



**ANÁLISE MULTISCALA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO
DUAL DE FUSELAGEM DE AERONAVE SUBMETIDA À FADIGA**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE MULTISCALA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
DUAL DE FUSELAGEM DE AERONAVE SUBMETIDA À FADIGA**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: GILBERTO GOMES

CO-ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JÚNIOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.DM – 03A/19
BRASÍLIA/DF: FEVEREIRO – 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ANÁLISE MULTISCALA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
DUAL DE FUSELAGEM DE AERONAVE SUBMETIDA À FADIGA**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO DE Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas e Construção Civil.

APROVADA POR:

Prof. Gilberto Gomes, DSc.

(Orientador)

Prof. Raul Dario Durand Farfan, DSc.

(Examinador Interno)

Prof. Eder Lima de Albuquerque, DSc.

(Examinador Externo)

Brasília/DF, 21 de fevereiro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, THIAGO ARNAUD ABREU DE

Análise multiscalas via Método dos Elementos de Contorno Dual de fuselagem de aeronave submetida à fadiga. [Brasília, Distrito Federal] 2018.

xxii, 111 p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise multiescala

2. Vida à fadiga

3. Fuselagem de aeronave

4. Método dos Elementos de Contorno Dual

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, T. A. A. (2018). Análise multiscalas via Método dos Elementos de Contorno Dual de fuselagem de aeronave submetida à fadiga. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 03A/19 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 111 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Thiago Arnaud Abreu de Oliveira.

TÍTULO: Análise multiscalas via Método dos Elementos de Contorno Dual de fuselagem de aeronave submetida à fadiga.

GRAU: Mestre em Estruturas e Construção Civil. ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Thiago Arnaud Abreu de Oliveira
SQN 406 Bloco K Ap. 208
CEP: 70847-110 Brasília – DF – Brasil
e-mail: eng.thiagoarnaud@hotmail.com

AGRADECIMENTOS

Os pilares são resistentes. São capazes de suportar as situações mais adversas que se pode imaginar. A seguir, agradeço aos meus pilares.

À Kerginaldo Pinheiro e Rosali Abreu. Meus maiores exemplos, meus Pais. Por onde for estarei seguindo seus passos. A estes fica difícil a gratidão do quão são importantes. Gratidão essa que incluem Maryana Louise, Hugo Guimarães e a mais recente Laurinha que trouxe a alegria do mundo em forma de neném. Estes formam minha família, meu maior pilar.

Ao mestre Gilberto Gomes, *meu professor*. Muito mais que um orientador de mestrado, um orientador da vida. Sempre presente dando conselhos e guiando meus passos. Saiba, meu mestre, que sinto bastante honrado em ter trabalhado ao seu lado. A ti tenho bastante admiração. Gratidão juntamente ao mestre Evangelista Junior que sempre abriu as portas quando mais precisei. Estes representam os agradecimentos a todos docentes do PECC.

Aos companheiros do Apartamento 208: Alvaro Martins, Iago Freitas, Davidson França e Danilo Nunes. Cada momento convivido com vocês ficarão marcados na minha vida. Vivemos juntos muito do que se passou, mas meus amigos, tem muito mais por vir. Natal/RN está de portas abertas para vocês.

Aos colegas de turma: Danilo Carvalho, Luciano Lins, Henrique Castro e em especial ao irmão Rodolfo Palhares que sempre esteve lado a lado incentivando nos estudos (muitas noites sem dormir para tirar SS). Aos contemporâneos Iarly Vanderley, Jerfson Lima e Jonathas Iohanathan que representam 2016.2. E amigos do PECC que sempre estiveram presente: Gabriel Martins, André Augusto, Luiza Rodrigues, Nathaly Sarasty, e Pedro Filipe.

À Felipe Dias, Thiago Alexandre, Roberio Bezerra – o quarteto; à Nicole Arouca, Pedro Linard, João Victor, Talis Arthur, Daniel Braz, Brenda Vieira, Diego Serafim e Tamil Selvam – da graduação para a vida. Meus amigos de Natal que mesmo estando longe, sempre estiveram presentes nesta caminhada.

Aos meus Tios, em especial Zeca e Rosane Abreu, e à vovó Maria de Lourdes que me passam conforto e acolhem com muito amor.

À Costa Neto, *Coya*. Meu Tio, não de sangue, mas se mostrou meu segundo pai quando me recebeu em Brasília. E à toda família Braziliense: Andressa Barros, Munique Monte, Marlene Lacerda, Michelle Lacerda, Bruno Lacerda e Gabriella Monte, meus sinceros agradecimentos pelo companheirismo em minha recepção.

Faça algo hoje que te fará sentir orgulho amanhã.

“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”

Ayrton Senna da Silva

RESUMO

Este trabalho consiste na análise de vida à fadiga de peças de fuselagem de aeronave com danos iniciais submetidas a diferentes níveis de solicitações externas com objetivo de avaliar tolerância ao dano. Para isso, a bibliografia clássica estuda a tolerância ao dano com base no tamanho da trinca. Por outro lado, este estudo se apresenta como inovador ao propor um novo método para a tolerância ao dano: baseado na análise multiescala é capaz de encontrar uma relação entre o número de ciclos de fadiga com a respectiva *compliance* em micro elementos locais. Desse modo, foram desenvolvidas técnicas computacionais avançadas utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual que, devido à sua flexibilidade, possibilitou avaliar diversos modelos. Os resultados foram tratados estatisticamente por meio de simulação de Monte Carlo a fim de assegurar a integridade e o funcionamento adequado da fuselagem evitando alcançar um Estado Limite durante a vida útil de projeto.

Palavras-chave: análise multiescala, vida à fadiga, fuselagem de aeronave, Método dos Elementos de Contorno Dual.

ABSTRACT

This paper presents a fatigue life analysis of an aircraft fuselage with pre-established initial damages subjected to different levels of external loads in order to evaluate damage tolerance. For this, the classic bibliography studies damage tolerance based on the crack size. On the other hand, this study is innovative when proposing a new method for damage tolerance: based on multiscale analysis, it is able to find a relation between the number of fatigue cycles with the respective *compliance* in local micro elements. So, advanced computational techniques were developed using Dual Boundary Element Method, which, due to its flexibility, allowed to evaluate several models. The results were treated statistically by Monte Carlo simulation to ensure the integrity and the proper functioning of the fuselage by avoiding reaching a Limit State during the design lifespan.

Keywords: multiscale analysis, fatigue life, aircraft fuselage, Dual Boundary Element Method.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 MOTIVAÇÃO.....	3
1.3 OBJETIVOS.....	4
1.3.1 Objetivo geral.....	4
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	4
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
CAPÍTULO 3 – EMBASAMENTO TEÓRICO.....	9
3.1 MECÂNICA DO CONTÍNUO.....	9
3.1.1 Força normal concentrada.....	11
3.1.2 Força cisalhante concentrada.....	12
3.1.3 Carga distribuída normal e cisalhante.....	13
3.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA.....	15
3.2.1 Tensões na ponta da trinca.....	17
3.2.2 O método generalizado de Westergaard.....	18
3.2.3 <i>Compliance</i>	21
3.2.4 Energia de fratura.....	22
3.2.5 Taxa de dissipação de energia (<i>Energy Release Rate</i>).....	23
3.2.6 Instabilidade e curva R.....	24
3.2.7 Integral J.....	25
3.2.8 Direção de propagação de trinca.....	27
3.3 FADIGA.....	28
3.3.1 Tipos de comportamento a fadiga.....	28
3.3.2 Estágios de fadiga.....	29
3.3.3 Lei de Paris-Erdogan.....	30
3.3.4 Tolerância ao dano.....	31
3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	33
3.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL.....	34

3.5.1	Integral de contorno de deslocamento.....	35
3.5.2	Integral de contorno de força de superfície.....	35
3.5.3	Sistema de equações algébricas.....	36
3.6	BEMLAB2D.....	37
3.7	BEMCRACKER2D.....	38
3.8	ESTATÍSTICA.....	41
3.8.1	Simulação Monte Carlo.....	42
CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA.....		43
4.1	MODELO.....	43
4.1.1	Análise macro.....	44
4.1.2	Análise micro.....	45
4.2	ESTUDO DE CASO 1.....	50
4.2.1	Considerações para a posição 1.....	53
4.2.2	Considerações para a posição 2.....	55
4.2.3	Considerações para a posição 3.....	58
4.3	ESTUDO DE CASO 2.....	60
4.3.1	Considerações para a posição 1.....	63
4.3.2	Considerações para a posição 2.....	65
4.3.3	Considerações para a posição 3.....	68
CAPÍTULO 5 – RESULTADOS.....		71
5.1	ANÁLISE 1.....	71
5.1.1	Posição 1 (Meio).....	71
5.1.2	Posição 2 (Superior).....	72
5.1.3	Posição 3 (Lado).....	73
5.1.4	Tolerância ao dano.....	73
5.2	ANÁLISE 2.....	77
5.2.1	Posição 1 (Meio).....	77
5.2.2	Posição 2 (Superior).....	78
5.2.3	Posição 3 (Lado).....	79
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS ...		81

6.1	CONCLUSÕES	81
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	82
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICE A – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 1.....	88
	APÊNDICE B – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 2	91

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Falha por fadiga da fuselagem do Boeing 737-200	1
Figura 2.1 - Mapa de <i>co-citation</i>	6
Figura 2.2 - <i>coupling</i>	7
Figura 3.1 – Seção transversal de corpo submetido a carregamentos normal e cisalhante.....	9
Figura 3.2 - Problema da carga normal concentrada.....	12
Figura 3.3 - Problema da carga cisalhante concentrada	13
Figura 3.4 - Problema do carregamento distribuído normal e cisalhante.....	14
Figura 3.5 - (a) Tensões para carga normal distribuída uniforme (b) linha das tensões principais	14
Figura 3.6 - Modos de fratura.....	16
Figura 3.7 - Modo misto de fraturamento	16
Figura 3.8 - Tensões na ponta da trinca, FIT da trinca (b) maior que (a)	17
Figura 3.9 - Placa com trinca central.....	18
Figura 3.10 - Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.	19
Figura 3.11 - Double cantilever beam (DCB) espécime solicitada à tração	21
Figura 3.12 - Medição da <i>compliance</i> em estrutura entalhada.....	21
Figura 3.13 - Curvas R (a) plana, (b) crescente	25
Figura 3.14 - Comparação de comportamento de materiais elastoplásticos e elástico não-linear	26
Figura 3.15 - Caminho arbitrário em volta da ponta da trinca	26
Figura 3.16 - Estágios de fadiga.....	30
Figura 3.17 - Procedimento para análise do crescimento de trinca.....	31
Figura 3.18 – Diagrama de tolerância ao dano de uma estrutura típica de aeronave.....	32
Figura 3.19 - Diagrama de tolerância no caso de <i>multiple site damage</i> (MSD)	32
Figura 3.20 - Tipos de elementos de contorno	33
Figura 3.21 - Discretização do sólido em elementos de contorno	34
Figura 3.22 - Representação de novos elementos no sistema de equações a cada incremento	36
Figura 3.23 - Interface do BEMLAB2D	37
Figura 3.24 - Arquitetura de um sistema de análises de engenharia	38
Figura 3.25 - Diagrama de classes do BemCracker2D	39
Figura 3.26 - Diagrama de sequência do crescimento da trinca.....	40

