todo o incremento de deformação foi utilizado para mover o ponto do estado tensional de X para B, conforme apresentado na figura 4.5. Logo:

$$\tau = \tau_B + \frac{\partial \tau_B^T}{\partial \sigma_j} (-\Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial \tau_B}{\partial \sigma_j}) \quad (4.16)$$

$$\tau = \tau_B - \Delta\lambda \left(\frac{\partial \tau_B^T}{\partial \sigma_j} \Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial \tau_B}{\partial \sigma_j} \right) \quad (4.17)$$

Como devemos anular a nova função de escoamento, teremos:

$$\Delta\lambda = \frac{\tau_B}{\frac{\partial \tau_B^T}{\partial \sigma_j} E_{ij} \frac{\partial \tau_B}{\partial \sigma_j}} \quad (4.18)$$

Sendo assim, podemos calcular o nível tensional preditor final ou conhecidamente como nível tensional de Backward Euler na forma:

$$\sigma_i^c = \sigma_i^B - \Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial \tau_B}{\partial \sigma_j} \quad (4.19)$$

Em geral essa estimativa inicial não satisfaz a função de escoamento verdadeira e um esquema iterativo posterior será necessário porque a normal na posição preditora inicial B não é igual a normal na posição verdadeira.

4.6.3 – Fase Corretora

Em ordem de derivar um procedimento iterativo para o retorno do ponto a superfície de escoamento, um vetor r_i pode ser criado para representar a variação existente entre o nível tensional atual e o de Backward-Euler, ou seja :

$$r_i = \sigma_i^c - (\sigma_i^B) - \Delta\lambda E_{ij} m_j^c \quad (4.20)$$

Onde:

$$m_j^c = \frac{\partial \tau_C}{\partial \sigma_j}$$

Sendo assim, as iterações serão introduzidas de modo a reduzir o vetor r_i , para aproximadamente zero ou perto de uma tolerância adotada. Enquanto isso, a tensão final deverá satisfazer o critério de permanência sobre a superfície de escoamento adotada. Como o preditor elástico inicial se manterá fixo, poderemos aplicar uma expansão em série de Taylor a equação (4.7) de forma a produzir um novo resíduo, $r_i^{(2)}$, logo:

$$r_i^{(2)} = r_i + d\sigma_i + d\Delta\lambda E_{ij} m_j^1 + \Delta\lambda E_{ij} \left. \frac{\partial m_j}{\partial \sigma_i} \right|_{n+1} d\sigma_i \quad (4.21)$$

Observe que $d\sigma_i$ é a mudança em σ_i e que $d\Delta\lambda$ é a mudança em $\Delta\lambda$. Levando $r^{(2)}$ a zero e isolando em termos da mudança de tensão, teremos:

$$d\sigma_i = -[I + \Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial \sigma_i} \Big|_{n+1}]^{-1} (r_i + d\Delta\lambda E_{ij} m_j^{n+1}) \quad (4.22)$$

Denominado Q ao conjunto:

$$Q = [I + \Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial \sigma_i} \Big|_{n+1}] \quad (4.23)$$

Teremos então:

$$d\sigma_i = -Q^{-1} r_i - d\Delta\lambda Q^{-1} E_{ij} m_j^{n+1} \quad (4.24)$$

De forma semelhante aplica-se uma expansão em Série de Taylor sobre a superfície de escoamento perto do estado tensional σ_{n+1} em ordem de obter uma aproximação linear da nova superfície de escoamento que contém as mudanças ocorridas nas tensões. Fazendo isso:

$$\tau_{n+1}^{(2)} = \tau_{n+1} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i} d\sigma_i = \tau_{n+1} + (m_j^{n+1})^T d\sigma_i \quad (4.25)$$

Do mesmo modo feito para equação (4.8):

$$\tau_{n+1}^{(2)} = 0$$

Logo, isolando o termo em $d\sigma_i$, voltando na equação (4.11) e substituindo e isolando o termo referente a mudança do multiplicador plástico, teremos:

$$d\Delta\lambda = \frac{\tau_{n+1} - (m_j^{n+1})^T Q^{-1} r_i}{(m_j^{n+1})^T Q^{-1} E_{ij} m_j^{n+1}} \quad (4.26)$$

Com isso a equação (4.11) pode ser resolvida para as diversas iterações de mudanças de tensão $d\sigma_i$.

4.7 – FORMULAÇÃO DA MATRIZ MODULAR TANGENTE CONSISTENTE

A derivação da forma da matriz de rigidez tangente consistente para o caso bidimensional é apresentada a seguir. Como já visto pela equação (4.6), o algoritmo de Backward-Euler pode ser expresso por:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{pred} - \Delta\lambda E_{ij} m_j^{n+1}$$

Onde σ_{n+1} relata a configuração de tensão atual durante o retorno à superfície de potencial plástico. Diferenciando a equação (4.6) ficamos com:

$$d\sigma_{n+1} = E_{ij} d\varepsilon_j - d\Delta\lambda E_{ij} m_j^{n+1} - \Delta\lambda E_{ij} \frac{\partial m_j^{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} d\sigma_{n+1}$$

Reescrevendo e substituindo pela equação (4.10):

$$d\sigma_{n+1} = Q^{-1} E_{ij} (d\varepsilon_j - d\Delta\lambda m_j^{n+1}) \quad (4.27)$$

De modo a permanecer sobre a superfície de escoamento, $\hat{\sigma}\tau$ deve ser tomado igual a zero, logo da equação (4.12) e definindo R :

$$R = Q^{-1} E_{ij} \quad (4.28)$$

$$(m_j^{n+1})^T d\sigma_i = (m_j^{n+1})^T R d\varepsilon_j - d\Delta\lambda (m_j^{n+1})^T R m_j^{n+1} \quad (4.29)$$

Assim, operando encontraremos a denominada matriz constitutiva algóritmica:

$$d\sigma_i = E_{alg} d\varepsilon_j \quad (4.30)$$

$$E_{alg} = R - \frac{Rm_j^{n+1} (m_j^{n+1})^T R^T}{(m_j^{n+1})^T Rm_j^{n+1}} \quad (4.31)$$

4.8 – Definição da Deformação de Endurecimento Isotópico

O endurecimento isotrópico pode ser introduzido por uma modificação na tensão de escoamento fixa, presente na equação (4.1), através de uma variável de tensão denominada $\sigma_0(\varepsilon_{ps})$, de modo que:

$$\tau = \sigma_e - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) \quad (4.32)$$

A variável tensão de escoamento fica agora em função de uma deformação plástica equivalente na forma:

$$\varepsilon_{ps} = \sum \delta\varepsilon_{ps} = \int \dot{\varepsilon}_{ps}(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

Que é acumulada da equação da deformação plástica, ver CRISFIELD [1991], na forma:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\dot{\varepsilon}_{px} + \dot{\varepsilon}_{py} + \dot{\varepsilon}_{pz} + \dot{\varepsilon}_{px} \dot{\varepsilon}_{py} + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{pzy})^{0.5} \quad (4.34)$$

Sobre uma tensão uniaxial σ_x , teremos:

$$\dot{\varepsilon}_{py} = \dot{\varepsilon}_{pz} = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{px} \quad (4.35)$$

Assim não há nenhuma mudança no volume plástico e $\dot{\varepsilon}_{ps} = \dot{\varepsilon}_{px}$, enquanto $\sigma_e = \sigma_0 = \sigma_x$. Conseqüentemente, a relação entre σ_0 e ε_{ps} pode ser tomada da relação tensão uniaxial e deformação plástica. Em particular, o seguinte item será requerido $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}}$, que da figura 4.2, é:

$$H' = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_{ps}} = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (4.36)$$

Uma vez que o endurecimento é introduzido, a condição de tangencia é modificada .

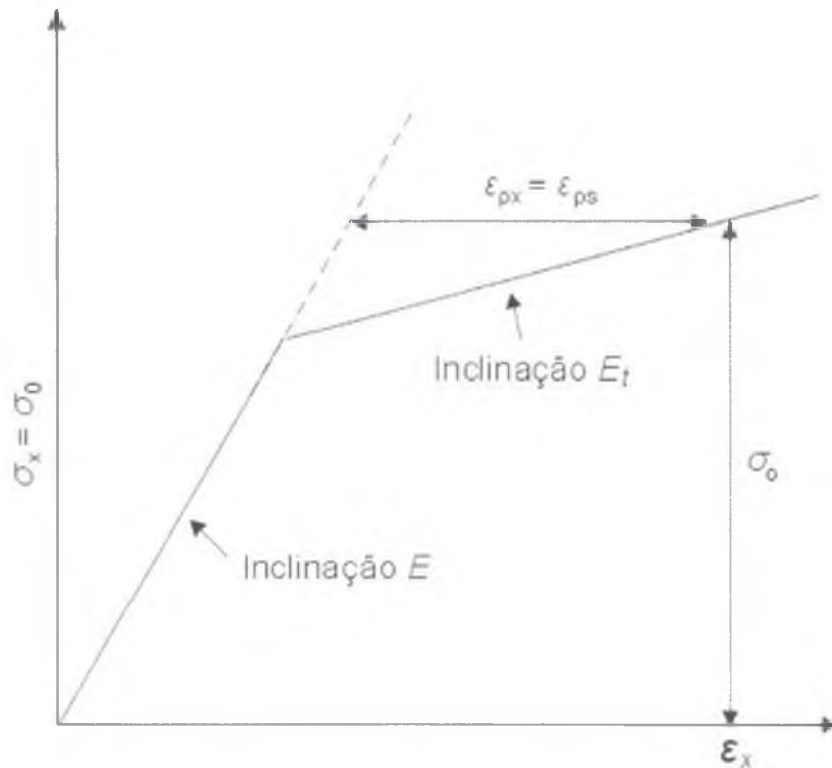


Figura 4.6: Relação entre tensão e deformação unidimensional com endurecimento

Assim:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = m_j^T \dot{\sigma} - H' \dot{\varepsilon}_{ps} = 0 \quad (4.37)$$

Substituindo a equação (4.6) na equação (4.16), teremos:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \dot{\lambda} = B(\sigma) \dot{\lambda} \quad (4.38)$$

Substituindo agora na equação (4.20) em (4.19):

$$\dot{\tau} = m_j^T \dot{\sigma}_j - H' B \dot{\lambda} = m_j^T \dot{\sigma}_j - A' \dot{\lambda} = 0 \quad (4.39)$$

Assim, multiplicando a equação (4.30) por m_j e substituindo na equação (4.21):

$$\dot{\lambda} = \frac{m_j^T E_{ij} \dot{\varepsilon}}{m_j^T E_{ij} m_j + A'} \quad (4.40)$$

Enquanto a equação (4.30) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{\sigma} = E_{alg} \dot{\varepsilon} = E_T \dot{\varepsilon} = E_{ij} \left(I - \frac{m_j m_j^T E_{ij}}{m_j^T E_{ij} m_j + A'} \right) \dot{\varepsilon} \quad (4.41)$$

Para endurecimento linear, A' é uma constante. Para endurecimentos não lineares, varia com ε_{ps} e outras possíveis quantidades. A deformação plástica equivalente pode ser considerada como uma variável interna uma vez que é parte da resposta do material.

4.9 - ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO PARA PLASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

1.) Inicialização: tomar como valores iniciais para os vetores das deformações plásticas os valores convergidos no final do passo de tempo anterior. Inicializar o incremento do multiplicador plástico, os resíduos de tensão e da função de escoamento e o número de iterações:

$$\Delta\lambda^{(0)} = 0 \quad \Delta\tau = 0 \quad r_n = 0 \quad k = 0$$

2) Passo Preditor:

2.1) Calcular o preditor elástico experimental das tensões:

$$\sigma^{(0)} = E[\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p] = E[\Delta\varepsilon_{n+1}^T]$$

2.2) Calcular a derivada direcional de 1ª ordem no ponto experimental elástico (0):

$$m_j^{(0)} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right)^{(0)}$$

2.3) Calcular a função de escoamento de Ducker-Prager : $\tau^{(0)}$;

2.4) Calcular o incremento do fator de carga em (0):

$$\Delta\lambda = \left(\frac{\tau^{(0)}}{m_j^{(0)T} E m_j^{(0)} + A^*} \right) \quad A^* = \frac{E_\tau}{1 - \frac{E_\tau}{E}}$$

2.5) Calcular a tensão de Backward Euler no ponto preditor elástico final:

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(0)} - (\Delta\lambda E m_j^{(0)})$$

2.6) Checar a condição de plastificação do ponto:

$$\tau^{(k)} = \tau(\sigma^{(k)}) \quad \Delta\tau = \tau(\sigma^{(k)}) - \tau_{in}$$

Se:

$$\Delta\tau \leq \text{Tolerância} \longrightarrow \text{Passo Elástico} !!$$

Se não:

k=k+1

3.) Passo Corretor :

3.1) Calcular a derivada direcional de primeira ordem em (1):

$$m_j^{(1)} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right)^{(1)}$$

3.2) Calcular a função de escoamento de Ducker-Prager $\tau^{(1)}$:

3.3) Calcular o resíduo entre a função de Backward Euler e a tensão atual:

$$r_0 = \sigma^{(1)} - [\sigma^{(1)} - (\Delta\lambda E m_j^{(1)})]$$

3.4) Calcular a derivada direcional de segunda ordem em (1):

$$\left(\frac{\partial m_j}{\partial \sigma}\right)^{(1)} = \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \sigma^2}\right)^{(1)}$$

3.5) Calcular a matriz Q e sua inversa:

$$Q = \left[I + \Delta \lambda E \left(\frac{\partial m_j}{\partial \sigma}\right)^{(1)} \right] \quad \beta^{(1)} = Q^{-1}$$

3.6) Calcular o incremento da variação do fator de cargas:

$$\delta \lambda = \frac{\tau^{(1)} - m_j^{(1)T} \beta^{(1)} r_0}{m_j^{(1)T} \beta^{(1)} E m_j^{(1)}}$$

3.7) Calcular o incremento de tensão:

$$\delta \sigma = -\beta^{(1)} r_0 - \delta \lambda^{(1)} \beta^{(1)} E m_j^{(1)}$$

3.8) Atualizar as tensões e o fator de cargas:

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} + \delta \sigma$$

$$\Delta \lambda^{(2)} = \Delta \lambda^{(1)} + \delta \lambda$$

3.9) Checar a condição de escoamento e a convergência na Kth iteração:

$$\tau^{(k)} = \tau(\sigma^{(k)}) \quad r_r^{(k)} = r(\sigma^{(k)})$$

Se:

$$\tau^{(k)} < Tol1, \quad k < k_{MAX} \quad e \quad \|r_r^{(k)}\| < Tol2 \longrightarrow \text{convergiu!}$$

Se não:

k=k+1, volte ao início do passo 3

4.6 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A subrotina Backward-Euler é a responsável pela integração numérica do elemento quadrilátero representante do concreto. Sua função é fazer o retorno do estado tensional do ponto de Gauss para a superfície de escoamento através do algoritmo implícito de retorno de Backward Euler. Sua implementação computacional é mostrada nos fluxogramas das figuras 4.8 e 4.9 .

Subrotina DESV_FLUJO : Calcula o tensor desviador das tensões , sua norma e fluxo plástico para o critério de Drucker-Prager.

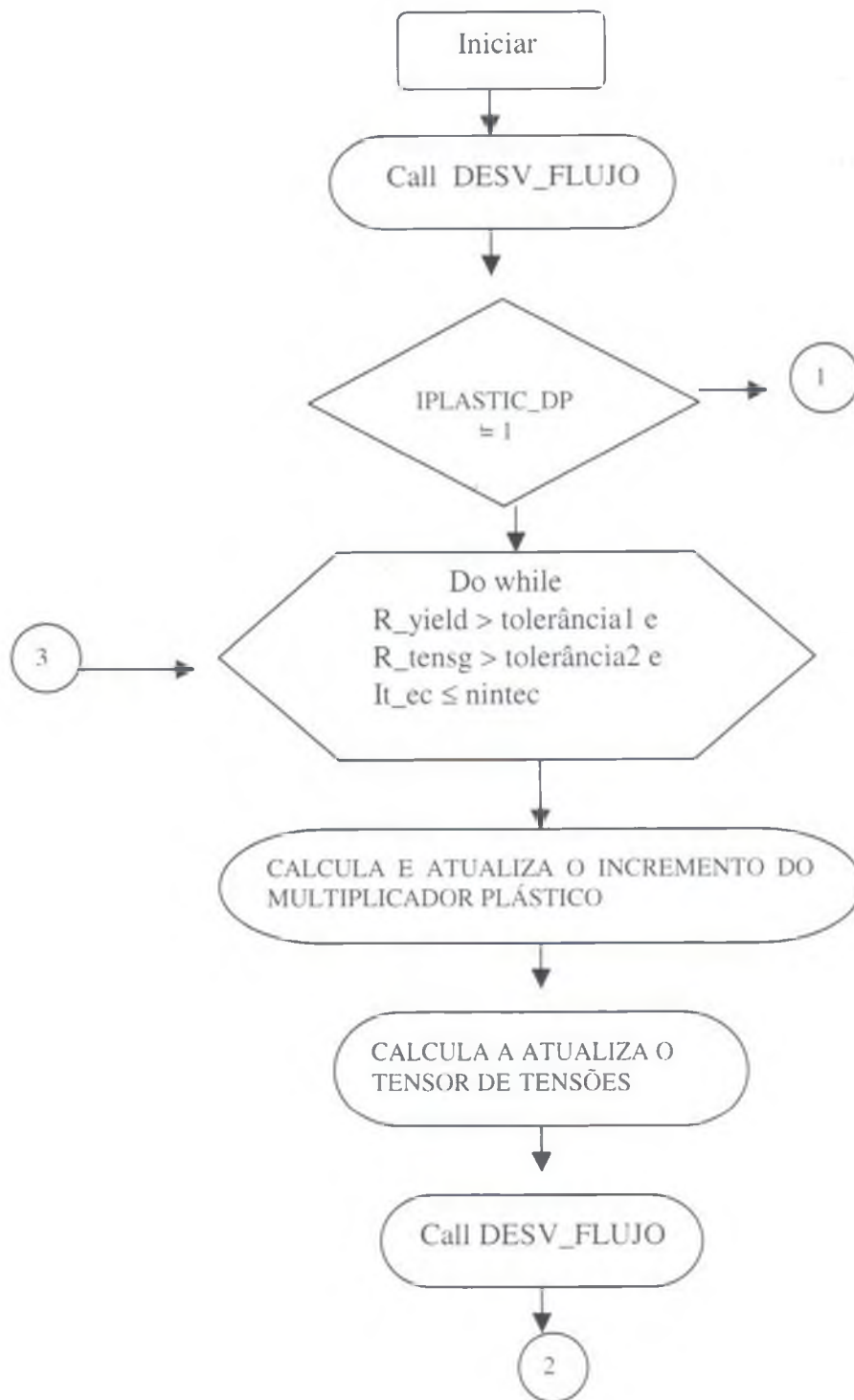


Figura 4.7: Fluxograma da rotina de retorno a superfície de escoamento – Parte A

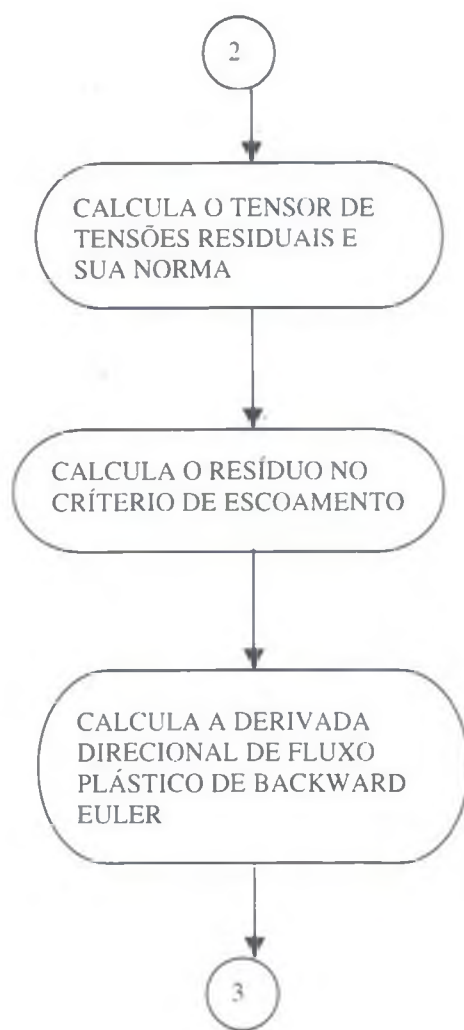


Figura 4.8: Fluxograma da rotina de retorno a superfície de escoamento – Parte B

CAPÍTULO 5

ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

5.1 - INTRODUÇÃO

A análise não-linear de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos requer a aplicação de uma estratégia capaz de descrever de modo eficiente e confiável a relação entre carga versus deslocamento da estrutura. Uma vez que a discretização da equação de equilíbrio envolvida no problema conduz a um sistema de equações algébricas não lineares, procedimentos do tipo incrementais/iterativos e critérios de convergência que monitorem, de forma automática, o progresso da solução em andamento serão necessários.

Os temas tratados neste capítulo descrevem os métodos de continuação. No item 5.2 são discutidos a natureza não-linear do problema enfrentado e os distintos comportamentos de sistemas estruturais que podem ser estudados, levando em conta este tipo de solução. Justifica-se, assim, a utilização dos métodos incrementais iterativos com controle de resposta na obtenção da solução destes problemas. Os trabalhos de SEYDEL [1994], CARVALHO [2001], FAFARD & MASSICOTTE [1993], RAMM [1984], RICKS [1972] e MATIAS [1996] formaram à base teórica para este capítulo.

Uma descrição das equações que governam os fenômenos da não-linearidade geométrica em estruturas é feita e são introduzidos os conceitos de parâmetro e matriz de controle, que serão utilizados na obtenção da solução do problema durante seu caminho na trajetória de equilíbrio conforme apresentado em MATIAS [1996]. Apesar da não-linearidade geométrica não ser considerada nesta dissertação, o procedimento de solução adotado e alguns conceitos normalmente aplicados a este tipo de fenômeno serão amplamente utilizados na determinação do problema da não-linearidade do material apresentado nesta dissertação.

O item 5.2 apresenta de maneira formal o método de Newton-Raphson. Este esquema iterativo de solução é o procedimento mais comum na solução das equações de equilíbrio não lineares via método dos elementos finitos conforme mostrado em BATHE [1982], justificando, assim, sua utilização nesta dissertação.

Nos itens de 5.2.2 a 5.2.3 a trajetória fundamental não linear que expressa a relação entre uma variável de estado e o parâmetro de controle é definida. Serão definidos também o vetor incremental de fluxo de forças residuais e o vetor de velocidade incremental, necessários nos procedimentos de solução dos métodos de continuação. Os esquemas do tipo predição-correção são conceituados e a base para sua aplicação é mostrada em detalhes. Os parâmetros característicos dos métodos de continuação da resposta, via esquema preditor-corretor, são descritos segundo o trabalho de MATIAS [1996]. A equação de restrição eleita para utilização neste trabalho de dissertação é mostrada e sua implementação discutida e explicitada.

O item 5.2.4 mostra como os pontos críticos se caracterizam e sua relação com a perda da estabilidade dos sistemas estruturais. Os pontos limite e de bifurcação são definidos e o parâmetro de rigidez corrente ou de Bergan é mostrado para controle numérico da matriz de rigidez da estrutura conforme apresentado em BERGAN [1978] e CARVALHO [2001].

No item 5.6 a implementação computacional é comentada e um fluxograma com as rotinas necessárias apresentado.

5.2 – EXPRESSÕES GERAIS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

5.2.1 – ESQUEMA DE SOLUÇÃO DE NEWTON-RAPHSON

A equação básica a ser resolvida numa análise não-linear é, num período de t para $t + \Delta t$, desconsiderando as forças inerciais é:

$${}^{t+\Delta} \psi(u) = {}^{t+\Delta} R - {}^{t+\Delta} F(u) = 0 \quad (5.1)$$

Onde:

- ${}^{t+\Delta} \psi(u)$: é o vetor das forças não-balanceadas ou residuais ;
- ${}^{t+\Delta} R$: é o vetor das cargas externas aplicadas ;
- ${}^{t+\Delta} F(u)$: é o vetor das forças internas resistentes ;
- u : é o vetor dos deslocamentos nodais.

Os requerimentos de equilíbrio, via o método dos elementos finitos considerados para encontrar a solução do problema iterativo proposto na i -ésima iteração, podem ser postos na forma das equações:

$$\psi(u^*) = 0 \quad (5.2)$$

Onde:

$$\psi(u^*) = {}^{t+\Delta} R(u^*) - {}^{t+\Delta} F(u^*) \quad (5.3)$$

Assumamos que a solução iterativa seja utilizada para obter ${}^{t+\Delta} u^{(i-1)}$. Uma expansão em série de Taylor poderá ser utilizada de forma a aproximar a solução requerida:

$$\psi(u^*) = \psi({}^{t+\Delta} u^{(i-1)}) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} \right]_{u = {}^{t+\Delta} u^{(i-1)}} (u^* - {}^{t+\Delta} u^{(i-1)}) + o\delta \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.4) na equação (5.3) e usando a equação (5.2), teremos:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial u} \right]_{t+\Delta t, u^{(i-1)}} (u^{*t+\Delta t} - u^{(i-1)}) + o_s = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (5.5)$$

Implicitamente, assume-se que as cargas externas aplicadas independem das deformações. Desconsiderando-se os termos de ordem superior na equação (5.5), é possível calcular um incremento dos deslocamentos na forma:

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (5.6)$$

Onde ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ é a matriz de rigidez tangente atualizada, sendo:

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} \right]_{t+\Delta t, u^{(i-1)}} \quad (5.7)$$

É a solução possível em termos de deslocamento é:

$${}^{t+\Delta t}u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \quad (5.8)$$

As relações presentes nas equações (5.6) e (5.8) constituem a solução da equação (5.1). Uma vez que a análise incremental é iniciada com um passo de tempo (ou de carga) Δt , as condições iniciais nas iterações são ${}^{t+\Delta t}K^{(0)} = {}^t k$, ${}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^t F$ e ${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^t U$. As iterações são mantidas até que um apropriado critério de convergência seja satisfeito. Uma característica destas iterações é que uma nova matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração, devido a isso, este método é conhecido como método de Newton padrão ou completo. A figura 5.1 ilustra o processo de solução para um simples grau de liberdade do sistema. A resposta não-linear característica é encontrada uma vez que a convergência é rapidamente obtida.

