



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

FORMALISMO TERMODINÂMICO EM  
ESPAÇOS NÃO-COMPACTOS VIA  
TRANSPORTE ÓTIMO

por

Élis Gardel da Costa Mesquita

Orientador: Leandro Martins Cioletti

Brasília-DF  
11 de julho de 2019





Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

FORMALISMO TERMODINÂMICO EM  
ESPAÇOS NÃO-COMPACTOS VIA  
TRANSPORTE ÓTIMO

por

Élis Gardel da Costa Mesquita

Orientador: Leandro Martins Cioletti

Tese apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática da  
Universidade de Brasília como requi-  
sito parcial à obtenção do título de  
Doutor em Matemática.

Brasília-DF

11 de julho de 2019

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Formalismo Termodinâmico em Espaços Não- Compactos via Transporte Ótimo

por

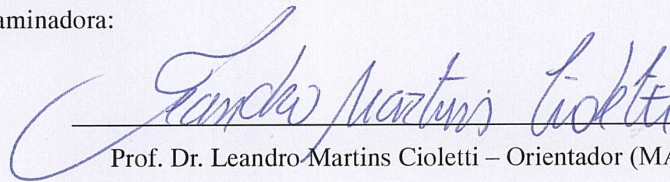
Élis Gardel da Costa Mesquita

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,  
como requisito parcial para obtenção do grau de*

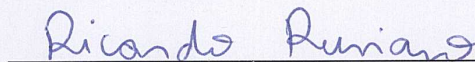
**DOUTOR EM MATEMÁTICA**

Brasília, 11 de julho de 2019.

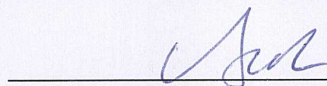
Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_

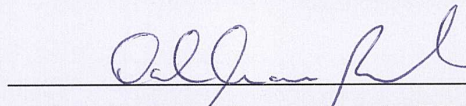
Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti – Orientador (MAT-UnB)

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Ricardo Ruviano (MAT-UnB)

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes Lopes (UFRGS)

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão (ICMC-USP)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MEL43f Mesquita, Élis Gardel  
Formalismo termodinâmico em espaços não-compactos via  
Transporte Ótimo / Élis Gardel Mesquita; orientador Leandro  
Martins Cioletti. -- Brasília, 2019.  
119 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

1. Cadeias de Markov. 2. Formalismo Termodinâmico. 3.  
Lacuna espectral. 4. Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. 5.  
Transporte Ótimo. I. Martins Cioletti, Leandro, orient. II.  
Título.

# AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo àquele que por diversas vezes segurou minha mão e ajudou a escrever: o autor da vida, Deus.

Agradeço àqueles que não mediram esforços para nunca me deixar faltar educação e sempre externaram palavras de incentivo, meus queridos pais: Manoel Mesquita e Deusamar Mesquita.

Agradeço aos meus irmãos Iza, Antônio Marcos, Macelo, Maciel e Isa Mara, pelo apoio, pelas orações e todo pensamento positivo desprendido. Essa conquista também é de vocês.

Quero agradecer aos colegas e amigos da UFT-Arraias, que desempenharam um papel indispensável nessa conquista desse objetivo. Ao casal Mônica e Dailson pelos almoços, hospedagens, polêmicas e descontrações, obrigado. Obrigado ao meu amigo Fernando Soares pela paciência e por todo companheirismo. Agradeço ao meu amigo Erasmo pelas caronas, aulas de filosofia, concelhos e toda descontração. Sem palavras para externar minha gratidão ao amigo Janeisi Meira, sempre lhe serei grato por toda ajuda. Por fim, agradeço a todo o colegiado de matemática.

Agradeço aos colegas e amigos da UnB, em especial ao Benedito e Bruno pela acolhida no início da jornada, aos companheiros de batalhas Cléber, Jamer, Leonardo, Dióscoros e Henrique Zanata por toda ajuda.

Agradeço imensamente às observações e sugestões apresentadas pela banca, elas acrescentaram muito ao trabalho.

Agradeço ao amigo Eduardo Antônio pelo apoio matemático e espiritual, e ao meu orientador Leandro Cioletti, pela paciência e pela sábia condução deste trabalho.

# RESUMO

Nesta tese de doutorado estudamos através da teoria de transporte ótimo os dados espectrais maximais de uma classe ampla de operadores do tipo transferência e apresentamos aplicações relacionadas a teoremas limites para uma classe de cadeias de Markov tomando valores em um espaço polonês que pode ser não-compacto.

Os resultados principais são: i) uma generalização do Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para potenciais em certas álgebras de Banach agindo em espaços poloneses compactos e não-compactos; ii) a existência de lacuna espectral para a subclasse dos operadores de transferência citada acima; iii) teoremas do tipo Limite Central para cadeias de Markov, com taxas de convergência, associadas a uma classe nova de medidas de equilíbrio. Assumindo compacidade do espaço de estados, e trabalhando com hipóteses bem gerais sobre os potenciais, obtemos resultados de decaimentos polinomial e exponencial de correlações (com respeito a medidas de equilíbrio) para uma classe ampla de observáveis.

**Palavras chave:** Cadeias de Markov, Formalismo Termodinâmico, Lacuna espectral, Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, Transporte Ótimo.

# ABSTRACT

In this Ph.D. dissertation we study, by using the optimal transport theory, the maximal spectral data of a large class of transfer operators and present applications to limit theorems for Markov chains taking values on a compact or non-compact Polish space.

The main results are: i) a generalization of the Ruelle-Perron-Frobenius Theorem for potentials in a suitable Banach algebra of functions acting on a general (compact or non-compact) Polish space; ii) the existence of spectral gap for a subclass of transfer operators mentioned above; iii) central limit type theorems for Markov chains (exhibiting convergence ratio) associated to a new class of equilibrium states. At the end by assuming compactness of the state space we prove, under very weak hypotheses on the potentials, polynomial and exponential decays of correlations (with respect to equilibrium states) for a large class of observables.

**Key-words:** Markov Chains, Optimal Transport, Thermodynamic Formalism, Ruelle-Perron-Frobenius Theorem, Spectral Gap.



# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>12</b>
INTRODUÇÃO	13
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>19</b>
1.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES . . . . .	19
1.1.1 ESPAÇOS DE HÖLDER GENERALIZADOS . . . . .	21
1.2 TAXAS DE DECAIMENTO . . . . .	26
1.3 OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA E NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO . . . . .	29
<b>2 TRANSPORTE ÓTIMO</b>	<b>35</b>
2.1 FORMULAÇÃO DE MONGE . . . . .	35
2.2 FORMULAÇÃO DE KANTOROVICH . . . . .	37
2.3 DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN . . . . .	39
<b>3 ACOPLAMENTOS E O TEOREMA RPF</b>	<b>49</b>
3.1 ACOPLAMENTOS DE UM NÚCLEO DE TRANSIÇÃO . . . . .	49
3.1.1 POTENCIAL FLAT . . . . .	52
3.2 A CONTRAÇÃO DE $\mathbb{P}_n^m$ . . . . .	54
3.3 TEOREMA DE RUELLE-PERRON-FROBENIUS . . . . .	66

<b>4</b>	<b>DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES</b>	<b>77</b>
4.1	LACUNA ESPECTRAL E CORRELAÇÕES . . . . .	77
4.2	NÚCLEOS 1-PARA- $\infty$ FRACAMENTE CONTRATIVOS . . . . .	81
4.2.1	NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO 1-PARA- $k$ . . . . .	85
4.3	NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO 1-PARA- $\infty$ . . . . .	87
<b>5</b>	<b>TEOREMAS LIMITES PARA CADEIAS DE MARKOV</b>	<b>93</b>
5.1	QUASE-COMPACIDADE . . . . .	94
5.2	ENUNCIADOS DE TEOREMAS TIPO LIMITE CENTRAL . . . . .	95
5.3	OPERADOR DE RUELLE . . . . .	96
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>APÊNDICE</b>	<b>113</b>
A.1	TOPOLOGIA GERAL . . . . .	113
A.2	ESPAÇOS MENSURÁVEIS . . . . .	113
A.3	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS . . . . .	117
A.4	ELEMENTOS DE TEORIA ESPECTRAL . . . . .	118

# LISTA DE SÍMBOLOS

- $(\Omega, \mathcal{F})$ : Espaço mensurável, página 93.
- $\#B$ : Cardinalidade do conjunto  $B$ , página 29.
- $\Gamma(\mu, \nu)$ : Planos de transporte entre  $\mu$  e  $\nu$ , página 37.
- $\mathcal{B}_+$ : Conjunto das funções não negativas em  $\mathcal{B}$ , página 95.
- $\mathcal{B}'_p$ : Conjunto de probabilidades sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  que definem operadores contínuos em  $\mathcal{B}$ , página 95.
- $\mathcal{B}(X)$ : Sigma-álgebra de Borel de  $X$ , página 19.
- $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ : Espaço das funções  $\omega$ -Hölder contínuas, página 24.
- $\mathcal{L}_{M,f}$ : Operador de Ruelle associado ao núcleo  $M$  e ao potencial  $f$ , página 29.
- $\mathcal{L}_{M,f}^*$ : Dual do operador de Ruelle, página 31.
- $\mathcal{P}(X)$ : Conjunto das medidas de probabilidade sobre  $X$ , página 19.
- $\mathcal{P}_p(X)$ : Espaço de Wasserstein de ordem  $p$ , página 39.
- $M = (m_x)_{x \in \Omega}$ : Núcleo de transição em  $\Omega$ , página 29.
- $\mu_f$ : Medida RPF ou medida de equilíbrio, página 31.
- $\nu_f$ : Automedida do dual do operador de Ruelle associada ao potencial  $f$ , página 31.
- $\omega$ : Módulo de continuidade, página 22.

- $\Pi_{x,y}^t$ : Um acoplamento do núcleo  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$ , página 50.
- $\sigma$ : Aplicação shift, página 54.
- $\tau_\theta$ : Tempo de decaimento de  $F$ , página 27.
- $\text{Hol}(\alpha)$ : Espaço das funções  $\alpha$ -Hölder contínuas, página 20.
- $\text{Hol}_\alpha(f)$ : Constante de Hölder de  $f$ , página 20.
- $\text{Hol}_\omega(f)$ :  $\omega$ -constante de Hölder de  $f$ , página 23.
- $\tilde{f}$ : Potencial normalizado, página 31.
- $C_b(\Omega, \mathbb{R})$ : Espaço das funções contínuas limitadas de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , página 20.
- $C_{\varphi_1, \varphi_2, \nu}(n)$ : Função de correlação entre os observáveis  $\varphi_1, \varphi_2$ , página 77.
- $E_\mu$ : Esperança com relação à medida de probabilidade  $\mu$ , página 95.
- $F$ : Função de decaimento, página 26.
- $m_x$ : Probabilidade em  $\Omega$  tal que  $x \mapsto m_x$  é mensurável, página 29.
- $m_x^t$ : Lei de uma cadeia de Markov  $(X_1, X_2, \dots, X_t)$ , começando em  $X_0 = x$ , página 50.
- $P^{X,Y}(x, y, z)$ : Projeção nas duas primeiras coordenadas, página 40.
- $P^{Y,Z}(x, y, z)$ : Projeção nas duas últimas coordenadas, página 40.
- $s(Q, \mathcal{B})$ : Número de autovalores de  $Q$  de módulo 1 sobre a álgebra  $\mathcal{B}$ , página 95.
- $T_*$ : Push forward, página 36.
- $W_\omega$ : Distância de Wasserstein referente a  $\omega$ , página 42.
- $W_p$ : Distância de Wasserstein de ordem  $p$ , página 39.

# INTRODUÇÃO

Uma das grandes motivações da Teoria Ergódica é compreender o comportamento estocástico e estatístico de sistemas dinâmicos determinísticos  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . Isto é feito analisando as medidas de probabilidade ergódicas invariantes pelo sistema dinâmico. Se nos é dada uma tal medida, o teorema ergódico nos fornece informações quantitativas sobre o comportamento assintótico de  $\{T^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , quando  $k$  tende ao infinito, quase certamente. O problema que surge é que os resultados são sensíveis à medida dada e é muito comum um sistema dinâmico ter várias medidas de probabilidade ergódicas invariantes.

Sinai e Ruelle, através de ideias oriundas da física estatística gibbsiana, estabeleceram os princípios para a escolha de uma medida de probabilidade invariante natural para cada contexto. Este método para estudar tais medidas e suas propriedades, deu origem ao que conhecemos hoje por *Formalismo Termodinâmico*, [12, 41].

O Operador de Ruelle (ou Operador de Transferência) desempenha um papel importante no Formalismo Termodinâmico clássico sobre espaços de Bernoulli com alfabetos finitos, [10, 36, 39]. Fixe um potencial sobre o espaço de estados de Bernoulli  $f : E^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ , o qual é usualmente Hölder contínuo. Seja  $C(E^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$  o conjunto de todas funções reais contínuas, definidas sobre  $E^{\mathbb{N}}$ . Então o operador de Ruelle age em  $C(E^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$  da seguinte forma

$$\mathcal{L}_f(\varphi)(x) = \sum_{a \in E} e^{f(ax)} \varphi(ax)$$

em que  $x = (x_1, x_2, \dots)$  e  $ax = (a, x_1, x_2, \dots)$ . As autofunções e automedidas associadas ao autovalor positivo maximal do operador de Ruelle são a chave para escolher certas medidas ergódicas, com respeito a dinâmica, cuja conexão com o operador é

evidenciada pelo fato dele ser definido como uma espécie de média ponderada sobre as pré-imagens da dinâmica. No caso do shift completo, temos inclusive que  $T^{-1}(x) = E$ . Como é bem conhecido, vários resultados do Formalismo Termodinâmico são formulados para o operador de *shift* sobre o espaço de Bernoulli. A razão de se estudar shifts ou subshifts de tipo finito é que sob hipóteses bem gerais vários sistemas dinâmicos uniformemente hiperbólicos definidos sobre variedades compactas, podem ser semi-conjugado a um sub-shift do tipo finito, veja por exemplo, [1, 9, 41, 43].

Shifts sobre alfabetos  $E$  infinitos enumeráveis são utilizados para estudar sistemas dinâmicos não uniformemente hiperbólicos, veja por exemplo [40]. Um dos exemplos mais notáveis é a aplicação Manneville-Pomeau. Outras questões de interesse em Teoria Ergódica também podem ser considerada. Algumas referências nessa direção são [8, 13, 22, 41].

A Mecânica Estatística Clássica é uma boa razão para se considerar alfabetos mais gerias, pois alfabetos não enumeráveis aparecem com frequência, por exemplo, nos modelos  $O(n)$ . Casos especiais incluem os modelos  $XY$  ( $n = 2$ ) e o de Heisenberg ( $n = 3$ ). Nesses modelos com  $n \geq 2$ , o alfabeto é  $\mathbb{S}^{n-1}$  a esfera unitária no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , veja [5, 19, 32, 37].

Alfabetos ilimitados, tais como os espaços Borel padrão, o qual incluem alfabetos compactos e não-compactos, são considerados em detalhes em [18]. Para estes alfabetos [12] fornece um formalismo termodinâmico para potenciais contínuos limitados. Mencionamos também que problemas de otimização ergódica são considerados em alfabetos infinitos, veja [8, 13, 23, 40].

Um dos tópicos de interesse no estudo do operador de transferência é taxa de decaimento da iterações de restrições do operador a determinados subespaços. Em geral, estes subespaços são compostos por funções contínuas de média zero, com respeito a certas medidas chamadas de *medidas de equilíbrio*. Inspirados em [20, 35, 44], que obtiveram boas propriedades de contração na métrica de Wasserstein através da Teoria de Transporte Ótimo para cadeias de Markov, os autores em [29] mostraram como esta teoria poderia ser usada para obter decaimentos das restrições dos iterados do operador de Ruelle quando espaço de estados é compacto. Com isso, foi inserido o ferramental

das técnicas de acoplamento para estudar o operador de Ruelle.

Um dos autores de [29], Kloeckner em [27], aprofundou a conexão entre as técnicas de acoplamento e as propriedades do operador de transferência para estudar operadores tipo transferência que são generalizações do operador de Ruelle. Uma das características mais interessantes deste trabalho no que se refere as aplicações é a introdução de um módulo de continuidade o que permite generalizar o espaço dos potenciais e dos observáveis para os quais os teoremas mais importantes da teoria geral do Formalismo Termodinâmicos permanecem válidos. Destaca-se também a definição de potencial “flat”, que na verdade é uma generalização da ideia de distorção limitada. Com isso, pôde-se lançar mão da teoria de Transporte Ótimo, e obter informações sobre o decaimento dos iterados da restrição do operador de Ruelle ao subespaço das funções de média zero. Vale ressaltar que a ideia de módulo de continuidade para estudar o operador de Ruelle clássico já havia sido usada nos trabalhos de Fan e Jiang [16, 17].

No cenário do formalismo termodinâmico moderno o Teorema de Ruelle-Perron-Fröbenius (RPF) é um dos resultados mais importantes e o operador de Ruelle se tornou uma ferramenta padrão em várias áreas dos sistemas dinâmicos, da Matemática e da Física-Matemática. A literatura a respeito do teorema de Ruelle-Perron-Frobenius é vasta, a seguinte lista é apenas uma lista parcial de livros e artigos a respeito do mesmo, [4, 10, 15, 16, 24, 36, 38, 45].

Um dos objetivos principais deste trabalho é estender a versão do Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius obtida em [27] para espaços métricos não compactos. Quando o contexto é espaços compactos, também obtivemos resultados de decaimento polinomial e exponencial dos iterados da restrição do operador de Ruelle, definidos por mapas não-necessariamente expansivos cujas pré-imagens de qualquer ponto pode conter infinitos pontos. Nossos resultados nesta direção, respondem parcialmente um dos problemas em aberto enunciados em [27].

A dificuldade de definir o operador de Ruelle para alfabetos não contáveis é, como de praxe, superada introduzindo-se uma medida de probabilidade *a-priori* em  $E$ . Esta estratégia é adotada também no contexto da Mecânica Estatística do equilíbrio e do formalismo DLR para medida de Gibbs, ver [18].

O trabalho está organizado da seguinte maneira.

## CAPÍTULO 1

Neste capítulo preliminar, apresentamos as definições e resultados básicos necessários ao prosseguimento dos próximos capítulos. Começamos com o espaço das funções contínuas limitadas, definindo, em seguida, o espaço das funções  $\alpha$ -Hölder contínuas. Logo após isso, definimos o conceito de módulo de continuidade  $\omega$  e apresentamos a álgebra das funções  $\omega$ -Hölder contínuas. Introduzimos a noção de funções de decaimento, referentes a uma métrica. Após isso, definimos o núcleo de transição e núcleos “backward” para uma dada aplicação  $T$ , seguido da definição do operador de Ruelle generalizado. Finalmente apresentamos o operador de Ruelle generalizado, que é definido usando núcleos de transição de uma cadeia de Markov ao invés de uma medida a priori. Depois definimos o que são operadores de transferência que satisfazem as propriedades RPF e Lacuna espectral.

## CAPÍTULO 2

Neste capítulo introduzimos os rudimentos da teoria do Transporte Ótimo, começando com as definições clássicas dos problemas de Monge e Kantorovich. Feito isto, e garantido existência de solução do problema de Kantorovich, apresentamos a distância de Wasserstein de ordem  $p$  sobre o espaço das medidas de probabilidade  $\mathcal{P}(\Omega)$  bem como algumas propriedades tais como sua relação com a convergência fraca. Então definimos a distância de Wasserstein referente ao um módulo de continuidade  $\omega$ . A seguir enunciamos uma proposição em que usamos a dualidade de Kantorovich para obtermos decaimento dos iterados do operador de Ruelle quando sabemos o decaimento de seu dual.



### CAPÍTULO 3

Obtemos uma fórmula para os iterados do operador de Ruelle generalizado, em função da lei da cadeia de Markov que define o mesmo. Em seguida, apresentamos o conceito de acoplamento de um núcleo de transição e algumas definições a respeito disto, tais como, acoplamento  $\omega$ -Hölder e  $\omega$ -Taxa de decaimento. Introduzimos a classe de acoplamentos para os quais valem o resultado central desta tese. Nesse capítulo mostramos também como uma escolha adequada dos núcleos de probabilidade recuperam o operador de Ruelle considerado em [5]. Tais classes de operadores são novamente exploradas no Capítulo 4. Na sequência falamos sobre potenciais “flat” e suas principais propriedades. Obtemos um resultado de contração para um operador auxiliar  $\mathbb{P}_n^m$  que será usado na obtenção de dois dos principais resultados desta tese. Destacamos neste capítulo os Teoremas 3.2.5 e 3.3.2 que serão os pilares das provas dos principais resultados deste capítulo. Finalmente, provamos o principal teorema do capítulo que é o Teorema 3.3.3 (RPF), e a Proposição 3.3.6 (existência da Lacuna espectral).

### CAPÍTULO 4

Neste capítulo estudamos o decaimento das correlações. Sob a hipótese 3.1, provamos que a medida de probabilidade dada pelo Teorema RPF tem decaimento exponencial das correlações. Essa é a versão equivalente de dizer que o operador goza da propriedade da Lacuna espectral. Sem a hipótese 3.1, e considerando que o espaço  $\Omega$  é compacto, apresentamos o Teorema de contração de Kloeckner, e os núcleo de transição 1-para- $k$ . Então, apresentamos uma descrição completa para o decaimento dos iterados do operador de Ruelle para caso em que a dinâmica é  $k$ -para-1 e Lipschitz. Nossa contribuição é apresentar um núcleo de transição fracamente contrativo 1-para- $\infty$  e obter um Teorema RPF para mapas  $\infty$ -para-1 e Lipschitz, onde vale a propriedade da Lacuna espectral em um caso ( $\alpha > 0$ ), ou seja, decaimento exponencial das correlações relativo à medida de RPF, e decaimento polinomial das correlações em outro caso ( $\alpha = 0, \beta > 0$ ).

## CAPÍTULO 5

Neste capítulo estudamos as relações entre o operador de Ruelle normalizado e as cadeias de Markov e seguindo [21] obtemos teoremas do tipo limite central para cadeias de Markov cujo os núcleos são dados implicitamente. O que possibilita isto é o fato de que o operador de Ruelle ser um operador quase-compacto. Mostramos também que medida de probabilidade RPF define uma medida invariante para a cadeia.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Dentre outras coisas, neste capítulo estabelecemos o ambiente em que iremos trabalhar, a saber, o *espaço de Hölder generalizado*, bem como as ferramentas e definições necessárias ao prosseguimento do texto.

### 1.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Em toda esta seção  $\Omega$  denota um espaço *Polonês*, cuja definição relembramos abaixo:

**Definição 1.1.1.** *Um espaço métrico  $(\Omega, d)$  é dito **Polonês** se é separável e completo.*

Não existe perda de generalidade em assumir que a distância  $d$  seja limitada, pois se esse não for o caso, basta substituir  $d$  pela distância equivalente  $d' = d/(1 + d)$ .

Denotaremos por  $\mathcal{B}(\Omega)$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Omega$  e por  $\mathcal{P}(\Omega)$  o conjunto de todas as medidas de probabilidade Borelianas sobre  $\Omega$ . Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Borel mensurável e  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ , denotamos a integral de  $f$  com respeito a  $\mu$  por  $\int_{\Omega} f d\mu$  ou  $\mu(f)$ .

Salvo em menção contrária  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  denota uma transformação mensurável, sem nenhuma regularidade admitida a priori.

Denotaremos por  $C_b(\Omega, \mathbb{R})$  o espaço das funções contínuas e limitadas de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  e o equiparemos com a norma  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ . É sabido o fato que

$(C_b(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  é um espaço de Banach. Denotamos por  $\mathbf{1}$  a função constante sobre  $\Omega$  com valor 1. Uma função  $f \in C_b(\Omega, \mathbb{R})$  é dita  $\alpha$ -Hölder contínua ( $0 < \alpha \leq 1$ ) quando a quantidade

$$\text{Hol}_\alpha(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}$$

é finita. O espaço das funções  $\alpha$ -Hölder contínuas é denotado por  $\text{Hol}(\alpha) = \text{Hol}(\Omega, \mathbb{R})$ . É padrão considerarmos em  $\text{Hol}(\alpha)$  a norma  $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \text{Hol}_\alpha(f)$ . No caso particular em que  $\alpha = 1$  o espaço  $\text{Hol}(1)$  é denotado por  $\text{Lip}(\Omega, \mathbb{R})$  e seus elementos são chamados de funções *Lipschitzianas*. O fato a seguir é conhecido, mas por completude incluiremos aqui sua prova.

**Lema 1.1.2.** *O espaço  $(\text{Hol}(\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja  $\{f_n\}_n \in \text{Hol}(\alpha)$  uma sequência de Cauchy. Como,  $\|f_n - f_m\|_0 \leq \|f_n - f_m\|_\alpha$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , segue que  $\{f_n\}_n$  também é uma sequência de Cauchy em  $(C_b(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . Assim, existe  $f \in C_b(\Omega, \mathbb{R})$  tal que  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Mostraremos que  $f \in \text{Hol}(\alpha)$  e  $f_n \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_\alpha$ . Sejam  $\varepsilon > 0$  arbitrário e  $N \in \mathbb{N}$  tais que  $\|f_n - f_m\|_\gamma \leq \varepsilon/4$  sempre que  $n, m \geq N$ . Fixe  $n \geq N$  e sejam  $x, y \in \Omega$ , com  $x \neq y$ . Usando a convergência uniforme podemos escolher  $N_1 > n$  tal que  $|f_{N_1}(x) - f(x)| \leq \varepsilon d(x, y)^\alpha/4$  e  $|f_{N_1}(y) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y)^\alpha/4$ . Com um argumento do tipo “ $\varepsilon/4$ ” mostramos que

$$\begin{aligned} \frac{|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))|}{d(x, y)^\alpha} &\leq \|f_n - f\|_\gamma + \|f_n - f_{N_1}\|_\alpha \\ &\quad + \frac{|f_{N_1}(x) - f(x)|}{d(x, y)^\gamma} + \frac{|f_{N_1}(y) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon d(x, y)^\alpha}{4d(x, y)^\alpha} + \frac{\varepsilon d(x, y)^\alpha}{4d(x, y)^\alpha} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo  $x$  e  $y$ , temos

$$\text{Hol}(f_n - f) = \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{d(x, y)^\alpha} \leq \varepsilon.$$

Portanto  $\|f_n - f\|_\alpha = \|f_n - f\|_\infty + \text{Hol}(f_n - f) \leq 2\varepsilon$ . Para concluir a demonstração,

devemos mostrar que  $f \in \text{Hol}(\alpha)$ , ou seja,  $\text{Hol}_\alpha(f) < \infty$ . Com efeito, temos que

$$\sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \|f - f_n\|_\alpha + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty.$$

Logo  $f_n \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_\alpha$ . □

### 1.1.1 ESPAÇOS DE HÖLDER GENERALIZADOS

A grosso modo, uma função  $f$  de uma espaço métrico  $(X_1, d_1)$  em outro espaço métrico  $(X_2, d_2)$  é uniformemente contínua se  $f(x)$  fica  $d_2$ -próximo de  $f(y)$  sempre que  $x$  fica  $d_1$ -próximo de  $y$ . Formalmente, temos

**Definição 1.1.3.** *Dados dois espaços métricos  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$ , uma função  $f : X_1 \rightarrow X_2$  é dita **uniformemente contínua** se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in X_1$  com  $d_1(x, y) < \delta$ , temos  $d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ .*

Segue imediatamente da definição que as funções  $\alpha$ -Hölders são uniformemente contínuas. Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = (\varepsilon/\text{Hol}_\alpha(f))^{1/\alpha}$ . Com isso teremos,

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \text{Hol}_\alpha(f) d_1(x, y)^\alpha \leq \text{Hol}_\alpha(f) \left( \frac{\varepsilon^{1/\alpha}}{\text{Hol}_\alpha(f)^{1/\alpha}} \right)^\alpha = \varepsilon.$$

Pondo  $\alpha = 1$ ,  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  com a métrica usual, vemos que funções diferenciáveis com derivada limitada são uniformemente contínuas. Um exemplo de uma função não uniformemente contínua é  $f(x) = e^x$ , pois tem derivada não limitada em  $\mathbb{R}$ .

A noção de *módulo de continuidade* surgiu da ideia de mensurar o quão uniformemente contínua é uma dada função, no seguinte sentido: uma função  $f : X_1 \rightarrow X_2$  admite uma função  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  como módulo de continuidade se

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y))$$

para todo  $x, y$  no domínio de  $f$ . Sob certas hipóteses em  $\omega$ , podemos dizer que uma função  $f$  é uniformemente contínua se, e somente se, admite um módulo de continuidade. Assim, podemos usar os módulos de continuidade para classificar classes de funções. Com isso, temos os seguintes exemplos:

1.  $\omega(t) := Kt$  caracteriza a família das funções Lipschitzianas;
2.  $\omega(t) := Kt(|\log t| + 1)$  caracteriza a classe das funções quase Lipschitzianas;
3.  $\omega(t) := Kt^\alpha$  caracteriza a família das funções  $\alpha$ -Hölder contínuas,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Formalmente temos

**Definição 1.1.4.** Chamamos de **módulo de continuidade** a uma função contínua, crescente, côncava  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $\omega(0) = 0$ .

**Proposição 1.1.5.** Se  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$  é uma métrica e  $\omega$  um módulo de continuidade, então  $\omega \circ d$  é uma métrica.

*Demonstração.* Devemos mostrar que:

1.  $\omega \circ d(x, y) \geq 0$ , e  $\omega \circ d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
2.  $\omega \circ d(x, y) = \omega \circ d(y, x)$  para todo  $x, y \in \Omega$ ;
3.  $\omega \circ d(x, z) \leq \omega \circ d(x, y) + \omega \circ d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in \Omega$ .

1. Desde que  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \Omega$  e  $\omega$  é crescente, segue que  $\omega \circ d(x, y) \geq \omega(0) = 0$ . Como  $\omega$  é monótona e  $\omega(0) = 0$ , temos que  $\omega \circ d(x, y) = 0 = \omega(0)$  se, e somente se,  $d(x, y) = 0$  e isto ocorre se, e somente se,  $x = y$ .

2. Já que  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in \Omega$ , então  $\omega \circ d(x, y) = \omega \circ d(y, x)$  para todo  $x, y \in \Omega$ .