Figura 3.27 – Domínio de falha, junção de função densidade de duas variáveis aleatórias f_{RS} , funções densidades resistente e solicitante f_R e f_S , respectivamente	42
Figura 4.1 - Análise multiescala (cm)	44
Figura 4.2 - Fluxograma para o cálculo do campo de tensões no elemento macro	44
Figura 4.3 - Geração do modelo micro	45
Figura 4.4 - Exemplo de modelo micro.....	45
Figura 4.5 - Distribuição da malha de MEC	46
Figura 4.6 – Posições para análise de defeitos iniciais (análise micro)	46
Figura 4.7 - Fluxograma de análise de cada realização.....	47
Figura 4.8 - Fluxograma para obtenção dos pontos da relação número de ciclos x <i>compliance</i> a cada incremento.....	48
Figura 4.9 - Pontos da relação número de ciclos x <i>compliance</i> a cada incremento	48
Figura 4.10 - Curvas número de ciclos x <i>compliance</i>	49
Figura 4.11 - Pontas de trinca.....	49
Figura 4.12 - Tensão sigma x	51
Figura 4.13 - Tensão sigma y	52
Figura 4.14 - Tensão cisalhante.....	53
Figura 4.15 - Propagação da trinca para o elemento na posição 1	54
Figura 4.16 - Malha deformada para o elemento na posição 1	54
Figura 4.17 - Número de ciclos x <i>compliance</i> das bordas para o elemento na posição 1	55
Figura 4.18 – Propagação de trincas para o elemento na posição 2.....	56
Figura 4.19 - Malha deformada para o elemento na posição 2	56
Figura 4.20 - Número de ciclos x <i>compliance</i> das bordas para o elemento na posição 2	57
Figura 4.21 - Propagação de trincas para a posição 3	58
Figura 4.22 - Malha deformada para o elemento na posição 3	58
Figura 4.23 - Número de ciclos x <i>Compliance</i> para o elemento na posição 3	59
Figura 4.24 - Tensão sigma x	61
Figura 4.25 - Tensão sigma y	62
Figura 4.26 - Tensão cisalhante.....	63
Figura 4.27 - Propagação da trinca para o elemento na posição 1	64
Figura 4.28 - Malha deformada para o elemento na posição 1	64
Figura 4.29 - Número de ciclos x <i>compliance</i> das bordas para o elemento na posição 1	65
Figura 4.30 – Propagação de trincas para o elemento na posição 2.....	66
Figura 4.31 - Malha deformada para o elemento na posição 2	66

Figura 4.32 - Número de ciclos x <i>compliance</i> das bordas para o elemento na posição 2.....	67
Figura 4.33 - Propagação de trincas para a posição 3	68
Figura 4.34 - Malha deformada para o elemento na posição 3	68
Figura 4.35 - Número de ciclos x <i>Compliance</i> para o elemento na posição 3	69
Figura 5.1 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 1	71
Figura 5.2 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 2.....	72
Figura 5.3 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 3.....	73
Figura 5.4 - Frequência Absoluta (AF) das incidências dos valores de <i>Compliances</i>	75
Figura 5.5 - Vida à Fadiga do elemento micro para 3C	75
Figura 5.6 - Vida à Fadiga característica.....	76
Figura 5.7 - Probabilidade de falha	77
Figura 5.8 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 1	78
Figura 5.9 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 2.....	79
Figura 5.10 - Todas as curvas <i>Compliance</i> x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 3... ..	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Campo de tensões próximo à trinca	19
Tabela 3.2 - Campo de deslocamentos próximo à trinca	20
Tabela 3.3 - Tipos de carregamento à fadiga (ciclos)	29
Tabela 3.4 - Exemplos de Estados Limites	41
Tabela 4.1 - Constantes de Paris ($da/dN=C\Delta K^m$) para liga de alumínio 2024-T3	43
Tabela 4.2 – Valores das variáveis do Estudo de Caso 1	50
Tabela 4.3 - Campo de tensões (MPa) na posição 1	53
Tabela 4.4 - Campo de tensões (MPa) na posição 2	56
Tabela 4.5 - Campo de tensões (MPa) na posição 3	58
Tabela 4.6 – Valores das variáveis do Estudo de Caso 2	60
Tabela 4.7 - Campo de tensões (MPa) na posição 1	63
Tabela 4.8 - Campo de tensões (MPa) na posição 2	65
Tabela 4.9 - Campo de tensões (MPa) na posição 3	68
Tabela 5.1 – Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 1	72
Tabela 5.2 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 2.....	72
Tabela 5.3 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 3.....	73
Tabela 5.4 - Número de ciclos mínimos que leva o elemento micro à instabilidade.....	74
Tabela 5.5 - Valores estatísticos de Vida à Fadiga para 3C	76
Tabela 5.6 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 1	78
Tabela 5.7 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 2.....	79
Tabela 5.8 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 3.....	80

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
σ	Vetor de tensões
ϵ	Vetor de deformações
P	Solicitação externa normal
Q	Solicitação externa cisalhante
\bar{u}_x	Deslocamento tangencial
\bar{u}_z	Deslocamento normal
ϕ	Função tensão de Airy
K, FIT	Fator de Intensidade de Tensão
ReZ, ImZ	Parte real e imaginária da função analítica Z
C	<i>Compliance</i>
Π	Energia potencial
Π_0	Energia potencial interna
W_s	Trabalho requerido para criar novas superfícies
γ_s	Energia elástica de superfície do material
γ_p	Energia plástica
w_f	Energia de fratura
σ_f	Tensão resistente de fratura
G	Taxa de dissipação de energia
G_c	Tenacidade à fratura
a	Tamanho da trinca
N	Número de ciclos
\mathbf{u}, \mathbf{p}	Vetores deslocamento e força de superfície
$CPV \int_{\Gamma}$	Valor principal da integral de Cauchy
$HPV \int_{\Gamma}$	Valor principal de Hadamard
c_{ij}	Coefficientes geométricos
δ_{ij}	Delta de Kronecker

T_{ij}, U_{ij}	Soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento
R	Razão de carga de fadiga
r	Raio do furo circular central
L1, L2	Tamanho da trinca superior e inferior

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Este trabalho consiste na análise via Método dos Elementos de Contorno Dual de vida à fadiga de peças de fuselagem de aeronave com trincas e furos iniciais submetidas a diversos níveis de solicitações externas de maneira a avaliar a tolerância ao dano. Para isso, foram desenvolvidas técnicas computacionais avançadas que possibilitaram avaliar diversos modelos e, a partir de um tratamento estatístico, garantir a integridade e o bom funcionamento das peças evitando atingir um Estado Limite durante sua vida útil projetada.

Antes de tudo, constata-se uma série de estudos documentados pelo National Transportation Safety Board (NTSB) para interpretar a causa de acidentes em aviões. Wanhill (2003) destaca os acidentes com os aviões Comet e Boeing 737-200. No caso do Comet concluiu-se como motivo principal a falha por fadiga resultando na desintegração da cabine pressurizada. Esta investigação também relatou que embora projetados para as condições de serviço, sua estrutura era incapaz de evitar a propagação de trincas, particularmente as trincas instáveis que após atingirem o comprimento crítico continuariam a propagar até completa ruptura da estrutura. Quanto ao Boeing 737 da Aloha Airlines, assim que se estabilizou a 7000 metros de altitude, altitude prevista de voo, ouviu-se um forte estrondo e, subitamente, o teto se desintegrou deixando uma abertura de 6 metros na fuselagem em pleno voo, mas ainda assim foi possível a aterrissagem do avião com sua estrutura danificada, as perdas são mostradas na Figura 1.1. Neste caso, as investigações indicaram a iniciação de trincas por fadiga em diversas zonas (*multiple site damage* - MSD) que reduziu bastante a resistência da estrutura levando-a ao colapso.



Figura 1.1 – Falha por fadiga da fuselagem do Boeing 737-200

Sanford (2002) afirma que todas estruturas com superfície livre estão sujeitas à fadiga com trincas começando da superfície e crescendo até atingir dimensão crítica para ruptura frágil, até mesmo aquelas sujeitas somente a cargas permanentes. Ao contrário de estruturas que são plasticamente sobrecarregadas, em que se preveem grandes deflexões, ruptura causada por fadiga ocorre repentinamente sem aviso prévio. Com base nisso, informações relacionando a carga variável no tempo e particularmente seus efeitos em trincas são de importância fundamental para a previsão do comportamento da estrutura como um todo. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) aparece como uma ferramenta poderosa para avaliar fadiga em pontas de trinca na condição de Small Scale Yielding (KREJSA et al., 2017).

Em uma chapa metálica de fuselagem de aeronave, para determinar os parâmetros de Mecânica da Fratura tais como: Fator de Intensidade de Tensão (FIT); número de ciclos de carga; campo de tensões e deformações; etc., é difícil devido à natureza complexa dos detalhes da armação: longarinas, cliques de cisalhamento, rebites, etc. Por outro lado, o conhecimento destes parâmetros é primordial para compreender a natureza do processo de dano especialmente sob cargas dinâmicas, como fadiga. No caso das estruturas de aeronaves, estima-se que cerca de 70% das fendas de fadiga tem origem nos furos e juntas rebitadas (BAUXBAUM et al., 1987).

Os estudos de (BARTER, MOLENT, *et al.*, 2005) mostraram que o histórico de carga (número de ciclos) tem uma relação linear direta com o logaritmo do tamanho da trinca. As trincas crescem de cortes, furos, vazios e descontinuidades do material submetida à fadiga tanto uniaxial quanto multiaxial. Já Skorupa *et al.* (2010) apresentam o comportamento das juntas rebitadas sob carregamento de amplitude constante comparando resultados de ligas de alumínio utilizadas em fuselagem e rebites de aeronaves. As observações mostraram que o período de iniciação da trinca se prolonga durante a maior parte da vida à fadiga da junta. Já em 2014, os mesmos autores observaram que aumentando a tensão de aperto nos rebites, a vida à fadiga das juntas tem uma substancial melhora mostrando-se como um ponto positivo no projeto de fuselagens.

Desse modo, os projetistas estão sempre procurando rapidez, confiabilidade e dados médios precisos de parâmetros de fratura para evitar danos e conseqüentemente a ocorrência de mais perdas e acidentes. A automação se mostra como um ponto chave, ao permitir avaliar um significativo número de análises como meio para estudos paramétricos resultando em otimização de projetos (JISAN et al., 2011). Nesse sentido os métodos numéricos aparecem como uma

alternativa para análise de problemas de fratura. Dentre eles destaca-se o Método dos Elementos de Contorno que possibilita a análise do comportamento de um sólido somente discretizando seu contorno e assim poder prever seu comportamento à fadiga, em particular ao processo de dano.

1.2 MOTIVAÇÃO

Ao longo dos anos várias filosofias de projeto à fadiga se desenvolveram tentando aliar segurança estrutural e economia no processo de fabricação e operação das aeronaves. A primeira abordagem foi denominada *safe-life*. Esta filosofia consiste em projetar e fabricar uma estrutura aeronáutica segura durante toda sua vida útil. Para isso, deve-se considerar nos testes em protótipos as situações mais extremas de solicitações de fadiga, previstas durante operação. Tal metodologia resulta em fatores que superdimensionam os elementos estruturais de maneira a impedir a possibilidade de falha. Esta abordagem evidentemente leva a custos de projetos elevados e não é capaz de garantir a segurança, caso uma falha não prevista em projeto ocorra durante a vida útil.

De maneira racional, desenvolveu-se uma nova filosofia baseada no conceito de tolerância ao dano. Nesta, admite-se que a estrutura, mesmo danificada, seja capaz de suportar as ações para as quais foi projetada até a detecção de uma trinca por fadiga ou outro defeito durante operação. A unidade é então revisada, o dano reparado, e colocada novamente em operação até o final da vida útil. Assim, esta abordagem tem como objetivo detectar trincas, por inspeção, antes que seu crescimento leve a uma falha estrutural grave. Ou seja, implica em conhecer o processo de propagação da trinca, determinando quantos ciclos de carga à fadiga são necessários para a trinca atingir um comprimento final, pré-estabelecido como crítico na concepção do projeto. Do ponto de vista de custos, (BOLLER e BUDERATH , 2007) mostram que o balanço entre o benefício de uma estrutura mais leve e os custos de inspeção periódica é positivo.