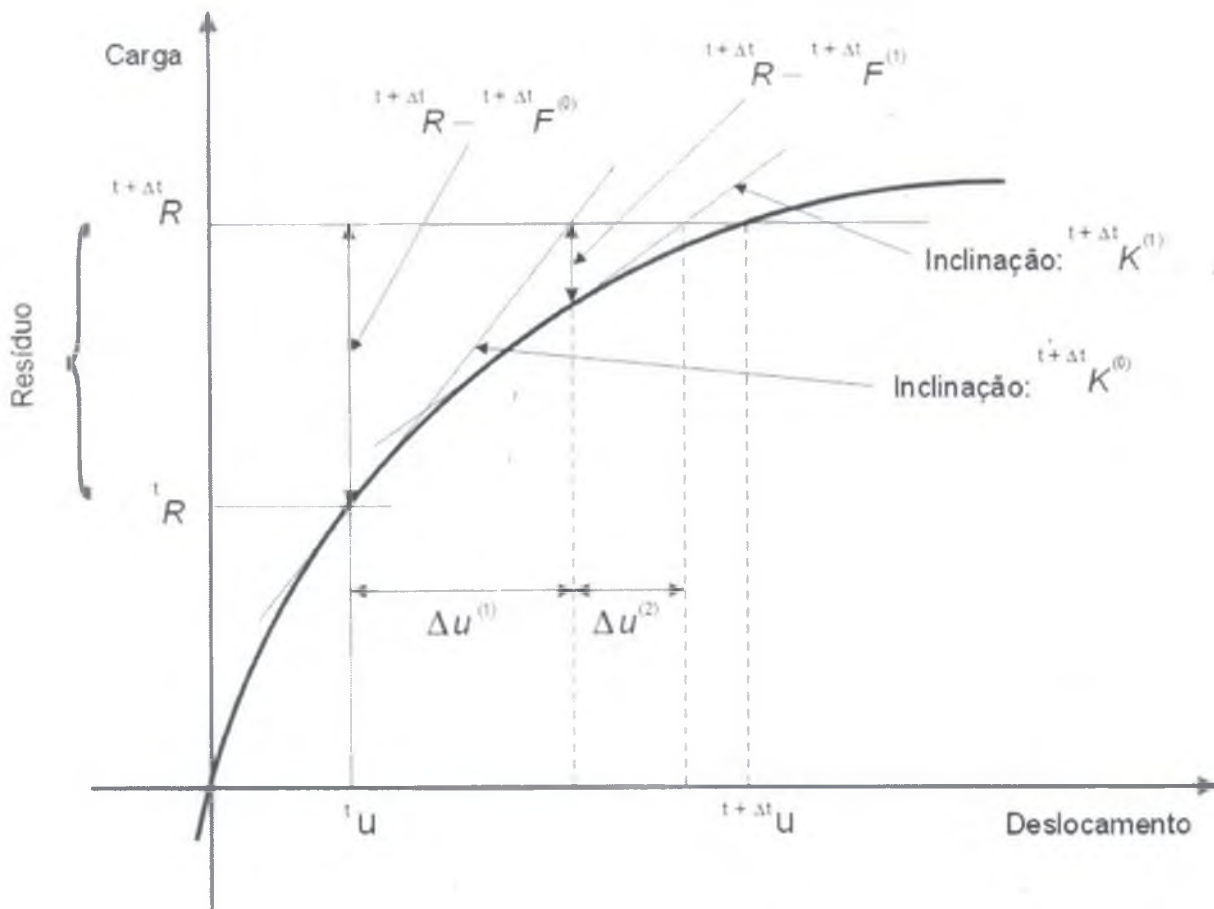


Figura 5.1: Método de Newton-Raphson para um grau de liberdade.

Veja que ambos os vetores na equação (5.1) são calculados, usando o princípio dos deslocamentos virtuais. As iterações de Newton-Raphson, assumindo uma independência das cargas em relação as deformações, ou seja desconsiderando a não-linearidade geométrica podem então ser aplicadas, ficando na forma:

$$\begin{aligned}
 \psi^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \\
 {}^{t+\Delta t} K^{(i-1)} \Delta u^{(i)} &= \psi^{(i-1)} \\
 {}^{t+\Delta t} u^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \\
 {}^{t+\Delta t} F^{(0)} &= F \\
 {}^{t+\Delta t} u^{(0)} &= {}^t u
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Conforme verificado, essas equações são obtidas pela linearização da resposta do sistema em análise, via o método dos elementos finitos, na forma da expansão em série de Taylor, de modo a avançar com a solução do problema do tempo t para $t + \Delta t$, primeiramente aplicando as iterações de equilíbrio em $(i - 1)$. Em cada iteração será calculada a equação (5.9a), o vetor de forças não-balanceadas ou residuais que se tornarão incrementos de deslocamentos obtidos via a equação (5.9b) assim as iterações serão executadas até que o vetor de forças não-balanceadas $\psi^{(i-1)}$ ou os incrementos de deslocamentos sejam suficientemente pequenos quando comparados a uma determinada tolerância adotada.

5.2.2 – PROCEDIMENTOS DE CONTINUAÇÃO NA TRAJETÓRIA NÃO LINEAR

Um importante requerimento da análise não-linear é frequentemente o cálculo da carga de colapso plástico de uma estrutura submetida a um determinado carregamento. A figura 5.2 abaixo ilustra esquematicamente a resposta do modelo estrutural utilizado sobre a ação das cargas aplicadas. Observe que para pequenas cargas a resposta obtida no gráfico entre carga e deslocamento é linear.

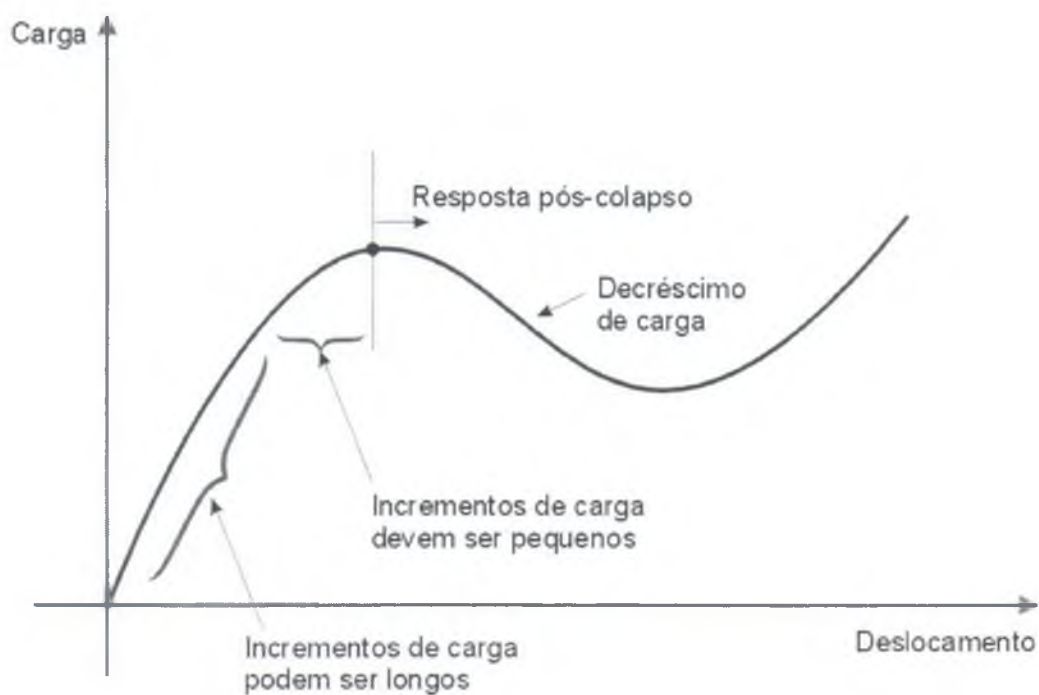


Figura 5.2: Resposta de um modelo estrutural no colapso.

Então, à medida que os incrementos de carga são efetuados, a resposta da estrutura se torna não-linear e no ponto A carga de colapso é encontrada. A resposta encontrada, após o ponto A, é referida como resposta pós-colapso ou pós-ruptura. Note que na figura 5.2, que a carga decresce num primeiro momento e posteriormente cresce novamente com os incrementos de deslocamento. É claro que a resposta apresentada na figura 5.2 é simplista, sendo assim, uma representação genérica, porque, numa análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade, a superfície multidimensional de resposta é muito complexa. No entanto, a figura 5.2 mostra bastante claramente todas as características essenciais da análise.

De modo a calcular a resposta na figura 5.2, inicialmente grandes incrementos de deslocamentos podem ser adotados, mas uma vez que a aproximação da carga de colapso do modelo estrutural acontece, os incrementos de carga devem se tornar pequenos e aparecerão dificuldades para transpor o ponto de colapso da estrutura. Neste ponto, a matriz de rigidez é singular (a inclinação da curva de resposta - carga versus deslocamento - é nula) e posteriormente a este ponto um procedimento de controle para decréscimo de carga e incremento de deslocamento deve ser usado para calcular a trajetória de continuação da resposta.

Para encontrar a resposta mostrada esquematicamente na figura 5.2, os métodos de continuação da resposta entre carga deslocamento, comuns na análise não-linear geométrica, podem ser utilizados, conforme será apresentado de maneira formal. A idéia básica destes métodos é introduzir um multiplicador de cargas que adiante e diminua a intensidade das cargas aplicadas, de modo a obter uma convergência rápida em cada passo de carga, para permitir a obtenção da resposta na passagem através do ponto de colapso e também calcular a trajetória da resposta pós-colapso.

Vários esquemas eficientes têm sido propostos com uma série de detalhes numéricos importantes conforme pode ser observado nos trabalhos de CRISFIELD [1991], RAMM [1984], RIKS [1972] entre outros. A hipótese, básica deste tipo de análise é que o vetor de cargas varia proporcionalmente durante o calculo da resposta. A equação de equilíbrio governante pelo método dos elementos finitos se dará então na forma:

$$\psi_i(\gamma_i) = \gamma_i R - F_i \quad (5.10)$$

Onde γ é um escalar denominado fator de carga, desconhecido e a ser determinado, e R é o vetor de carga referencial para os N graus de liberdade do modelo de elementos finitos adotado. Este vetor pode conter qualquer carga presente na estrutura analisada, porém, é constante durante o cálculo da resposta. O vetor F é o vetor das N forças internas equivalentes dos elementos em cada nó da estrutura do tempo t para $t + \Delta t$. O valor do fator de carga pode ser incrementado ou diminuído e o incremento do passo deve ser, em geral, também mudado, dependendo da resposta estrutural característica. Uma vez que a equação (5.10) representa N equações teremos $N+1$ incógnitas; precisaremos, então, de uma equação adicional que será utilizada para determinar o fator de carga. Se um dos diferentes métodos de continuação for aplicado para resolver a equação (5.10), obtêm-se:

$${}^t K \Delta u^{(i)} = ({}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} + \Delta \gamma^{(i)}) R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (5.11)$$

As incógnitas nas N equações (5.11) são o vetor dos incrementos de deslocamento Δu , dentro de um passo de carga (durante a iteração i), e $\Delta \gamma$ representa o correspondente incremento total do fator de cargas. O efeito da variação do nível de cargas durante o processo iterativo será explicado posteriormente.

Um completo algoritmo de solução baseado nos procedimentos de continuação de resposta entre carga e deslocamento com a utilização do método de Newton-Raphson, deve, é claro, conter um esquema especial para inicializar a solução incremental, além de conter procedimentos auto-adaptativos para selecionar os comprimentos de passos envolvidos na atualização das variáveis. Também, o algoritmo deverá parar as iterações quando detectar divergência eminente e então reinicializar automaticamente com novos parâmetros iterativos.

5.2.3- MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO DA RESPOSTA

Denominam-se métodos de continuação aos conjuntos de procedimentos utilizados para obtenção da solução em uma seqüência de pontos que formam uma trajetória ou um caminho de equilíbrio. O objetivo de qualquer método de continuação é gerar uma seqüência de soluções. Cada uma das soluções serve de ponto de partida para a próxima. Os elementos básicos de um método de continuação: sistema de equações não-lineares, sua forma incremental (via expansão em série de Taylor etc) a partir do qual se pode eleger uma predição e uma estratégia de avanço para próxima solução através de uma equação de restrição. A seguir é descrita a estrutura básica das equações de forças não-balanceadas ou residuais para análise não-linear.

Um sistema discreto de equações não-lineares, que governam os problemas quase-estáticos com não-linearidade geométrica, são descritos na forma:

$$\psi(u, p) = 0 \quad (5.12)$$

Onde u é um vetor de estado com N componentes que caracterizam a configuração deformada do sólido, ψ é o vetor de forças desbalanceadas ou residuais que contém as forças não-equilibradas conjugadas com u e p . Sendo p o vetor que contém os parâmetros de controle. Supõe-se que exista a dependência de ψ com relação a u e p , de forma independente do caminho ou trajetória seguido. Também a relação de dependência é contínua e que suas derivadas, primeira e segunda, existam exceto em pontos críticos isolados. Obtém-se a matriz de rigidez tangente, tomando as derivadas das forças residuais com respeito a variável de estado u , sendo que a derivada de ψ (com sinal negativo) com respeito aos parâmetros de controle constituem a matriz de controle Q . Assim, estas matrizes ficam na forma:

$$K = \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad e \quad Q = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \quad (5.13)$$

As derivadas primeiras do vetor de forças residuais da equação (5.13) permitem classificar os pontos obtidos na solução da equação (5.12) de acordo com as características de K e Q . Duas são as possibilidades de pontos: aquele onde o inverso da matriz de rigidez tangente K^{-1} existe

e são denominados pontos regulares; os pontos onde o matriz de rigidez é singular se denominam pontos singulares ou pontos críticos. Através da matriz de controle Q é possível classificar os pontos críticos em pontos limites e pontos de bifurcação.

5.2.3.1 – REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS

Nos pontos regulares da solução da equação (5.12) podemos expressar as variáveis de estado representadas pelo vetor u , em termos das componentes do vetor de parâmetro de controle p . Isto equivale a parametrizar a resposta em função das componentes de p , ou seja, $u(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc})$. No entanto, esta representação nem sempre é possível. Este é o caso dos pontos singulares, uma vez que perto destes pontos pode existir mais de uma solução para um mesmo valor dado de p . Como consequência, há necessidade de uma parametrização local conforme pode ser visto em SEYDEL [1991]. A inconveniência de se considerar a existência de diversas parametrizações em diferentes pontos da curva de solução pode ser evitado, ao menos teoricamente, considerando a resposta num sentido mais geral. Sendo assim, a solução da equação (5.12) pode representar uma superfície no espaço de dimensão $N+K$, correspondente as N variáveis de estado de u e os K parâmetros de controle de p . Para descrever esta superfície se considera uma representação paramétrica para os vetores u e p , na seguinte forma:

$$u = u(t) \quad e \quad p = p(t) \quad (5.14)$$

A variável t é uma variável que representa o nível de progresso do vetor de estado e dos parâmetros de controle. As derivadas primeira e segunda do vetor de forças residuais com respeito a variável t se expressam, em notação indicial, como:

$$\dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \dot{u}_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \quad (5.15)$$

$$\ddot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \ddot{u}_j + \left[\frac{\partial^2 r_i}{\partial u_j \partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial u_j \partial p_k} \dot{p}_k \right] \dot{u}_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \ddot{p}_j + \left[\frac{\partial^2 r_i}{\partial p_j \partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial p_j \partial p_k} \dot{p}_k \right] \dot{p}_j \quad (5.16)$$

E na sua forma matricial, de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= K \dot{u} - Q \dot{P} \\ \ddot{\psi} &= K \ddot{u} + \dot{K} \dot{u} - Q \ddot{P} - \dot{Q} \dot{P}\end{aligned}\tag{5.17}$$

Onde as derivadas de K e Q são matrizes. Seus componentes (i,j) , são definidos através das expressões entre colchetes na equação (5.16). Os termos com as segundas derivadas, por sua vez, são vetores tridimensionais (“matrizes cúbicas”); as derivadas de K e Q são projeções destes vetores no subespaço que contém as direções das derivadas de u e p , ver em FELIPPA [1987]. Os pontos sobre matrizes e vetores na equação (5.17b) representam a diferenciação das componentes destas mesmas matrizes e vetores com respeito a t . As expressões das equações anteriores representam um sistema de equações diferenciais de primeira e segunda ordem das forças desequilibradas ou residuais com respeito ao parâmetro t .

5.2.3.2 – PARÂMETRO DE CONTROLE SIMPLIFICADO

Como definido na equação (5.12), o vetor P contém um conjunto de parâmetros. Cada parâmetro pode estar associado a um certo modelo de carga. Existirão tantos parâmetros quanto modelos de carga a representar. A história completa de uma solicitação externa consiste em um conjunto de seqüências de cargas aplicadas num intervalo de tempo $[0,T]$. Estas seqüências especificam como e quando são aplicados os diferentes tipos de cargas no sólido. Por exemplo, considere um sólido indeformado. Em primeiro lugar, se aplicam as forças de volume; em continuação é submetido a uma queda de temperatura e num dado instante uma carga dinâmica é aplicada. Cada seqüência de carga inicia-se num estado inicial A , onde a solução é conhecida u_a , avançando em seguida para um estado B , onde não se conhece a solução u_b , ou pode não existir para o nível de carga definido no estado B . Supondo-se que as componentes de P variam proporcionalmente entre os estados A e B , é possível modelar o processo de carga em cada etapa em função de um parâmetro de controle λ que varia de 0 a 1 de acordo com a interpolação linear:

$$p = (1 - \gamma)p_A + p_B\tag{5.18}$$

Desta maneira, o sistema de equações não-linear a resolver em cada etapa (de A para B) é:

$$\psi(u, \gamma) = 0 \quad (5.19)$$

Com a condição inicial de $u=u_A$ para $\gamma=0$.

Se cada etapa pode ser representada por um simples parâmetro de controle, a matriz de controle Q se transforma em um vetor R, denominado vetor incremental. Assim, as derivadas de primeira e segunda ordem do vetor de forças desequilibradas ou residuais com respeito ao parâmetro t são reescritas na forma:

$$\dot{\psi} = K \dot{u} - R \dot{\gamma} \quad (5.20)$$

$$\ddot{\psi} = K \ddot{u} + \dot{K} \dot{u} - R \ddot{\gamma} - \dot{R} \dot{\gamma}$$

Estas são as formas simplificadas dos sistemas de equações diferenciais de primeira e segunda ordem das equações (5.17), respectivamente.

Desta maneira, fazendo a diferenciação da equação (5.19) com respeito a variável t, obtêm-se:

$$\dot{\psi} = K \dot{u} - R \dot{\gamma} = 0 \quad (5.21)$$

Esta equação define uma superfície no espaço de dimensão N+1, correspondente as N componentes do vetor u e o parâmetro de controle γ . Esta superfície é denominada de superfície de fluxo incremental de forças desequilibradas ou residuais.

5.2.3.3 – TRAJETÓRIA FUNDAMENTAL NÃO LINEAR

A solução geral do sistema de equações apresentado em (5.21) é:

$$\psi(u, \gamma) = \psi_c \quad (5.22)$$

Onde ψ_c é um vetor de forças desequilibradas ou residuais arbitrários. A solução $u(t)$, $\gamma(t)$ da equação (5.22), para um valor fixo de ψ_c , representa uma superfície no espaço de N+1

dimensões. A projeção desta superfície em um plano definido pelo k-ésimo componente do vetor u e pelo parâmetro de controle γ , ou seja, (u_k, γ) , define uma trajetória neste plano. A curva definida no plano (u_k, γ) para o valor de $\psi_c=0$ se denomina trajetória fundamental não-linear de equilíbrio ou caminho primário de equilíbrio. Desta maneira, o fluxo incremental de forças desequilibradas ou residuais contém a trajetória fundamental (primária) não linear de equilíbrio quando $\psi_c=0$.

Nos pontos regulares do fluxo incremental de forças desequilibradas ou residuais, onde a matriz de rigidez da estrutura é não singular, a equação (5.21) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{u} = K^{-1} R \dot{\gamma} = u_R \dot{\gamma} \qquad u_R = K^{-1} R \qquad (5.23)$$

Onde u_R se denomina vetor de velocidade incremental. Este vetor tem um importante papel na maioria dos procedimentos de solução como se verá a seguir. No caso de elegermos como parâmetro $t \equiv \gamma$, isto implica que a derivada de γ em relação a t é igual à unidade. E a equação (5.20) se reduz a:

$$\dot{\psi} = K \dot{u} - R \qquad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \qquad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} \qquad (5.24)$$

O sistema de equações não lineares (5.24) representa a forma incremental de primeira ordem do sistema de equações (5.20).

Em cada ponto arbitrário $P(u, \gamma)$, do fluxo incremental de forças desequilibradas ou residuais, se pode definir um vetor tangente t à trajetória que passa por P como:

$$t = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_R \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (5.25)$$

Onde o vetor de incremento de velocidade u_R é a projeção do vetor tangente t no espaço das variáveis de estado u . A figura 5.3 mostra a interpretação geométrica de t .

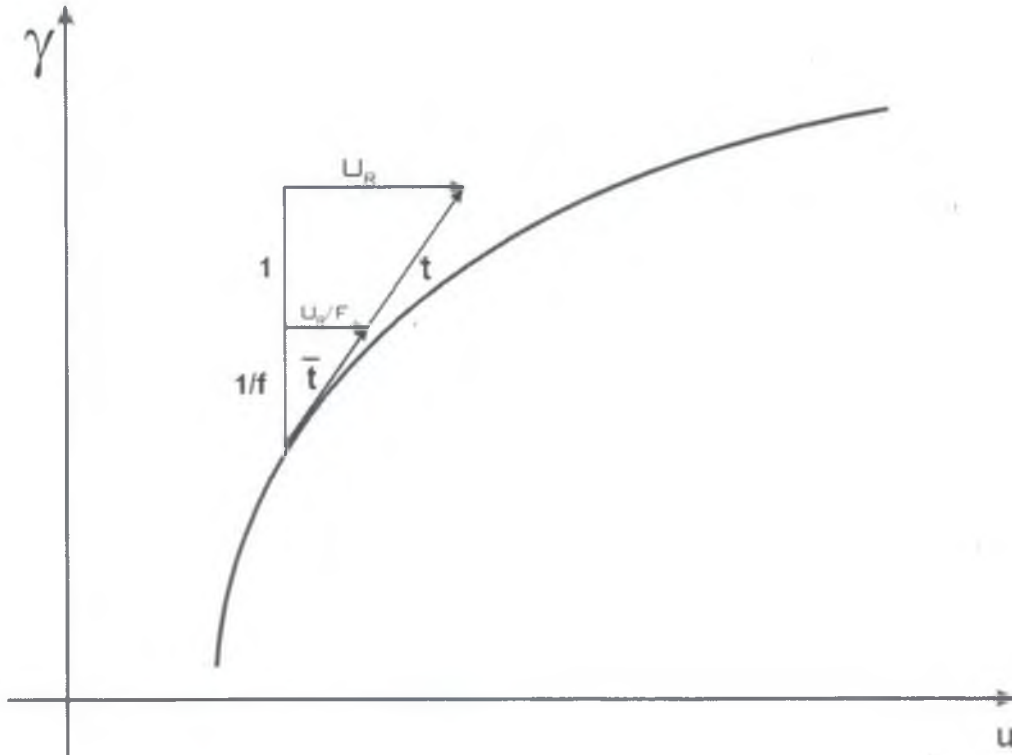


Figura 5.3: Vetor da trajetória fundamental de equilíbrio.

O vetor tangente t pode ser normalizado da seguinte maneira:

$$\bar{t} = \frac{1}{f} t \qquad f = \sqrt{1 + u_R^T u_R} \qquad (5.26)$$

A normal ao vetor t no ponto regular P se expressa através da seguinte equação:

$$u_R^T \Delta u + \Delta \gamma = 0 \qquad (5.27)$$

Onde $\Delta u = u - u_P$ e $\Delta \gamma = \gamma - \gamma_P$ são os incrementos de deslocamentos e de cargas, respectivamente, a partir do ponto P . Dividindo estes incrementos por Δt e aplicando o limite de $\Delta t \rightarrow 0$ se obtêm a forma diferencial da equação (5.27) na forma:

$$u_R^T \dot{u} + \dot{\gamma} = 0 \quad (5.28)$$

Esta equação se reduz a $u_R^T u' = -1$ se $t \equiv \gamma$. Para problemas com um grau de liberdade ($N=1$) a equação anterior representa uma curva ortogonal ao fluxo incremental de forças desequilibradas ou residuais. Se $N > 1$, a equação (5.28) descreve as equações diferenciais de uma família de hiperplanos ortogonais no espaço de $N + 1$, que contém o vetor u e o parâmetro de controle γ .

5.2.3.4 – SOLUÇÃO VIA ESQUEMA PREDIÇÃO-CORREÇÃO

A metodologia de resolução de um sistema de equações não lineares é baseada na utilização de algoritmos de solução incrementais-iterativos. Naturalmente, os métodos de continuação incorporam estes algoritmos.

Assumamos que a última solução da equação (5.1) tenha sido calculada. Denominaremos a esta primeira solução de da trajetória de (y^1, γ_1) . O problema da continuação é calcular o caminho a ser seguido. Basicamente isso significa calcular as seguidas soluções do caminho, na forma:

$$(u^2, \gamma_2), (u^3, \gamma_3), (u^4, \gamma_4), \dots$$

Até que seja encontrado o ponto procurado da trajetória. O passo de continuação j th é iniciado por uma aproximação da solução (y^j, γ_j) da equação (5.1) e deve prosseguir calculando a solução (u^{j+1}, γ_{j+1}) . Sendo assim teremos:

$$(u^j, \gamma_j) \rightarrow (u^{j+1}, \gamma_{j+1}) \quad (5.28)$$

Com a utilização dos métodos de predição-correção, o passo dado $j \rightarrow j + 1$ é dividido em dois passos:

$$(u^j, \gamma_j) \xrightarrow{\text{Preditor}} (\bar{u}^{j+1}, \bar{\gamma}^{j+1}) \xrightarrow{\text{Corretor}} (u^{j+1}, \gamma_{j+1}) \quad (5.29)$$

Em geral, o preditor (u, γ) não é a solução da equação (5.1). A predição funciona como um “chute” inicial para as iterações do passo corretor em direção à solução da equação (5.1). Na figura (5.4), as iterações são indicadas por pontos. A maior porção do trabalho a ser feito é tanto executado pelo passo preditor de modo a resultar numa boa aproximação da trajetória buscada como no passo corretor caso a predição seja distante do ponto pertencente à mesma. A distância entre dois passos consecutivos é denominado comprimento do passo.