3. Como  $\omega$  é côncava,  $\omega((1-t)a + tb) \geq (1-t)\omega(a) + t\omega(b)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Note que, tomando  $b = 0$ , obtemos

$$\omega(ta) = \omega(ta + (1-t)0) \geq t\omega(a) + (1-t)\omega(0) = t\omega(a), \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

Com isso,

$$\omega(a) + \omega(b) = \omega\left((a+b)\frac{a}{a+b}\right) + \omega\left((a+b)\frac{b}{a+b}\right)$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{a}{a+b}\omega(a+b) + \frac{b}{a+b}\omega(a+b) \\ &= \omega(a+b). \end{aligned}$$

Portanto, como para todo  $x, y, z \in \Omega$  vale  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , temos

$$\begin{aligned} \omega(d(x, z)) &\leq \omega(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq \omega(d(x, y)) + \omega(d(y, z)). \end{aligned} \quad \square$$

A seguir definimos o espaço das funções  $\omega$ -Hölder contínuas, o qual desempenhará um papel central em nosso trabalho.

**Definição 1.1.6.** Dizemos que uma função  $f \in C_b(\Omega, \mathbb{R})$ , é  $\omega$ -Hölder quando a quantidade abaixo é finita

$$\text{Hol}_\omega(f) = \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(d(x, y))}.$$

O espaço de todas as funções  $\omega$ -Hölder contínuas será denotado por  $\mathcal{C}^\omega = \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ , e o equiparemos com a norma

$$\|f\|_\omega := \|f\|_\infty + \text{Hol}_\omega(f).$$

O exemplo a seguir motiva a generalização do espaço das funções Hölder contínuas usada aqui.

**Exemplo 1.1.7.** Seja  $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  equipado com a métrica  $d(x, y) = 2^{-N(x, y)}$ , em que  $N(x, y) = n$ , onde  $n$  é tal que  $x_n \neq y_n$  e  $x_j = y_j$  para  $j < n$ . Considere o potencial  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_1 x_n}{n^{2+\varepsilon}}$ . Podemos verificar que  $f \notin \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ , mas

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=N(x, y)+1}^{\infty} \frac{2}{n^{2+\varepsilon}} = 2 \left( \frac{1}{(N+1)^{2+\varepsilon}} + \frac{1}{(N+2)^{2+\varepsilon}} + \dots \right) \\ &= \frac{2}{(N+1)^{2+\varepsilon}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{N+1}{N+k+1} \right)^{2+\varepsilon} \right) \\ &\leq \frac{2}{(N+1)^{2+\varepsilon}} \left( 1 + \int_1^{\infty} \left( \frac{N+1}{N+t+1} \right)^{2+\varepsilon} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(N+1)^{2+\varepsilon}} \left( 1 + \frac{(N+1)^{2+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \frac{1}{(N+2)^{1+\varepsilon}} \right) \\
&\leq \frac{2}{N^{2+\varepsilon}} \left( N + 2^3 \frac{N}{1+\varepsilon} \right) \\
&\leq \frac{2 \times 10N}{N^{1+\varepsilon}} = \frac{20}{N^\varepsilon} = \frac{20}{[\log(e^N)]^\varepsilon} \leq \frac{20}{[\log(2^N)]^\varepsilon} \\
&= \frac{20}{[\log(\frac{1}{2^{-N}})]^\varepsilon} = \frac{1}{[\log(\frac{r_0}{2^{-N}})]^\varepsilon} = \omega(2^{-N(x,y)}) \\
&= \omega \circ d(x,y),
\end{aligned}$$

com  $\omega(r) = 1/[\log(\frac{r_0}{r})]^\varepsilon$ . Ou seja,  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ .

A próxima proposição assegura que  $\mathcal{C}^\omega$  é uma álgebra de Banach.

**Proposição 1.1.8.** *O espaço  $(\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\omega)$  é uma álgebra de Banach com relação a multiplicação pontual  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .*

*Demonstração.* Observe que  $d' = \omega \circ d$  é uma métrica e que  $\mathcal{C}^\omega$  é o espaço das funções Lipschitzianas com respeito à métrica  $d'$ . Segue do Lema 1.1.2 com respeito ao espaço métrico  $(\Omega, d')$  que  $(\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\omega)$  é um espaço de Banach. Nos resta mostrar que a função  $\mathbf{1}(x) = 1$ ,  $x \in \Omega$ , está em  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  e que se  $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  então  $\|fg\|_\omega \leq \|f\|_\omega \|g\|_\omega$ . Com efeito,  $\text{Hol}_\omega(\mathbf{1}) = 0$ , logo  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Para  $x \neq y$  em  $\Omega$ , temos

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)g(x) - g(y)f(x) + g(y)f(x) - f(y)g(y)| \\
&\leq |f(x)g(x) - g(y)f(x)| + |g(y)f(x) - f(y)g(y)| \\
&\leq \|f\|_\infty |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty |f(x) - f(y)|.
\end{aligned}$$

Assim,  $\text{Hol}_\omega(fg) \leq \|f\|_\infty \text{Hol}_\omega(g) + \|g\|_\infty \text{Hol}_\omega(f)$ . Com isso,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_\omega &= \|fg\|_\infty + \text{Hol}_\omega(fg) \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \text{Hol}_\omega(g) + \|g\|_\infty \text{Hol}_\omega(f) \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \text{Hol}_\omega(g) + \|g\|_\infty \text{Hol}_\omega(f) + \text{Hol}_\omega(g) \text{Hol}_\omega(f)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \|f\|_\infty(\|g\|_\infty + \text{Hol}_\omega(g)) + (\|g\|_\infty + \text{Hol}_\omega(g))\text{Hol}_\omega(f) \\
&= (\|f\|_\infty + \text{Hol}_\omega(f))(\|g\|_\infty + \text{Hol}_\omega(g)) = \|f\|_\omega \|g\|_\omega.
\end{aligned}$$

□

Os módulos de continuidade  $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$  para  $\alpha \in (0, 1]$ , são de particular importância. Usaremos  $\alpha$  como índice ao invés de  $\omega_\alpha$ . Usaremos também uma generalização incluindo potências do logaritmo, o qual definiremos pelo seguinte.

**Lema 1.1.9.** *Para todo  $\alpha \in (0, 1]$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , existe um módulo de continuidade  $\omega_{\alpha+\beta \log}$  tal que*

$$\omega_{\alpha+\beta \log}(r) \sim \frac{r^\alpha}{|\log r|^\beta} \text{ quando } r \rightarrow 0$$

e tal que para algum  $\theta \in (0, 1)$  e todo  $r \in [0, 1]$  tem-se  $\omega(r/2) \leq \theta\omega(r)$ .

*Demonstração.* Para  $r \in (0, 1]$  escrevemos

$$\omega_{\alpha+\beta \log}(r) := \frac{r^\alpha}{(\log \frac{r_0}{r})^\beta}$$

onde  $r_0$  é para ser determinado. Note que para cada  $r_0$ , o comportamento assintótico em 0 é como o desejado. Se  $r_0$  é suficientemente grande, a fórmula acima define uma função crescente e côncava em  $[0, 1]$  que pode assim ser estendida a um módulo de continuidade.

Se  $\beta \geq 0$ , temos  $\omega(r/2) \leq 2^{-\alpha}\omega(r)$  de forma que podemos tomar  $\theta = 2^{-\alpha}$  e voltamos ao caso  $\beta < 0$ . Então

$$\omega(r/2) \leq \theta\omega(r), \quad \text{com } \theta = 2^{-\alpha} \left(1 + \frac{\log 2}{\log r_0}\right)^{-\beta}$$

e basta tomar  $r_0$  grande o suficiente para assegurar que  $\theta < 1$ . □

Quando  $\alpha = 0$ , impomos  $\beta > 0$  e tomamos

$$\omega_{\beta \log}(r) := \left(\log \frac{r_0}{r}\right)^{-\beta}, \quad \forall r \in [0, 1]$$

onde  $r_0$  é grande o suficiente (em função  $\beta$ ) para assegurar que  $\omega_{\beta \log}$  é crescente e côncava em  $[0, 1]$ . Então nós estendemos isso arbitrariamente (por exemplo linearmente) para  $[0, +\infty)$ . Observe que o Lema 1.1.9 não se aplica a  $\alpha = 0$ . Veja [27] para mais detalhes.

## 1.2 TAXAS DE DECAIMENTO

Nesta seção, estabelecemos algumas notações e alguns resultados para se estudar a taxa de decaimento das iterações de um mapa. A referência que seguimos é [27].

Seja  $X$  um espaço métrico cuja métrica será denotada por  $\rho$ ; na sequência,  $X$  será o espaço de fase  $\Omega$ , ou o espaço de Banach de potenciais ou observáveis, ou um espaço de medidas.

Seja  $P : X \rightarrow X$  um mapa (o qual será ou um ramo inverso do sistema dinâmico em estudo, ou um operador de transferência, ou o dual de um operador de transferência). A fim de motivar a próxima definição, considere

$$F(t, r) := \sup_{\substack{\rho(x, y) \leq r \\ n \geq t}} \rho(P^n(x), P^n(y))$$

e observe que  $F$  é não crescente em  $t$ , não decrescente em  $r$ , e satisfaz

$$F(t_1 + t_2, r) \leq F(t_1, F(t_2, r)).$$

De fato, sejam  $x, y \in X \times X$  tais que  $\rho(x, y) \leq r$  e  $n \geq t_1 + t_2$  e considere o número real  $\rho(P^n(x), P^n(y))$ . Queremos mostrar que existem  $z, w$  tais que  $\rho(z, w) \leq F(t_2, r)$  e existe  $\tilde{n} \geq t_1$  tal que  $\rho(P^{\tilde{n}}(z), P^{\tilde{n}}(w)) = \rho(P^n(x), P^n(y))$  com  $\rho(x, y) \leq r$ . Nossa afirmação é que  $z = P^{t_2}(x)$ ,  $w = P^{t_2}(y)$  e  $\tilde{n} = n + t_1$ . Com efeito,

$$\rho(z, w) = \rho(P^{t_2}(x), P^{t_2}(y)) \leq \sup_{\substack{\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq r \\ n \geq t_2}} \rho(P^n(\tilde{x}), P^n(\tilde{y})) = F(t_2, r).$$

Esta propriedade engloba bastante informações, por exemplo como a informação em curto prazo em algumas escalas se refletem em informação a longo prazo em outras escalas. Isto é o que aproveitamos para obter limites efetivamente.

**Definição 1.2.1.** *Uma função não negativa  $F : \mathbb{N} \times (0, R) \rightarrow (0, +\infty)$  (onde  $R$  é um número positivo ou  $+\infty$ ) é dito ser uma função de decaimento se*

1.  $F(t, r)$  é não crescente em  $t$ , não decrescente e côncava em  $r$ ;

2.  $F(t, r) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $r \rightarrow 0$ , a outra variável sendo fixada;
3. para alguma constante  $C > 0$  e todo  $t, r$  temos  $F(t, r) \leq Cr$ ;
4. para todo  $t_1, t_2$  e  $r$  temos  $F(t_1 + t_2, r) \leq F(t_1, F(t_2, r))$ .

A concavidade em  $r$  será importante quando usarmos o transporte ótimo, pois nos permitirá obter cota superior para a integral da função de decaimento pela função de decaimento aplicada em uma integral. A terceira condição, que corresponde a uma condição de Lipschitz uniforme sobre os mapas  $(P^t)_{t \in \mathbb{N}}$ , assegura alguma uniformidade do comportamento de  $F$  (isto é usado implicitamente nos Lemas 1.2.2 e 1.2.3 a seguir).

Veremos que um mapa  $P$  tem taxa de decaimento  $F$  (significando implicitamente: “pelo menos  $F$ ”; às vezes especificamos “na métrica  $\rho$ ”) se para todos  $t, x, y$ ,

$$\rho(P^t(x), P^t(y)) \leq F(t, \rho(x, y)). \quad (1.1)$$

Será conveniente introduzir para todo  $\theta \in (0, 1)$  o *tempo de decaimento* de  $F$  como

$$\tau_\theta(r) = \min\{t \in \mathbb{N} : F(t, r) \leq \theta r\} = \min\{t \in \mathbb{N} : \forall s \geq r, F(t, s) \leq \theta s\}$$

onde a segunda quantidade vem da concavidade de  $F(t, \cdot)$ . A noção usual de meia vida corresponde a  $\tau_{1/2}$ , e é constante no caso de decaimento exponencial. Mais geralmente, teremos o seguinte resultado.

**Lema 1.2.2.** *São equivalentes:*

- 1) existe  $C \geq 1$ ,  $\delta \in (0, 1)$  tais que  $F(t, r) \leq C(1 - \delta)^t r$  para todos  $t, r$ ;
- 2) para algum  $\theta \in (0, 1)$ , existe  $D > 0$  tal que para todo  $r$ :  $\tau_\theta(r) \leq D$ ;
- 3) para todo  $\theta \in (0, 1)$ , existe  $D > 0$  tal que para todo  $r$ :  $\tau_\theta(r) \leq D$ .

*Demonstração.* É claro que 3) implica 2) e que 1) implica 3).

Assuma 2) e vamos provar 1). Sejam  $t \in \mathbb{N}$ ,  $r \in [0, \infty)$ . Seja  $k \in \mathbb{N}$  o maior inteiro tal que

$$t \geq \frac{D}{r^\alpha} + \frac{D}{\theta^\alpha r^\alpha} + \cdots + \frac{D}{\theta^{\alpha k} r^\alpha}$$

(tomando  $B$  grande o suficiente,  $b$  suficientemente pequeno podemos facilmente lidar com o alcance  $t \leq D/r^\alpha$ , o qual ignoramos de agora por diante). Temos  $F(t, r) \leq \theta^k r$  e:

$$\begin{aligned} t &\leq \frac{D}{r^\alpha} + \frac{D}{\theta^\alpha r^\alpha} + \cdots + \frac{D}{\theta^{\alpha(k+1)} r^\alpha} \\ t &\leq \frac{D}{r^\alpha} \frac{\theta^{-\alpha(k+2)} - 1}{\theta^{-\alpha} - 1} \\ \theta^{-\alpha(k+2)} &\geq tr^\alpha \frac{\theta^{-\alpha} - 1}{D} + 1 \\ \theta^k &\leq \frac{1}{(tr^\alpha(\theta^\alpha - \theta^{2\alpha})/D + 1)^{\frac{1}{\alpha}}} \\ F(t, r) &\leq \frac{Br}{(tr^\alpha + b)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{para algum } B, b. \end{aligned}$$

□

Quando  $P$  é Lipschitz, o Lema 1.2.2 fornece um decaimento exponencial (uniforme) para  $P$  desde que, para algum  $\theta \in (0, 1)$ , algum  $t_0 \in \mathbb{N}$  e todo  $x, y \in X$  tenhamos

$$\rho(P^{t_0}(x), P^{t_0}(y)) \leq \theta \rho(x, y).$$

Concernente a decaimento polinomial, temos o seguinte resultado análogo.

**Lema 1.2.3.** *Seja  $\alpha$  um número real positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe  $B \geq 1, b \in (0, 1)$  tal que  $F(t, r) \leq \frac{Br}{(tr^\alpha + b)^{\frac{1}{\alpha}}}$  para todo  $t, r$ ,*
2. *para algum  $\theta \in (0, 1)$ , existe  $D > 0$  tal que  $\tau_\theta(r) \leq \frac{D}{r^\alpha}$  para todo  $r$ ,*
3. *para todo  $\theta \in (0, 1)$ , existe  $D > 0$  tal que  $\tau_\theta(r) \leq \frac{D}{r^\alpha}$  para todo  $r$ .*

Quando estas condições são realizadas, diremos que  $F$  é polinomial (com grau  $1/\alpha$ ).

Consideraremos somente as duas famílias de funções de decaimento dadas nos primeiros itens dos Lemas 1.2.2 e 1.2.3, porém taxas de decaimento e tempos de decaimento mais gerais podem ser considerados.

## 1.3 OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA E NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO

O objetivo dessa seção é definir em grande generalidade um operador de transferência associado a uma transformação  $T$ , a generalidade a que nos referimos repousa sobre a transformação  $T$ .

**Definição 1.3.1.** Por **núcleo de transição** em  $\Omega$  entendemos uma família  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  de medidas de probabilidade  $m_x$  definidas sobre  $\mathcal{B}(\Omega)$  tal que a aplicação  $x \mapsto m_x$  seja Borel mensurável.

Um núcleo de transição  $\mathbf{M}$  é chamado de **backward walk** para uma transformação  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  quando a medida  $m_x$  é suportada em  $T^{-1}(x)$  para cada  $x \in \Omega$ .

**Definição 1.3.2.** Seja  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  uma transformação e  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição em  $\Omega$  compatível com  $T$ . Considere  $\mathcal{X}$  uma álgebra de Banach de funções de  $\Omega$  para  $\mathbb{R}$ . Então, fixado  $f \in \mathcal{X}$ , definimos o **operador de transferência** de  $\mathbf{M}$  associado a  $f$  pondo, para cada  $\varphi \in \mathcal{X}$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}\varphi(x) = \int_{\Omega} e^{f(y)}\varphi(y)dm_x(y).$$

Dizemos que um núcleo de transição é **compatível** com  $\mathcal{X}$  se para todo  $f \in \mathcal{X}$ , a fórmula acima define um operador contínuo em  $\mathcal{X}$ .

**Exemplo 1.3.3.** Seja  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ , um difeomorfismo local  $k$  para 1, isto é, para cada  $x \in \Omega$ ,  $\#T^{-1}(x) = k$ . Consideremos  $m_x$  a distribuição uniforme sobre  $T^{-1}(x)$ , ou seja,  $m_x = (1/k) \sum_{j=1}^k \delta_{y_j}$ , e  $\mathcal{X}$  a álgebra das funções  $\alpha$ -Hölder sobre  $\Omega$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}\varphi(x) &= \int_{\Omega} e^{f(y)}\varphi(y) dm_x(y) \\ &= \int_{T^{-1}(x)} e^{f(y)}\varphi(y) \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k d\delta_{y_j}(y) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_{T^{-1}(x)} e^{f(y)}\varphi(y) d\delta_{y_j}(y) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{f(y_j)} \varphi(y_j).$$

Neste caso, o operador de transferência de  $\mathbf{M}$  coincide com a definição clássica a menos de uma constante ou de uma normalização do potencial  $f$ .

**Exemplo 1.3.4.** Considere o operador shift sobre  $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  com medida de probabilidade a priori  $\mu$ . Neste caso, o operador de transferência é definido como

$$\mathcal{L}_f \varphi(x) = \int_{[0,1]} e^{f(ax)} \varphi(ax) d\mu(a).$$

Agora, para cada  $x \in \Omega$ , considere  $m_x = \mu \times \delta_x$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f} \varphi(x) &= \int_{\Omega} e^{f(y)} \varphi(y) dm_x(y) \\ &= \int_{[0,1]^{\mathbb{N}}} e^{f(y)} \varphi(y) dm_x(y) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}} e^{f(ay)} \varphi(ay) dm_x(ay) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}} e^{f(ay)} \varphi(ay) d\mu(a) d\delta_x(y) \\ &= \int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]^{\mathbb{N}}} e^{f(ay)} \varphi(ay) d\delta_x(y) \right] d\mu(a) \\ &= \int_{[0,1]} e^{f(ax)} \varphi(ax) d\mu(a). \end{aligned}$$

Ou seja, o operador de transferência para  $\mathbf{M} = (\mu \times \delta_x)_{x \in \Omega}$  coincide com o operador de transferência com medida a priori.

Mesmo estando interessados primariamente em núcleos de transição que são backward walks para transformações expansores, a questão da lacuna espectral para  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$  é relevante em toda sua generalidade.

## O OPERADOR DUAL

Quando  $\mathcal{X}$  for suficientemente grande para separar medidas de probabilidades, isto é, a igualdade  $\mu(f) = \nu(f)$  para toda  $f \in \mathcal{X}$  implica  $\mu = \nu$ , podemos definir o operador

dual  $\mathcal{L}_{M,f}^*$  agindo sobre  $\mathcal{P}(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \varphi d(\mathcal{L}_{M,f}^* \mu) = \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}.$$

#### POTENCIAIS NORMALIZADOS

É comum destacar os potenciais  $f$  tais que  $\mathcal{L}_f \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ; estes potenciais são ditos *normalizados*, e podem ser caracterizados de várias maneiras. Uma particularidade relevante é observar que  $f$  é normalizado sempre que  $e^f dm_x$  é uma medida de probabilidade para todo  $x$ , i.e., quando  $(e^f dm_x)_{x \in \Omega}$  é um núcleo de transição.

#### TEOREMA DE RUELLE PERRON FROBENIUS

Seja  $\mathcal{X}$  uma álgebra de Banach de funções definidas sobre  $\Omega$  cuja norma é denotada por  $\|\cdot\|$ , e assuma que  $\mathcal{L}_{M,f}$  age continuamente sobre  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.3.5.** *Temos as seguintes definições:*

- a) Dizemos que  $\mathcal{L}_{M,f}$  satisfaz um teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (RPF) sobre  $\mathcal{X}$  se existem uma função estritamente positiva  $h_f \in \mathcal{X}$  e uma constante positiva  $\rho_f$  tal que  $\mathcal{L}_{M,f} h_f = \rho_f h_f$ , e existe uma medida positiva finita  $\nu_f$ , tal que  $\mathcal{L}_{M,f}^* \nu_f = \rho_f \nu_f$ .
- b) A medida positiva  $\mu_f$  definida por  $d\mu_f = h_f d\nu_f$  (escolha de  $h_f$  a torna uma probabilidade) é chamada a **medida RPF** do potencial  $f$ .
- c) Dizemos que  $\mathcal{L}_{M,f}$  tem a propriedade da **lacuna espectral** se ele satisfaz o teorema de RPF e existem constantes  $C \geq 1$ ,  $\delta \in (0, 1)$  tais que para todo  $t \in \mathbb{N}$ , e toda  $\varphi \in \mathcal{X}$  tal que  $\nu(\varphi) = 0$  temos

$$\|\mathcal{L}_{M,f}^t \varphi\| \leq C \rho^t (1 - \delta)^t \|\varphi\|.$$

A definição de lacuna espectral acima a princípio pode parecer mais forte que as definições mais usuais, entretanto pode ser mostrado equivalente às definições padrões, veja por exemplo [28].

No contexto da mecânica estatística, a medida RPF é chamada medida de equilíbrio.

**Observação 1.3.6.** *Assuma que  $\mathcal{X}$  separa medidas e que  $\mathbf{M}$  é um backward walk para uma transformação  $T$ , e assumo que vale um teorema RPF para  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$ . Então a medida  $\mu_f$  é  $T$ -invariante.*

*Demonstração.* De fato, primeiro observe que para todo  $f \in \mathcal{X}$ , temos que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}(g \cdot \varphi \circ T)(x) = \int_{\Omega} e^{f(x_1)} g(x_1) \underbrace{\varphi(T(x_1))}_{=x} dm_x(x_1) = \varphi(x) \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}(g)(x).$$

Então fazendo

$$\tilde{f} = f + \log h_f - \log h_f \circ T - \log \rho_f$$

obtemos um novo potencial. Afirmamos que  $\tilde{f}$  é normalizado e tal que  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}$  são conjugados a menos de uma constante. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}\varphi(x) &= \int e^{\tilde{f}(x_1)} \varphi(x_1) dm_x(x_1) \\ &= \int e^{f(x_1) + \log h_f(x_1) - \log h_f \circ T(x_1) - \log \rho_f} \varphi(x_1) dm_x(x_1) \\ &= \int e^{f(x_1)} \frac{h_f(x_1)}{\rho_f h_f(T(x_1))} \varphi(x_1) dm_x(x_1) \\ &= \frac{1}{\rho_f h_f} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}(h_f \varphi)(x), \end{aligned}$$

isto é,  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}\varphi = (1/\rho_f)(h_f)^{-1} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}(h_f \varphi)$ . Em particular

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}\mathbf{1} = \frac{1}{\rho_f h_f} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f} h = \frac{1}{\rho_f h_f} \rho_f h_f = \mathbf{1}.$$

Ou seja,  $\tilde{f}$  está normalizado. O potencial normalizado também pode ser interpretado como o operador tendo autovalor 1 associado a autofunção  $\mathbf{1}$ . Similarmente, mostra-se que  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}^*$  tem  $\mu_f$  como automedida. Então para toda  $\varphi \in \mathcal{X}$ :

$$\int \varphi \circ T d\mu_f = \int \varphi \circ T d(\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}^* \mu_f) = \int \mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}(\mathbf{1} \cdot \varphi \circ T) d\mu_f = \int \varphi d\mu_f.$$



Uma vez que  $\mathcal{X}$  separa medidas, concluímos que  $\mu_f$  é  $T$ -invariante. □

**Observação 1.3.7.** *No exemplo anterior foi usado implicitamente que  $\mathcal{L}_{M, \tilde{f}}$  também deixa  $\mathcal{X}$  invariante; Foi fundamental também a propriedade de  $\mathcal{X}$  separar medidas.*



# Capítulo 2

## TRANSPORTE ÓTIMO

Nesta seção, assumimos que  $\text{diam}(\Omega) < \infty$ . Podemos fazer isso uma vez que a métrica  $d' = d/(1 + d)$  é uma métrica limitada equivalente a  $d$ . O problema de transporte ótimo foi proposto primeiramente por Monge em 1781 [34], o qual introduziu a noção de *aplicação de transporte*, uma transformação de um espaço  $X$  num espaço  $Y$  satisfazendo uma certa condição. Kantorovich, nos anos 1940, revisita o problema de Monge e fornece uma nova formulação para o problema, [25, 26]. Grosseiramente falando, Kantorovich superou as dificuldades da formulação de Monge causadas pelo papel desempenhado pela aplicação de transporte, introduzindo a noção de *plano de transporte*. Devido as propriedades e possibilidades que o problema de transporte de Kantorovich oferece, tal como o problema dual, possibilitou uma vasta gama de estudos e aplicações. Entretanto, não pretendemos aqui avançar muito no assunto, nos contentando apenas com as formulações dos problemas e a definição e propriedades da distância de Wasserstein. As referências que utilizamos neste capítulo são [14, 27, 46, 47].

### 2.1 FORMULAÇÃO DE MONGE

Sejam  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}(Y), \nu)$  espaços de probabilidade. Queremos encontrar uma maneira de comparar as medidas  $\mu$  e  $\nu$ . Uma forma de ilustrar essa comparação é pensar em  $\mu$  como uma porção de areias e em  $\nu$  como um buraco no solo que desejamos

preencher. Cada unidade de massa  $x$  em  $X$  deve ser transportada para uma quantidade  $y$  em  $Y$  e esse procedimento tem um *custo*.

**Definição 2.1.1.** *Uma função custo, ou simplesmente, custo, é qualquer aplicação mensurável  $c : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ .*

Neste contexto,  $c(x, y)$  é interpretado como o custo de se transportar uma unidade de massa  $x \in X$  para  $y \in Y$ . Neste sentido podemos comparar as medidas  $\mu$  e  $\nu$  através do custo necessário para mover  $\mu$  a  $\nu$ . Precisamente, a próxima definição explica o que entendemos por transportar uma medida para outra.

**Definição 2.1.2.** *Dizemos que  $T : X \rightarrow Y$  transporta  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  para  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  e chamamos  $T$  de aplicação transporte, se*

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(Y). \quad (2.1)$$

Para compreender melhor o termo transporte nessa definição, note o seguinte: se  $B$  é um conjunto em  $\mathcal{B}(Y)$  e  $A = \{x \in X : T(x) \in B\}$  então  $\nu(B) = \mu(A)$ . Se (2.1) é satisfeita usaremos a notação  $\nu = T_*\mu$ . O problema da existência de aplicação transporte para duas medidas dadas  $\mu$  e  $\nu$  não é trivial e pode até não existir.

**Exemplo 2.1.3.** *Considere as medidas  $\mu = \delta_{x_1}$  e  $\nu = (1/2)\delta_{y_1} + (1/2)\delta_{y_2}$  com  $y_1 \neq y_2$ . Note que, para qualquer aplicação  $T : X \rightarrow Y$ ,  $x_1 \in T^{-1}(\{y_1\})$  ou  $x_1 \notin T^{-1}(\{y_1\})$ . Se  $x_1 \in T^{-1}(\{y_1\})$  então  $\nu(\{y_1\}) = 1/2$  enquanto  $\mu(T^{-1}(\{y_1\})) \in \{0, 1\}$  dependendo de  $x_1$  pertencer ou não a  $T^{-1}(\{y_1\})$ . Portanto não existe a aplicação transporte.*

Feito a discussão acima, podemos enunciar o problema do transporte ótimo de Monge.

**Definição 2.1.4** (Transporte ótimo de Monge). *Dadas  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ , minimizar*

$$\mathbb{M}(T) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

sobre todas as aplicações  $\mu$ -mensuráveis  $T : X \rightarrow Y$  sujeito à condição  $\nu = T_*\mu$ . Uma  $T$  que resolve o problema de minimização é chamada aplicação de transporte ótimo.

Uma condição necessária para que exista uma aplicação de transporte é  $\mu$  absolutamente contínua com suporte compacto e  $c(x, T(x))$  é convexa. Para mais informações sobre soluções e desenvolvimento histórico do problema veja, por exemplo, [14], [47].

## 2.2 FORMULAÇÃO DE KANTOROVICH

Observe que na formulação de Monge, a massa  $x$  é mapeada em  $T(x)$ , ou seja, pela definição de função, a massa não pode ser decomposta. No caso discreto, isto causa dificuldade no que diz respeito à existência de aplicações de transporte, como podemos ver no exemplo 2.1.3. A formulação do problema de transporte de Kantorovich se baseia na possibilidade de transportar a massa  $x_1$  em várias partes  $y_1, \dots, y_n$ . Com a intenção de formalizar isso, consideramos uma medida  $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$  e pensamos em  $d\pi(x, y)$  como a quantidade de massa transferida de  $x$  para  $y$ . Agora a massa em  $x$  pode ser transferida para várias locais. Neste caso, a quantidade total de massa removida em qualquer conjunto mensurável  $A \subset X$  deve ser igual  $\mu(A)$ , e a quantidade total de massa transferida para qualquer conjunto mensurável  $B \subset Y$  deve ser igual a  $\nu(B)$ . Isto nos leva a exigir  $\pi(A \times \Omega) = \mu(A)$  e  $\pi(\Omega \times B) = \nu(B)$  para quaisquer conjuntos mensuráveis  $A \subset X$  e  $B \subset Y$ . Uma medida  $\pi$  que satisfaz a essas condições é dita ter primeira marginal  $\mu$  e segunda marginal  $\nu$ . O conjunto de todas as medidas  $\pi$  cujas marginais são  $\mu$  e  $\nu$ , respectivamente, será denotado por  $\Gamma(\mu, \nu)$ .

