Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Princípio Variacional para Espaços Hausdorff Localmente Compactos

por

Hermano Dantas Farias
Orientador: André Caldas de Souza

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, março de 2019.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Princípio Variacional para Espaços Hausdorff Localmente Compactos

por

Hermano Dantas Farias

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de março de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. André Caldas de Souza – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Eduardo Antônio da Silva – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Alessandro Gaio Chimenton – UFF (Membro)

Resumo

Na presente dissertação revisitamos e revisamos o Princípio Variacional apresentado no artigo [CP18] para sistemas dinâmicos Hausdorff localmente compactos. O Princípio Variacional afirma que as entropias topológica e de Kolmogorov-Sinai se relacionam por

$$h(T) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T).$$

No artigo original, utiliza-se da hipótese de metrizabilidade dos espaços topológicos. Sob o escopo da estrutura uniforme, estruturas matemáticas que generalizam a métrica, pode-se omitir a hipótese de metrizabilidade na demonstração do Princípio Variacional, necessitando-se apenas que os espaços sejam Hausdorff e localmente compactos.

Palavras-chave: Princípio variacional, entropia, entropia topológica, entropia de Kolmogorov-Sinai, estrutura uniforme, teoria ergódica.

Abstract

In the present dissertation we revisit and review the Variational Principle, as presented in the paper [CP18], for locally compact Haussdorf dynamical systems. The Variational Principle asserts that the topological and Kolmogorov-Sinai entropies are related by

$$h\left(T\right)=\sup_{\mu}h_{\mu}\left(T\right).$$

In the original paper, one makes use of metrazibility of topological spaces. Under the scope of uniform structures, mathematical structures that generalize the metric, one can omit the metrazibility hypothesis in the proof of the Variational Principle, requiring only that the spaces to be Hausdorff and locally compact.

Keywords: Variational principle, entropy, topological entropy, Kolmogorov-Sinai entropy, uniform structure, ergodic theory.

Sumário

Introdução

A presente dissertação é resultado de longos devaneios sobre diversos e possíveis assuntos para a finalização de meu mestrado no Departamento de Matemática da UnB. Quando deu-se o tempo de decidir, terminei com um assunto “padrão”, no sentido de dissertar sobre um artigo de meu orientador.

No entanto, o culminar dessa toada se mostrou mais rico e interessante que o encomendado, certamente me ampliando os conhecimentos à assuntos sobre quais pouco ou nada conhecia, citando aqui a rica teoria dos filtros e as estruturas uniformes.

O resultado central desse trabalho é a demonstração do Princípio Variacional para entropia, que afirma que o supremo entre as entropias de Kolmogorov-Sinai é a entropia topológica. O texto é baseado amplamente no trabalho de Caldas e Patrão, “Entropy and its variational principle for locally compact metrizable systems” [CP18], mas com uma pequena variação sugerida por André Caldas, substituindo-se a hipótese “metrizable” por “Hausdorff”, baseada nas ideias da demonstração de Misiurewicz do Princípio Variacional para sistemas Hausdorff compactos [Mis75].

A omissão da metrizabilidade nas hipóteses se mostrou um tanto desafiadora, pois, embora o teorema de representação de Riez-Markov não necessite de metrizabilidade, em geral as topologias fracas* das funções contínuas que vão à zero no infinito não são sequencialmente compactas, as medidas de probabilidade não formam um conjunto fechado na topologia fraca* e um espaço Hausdorff localmente compacto apresenta mais de uma estrutura uniforme. Esses percalços, no entanto, pode ser contornado, usando-se o ferramental adequado.

Quatro serão os ingredientes para a demonstração do Princípio Variacional: a definição da entropia topológica usando coberturas admissíveis; a extensão da entropia de Kolmogorov-Sinai para medidas positivas com norma entre 0 e 1; a existência de uma estrutura uniforme onde a entropia uniforme, a entropia de Bowen assumem o mesmo valor que a entropia por coberturas admissíveis; a existência de uma extensão de sistemas Hausdorff localmente compactos para um sistema Hausdorff compacto, cuja a entropia uniforme para determinadas estruturas uniforme é igual à do sistema original. O conteúdo dos três primeiros capítulos têm a intenção de sementar e dar fundamento a esses fatos, para que o final contenha uma demostração auto contida do Princípio Variacional.

O texto é dividido em 4 capítulos obedecendo um encadeamento lógico dos temas.

O primeiro capítulo trata das definições e resultados básicos, que alicerçam a demonstração do Princípio Variacional. No entanto busca-se apresentar todas as demonstrações de proposições necessárias ao princípio variacional, a fim de manter o texto auto contido. Apenas resultados que necessitam de muita digressão foram omitidos, como a Representação de Riez-Markov e o teorema de Banach-Alaoglu. Uma leitura rápida já serve àqueles que conhecem e dominam as propriedades de espaços Hausdorff localmente compactos, estruturas uniformes e convergência de medidas de Radon. Vale destacar a seção sobre estruturas uniformes do Capítulo 1, que, por ser assunto menos difundido na literatura, talvez requira uma atenção especial. Tentei nela utilizar um ferramental mínimo relatando quando conveniente que os resultados mais gerais que o formato apresentado, mas toda a exposição é restrita aos espaços Hausdorff localmente compactos. Ao leitor de primeiras marés, recomendo leitura calma e, necessitando de maior claridade, a buscar leitura externa sobre o assunto.

Os segundo e terceiro Capítulos tratam das versões das entropias topológica e de Kolmogorov-Sinai. No segundo apresentamos a entropia topológica e a topologia uniforme, que é muito próxima a definição de Bowen dada em [Bow71] e parcialmente generalizada em [Mis75]. A relação entre essas duas é estabelecida em seguida. No Capítulo 3 redefine-se-se a entropia de uma partição para medidas μ finitas com $0 \leq \mu(X) \leq 1$, e define-se a entropia de Kolmogorov-Sinai.

O Capítulo 4 trata exclusivamente do Princípio Variacional, dividido em três seções, nas quais as duas primeiras servem a demonstrar o Princípio Variacional e a terceira a apresentar um estudo de caso ilustrando a importância das definições das entropias utilizadas na dissertação.

E escolha dessa estruturação do texto, deixando o principal exemplo apenas para o final do texto, é devido a necessidade de um ferramental completo para fazer uma elucidação final de tudo mostrado no restante do texto, inclusive nuanças da demonstração.

Agradeço à todos que de alguma maneira estiveram presentes durante meu mestrado, em especial meus contemporâneos no programa de pós-graduação, Maria Edna e Paulo, por estudarem comigo em inomináveis e aterradores momentos, aos meus colegas e amigos de trabalho, ao meu chefe no Instituto de Física da UnB, Sebastião William, por me flexibilizar as horas para realizar o mestrado, e claro à André Caldas por me ter como orientando apesar de minhas especificidades como aluno de mestrado de dedicação não exclusiva.

Também agradeço e dedico esta dissertação a minha amada esposa, Rayssa, que sempre me oferece suporte e paciência às minhas epopeias acadêmicas e crises existenciais, mesmo por vezes não estando imune aos seus invernos.

Capítulo 1

Definições e Conceitos Preliminares

A presente dissertação tem como resultado central o Princípio Variacional para sistemas dinâmicos em espaços topológicos Hausdorff localmente compactos, cuja apresentação e demonstração exige diversos elementos em Matemática. Neste capítulo os conceitos necessários e resultados serão introduzidos ou citados. O estilo da apresentação e o conteúdo segue as referências [Jam87] e [Fol13] para as Seções 1.2 e 1.4. Tratam-se de conteúdos gerais num texto que busca ser auto contido, de modo que diversos resultados considerados elementares serão expostos.

1.1 Notações e resultados elementares

Nesta seção, estabeleceremos a notação utilizada por todo texto e algumas propriedades básicas de operações entre conjuntos.

As expressões “maior dos conjuntos” e “menor dos conjuntos” sempre referem-se à da inclusão. Famílias de conjuntos serão denotadas pelos caracteres caligráficos $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ etc. Os caracteres $\mathcal{T}$, $\mathscr{F}$ e $\mathscr{U}$ serão reservados, com e sem índices, à topologias, filtros e estruturas uniformes, respectivamente. *Abertos* são elementos de topologia. *Entourages* serão elementos de estruturas uniformes. Dados um espaço topológico X, denotamos os borelianos por $\mathscr{B}[X]$. Medidas serão denotadas por caracteres gregos, μ e σ. No texto trataremos exclusivamente de medidas finitas. As funções contínuas e contínuas de suporte compacto em X serão denotadas por, respectivamente, $C(X)$ e $C_c(X)$.

Operações com coberturas.

Definição 1.1.1. *Uma* ***cobertura*** *de um espaço X é uma família $\mathscr{A}$ de seus subconjuntos tal que $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$. Uma cobertura $\mathscr{A}$ é dita* ***finita*** *se sua cardinalidade for finita e será uma* ***partição*** *se for finita e seus elementos forem disjuntos.*

Coberturas serão abertas, mensuráveis ou compactas se seus elementos forem abertos, mensuráveis ou compactos, respectivamente. Dado $\mathscr{A}$, uma cobertura de X, e $Y \subset X$, temos uma cobertura para Y definida pelas intersecções

$$Y \cap \mathscr{A} = \left\{ A \cap Y \,\middle|\, A \in \mathscr{A} \right\}.$$

Definição 1.1.2. *Dadas coberturas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ definimos a relação*

$$\mathscr{B} \prec \mathscr{A}$$

se dado $A \in \mathscr{A}$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $A \subset B$. Dizemos que $\mathscr{A}$ ***refina****, ou que é* ***mais fina*** *que, $\mathscr{B}$.*

Proposição 1.1.3. *A relação dada na Definição 1.1.2 é uma relação de pré-ordem.*

Demonstração. Dadas as coberturas $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ com $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \prec \mathscr{C}$, tome $A \subset B \subset C$ com $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ e $C \in \mathscr{C}$. Daí $\mathscr{A} \prec \mathscr{C}$. Além disso $\mathscr{A} \prec \mathscr{A}$. □

Definição 1.1.4. *Dadas coberturas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ definimos sua* ***junção*** *como a cobertura*

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = \left\{ A \cap B \,\middle|\, A \in \mathscr{A} \text{ e } B \in \mathscr{B} \right\}.$$

É imediato que a junção de duas coberturas é mais fina que ambas coberturas. Usamos também a notação

$$\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i = \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2 \vee \cdots \vee \mathscr{A}_n.$$

Uma subcobertura de uma cobertura $\mathscr{A}$ é uma subfamília $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ que é também uma cobertura. Denotaremos como $N(\mathscr{A})$ a menor cardinalidade das subcoberturas de $\mathscr{A}$. Observe que $N(\mathscr{A}) < \infty$ se, e somente se, existir uma subcobertura finita. Denotamos ainda

$$N_Y(\mathscr{A}) = N(Y \cap \mathscr{A}).$$

Seja $T : X \to X$ e $\mathscr{A}$ uma cobertura de X. Denotamos

$$T^{-k}(\mathscr{A}) = \left\{ T^{-k}(A) \,\middle|\, A \in \mathscr{A} \right\},$$

e

$$\mathscr{A}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{A}).$$

Proposição 1.1.5. *Dados um conjunto X, uma função $T : X \to X$, as coberturas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ de X e os subconjuntos $Y, Z \subset X$, temos as propriedades,*

1. *Se $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ então $N(\mathscr{A}) \leq N(\mathscr{B})$*
2. *$\mathscr{A}^n \prec \mathscr{B}^n$*
3. *$N(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \leq N(\mathscr{A}) N(\mathscr{B})$.*
4. *$N_Y(\mathscr{A}) \leq N(\mathscr{A})$*
5. *$N_{Y \cup X}(\mathscr{A}) \leq N_Y(\mathscr{A}) + N_Z(\mathscr{A})$*
6. *$N(\mathscr{A}^n) \leq N(\mathscr{A}^{n-q}) N(\mathscr{A}^q)$ para $n \geq q$.*
7. *Se $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, então $N(\mathscr{A}) \geq N(\mathscr{B})$*

Demonstração. 1. Para toda subcobertura $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{B}$, dado $B \in \mathscr{B}'$ tome $A_B \in \mathscr{A}$ tal que $B \subset A_B$. Segue daí que $\mathscr{A}' = \{A_B |\, B \in \mathscr{B}'\}$ é cobertura de X. Assim para toda subcobertura de $\mathscr{A}$ existe uma de $\mathscr{B}$ com mesma cardinalidade, de onde $N(\mathscr{A}) \leq N(\mathscr{B})$.

2. Observe que se $A \subset B$ então $T^{-k}(A) \subset T^{-k}(B)$ para $k \in \mathbb{N}$. Daí se $C \in \mathscr{A}^n$,

$$C = A_1 \cap \cdots \cap T^{-n}(A)$$

tome $B_i \in \mathscr{B}$ tal que $A_i \subset B_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e claro que

$$C \subset B_1 \cap \cdots \cap T^{-n}(B)$$

3. Basta observar que se $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ e $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ de cardinalidade finita ou não, então

$$\#\mathscr{A} \vee \mathscr{B}' \leq \#\mathscr{A}'\#\mathscr{B}'$$

4. Segue do fato de que toda cobertura $\mathscr{C}$ de Xentão $\mathscr{C} \cap Y$ é cobertura de Y.

5. Basta observar que se $\mathscr{Y} \subset \mathscr{A}$ cobre Y e $\mathscr{Z} \subset \mathscr{A}$ cobre Z, então $\mathscr{Y} \cup \mathscr{Z}$ cobre $Y \cup Z$.

6. Observe que

$$\mathscr{A}^n = \mathscr{A}^q \vee T^{-q}(\mathscr{A}^q).$$

Mas para toda cobertura $\mathscr{C}$, $T^{-q}(\mathscr{C})$ é cobertura, de onde $N(\mathscr{C}) \leq N(T^{-q}(\mathscr{C}))$. Daí o resultado segue do item *3*.

7. Segue do fato de que toda subcobertura de $\mathscr{A}$ ser uma subcobertura de $\mathscr{B}$.

$\square$

Concavidade de funções logarítmicas.

Esse pequena subseção vamos estudar a concavidade da função

$$\begin{array}{rccl} f: & (0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\log\frac{1}{x} \end{array}.$$

Temos que f é contínua em $x \neq 0$. Além disso a regra de l'Hopital diz que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

de modo que podemos estender $f(0) = 0$. Analisando o gráfico da função, temos que f é claramente côncava, fato confirmado pela sua derivada segunda negativa no interior de $[0,1]$,

$$f''(x) = -\frac{1}{x}.$$

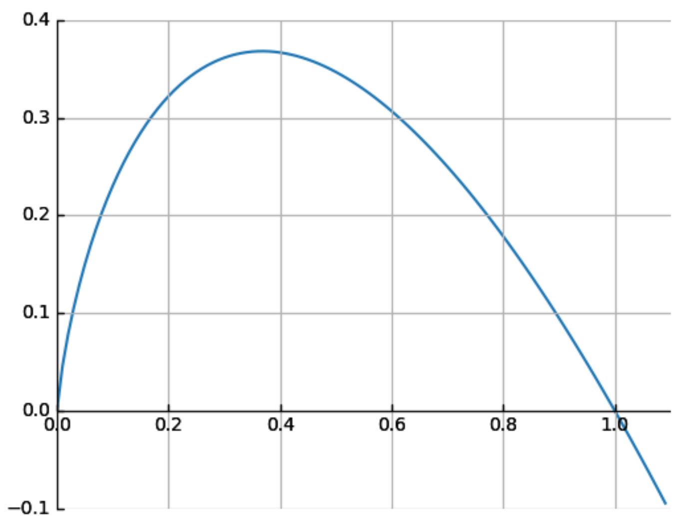

Figura 1.1: $f(x) = x\log\frac{1}{x}$

A entropia de Kolmogorov-Sinai, a ser vista no Capítulo 3, depende de algumas propriedades de funções que serão aqui vistas. Considere o conjunto das sequências finitas positivas de soma limitada à 1,

$$P = \left\{ t = (t_1, \ldots, t_n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \right\}.$$

Defina agora a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} H: \; P & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\sum_t t_i \log \frac{1}{t_i} \end{array}$$

Proposição 1.1.6. *Valem as propriedades*

1. *H é côncava, no sentido de que dados $t, r \in P$ sequências de mesmo comprimento e coeficientes α, β com $\alpha + \beta = 1$ então $\alpha H(t) + \beta H(r) \leq H(\alpha t + \beta r)$.*

2. *Fixado o comprimento $t_1 + t_2 .. t_n = k$, $H(t)$ é maximal quando $t_1 = t_2 \cdots = t_n$. e nesse casog $H(t) = k(\log n - \log k)$*

Demonstração. 1. Primeiro observamos que a função $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ em $x \in (0, 1]$ é côncava. Daí para $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ vale que

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \cdots + \alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

Temos daí que

$$\begin{aligned} \alpha H(t) + \beta H(r) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha f(t_i) + \beta f(r_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} f(\alpha t_i + \beta r_i) = H(\alpha t + \beta r). \end{aligned}$$

2. Dado $t \in P$ uma sequencia de n elementos. Quando $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ não há o que mostrar. Considere então $\sum_{i=1}^{n} t_i = \alpha$. Podemos ver H como uma função de n variáveis, $(t_1, \ldots, t_n)$ que é claramente diferenciável. Usando então o teorema dos multiplicadores de Lagrange, com a restrição $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i - \alpha = 0$ temos a relação

$$\log \frac{1}{t_i} - 1 = \lambda$$

para algum multiplicador λ e $i = 1, \ldots, n$. De onde $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ e

$$H(t) = \alpha \log \frac{\alpha}{n}$$

□

O resultado a seguir se estabelece um critério de convergência, que será utilizado na existência de limites envolvendo entropias.

Lema 1.1.7. *Seja $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com a propriedade*

$$a_{n+q} \leq a_n a_q.$$

Então a sequencia $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_n = \frac{1}{n} \log a_n$$

é convergente.

Demonstração. Defina $b_n = \log a_n$. Temos então que

$$b_{n+q} \leq b_n + b_q.$$

Escolha então $q \in \mathbb{N}$ coom $q < n$ e escreva $n = qp + r$, de onde

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{n} &= \frac{b_{qp+r}}{n} \\ &\leq \frac{b_{pq}}{n} + \frac{b_r}{n} \\ &\leq p\frac{b_q}{pq} + \frac{b_r}{n} = \frac{b_q}{q} + \frac{b_r}{n} \end{aligned}$$

Como $r < q$, temos que $b_r \leq \max_{i<q} \{b_i\}$. Tomando o limite temos

$$\limsup \frac{b_n}{n} \leq \limsup \frac{b_q}{q} + \frac{b_r}{n} = \frac{b_q}{q}$$

Segue daí que

$$\limsup \frac{b_n}{n} \leq \inf_{q\in\mathbb{N}} \frac{b_q}{q} \leq \liminf \frac{b_n}{n},$$

de onde a sequencia converge. $\square$

1.2 Espaços Topológicos, Hausdorff, Compactos e Localmente Compactos

Ao lado conceitos como grupos e espaços vetoriais, espaços topológicos se consagram como um principal instrumento à teoria da Matemática, tendo aplicações em, virtualmente, todas as suas áreas. Nessa seção discutiremos a principal arena dessa dissertação: espaços Hausdorff localmente compactos. Sendo assim apresentamos um curto compêndio de resultados envolvendo esse tipo de espaço. Continuidade será considerado um conceito dado, mas o Apêndice A.1 apresenta o que mais for necessário. As referência [Jam87] e [Fol13] contém todo o conteúdo aqui exposto.

Definição 1.2.1. *Uma **topologia** sobre um espaço X é uma família de subconjuntos $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$, chamados de **abertos** da topologia, contendo o vazio e o próprio X tal que*

1. *A união arbitrária de abertos de $\mathcal{T}$ é um aberto de $\mathcal{T}$.*

2. *A intersecção finita de abertos de $\mathcal{T}$ é um aberto de $\mathcal{T}$.*

O par $(X, \mathscr{T})$ é chamado de *espaço topológico* e quando não houver risco de confusão, denotaremos apenas X, omitindo a topologia.

Um conjunto $F \subset X$ é dito *fechado* se $X \setminus F$ for um conjunto aberto. Dado $A \in X$, o seu *interior*, denotado por $\mathring{A}$, é o maior aberto contido em A. Paralelamente o *fecho* de A, denotado $\overline{A}$, será o menor fechado que contém A. De imediato $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. Um conjunto $D \subset X$ é dito denso em X, dada uma topologia para X se $\overline{D} = X$.

Se $Y \subset X$ e $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, podemos definir a topologia induzida $\mathcal{T}_Y$ para Y como

$$\mathcal{T}_Y = \big\{ U \cap Y \,\big|\, U \in \mathcal{T} \big\}.$$

Definição 1.2.2. *Seja X um espaço topológico. $K \subset X$ será* ***compacto*** *se dada qualquer cobertura aberta de K conter uma subcobertura finita. Em particular X será um* ***espaço topológico compacto*** *se X for compacto.*

Proposição 1.2.3. *Seja X um espaço topológico, $K \subset X$ compacto e $F \subset X$ fechado. Então $F \cap K$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta para $F \cap K$. Então temos que $\{X \setminus F\} \cup \mathscr{C}$ é uma cobertura aberta de K, de onde existe uma subcobertura finta $\{X \setminus F, C_1 \ldots C_n\}$ que cobre K. Mas então $\{C_1 \ldots C_n\}$ cobre $K \cap F$. □

Lema 1.2.4. (Extensão de Alexandroff.) *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. O espaço $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ com a topologia*

$$\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \left\{ A \cup \{\infty\} \,\middle|\, A \text{ aberto em } X \text{ e } X \setminus A \text{ é compacto.} \right\}$$

é compacto e $\mathcal{T}$ é a topologia induzida de $\tilde{\mathcal{T}}$ por X.

Demonstração. Primeiro mostramos que de fato é uma topologia para o espaço $\tilde{X}$. Usando a proposição anterior, fica claro que a união arbitrária de abertos é aberta. De fato tome $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção de abertos. Seja $V = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Se $\infty \notin V$ então $V \in \mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$. Se $x \in V$ tome $U_0 \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que contém x. Daí $X \setminus U_0$ é compacto e fechado, mas daí $X \setminus V = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus U_0) \cap (X \setminus U_\alpha)$ é compacto e fechado. Portanto, V é aberto.

Considere agora a família finita de abertos $\{U_i\}_{i=1}^n$. Se $\infty \notin \bigcap_{i=1}^n U_i$ então, $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{T}$. Por outro lado, se para $i \in \{1, \ldots, n\}$ então $\infty \in U_i$ então $X \subset U_i$ é fechado e compacto. E portanto $\bigcup_{i=1}^n X \setminus U_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i$ é fechado e compacto. E portanto $\bigcap_{i=1}^n U_i$ é aberto.

A compacidade segue da definição dos abertos de ∞, já que para toda cobertura aberta $\mathscr{A}$ tome $U_0 \in A$ com $\infty \in U_0$. Daí $X \subset U_0 = K$ é compacto. Como $\mathscr{B} = \mathscr{A} \setminus \{U_0\}$ cobre K, e portando tem subcobertura $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Assim $\{U_0, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{A}$ é uma subcobertura finita de $\tilde{X}$. $\square$

A extensão de Alexandroff também é chamada de *compactificaçao por um ponto.*

Definição 1.2.5. *Seja $x \in X$. $A \subset X$ é uma* vizinhança *de x se $x \in \mathring{A}$.*

Observe que vizinhanças não precisam necessariamente ser conjuntos abertos. Quando forem conjuntos abertos ou compactos, diremos vizinhanças abertas ou compactas. O filtro das vizinhanças de um ponto é denotado $\mathscr{N}_x$. Dado um conjunto $A \subset X$ de um espaço topológico dizemos que x é ponto de aderência de A se para toda vizinhança V de x, $A \cap V \neq \emptyset$

Definição 1.2.6. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. O* ***bordo*** *de A, denotado por ∂A é o conjunto $\overline{A} \setminus \mathring{A}$. Visto de outra maneira é o conjunto de pontos aderentes à A que não são interiores.*

Proposição 1.2.7. *Seja $T : X \to X$ uma função contínua e $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos de X. Então valem a propriedades*

1. $\partial A = \partial (X \setminus A)$.

2. $\partial (A_1 \cap \cdots \cap A_k) \subset \partial A_1 \cap \cdots \cap \partial A_k$.

3. $\partial T^{-1}(A_i) \subset T^{-1} (\partial A_i)$.

Demonstração.

1. Defina $B = X \setminus A$. Temos daí que $\overline{B} = X \setminus \mathring{A}$ e $\mathring{B} = X \setminus \overline{A}$. Daí,

$$\overline{B} \setminus \mathring{B} = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

pois $x \notin \mathring{A}$ e $x \notin X \setminus \overline{A}$.

2. Se $x \in \partial (A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ então x é aderente à $\mathring{A}_1, \ldots, \mathring{A}_k$ mas não pertence a nenhuma deles. Portanto $x \in \partial A_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$, de modo que $x \in \partial A_1 \cap \cdots \cap \partial A_k$.

3. Primeiro observamos que $\overline{T^{-1}(A)} \subset T^{-1}(\overline{A})$. De fato se $F \supset A$ é fechado, então $T^{-1}(F) \supset T^{-1}(A)$ é fechado. Usando o mesmo raciocínio podemos concluir que $\mathring{\overline{T^{-1}}}(A) \supset T^{-1}(\mathring{A})$. Daí

$$\begin{aligned} \partial T^{-1}(A_i) &= \overline{T^{-1}(A)} \setminus \mathring{\overline{T^{-1}}}(A) \\ &\subset T^{-1}(\overline{A}) \setminus T^{-1}(\mathring{A}) = T^{-1} (\partial A_i) . \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.2.8. *Um espaço topológico é dito* ***Hausdorff****, se dados dois pontos distintos existirem vizinhanças para cada um dos dois pontos cuja a intersecção é vazia.*

Observe para mostrar que um espaço é Hausdorff, basta mostrar que dados dois pontos existem vizinhanças abertas que os separam.

Proposição 1.2.9. *Se X é espaço topológico Haussdorf e $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Considere um compacto $K \subset X$. Basta mostrar que $X \setminus K$ é aberto. Seja $x \in X \setminus K$. Para cada $y \in K$ sejam V_y e U_y as vizinhanças de x e y respectivamente com intersecção vazia. Como $\{U_y\}$ é uma cobertura de K então exite uma coleção finita $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\} \subset \{U_y\}$ para K. Segue daí que o aberto $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ é uma vizinhança de x com $V_x \cap U_{y_i} = \emptyset$ e portanto $K \cap V_x = \emptyset$ para cada $x \in X \setminus K$. Assim $\bigcup_{x \in X \setminus K} V_x = X \setminus K$, que é aberto, e portanto K é fechado. □

Um conjunto de apenas um ponto é claramente um conjunto compacto.

Corolário 1.2.10. *Seja X um espaço topológico Hausdorff, e $x \in X$. Então $\{x\}$ é fechado em X.*

Lema 1.2.11. *Seja X um espaço topológico Haussdorf e $x \in X$. Então*

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\}.$$

Demonstração. É claro que $\{x\} \subset \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$. Suponha que existe $y \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$ diferente de x. Mas existe uma vizinhança V_y de x que não contém y, pois X é Hausdorff, o que é uma contradição. Portanto $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$. □

Definição 1.2.12. *Um espaço topológico é dito normal se dados os fechados $F_1, F_2 \subset X$ com $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ então existem aberto U_1 e U_2 com $F_1 \subset U_1$ e $U_2 \subset F_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Vamos mostrar que Hausdorff's compactos são normais a partir do próximo Lema.