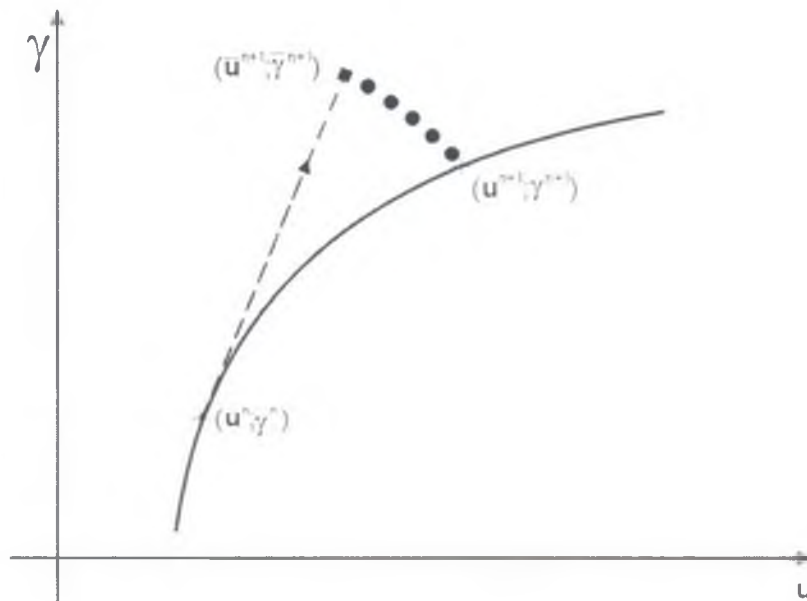


Figura 5.4: Solução obtida por um método preditor-corretor.

Por hora se abordam estes conceitos de forma mais geral, no entanto, calcular esta medida de distância não é fácil, uma vez que não conhecemos u_{n+1} . Por exemplo, o tamanho da predição é também denominado tamanho do passo. Ainda, assim, a equação (5.19) necessitará de uma relação que identifique a localização da solução na trajetória de equilíbrio. Como será

apresentada posteriormente, esta identificação dependerá da estratégia de parametrização utilizada para traçar o caminho.

Os métodos de continuação se diferenciam, entre outras características, pelos seguintes parâmetros:

1. Predição;
2. Estratégia de parametrização;
3. Correção;
4. Controle do tamanho do passo.

Os três primeiros temas podem ser considerados de forma independente um do outro, no entanto, a variável do controle de tamanho do passo deve corresponder diretamente o tipo de predição, de estratégia de parametrização e de correção eleitos.

Supõem-se, durante a predição do passo $n + 1$, que a solução do problema é obtida para (u_{n+1}, γ_{n+1}) sem a necessidade de serem feitas correções adicionais. Assim, os incrementos das variáveis de controle e do parâmetro de controle do passo n até o passo $n+1$ podem ser expressas na forma:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n \quad (5.30)$$

$$\Delta \gamma = \gamma_{n+1} - \gamma_n \quad (5.31)$$

Para a determinação desses, incrementos a equação (5.19) deve ser verificada. Desta maneira, o sistema de equações considerado possui $N+1$ incógnitas para N equações, conseqüentemente, problema se mostra indefinido. De forma a tornar o sistema definido, devemos acrescentar ao sistema uma equação adicional. Este procedimento é denominado estratégia de controle incremental, sendo dito que estabelece uma condição de restrição sobre as incógnitas do problema. Esta condição de restrição se expressa na forma:

$$f(\Delta u, \Delta \gamma) = 0 \quad (5.32)$$

Uma condição de restrição pode ser interpretada como um tipo de norma do espaço de solução de dimensão (N+1). Assim, esta condição especifica uma certa distância entre a solução anterior do passo n e a nova do passo n+1. Além do mais, a condição de restrição contém inerentemente a parametrização efetuada sobre as equações (5.14). Diferenciando a equação de restrição com respeito a t, obtêm-se:

$$\frac{\partial f^T}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = 0 \quad (5.33)$$

ou

$$a^T \dot{u} + g \dot{\gamma} = 0 \quad (5.34)$$

Sendo assim, a equação (5.30) representa a forma algébrica da equação de restrição, sendo que a equação (5.31) denota sua forma diferencial. Uma série completa dos tipos e características das equações existentes é apresentada em MATIAS [1996]. Apresenta-se, abaixo, apenas a equação de restrição eleita para utilização nesta dissertação.

A. Equação de restrição com controle através de um hiperplano.

Neste tipo de restrição se controla uma longitude que pertence a um hiperplano definido pela seguinte equação:

$$\frac{1}{u^2} u_R^T \Delta u_n + \Delta \gamma_n = s^2 \quad (5.35)$$

Onde u é um parâmetro que escala os termos em deslocamentos e s é a longitude do passo. A equação (5.35) representa um hiperplano normal ao vetor tangente definido em (5.25).

Quando $u=1$, este método se denomina controle da longitude de arco; ou simplesmente método da longitude de arco.

5.2.3.5 – AVANÇO NA TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO

Alguns ingredientes básicos são necessários quando da utilização de métodos iterativos de solução. Primeiramente, um passo ou aproximação inicial da solução que denominaremos de predição. Posteriormente, se necessário, um passo corretor que melhora gradualmente a predição deverá ser introduzido. Também um esquema de parametrização a ser adotado deverá ser capaz de excitar o problema na busca da trajetória de equilíbrio, e conjuntamente, montar uma estratégia capaz de avaliar o tamanho do incremento e controlar automaticamente o mesmo fazendo com que o processo de continuação da resposta avance.

Sendo assim, após a eleição da estratégia de controle do tamanho do incremento, caracterizado pelo parâmetro s , e a condição de restrição sobre as incógnitas (Δu_n e $\Delta \gamma_n$), o avanço na solução da solução pode então continuar para o próximo incremento de passo. Supõem-se então que u_n e γ_n sejam a solução convergida em cada passo incremental n . Assim, problema se resume em encontrar uma solução que satisfaça a equação de equilíbrio (5.22) e uma equação de restrição que pode ser dada pela equação (5.32). Logo, teremos um sistema aumentado de equações na forma:

$$\psi[u(s), \gamma(s)] = 0 \tag{5.37}$$

$$f[u(s), \gamma(s), s] = 0$$

Como queremos nos aproximar da solução do problema, poderemos então aplicar uma linearização, via série de Taylor, ao sistema aumentado de equações, considerando a parametrização em torno da variável s , ficando com:

$$\frac{f^{k+1}}{\partial s} = \frac{f^k}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + os \tag{5.38}$$

$$\frac{\psi^{k+1}}{\partial s} = \frac{\psi^k}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + os$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= K_T & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} &= -R & \frac{\partial f}{\partial u} &= f_u^T & \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= f_\gamma \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \dot{u} & \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \dot{\gamma} & \frac{\partial f^k}{\partial s} &= \dot{f} & \frac{\partial \psi^k}{\partial s} &= \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Desconsiderando os termos de ordem superior, matricialmente podemos representar a equações na forma:

$$\begin{bmatrix} K_T & -R \\ f_u^T & f_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{f} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

A resolução do problema considerado passa, então, pela resolução do sistema de equações acima representado.

5.2.4 - FASE PREDITORA

FORMULAÇÃO CONTÍNUA

A equação de equilíbrio para uma estrutura discreta é definida pela equação (5.40). As N+1 variáveis independentes desta equação são os N graus de liberdade contidos no vetor u e o fator de carga γ . Estas variáveis podem ser expressas como função de um sistema de coordenadas curvilineares ao longo da resposta carga-deslocamento da estrutura, na forma $\{u\} = \{u(s)\}$ e $\gamma = \gamma(s)$. O vetor tangente unitário à curva s, t, é expresso na forma:

$$t = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Sendo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} du \\ ds \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} d\gamma \\ ds \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

O fator de escala do vetor é obtido por:

$$m = \sqrt{\left\{ \frac{du}{ds} \right\}^T \left\{ \frac{du}{ds} \right\} + \left\{ \frac{d\gamma}{ds} \right\}^2} \quad (5.43)$$

Da equação (5.41) pode-se verificar que:

$$t^T t = \left\{ \dot{u} \right\}^T \left\{ \dot{u} \right\} + \dot{\gamma}^2 = 1 \quad (5.44)$$

Diferenciando a equação de equilíbrio com respeito à s teremos:

$$\left\{ \dot{\psi} \right\} = -[K_r] \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} \right\} + \dot{\gamma} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right\} = 0 \quad (5.45)$$

Assim:

$$[K_r] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} \right] \quad (5.46)$$

A equação (5.45) pode ser simplificada pelo uso da equação (5.10) de modo a definir:

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right\} = \{R\} \quad (5.47)$$

$$\left\{ \dot{\psi} \right\} = -[K_r] \left\{ \dot{u} \right\} + \dot{\gamma} \{R\} = 0 \quad (5.48)$$

$$\left\{ \dot{u} \right\} = \dot{\gamma} [K_r]^{-1} \{R\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \dot{u} \right\} = \dot{\gamma} \{ \Delta u_s \} \quad (5.49)$$

Onde:

$$\{ \Delta u_s \} = [K_r]^{-1} \{R\} \quad (5.50)$$

Podemos então retornar a equação (5.50) e redefinir a equação (5.44):

$$\dot{\gamma}^2 \left(1 + \{\Delta u_R\}^T \{\Delta u_R\} \right) = 1 \quad (5.51)$$

Esta formulação representa a base para todo método de comprimento de arco. Porém, sua forma não é aplicável a programas de computador.

FORMULAÇÃO DISCRETA

As variáveis devem então ser reescritas na forma discreta:

$$\left\{ \dot{u} \right\} \cong \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta s} \right\} \quad , \quad \dot{\gamma} \cong \left\{ \frac{\Delta \gamma}{\Delta s} \right\} \quad (5.52)$$

Δs é um incremento finito do comprimento de arco. Usando a nova definição da equação de equilíbrio (5.52), a diferenciação da equação de equilíbrio torna-se:

$$- [K_T] \{\Delta u\} + \Delta \gamma \{R\} = 0 \quad (5.53)$$

Usando a equação (5.52) e a equação (5.44) teremos:

$$\{\Delta u\}^T \{\Delta u\} + (\Delta \gamma)^2 = (\Delta s)^2 \quad (5.54)$$

Algumas técnicas propostas são baseadas na equação (5.57). As equações (5.53) e (5.52) fornecem as N+1 equações requeridas para resolução dos problemas não-lineares do último passo convergido p para o próximo p+1:

$$\begin{aligned} \{\Delta u^p\} &= \Delta \gamma [K_T]^{-1} \{R\} = \Delta \gamma \{\Delta u_F\} \\ \Delta \gamma &= \frac{\pm \Delta s}{\sqrt{\{\Delta u_F\}^T \{\Delta u_F\} + 1}} \\ \{u^{p+1}\} &= \{u^p\} + \{\Delta u^p\} \\ \gamma^{p+1} &= \gamma^p + \Delta \gamma^p \end{aligned} \quad (5.55)$$

Nos pontos críticos, onde a matriz de rigidez tangente é singular, u não existe logo a estratégia de predição adotada acima não se aplica. Uma maneira possível de superar este obstáculo é iniciar o passo corretivo a partir da solução convergida do passo anterior. No entanto, no passo anterior é necessário determinar em que sentido avança a solução. Em cada ponto da trajetória de equilíbrio, o vetor tangente u_n determina dois sentidos distintos. Em um processo de carga, o sentido correto se determina ao assegurar que o trabalho externo seja positivo, o que implica em:

$$R_n^T \Delta u_n^{(0)} = R_n^T u_{Rn} \Delta \gamma_n^{(0)} \geq 0 \quad (5.56)$$

Logo, pode-se concluir da equação (5.56) que o termo $\Delta \gamma_n^{(0)}$ deve ter o mesmo sinal de o termo $R_n^T u_n > 0$. Esta condição é válida apenas se a norma das variáveis de estado $\|u_n\|$ se incrementa de maneira monotonicamente. Em outras palavras, se a resposta do sistema estrutural não apresenta pontos limites. Deduz-se uma condição mais geral para determinar o sinal de $\Delta \gamma_n^{(0)}$ impondo a seguinte condição:

$$\Delta u_{n-1}^T \Delta u_n^{(0)} > 0 \Rightarrow \Delta \gamma_n^{(0)} \Delta u_{n-1}^T u_{Rn} > 0 \quad (5.57)$$

Sendo:

$$\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1} \quad (5.58)$$

Onde Δu_{n-1} é o incremento das variáveis de estado do passo n-1 ao passo n. Por tanto, o sinal de $\Delta \gamma_n^{(0)}$ é determinado através do sinal dos termos $\Delta u_{n-1}^T u_{Rn}$. Uma estratégia de controle automático de passo a ser adotada, quanto o método de comprimento de arco, é utilizado como equação de restrição, pode vir na forma:

$$s_n = s_{n-1} \sqrt{\frac{s_d}{s_{n-1}}} \quad \text{com} \quad s_{\min} \leq s_n \leq s_{\max} \quad (5.59)$$

Onde o comprimento de arco do passo anterior, s_{n-1} é o número de iterações necessárias para convergência do passo anterior e s_d é um dado de entrada do problema que se refere a um

número ideal de iterações para se obter a convergência na solução das equações de equilíbrio. Também s_{\min} e s_{\max} são dados de entrada do problema e fixam um valor mínimo e máximo para o comprimento de passo. Observe que nos trechos da trajetória de equilíbrio, onde existam fortes linearidades o comprimento do passo, é diminuído conforme equação (5.59), uma vez que $s_{n-1} > s_d \Rightarrow s_n < s_{n-1}$. Por outro lado, nos trechos onde as não-linearidades são suaves o comprimento do passo é aumentado, uma vez que $s_{n-1} < s_d \Rightarrow s_n > s_{n-1}$.

5.2.5- FASE CORRETORA

Uma vez que temos uma aproximação inicial das variáveis de estado e de controle obtidas na fase de predição, devemos seguir para fase corretiva. Os valores de predição dificilmente eliminam as forças desequilibradas ou residuais, assim o processo corretivo tenta reduzir este resíduo a um limite aceitável, normalmente comparado com uma tolerância adotada. Neste trabalho adota-se para a fase corretora o método de Newton padrão e o algoritmo de iteração conhecido como da matriz de rigidez tangente incremental. A partir dos valores obtidos na predição, o método de Newton padrão gera uma seqüência de iterações $(u^{(k)}, \gamma^{(k)})$, onde $k=1,2,3,4,\dots$ é o índice do passo iterativo.

Definiremos, então, a equação de restrição da fase corretora como sendo um hiperplano normal. Têm-se, então, que para um determinado incremento de carga, $\Delta\gamma_i$, tem-se o vetor $x_i = (\Delta u_i, \Delta \gamma_i)$, o definidor do comprimento de arco Δs atualizado; quando $i=0$, x_0 define o comprimento de arco calculado na fase preditora anterior. Observa-se que $x = (du, d\gamma_{i+1})$ é o vetor das variações dos deslocamentos e das cargas incrementais, onde vale a seguinte expressão:

$$g = x_i^T \hat{x}_{i+1} = 0 \quad (5.60)$$

Os vetores são ortogonais, pois representam o produto interno entre o vetor posição do comprimento de arco Δs e o vetor de correção \hat{x} que pertence ao hiperplano considerado. Assim, a equação do hiperplano pode ser colocada na forma:

$$g(u, \gamma) = (\Delta u_i, \Delta \gamma)(du_{i+1}, d\gamma_{i+1}) = 0 \quad (5.61)$$

Podemos, então, considerar a forma diferencial do resíduo e condição de restrição da pela equação (5.39). Obtendo-se, então, um sistema de equações aumentado conforme visto anteriormente, impondo-se que:

$$\begin{bmatrix} K_T & -R \\ f_u^T & f_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Montando as equações do sistema linear considerado, teremos:

$$\begin{cases} K_T du_{i+1} - R d\gamma_{i+1} = -\psi(u, \gamma) \\ \Delta u_i^T d\bar{u}_{i+1} + \Delta \gamma_i d\gamma_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (5.63)$$

Da primeira equação de (5.63), tem-se que:

$$du_{i+1} = -K^{-1}\psi_{i+1} + d\gamma_{i+1}K^{-1}R \quad (5.64)$$

Dividindo a equação em dois termos separados, teremos:

$$-K^{-1}\psi_{i+1} = du_{\psi(i+1)} \quad e \quad K^{-1}R = du_{R(i+1)} \quad (5.65)$$

Podemos então reescrever a equação (5.24) na forma:

$$du_{i+1} = du_{\psi(i+1)} + du_{R(i+1)} \quad (5.66)$$

Retornando à segunda equação do sistema, teremos:

$$\Delta u_i^T (du_{\psi(i+1)} + du_{R(i+1)}) + \Delta \gamma_i d\gamma_{i+1} = 0 \quad (5.67)$$

$$\Delta u_i^T du_{\psi(i+1)} + d\gamma_{i+1} \Delta u_i^T du_{R(i+1)} + \Delta \gamma_i d\gamma_{i+1} = 0 \quad (5.68)$$

$$d\gamma_{i+1} = - \frac{\Delta u_i^T du_{\psi(i+1)}}{\Delta u_i^T du_{R(i+1)} + \Delta \gamma_i} \quad (5.69)$$

Finalmente as expressões atualizadas dos incrementos de cargas e dos deslocamentos podem ser definidas na forma:

$$\Delta \gamma_{i+1} = \Delta \gamma_i + d\gamma_{i+1} \quad e \quad \Delta u_{i+1} = \Delta u_i + du_{i+1} \quad (5.70)$$

Na equação (5.40), quando se têm $i = 0$, serão obtidos os valores $\Delta \gamma_0$ e Δu_0 da fase preditora. Caso contrário, teremos os valores $d\gamma_{i+1}$ e du_{i+1} que são as variações dos incrementos das cargas e deslocamentos, respectivamente, para as $(i + 1)$ iterações efetuadas no incremento. Assim, as atualizações totais das cargas e deslocamentos serão:

$$\gamma = \gamma + \Delta \gamma_{i+1} \quad e \quad u = u + \Delta u_{i+1} \quad (5.71)$$

5.2.6 - CARACTERIZAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Uma vez que na trajetória de equilíbrio apareçam pontos críticos, sua caracterização se dará com a matriz de rigidez se tornando singular conforme mostrado em MATIAS[1996]. Estes pontos estão relacionados com a perda de estabilidade de equilíbrio dos sistemas estruturais. Nestes pontos, o vetor de deslocamentos Δv_0 definido anteriormente, não existe ou não está unicamente determinado, segundo CARVALHO[2002]. Em seguida um procedimento característico para análise de pontos críticos será mostrado.

Seja z um autovetor do espaço nulo de K , de modo que $Kz=0$ ou para K simétrica podemos também ter:

$$z^T K = 0 \quad (5.72)$$

Fazendo a pré-multiplicação de ambos os lados da equação incremental de equilíbrio, $K\Delta u = \Delta\lambda R$ por z^T e considerando a equação (5.28), teremos:

$$\Delta\lambda z^T R = 0 \quad (5.73)$$

Duas situações são possíveis:

$$z^T R \neq 0 \Rightarrow \Delta\lambda = 0 \rightarrow \text{Ponto Limite}$$

$$z^T R = 0 \Rightarrow \Delta\lambda \neq 0 \rightarrow \text{Ponto de Bifurcação}$$

A figura 5.6 nos mostra uma interpretação geométrica dos pontos críticos definidos por curvas de um plano (u, λ) para o caso de um grau de liberdade. Quando a relação carga versus deslocamento é incrementada monotonicamente, o que é representado pela curva Z_1 , a matriz de rigidez não apresentará singularidades ao longo da mesma. Sendo assim, a curva Z_1 pode ser entendida como uma resposta estrutural em equilíbrio estável.

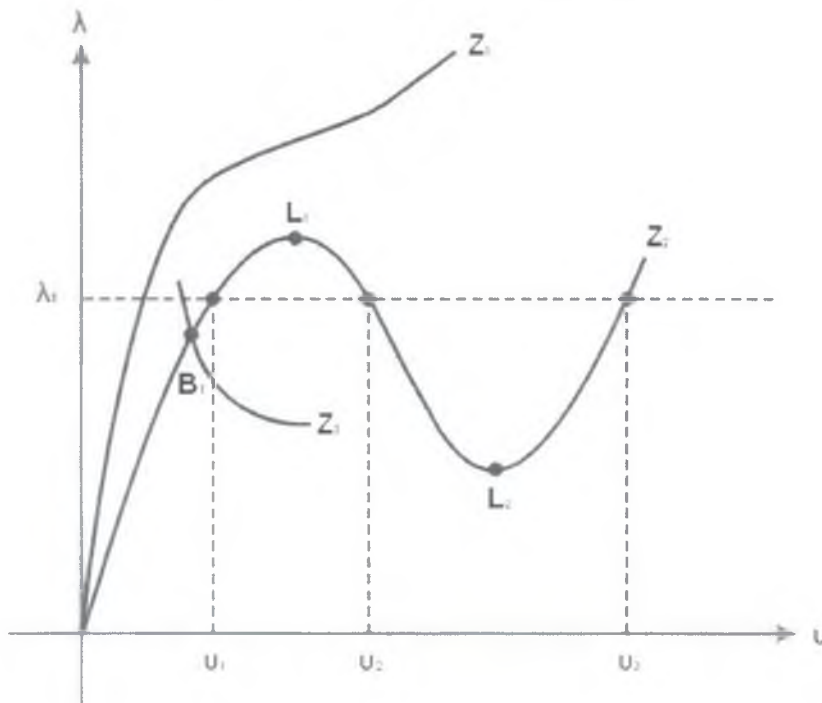


Figura 5.5: Caracterização de pontos críticos na trajetória de equilíbrio.

No entanto, considerando-se a curva Z2, é possível vislumbrar mais de um estado de equilíbrio para um mesmo nível de carga, o que é representado pelos pontos 1,2 e 3. Neste caso, a instabilidade do equilíbrio do sistema deve ser considerada. Uma outra observação a ser feita é a dos pontos onde a inclinação da tangente à curva é nula. Representados por L1 e L2 são conhecidamente denominados pontos limites. A solução de equação incremental de equilíbrio nesta situação não existe. No ponto B1, no entanto, em função da existência de outra trajetória de equilíbrio num mesmo ponto, indicada pela curva Z3, existirão duas tangentes: as respectivas curvas. Isso leva a mais de uma solução na equação incremental de equilíbrio e caracteriza o denominado ponto de bifurcação.

5.2.7- DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

O esquema numérico observado para tratamento dos pontos críticos ou singulares é completamente distinto ao dos pontos regulares. De modo a realizar um esquema numérico que obtenha sucesso na análise destes pontos devemos considerar duas fases distintas: detecção e passagem. Cada tipo de ponto leva a um tipo de algoritmo numérico específico. Para pontos de bifurcação, a segunda fase da análise corresponde à escolha da rama secundária e, para os pontos limites, se trata simplesmente de passá-los.

Um método conhecido como método direto impõe na sua formulação um sistema de equações que têm como solução o ponto crítico analisado. Dentro deste sistema deve estar contemplada a equação de equilíbrio original e as equações de restrição características do ponto singular. No método indireto, a detecção de pontos singulares está intimamente ligada ao procedimento de continuação de resposta, isto é, depende da trajetória de solução. Para maiores detalhes ver capítulo 5 de SEYDEL [1990]. Nesta dissertação, em função da grande simplificação utilizada nos modelos constitutivos adotados, a passagem pelos pontos críticos apesar de estar implementada computacionalmente, conforme apresentado em MATIAS[1996], para métodos indiretos, não teve uma efetiva utilização na análise do problema apresentado. O interesse maior se deu na análise da perda de rigidez apresentada pela matriz de rigidez da estrutura em função dos fenômenos do tipo fissuração, plastificação do material, etc. Sendo assim, a conceituação das funções de prova indispensável e necessária a este tipo de análise não será aqui apresentada. Para maiores detalhes a este respeito e sua implementação algorítmica em

esquemas preditores-corretores ver os trabalhos de SEYDEL[1990], MATIAS[1996] e Carvalho [2002].

5.2.8- PARÂMETRO DE RIGIDEZ CORRENTE OU DE BERGAN

O parâmetro de rigidez corrente ou de Bergan foi inicialmente idealizado para caracterizar o comportamento dos problemas não-lineares de um modo geral ou direcionar parâmetros que estejam envolvidos processo de solução das equações não lineares. A definição de um caminho de solução para um determinado problema passa pela formação das trajetórias de equilíbrio do campo de deslocamentos dos pontos discretizados na malha da estrutura durante a aplicação do carregamento. Não obstante, a formação de diagramas de carga versus um simples componente do campo de deslocamentos existentes poderia levar a uma não precisa interpretação do comportamento global da estrutura em análise. Sendo assim, essa caracterização do comportamento global de um sistema de múltiplos graus de liberdade, conforme as referências [1] e [3], pode ser feita por uma quantidade escalar adimensional, na forma:

$$K_n = \frac{\Delta u_p^T R}{\Delta u_p^T \Delta u_p} \quad (5.29)$$

Normaliza-se a equação (5.29) da seguinte maneira:

$$C_s = \frac{k_n}{k_0} \quad (5.30)$$

C_s é conhecido como parâmetro de rigidez corrente ou de Bergan. Da equação (5.30) nota-se que o parâmetro de Bergan tem o valor inicial igual à unidade para qualquer sistema não-linear. A caracterização do sistema, então, toma início decrescendo com o amolecimento do material e aumentando com endurecimento do mesmo. Neste trabalho, as cargas de início de perda de rigidez detectadas pelo parâmetro de Bergan, para as diversas malhas e elementos propostos, são confrontadas com as cargas de início de fissuração e colapso plástico observadas experimentalmente.