**Definição 2.2.1** (Plano de transporte). *Chamamos os elementos de  $\Gamma(\mu, \nu)$  de planos de transporte entre  $\mu$  e  $\nu$ .*

Observe que  $\Gamma(\mu, \nu)$  é sempre não vazio pois contém a medida produto  $\mu \times \nu$ . Estamos em condição de definir a formulação de transporte ótimo de Kantorovich.

**Definição 2.2.2** (Transporte ótimo de Kantorovich). *Dadas  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ , minimizar*

$$\mathbb{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

sobre  $\Gamma(\mu, \nu)$ . Um plano de transporte é dito **ótimo** (com respeito a  $c$ ) se ele resolve o problema de minimização acima.

Planos de transporte ótimo em nosso contexto sempre existem, como assegura o teorema a seguir.

**Teorema 2.2.3** (Existência de plano ótimo). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços Poloneses, e considere os espaços de probabilidade  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}(Y), \nu)$ . Sejam  $a : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  e  $b : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  duas funções semicontínuas superiormente tais que  $a \in L^1(\mu)$  e  $b \in L^1(\nu)$ . Seja  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função custo semicontínua inferiormente, tal que  $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$  para todo  $(x, y) \in X \times Y$ . Então existe um plano de transporte em  $\Gamma(\mu, \nu)$  que minimiza*

$$\mathbb{K}(\pi) = \inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada em [47], teorema 4.1. □

**Teorema 2.2.4** (Dualidade de Kantorovich). *Sejam  $X, Y$  espaços Poloneses e  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ . Seja  $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  uma função custo semicontínua inferiormente. Defina*

$$\mathbb{J} : L^1(\mu) \times L^1(\nu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{J}(\varphi, \psi) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Seja  $\Phi_c$  definido por

$$\Phi_c = \{(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu) : \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)\}$$

em que a desigualdade caracterizadora de  $\Phi_c$  se dá para  $\mu$ -quase todo  $x \in X$  e  $\nu$ -quase todo  $y \in Y$ . Então,

$$\inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi).$$

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [46], Teorema 1.3. □

Decorre da dualidade de Kantorovich o seguinte

**Teorema 2.2.5** (Dualidade de Kantorovich-Rubinstein). *Seja  $X = Y$  um espaço Polonês e seja  $d$  uma métrica semicontínua inferiormente sobre  $X$ . Então*

$$\inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y) d\pi(x, y) = \sup_{\|\varphi\|_{\text{Lip}} \leq 1} \left| \int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu \right|$$

em que

$$\|\varphi\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)}.$$

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [46], Teorema 1.14.  $\square$

## 2.3 DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN

**Definição 2.3.1** (Distância de Wasserstein). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico Polonês, e  $p \in [1, \infty)$ . Para quaisquer duas medidas de probabilidade  $\mu, \nu$  sobre  $X$ , a distância de Wasserstein de ordem  $p$  entre  $\mu$  e  $\nu$  é definida pela fórmula*

$$W_p(\mu, \nu) = \left( \inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi(x, y) \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

Note que  $W_p$  não é estritamente uma métrica, pois há a possibilidade dela tomar valor infinito. Com isso, é natural restringir  $W_p$  ao subconjunto de  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  no qual ela toma valores finitos.

**Definição 2.3.2** (Espaço de Wasserstein). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico Polonês, e  $p \in [1, \infty)$ . O espaço de Wasserstein de ordem  $p$  é definido por*

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X d(x_0, x)^p d\mu(x) < +\infty \right\},$$

em que  $x_0 \in X$  é arbitrário.

Afirmamos que  $W_p$  é finita sobre  $\mathcal{P}_p(X)$ . De fato, seja  $\Pi$  um plano de transporte entre  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$ . Então, usando a desigualdade  $d(x, y)^p \leq 2^{p-1}[d(x, x_0)^p + d(x_0, y)^p]$ , temos

$$W_p(\mu, \nu)^p = \inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi(x, y) \leq \int_{X \times X} d(x, y)^p d\Pi(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{p-1} \left[ \int_{X \times X} d(x, x_0)^p d\Pi(x, y) + \int_{X \times X} d(x_0, y)^p d\Pi(x, y) \right] \\
&= 2^{p-1} \left[ \underbrace{\int_X d(x, x_0)^p d\mu(x)}_{<+\infty} + \underbrace{\int_X d(x_0, y)^p d\nu(y)}_{<+\infty} \right] < +\infty.
\end{aligned}$$

A desigualdade triangular decorre do seguinte lema

**Lema 2.3.3.** *Dadas medidas  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ ,  $\theta \in \mathcal{P}(Z)$ , e planos de transporte  $\pi_1 \in \Gamma(\mu, \nu)$  e  $\pi_2 \in \Gamma(\nu, \theta)$ , existe uma medida  $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$  tal que  $P_*^{X,Y} \gamma = \pi_1$  e  $P_*^{Y,Z} \gamma = \pi_2$  em que  $P^{X,Y}(x, y, z) = (x, y)$  e  $P^{Y,Z}(x, y, z) = (y, z)$ .*

*Demonstração.* Pela desintegração das medidas podemos escrever

$$\pi_1(A \times B) = \int_B \pi_1(A|y) d\nu(y)$$

para alguma família de medidas de probabilidade  $\pi_1(\cdot | y) \in \mathcal{P}(X)$ . Similarmente para  $\pi_2$ ,

$$\pi_2(B \times C) = \int_B \pi_2(C|y) d\nu(y).$$

Definamos  $\gamma \in \mathcal{M}(X \times Y \times Z)$  por

$$\gamma(A \times B \times C) = \int_B \pi_1(A|y) \pi_2(C|y) d\nu(y).$$

Com isso,

$$\gamma(A \times B \times Z) = \int_B \pi_1(A|y) \pi_2(Z|y) d\nu(y) = \int_B \pi_1(A|y) d\nu(y) = \pi_1(A \times B).$$

Analogamente,  $\gamma(X \times B \times C) = \pi_2(B \times C)$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
P_*^{X,Y} \gamma(A \times B) &= \gamma((P^{X,Y})^{-1}(A \times B)) = \gamma(A \times B \times Z) = \pi_1(A \times B), \\
P_*^{Y,Z} \gamma(B \times C) &= \gamma((P^{Y,Z})^{-1}(B \times C)) = \gamma(X \times B \times C) = \pi_2(B \times C).
\end{aligned}$$

□

Agora estamos em condição de verificar que  $W_p$  é uma métrica.

**Proposição 2.3.4.** *A distância  $W_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow [0, +\infty)$  é uma métrica sobre  $\mathcal{P}_p(X)$ .*



*Demonstração.* A demonstração se dará em três partes.

- i) Por definição  $W_p(\mu, \nu) \geq 0$  para quaisquer  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$ . Se  $\mu = \nu$ , então tomando  $\pi(x, y) = \delta_y(x)\mu(x)$  temos

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu)^p &\leq \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi(x, y) \\ &= \int_{X \times X} d(x, y)^p d\delta_y(x) d\mu(x) \\ &= \int_X d(x, x)^p d\mu(x) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $W_p(\mu, \nu) = 0$ . Por outro lado, se  $W_p(\mu, \nu) = 0$  então existe  $\pi \in \Gamma(\mu, \nu)$  tal que  $x = y$   $\pi$ -quase toda parte. Portanto, para qualquer função teste  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , temos

$$\int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_{X \times X} \varphi(x) d\pi(x, y) = \int_{X \times X} \varphi(y) d\pi(x, y) = \int_X \varphi(y) d\nu(y).$$

Logo,  $\mu = \nu$ .

- ii) A propriedade de simetria decorre do seguinte. A função custo  $d(x, y)$  é simétrica e  $\pi \in \Gamma(\mu, \nu)$  se, e somente se,  $S_*\pi \in \Gamma(\nu, \mu)$  em que  $S(x, y) = (y, x)$ .
- iii) Agora vamos mostrar que vale a desigualdade triangular. Sejam  $\mu, \nu, \theta \in \mathcal{P}_p(X)$  e assumamos que  $\pi_{XY} \in \Gamma(\mu, \nu)$  e  $\pi_{YZ} \in \Gamma(\nu, \theta)$  são planos ótimos. Decorre do Lema 2.3.3 que existe  $\gamma \in \mathcal{P}(X \times X \times X)$  tal que  $P_*^{X,Y}\gamma = \pi_{XY}$  e  $P_*^{Y,Z}\gamma = \pi_{YZ}$ . Seja  $\pi_{XZ} = P_*^{X,Z}\gamma$ . Então

$$\pi_{XZ}(A \times X) = P_*^{X,Z}\gamma(A \times X) = \gamma(A \times X \times X) = \pi_{XY}(A \times X) = \mu(A).$$

Analogamente,  $\pi_{XZ}(X \times B) = \theta(B)$ . Portanto,  $\pi_{XZ} \in \Gamma(\mu, \theta)$ . Com isso,

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \theta) &\leq \left( \int_{X \times X} d(x, z)^p d\pi_{XZ}(x, z) \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{X \times X \times X} d(x, z)^p d\gamma(x, y, z) \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{X \times X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y, z) \right)^{1/p} + \left( \int_{X \times X \times X} d(y, z)^p d\gamma(x, y, z) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi_{XZ}(x, y) \right)^{1/p} + \left( \int_{X \times X} d(y, z)^p d\pi_{YZ}(y, z) \right)^{1/p} \\
&= W_p(\mu, \nu) + W_p(\nu, \theta).
\end{aligned}$$

Portanto  $W_p$  é uma métrica.  $\square$

Relembre que uma sequência  $(\mu_k) \subset \mathcal{P}(\Omega)$  converge fracamente para  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$  se, e somente se, para qualquer função contínua e limitada  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se  $\int f d\mu_k \rightarrow \int f d\mu$ . O seguinte teorema garante que a convergência na métrica de Wasserstein é equivalente à convergência dada pela topologia fraca.

**Teorema 2.3.5.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico Polonês. Se  $\{\mu_k\}_k$  é uma sequência em  $\mathcal{P}_p(X)$  e  $\mu$  uma medida de probabilidade em  $\mathcal{P}(X)$ , então são equivalentes:*

- i)  $\{\mu_k\}_k$  converge fracamente em  $\mathcal{P}_p(X)$  para  $\mu$ , isto é, para algum  $x_0 \in X$ ,  $\int_X d(x_0, x)^p \mu_k(x) \rightarrow \int_X d(x_0, x)^p \mu(x)$  e  $\mu_k \rightarrow \mu$  fracamente em  $\mathcal{P}(X)$ ,
- ii)  $W_p(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada em [47].  $\square$

**Definição 2.3.6.** *Seja  $\omega$  um módulo de continuidade e  $(\Omega, d)$  um espaço métrico Polonês. Dadas  $\mu$  e  $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$  definimos a distância de Wasserstein entre  $\mu$  e  $\nu$  relativa ao módulo de continuidade  $\omega$  como sendo a quantidade*

$$W_\omega(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{\Omega \times \Omega} \omega \circ d(x, y) d\Pi(x, y).$$

Ou seja,  $W_\omega$  é igual a  $W_1$  referente à função fusto  $\omega \circ d$ . A dualidade de Kantorovich-Rubinstein nos permite reescrever a métrica de Wasserstein da seguinte forma

$$W_\omega(\mu, \nu) = \sup_{\text{Hol}_\omega(f) \leq 1} |\mu(f) - \nu(f)|. \quad (2.3)$$

**Lema 2.3.7.** *Para toda medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$  e todo  $x \in \Omega$ , vale  $W_\omega(\delta_x, \mu) \leq \omega(\text{diam}(\Omega))$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Omega$  e  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Como a medida produto  $d\delta_x \times d\mu$  é um plano em  $\Gamma(\delta_x, \mu)$  e  $\omega$  é crescente, então

$$\begin{aligned} W_\omega(\delta_x, \mu) &= \inf_{\Pi \in \Gamma(\delta_x, \mu)} \int_{\Omega \times \Omega} \omega \circ d(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\Pi(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\leq \int_{\Omega \times \Omega} \omega \circ d(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\delta_x(\tilde{x}) \, d\mu(\tilde{y}) \\ &= \int_{\Omega} \omega \circ d(x, \tilde{y}) \, d\mu(\tilde{y}) \leq \omega(\text{diam}(\Omega)). \end{aligned}$$

□

No caso em que  $\Omega$  é compacto, o teorema a seguir fornece uma ideia de como usar a teoria do transporte ótimo e módulos de continuidade a fim de obter decaimento de operadores. Seja  $\mathcal{L} : \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  um operador linear limitado, positivo, satisfazendo  $\mathcal{L}\mathbf{1} = \mathbf{1}$  e considere  $\mathcal{L}^*$  o seu dual agindo em  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Seja  $F$  uma função de decaimento e  $\omega'$  um segundo módulo de continuidade. Então temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.8.** *Se o dual  $\mathcal{L}^*$  tem taxa de decaimento pelo menos  $F$  na distância de Wasserstein  $W_\omega$ , então  $\mathcal{L}$  tem uma única medida de probabilidade invariante  $\mu$ . Além do mais, para cada  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  fixada arbitrariamente temos*

$$\|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\infty \leq \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega(\text{diam} \Omega)) \quad e \quad \text{Hol}_{\omega'}(\mathcal{L}^t f) \leq \text{Hol}_\omega(f) F_{\omega'}^\omega(t)$$

onde

$$F_{\omega'}^\omega(t) := \sup_{s \in (0, \text{diam} \Omega)} \frac{F(t, \omega(s))}{\omega'(s)}.$$

Em particular, quando  $F(t, r) = C(1 - \delta)^t r$  (onde  $C \geq 1$  e  $\delta \in (0, 1)$ ), temos

$$\|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\omega \leq C'(1 - \delta)^t \text{Hol}_\omega(f).$$

*Demonstração.* A existência de uma medida invariante é estabelecida pelo teorema de Schauder-Tychonoff, uma vez que  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})^*$  é um subconjunto compacto convexo de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . A unicidade segue do  $F$ -decaimento de  $\mathcal{L}^*$ . Para a segunda parte, observe que para cada  $x \in \Omega$ , temos  $\mathcal{L}^t f(x) = \int \mathcal{L}^t f \, d\delta_x = \int f \, d\mathcal{L}^{*t} \delta_x$ . Assim,

$$\left| \mathcal{L}^t f(x) - \int f \, d\mu \right| = \left| \int f \, d\mathcal{L}^{*t} \delta_x - \int f \, d\mathcal{L}^{*t} \mu \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Hol}_\omega(f) \left| \int \frac{f}{\text{Hol}_\omega(f)} d\mathcal{L}^{*t}\delta_x - \int \frac{f}{\text{Hol}_\omega(f)} d\mathcal{L}^{*t}\mu \right| \\
&\stackrel{(2.3)}{\leq} \text{Hol}_\omega(f) W_\omega(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\mu) \\
&\stackrel{\text{hipótese de decaimento}}{\leq} \text{Hol}_\omega(f) F(t, W_\omega(\delta_x, \mu)) \\
&\stackrel{\text{Lema 2.3.7, monotonicidade de } F}{\leq} \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega(\text{diam}\Omega)).
\end{aligned}$$

Tomando o sup em  $x \in \Omega$ , obtemos

$$\|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\infty \leq \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega(\text{diam}\Omega)). \quad (2.4)$$

Similarmente, para todo  $x, y \in \Omega$  obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{L}^t f(x) - \mathcal{L}^t f(y) \right| &= \left| \int \mathcal{L}^t f d\delta_x - \int \mathcal{L}^t f d\delta_y \right| \\
&= \left| \int f d\mathcal{L}^{*t}\delta_x - \int f d\mathcal{L}^{*t}\delta_y \right| \\
&\leq \text{Hol}_\omega(f) W_\omega(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\delta_y) \\
&\leq \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega \circ d(x, y)) \\
&\leq \text{Hol}_\omega(f) F_{\omega'}^\omega(t) \omega' \circ d(x, y),
\end{aligned} \quad (2.5)$$

logo,  $\text{Hol}_{\omega'}(\mathcal{L}^t f) \leq \text{Hol}_\omega(f) F_{\omega'}^\omega(t)$ .

Finalmente, segue das equações (2.4), (2.5) e de  $F(t, r) = C(1 - \delta)^t r$  que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\omega &= \|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\infty + \text{Hol}_\omega(\mathcal{L}^t f - \mu(f)) \\
&= \|\mathcal{L}^t f - \mu(f)\|_\infty + \text{Hol}_\omega(\mathcal{L}^t f) \\
&\leq \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega(\text{diam}\Omega)) + \text{Hol}_\omega(f) F(t, \omega(\text{diam}\Omega)) \\
&\leq 2\omega(\text{diam}\Omega) \text{Hol}_\omega(f) C(1 - \delta)^t \\
&\leq C'(1 - \delta)^t \text{Hol}_\omega(f). \quad \square
\end{aligned}$$

**Teorema 2.3.9** (Seleção mensurável de planos ótimos). *Sejam  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espaços poloneses e seja  $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função custo com  $\inf c > -\infty$ . Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço*

mensurável e  $\beta \mapsto (\mu_\beta, \nu_\beta)$  uma função mensurável de  $\mathcal{H}$  para  $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ . Então existe uma escolha mensurável  $\beta \mapsto \pi_\beta$  tal que para cada  $\beta$ ,  $\pi_\beta$  é um plano ótimo entre  $\mu_\beta$  e  $\nu_\beta$ .

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada em [47], corolário 5.22.  $\square$

Será conveniente considerar primeiro a medida de Dirac para provar o decaimento, e a linearidade da métrica de Wasserstein nos permitirá estender nossas conclusões a todas as medidas.

**Corolário 2.3.10.** *Seja  $T$  é um operador linear sobre as medidas sinaladas finitas que preserva o conjunto das medidas de probabilidade. Então para cada  $x, y \in \Omega$  a aplicação  $(x, y) \mapsto \pi_{x,y}$ , em que  $\pi_{x,y}$  um plano ótimo entre  $T\delta_x$  e  $T\delta_y$ , é mensurável.*

*Demonstração.* Faça  $\Omega = \mathcal{X}, \Omega = \mathcal{Y}$ ,  $c = \omega \circ d$ ,  $\Omega \times \Omega = \mathcal{H}$ ,  $(T\delta_x, T\delta_y) = (\mu_\beta, \nu_\beta)$  e  $\beta = (x, y)$  no Teorema 2.3.9.  $\square$

**Lema 2.3.11.** *Se  $\mathcal{L}^*$  é um operador linear sobre as medidas sinaladas finitas que preserva o conjunto das medidas de probabilidade e  $\omega$  é um módulo de continuidade, então para toda  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$  e todo plano  $\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)$ ,*

$$W_\omega(\mathcal{L}^*\mu, \mathcal{L}^*\nu) \leq \int W_\omega(\mathcal{L}^*\delta_x, \mathcal{L}^*\delta_y) d\Pi(x, y).$$

*Demonstração.* Para cada  $x, y \in \Omega$ , seja  $\tilde{\pi}_{x,y}$  um plano ótimo entre  $\mathcal{L}^*\delta_x$  e  $\mathcal{L}^*\delta_y$ , o qual podemos assumir ser mensurável, como aplicação  $(x, y) \mapsto \tilde{\pi}_{x,y}$ , pelo Corolário 2.3.10.

Sejam  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Afirmamos que a medida definida sobre  $\Omega \times \Omega$  dada por

$$\tilde{\Pi} = \int \tilde{\pi}_{x,y} d\Pi(x, y)$$

é um plano de transporte entre  $\mathcal{L}^*\mu$  e  $\mathcal{L}^*\nu$ . De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(A \times \Omega) &= \int_{\Omega \times \Omega} \tilde{\pi}_{x,y}(A \times \Omega) d\Pi(x, y) \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} \mathcal{L}^*\delta_x(A) d\Pi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega \times \Omega} \int_{\Omega} 1_A(z) d\mathcal{L}^* \delta_x(z) d\Pi(x, y) \\
&= \int_{\Omega \times \Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L} 1_A(z) d\delta_x(z) d\Pi(x, y) \\
&= \int_{\Omega \times \Omega} \mathcal{L} 1_A(x) d\Pi(x, y) \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{L} 1_A(x) d\mu(x) \\
&= \int_{\Omega} 1_A(x) d\mathcal{L}^* \mu(x) \\
&= \mathcal{L}^* \mu(A).
\end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos que  $\tilde{\Pi}(\Omega \times B) = \mathcal{L}^* \nu(B)$ , concluindo a demonstração da afirmação. Agora, se  $h : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Borel mensurável, afirmamos que

$$\int_{\Omega^2} h(x_1, y_1) d\tilde{\Pi}(x_1, y_1) = \int_{\Omega^2} \int_{\Omega^2} h(x_1, y_1) d\tilde{\pi}_{x,y}(x_1, y_1) d\Pi(x, y). \quad (2.6)$$

De fato, começamos com  $h(x_1, y_1) = 1_{A \times B}(x_1, y_1)$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^2} 1_{A \times B}(x_1, y_1) d\tilde{\Pi}(x_1, y_1) &= \tilde{\Pi}(A \times B) \\
&= \int_{\Omega^2} \tilde{\pi}_{x,y}(A \times B) d\Pi(x, y) \\
&= \int_{\Omega^2} \int_{\Omega^2} 1_{A \times B}(x_1, y_1) d\tilde{\pi}_{x,y}(x_1, y_1) d\Pi(x, y).
\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral, a identidade acima vale para toda função simples, e via argumento padrão, vale para toda função mensurável.

Usando a definição da métrica  $W_\omega$ , a equação (2.6), a definição de transporte ótimo e o fato que  $\tilde{\Pi}$  é um plano entre  $\mathcal{L}^* \mu$  e  $\mathcal{L}^* \nu$ , temos

$$\begin{aligned}
W_\omega(\mathcal{L}^* \mu, \mathcal{L}^* \nu) &= \inf_{\tilde{\Pi} \in \Gamma(\mathcal{L}^* \mu, \mathcal{L}^* \nu)} \int_{\Omega^2} \omega \circ d(x_1, y_1) d\tilde{\Pi}(x_1, y_1) \\
&\leq \int_{\Omega^2} \omega \circ d(x_1, y_1) d\tilde{\Pi}(x_1, y_1) \\
&= \int_{\Omega^2} \int_{\Omega^2} \omega \circ d(x_1, y_1) d\tilde{\pi}_{x,y}(x_1, y_1) d\Pi(x, y)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega^2} W_\omega(\mathcal{L}^* \delta_x, \mathcal{L}^* \delta_y) d\Pi(x, y).$$

□





# Capítulo 3

## ACOPLAMENTOS E O TEOREMA RPF

Neste capítulo apresentamos a definição de acoplamento de núcleos de transição encontrada em [27]. Em seguida, definimos alguns acoplamentos especiais tais como os  $\omega$ -Hölder, e acoplamentos com decaimento. Veremos como essas propriedades se transferem para o operador de transferência com a finalidade de obter decaimentos para o mesmo na métrica de Wasserstein. Na sequência provaremos o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, o qual é o principal resultado deste trabalho. As referências que seguimos de perto são [5, 7, 20, 27].

### 3.1 ACOPLAMENTOS DE UM NÚCLEO DE TRANSIÇÃO

Como o foco principal são núcleos de transição, precisaremos de uma propriedade de contração adequadamente definida para esses objetos, que deve se ajustar a um dado módulo de continuidade  $\omega$ . As referências que seguimos nesta seção são [5, 27].

Primeiramente fixemos algumas notações. Consideremos um núcleo de transição  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  sobre um espaço métrico  $\Omega$ . Dados  $t \in \mathbb{N}$  e  $x \in \Omega$  denotamos por  $m_x^t$  a medida sobre  $\Omega^t$  a qual é a lei de uma cadeia de Markov  $(X_1, \dots, X_t)$  começando em  $X_0 = x$  e seguindo o núcleo de transição  $M$ . Em outras palavras, denotando por

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_t)$  os pontos em  $\Omega^t$ ,  $m_x^t$  é definido por

$$\int_{\Omega^t} f(\bar{x}) dm_x^t(\bar{x}) = \int \cdots \iint f(\bar{x}) dm_{x_{t-1}}(x_t) dm_{x_{t-2}}(x_{t-1}) \cdots dm_x(x_1).$$

Observe que  $m_x^t$  é uma medida de probabilidade sobre  $\Omega^t$ ; a medida sobre  $\Omega$  dando a lei do  $n$ -ésimo elemento  $X_n$  da cadeia de Markov com núcleo de transição  $M$  iniciada em  $X_0 = x$  é então  $(e_n)_* m_x^n$ , onde  $e_i : \Omega^t \rightarrow \Omega$  é a projeção no  $i$ -ésimo fator (também conhecido como tempo de avaliação em  $i$ ) e o índice  $*$  denota o *push forward*. Deve ser observado que

$$(e_t)_* m_x^t = \mathcal{L}_{M,0}^{*t} \delta_x.$$

Ou seja, o dual do operador de transferência sem peso pode ser expresso como o push forward da medida de probabilidade  $m_x^t$ . Uma expressão semelhante vale para o operador ponderado:

$$(e_t)_*(e^{\tilde{f}} m_x^t) = \mathcal{L}_{M,\tilde{f}}^{*t} \delta_x,$$

em que  $\tilde{f}$  é um potencial normalizado.

Dadas duas medidas de probabilidade  $\bar{\mu}, \bar{\nu}$  sobre  $\Omega^t$ , denotamos por  $\Gamma(\bar{\mu}, \bar{\nu})$  o conjunto das medidas de probabilidade  $\Pi$  sobre  $\Omega^t \times \Omega^t$  cujas marginais são  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\nu}$ , i.e. tais que

$$p_{1*} \Pi = \bar{\mu} \quad \text{e} \quad p_{2*} \Pi = \bar{\nu}$$

onde  $p_1, p_2$  são as projeções  $\Omega^t \times \Omega^t \rightarrow \Omega^t$  sobre cada fator. Em particular, denotando por  $(e_t, e_t) : \Omega_t \times \Omega_t \rightarrow \Omega \times \Omega$  a avaliação no tempo  $t$ ,  $(e_t, e_t)_* \Pi$  é um plano de transporte entre  $\mu_t := (e_t)_* \bar{\mu}$  e  $\nu_t := (e_t)_* \bar{\nu}$ .

**Definição 3.1.1** (Acoplamento). *Um **acoplamento** de um núcleo de transição  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  é uma família  $\mathbf{P}$  de medidas de probabilidade  $\Pi_{x,y}^t \in \Gamma(m_x^t, m_y^t)$  indexada por  $t \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in \Omega$ , tais que para cada  $t$ , o mapa  $(x, y) \mapsto \Pi_{x,y}^t$  é Borel mensurável. Um **acoplamento no tempo**  $i$ , de  $M$ , é restrição do acoplamento a  $t = i$  e também é chamado de um **acoplamento restrito**. Para um acoplamento definido para todos os tempos  $t$ , usamos o termo **acoplamento completo**.*

Em outras palavras, um acoplamento (completo) fornece uma maneira de emparelhar trajetórias de duas cadeias de Markov seguindo o mesmo núcleo  $M$  mas com

pontos iniciais  $x, y$  possivelmente diferentes. Faria sentido exigir uma condição de consistência, por exemplo  $(r_s)_* \Pi_{x,y}^t = \Pi_{x,y}^s$  sempre que  $s < t$ , onde  $r_s : \Omega^t \rightarrow \Omega^s$  é a restrição às primeiras  $s$  coordenadas. Entretanto, não precisaremos de tal condição.

**Definição 3.1.2.** *Um acoplamento  $\mathbf{P} = (\Pi_{x,y}^t)_{t,x,y}$  (possivelmente restrito ao tempo  $i$ ) do núcleo de transição  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  é dito ser  $\omega$ -Hölder se existe uma contante  $C$  tal que para todo  $t$  (somente  $t = i$  no caso restrito) e todo  $x, y$ ,*

$$\int \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) \leq C \omega \circ d(x, y).$$

*Também dizemos que um acoplamento completo é  $\omega$ -Hölder no passo  $i$  se sua restrição a  $t = i$  é  $\omega$ -Hölder.*

**Definição 3.1.3.** *Um acoplamento completo  $\mathbf{P}$  é dito ter  $\omega$ -taxa de decaimento  $F$ , onde  $F$  é uma função de decaimento, se para todo  $t$  e todo  $x, y$  vale*

$$\int \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) \leq F(t, \omega \circ d(x, y)).$$

**Definição 3.1.4** (Hipótese de decaimento). *Uma condição que nos possibilitará efetuar nossos propósitos é: para  $\Pi_{x,y}^t$ -quase todo ponto em  $\Omega^t \times \Omega^t$*

$$\omega \circ d(x_t, y_t) \leq G(t) \omega \circ d(x, y) \tag{3.1}$$

*para alguma função  $G$  com  $G(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em outras palavras,  $\omega \circ d(x_t, y_t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  proporcionalmente a  $\omega \circ d(x, y)$ .*

Sejam  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição,  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\mathbf{M},0}$  o operador de transferência sem peso,  $\omega$  um módulo de continuidade e  $F$  uma função de decaimento. Então a concavidade assegura que para obtermos o decaimento nas medidas de probabilidade basta checar o decaimento somente nas medidas delta de Dirac.