Lema 1.2.13. *Seja X Haussdorf e $K \subset X$ compacto. Seja $x \in X \setminus K$ Então existem abertos U e V disjuntos e $x \in U$ e $K \subset V$.*

Demonstração. Tome para cada $y \in K$ o par U_y, V_y de abertos disjuntos com $x \in U_x$ e $y \in V_x$. $\bigcup_{y \in K} V_x$ cobre K, de modo que existe a subcobertura $\{V_{y_1}, \dots C_{y_n}\}$. Tome daí $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ e $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Daí $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $K \subset V$. □

Proposição 1.2.14. *Um espaço Hausdorff compacto é normal.*

Demonstração. Sejam F_1, F_2 fechados em X com intersecção vazia. F_1, F_2 são compactos, pela Proposição 1.2.3, e para cada $x \in F_2$ existem pelo, Lema 1.2.13, os abertos U_x, V_x disjuntos com $F_1 \subset V_1$ e $x \subset U_x$. Como $F_2 \subset \bigcup_{x \in F_2} U_x$, então $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ é um coberturas de F_2. Defina os aberto disjuntos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Daí $F_1 \subset V$ e $F_2 \subset U$ e a proposição fica demonstrada, já que $U \cap V = \emptyset$. □

Teorema 1.2.15. (Lema de Urysohn) *Seja X um espaço topológico normal. Sejam F_1 e F_2 conjuntos fechados disjuntos. Daí existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ com $f = 1$ em F_1 e $f = 0$ em F_2.*

Demonstração. A demonstração desse teorema é análoga à demonstração o Lema 1.3.12 a ser visto adiante. Então omitiremos a demonstração no momento, que pode ser encontrada em [Rud74, Fol13]. □

Definição 1.2.16. *Uma* ***base local*** *em $x \in X$ para a topologia $\mathcal{T}$ de X é uma família vizinhanças $\mathscr{A}$ tal que para todo vizinhança V de x existe um elemento $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \subset V$.*

Observe que as bases locais podem ser abertas, fechadas, compactas, etc.

Definição 1.2.17. *Um espaço topológico é dito* ***localmente compacto*** *se todo ponto admitir uma base de vizinhanças compactas.*

Na literatura, diversos autores definem espaço topológicos localmente compactos como aquele que admitem uma vizinhança compacta para cada ponto. No caso de espaço Hausdorff essa definição é equivalente a dada em 1.2.17, conforme o próxima proposição, que mostra é suficiente que existe uma vizinhança compacta para que exista uma base.

Proposição 1.2.18. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Se dado $x \in X$ existir uma vizinhança compacta K de x, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que um espaço Hausdorff compacto admite uma base de vizinhanças compactas. Tome $x \in X$ e V uma vizinhança de x. Podemos supor que V é aberta, bastando tomar seu interior. Daí como X é normal então tome uma vizinhança U de x e um aberto $U' \supset (X \setminus V)$ tais que $U \cap U' = \emptyset$. Segue daí que $\overline{U} \subset V$, pois $U \subset X \setminus U' \subset V$. Além disso $\overline{U}$ é compacto. Como V é arbitrária, X admite uma base de vizinhanças compactas para x.

Agora seja X Hausdorff e dado $x \in X$ exista $K \subset X$, uma vizinhanças compacta de x. Dada uma vizinhança V de x, tome $K' = K \cap \overline{V}$. Temos que K' é uma vizinhança compacta de x, pois $x \in \mathring{V} \cap \mathring{K} \subset V \cap K$. Podemos então repetir o raciocínio para o caso compacto no espaço K', com a topologia induzida, e obter que X é localmente compacto. □

Compactificões de um espaço topológico será um tema recorrente nessa dissertação.

Definição 1.2.19. *Seja X um espaço com topologia $\mathcal{T}$. Uma* ***compactificação*** *de X é um espaço $\tilde{X} \supset X$ compacto, com topologia $\tilde{\mathcal{T}}$ tal que X é aberto aberto denso de $\tilde{\mathcal{T}}$, e $\mathcal{T}$ é a topologia induzida por $\tilde{\mathcal{T}}$.*

Teorema 1.2.20. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço Hausdorff localmente compacto e não é compacto, então X admite uma* ***compactificação por um ponto*** *Hausdorff.*

Demonstração. Tome a extensão de Alexandroff de $\tilde{X}$ de X com topologia $\tilde{\mathcal{T}}$. $\tilde{X}$ é compacto. Vamos mostrar que X é denso, e que é Haussdorf, já que outras propriedades seguem da extensão.

Temos que $\{\infty\}$ não é aberto, pois X não é compacto, de modo que o conjunto $\tilde{X} \setminus X$ não pode ser uma aberto de $\tilde{X}$, pela definição de $\tilde{X}$. Assim X é denso em $\tilde{X}$.

Agora para mostrar que $\tilde{X}$ é Hausdorff, basta mostrar que dado $x \in X$ existem vizinhanças de ∞ e x com intersecção vazia, já que a relação já está estabelecida para pontos distintos de X, por hipótese.

Seja $x \neq \infty$. Daí existe uma vizinhança compacta K de x. Então $\mathring{K}$ é vizinhança aberta de x e o conjunto $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ é uma vizinhança aberta de ∞, e essas vizinhanças têm intersecção vazia. Portanto podemos concluir que $\tilde{X}$ é Hausdorff. □

Definição 1.2.21. *Uma* ***cobertura admissível*** *de um espaço topológico é uma cobertura aberta tal que o complementar de ao menos um de seus elementos é compacto.*

Observe que o conjunto dessas coberturas é não vazio, dado que $\{X\}$ é um cobertura admissível de X. Um resultado menos direto é o seguinte:

Teorema 1.2.22. *Se X é Hausdorff localmente compacto então o conjunto das coberturas admissíveis é não vazio, e além disso, toda cobertura admissível* ***vem*** *de, i.e. é induzida por, uma cobertura da compactificação por um ponto.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura de $\tilde{X}$, a compactificação de X por um ponto. Daí existe um aberto $A \in \mathscr{C}$ que contém ∞. Assim, $X \setminus A \subset X$ é compacto na topologia de X, e portanto $\mathscr{C} \cap X$ admissível. Agora, se $\mathscr{C}$ é uma cobertura admissível, então, seja $A \in \mathscr{C}$ que tem complementar compacto. Segue daí que o aberto $A \cup \{\infty\}$ é aberto em $\tilde{X}$ e portanto a cobertura $\mathscr{C} \cup \{\{\infty\} \cup A\}$ é uma cobertura de $\tilde{X}$. □

Vamos tratar agora de regularidade, propriedade que será útil na próxima seção.

Definição 1.2.23. *Um espaço topológico X é dito **regular** se dado $x \in X$ e uma vizinhança V de x, existe outra vizinhança de U de x com $\overline{U} \subset \mathring{V}$.*

Proposição 1.2.24. *Seja X espaço Hausdorff localmente compacto. Então X é regular.*

Esse resultado é um caso particular do próximo Lema.

Lema 1.2.25. *Seja X espaço Hausdorff localmente compacto. Se $K \subset X$ é compacto e U é um aberto tal que $K \subset U$, então existe um aberto V com fecho compacto e $K \subset \overline{V} \subset U$.*

Demonstração. Como X é localmente compacto e Haussdorf tome para cada $x \in K$ um vizinhança compacta K_x com $K_x \subset U$. Daí $\bigcup_{x \in K} \mathring{K}_x$ cobre K de modo que apenas um número finito $\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_n}\}$ cobre K. Daí temos o compacto $K' = \bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i} \subset U$. Tome então $V = \mathring{K}'$, e observe que $K \subset \overline{V} \subset U$.

□

Teorema 1.2.26. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Sejam $K \subset X$ compacto e U um aberto com $K \subset U$. Então existem uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ e um compacto K' com $K \subset K' \subset U$ tais que $f = 1$ em K e $f = 0$ em $X \setminus K'$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.25 tome $K \subset V_1 \subset V_2 \subset U$ com $K_2 = \overline{V_2}$ compacto. Daí K_2 é regular, pois é Hausdorff compacto. Pelo lema de Urysohn, tome uma função $f : K_2 \to K_2$ contínua. $f = 1$ em K e $f = 0$ e, $K_2 \subset V_1$. Podemos daí estender f para todo X fazendo $f = 0$ em $X \subset K_2$. □

Definição 1.2.27. *Um espaço topológico X é* ***totalmente regular*** *se dados um fechado $F \subset X$ e um ponto $x \in X \setminus F$ existe uma função contínua contínua em $f : X \to [0,1]$ com $f(x) = 0$ e $F \subset f^{-1}(\{1\})$.*

Proposição 1.2.28. *Um espaço topológico totalmente regular é regular.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e uma vizinhança V de x. Tome $F = X \setminus V$ e $f : x \to [0,1]$ como na Definição 1.2.27. Considere então o fechado $f^{-1}[0, \frac{1}{2}]$. Seu interior $A = f^{-1}[1, \frac{1}{2})$ contem x e claro que $A \subset V$. □

Um resultado clássico da topologia é a que todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto é totalmente regular. Esse será um corolário do fato de um espaço topológico Hausdorff localmente compacto possuir uma estrutura uniforme. Terminaremos a seção com uma breve revisão de produtos de espaços topológicos.

Definição 1.2.29. *Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma coleção de espaços topológicos. E considere $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ o produto entre elas. A topologia produto definida em X é a gerada pelos abertos*

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$$

onde $U_\alpha \neq X$ apenas para um subconjunto finito de A.

Observe que no caso de uma coleção finita, os abertos dos produtos são justamente os produtos dos abertos. Não é difícil verificar que se trata de uma topologia, pois a intersecção de abertos é claramente aberto, assim como uniões arbitrárias

Proposição 1.2.30. *Seja $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ o produto de uma coleção de espaços topológicos. As projeções*

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\to X_{\alpha_0} \\ (x_\alpha) &\mapsto x_{\alpha_0} \end{aligned}$$

são funções contínuas na topologia produto.

Demonstração. Se $U_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$ é aberto, é claro que

$$\pi_{\alpha_0}{}^{-1}(U_{\alpha_0}) = U_{\alpha_0} \times \prod_{\substack{\beta \in A \\ \beta \neq \alpha}} X_\beta$$

é aberto. $\square$

Proposição 1.2.31. *O produto de uma coleção de espaços topológicos Hausdorff é um espaço Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $(x_\alpha) \neq (y_\alpha)$ elementos de um produto de espaços topológicos $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Daí $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$ para algum $\alpha_0 \in A$. Segue daí que existem vizinhanças U_{α_0} e V_{α_0} de x_{α_0} e y_{α_0} disjuntas. Portanto os abertos

$$U = \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha \times U_{\alpha_0}$$

$$V = \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha \times V_{\alpha_0}$$

São vizinhanças disjuntas de (x_α) e (y_α). $\square$

O próximo resultado é um clássico de Tychonoff, que depende o Lema de Zorn. Iremos omitir a demonstração.

Teorema 1.2.32. (Teorema de Tychonoff) *A produto de uma coleção arbitrária de espaços topológicos compactos é compacto na topologia produto.*

Demonstração. Uma demonstração pouco usual que se utiliza de ultrafiltros é exposta no Teorema 5.13 de [Jam87]. $\square$

Exemplo 1.2.33. O Teorema de Tychonoff permite a construção de contra exemplos de espaços topológicos. Um exemplo de um espaço topológico Hausdorff compacto que não é metrizável é o conjunto $X = \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$.

De fato, um espaço métrico apresenta bases locais enumeráveis, que podem ser a formada pelas bolas de raio 2^{-n}. Suponha então que X seja metrizável e seja A_k uma base enumerável de $(0)_{x\in\mathbb{R}}$ i.e. o ponto com entrada 0 em toda coordenada. Como X é Hausdorff temos que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = (0)_{x\in\mathbb{R}}\,.$$

Como A_k é aberto existe uma coleção finita $C_k = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que

$$B_k = \prod_{x\in\mathbb{R}} U_x \tag{1.1}$$

com $U_x = \{0\}$ para $x \in C_k$ e $U_y = \{0, 1\}$ se $y \notin C_k$ e $B_k \subset A_k$. Segue daí que B_k também é uma base enumerável, e portando

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \supset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = (0)_{x\in\mathbb{R}}\,. \tag{1.2}$$

Observe agora que tomar a intersecção $B_k \cap B_{k'}$, com $k, k' \in \mathbb{N}$, é o mesmo que fazer a união $C_{k,k'} = C_k \cup C_{k'}$ e definir o novo aberto

$$B_{k,k'} = B_k \cap B_{k'} = \prod_{x\in\mathbb{R}} U_x$$

sendo $U_x = \{0, 1\}$ se $x \notin C_{k,k'}$ e $U_y = \{0\}$ se $y \in C_{k,k'}$. Temos então que a equação 1.2 implica que

$$C_{1,2,\ldots} = C_1 \cap C_2 \cup \cdots = [0, 1].$$

Mas o resultado é impossível, pois a união enumerável de conjuntos finitos é um conjunto enumerável e $[0, 1]$ é não enumerável.

Exemplo 1.2.34. Usando o Exemplo 1.2.33 um espaço Hausdorff compacto não metrizável, podemos construir um exemplo Hausdorff localmente compacto, que é não compacto e não metrizável. De fato, tome X não metrizável, como o Exemplo 1.2.33, e defina

$$Y = X \times \mathbb{N},$$

sendo que para $\mathbb{N}$ assumimos a topologia discreta, que é a topologia definida por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. A topologia discreta é sempre localmente compacta pois para $x \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{x\}$ é compacto, aberto e fechado, e é uma base local de vizinhanças de x. Segue daí que Y é localmente compacto na topologia produto, pois X é compacto de modo que para $x \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$X \times \{x\}$$

é uma vizinhança compacta de x

Os Exemplos 1.2.33 e 1.2.34, parecem artificiais, e de difícil tratamento. Ainda assim ilustram um fato importante: espaços Hausdorff localmente compactos *não* são metrizáveis, em geral.

1.3 Estruturas Uniformes

Uma estrutura uniforme é um filtro de relações que generalizam o conceito de métrica. Para uma revisão sobre filtros e suas propriedades veja o Apêndice A.3. Nessa seção apresentaremos os conceitos básicos, mas na prática nos restringiremos aos casos de espaços Hausdorff compactos e localmente compactos, embora o assunto seja muito mais amplo. Sempre que conveniente, comentários seguirão definições e teoremas sobre os casos mais gerais. Exceto o Lema 1.3.7, **todos os resultados são gerais de topologias uniformes**.

Dado um conjunto S qualquer, os subconjuntos de $S \times S$ são chamados de *relações*. Por ele descrevemos de maneira unificada pré-ordens, relações de equivalência equivalência etc.

Exemplo 1.3.1. O conjunto $R = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leq b\right\}$ constitui uma relação (de ordem total) nos reais, de onde denotamos xRy se $(x,y) \in R$.

Podemos compor e inverter relações, de maneira análogo a composição de funções. As definições a seguir vão estabelecer a notação utilizada no texto.

Definição 1.3.2. *Seja S um conjunto, $E \subset S$ e $x \in S$. Dados $R, R' \in S \times S$ relações em S, definimos*

1. $R \circ R' = \left\{ (a,b) \middle| \text{ existe } c \in S \text{ tal que } (a,c) \in R \text{ e } (c,b) \in R' \right\}$
2. $R^{-1} = \left\{ (b,a) \middle| (a,b) \in R \right\}$
3. $R(x) = \left\{ y \middle| (y,x) \in R \right\}$
4. $R[E] = \left\{ R(y) \middle| y \in E, R(y) \neq \emptyset \right\}$

Exemplo 1.3.3. Sejam $f : S \to S$ e $g : S \to S$, e as relações $xFy \iff f(x) = y$ e $xGy \iff g(x) = y$. É claro que $xF \circ Gy \iff g \circ f(x) = y$.

As estruturas uniformes são conjuntos de relações que constituem um filtro e trazem consigo uma noção de proximidade mais precisa que a de vizinhanças, mas evitando-se falar de distância, tendo espaços métricos como casos particulares.

Definição 1.3.4. *Uma **estrutura uniforme** sobre um conjunto X, é um filtro $\mathscr{U}$ de relações sobre X, chamadas de **entourages**, tais que*

1. *Todo $\eta \in \mathscr{U}$ contem a diagonal $\Delta X = \left\{ (x,x) \middle| x \in X \right\}$*
2. *Dado $\eta \in \mathscr{U}$ existe $\eta' \in \mathscr{U}$ tal que $\eta' \circ \eta' \subset \eta$*
3. *Dado $\eta \in \mathscr{U}$ existe $\eta' \in \mathscr{U}$ tal que $\eta' \subset \eta^{-1}$.*

A definição é muito abstrata, e no momento não cumpre o prometido na introdução da seção: generalizar o conceito de métrica Sendo assim, vamos apresentar o caso de uma estrutura uniforme sobre espaços métricos, a fim de ilustrar a definição. Em seguida vamos generalizar para espaços Hausdorff localmente compactos, e citar as propriedades que serão utilizadas.

Exemplo 1.3.5. Seja (X, d) um espaço métrico, com topologia usual. Considere o filtro $\mathscr{U}$ gerado pelas *entourages*

$$\eta_\epsilon = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \in B_d\,(y; \epsilon)\right\}$$

sendo $B_d\,(y; \epsilon)$ a bola aberta de raio ϵ centrada em y. Tais *entourages* geram uma estrutura uniforme. De fato, dado $\epsilon > 0$ valem propriedades

1. $\Delta X \subset \eta_\epsilon$
2. $\eta_{\frac{\epsilon}{2}} \circ \eta_{\frac{\epsilon}{2}} = \eta_\epsilon$
3. $\eta_\epsilon^{-1} = \eta_\epsilon$

que garantem que o filtro gerado é uma estrutura uniforme. Temos também que $\eta_\epsilon(X) = B_d\,(x; \epsilon)$ e ainda que $\eta_\epsilon[x]$ é um cobertura aberta. Por fim a topologia de de X pode ser escrita como

$$\left\{A \subset X \,\middle|\, \text{Dado } x \in A \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } \eta_\epsilon(x) \subset A\right\}.$$

que é apenas uma maneira diferente de descrever os abertos pelas *entourages* , evitando menção à métrica.

O exemplo ilustra bem que podemos pensar na bola $B_d\,(x; \epsilon)$ como o conjunto de pontos que se relacionam com x pela distância ϵ, podendo assim ser determinada pelas relação η_ϵ. Substituindo bolas por vizinhanças na construção de uma estrutura uniforme será a ideia que lapida o caminho para estrutura uniforme mais gerais, que vão além de espaços métricos. Diremos que uma relação η em um espaço topológico X é uma vizinhança da diagonal se $\Delta X \subset \mathring{\eta}$ na topologia produto. Um resultado simples mas útil é o seguinte:

Proposição 1.3.6. *O dada uma estrutura uniforme $\mathscr{U}$ o conjunto das entourages simétricas, i.e. $\eta^{-1} = \eta$, refina $\mathscr{U}$.*

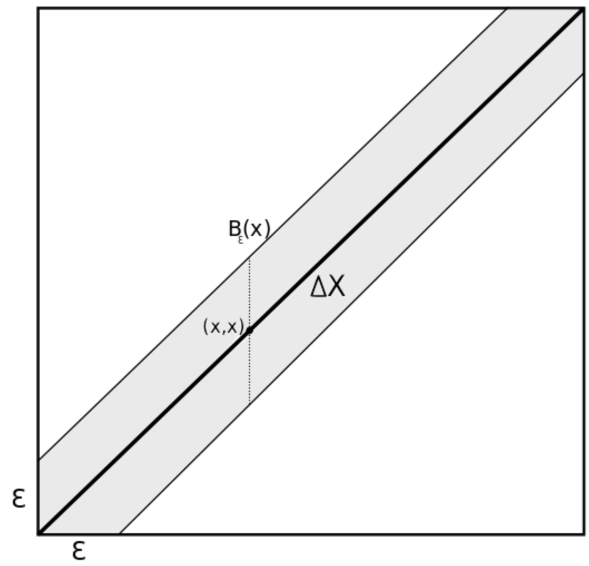

Figura 1.2: Representação de uma *entourage* de um espaço métrico. Observe a bola $B_\epsilon(x)$ centrada em x e raio ϵ.

Demonstração. Dado $\delta \in \mathscr{U}$, temos que $\eta = \delta \cap \delta^{-1} \subset \delta$. Como η é simétrica a demonstração segue. □

Vamos passar então para construção de estruturas uniformes em espaços Hausdorff começando com o seguinte lema:

Lema 1.3.7. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Considere as relações*

$$\mathscr{R} = \left\{ R \subset X \times X \,\middle|\, R \text{ é vizinhança de } \Delta X \right\}.$$

Então vale

$$\bigcap_{R \in \mathscr{R}} R = \Delta X.$$

Demonstração. Basta mostrar que se $x \neq y$ então $(x, y) \notin \bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$. Como X é Hausdorff tome vizinhanças V_x e V_y vizinhanças de x e y com $V_x \cap V_y =$

$\emptyset$. Para todo z tome uma vizinhança qualquer V_z se $z \neq x, y$. Tome a vizinhança da diagonal,

$$R_{(x,y)} = \left\{ (w, u) \;\middle|\; w \in V_u \right\}.$$

Temos então que $(x, y) \notin R_{(x,y)}$ e portanto

$$\Delta X = \bigcap_{(x,y)} R_{(x,y)} \supset \bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$$

que conclui a demonstração. □

Teorema 1.3.8. *Se X é um espaço topológico Hausdorff e compacto. Então o filtro $\mathscr{U}$ gerado pelas vizinhanças da diagonal é uma estrutura uniforme e*

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset X \;\middle|\; \textit{Dado } x \in A \textit{ existe } \eta \in \mathscr{U} \textit{ tal que } \eta(x) \subset A \right\} \tag{1.3}$$

é a topologia de X. Além disso, $\mathscr{U}$ é a única estrutura uniforme com esta propriedade.

Demonstração. Considere $\mathscr{U}$ como o filtro gerado pela família de vizinhanças de ΔX na topologia produto. É claro que a topologia induzida pelas vizinhanças de ΔX em X é a topologia original.

Vamos mostrar que se trata de uma estrutura uniforme. As propriedades *1* e *3* da Definição 1.3.4 são satisfeitas por $\mathscr{U}$, pois a inversão de uma vizinhança de ΔX é uma vizinhança de ΔX, e claro que toda vizinhança contém a diagonal.

Para mostrar *2*, vamos supor que existe $\eta \in \mathscr{U}$ tal que para toda $\delta \in \mathscr{U}$ com $\eta \neq \delta$ temos que o conjunto $\delta^2 \setminus \eta \neq \emptyset$. Observe que como o conjunto das vizinhanças de ΔX é fechado para intersecções finitas, os conjuntos $\left\{\delta^2 \setminus \eta\right\}$ constituem um filtro em $X \times X$ que portanto tem ao menos um ponto de aderência, (x, y), dada a compacidade de $X \times X$. Observe que $x \neq y$, pois $\Delta X \subset \eta$. Mas $X \times X$ é Hausdorff e compacto, e portanto regular, de modo que, como ΔX é fechado em $X \times X$, existem um aberto

δ' e uma vizinhança V de (x, y) com $V \cap \delta' = \emptyset$. Daí (x, y) não é aderente à $\delta'^2 \setminus \eta$ o que é uma contradição.

Para mostrar unicidade, suponha que exista uma estrutura uniforme $\mathscr{U}'$ que gere a topologia de X. Suponhamos agora que η é uma vizinhança aberta de ΔX mas que não é uma *entourage* , i.e. $\eta \notin \mathscr{U}'$. Sendo assim não pode existir $\delta \in \mathscr{U}'$ com $\delta \subset \eta$. Assim $W_\delta = \delta \cap (X \times X \setminus \eta) \neq \emptyset$. Temos então um filtro $\{W_\delta\}$ num subconjunto fechado, e portanto compacto, de $X \times X$. Seja então $(x, y) \in X \times X \setminus W$ um ponto de aderência do filtro. Em particular (x, y) é aderente à $\mathscr{U}'$, pois $\{W_\delta\}$ é um refinamento de $\mathscr{U}'$. Mas então $(x, y) \in \Delta X$ pelo Lema 1.3.7. O que é uma contradição, pois $\Delta X \subset \eta$. Portando $\mathscr{U}$ é única. $\square$

De maneira geral, para qualquer estrutura uniforme a topologia dada pela equação (1.3) é chamada de *topologia uniforme* de $\mathscr{U}$, que é **sempre** uma topologia. O Capítulo 8 de [Jam87] se dedica a descreve-las. Nessa dissertação nos manteremos nos casos Hausdorff localmente compactos, a fim de evitar uma exposição muito extensa do assunto.

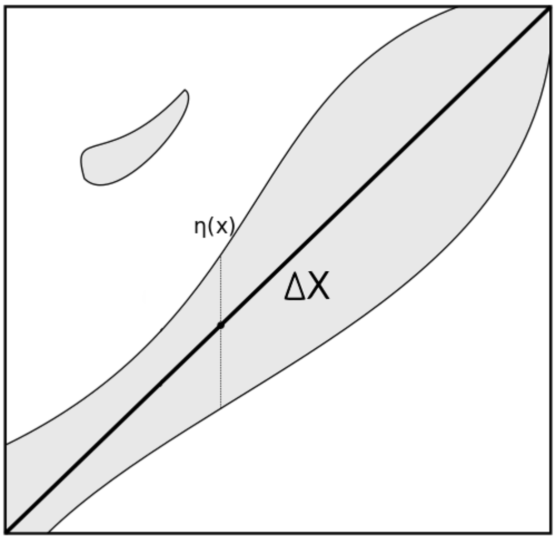

Figura 1.3: Representação de uma *entourage* em um espaço abstrato. Note a bola definida pela *entourage* η e o ponto x.

Como a estruturas uniforme de um espaço Hausdorff compacto é o filtro gerado pelas vizinhanças da diagonal, é claro que as ***entourages* abertas refinam a estrutura uniforme**, de modo que considerar *entourages* abertas na topologia produto sempre que necessário. Esse também não é um fato restrito aos espaços Hausdorff localmente compactos, e sim de toda topologia uniforme. Podemos observar também que os conjuntos do tipo $\eta(x)$ com $\eta \in \mathscr{U}$ e $x \in X$ assume o papel das bolas. De fato, vamos fazer uma abuso de nomenclatura e chamar $\eta(x)$ de η-*bola*, ou simplesmente de *bola*, da estrutura uniforme. Além disso se η é uma vizinhança aberta da diagonal, $\eta[X]$ é um cobertura aberta, que sero objetos de muito interesse no próximo Capítulo.

Podemos agora ressaltar o papel de cada item da definição de uma estrutura uniforme. O item *1* diz que o um ponto está contido em todas as suas bolas, *2* diz que a distancia máxima entre dois pontos de uma bola esta no máximo em uma bola com "raio dobrado", e *3* diz que uma bola não pode ser "fechada de um lado".

Proposição 1.3.9. *Seja X é um espaço Hausdorff compacto com a estrutura uniforme única $\mathscr{U}$ e $Y \subset X$. Então a topologia induzida em Y também é uniforme com a estrutura $\mathscr{U}_Y = \mathscr{U} \cap (Y \times Y)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que todo aberto de Y é aberto na topologia uniforme de $\mathscr{U}_Y$. Dada uma vizinhança de V de um ponto $y \in Y$, podemos tomar $V = Y \cap U$, com $U \subset X$ uma vizinhança de y em X. Daí, existe uma *entourage* $\eta \in \mathscr{U}$ com $\eta(y) \subset U$, de modo que $\eta(y) \cap Y \subset V$. Mas $Y \cap \eta(y) = ((Y \times Y) \cap \eta)(y)$, é uma bola de $\mathscr{U}_Y$, de modo que V é aberta na topologia dada por $\mathscr{U}_Y$.