5.2.9 - ALGORITMO NUMÉRICO PREDITOR-CORRETOR DE ESQUEMAS INCREMENTAIS ITERATIVOS COM CONTROLE DE RESPOSTA BASEADO NA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

$n=0$

• FASE INCREMENTAL:

Passo $\rightarrow n = n + 1$

A) Caso $n > 1 \rightarrow$ Calcula-se o comprimento do passo:

$$S_d = S_{n-1} \sqrt{I_d / I_{n-1}}$$

$k=0$

•• FASE ITERATIVA:

Iteração: $k = k + 1$

B) Resolver:

$$u_{Rn}^{(k)} = [K_n^{(k-1)}]^{-1} R$$

***** Se $k=1$: Passo Preditor

C) Calcular a predição do parâmetro de controle:

$$\Delta \gamma_n^{(k)} = h S_n / \sqrt{(u_{\psi n}^{(k)})^T u_{Rn}^{(k)}} \quad h = \text{sign}(\Delta u_{n-1}^T u_{Rn}^{(k)})$$

D) Calcular a predição da variável de estado:

$$\Delta u_n^{(k)} = \Delta \gamma_n^{(k)} u_{Rn}^{(k)}$$

***** Fim do passo preditor

***** Se $k > 1$: Passo corretor

E) Resolver:

$$u_{\psi n}^{(k)} = [K_n^{(k-1)}]^{-1} \psi_n^{(k)}$$

F) Calcular o corretor do parâmetro de controle:

$$a_1 (\eta_n^{(k)})^2 + a_2 \eta_n^{(k)} + a_3 = 0$$

G) Calcular o corretor da variável de estado:

$$d_n^{(k)} = u_{\psi n}^{(k)} + \eta_n^{(k)} u_{Rn}^{(k)}$$

***** Fim do passo corretor

H) Atualização das variáveis de estado e do parâmetro de controle:

◆ Se $k = 1$:

$$u_n^{(k)} = u_{n-1} + \Delta u_n^{(k)} \quad \gamma_n^{(k)} = \gamma_{n-1} + \Delta \gamma_n^{(k)}$$

◆ Se $k > 1$:

$$\Delta u_n^{(k+1)} = \Delta u_n^{(k)} + d_n^{(k)} \quad u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} + d_n^{(k)}$$

$$\gamma_n^{(k+1)} = \gamma_n^{(k)} + \eta_n^{(k)}$$

I) Calcular as forças desequilibradas ou residuais:

$$\psi_n^{(k+1)} = \gamma_n^{(k+1)} R - F^{(k+1)}$$

J) Calcular a norma do erro:

Se o erro $> \text{TOL} \Rightarrow \text{RETORNO A FASE ITERATIVA} (\bullet\bullet)$

$$\left\| \psi_N^{(k+1)} \right\| / \left\| \gamma_N^{(k+1)} R \right\|$$

Se o erro $\leq \text{TOL} \Rightarrow \text{RETORNO A FASE INCREMENTAL} (\bullet)$

5.3- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta seção apresenta-se a descrição do algoritmo numérico para resolução das equações não-lineares na forma incremental-iterativa via esquema preditor-corretor adotado nesta dissertação através do fluxograma da parte principal, conforme mostra a figura 5.1, além das principais subrotinas que compõem o programa.

Uma boa execução de um algoritmo que utiliza o esquema preditor-corretor em um método de continuação depende da combinação de parâmetros que constituem alguns dos dados de entrada do problema. São eles: o comprimento inicial do passo incremental S_{ini} , o comprimento mínimo do passo incremental S_{min} , o comprimento máximo do passo incremental S_{max} , o número máximo de iterações por passo I_{max} , o número de iterações desejadas I_d e a tolerância para convergência TOL. Observe que estes são valores que

dependem das características da resposta da estrutura que não são conhecidas a priori. Sendo assim, são dados empíricos frutos da experiência que se adquire durante a utilização dos processos de continuação nos problemas de não-linearidade geométrica e física.

Nota-se que o passo preditor-corretor se encontra dentro da fase iterativa do algoritmo, sendo assim durante a primeira iteração se faz à predição dos incrementos das variáveis de estado e dos parâmetros de controle correspondentes ao passo n . Posteriormente, são somados a estas variáveis seus valores acumulados calculados no passo anterior. A partir da segunda iteração, então, a fase corretiva entra em ação, fazendo a correção sobre os valores obtidos na fase de predição, aos quais se somam as atualizações correspondentes a primeira iteração. Por fim, durante toda a fase iterativa são verificados os valores do resíduo da equação de equilíbrio e das normas de força e deslocamentos.

Além do mais, os métodos de continuação devem contar com algoritmos de controle do comprimento do passo incremental e de diminuição automática do passo. A diminuição automática do passo incremental se refere à possibilidade de guiar a velocidade de convergência. O problema pode não convergir pelas seguintes razões: as superfícies de restrição e de equilíbrio não se interceptam ou então por não se alcança convergência dentro do limite máximo de iterações estabelecido. Este obstáculo pode ser superado através de um algoritmo de diminuição automática do comprimento de passo, sendo o objetivo do mesmo, recuperar a solução convergida do passo anterior (u_{n-1}, γ_{n-1}), diminuir o tamanho do passo s_n respeitando o limite mínimo definido para esta variável e reinicializar a análise. Este procedimento se dará até a convergência ocorra dentro de um número de passos I_c . Caso seja superado este número o algoritmo interromperá a análise.

Programa Principal: executa o gerenciamento do processo da análise não-linear via cálculo automático e dos parâmetros pelo arquivo de entrada de dados. As principais rotinas estão detalhas abaixo:

- Subrotina INPUT: Executa a leitura do arquivo de entrada de dados no formato ASCII, com extensão DAT. Os parâmetros de entrada que deverão estar contemplados são números de nós, número de elementos 1D e 2D, restrições de apoio, nós carregados, propriedades dos materiais utilizados, valor do incremento de carga,

quantidade desejada e máxima de iterações, longitude inicial de arco adotada e tolerância para convergência. Como saída serão apresentadas dados do tipo coordenadas nodais, conectividades dos elementos, condições de contorno e carregamentos, propriedades dos materiais e gráficos gerados.

- Subrotina ASSEM: Faz a montagem da matriz de rigidez tangente consistente global da estrutura via integração numérica. A subrotina STIFF presente no interior da rotina ASSEM monta o vetor de deslocamentos do passo anterior e calcula as propriedades geométricas e resultantes de tensão, calcula a matriz de rigidez do material e o vetor de forças internas.
- Subrotina SKYDEC: Calcula a função de prova de menor autovalor para a primeira iteração de cada passa de carga. Executa-se, então, a resolução de um sistema de equações, através do método de GAUSS, onde se inicia um processo iterativo até a diferença entre dois autovalores consecutivos chegar a uma tolerância pré-determinada.
- Subrotina PREDICT: Nesta fase são calculados o parâmetro de BERGAN do passo de carga n e um preditor de carga e deslocamento para a trajetória de equilíbrio da estrutura. A resolução do sistema de equações é executado pela subrotina GAUSS, e depois calcula o incremento de carga e deslocamento, determina o sentido que avança a solução e finalmente obtém a predição.
- Subrotina BRANCH_TF: Calcula a função de prova do determinante através da somatória dos elementos da diagonal principal, depois da triangularização, e a verificação da singularidade através da mudança de sinal. Calcula a função de prova do menor pivô apenas com a verificação do menor valor entre os elementos da diagonal principal da matriz triangularizada.
- Subrotina ATUALIZA: Atualiza os vetores de esforços internos e residuais da estrutura para cada iteração e passo de carga. O somatório das reações nos nós, o resíduo e as reações de apoio também são obtidos.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados de alguns exemplos numéricos obtidos pelo programa computacional desenvolvido nesta dissertação, os quais serão comparados com valores experimentais obtidos em ensaios de laboratório em vigas paredes de concreto armado descritos nos trabalhos de MOURA [1980] e BESSA [1994]. Os resultados experimentais serão desta forma utilizados como parâmetros calibradores na verificação do modelo computacional proposto.

Serão analisadas três vigas paredes com características geométricas de vão e seção transversal semelhantes, sendo também as condições de apoio coincidentes. As armaduras existentes no interior das peças, no entanto, tem variações tanto no seu quantitativo quanto no seu detalhamento. A fim de manter um critério uniforme nos diferentes ensaios considerados, os dados referentes à resistência à compressão f_c , a resistência à tração f_t e o módulo de elasticidade do concreto E foram baseados nos resultados obtidos pelo rompimento de corpos de prova ensaiados experimentalmente na data de cada ensaio e apresentados nos respectivos trabalhos.

Nos exemplos propostos procedeu-se a uma variação na quantidade de elementos presentes na malha de elementos finitos utilizada na modelagem numérica proposta e também no número de pontos de integração utilizados em cada elemento da malha. Essas variações foram aplicadas tanto para o material concreto quanto para o aço tanto quanto para suas respectivas combinações. Com isso buscou-se uma garantia maior na convergência da resposta obtida através do programa. Também uma comparação entre as performances dos respectivos elementos lineares e quadráticos com integrações reduzidas ou não, de melhora na capacidade real de predição da resposta foi feita.

A análise foi feita a partir da estrutura descarregada com a utilização do método de controle de deslocamentos através da aplicação de pequenos incrementos de deformação em cada passo da análise. Foi considerado um número máximo de cinquenta para as iterações de equilíbrio local garantirem a convergência. Inicialmente o número de incrementos de deformações adotado foi de 140. No entanto, houve variações a maior no sentido de melhorar a convergência global da resposta chegando a valores de 270 e no máximo de 400 nas malhas com elementos lineares.

6.2 – EXEMPLOS

6.2.1 – Introdução

A escolha dos exemplos apresentados nesta dissertação foi feita com base na necessidade existente na área de projetos de estruturas, de se determinar com uma certa precisão a carga de colapso de estruturas de concreto não convencionais submetidas a diferentes tipos de detalhamentos. Os programas computacionais disponíveis no mercado nacional ou não se adequam a esse tipo de análise ou são de alguma forma extremamente sofisticados. Sendo assim, procurou-se determinar e analisar somente as cargas de colapso das vigas paredes em questão, uma vez que, as mesmas são determinantes sob o aspecto de segurança nos projetos estruturais. Estudos referentes a fenômenos do tipo fissuração, retração, deformação lenta e aderência presente comumente nas estruturas de concreto armado estão fora do escopo desta dissertação.

A distribuição das armaduras no interior da estrutura foi então variada de modo a verificar a potencialidade do modelo computacional proposto na precisão das respostas. Também a resistência do concreto foi utilizada de modo convencional e alta resistência de modo a testar possíveis modificações. Verificou-se que um limitador na escolha de exemplos é sempre baseado em problemas referentes ao pré e pós-processo de dados envolvidos nos mesmos.

6.2.1 – Viga Parede VP1

Foi analisada uma viga parede bi-apoiada com duas cargas concentradas de mesma distância dos apoios conforme figura 6.1:

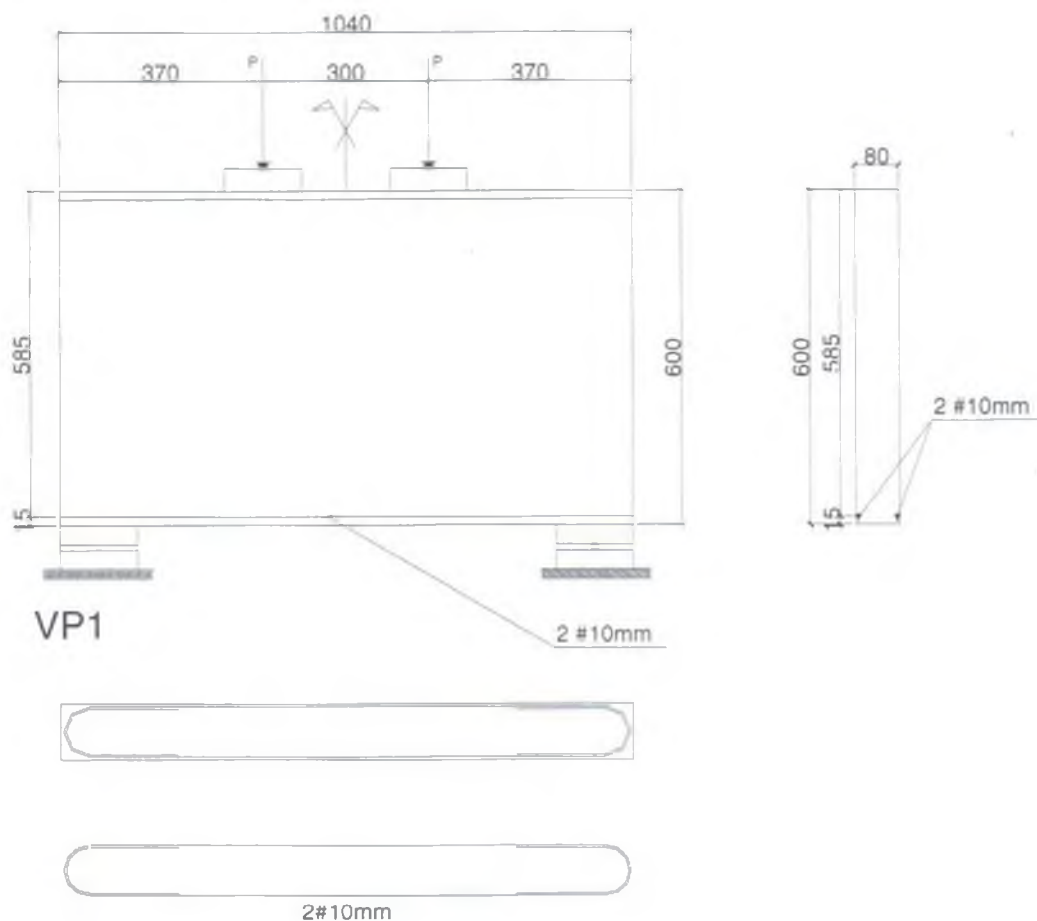


Figura 6.1: Viga parede VP1

Esta viga foi estudada experimentalmente conforme apresentado em BESSA [1994], no laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília. Esta viga cujo detalhamento está presente na figura é referenciada, no trabalho original por V1. A seção transversal é retangular e de espessura constante igual a 8 cm. Sua armadura principal de flexão é constituída de barras horizontais de aço CA-50B de 10 mm que se estendem pelo vão total da mesma. Não foram adotadas armaduras de alma para a mesma como também não se utilizou a armação de fretagem na região dos apoios. As características do concreto e do aço foram admitidas constantes para todo o tempo de duração da análise, sendo seus valores indicados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades dos materiais - VP1

Propriedades	Concreto	Apoio	Armadura
Mod. De elasticidade (MPa)	3,42E+04	2,25E+05	2,17E+05
Coeficiente de Poisson	2,00E-01	3,30E-01	-
Peso especifico(kN/cm3)	2,30E-03	7,70E-03	-
Espessura da peça (cm)	8,00E+00	1,40E+01	-
Área da barra (cm)	-	-	1,57E+02
Resist. À compressão(Mpa)	3,42E+01	5,00E+03	-
Resist. À tração (MPa)	3,42E+00	5,00E+03	-
Tensão de escoamento(MPa)	-	-	5,72E+02

A figura 6.2 apresenta as discretizações utilizadas e evidência o posterior refinamento das malhas de elementos finitos adotadas, com a variação da quantidade de graus de liberdade crescendo tanto para os elementos de concreto como para os elementos de armadura. Estudos de convergência com refinamento das malhas, deste tipo, são também mostrados em CAMPOS [1987]. Algumas distorções na largura dos elementos foram inevitáveis em função do tipo de gerador de malha utilizado e da obrigatoriedade na coincidência dos elementos de armadura com os lados dos elementos de concreto. No entanto observou-se uma relação entre lados de no máximo 5 vezes indicados em ONATE[1995].

As tabelas 6.2 e 6.3 mostram a discretizações feitas nas malhas para análise pelo modelo computacional proposto e os erros relativos entre as cargas de início de fissuração e colapso plástico com relação ao resultado experimental. Com os refinamentos observados na tabela 6.2, um estudo da influência da discretização na performance de cada tipo de elemento utilizado foi feito. Posteriormente, nos gráficos a serem apresentados, fica clara a melhora substancial da resposta devido a esse fator. Em função do tipo de discretização utilizado nos elementos de barra (adjacentes ao lado), a malha dos elementos planos não pode ser livremente discretizada, havendo restrições na quantidade de elementos possíveis de serem executados.

A performance dos diversos tipos de elementos foi sintetizada na tabela 6.3, onde são apresentados as cargas de início de fissuração e colapso plástico e seus respectivos erros relativos em referência a carga experimental obtida. Observa-se que a carga de ruptura teve

melhores resultados com a utilização dos elementos quadráticos tanto para concreto quanto para a armadura. Quando a integração completa é utilizada nos elementos de concreto, foram percebidas sensíveis melhoras nos resultados obtidos. Em concordância com nas literaturas correntes sobre estruturas de concreto armado sob estados planos de tensão, a utilização de elementos lineares para modelagem numérica do concreto normalmente conduz a valores bem discrepantes dos observados experimentalmente. A carga de início de fissuração, no entanto, teve sua melhor aproximação através dos elementos com integração reduzida, não havendo uma influência qualquer do tipo de elemento de barra utilizado na discretização.

O gráfico da figura 6.3 nos mostra a convergência ocorrida para os diversos tipos de elementos e suas combinações utilizadas no refino das malhas com vistas à obtenção da carga de colapso plástico. É notável a dependência da discretização para os elementos lineares (LL2). Uma variação muito brusca ocorre no valor da carga de colapso obtida, à medida que a malha sofre um aumento do número de elementos. Uma maior rigidez é evidenciada pelos elementos lineares. Os elementos de concreto quadráticos com integração reduzida (LQ2, QQ2) conduziram a soluções com menor rigidez.

Os que utilizaram integração completa (LQ3, QQ3) foram os que se aproximaram da carga experimental, ficando com os melhores resultados para as malhas mais refinadas ou de maior convergência. As variações dos elementos de barra de lineares para quadráticos, nas combinações obtidas, não levaram a mudanças expressivas na solução obtida pela modelagem proposta. Isso pode ser notado na pouca variação da trajetória dos elementos (LQ2 e QQ2) e (LQ3 e QQ3). A diferença obtida entre os resultados experimentais e a malha mais refinada com integração completa e elementos de concreto e armadura quadráticos via modelo computacional proposto varia em torno de 12%.

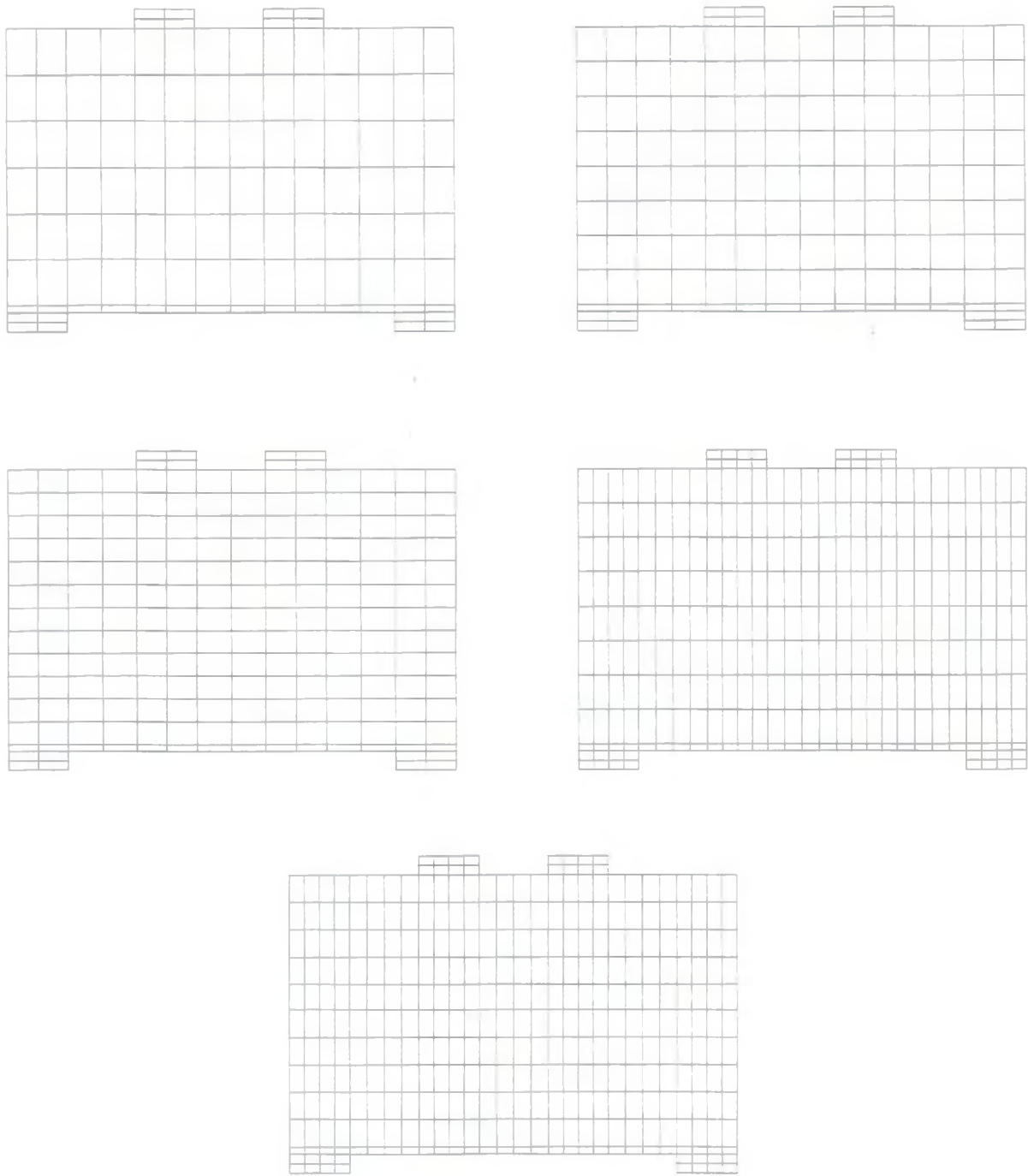


Figura 6.2: Refinamento nas malhas da viga VPI

Tabela 6.2: Número de elementos das discretizações –VP1

Quantidade de elementos da malha						
Tipos		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
LL	Apoio	16	16	16	32	32
	Concreto	98	126	182	252	308
	Armadura	14	14	14	28	28
	Total	128	156	212	312	368
QL	Apoio	16	16	16	32	32
	Concreto	98	126	182	252	308
	Armadura	28	28	28	56	56
	Total	142	170	226	340	396
QQ	Apoio	16	16	16	32	32
	Concreto	98	126	182	252	308
	Armadura	14	14	14	28	28
	Total	128	156	212	312	368

A influência da discretização na capacidade do modelo de captar a carga de início de fissuração é apresentada na figura 6.4. Veja que mesmo os elementos lineares (LL2) conseguiram captar com certa precisão a carga de início de fissuração, não sendo tão suscetíveis a discretização quanto para determinação da carga de colapso plástico. Novamente os elementos quadráticos obtiveram as melhores aproximações para as malhas mais refinadas. Também as variações dos elementos de barra de lineares para quadráticos não afetaram significativamente os resultados.

Os elementos quadráticos de concreto com integração reduzida é que obtiveram a melhor performance comparada aos valores experimentais levando a resultados muito precisos com erros menores que 1%. Das figuras 6.3 e 6.4 pode-se notar que o número de elementos necessários para uma modelagem mais precisa deve ser maior que trezentos.

Tabela 6.3: Performance das diversas discretizações – VP1

% de erro para carga de fissuracao e ruptura				
Malhas	Fissuracao(KN)	Erro Relativo(%)	Ruptura(KN)	Erro Relativo(%)
LL -1	157,77	1,77	1069,00	61,85
LL -2	158,10	1,19	1036,00	56,85
LL -3	163,10	1,99	998,94	51,24
LL -4	185,47(*)	15,92(*)	842,92(*)	27,62(*)
LL -5	190,59(*)	19,12(*)	822,69(*)	24,56(*)
LQ2 -1	126,22	21,11	586,89	11,14
LQ2 -2	124,37	22,27	580,80	12,07
LQ2 -3	120,92	24,43	558,87	15,39
LQ2 -4	163,2(*)	2(*)	530,94(*)	19,61(*)
LQ2 -5	161,33 (*)	0,83(*)	530,93(*)	19,62(*)
LQ3 -1	173,95	8,72	700,27	6,02
LQ3 -2	175,09	9,43	676,54	2,43
LQ3 -3	165,28	3,30	641,36	2,90
LQ3 -4	140,66(*)	12,09(*)	584,39(*)	11,52(*)
LQ3 -5	140,63(*)	12,11(*)	573,58(*)	13,16(*)
QQ2 -1	128,13	19,92	599,85	9,18
QQ2 -2	124,39	22,26	582,92	11,75
QQ2 -3	120,93	24,42	561,31	15,01
QQ2 -4	163,21(*)	2,01(*)	531,11(*)	19,59(*)
QQ2 -5	161,34(*)	0,84(*)	531,11(*)	19,59(*)
QQ3 -1	173,97	8,73	701,17	6,16
QQ3 -2	175,11	9,44	677,49	2,57
QQ3 -3	165,30	3,31	642,51	2,72
QQ3 -4	140,66(*)	12,09(*)	585,1(*)	11,42(*)
QQ3 -5	140,64(*)	12,1(*)	574,19(*)	13,07(*)

Valores Experimentais: Fissuração = 160kN e Ruptura =660,50kN

(*) – Melhores resultados

Note que a partir deste número há uma convergência dos resultados obtidos pelo modelo computacional proposto. Isso que pode ser observado através das retas formadas pelos diversos tipos de elementos utilizados, a partir das malhas com trezentos elementos, que

tendem a manter sua variação de valor constante com a reta experimental. É importante notar a imprecisão das respostas para malhas pouco refinadas.