**Lema 3.1.5.** *Se  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  é um acoplamento de  $\mathbf{M}$  com  $\omega$ -taxa de decaimento  $F$ , então*

$$W_\omega(\mathcal{L}_0^{*t} \mu, \mathcal{L}_0^{*t} \nu) \leq F(t, W_\omega(\mu, \nu)) \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega).$$

*Em outras palavras,  $\mathcal{L}_0^*$  também tem taxa de decaimento  $F$  na métrica  $W_\omega$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Pi^0$  um acoplamento ótimo de  $\mu$  e  $\nu$  para o custo  $\omega \circ d$ ; então

$$\Pi := \int_{(x,y) \in \Omega \times \Omega} ((e_t, e_t)_* d\Pi_{x,y}^t) d\Pi^0(x, y) \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$$

é um acoplamento de  $\mathcal{L}_0^{*t}\mu$  e  $\mathcal{L}_0^{*t}\nu$ , de forma que temos

$$\begin{aligned} W_\omega(\mathcal{L}_0^{*t}\mu, \mathcal{L}_0^{*t}\nu) &\leq \int \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi(x_t, y_t) \\ &= \iint \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) d\Pi^0(x, y) \\ &\leq \int F(t, \omega \circ d(x, y)) d\Pi^0(x, y) \\ &\leq F\left(t, \int \omega \circ d(x, y) d\Pi^0(x, y)\right) \\ &\leq F(t, W_\omega(\mu, \nu)) \end{aligned}$$

em que na penúltima linha usamos que  $F(t, \cdot)$  é côncava.  $\square$

### 3.1.1 POTENCIAL FLAT

Dado um núcleo de transição  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$ , se encontrarmos um acoplamento  $\mathbf{P} = (\Pi_{x,y}^t)_{t,x,y}$  com um bom decaimento, isso nos dá uma cota da forma

$$W_\omega(m_x^t, m_y^t) \leq F(t, \omega \circ d(x, y)),$$

que se traduzirá em um controle similar para o operador não ponderado  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},0}$  agindo sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Para estender isso ao operador ponderado  $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$ , exigiremos que o potencial  $f$  tenha uma qualidade especial. Sabemos que  $\mathcal{L}_f^t$  pode ser expresso em termos da soma de Birkhoff:

$$\mathcal{L}_f^t \varphi(x) = \int e^{f^t(\bar{x})} \varphi(x_t) dm_x^t(\bar{x})$$

em que  $f^t : \Omega^t \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f^t(\bar{x}) = f^t(x_1, \dots, x_t) = f(x_1) + \dots + f(x_t)$ .

**Exemplo 3.1.6.** *Considere o operador shift sobre  $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  com medida de probabilidade a priori  $\mu$ . Neste caso, a  $n$ -ésima iterada do operador de transferência é dado*

por

$$\mathcal{L}_f^n \varphi(x) = \int_{[0,1]^n} e^{\sigma_n f(\mathbf{a}x)} \varphi(\mathbf{a}x) d\mu^n(\mathbf{a}),$$

onde  $\mathbf{a} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) \in [0, 1]^n$ ,

$$\sigma_n f(\mathbf{a}x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k(\mathbf{a}x)) \quad e \quad d\mu^n(\mathbf{a}) = d\mu(a_n) \cdots d\mu(a_1).$$

Para cada  $x \in \Omega$  consideremos  $m_x = \mu \times \delta_x$ . Então, tomando  $n = 2$  para não carregar a notação, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M},f}^2 \varphi(x) &= \int_{\Omega \times \Omega} e^{f^2(x_1, x_2)} \varphi(x_2) dm_x^2(x_1, x_2) \\ &= \int_{([0,1]^{\mathbb{N}}) \times ([0,1]^{\mathbb{N}})} e^{f^2(x_1, x_2)} \varphi(x_2) dm_{x_1}(x_2) dm_x(x_1) \\ &= \int_{([0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}) \times ([0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}})} e^{f^2(a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2)} \varphi(a_2 \alpha_2) dm_{a_1 \alpha_1}(a_2 \alpha_2) dm_x(a_1 \alpha_1) \\ &= \int_{([0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}) \times ([0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}})} e^{f^2(a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2)} \varphi(a_2 \alpha_2) d\mu(a_2) d\delta_{a_1 \alpha_1}(\alpha_2) d\mu(a_1) \delta_x(\alpha_1) \\ &= \int_{([0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}) \times ([0,1])} e^{f^2(a_1 \alpha_1, a_2 a_1 \alpha_1)} \varphi(a_2 a_1 \alpha_1) d\mu(a_2) d\mu(a_1) \delta_x(\alpha_1) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,1]} e^{f^2(a_1 x, a_2 a_1 x)} \varphi(a_2 a_1 x) d\mu(a_2) d\mu(a_1) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,1]} e^{f(a_2 a_1 x) + f(a_1 x)} \varphi(a_2 a_1 x) d\mu(a_2) d\mu(a_1) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,1]} e^{f(a_2 a_1 x) + f(\sigma(a_2 a_1 x))} \varphi(a_2 a_1 x) d\mu(a_2) d\mu(a_1). \end{aligned}$$

Ou seja, os iterados do operador de transferência para  $\mathbf{M} = (\mu \times \delta_x)_{x \in \Omega}$  coincidem com os iterados do operador de transferência com medida a priori. Para mais informações sobre esse tipo de operador, veja [5].

A próxima definição descreve a classe dos potenciais que desempenham um papel central neste trabalho.

**Definição 3.1.7** (Flat). *Seja  $\mathbf{P}$  um acoplamento fixado para o núcleo de transição  $\mathbf{M}$ . Dizemos que o potencial  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é flat (com respeito a  $\mathbf{P}$  e  $\omega$ ) sempre que para alguma constante  $C = C_f > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{N}$ , todo  $x, y \in \Omega$  e  $\Pi_{x,y}^t$ -quase todo  $(\bar{x}, \bar{y})$  vale*

$$|f^t(\bar{x}) - f^t(\bar{y})| \leq C\omega \circ d(x, y).$$

Veremos que esta condição nos permitirá provar o teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para  $\mathcal{L}_f$  se o acoplamento for adequado.

**Lema 3.1.8.** *Para qualquer potencial flat normalizado  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ , as somas de Birkhoff  $f^t(\bar{x})$  são limitadas por cima independentemente de  $t$  e  $\bar{x}$ .*

*Demonstração.* Tome qualquer  $x \in \Omega$ ; por normalização  $\int e^{f^t(\bar{x})} dm_x^t(\bar{x}) = 1$  e portanto existe para cada  $t$  algum  $\bar{x}^t \in \Omega^t$  tal que  $f^t(\bar{x}^t) \leq 0$ . Então pela propriedade flat, para todo  $\bar{x}$  vale  $f^t(\bar{x}) \leq C\omega(\text{diam}\Omega)$ .  $\square$

## 3.2 A CONTRAÇÃO DE $\mathbb{P}_n^m$

Nesta seção, mostraremos que as iteradas do operador de Ruelle de  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  tal que o acoplamento  $\mathbf{P}$  satisfaz a hipótese (3.1) age continuamente sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ , ou seja,  $\mathbf{M}$  é compatível com  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Na sequência, usaremos as ideias em [7, 20, 27] para mostrar a contração, na métrica de Wasserstein, para um operador relacionado com o operador de Ruelle de  $\mathbf{M}$ .

Como  $f$  é flat, existe  $C_f$  tal que

$$|1 - e^{f^n(\bar{y}) - f^n(\bar{x})}| \leq C\omega \circ d(x, y) \text{ para } (\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t} \text{ - quase todo } (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega^n \times \Omega^n. \quad (3.2)$$

Usaremos a equação (3.2), para mostrarmos que  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}^n$  deixa  $\mathcal{C}^\omega$  invariante. Com isso, para  $f, \varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ , e  $x, y \in \Omega$  temos

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que o acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  satisfaz a hipótese (3.1)*

e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é um potencial flat. Então  $\mathcal{L}_{M,f}^n$  aplica  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  em si mesmo e vale

$$\text{Hol}_\omega(\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)) \leq C_f \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty \|\varphi\|_\infty + \text{Hol}_\omega(\varphi) e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(n) \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty.$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Então

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x) - \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(y) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi(x_n) dm_x^n(\bar{x}) - \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \varphi(y_n) dm_y^n(\bar{y}) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) - \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \varphi(y_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) - \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) - \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \varphi(y_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\ &= \left| \int_{(\Omega^n)^2} (e^{f^n(\bar{x})} - e^{f^n(\bar{y})}) \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) + \int_{(\Omega^n)^2} e^{f^n(\bar{y})} (\varphi(x_n) - \varphi(y_n)) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} (1 - e^{f^n(\bar{y}) - f^n(\bar{x})}) \varphi(x_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} (\varphi(x_n) - \varphi(y_n)) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\ &\leq \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} |1 - e^{f^n(\bar{y}) - f^n(\bar{x})}| |\varphi(x_n)| d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \quad + \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq C_f \omega \circ d(x, y) \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} |\varphi(x_n)| d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \quad + \text{Hol}_\omega(\varphi) \int_{\Omega^n \times \Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} e^{f^n(\bar{y}) - f^n(\bar{x})} \omega \circ d(x_n, y_n) d\Pi_{x,y}^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq C_f \omega \circ d(x, y) \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty \|\varphi\|_\infty + \text{Hol}_\omega(\varphi) e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(n) \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty \omega \circ d(x, y). \end{aligned}$$

Na antepenúltima linha usamos a hipótese (3.1). Portanto,

$$\text{Hol}_\omega(\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)) \leq C_f \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty \|\varphi\|_\infty + \text{Hol}_\omega(\varphi) e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(n) \|\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}\|_\infty. \quad \square$$

Ao invés de construir uma função  $\mathcal{L}_f$ -invariante através da aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli, o qual necessita de compacidade, e então normalizar  $\mathcal{L}_f$ , consideramos a família de operadores  $\{\mathbb{P}_n^m\}$  definidos, para  $m \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , por

$$\mathbb{P}_n^m(\varphi) \equiv \frac{\mathcal{L}_{M,f}^m(\varphi \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))}{\mathcal{L}_{M,f}^{m+n}(\mathbf{1})}.$$

**Afirmção 3.2.2.** *Assuma que  $M$  é backward para uma transformação  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . Então vale  $\mathcal{L}_{M,f}^p(\varphi \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})) = \mathcal{L}_{M,f}^{p+n}(\varphi \circ T^n)$ .*

*Demonstração.* Por definição temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,f}^p(\varphi \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))(x) &= \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) \mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1})(x_p) dm_x^p(\bar{x}) \\ &= \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) \mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1})(x_p) dm_{x_{p-1}}(x_p) \cdots dm_{x_1}(x_2) dm_x(x_1). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x_p) &= \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \mathbf{1}(x_{n+p}) dm_{x_p}^n(\bar{y}) \\ &= \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \mathbf{1}(x_{n+p}) dm_{x_{p+n-1}}(x_{p+n}) \cdots dm_{x_{p+1}}(x_{p+2}) dm_{x_p}(x_{p+1}). \end{aligned}$$

Então, por Fubini,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,f}^p(\varphi \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))(x) &= \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) \mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1})(x_p) dm_x^p(\bar{x}) \\ &= \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) \left[ \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{y})} \mathbf{1}(x_{n+p}) dm_{x_p}^n(\bar{y}) \right] dm_x^p(\bar{x}) \\ &= \int_{\Omega^p} \int_{\Omega^n} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) e^{f^n(\bar{y})} dm_{x_p}^n(\bar{y}) dm_x^p(\bar{x}). \end{aligned}$$

Note que

$$dm_x^p(x_1, \dots, x_p) = dm_{x_{p-1}}(x_p) \cdots dm_{x_1}(x_2) dm_x(x_1)$$



$$dm_{x_p}^n(x_{p+1}, \dots, x_{p+n}) = dm_{x_{p+n-1}}(x_{p+n}) \cdots dm_{x_{p+1}}(x_{p+2}) dm_{x_p}(x_{p+1}).$$

Fazendo  $\bar{z} = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+n})$ , obtemos  $e^{f^p(\bar{x})} e^{f^p(\bar{y})} = e^{f^{p+n}(\bar{z})}$  e

$$\begin{aligned} & dm_x^{p+n}(\bar{z}) \\ &= dm_{x_{p+n-1}}(x_{p+n}) \cdots dm_{x_{p+1}}(x_{p+2}) dm_{x_p}(x_{p+1}) dm_{x_{p-1}}(x_p) \cdots dm_{x_1}(x_2) dm_x(x_1). \end{aligned}$$

Como por hipótese podemos trocar  $\varphi(x_p) = \varphi(T^n(x_{n+p}))$ , segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,f}^p(\varphi \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))(x) &= \int_{\Omega^p} \int_{\Omega^n} e^{f^p(\bar{x})} \varphi(x_p) e^{f^n(\bar{y})} dm_{x_p}^n(\bar{y}) dm_x^p(\bar{x}) \\ &= \int_{\Omega^p \times \Omega^n} e^{f^{p+n}(\bar{z})} \varphi(T^n(x_{p+n})) dm_x^{p+n}(\bar{z}) \\ &= \mathcal{L}_{M,f}^{p+n}(\varphi \circ T^n). \end{aligned} \quad \square$$

Observe que, por construção,  $\mathbb{P}_n^p(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  e  $\mathbb{P}_{k+l}^p \circ \mathbb{P}_l^k = \mathbb{P}_l^{k+p}$ .

**Lema 3.2.3.** *Seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que o acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  satisfaz a hipótese (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é um potencial flat. Então o operador  $\mathbb{P}_n^p$  deixa  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  invariante e vale*

$$\text{Hol}_\omega(\mathbb{P}_n^p(\varphi)) \leq 2C_f \|\varphi\|_\infty + e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(p) \text{Hol}_\omega(\varphi).$$

*Demonstração.* Vamos omitir a dependência em  $M$ .

$$\begin{aligned} & |\mathbb{P}_n^p(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^p(\varphi)(y)| \\ &= \left| \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(x)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)} - \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y)} \right| \\ &= \left| \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(x)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)} - \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)} + \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)} - \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y)} \right| \\ &\leq \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(x) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} \\ &\quad + \left| \frac{\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y) \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y) \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)}{\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x) \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(x) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} \\
&\quad + \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y)|} \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} \\
&\leq \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(x) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\varphi \circ T^n)(y)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} \\
&\quad + \mathbb{P}_n^p(|\varphi|)(y) \frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|}.
\end{aligned}$$

Fazendo  $\varphi = \mathbf{1}$  na Proposição 3.2.1 obtemos

$$\frac{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(y) - \mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} \leq C_f \omega \circ d(x, y). \quad (3.3)$$

Por definição e pela desigualdade triangular para integrais, temos que

$$\mathbb{P}_n^p(|\varphi|)(y) \leq \|\varphi\|_\infty. \quad (3.4)$$

Segue também da Proposição 3.2.1

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{L}_f^p(\varphi \circ T^n)(x) - \mathcal{L}_f^p(\varphi \circ T^n)(y)|}{|\mathcal{L}_f^{p+n}(\mathbf{1})(x)|} &\leq C_f \omega \circ d(x, y) \|\varphi\|_\infty \\
&\quad + \text{Hol}_\omega(\varphi) e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(p) \omega \circ d(x, y).
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Combinando (3.3), (3.4) e (3.5) obtemos

$$\text{Hol}_\omega(\mathbb{P}_n^p(\varphi)) \leq 2C_f \|\varphi\|_\infty + e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} G(p) \text{Hol}_\omega(\varphi).$$

□

**Observação 3.2.4.** *O dual do operador  $\mathbb{P}_n^p(\varphi)$  age sobre o espaço das medidas de probabilidade  $\mathcal{P}(\Omega)$  pela relação*

$$\int f d(\mathbb{P}_n^p)^*(\nu) = \int \mathbb{P}_n^p(f) d\nu, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}).$$

Seja  $\tilde{d}(x, y) := \min\{1, \alpha \omega \circ d(x, y)\}$ , com  $\alpha$  a ser determinado. Sejam  $W_{\tilde{d}}$  e  $\text{Hol}_{\tilde{d}}$  as correspondentes distância de Wasserstein e constante de Hölder referentes a  $\tilde{d}$ , respectivamente. Podemos verificar que  $\omega \circ d \leq \tilde{d} \leq \alpha \omega \circ d$  e isto implica que  $W_\omega \leq W_{\tilde{d}} \leq \alpha W_\omega$  e  $\text{Hol}_{\tilde{d}} \leq \text{Hol}_\omega \leq \alpha \text{Hol}_{\tilde{d}}$ , veja [7, 20].

**Teorema 3.2.5.** *Seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que o acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  satisfaz a hipótese (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é um potencial flat. Então existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  e  $s \in (0, 1)$  tal que, para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  com  $p \geq k_0$ , quaisquer medidas de Borel de probabilidade  $\mu, \nu$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ ,*

$$W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^p)^*(\mu), (\mathbb{P}_n^p)^*(\nu)) = s^p W_{\tilde{d}}(\mu, \nu) \quad (3.6)$$

$$\text{Hol}_{\tilde{d}}(\mathbb{P}_n^p)(\varphi) \leq s^p \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi). \quad (3.7)$$

*Demonstração.* A demonstração será dada em quatro passos.

- (1) **Contração local.** Vamos assumir que  $\tilde{d}(x, y) < 1$ ,  $x \neq y$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Como  $\varphi$  é limitada, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\inf_y \varphi(y) = 0$ . Com isso, fixado  $y$ , temos

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y)| \leq \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \tilde{d}(x, y) + |\varphi(y)| \leq \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) + |\varphi(y)|.$$

Daí,

$$\|\varphi\|_\infty \leq \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) + |\varphi(y)| \leq \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) + \inf_y |\varphi(y)| = \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi). \quad (3.8)$$

Note que  $\tilde{d}(x, y) < 1$  implica que  $\tilde{d}(x, y) = \alpha \omega \circ d(x, y)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) &= \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\tilde{d}(x, y)} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\alpha \omega \circ d(x, y)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\omega \circ d(x, y)} = \frac{\text{Hol}_\omega(\varphi)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pelo Lema 3.2.3 e pelas equações (3.8) e (3.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbb{P}_n^p(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^p(\varphi)(y)|}{\tilde{d}(x, y)} &\leq \frac{(2C_f \|\varphi\|_\infty + G(p) \text{Hol}_\omega(\varphi)) \omega \circ d(x, y)}{\tilde{d}(x, y)} \\ &= \frac{(2C_f \|\varphi\|_\infty + G(p) \text{Hol}_\omega(\varphi)) \omega \circ d(x, y)}{\alpha \omega \circ d(x, y)} \\ &= \frac{2C_f \|\varphi\|_\infty + G(p) \text{Hol}_\omega(\varphi)}{\alpha} \\ &= \frac{2C_f \|\varphi\|_\infty}{\alpha} + G(p) \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2C_f \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)}{\alpha} + G(p) \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi).$$

Como  $G(p) \rightarrow 0$ , existe um  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $G(p) \leq 1/4$  para todo  $p \geq k_0$ .

Tomando  $\alpha = 4C_f$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbb{P}_n^p(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^p(\varphi)(y)|}{\tilde{d}(x, y)} &\leq \frac{2C_f \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)}{4C_f} + G(p) \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \\ &= \frac{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)}{2} + G(p) \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \\ &\leq \frac{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)}{2} + \frac{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)}{4} \\ &= \frac{3}{4} \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora, usando a dualidade de Kantorovich (2.3) e a equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_x), (\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_y)) &= \sup_{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \leq 1} |(\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_x)(\varphi) - (\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_y)(\varphi)| \\ &= \sup_{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \leq 1} \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_x) - \int \varphi d(\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_y) \right| \\ &= \sup_{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \leq 1} \left| \int \mathbb{P}_n^p(\varphi) d\delta_x - \int \mathbb{P}_n^p(\varphi) d\delta_y \right| \\ &= \sup_{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \leq 1} |\mathbb{P}_n^p(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^p(\varphi)(y)| \\ &\leq \sup_{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \leq 1} \left[ \frac{3}{4} \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \tilde{d}(x, y) \right] \\ &\leq \frac{3}{4} \tilde{d}(x, y) \\ &= \frac{3}{4} W_{\tilde{d}}(\delta_x, \delta_y). \end{aligned}$$

Sejam  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ . No Lema 2.3.11, tomemos  $\mathcal{L}^* = (\mathbb{P}_n^p)^*$  e  $\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)$  um plano ótimo relativo ao custo  $\tilde{d}(x, y)$ . Então

$$\begin{aligned} W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^p)^*\mu, (\mathbb{P}_n^p)^*\nu) &\leq \int_{\Omega \times \Omega} W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_x), (\mathbb{P}_n^p)^*(\delta_y)) d\Pi(x, y) \\ &\leq \frac{3}{4} \int_{\Omega \times \Omega} W_{\tilde{d}}(\delta_x, \delta_y) d\Pi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \int_{\Omega \times \Omega} \tilde{d}(x, y) d\Pi(x, y) \\
&= \frac{3}{4} W_{\tilde{d}}(\mu, \nu).
\end{aligned}$$

(2) **Contração global.** Assuma que  $\tilde{d}(x, y) = 1$ ,  $x \neq y$ . Além disso, para cada  $p \in \mathbb{N}$  definamos a seguinte medida  $R_{x,y}^p$  sobre  $\Omega \times \Omega$  dada por

$$R_{x,y}^p = \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} \delta_{(e_p(\bar{x}), e_p(\bar{y}))} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_{M,f}\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_{M,f}\mathbf{1}(y)\}},$$

onde  $e_n$  denota a projeção na  $n$ -ésima coordenada. Na próxima expressão vamos omitir a dependência de  $\mathcal{L}$  em  $M$  para não sobrecarregar a notação. Note que

$$\begin{aligned}
R_{x,y}^p(\Omega \times \Omega) &= \int_{\Omega \times \Omega} 1_{\Omega \times \Omega}(u, v) dR_{x,y}^p(u, v) \\
&= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} \int_{\Omega \times \Omega} 1_{\Omega \times \Omega}(u, v) d\delta_{(e_p(\bar{x}), e_p(\bar{y}))}(u, v) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} 1_{\Omega \times \Omega}(x_p, y_p) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&\leq \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&= \frac{\int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} dm_x^p(\bar{x})}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&= \frac{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x)}{\max\{\mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p\mathbf{1}(y)\}} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma medida positiva  $Q_{x,y}$  sobre  $\Omega \times \Omega$  tal que  $Q_{x,y}^p := R_{x,y}^p + Q_{x,y}$

é um plano de transporte em  $\Gamma(\delta_x, \delta_y)$ . De fato, tome  $Q_{x,y}(A \times B) = \delta_{(x,y)}(A \times B) - R_{x,y}^p(A \times B)$ , se  $(x, y) \in A \times B$  e  $Q_{x,y}(A \times B) = 0$  caso contrário.

Seja

$$\Delta_p = \{(u, v) \in \Omega \times \Omega : \tilde{d}(u, v) \leq \alpha G(p)\omega \circ d(x, y)\}.$$

Como  $f$  é flat, então para  $\Pi_{x,y}^p$ -quase todo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega^p \times \Omega^p$  temos

$$e^{-C_f \omega \circ d(x,y)} \leq e^{f^p(\bar{y}) - f^p(\bar{x})} \leq e^{C_f \omega \circ d(x,y)}.$$

Dai,  $e^{f^p(\bar{y})} \leq e^{C_f \omega \circ d(x,y)} e^{f^p(\bar{x})}$ . Integrando em relação a  $\Pi_{x,y}^p$ ,

$$\int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{y})} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y}) \leq e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y}).$$

Da definição de plano de transporte entre  $m_y^p$  e  $m_x^p$  temos

$$\int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{y})} dm_y^p(\bar{y}) \leq e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} dm_x^p(\bar{x})$$

e portanto,  $\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y) \leq e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\} &\leq \max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x)\} \\ &= e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \geq \frac{1}{e^{C_f \omega \circ d(x,y)} \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x)}.$$

Usando a desigualdade acima e o fato que para  $\Pi_{x,y}^p$ -quase todo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega^p \times \Omega^p$  temos que  $1_{\Delta_p}(x_p, y_p) = 1$ , temos

$$\begin{aligned} R_{x,y}^p(\Delta_p) &= \int_{\Omega \times \Omega} 1_{\Delta_p}(u, v) dR_{x,y}^p(u, v) \\ &= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} \int_{\Omega \times \Omega} 1_{\Delta_p}(u, v) d\delta_{(e_p(\bar{x}), e_p(\bar{y}))}(u, v) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\ &= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{y})}\} 1_{\Delta_p}(x_p, y_p) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} \min\{e^{f^p(\bar{x})}, e^{f^p(\bar{x})} e^{f^p(\bar{y}) - f^p(\bar{x})}\} 1_{\Delta_p}(x_p, y_p) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&\geq \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} e^{-|f^p(\bar{y}) - f^p(\bar{x})|} 1_{\Delta_p}(x_p, y_p) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&\geq e^{-C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} 1_{\Delta_p}(x_p, y_p) d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&= e^{-C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \frac{\int_{\Omega^p \times \Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} d\Pi_{x,y}^p(\bar{x}, \bar{y})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&= \frac{e^{-C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \int_{\Omega^p} e^{f^p(\bar{x})} dm_x^p(\bar{x})}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&= e^{-C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \frac{\mathcal{L}_f \mathbf{1}(x)}{\max\{\mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(x), \mathcal{L}_f^p \mathbf{1}(y)\}} \\
&\geq e^{-C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \frac{\mathcal{L}_f \mathbf{1}(x)}{e^{C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \mathcal{L}_f \mathbf{1}(x)} \\
&= e^{-2C_f \omega_{\text{od}}(x,y)} \\
&\geq e^{-2C_f \omega(\text{diam}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos o fato que  $\omega$  é crescente. Com isso,

$$\begin{aligned}
W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_x), (\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_y)) &\leq \int_{\Omega \times \Omega} \tilde{d}(u, v) dQ_{x,y}^m(u, v) \\
&= \int_{\Delta_m} \tilde{d}(u, v) dQ_{x,y}^m(u, v) + \int_{\Delta_m^c} \tilde{d}(u, v) dQ_{x,y}^m(u, v) \\
&\leq \alpha G(m) Q_{x,y}^m(\Delta_m) + Q_{x,y}^m(\Delta_m^c) \\
&= \alpha G(m) Q_{x,y}^m(\Delta_m) + 1 - Q_{x,y}^m(\Delta_m) \\
&= 1 + (\alpha G(m) - 1) Q_{x,y}^m(\Delta_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - (1 - \alpha G(m)) Q_{x,y}^m(\Delta_m) \\
&= 1 - (1 - \alpha G(m)) R_{x,y}^m(\Delta_m) \\
&= 1 - \frac{1 - \alpha G(m)}{e^{2C_f \omega(\text{diam}(\Omega))}} \\
&= \left( 1 - \frac{1 - \alpha G(m)}{e^{2C_f \omega(\text{diam}(\Omega))}} \right) \tilde{d}(x, y).
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $m$  tal que  $\alpha G(m) < 1$ , temos uma contração.

(3) **Combinando (1) e (2).** Para  $k_0$  tal que  $\alpha G(k_0) < 1$  fixado, seja

$$s := \max\{3/4, 1 - (1 - \alpha G(k_0))e^{-2C_f \omega(\text{diam}(\Omega))}\}.$$

Então, as partes (1) e (2) implicam que

$$W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_x), (\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_y)) \leq s W_{\tilde{d}}(\delta_x, \delta_y) \quad \text{para todo } m \geq k_0. \quad (3.11)$$

Da dualidade de Kantorovich, como mostrado em (3.12), segue  $\text{Hol}_{\tilde{d}} \circ \mathbb{P}_n^m \leq s \text{Hol}_{\tilde{d}}$ . Usamos o Lema 2.3.11 mais uma vez para mostrar que (3.11) vale para toda medida de probabilidade de Borel. Portanto, mostramos que, se  $k \geq k_0$ , então

$$W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^k)^*(\cdot), (\mathbb{P}_n^k)^*(\cdot)) \leq s W_{\tilde{d}}(\cdot, \cdot).$$

(4) **Iterações.** Primeiramente observe que  $\mathbb{P}_n^m = \mathbb{P}_{n+j}^{m-j} \circ \mathbb{P}_n^j$ , for  $j, m, n \in \mathbb{N}$  com  $m > j$ . Por indução, isto implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n^{kl+j} &= \mathbb{P}_{n+j}^{kl} \circ \mathbb{P}_n^j = \mathbb{P}_{n+k+j}^{k(l-1)} \circ \mathbb{P}_{n+j}^k \circ \mathbb{P}_n^j \\
&= \mathbb{P}_{n+2k+j}^{k(l-2)} \circ \mathbb{P}_{n+k+j}^k \circ \mathbb{P}_{n+j}^k \circ \mathbb{P}_n^j \\
&= \mathbb{P}_{n+kl+j}^k \circ \mathbb{P}_{n+k(l-1)+j}^k \circ \cdots \circ \mathbb{P}_{n+2k+j}^k \circ \mathbb{P}_{n+j}^k \circ \mathbb{P}_n^j.
\end{aligned}$$

Com  $k := k_0$  e  $m, l, j$  tais que  $m \geq k_0$ ,  $m = kl + j$  e  $k_0 \leq j < 2k_0$ , a aplicação iterada com a propriedade de contração na Parte (3) mostra que

$$W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^m)^*(\cdot), (\mathbb{P}_n^m)^*(\cdot)) \leq s^{l+1} W_{\tilde{d}}(\cdot, \cdot).$$

A afirmação (3.6) segue substituindo  $s$  por  $s^{1/2k_0}$ .



Aplicando mais uma vez a dualidade de Kantorovich e (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}_n^m(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^m(\varphi)(y)| &= \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_n^m)^* \delta_x - \int \varphi d(\mathbb{P}_n^m)^* \delta_y \right| \\
&= \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \left| \int \frac{\varphi}{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)} d(\mathbb{P}_n^m)^* \delta_x - \int \frac{\varphi}{\text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi)} d(\mathbb{P}_n^m)^* \delta_y \right| \\
&= \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) W_{\tilde{d}}((\mathbb{P}_n^m)^* \delta_x, (\mathbb{P}_n^m)^* \delta_y) \\
&\leq s^m \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) W_{\tilde{d}}(\delta_x, \delta_y) \\
&= s^m \text{Hol}_{\tilde{d}}(\varphi) \tilde{d}(x, y), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

donde (3.7) segue. □

Como consequência imediata, temos o seguinte corolário que será útil no próximo resultado.