Por outro lado, toda bola $\eta(y)$ com $\eta \in \mathscr{U}_Y$ é claramente aberta em Y, já que existe $\delta \in \mathscr{U}$ com $\eta = (Y \times Y) \cap \delta$, e portanto $\eta(y) = \delta(y) \cap Y$, que é uma vizinhança de y na topologia induzida. Portanto a topologia induzida em Y por X é a topologia uniforme de $\mathscr{U}_Y$. $\square$

Corolário 1.3.10. *Se X é um espaço topológico localmente compacto e*

Hausdorff, e $\tilde{X}$ sua compactificação por um ponto. O filtro

$$\mathscr{U} = \left\{ \tilde{\eta} \cap (X \times X) \,\middle|\, \tilde{\eta} \text{ é vizinhança de } \Delta\tilde{X} \right\}$$

*gera uma estrutura uniforme, chamada aqui de **estrutura uniforme admissível**, sobre X. Além disso X é um espaço topológico uniforme com a estrutura uniforme $\mathscr{U}$ e as coberturas por entourages abertas são admissíveis.*

Demonstração. É imediato da proposição anterior, excetuado o fato das coberturas serem admissíveis que segue de $X \cap \tilde{\eta}(y) = ((X \times X) \cap \tilde{\eta})\,(y)$ para $y \in X$, de modo que a cobertura por bolas é a restrição de uma cobertura de bolas de $\tilde{X}$, de modo que é admissível quando as bolas são abertas. □

Este último corolário garante que se X é localmente compacto Hausdorff então X tem estrutura uniforme e sua topologia é uniforme. Tal estrutura uniforme se mostrará fundamental na demonstração do Princípio Variacional, e a definição é dada pela primeira vez neste trabalho.

A unicidade da estrutura uniforme num espaço Hausdorff não é garantida, pois em geral a compactificação de X não é única, conforme ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.11. Considere o $X = (0, 2\pi)$ com topologia usual. X é Hausdorff e localmente compacto pois é metrizável. Porém, sua estrutura uniforme é induzida tanto pelo seu fecho, na reta, $[0, 2\pi]$ com topologia usual, como também de $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, retirando-se o ponto $\theta = 0 + 2\pi\mathbb{Z}$. com topologia quociente da usual de $\mathbb{R}$, que corresponde a compactificação por um ponto de X.

Tecendo um último comentário sobre estruturas uniformes em espaço métricos, a estrutura uniforme admissível se associa sempre a um métrica da compactificacão por um ponto. De fato, qualquer métrica não limitada não pode gerar a estrutura uniforme, pois nenhuma delas pode ser estendida a compactação por um ponto.

O próximo Lema se mostrará muito importante no resultado final dessa dissertação.

Lema 1.3.12. *Seja X um espaço topológico uniforme. Considere η uma entourage aberta e $x \in X$. Então existe uma função contínua $f : X \to I$ onde $I = [0,1]$, tal que com $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ para $y \in X \setminus \eta(x)$. Além disso dado $t \in (0,1)$ o existe uma entourage $\delta_t \subset \eta$ tal que $f^{-1}([0,t)) = \delta_t(x)$, i.e. $f^{-1}([0,t))$ é uma bola na topologia uniforme.*

Demonstração. Defina a coleção de *entourages* abertas $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ escolhendo de forma recursiva $\delta_0 = \eta$ para e cara $k \in \mathbb{N}$ alguma δ_k tal que $(\delta_k)^2 \subset \delta_{k-1}$. Agora considere o conjunto das sequencias de um bit $K \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que expressam a expansão binária do intervalo $I = [0,1]$ e a função $t : K \to I$ dada por

$$t(a) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 \dots$$

com $a \in K$. Considere

$$K' = \left\{a \in K \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_i = 0 \text{ se } i \geq n.\right\}$$

A restrição de f à K' é um bijeção na sua imagem $f(K') = I'$, o conjunto dos racionais diádicos. Temos que K' é um conjunto denso em K, e que , pela expansão binária dos reais, I' é denso em $[0,1]$.

Para $t \in I'$, $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$, denote a *entourage* .

$$E_t = \delta_{n_k} \circ \cdots \circ \delta_{n_1}$$

Defina ainda $E_0 = \Delta X$. Primeiro vamos mostrar que as *entourages* são ordenados por t. De fato, sejam $t \leq t'$. Para $t = \frac{a}{2^n}$ e $t' = \frac{a+1}{2^n}$ então $\delta_n \circ E_t \subset E_{t'}$. Segue daí que o resultado vale por indução também para $t' = \frac{l}{2^n}$ com $l > k$. Daí como todo $t \in I'$ pode ser escrito da forma $\frac{k}{2^n}$. Daí vale para todo $t, t' \in I'$ bastando tomar n suficientemente grande na expansão de t e t'.

Para $t \in I$, tome a sequencia monótona (t_i) em I' com, $t_n \uparrow t$ e defina δ_t como

$$\delta_t = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{t_k}$$

Tal *entourage* tem existência garantida, pois E_{t_n} é ordenado pela inclusão e é limitado por η. Além disso trata-se de uma entourage aberta e ainda $\delta_t \subset \eta$.

Defina agora a função $f : X \to [0,1]$ como

$$f(y) = \inf \left\{ t \in I' \,\middle|\, y \notin E_t(x) \right\}.$$

Claramente $f(x) = 0$ pois $x \in E_0(x) = \{x\}$. Se $y \in X \setminus \eta$ então $f(y) = 1$ pois $y \notin E_t(x)$ para todo $t \in I'$.

Observe que $\delta_t(x) \subset f^{-1}([0,t))$ já que se $y \in f^{-1}([t,1])$, tomando $t_n \uparrow t$ é claro que $y \notin \delta_{t_n}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $y \notin \delta_t(x)$. Por outro lado se $y \in X \setminus \delta_t(x)$ então $f(y) \geq t$ e portanto $y \in f^{-1}([t,1])$. Juntando as afirmações, temos que

$$\delta_t(x) = f^{-1}([0,t)).$$

Resta mostrar a continuidade de f. Para isso, observe que dados $y \in X$ se $f(y) \in (0,1)$ então $s \leq f(y) < t$ para uma par $s < t$ em I'. Temos então que $y \in E_t(x) \setminus \overline{E}_s(x)$ que é aberto. Se $f(y) = 0$ então $y \in E_t(x)$ para todo t. Se $f(y) = 1$ então para todo $t < 1$ em I' $y \in X \setminus \overline{E}_t(x)$. Assim f é contínua. $\square$

Esse último Lema, mostra também que espaços Hausdorff localmente compactos são totalmente regulares. De fato a demonstração de Lema 1.3.12 é bastante similar ao encontrado em livros textos de topologia [Mun00]. Para além da regularidade, existe uma interpretação para a função do Lema 1.3.12, como uma função que assume o papel análogo a o da distância entre o centro de uma bola e um ponto de seu interior, i.e. pontos na imagem $f^{-1}([0,y)), y \in [0,1]$, estão até uma mesma "distância", fixada pelo valor de y.

1.4 Funcionais Lineares e Teoria da Medida

Essa seção tratará de resultados de analise funcional que serão necessários na demonstração do Princípio Variacional. Porém com seu caráter instrumental, omitiremos as demonstrações que forem muito técnicas ou que requiram grande digressão do assuntos aqui estudados.

No que segue, consideraremos X um espaço Hausdorff localmente compacto e medidas sobre os Borelianos, $\mathscr{B}[X]$. Uma breve revisão sobre estados de medida se encontra no Apêndice A.4.

Do ponto de vista das medidas de Radon, a hipótese de que um espaço topológico seja métrico, não parece enriquecer o conteúdo de maneira significativa ao Princípio Variacional. É fato que ganha-se compacidade sequencial com a metrizabilidade. Do ponto de vista de filtros e redes, no entanto, esse fato não se mostrará relevante.

A exposição é aqui é amplamente baseada em [Fol13].

Uma medida positiva $\mu : \mathscr{B}[X] \to \mathbb{R}^+$ é *outer regular* e *inner regular* se dado E mensurável valerem às relações

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(U) \,\middle|\, E \subset U, U \text{ aberto.} \right\}$$

e

$$\mu(E) = \sup \left\{ \mu(K) \,\middle|\, K \subset E, K \text{ compacto.} \right\}$$

respectivamente.

As medidas de Radon positivas são as *outer regular* para os borelianos, *inner regular* para os abertos, e que assume valores finitos para os compactos.

Para medidas finitas temos um resultado inicial

Lema 1.4.1. *Seja X um espaço topológico e μ uma medida de Radon positiva. Se $\mu(X) < \infty$ então μ é regular, i.e. é de Radon, de modo que para todo boreliano $A \subset X$, temos*

$$\mu(A) = \sup \left\{ \mu(K) \,\middle|\, K \subset A, K \textit{ compacto} \right\}.$$

Demonstração. Como μ é de Radon e $\mu(A) < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $U \supset A$ aberto tal que $\mu(U \setminus A) < \epsilon$. Daí tome $F \supset U$ compacto com $\mu(U) - \epsilon < \mu(F)$. Tome por fim $V \supset U \setminus A$ com $\mu(V) \leq \epsilon$. Daí $K = F \setminus V$ é tal que $K \subset A$ e é compacto. Além disso

$$\mu(K) = \mu(F) - \mu(F \cap V) \geq \\ \mu(F) - \mu(V) = \mu(U) - 2\epsilon \geq \mu(A) - 2\epsilon,$$

de onde estabelecemos a regularidade de μ, ao se tomar $\epsilon \to 0$. □

Em particular se A é um boreliano com $\mu(\partial A) = 0$ sendo $\mu \in \mathcal{M}(X)$, uma medida finita temos que $\mu(\mathring{A}) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$, e portanto

$$\sup_{K\text{: compacto}} \left\{\mu(K) \middle| K \subset \mathring{A}\right\} = \inf_{U\text{: aberto}} \left\{\mu(U) \middle| U \supset \overline{A}\right\} \tag{1.4}$$

O conjunto das funções contínuas será denotadas por $C(X)$. O conjunto das *funções que vão à zero no infinito* é o conjunto

$$C_0(X) = \left\{ f \in C(X) \,\middle|\, \{x \in X \mid |f(x)| \geq \epsilon, \epsilon > 0\} \text{ é compacto.} \right\}$$

Temos o resultado

Proposição 1.4.2. *Seja X um espaço topológico e $f \in C_0(X)$. Então f é limitada.*

Demonstração. Tome o compacto $K = \{x \in X \mid |f(x)| \geq k\}$ para algum $k > 0$. Daí $f(K)$ é compacto e portanto limitado. Daí f é limitada. □

A norma do máximo é definida como

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \{f(x)\}.$$

define uma topologia sobre $C_0(X)$ que chamaremos *topologia do máximo.*

Definição 1.4.3. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. O suporte de f, denotado* supp f *é o fecho do conjunto onde f é não nula, i.e.*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}}.$$

Uma função f terá suporte compacto se $\operatorname{supp} f$ é compacto. O conjunto das funções contínuas e de suporte compacto será denotado $C_c(X)$.

É claro que as funções de suporte compacto vão à zero no infinito, já que se f é de suporte compacto, o conjunto $K_\epsilon = \{x| \, |f(x)| \geq \epsilon\}$ é fechado, e portanto compacto, pois está contido no suporte de $f(x)$. Observe ainda que as funções de suporte compacto tem extensão contínua para a compactificação por um ponto, conforme a proposição a seguir.

Proposição 1.4.4. *Seja $\tilde{X}$ a compactificação de X por um ponto. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ de suporte compacto. Então $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \in X \\ 0, & se\ x = \infty \end{cases}$$

é contínua em $\tilde{X}$.

Demonstração. Tome $I = (-\epsilon, \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$. É claro que $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \tilde{f}$. Como X é Haussdorff $A = \tilde{f}^{-1}(I) \setminus \operatorname{supp} f$ é aberto e é uma vizinhança de ∞. Portando $\tilde{f}$ é contínua em ∞. Portanto $\tilde{f}$ é contínua. □

Teorema 1.4.5. *Seja X um espaço Haussdorff localmente compacto. Então $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$ na topologia do máximo.*

Demonstração. Seja $f \in C_0(X)$Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o compacto

$$K_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, |f(x)| \geq n \right\}$$

Usando o Teorema 1.2.26, para cada K_n tome uma função g_n com $g_n = 1$ em K_n e $g_n = 0$ em $X \subset K_{n+1}$. Defina $f_n = fg_n$. Afirmamos que $f_n \to f$. De fato, seja $x \in X$. Temos que $f(x) \leq n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí $f(x) - f_k(x) = 0$ sempre que $k \geq n$. □

Definição 1.4.6. *Seja um espaço topológico X e $C_0(X)$ o conjunto das funções contínuas sobre X que vão à zero no infinito. Um **funcional linear** sobre $C_0(X)$ é uma transformação linear $E : C_0(X) \to \mathbb{R}$. O conjunto dos funcionais lineares sobre $C_0(X)$é denotado $C_0(X)^*$*

Os funcionais lineares são elementos centrais na Análise Funcional. Os funcionais lineares apresentam uma topologia natural dada pela norma do máximo [Bre10],

$$\|E\| = \sup_{\|f\|=1} |E(f)|.$$

Nessa dissertação estamos mais interessados numa outra, mais fraca.

Definição 1.4.7. *Seja X um espaço topológico. A topologia fraca* definida em $C_0(X)^*$ é a topologia menos fina onde as transformações lineares*

$$\begin{array}{rccc} F_f: & C_0(X)^* & \to & \mathbb{R} \\ & F_f(E) & \mapsto & E(f) \end{array},$$

sendo $f \in C_0(X)$, são contínuas.

A construção da topologia fraca* é uma tarefa pouco trivial(veja a discussão da seção 3.1 de [Bre10]), mas a existência é algo simples de garantir. De fato, existe ao menos uma topologia onde F_f é contínua para toda $f \in C_0(X)$ que é a topologia discreta $\mathscr{P}(C_0(X)^*)$. Consideramos então o conjunto $\mathscr{G}$ de todas as topologias de $C_0(X)^*$ nas quais F_f é contínua. Tome então a topologia mínima,

$$\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathscr{G}} \mathcal{T} = \mathcal{T}^*.$$

Temos que $\mathcal{T}^*$ é não vazia pois $C_0(X)^* \in \mathcal{T}^*$. Além disso, dado $f \in C_0(X)$, temos que $F_f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^*$ sendo $U \in \mathbb{R}$ um conjunto aberto na topologia usual, pois F_f é contínua para cada $\mathcal{T} \in \mathscr{G}$. O fato de que $\mathcal{T}^*$ é uma topologia segue da definição de espaço topológicos, cujas propriedades são mantidas por intersecções.

Naturalmente, dada uma rede convergente na topologia fraca*, $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, com limite E em $C_0(X)^*$ e uma função $f \in C_0(X)$, vale a relação,

$$\lim_{\lambda} E_\lambda(f) = E(f).$$

Uma curta revisão sobre redes pode ser encontrada no Apêndice A.2. A topologia fraca* tem muitas propriedades. Uma que nos será útil é o fato de que é uma topologia Haussdorff.

Proposição 1.4.8. *A topologia fraca* de* $C_0(X)^*$ *é Haussdorff.*

Demonstração. Sejam $E_1, E_2 \in C_0(X)^*$ distintos. Como $E_1 \neq E_2$ então existe ao menos uma função $f \in C_0(X)$ tal que $E_1(f) \neq E_2(f)$. Daí, sem perda de generalidade, podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ com

$$E_1(f) < r < E_2(f),$$

e definir daí os abertos disjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= F_f^{-1}(-\infty, r) \\ A_2 &= F_f^{-1}(r, \infty) \end{aligned}$$

que são vizinhanças de E_1 e E_2 respectivamente na topologia fraca*. Daí a topologia fraca* de $C_0(X)^*$ é Haussdorff. $\square$

Poderíamos, ainda, citar diversas propriedades da topologia fraca*, como o fato de que ela é menos fina que a topologia da norma de operadores. Uma boa referência é [Bre10], tanto para esta ultima propriedade quanto para a construção das topologias fracas.

Vamos relacionar o exposto até o momento com medidas nos borelianos de X. A norma de uma medida com sinal, μ, nos borelianos, é definida como

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

onde $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ é obtido da decomposição de Jordan de μ(vide a seção 3.1 de [Fol13]).

Uma medida com sinal é de Radon se suas partes positiva e negativas são medidas positivas de Radon. Denotaremos $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das medidas de Radon com sinal sobre X.

Os resultados a seguir são os mais importantes da seção. O primeiro é uma das versões do teorema de Riez-Markov, adequada ao tratamento de medidas definidas em espaços Haussdorff localmente compactos.

Teorema 1.4.9. *Seja X um espaço topológico Haussdorff localmente compacto. Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$, defina*

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathcal{M}(X) & \to & C_0(X)^* \\ & \mu & \mapsto & \begin{array}{rccl} E_\mu : & C(X) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int f \, \mathrm{d}\mu \end{array} \end{array}.$$

Então I é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{M}(X)$ e $C_0(X)^*$.

Demonstração. Esse é o teorema 7.17 de [Fol13]. □

Na teoria envolvendo a entropia de Kolmogorov-Sinai, geralmente se utiliza medidas de probabilidade, principalmente por formarem um conjunto fechado na topologia fraca* em espaços compactos Haussdorff. Para a teoria em localmente compactos, porém, esse não é o caso, em geral. No trabalho, nos valeremos das medidas finitas.

Definição 1.4.10. *Seja um espaço X topológico. Uma **medida finita positiva** é uma medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\mu(X) = \|\mu\| < \infty$.*

Esteremos interessados nas medidas finitas com $\|\mu\| \leq 1$, que chamaremos *medidas limitadas à* 1.

Teorema 1.4.11. *Seja X um espaço topológico Haussdorff localmente compacto. O conjunto das medidas limitadas à* 1 *em $C_0(X)$ é compacto na topologia fraca*.*

Demonstração. O teorema é na verdade uma das formas do teorema de Alaoglu, que é o Teorema 5.18 de [Fol13]. Usando o Teorema 1.4.9, temos que o conjunto das medidas limitadas à 1 é a bola fechada de raio 1 na topologia fraca* de $C_0(X)^*$. Mas o teorema de Alaoglu, afirma que a bola fechada de raio 1 é compacta na topologia fraca*. □

Observe que no caso de espaços Haussdorff localmente compacto o conjunto das medidas Radon de probabilidade não é compacto em geral, já que a compacidade da bola fechada não implica a compacidade da casca. Mas se X é compacto, temos o importante resultado:

Lema 1.4.12. *O conjunto das medidas de probabilidade sobre X, um espaço Haussdorff compacto, é fechado na topologia fraca*.*

Demonstração. Primeiro observamos que como X é compacto, toda função contínua tem suporte compacto, de modo que $C_0(X) = C(X)$. Seja $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede de medidas de probabilidade sendo que

$$\lim_\lambda \mu_\lambda = \mu$$

na topologia fraca*. Observe agora que a função indicadora de X é contínua. Sendo assim na topologia fraca* temos a relação

$$\lim_\lambda \mu_\lambda(X) = \mu(X) = 1.$$

e portando $\mu(X)$ é de probabilidade. □

Como ultimo resultado da seção, consideramos a convergência da medida de conjuntos de continuidade.

Lema 1.4.13. *Seja X Haussdorff localmente compacto e seja $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede convergente na topologia fraca* das medidas de Radon de X com limite μ. Seja A um boreliano com $\mu(\partial A) = 0$ e com fecho compacto. Então*

$$\lim \mu_\lambda(A) = \mu(A).$$

Demonstração. Observe que como o fecho é compacto e μ é de Radon, então A tem medida finita. Por definição para toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ de suporte compacto,

$$\lim \int f \, \mathrm{d}\mu_\lambda = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Usando a equação (1.4), para todo $\epsilon > 0$ tome um compacto $K \subset \mathring{A}$ e aberto $U \supset \overline{A}$ tais que

$$\mu(U) \leq \mu(K) + \epsilon$$

Usando o Lema 1.2.26, tome as funções contínuas $f, g \in C_0(X)$ com $f = 1$ em K e $f = 0$ em $X \setminus \overline{A}$, e $g = 1$ em $\overline{A}$ e $g = 0$ em $X \setminus U$. Se I_k é a função indicadora de K, I_U, a de U e I_A, a de A temos

$$I_K \leq f \leq I_A \leq g \leq I_U$$

Assim obtemos as relações

$$\limsup \mu_\lambda(A) \leq \limsup \int g \, \mathrm{d}\mu_\lambda = \int g \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(U) \leq \mu(K) + \epsilon$$

e

$$\liminf \mu_\lambda(A) \geq \liminf \int f \, \mathrm{d}\mu_\lambda \geq \int f \, \mathrm{d}\mu \geq \mu(K)$$

Temos então que temos então que

$$\limsup \mu_\lambda A \leq \liminf \mu_\lambda(A) + \epsilon$$

Como o resultado vale para todo ϵ, o teorema fica mostrado. $\square$

Capítulo 2

Entropia de Sistemas Dinâmicos

Nesse capítulo, definem-se sistemas dinâmicos e as entropias topológica, uniforme e de Bowen. Mostra-se também a relação entre essas entropias.

O conteúdo é próximo do exposto no artigo [CP18], que é o objeto de estudo dessa dissertação. Sendo assim a linha de raciocínio apresentada é a mesma do artigo, excetuado o fato de que métricas somente serão consideradas ao final do capítulo, onde citaremos os resultados originais do artigo, que se tornarão casos particulares dos espaços uniformes.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos é área de estudo da ação de transformações em conjuntos, geralmente envolvendo alguma topologia e continuidade. Trata-se de uma área que envolve problemas amplos como as equações diferenciais ordinárias, orbitas pela ação de uma transformação, estabilidade etc.

Devido a natureza ampla, o estudo sistemas dinâmicos se utiliza ferramentas de todas as áreas de matemática [KO14, RLDHSD04].

No presente trabalho daremos enfase às visões topológica e analítica de sistemas dinâmicos, iniciando com a topológica.

Definição 2.1.1. *Um **sistema dinâmico** (topológico) é definido por um espaço topológico X e uma função contínua $T : X \to X$.*

*Dado $x \in X$ o conjunto $\left\{T^k(x) \middle| \, k \in \mathbb{N}\right\}$ é chamado de **orbita de** x.*

A definição é extremamente ampla, o que é intencional. Quando o espaço topológico de um sistema dinâmico for Hausdorff, compacto ou metrizável diremos que o sistema dinâmico é Hausdorff, compacto ou metrizável, respectivamente.

Citaremos, agora, diversos exemplos a fim de dar contexto ao tipo de problema que pode ser tratado com a teoria apresentada adiante.

Exemplo 2.1.2. Considere o espaço produto $X = K^{\mathbb{N}}$, o conjunto das sequencia $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ com valores em $K = \{0, \ldots, k-1\}$. Defina $S : X \to X$ a função *shift* como

$$S\left(a_1, a_2, \ldots\right) = \left(a_2, a_3, \ldots\right).$$

O shift é contínuo na topologia produto, de modo que o par (X, S) é um sistema dinâmico.

Exemplo 2.1.3. Considere um sistema de equações diferenciais $X' = F(X)$ em $\mathbb{R}^N$ sendo F um campo contínua. O teorema de existência e unidade de soluções de equações diferenciais permite a definição do fluxo Φ_F^τ, com $\tau \in \mathbb{R}$. Para uma descrição precisa veja a seção 7.2 de [RLDHSD04]. Determina-se um sistema dinâmico sobre X fixando-se $\tau \geq 0$ e definindo a aplicação

$$\Phi_F^\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

Exemplo 2.1.4. (Figura 2.1) Considere o fluxo Φ_F^τ dado pelo sistema em coordenadas polares polares

$$F(r, \phi) = \begin{pmatrix} r(1-r) \\ 1/(1-r) + 2 \end{pmatrix}$$

no disco aberto $D = \left\{(x, y \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 < 1\right\}$. Temos um sistema dinâmico tal que a velocidade angular assume valores arbitrariamente grandes, a medida que r se aproxima de 1. Observe que se trata de um sistema dinâmico que não é compacto, mas é metrizável.

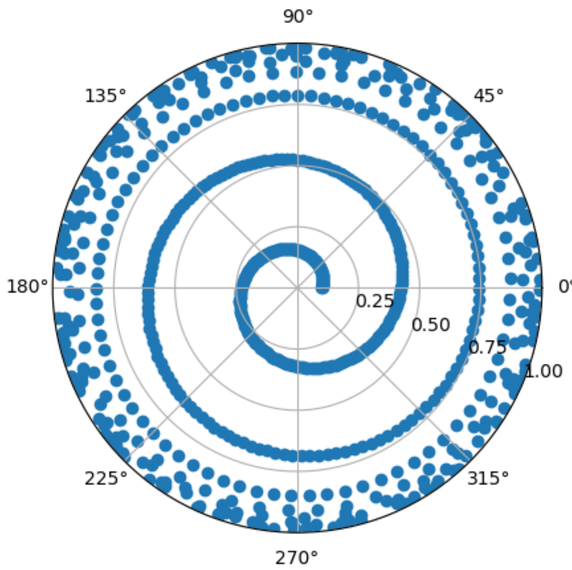

Figura 2.1: Representação do sistema do Exemplo 2.1.4 para $\tau = 0.1$ condição inicial $(r_0, \theta_0) = (0.1, 0)$. A medida que os pontos se aproximam da borda, a distância angular entre os pontos aumenta.

Exemplo 2.1.5. (Figura 2.2) Considere a função agindo no intervalo aberto $(0, 1)$,

$$f(x) = kx(1 - x).$$

Trata-se de um exemplo clássico de comportamento logístico discreto, que dependendo do valor de k pode apresentar comportamento caótico.

A demonstração do Princípio Variacional dependerá da ideia de subsistemas dinâmicos, a serem discutidos agora.

Definição 2.1.6. *Seja $S : Z \to Z$ um sistema dinâmico topológico. Diremos que o sistema dinâmico $X : T \to T$ é um **subsistema** de $S : Z \to Z$ se valer a restrição $S_{|X} = T$ e X tiver a topologia induzida de Z. Dizemos ainda que S é uma **extensão** de $T : X \to X$ à $S : Z \to Z$.*

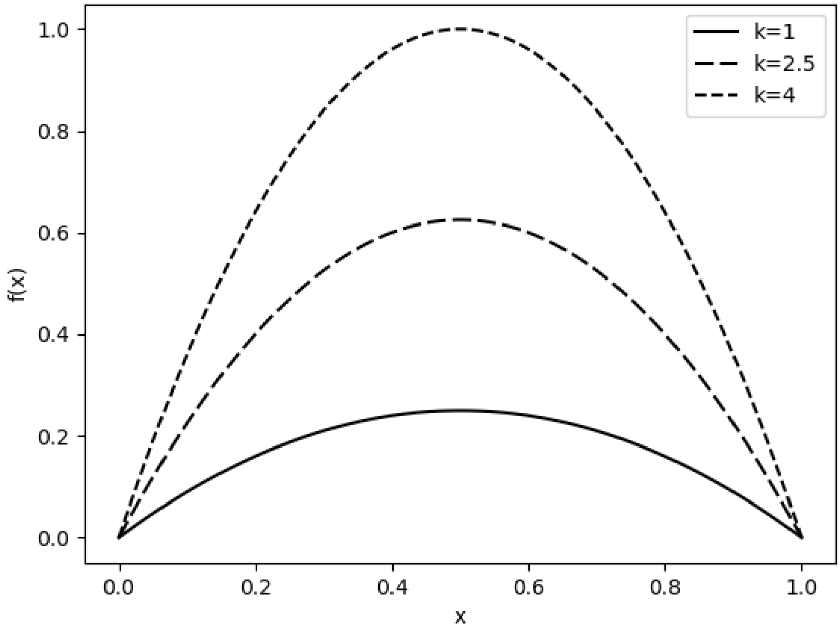

Figura 2.2: Representação da ação de $f(x)$ do Exemplo 2.1.5.