A bibliografia clássica analisa a tolerância ao dano (número de ciclos) com base no tamanho da trinca. Por outro lado, este estudo se apresenta como inovador ao propor um novo método para a tolerância ao dano baseado na análise multiescala. Este método é capaz de encontrar uma relação entre o número de ciclos de fadiga com a respectiva *compliance* em elementos locais.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Este trabalho apresenta como objetivo geral a análise multiescala a partir de um elemento macro e sua influência na vida à fadiga em um elemento micro. Com isso, esta abordagem é capaz de prever a vida à fadiga sob o ponto de vista da *compliance* dos microelementos localizados em vários pontos internos, em substituição à abordagem tradicional que trata a vida à fadiga relacionando com o tamanho da trinca. Além disso, este estudo traz ainda um tratamento estatístico dos dados coletados de maneira a avaliar a segurança de tais resultados.

1.3.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos são considerados: avaliação da *compliance* das bordas do elemento micro a cada propagação de trinca; cálculo dos ciclos de carregamento para cada incremento em cada ponta de trinca; avaliação estatística dos resultados estabelecendo um máximo seguro para a tolerância ao dano a partir da curva número de ciclos x *compliance* da análise micro.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação foi dividida em 6 capítulos. Nesta seção, Capítulo 1, é apresentada uma breve visão do trabalho, descrevendo generalidades a respeito do tema proposto, a motivação e os objetivos do que foi abordado.

No Capítulo 2 é abordado o estado da arte atual em base de dados digitais a respeito do tema “Fadiga em fuselagem de aeronave”, seguida de uma extensa revisão bibliográfica dos conceitos que levaram ao desenvolvimento da metodologia proposta, Capítulo 3.

O capítulo 4 descreve os passos para o desenvolvimento do método tratando da metodologia adotada, fluxogramas de implementação e os recursos e ferramentas utilizados. Destaca-se ainda a apresentação de estudos de caso com a aplicação desta metodologia.

No capítulo 5 tem-se o resultado do trabalho, sendo realizadas duas análises: a primeira refere-se a resultados parciais e a segunda para validação destes resultados e do modelo adotado.

Por fim, no capítulo 6, serão apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se o atual estado da arte referente a bases de dados digitais. Utilizando o *software VOSviewer* foram obtidos mapas de calor para análise de *co-citation* e *coupling* a partir dos registros na base *Scopus* do tema “Fadiga em fuselagem de aeronave”. Obtendo como resultados a Figura 2.1 que ilustra o mapa de *co-citation* e a Figura 2.2 que ilustra o de *coupling*. A seguir é apresentada uma breve característica destes parâmetros que dão suporte às pesquisas científicas.

O *co-citation* parte da premissa de que se um artigo cita outros dois sempre juntos indicam que estes outros tratam da mesma linha de pesquisa – sendo interessante para definir as bases teóricas já consolidadas a respeito do tema. Já o *coupling* mostra que quando uma variedade de artigos cita um mesmo artigo implica que este trata de um *front* de pesquisa – indicando áreas novas que estão sendo pesquisadas. Como resultado imediato do *co-citation* e *coupling* obtém-se o estado da arte do tema pesquisado indexado em uma base de dados.

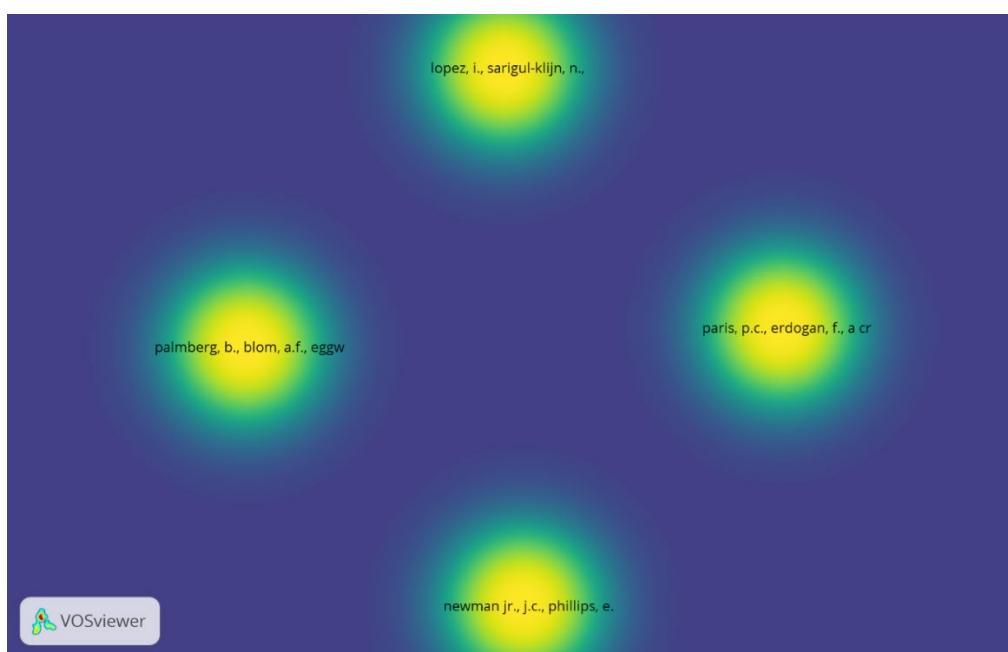


Figura 2.1 - Mapa de *co-citation*

Os registros de *co-citation* mostram os seguintes tópicos que já foram desenvolvidos: Lopez (2010) apresenta uma extensa revisão de incertezas envolvidas no monitoramento de dano estrutural em aeronaves abordando os métodos existentes desenvolvidos para o problema da incerteza nas áreas de diagnóstico, prognóstico e controle de danos. Newman Jr. (1999) prevê

a vida à fadiga de vários materiais metálicos sob diferentes condições de carregamento. Este estudo possibilitou relacionar o crescimento da trinca em função do intervalo de Fator de Intensidade de Tensão efetivo. Os resultados obtidos foram comparados com experimentos em espécimes entalhadas e não entalhadas de ligas de alumínio e aço. A fadiga é comumente representada pelo estudo de (PARIS e ERDOGAN, 1960). Estes autores deram a fundamental contribuição para a modelagem de trincas em sólidos submetidos a cargas cíclicas a partir da Lei de Paris Erdogan, também denominada da/dN, que relaciona o número de ciclos de fadiga com o tamanho da trinca. Já Palmberg (1987) é um dos pioneiros quando se fala em considerar o conceito de tolerância ao dano. Para isso, este autor realiza uma análise estatística para controle da propagação de trincas por fadiga e considera intervalos de inspeção de forma a assegurar que a probabilidade de falha completa da estrutura seja mantida sempre baixa.

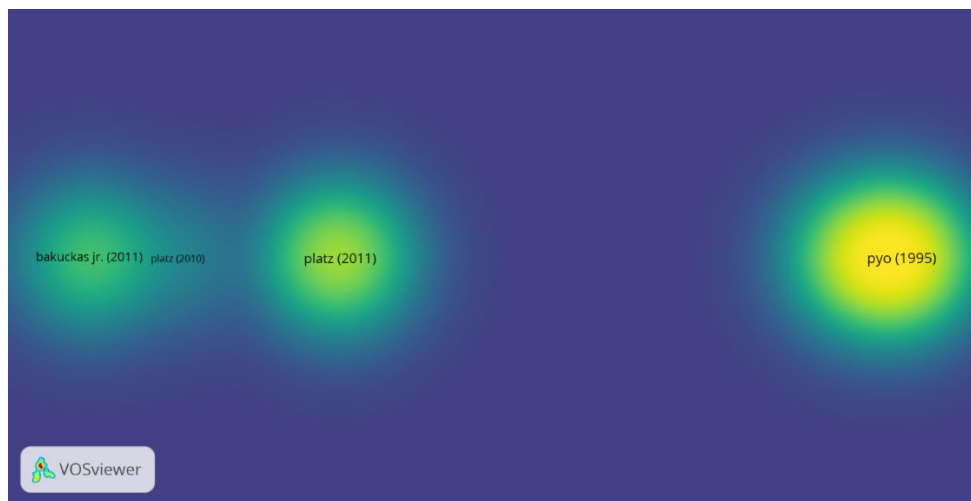


Figura 2.2 - coupling

Já os registros de *coupling* mostram o seguinte: Pyo (1995) trata de um método alternativo para análise de dano por fadiga em estruturas de aeronave. Este autor desenvolveu uma metodologia denominada *Elastic Finite Element Alternating Method (EFEAM)* para prever a máxima capacidade de carga em painéis com trincas destacando o efeito de *Multi Site Damage (MSD)*. Ainda neste estudo é desenvolvida uma solução analítica para uma linha de trincas em uma chapa metálica infinita e como resultado o autor demonstra que a aproximação da MFLE clássica superestima a capacidade de carga. Jeong (1997), em contrapartida, apresenta um método para prever o limiar de *MSD* e de dano generalizado também em fuselagens afirmando que o problema do dano generalizado é a redução da resistência residual da estrutura abaixo da tolerante enquanto o limiar do *MSD* refere-se ao ponto na vida útil quando ocorre *linkup* por fadiga de duas trincas adjacentes ainda na tensão admissível. A metodologia apresentada

determina um valor de limiar a partir da análise da combinação de resultados de resistência residual e crescimento de trinca por fadiga avaliado por meio de testes de laboratório. Para o modelo os resultados para o limiar para dano de fadiga estiveram entre 32.000 e 40.000 ciclos e para o limiar de *MSD* cerca de 70.000 ciclos. Platz (2011) destaca que trincas por fadiga em cascas leves ou estruturas em painel podem levar a grandes falhas quando usadas para vedação ou transporte de carga. Em sua pesquisa o autor investiga a aplicação de sistemas piezoelétricos aplicados na superfície de um painel de alumínio fino trincado para reduzir a propagação das trincas por fadiga. Com a redução da propagação, as incertezas na resistência da estrutura, que permanecem mesmo quando a estrutura é usada sob condições de tolerância à dano como em fuselagem de aeronave, podem ser reduzidas. Os piezoelétricos atuam induzindo forças de compressão na ponta da trinca de modo a reduzir o FIT cíclico. Como resultado é destacado estatisticamente a partir de amostras experimentais que a taxa de propagação da trinca reduz significativamente.

Outras referências além das encontradas na base *Scopus* merecem destaque; em especial: a pesquisa de (KHAN et al., 2011) que analisou fadiga de baixo ciclo em placas de alumínio Al 2024-T351. A análise experimental foi realizada tanto para carregamento monotônico quanto cíclico a partir de tecnologia de imagens para detectar o local de início da trinca. Para demonstrar a validação do modelo adotado para problemas de engenharia complexos utiliza-se conjuntos de longarinas como utilizadas em fuselagem de avião. Breitbarth (2018), baseado em testes biaxiais com amostras dispostas em cruz, estudou trincas em seções de fuselagem entre a asa e a cauda de aeronave obtendo valores máximos de FIT's para peças metálicas. Os resultados experimentais foram comparados a partir de imagens digitais com os analíticos obtendo estudos de FIT's, Integral J, zona plástica e efeitos de fechamento de trinca. Por fim, as publicações de (SCHIJVE, 2007) e (BROT et al., 2008) revelaram que uma fuselagem sujeita a ensaio de compressão até o Estado Limite Último (ELU) e em seguida ensaiada à fadiga, os resultados à fadiga foram melhorados devido a tensões residuais de compressão. Estas tensões foram capazes de retardar o desenvolvimento das trincas.