**Corolário 3.2.6.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a aplicação*

$$\nu^{(n)} : \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.13}$$

*definida por  $\nu^{(n)}(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n^m(\varphi)(x)$ , é uma medida de probabilidade Boreliana.*

*Demonstração.* Segue de (3.7) que  $\text{Hol}_\omega(\mathbb{P}_n^m(\varphi))$  tende a 0 quando  $m \rightarrow \infty$ . Como

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}_n^m(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^m(\varphi)(y)| &\leq \text{Hol}_\omega(\mathbb{P}_n^m(\varphi)) \omega \circ d(x, y) \\
&\leq C s^m \text{Hol}_\omega(\varphi) \omega \circ d(x, y), \tag{3.14}
\end{aligned}$$

então  $|\mathbb{P}_n^m(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^m(\varphi)(y)| \rightarrow 0$  independentemente de  $x$  e  $y$ . Por outro lado, usando a identidade  $\mathbb{P}_n^m = \mathbb{P}_{n+j}^{m-j} \circ \mathbb{P}_n^j$ , a dualidade de Kantorovich e o Lema 2.3.7, obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}_n^{m+k}(\varphi)(x) - \mathbb{P}_n^k(\varphi)(x)| &= \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_n^{m+k})^* \delta_x - \int \varphi d(\mathbb{P}_n^k)^* \delta_x \right| \\
&= \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_{n+k}^m \circ \mathbb{P}_n^k)^* \delta_x - \int \varphi d(\mathbb{P}_n^k)^* \delta_x \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_n^k)^*((\mathbb{P}_{n+k}^m))^*\delta_x - \int \varphi d(\mathbb{P}_n^k)^*\delta_x \right| \\
&= \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_n^k)^*((\mathbb{P}_{n+k}^m))^*\delta_x, (\mathbb{P}_n^k)^*\delta_x) \\
&\leq s^k \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_{n+k}^m)^*\delta_x, \delta_x) \\
&\leq s^k C \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi),
\end{aligned}$$

ou seja,  $\{\mathbb{P}_n^m(\varphi)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy, e por completude, convergente. Portanto,  $\mathbb{P}_n^m(\varphi)(x)$  converge para uma função constante. Por outro lado, segue de (3.6) que para toda medida de probabilidade de Borel  $\nu_0$ ,  $(\mathbb{P}_n^m)^*(\nu_0)$  converge fracamente para alguma medida de probabilidade de Borel  $\mu^{(n)}$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . Para cada  $x \in \Omega$  denotemos por  $\nu^{(n)}$  o limite fraco de  $(\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_x)$ . Com isso, para cada  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$ , temos

$$\nu^{(n)}(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_n^m)^*(\delta_x)(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_x(\mathbb{P}_n^m(\varphi)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n^m(\varphi)(x). \quad \square$$

### 3.3 TEOREMA DE RUELLE-PERRON-FROBENIUS

Para facilitar a notação, denotaremos

$$\nu = \nu^{(0)}. \quad (3.15)$$

**Lema 3.3.1.** *Para todo  $m \in \mathbb{N}$  vale  $(\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(m)}) = \nu^{(0)}$ .*

*Demonstração.* De fato, para toda função  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi d(\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(m)}) &= \int_{\Omega} \mathbb{P}_0^m(\varphi) d\nu^{(m)} \\
&= \nu^{(m)}(\mathbb{P}_0^m(\varphi))(x) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_m^k(\mathbb{P}_0^m(\varphi))(x) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_f^k(\mathbb{P}_0^m(\varphi)(x) \mathcal{L}_f^m \mathbf{1}(x))}{\mathcal{L}_f^{m+k} \mathbf{1}(x)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_f^k \left( \frac{\mathcal{L}_f^m(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_f^m \mathbf{1}(x)} \mathcal{L}_f^m \mathbf{1}(x) \right)}{\mathcal{L}_f^{m+k} \mathbf{1}(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_f^k(\mathcal{L}_f^m(\varphi)(x))}{\mathcal{L}_f^{m+k}\mathbf{1}(x)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_f^{m+k}(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_f^{m+k}\mathbf{1}(x)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_f^{m+k}(\varphi(x)\mathcal{L}_f^0\mathbf{1}(x))}{\mathcal{L}_f^{m+k}\mathbf{1}(x)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^{m+k}\varphi(x) \\
&= \nu^{(0)}\varphi(x) \\
&= \int_{\Omega} \varphi \, d\nu^{(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(m)}) = \nu^{(0)}$ . □

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que o acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  satisfaz a hipótese (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é um potencial flat. Seja  $\nu$  dada pelo Lema 3.3.1. Então existe uma constante  $C > 0$  e  $s \in (0, 1)$  tais que, para quaisquer  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  com  $\psi > 0$ ,*

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_f^n(\varphi)}{\mathcal{L}_f^n(\psi)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right\|_{\omega} \leq C s^n \left( \text{Hol}_{\omega}(\varphi) + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \text{Hol}_{\omega}(\psi) \right) \|1/\psi\|_{\infty}. \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Primeiro, note que

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y} \left( (x-a) - \frac{a(y-b)}{b} \right).$$

Dai,

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{1}{y} \right| \left( |x-a| + \left| \frac{a}{b} \right| |y-b| \right).$$

Usando a desigualdade acima, podemos escrever

$$\left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)} - \frac{\int \varphi \, d\nu}{\int \psi \, d\nu} \right| = \left| \frac{\frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n\mathbf{1}(x)}}{\frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n\mathbf{1}(x)}} - \frac{\int \varphi \, d\nu}{\int \psi \, d\nu} \right| = \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(x)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(x)} - \frac{\int \varphi \, d\nu}{\int \psi \, d\nu} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(x)} \left( \left| \mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \int \varphi d\nu \right| + \left| \frac{\int \varphi d\nu}{\int \psi d\nu} \right| \left| \mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \int \psi d\nu \right| \right) \\ &\leq \|1/\psi\|_\infty \left( \left| \mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \int \varphi d\nu \right| + \left| \frac{\int \varphi d\nu}{\int \psi d\nu} \right| \left| \mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \int \psi d\nu \right| \right). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3.1 temos  $(\mathbb{P}_0^n)^*(\nu^{(m)}) = \nu$ . Para  $n \geq k_0$ , obtemos, aplicando a dualidade de Kantorovich (2.3), o Lema 2.3.7 e desigualdade (3.6)

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \int \varphi d\nu \right| &= \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_0^n)^*(\delta_x) - \int \varphi d(\mathbb{P}_0^n)^*(\nu^{(n)}) \right| \\ &= \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \left| \int \frac{\varphi}{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi)} d(\mathbb{P}_0^n)^*(\delta_x) - \int \frac{\varphi}{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi)} d(\mathbb{P}_0^n)^*(\nu^{(n)}) \right| \\ &\leq \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_0^n)^*(\delta_x), (\mathbb{P}_0^n)^*(\nu^{(n)})) \\ &\leq \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) s^n W_{\bar{d}}(\delta_x, \nu) \leq C \text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) s^n. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left| \mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \int \psi d\nu \right| \leq C \text{Hol}_{\bar{d}}(\psi) s^n.$$

Como  $\text{Hol}_{\bar{d}} \leq \text{Hol}_\omega$ , temos

$$\left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)} - \frac{\int \varphi d\nu}{\int \psi d\nu} \right| \leq \|1/\psi\|_\infty \left( C \text{Hol}_\omega(\varphi) s^n + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n \right)$$

e portanto

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)} - \frac{\int \varphi d\nu}{\int \psi d\nu} \right\|_\infty \leq C s^n \left( \text{Hol}_\omega(\varphi) + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \text{Hol}_\omega(\psi) \right) \|1/\psi\|_\infty.$$

Logo a estimativa (3.16) segue para a norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Agora vamos obter uma estimativa para  $\text{Hol}_\omega(\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)/\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi))$ . Isto segue procedendo como acima substituimos  $\int \varphi d\nu / \int \psi d\nu$  por  $\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(y) / \mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(y)$ . Com isso, usando (3.7) como em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(y)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(y)} \right| = \left| \frac{\frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(x)} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(y)}{\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(y)}}{\frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(x)} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(y)}{\mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(y)}}} \right| = \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| \\
& \leq \frac{1}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(x)} \left( \left| \mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\varphi)(y) \right| + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| \left| \mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\psi)(y) \right| \right) \\
& \leq \|1/\psi\|_\infty \left( \left| \mathbb{P}_0^n(\varphi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\varphi)(y) \right| + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| \left| \mathbb{P}_0^n(\psi)(x) - \mathbb{P}_0^n(\psi)(y) \right| \right) \\
& \leq \|1/\psi\|_\infty \left( C s^n \text{Hol}_\omega(\varphi) \omega \circ d(x, y) + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| C s^n \text{Hol}_\omega(\psi) \omega \circ d(x, y) \right).
\end{aligned}$$

Note que

$$\left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| = \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} + \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \leq \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right|,$$

Então, fazendo  $a = \|1/\psi\|_\infty$ ,  $b = C s^n \text{Hol}_\omega(\varphi) \omega \circ d(x, y)$  e  $c = C s^n \text{Hol}_\omega(\psi) \omega \circ d(x, y)$  temos que

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(x)} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)(y)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)(y)} \right| \leq a \left( b + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} \right| c \right) \\
&\leq a \left( b + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c \right).
\end{aligned}$$

Note que o lado direito da desigualdade acima pode ser estimado como segue

$$\begin{aligned}
& a \left( b + \left| \frac{\mathbb{P}_0^n(\varphi)(y)}{\mathbb{P}_0^n(\psi)(y)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c \right) \\
&\leq a \left( b + \|1/\psi\|_\infty \left( C \text{Hol}_\omega(\varphi) s^n + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n \right) c + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c \right) \\
&= a \left( b + \|1/\psi\|_\infty c C \text{Hol}_\omega(\varphi) s^n + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n c + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| c \right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{H(x, y)}{\omega \circ d(x, y)} &\leq \|1/\psi\|_\infty \left( C s^n \text{Hol}_\omega(\varphi) + \|1/\psi\|_\infty C s^n \text{Hol}_\omega(\psi) C \text{Hol}_\omega(\varphi) s^n \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n C s^n \text{Hol}_\omega(\psi) + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| C s^n \text{Hol}_\omega(\psi) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Cs^n \left( \text{Hol}_\omega(\varphi) (1 + \|1/\psi\|_\infty \text{Hol}_\omega(\psi) Cs^n) \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \text{Hol}_\omega(\psi) (C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n + 1) \right) \|1/\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Sejam  $C_1, C_2$  constantes tais que  $1 + \|1/\psi\|_\infty \text{Hol}_\omega(\psi) Cs^n \leq C_1$  e  $C \text{Hol}_\omega(\psi) s^n + 1 \leq C_2$  e seja  $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ . Com isso,

$$\text{Hol}_\omega \left( \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right) \leq CC_3 s^n \left( \text{Hol}_\omega(\varphi) + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \text{Hol}_\omega(\psi) \right) \|1/\psi\|_\infty.$$

Portanto

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\psi)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right\|_\omega \leq C(1 + C_3) s^n \left( \text{Hol}_\omega(\varphi) + \left| \frac{\nu(\varphi)}{\nu(\psi)} \right| \text{Hol}_\omega(\psi) \right) \|1/\psi\|_\infty.$$

□

**Teorema 3.3.3** (RPF). *Seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre um espaço Polonês  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que existe um acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  de  $M$  satisfazendo a condição (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é flat. Então  $\mathcal{L}_{M,f}$  satisfaz o Teorema de RPF sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é flat, temos

$$\sup_{x,y,n} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)} < \infty.$$

De fato, para  $\Pi_{x,y}^m$ -quase todo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega^m \times \Omega^m$  temos

$$e^{-C_f \omega(\text{diam} \Omega)} \leq e^{f^m(\bar{y}) - f^m(\bar{x})} \leq e^{C_f \omega(\text{diam} \Omega)}.$$

Integrando a desigualdade mais à direita com relação ao plano de transporte  $\Pi_{x,y}^n$ , obtemos

$$e^{-C_f \omega(\text{diam} \Omega)} \mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(x) \leq \mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(y) \leq e^{C_f \omega(\text{diam} \Omega)} \mathcal{L}_{M,f}^n \mathbf{1}(x).$$

Agora, integrando a desigualdade acima com relação à  $\nu$  e  $x$  vemos que a função

$$h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\int_\Omega \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x) d\nu} \tag{3.17}$$

é estritamente positiva. Vamos verificar que  $h$  está bem definida e é  $\omega$ -Hölder contínua. A ideia é usar equação (3.16) para mostrar que  $\{\mathcal{L}_f^n(\mathbf{1})(y)/\int_{\Omega} \mathcal{L}_f^n(\mathbf{1})d\nu\}_n$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Seja

$$a_n = \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu.$$

Afirmamos que  $a_{n+k}/a_n = a_k$  para todo  $k, n \in \mathbb{N}$ . De fato,

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1}) d\nu = \nu(\mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^m(\mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^m(\mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1}))}{\mathcal{L}_{M,f}^m(\mathbf{1})} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{m+k}(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))}{\mathcal{L}_{M,f}^{m+k}(\mathbf{1})} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{m+k}(\mathbf{1})}{\mathcal{L}_{M,f}^m(\mathbf{1})} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{m+k}(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))}{\mathcal{L}_{M,f}^{m+k}(\mathbf{1})} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^m(\mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1}))}{\mathcal{L}_{M,f}^m(\mathbf{1})} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^{m+k}(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})) \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^m(\mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1})) \\ &= a_n a_k, \end{aligned}$$

como queríamos.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\int \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})(x)}{\int \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1}) d\nu} \right| &= \frac{1}{a_n} \left| \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x) - \frac{\int \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu}{\int \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1}) d\nu} \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})(x) \right| \\ &= \frac{1}{a_n} \left| \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x) - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})(x) \right| \\ &= \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{a_n} \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x) - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)} \right| \\ &\leq e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x) - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^{n+k}(\mathbf{1})(x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{C_f \omega(\text{diam}(\Omega))} \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n \left( \mathbf{1} - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1}) \right) (x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)} \right| \\
&\leq C \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n \left( \mathbf{1} - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1}) \right) (x)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)} - \frac{\int \left( \mathbf{1} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1})}{a_k} \right) d\nu}{\int \mathbf{1} d\nu} \right| \\
&\leq \tilde{C} s^n.
\end{aligned}$$

Na penúltima linha usamos o Teorema 3.3.2 com  $\psi = \mathbf{1}$  e  $\varphi = \mathbf{1} - \frac{1}{a_k} \mathcal{L}_{M,f}^k(\mathbf{1})$ . Ou seja,  $\{\mathcal{L}_f^n(\mathbf{1})(y) / \int_{\Omega} \mathcal{L}_f^n(\mathbf{1}) d\nu\}_n$  é uma sequência de Cauchy. Logo  $h$  está bem definida.

Afirmamos que  $h \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > N$ , vale

$$\left| h(x) - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso, usando a equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= \left| h(x) - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} + \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} + \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} - h(y) \right| \\
&\leq \left| h(x) - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} \right| + \left| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} \right| + \left| h(y) - \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))} \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + C_f \omega \circ d(x, y) \frac{|\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)|}{\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))}.
\end{aligned}$$

Segue portanto, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e em seguida  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &\leq C_f \omega \circ d(x, y) |h(y)| \\
&\leq C_f \|h\|_{\infty} \omega \circ d(x, y).
\end{aligned}$$

Agora verificamos que  $h$  é uma autofunção para o operador  $\mathcal{L}_{M,f}$ . De fato, por continuidade

$$\mathcal{L}_{M,f}(h)(y) = \mathcal{L}_{M,f} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(y)}{\int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu} \right)$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1})(y) \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1}) d\nu}{\int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1}) d\nu} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1})(y) \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1}) d\nu}{\int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1}) d\nu \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}) d\nu} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1})(y) a_{n+1}}{\int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}^{n+1}(\mathbf{1}) d\nu a_n} \\
&= a_1 h(y).
\end{aligned}$$

Portanto  $h$  é uma autofunção associada ao autovalor  $a_1 = \int_{\Omega} \mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1}) d\nu$ .

Suponha que existam de  $g$  e  $h$  satisfazendo (3.17). Seja  $x$  em  $\Omega$  e  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente. Então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$

$$|h(x) - g(x)| = |h(x) - c_n(x) + c_n(x) - g(x)| \leq |h(x) - c_n(x)| + |g(x) - c_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

em que  $c_n(x) = \mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1})(x)/\nu(\mathcal{L}_{M,f}^n(\mathbf{1}))$ . Logo  $h = g$ .

Nos resta mostrar a existência e unicidade da automedida. Ou seja, a existência e unicidade de uma medida de probabilidade  $\mu$  tal que  $\mathcal{L}_{M,f}^* \mu = \lambda \mu$  para algum número real  $\lambda$ . Afirmamos que para  $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\{(\mathbb{P}_n^m)^*(\nu)\}_m$  é uma sequência de Cauchy relativa à métrica  $W_{\bar{d}}$ . De fato, usando a identidade  $\mathbb{P}_n^m = \mathbb{P}_{n+j}^{m-j} \circ \mathbb{P}_n^j$  e a dualidade de Kantorovich, temos

$$\begin{aligned}
W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_n^{m+k})^*(\nu), (\mathbb{P}_n^k)^*(\nu)) &= W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_{n+k}^m \circ \mathbb{P}_n^k)^*(\nu), (\mathbb{P}_n^k)^*(\nu)) \\
&= W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_n^k)^*(\mathbb{P}_{n+k}^m)^*(\nu), (\mathbb{P}_n^k)^*(\nu)) \\
&\leq s^k W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_{n+k}^m)^*(\nu), \nu) \\
&= s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left| \int \varphi d(\mathbb{P}_{n+k}^m)^*(\nu) - \int \varphi d\nu \right| \\
&= s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left| \int \mathbb{P}_{n+k}^m(\varphi) d\nu - \int \varphi d\nu \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left\{ \left| \int \mathbb{P}_{n+k}^m(\varphi) d\nu \right| + \left| \int \varphi d\nu \right| \right\} \\
&\leq s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left\{ \int |\mathbb{P}_{n+k}^m(\varphi)| d\nu + \int |\varphi| d\nu \right\} \\
&\leq s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left\{ \|\varphi\|_\infty \int \mathbb{P}_{n+k}^m(\mathbf{1}) d\nu + \|\varphi\|_\infty \int d\nu \right\} \\
&\leq s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \left\{ \|\varphi\|_\infty \int d\nu + \|\varphi\|_\infty \int d\nu \right\} \\
&= s^k \sup_{\text{Hol}_{\bar{d}}(\varphi) \leq 1} \{2\|\varphi\|_\infty\} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Como  $(\Omega, d)$  é separável e completo,  $(\mathcal{P}(\Omega), W_{\bar{d}})$  é separável e completo (veja por exemplo, [2] pág. 505). Logo, existe  $\mu^{(n)}$  tal que  $(\mathbb{P}_n^m)^*(\nu) \rightarrow \mu^{(n)}$  quando  $m \rightarrow \infty$ , independentemente de  $\nu$ . Tomemos  $\mu = \mu^{(0)}$ , ou seja,  $(\mathbb{P}_0^m)^*(\nu) \rightarrow \mu^{(0)} = \mu$ .

Vamos mostrar que  $\mu$  é uma automedida. Com efeito, para alguma medida de probabilidade  $\nu$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  temos

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\mathcal{L}_{M,f}^* \mu &= \int \mathcal{L}_{M,f}(\varphi) d\mu \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \mathcal{L}_{M,f}(\varphi) d((\mathbb{P}_0^m)^*(\nu)) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \mathbb{P}_0^m(\mathcal{L}_{M,f}(\varphi)) d\nu \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \mathbb{P}_0^{m+1}(\varphi) \mathbb{P}_0^m(\mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1})) d\nu \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \varphi \mathbb{P}_0^m(\mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1})) d(\mathbb{P}_0^{m+1})^*(\nu) \\
&= \int \varphi \left[ \int \mathcal{L}_{M,f}(\mathbf{1}) d\nu^{(0)} \right] d\mu = \int \varphi d[a_1 \mu].
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\mathcal{L}_{M,f}^* \mu = a_1 \mu$ . □

**Observação 3.3.4.**  $\mu = \nu^{(0)}$ , em que  $\nu^{(0)}$  é dada por (3.15).

*Demonstração.* De fato, como  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(0)}) = \mu$ , temos

$$W_{\bar{d}}(\nu^{(0)}, \mu) = \lim_{m \rightarrow \infty} W_{\bar{d}}((\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(0)}), (\mathbb{P}_0^m)^*(\nu^{(0)}))$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} s^m W_{\tilde{a}}(\nu^{(m)}, \nu^{(0)}) = 0. \quad \square$$

**Corolário 3.3.5.** *Seja  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  um mapa sobre um espaço Polonês  $\Omega$ ,  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  um passeio aleatório backward para  $T$  e  $\omega$  um módulo de continuidade tal que a composição com  $T$  preserva  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  (isto é satisfeito se  $T$  é Lipschitz). Assuma que o acoplamento  $\mathbf{P} = (\Pi_{x,y}^t)_{t,x,y}$  satisfaz (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é flat com respeito a  $\mathbf{P}$ . Então existe um potencial normalizado e flat  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  que difere de  $f$  por um cobordo e uma constante; segue que  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}$  são conjugados a menos de uma constante. Em particular, a propriedade de ter lacuna espectral é equivalente para  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},f}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbf{M},\tilde{f}}$ .*

*Demonstração.* O Teorema 3.3.3 nos permite normalizar o potencial  $f$ , ou seja, podemos definir  $\tilde{f} = f + \log h - \log h \circ T - \log \rho$ . Note que como a composição com  $T$ ,  $h \circ T$ , preserva  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  (exemplo, se  $T$  é Lipschitz), o potencial normalizado  $\tilde{f}$  ainda está em  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ : a menos de mudança em  $h$  por um fator constante, podemos assumir  $0 < h < 2$  e então  $\log h$  se desenvolve como uma série de potências de  $h$ , portanto  $\log h \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ .

Agora mostraremos que se  $f$  é flat, então  $\tilde{f}$  também o é. De fato, para todo  $t, x, y$  e  $\Pi_{x,y}^t$ -quase todo  $(\bar{x}, \bar{y})$ , temos

$$\begin{aligned} |\tilde{f}^t(\bar{x}) - \tilde{f}^t(\bar{y})| &\leq |f^t(\bar{x}) - f^t(\bar{y})| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^t \log h(x_k) - \log h(T(x_k)) - \log h(y_k) + \log h(T(y_k)) \right| \\ &\leq |f^t(\bar{x}) - f^t(\bar{y})| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^t \log h(x_k) - \log h(x_{k-1}) - \log h(y_k) + \log h(y_{k-1}) \right| \\ &\leq |f^t(\bar{x}) - f^t(\bar{y})| + |\log h(x_t) - \log h(x) - \log h(y_t) + \log h(y)| \\ &\leq |f^t(\bar{x}) - f^t(\bar{y})| + \text{Hol}_\omega(\log h)(\omega \circ d(x_t, y_t) + \omega \circ d(x, y)) \\ &\leq C_f \omega \circ d(x, y) + \text{Hol}_\omega(\log h)(G(t)\omega \circ d(x, y) + \omega \circ d(x, y)) \\ &\leq \tilde{C}\omega \circ d(x, y). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposição 3.3.6** (Lacuna espectral). *Seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição sobre um espaço Polonês  $\Omega$  e seja  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que o acoplamento  $(\Pi_{x,y}^t)_{x,y,t}$  de  $M$  satisfaz a condição (3.1) e que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é flat. Então  $\mathcal{L}_{M,f}$  tem a propriedade da lacuna espectral sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Tomando  $\psi = h_f$  e  $\varphi$  tal qual  $\nu(\varphi) = 0$  em (3.16) obtemos

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(h_f)} - \frac{\nu(\varphi)}{\nu(h_f)} \right\|_\omega = \left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\lambda_f^n h_f} \right\|_\omega \leq C s^n (\text{Hol}_\omega(\varphi)) \|1/h_f\|_\infty.$$

Tomando  $\delta = 1 - s$  e  $\rho = \lambda_f$  na definição de lacuna espectral 1.3.5, obtemos

$$\left\| \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi) \right\|_\omega \leq \tilde{C} \rho^n (1 - \delta)^n \|\varphi\|_\omega.$$

□

# Capítulo 4

## DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES E AUSÊNCIA DE LACUNA ESPECTRAL

Neste capítulo, estudamos o decaimento de correlações para mapas  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ , que possuem um certo núcleo de transição backward M. Primeiramente, consideramos  $\Omega$  um espaço Polonês arbitrário, e a medida de equilíbrio  $\mu_f$  dada pelo Teorema RPF. Na sequência, nos restringimos aos espaços  $\Omega$  compactos. Então estendemos a técnica em [27] para mapas  $T$  com um número infinito de pré-imagens. As referências que seguimos são [4, 27, 42].

### 4.1 LACUNA ESPECTRAL E CORRELAÇÕES

Nesta seção vamos seguimos as referências [4] e [42].

**Definição 4.1.1.** *Considere o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ . Seja  $T$  uma aplicação mensurável de  $\Omega$  em  $\Omega$ . Para cada  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em  $L^2(\Omega, \nu)$  definimos a função de correlação  $C_{\varphi_1, \varphi_2, \nu} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  pondo*

$$C_{\varphi_1, \varphi_2, \nu}(n) = \int_{\Omega} (\varphi_1 \circ T^n) \varphi_2 \, d\nu - \int_{\Omega} \varphi_1 \, d\nu \int_{\Omega} \varphi_2 \, d\nu. \quad (4.1)$$

**Teorema 4.1.2.** *Suponha que  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  é um potencial para o qual o operador de Ruelle  $\mathcal{L}_{M, f}$  tem a propriedade da lacuna espectral. Considere a medida  $\mu_f = h_f \nu_f$ , em*

que  $\nu_f$  é a automedida e  $h_f$  é autofunção dadas pelo Teorema 3.3.3. Suponha que  $M$  é backward walk para a aplicação mensurável  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . Então a função de correlação  $C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)$  tem decaimento exponencial. Mais precisamente, existem  $0 < \tilde{\tau} < 1$  e  $C(\tilde{\tau}) > 0$  tais que para quaisquer  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  a função de correlação satisfaz:

$$|C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)| = \left| \int_{\Omega} (\varphi_1 \circ T^n) \varphi_2 d\mu_f - \int_{\Omega} \varphi_1 d\mu_f \int_{\Omega} \varphi_2 d\mu_f \right| \leq C_1 \tilde{\tau}^n. \quad (4.2)$$

em que  $C_1 = C(\tilde{\tau}) \|h_f\|_{\infty} (\int_{\Omega} |\varphi_1| d\nu_f) \|\varphi_2\|_{\omega}$ .

Antes de provar o teorema vamos estabelecer três lemas auxiliares.

**Lema 4.1.3.** *Nas hipóteses do Teorema 3.3.2, segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/\lambda^n) \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi) = h_f \int_{\Omega} \varphi d\nu_f$  uniformemente.*

*Demonstração.* De fato, no Teorema 3.3.2 tome  $\psi = h_f$ , onde  $h_f$  á autofunção associada a  $f$  dada pelo Teorema 3.3.3. Com isso,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi)}{\lambda_f^n h_f} - \nu(\varphi) \right\|_{\infty} \leq C s^n (\text{Hol}_{\omega}(\varphi) + |\nu(\varphi)| \text{Hol}_{\omega}(h_f)) \|1/h_f\|_{\infty}.$$

Como  $s < 1$ , o resultado segue.  $\square$

**Lema 4.1.4.** *A projeção espectral  $\pi_{M,f} \equiv \pi_{\mathcal{L}_{M,f}}$  é dada por  $\pi_{M,f}(\varphi) = (\int_{\Omega} \varphi d\nu_f) \cdot h_f$ .*

*Demonstração.* Sabemos que os operadores  $\pi_{M,f}$  e  $\mathcal{L}_{M,f}$  comutam. Pelo Lema 4.1.3 temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/\lambda^n) \mathcal{L}_{M,f}^n \varphi = h_f \int_{\Omega} \varphi d\nu_f$  uniformemente. Como  $\pi_{M,f}$  é limitado temos que

$$\left\| \pi_{M,f} \left( \lambda^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \varphi - h_f \int_{\Omega} \varphi d\nu_f \right) \right\|_{\infty} \leq \|\pi_{M,f}\|_{\text{op}} \left\| \lambda^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \varphi - h_f \int_{\Omega} \varphi d\nu_f \right\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Uma vez que

$$\pi_{M,f}(\lambda^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \varphi) = \lambda^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \pi_{M,f}(\varphi) = \lambda^n \lambda^{-n} \pi_{M,f}(\varphi) = \pi_{M,f}(\varphi)$$

obtemos

$$\pi_{M,f}(\varphi) = \pi_{M,f} \left( h_f \int_{\Omega} \varphi d\nu_f \right) = \pi_{M,f}(h_f) \cdot \int_{\Omega} \varphi d\nu_f = h_f \cdot \int_{\Omega} \varphi d\nu_f.$$

$\square$

O lema a seguir será útil no decorrer da seção.

**Lema 4.1.5.** *Sejam  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  e  $M$  backward walk para uma aplicação mensurável  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . Então  $\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_1 \circ T^n \cdot \varphi_2 \cdot h_f) = \varphi_1 \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_2 h_f)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Omega$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Lembrando a definição de  $\mathcal{L}_{M,f}^n$ , temos  $\mathcal{L}_{M,f}^n \varphi(x) = \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi(x_n) dm_x^n(\bar{x})$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_1 \circ \sigma^n \varphi_2 h_f)(x) &= \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} (\varphi_1 \circ \sigma^n \varphi_2 h_f)(x_n) dm_x^n(\bar{x}) \\ &= \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi_1(\underbrace{T^n(x_n)}_{=x}) \varphi_2(x_n) h_f(x_n) dm_x^n(\bar{x}) \\ &= \varphi_1(x) \int_{\Omega^n} e^{f^n(\bar{x})} \varphi_2(x_n) h_f(x_n) dm_x^n(\bar{x}) \\ &= \varphi_1(x) \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_2 h_f)(x). \end{aligned} \quad \square$$

Agora apresentamos a prova do principal teorema desta seção.