Exemplo 2.1.7. (Figura 2.3) Considere a equação diferencial em $(0, 2\pi)$ por

$$x' = x(2\pi - x).$$

Podemos estender o sistema para o circulo $S^1 \subset \mathbb{C}$. fazendo a injeção

$$x \to e^{ix}$$

e estendendo a equação diferencial para $x' = 0$ quando $x = 0$ e $x = 2\pi$.

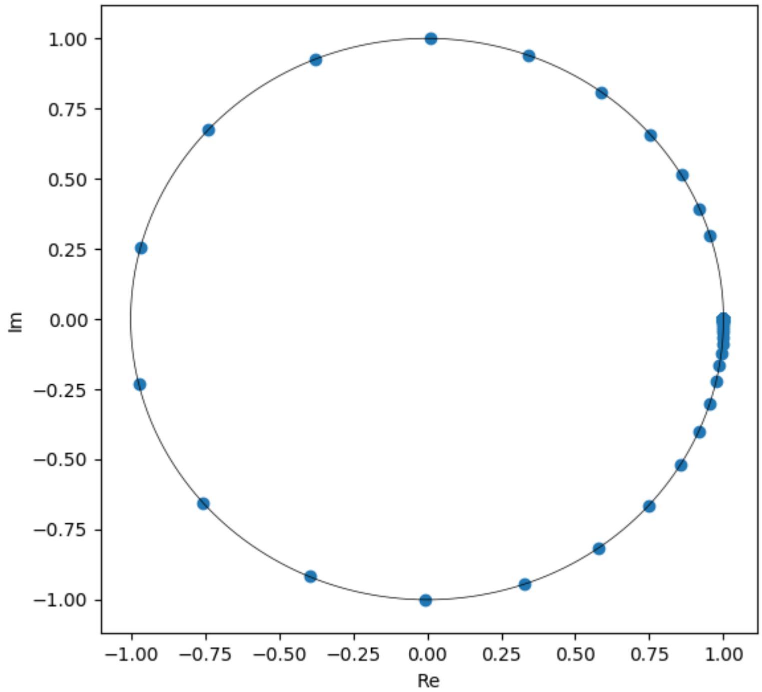

Figura 2.3: Representação da extensão do sistema do Exemplo 2.1.7 agindo sobre S^1, projetado nos complexos. Os pontos correm no sentido anti-horário.

Teorema 2.1.8. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico Hausdorff localmente compacto, e a compactificação por um ponto $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ de X. Então existe uma extensão $S : Z \to Z$, sendo Z Hausdorff e compacto. Além disso, a inclusão $\iota : X \to Z$ e a projeção*

$$\begin{aligned} \pi : \ & Z \ \to \ \tilde{X} \\ & x \ \mapsto \ \pi(x) = \begin{cases} x, & x \in X \\ \infty, & x \notin X \end{cases} \end{aligned}$$

são contínuas.

Demonstração. Escolha

$$Z = \prod_{n \in \mathbb{N}} \tilde{X} = \tilde{X}^{\mathbb{N}}.$$

as sequências de valores em $\tilde{X}$. Z é compacto na topologia produto, pois é um produto de espaços topológicos compactos. Considere,

$$\begin{array}{rccc} \iota: & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & \left(T^i x\right)_{i \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Afirmamos que ι é um homeomorfismo de $\tilde{X}$ na sua imagem em Z. De fato ι é contínua em cada coordenada pois T^n é uma função contínua. Além disso considere a projeção π_0 com

$$\pi_0\left((x_i)_{i \in \mathbb{N}}\right) = x_0.$$

π_0 é contínua e sua inversa na imagem $I = \iota(X)$ é ι. De fato

$$\pi_0 \circ \iota(x) = x.$$

E sempre que $z = \left(T^i(x)\right)$ então $\iota \circ \pi_0(z) = z$. Temos então uma cópia de X em Z. Defina agora

$$\begin{array}{rccc} S: & Z & \to & Z \\ & (x_i) & \mapsto & (x_{i+1}) \end{array}.$$

Temos que $S_{|X} = T$ e que S é contínua. Resta mostrar então que π como definida no teorema é contínua. Se $z \in \iota(X)$ nada há o que mostrar pois nesse caso $\pi(z) = \pi_0(z)$. Agora se A é uma vizinhança aberta de ∞ então então $K = X \setminus A =$ é compacto, e portanto, $\iota(K)$ é compacto e portanto fechado, já que Z é Hausdorff. Daí

$$\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\tilde{X} \setminus K) = Z \setminus \iota(K),$$

que portanto é aberto. □

Lema 2.1.9. *Sejam os sistemas dinâmicos $T : X \to X$ e $S : Z \to Z$ nas condições do Teorema 2.1.8. Então $X \in \mathscr{B}[Z]$, os borelianos de Z.*

Demonstração. É suficiente que X seja aberto em Z. Mas isso é imediato, pois a projeção π no Teorema 2.1.8 é uma função contínua, e $X \subset \tilde{X}$ é aberto, pois $\tilde{X}$ é Hausdorff. Daí, como $X = \pi^{-1}(X)$, temos e π é contínua, X é aberto em Z. □

Exemplo 2.1.10. (Figura 2.4) Continuando o Exemplo 2.1.4 podemos estender o sistema polar à espera S^2 identificando o bordo do disco com o ponto $(0,0,1)$, tomando $r = \frac{\theta}{\pi}$ em coordenadas esféricas e fazendo $F(1,\phi) = 0$. Observe que o fluxo gerado pelo sistema ainda é contínuo.

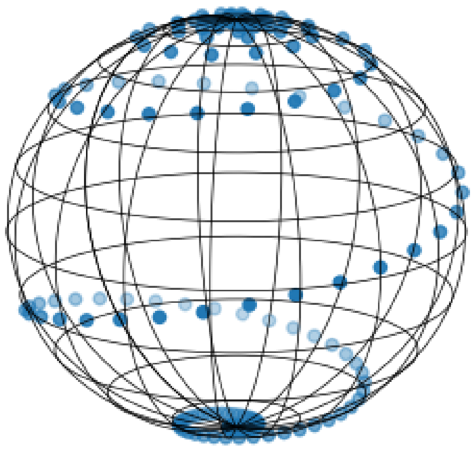

Figura 2.4: Ilustração para o Exemplo 2.1.10. Apesar da velocidade angular assumir valores arbitrariamente grandes, na compactificação eles se aproximam do polo norte, de modo que o fluxo ainda é contínuo.

Observe que uma estrutura uniforme de $\tilde{X}$ induz uma estrutura uniforme gerada por vizinhanças aberta da diagonal de Z cuja topologia uniforme é, em geral, menos fina que a topologia de Z. De fato, considere $\tilde{\mathscr{U}}$ estrutura uniforme de $\tilde{X}$ e defina

$$\mathscr{U}_Z = \left\{ \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta) \;\middle|\; \delta \in \tilde{\mathscr{U}} \right\}. \tag{2.1}$$

É imediato que se trata de uma estrutura uniforme em Z, pois a imagem inversa preserva as operações entre conjuntos, e claro que a diagonal $\Delta Z \subset \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta)$. Além disso π é contínua de modo que como $\tilde{\mathscr{U}}$ é gerada por conjuntos abertos da diagonal $\Delta \tilde{X}$ então $\mathscr{U}_Z$ também é gerada por conjuntos aberto da diagonal, mas, em geral, não todos, de modo que a topologia dada por $\mathscr{U}_Z$ é menos fina que a topologia original de Z.

Proposição 2.1.11. *Seja $\mathscr{U}_Z$ a estrutura uniforme definida na equação* (2.1). *Então*

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}_Z \cap (X \times X)$$

é a estrutura uniforme admissível de X. Além disso se $\eta \in \mathscr{U}_Z$ então η não separa pontos de $Z \subset X$ e, portanto, se $z \in Z \setminus X$ então $Z \setminus X \subset \eta(z)$.

Demonstração. Observe que $\pi(x) = x$ para $x \in X$ de modo que se $\delta_Z \in \mathscr{U}_Z$ tome $\delta \in \tilde{\mathscr{U}}$ tal que $\delta_Z = \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta)$. Daí

$$\begin{aligned}
\delta_Z \cap (X \times X) &= \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta) \cap (X \times X) \\
&= \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta) \cap \pi^{-1} \times \pi^{-1}(X \times X) \\
&= \pi^{-1} \times \pi^{-1} \left(\delta \cap (X \times X)\right) \\
&= \left(\delta \cap (X \times X)\right).
\end{aligned}$$

Agora seja $\eta \in \mathscr{U}_Z$. Vamos mostrar que η não separa pontos de $Z \setminus X$. Usando a definição dada em (2.1), tome Seja $\delta \in \tilde{\mathscr{U}}$ com $\pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta) \subset \eta$. Como toda *entourage* de $\tilde{X}$ contém a diagonal então

$$(Z \setminus X) \times (Z \setminus X) = \pi^{-1} \times \pi^{-1} \left(\{\infty\} \times \{\infty\}\right) \subset \pi^{-1} \times \pi^{-1}(\delta) \subset \eta$$

De modo que nenhuma *entourage* separa pontos de $Z \setminus X$ e portanto $Z \setminus X \subset \delta(z)$, se $z \in Z \setminus X$. □

Para finalizar a seção, vamos analisar coberturas de X sob a perspectiva de suas extensões.

Lema 2.1.12. *Seja $T : X \to X$ subsistema de um sistema dinâmico topológico $S : Z \to Z$. Tome $\mathscr{A}$ uma cobertura de Z, e defina a cobertura $\mathscr{C} = \mathscr{A} \cap X$. Então,*

$$\mathscr{C}_T^n = X \cap \mathscr{A}_S^n.$$

Demonstração. Faremos por indução. Para $n = 1$, nada há nada para se mostrar. Como $T^{-k}(\mathscr{C}) = X \cap S^{-k}(\mathscr{A})$. Daí suponha que a afirmação vale para $n = k$, temos,

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_T^{k+1} \cap X &= \mathscr{C}_T^k \cap T^{-k}\left(\mathscr{C}\right) \\ &= \left(\mathscr{A}_S^k \cap X\right) \cap \left(X \cap S^{-k}\left(\mathscr{A}\right)\right) \\ &= \left(\mathscr{A}_S^{k+1} \cap X\right). \end{aligned}$$

□

Sendo assim, envolvendo coberturas admissíveis, podemos pensar sempre em coberturas de uma sistemas compactado com uma dinâmica que pode ser estendida a este sistema.

2.2 Entropia Topológica

O conceito de entropia foi inicialmente cunhado nos ramos da termodinâmica em física no século XIX por Rudolf Clausius. O conceito foi melhor entendido e desenvolvido nos contexto de mecânica estatística onde se associa ao número de estados de um sistema, de maneira semelhante ao formato utilizado em Matemática [Sal01].

Em teoria da informação, a entropia serve a medir a quantidade ou o tamanho da informação, o que formaliza e torna o conceito do que seria "informação" mais quantitativo, tendo assim aplicações ao se estudar a eficiência e confiabilidade da transmissão de informação[SW98]. No contexto se assemelha a entropia de Kolmogorov-Sinai a ser vista no Capítulo 3.

Em Matemática, entropia tem sua importância consagrada em teoria ergódica e sistemas dinâmicos, pois quase sempre se apresenta como um invariante por algum tipo de conjugação [KO14, BG13]. Sendo assim instrumental, por exemplo, na classificação sistemas dinâmicos.

A definição original da entropia topológica e sua existência em sistemas compactos foi apresentada em [AKM65]. Bowen em [Bow71] apresentou uma definição alternativa mas equivalente em sistemas compactos metrizáveis. Nesse trabalho vamos utilizar a definição de Caldas e Patrão [CP18], na qual a definição de coberturas admissíveis apresentará seu papel.

Definição 2.2.1. *A entropia de uma cobertura $\mathscr{A}$ de X é dada por*

$$H(\mathscr{A}) = \log N(\mathscr{A}).$$

Lembre que, como definido no Capítulo 1, $N(\mathscr{A})$ é a menor cardinalidade entre as subcoberturas de $\mathscr{A}$. Observe que a entropia de uma cobertura pode ser infinita. Mas esse não é o caso de coberturas pode abertos em espaços compactos, ou de coberturas admissíveis.

Definição 2.2.2. *Dado um sistema dinâmico, $T : X \to X$ sua* entropia topológica com respeito a cobertura aberta *$\mathscr{A}$ é dada pela expressão:*

$$h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathscr{A}^n).$$

A entropia de uma cobertura tem existência garantida em situações de interesse desse trabalho, conforme a próxima proposição.

Proposição 2.2.3. *Em sistemas localmente compactos a entropia de uma cobertura admissível existe, i.e. o limite da Definição 2.2.2, existe se $\mathscr{A}$ é admissível.*

Demonstração. Basta observar que toda cobertura admissível admite uma subcobertura finita, de modo que

$$N(\mathscr{A}) \leq \infty$$

para toda cobertura $\mathscr{A}$ admissível. Agora tome $n, q \in \mathbb{N}$ com $q \leq n$. Pela Proposição 1.1.5

$$N(\mathscr{A}^n) \leq N\left(\mathscr{A}^{n-q}\right) N(\mathscr{A}^q).$$

Não é difícil concluir que cada termo é finito, já que basta existir uma subcobertura finita de $\mathscr{A}$ para que $N(\mathscr{A}^n)$ seja finita. Pelo Lema 1.1.7 o limite em 2.2.2 existe. $\square$

Definição 2.2.4. *A entropia topológica do sistema dinâmico $T: X \to X$ é dada por*

$$h(T) = \sup_{\mathscr{A}\, admissvel} h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big)$$

Esta definição é diferente da originalmente por em [AKM65], na qual o supremo é tomado sobre as coberturas aberta, i.e.

$$h_f(T) = \sup_{\mathscr{A}\, aberta} h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big).$$

O principal motivo dessa mudança é o Princípio Variacional, que não pode ser imediatamente generalizado a espaços localmente compactos. O motivo ficará claro na Seção 4.3, onde um exemplo discutirá o fato, mas no momento posporemos a discussão para que tenhamos todo o arsenal necessário a um discussão definitiva.

Exemplo 2.2.5. Considere o sistema dado no Exemplo 2.1.2 para $k = 2$. Considere a cobertura $\mathscr{A} = \big\{\{0\} \times K^{\mathbb{N}}, \{1\} \times K^{\mathbb{N}}\big\}$. Contando as intersecções é possível concluir que $N(\mathscr{A}^n) = 2^n$ de onde $h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big) = \log 2$.

Lema 2.2.6. *Dado um sistema dinâmico $T: X \to X$, sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, coberturas aberta de X. Então se $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ temos que $h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big) \leq h\big(T \,\big|\, \mathscr{B}\big)$.*

Demonstração. O resultado é imediato já que pela Proposição 1.1.5 temos a relação $N(\mathscr{A}^n) \leq N(\mathscr{B}^n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Daí aplicando o logaritmo, dividindo por n, temos, tomando o limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathscr{A}^n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathscr{B}^n),$$

que é o resultado procurado. $\square$

Proposição 2.2.7. *Sejam $T : X \to X$ um sistema dinâmico topológico e $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$h\left(T^k\right) \leq kh\left(T\right).$$

Demonstração. Tome $\mathscr{A}$ um cobertura admissível de X. Observe que

$$\left(\mathscr{A}_T^k\right)_{T^k}^n = \mathscr{A}_T^{kn}.$$

Daí

$$k\frac{1}{kn}H\left(\mathscr{A}^{kn}\right) = \frac{1}{n}H\left(\left(\mathscr{A}_T^k\right)_{T^k}^n\right)$$

Tomando o limite e observando que $\mathscr{A} \prec \mathscr{A}^n$, temos a relação

$$h\left(T^k \,\middle|\, \mathscr{A}\right) \leq h\left(T^k \,\middle|\, \mathscr{A}^k\right) = kh\left(T \mid \mathscr{A}\right).$$

De onde podemos tomar o supremo sobre as coberturas admissíveis, e obter

$$h\left(T^k\right) \leq kh\left(T\right).$$

□

2.3 Entropia Uniforme

Calcular a entropia topológica de um sistema dinâmico não é uma tarefa trivial, dada a natureza muito abstrata da definição. Como comentado na introdução da Seção 2.2, Bowen apresentou uma definição alternativa e equivalente para espaços métricos e compactos. Tal caracterização se mostrou muito útil levando amplo avanços na teoria ergódica e trazendo luz ao entendimento do significado da entropia. Aqui vamos dar um tratamento mais geral que o apresentado por Bowen, utilizando estruturas uniformes [Mis75, DSV12].

A entropia em espaços uniformes foi primeiramente propostas e estudada em [Hoo74]. O termo *entropia uniforme* apareceu naturalmente na literatura, como uma extensão natural da entropia topológica apresentada por Bowen, a ponto de haver pouca distinção a nomenclatura. As estruturas uniformes estão presentes em diversos elementos em Matemática [Jam87], não apenas nos espaços topológicos aqui estudados, de modo que diversas formas da entropia uniforme se apresentam em áreas além do que poderia ser considerado comum em sistemas dinâmicos, como é o caso dos grupos topológicos que não são grupos de Lie [DSV12].

O tratamento da seção segue a linha do trabalho de Caldas e Patrão [CP18], requerendo pouca referenciação externa. Mas ressaltamos logo de início que o artigo se restringe ao caso metrizável e localmente compacto, enquanto que nessa dissertação não fazermos nenhuma menção a métricas ao definirmos entropia uniforme e mostrar sua propriedade. O fato de um espaço topológico Hausdorff localmente compacto apresentar uma estrutura uniforme admissível e ao mesmo tempo não ser necessariamente metrizável aponta que temos de fato uma generalização do tratamento.

Ao final da seção apresentaremos as definições e resultados no caso metrizável, apresentada em [CP18], sem quaisquer demonstração, apenas com o intuito de contextualizar àqueles que não sintam naturalidade com estruturas uniformes. Vale ressaltar que todo resultado lá apresentado é particular do que for mostrado na parte inicial da seção.

Entropia Uniforme e a Entropia de Bowen em espaços uniformes

Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico. Se X é um espaço topológico uniforme, chamaremos o sistema dinâmico de *uniforme*. Nessas condições podemos definir uma entropia análoga a a proposta por Bowen, mas sem necessitar de uma métrica. Vamos esta mostrar que tem o valor da entropia topológica. Seja $\mathscr{U}$ uma estrutura uniforme de X e $\eta \in \mathscr{U}$ defina

$$\eta_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} \times T^{-i}(\eta).$$

Observe que não necessariamente η_n é uma *entourage* da estrutura uniforme, mas a cobertura $\eta_n[X]$ é aberta. No que segue, sempre consideramos ***entourages* abertas e simétricas**. Fazemos essa restrição para não estender em demasiado o tratamento de estrutura uniformes. No entanto, não tiram generalidade do tratamento, e poderiam ser omitidas, ao se observar que essas *entourages* refinam a estrutura uniforme[Jam87], e são o suficientes em muitas das demonstrações. Começamos com algumas propriedades e definições.

Proposição 2.3.1. *Dado $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme , e uma entourage η, então*

$$(\eta_n)^2 \subset \left(\eta^2\right)_n .$$

Demonstração. Seja $(x, y) \in (\eta_n)^2$. Então, pela definição, existe z tal que $(x, z), (z, y) \in \eta_n$. Ou seja $\left(T^j(x), T^j(z)\right) \in \eta$ e $\left(T^j(z), T^j(y)\right) \in \eta$, para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Segue que $\left(T^j(x), T^j(y)\right) \in \eta^2$, e portanto $(x, y) \in \left(\eta^2\right)_n$. □

Proposição 2.3.2. *Dada uma estrutura uniforme $\mathscr{U}$ sobre X, as entourages $\eta, \delta \in \mathscr{U}$ e $n \in \mathbb{N}$, valem*

1. $N(\eta_n[X]) \leq N(\eta_{n+1}[X])$.

2. $N(\eta_n[X]) \leq N(\delta_n[X])$ *se* $\delta \subset \eta$.

Demonstração.

1. Para todo $x \in X$ temos $\eta_n(x) \supset \eta_{n+1}(x)$. Daí é claro que $\eta_n[X] \prec \eta_{n+1}[X]$ de modo que pelo item *1* da Proposição 1.1.5 temos $N(\eta_n[X]) \leq N(\eta_{n+1}[X])$.

2. Como $\eta_n \supset \delta_n$ então $\eta_n[X] \prec \delta_n[X]$ de modo que pelo item *1* da Proposição 1.1.5 temos $N(\eta_n[X]) \leq N(\delta_n[X])$.

□

Definição 2.3.3. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme com estrutura uniforme $\mathscr{U}$. $E \subset X$ é dito (n, η) - gerador se dado $x \in X$ existe $y \in E$ tal que $(x, y) \in \eta_n$.*

Uma boa caracterização de um conjunto (n, η) - gerador vem do resultado a seguir.

Lema 2.3.4. *Um conjunto E é (n, η) - gerador se, e somente se a família*

$$\eta_n [E] = \left\{ \eta_n (x) \,\middle|\, x \in E \right\}. \tag{2.2}$$

constituir uma cobertura.

Demonstração. Suponha que $\eta_n[E]$ não seja uma cobertura, daí existe $y \in X$ tal que $y \notin \eta_n(E)$, mas então para todo $x \in E$, temos que $(y, x) \notin \eta_n$, o que é uma contradição.

Por outro lado, se E é (n, η) - gerador, então dado $y \in X$, existe $x \in E$ tal que $y \in \eta_n(x)$, e portanto $\eta_n[E]$ é uma cobertura de X. $\square$

Definição 2.3.5. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme com estrutura uniforme $\mathscr{U}$. Dada $\eta \in \mathscr{U}$ definimos*

$$h^{\mathscr{U}} (T, \eta) = \limsup \frac{1}{n} \log N (\eta_n [X])$$

*e a **entropia uniforme***

$$h^{\mathscr{U}} (T) = \sup_{\eta \in \mathscr{U}} h^{\mathscr{U}} (T, \eta).$$

Observe que no lugar de $N(\eta[X])$ na definição, poderíamos usar o ínfimo entre os conjuntos (n, η) - geradores, já que tais conjuntos formam uma cobertura de X por η-bolas. Veremos mais adiante que essa definição é compatível com a definição dada por Miziurewicz, mas é mais adequada na comparação com a entropia topológica.

Definição 2.3.6. *Seja um sistema dinâmico uniforme $T : X \to X$ com estrutura uniforme $\mathscr{U}$. Seja $\eta \in \mathscr{U}$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma conjunto $E \subset X$ é dito (n, η) - separado se dados $x, y \in E$ diferentes, então $(x, y) \notin \eta$.*

Um conjunto (n, η) - separado será maximal se não for subconjunto próprio de outro conjunto (n, η) - separado. Observe que sempre existe ao menos um conjunto do tipo, já que podemos ordenar parcialmente os conjuntos por inclusão, e garantir a existência pelo Lemma de Zorn [CP18].

Lema 2.3.7. *Um conjunto (n,η) - separado maximal é também uma conjunto (n,η) - gerador.*

Demonstração. Seja E um conjunto (n,η) - separado maximal. Suponha que $\eta\,[E]$ não é uma cobertura, então escolha $y \in X \backslash \bigcup_{x\in E} \eta(x)$. Daí $E \cup \{y\}$ é (n,η) - separado, o que é uma contradição. Assim E é (n,η) - gerador. □

Escrevemos $s\,(n,\eta,Y)$ como o supremo da cardinalidade entre os conjuntos (n,η) - separado de Y.

Lema 2.3.8. *Sejam um sistema dinâmico uniforme $T : X \to X$ com estrutura uniforme $\mathscr{U}$, $\eta,\delta \in \mathscr{U}$ com $\delta \supset \eta^2$, $Y \subset X$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$N\left((\delta)_n\,[Y]\right) \leq s\,(n,\delta,Y) \leq N\left((\eta)_n\,[Y]\right)$$

Demonstração. A primeira desigualdade segue do Lema 2.3.7. Seja agora $S \subset Y$ um (n,δ) - separado. Segue então que S é $\left(n,\eta^2\right)$ - separado. Se $E \subset Y$ é um (n,η) - gerador seja $e : S \to E$ como $e(s) \in E$ é algum x tal que $s \in \eta_n(x)$. Temos então que e é uma função injetiva, já que se $e(s_1) = e(s_2)$ então $(s_1,x),(s_2,x) \in \eta_n$ e portanto $(s_1,s_2) \in (\eta_n)^2 \subset \left(\eta^2\right)_n$, o que é contradição. Daí temos

$$s\,(n,\delta,Y) \leq s\left(n,\eta^2,Y\right) \leq N\left((\eta)_n\,[Y]\right)$$

□

Observe que esse último resultado garante que $s\,(n,\delta,Y) < \infty$ sempre que existirem subcoberturas finitas de $(\eta)_n\,[Y]$. Observe ainda que este sempre é o caso da estrutura uniforme admissível.

Os conjuntos (n,η) - separados permitem uma outra caracterização da entropia uniforme, que foi descrita por Miziurewicz na sua clássica demonstração do Princípio Variacional [Mis75].

Proposição 2.3.9. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme. A entropia de uniforme de T é dada por*

$$h^{\mathscr{U}}(T) = \sup_{\eta \in \mathscr{U}} \limsup \frac{1}{n} \log s(n, \eta, X)$$

Demonstração. Tomando $Y = X$, aplicando o logaritmo, dividindo por n nas desigualdades do Lema 2.3.8 e tomando o lim sup em n, obteremos a relação

$$h^{\mathscr{U}}(T, \eta) \leq \limsup \frac{1}{n} \log s(n, \eta, X) \leq h^{\mathscr{U}}(T, \delta).$$

Tomando o supremo em $\delta \in \mathscr{U}$ e em seguida em $\eta \in \mathscr{U}$, temos o resultado. □

Podemos agora dar uma interpretação da entropia uniforme: Dado $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme, sua entropia será positiva se os conjuntos de pontos que são separados pelas *entourages* da estrutura uniforme também tiverem suas orbitas sempre separadas pela mesma *entourage*. Por outra perspectiva, se T sempre "aproxima" as orbitas de pontos distintos, esse sistema possivelmente terá entropia uniforme nula.