A partir desta extensa análise para a descoberta do estado da arte das contribuições específicas para fadiga em fuselagem de aeronaves, a seguir apresenta-se toda a revisão bibliográfica que contribuíram para o desenvolvimento do método proposto.

CAPÍTULO 3 – EMBASAMENTO TEÓRICO

Este capítulo aborda a revisão bibliográfica que dá suporte ao desenvolvimento da metodologia adotada.

3.1 MECÂNICA DO CONTÍNUO

A mecânica do contínuo se baseia no campo de tensões e deformações gerados nos corpos quando submetidos a sollicitações. Estes campos têm valores significativos somente em uma região concentrada em torno do ponto de aplicação da sollicitação decrescendo rapidamente na medida em que se afasta desta região. Em (JOHNSON, 1985) é possível encontrar toda a base matemática que estabelece os valores destes campos de tensão e deformação em um corpo no regime elástico submetido à carregamento linear normal e cisalhante de acordo com a Figura 3.1. As cargas $p(x)$ e $q(x)$ agem na superfície do corpo na região $x = -b$ a $x = a$.

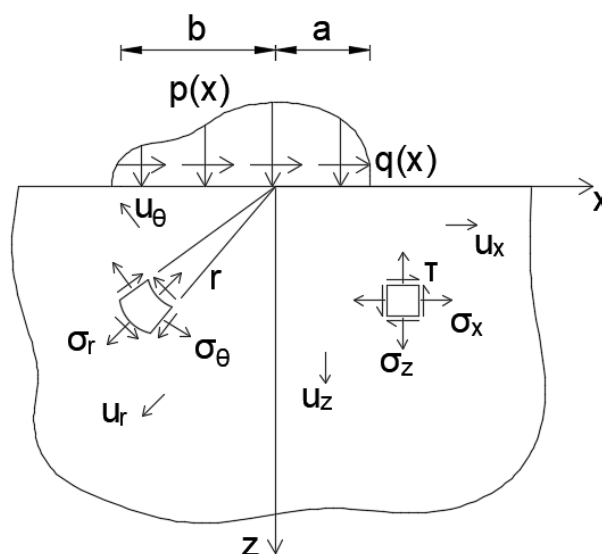


Figura 3.1 – Seção transversal de corpo submetido a carregamentos normal e cisalhante

A partir da teoria da elasticidade, (TIMOSHENKO e GOODIER, 1951) mostram que as componentes de tensão devem satisfazer as Equações (1) ao longo do sólido.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

E as correspondentes deformações devem corresponder às equações de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2)$$

Onde,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (3)$$

Sendo a Lei de Hooke relacionando tensões e deformações, escrita por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ (1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_z \} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ (1 - \nu^2) \sigma_z - \nu(1 + \nu) \sigma_x \} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (4)$$

Se a Função de Airy $\phi(x, z)$ é definida por:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad (5)$$

Então as equações de equilíbrio (1), compatibilidade (2) e Lei de Hooke (4) são satisfeitas, visto que $\phi(x, z)$ satisfaz a equação biarmônica:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (6)$$

Com as seguintes condições de contorno, em $z = 0$ fora da região carregada a superfície é livre de tensão, isto é:

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad x < -b \quad e \quad x > +a \quad (7)$$

E na região carregada:

$$\bar{\sigma}_z = -p(x) \quad e \quad \bar{\tau}_{xz} = -q(x), \quad -b < x < +a \quad (8)$$

Finalmente, em uma larga distância da região carregada [$x; z \rightarrow \infty$] da Figura 3.1 as tensões têm valores bem pequenos (σ_x, σ_z e $\tau_{xz} \rightarrow 0$).

É necessário conhecer duas das quatro condições de contorno $p(x)$, $q(x)$, $\bar{u}_x(x)$, $\bar{u}_z(x)$ para resolver os problemas do contínuo. Várias combinações destas condições podem ser obtidas, por exemplo: se a solicitação for do tipo puncionamento rígido o deslocamento normal $\bar{u}_z(x)$ tem valor conhecido e, se a interface é livre de atrito, a força cisalhante $q(x)$ é zero. Por outro lado, se a superfície adere à força puncionante sem escorregar na interface, o deslocamento tangencial $\bar{u}_x(x)$ é conhecido e $q(x)$ pode ser encontrado. Algumas condições de contorno especiais podem ocorrer na hipótese de deslizamento entre as superfícies: considerando o coeficiente de atrito μ , somente $\bar{u}_z(x)$ é conhecido enquanto a segunda condição de contorno é

fornecida pela relação $q(x) = \pm\mu p(x)$. Para facilitar a análise, em algumas circunstâncias é conveniente adotar coordenadas cilíndrica-polar. Considerando que a Tensão de Airy deve satisfazer a equação biarmônica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \quad (9)$$

As correspondentes equações para as componentes de tensão σ_r , σ_θ e $\tau_{r\theta}$, são definidas em (10).

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Já as componentes de deformações ε_r , ε_θ e $\gamma_{r\theta}$ são relacionadas com os deslocamentos u_r e u_θ a partir de (11).

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

Com essa introdução à teoria da elasticidade será discutido agora problemas particulares relevantes da teoria do contínuo.

3.1.1 Força normal concentrada

Neste primeiro problema investigam-se as tensões decorrentes de uma força normal concentrada P na origem do problema, conforme Figura 3.2. Este carregamento é similar ao produzido por uma faca pressionando uma superfície. A solução deste problema é dada pela Tensão de Airy da Equação (12).

$$\phi(r, \theta) = Ar\theta \sin\theta \quad (12)$$

Sendo A uma constante arbitrária.

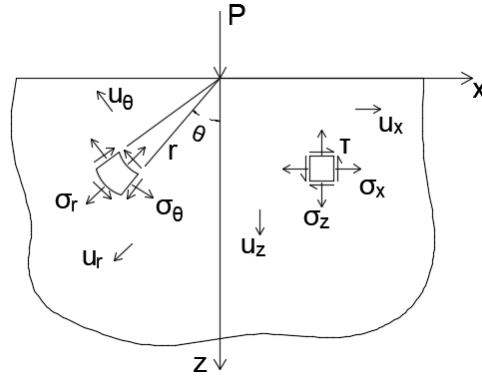


Figura 3.2 - Problema da carga normal concentrada

Com base nas Equações (10) as componentes de tensão resultam em:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2A \frac{\cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\quad (13)$$

Nota-se que as tensões reduzem de intensidade na proporção $1/r$. A constante A é encontrada igualando a componente vertical de tensão em um semicírculo de raio r à força aplicada P , tal que:

$$-P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \theta r d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2A \cos^2 \theta d\theta = A\pi \therefore A = -\frac{P}{\pi}\quad (14)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\quad (15)$$

Alterando o campo de tensões para coordenadas cartesianas, sendo $r^2 = x^2 + z^2$, $\cos \theta = \frac{z}{r}$ e $\sin \theta = \frac{x}{r}$, resulta em:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_z &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}\end{aligned}\quad (16)$$

3.1.2 Força cisalhante concentrada

Uma força concentrada Q que age sobre uma superfície de acordo com a Figura 3.3 produz um campo de tensão radial σ_r semelhante ao produzido pela força normal concentrada, porém

rotacionado 90°. Se θ for medido na linha de ação da força (na direção do eixo x) as tensões são as mesmas da força normal, Equações (15).

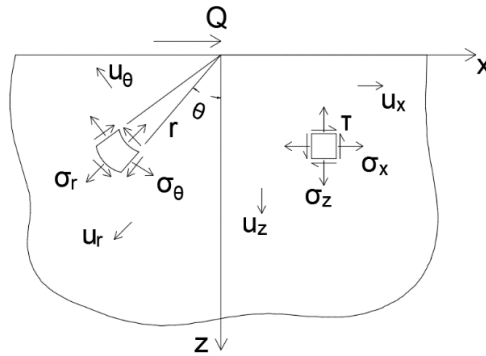


Figura 3.3 - Problema da carga cisalhante concentrada

Neste caso, no quadrante positivo x, a tensão radial σ_r é de compressão e no quadrante negativo, de tração. Em coordenadas cartesianas o campo de tensões é representado pelas Equações (17).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_z &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2z}{(x^2 + z^2)^2}\end{aligned}\quad (17)$$

3.1.3 Carga distribuída normal e cisalhante

Geralmente, a componente de tensão cisalhante é resultado do atrito entre os corpos devido à tensão distribuída normal. No regime elástico, um corpo solicitado na região $-a < x < b$ por uma carga normal $p(x)$ e uma cisalhante $q(x)$ distribuída de maneira arbitrária conforme Figura 3.4, o campo de tensões em um ponto A é encontrado a partir da integração das tensões referentes a carga concentradas normal e cisalhante (Equações (16) e (17), respectivamente) considerando as solicitações em uma área infinitesimal ds , com posição s variando entre os limites $-a < s < b$. As tensões em A são representadas nas Equações (18).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds \\ \sigma_y &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds \\ \tau_{xy} &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2y}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds\end{aligned}\quad (18)$$

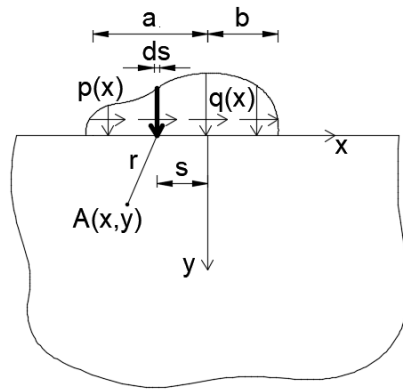


Figura 3.4 - Problema do carregamento distribuído normal e cisalhante

3.1.3.1 Carga distribuída normal uniforme

O exemplo mais simples de solicitação distribuída é o caso de somente carga normal uniforme em uma região $-a < x < a$ - Figura 3.5 (a) - e ausência de carga cisalhante. Neste caso, avaliando as integrais da Equação (18), tem-se o seguinte campo de tensões:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{p}{2\pi} \{2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)\} \\ \sigma_y &= -\frac{p}{2\pi} \{2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{p}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)\end{aligned}\quad (19)$$

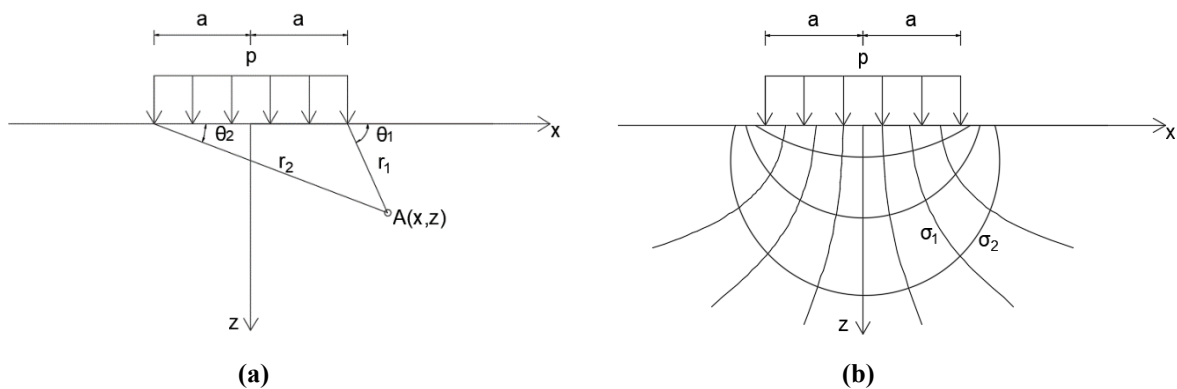


Figura 3.5 - (a) Tensões para carga normal distribuída uniforme (b) linha das tensões principais

3.1.3.2 Carga distribuída cisalhante uniforme

As tensões devido a carregamento cisalhante uniformemente distribuído em uma região $-a < x < a$ podem ser encontradas da mesma forma da integração das Equações (18) considerando $p(x) = 0$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{q}{2\pi} \left\{ 4 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{q}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{2\pi} \{ 2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \}\end{aligned}\tag{20}$$

3.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é a teoria básica da Fratura originada por Griffith (1921, 1924) e complementada por Irwin (1956, 1957) e Rice (1967, 1968). Esta é uma teoria sofisticada que lida com trincas em corpos elásticos. Desse modo, trata-se de uma situação ideal em que todo o material é elástico exceto em uma pequena região (um ponto) na ponta da trinca. De fato, as tensões próximas à ponta da trinca são tão altas que algum tipo de plasticidade deve ser desenvolvido, porém, tal região é tão pequena de forma que no limite, a perturbação é desprezível e os resultados obtidos da MFLE são satisfatórios (BAZANT et al., 1998).