**Prova do Teorema 4.1.2.** Como  $\mu_f = h_f d\nu_f$ , segue da definição de função de correlação e do fato de que  $(\mathcal{L}_{M,f}^*)^n \nu_f = \lambda_f^n \nu_f$ , que

$$\begin{aligned} |C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)| &= \left| \int_{\Omega} (\varphi_1 \circ T^n) \varphi_2 h_f d\nu_f - \int_{\Omega} \varphi_1 h_f d\nu_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \lambda_f^{-n} \varphi_1 \circ T^n \varphi_2 h_f d(\mathcal{L}_{M,f}^*)^n(\nu_f) - \int_{\Omega} \varphi_1 h_f d\nu_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n((\varphi_1 \circ T^n) \varphi_2 h_f) d\nu_f - \int_{\Omega} \varphi_1 h_f d\nu_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando o Lema 4.1.5 e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} |C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)| &= \left| \int_{\Omega} \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n((\varphi_1 \circ T^n) \varphi_2 h_f) d\nu_f - \int_{\Omega} \varphi_1 h_f d\nu_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \varphi_1 \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_2 h_f) d\nu_f - \int_{\Omega} \varphi_1 h_f d\nu_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \varphi_1 \left( \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi_2 h_f) - h_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right) d\nu_f \right| \end{aligned}$$

$$\leq \left( \int_{\Omega} |\varphi_1| d\nu_f \right) \left\| \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \left( \varphi_2 h_f - h_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right) \right\|_{\infty}. \quad (4.4)$$

Ou seja,

$$|C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)| \leq \left( \int_{\Omega} |\varphi_1| d\nu_f \right) \left\| \lambda_f^{-n} \mathcal{L}_{M,f}^n \left( \varphi_2 h_f - h_f \int_{\Omega} \varphi_2 h_f d\nu_f \right) \right\|_{\infty}. \quad (4.5)$$

Estamos supondo que o espectro de  $\mathcal{L}_{M,f} : \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$  é formado por um autovalor simples  $\lambda_f > 0$  e um subconjunto de um disco de raio estritamente menor que  $\lambda_f$ , como pode ser visto na demonstração do Corolário 5.3.7 no próximo capítulo. Ponha  $\tau = \sup\{|z|; |z| < 1 \text{ e } z \cdot \lambda_f \in \sigma(\mathcal{L}_{M,f})\}$ . A existência da lacuna espectral garante que  $\tau < 1$ . Considere  $\pi_{M,f}$  a projeção espectral associada ao autovalor  $\lambda_f$ , então pela Proposição A.4.4, o raio espectral associado ao operador  $\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})$  é exatamente  $\tau \cdot \lambda_f$ . Como  $[\mathcal{L}_{M,f}, \pi_{M,f}] = 0$ , temos que  $[\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})]^n = \mathcal{L}_{M,f}^n(I - \pi_{M,f})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue da fórmula do raio espectral (A.2) que para cada escolha de  $1 > \tilde{\tau} > \tau$  existe  $n_0 \equiv n_0(\tilde{\tau}) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  temos  $\|\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi - \pi_{M,f}\varphi)\| \leq \lambda_f^n \tilde{\tau}^n \|\varphi\|$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ . Portanto existe uma constante  $C(\tilde{\tau}) > 0$  tal que para todo  $n \geq 1$

$$\|\mathcal{L}_{M,f}^n(\varphi - \pi_{M,f}\varphi)\| \leq C(\tilde{\tau}) \lambda_f^n \tilde{\tau}^n \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Usando o Lema 4.1.4 e a cota superior acima na estimativa (4.5) obtemos

$$|C_{\varphi_1, \varphi_2, \mu_f}(n)| \leq \left( \int_{\Omega} |\varphi_1| d\nu_f \right) C \tilde{\tau}^n \|\varphi_2 h_f\| \leq C(\tilde{\tau}) \|h_f\|_0 \left( \int_{\Omega} |\varphi_1| d\nu_f \right) \|\varphi_2\| \cdot \tilde{\tau}^n.$$

□

**Obs.:** A seguir faremos algumas observações a respeito de duas afirmações que foram feitas na demonstração acima sem a devida explicação. A saber foram as seguintes:

1. o raio espectral associado ao operador  $\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})$  é exatamente  $\tau \cdot \lambda_f$ ;
2.  $[\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})]^n = \mathcal{L}_{M,f}^n(I - \pi_{M,f})$ .

*Prova de 1.* Para a primeira é suficiente observar que todo ponto do espectro de  $\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})$  pode ser obtido através de  $\lambda_f$  aplicando-se uma rotação e uma homotetia, ou seja, através da multiplicação de  $\lambda_f$  por um número complexo  $z$  adequado.



*Prova de 2.* Para a segunda, basta usar o fato de  $\pi_{M,f}$  e  $\mathcal{L}_{M,f}$  comutam e observar que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_{M,f}(I - \pi_{M,f})]^n &= [\mathcal{L}_{M,f} - \mathcal{L}_{M,f}\pi_{M,f}]^n = [\mathcal{L}_{M,f} - \pi_{M,f}\mathcal{L}_{M,f}]^n \\
&= [(I - \pi_{M,f})\mathcal{L}_{M,f}]^n = (I - \pi_{M,f})^n \mathcal{L}_{M,f}^n \\
&= (I - \pi_{M,f})\mathcal{L}_{M,f}^n = \mathcal{L}_{M,f}^n - \pi_{M,f}\mathcal{L}_{M,f}^n \\
&= \mathcal{L}_{M,f}^n - \mathcal{L}_{M,f}^n\pi_{M,f} = \mathcal{L}_{M,f}^n(I - \pi_{M,f}).
\end{aligned}$$

## 4.2 NÚCLEOS 1-PARA- $\infty$ FRACAMENTE CONTRATIVOS

Nesta seção, assumiremos que  $\Omega$  é compacto. O seguinte teorema de contração devido a Kloeckner [27], nos permite fazer uma conexão explícita entre o módulo de continuidade  $\omega$  e o decaimento dos iterados do operador de Ruelle. Por completeza, colocaremos também sua demonstração. A possibilidade de normalização do potencial e de que ele pode ser tomado flat vem da Proposição 3.2 em [27].

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $M$  um núcleo de transição sobre um espaço métrico compacto  $(\Omega, d)$  e  $\omega$  um módulo de continuidade. Assuma que  $M$  admite um acoplamento  $P$  o qual tem  $\omega$ -decaimento  $F$  e correspondente meia vida  $\tau = \tau_{\frac{1}{2}} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ . Sejam  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  um potencial normalizado flat e  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{M,f}$ . Então existe uma constante  $C > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$  tais que para todo  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$  com  $W_\omega(\mu, \nu) =: r$ , vale:*

$$W_\omega(\mathcal{L}^{*k\tau(r/k)}\mu, \mathcal{L}^{*k\tau(r/k)}\nu) \leq \frac{1}{2}W_\omega(\mu, \nu)$$

e

$$W_\omega(\mathcal{L}^{*t}\mu, \mathcal{L}^{*t}\nu) \leq CW_\omega(\mu, \nu) \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

*Em particular temos:*

- se  $P$  tem  $\omega$ -decaimento exponencial, então  $\tau(r)$  é limitado e assim o é  $k\tau(r/k)$ . Dessa forma,  $\mathcal{L}_{M,f}^*$  decai exponencialmente na métrica  $W_\omega$  e portanto  $\mathcal{L}_{M,f}$  tem a propriedade da lacuna espectral sobre a álgebra  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ ;
- se  $P$  tem  $\omega$ -decaimento polinomial, então  $\tau(r) \leq D/r^\alpha$  de forma que  $k\tau(r/k) \leq D'/r^\alpha$  e portanto  $\mathcal{L}_{M,f}^*$  decai polinomialmente com mesmo grau.

Segue deste resultado que, uma vez que  $P$  decai a 0, seja qual for a velocidade,  $\mathcal{L}_{M,f}^*$  fixa uma única medida de probabilidade  $\mu_f$ , em que  $\mu_f$  é a medida RPF de  $f$ . (Essa observação se faz necessária porque a Proposição 3.2 em [27] garante existência apenas da autofunção e autovalor.)

*Demonstração.* A prova será dada em 7 passos.

1.  $W_\omega(\mathcal{L}^{*t}\mu, \mathcal{L}^{*t}\nu) \leq CW_\omega(\mu, \nu) \quad \forall t \in \mathbb{N}, \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

Isto segue do Lema 3.1.5, pois pela definição da função de decaimento temos  $F(t, r) \leq Cr$ , para todo  $t$ .

2. Construa um plano de transporte entre  $\mathcal{L}^{*t}\delta_x$  e  $\mathcal{L}^{*t}\delta_y$ . Aqui precisamos da hipótese de normalização, para assegurar que estas duas medidas são ambas de mesma massa. Fixe  $t \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \Omega$  e observe que  $\mathcal{L}^{*t}\delta_x = (e_t)_*(e^{f^t} dm_x^t)$  onde  $e_t : \Omega^t \rightarrow \Omega$  é a projeção na última coordenada. Procuramos um plano de transporte eficiente entre  $\mathcal{L}^{*t}\delta_x$  e  $\mathcal{L}^{*t}\delta_y$ , e o construiremos como  $(e_t, e_t)_*\Pi$  onde  $\Pi$  é um plano de transporte entre  $e^{f^t} dm_x^t$  e  $e^{f^t} dm_y^t$ . Como o acoplamento  $P$  é um plano de transporte  $\Pi_{x,y}^t$  entre  $m_x^t$  e  $m_y^t$ , e vamos modificá-lo para levar em conta o fator  $e^{f^t}$ . Defina uma função

$$a : \Omega^t \times \Omega^t \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \min(e^{f^t(\bar{x})}, e^{f^t(\bar{y})})$$

de forma que  $a d\Pi_{x,y}^t$  é uma medida positiva cujas marginais são menores que  $e^{f^t} dm_x^t$  e  $e^{f^t} dm_y^t$ , respectivamente. Portanto, deve existir alguma medida positiva  $\Lambda$  sobre  $\Omega^t \times \Omega^t$  tal que

$$\Pi := a d\Pi_{x,y}^t + \Lambda$$

é uma medida de probabilidade com marginais exatamente  $e^{f^t} dm_x^t$  e  $e^{f^t} dm_y^t$ . Queremos limitar por cima o  $\omega$ -custo de  $\Pi$ , e a ideia básica é que o primeiro termo será pequeno pela hipótese de decaimento (lembre-se que pelo Lema 3.1.8  $a$  é limitado, independentemente de  $t$ ), o segundo será pequeno porque  $\Lambda$  tem massa pequena.

3. Limitante por cima da massa de  $\Lambda$ . Temos

$$a(\bar{x}, \bar{y}) = \min (e^{f^t(\bar{x})}, e^{f^t(\bar{x})} e^{f^t(\bar{y}) - f^t(\bar{x})}) \geq e^{f^t(\bar{x})} e^{-|f^t(\bar{y}) - f^t(\bar{x})|}.$$

Como  $f$  é flat, para  $\Pi_{x,y}^t$  quase todo  $(\bar{x}, \bar{y})$  e para alguma constante  $B > 0$  temos  $a(\bar{x}, \bar{y}) \geq e^{f^t(\bar{x})} e^{-B\omega \circ d(x,y)}$ ; então usando que  $f$  é normalizado vem que a massa total de  $a\Pi_{x,y}^t$  é pelo menos  $e^{-B\omega \circ d(x,y)}$ , o qual podemos limitar por uma constante  $e^{-B} \in (0, 1)$  ou, já que  $\Omega$  é limitado e aumentando  $B$  se necessário, por  $B\omega \circ d(x, y)$ . A massa total de  $\Lambda$  é, portanto, limitada por cima como segue:

$$\int \mathbf{1} \, d\Lambda \leq \min (B\omega \circ d(x, y), 1 - e^{-B}).$$

4. Limitante para o custo de  $\Pi$  para a métrica modificada.

Introduzimos um novo módulo de continuidade

$$\omega' = \min \{K\omega, \omega(\text{diam}\Omega)\},$$

onde  $K$  é uma constante positiva a ser especificada mais adiante (independentemente de  $x, y$ ). Temos  $\omega' \circ d(x, y) \geq \omega \circ d(x, y)$  para todo  $x, y \in \Omega$  e  $\omega' \leq K\omega$ , de forma que  $\omega \circ d$  e  $\omega' \circ d$  são métricas Lipschitz equivalentes sobre  $\Omega$ , e como consequência  $W_\omega$  e  $W_{\omega'}$  são Lipschitz equivalentes (com as mesmas constantes). Se  $\omega \circ d(x, y) \geq \omega(\text{diam}\Omega)/K$ , então  $\omega' \circ d(x, y) = \omega(\text{diam}\Omega) = \omega'(\text{diam}\Omega)$  e limitamos a massa de  $\Lambda$  por  $1 - e^{-B}$  de modo que, denotando por  $D$  o limitante de  $a$ :

$$\begin{aligned} & \int \omega' \circ d(x_t, y_t) \, d\Pi(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= \int \omega' \circ d(x_t, y_t) a(\bar{x}, \bar{y}) \, d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) + \int \omega' \circ d(x_t, y_t) \, d\Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq DK \int \omega \circ d(x_t, y_t) \, d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) + (1 - e^{-B})\omega'(\text{diam}\Omega) \\ &\leq DKF(t, \omega \circ d(x, y)) + (1 - e^{-B})\omega' \circ d(x, y) \\ &\leq DKF(t, \omega' \circ d(x, y)) + (1 - e^{-B})\omega' \circ d(x, y). \end{aligned}$$

Se  $\omega \circ d(x, y) \leq \omega(\text{diam}\Omega)/K$ , então  $\omega' \circ d(x, y) = K\omega \circ d(x, y)$  e limitamos a massa de  $\Lambda$  por  $B\omega \circ d(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
& \int \omega' \circ d(x_t, y_t) \, d\Pi(\bar{x}, \bar{y}) \\
&= \int \omega' \circ d(x_t, y_t) a(\bar{x}, \bar{y}) \, d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) + \int \omega' \circ d(x_t, y_t) \, d\Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \\
&\leq DK \int \omega \circ d(x_t, y_t) \, d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) + B\omega \circ d(x, y) \omega'(\text{diam}\Omega) \\
&\leq DKF(t, \omega \circ d(x, y)) + B\omega(d(x, y))\omega(\text{diam}\Omega) \\
&\leq DKF(t, \omega' \circ d(x, y)) + \frac{B\omega(\text{diam}\Omega)}{K} \omega' \circ d(x, y).
\end{aligned}$$

Escolhendo  $K$  suficientemente grande para assegurar que  $\frac{B\omega(\text{diam}\Omega)}{K} \leq 1 - e^{-B}$ , obtemos em ambos os casos

$$\int \omega' \circ d(x_t, y_t) \, d\Pi(\bar{x}, \bar{y}) \leq DKF(t, \omega' \circ d(x, y)) + (1 - e^{-B})\omega'(d(x, y)). \quad (4.6)$$

5. Existe  $\theta_1 \in (0, 1)$  e  $k_1 \in \mathbb{N}$  tais que para todo  $r$ , todos  $x, y \in \Omega$  tais que  $\omega' \circ d(x, y) \geq r$  e todo  $t \geq k_1\tau(r/2^{k_1})$ ,

$$W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\delta_y) \leq \theta_1\omega' \circ d(x, y).$$

Escolhemos qualquer  $\theta_1 \in (1 - e^{-B}, 1)$  e  $k_1$  suficientemente grande para assegurar que  $DK/2^{k_1} + (1 - e^{-B}) \leq \theta_1$ . Daí aplicamos (4.6) (note que  $k_1\tau(r/2^{k_1}) \geq \tau(r) + \tau(r/2) + \dots + \tau(r/2^{k_1})$ ).

6. Existem  $\theta \in (0, 1)$  e  $k_2 \in \mathbb{N}$  tais que para todo  $r$ , toda  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$  com  $W_{\omega'}(\mu, \nu) = r$  e todo  $t \geq k_2\tau(r/k_2)$ ,

$$W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\mu, \mathcal{L}^{*t}\nu) \leq \theta W_{\omega'}(\mu, \nu).$$

Escolha  $\theta \in (\theta_1, 1)$  e seja  $\eta > 0$  pequeno o suficiente para assegurar que  $\theta_1 + C\eta \leq \theta$ , onde  $C$  é a constante do Item 1. Seja  $\mu, \nu$  duas medidas de probabilidade quaisquer e seja  $\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)$  ótimo para  $W_{\omega'}(\mu, \nu) =: r$ . Defina  $s := \eta r$  e  $E := \{(x, y) \mid \omega' \circ d(x, y) \geq s\}$ . Para todo  $t \geq k_1\tau(s/2^{k_1})$ , usando o Lema 2.3.11 vem

$$W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\mu, \mathcal{L}^{*t}\nu) \leq \int W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\delta_y) \, d\Pi(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_E W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\delta_y) d\Pi(x, y) + \int_{\Omega \times \Omega \setminus E} W_{\omega'}(\mathcal{L}^{*t}\delta_x, \mathcal{L}^{*t}\delta_y) d\Pi(x, y) \\
&\leq \theta_1 \int_E \omega' \circ d(x, y) d\Pi(x, y) + C \int_{\Omega \times \Omega \setminus E} \omega' \circ d(x, y) d\Pi(x, y) \\
&\leq \theta_1 W_{\omega'}(\mu, \nu) + C\eta r \leq \theta W_{\omega'}(\mu, \nu).
\end{aligned}$$

Basta escolher  $k_2 \geq 2^{k_1}/\eta$ .

## 7. Conclusão.

Deduzimos que o  $\theta$  tempo de decaimento  $\tau_{\theta}^{\omega'}(r)$  de  $\mathcal{L}^*$  com respeito a  $W_{\omega'}$  é no máximo  $k_2\tau(r/k_2)$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , deduzimos que

$$\tau_{\theta^n}^{\omega'}(r) \leq k_2\tau(r/k_2) + k_2\tau(\theta r/k_2) + \cdots + k\tau(\theta^{n-1}r/k_2)$$

e tomando  $n$  grande o suficiente para assegurar que  $\theta^n \leq 1/(2K)$  obtemos

$$\tau_{\frac{1}{2K}}^{\omega'}(r) \leq k_2 n \tau(\theta^{n-1}r/k_2) \leq k\tau(r/k) \quad \text{para algum } k.$$

Agora, já que  $W_{\omega} \leq W_{\omega'} \leq KW_{\omega}$ , os tempos de decaimento  $\tau_{\theta}^{\omega}$  para  $\mathcal{L}^*$  com respeito a  $W_{\omega}$  satisfazem  $\tau_{\theta}^{\omega} \leq \tau_{K\theta}^{\omega'}$ , como queríamos.

□

### 4.2.1 NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO 1-PARA- $k$

Para cada  $x \in \Omega$  seja  $B(x) = \{x^1, \dots, x^k\}$  uma família de  $k$  pontos. Faça  $m_x = \sum_{j=1}^k (1/k)\delta_{x^j}$ . Então defina o núcleo de transição  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$ . A este núcleo de transição Kloeckner [27] chamou de 1-para- $k$ . Definiu também:

**Definição 4.2.2.** *Vamos chamar função contração a qualquer função contínua  $c : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $c(0) = 0$  e  $c(r) < r$  para todo  $r > 0$ .*

**Definição 4.2.3.** *Dizemos que  $M$  é fracamente contrativo se existem uma função contração  $c$  e um número real  $\lambda > 1$  tal que, para todo  $x, y \in \Omega$ , existem permutações  $\eta, \sigma$  de  $\{1, \dots, k\}$  tal que*

1. para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$  vale  $d(x^{\eta(j)}, y^{\sigma(j)}) \leq c(d(x, y))$ ,
2.  $d(x^{\eta(k)}, y^{\sigma(k)}) \leq d(x, y)/\lambda$ .

Para os núcleos de transição  $M$  fracamente contrativos define-se o acoplamento natural.

**Definição 4.2.4.** Quando  $M$  é fracamente contrativo, definimos um acoplamento natural  $P$  como segue. Para cada  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ , fixamos permutações  $\eta, \sigma$  satisfazendo o item 1 acima; então para cada par  $(x, y)$  e cada palavra  $w = (j_1, \dots, j_t) \in \{1, \dots, k\}^t$  sejam  $\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w \in \Omega^t$  sequências  $(x_1, \dots, x_t), (y_1, \dots, y_t)$  tais que  $x_1 = x^{\eta(j_1)} \in B(x)$  e  $y_1 = y^{\sigma(j_1)} \in B(y)$ , e para todo  $n$ ,  $x_{n+1} = (x_n)^{\eta_n(j_n)} \in B(x_n)$  e  $y_{n+1} = (y_n)^{\sigma_n(j_n)} \in B(y_n)$  em que  $\eta_n$  e  $\sigma_n$  são permutações associadas ao par  $(x_n, y_n)$ . Então o acoplamento natural é dado por

$$\Pi_{x,y}^t = \sum_{w \in \{1, \dots, k\}^t} \frac{1}{k^t} \delta_{(\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w)}.$$

Em outras palavras, juntamos as órbitas de acordo com o pareamento dado na definição de contração fraca.

O próximo lema segue do Teorema 4.2.1, e vemos que é realmente a regularidade dos observáveis que impulsionam a velocidade de decaimento.

**Lema 4.2.5.** Se  $M$  é um núcleo de transição 1-para- $k$  fracamente contrativo, então o acoplamento natural  $P$  tem decaimento exponencial com respeito a  $\omega_{\alpha+\beta \log}$ , para todo  $\alpha \in (0, 1)$  e todo  $\beta \in \mathbb{R}$ , e  $P$  tem decaimento polinomial de grau  $\beta$  com respeito a  $\omega_{\beta \log}$  para todo  $\beta > 0$ .

*Demonstração.* Veja ([27], Lema 5.3). □

Com isso, se  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  é Lipschitz e  $k$ -para-1 cujo núcleo de transição backward  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$ , dada por  $m_x = \sum_{y \in T^{-1}(x)} (1/k) \delta_y$ , é fracamente contrativo e se  $f \in \mathcal{C}^{\alpha+\beta \log}(\Omega)$  é um potencial flat com relação ao acoplamento natural  $P$ , então vale o Teorema RPF para o operador de transferência  $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{M,f,T}$  em  $\mathcal{C}^{\alpha+\beta \log}(\Omega)$ . Além disso,  $\alpha > 0$  implica em  $\mathcal{L}_f$  ter a propriedade da lacuna espectral em  $\mathcal{C}^{\alpha+\beta \log}(\Omega)$ ; Por

outro lado,  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$  implica em  $\mathcal{L}_f$  decair polinomialmente com grau  $\beta$  em  $\mathcal{C}^{\beta \log}(\Omega)$ . Esse é o resultado do Teorema 5.8 em [27].

Na próxima seção, estenderemos esse resultado ao caso em que, para cada  $x \in \Omega$ , o conjunto  $B(x)$  é infinito.

### 4.3 NÚCLEOS DE TRANSIÇÃO 1-PARA- $\infty$

Para fixarmos as ideias vamos considerar o espaço métrico compacto  $([0, 1], |\cdot|)$ , em que  $|\cdot|$  é a distância usual da reta, e  $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  cuja métrica é dada por:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|,$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots)$ . Segue do Teorema de Tychonoff que  $\Omega$  é compacto e, por definição, temos  $\text{diam}(\Omega) < \infty$ . A  $\sigma$ -álgebra de interesse em  $\Omega$  é aquela gerada pelos cilindros.

A seguir, definimo o operador *shift*.

**Definição 4.3.1.** A aplicação  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  definida por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots). \quad (4.7)$$

é dita a aplicação *shift a esquerda*.

Seja  $C(\Omega)$  o espaço das funções contínuas de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , e fixemos uma medida de probabilidade *a priori*  $\mu$  sobre  $\mathcal{B}([0, 1])$ . Assuma que o suporte de  $\mu$  é  $\Omega$ . Para um potencial  $\alpha$ -Hölder  $f \in C^\alpha(\Omega)$ , define-se o Operador de Transferência (também chamado Operador de Ruelle)  $\mathcal{L}_f : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$  por

$$\mathcal{L}_f(\phi)(x) = \int_K e^{f(ax)} \phi(ax) d\mu(a),$$

onde  $x \in \Omega$  e  $ax = (a, x_1, x_2, \dots)$  denota a pré-imagem de  $x$  com  $a \in [0, 1]$ .

Seja  $a^n$  um elemento de  $[0, 1]^n$  tendo coordenadas  $a^n = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$  e considere por  $a^n x \in \Omega$  a concatenação de  $a^n \in [0, 1]^n$  com  $x \in \Omega$ . Ou seja,  $a^n x = (a_n, \dots, a_1, x_1, x_2, \dots)$ . No caso  $n = 1$ , escreveremos  $a \equiv a^1 \in [0, 1]$  e  $ax = (a, x_1, x_2, \dots)$ .

A  $n$ -ésima iteração de  $\mathcal{L}_f$  tem a seguinte expressão

$$\mathcal{L}_f^n(\phi)(x) = \int_{[0,1]^n} e^{S_n f(a^n x)} \phi(a^n x) dp^n(a^n), \quad (4.8)$$

em que  $S_n f(a^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k(a^n x))$  e  $d\mu^n(a^n) = \prod_{k=1}^n d\mu(a_{n-k+1})$ .

Os exemplos 1.3.4 e 3.1.6 nos sugerem definir  $m_x = \mu \times \delta_x$  a fim de contextualizar este operador com sua generalização por meio de cadeias de Markov. Com isso, seja  $M = (m_x)_{x \in \Omega}$  um núcleo de transição, onde  $m_x = \mu \times \delta_x$ , sobre  $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  em que  $\mu$  é uma medida de probabilidade sobre  $[0, 1]$ . Para cada  $x \in \Omega$ ,  $B(x) = \{ax : a \in [0, 1]\} = \sigma^{-1}(x)$ . Chamaremos  $M$  um núcleo de transição 1-para- $\infty$ .

Note que

$$\begin{aligned} d(x_t, y_t) &= d(a_t \cdots a_1 x, b_t \cdots b_1 y) = \sum_{i=1}^t \frac{|a_i - b_i|}{2^i} + \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^t \frac{|a_i - b_i|}{2^i} + \frac{1}{2^t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}. \end{aligned}$$

Logo, para cada  $x, y$ , fixamos  $\eta$  e  $\sigma$  tais que  $a_1 = \eta(j_1) = \sigma(j_1) = b_1$  e  $a_n = \eta_n(j_n) = \sigma_n(j_n) = b_n$ . Com isso,

$$d(x_t, y_t) = d(a_t \cdots a_1 x, b_t \cdots b_1 y) = \frac{1}{2^t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = \frac{1}{2^t} d(x, y).$$

Portanto, tomando  $\lambda = 2$  e função de contração  $c(r) = r/2$ , concluímos que  $M$  é fracamente contrativo.

Para a próxima proposição e definição precisamos da seguinte hipótese: a medida de probabilidade a priori  $\mu$  é invariante por bijeções.

Agora, para cada  $w = \{a, b\}$  em  $[0, 1]^2$  seja  $\bar{x}_2^w = (\eta(a)x, \eta_2(b)x_1)$  e  $\bar{y}_2^w = (\sigma(a)y, \sigma_2(b)y_1)$ , defina

$$\int_{[0,1]^2} \delta_{((\eta(a)x, \eta_2(b)x_1), (\sigma(a)y, \sigma_2(b)y_1))} d\mu^2(a, b) := \int_{[0,1]^2} \delta_{(\bar{x}_2^w, \bar{y}_2^w)} d\mu^2(w). \quad (4.9)$$

Em seguida, definamos o acoplamento

$$\Pi_{x,y}^2 := \int_{[0,1]^2} \delta_{(\bar{x}_2^w, \bar{y}_2^w)} d\mu^2(w).$$



Note que

$$\begin{aligned}
\int_{(\Omega^2)^2} 1_{\Omega^2 \times B} d\Pi_{x,y}^2 &= \int_{(\Omega^2)^2} \int_{[0,1]^2} 1_{\Omega^2 \times B}(\bar{u}, \bar{v}) d\delta_{(\eta(a)x, \eta_2(b)x_1), (\sigma(a)y, \sigma_2(b)y_1)}(\bar{u}, \bar{v}) d\mu^2(a, b) \\
&= \int_{[0,1]^2} 1_{\Omega^2 \times B}(((\eta(a)x, \eta_2(b)x_1), (\sigma(a)y, \sigma_2(b)y_1))) d\mu^2(a, b) \\
&= \int_{[0,1]^2} 1_B(\sigma(a)y, \sigma_2(b)y_1) d\mu^2(a, b) = \int_{[0,1]^2} 1_B(\sigma(a)y, \sigma_2(b)\sigma(a)y) d\mu^2(a, b) \\
&= \int_{[0,1]^2} 1_B(\alpha y, \beta \alpha y) d\mu^2(\sigma^{-1}(\alpha), \sigma_2^{-1}(\beta)) = \int_{[0,1]^2} 1_B(\alpha y, \beta \alpha y) d\mu^2(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^2} 1_B(u, v) dm_y^2(u, v) &= \int_{\Omega^2} 1_B(u, v) dm_u(v) dm_y(u) \\
&= \int_{[0,1] \times \Omega \times [0,1] \times \Omega} 1_B(\beta u^1, \alpha v^1) dm_{\beta u^1}(\alpha v^1) dm_y(\beta u^1) \\
&= \int_{[0,1] \times \Omega \times [0,1] \times \Omega} 1_B(\beta u^1, \alpha v^1) d\mu(\alpha) d\delta_{\beta u^1}(v^1) d\mu(\beta) d\delta_y(u^1) \\
&= \int_{[0,1] \times [0,1] \times \Omega} 1_B(\beta u^1, \alpha \beta u^1) d\mu(\alpha) d\mu(\beta) d\delta_y(u^1) \\
&= \int_{[0,1] \times [0,1]} 1_B(\beta y, \alpha \beta y) d\mu(\alpha) d\mu(\beta) \\
&= \int_{[0,1]^2} 1_B(\beta y, \alpha \beta y) d\mu^2(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Mostramos com isso que  $\Pi_{x,y}^2(\Omega^2 \times B) = m_y^2(B)$ . Analogamente,  $\Pi_{x,y}^2(A \times \Omega^2) = m_x^2(A)$ . Ou seja,  $\Pi_{x,y}^2 \in \Gamma(m_x^2, m_y^2)$ .

Raciocinando por indução, acabamos de demonstrar a seguinte proposição.

**Proposição 4.3.2.** *Sejam  $t \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \Omega$  e  $\mu$  uma medida de probabilidade a priori invariante por bijeções de  $[0, 1]$ . Então*

$$\Pi_{x,y}^t := \int_{[0,1]^t} \delta_{(\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w)} d\mu^t(w) \quad (4.10)$$

é acoplamento de  $m_x^t$  e  $m_y^t$ , em que  $m_x = \mu \times \delta_x$ .