Lema 2.3.10. *Dado $X : T \to T$ um sistema dinâmico uniforme, com estrutura uniforme $\mathscr{U}$. Então*

$$h^{\mathscr{U}}(T) = \sup_{\eta \in \mathscr{U}} h\Big(\eta[X] \,\Big|\, T\Big).$$

Demonstração. Vamos mostrar que

$$\left(\eta^2[X]\right)^n \prec \left(\eta^2\right)_n [X] \prec (\eta[X])^n$$

de onde o resultado seguirá. Seja $\delta \in \mathscr{U}$. Temos que um elemento de $A \in \delta_n[X]$ é da forma

$$A = \delta(x) \cap (T \times T)^{-1} \delta(x) \ldots$$

de modo que $A \in \delta^n$. Como é valido para toda *entourage* , temos que $\left(\eta^2 [X]\right)^n \prec \left(\eta^2\right)_n [X]$. Agora suponha $x \in B \in \eta^n [X]$ então existem $x_1, x_2, \ldots$ tais que

$$B = \left(\eta(x_1) \cap (T \times T)^{-1} \eta(x_2) \cap \ldots\right).$$

Segue daí que $(x, x_1), (T(x), x_2) \cdots \in \eta$. Mas daí,

$$\eta(x_1), \eta\left(T(x_2)\right), \cdots \subset \eta^2 (x),$$

de onde $B \subset \left(\eta^2(x) \cap (T \times T)^{-1} \eta^2(x) \cap \ldots\right)$, e, portanto,

$$\left(\eta^2\right)_n [X] \prec (\eta [X])^n .$$

Agora usando as Proposições 1.1.5 e 2.3.2, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\delta^2 \subset \eta$,

$$\frac{1}{n} \log N\left((\eta [X])^n\right) \leq \frac{1}{n} \log N\left((\eta)_n [X]\right) \leq \frac{1}{n} \log N\left(\delta [X]^n\right) \tag{2.3}$$

De onde podemos tomar os limites e tomar os supremos nas *entourages* δ e depois nas η para obter o teorema. □

Em sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos, a igualdade entre a entropia de Bowen e a entropia sobre abertos depende da existência do número de Lebesgue que, dentre outras interpretações, afirma que dada uma cobertura aberta aberta de um compacto existe um raio para que toda bola esteja contida num aberto da cobertura. Vamos mostrar agora uma generalização, utilizando *entourages* em vez de raios.

Lema 2.3.11. *Seja $\left(X, \mathscr{U}\right)$ um espaço topológico uniforme que admite uma compactificação $\left(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}}\right)$. Seja ainda uma cobertura aberta $\mathscr{A} = X \cap \tilde{\mathscr{A}}$. Então existe $\eta \in \mathscr{U}$ tal que*

$$\mathscr{A} \prec \eta [X]$$

Demonstração. Sejam $\tilde{\mathscr{A}}$ uma cobertura aberta de $\tilde{X}$ e $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathscr{U}}$ um *entourage* e defina o conjunto

$$C_\eta = \left\{ x \;\middle|\; \tilde{\eta}(x) \subset A \text{ para algum } A \in \tilde{\mathscr{A}} \right\}.$$

É imediato que $C_{\tilde{\eta}} \subset C_{\tilde{\delta}}$ se $\tilde{\delta} \subset \tilde{\eta}$.

Observamos agora que $C_{\tilde{\eta}^2} \subset \mathring{C}_{\tilde{\eta}}$, pois se $y \in C_{\tilde{\eta}^2}$ então para todo $x \in \tilde{\eta}(y)$, $\tilde{\eta}(x) \subset \tilde{\eta}^2(y)$.

Temos ainda que

$$\bigcup_{\tilde{\eta} \in \tilde{\mathscr{U}}} C_{\tilde{\eta}} = \tilde{X},$$

já que para todo $x \in \tilde{X}$ existe um aberto $A \in \tilde{A}$ com $x \in A$, e portanto, existe uma *entourage* $\tilde{\eta}$ com $\tilde{\eta}(x) \subset A$.

Agora tome $\tilde{\delta} \in \tilde{\mathscr{U}}$ com $\tilde{\delta}^2 \subset \tilde{\eta}$. Segue que $C_{\tilde{\eta}} \subset \mathring{C}_{\tilde{\delta}}$, De onde temos

$$\tilde{X} = \bigcup_{\tilde{\delta} \in \tilde{\mathscr{U}}} \mathring{C}_{\tilde{\delta}}.$$

Como $\tilde{X}$ é compacto, tome $\left\{ \tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_n \right\}$ um conjunto finito de entourages tal que $\bigcup_{i=1}^{n} C_{\tilde{\delta}_i} = \tilde{X}$. Tome a *entourage* $\tilde{\delta} = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{\delta}_i$, de onde $\tilde{X} = C_{\tilde{\delta}}$. Daí fica claro que $\tilde{A} \prec \tilde{\delta}\,[X]$.

Observando agora que as *entourages* de X são justamente da forma $\eta = \tilde{\eta} \cap (X \times X)$ e que $\eta(x) = X \cap \tilde{\eta}(x)$ para $x \in X$. então

$$\mathscr{A} = \tilde{\mathscr{A}} \cap X \prec X \cap \tilde{\eta}\,[X] = \eta\,[X]\,.$$

para alguma *entourage* $\eta \in \mathscr{U}$. □

Proposição 2.3.12. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme com espaço uniforme $\left(X, \mathscr{U}\right)$ admitindo uma compactificação $\left(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}}\right)$. Então*

$$h^{\mathscr{U}}(T) = \sup_{\tilde{\mathscr{A}}:\ aberta} h\left(T \;\middle|\; X \cap \tilde{\mathscr{A}}\right).$$

Demonstração. Seja $\eta \in \mathscr{U}$ e considere a cobertura $\tilde{\eta}[X]$. Temos que $\eta[X]$ é uma cobertura aberta de $\tilde{X}$, pois X é denso em $\tilde{X}$. Além disso se $\eta = \tilde{\eta} \cap (X \times X)$ é a *entourage* induzida por $\tilde{\eta}$, então temos $\tilde{\eta}[X] \cap X = \eta[X]$. Segue daí que, pelo Lema 2.3.10, que,

$$h^{\mathscr{U}}(T) \leq \sup_{\tilde{\mathscr{A}}\text{: aberta}} h\left(T \,\middle|\, \tilde{X} \cap \mathscr{A}\right)$$

Agora pelo Lema 2.3.11, temos que para toda cobertura aberta $\tilde{\mathscr{A}}$ de $\tilde{X}$, existe uma entourage $\delta \in \mathscr{U}$ com $X \cap \tilde{\mathscr{A}} \prec \delta[X]$. Daí temos

$$h\left(T \,\middle|\, \tilde{X} \cap \delta[X]\right) \geq h\left(T \,\middle|\, \tilde{X} \cap \mathscr{A}\right)$$

Tomando o supremo em δ e usando novamente o Lema 2.3.10, temos

$$h^{\mathscr{U}}(T) \geq \sup_{\tilde{\mathscr{A}}\text{: aberta}} h\left(T \,\middle|\, \tilde{X} \cap \mathscr{A}\right)$$

□

Corolário 2.3.13. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico Hausdorff localmente compacto. Seja $\mathscr{U}$ a estrutura uniforme admissível de X. Então*

$$h^{\mathscr{U}}(T) = h(T).$$

Demonstração. Tome $\tilde{X}$ como a compactificação de X por um ponto. Pelo Teorema 1.2.22 toda cobertura admissível de X é a restrição de uma cobertura de $\tilde{X}$. Além disso, por definição, toda *entourage* da estrutura uniforme admissível é a restrição de uma *entourage* da estrutura uniforme de $\tilde{X}$. Usando X e $\tilde{X}$ na Proposição 2.3.12 o resultado segue. □

Voltando às compactificações de sistemas dinâmicos dadas pelo Teorema 2.1.8 e a estrutura uniforme $\mathscr{U}_Z$ dada pela equação (2.1), podemos estabelecer a relação para as entropias uniformes de $T : X \to X$ e da extensão $S : Z \to Z$.

Lema 2.3.14. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico Hausdorff Localmente compacto e $S : Z \to Z$ uma extensão como no Teorema 2.1.8. Sejam $\mathscr{U}$ a estrutura uniforme admissível de X e $\mathscr{U}_Z$ dada em (2.1). Então vale que*

$$h^{\mathscr{U}}(X) \leq h^{\mathscr{U}_Z}(S).$$

Demonstração. Observe que os conjuntos (n, η) - separado são finitos pelo Lema 2.3.8, e pelas coberturas admissíveis geradas por η sobre X. Assim o supremo entre as cardinalidades dos conjuntos (n, η) - separado é o máximo entre elas. Seja, então, η uma *entourage* da estrutura uniforme admissível e E_n uma sequência de conjuntos, com E_n (n, η) - separado por T para cada n, tais que

$$s(n, \eta, T) = \#E_n.$$

Como η é admissível então, pela Proposição 2.1.11, existe $\eta_Z \in \mathscr{U}_Z$ tal que $\eta = \eta_Z \cap X \times X$.

Vamos mostrar agora que E_n é (n, η) - separado por S. Como E_n é (n, η) - separado separado por T e $S_{|X} = T$ então se $x, y \in E_n$,

$$\left(T^k(x), T^k(y)\right) \notin \eta_Z$$

para $k = 0, \dots, n-1$. De fato suponha que $\left(T^k(x), T^k(y)\right) \in \eta_Z$. Como $T^k(x), T^k(y) \in X$ teríamos $\left(T^k(x), T^k(y)\right) \in \eta$, o que é contradição. Como $\left(T^k(x), T^k(y)\right) = \left(S^k(x), S^k(y)\right)$ então

$$(x, y) \notin \bigcap_{k=0}^{n-1} S^{-k} \times S^{-k} \eta_Z = \eta_n.$$

Portanto E_n é um conjunto (n, η_Z) - separado por S. Daí

$$\limsup \frac{1}{n} \log s(n, \eta, T) \leq \limsup \frac{1}{n} \log s(n, \eta_Z, S) \leq h^{\mathscr{U}_Z}(S).$$

Daí tomando o supremo sobre as *entourages* $\eta_Z \in \mathscr{U}_Z$ em seguida em $\eta \in \mathscr{U}$, mostramos os lema. $\square$

Da maneira geral a entropia de uma cobertura $\mathscr{A}$ de um sistema dinâmico $T : X \to X$ somente pode ser calculada quando é garantida a existência de uma subcobertura finita de $\mathscr{A}$. O mesmo vale para entropia uniforme, i.e. as coberturas geradas pelas *entourages* devem ter subcobertura finita. No caso da estrutura uniforme admissível, as coberturas geradas por um *entourage* admitem subcoberturas finitas, de modo que sua entropia de coberturas por bolas é finita.

A entropia de Bowen, definida a seguir, recai à entropia topológica em espaços compactos, mas pode existir mesmo em sistemas que não são compactos. Como já comentado, Bowen propôs sua versão de entropia topológica em espaços métricos e esta se tornou a definição mais utilizada na literatura. Vamos aqui relaciona-la com a entropia topológica e mostrar que a definição de Bowen também é valida no Princípio Variacional, bastando utilizar a estrutura uniforme adequada (ou ainda a métrica adequada) para calcula-la.

Definição 2.3.15. *A **entropia de Bowen** de uma estrutura uniforme $\mathscr{U}$ é dada por*

$$h_{\mathscr{U}}(T) = \sup_{\substack{\eta \in \mathscr{U} \\ K:compacto}} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_K(\eta_n[X]).$$

Proposição 2.3.16. *Dada uma estrutura uniforme, $\mathscr{U}$, sobre um espaço topológico a entropia de Bowen é dada pela formula*

$$h_{\mathscr{U}}(T) = \sup_{\substack{\eta \in \mathscr{U} \\ K:compacto}} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_K(\eta[X]^n).$$

Demonstração. Basta observar que para todo compacto $K \subset X$ vale a relação

$$\left(\eta^2[K]\right)^n \prec \left(\eta^2\right)_n [K] \prec (\eta[K])^n,$$

como visto no Lema 2.3.10. Repetindo os calculo para K e em seguida tomando o supremo entre K compacto, o teorema é mostrado. $\square$

Observe que é imediata a relação $h_{\mathscr{U}}(T) \leq h^{\mathscr{U}}(T)$, pois $N_K(\eta[X]^n) \leq N(\eta[X]^n)$. Para terminar a seção, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.17. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme, com estrutura uniforme $\mathscr{U}$ compatível com a topologia. Então*

$$h(T) \leq h_{\mathscr{U}}(T).$$

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura admissível e $K \subset X$ com $X \setminus K \in \mathscr{A}$. Defina o conjunto

$$C_\eta = \left\{ x \in K \;\middle|\; \text{existe } A \in \mathscr{A} \text{ tal que } \eta^2(x) \subset A \right\}.$$

Repetindo o raciocínio na demonstração do Lema 2.3.11, existe $\eta \in \mathscr{U}$ tal que $K \subset C_\eta$.

Temos daí que $\mathscr{A} \prec \eta[x]$. De fato tome $x \in X$. Se $\eta(x) \cap K = \emptyset$ então $\eta(x) \subset X \setminus K$. Se por outro lado $\eta(x) \cap K$ é não vazio, tomando $y \in \eta(x) \cap K$, pela escolha de η temos que $\eta(y) \subset A$ para alguma $A \in \mathscr{A}$.

Defina então a cobertura

$$\mathscr{D} = \eta[X] \cup \{X \setminus K\}.$$

É claro que $\mathscr{A} \prec \mathscr{D}$. Usando a notação $K^c = X \setminus K$ vamos definir

$$\tilde{K} = \bigcap_{i=0}^{n-1} T^i(K^c)$$

e para $m = 0, \ldots, n-1$

$$K_m = K^c \cap T^{-1}(K^c) \cap \ldots T^{m-1}(K^c) \cap T^{-m}(K).$$

Observe que $\tilde{K} \cap K_m = K_m \cap K_{m'} = \emptyset$ para $m \neq m'$. Além disso

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} K_i = \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(K).$$

de onde $\left\{\tilde{K}, K_1, \dots K_{n-1}\right\}$ é uma partição de X. Sendo assim

$$N(\mathscr{D}) \leq N_{\tilde{K}}(\mathscr{D}) + \sum_{i=0}^{n-1} N_{K_m}(\mathscr{D}).$$

Defina agora

$$\mathscr{B}_m = K^c \cap T^{-1}K^c \cap \cdots \cap T^{-m}\left(\eta\,[X]^{n-m}\right).$$

Temos que $\mathscr{B}_m \subset \mathscr{D}^n$. Além disso, $\mathscr{B}_m$ é uma cobertura de K_m, pois $\mathscr{B}_m$ é uma cobertura de K particularmente. Sendo assim

$$\begin{aligned} N_{K_m}(\mathscr{D}^n) &\leq N_{K_m}(\mathscr{B}_m) \\ &\leq N_K(\eta\,[X]) \leq N_K(\eta\,[X]^n). \end{aligned}$$

Daí como $\tilde{K} \in \mathscr{D}^n$ então $N_K(\mathscr{D}^n) = 1 \leq N_K(\eta\,[X]^n)$. Temos finalmente que

$$N(\mathscr{A}) \leq N_{\tilde{K}}(\mathscr{D}) + \sum_{i=0}^{n-1} N_{K_m}(\mathscr{D}). \leq (n+1)\, N_K(\eta\,[X]^n).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(n+1) = 0$, pois $\exp(n) > n+1$, temos então que

$$\begin{aligned} h\big(\mathscr{A} \mid T\big) &\leq \limsup \frac{1}{n}\left(\log(n+1) + \log N_K(\eta\,[X]^n)\right). \\ &\leq h_{\mathscr{U}}(T) \end{aligned}$$

$\square$

Observe que não há hipótese sobre $\mathscr{U}$, exceto que sua topologia uniforme é a do sistema dinâmico. Quando consideramos a estrutura uniforme admissível, nos casos em que X é Hausdorff e localmente compacto, temos a relação esperada entre as entropias de Bowen, uniforme e topológica.

Teorema 2.3.18. *Seja $T : X \to X$ é sistema dinâmico topológico Hausdorff localmente compacto. Então a entropia de Bowen calculada utilizando a estrutura uniforme admissível é a entropia topológica, i.e.*

$$h(T) = h_{\mathscr{U}}(T).$$

Demonstração. Segue da desigualdade

$$h(T) \leq h_{\mathscr{U}}(T) \leq h^{\mathscr{U}}(T)$$

e do Corolário 2.3.13. □

Entropia de Bowen em espaços métricos

O caso métrico é simplesmente um caso particular dos resultados acima. Aqui apenas serão citado os resultados encontrados em [CP18], já que são casos mais comuns na literatura.

Seguindo a linha de raciocínio da subseção anterior, sempre consideramos um espaço métrico X, um sistema dinâmico $T : X \to X$. Dada uma distância d em X, denotaremos $B_d(x;\epsilon)$, a bola de raio $\epsilon > 0$ centrada em $x \in X$. Considere a cobertura,

$$\mathscr{B}_d(\epsilon) = \left\{ B_d(x;\epsilon) \,\middle|\, x \in X \right\}$$

Defina ainda

$$d_n(x,y) = \max_{i \in \{0 \ldots n-1\}} d\left(T^i x, T^i y\right).$$

Observe que $B_{d_n}(x;\epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n-1} T^{-i} B_d\left(T^i x;\epsilon\right)$. Estas são justamente as bolas geradas pelas *entourages* abertas $(\eta_\epsilon)_n$ com

$$\eta_\epsilon = \left\{ (x,y) \in X \times X \,\middle|\, d(x,y) < \epsilon \right\}$$

Proposição 2.3.19. *Nas condições acima, valem as propriedades*

1. $N\left(\mathscr{B}_{d_n}(\epsilon)\right) \leq N\left(\mathscr{B}_{d_{n+1}}(\epsilon)\right)$.

2. $N\left(\mathscr{B}_{d_n}(\epsilon)\right) \leq N\left(\mathscr{B}_{d_n}(\delta)\right)$ *se* $\epsilon > \delta$.

Definição 2.3.20. *Em um sistema dinâmico métrico $T : X \to X$, com métrica d, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, definimos um conjunto (n, ϵ) - gerador como um conjunto $E \subset X$ tal que a família $\left\{B_{d_n}(x; \epsilon) \,\middle|\, x \in E\right\}$ é uma cobertura aberta de X.*

Definição 2.3.21. *Em um sistema dinâmico metrizável $T : X \to X$ com distância d, dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$h^d(T, \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\mathscr{B}_{d_n}(\epsilon)\right)$$

e

$$h^d(T) = \sup_{\epsilon>0} h^d(T, \epsilon).$$

*A **entropia de Bowen** é dada por*

$$h_d(T) = \sup_{\substack{\epsilon>0 \\ K:compacto}} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_K\left(\mathscr{B}_{d_n}(\epsilon)\right).$$

Proposição 2.3.22. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico uniforme com estrutura uniforme dada pela métrica d, como no Exemplo 1.3.5. Então valem as afirmações*

1. *Definindo $s(n, \epsilon, Y) = s(n, \eta_\epsilon, Y)$ temos*

$$h^d(T, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon, X)$$

e ainda que

$$h_d(T) = \sup_{\substack{\epsilon>0 \\ K:compacto}} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon, K).$$

2. *Se $\tilde{X}$ é uma compactificação de X e a métrica em X é a restrição de uma métrica em $\tilde{X}$, então*

$$h^d(T) = \sup_{\tilde{\mathscr{A}}} h\Big(X \cap \tilde{\mathscr{A}} \,\Big|\, T\Big),$$

sendo $\tilde{\mathscr{A}}$ uma cobertura aberta de $\tilde{X}$.

3. *A entropia topológica se relaciona com a entropia de Bowen com*

$$h(T) \leq h_d(T) \leq h^d(T).$$

A igualdade é garantida quando a métrica d é a restrição de uma métrica da compactificação por um ponto.

Capítulo 3

Entropia de Kolmogorov-Sinai

Esse capítulo se dedica às entropias de Kolmogorov-Sinai, seguindo a exposição de [Wal00], porém fazendo algumas generalizações.

Em paralelo à entropia topológica, as entropias de Kolmogorov-Sinai são entropias das partições ponderadas a uma medida, ou seja conjuntos de deferente medidas contribuem diferentemente no cálculo da entropia. Por todo o trabalho, sempre consideraremos medidas de Radon nos Borelianos de um espaço topológico onde um sistema dinâmico é definido.

3.1 Sistemas Dinâmicos Mensuráveis

Definição 3.1.1. *Um **sistema dinâmico mensurável** é definido por um espaço mensurável X e uma função mensurável $T : X \to X$.*

Exemplo 3.1.2. Considere o intervalo $[0, 1]$ e a função indicadora do conjunto de cantor $C : [0, 1] \to [0, 1]$. O par (X, C) determina um sistema dinâmico mensurável nos Borelianos, $\mathscr{B}\,[[0, 1]]$, mesmo que C não seja contínua.

No que segue sempre consideramos sistemas dinâmicos mensuráveis nos Borelianos de espaços topológicos com funções contínuas, o que os tornam sistemas dinâmicos topológicos. De fato os exemplos dados no capítulo anterior são sistemas dinâmicos mensuráveis. De maneira geral, a menos quando indicado, *sistemas dinâmicos* significará um sistema dinâmico mensurável e topológico, assumindo as funções contínuas.

Os problemas são muito mais interessantes quando uma classe de medidas é considerada.

Definição 3.1.3. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico. Uma medida finita μ sobre $\mathscr{B}[X]$ é dita* ***invariante por*** *T, ou T**-invariante** , se $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathscr{B}[X]$.*

Quando não houver risco de confusão diremos que uma medida T-invariante será simplesmente *invariante.*

Exemplo 3.1.4. Continuando o Exemplo 2.2.5, o sistema $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, S\right)$, considere qualquer medida μ_0 em $\mathscr{P}(\{0,1\})$. A medida produto $\mu = \prod_{\mathbb{N}} \mu_0$ é invariante por S, pois dado um mensurável $A_1 \times A_2 \times \ldots$, onde $A_i \in \mathscr{P}(\{0,1\})$ então,

$$S^{-1}(A_1 \times A_2 \times \ldots) = X \times A_1 \times A_2 \times \ldots.$$

que tem mesma medida que $A - 1 \times A_2 \times \ldots.$

Observe que se uma função $f : X \to X$ é mensurável e μ é invariante por T, então

$$\begin{aligned} \int f \circ T \, \mathrm{d}\mu &= \int f \, \mathrm{d}\mu \circ T^{-1} \\ &= \int f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Um resultado famoso e muito geral de medidas invariantes é a recorrência de Poincaré, que dá significado aos conjuntos de medida diferente de 0.

Teorema 3.1.5. (Teorema de Recorrência de Poincaré.) *Sejam $T : X \to X$ um sistema dinâmico mensurável e μ uma medida finita e invariante. Seja*

$E \subset X$ um conjunto mensurável tal que $\mu(E) \geq 0$. Então existe $F \subset E$ com $\mu(E) = \mu(F)$ tal que para todo $x \in F$ existe uma sequencia monótona $n_1 < n_2 \ldots$ tal que $T^{n_k}(x) \in F, k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$ defina $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} E_n$ Defina $F = E \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Esse é o conjunto de pontos $x \in E$ que retornam à E infinitas vezes. De fato $x \in E_n$ para todo n. Daí se $x \in T^{-n_i}(E)$ para algum $n_i \geq n$. $T^{n_i}(x) \in E$. De onde podemos construir uma sequencias monótona, $n_1 < n_2 \ldots$ com $T^{n_i}(x) \in E$.

Afirmamos que $\mu(F) = \mu(E)$. Observe que $E \subset E_0$ e que $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$. Assim $\mu(E_0) = \mu(E_n)$. Além disso $E_n \subset E_{n-1} \subset \cdots \subset E_0$. Daí pela continuidade da medida

$$\mu(F) = \mu(E \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu(E \cap E_0) = \mu(E).$$

$\square$

O conjunto F no teorema acima será chamados de *conjunto de infinitos retornos* de E.

Observe que se tratando de medidas invariantes, apenas os conjuntos de infinitos retornos são importantes do ponto de vista da teoria da medida. De fato, se não existirem conjuntos desse tipo em um sistema dinâmico mensurável, a única medida finita invariante que existe é a medida nula, i.e. $\mu(C) = 0$ para todo mensurável $C \subset X$.

Exemplo 3.1.6. Consideramos uma variação do Exemplo 2.1.4 dado pelo fluxo de

$$F(r, \phi) = \begin{pmatrix} r(1-r) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Porém consideramos agora $r \in [0, 1]$. Como a derivada em r é sempre positiva exceto em $r = 0$ e $r = 1$, então o conjunto de infinitos retornos de

X para o fluxo Φ_F^τ com $\tau > 0$ é

$$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Segue daí que se uma medida é invariante, e somente subconjuntos desses conjuntos têm medida positiva. Podemos considerar a medida μ homogênea sobre o circulo de raio 1, pois o fluxo para um $\tau > 0$ é dado por

$$\Phi_F^\tau(1,\phi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta + \tau \end{pmatrix},$$

que corresponde uma rotação. Não é difícil concluir daí que μ é invariante.

Em se tratando de subsistemas de sistemas dinâmicos mensuráveis, temos dois resultados importantes a serem utilizados mais a frente.

Lema 3.1.7. *Se $T : X \to X$ é um subsistema de um sistema dinâmico $S : Z \to Z$, com X mensurável e μ uma medida S-invariante e finita. Então μ é T-invariante.*

Demonstração. Observe que como $S(X) = T(X) \subset X$, então $S^{-1}(Z \backslash X) \subset Z \setminus X$. Para todo mensurável A como T é uma restrição de S, e como μ é invariante por S

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) \leq \mu\left(S^{-1}(A)\right) = \mu(A)$$

Tome daí $A \subset X$ mensurável. Como μ é invariante por S

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(Z \setminus X) &= \mu\left(A \cup (Z \setminus X)\right) \\ &= \mu\left(S^{-1}(A) \cup S^{-1}(Z \setminus X)\right) \\ &\leq \mu\left(S^{-1}(A) \cup (Z \setminus X)\right) \\ &= \mu\left(T^{-1}(A)\right) + \mu(Z \setminus X). \end{aligned}$$

Daí $\mu(A) \leq \mu\left(T^{-1}(A)\right)$. Somando os resultados temos

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A).$$

□

Lema 3.1.8. *Seja $T : X \to X$ um subsistema dinâmico de $S : Z \to Z$. Se μ é S-invariante e finita, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ e $A \subset X$ mensurável.*

$$\mu\left((Z \setminus X) \cap S^{-n}(A)\right) = 0.$$

Demonstração. Denote $X^c = Z \setminus X$. O Lema 3.1.7 garante que μ é T-invariante. Como $T^{-n}(A) = X \cap S^{-n}(A)$, temos

$$\begin{aligned}\mu\left(X \cap S^{-1}(A)\right) &= \mu\left(T^{-n}(A)\right)\\ &= \mu(A)\\ &= \mu\left(S^{-n}(A)\right)\\ &= \mu\left(X \cap S^{-n}(A)\right) + \mu\left(X^c \cap S^{-n}(A)\right).\end{aligned}$$

Daí $\mu\left(X^c \cap S^{-n}(A)\right) = 0$. □

3.2 Entropia de Kolmogorov-Sinai

No calculo da entropia de uma cobertura, nunca se é considerado o "peso" de cada elemento da cobertura. Se consideramos medidas de probabilidade sobre uma partição podemos ponderar de acordo com os elementos da partição.

Faremos uma pequena generalização da teoria usual encontrada em [Wal00, KO14], onde levaremos em conta medidas finitas com valores entre 0 e 1. Trata-se de um desenvolvimento novo, não presente na literatura, mas as propriedades principais serão mantidas com a nova definição. A razão de se fazer a generalização segue do fato de que, ao contrário de sistemas dinâmicos Hausdorff compactos, a existência de uma medida positiva e invariante não é garantida. De fato, a Seção 4.3 apresenta um exemplo que ilustra a questão, de modo que generalização é muito importante para o Princípio Variacional, que não poderá ser imediatamente generalizado para espaço Hausdorff localmente compactos.