Hutchinson (2003) na *ASME Timoshenko medal acceptance speech* afirma:

... I think I am correct in saying that after fifty years of measuring toughness and fatigue crack growth rates experimentally, there is probably not a single instance where a critical application has made use of toughness that has been predicted theoretically. You have to give the earlier developers a great deal of credit for understanding this from the start – I'll single out George Irwin and Paul Paris as two of our many colleagues who had the great insight to set this into motion. Paris's early contribution was not the Paris law ... Along with Irwin, his contribution was the recognition that a truly esoteric quantity from elasticity theory, the stress intensity factor, could be used to develop a framework to measure crack growth and predict structural integrity...

Existem três principais modos de sollicitação da trinca, como pode ser observado na Figura 3.6: o modo I que está relacionado à abertura da trinca (as superfícies da trinca são tracionadas), o modo II que está relacionado ao cisalhamento dentro do plano (deslizamento) e o modo III que está relacionado ao cisalhamento fora do plano (rasgamento).

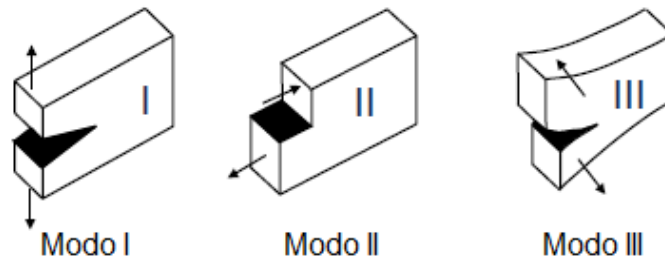


Figura 3.6 - Modos de fratura
Fonte: adaptado de Anderson (2005)

O termo modo misto implica na presença simultânea de pelo menos dois modos de fratura. Ou seja, tensões tanto no plano normal quanto cisalhante na região imediatamente à frente da fratura. Dessa forma, a ponta da trinca bidimensional possui tanto componentes de modo I quanto de modo II, como pode ser visto na Figura 3.7.

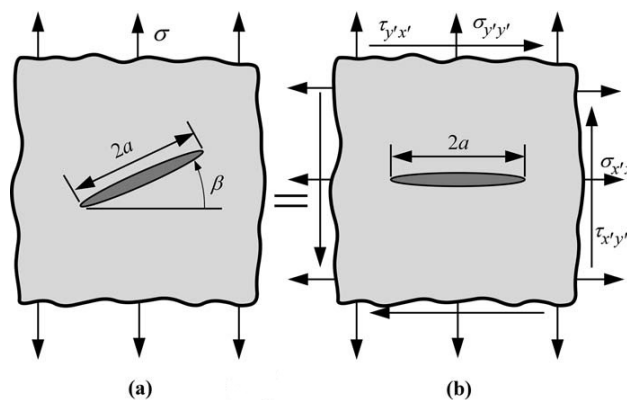


Figura 3.7 - Modo misto de fraturamento
Fonte: Anderson (2005)

Problemas em modo misto ocorrem na maioria das estruturas da engenharia com a presença de trincas, uma vez que estas não são perfeitamente homogêneas em sua microestrutura apresentando vazios e geralmente estão sujeitas a carregamentos multiaxiais e mudança brusca na intensidade de carregamento. Uma falha em uma aeronave estará sujeita a frequentes mudanças na direção do carregamento, por exemplo.

3.2.1 Tensões na ponta da trinca

O Fator de Intensidade de Tensão (FIT) é o parâmetro que define a amplitude da singularidade na ponta da trinca. Isto é, as tensões próximas a ponta da trinca aumentam na proporção K . A Figura 3.8 (b) ilustra um FIT maior que em 3.8 (a). Além disso, o FIT define as condições na ponta da trinca; se K é conhecido, é possível obter todos os componentes de tensão, deformação e deslocamento. Este é o motivo que torna o FIT como um dos conceitos mais importantes na Mecânica da Fratura. Pode-se definir K como:

$$K = \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \sigma_y |_{\theta=0} \cdot \sqrt{2\pi\delta} \quad (21)$$

Onde δ é a distância medida da ponta da trinca e o limite é tomado do lado (+).

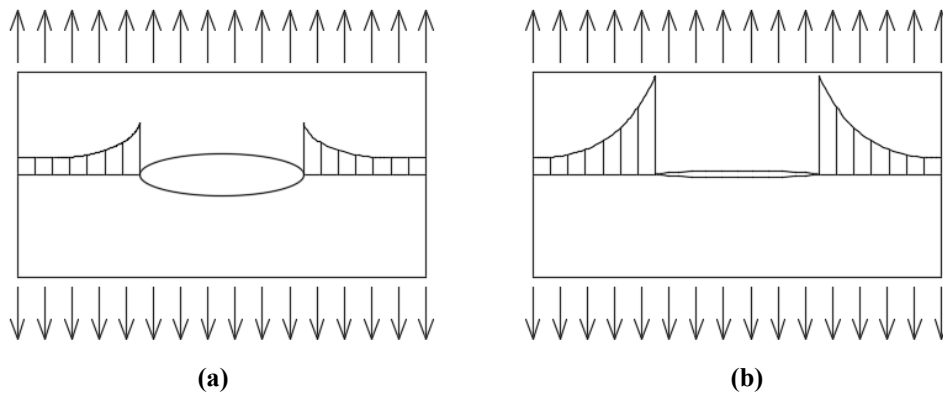


Figura 3.8 - Tensões na ponta da trinca, FIT da trinca (b) maior que (a)

Aplicando a definição de K para a tensão σ_y no problema de trinca central (Figura 3.9) encontra-se para esta geometria:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \quad (22)$$

onde K é o FIT, a é o tamanho da trinca, σ a tensão aplicada e $F\left(\frac{a}{W}\right)$ uma função que depende do tamanho da trinca e da geometria da placa.

À medida que a/W se aproxima de zero (isto é, uma trinca em uma placa de largura infinita) o valor de F se aproxima de 1. Para componentes de dimensões finitas, são utilizadas equações matemáticas para calcular $F(a/W)$.

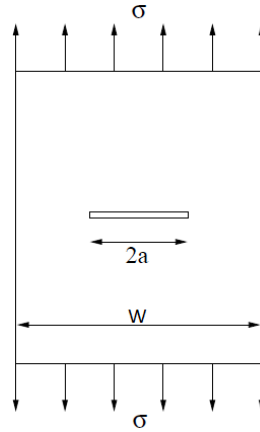


Figura 3.9 - Placa com trinca central

3.2.2 O método generalizado de Westergaard

Este método introduzido por Westergaard em 1939 aplica o método semi-inverso para a função de tensão de Airy expressa no domínio complexo. A introdução de variáveis complexas na formulação de problemas de elasticidade bidimensional oferece significantes vantagens, pois em contraste com a teoria de função real, onde a escolha de funções que satisfaçam a equação biarmônica é difícil de se obter, a formulação da teoria da elasticidade em variáveis complexas assegura que todas as funções que sejam analíticas são potenciais funções de tensão de Airy.

Embora o número de funções analíticas seja infinito, nem todas as funções complexas são analíticas. Uma função é analítica se, e somente se satisfizer as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re}Z}{\partial y} &= -\frac{\partial \text{Im}Z}{\partial x} = -\text{Im}Z' \\ \frac{\partial \text{Im}Z}{\partial y} &= \frac{\partial \text{Re}Z}{\partial x} = \text{Re}Z' \end{aligned} \quad (23)$$

Onde Z representa uma função do tipo complexa.

Considerando uma função de tensão de Airy da forma:

$$F(z) = \text{Re}\tilde{Z}(z) + y\text{Im}\tilde{Z}(z) \quad (24)$$

Em que

$$\frac{d\tilde{Z}}{dz} = \tilde{Z} \quad e \quad \frac{d\tilde{Z}}{dz} = Z$$

Os componentes de tensão cartesianas são obtidos através da segunda derivada da função de Airy com respeito às variáveis reais x e y . Estas relações ainda são válidas mesmo quando a

função de tensão é expressa em termos da coordenada complexa z . Utilizando as relações de Cauchy-Riemann obtém-se a primeira derivada de $F(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= Re\tilde{Z} + yImZ \\ \frac{dF}{dy} &= -Im\tilde{Z} + yReZ + Im\tilde{Z} = yReZ\end{aligned}\quad (25)$$

Repetindo o processo para a segunda derivada, obtém-se as tensões cartesianas:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{d^2F}{dx^2} = ReZ + yImZ' \\ \sigma_x &= \frac{d^2F}{dy^2} = ReZ - yImZ' \\ \tau_{xy} &= -\frac{d^2F}{dxdy} = -yReZ'\end{aligned}\quad (26)$$

Considerando a trinca ao longo do eixo x conforme Figura 3.10, a parte imaginária torna-se nula e as tensões resultantes tornam-se as da Equação (27).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= ReZ \\ \sigma_y &= ReZ \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\quad (27)$$

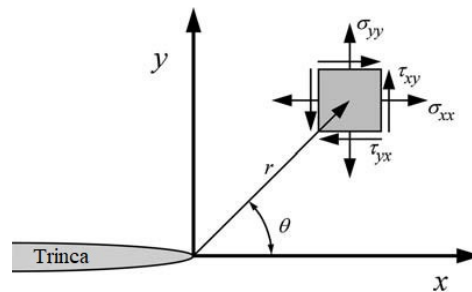


Figura 3.10 - Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.

Fonte: Anderson (2005)

O campo de tensões nas proximidades da trinca é definido pelo conjunto de equações apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Campo de tensões próximo à trinca

Tensão	Modo I	Modo II	Modo III
σ_x	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	0
σ_y	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$	0

σ_z	0 (EPT) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (EPD)	0 (EPT) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (EPD)	0
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$	0
τ_{xz}	0	0	$-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$
τ_{yz}	0	0	$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$

Nota: ν – Coeficiente de Poisson; EPT – Estado Plano de Tensão; EPD - Estado Plano de Deformação

Já o campo de deslocamento nas proximidades da trinca é representado pelo conjunto de equações apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Campo de deslocamentos próximo à trinca

Desl.	Modo I	Modo II	Modo III
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$	0
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$	0
u_z	0	0	$\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$

Nota: μ – módulo de cisalhamento; $\kappa = 3 - 4\nu$ (EPD) e $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (EPT)

Observa-se então que conhecendo os valores dos FIT's, é possível determinar tanto as tensões quanto os deslocamentos na ponta de uma trinca. Na literatura pode-se obter os valores dos FIT's para diversos casos já testados numericamente e experimentalmente, porém a maioria dessas soluções são para geometrias simples e/ou bem específicas (EWALDS, 1984; BROEK, 1988; JANSSEN et al., 2002).