Ou seja, juntamos as órbitas de acordo com o pareamento dado na definição de núcleo fracamente contrativo. Isto nos motiva a definir

**Definição 4.3.3.** Quando  $M$  é um núcleo de transição fracamente contrativo, definimos um acoplamento natural  $P$  como segue. Para cada  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ , fixamos permutações  $\eta, \sigma$  satisfazendo o item 1 da definição 4.2.3; então para cada par  $(x, y)$  e cada palavra  $w = (j_1, \dots, j_t) \in [0, 1]^t$  sejam  $\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w \in \Omega^t$  sequências  $(x_1, \dots, x_t), (y_1, \dots, y_t)$  tais que  $x_1 = \eta(j_1)x \in B(x)$  e  $y_1 = \sigma(j_1)y \in B(y)$ , e para todo  $n$ :  $x_{n+1} = \eta_n(j_n)x_n \in B(x_n)$  e  $y_{n+1} = \sigma_n(j_n)y_n \in B(y_n)$  em que  $\eta_n$  e  $\sigma_n$  são bijeções de  $[0, 1]$  em  $[0, 1]$  associadas ao par  $(x_n, y_n)$ . Então o acoplamento natural é

$$\Pi_{x,y}^t = \int_{[0,1]^t} \delta_{(\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w)} d\mu^t(w).$$

O lema a seguir se alimentará no Teorema 4.2.1, ele nos mostra que a taxa de decaimento é realmente impulsionada pela regularidade dos observáveis.

**Lema 4.3.4.** Se  $M$  é um núcleo de transição 1-para- $\infty$  fracamente contrativo com acoplamento natural  $P$ , então

- $P$  tem decaimento exponencial com respeito a  $\omega_{\alpha+\beta \log}$ , para todo  $\alpha \in (0, 1)$  e todo  $\beta \in \mathbb{R}$ ;
- $P$  tem decaimento polinomial de grau  $\beta$  com respeito a  $\omega_{\beta \log}$  para todo  $\beta > 0$ .

*Demonstração.* Seja  $\omega = \omega_{\alpha,\beta}$ ,  $x, y \in \Omega$ . Na construção acima, para cada  $x, y$  a medida  $\Pi_{x,y}^t$  emparelha as sequências  $\bar{x}_t$  e  $\bar{y}_t$ , cujos pontos finais  $e_t(\bar{x}_t)$  e  $e_t(\bar{y}_t)$  estão a uma distância no máximo  $d(x, y)/2$  uma da outra. Com isso

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^t \times \Omega^t} \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}_t, \bar{y}_t) &= \int_{[0,1]^t} \int_{\Omega^t \times \Omega^t} \omega \circ d(e_t(\bar{x}_t), e_t(\bar{y}_t)) d\delta_{(\bar{x}_t^w, \bar{y}_t^w)}(\bar{x}_t, \bar{y}_t) d\mu^t(w) \\ &= \int_{[0,1]^t} \omega \circ d(e_t(\bar{x}_t^w), e_t(\bar{y}_t^w)) d\mu^t(w) \\ &\leq \omega \left( \int_{[0,1]^t} d(e_t(\bar{x}_t^w), e_t(\bar{y}_t^w)) d\mu^t(w) \right) \\ &\leq \omega \left( \frac{d(x, y)}{2^t} \right). \end{aligned}$$

Consideremos primeiro o caso  $\alpha > 0$  e seja  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $\omega(r/2) \leq \theta\omega(r)$  para todo  $r \in [0, 1]$  (Lema 1.1.9). Como para todo  $t \in \mathbb{N}$  temos  $2^{-t} \leq 1/2$  e para todo

$x, y$  temos

$$\int \omega \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) \leq \omega\left(\frac{d(x, y)}{2}\right) \leq \theta \omega \circ d(x, y),$$

então  $\mathbf{P}$  tem decaimento exponencial.

Consideremos agora o caso  $\alpha = 0$ . Para todo  $t \in \mathbb{N}$  temos

$$\begin{aligned} \int \omega_{\beta \log} \circ d(x_t, y_t) d\Pi_{x,y}^t(\bar{x}, \bar{y}) &\leq \omega_{\beta \log} \left( \frac{d(x, y)}{2^t} \right) = \left( \log \frac{r_0}{\frac{d(x, y)}{2^t}} \right)^{-\beta} \\ &= \left( \log \frac{2^t r_0}{d(x, y)} \right)^{-\beta} = \left( \log(2^t) + \log \frac{r_0}{d(x, y)} \right)^{-\beta} \\ &= \left( t \log(2) + \log \frac{r_0}{d(x, y)} \right)^{-\beta} = \frac{1}{\left( (\omega_{\beta \log} \circ d(x, y))^{\frac{1}{\beta}} + t \log \lambda' \right)^\beta} \end{aligned}$$

o qual é precisamente o decaimento polinomial de grau  $\beta$  requerido.  $\square$

Em resumo temos o seguinte

**Teorema 4.3.5.** *Seja  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  um mapa Lipschitz  $\infty$ -para-1 cujo núcleo de transição backward  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  dada por  $m_x = \mu \times \delta_x$  é fracamente contrativo. Seja  $f \in \mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$  um potencial flat com relação ao acoplamento natural  $\mathbf{P}$ , então vale um teorema RPF para o operador de transferência  $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{\mathbf{M}, f, T}$  em  $\mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$ . Além disso,*

- $\alpha > 0$  implica  $\mathcal{L}_f$  ter a propriedade da lacuna espectral em  $\mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$ ;
- $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$  implica  $\mathcal{L}_f$  ter decaimento polinomial de grau  $\beta$  em  $\mathcal{C}^{\beta \log}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Desde que  $\mathbf{M}$  é fracamente contrativa, o acoplamento natural é  $\omega$ -Hölder qualquer que seja o módulo  $\omega$ . Como  $T$  é Lipschitz, a composição com  $T$  preserva  $\mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$ , e podemos aplicar Corolário 3.3.5 quando  $\Omega$  é compacto (veja [27], Proposição 3.2 e Corolário 3.3). Ou seja, existe um autovalor positivo  $\lambda_f$  e uma autofunção estritamente positiva  $h_f \in \mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$ , e o potencial normalizado  $\tilde{f} = f + \log h_f - \log h_f \circ T - \log \lambda_f$  pode ser tomado flat e em  $\mathcal{C}^{\alpha + \beta \log}(\Omega)$ .

Pelo Lema 4.3.4, o acoplamento natural  $\mathbf{P}$  tem  $\omega_{\alpha + \beta \log}$ -decaimento com taxa exponencial (se  $\alpha > 0$ ) ou polinomial de grau  $\beta$  (se  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ ). O Teorema 4.2.1

mostra que  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^*$  tem taxa de decaimento no mínimo  $F$  que é exponencial (se  $\alpha > 0$ ) ou polinomial de grau  $\beta$  (se  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ ), com respeito a métrica de Wasserstein  $W_{\alpha+\beta \log}$ . Em particular, o operador dual tem uma única medida de probabilidade fixada  $\nu_{\tilde{f}}$ . Segue que  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^*$  tem uma única autoprobabilidade  $d\nu_f = \frac{1}{h_f} d\nu_{\tilde{f}}$  e  $\mu_f = \nu_{\tilde{f}}$  é  $T$ -invariante.

Agora, podemos aplicar a Proposição 2.3.8 a  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ . Primeiro, se  $\alpha > 0$  então podemos tomar  $F(t, r) = C(1 - \delta)^t r$ , para alguma constante  $C > 0$  e  $\delta \in (0, 1)$  e obtemos

$$\|\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi - \mu_f(\varphi)\|_{\alpha+\beta \log} \leq C \text{Hol}_{\alpha+\beta \log}(\varphi)(1 - \delta)^t$$

em que  $C$  depende visivelmente do  $\text{diam}(\Omega)$ . Já que  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi = \lambda_f^t h_f \mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(h_f^{-1} \varphi)$ , quando  $\mu_f(\varphi) = 0$  vem

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi\|_{\alpha+\beta \log} &= \|\lambda_f^t h_f \mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(h_f^{-1} \varphi) - \mu_f(h_f^{-1} \varphi)\|_{\alpha+\beta \log} \\ &\leq C \lambda_f^t \text{Hol}_{\alpha+\beta \log}(h_f^{-1} \varphi)(1 - \delta)^t \\ &\leq C(1 - \delta)^t \lambda_f^t \|h_f^{-1} \varphi\|_{\alpha+\beta \log} \\ &\leq C'(1 - \delta)^t \lambda_f^t \|\varphi\|_{\alpha+\beta \log}. \end{aligned}$$

Segundo, se  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ , podemos tomar  $F(t, r) = \frac{Br}{(tr^{\frac{1}{\beta}} + b)^\beta}$  e obtemos

$$\|\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi - \mu_f(\varphi)\|_\infty \leq \text{Hol}_{\beta \log}(\varphi) \frac{C}{t^\beta},$$

da qual deduzimos como acima  $\|\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi\|_\infty \leq C \frac{\|\varphi\|_{\beta \log}}{t^\beta} \lambda_f^t$ , quando  $\mu_f(\varphi) = 0$ .

Em ambos os casos, o decaimento das correlações segue da forma clássica: observa-se que  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(\varphi_1 \cdot \varphi_2 \circ T^t) = \mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(\varphi_1) \cdot \varphi_2$ , assumimos  $\mu_f(\varphi_1) = 0$  por adicionar uma constante, e então escrevemos

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi_1 \cdot \varphi_2 \circ T^t d\mu_f \right| &= \left| \int \varphi_1 \cdot \varphi_2 \circ T^t d(\mathcal{L}_{\tilde{f}}^{*t} \mu_f) \right| \\ &= \left| \mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(\varphi_1 \cdot \varphi_2 \circ T^t) d\mu_f \right| \\ &= \left| \mathcal{L}_{\tilde{f}}^t(\varphi_1) \cdot \varphi_2 d\mu_f \right| \\ &\leq \|\mathcal{L}_{\tilde{f}}^t \varphi_1\|_\infty \int |\varphi_2| d\mu_f, \end{aligned}$$

encerrando a demonstração. □

# Capítulo 5

## TEOREMAS LIMITES PARA CADEIAS DE MARKOV

O objetivo deste capítulo é explorar o fato que o operador de Ruelle normalizado pode ser visto como uma cadeia de Markov para obter teoremas limites para a cadeia de Markov associada. A referência que estamos seguindo muito de perto é [12, 21, 33].

Queremos estabelecer teoremas limite para a sequência de variáveis aleatórias  $\{\xi(X_n)\}_{n \geq 1}$ , em que  $\xi$  é uma função a valores reais mensurável definida em  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(X_n)_{n \geq 0}$  é uma cadeia de Markov sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  associada a uma probabilidade de transição  $Q$  também sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Mais especificamente, lidaremos com teoremas do tipo limite central. Seja

$$S_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \xi(X_k), \quad n \geq 1.$$

Para determinar a função característica de  $S_n$  introduzimos os núcleos de Fourier  $Q_t$  ou  $Q(t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , associado ao núcleo  $Q$  e a função  $\xi$ , os quais são definidos por

$$Q_t(x, dy) = e^{it\xi(y)}Q(x, dy).$$

**Lema 5.0.1.** *Para  $t \in I_0$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$ ,  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$  e  $n \geq 1$ , temos*

$$E_\mu[e^{itS_n} f(X_n)] = \mu(Q_t^n f),$$

*em particular*

$$E_\mu[e^{itS_n}] = \mu(Q_t^n \mathbf{1}).$$

*Demonstração.* Veja [[21] pág. 23]. □

Se queremos estudar a convergência em distribuição da sequência  $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ , somos levados a considerar a sequência de núcleos iterados  $(Q(\frac{t}{\sqrt{n}})^n)_{n \geq 1}$ . Observe que o comportamento dessa sequência tem dependência em  $Q$  somente para  $|t|$  pequeno, de forma que, no sentido que iremos especificar,  $Q_t$  pode ser interpretado como uma perturbação de  $Q_0 = Q$ .

## 5.1 QUASE-COMPACIDADE

O cenário geral para o estudo de teoremas limites para cadeias de Markov

**Definição 5.1.1.** *Um operador limitado  $Q$  definido sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$  é quase-compacto se podemos decompor  $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$  em dois subespaços fechados  $Q$ -invariantes*

$$\mathcal{C}^\omega(\Omega) = F \oplus H$$

onde  $r(Q|_H) < r(Q)$ ,  $\dim F < +\infty$  e cada autovalor de  $Q|_F$  tem módulo  $r(Q)$ .

Seja  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach de funções limitadas definidas em  $\Omega$ ,  $\xi$  uma função mensurável sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  e  $Q$  um núcleo de transição.

**Condições 5.1.2** ( $\mathcal{H}(m)$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ). *Dizemos que  $(Q, \xi, \mathcal{B})$  satisfaz a condição  $\mathcal{H}(m)$  se as seguintes condições valem:*

(H1) (i)  $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$ , se  $f \in \mathcal{B}$  então  $\bar{f}, |f| \in \mathcal{B}$ ;

(ii) Para cada  $x \in \Omega$ ,  $\delta_x$  é um funcional linear contínuo sobre  $\mathcal{B}$ ;

(iii) Se  $f, g \in \mathcal{B}$  são limitadas, então  $fg \in \mathcal{B}$ ;

(H2) (i)  $Q$  possui uma medida de probabilidade invariante  $\nu$  a qual define um funcional linear sobre  $\mathcal{B}$ ;

(ii)  $Q$  é limitado e quase-compacto sobre  $\mathcal{B}$  com  $\sup_n \|Q^n\| < \infty$ ;

(iii)  $\ker(1 - Q) = \text{span}\{1\}$ ;

(H3) existe uma vizinhança  $I_0$  de 0 em  $\mathbb{R}$  tal que  $Q(\cdot) \in C^m(I_0, \mathcal{L}_{\mathcal{B}})$  e, para  $k = 1, \dots, m$ , os operadores  $Q(\cdot)^{(k)}(0) = \left(\frac{d^k Q(t)}{dt^k}\right)_{t=0}$  são definidos por meio dos núcleos  $Q(x, dy)(i\xi(y))^k$ .

**Condições 5.1.3** ( $\hat{\mathcal{D}}$ ). Dizemos que  $(Q, \xi, \mathcal{B})$  satisfaz a condição  $\hat{\mathcal{D}}$  se, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Q(t)$  age continuamente sobre  $\mathcal{B}$  e se a função  $Q(\cdot)$  é contínua de  $\mathbb{R}$  para  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

## Notações

Iremos denotar por  $s(Q, \mathcal{B})$  o número de autovalores de módulo 1 de  $Q$  agindo sobre  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}_+$  denota a classe de todas as funções não negativas em  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'_p$  o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  que definem operadores lineares contínuos sobre  $\mathcal{B}$ . Para  $r > 0$ , definimos

$$\mathcal{B}_{+,r} = \{f \in \mathcal{B} : f \geq 0, \|f\| < r\}, \quad \mathcal{B}'_{p,r} = \{\mu \in \mathcal{B}'_p : \|\mu\| < r\}.$$

A medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$  é denotada por  $\mathcal{L}$ . Denotamos por  $C_b(\mathbb{R})$  o espaço de todas funções contínuas limitadas a valores complexos sobre  $\mathbb{R}$ . Para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,  $C_{\mu^l}(\mathbb{R})$  denota o espaço de todas as funções  $g \in C_b(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} u^l g(u) = 0$ .

## 5.2 ENUNCIADOS DE TEOREMAS TIPO LIMITE CENTRAL

No contexto das seções anteriores

**Teorema 5.2.1** (Teorema do Limite Central). *Suponha que as hipóteses  $\mathcal{H}(2)$  valem. Então  $\xi^2$  é  $\nu$ -integrável e, se  $\nu(\xi) = 0$ , existe  $\sigma^2 \geq 0$  tal que*

(i) Para  $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$  e  $g \in C_b(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_n |E_{\mu}[g(S_n/\sqrt{n})] - \mathcal{N}(0, \sigma^2)(g)| = 0,$$

se  $g \in C_{1,2}(\mathbb{R})$ , então esta convergência é uniforme com respeito a  $\mu \in \mathcal{B}'_{p,r}$ ,

(ii)  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_{\nu}[S_n^2]$  e, se  $s(Q, \mathcal{B}) = 1$ , então, para cada  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , temos  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_{\mu}[S_n^2]$ ,

(iii) se  $\sigma^2 = 0$ , então existe  $\xi_1 \in \mathcal{B}$  tal que  $\xi_1^2$  é  $\nu$ -integrável e

$$\xi(X_1) = \xi_1(X_0) - \xi_1(X_1) \quad P_\nu - q.c.;$$

(iv) se  $\mu = \nu$  ou  $s(Q, \mathcal{B}) = 1$  e  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , temos, para  $f \in \mathcal{B}_+$  e  $g \in C_b(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu[f(X_n)g(S_n/\sqrt{n})] = \nu(f)\mathcal{N}(0, \sigma^2)(g),$$

se  $g \in C_{\downarrow 2}(\mathbb{R})$ , esta convergência é uniforme em  $f \in \mathcal{B}_{+,r}$  ou  $(\mu, f) \in \mathcal{B}'_{p,r} \times \mathcal{B}_{+,r}$ .

**Teorema 5.2.2** (Teorema do Limite Central com taxa de convergência). *Suponha que a hipótese  $\mathcal{H}(3)$  vale. Se  $\nu(\xi) = 0$  e  $\sigma^2 > 0$ , então existe uma constante  $C$  tal que, para  $\mu \in \mathcal{B}'_p$  e  $f \in \mathcal{B}_+$  satisfazendo  $\nu(f) > 0$ , temos*

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| P_\mu[S_n \leq u\sigma\sqrt{n}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right| &\leq \frac{C(\|\mu\| + 1)}{\sqrt{n}}, \\ \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| E_\nu[f(X_n)1_{[S_n \leq u\sigma\sqrt{n}]}] - \nu(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right| &\leq \frac{C\|f\|}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

**Teorema 5.2.3** (Teorema do Limite Central local). *Suponha que as hipóteses  $\mathcal{H}(2)$  e  $\hat{\mathcal{D}}$  valem, que  $\xi$  é não aritmética, que  $\nu(\xi) = 0$  e  $\sigma^2 > 0$ . Então, para  $g \in C_{\downarrow 2}(\mathbb{R})$  e  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , temos*

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} |\sigma\sqrt{2\pi n} E_\mu[g(S_n - u) - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \mathcal{L}(g)]| = 0,$$

esta convergência é uniforme em  $\mu \in \mathcal{B}'_{p,r}$ .

Além disso, se  $\mu = \nu$  ou  $s(Q, \mathcal{B}) = 1$  e  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , temos, para  $f \in \mathcal{B}_+$

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} |\sigma\sqrt{2\pi n} E_\mu[g(S_n - u) - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \mathcal{L}(g)]| = 0,$$

a convergência é uniforme em  $f \in \mathcal{B}_+$  ou em  $(\mu, f) \in \mathcal{B}'_{p,r} \times \mathcal{B}_{+,r}$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [21]. □

### 5.3 OPERADOR DE RUELLE

Nesta seção, mostraremos que o operador de Ruelle normalizado satisfaz as condições dos teoremas limite enunciados na seção anterior. Para mais informações sobre cadeias de Markov sugerimos [33].



A grosso modo, uma cadeia de Markov a tempo discreto  $\Phi$  sobre um espaço métrico  $\Omega$  é uma coleção enumerável  $\Phi \equiv \{\Phi_0, \Phi_1, \dots\}$  de variáveis aleatórias, com  $\Phi_i$  tomando valores em  $\Omega$  de forma que suas trajetórias futuras dependem do presente e suas trajetórias passadas dependem apenas do valor atual.

Uma construção concreta de uma cadeia de Markov a tempo discreto, pode ser feita especificando um espaço mensurável  $(X, \mathcal{F})$ , onde cada elemento de  $\Phi$  é definido, uma distribuição de probabilidade inicial  $p : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , e um núcleo de probabilidade de transição  $P : \Omega \times \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  tal que

- i) para  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  fixado a aplicação  $x \mapsto P(x, A)$  é uma função  $\mathcal{B}(\Omega)$ -mensurável;
- ii) para cada  $x \in \Omega$  fixado a aplicação  $A \mapsto P(x, A)$  é uma medida de probabilidade de Borel sobre  $\Omega$ .

Formalmente,

**Definição 5.3.1.** *Um processo estocástico  $\Phi$  definido sobre  $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu) = (\Omega^\mathbb{N}, \mathcal{B}(\Omega^\mathbb{N}), \mathbb{P}_\mu)$  e tomando valores em  $\Omega$  é chamado uma cadeia de Markov homogênea no tempo, com núcleo de probabilidade de transição  $P$  e distribuição inicial  $\mu$  se suas distribuições finito dimensionais satisfazem, para cada  $n \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(\Phi_0 \in A_0, \dots, \Phi_n \in A_n) \\ = \int_{A_0} \dots \int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n) dP(y_{n-2}, y_{n-1}) \dots dP(y_0, y_1) d\mu(y_0). \end{aligned}$$

**Definição 5.3.2** (Medida Invariante). *Uma medida sigma finita  $\nu$  sobre  $\mathcal{B}(\Omega)$  com a propriedade*

$$\nu(A) = \int_{\Omega} P(x, A) d\nu(x)$$

*é chamada invariante ou  $P$ -invariante.*

Consideremos um núcleo de transição  $\mathbf{M} = (m_x)_{x \in \Omega}$  sobre um espaço Polonês  $\Omega$ , e para  $t \in \mathbb{N}$  e  $x \in \Omega$ ,  $m_x^t$  a medida sobre  $\Omega^t$  a qual é a lei de uma cadeia de Markov  $(X_1, \dots, X_t)$  começando em  $X_0 = x$  e seguindo o núcleo de transição  $\mathbf{M}$ . Em outras palavras, para conjuntos mensuráveis  $A_0, A_1, \dots, A_t$  temos

$$\begin{aligned} m_x^t(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_t \in A_t) \\ = \int_{A_0} \cdots \int_{A_{t-1}} m_{x_{t-1}}(A_t) dm_{x_{t-2}}(x_{t-1}) \cdots dm_{x_0}(x_1) d\delta_x(x_0), \end{aligned}$$

ou, denotando por  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_t)$  pontos de  $\Omega^t$ ,  $m_x^t$  agindo sobre as funções mensuráveis limitadas, é definido por

$$\int_{\Omega^t} f(\bar{x}) dm_x^t(\bar{x}) = \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\bar{x}) dm_{x_{t-1}}(x_t) dm_{x_{t-2}}(x_{t-1}) \cdots dm_x(x_1).$$

Dado um potencial normalizado  $\tilde{f}$  e um conjunto mensurável  $A$ , note que

$$(e^{\tilde{f}} m_x)(1_A) = \int_{\Omega} e^{\tilde{f}(y)} 1_A(y) dm_x(y) = \mathcal{L}_{M, \tilde{f}}(1_A)(x),$$

ou seja, podemos olhar para o operador de Ruelle como um núcleo de transição de probabilidade e vice-versa.

**Afirmção 5.3.3.** *As afirmações a seguir são válidas:*

- (i) a função  $\mathbf{1} = 1_{\Omega} \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ ;
- (ii) se  $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ , então  $|f| \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ .

*Demonstração.* De fato,

- (i)  $\|\mathbf{1}\|_{\omega} = \|\mathbf{1}\|_{\infty} + \text{Hol}_{\omega}(\mathbf{1}) = 1 < \infty$ .
- (ii) Note que para  $x \neq y$  temos

$$\left| |f|(x) - |f|(y) \right| = \left| |f(x)| - |f(y)| \right| \leq |f(x) - f(y)|,$$

logo,  $\text{Hol}_{\omega}(|f|) \leq \text{Hol}_{\omega}(f)$ . Ou seja,  $|f| \in \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ .

□

**Afirmção 5.3.4.** *Para cada  $x \in \Omega$ ,  $\delta_x : \mathcal{C}^{\omega}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\delta_x(f) = f(x)$ , define um funcional limitado.*

*Demonstração.* Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  então  $\delta_x(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = \delta_x(f) + \alpha \delta_x(g)$ . Ou seja,  $\delta_x$  é linear.

$$\|\delta_x\|_{\text{op}} = \sup_{\|f\|_\omega=1} |\delta_x(f)| = \sup_{\|f\|_\omega=1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\|_\omega=1} \|f\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_\omega=1} \|f\|_\omega = 1.$$

Portanto,  $\delta_x$  é limitado.  $\square$

**Proposição 5.3.5.** *A automedida de  $\mathcal{L}_{M, \tilde{f}}^*$  associada a  $\tilde{f}$  é uma medida invariante para o núcleo  $(e^{\tilde{f}} m_x)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\nu = \nu_{\tilde{f}}$  a automedida de  $\mathcal{L}_{M, \tilde{f}}^*$  associada a  $\tilde{f}$ , então

$$\nu(A) = \int_\Omega 1_A d\nu = \int_\Omega 1_A d\mathcal{L}_{M, \tilde{f}}^* \nu = \int_\Omega \mathcal{L}_{M, \tilde{f}} 1_A d\nu = \int_\Omega (e^{\tilde{f}} m_x)(A) d\nu(x)$$

como afirmamos.  $\square$

Observe que o funcional  $T_\nu$ , definido em  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  por  $T_\nu(f) = \int_\Omega f d\nu$ , é contínuo.

A seguir usaremos o Teorema 3.3.2 para mostrar que o operador de Ruelle é quase-compacto.

Seja  $h = h_f$ ,  $\nu = \nu_f$  a autofunção e automedida associadas ao potencial  $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Sejam  $Q, \Pi : \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  definidos da seguinte maneira

$$Q(\varphi)(x) \equiv \frac{\mathcal{L}_{M, f}(h\varphi)(x)}{\lambda h(x)}, \quad \Pi(\varphi)(x) \equiv \int_X \varphi h d\nu.$$

**Proposição 5.3.6.** *Assuma as hipóteses do Teorema 3.3.2. Então  $\Pi$  e  $Q$  agem sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$  como operadores limitados, e  $\Pi Q = Q \Pi = \Pi$ . Além disso,  $\|(Q - \Pi)^n\|_\omega \leq C s^n$ , onde  $s$  é como no Teorema 3.3.2, e a decomposição  $\mathcal{C}^\omega(\Omega) := \mathbb{R} \oplus \ker(\Pi)$  em subespaços fechados, com  $\mathbb{R}$  entendido como funções constantes, é invariante sob  $Q$  e  $\Pi$ . Ademais,  $Q|_{\mathbb{R}} = \Pi|_{\mathbb{R}} = id$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $h$  é limitada por cima e por baixo. Portanto  $\varphi h \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  e  $\varphi/h \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$  para qualquer  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Isto implica que  $Q$  age sobre  $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ . Além disso, usando as propriedades de  $\nu$  e  $h$ , temos

$$\Pi \circ Q(\varphi) = \int_\Omega Q(\varphi) h d\nu$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (h\lambda)^{-1} \mathcal{L}_{M,f}(h\varphi) h \, d\nu \\
&= \int_{\Omega} \lambda^{-1} \mathcal{L}_{M,f}(h\varphi) \, d\nu \\
&= \int_{\Omega} \lambda^{-1} h\varphi \, d\mathcal{L}_{M,f}^*(\nu) \\
&= \int_{\Omega} \lambda^{-1} h\varphi \lambda \, d\nu \\
&= \int_{\Omega} h\varphi \, d\nu \\
&= \Pi(\varphi)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Q \circ \Pi(\varphi) &= \frac{\mathcal{L}_{M,f}(h\Pi(\varphi))}{\lambda h} \\
&= \frac{\int_{\Omega} e^f h\Pi(\varphi) \, dm_{(\cdot)}}{\lambda h} \\
&= \frac{\int_{\Omega} e^f h [\int_{\Omega} h\varphi \, d\nu] \, dm_{(\cdot)}}{\lambda h} \\
&= \frac{\int_{\Omega} [\int_{\Omega} e^f h \, dm_{(\cdot)}] h\varphi \, d\nu}{\lambda h} \\
&= \frac{\int_{\Omega} e^f h \, dm_{(\cdot)} \int_{\Omega} h\varphi \, d\nu}{\lambda h} \\
&= \frac{\lambda h \int_{\Omega} h\varphi \, d\nu}{\lambda h} \\
&= \Pi(\varphi).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Pi Q = Q\Pi = \Pi. \tag{5.1}$$

Como  $\int_{\Omega} h \, d\nu = 1$ ,

$$\Pi(\Pi(\varphi))(x) = \int_{\Omega} \Pi(\varphi) h \, d\nu = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} \varphi h \, d\nu \right] h \, d\nu = \int_{\Omega} \varphi h \, d\nu = \Pi(\varphi)(x).$$

Ou seja,  $\Pi^2 = \Pi$ . Por indução,

$$\Pi^n = \Pi. \tag{5.2}$$

Usaremos as equações (5.1) e (5.2) para mostrarmos que vale a identidade  $(Q - \Pi)^n = Q^n - \Pi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
(Q - \Pi)^2(\varphi) &= (Q - \Pi)((Q - \Pi)(\varphi)) \\
&= (Q - \Pi)(Q(\varphi) - \Pi(\varphi)) \\
&= Q(Q(\varphi) - \Pi(\varphi)) - \Pi(Q(\varphi) - \Pi(\varphi)) \\
&= Q^2(\varphi) - Q \circ \Pi(\varphi) - \Pi \circ Q(\varphi) + \Pi^2(\varphi) \\
&= Q^2(\varphi) - \Pi(\varphi) - \Pi(\varphi) + \Pi(\varphi) \\
&= Q^2(\varphi) - \Pi(\varphi).
\end{aligned}$$

O resultado segue por indução. Agora, aplicando o Teorema 3.3.2 a  $h\varphi$  no numerador e  $h$  no denominador, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(h\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(h)} - \frac{\nu(h\varphi)}{\nu(h)} \right\|_{\omega} &\leq Cs^n \left( \text{Hol}_{\omega}(h\varphi) + \left| \frac{\nu(h\varphi)}{\nu(h)} \right| \text{Hol}_{\omega}(h) \right) \|1/h\|_{\infty} \\
&\leq Cs^n \left( \|h\|_{\infty} \text{Hol}_{\omega}(\varphi) + \left\| \|\varphi\|_{\infty} \frac{\nu(h)}{\nu(h)} \right\| \text{Hol}_{\omega}(h) \right) \|1/h\|_{\infty} \\
&= Cs^n (\|h\|_{\infty} \text{Hol}_{\omega}(\varphi) + \|\varphi\|_{\infty} \text{Hol}_{\omega}(h)) \|1/h\|_{\infty} \\
&\leq CC's^n (\text{Hol}_{\omega}(\varphi) + \|\varphi\|_{\infty}) \\
&= CC's^n \|\varphi\|_{\omega},
\end{aligned}$$

em que  $C' = \max\{\|1/h\|_{\infty}\|h\|_{\infty}, \|1/h\|_{\infty}\text{Hol}_{\omega}(h)\}$ . Mas,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(h\varphi)}{\mathcal{L}_{M,f}^n(h)} - \frac{\nu(h\varphi)}{\nu(h)} \right\|_{\omega} &= \left\| \frac{\mathcal{L}_{M,f}^n(h\varphi)}{\lambda^n h} - \nu(h\varphi) \right\|_{\omega} \\
&= \|Q^n(\varphi) - \Pi(\varphi)\|_{\omega} \\
&= \|(Q - \Pi)^n(\varphi)\|_{\omega}.
\end{aligned}$$

Com isso,  $\|(Q - \Pi)^n(\varphi)\|_{\omega} \leq CC's^n \|\varphi\|_{\omega}$ .