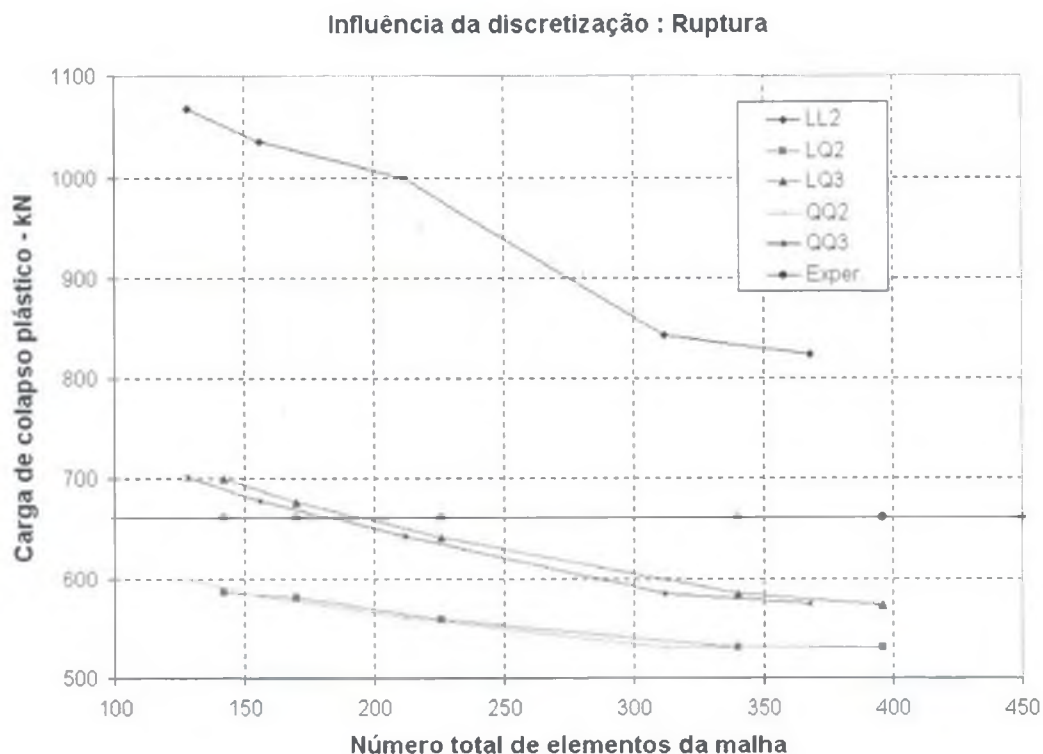


Figura 6.3: Influência da discretização na carga de colapso plástico - VPI

Mesmo os elementos quadráticos não obtiveram resultados confiáveis para malhas com pequeno número de elementos; o que mostra a importância de um estudo da convergência através da discretização para qualquer análise numérica a ser efetuada. Um diagrama entre a carga vertical aplicada e o deslocamento correspondente no meio do vão são apresentados na figura 6.5. Sua representação foi feita através dos resultados obtidos pela malha 5, ou seja, a que possui o maior número de elementos conforme pode ser visto pela tabela 6.2. A convergência assintótica obtida no gráfico nos garante que, o valor obtido da carga de colapso plástico através da análise numérica proposta, não necessita de mais incrementos para sua solução.

Influência da discretização - Fissuração

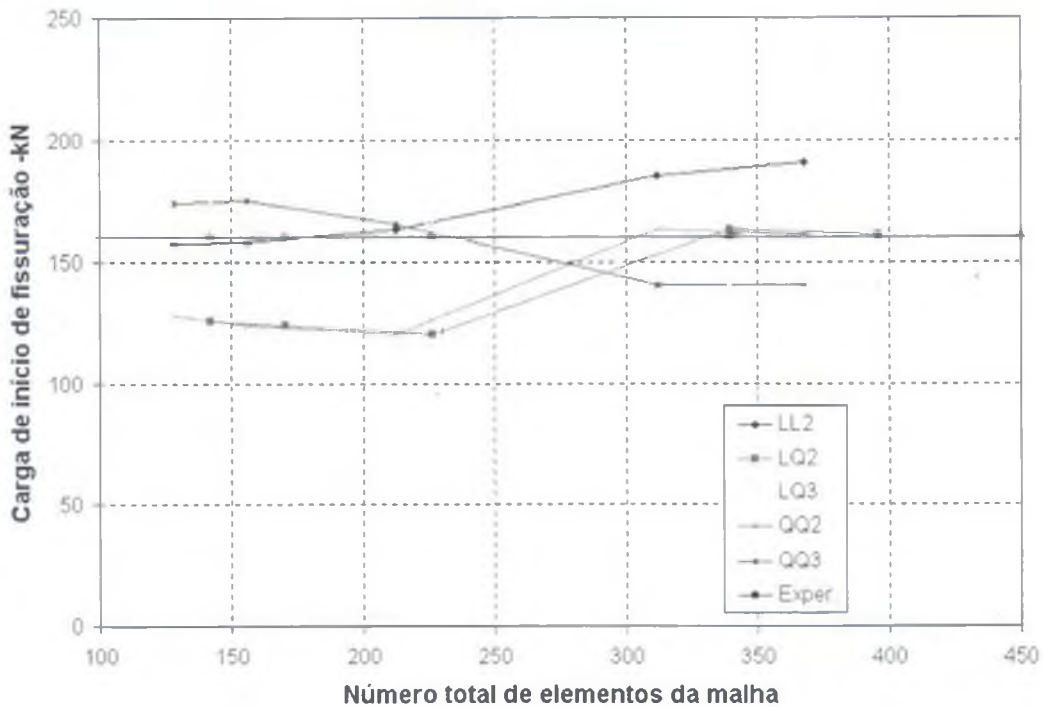


Figura 6.4: Influência da discretização para carga de início de fissuração VP1

Em conformidade com as figuras anteriores os elementos quadráticos com integração completa foram os que melhor representaram o comportamento a ruptura. Os elementos lineares e quadráticos com integração reduzida formaram o que poderíamos denominar respectivamente, de limites superiores e inferiores, na obtenção da carga de colapso plástico. Através deste ponto de vista poderíamos sugerir a utilização dos três tipos de elementos (LL, LQ2 e LQ3) para uma avaliação bastante precisa da carga de colapso plástico de vigas paredes. O procedimento poderia ser a obtenção dos limites inferior e superior com os elementos lineares e com integração reduzida. Uma média a ser obtida destes dois valores (limite inferior e superior) poderia ser comparada com a carga obtida pela performance do elemento quadrático com integração completa para uma estimativa aproximada da carga real. Como já citado anteriormente, não houve influência considerável na utilização dos elementos de armadura lineares ou quadráticos para respostas obtidas. Com relação aos valores de deslocamentos verticais existentes no gráfico da figura 6.5, devem preferencialmente ser

desconsiderados uma vez que os mesmos dependem de uma gama mais complexa de variáveis não presentes neste modelo computacional simplificado. Experimentalmente as vigas paredes são estruturas muito rígidas, sendo estes valores sempre de pequena magnitude conforme mostrado experimentalmente e numericamente em BESSA [1994] e CRISFIELD [1992], respectivamente.

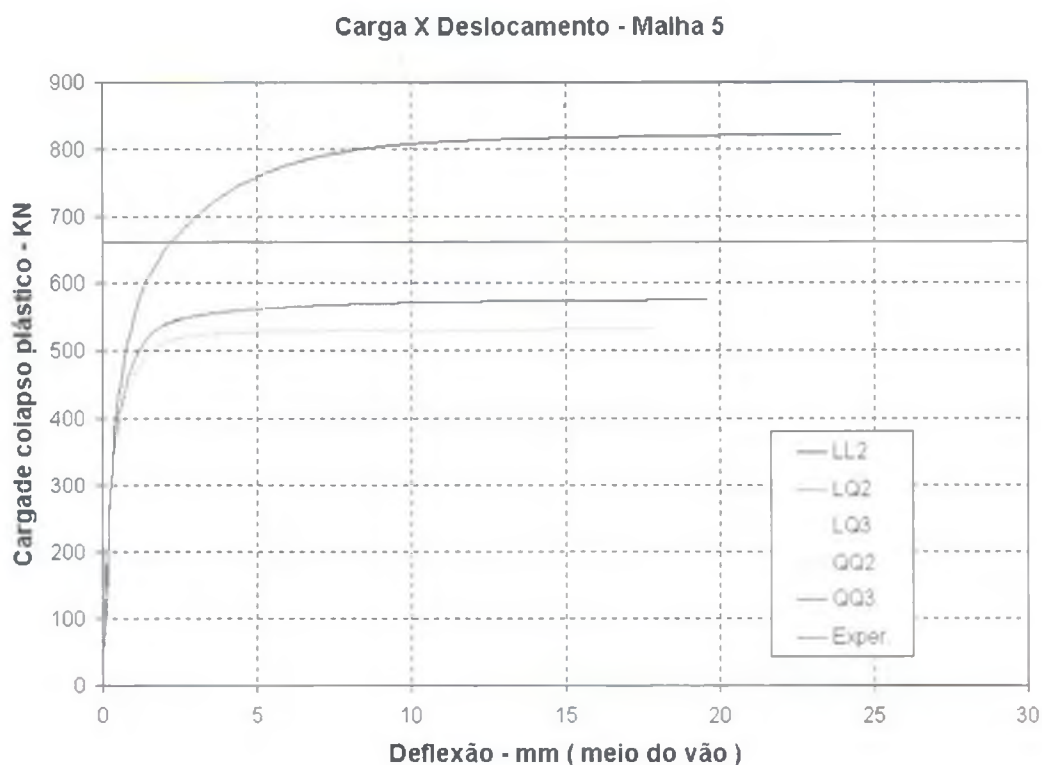


Figura 6.5: Diagrama carga versus deslocamento da malha 5 para viga Vp1

De uma forma geral, em concordância com os resultados obtidos em MOURA [1980], a utilização de elementos lineares para o estudo de vigas paredes de concreto armado pode conduzir a valores conservadores de carga uma vez que os mesmos propiciam uma rigidez elevada a estrutura modelada. De modo contrário, uma análise com a utilização de elementos de concreto quadráticos e de armadura lineares ou quadráticos parecem modelar de forma mais precisa a rigidez existente nas peças de concreto armado em estudo, uma vez que conduzem a estruturas menos rígidas e mais próximas das obtidas experimentalmente.

A definição do intervalo de perda de rigidez da viga em estudo pode ser visualmente percebida através da figura 6.6. O parâmetro de rigidez ou de proposto por BERGAN [1978]

capturou com uma boa precisão o ponto onde ocorre a carga de início de fissuração. Quanto à captura da carga de colapso plástico a precisão não se mostra tão boa. Dentro deste intervalo de perda de rigidez ocorrerão no material os fenômenos responsáveis pelo comportamento não-linear do material. Note que fica nítida a maior rigidez do material modelado através dos elementos lineares em concordância com observações anteriores. Os elementos quadráticos com integração completa obtiveram a melhor performance enquanto os com integração reduzida conduziram a menor rigidez entre os elementos.

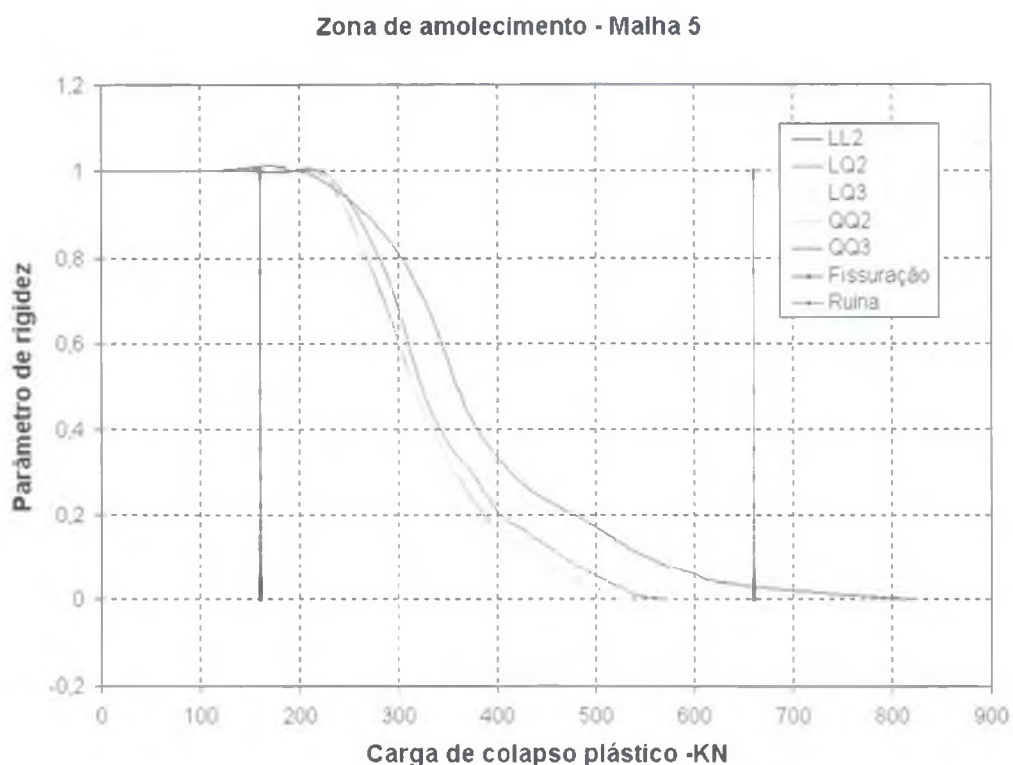


Figura 6.6: Definição do intervalo de perda de rigidez da viga - VPI

Uma vez que o modelo numérico simplificado apresentado não leva em conta fenômenos do tipo fissuração, transferências de tensões entre barras e concreto fissurado, a aderência variável entre aço e concreto, as deformações provenientes da retração do concreto, entre outros; não é possível traçar diagramas do tipo carga versus deslocamento ou mesmo carga

versus deformação, que sejam comparáveis com os deslocamentos reais da viga parede obtidos via ensaios experimentais.

Ao projetista de estruturas de concreto armado podem surgir dúvidas do tipo de detalhamento a ser feito numa determinada peça, um procedimento poderá ser adotado com base na simulação numérica apresentada. Deverão ser discretizadas malhas com as respectivas posições referentes aos detalhamentos idealizados pelo projetista. Posteriormente, deverão ser obtidas as zonas de amolecimento da peça para as diversas malhas consideradas, através da definição das cargas de início de fissuração e colapso plástico (limites inferiores e superiores). Deverão ser utilizados os elementos lineares e quadráticos com integração reduzida e completa no sentido de aproximar as cargas de forma aceitável.

Desta maneira o projetista poderá balizar de uma forma razoável, qual será o detalhamento que conduzirá a peça com nível de fissuração aceitável e também qual conduzirá a maior carga de ruptura.

6.2.2 – Exemplo 2 - Viga Parede A1

De maneira semelhante ao exemplo anterior foi analisada uma viga parede bi-apoiada com duas cargas concentradas de mesma distância dos apoios conforme figura 6.1.

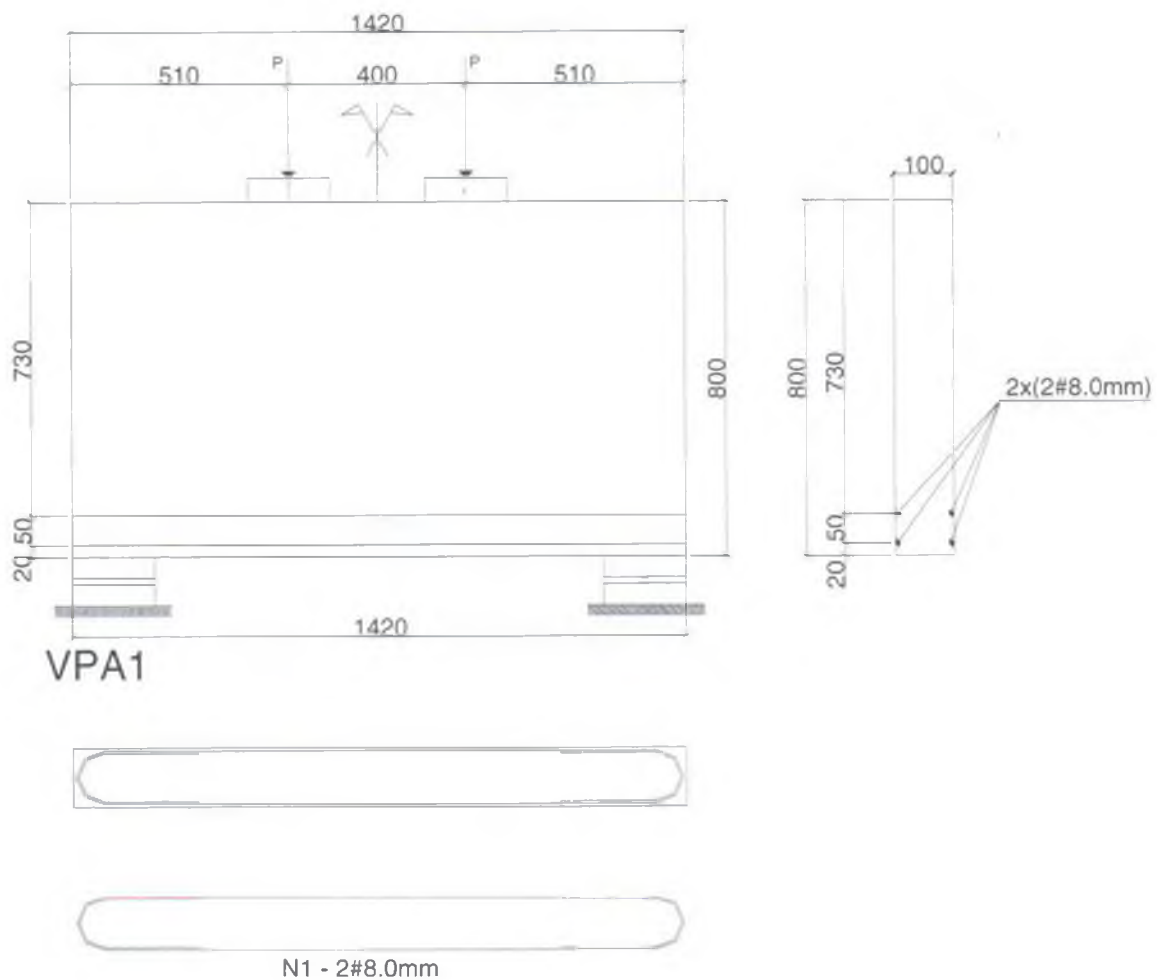


Figura 6.7: Viga parede VPA1

Esta viga foi ensaiada por GUIMARÃES [1980] no laboratório de Estruturas e Materiais da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC e analisada computacionalmente por MOURA [1980]. Esta viga cujo detalhamento está presente na figura 6.7 é referenciada, conforme trabalho original por A1. A seção transversal é retangular e de espessura constante igual a 10 cm. . Sua armadura principal de flexão é constituída de barras horizontais de aço CA-50B de 8 mm que se estendem pelo vão total da mesma . Não foram adotadas armaduras

de alma para a mesma como também não se utilizou a armação de fretagem na região dos apoios. A armação é tal que propicia uma ruptura por cisalhamento segundo MOURA [1980]. As características do concreto e do aço foram admitidas constantes para todo o tempo de duração da análise, tendo seus valores indicados na tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Propriedades dos Materiais - VPA1

Propriedades	Concreto	Apoio	Armadura
Mod. de elasticidade (MPa)	2,12E+04	2,25E+05	2,10E+05
Coeficiente de Poisson	2,00E-01	3,30E-01	-
Peso especifico(kN-cm ³)	2,30E-03	7,70E-03	-
Espessura da peça (cm)	1,00E+01	1,40E+01	-
Area da barra (cm)	-	-	1,01E+02
Resist.a compressao(MPa)	2,47E+01	5,00E+03	-
Resist.a tracao (MPa)	4,00E+00	5,00E+03	-
Tensao de escoamento(MPa)	-	-	5,72E+02

A figura 6.8 apresenta a discretização utilizada. Tendo o estudo sobre a influência da discretização nos elementos sido feito no exemplo anterior, não foi necessária a execução do mesmo para este exemplo. Obviamente, os resultados obtidos pelo exemplo anterior serviram de base para a adoção da discretização utilizada neste exemplo. Sendo assim a tabela 6.3 descreve a quantidade de elementos adotada pela corrente discretização.

Tabela 6.5 – Número de elementos adotados na discretização – VPA1

Quantidade de elementos da malha(*)		
Tipos		Malha
LL	Apoio	16
	Concreto	224
	Armadura	32
	Total	272
QL	Apoio	16
	Concreto	224
	Armadura	64
	Total	304
QQ	Apoio	16
	Concreto	224
	Armadura	32
	Total	272

(*) - Utilizando simetria da malha

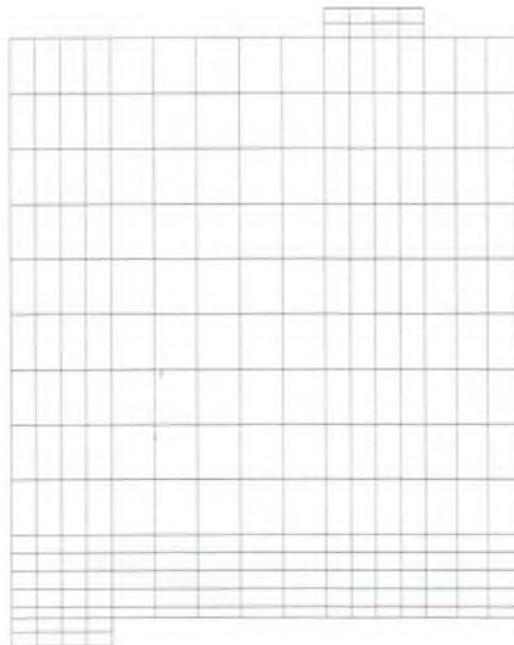


Figura 6.8: Malha discretizada para VPA I

Devido à quantidade grande de elementos gerados pelas malhas optou-se por utilizar a propriedade de simetria do modelo proposto evitando assim alguns problemas decorrentes do pré-processo. Na tabela 6.6 são mostrados alguns resultados colhidos na análise executada através do modelo computacional.

Tabela 6.6 – Comparação entre os resultados – VPA I

% de erro para carga de fissuração e ruptura				
Malhas	Fissuração(KN)	Erro Relativo(%)	Ruptura(KN)	Erro Relativo(%)
Moura-QQ2	210	0,00	410	12,77
Moura-QQ3	210	0,00	450	4,26
LL	245,00	19,12	648,30	24,56
LQ2	225,00	7,14	521,90	11,04(*)
LQ3	210,00	0,00(*)	542,40	15,40
QQ2	220,00	4,76	515,40	9,67(*)
QQ3	210,00	0,00(*)	538,40	14,55

Valores Experimentais - Fissuração - 210,00 KN
 (*) - Resultados + precisos - Ruptura - 470,00 KN

Podemos observar que as cargas obtidas para início de fissuração tiveram seus melhores resultados para as malhas com integração completa representadas pelos símbolos LQ3 e QQ3. Veja que a presença ou não de elementos lineares ou quadráticos representantes das armaduras não teve influência sobre os resultados obtidos. Os resultados obtidos por MOURA [1980] tiveram discordâncias quando comparados ao modelo proposto pois a variação da quantidade dos pontos de integração não acarretou em modificações nos valores das cargas de início de fissuração.

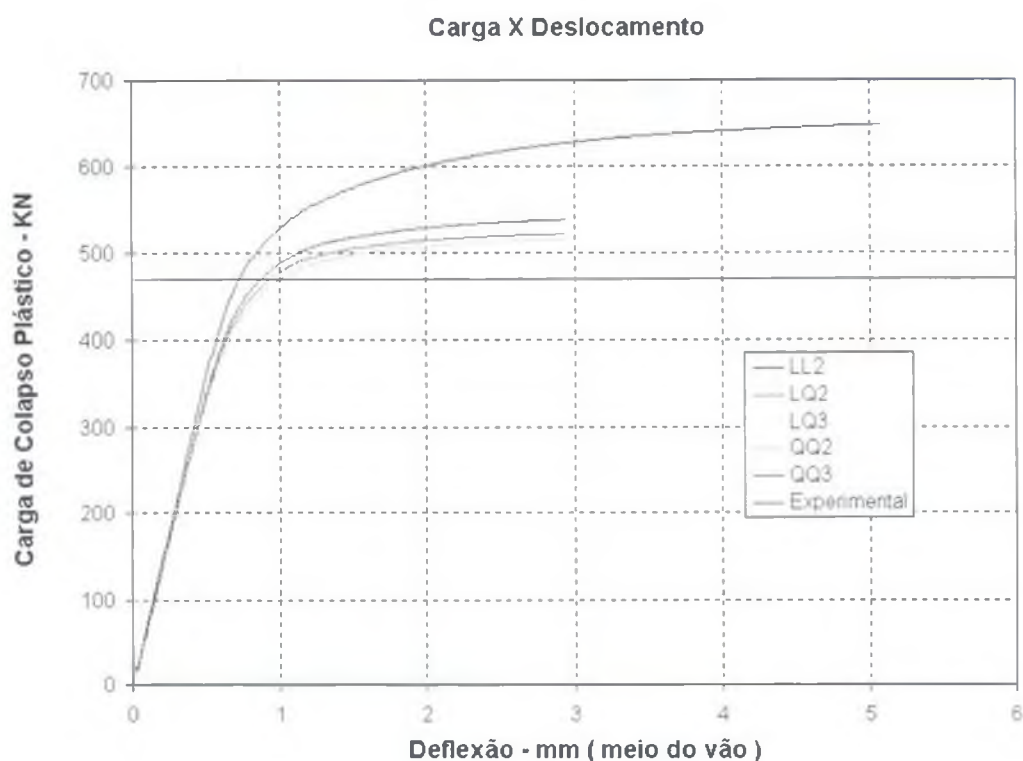


Figura 6.9: Diagrama carga versus deslocamento da VPA1

O gráfico apresentado pela figura 6.9 mostra que os elementos lineares LL2 tiveram uma performance ruim na obtenção da carga de colapso plástico, ocasionando uma sobre rigidez no modelo e ficando bastante distante do valor obtido experimentalmente. Nota-se também que a quantidade de incrementos dados teve de ser aumentada bastante no propósito de se obter uma convergência assintótica na resposta. Para os elementos quadráticos de melhor performance, de modo semelhante ao exemplo 1, não houve influência significativa na

utilização de elementos lineares ou quadráticos para a armadura, ficando, no entanto, os melhores resultados com as malhas que utilizaram integrações reduzidas representadas pelos elementos LQ2 e QQ2.