Existe um valor de FIT crítico denominado Tenacidade à Fratura do material K_c , de forma que se o valor de K ultrapassar o valor de K_c haverá fratura frágil. Realizando uma analogia com a resistência dos materiais, assim como não se deseja o escoamento do material, é preciso manter as tensões abaixo da tensão de escoamento.

3.2.3 Compliance

A *compliance* é a grandeza que representa o inverso da rigidez. Matematicamente é determinada por:

$$C = \frac{\delta}{P} \quad (28)$$

sendo δ o deslocamento proveniente de uma carga P aplicada. Na Figura 3.11, $\delta = \Delta/2$.

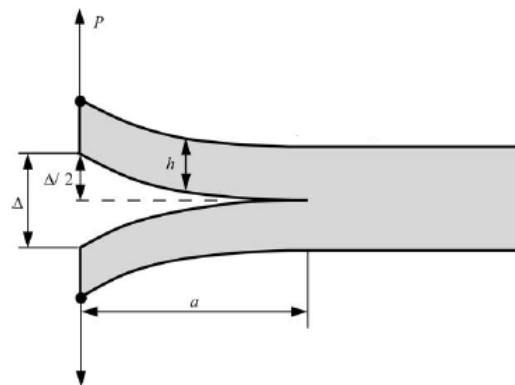


Figura 3.11 - Double cantilever beam (DCB) espécime solicitada à tração

Fonte: Anderson (2005)

Aplicando este conceito em estruturas tem-se que a maioria das estruturas estão sujeitas à condição entre *load control* e *pure displacement control*. A situação intermediária pode ser esquematicamente representada por uma mola em série com uma estrutura entalhada (Figura 3.12). Fixando um deslocamento conhecido Δ_T , a mola representa a *compliance* do sistema C_M . A condição de *pure displacement control* corresponde à uma rigidez infinita, onde $C_M = 0$. Já a condição de *load control* implica uma mola sem rigidez e *compliance* infinita, $C_M = \infty$.

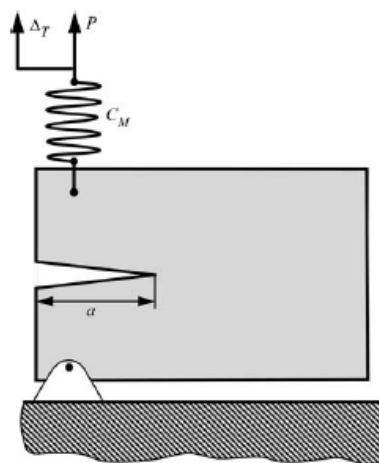


Figura 3.12 - Medição da *compliance* em estrutura entalhada

Fonte: Anderson (2005)

Sendo a *compliance* finita, o ponto de instabilidade de fratura situa-se entre as condições de *load control* e *pure displacement control*.

3.2.4 Energia de fratura

De acordo com a primeira lei da termodinâmica, quando um sistema vai para um estado de não equilíbrio, há uma redução na energia. Uma trinca pode formar (ou uma trinca existente pode crescer) somente se tal processo causar a redução na energia total ou permanecer constante (ANDERSON, 2005). Assim, as condições críticas para fratura podem ser definidas como o ponto onde o crescimento da trinca ocorre sob condições de equilíbrio, sem mudança na energia total.

Considere a placa da Figura 3.9, com uma trinca central de tamanho $2a$ submetida à tensão σ . Assumindo a placa sendo infinita, ou seja $w \gg 2a$, para que haja o crescimento da trinca, deve haver energia potencial suficiente para superar a energia de superfície do material. O balanço energético de Griffith para um crescimento da trinca de área dA , sob condições de equilíbrio pode ser expressa como:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (29)$$

ou

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (30)$$

Onde E é a energia total, Π a energia potencial fornecida pela energia de deformação interna e forças externas e W_s o trabalho requerido para criar novas superfícies.

Para o problema de trinca central, Griffith usou a análise de tensão de Inglis (1913) para demonstrar que:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (31)$$

Onde Π_0 é a energia potencial interna de uma placa sem trinca, σ a tensão aplicada, a o tamanho inicial a trinca, B a espessura da placa e E o módulo de elasticidade.

Para a formação da trinca requer a criação de duas superfícies, portanto, W_s é dado por:

$$W_s = 2 \times (2aB\gamma_s) = 4aB\gamma_s \quad (32)$$

sendo $2aB$ a área de uma superfície e γ_s a energia elástica de superfície do material. Tem-se então:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (33)$$

e

$$\frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (34)$$

Igualando as Equações (33) e (34), tem-se a tensão resistente de fratura dada por:

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a}\right)^{1/2} \quad (35)$$

A Equação (35) é válida somente para sólidos idealmente frágeis. Assim, Griffith obteve uma boa aproximação desta equação a dados experimentais de resistência de fratura de vidro, mas subestima a resistência de metais. O modelo generalizado de Griffith para qualquer tipo de energia de dissipação é dado por:

$$\sigma_f = \left(\frac{2Ew_f}{\pi a}\right)^{1/2} \quad (36)$$

$$w_f = \gamma_s + \gamma_p$$

sendo γ_p a parcela de dissipação de energia plástica que ocorre na ponta da trinca em sólidos dúcteis (metais). Com isso, w_f é a energia de fratura que pode incluir plasticidade, viscoelasticidade ou efeitos viscoplásticos, dependendo do material.

Embora a adição do novo termo na equação de Griffith possibilitasse o estudo em sólidos dúcteis, o método ainda possuía limitações para o estudo de instabilidade de uma trinca ideal. O método também apresentava problemas em várias situações práticas, especialmente em situações com o crescimento lento estável de uma trinca como, por exemplo, em fadiga e no crescimento de trinca em meios corrosivos.

3.2.5 Taxa de dissipação de energia (*Energy Release Rate*)

Irwin (1956) propôs uma aproximação energética para fratura definida como taxa de dissipação de energia G , que é uma medida da energia necessária para um incremento de extensão de trinca:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (37)$$

A propagação da trinca ocorre quando G alcança o valor crítico G_c :

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (38)$$

sendo G_c a medida de tenacidade à fratura do material.

Assim, os dois parâmetros que descrevem o comportamento da trinca foram introduzidos: a taxa de dissipação de energia G e o Fator de Intensidade de Tensão K . Enquanto o primeiro quantifica a mudança na energia potencial necessária para um incremento de trinca, o segundo caracteriza as tensões, deformações, e deslocamentos próximos à ponta da trinca. Assim, taxa de dissipação de energia descreve o comportamento global e o FIT é um parâmetro local. Para material linear elástico K e G são relacionados por:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}; G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}; G_{III} = \frac{K_{III}^2}{E'} \quad (39)$$

com os subscritos indicando o modo de fratura, e $E' = E$ para estado plano de tensão e $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ para estado plano de deformação.

3.2.6 Instabilidade e curva R

Ocorre crescimento da trinca quando $G = G_c = 2w_f$, porém tal crescimento deve ser estável ou instável. Para ilustrar estabilidade ou instabilidade, é conveniente substituir $2w_f$ por R , a resistência do material para o tamanho da trinca. O gráfico R vs. *tamanho da trinca* é chamado curva de resistência ou curva R.

Considerando uma placa com uma trinca inicial $2a$ (Figura 3.9). Em uma tensão σ constante, a taxa de dissipação de energia varia linearmente com o tamanho da trinca conforme Equação (37). A Figura 3.13 mostra Curva R para dois tipos de materiais.

No primeiro caso (a) tem-se a curva R plana, onde a resistência do material é constante com o crescimento da trinca. Quando a tensão vale σ_1 , o crescimento é estável, até atingir o valor σ_2 em que a tensão aumenta com o crescimento da trinca, porém a resistência do material permanece constante, ocasionando propagação instável.

No segundo caso (b) tem-se um material com a curva R crescente. A trinca cresce uma pequena quantidade quando atinge o valor σ_2 , mas para de crescer pois quando a tensão é fixada em σ_2

esta aumenta em uma taxa menor que R. Crescimento de trinca estável continua até atingir o valor σ_4 , quando finalmente a tensão é tangente à curva R e a partir daí a inclinação é maior que a da curva R.

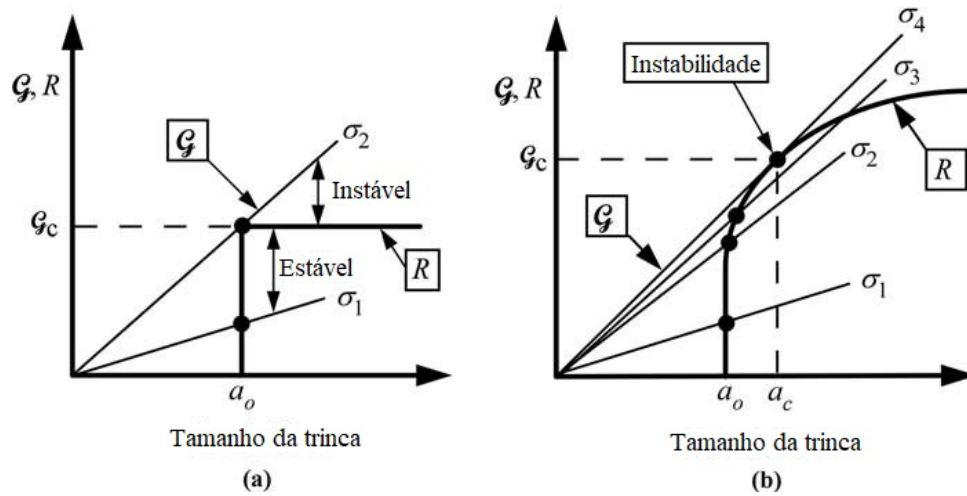


Figura 3.13 - Curvas R (a) plana, (b) crescente

Fonte: Anderson (2005)

Condições para crescimento de trinca estável:

$$G = R$$

$$\frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da} \quad (40)$$

Crescimento de trinca instável ocorre quando

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \quad (41)$$

3.2.7 Integral J

Enquanto o FIT e taxa de dissipação de energia são parâmetros para análise de materiais lineares, a Integral J disseminou para análise de materiais não lineares. Com isso Rice (1968) ampliou a base da Mecânica da Fratura para além dos limites da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

A utilização dos conceitos da MFLE apresenta resultados satisfatórios quando a Zona de Plasticidade (ZP) na ponta da trinca é relativamente pequena se comparada com as dimensões da peça estudada, podendo ser desconsiderada nas análises. Quando a ZP apresenta tamanho considerável, os conceitos da MFLE não se aplicam, uma vez que há deformações plásticas

consideráveis atuando, sendo necessária a aplicação de outras metodologias para descrever o campo de tensões nas redondezas da trinca.

A Figura 3.14 mostra o comportamento da curva tensão-deformação de materiais elastoplásticos e elástico não-linear. Na fase de carregamento, o comportamento é idêntico, mas na fase de descarregamento estes apresentam respostas diferentes. O material elastoplástico segue um caminho linear com a inclinação igual ao Módulo de Elasticidade, enquanto o material elástico não linear segue o mesmo caminho da fase de carregamento.