Mostraremos a invariância dos espaços. Se  $c \in \mathbb{R}$  então

$$Q(c) = (\lambda_f h)^{-1} \mathcal{L}_{M,f}(ch)$$

$$\begin{aligned}
&= c(\lambda_f h)^{-1} \mathcal{L}_{M,f}(h) \\
&= c(\lambda_f h)^{-1} \lambda_f h = c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi(c) &= \int_{\Omega} ch \, d\nu \\
&= c \int_{\Omega} h \, d\nu \\
&= c.
\end{aligned}$$

Isso mostra que  $Q(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  $\Pi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  e que  $Q|_{\mathbb{R}} = \Pi|_{\mathbb{R}} = id$ .

Se  $\varphi \in \ker(\Pi)$ , então

$$\begin{aligned}
\Pi Q(\varphi) &= Q \Pi(\varphi) = Q(0) = 0, \\
\Pi(\varphi) &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $Q(\ker(\Pi)) \subset \ker(\Pi)$  e  $\Pi(\ker(\Pi)) \subset \ker(\Pi)$ . A decomposição  $\mathcal{C}^\omega(\Omega) = \mathbb{R} \oplus \ker(\Pi)$  é obtida de maneira natural; toda  $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$  pode ser escrita como  $\varphi = \int_{\Omega} \varphi h \, d\nu + [\varphi - \int_{\Omega} \varphi h \, d\nu]$ .  $\square$

**Corolário 5.3.7.** *O operador de Ruelle normalizado é quase-compacto.*

*Demonstração.* Verificaremos que  $Q$  definido acima satisfaz a definição de quase compacidade. Já que o Teorema 5.3.6 nos fornece a decomposição e invariância, nos resta verificar que  $r(Q|_{\ker(\Pi)}) < r(Q)$ , e que cada autovalor de  $Q|_{\mathbb{R}}$  tem módulo  $r(Q)$ . Note que  $Q|_{\mathbb{R}}(c) = c = 1c$ , portanto  $Q|_{\mathbb{R}}$  tem 1 como único autovalor, ou seja,  $r(Q|_{\mathbb{R}}) = 1 = r(Q)$ . Mostraremos que  $r(Q|_{\ker(\Pi)}) < r(Q)$ . Quando nos restringimos a  $\ker(\Pi)$ , segue do Teorema 5.3.6  $\|Q^n(\varphi)\|_{\omega} \leq C s^n \|\varphi\|_{\omega}$ . Então, dado  $1 > \varepsilon > 0$  existe  $N_0$  tal que para  $n \geq N_0$ ,  $\|Q^n(\varphi)\|_{\omega} \leq \varepsilon$ . Sabemos que se  $\lambda \in \sigma(Q)$ , então

$$\lambda^n \in \sigma(Q^n) \subseteq B(0, \|Q^n\|_{\text{op}}) \subseteq B(0, \varepsilon),$$

portanto,  $\lambda < \varepsilon^{1/n} < 1$ . Logo  $r(Q|_{\ker(\Pi)}) < 1 = r(Q)$ .  $\square$

**Afirmção 5.3.8.**  $\ker(1 - Q) = \text{span}\{1\}$ .

*Demonstração.* De fato,  $\varphi \in \ker(1 - Q) \iff 0 = (1 - Q)\varphi = \varphi - Q(\varphi) \iff Q(\varphi) = \varphi \iff \varphi \in \text{span}\{1\}$ .  $\square$

**Afirmção 5.3.9.** *Seja  $\xi$  uma função limitada em  $\Omega$ . Então existe uma vizinhança  $I_0$  de 0 em  $\mathbb{R}$  tal que  $Q(\cdot) \in C^m(I_0, \mathcal{L}_B)$  e, para  $k = 1, \dots, m$ , os operadores  $Q(\cdot)^{(k)}(0) = \left(\frac{d^k Q(t)}{dt^k}\right)_{t=0}$  são definidos por meio dos núcleos  $(e^{\tilde{f}(y)} dm_x(y))(i\xi(y))^k$ .*

*Demonstração.* Para toda função mensurável limitada  $\varphi$  e  $x \in \Omega$  temos

$$\int_{\Omega} \varphi(y) Q_t(x, dy) = \int_{\Omega} \varphi(y) e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y).$$

Note que

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(y) e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{\Omega} e^{\tilde{f}(y)} dm_x(y) = \|\varphi\|_{\infty}.$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(y) Q_t(x, dy) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(y) e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) \\ \int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d}{dt} Q_t(x, dy) &= \int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d}{dt} e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) \\ &= \int_{\Omega} \varphi(y) i\xi(y) e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y). \end{aligned}$$

Já que

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(y) i\xi(y) e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|\xi\|_{\infty} \int_{\Omega} e^{\tilde{f}(y)} dm_x(y) = \|\varphi\|_{\infty} \|\xi\|_{\infty},$$

podemos aplicar mais uma vez o Teorema da convergência dominada e obter

$$\int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d^2}{dt^2} Q_t(x, dy) = \int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d^2}{dt^2} e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) = \int_{\Omega} \varphi(y) (i\xi(y))^2 e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y).$$

Prosseguindo assim, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d^k}{dt^k} Q_t(x, dy) = \int_{\Omega} \varphi(y) \frac{d^k}{dt^k} e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y) = \int_{\Omega} \varphi(y) (i\xi(y))^k e^{it\xi(y) + \tilde{f}(y)} dm_x(y),$$

com isso,  $\frac{d^k}{dt^k} Q_t(x, dy)|_{t=0} = (i\xi(y))^k e^{\tilde{f}(y)} dm_x(y)$ .  $\square$

As Afirmações 5.3.3, 5.3.4, 5.3.8, 5.3.9 juntamente com a proposição 5.3.5 e o corolário 5.3.7 garantem que as condições  $H1$ ,  $H2$  e  $H3$  em 5.1.2 valem para  $(\mathcal{L}_{\tilde{f}}, \xi, \mathcal{C}^\omega(\Omega))$ .

Com isso, temos os seguintes teoremas limites.

**Teorema 5.3.10** (Teorema do Limite Central). *Seja  $\nu = \nu_{\tilde{f}}$  a medida invariante. Então  $\xi^2$  é  $\nu$ -integrável e, se  $\nu(\xi) = 0$ , existe  $\sigma^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega} (S_n(\xi))^2 d\nu$  tal que, para toda  $g \in C_b(\mathbb{R})$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(S_n/\sqrt{n}) d\nu = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy.$$

*Se  $g \in C_{\downarrow 2}(\mathbb{R})$ , então a convergência é uniforme.*

*Demonstração.* Segue de *i*), já que  $\nu \in \mathcal{B}'_p$ . □

**Teorema 5.3.11.** *Para cada  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , temos  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_{\mu}[S_n^2]$ .*

Portanto, no teorema 5.3.10, a integração com respeito à medida invariante pode ser substituída por uma integração com relação a qualquer medida de probabilidade em  $\mathcal{B}'_p$ .

*Demonstração.* Segue de *ii*) em 5.2.1, uma vez que  $s(\mathcal{L}_{\tilde{f}}, \mathcal{C}^\omega(\Omega)) = 1$ . □

**Teorema 5.3.12.** *Seja  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , então para  $f \in \mathcal{B}_+$  e  $g \in C_b(\mathbb{R})$ , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mu}[f(X_n)g(S_n/\sqrt{n})] = \nu(f)\mathcal{N}(0, \sigma^2)(g),$$

*e se  $g \in C_{\downarrow 2}(\mathbb{R})$ , a convergência é uniforme em  $f \in \mathcal{B}_{+,r}$  ou  $(\mu, f) \in \mathcal{B}'_{p,r} \times \mathcal{B}_{+,r}$ .*

*Demonstração.* Já que  $s(\mathcal{L}_{\tilde{f}}, \mathcal{C}^\omega(\Omega)) = 1$  e estamos tomando  $\mu \in \mathcal{B}'_p$ , o resultado segue de *iv*) em 5.2.1. □

**Teorema 5.3.13** (CLT com taxa de convergência). *Seja  $\xi \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$  com  $\int_{\Omega} \xi d\nu = 0$  e suponha  $\sigma^2 > 0$ . Então existe uma constante  $C$  tal que, para  $f \in \mathcal{B}_+$  satisfazendo  $\nu(f) > 0$ , temos*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \nu[\{x \in \Omega : S_n(\xi)(x) \leq u\sigma\sqrt{n}\}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| E_{\nu}[f(X_n)1_{[S_n \leq u\sigma\sqrt{n}]}] - \nu(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right| \leq \frac{C\|f\|_{\omega}}{\sqrt{n}}$$



*Demonstração.* Como  $\mathcal{H}(3)$  vale para  $(\mathcal{L}_{\tilde{f}}, \xi, \mathcal{C}^\omega(\Omega))$ , estamos supondo  $\int_{\Omega} \xi d\mu = 0$  e  $\sigma^2 > 0$ , e o resultado segue do teorema 5.2.2, já que  $\nu \in \mathcal{B}_+$ .  $\square$

**Teorema 5.3.14** (Teorema do Limite Central local). *Suponha que  $\xi$  é não aritmética, que  $\nu(\xi) = 0$  e  $\sigma^2 > 0$ . Então, para qualquer  $g \in C_{\downarrow 2}(\mathbb{R})$ , temos*

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \int_{\Omega} g(S_n(\xi) - u) d\nu - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \right| = 0.$$

*Demonstração.* Segue de 5.2.3, já que as hipóteses  $\mathcal{H}(2)$  e  $\hat{\mathcal{D}}$  valem.  $\square$



# Referências Bibliográficas

- [1] R. L. ADLER AND B. WEISS. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 57:1573–1576, **1967**.
- [2] C. D. ALIPRANTIS AND K. C. BORDER. *Infinite dimensional analysis*. Springer, Berlin, third edition, **2006**. A hitchhiker’s guide.
- [3] R. B. ASH. *Probability and measure theory*. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, second edition, **2000**. With contributions by Catherine Doléans-Dade.
- [4] V. BALADI. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*. World Scientific Publishing Co., **2000**.
- [5] A. T. BARAVIERA, L. M. CIOLETTI, A. O. LOPES, J. MOHR AND R. R. SOUZA. *On the general one-dimensional XY Model: positive and zero temperature, selection and non-selection*. Rev. Math. Phys., v. 23, 1063–1113, **2011**.
- [6] R. G. BARTLE. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, **1995**.
- [7] M. BESSA AND M. STADLBAUER. *On the Lyapunov spectrum of relative transfer operators*. Stoch. Dyn., v. 16, n. 6, 1650024 (25 pages), **2016**.
- [8] R. BISSACOT AND E. GARIBALDI. *Weak KAM methods and ergodic optimal problems for countable Markov shifts*. Bull. Braz. Math. Soc., v. 41, 321–338, **2010**.
- [9] R. BOWEN. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*. Amer. J. Math., 92:725–747, **1970**.

- [10] R. BOWEN. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Math., v. 470, Springer, **1994**.
- [11] L. CIOLETTI AND E. A. SILVA. *Spectral Properties of the Ruelle Operator on the Walters Class over Compact Spaces*, Nonlinearity, v. 29, n. 8, 2253–2278, **2016**.
- [12] L. CIOLETTI, E. A. SILVA AND M. STADLBAUER. *Thermodynamic Formalism for Topological Markov Chains on Standard Borel Spaces*. to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst. - Series A, **2019**.
- [13] Y. DAON. *Bernoullicity of equilibrium measures on countable Markov shifts* Discrete Contin. Dyn. Syst., v. 33, p. 4003–4015, **2013**.
- [14] L. C. EVANS AND W. GANGBO. *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, volume 653. American Mathematical Society, **1999**.
- [15] A. H. FAN. *A proof of the Ruelle theorem*. Rev. Math. Phys., v. 7, 1241–1247, **1995**.
- [16] A. FAN AND Y. JIANG. *On Ruelle-Perron-Frobenius operators. I. Ruelle theorem*. Comm. Math. Phys., 223(1):125–141, **2001**.
- [17] A. FAN AND Y. JIANG. *On Ruelle-Perron-Frobenius operators. II. Convergence speeds*. Comm. Math. Phys., 223(1):143–159, **2001**.
- [18] H. O. GEORGII. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. de Gruyter, Berlin, **1988**.
- [19] J. GLIMM AND A. JAFFE. *Quantum physics: A functional integral point of view*. Second edition, Springer-Verlag, New York, **1987**.
- [20] M. HAIRER AND J. C. MATTINGLY. *Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier-Stokes equations*. Ann. Probab. v. 36, n. 6, 2050–2091, **2008**.
- [21] H. HENNION AND L. HERVÉ. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, volume 1766 of Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, **2001**.

- [22] O. JENKINSON. *Ergodic optimization*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Series A, v. 15, 197–224, **2006**.
- [23] O. JENKINSON, D. MAULDIN AND M. URBANSKI. *Ergodic optimization for countable alphabet subshifts of finite type*. Ergodic Theory Dynam. Systems, v. 26, 1791–1803, **2006**.
- [24] Y. P. JIANG. *A Proof of existence and simplicity of a maximal eigenvalue for Ruelle-Perron-Frobenius operators*. Lett. Math. Phys, v. 48, 211–219, **1999**.
- [25] L. V. KANTOROVICH. *On the transfer of masses*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (Russian), 37, 227–229, **1942**.
- [26] L. V. KANTOROVICH. *On a problem of Monge*, Uspekhi Mat. Nauk. (Russian), v. 3, 225–226, **1948**.
- [27] B. KLOECKNER. *An optimal transportation approach to the decay of correlations for non-uniformly expanding maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 1–37, **2018**.
- [28] B. KLOECKNER. *Effective high-temperature estimates for intermittent maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 1–17, **2017**.
- [29] B. KLOECKNER, A. O. LOPES, AND M. STADLBAUER. *Contraction in the Wasserstein metric for some Markov chains, and applications to the dynamics of expanding maps*. Nonlinearity v.28, N. 11, 4117–4137, **2015**.
- [30] A. O. LOPES, J. MOHR, J. MENGUE, AND R. R. SOUZA. *Entropy and Variational Principle for one-dimensional Lattice Systems with a general a-priori measure: finite and zero temperature*. Ergodic Theory Dynam. Systems, v. 35, p. 1925–1961, **2015**.
- [31] E. LORCH. *Spectral theory*. University Texts in the Mathematical Sciences, Oxford University Press, New York, **1962**.
- [32] J. MENGUE AND A. O. LOPES. *Selection of measure and a large deviation principle for the general one-dimensional XY model*. Dyn. Syst., v. 29, n. 1, 24–39, **2014**.

- [33] S. MEYN AND R. L. TWEEDIE. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, **2009**.
- [34] G. MONGE. *Memoire sur la Theorie des Deblais et des Remblais*, Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris, **1781**.
- [35] Y. OLLIVIER. *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*. J. Funct. Anal., 256(3):810–864, **2009**.
- [36] W. PARRY AND M. POLLICOTT. *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*. Astérisque, v. 187–188, **1990**.
- [37] R. PELED AND Y. SPINKA. *Lectures on the spin and loop  $O(n)$  models*. To appear in Sojourns in Probability and Statistical Physics, celebrating Charles Newman's 70th birthday.
- [38] D. RUELLE. *Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas*. Comm. Math. Phys. v. 9, p. 267–278, **1968**.
- [39] D. RUELLE. *Thermodynamic Formalism*. Second edition, Cambridge, **2004**.
- [40] O. SARIG. *Thermodynamic formalism for countable Markov Shifts*. Ergodic Theory Dynam. Systems, v. 19, p. 1565–1593, **1999**.
- [41] O. SARIG. *Lecture Notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov Shifts*. Preprint PenState USA, **2009**.
- [42] E. A. SILVA. *O operador de Ruelle em espaços de estados compactos*. Tese de Doutorado em Matemática – Universidade de Brasília, Brasília, **2016**.
- [43] J. G. SINAI. *Markov partitions and  $C$ -diffeomorphisms*. Funktsional. Anal. i Prilozhen (Translated in Funct. Anal. Appl.), 2(1):64–89, **1968**.
- [44] M. STADLBAUER. *Coupling methods for random topological Markov chains*. Ergodic Theory Dynam. Systems, v. 37, n. 3, p. 971–994, **2017**.
- [45] M. VIANA. *Stochastic dynamics of deterministic systems*. Notes IMPA, v. 21, **1997**.

- [46] C. VILLANI. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, **2003**.
- [47] C. VILLANI. *Optimal Transport Old and New*, USA, NY, New York: Springer-Verlag, vol. 338, **2009**.





# Apêndice A

## DEFINIÇÕES E TEOREMAS AUXILIARES

### A.1 TOPOLOGIA GERAL

**Teorema A.1.1** (Teorema de Cantor-Tychonoff). *O produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é compacto se, e somente se, cada fator  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) é compacto.*

**Teorema A.1.2** (Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff). *Seja  $V$  um espaço localmente convexo de Hausdorff,  $C$  um subconjunto convexo de  $V$  e  $F : C \rightarrow E$  uma aplicação contínua tal que*

$$F(C) \subseteq K \subseteq C,$$

*com  $K$  compacto. Então  $F$  tem pelo menos um ponto fixo.*

Enunciaremos alguns conceitos resultados da teoria da medida e probabilidade. Para ver estes resultados com maior detalhe, veja, por exemplo, [3], [6].

### A.2 ESPAÇOS MENSURÁVEIS

**Definição A.2.1** ( $\sigma$ -álgebra). *Uma coleção  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Sigma$  é dita  $\sigma$ -álgebra em  $\Sigma$  se satisfaz:*

$$(S1) \quad \Sigma \text{ e } \emptyset \in \mathcal{F};$$

(S2) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c$  também está;

(S3) Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de elementos de  $\mathcal{F}$ , então  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Exemplo A.2.2** ( $\sigma$ -álgebra de Borel). Um conjunto de Borel é qualquer conjunto em um espaço topológico que pode ser formado a partir de conjuntos abertos (ou fechados) através de operações, como união ou interseção contáveis, além dos conjuntos complementares. Quando o espaço topológico é  $\mathbb{R}$ , considere os intervalos do tipo  $(a, b)$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ . A  $\sigma$ -álgebra de Borel, denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , é a menor  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  contendo todos os intervalos  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definição A.2.3** (Espaço Mensurável). Um par  $(X, \mathcal{F})$  consistindo de um conjunto  $X$  e de uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  é chamado de espaço mensurável. Qualquer conjunto em  $\mathcal{F}$  é chamado um conjunto  $\mathcal{F}$ -mensurável, mas quando a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é fixa, o conjunto será dito apenas mensurável.

**Definição A.2.4** (Medida).  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  é uma medida se satisfaz:

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- b)  $\mu(A) \geq 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ ;
- c) Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma coleção enumerável de conjuntos de  $\mathcal{F}$  dois a dois disjuntos. Então  $\mu$  satisfaz:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Tais conjuntos de  $\mathcal{F}$  são denotados conjuntos mensuráveis.

**Definição A.2.5** (Espaço  $\sigma$ -finito). Dizemos que o conjunto  $\Sigma$  é  $\sigma$ -finito se existe uma família enumerável  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{F}$  tal que  $\Sigma = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$  e  $\mu(A_n) < \infty$ , para todo  $n$ .

Os conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  com a propriedade  $\mu(A) = 0$  são ditos conjuntos nulos. Tais conjuntos são importantes na definição a seguir:

**Definição A.2.6.** Uma condição (igualdade, convergência, etc.) é válida quase certamente com respeito a medida  $\mu$  (denotada por  $\mu$ -q.c. ou simplesmente q.c. se  $\mu$  é entendida) se, e somente se, existe um conjunto  $A \in \mathcal{F}$ -mensurável, com  $\mu(A) = 0$ , tal que a condição vale fora de  $A$ .

**Definição A.2.7** (Função mensurável). *Sejam  $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1)$  e  $(\Sigma_2, \mathcal{F}_2)$  dois espaços mensuráveis, onde os espaços  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são equipados com as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ . Uma função  $g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  é dita mensurável se a pré imagem de  $A$  sob  $g$  está em  $\mathcal{F}_1$  para toda  $A \in \mathcal{F}_2$ , isto é,*

$$g^{-1}(A) \equiv \{x \in \Sigma_1 \mid g(x) \in A\} \in \mathcal{F}_1, \quad \forall A \in \mathcal{F}_2.$$

**Definição A.2.8** (Função Integrável). *Seja  $(\Sigma, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. A coleção  $L^1(\Sigma) = L^1(\Sigma, \mathcal{F}, \mu)$  de funções integráveis consiste de todas as funções reais  $\mathcal{F}$ -mensuráveis  $f$  definidas sobre  $X$  cuja integral do módulo, com respeito à medida  $\mu$ , é finita. Ou seja, uma função  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\mu$ -integrável em  $(\Sigma, \mathcal{F})$  quando*

$$\|g\|_1 = \int_{\Sigma} |g| \, d\mu < +\infty.$$

**Teorema A.2.9** (Teorema da Convergência Monótona). *Se  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis em  $(\Sigma, \mathcal{F})$ , a valores reais que convergem para  $f$ , então*

$$\int g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Classe de funções limitadas  $\mu$ -q.c. sobre  $(\Sigma, \mathcal{F})$  é denotada por  $L^\infty(\Sigma, \mathcal{F}, \mu) \equiv L^\infty(\Sigma)$  e é definida como

**Definição A.2.10.** *A classe das funções mensuráveis sobre  $\Sigma$  limitadas  $\mu$ -q.c. é denotada por  $L^\infty(\Sigma)$  e tem norma dada por:*

$$\|g\|_\infty = \inf\{B \in \mathbb{R}; |g(x)| \leq B \text{ } \mu\text{-q.c. sobre } \Sigma\}.$$

**Observação A.2.11.** *Se restringirmos a norma  $L^\infty(\Sigma)$  as funções contínuas, tal norma coincide com a norma da convergência uniforme em  $C(\Sigma)$ . Por isso, neste texto, adotaremos a notação desta norma para as funções contínuas.*

Estamos em condições de enunciar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

**Teorema A.2.12** (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Sejam  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções integráveis as quais convergem quase certamente a uma função mensurável a valores reais  $g$  e  $\mu$  uma medida sobre  $(\Sigma, \mathcal{F})$ . Se existir uma função  $\mu$ -integrável  $h$  tal que  $|g_n| \leq h$  para todo  $n$ , então  $g$  é integrável e*

$$\int_{\Sigma} g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} g_n \, d\mu. \quad (\text{A.1})$$

Outro resultado que foi usado em várias partes no decorrer do texto foi o Teorema de Fubini-Tonelli cujo conteúdo é descrito a seguir.

**Teorema A.2.13** (Teorema de Fubini-Tonelli). *Suponha que  $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$  e  $(\Sigma_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  são espaços de medida sigma-finitos.*

a) [Tonelli] *Se  $f \in L(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$  é uma função positiva, então as funções  $g(x) = \int f_x d\mu_2$  e  $h(y) = \int f^y d\mu_1$  estão em  $L(\Sigma_1)$  e  $L(\Sigma_2)$ , respectivamente, são positivas e*

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int \left[ \int f(x, y) \, d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \\ &= \int \left[ \int f(x, y) \, d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \end{aligned}$$

b) [Fubini] *Se  $f \in L^1(\mu_1 \times \mu_2)$ , então  $f_x \in L^1(\mu_2)$  para  $x \in \Sigma_1 - q.c.$ ,  $f^y \in L^1(\mu_1)$  para  $y \in \Sigma_2 - q.c.$ . Além disso, as funções definidas q.c.  $g(x) = \int f_x d\mu_2$  e  $h(x) = \int f^y d\mu_2$  estão em  $L^1(\mu_1)$  e  $L^1(\mu_2)$ , respectivamente e a igualdade acima é válida.*

Onde  $f_x$  e  $f^y$  denotam  $f$  com  $x$  e  $y$  fixos, respectivamente.

Trabalharemos com um produto de uma família enumerável de espaços de medida. Precisamos definir um conceito muito importante para tais espaços, o conceito de cilindro. Sejam  $(\Sigma_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  espaços de probabilidade para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Considere o produto cartesiano

$$\bar{\Sigma} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \Sigma_i\}.$$

Denotamos por cilindros de  $\Sigma$  os subconjuntos da forma

$$[m; A_m, \dots, A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \Sigma_i \text{ para } m \leq j \leq n\}$$

com  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$  e  $A_j \in \Sigma_j$ , para  $m \leq j \leq n$ . Definimos a sigma-álgebra produto em  $\bar{\Sigma}$  sendo a sigma-álgebra  $\bar{\mathcal{F}}$  gerada pela família de todos os cilindros. Por fim, enunciaremos o seguinte resultado:

**Teorema A.2.14.** *Existe uma única medida  $\mu$  em  $(\bar{\Sigma}, \bar{\mathcal{F}})$  tal que*

$$[m; A_m, \dots, A_n] = \mu_m(A_m) \dots \mu_n(A_n)$$

para qualquer cilindro  $[m; A_m, \dots, A_n]$ . Em particular,  $\mu$  é uma probabilidade.

### A.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

**Definição A.3.1** (Variável aleatória). *Uma variável aleatória  $X$  sobre um espaço de probabilidade  $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$  é uma função Borel mensurável de  $\Omega$  a  $\mathbb{R}$*

Se  $X$  é uma variável aleatória sobre  $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$  a medida de probabilidade induzida por  $X$  é a medida de probabilidade  $P_X$  sobre  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  dada por

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Um conceito fundamental na Teoria da probabilidade é

**Definição A.3.2** (Esperança). *Se  $X$  é uma variável aleatória sobre  $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$ , a esperança de  $X$  é definida por*

$$E[X] = \int_{\Sigma} X dP,$$

se a integral existir.

## A.4 ELEMENTOS DE TEORIA ESPECTRAL

Nesta seção, em forma de apêndice, vamos enunciar alguns resultados clássicos de Teoria Espectral. A referência que seguimos é [31]. Seja  $X$  um espaço de Banach e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear, definimos o espectro do operador  $T$  por

$$\text{spec}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - T)^{-1} \text{ não existe}\}.$$

O conjunto resolvente  $\rho(T)$  de  $T$  é definido como o complemento do espectro  $\text{spec}(T)$ . O conjunto resolvente de um operador linear é um conjunto aberto pois seu complementar, o espectro, é compacto. O raio espectral do  $T$  é definido como  $r(T) = \sup\{|x-y|; x, y \in \text{spec}(T)\}$ . O raio espectral tem a seguinte caracterização

$$r(T) = \liminf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{A.2})$$

Também é conhecido que  $\text{spec}(T) \subset B(0, r(T))$  e que  $\text{spec}(T) = \text{spec}(T^*)$ , onde  $T^* : X^* \rightarrow X^*$  denota o adjunto de  $T$ .

**Definição A.4.1.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado e  $\gamma$  uma curva de Jordan retificável contida em  $\rho(T)$ , então definimos a projeção espectral  $\pi_T : X \rightarrow X$  do seguinte modo*

$$\pi_T = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

**Observação A.4.2.** *Se o interior de  $\gamma$  está contido no interior de  $\rho(T)$  então  $\pi_T = 0$ . Por outro lado se  $\text{spec}(T)$  está contido inteiramente no interior de  $\gamma$  então  $\pi_T = Id$ .*

**Proposição A.4.3.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  é um operador linear limitado. Então  $\pi_T$  é uma projeção, i.e.,  $\pi_T^2 = \pi_T$ . Além disso  $\pi_T$  comuta com  $T$ .*

Um subconjunto  $\text{spec}(T)$  o qual é simultaneamente aberto e fechado em  $\text{spec}(T)$  é chamado conjunto espectral. Seja  $\Sigma(T) \subset \text{spec}(T)$  um conjunto espectral, e  $\gamma$  uma curva de Jordan retificável contida em  $\rho(T)$  contendo  $\Sigma(T)$  em seu interior. Denote por  $\pi_{T, \Sigma(T)}$  a projeção espectral associada a  $T$  e  $\gamma$ , i.e.,

$$\pi_{T, \Sigma(T)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

onde  $\gamma$  é uma curva de Jordan retificável qualquer envolvendo o conjunto espectral  $\Sigma(T)$ , completamente contida em  $\rho(T)$  e tal que qualquer outro ponto do espectro está fora de  $\gamma$ .

Denotamos  $X_{\Sigma(T)} = \pi_{T, \Sigma(T)}X$  e  $T_{\Sigma(T)} = T|_{X_{\Sigma(T)}}$ .

**Proposição A.4.4.** *Seja  $\Sigma(T)$  um conjunto espectral de  $\text{spec}(T)$ , então  $\text{spec}(T_{\Sigma(T)}) = \Sigma(T)$ .*

**Proposição A.4.5.** *Sejam  $\pi_1, \pi_2 : X \rightarrow X$  projeções sobre  $X$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que se  $\|\pi_1 - \pi_2\| < \epsilon$  e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  tem o mesmo posto, i.e.,  $\dim \pi_1(X) = \dim \pi_2(X)$ .*