Definição 3.2.1. *Dado X um espaço mensurável, uma medida positiva μ limita à 1 e uma partição $\mathscr{A}$ de X, definimos a* ***entropia da partição***

$\mathscr{A}$ *como*

$$H_\mu(\mathscr{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}} \mu(A) \log \frac{1}{\mu(A)}$$

A vantagem da Definição 3.2.1 em relação à Definição 2.2.1, é que essa ela leva em conta a "informação" que cada elemento da partição contém, de acordo com a medida de cada elemento de uma partição.

Para medidas positivas e limitadas à 1, a *medida condicional* a um mensurável D será dada pela fórmula

$$\mu_D(C) = \frac{\mu(C \cap D)\mu(X)}{\mu(D)},$$

que se reduz a formula usual quando a medida é de probabilidade. A importância dessa definição ficará mais clara nas proposições e teoremas a seguir.

Definição 3.2.2. *Dada duas partições $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ mensuráveis de X e uma medida μ positiva limitada à 1, definimos a* ***entropia condicionada a partição*** *$\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ como*

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = \sum_{D \in \mathscr{D}} \frac{\mu(D)}{\mu(X)} H_{\mu_D}(\mathscr{C})$$

Observe que como o $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ é uma função côncava em $\mathbb{R}^+$ temos para uma medida μ que

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) &= \sum_{D \in \mathscr{D}} \frac{\mu(D)}{\mu(X)} \sum_{C \in C} f\left(\frac{\mu(C \cap D)\mu(X)}{\mu(D)}\right) \\ &\leq \sum_{C \in \mathscr{C}} f\left(\sum_{D \in \mathscr{D}} \frac{\mu(D)}{\mu(X)} \frac{\mu(C \cap D)\mu(X)}{\mu(D)}\right) \\ &= H_\mu(\mathscr{C}) \end{aligned}$$

Temos ainda que fixando $D \in \mathscr{D}$, temos para qualquer medida

$$\begin{aligned}\sum_{C\in\mathscr{C}} f\left(\mu(D\cap C)\frac{\mu(X)}{\mu(D)}\right) &\geq \sum_{C\in\mathscr{C}} \frac{\mu(C\cap D)}{\mu(D)} f\left(\mu(X)\right) \\ &= f\left(\mu(X)\right),\end{aligned}$$

de modo que para todas as partições,

$$H_\mu(\mathscr{C}) \geq H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) \geq H_\mu(\{X\}) \geq 0. \tag{3.1}$$

Bastando considerar $\mu = \mu_D$ para a primeira desigualdade.

Observe também que $H_\mu(\mathscr{C}|\{X\}) = H_\mu(\mathscr{C})$, e que

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{C}) &= \sum_{C'\in\mathscr{C}} \frac{\mu(C')}{\mu(X)} \sum_{C\in C} f\left(\frac{\mu(C\cap C')\mu(X)}{\mu(C')}\right) \\ &= \sum_{C\in\mathscr{C}} \frac{\mu(C)}{\mu(X)} f\left(\mu(X)\right) \\ &= f\left(\mu(X)\right) = H_\mu(\{X\}) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A entropia de uma partição goza das propriedades a seguir que se mostrarão úteis mais a frente

Lema 3.2.3. *Sejam μ, γ e ν medidas positivas e limitadas à 1 em um mesma σ-álgebra X, e $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ partições mensuráveis. Valem as propriedades*

1. $H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}|\mathscr{E}) = H_\mu(\mathscr{D}) + H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}\vee\mathscr{E}) - H_\mu(\{X\})$.
2. $H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}|\mathscr{E}) \leq H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{E}) + H_\mu(\mathscr{D}|\mathscr{E}) - H_\mu(\{X\})$.
3. *Se* $\mathscr{C} \prec \mathscr{D}$, *então* $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{E}) \leq H_\mu(\mathscr{D}|\mathscr{E})$.
4. *Se* $\mathscr{D} \prec \mathscr{E}$, *então* $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{E}) \leq H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D})$.
5. *Se* $\mu_\alpha(C) \to \mu(C)$ *para todo* $C \in \mathscr{C}$ *então* $H_{\mu_\alpha}(\mathscr{C}) \to H_\mu(\mathscr{C})$.
6. $H_\mu(\mathscr{C}) \leq \log N(\mathscr{C})$

7. *Se* $\alpha + \beta = 1$ *com* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *e* $\mu = \alpha\gamma + \beta\nu$, *então* $\alpha H_\gamma(\mathscr{C}) + \beta H_\nu(\mathscr{C}) \leq H_\mu(\mathscr{C})$

Demonstração. 1. Tome $E \in \mathscr{E}$ e observe que manipulando o logaritmo e usando propriedades das coberturas,

$$\begin{aligned}
H_{\mu_E}(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) &= -\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D\cap E)\log\mu_E(C\cap D) \\
&= -\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D)\log\frac{\mu_E(C\cap D)}{\mu_E(D)} \\
&\quad -\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D)\log\mu_E(D) \\
&= -\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D)\log\frac{\mu_E(C\cap D)\mu_E(X)}{\mu_E(D)} \\
&\quad -\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D)\log\mu_E(X) \\
&\quad +\sum_{D\in\mathscr{D}}\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_E(C\cap D)\log\mu_E(D) \\
&= H_{\mu_E}(\mathscr{C}|\mathscr{D}) + H_{\mu_E}(\mathscr{D}) - H_{\mu_E}(\{X\}).
\end{aligned}$$

Mas $\mu_E(D\cap C)/\mu_E(D) = \mu(E\cap D\cap C)/\mu(D\cap E)$ e $\mu_E(X) = \mu(X)$, de modo que

$$\begin{aligned}
-\mu_E(C\cap D)\log\frac{\mu_E(D\cap C)\mu_E(X)}{\mu_E(D)} &= \\
&\quad -\frac{\mu(E\cap D\cap C)}{\mu(E)}\mu(X)\log\mu_{E\cap D}(C),
\end{aligned}$$

daí

$$\sum_{E\in\mathscr{E}}\frac{\mu(E)}{\mu(X)}H_{\mu_E}(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}\vee\mathscr{E}).$$

2. Usando a equações (3.1) e (3.2) e o resultado anterior, temos que

$$\begin{aligned} H_{\mu_E}(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) &= H_{\mu_E}(\mathscr{C}|\mathscr{D}) + H_{\mu_E}(\mathscr{D}) - H_{\mu_E}(\{X\}) \\ &\leq H_{\mu_E}(\mathscr{C}) + H_{\mu_E}(\mathscr{D}) - H_{\mu_E}(\{X\}). \end{aligned}$$

   Restando calcular a entropia condicional em ambos lados.

3. Como $\mathscr{C} \prec \mathscr{D}$ então se dados $C \in \mathscr{C}$ e $D \in \mathscr{D}$ com $C \cap D \neq \emptyset$, então $C \cap D = D$, pois se tratam de partições, daí $\mathscr{C} \vee \mathscr{D} = \mathscr{D}$. Usando o item *1*, temos que

$$\begin{aligned} H_{\mu}(\mathscr{D}|\mathscr{E}) &= H_{\mu}(\mathscr{D} \vee \mathscr{C}|\mathscr{E}) \\ &= H_{\mu}(\mathscr{D}|\mathscr{C} \vee \mathscr{E}) + H_{\mu}(\mathscr{C}|\mathscr{E}) - H_{\mu}(\{X\}). \end{aligned}$$

   De onde o resultado segue da positividade de cada termo.

4. Dado $D \in \mathscr{D}$, então dado $E \in \mathscr{E}$ então $D \cap E = E$ sempre que $E \cap D \neq \emptyset$. Além disso $\displaystyle\sum_{E \subset D} \frac{\mu(E)}{\mu(D)} = 1$ Daí temos usando novamente concavidade de $-x \log x$

$$\begin{aligned} &H_{\mu_D}(\mathscr{C}) = \\ &\sum_{C \in \mathscr{C}} -\mu(X)\frac{\mu(D \cap C)}{\mu(D)} \log \mu(X)\frac{\mu(D \cap C)}{\mu(B)} = \\ &\sum_{C \in \mathscr{C}} \sum_{E \subset D} -\mu(X)\frac{\mu(E \cap D \cap C)}{\mu(E)}\frac{\mu(D)}{\mu(E)} \log \sum_{E \subset D} \mu(X)\frac{\mu(E \cap D \cap C)}{\mu(E)}\frac{\mu(E)}{\mu(D)} \\ &\quad \geq \sum_{C \in \mathscr{C}} \sum_{E \subset D} -\mu(X)\frac{\mu(E \cap C)}{\mu(E)}\frac{\mu(E)}{\mu(D)} \log \mu(X)\frac{\mu(E \cap C)}{\mu(E)} = H_{\mu_E}(\mathscr{C}). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) &= \sum_{D\in\mathscr{D}} \frac{\mu(D)}{\mu(X)} H_{\mu_D}(\mathscr{C}) \\
&= \sum_{D\in\mathscr{D}} \sum_{E\subset D} \frac{\mu(E\cap D)}{\mu(X)} H_{\mu_D}(\mathscr{C}) \\
&\geq \sum_{D\in\mathscr{D}} \sum_{E\subset D} \frac{\mu(E\cap D)}{\mu(X)} H_{\mu_E}(\mathscr{C}) = \sum_{E\in\mathscr{E}} \frac{\mu(E)}{\mu(X)} H_{\mu_E}(\mathscr{C}),
\end{aligned}$$

onde a ultima igualdade segue do fato de $\mathscr{D} \prec \mathscr{E}$.

5. Como $-x\log x$ é contínua e positiva. Daí o resultado segue para cada termo da entropia.

6. É imediato do item *2* da Proposição 1.1.6, bastando tomar $t_i = (\mu(C_i))$ para $C_i \in \mathscr{C}$

7. Segue do item *1* da Proposição 1.1.6, fazendo $t = (\mu(C_1), \ldots, \mu(C_n))$ e $r = (\nu(C_1), \ldots, \nu(C_n))$, com $\{C_1, \ldots C_n\} = \mathscr{C}$.

□

Consideramos então sistemas dinâmicos e sua entropia de Kolmogorov-Sinai.

Definição 3.2.4. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico mensurável, e uma medida invariante μ positiva e limitada à 1. A entropia do sistema por uma partição mensurável $\mathscr{A}$ é*

$$h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{A}^n)$$

e a ***entropia de Kolmogorov-Sinai*** *com respeito a μ*

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathscr{A}\ :\ \text{partição}} H_\mu(\mathscr{A}^n)$$

Exemplo 3.2.5. Continuando o Exemplo 3.1.4, escolha

$$\mu_0(\{1\}) = \mu_0(\{2\}) = \frac{1}{2}$$

e a partição dada por $\mathscr{A}$, que também é um cobertura aberta, do Exemplo 2.2.5. Como $\mathscr{A}^n$ é uma partição com 2^n elementos, cada um com medida $\frac{1}{2^n}$ na medida produto, podemos concluir que

$$h_\mu\big(T \mid \mathscr{A}\big) = \log 2$$

que é a entropia topológica de $\mathscr{A}$ do Exemplo 2.2.5.

A entropia de Kolmogorov-Sinai goza de diversas propriedades, das quais mostraremos algumas.

Proposição 3.2.6. *Seja um sistema dinâmico $T : X \to X$ com uma medida invariante μ. Dada uma partição $\mathscr{A}$ de X, então o limite*

$$h_\mu\big(T \mid \mathscr{A}\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\mathscr{A}^n\right)$$

existe.

Demonstração. Observe que $\mathscr{A}^n = \mathscr{A}^{n-q} \vee \bigvee_{i=1}^{n-q-1} T^{-(q+i)}\mathscr{A}$, para $q < n$. Mas como μ é T-invariante, temos que $H_\mu\left(T^{-n}\mathscr{A}\right) = H_\mu\left(\mathscr{A}\right)$. Daí usando o Lema 3.2.3, temos

$$H_\mu\left(\mathscr{A}^n\right) \leq H_\mu\left(\mathscr{A}^{(n-q)}\right) + H_\mu\left(\mathscr{A}^q\right).$$

Daí pelo Lema 1.1.7, a sequência enunciada converge. □

Observe que apesar de entropia de cada partição existir, não necessariamente o supremo entre elas é finito.

Lema 3.2.7. *Seja $T : X \to X$, um sistema dinâmico e μ uma medida invariante. Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são partições mensuráveis então*

$$h_\mu\big(\mathscr{C} \mid T\big) \leq h_\mu\big(\mathscr{D} \mid T\big) + H_\mu\left(\mathscr{C}|\mathscr{D}\right) - H_\mu\left(\{X\}\right).$$

Demonstração. Usando os resultados *1-4* do Lema 3.2.3, temos

$$
\begin{aligned}
H_\mu(\mathscr{C}^n) &\leq H_\mu(\mathscr{C}^n \vee \mathscr{D}^n) \\
&= H_\mu(\mathscr{D}^n) + H_\mu(\mathscr{C}^n|\mathscr{D}^n) - H_\mu(\{X\}) \\
&\leq H_\mu(\mathscr{D}^n) + \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\left(T^{-i}\mathscr{C}|\mathscr{D}^n\right) - nH_\mu(\{X\}) \\
&\leq H_\mu(\mathscr{D}^n) + \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\left(T^{-i}\mathscr{C}|T^{-i}\mathscr{D}\right) - nH_\mu(\{X\}),
\end{aligned}
$$

onde a primeira linha segue do item *3*; a segunda, do item *1*; a terceira, de aplicar $n-1$ vezes o item *2*, nos termos da junção $\mathscr{C}^n = \bigvee_{n=0}^{n-1} T^{-n}(\mathscr{C})$; e a quarta, do item *4* em cada termo da somatória, sempre lembrando que $T^{-k}(\mathscr{D}) \prec \mathscr{D}^n$ quando $k \leq n$

Como μ é T-invariante,

$$
\begin{aligned}
H_{\mu_{T^{-1}(D)}}\left(T^{-i}\mathscr{C}\right) &= -\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu(X)\frac{\mu(T^{-i}(C))}{\mu(T^{-i}(D))} \log \mu(X)\frac{\mu(T^{-i}(C))}{\mu(T^{-i}(D))} \\
&= -\sum_{C\in\mathscr{C}} \mu(X)\frac{\mu((C))}{\mu((D))} \log \mu(X)\frac{\mu((C))}{\mu((D))} \\
&= H_{\mu_D}(\mathscr{C})
\end{aligned}
$$

De onde $H_\mu\left(T^{-i}\mathscr{C}|T^{-i}\mathscr{D}\right) = H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D})$. Daí obtemos finalmente que

$$
H_\mu(\mathscr{C}^n) \leq H_\mu(\mathscr{D}^n) + nH_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) - nH_\mu(\{X\}).
$$

Fazendo a divisão por n e tomando o limite, conseguimos o resultado. □

Lema 3.2.8. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico mensurável e μ uma medida invariante positiva e limitada à 1. Então, dado $k \in \mathbb{N}$*

$$
h_\mu\left(T^k\right) = kh_\mu(T)
$$

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ uma partição mensurável. Observe que

$$\mathscr{C}_T^{kn} = (\mathscr{C}_T^k)_{T^k}^n.$$

Daí

$$\frac{k}{kn} H_\mu \left(\mathscr{C}_T^{kn}\right) = \frac{1}{n} H_\mu \left(\mathscr{C}_{T^k}^n\right)$$

de onde tomando o limite $n \to \infty$, temos

$$k h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{C}\big) = h_\mu\Big(T^k \,\Big|\, \mathscr{C}_T^k\Big)$$

Como $\mathscr{C} \prec \mathscr{C}_T^k$ então $h_\mu\Big(T^k \,\Big|\, \mathscr{C}\Big) \leq h_\mu\Big(T^k \,\Big|\, \mathscr{C}\Big)$, e assim

$$h_\mu\Big(T^k \,\Big|\, \mathscr{C}\Big) \leq k h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{C}\big) \leq h_\mu\left(T^k\right)$$

Tomando o supremo na partições $\mathscr{C}$ temos,

$$h_\mu\left(T^k\right) \leq k h_\mu\left(T\right) \leq h_\mu\left(T^k\right)$$

□

O próxima proposição diz que na prática, devemos considerar apenas as medidas de probabilidade, e possivelmente, as medidas nulas no cálculo da entropia de sistemas dinâmicos mensuráveis.

Proposição 3.2.9. *Sejam $T : X \to X$ um sistema dinâmico mensurável e μ uma medida de probabilidade T-invariante. Para $0 < \alpha \leq 1$ temos*

$$h_{\alpha\mu}\left(T\right) = \alpha h_\mu\left(T\right).$$

Demonstração. Tome uma partição $\mathscr{C}$ mensurável. Temos então

$$\frac{1}{n} \sum_{C \in \mathscr{C}^n} \alpha\mu(X) \log \frac{1}{\alpha\mu(X)} = \sum_{C \in \mathscr{C}^n} \frac{\alpha}{n}\mu(C) \log \frac{1}{\mu(C)} + \frac{\alpha}{n}\mu(C) \log \frac{1}{\alpha}.$$

Tomando o limite, temos o resultado. □

Observe que o fator multiplicativo, α "sai" da entropia, de modo que se μ é uma medida com $0 < \mu(X) = k < 1$, então certamente,

$$h_{\mu}(T) \leq h_{\frac{\mu}{k}}(T).$$

e $\frac{\mu}{k}$ é uma medida de probabilidade. Segue daí que, em se tratando do supremo entre as entropias de Kolmogorv-Sinai, que é o caso do Princípio Variacional, somente precisamos considerar as medidas de probabilidade, exceto nos casos onde a única medida invariante de um sistema dinâmico é a medida nula. A razão final para se definir a entropia para toda medida positiva limitada à 1 é simplesmente devido ao formato da demonstração onde naturalmente surgirá uma medida limitada à 1.

Para terminar a seção, vamos mostrar que quando um sistema dinâmico é extensível a outro, sob algumas condições, a entropia de uma sistema dinâmico estendido, dada uma partição, não é maior que a do sistema inicial.

Lema 3.2.10. *Seja μ uma medida finita sobre X e $0 \leq \mu(X) \leq 1$. Seja $Y \subset X$ mensuravel. Então, dada uma partição mensurável $\mathscr{C}$*

$$H_{\mu}(\mathscr{C}) \leq H_{\mu}(\mathscr{C} \cap Y) + H_{\mu}(\mathscr{C} \cap X \setminus Y)$$

Demonstração. Seja $C \in \mathscr{C}$ e tome $p = \mu(C \cap Y)$ e $q = \mu(C \cap X \setminus Y)$. Se $p = 0$ ou $q = 0$ então é imediato que

$$\mu(C) \log \frac{1}{\mu(C)} = q \log \frac{1}{q} + p \log \frac{1}{p}.$$

Se $p, q \neq 0$, como $p, q \leq \mu(C)$ temos

$$\begin{aligned}\mu(C) \log \frac{1}{\mu(C)} &= q \log \frac{1}{\mu(C)} + p \log \frac{1}{\mu(C)} \\ &\leq q \log \frac{1}{q} + p \log \frac{1}{p},\end{aligned}$$

de onde o resultado segue. $\square$

Lema 3.2.11. *Seja $S : Z \to Z$ um sistema dinâmico e $T : X \to X$ um subsistema com $X \subset Z$ mensurável. Seja $\mathscr{Z} = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_k\}$ uma partição de Z tal que $Z \setminus X \subset Z_0$. Se μ é S-invariante, positiva e limitada à 1 então também é T-invariante, positiva e limitada à 1 e*

$$h_\mu\big(S \,\big|\, \mathscr{Z}\big) \leq h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{C}\big),$$

com $\mathscr{C} = \mathscr{Z} \cap X$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.7, μ é T-invariante. Usando o Lema 2.1.12 temos relação

$$\mathscr{C}_T^n = X \cap \mathscr{Z}_S^n.$$

Pelo Lema 3.2.10, temos ainda que denotando $X^c = Z \setminus X$,

$$H_\mu\left(\mathscr{Z}_S^n\right) \leq H_\mu\left(\mathscr{C}_T^n\right) + H_\mu\left(\mathscr{Z}_S^n \cap X^c\right)$$

Observe agora que como $Z_1, Z_2, \dots Z_n, \subset X$, pelo Lema 3.1.8 se $C \in \mathscr{Z}_S^n$ então

$$\mu(C \cap X^c) \geq 0 \iff C = C_0 = Z_0 \cap \cdots \cap S^{-(n-1)} Z_0.$$

Como $X^c \cap \mathscr{Z}_S^n$ particiona X^c então

$$\mu(X^c) = \sum_{C \in \mathscr{Z}^n S} \mu(X^c \cap C) = \mu(C_0).$$

Portando

$$H_\mu\left(\mathscr{Z}_S^n \cap X^c\right) = \mu(X^c) \log \frac{1}{\mu(X_c)}.$$

Temos então que, dividindo por n e tomando o limite,

$$\begin{aligned}
h_\mu\big(S \,\big|\, \mathscr{Z}\big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\mathscr{Z}_S^n\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\mathscr{C}_T^n\right) + \frac{1}{n} H_\mu\left(\mathscr{Z}_S^n \cap X^c\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\mathscr{C}_T^n\right) + \frac{1}{n} \mu(X^c) \log \frac{1}{\mu(X_c)} \\
&= h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{C}\big).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

O Princípio Variacional

Esse capítulo final será dedicado à demonstração do Princípio Variacional para sistemas Hausdorff localmente compactos. Todo o apresentado até o momento foi sempre em preparação a demonstração.

A razão do formato de aprestação da dissertação é devido não apenas ao denso conteúdo necessário a própria apresentação do teorema mas também porque ele não é automaticamente generalizado à sistemas Hausdorff localmente compacto. Comentários a esse fato serão tecido na Seção 4.3. Essa discussão foi postergada até aqui por considerar-se que uma discussão profunda depende de todos os formas de entropia apresentadas e do entendimento das definições apresnetadas em todos os Capítulos anteriores.

Ressaltamos novamente que a dissertação culmina com uma generalização do Princípio Variacional para espaços Hausdorff localmente compactos, já que o artigo de Caldas e Patrão [CP18] a metrizabilidade é uma hipótese necessária e nem todo espaço Hausdorff localmente compacto é metrizável.

As entropias topológica e de Kolmogorov-Sinai em sistemas compactos foram primeiramente relacionadas em [Goo71]. Demonstrações mais recentes são baseadas em [Mis75], e podem ser encontradas de maneira didática em textos sobre teoria ergódica como nas referências [Wal00, KO14].

A primeira seção se dedicará a mostrar que, com poucas hipóteses, a entropia topológica é uma cota superior para entropia de Kolmogorov-Sinai, que é uma das desigualdades de Princípio Variacional. A segunda Seção será a mais técnica de toda a dissertação, onde será mostrado o Princípio Variacional. A terceira e última um exemplo ilustrará a diferença entra definições de entropia e as limitações que mostram a exigência da mudanças das definições tanto da entropia topológica quanto da possibilidade de se considerar as medida nulas na entropia de Kolmogorov-Sinai.

4.1 A primeira desigualdade

Essa seção tratará da **primeira desigualdade** do Princípio Variacional, que diz que dado um sistema dinâmico $T : X \to X$ e uma medida de Radon μ positiva, limitada à 1 e T-invariante em X então, vale desigualdade

$$h_\mu(T) \leq h(T).$$

No que segue consideramos um espaço topológico X em que seus conjuntos compactos sejam fechados, condição garantida em espaços Hausdorff.

Lema 4.1.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma partição mensurável nos borelianos de X e μ uma medida de Radon finita. Então existe uma partição $\mathscr{D}$ tal que dado $C \in \mathscr{C}$ existe $D_C \in \mathscr{D}$ com $D_C \subset C$ e D_C compacto. Além disso*

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) \leq 1 + H_\mu(\{X\}).$$

Demonstração. Como μ é de Radon é finita então é regular. Tome para cada C um compacto D_C com

$$\mu(C \setminus D_C) \leq \frac{\mu(X)}{N(\mathscr{C}) \log N(\mathscr{C})}$$

Defina então $\mathscr{D}$ como

$$\mathscr{D} = \left\{D_C \,\middle|\, C \in \mathscr{C}\right\} \cup \{D^*\},$$

sendo $D^* = \displaystyle\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C \setminus D_C$. Observe que

$$H_{\mu_{D_C}}(\mathscr{C}) = H_\mu(\{X\})$$

E que

$$\mu(D^*) \leq \sum_{C\in\mathscr{C}} \mu(C \setminus D_C) \leq \frac{1}{N(\mathscr{C})}$$

Temos então que usando o o item *6* do Lema 3.2.3

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) &= \frac{\mu(D^*)}{\mu(X)} H_{\mu_{D^*}}(\mathscr{C}) + \sum_{C\in\mathscr{C}} \frac{\mu(D_C)}{\mu(X)} H_{\mu_{D_C}}(\mathscr{C}) \\ &\leq 1 + H_\mu(\{X\}). \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.2. *Dada a partição $\mathscr{D}$ definida no Lema 4.1.2 existe uma cobertura admissível $\mathscr{A}$ tal que*

$$N(\mathscr{D}^n) \leq 2^n N(\mathscr{A}^n)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Defina

$$\mathscr{A} = \left\{ D_C \cup D^* \,\middle|\, C \in \mathscr{C} \right\}.$$

Primeiro observamos que $\mathscr{A}$ é um cobertura aberta, já que se $A \in \mathscr{A}$ então existe $C' \in \mathscr{C}$ com $A = X \setminus D_C$. Observe ainda que como D_C é compacto então $\mathscr{A}$ é admissível.

Seja $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}^n$ uma subcobertura, com $\#\mathscr{B} = N(\mathscr{A})$. Daí para todo $B \in \mathscr{B}$ escrevemos

$$B = (D_{C_1} \cup D^*) \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}(D_{C_n} \cup D^*)$$

com $C_i \in \mathscr{C}$. Agora, se $D \in \mathscr{D}^n$, então existem $D_i \in \mathscr{D}$ com $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$D = D_1 \cap T^{-1}(D_2) \cdots \cap T^{-(n-1)} D_n.$$

Segue daí que cada elemento $B \in \mathscr{B}$ contém no máximo 2^n elementos de D^n. Ao mesmo tempo, todo elemento de $D \in \mathscr{D}^n$ está contido em algum e em apenas um elemento de $\mathscr{B}$, pois $\mathscr{B}$ é uma cobertura X e $\mathscr{D}^n$ é uma partição de X. Temos então que $N(\mathscr{D}^n) \leq 2^n \# \mathscr{B} = 2^n N(\mathscr{A}^n)$. $\square$

Teorema 4.1.3. *Sejam $X : T \to T$ um sistema dinâmico e μ uma medida de Radon T-invariante positiva e limitada à 1 sobre $\mathscr{B}[X]$. Então*

$$h_\mu(T) \leq h(T).$$

Demonstração. Seja um partição mensurável $\mathscr{C}$ tal que

$$h_\mu(T) \leq h_\mu\big(\mathscr{C} \,\big|\, T\big) + 1.$$

Escolha uma partição $\mathscr{D}$ e uma cobertura admissível $\mathscr{A}$ como nos Lemas 4.1.2 e 4.1.1 , e observe que dado $n \in \mathbb{N}$

$$H_\mu(\mathscr{D}^n) \leq \log N(\mathscr{D}^n) \leq \log(2^n N(\mathscr{A}^n)) = n \log 2 + \log N(\mathscr{A}^n)$$

Dividindo por n e tomando o limite, obtemos

$$h_\mu\big(\mathscr{D} \,\big|\, T\big) \leq h\big(\mathscr{A} \,\big|\, T\big) + \log 2.$$

Usando daí o Lema 3.2.7, temos

$$\begin{aligned} h_\mu(T) &\leq h_\mu\big(\mathscr{C} \,\big|\, T\big) + 1 \\ &\leq h_\mu\big(\mathscr{D} \,\big|\, T\big) + 2 + H_\mu(\{X\}) - H_\mu(\{X\}) \\ &\leq h\big(\mathscr{A} \,\big|\, T\big) + \log 2 + 2. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre as coberturas admissíveis, obtemos

$$h_\mu(T) \leq h(T) + 2 + \log 2.$$

Observe agora que, pelo Lema 3.2.8 e pela Proposição 2.2.7,

$$\begin{aligned} h_\mu(T) &= \frac{1}{n} h_\mu(T^n) \\ &\leq \frac{1}{n}\left(h(T^n) + 2 + \log 2\right) \\ &\leq h(T) + \frac{1}{n}(2 + \log 2). \end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$h_\mu(T) \leq h(T).$$

$\square$

Observe que não são necessárias as hipóteses do espaço ser Hausdorff, ou sequer uniforme, na demonstração, apenas de que a medida μ nas hipóteses seja de Radon nos borelianos e finita, e que todo conjunto compacto seja fechado. Observe ainda que as coberturas admissíveis são naturais na construção da demonstração e, de fato, não foi necessária nenhuma modificação real nas demonstrações encontradas na literatura. Esse fato reforça que as coberturas admissíveis não são alheias ao Princípio Variacional, mesmo no caso particular de espaços compactos.