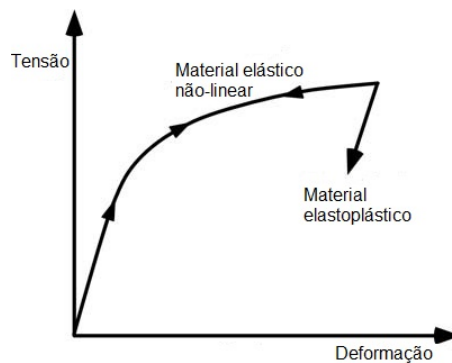


Figura 3.14 - Comparação de comportamento de materiais elastoplásticos e elástico não-linear

Fonte: adaptado de Anderson (2005)

Rice (1968) aplicou deformação plástica para análise de trincas em um material não-linear. Ele mostrou que a Integral J poderia ser escrita como uma integral independente do caminho - *path independent*. Hutchison (1968) mostrou que J também pode caracterizar tensões e deformações na ponta da trinca em materiais não-lineares. Com isso, a Integral J pode tanto ser visto como parâmetro de energia quanto parâmetro de intensidade de tensão. Rice (1968) ainda mostrou que o valor da Integral J é equivalente à taxa de dissipação de energia em um material elástico não linear. Considerando um caminho anti-horário (Γ) em volta da ponta da trinca, conforme Figura 3.15. A Integral J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{du_i}{dx} ds \right) \quad (42)$$

onde, w = densidade de energia de deformação, T_i = componentes do vetor tração, u_i = componentes do vetor deslocamento, ds = incremento de comprimento ao longo do caminho Γ .

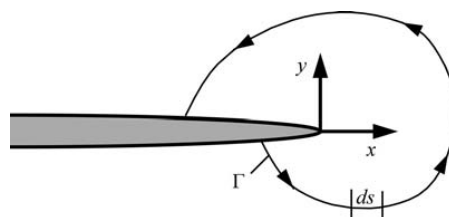


Figura 3.15 - Caminho arbitrário em volta da ponta da trinca

Fonte: Anderson (2005)

3.2.8 Direção de propagação de trinca

Um dos métodos mais utilizados para definir a direção de propagação de trinca é o critério da Máxima Tensão Circunferencial (ERDOGAN e SIH, 1963). Este critério considera que a direção de propagação da trinca é perpendicular ao plano da máxima tensão normal. Sabe-se que as tensões normais máxima e mínima ocorrem em planos onde a tensão cisalhante é nula. Pelo Princípio da Superposição Linear das equações dos Fatores de Intensidade de Tensão dos modos I e II apresentadas na Tabela 3.1, no plano cartesiano, tem-se:

$$\sigma_{xx}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (43)$$

$$\sigma_{yy}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (44)$$

$$\tau_{xy}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (45)$$

Reescrevendo as expressões para coordenadas polares, tem-se:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2}\right) \quad (46)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta\right) \quad (47)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)\right) \quad (48)$$

O critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC) estabelece que a trinca se propagará no plano perpendicular no qual σ_θ é máximo. Para isso, a condição que a tensão $\tau_{r\theta} = 0$ deve ser aplicada:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)\right) = 0 \quad (49)$$

Assim, há duas soluções:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0 \rightarrow \theta = \pm\pi \quad (50)$$

$$\left(K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)\right) = 0 \quad (51)$$

Separando os modos I e II da Equação (51), temos para o modo I ($K_{II} = 0$):

$$K_I \sin \theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0 \quad (52)$$

Para o modo II ($K_I = 0$):

$$K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \rightarrow (3 \cos \theta - 1) = 0 \rightarrow \theta = \pm 70,5^\circ \quad (53)$$

Para o caso de modo misto I e II, da Equação (51), obtém-se:

$$\theta_t = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (54)$$

Com isso, é possível encontrar dois valores para a direção de propagação, geralmente descarta-se a solução de maior valor pois foge do sentido físico na análise de propagação. Os sinais das Equações (53) e (54) são dependentes do valor de K_{II} . Se K_{II} é positivo, então o valor de θ_t é negativo. Se K_{II} é negativo, então o valor de θ_t é positivo.

3.3 FADIGA

A fadiga é caracterizada por um processo de carregamento cíclico que causa progressivos danos cumulativos estruturais internos. Após certo número de ciclos as fissuras podem alcançar comprimentos críticos que podem tornar a estrutura instável e em alguns casos levar ao colapso. Segundo Bazant (1998) o crescimento irreversível da trinca é atribuído ao comportamento inelástico do material na zona de singularidade gerando um dano acumulado que implica no endurecimento do material na vizinhança desta zona. Assim, o efeito de carregamento cíclico tem a característica de produzir a falha de um elemento com uma tensão inferior à necessária para o mesmo elemento sob carregamento estático.

3.3.1 Tipos de comportamento a fadiga

Cargas de fadiga são divididos em duas categorias: baixo ciclo de carregamento e alto ciclo de carregamento. A principal diferença entre eles é a extensão da deformação plástica do material, Liu (2008).

- Ciclo baixo de carregamento

A carga é aplicada com poucas repetições, mas com altas tensões que excedem o limite elástico do material, gerando grandes deformações plásticas em que a relação tensão-deformação não é

mais proporcional. Por exemplo, a flexão de um clipe de papel até a ruptura. Nas estruturas, este tipo de carregamento é gerado por carregamentos sísmicos ou altas cargas de vento os quais são considerados no Estado Limite Último ou Especiais.

- Ciclo alto de carregamento

A carga é aplicada em um grande número de ciclos, mas as tensões são menores que as correspondentes ao limite elástico do material, mantendo a relação das tensões e deformações linear. Embora a estrutura como um todo ainda esteja no regime elástico, deformações plásticas infinitesimais (associadas com micro trincas internas) acumularão gradualmente com o crescimento do número de ciclos. Estas mudanças são responsáveis por causar degeneração das propriedades mecânicas do material, o que leva a falha mesmo quando as cargas aplicadas são menores que a resistência estática, Liu (2008).

A Tabela 3.3 ilustra alguns exemplos de estruturas classificando de acordo com os ciclos usuais de carregamentos.

Tabela 3.3 - Tipos de carregamento à fadiga (ciclos)

Carregamento baixo ciclo			Carregamento de alto ciclo				Carregamento de super-alto ciclo		
Regime inelástico			Regime elástico						
Estado Limite Último (ELU)			Estado Limite de Serviço (ELS)						
10 ⁰	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸	10 ⁹
Estruturas sujeitas a terremoto			Pavimentos de aeroporto e pontes		Rodovias e trilhos		Estruturas de trânsito rápido em massa		Estruturas marítimas

Fonte: adaptado de Liu et al. (2008)

3.3.2 Estágios de fadiga

- Estágio I: Inicia a fissuração a nível “micro” devido as imperfeições do material sem variações consideráveis nas tensões. Na Figura 3.16, o valor de ΔK_{th} marca o ponto no qual abaixo desse valor não há propagação de trinca.
- Estágio II: Formação de uma fissura “macro” que apresenta propagação estável da trinca, definido pela Lei de Paris.
- Estágio III: Os valores dos FIT's são próximos ao fator crítico K_c , resultando numa propagação instável da trinca até ocasionar a fratura.

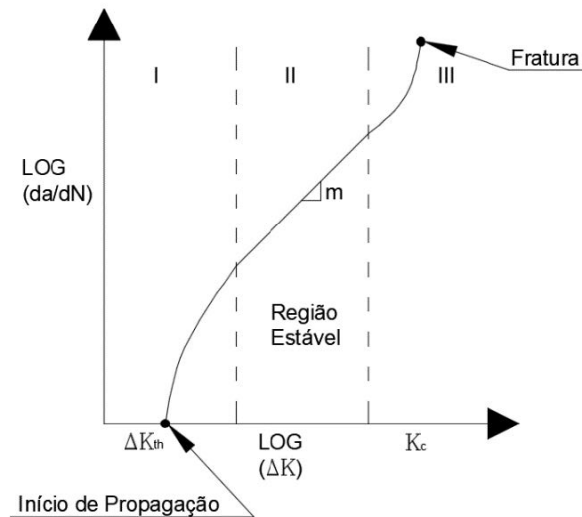


Figura 3.16 - Estágios de fadiga
Fonte: adaptado de Sanford (2002)

3.3.3 Lei de Paris-Erdogan

Esta lei relaciona a taxa de propagação da trinca (da/dN) com a variação do Fator de Intensidade de Tensão (ΔK):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (55)$$

onde C e m são constantes do material, determinadas experimentalmente, a é o tamanho da trinca, N é o número de ciclos de carregamento e ΔK a variação do Fator de Intensidade de Tensão.

Esta lei é válida somente no Estágio 2 de Fadiga, ou seja, estágio com crescimento de trinca estável. Para isso, usualmente adota-se uma trinca inicial de tamanho a_0 geralmente na borda ou superfície do elemento de forma a haver concentração de tensão nesta área.

Usando Equação (55), a condição para comprimento de trinca aceitável a_{ac} é determinado por:

$$N = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_{ac}} \frac{da}{\Delta K^m} > N_{tot} \quad (56)$$

onde N é o número de ciclos necessários para aumentar a trinca do tamanho inicial a_0 até o comprimento de trinca aceitável a_{ac} e N_{tot} é o número de ciclos durante toda vida útil.

3.3.4 Tolerância ao dano

A análise do crescimento de trincas pode ser feita de duas formas: por meio de um procedimento analítico ou utilizando *softwares*. A Figura 3.17 ilustra uma seqüência para análise de crescimento de trincas de acordo com o número de ciclos.

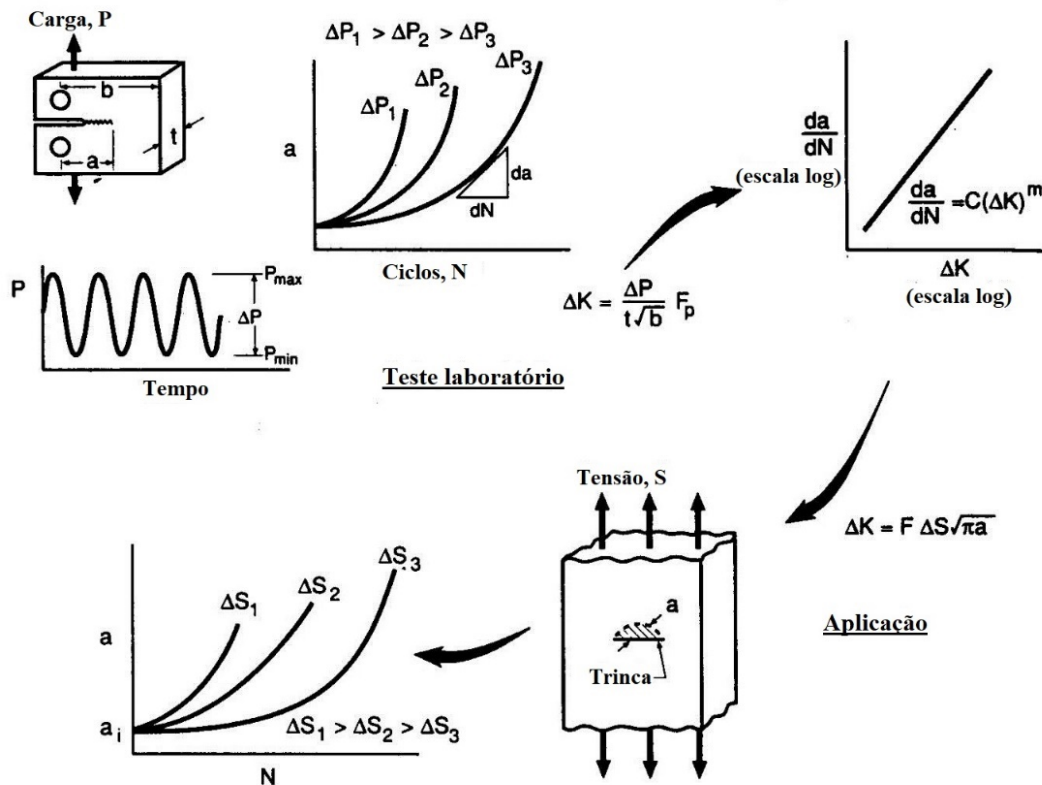


Figura 3.17 - Procedimento para análise do crescimento de trinca

Fonte: Baptista (2016)