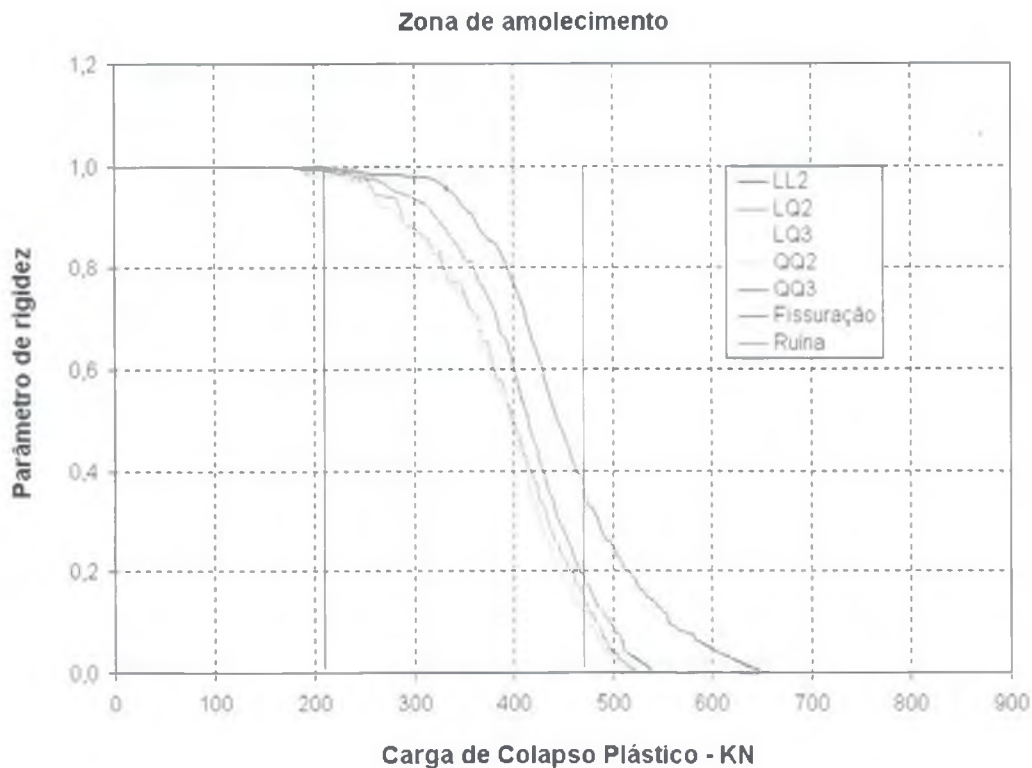


Figura 6.10: Definição do intervalo de perda de rigidez da VPA1

A figura 6.10 apresenta de forma clara o intervalo de perda de rigidez da viga parede VPA1 durante o carregamento atuante. Os elementos quadráticos com integração reduzida foram os que obtiveram os melhores resultados de modo compatível com o gráfico da figura 6.9 apresentada anteriormente. Conforme já verificado no exemplo 1, novamente o parâmetro de rigidez corrente ou de BERGAN conseguiu capturar de modo satisfatório a zona de amolecimento do material. Ocorreu, entretanto que, de modo contrário ao exemplo anterior o modelo proposto obteve valores superiores para carga de colapso plástico comparados com valor obtido no ensaio experimental. Uma vez que o valor da relação entre a tensão de compressão e tração fornecidas por MOURA [1980], é bastante diferente de dez vezes seria preciso verificar se realmente há fidelidade nos dados do ensaio experimental utilizados para entrada no modelo computacional.

6.2.3 – Exemplo 3 - Viga Parede VP2

Foi analisada uma viga parede bi-apoiada com duas cargas concentradas de mesma distância dos apoios conforme figura 6.1 .

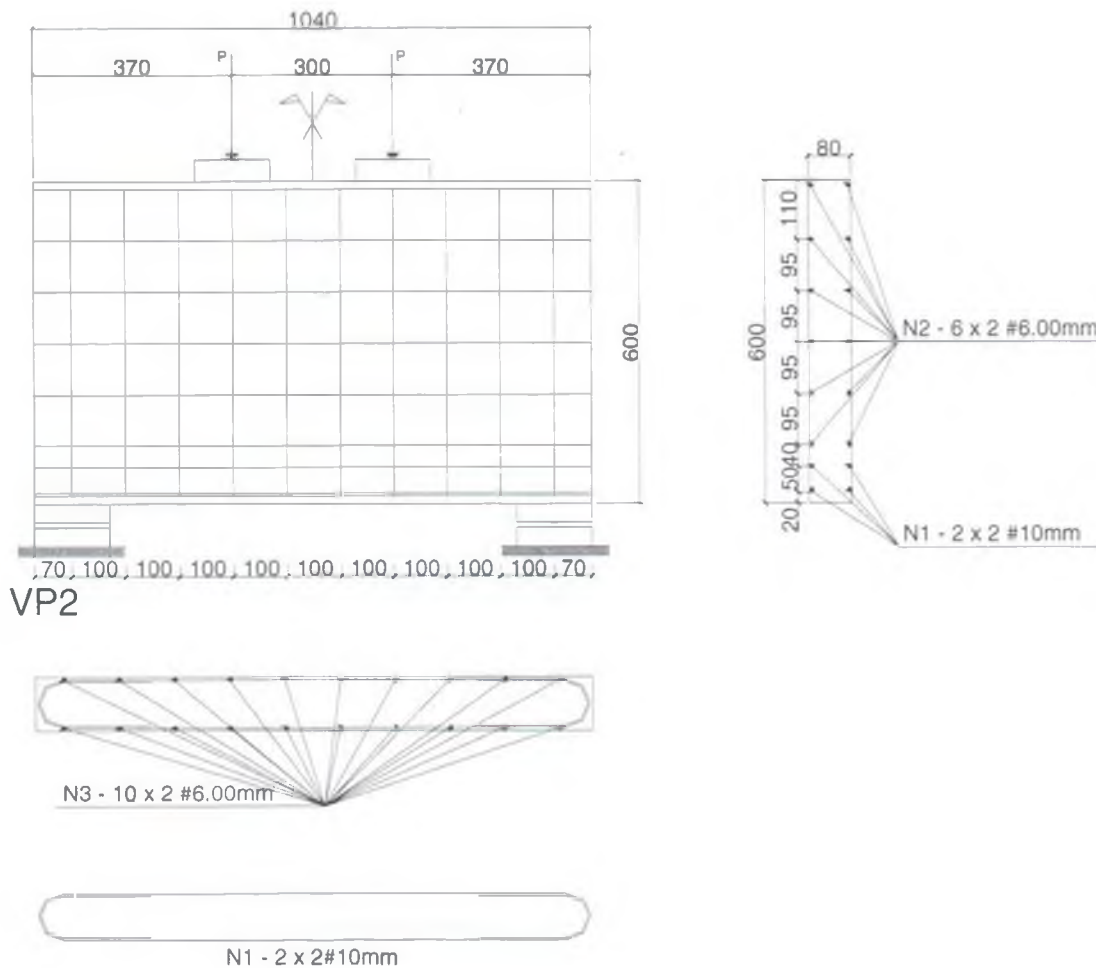


Figura 6.11: Viga parede VP2

Esta viga foi estudada experimentalmente por BESSA [1994] no laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília. Esta viga cujo detalhamento está presente na figura 6.11 é referenciada, conforme trabalho original por VC2. A seção transversal é retangular e de espessura constante igual a 8 cm. . Sua armadura principal de flexão é constituída de barras horizontais de aço CA-50B de 10 mm que se estendem pelo vão total da mesma. Existem também armaduras verticais e horizontais do tipo armadura de pele em aço CA-60B de 6mm distribuídos conforme a figura 6.11. Não se utilizou a armação de fretagem na região dos apoios.

As características do concreto e do aço foram admitidas constantes para todo o tempo de duração da análise, tendo seus valores indicados na tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Propriedades dos Materiais - VP2

Propriedades	Concreto	Apoio	Arm. Horizontal	Arm. Vertical
Mod. de elasticidade (MPa)	3,42E+04	2,25E+05	2,17E+05	2,25E+05
Coeficiente de Poisson	2,00E-01	3,30E-01	-	-
Peso especifico(kN-cm3)	2,30E-03	7,70E-03	-	-
Espessura da peça (cm)	8,00E+00	1,40E+01	-	-
Area da barra (cm)	-	-	1,57E+02	5,66E+01
Resist.a compressao(MPa)	3,42E+01	5,00E+03	-	-
Resist.a tracao (MPa)	3,28E+00	5,00E+03	-	-
Tensao de escoamento(MPa)	-	-	5,72E+02	7,03E+02

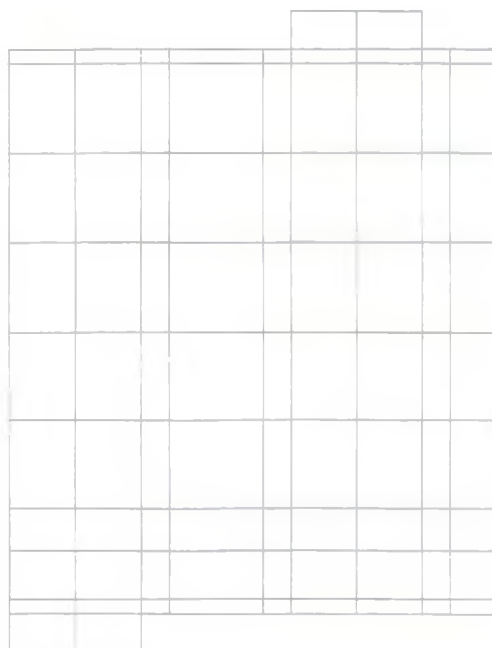


Figura 6.12: Discretização da malha da VP2

A discretização utilizada no exemplo 3, de modo semelhante ao exemplo 2, fez uso da propriedade de simetria para definição de um menor número de elementos para malha. Veja que o número de 300 elementos obtido no estudo da influência da discretização do exemplo 1 não pode ser mantido uma vez que isso acarretaria num número extremamente grande de

elementos de armadura devido a sua vinculação na acoplagem (ver anexo B). Sendo assim, a quantidade de elementos da malha ficou definida pela própria geometria das armaduras principais e secundárias (verticais e horizontais) e os contornos da viga parede em análise.

A quantidade de elementos é apresentada na tabela 6.8 para os vários tipos de elementos utilizados.

Tabela 6.8 – Número de elementos adotados na discretizações – VP2

Quantidade de elementos da malha(*)		
Tipos		Malha
LL	Apoio	4
	Concreto	81
	Armadura	72
	Total	157
QL	Apoio	4
	Concreto	81
	Armadura	64
	Total	229
QQ	Apoio	4
	Concreto	81
	Armadura	72
	Total	157

(*) - Utilizando simetria da malha

A tabela 6.9 mostra abaixo apresenta as performances dos diversos tipos de elementos e suas respectivas combinações. Em concordância com exemplo1 os elementos com integração completa obtiveram a melhor performance ficando muito próximos do valor da carga de colapso obtida experimentalmente. É possível notar que diferentemente dos exemplos anteriores a carga de início de fissuração deve seus maiores erros relativos neste exemplo. Isso talvez se deva ao fato de que o aumento de armadura presente no ensaio aumenta a importância de fatores do tipo aderência não considerados no modelo proposto.

Tabela 6.9 – Performance das discretizações – VP2

% de erro para carga de fissuracao e ruptura				
Malhas	Fissuracao(KN)	Erro Relativo(%)	Ruptura(KN)	Erro Relativo
LL	210,00	23,53	893,60	21,28
LQ2	210,00	23,53	703,30	4,55
LQ3	190,00	11,76(*)	750,40	1,79(*)
QQ2	200,00	17,65	702,50	4,66
QQ3	190,00	11,76(*)	750,40	1,79(*)

Valores Experimentais - Fissuracao - 170,00 KN
 (*) - Resultados + precisos - Ruptura - 736,80 KN

O gráfico apresentado pela figura 6.12 confirma de modo definitivo uma característica constante observada nos exemplos apresentados: as utilizações de elementos de armadura quadráticos ou lineares não tiveram influência significativa nos valores obtidos das cargas de colapso plástico pelo modelo computacional proposto. Sendo assim, assegurado a utilização do modo de acoplamento similar ao deste trabalho de dissertação, deve-se sempre optar pelos elementos quadráticos o que leva a uma quantidade menor de elementos na malha.

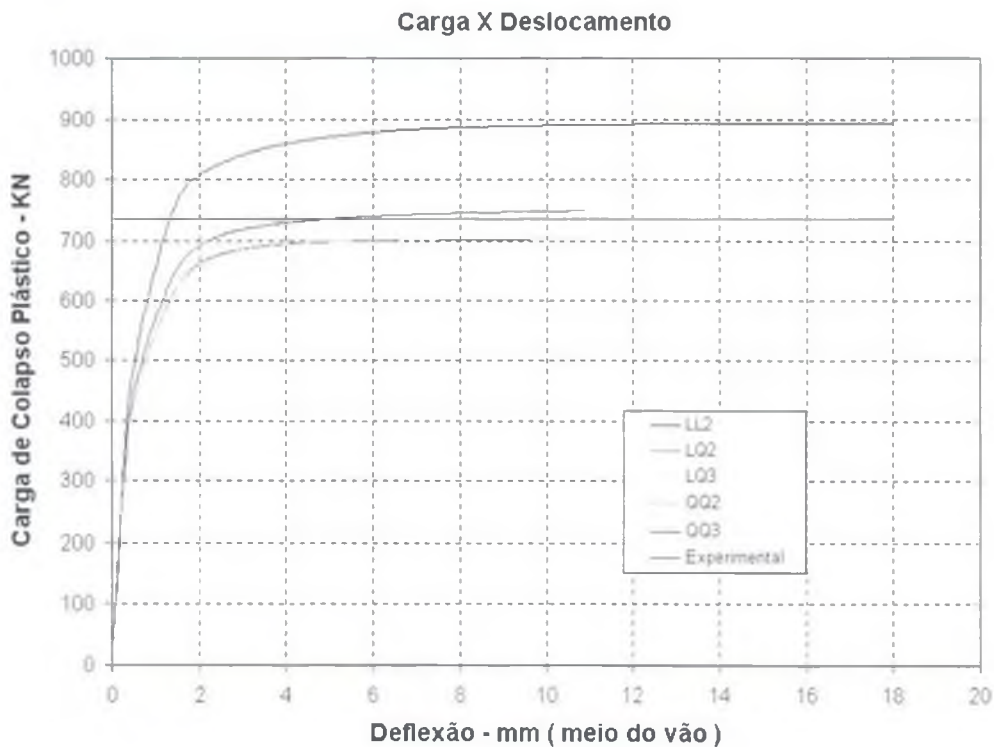


Figura 6.13: Diagrama carga versus deslocamento da VP2

A performance dos elementos quadráticos com integração completa conduziram a valores bastante próximos da carga do ensaio ficam com erros relativos de 1,79% o que é bastante notável devido a simplicidade do modo adotado. Também os elementos quadráticos com integração reduzida obtiveram valores próximos ao experimental com erros relativos da ordem de 5%. O exemplo 3 foi o que obteve melhor aproximação pelo modelo computacional do cálculo da carga de colapso plástico observada no ensaio experimental. Um aumento da taxa de armadura utilizada pela viga parede em análise pode levar a uma melhor performance do modelo computacional.

Novamente os valores dos elementos lineares e quadráticos com integração reduzida, formaram os limites inferiores e superiores, na obtenção da carga de colapso plástico. O gráfico da figura 6.13 mostra mais uma vez concordância com resultados indicados no ensaio experimental. No entanto, fica claro uma perda de precisão na carga de início de fissuração.

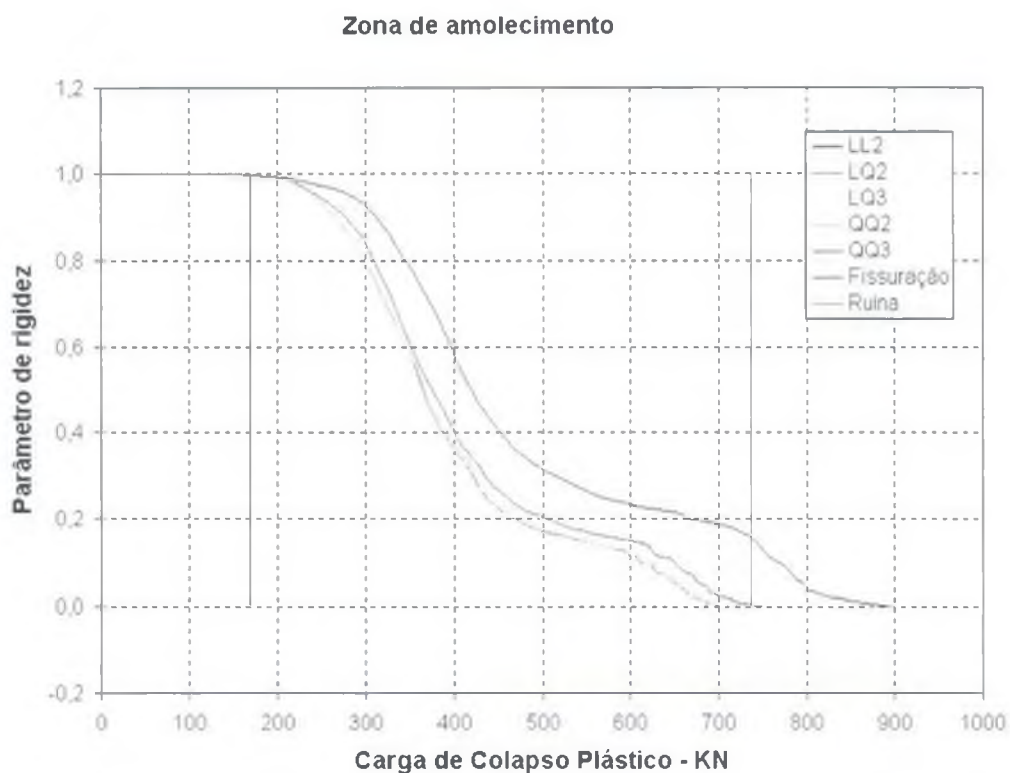


Figura 6.14: Definição do intervalo de perda de rigidez da VP2

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 – CONCLUSÕES

As conclusões e aspectos mais importantes presentes neste trabalho de dissertação serão apresentados a seguir.

- As comparações das cargas de início de fissuração e colapso plástico entre o modelo computacional proposto e os resultados experimentais sugerem que a modelagem numérica executada foi capaz de descrever satisfatoriamente, asseguradas as limitações do modelo, a carga de colapso plástico das vigas paredes em questão.
- Verificou-se que a utilização de elementos lineares na discretização de estruturas vigas paredes de concreto armado em estados planos de tensão acarreta numa modelagem mais rígida do que a observada experimentalmente. Com isso as cargas de colapso obtidas são conservadoras, levando em algumas situações, a grandes distorções.
- A influência do refinamento das malhas sobre a obtenção das respectivas cargas de colapso plástico nos exemplos analisados mostrou de forma particular para os elementos lineares na modelagem do material concreto e da armadura, ser um aspecto extremamente relevante. Para o caso dos elementos lineares para as armaduras e quadráticos de concreto e também elementos quadráticos para ambas, o refinamento têm menor influência. No entanto, também conduz da mesma forma que nos lineares a uma melhora na convergência final de obtenção da carga de colapso plástico.

- Os resultados finais obtidos na análise das diversas malhas representativas dos exemplos analisados comprovam a necessidade de um estudo de convergência para qualquer esquema de modelação numérica a ser proposta e posteriormente validada.
- A partir dos exemplos apresentados conclui-se que o uso dos elementos quadráticos acompanhados de uma integração completa conduz a melhores resultados na análise da carga de colapso plástica de estruturas de vigas paredes.
- De uma forma geral nos resultados apresentados, verifica-se que os fenômenos de deformação lenta, retração, aderência e fissuração de modelagem numérica extremamente difícil, podem ser desconsiderados para obtenção da carga de colapso plástico aproximada de estruturas de vigas paredes através do modelo computacional proposto. Vale ressaltar, que esse procedimento só têm validade considerando-se que a carga final de ruptura da peça ficará em torno de 15% a menor ou a maior do que a real. Mesmo assim, este é um dado importante no projeto de estruturas de concreto armado não convencionais. Por outro lado, os estados limites últimos de utilização das estruturas em análise deverão ser verificados.
- Uma elevada taxa de armadura presente nos exemplos conduziu a uma melhora bastante razoável na carga de colapso plástico obtidas experimentalmente. Isso pode ocorrer devido ao fato do algoritmo utilizado para modelagem da relação constitutiva dos elementos de armaduras se adequar melhor ao problema do que o de concreto.
- O critério de Ducker-Prager utilizado via um processo incremental iterativo elastoplástico pode modelar de forma bastante razoável estruturas de concreto armado em estados planos de tensão, que é o caso das vigas paredes dos exemplos considerados esta dissertação.
- O programa computacional proposto pode ajudar de forma significativa aos projetistas de estruturas de concreto armado uma vez que permite, que durante o processo de detalhamento das armaduras no interior das peças várias situações sejam testadas. Assim o projetista poderá optar de modo mais racional por uma solução mais segura ou mesmo saber das limitações presentes no detalhamento por ele adotado.

7.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são propostas algumas sugestões que no entender do autor podem melhorar a presente linha de pesquisa ou mesmo desencadear futuras investigações:

- Implementar no modelo computacional proposto a imersão do elemento de armadura no interior do de concreto. Isso conduziria a uma melhora razoável na geração de malhas uma vez que a discretização dos elementos de concreto ficaria independente da discretização das armaduras.
- Estender a formulação apresentada para uma série de outros tipos de critérios de plastificação existentes e testar sua adequação aos problemas existentes na prática.
- Acrescentar ao modelo subrotinas que considerem os fenômenos de retração, deformação lenta e aderência de modo a que o mesmo possa ser utilizado para uma análise completa da estrutura na forma de tensões, deslocamentos, deformações, durabilidade, etc.
- Adequar a entrada e saída de dados do programa proposto de modo que possa interagir com outros pacotes existentes, facilitando ao usuário sua utilização tanto na fase de pré-processo quanto de pós-processo.
- Desenvolver e implementar outros algoritmos como de integração explícita com sub-incrementação de modo a comparar seu desempenho com o de integração implícita presente nesta dissertação.
- Incorporar os modelos dano, cada vez mais presentes nas literaturas atuais, ao programa computacional existente de modo a verificar sua performance na captura dos fenômenos envolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARROSO, L. C., BARROSO, M. M. A., CAMPOS, F. F. F., CARVALHO, M. L. B. and MAIA, M.L.(1987), Cálculo Numérico (com Aplicações), 2ª Edição, Harbra.
- [2] BATHE, K. J.(1982), Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall.
- [3] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. and MORAN, B. (2000), Non Linear Finite Elements for Continuous and Structures, John Wiley & Sons, 650 p.
- [4] BERGAN, P. G., HERRIGMOE, G., KRAKELAND, B. and SOREIDE, H. (1978), Solution Techniques for Non-Linear Finite Elements Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, 1677-1696
- [5] BESSA, M. A. S.(1994), Análise Experimental de Vigas Paredes, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 003A/ 94, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF, 91 p.
- [6] BREBIA, C. A. and FERRANTE, A. J.(1975), The Finite Element Technique – An Introduction for Engineers, Editora da UFRGS, Porto Alegre, RS.
- [7] BUZAR, M. A. R.(1996), Análise de Placas com o Método dos Elementos Finitos e de Contorno na Modelagem de um Edifício, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 005A/96, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF, 121 p.
- [8] CAMPOS, A. F.(1987), Análise Teórico-Experimental de Elementos de Concreto Armado para Obtenção de Modelo Matemático, Dissertação de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, USP, São Paulo, 293 p.
- [9] CARVALHO, E. B.(1979), Análise Bidimensional de Estruturas de Concreto Armado considerando-se os Efeitos da Fissuração, Retração e Deformação Lenta, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 130 p.
- [10] CARVALHO, A. W. A(2001), Influência de Falhas Locais na Resposta Pós-crítica de Estruturas Treliçadas, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 97 p.
- [11] CHEN, WAI-FAH (1982), Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, USA.
- [12] CHEN, W. F., and SALEEB, A. F.(1982), Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol.2, Plasticity and Modeling, Wiley, New York.

- [13] COOK, R. D., MALKUS, D. S. and PLESHA, M.E.(1989), Concepts and Applications of Finite Elements Analysis, Third Edition, Wiley, New York.
- [14] CRISFIELD, M.A.(1980), A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", Computers & Structures, Vol. 13, pp. 55-62.
- [15] CRISFIELD, M.A.(1983), An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1269-1289.
- [16] CRISFIELD, M.A.(1991), Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures , Volume 1 : Essencials - John Wiley & Sons , 288 p.
- [17] DANTAS, G. V.(1980), Análise Bidimensioanal de Estruturas de Concreto Protendido pelo Método dos Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro,293 p.
- [18] DA SILVA, L. S.(1997), Análise Elástica e Elasto-Plástica de Placas Submetidas a Excitações Estáticas e Dinâmicas, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 001A/97, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF. 104 p.
- [19] DA SILVA, L. S.(2003), Análise Limite de Problemas Geotécnicos com Elementos Finitos Mistos e Híbridos, Dissertação de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF. 120 p.
- [20] DEEKS, A. J.(1996), Automatic Computation of Plastic Collapse Load for Frames, Computer & Structures , Vol.60, Nº 3, pp. 391-402.
- [21] DIEGUEZ, J. P. P.(1992), Métodos Numéricos Computacionais para Engenharia, Vol.2, Rio de Janeiro, Âmbito Cultural.
- [22] EBOLI, C. R.(1994), Análise Elasto-Plástica de Lajes via Programação Matemática, Dissertação de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 119 p.
- [23] FAFARD, M.& MASSICOTTE, B.(1993), Geometrical Interpretation of the Arc-Length Method, Computer & Structures, Vol.46, Nº 4, pp. 603-615
- [24] FARIA, H. P.(1998), Análise Não-Linear de Instabilidade Elástica de Pórticos Planos, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 003A/98, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 106 p.
- [25] FARIA, R., POUCA, N. V. and DELGADO, R.(2000), Modelação Numérica do comportamento Cíclico de Pilares de Pontes de Betão Armado, VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, pp. 827-836.

- [26] FARIAS, J.L.Q.(1995), Modelo Elasto-Plástico para Avaliação da Capacidade Resistente de Pórticos Planos em Concreto Armado, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM- 003 A /95, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF, 96 p.
- [27] FOSTER. S.(1992), An Application of The Arc Length Method Involving Concrete Cracking, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 269-285.
- [28] GUIMARÃES, G. B.(1980), Análise Experimental de Vigas-Parede de Concreto Armado Enrijecidas por Pilares Laterais, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 134 p.
- [29] HERMANN, M. & STRANG. G.(1979), The Solution of Nonlinear Finite Element Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 1613-1626.
- [30] JEREMIC, B.(1994), Implicit Integrations Rules in Plasticity , thesis for degree of Master of Science , University of Colorado, USA.
- [31] KACHANOV, L.M.(1974) , Fundamentals of Theory of Plasticity , Mir Publishers.
- [32] KALISZKY, S.(1989), Plasticity – Theory and Engineering Applications, Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungary.
- [33] KLEIBER, M.(1989), Incremental Finite Modeling in Non-Linear Solids Mechanics, Ellis Horwood Serires in Mechanical Engineering, John Wiley & Sons
- [34] LADEIRA, M. A. S. A., FIGUEIREDO, A. J. M. and NEVES, A. S.(1993), Detecção Automática de Modelos Biela-Tirantes para Análise de Peças Irregulares de Betão Armado, XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia
- [35] MATIAS, W. T.(1987), Análise Elasto-Plástica de Grelhas Planas de Concreto Armado, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. RS. 99 p.
- [36] MATIAS, W. T.(1996), El Método de Desplazamiento Crítico En El Análisis de Inestabilidad Estructural, Dissertação de Doutorado, Departament de Resistència de Materials I Estructures A L'Enginyaria, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 225 p.
- [37] MEHTA, P. K. & MONTEIRO, P. J. M.(1994), Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais, Editora PINI.
- [38] MENDELSON, A.(1968), Plasticity -Theory and Application , The MacMillan Co.