4.2 Princípio Variacional para Sistemas Haussdorff Localmente Compactos

Essa seção é certamente a parte mais técnica do trabalho, utilizando os resultados citados nas Seções 1.4 e 1.3 além de diversos resultados do Capítulo 2.

O seguinte teorema, que será a **segunda desigualdade** entre entropias, é o resultado que completará o Princípio Variacional.

Teorema 4.2.1. *Seja $T : X \to X$ Hausdorff localmente compacto. Seja $\mathscr{U}$ a estrutura uniforme induzida pela sua compactificação por um ponto. Então*

$$h^{\mathscr{U}}(T) \leq \sup_\mu h_\mu(T).$$

onde o supremo é tomado sobre as medidas de Radon positivas e limitadas à 1.

Para mostrar vamos utilizar a igualdade da Proposição 2.3.9, e mostrar que dado uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com A_n (n, δ) - separado, sendo δ uma *entourage* admissível, então existe um medida μ de Radon limitada à 1 tal que,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#A_n \leq h_\mu(T).$$

Vamos contornar o problema que surgem da não compacidade de espaços Hausdorff *localmente compactos* vamos utilizar o Teorema 2.1.8 e o Lema 2.1.9, para garantir a existência da medida de probabilidade μ de Radon numa extensão compacta $S : Z \to Z$ com estrutura uniforme $\mathscr{U}_Z$, dada pela equação (2.1), tal que dada $\eta \in \mathscr{U}_Z$ e uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos sendo E_n conjunto (n, η) - separado

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#E_n \leq h_\mu(S).$$

e mostrar que a restrição de μ aos borelianos de X também é T-invariante. Como μ é de probabilidade, sua restrição será positiva e limitada à 1.

Definida então uma coleção $\{E_n\}$, começamos definindo as medidas de probabilidade,

$$\sigma_n = \frac{1}{\#E_n}\sum_{x\in E_n}\delta_x.$$

sendo δ_x a medida de Dirac sobre x, e ainda

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_n \circ S^{-i}.$$

Observe que se tratam de medidas de Radon, pois as medidas de Dirac são de Radon. Temos os resultados

Proposição 4.2.2. *Dados η uma entourage em $\mathscr{U}_Z$ e E_n uma sequencia de conjuntos com E_n um (n, η) - separado. Existe uma sub-rede n_α de $n \in \mathbb{N}$ e uma medida de probabilidade μ tal que*

$$\lim \frac{1}{n_\alpha}\log \#E_{n_\alpha} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \#E_n$$

e dado $C \subset Z$ mensurável com $\mu(\partial C) = 0$ então

$$\lim \mu_{n_\alpha}(C) = \mu(C).$$

Demonstração. Tome uma subsequência n_k de n tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \log \# E_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# E_n$$

e com ela defina a rede $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}(Z)$. Pelo Teorema 1.4.11, e pelo Lema 1.4.12 concluímos que conjunto das medidas de probabilidade é compacto na topologia fraca*. Daí pela Proposição A.3.11, existe uma sub-rede n_α de n_k tal que

$$\lim \mu_{n_\alpha} = \mu$$

para alguma medida de probabilidade μ, na topologia fraca*. Temos ainda que,

$$\lim \frac{1}{n_\alpha} \log \# E_{n_\alpha} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# E_n,$$

pois n_α é uma sub-rede de n_k.

Por fim o Lema 1.4.13 e a compacidade de Z implicam que se $C \subset Z$ é mensurável com $\mu(\partial C) = 0$, então

$$\lim \mu_{n_\alpha}(C) = \mu(C).$$

$\square$

Proposição 4.2.3. *A medida μ na Proposição 4.2.2, é S-invariante.*

Demonstração. Para toda função $f \in C(Z)$, pela definição da convergência fraca*, temos que

$$\begin{aligned}\lim \int f \,\mathrm{d}\big(\mu_{n_\alpha} \circ S^{-1}\big) &= \lim \int f \circ S \,\mathrm{d}\mu_{n_\alpha} \\ &= \int f \circ S \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\big(\mu \circ S^{-1}\big),\end{aligned}$$

já que $f \circ S$ é também é uma função contínua. Assim $\mu_\alpha \circ S^{-1} \to \mu \circ S^{-1}$. Além disso

$$\int f \, \mathrm{d}\big(\mu_{n_\alpha} - \mu_{n_\alpha} \circ S^{-1}\big) = \frac{1}{n_\alpha} \int f \, \mathrm{d}\big(\sigma_{n_\alpha} - \sigma_{n_\alpha} \circ S^{-n_\alpha}\big)$$

Tomando o valor absoluto

$$\begin{aligned} \left| \int f \, \mathrm{d}\big(\mu_{n_\alpha} - \mu_{n_\alpha} \circ S^{-1}\big) \right| &\leq \frac{1}{n_\alpha} \int \| f - f \circ S^{n_\alpha} \| \, \mathrm{d}\sigma_{n_\alpha} \\ &\leq 2 \frac{\|f\|}{n_\alpha} \int \mathrm{d}\sigma_{n_\alpha} = 2 \frac{\|f\|}{n_\alpha}. \end{aligned}$$

Tomando o limite em α, a ultima expressão vai a 0 e assim, na topologia fraca*,

$$\lim \mu_{n_\alpha} \circ S^{-1}$$

e

$$\lim \mu_{n_\alpha}$$

tem o mesmo limite. Como a topologia fraca* é Hausdorff, os limites são únicos, temos então que

$$\mu \circ S^{-1} = \mu.$$

□

Observamos aqui que a medida invariante buscada já tomou forma, e sua existência garantida. O restante a se mostrar é Teorema 4.2.1 a partir do Lema e da Proposição a seguir. O Lema corresponde, em espaços métricos, a existência de bolas com bordos de medida nula para qualquer medida positiva.

Lema 4.2.4. *Seja η uma entourage aberta de $\mathscr{U}_Z$, e tome $z \in Z$. Seja μ ainda uma medida finita em Z. Então existe uma entourage δ com $\delta^2 \subset \eta$ tal que $\mu\left(\partial\delta(x)\right) = 0$.*

Demonstração. Tome δ' uma *entourage* aberta com $(\delta')^2 \subset \eta$. Usando o Lema 1.3.12, existe uma função $f : [0,1] \to Z$ contínua com $X \setminus \delta'(x) \subset f^{-1}(\{1\})$. Além disso para todo $t \in (0,1)$ existe uma *entourage* δ_t tal que $\delta_t(x) = f^{-1}([0,t))$ e $\delta_t \subset \delta'$.

Defina agora $A_t = f^{-1}([0,t]) \setminus f^{-1}([0,t)) = f^{-1}(\{1\})$, e observe que $\partial\delta_t(x) \subset A_t$ e que $A_t \cap A_{t'} = \emptyset$ se $t \neq t'$. Se $A_t = \emptyset$ para algum t, o resultado segue. Se não, temos que existe uma coleção não enumerável de subconjuntos de $\delta'(x)$ com intersecção vazia, de modo que somente uma quantidade enumerável deles pode ter medida positiva, e sendo assim para algum $t_0 \in (0,1)$, $\mu(A_{t_0}) = 0$. E assim defina $\delta = \delta_{t_0}$, de onde

$$\mu(\partial\delta(x)) \leq \mu(A_{t_0}) = 0.$$

□

Proposição 4.2.5. *Seja E_n um conjunto (n,η) - separado em $\mathscr{U}_Z$. Então existe uma partição mensurável $\mathscr{Z} = \{Z_0,\ldots,Z_n\}$ tal que ∂C tem medida nula para todo elemento $C \in \mathscr{Z}^n$, sendo que $Z \setminus X \subset Z_0$ e além disso*

$$H_{\sigma_n}(\mathscr{Z}) = \log \# E_n.$$

Demonstração. Usando o Lema 4.2.4, escolhemos para cada $z \in Z$ uma *entourage* δ_z com $(\delta_z)^2 \subset \eta$. Daí o conjunto das bolas $B_z = \delta_z(z)$ cobre Z, de modo que podemos escolher uma subcobertura finita delas sem nenhuma subcobertura própria $\{B_0,\ldots,B_n\}$. Pela Proposição 2.1.11 sempre podemos escolher B_0 de modo que $Z \setminus X \subset B_0$, bastando escolhe uma bola com centro em um ponto qualquer de $Z \setminus X$. Defina então os conjuntos

$$Z_k = B_k \setminus (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$$

para $k = 1,\ldots,n$, e $Z_0 = B_0$. Defina a partição $\mathscr{Z} = \{Z_0,\ldots,Z_n\}$. Usando a Proposição 1.2.7 temos que, pelos itens *1* e *2*, se $C \in \mathscr{Z}$ então ∂C tem medida nula e, pelo item *3*, que se $C' \in \mathscr{Z}^n$ então $\mu(\partial C') = 0$.

Por fim, suponha que $x, y \in C$ com $C \in \mathscr{Z}^n$. Então $S^i(x), S^i(y) \in C_i$ para algum $C_i \in \mathscr{Z}$ e $i = 1,\ldots,n$. Como cada $C_i \in \delta_{z_i}(z_i)$ pela construção da partição, temos então que $(x,y) \in S^{-i} \times S^{-i}\delta_{z_i}^2 \subset S^{-i} \times S^{-i}\eta$. Como E_n

é (n, η) - separado, então cada subconjunto de $\mathscr{Z}^n$ pode conter no máximo um elemento de E_n. Segue daí que ou $\sigma_n(C) = 0$ ou $\sigma_n(C) = \frac{1}{\# E_n}$. Como todo elemento de E_n está em exatamente um elemento de $\mathscr{Z}^n$, pois se trata de uma partição, temos que

$$H_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^n) = \log \# E_n.$$

$\square$

Estamos, finalmente, aptos a mostrar o Teorema 4.2.1.

Demonstração do Teorema 4.2.1. Usando o item *7* do Lema 3.2.3 temos para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{\sigma_n \circ S^{-i}}(\mathscr{D}) \leq H_{\mu_n}(\mathscr{D}).$$

para qualquer partição de Z.

Dados $n, q \in \mathbb{N}$ com $1 < q < n$, tome $m \in \mathbb{N}$ com $m(q-1) < n \leq mq$. Seja $\mathscr{Z}$ uma partição como na Proposição 4.2.5. Para $i = 0, \ldots, q-1$ escreva

$$\mathscr{Z}^i \vee S^{-i}(\mathscr{Z}^n) = \mathscr{Z}^i \vee S^{-i}(\mathscr{Z}^q) \vee S^{-(i+q)}(\mathscr{Z}^q) \vee \cdots \vee S^{-(i+(m-1)q)}(\mathscr{Z}^q),$$

que é uma partição mais fina que $\mathscr{Z}^n$. Segue daí, usando o Lema 3.2.3, itens *2*, *3* e *6*, e que $H_{\sigma_n}(\{X\}) = 0$, pois σ_n é de probabilidade, que

$$\begin{aligned}
H_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^n) &\leq H_{\sigma_n}\left(\mathscr{Z}^i\right) + \sum_{j=0}^{m-1} H_{\sigma_n \circ S^{-(i+qj)}}(\mathscr{Z}^q) \\
&\leq H_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^q) + \sum_{j=0}^{m-1} H_{\sigma_n \circ S^{-(i+qj)}}(\mathscr{Z}^q) \\
&\leq \log \# \mathscr{Z}^q + \sum_{j=0}^{m-1} H_{\sigma_n \circ S^{-(i+qj)}}(\mathscr{Z}^q).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4.2.5, somando o resultado acima para $i = 0, \dots, q-1$,

$$qH_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^n) \leq q \log \# \mathscr{Z}^q + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{m-1} H_{\sigma_n \circ S^{-(i+qj)}}(\mathscr{Z}^q).$$

Agora defina $p = i + mj$, de onde reescreveremos o somatório,

$$qH_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^n) \leq q \log \# \mathscr{Z}^q + \sum_{p=0}^{mq-1} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q).$$

Observe que, devido à escolha de m e q, $(mq) - n \leq q$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{mq-1} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) &\leq \sum_{p=0}^{mq} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) + \sum_{p=n}^{mq} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) \\
&\leq \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) + q \log \# \mathscr{Z}^q.
\end{aligned}$$

Juntando com o resultado anterior e usando a Proposição 4.2.5 novamente

$$\begin{aligned}
q \log \# E_n &= qH_{\sigma_n}(\mathscr{Z}^n) \\
&\leq n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{\sigma_n \circ S^{-p}}(\mathscr{Z}^q) + 2q \log \# \mathscr{Z}^q \\
&\leq nH_{\mu_n}(\mathscr{Z}^q) + 2q \log \# \mathscr{Z}^q.
\end{aligned}$$

Podemos então dividir por nq e obtemos a relação para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \log \# E_n \leq \frac{1}{q} H_{\mu_n}(\mathscr{Z}^q) + \frac{2}{n} \log \# \mathscr{Z}^q.$$

Utilizando a Proposição 4.2.2 e lembrando que os subconjuntos da partição $\mathscr{Z}^q$ têm bordo com medida nula, escolhemos a rede n_α de modo à obter

$$\begin{aligned}\limsup \frac{1}{n} \log \#E_n &= \lim \frac{1}{n_\alpha} \#E_{n_\alpha} \\ &\leq \frac{1}{q} \lim H_{\mu_{n_\alpha}}(\mathscr{Z}^q) + 0.\end{aligned}$$

Podemos então tomar o limite $q \to \infty$ e finalmente, para toda coleção de conjunto (n, η)- separado E_n, obtermos uma partição $\mathscr{Z}$ uma medida S-invariante μ de probabilidade tais que

$$\limsup \frac{1}{n} \log \#E_n \leq h_\mu\big(S \,\big|\, \mathscr{Z}\big) \leq h_\mu(S).$$

Usando então o Lema 3.2.11, encontramos uma medida limitada à 1 e T-invariante μ tal que

$$\limsup \frac{1}{n} \log \#E_n \leq h_\mu\big(T \,\big|\, \mathscr{Z} \cap X\big) \leq h_\mu(T).$$

Com isso podemos mostrar o Teorema 4.2.1, já que dado $\epsilon > 0$ pela Proposição 2.3.9 podemos escolher $\eta_Z \in \mathscr{U}_Z$ e uma coleção de conjuntos E_n, com E_n (n, η_Z)- separado no sistema $S : Z \to Z$, tais que

$$h^{\mathscr{U}_Z}(S) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \#E_n + \epsilon$$

de onde existe uma medida de Radon μ com

$$h^{\mathscr{U}_Z}(S) \leq h_\mu(T) + \epsilon \leq \sup_\mu h_\mu(T) + \epsilon.$$

Daí temos pelo Lema 2.3.14

$$h^{\mathscr{U}}(T) \leq h^{\mathscr{U}_Z}(S) \leq \sup_\mu h_\mu(T) + \epsilon.$$

Como a relação vale para todo ϵ, demonstramos o teorema. $\square$

O **Princípio Variacional** segue das relações

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) \leq h(T) \leq h_{\mathscr{U}}(T) \leq h^{\mathscr{U}}(T) \leq \sup_{\mu} h_{\mu}(T).$$

As desigualdades seguem da Proposição 2.3.17 e pelos Teoremas 4.2.1 e 4.1.3, bastando tomar o supremo no segundo teorema.

Para fechar a seção, e fazendo algumas repetições, demonstramos que

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) = h(T),$$

para sistema dinâmico Hausdorff localmente compactos. Para isso, redefinimos ambos os lados da igualdade, ao consideramos medidas limitadas à 1 ao lado esquerdo e somente coberturas admissíveis ao lado direito. Para chegar ao resultado, sob a inspiração do trabalho de Misiurewicz [Mis75], definimos a entropia de Bowen de maneira generalizada para espaço uniformes, utilizando uma estrutura uniforme específica, presentes em espaços Hausdorff localmente compactos. Lembramos novamente que existe, geralmente, mais de uma estrutura uniforme num espaço Hausdorff localmente compacto, e que portanto a entropia de Bowen deve ser maior ou igual que a topológica, de acordo com a Proposição 2.3.17, mas apenas a estrutura uniforme admissível carrega o conteúdo da entropia topológica.

4.3 O Papel da Estrutura Uniforme no Princípio Variacional

Como discutido na Seção 1.3, estruturas uniformes e topologia têm papeis muitas vezes interligados, mas distintos, sendo possível uma única topologia possuir diversas estruturas uniformes associadas, i.e. uma mesma topologia pode ser a topologia uniforme de duas estruturas uniformes distintas. A unicidade é garantida no caso de espaços topológicos Hausdorff compactos.

O Corolário 2.3.13, e a unicidade da estrutura uniforme dada pelo Teorema 1.3.8, garantem que o Princípio Variacional seja valido quando definimos a entropia topológica de maneira mais fraca para sistemas Hausdorff compactos, a citar, a entropia definida como

$$h_f(T) = \sup_{\mathscr{A}:aberta} h\big(T \,\big|\, \mathscr{A}\big). \tag{4.1}$$

De fato na demonstração do Teorema 4.2.1, utiliza-se da estrutura uniforme $\mathscr{U}_Z$. Mas podemos escolher $Z = X$ quando X é compacto, de modo que teorema se mantém válido com a definição mais fraca da equação (4.1). Numa perspectiva diferente, toda cobertura aberta de um conjunto compacto é uma cobertura admissível, de onde novamente obtemos o Princípio Variacional com a entropia $h_f(T)$.

Nessa seção consideraremos um caso particular para ilustrar a importância das coberturas admissíveis na Definição 2.2.4.

Transformações contínuas no cilindro

Vamos utilizar o conjunto

$$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

abusando a notação quando escrevemos $\theta = \theta + 2\pi n$, para $n \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in S^1$, i.e. tratamos quaisquer dois representantes da classe de equivalência como elementos iguais.

Consideramos inicialmente o sistema sobre S^1.

$$\begin{array}{rccc} G: & S^1 & \to & S^1 \\ & \theta & \mapsto & 2\theta \end{array}. \tag{4.2}$$

A transformação é um endomorfismo linear do toro S^1. Os endomorfismos nos toros são muito conhecidos em sistema dinâmico, e sua entropia topológica é conhecida. De fato $h(G) = \log 2$. Uma descrição completa se encontra nas seções 4.2.5, 9.4.3 e 10.2.5 de [KO14].

Considere agora os cilindros

$$\begin{aligned} C &= [0,1] \times S^1 \\ C_0 &= (0,1) \times S^1 \end{aligned}$$

e ainda $\partial C = C \setminus C_0$. Observe que os cilindros são metrizáveis na topologia induzido pela quociente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para uma boa descrição sobre topologia quociente, considere a seção 22 de [Mun00].

Podemos também utilizar o homeomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} f: & S^1 & \to & S_{\mathbb{C}} \\ & \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

onde $S_{\mathbb{C}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \ |z| = 1 \right\}$ é a copia de S^1 em $\mathbb{C}$, para verificar que S^1 é de fato metrizável, e que portanto C e C_0 são metrizáveis.

Considere então a função

$$\begin{array}{rrcl} T: & C_0 & \to & C_0 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (\sqrt{r}, 2\theta) \end{array}.$$

Temos que T define um sistema dinâmico no cilindro C_0.

Podemos ainda estender o sistema ao cilindro C ao sistema $S : C \to C$ com $S_{|C_0} = T$, $S(0,\theta) = (0,\theta)$ e $S(1,\theta) = (1,\theta)$.

Observe que se $\pi : C \to S^1$ é a projeção de C sobre S^1, temos que

$$G(\theta) = \pi \circ T(r,\theta),$$

para $(r,\theta) \in C_0$. Outro fato é que se $\mathscr{D}$ é uma cobertura de abertos de S^1 então $\mathscr{A} = \pi^{-1}(\mathscr{D})$ é uma cobertura de abertos de C_0, e além disso

$$N(\mathscr{D}) = N(\mathscr{A}). \tag{4.3}$$

Mais ainda, temos a relação

$$\mathscr{A}_T^n = \mathscr{D}_G^n,$$

já que, dado $D \in \mathscr{D}$, temos que $\pi^{-1}(D) = (0,1) \times D$ de onde

$$T^{-1}((0,1) \times D) = (0,1) \times G^{-1}(D).$$

Podemos então obter uma cota mínima para a entropia $h_f(T)$ definida na equação (4.1):

$$h_f(T) \geq \sup_{\mathscr{D}:\text{ aberta}} h\big(G \,\big|\, \mathscr{D}\big) = h(G) = \log 2.$$

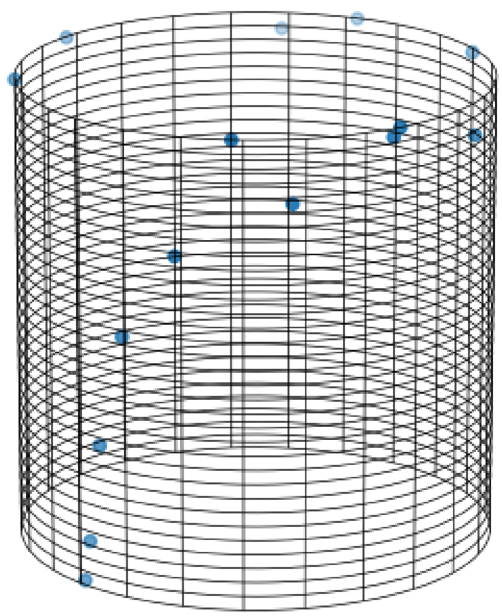

Figura 4.1: Representação do cilindro C_0 e a orbita do ponto (0.01,0.03).

Vamos mostrar agora que a única medida T-invariante é a medida nula.

Primeiro definimos a projeção $\pi_r : C_0 \to \mathbb{R}$ na coordenada r. Observamos que dado $x = (r, x) \in C_0$ a ação de $\pi_r \circ T^n(x)$ resulta em $r^{\frac{1}{2^n}} \to 1$, que leva uma interpretação de que todo ponto de C_0 escapa de C_0 para o bordo ∂C.

Temos também que C_0 é σ-compacto. De fato defina

$$K_n = \left[\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right] \times S^1,$$

para n inteiro e $n \geq 1$, e observe que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = C_0$.

Seja agora $K \subset C_0$ um conjunto compacto. Vamos mostrar que K não contém conjuntos de infinitos retornos. De fato $\pi_r(K)$ é um conjunto compacto em $(0, 1)$, pois a projeção é uma função contínua, e portanto

$\pi_r(K)$ está contido num intervalo fechado e limitado $I \subset (0,1)$. Assim os pontos $\pi_r \circ T^n(x)$ saem de I numa iteração finita de T para todo $x \in K$. Como $K \subset \pi_r^{-1}(I)$, temos que apenas um numero finito de pontos da orbita de x está em K. Assim K não pode conter um conjunto de infinitos retornos. Seja agora μ, T-invariante. Usando o Teorema de Recorrência 3.1.5, temos que $\mu(K) = 0$. Assim concluímos que todo conjunto compacto tem medida nula para qualquer medida T-invariante.

Seja então $E \subset C_0$ um mensurável. Defina o conjunto crescente $E_n = K_n \cap \overline{E}$ e observe que a continuidade das medidas, dada pela Proposição A.4.3, nos dá

$$\mu(E) \leq \mu(\overline{E}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

pois E_n é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que a única medida T-invariante é a medida nula, pois X é σ-compacto.

Pelo princípio variacional, temos

$$h\left(T\right) \leq \sup_{\mu:\ \text{finita}} h_\mu\left(T\right) = 0.$$

Concluímos que no caso de T vale a relação $h\left(T\right) < \sqrt{2} \leq h_f(T)$. A aparente divergência vem do fato de que as coberturas $\mathscr{A} = \pi^{-1}(\mathscr{D})$ nunca são admissíveis. Observe ainda que toda cobertura do tipo tem subcobertura finita, de modo que mesmo coberturas finitas não resolvem o problema, apenas coberturas admissíveis o resolvem.

Para compreendermos de forma mais precisa, lembramos que o sistema dado por $T : C_0 \to C_0$ é um subsistema de $S : C \to C$, que é compacto. A estrutura uniforme única de C não gera coberturas admissíveis. De fato a estrutura uniforme $\mathscr{U}_C$ é dada por vizinhanças da diagonal,

$$\overline{\eta}_\epsilon = \left\{(r_1,\theta_1)\times(r_2,\theta_2) \,\middle|\, d\left((r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2)\right) < \epsilon\right\}$$

onde $d : C^2 \to \mathbb{R}^+$ é uma métrica para C.

A estrutura uniforme admissível de C_0 é obtida da extensão de Alexandroff $\tilde{C}_0$, de C_0.

A base de vizinhanças, ou bolas, do infinito da extensão são os conjuntos

$$B_\epsilon(\infty) = \left\{(r,\theta) \in C_0 \,\middle|\, r < \epsilon \text{ ou } r > 1-\epsilon\right\} \cup \{\infty\}.$$

para $\epsilon > 0$. Para $x \in C_0$ definimos as bolas pela topologia induzida $B_\epsilon(x) = B_d(\epsilon; x) \cap C_0$. Observe que também podemos estender o sistema $T : C_0 \to C_0$ para o sistema $\tilde{T} : \tilde{C}_0 \to \tilde{C}_0$ fazendo $\tilde{T}(\infty) = \infty$, e este é contínuo. De fato, podemos verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}^n(x) = \infty \tag{4.4}$$

para todo $x = (r,\theta) \in C_0$, pois, novamente, $\pi_r \circ \tilde{T}^n(x) = r^{\frac{1}{2^n}} \to 1$, sendo assim para n suficientemente grande, $\tilde{T}^n(r,\theta) \in B_\epsilon(\infty)$.

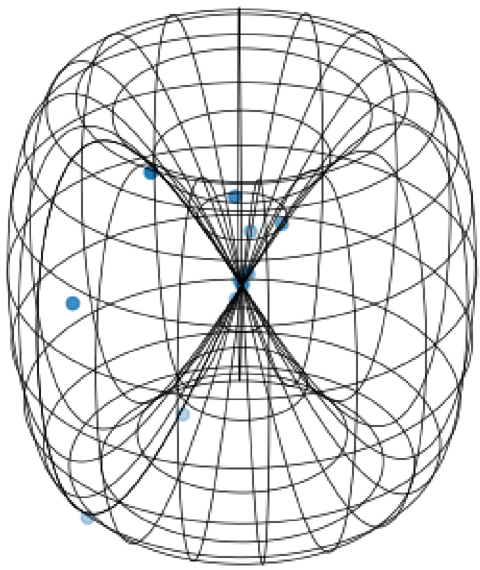

Figura 4.2: Representação da compactificação de C_0 por um ponto com a orbita do ponto (0.01,0.03).