- [39] MIRANDA, F. S.(1997), Cálculo Plástico de Lajes Contínuas de Edifícios em Concreto Armado Via Mínima Norma Euclidiana, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 002A /97, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF, 178 p.
- [40] MOURA, J. R. B.(1980), Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo M.E.F. usando Relações Constitutivas Bidimensionais de Base Experimental, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro,175 p.
- [41] NEAL, B. G.(1977), The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, London.
- [42] NIELSEN, M. P.(1999), Limit Analysis and Concrete Plasticity, Second Edition, CRC Press, New York.
- [43] OLLEN, S.(1991), Modelización Numérica de Materiales Friccionales, Monografia Nº 03, CIMNE – primera edicion.
- [44] OLIVER, J.(1993), Modelado de La Fisuración de Hormigón, Monografia Nº 15, CIMNE – primera edicion.
- [45] ONÃTE, EUGENIO (1995), Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, Análisis Estático Lineal, CIMNE – segunda edicion.
- [46] ORTIZ, M. and POPOV, E. P.(1985), Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21 , pp.1561-1576.
- [47] ORTIZ, M. and SIMO, J. C. (1986). An Analysis of a new Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations , Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol. 23 , pp. 353-366.
- [48] OWEN, D. R. J. and HINTON, E.(1980), Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- [49] PACHECO, R. G.(1978), Aplicação da teoria da Plasticidade à Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo M.E.F., Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 131 p.
- [50] PANTOJA, J. C. & MATIAS, W. T.(2003), Plastic Colapse Load for Deep Beams Obtained by Numerical Modelling, VII World Conference on Computacional Plasticity, COMPLAS 2003, Barcelona, Espanha.
- [51] PANTOJA, J. C. & MATIAS, W. T.(2003), Cálculo da Carga de Colapso Plástico de Vigas Paredes de Concreto Armado, VII Congresso Internacional de Mecânica Computacional e Aplicada, CMAC 2003, Uévara, Portugal.

- [52] PIMENTA, P. M.(1987), Análise de Sólidos Elasto-Plásticos , Tese de Livre Docência, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da USP, SP, 240 p.
- [53] PIMENTA, P. M.(1989), A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method. Boletins Técnicos BT/PEF-8913 e BT/PEF-8914, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da USP, SP.
- [54] PINTO, J. D. S.(1982), Adaptação ao Programa NONSAP de um Elemento de Armadura para Análise de Estruturas de Concreto Armado, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 126 p.
- [55] POWELL, G. & SIMONS, J.(1981), Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 1455-1467.
- [56] RAMM, E.(1984), Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limits Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Ed. W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe, p.63-89, Springer-Verlang.
- [57] RICKS, E.(1972), The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, Journal of Applied Mechanics, 39, p.1060-1066
- [58] RICKS, E.(1984), Some Computational Aspects of The Stability Analysis of Nonlinear Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 219-259, North-Holland
- [59] REGOTO, M. R. P.(1983), Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto Armado sob Estados Planos de Deformação, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 153 p.
- [60] SEYDEL, R.(1994), Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos, Second Edition, Springer-Verlang.
- [61] SIMO, J. C. and HUGHES, T. J. R.(1997), Computacional Inelasticity : Volume 7 Series Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag.
- [62] SIMO, J. C. and TAYLOR, R. L.(1986), A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity . Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol. 22 , pp. 649 – 670.
- [63] SOUZA, L. T.(1981), Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos com Geração Automática da Armadura, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro, 106 p.

ANEXO A

TEORIA CLÁSSICA DA PLASTICIDADE

A.1 - POSTULADO DE ESTABILIDADE DE DRUCKER – CONDIÇÕES DE PRAGER

As definições de material plasticamente estável dadas por Drucker não são mais que uma generalização no espaço n dimensional das conclusões que se pode extrair sobre o trabalho plástico que acontece em um processo uniaxial causado por um incremento de tensão sobre a ação de um agente externo. Referindo-se exclusivamente a materiais com endurecimento e fluxo associado, anuncia que uns pontos de um sólido carregados têm um comportamento estável se cumpre os seguintes postulados:

(I) - O trabalho plástico realizado por um agente externo , durante a aplicação de um estado adicional de tensões , é positivo.

(II) – O trabalho líquido executado por um agente externo , durante um ciclo de aplicação e remoção de um estado adicional de tensões , é não negativo.

Considerando um ponto de um sólido submetido a um estado entre tensão e deformação prévio $\sigma - \epsilon$, que é alterado em $d\sigma - d\epsilon$ pela ação de um agente externo , se têm pelo postulado (I) , que a resposta entre tensão e deformação do ponto é estável se cumpre que o incremento temporal de trabalho de segunda ordem é positivo conforme figura A.1. ou seja :

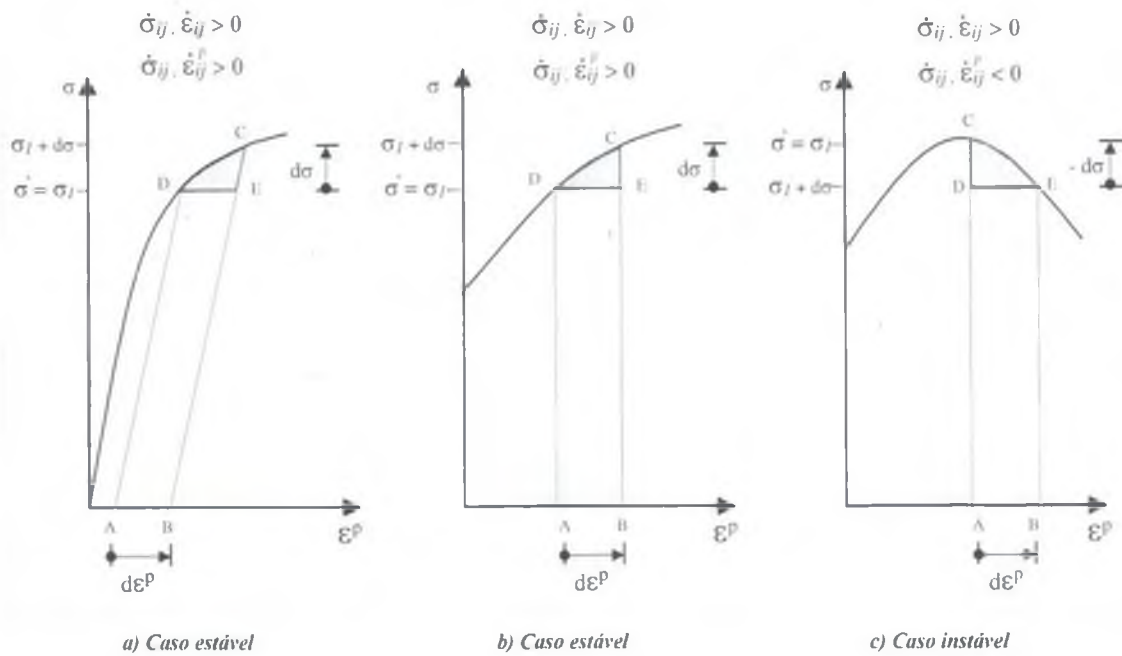


Figura A-1: Estabilidade e instabilidade de um material plástico (processo uniaxial)

$$d\sigma^T d\epsilon = 0 \quad (A.1)$$

Ou também se:

$$d\sigma^T d\epsilon^e + d\sigma^T d\epsilon^p = 0 \quad (A.2)$$

Pelo postulado (II), a estabilidade na resposta tensão-deformação plástica de um ponto é garantida se é cumprido que o incremento temporal de trabalho plástico de segunda ordem é não negativo conforme pode ser visto na figura A.1a e figura A.1c. Logo:

$$(\sigma - \sigma^{ult})^T d\epsilon^p \geq 0 \quad (A.3)$$

$$(d\sigma)^T d\varepsilon^p \geq 0 \quad (A.4)$$

Onde:

σ^{ult} - Tensão no ponto no início do último incremento de carga. Este estado é satisfeito no instante prévio de uma equação do $\tau = 0$;

σ - Tensão no ponto no estado atual do processo de carga. Este estado é satisfeito no instante atual da equação $\tau = 0$;

$d\varepsilon^p$ - Incremento de deformação plástica desenvolvida durante o incremento de tempo t , correspondente a conclusão do ciclo de carga.

Além destes postulados, um material com endurecimento plástico deve satisfazer também as quatro condições de Prager para assegurar um apropriado comportamento elastoplástico. São estas:

1.) Condição de Continuidade

Considera-se um ponto de um sólido, submetido a um estado de tensão σ que está situado na superfície de fluência, sobre o qual se aplica um incremento temporal de tensão $\partial\sigma$, conforme mostrado na figura 2.1 (Capítulo 2), proveniente de um incremento de carga, descarga ou carga neutra (respectivamente dirigido para o exterior, interior ou tangente a superfície de fluência). Para evitar descontinuidades na resposta tensão-deformação a condição de continuidade requer que para estados de carga neutra, não sejam desenvolvidas deformações plásticas, o que significa que neste caso particular o multiplicador plástico do processo seja nulo, ou seja, $\partial\Delta\lambda=0$. Situação que conduz ao desenvolvimento de um trabalho plástico nulo.

2.) Condição de Unicidade

Se sobre um ponto do sólido ideal, submetido a um estado prévio de tensão-deformação, se aplica um incremento de tensão, resultará em um estado de deformação associado ao de tensão, e vice-versa, o qual será único. Esta condição será cumprida sempre que se repetirem os postulados de Drucker.

3.) Condição de Irreversibilidade

Esta exige que o trabalho plástico seja irrecuperável dado o caráter irreversível das deformações plásticas. Em outras palavras, esta condição exige que o trabalho plástico de primeira ordem representado pela equação A.5, seja sempre positivo qualquer que seja o processo plástico desenvolvido. Assim:

$$d\chi^p = \sigma^T d\varepsilon^p \geq 0 \quad (A.5)$$

Esta equação é considerada como um caso particular do segundo princípio da termodinâmica.

4.) Condição de Consistência Plástica

Esta condição diz que sobre condições de carga $\hat{\sigma} \geq 0$, um ponto do sólido que se encontra em estado elastoplástico, passa necessariamente a outro estado elastoplástico. Matematicamente isso pode ser representado na forma:

$$\begin{aligned} r(\sigma, \kappa) &= \tau(\sigma) - K(\kappa) = 0 \\ d\tau(\sigma, \hat{\sigma}, \hat{\kappa}) &= \left\{ \frac{\partial \tau(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \left\{ \frac{\partial \tau(\sigma, \kappa)}{\partial \kappa} \right\} d\kappa \end{aligned}$$

É importante notar que se o ponto do sólido têm um comportamento com endurecimento negativo (amolecimento), não cumpre com o segundo postulado de Drucker da equação A.2 . Por um outro lado, segundo este postulado se trataria de um comportamento instável ao nível do ponto, ou seja, instável localmente. Não obstante, isto não implica que necessariamente se trate de um processo instável em todo o sólido. Assim, o segundo postulado de Drucker será considerado somente como uma condição suficiente de estabilidade global.

A.2- CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER

A condição de carga – descarga e a condição de consistência plástica de Prager , se satisfazem simultaneamente mediante as três condições de Kuhn-Tucker , que é outra forma de apresentar o axioma da máxima dissipação plástica MDP :

Das três condições se deduz que:

$$\begin{aligned}d\Delta\lambda &\geq 0 \\ \tau(\sigma, \omega) &\leq 0 \\ d\Delta\lambda\tau(\sigma, \omega) &= 0\end{aligned}$$

. Se $\tau(\sigma, \omega) < 0$, a condição de fluência plástica não se satisfaz e se desenvolve um processo puramente elástico, portanto, da terceira condição de Kuhn-Tucker , se obtêm $d\Delta\lambda=0$, de onde se deduz que as variáveis plásticas internas não evoluíram, ou seja, particularmente $d\varepsilon^p = 0$.

. Se $d\Delta\lambda > 0$, se deduz a partir da terceira condição de Kuhn-Tucker que o processo deve satisfazer necessariamente a condição de fluência plástica $\tau(\sigma, \omega) = 0$, significando que se trata de um estado de carga elastoplástico.

. Se $d\Delta\lambda = 0$, se deduz a partir da terceira condição de Kuhn-Tucker que $\tau(\sigma, \omega) \leq 0$. Para este caso particular podem ser apresentadas duas situações distintas : Um processo de carga nula onde $\tau(\sigma, \omega) = 0$, ou um processo de descarga elástica onde $\tau(\sigma, \omega) < 0$.

ANEXO B

ACOPLAGEM ENTRE O CONCRETO E A ARMADURA

B.1 – INTRODUÇÃO

Mostra-se de forma detalhada, o trabalho de acoplagem utilizado nesta dissertação, que seguiu a mesma linha das publicações feitas por PACHECO [1979], CARVALHO [1979] e FARIA [2000], uma vez que os mesmos relataram, porém não detalharam de forma clara essa metodologia. Publicações que também apresentam outros tipos de acoplagem para diferentes elementos podem ser encontradas nos trabalhos de BUZAR [1996] e DA SILVA [1997] entre elementos de placa e pórtico e entre elementos de placas e grelhas por MIRANDA [1997].

Uma técnica proposta idealizada pelo professor Neil Dumont e detalhada no trabalho de SOUZA [1983] e utilizada por vários pesquisadores como REGOTTO [1980], MOURA [1980] e CAMPOS [1987], utilizam o conceito de uma aderência perfeita entre o concreto e o aço. Com isso é feita a imersão do elemento de barra representante da armadura dentro do elemento de concreto através da substituição da integração em linha correspondente a contribuição da rigidez do elemento de barra por uma equivalente feita sobre o volume do elemento de concreto ao qual esta imersa, somando-se então diretamente as rigidezes do elemento de concreto e aço. Apesar de mais elegante e da vantagem de obter-se a discretização da malha de elementos de concreto ser independente das dos elementos de armadura essa rotina não foi implementada no programa desta dissertação devido a dificuldade de implementação de algoritmos automáticos que gerassem os pontos de intersecção entre os elementos de concreto de uma malha qualquer gerada e os elementos de barra colocados posteriormente através de uma entrada gráfica. Ao invés disso, um gerador de

malhas com geração automática dos elementos adjacentes aos lados foi desenvolvido em paralelo por DA SILVA [2003] durante sua dissertação de doutorado, para problemas de lajes e estabilidades de taludes, adequando-se a proposta de modelagem simplificada presente nesta dissertação. A figura B.1 apresenta de forma clara a técnica utilizada.

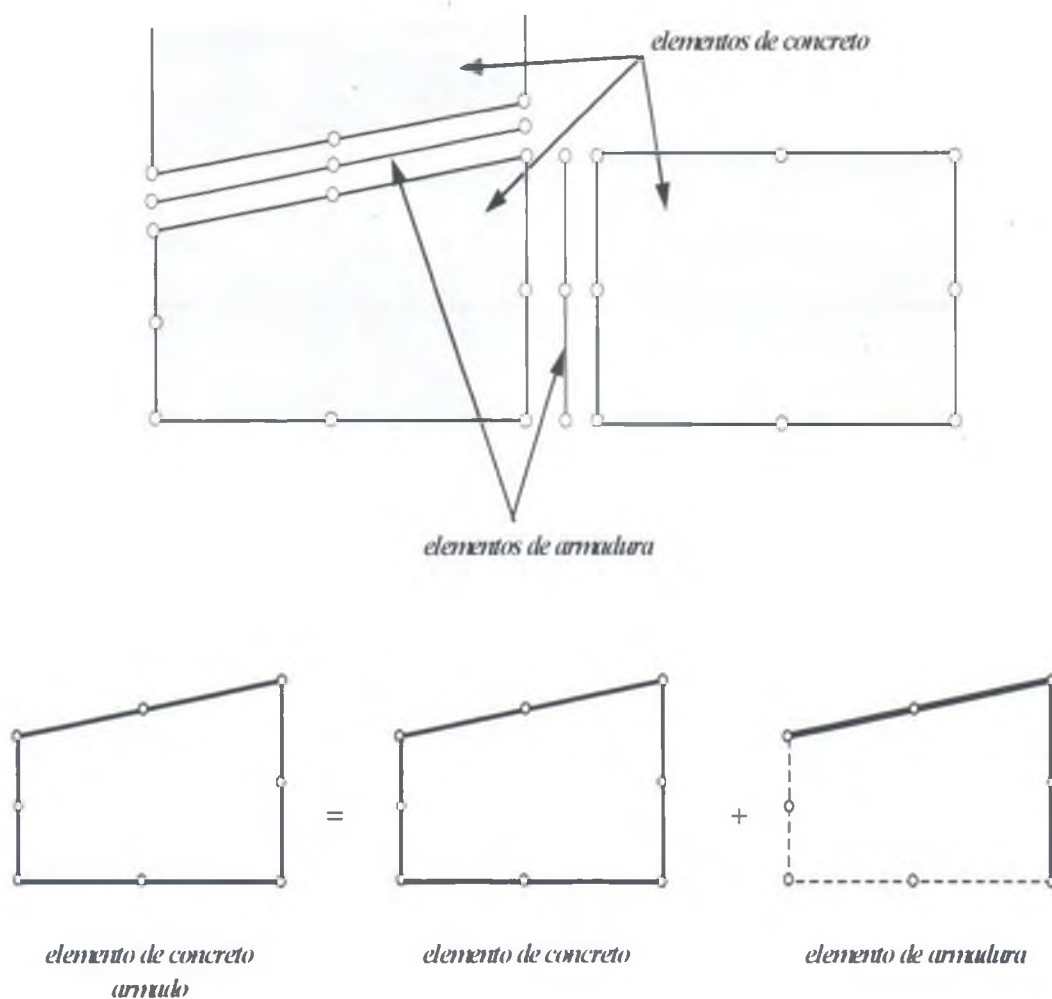
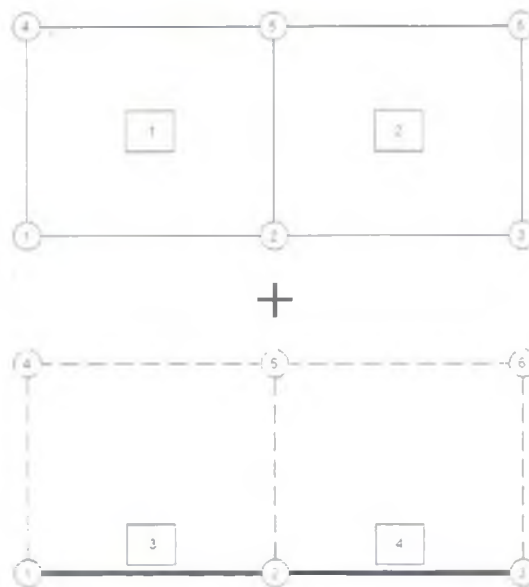


Figura B.1: Exemplo da técnica de acoplagem utilizada

B.2 – IMPLEMENTAÇÃO DA ACOPLAGEM

A seguir apresenta-se a acoplagem executada entre os elementos de concreto e aço através de um exemplo simplificado. Este exemplo é composto de um elemento retangular de concreto armado com dois elementos quadriláteros lineares de concreto e dois elementos unidimensionais lineares representantes das armaduras conforme a mostrado na figura B.2.



ELEMENTO	CONECTIVIDADE
1 CONCRETO	1 -2- 5- 4
2 CONCRETO	2 -3- -6- 5
3 ARMADURA	1 -2
4 ARMADURA	2-3

Figura B.2: Exemplo simplificado da acoplagem concreto-armadura

Considerando uma representação condensada para as matrizes de rigidez dos elementos podemos escrever a matriz representante da rigidez de um elemento de concreto como:

$$K_{ij}^{(1),(2)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

Sendo que cada termo da mesma é representado por:

$$K_{11}^{(c)} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Da mesma forma para o elemento de barra representante da armadura teremos:

$$K_{ij}^{(3),(4)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

e

$$K_{11}^{(A)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Adotando a discretização apresentada na figura B.2 e considerando as conectividades entre os elementos de concreto e aço, podemos montar a matriz de rigidez global da estrutura considerada através do somatório puro e simples da rigidezes dos elementos de concreto e das armaduras pertencentes a um mesmo nó nas direções dos graus de liberdade correspondentes . Assim sendo, apresentamos abaixo a matriz global da estrutura resultante do acoplamento entre os quatro elementos.

$$K_{ij}^{Global} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(3)} & 0 & K_{14}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(2)} + K_{12}^{(4)} & K_{24}^{(1)} & K_{23}^{(1)} + K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} + K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(4)} & 0 & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & 0 & K_{44}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{34}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{43}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & 0 & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \end{bmatrix}$$

(B.5)

Vale ressaltar que devido ao caráter simplificado da modelagem apresentado nesta dissertação, os fenômenos como aderência concreto-aço, deformação lenta, retração, efeito de pino e outros, presentes em trabalhos como CARVALHO [1979] e DANTAS [1980], foram desconsiderados. Com isso procurou-se obter primeiramente a carga de colapso da estrutura através de uma modelagem simplificada, não sendo o objetivo deste trabalho à representação física completa do material concreto armado. O comportamento e a verificação do fenômeno da fissuração foi feito também de forma bem simples através do controle da perda de rigidez da matriz via um parâmetro de controle.

ANEXO C

GERADOR DE MALHA UTILIZADO

C.1 INTRODUÇÃO

Um software gráfico iterativo em ambiente Windows, escrito na linguagem de programação Delphi, desenvolvido por SILVA [2003] para problema de solos foi modificado e testado de forma a ser utilizado nesta dissertação. O referido programa computacional fornece ao usuário um ambiente de trabalho com diversas facilidades gráficas, tais como: edição, geração de malhas de elementos finitos, imposição das condições de contorno, aplicação dos carregamentos e visualização dos resultados.

O sistema operacional Windows 9x da Microsoft, além de ser um sistema de 32 bits, fornece uma interface gráfica intuitiva para o usuário. A tarefa de desenvolver aplicações para ambiente Windows tem sido facilitada devido à grande quantidade de softwares que implementam linguagens de programação com recursos visuais, tais como Delphi, Visual Basic, Visual Fortran e C++ Builder. Estes softwares são, em grande parte, responsáveis pela crescente quantidade de aplicações com interface gráfica, possibilitando a geração de programas de fácil utilização para o usuário. Em particular, o software Delphi é uma ferramenta RAD (Rapid Application Development) para Windows, orientada a objeto e a eventos, sendo baseada em componentes. A linguagem de programação sob o Delphi é uma versão do Pascal orientada a objeto, a qual é denominada Object Pascal.

O software gerado no presente trabalho realiza o pré-processamento através da geração de malhas estruturadas (Hinton e Owen, 1979), efetuando ainda os cálculos necessários à análise do problema (Santos da Silva et al., 1999). O referido software roda em plataforma windows e realiza a análise limite com a formulação apresentada acima. A análise de um problema, utilizando-se o referido programa computacional, pode ser dividida em três partes, as quais são: a definição da malha de

elementos finitos e suas propriedades, a análise do problema e a apresentação dos resultados. Descreve-se a seguir cada uma destas partes com suas peculiaridades.

Na definição da malha de elementos finitos o ponto de partida é a identificação dos macros blocos de elementos, estes definem o contorno de regiões com mesmo tipo de solo, deverão ser desenhadas linhas no contorno de tais macros blocos, alternativamente, estas linhas podem ser importadas de arquivos em formato DXF, vale ressaltar que os macros blocos são elementos quadriláteros de quatro ou oito lados, os quais serão posteriormente divididos para dar origem à malha de elementos finitos.

Em seguida devem ser criados os grupos de propriedades, cada grupo é formado pela definição das propriedades do solo e do número de divisões da malha em cada direção. Atribui-se a cada macro bloco definido um tipo de elemento finito e um grupo de propriedade, e efetiva-se a geração da malha. Ainda como definição das malhas de elementos finitas utilizadas é necessário informar quais os tipos de condições de contorno do problema, o software em análise considera tanto condições de contorno cinemática (deslocamentos nas direções x e y), quanto condições de contorno estáticas (tensões normal e tangencial ao contorno). Finalmente deve-se definir os carregamentos atuantes, os quais podem ser concentrados nos nós da malha de elementos finitos ou distribuídos ao longo de lados dos elementos finitos.

C.2 UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE

Apresenta-se a seguir forma de manipulação do referido software para realizar a análise de um talude baixo, com altura H igual a 8m e inclinação α igual a 45° , típico de cortes rodoviários em solo, mostrado na Figura C.1. Considera-se um solo com coesão c igual a 20kN/m², ângulo de atrito ϕ igual a 15° e peso específico γ igual a 17kN/m³.

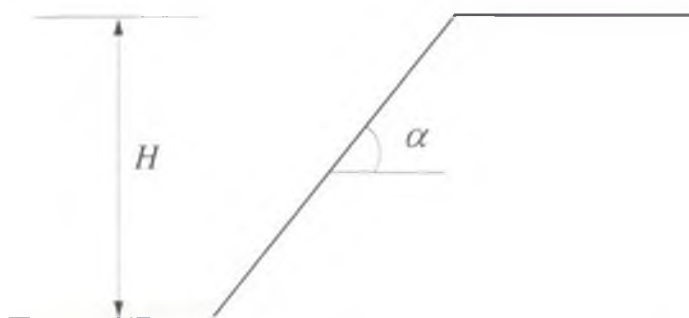


Figura C.1: Características do talude analisado

Executando-se o programa em apreço é apresentada a tela inicial da aplicação desenvolvida, a qual é mostrada na Figura C.2.

O passo inicial é a geração da malha de elementos finitos, a qual contempla as propriedade do solo utilizado, as condições de contorno impostas, e os carregamentos atuantes.