Segue da equação (4.4) que o conjunto

$$\left\{\tilde{T}^{-k}(B_\epsilon(\infty)) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$$

cobre $\tilde{C}_0$, que é compacto, de modo que alguma subcobertura finita também cobre. Como $T^{-k}B_\epsilon \subset T^{-(k+1)}B_\epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ com

$$\tilde{C}_0 \subset T^{-k_\epsilon}(B_\epsilon). \tag{4.5}$$

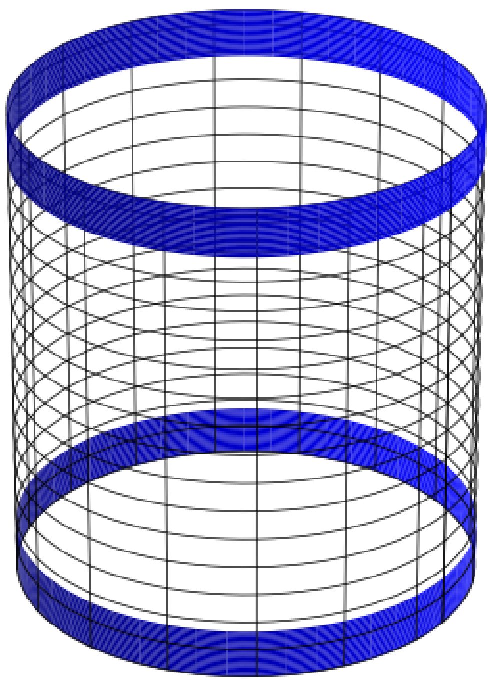

Figura 4.3: Representação da restrição a C_0 de uma vizinhança do infinito com $\epsilon = 0.1$ da compactificação por um ponto de C_0 .

Uma maneira de interpretar a compactificação por um ponto é colapsar ∂C em um único ponto, como na figura 4.2, ou pensar na estrutura uniforme compatível com a métrica em C_0 em que os pontos ∂C não se separam, como exemplificada na figura 4.3. A estrutura uniforme $\tilde{\mathscr{U}}$ é gerada pelas *entourages*

$$\tilde{\eta}_\epsilon = \left\{ (x,y) \in \tilde{C_0}^2 \;\middle|\; x \in B_\epsilon(y) \right\}.$$

Para a estrutura uniforme admissível em C_0, $\mathscr{U} = \tilde{\mathscr{U}} \cap (C_0 \times C_0)$, temos as *entourages*

$$\eta_\epsilon = \tilde{\eta}_\epsilon \cap (C_0 \times C_0).$$

É possível perceber que $\eta_\epsilon \neq \overline{\eta}_\epsilon \cap (C_0 \times C_0)$, já que para $r_1, r_2 < \epsilon$ temos

$$((r, \theta_1), (r, \theta_2)) \in \eta_\epsilon$$

para todo para $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ e o mesmo não vale para $\overline{\eta}_\epsilon \cap (C_0 \times C_0)$ com $\epsilon < \pi$. Temos então que C_0 apresenta mais de uma estrutura uniforme que é compatível com a topologia de C_0.

Observe que para n suficientemente grande, quaisquer dois pontos de C_0 não se mantêm separados por η_ϵ. De fato dados $x_1, x_2 \in C_0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}^n(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}^n(x_2) = \infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(x_1) \in B_\epsilon(\infty)$ e $T^m(x_1) \in B_\epsilon(\infty)$, onde utilizamos $\tilde{T}^n(x) = T^n(x)$ para $x \in C_0$. Segue daí que,

$$(T^m(x), T^m(y)) \in \eta_{2\epsilon}. \tag{4.6}$$

Segue daí que se $E \subset C_0$ é η_ϵ separado, então E é finito pelo Lema 2.3.8 e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(E)$ não é $\eta_{2\epsilon}$ separado, de modo que um conjunto com mais de um elemento não pode ser (n, η_ϵ)-separado para "n suficientemente grande", e assim devemos ter

$$h^{\mathscr{U}}(T) = h(T) = 0,$$

que é o esperado pelo Princípio Variacional.

Observa-se, por fim, que o único conjunto de infinitos retornos do sistema $\tilde{T} : \tilde{C_0} \to \tilde{C_0}$ é $\{\infty\}$. Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, uma medida finita positiva e invariante por T tem medida positiva apenas em $\{\infty\}$. Segue daí que a entropia de Kolmogorov-Sinai é nula, pois para qualquer partição $\mathscr{D}$, se $\infty \in D_0 \in \mathscr{D}^n$, então

$$\frac{1}{n} H_\mu \left(\mathscr{D}^n\right) = \frac{1}{n}\mu(D_0) \log \frac{1}{\mu(D_0)} = \frac{1}{n}\mu(\{\infty\}) \log \frac{1}{\mu(\{\infty\})}.$$

De modo que tomando o limite em n temos que a entropia de Kolmogorov-Sinai é nula. Temos daí que o resultado é, novamente, consistente com o Princípio Variacional. Mas para além disso, observamos que a restrição da medida ao subconjunto C_0, é justamente a medida nula. Esta ideia serve a ilustrar o fato de que na demonstração do Teorema 4.2.1 foi construída uma medida de probabilidade invariante em Z, que é o limite de uma sub-rede na qual o suporte, i.e. o mensurável com medida 1, pode "fugir" do conjunto X, restando apenas a medida nula em X, como no exemplo.

Considerações Finais

O conteúdo de toda a dissertação centrou-se na preparação e na apresentação da demonstração do Princípio Variacional para sistemas dinâmicos topológicos Hausdorff localmente compactos. Como afirmado por todo o texto, omitimos a hipótese de metrizabilidade do sistema. Essa omissão leva de fato a uma generalização, já que os Exemplos 1.2.33 e 1.2.34 ilustram que metrizabilidade não é uma propriedade comum a todo espaço Hausdorff, mesmo que compactos.

Ao leitor atento, vê-se que a demonstração do Teorema 4.2.1 é uma releitura do Princípio Variacional para sistemas Hausdorff compactos, como encontra-se em [Mis75]. Mas ressaltamos que aqui apresentamos pela primeira vez a definição da estrutura uniforme admissível, sempre presente em espaços Hausdorff localmente compactos, e mostramos a relação entre essa estrutura e as coberturas admissíveis.

De toda maneira o resultado é ainda de muito enriquecedor. A entropia de Kolmogorov-Sinai, apresenta diversas propriedades, como invariância por conjugação. De fato trata-se de conteúdo amplamente discutido na literatura [Wal00, KO14]. Sendo assim muito dessa bagagem pode ser transferida a sistemas dinâmicos Hausdorff localmente compactos, observando aspectos principalmente topológicos.

Essa dissertação é certamente um trabalho técnico, e talvez demasiado abstrato. Mas tenho para mim que serve à aqueles que apreciam e estudam sistemas dinâmicos, principalmente em seus aspectos topológicos, por fazer uso de ferramentas tão diversas como as que aqui foram apresentadas.

Apêndice A

Limites, Continuidade e Medidas

A.1 Funções contínuas

Nessa seção, consideramos sempre $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos, geralmente distintos. Vamos definir continuidade e continuidade num ponto e estabelecer uma relação entre elas.

Definição A.1.1. *Uma função $f : X \to Y$ é dita* ***contínua****, nas potologias $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$ se para todo aberto $B \in \mathcal{T}_Y$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.*

Em geral quando dizemos que uma função $f : X \to Y$ é contínuas, deixamos implícitas as topologias, e apenas afirmamos que *A imagem inversa de um aberto por f é aberta.*

Definição A.1.2. *Uma função $f : X \to Y$ é dita* contínua em $x \in X$ *se dado uma vizinhanças aberta $V \subset Y$ de $f(x)$ existir uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x com*

$$U \subset f^{-1}(V).$$

Proposição A.1.3. *Um função $f : X \to Y$ é contínua se e somente se é contínua em em todo ponto de X.*

Demonstração. Se f é contínua e $x \in X$ então dada V, vizinhança de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é aberta e contém x, e portanto f é contínua em x.

Por outro lado se f é contínua em todo $x \in X$ então dado $B \subset Y$ aberto, seja $A = f^{-1}(B)$. Observe que para todo $x \in A$ temos que B é uma vizinhanças de $f(x)$, de modo que existe uma vizinhança, $U_x \subset A$, aberta de x. Daí $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, que portanto é um conjunto aberto. $\square$

A.2 Redes e Convergência

No texto são utilizadas redes e algumas de suas propriedades. Nessa seção apresentamos a definição e as propriedades utilizadas na dissertação.

Uma relação de pré-ordem $\prec$ em um conjunto A é uma relação transitiva e reflexiva em A. A é dito *direcionado* se existir uma relação de pré-ordem $\preceq$ em A tal que dados $\alpha, \beta \in A$ existir $\gamma \in A$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$.

Definição A.2.1. *Uma* ***rede*** $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *em* X *é um mapa* $\alpha \to x_\alpha$ *sendo* A *um conjunto direcionado com a relação* $\preceq$. *Dizemos que* (x_α) ***converge para o limite*** $x \in X$ *se, dada uma vizinhança* U *de* x, *exista* $\alpha_0 \in A$ *tal que* $x_\alpha \in U$ *sempre que* $\alpha_o \preceq \alpha$, *e denotamos*

$$\lim x_\alpha = x$$

ou ainda

$$\lim_\alpha x_\alpha = x$$
$$\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$$

dependendo da especificidade necessária.

Quando a rede assume valore reais, definimos

$$\limsup x_\alpha = \inf_{\alpha_0} \sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$$
$$\liminf x_\alpha = \sup_{\alpha_0} \inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$$

de maneira análoga à sequencias. É claro que

$$\liminf x_\alpha \leq \limsup x_\alpha.$$

Observe também que $\sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$ é uma rede decrescente, no sentido de que se $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ então $\sup_{\alpha_1 \preceq \alpha} x_\alpha \geq \sup_{\alpha_2 \preceq \alpha} x_\alpha$. Da mesma forma podemos concluir que $\inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$ é uma rede crescente. Dessa forma podemos usar também as definições

$$\limsup x_\alpha = \lim \sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$$
$$\liminf x_\alpha = \lim \inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha$$

Temos também a propriedade,

Proposição A.2.2. *Seja (x_α) uma rede à valores reais. Então (x_α) converge se e somente se*

$$\limsup x_\alpha \leq \liminf x_\alpha$$

Demonstração. Se (x_α) converge, e tem limite x seja $\epsilon > 0$ e α_0 tal que $|x_\alpha - x| < \epsilon$. Sem perda de generalidade, escolhemos $x = 0$. Temos então que

$$\sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha < \inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, a conclusão segue.

Por outro lado, dado α_0 temos que

$$\inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha \leq x_{\alpha_0} \leq \sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha.$$

Dado $\epsilon > 0$ tome α_0 tal que $\sup_{\alpha_0 \preceq \alpha} < \liminf x_\alpha + \epsilon$. Temos daí que

$$\inf_{\alpha_0 \preceq \alpha} x_\alpha \leq x_{\alpha_0} \leq \liminf x_\alpha + \epsilon.$$

Tomando o supremo, que é o mesmo que tomar o limite, temos o resultado. □

Definição A.2.3. *Sejam A, B conjuntos direcionados. Uma **sub-rede** se é um mapeamento*

$$\beta \to \alpha_\beta$$

sendo $\beta \in B$ e $\alpha \in A$, tal que dado $\alpha_0 \in A$ existe $\beta_0 \in B$ tais que

$$\alpha_0 \preceq \alpha_\beta$$

sempre que $\beta_0 \preceq \beta$.

Proposição A.2.4. *Se seja X um espaço topológico e x_α uma rede convergente com limite x. Se α_β é uma sub-rede de α então*

$$\lim_\beta x_{\alpha_\beta} = x.$$

Demonstração. Dado U uma vizinhança de x tome α_0 com $x_\alpha \in U$ sempre que $\alpha_0 \prec \alpha$. Daí existe β_0 tal que $\alpha_0 \prec \alpha_\beta$ se $\beta_0 \prec \beta$, e portanto $x_{\alpha_\beta} \in U$. □

Agora vamos relacionar convergência em redes e continuidade de funções

Proposição A.2.5. *Sejam X, Y um espaços topológicos e uma função $f : X \to Y$. Se (x_α) é uma rede convergente com limite x então*

$$\lim f(x_\alpha) = f(x).$$

Demonstração. Tome V um vizinhança de $f(x)$ e considere a vizinhança $U = f^{-1}(V)$ de x. Daí temos α_0 tal que se $\alpha_0 \prec \alpha$ então $x_\alpha \in U$. Segue daí que $f(x_\alpha \alpha) \in V$, que demonstra a proposição. □

Proposição A.2.6. *Seja X um espaço topológico Haussdorff e uma rede convergente $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Então o limite de (x_α) é único.*

Demonstração. Suponha que x e y sejam limites distintos de (x_α). Tome U, V uma vizinhanças aberta e disjuntas de x e y, respectivamente. Temos que como x é limite então existe α_0 tal que se $\alpha_0 \prec \alpha$, então $x_\alpha \in U$. Mas então $x_\alpha \notin V$, e portanto y não é limite de (x_α), o que é uma contradição. □

A.3 Filtros, convergência e compacidade

Filtros são objetos que tratam conceitos de convergência por uma perspectiva bem distinta de rede, mas bastante equivalente. Filtros, no entanto, apresentam uma vantagem, talvez, técnica: a imagem inversa de um filtro por uma função é filtro, e a imagem direta de um filtro é um filtro. Sendo assim, do ponto de vista topológico, trata-se de objetos "rígidos", principalmente quando comparados à conjuntos abertos e redes, mesmo ao se considerar apenas funções contínuas. Além da teoria aqui apresentada, os *ultrafiltros*, filtros que não têm refinamento próprio, tem propriedades bastante singulares. Algumas delas se encontram espalhados por todo a referência [Jam87], que apesar de breve, certamente serviu de inspiração à este trabalho.

Definição A.3.1. *Um **filtro** em um conjunto S é uma família $\mathscr{F}$ de subconjuntos de S satisfazendo.*

1. *Dado $A \in \mathscr{F}$, então se $A \subset B$ então $B \in \mathscr{F}$.*
2. *A intersecção de quaisquer dois elementos de $\mathscr{F}$ é não vazia e também é elemento de $\mathscr{F}$.*

Uma família de subconjuntos $\mathscr{A}$ de subconjuntos é uma *base de filtros* se a interseção de dois elementos de $\mathscr{A}$ estiver em $\mathscr{A}$. O filtro gerado por uma base de filtros é o menor filtro que contém a base de filtros.

Um filtro $\mathscr{F}'$ é um *refinamento* de $\mathscr{F}$ ou *refina* $\mathscr{F}$, se dado $F \in \mathscr{F}$ existir $F' \in \mathscr{F}'$ com $F' \subset F$. Dizemos também que $\mathscr{F}'$ é mais fino que $\mathscr{F}$. De forma equivalente, $\mathscr{F}'$ refina $\mathscr{F}$ se $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$.

Exemplo A.3.2. Dados um espaço topológico X e $x \in X$. O *filtro de vizinhanças* de x, $\mathscr{N}_x$, é o filtro formado pelos conjuntos que são vizinhanças de x.

Exemplo A.3.3. Seja $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede em X, o seu *filtro elementar* é gerado pelos subconjuntos $M \subset X$ satisfazendo α' tal que $a_\alpha \in M$ para $\alpha' \preceq \alpha$.

Proposição A.3.4. *Um filtro é um conjunto direcionado com a relação de inclusão reversa,* $F_1 \preceq F_2 \iff F_1 \supset F_2$.

Demonstração. Dados $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, como $F = F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$. temos que $F_1 \preceq F$ e $F_2 \preceq F$. Daí $\mathscr{F}$ é direcionado, pois $\preceq$ é uma relação de pré-ordem. □

Filtros têm papel interessante na generalização no conceito de convergência.

Definição A.3.5. *Em um espaço topológico* X *e* $\mathscr{F}$ *um filtro em* X. $x \in X$ *é um ponto limite de* $\mathscr{F}$ *se* $\mathscr{F}$ *refina o filtro do vizinhanças de* x.

Proposição A.3.6. *Uma rede é convergente se, e somente se, o seu limite é um ponto limite do filtro elementar da sequência.*

Demonstração. Considere uma rede convergente $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ com limite x. Então, dada uma vizinhança $V \in \mathscr{N}_x$ de x, existe $\alpha' \in A$ tal que $x_\alpha \in V$ para $\alpha' \preceq \alpha$. Assim tome um conjunto $M = \{x_\alpha \mid \alpha' \preceq \alpha\}$. Claro que M pertence ao filtro elementar de (x_α), que refina $\mathscr{N}_x$. A volta é ainda mais imediata, já que se dado $V \in \mathscr{N}_x$ existir M no filtro elementar com $M \subset V$, então existe $\alpha' \in A$ com $x_\alpha \in M \subset V$ sempre que $\alpha' \preceq \alpha$. □

Proposição A.3.7. *Seja* $f : X \to Y$ *uma função contínua, e* $\mathscr{F}$ *um filtro sobre* X. *Se* $x \in X$ *é aderente a* $\mathscr{F}$ *então* $f(x)$ *é aderente ao filtro*

$$f(\mathscr{F}) = \left\{ f(U) \,\middle|\, U \in \mathscr{F} \right\}$$

Em particular se x *é um ponto limite de* $\mathscr{F}$, *então* $f(x)$ *será de* $f(\mathscr{F})$

Demonstração. Tome $x \in X$ e seja U uma vizinhança de $f(x)$ em Y. Daí como f é contínua, então $V = f^{-1}(U)$ é vizinhança de x, de onde $F \cap V \neq \emptyset$. Temos então que

$$f(F) \cap U \subset f(F \cap V) \neq \emptyset.$$

□

Definição A.3.8. *Sejam X um espaço topológico e um filtro $\mathscr{F}$ em X. $x \in X$ é aderente a $\mathscr{F}$ se for um ponto de aderência a todo elemento de $\mathscr{F}$.*

Em particular se x é um limite de uma sequência, então ele é aderente ao filtro elementar da sequência. Mais geralmente temos o seguinte Lema:

Lema A.3.9. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $x \in X$ é um ponto aderente à A se, e somente se, $A \cap \mathscr{N}_x$ for um refinamento de $\mathscr{N}_x$.*

Demonstração. Seja x aderente à A. Daí para toda vizinhança V de x, $V \cap A \subset V$ é não vazio, de modo que de fato $A \cap \mathscr{N}_x$ é um refinamento. Reciprocamente, se $A \cap \mathscr{N}_x$ refina $\mathscr{N}_x$, então $A \cap V \neq \emptyset$ para toda vizinhança V de x. $\square$

De modo geral, compacidade não implica compacidade sequencial. Mas temos a seguinte caracterização por filtros.

Teorema A.3.10. *Um espaço topológico é compacto se, e somente se, todo filtro admite um ponto de aderência.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico compacto e $\mathscr{F}$ um filtro sobre X. Suponha que $\mathscr{F}$ não tenha pontos de aderência. Sendo assim para todo $x \in X$ tome V_x uma vizinhança aberta de x tal que existe $F_x \in \mathscr{F}$ com $F_x \cap V_x = \emptyset$, que pode ser tomada pois $\mathscr{F}$ não tem pontos de aderência. Claro que $\{V_x\}$ é uma cobertura aberta de X, que, portanto, contém uma subcobertura $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots V_{x_n}\}$. Como $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = X$ e $F_{x_i} \cap V_{x_1} = \emptyset$ temos que $F = F_{x_1} \cap \cdots \cap F_{x_n} = \emptyset$, o que é contradição, pois $F \in \mathscr{F}$ e não pode ser vazio.

Suponha agora que todo filtro em X tenha um ponto de aderência. Seja $\mathscr{C} = (U_a)_{a \in S}$ uma cobertura de aberto de X, sem subcoberturas finitas. Seja a família formado pelo conjunto dos complementares das uniões finitas de elementos de $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{F} = \left\{ X \setminus V \;\middle|\; V = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in S \right\}.$$

É claro que $\mathscr{F}$ é a base de um filtro, pois a intersecção de dois de seus elementos é não vazia. Mas então $\mathscr{F}$ não tem pontos de aderência, já que para todo $x \in X$ existe um vizinhanças U_a de $\mathscr{C}$ com $x \in U_a$ de onde temos que x não é aderente a $F = X \setminus U_a \in \mathscr{F}$. Assim temos uma contradição. $\square$

Observe que se $\mathscr{F}$ é um filtro e x um ponto aderente de $\mathscr{F}$, então o refinamento

$$\Lambda = \left\{ F \cap U \;\middle|\; F \in \mathscr{F} \text{ e } U \in \mathscr{N}_x \right\} \tag{A.1}$$

tem x como ponto limite.

Temos um resultado clássico de compacidade, que será demonstrado usando filtros, a fim de ilustra a flexibilidade dessas estruturas.

Proposição A.3.11. *Sejam X um espaço topológico compacto e $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede sobre X. Então (x_α) admite uma sub-rede convergente.*

Demonstração. Tome o filtro fundamental da rede x_α,

$$\mathscr{F} = \left\{ F \subset X \;\middle|\; \text{Existe } \alpha \in A \text{ tal que } x_{\alpha'} \in F, \text{ se } \alpha \preceq \alpha'. \right\}$$

Como X compacto, $\mathscr{F}$ tem um ponto de aderência x. Tome então o refinamento Λ de $\mathscr{F}$ definida na equação (A.1). Como Λ é direcionado pela inclusão reversa, podemos definir o conjunto direcionado

$$B = \left\{ (\alpha, \lambda) \;\middle|\; \alpha \in A, \lambda \in \Lambda \right\}$$

com a relação de ordem $(\alpha, \lambda) \preceq (\alpha', \lambda')$ se $\alpha \preceq \alpha'$ e $\lambda \supset \lambda'$. Podemos então definir então um sub-rede de α, usando a relação

$$(\alpha, \lambda) \to \alpha' = \alpha'(\alpha, \lambda).$$

para algum α' que satisfaça $\alpha \preceq \alpha'$ e $x_{\alpha'} \in \lambda$. A sub-rede α' é bem definida, pois dado $(\alpha, \lambda) \in B$, x é ponto de aderência do conjunto $\Gamma_\alpha = \{x_{\alpha'} | \alpha \preceq \alpha'\} \in \mathscr{F}$ para todo $\alpha \in A$, de modo que, dada uma vizinhança U de x, existe ao menos um ponto $x'_\alpha \in \Gamma_\alpha \cap \lambda \cap U \subset \lambda \in \Lambda$ com $\alpha \preceq \alpha'$. Além disso se trata de fato de uma sub-rede, pois dados $(\alpha_1, \lambda_1), (\alpha_2, \lambda_2) \in B$ com $(\alpha_1, \lambda_1) \preceq (\alpha_2, \lambda_2)$, temos $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha'(\alpha_2, \lambda_2)$ e $x_{(\alpha_2, \lambda_2)} \in \lambda_2 \subset \lambda_1$.

Resta mostrar que $(x_\beta)_{\beta \in B}$ converge para x. Tome U uma vizinhança de x e $F \in \mathscr{F}$ e defina $\lambda = F \cap U$ e tome α com algum $x_\alpha \in \Lambda$. Daí $x_\beta \in \lambda \subset U$ sempre que $(\alpha, \lambda) \preceq \beta$. □

A.4 Espaços Mensuráveis

Nessa seção apenas definiremos espaços de medida e mostraremos um resultado simples para medidas finitas.

Definição A.4.1. *Seja X um conjunto, e $\mathscr{A}$ um conjunto de subconjuntos de X. $\mathscr{A}$ será uma σ-álgebra se*

1. *$\mathscr{A}$ é não vazio.*
2. *Se $A \in \mathscr{A}$ então $X \setminus A \in \mathscr{A}$.*
3. *Intersecções enumeráveis de elementos de $\mathscr{A}$ pertencem à $\mathscr{A}$.*

Da definição podemos concluir que $X \in \mathscr{A}$, e que uniões enumeráveis de elementos de $\mathscr{A}$ pertencem à $\mathscr{A}$. O par $(X, \mathscr{A})$ é chamado *espaço mensurável*. Toda coleção $\mathscr{X} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X gera uma σ-álgebra, no sentido de que está contido na menor σ-álgebra que contém $\mathscr{X}$. Tais σ-álgebras geradas nunca são vazias, e estão bem definidas(vide a seção 1.2 de [Fol13]). A menos σ-álgebra que contém uma topologia $\mathcal{T}$ é chamada a σ-álgebra de Borel de $\mathcal{T}$, e denotamos $\mathscr{B}[X]$ sendo que a escolhida de X topologia é implícita.

Definição A.4.2. *Seja X um conjunto, e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de X. Uma* ***medida*** *em $\mathscr{A}$ é uma função $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Se* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ *é uma coleção enumerável de conjuntos disjuntos de* $\mathscr{A}$ *então* $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$

3. μ *assume no máximo um dos valores* $\infty, -\infty$.

Uma medida é dita *positiva* se não assumir valores negativos, e *finita* se for positiva e $\mu(X) \leq \infty$. Temos o resultado simples.

Proposição A.4.3. *Seja* $E_i \in \mathscr{A}$ *é uma coleção enumerável de conjuntos tais que* $E_i \subset E_{i+1}$ *e* μ *é uma medida finita, então*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

Demonstração. Defina

$$A_i = E_i \setminus (E_0 \cup \cdots \cup E_{i-1})$$

e observe que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Além disso A_i é uma coleção disjunta. Assim

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

Observe que o limite existe pois as somas parciais $\sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$ formam uma sequencias monótona limitada por $\mu(X)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[AKM65] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2):309–319, 1965.

[BG13] J.M. Bahi and C. Guyeux. *Discrete Dynamical Systems and Chaotic Machines: Theory and Applications*. Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series. CRC Press, 2013.

[Bow71] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Transactions of the American Society*, (157):401–414, 1971.

[Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[CP18] André Caldas and Mauro Patrão. Entropy and its variational principle for locally compact metrizable systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(2):540–565, 2018.

[DSV12] Dikran Dikranjan, Manuel Sanchis, and Simone Virili. New and old facts about entropy in uniform spaces and topological groups. *Topology and its Applications*, 159(7):1916 – 1942, 2012. International Conference on Topology and its Applications, 2010.

[Fol13] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.

[Goo71] T. N. T. Goodman. Relating topological entropy and measure entropy. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2):176–180, 1971.

[Hoo74] B. M. Hood. Topological Entropy and Uniform Spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-8(4):633–641, 10 1974.

[Jam87] I. M. James. *Topological and Uniform Spaces*. Springer-Verlag New York, 3ª edition, 1987.

[KO14] Marcelo Viana Kreley Oliveira. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Fronteiras da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[Mis75] Michal Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}_+^N$ action on a compact space. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S4):1–10, 1975.

[Mun00] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[RLDHSD04] S.S.M.W.H. Robert L. Devaney, M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Pure and Applied Mathematics - Academic Press. Elsevier Science, 2004.

[Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Higher Mathematics Series. McGraw-Hill, 1974.

[Sal01] S. Salinas. *Introduction to Statistical Physics*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer New York, 2001.

[SW98] C.E. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, 1998.

[Wal00] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.