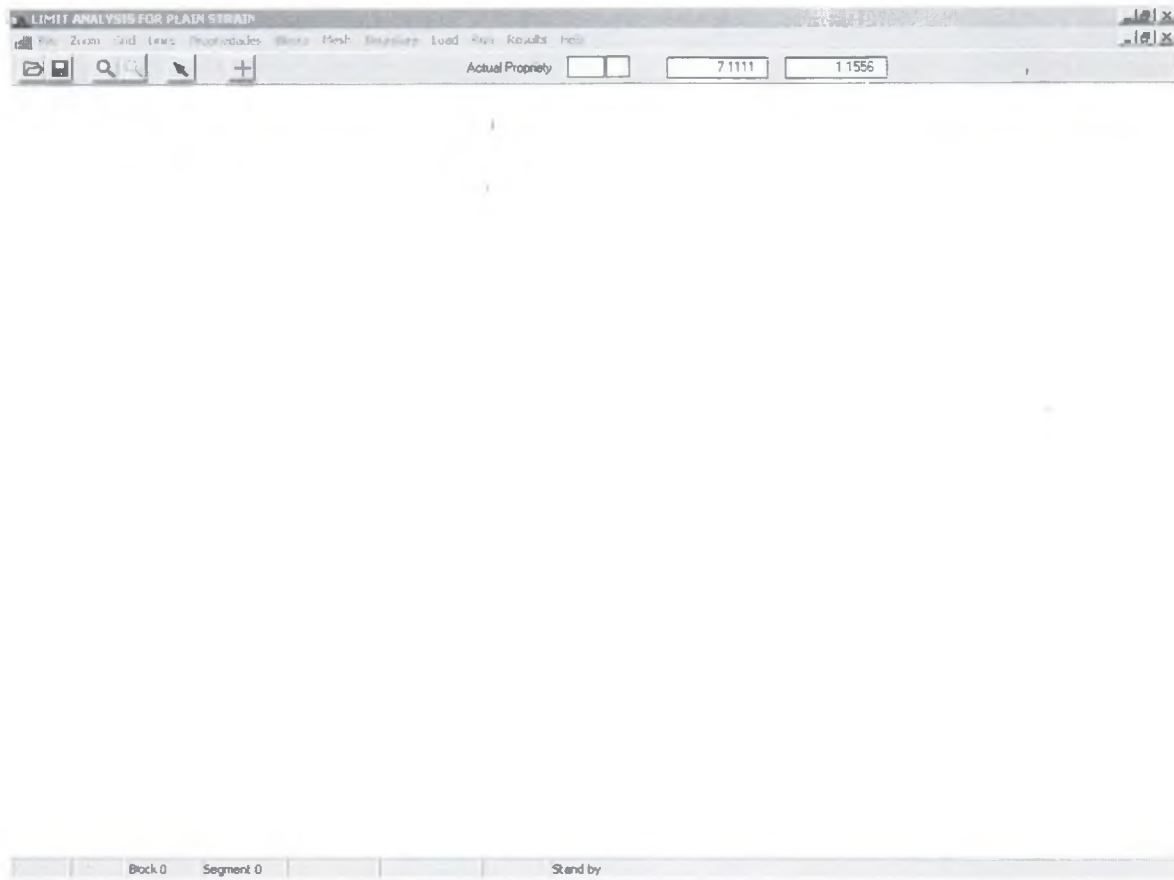


Figura C.2: Tela inicial da aplicação desenvolvida

O ponto de partida para geração de malhas consiste na definição das propriedades do solo, bem como em parte das propriedades dos elementos finitos que serão utilizados. Na Figura 4.27, apresenta-se a tela relativa ao fornecimento destas propriedades, que consistem no peso próprio do solo, na coesão, no ângulo de atrito, no número de divisões da malha em duas direções e na cor escolhida para representar cada grupo ou conjunto de propriedades.

Em seguida, a geração da malha de elementos finitos é iniciada definindo-se o desenho da malha em termos de blocos bidimensionais, lineares de quatro nós ou quadráticos de oito nós, existindo ainda a opção de blocos unidimensionais. Estes blocos, os quais posteriormente podem ser subdivididos de acordo com as opções do usuário, podem ser desenhados diretamente no software em questão ou importados através de arquivos DXF. Para exemplificar, a Figura 4.28 apresenta a definição, no AutoCAD, do desenho de três blocos que servirão de base, no presente trabalho, para a geração da malha de elementos finitos de um talude. O referido desenho deve ser exportado do AutoCAD, em formato DXF, sendo em seguida, importado para o software aqui apresentado. Esta interação com o AutoCAD foi contemplada pois o mesmo permite um alto nível de precisão nos desenhos, sendo ainda amplamente utilizado na prática da engenharia.

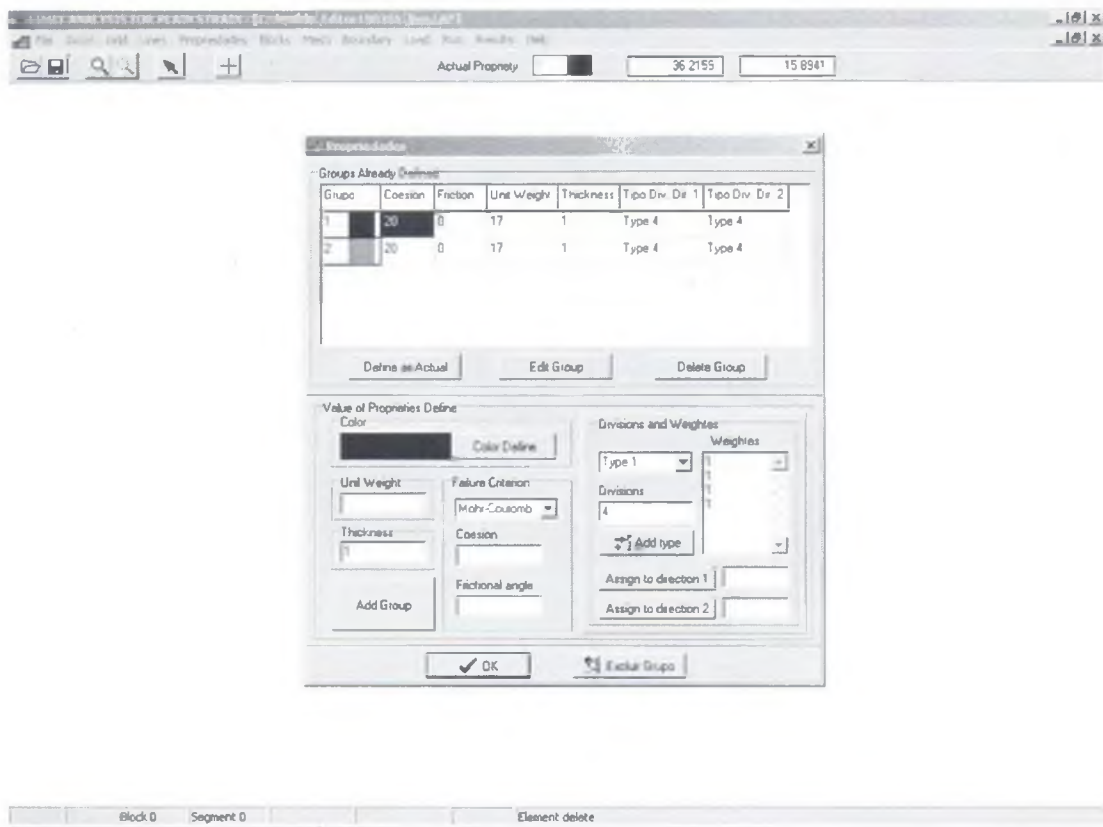


Figura C.3: Tela de definição das propriedades

Para importar o desenho dos blocos gerados através da utilização do AutoCAD, a aplicação desenvolvida possui a opção File->Import->DXF. Deve-se fornecer a esta aplicação o nome do arquivo em formato DXF, tendo-se em mente que todas as linhas contidas no citado desenho serão inseridas no arquivo atual da aplicação.

Procede-se, em seguida, à definição dos blocos que serão posteriormente divididos em elementos finitos. Para atingir este objetivo, primeiramente escolhe-se o grupo de propriedades, utilizando-se para isto a tela apresentada na Figura C.4. Em seguida seleciona-se o tipo de bloco a ser adotado. Por exemplo, utiliza-se a opção Blocks->Define->Eight Sides, no caso específico de se adotar blocos quadráticos de oito nós. O programa então solicita ao usuário o tipo de elemento finito que será utilizado. Vale ressaltar que, na aplicação desenvolvida, pode-se optar entre onze tipos de elementos finitos diferentes (quadriláteros de 4, 8, 9, 12, 16, 17 e 25 nós; e triângulos de 3, 6, 10 e 15 nós), conforme apresentado na Figura C.6. No caso específico da utilização dos blocos quadráticos de oito nós, o usuário deve então clicar em oito linhas, definindo assim oito lados do bloco em questão.

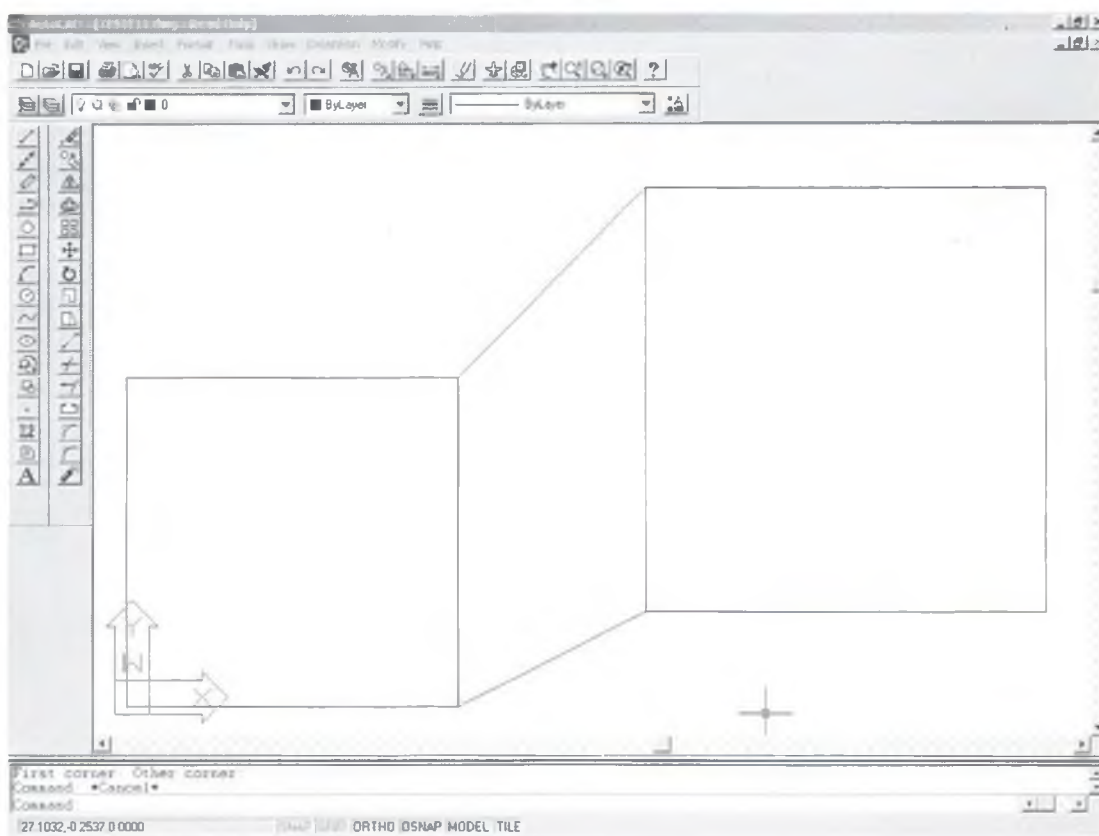


Figura C.4: Blocos desenhados no AutoCAD para a geração da malha

Para efetivar a geração da malha seleciona-se a opção Mesh->Generate. A Figura 4.30 mostra a malha gerada e a diferenciação de propriedades através do uso de cores selecionadas previamente na tela de definição de propriedades. Observa-se ainda, na Figura C.7, as condições de contorno impostas, onde os círculos representam condições de contorno em velocidade e os quadriláteros representam condições de contorno em tensão. Tais condições de contorno são fornecidas através da opção Boundary->Null Velocity para condições de contorno em velocidade e Boundary->Prescribed Stress para condições de contorno em tensão.

A aplicação desenvolvida fornece então ao usuário diversas outras informações como, por exemplo, o número de nós na malha gerada e o número de elementos finitos utilizados.

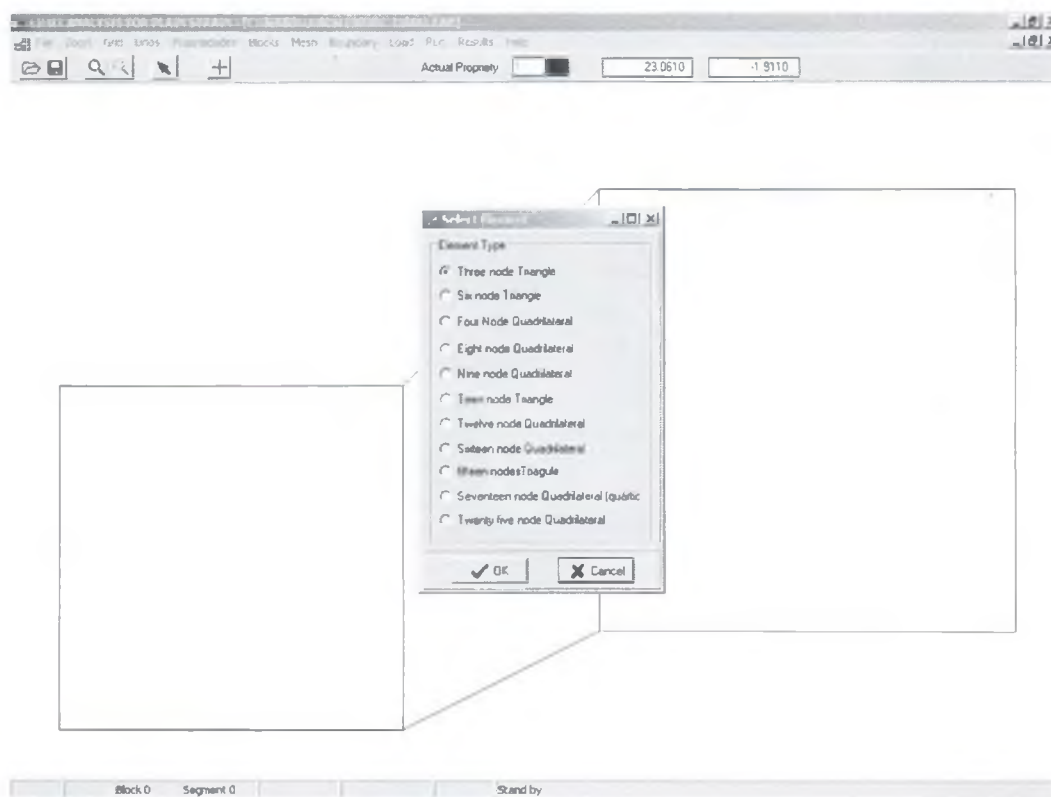


Figura C.5: Tipos de elementos finitos disponíveis no programa

Para realizar a análise plástica limite dentro do aplicativo gerado no presente trabalho, utiliza-se a opção Run->Limit Analysis, que fornece a tela indicada na Figura 4.31, onde os parâmetros da análise são configurados. É possível configurar várias opções de análise tais como: teorema da análise limite adotado (limite inferior ou limite superior); forma de consideração do peso próprio (fixo ou variável); programação matemática linear, devendo-se neste caso fornecer o número de

planos adotados na linearização da superfície de ruptura, bem como se esta linearização será realizada por dentro ou por fora da referida superfície, ou programação matemática não linear, caso em que o usuário deverá escolher o algoritmo a ser utilizado, estando disponíveis o software comercial LINGO ou um algoritmo implementado pelo autor, com base no trabalho de Herkovits (1986).

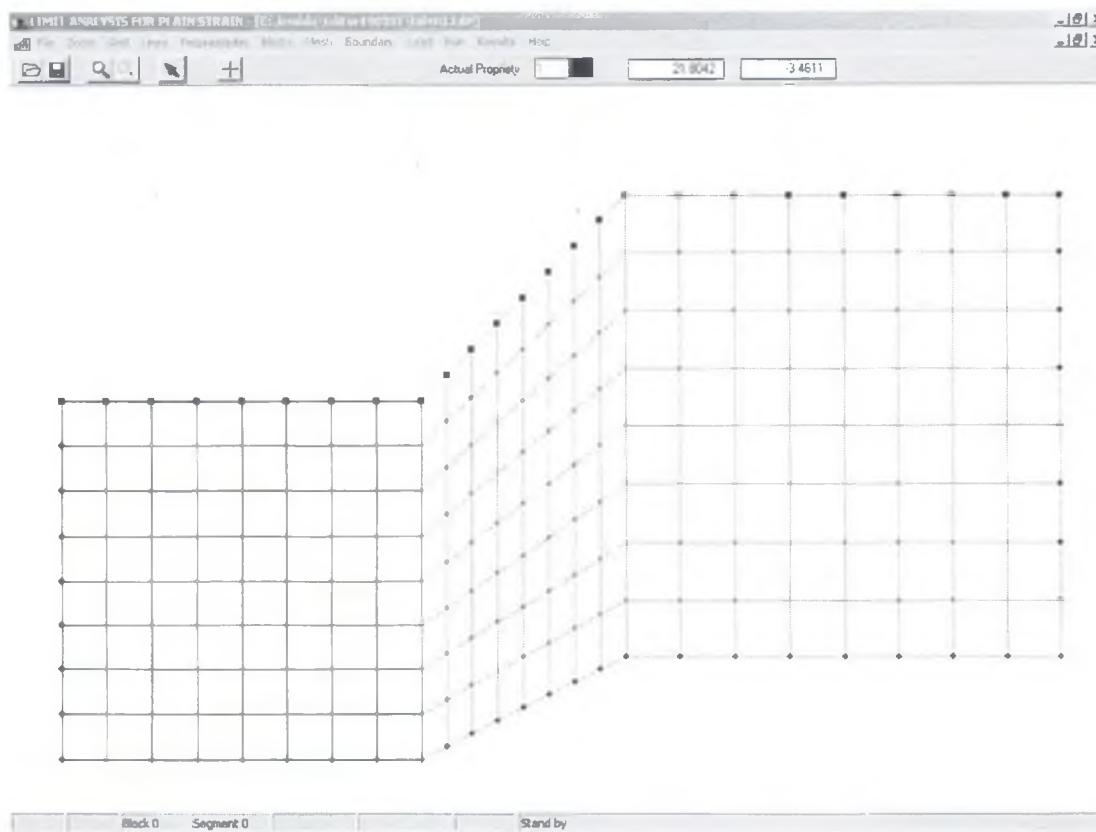


Figura C.6: Malha gerada com as condições de contorno

Na análise deste talude o software gerado encontrou um fator de ruptura de 1,76, ao passo que, utilizando-se o software comercial Slope/W e o método de Bishop, o fator de segurança encontrado foi de 1,78, ou seja, uma diferença de apenas 1,1%.

O mecanismo de ruptura pode ser visualizado utilizando-se o campo de velocidades para os nós da malha, conforme apresentado na Figura C.9. Vale ressaltar que diversos outros exemplos foram analisados pelo software apresentado, obtendo-se resultados compatíveis com os fornecidos na literatura.

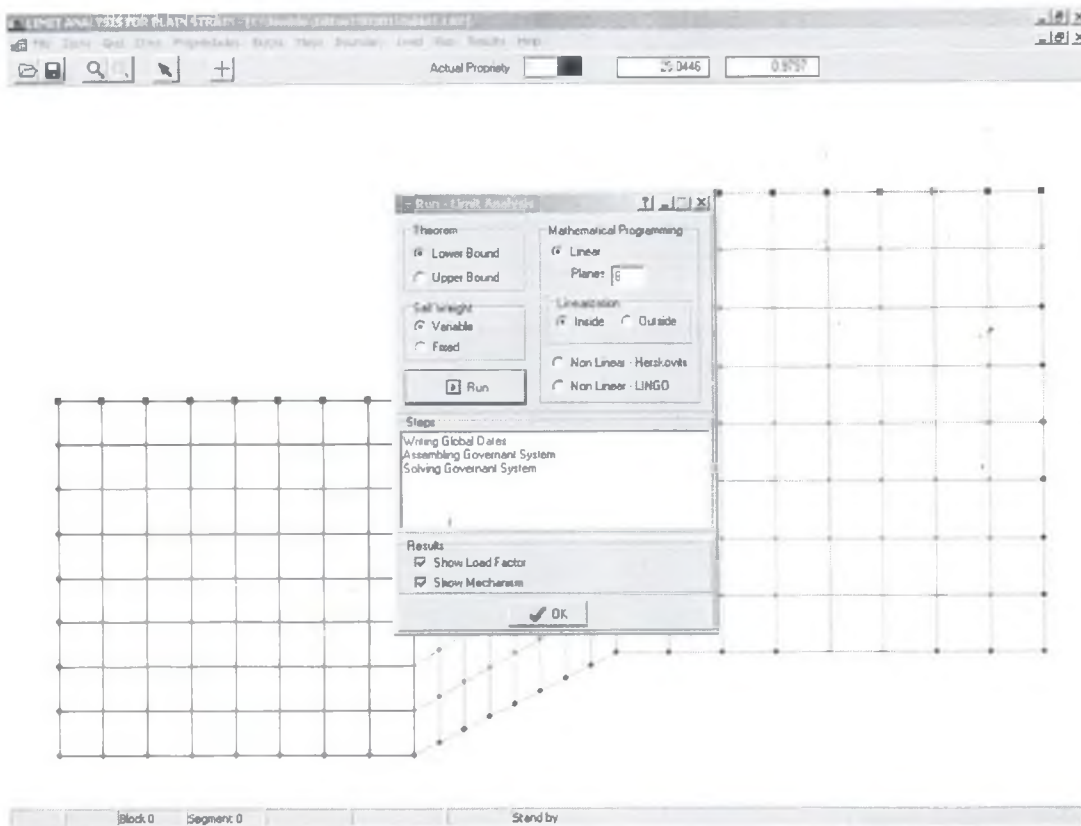


Figura C7: Tela de configurações de parâmetros da análise

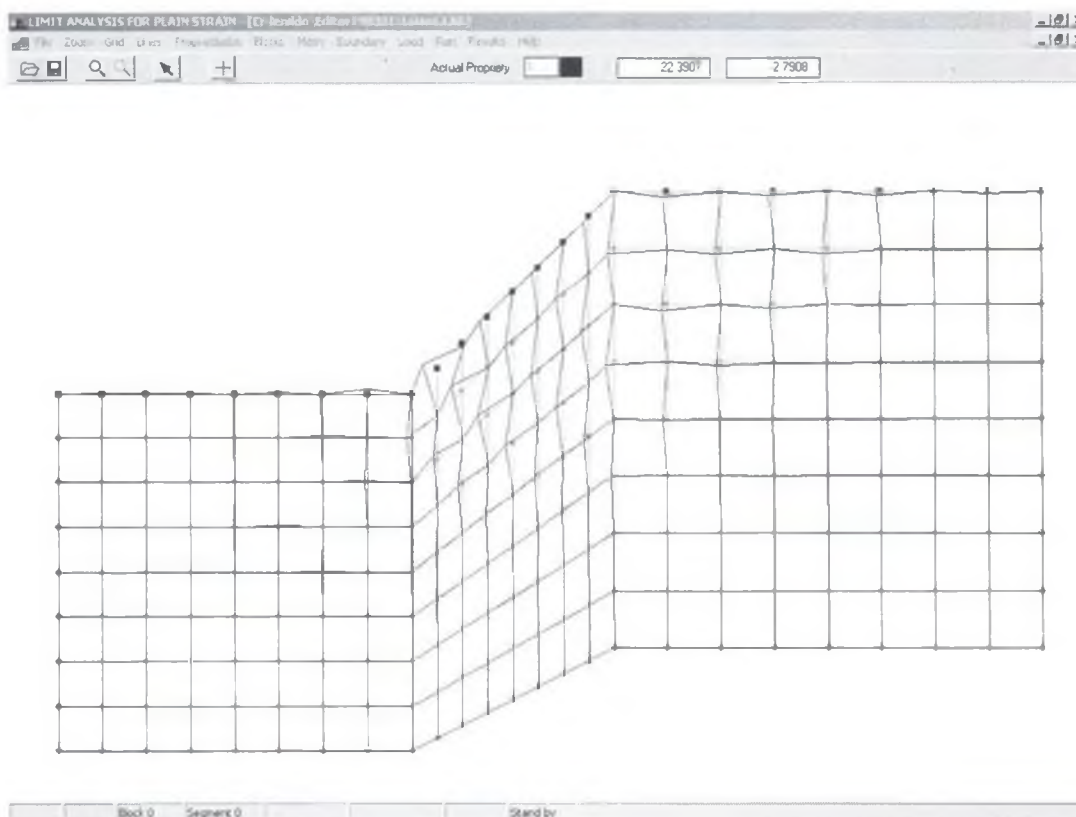


Figura C8: Mecanismo gerado plotando-se o campo de velocidades na ruptura

Quadro Resumo-Dissertações da PUC/ RJ

Teses/Dissertações PUC- RJ 1979-1996	Sistema de resolução das equações não-lineares	Modelos Constitutivos		Elementos Finitos		Fênomenos Considerados				Resultados Comparativos	
		Armadura	Concreto	Armadura	Concreto	Aderência	Fissur.	Retração	Def.Lenta	Ex1	Ex2
										Fissur/Rupt.	Fissur/Rupt.
CARVALHO(1979)	Incremental/iterativa	Von Mises	Rankine	Linear	Linear	Nos nós	Sim	Sim	Sim	Não	Não
DANTAS(1980)	Incremental/iterativa	Von Mises	Unidimens.	Cúbico	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	7,7%-5,9%	x-x
MOURA(1980)	Incremental/iterativa	Von Mises	Base Exper.	Cúbico	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	17%-2,5%	4,6%-6%
PACHECO(1978)	Incremental/iterativa	Von Mises	Mohr-Coul.	Linear	Linear	Nos nós	Sim	Não	Não	9%-0,8%	x-12%
PINTO(1982)	Incremental/iterativa	Von Mises	Base Exper.	Cúbico	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	0%-4%	x-x
REGOTO(1983)	Incremental/iterativa	Von Mises	Chen/Chen	Cúbico	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	x-x	x-x
SOUZA(1981)	Incremental/iterativa	Von Mises	Unidimens.	Cúbico	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	25%-56%	x-x
NASCIMENTO(1996)	Incremental/iterativa	Multilinear	W. Warnke	Quadrático	Quadrático	Perfeita	Sim	Não	Não	5%-0%	4%-7%