A Figura 3.18 mostra esquematicamente a evolução do dano e a correspondente diminuição da resistência residual. Em aeronaves tolerantes ao dano, o intervalo entre inspeções é definido baseado no comprimento de trinca aceitável. A partir do tamanho de trinca inicial possível de ser detectado por métodos convencionais, é calculado o número de ciclos até atingir um comprimento crítico. Este período de tempo (número de ciclos) aplicado um fator de segurança é definido como o intervalo de inspeção a ser adotado representado matematicamente por:

$$\frac{N_c - N_d}{FS} \quad (57)$$

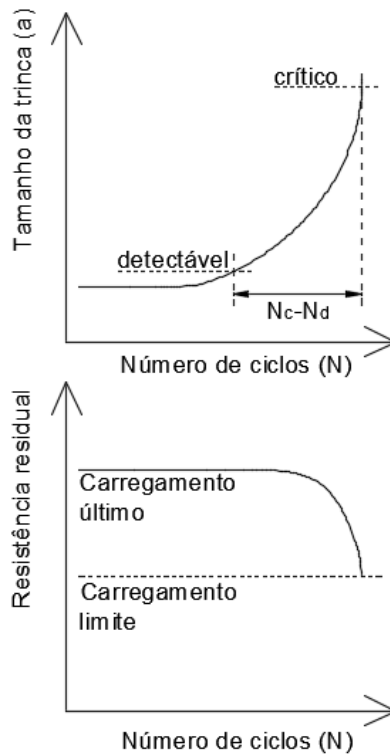


Figura 3.18 – Diagrama de tolerância ao dano de uma estrutura típica de aeronave

Fonte: Castro (2012)

Quando ocorre a iniciação de trincas em mais de uma zona (MSD) a tolerância é reduzida e os intervalos de inspeções devem ser reformulados respeitando menor período de tempo conforme mostrado na Figura 3.19.

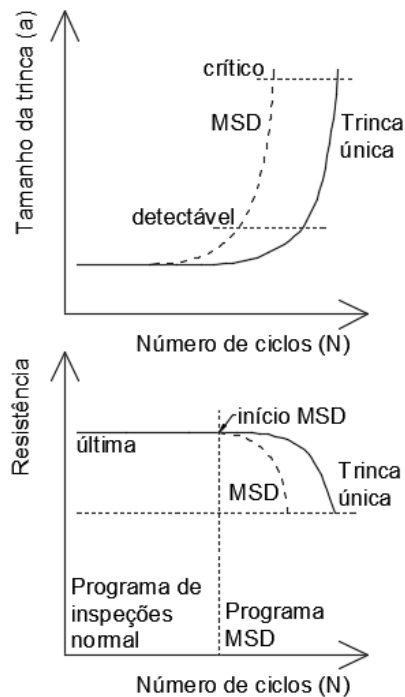


Figura 3.19 - Diagrama de tolerância no caso de *multiple site damage* (MSD)

Fonte: Castro (2012)

3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Se por um lado o Método dos Elementos Finitos (MEF) é provavelmente a principal técnica utilizada em análises de engenharia, destacando-se devido a sua grande versatilidade, a sua qualidade de resultados e a sua relativa facilidade de implementação (BATHE, 1976), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma alternativa complementar ao MEF, sendo indicado particularmente em casos especiais que requerem melhor interpretação e representação dos dados em problemas com concentração de tensões ou onde o domínio é infinito ou semi-infinito, por exemplo (BREBBIA, 1978).

O MEC consiste em transformar a equação diferencial parcial, que representa o problema e suas incógnitas em uma equação integral que relaciona apenas os valores de contorno na busca de sua solução numérica. O cálculo dos valores das tensões ou deslocamentos nos pontos internos é feito de forma direta a partir dos dados encontrados primeiramente no contorno do corpo. Uma vez que todas as aproximações numéricas se dão apenas no contorno, a dimensionalidade do problema é reduzida em um, o que permite trabalhar com um sistema de equações bem menor do que aqueles obtidos com métodos diferenciais como MEF (BREBBIA, 1978).

Para aplicação do MEC, discretiza-se o contorno do objeto em estudo em segmentos chamados de elementos. Quando este elemento possui apenas um nó, é dito como elemento constante e suas incógnitas também são constantes sobre o elemento. Já os elementos de contorno linear têm dois nós localizados nas extremidades do elemento, sendo suas incógnitas variando linearmente. Para a modelagem de geometrias curvas utilizam-se os elementos quadráticos, os quais possuem três nós e tem suas incógnitas variando sobre uma função de segundo grau ou quadrática. Estes elementos estão representados na Figura 3.20.

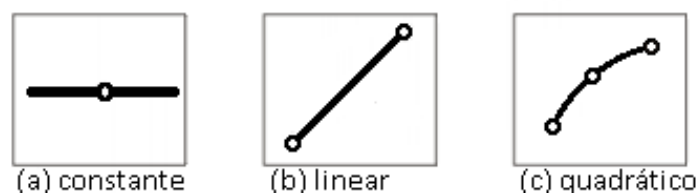


Figura 3.20 - Tipos de elementos de contorno

Fonte: Delgado Neto (2017)

Na Figura 3.21 podemos ver um exemplo de sólido discretizado por elementos de contorno.

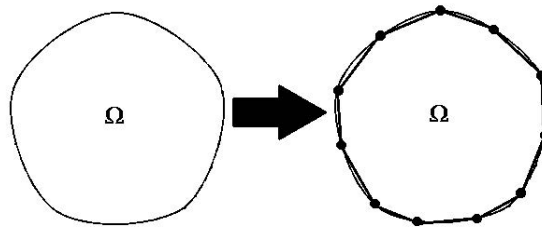


Figura 3.21 - Discretização do sólido em elementos de contorno

Os deslocamentos e forças de superfícies são representados em uma série de valores nodais. Os valores fora dos nós são obtidos através de funções de interpolação sobre cada elemento de contorno. Os deslocamentos e forças de superfície são representados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Phi^T \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p} &= \Phi^T \mathbf{p}^n \end{aligned} \quad (58)$$

onde, n é o número de nós do contorno e Φ as equações de interpolação.

Ingraffea (1983) foi um dos primeiros a tentar aplicar a técnica dos elementos de contorno a problemas de análise incremental de extensão de trinca. Entretanto, a solução geral não pode ser alcançada com a aplicação direta pois a coincidência das superfícies da trinca geram um sistema de equações singular. As equações para um ponto em um lado da trinca são idênticas ao do outro ponto com mesma coordenada no outro lado visto que a mesma integral é aplicada com o mesmo caminho em ambos os pontos. Dentre as técnicas aplicadas para contornar este problema estão a divisão por subregiões (BLANDFORD, INGRAFFEA e LIGGETT, 1981) que modela a estrutura em contornos artificiais que conecta as trincas ao contorno de tal maneira que o domínio é dividido em subregiões sem trincas e o Método dos Elementos de Contorno Dual, (PORTELA, ALIABADI e ROOKE, 1992).

3.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

Técnica proposta por Portela et al. (1992) para contornar o problema de trincas na utilização do MEC. Esta é baseada em duas equações integrais distintas em cada face da trinca (equação de deslocamento e equação de tração). Desta forma, a degeneração do sistema de equações gerado pelo MEC não é mais presente e a necessidade de remalhamento na vizinhança da ponta da trinca não é necessária, gerando apenas novas linhas e colunas à matriz já existente.

3.5.1 Integral de contorno de deslocamento

Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deslocamentos em um ponto do contorno x' , as componentes de deslocamento da integral de contorno \mathbf{u}_i são dadas por:

$$\mathbf{c}_{ij}(x')\mathbf{u}_i(x') + CPV \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(x', x)\mathbf{u}_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}_{ij}(x', x)\mathbf{t}_j(x) d\Gamma(x) \quad (59)$$

sendo i e j componentes cartesianas; $\mathbf{T}_{ij}(x', x)$ e $\mathbf{U}_{ij}(x', x)$ as soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento, respectivamente, $CPV \int_{\Gamma}$ o valor principal da integral de Cauchy e $\mathbf{c}_{ij}(x')$ coeficientes geométricos dado por $\delta_{ij}/2$ para contorno suave no ponto x' , sendo δ_{ij} o Delta de Kronecker.

As integrais na Equação (65) tornam-se regulares para r entre o ponto fonte x' e o ponto campo x não nulo. Quando r tende a zero, as soluções fundamentais apresentam forte singularidade proporcional a $1/r$ para \mathbf{T}_{ij} e singularidade fraca proporcional a $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ para \mathbf{U}_{ij} .

3.5.2 Integral de contorno de força de superfície

Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deslocamentos e forças de superfícies em um ponto de contorno suave x' , as componentes de tensão σ_{ij} são dadas por

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} \mathbf{S}_{ijk}(x', x)\mathbf{u}_k(x) d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} \mathbf{D}_{ijk}(x', x)\mathbf{t}_k(x) d\Gamma(x) \quad (60)$$

sendo $HPV \int_{\Gamma}$ representa o valor principal de Hadamard. Os tensores $\mathbf{S}_{ijk}(x', x)$ e $\mathbf{D}_{ijk}(x', x)$ contêm derivadas de $\mathbf{T}_{ij}(x', x)$ e $\mathbf{U}_{ij}(x', x)$, respectivamente. De maneira similar à Equação (59), quando r tende a zero, \mathbf{S}_{ijk} apresenta uma hipersingularidade de ordem $1/r^2$ enquanto \mathbf{D}_{ijk} tem uma singularidade forte de $1/r$. Assim, a componente de força de superfície t_j em contornos suaves é representada por

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} \mathbf{S}_{ijk}(x', x)\mathbf{u}_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x')CPV \int_{\Gamma} \mathbf{D}_{ijk}(x', x)\mathbf{t}_k(x) d\Gamma(x) \quad (61)$$

Onde n_i representa o i ésimo componente da unidade externa normal ao limite no ponto x' .

3.5.3 Sistema de equações algébricas

Equações (59) e (65) são a base do Método dos Elementos de Contorno Dual e são transformadas em um sistema de equações algébricas lineares. As condições de contorno desconhecidas de forças de superfície e deslocamentos podem ser obtidas a partir da solução deste sistema de equações. Como o ponto fonte passa através de todos os nós do contorno, obtém-se o seguinte sistema:

$$Hu = Gt \quad (62)$$

onde H e G são matrizes que contêm as integrais das soluções fundamentais T_{ij} e U_{ij} , respectivamente, no caso da Equação (59), ou integrais de S_{ijk} e D_{ijk} , respectivamente, no caso da Equação (61). Os vetores t e u contêm componentes das forças de superfícies e deslocamento nos nós de contorno, respectivamente. O sistema da Equação (62) pode ser representado por:

$$Ax = By = f \quad (63)$$

sendo x o vetor contendo os valores desconhecidos de t_i e u_i , e y o vetor contendo as condições de contorno \bar{t}_i e \bar{u}_i . As matrizes A e B resultam do rearranjo de H e G . Com isso, uma solução única pode ser obtida a partir deste sistema de equações.

A aplicação deste método tem a grande vantagem de não necessitar de remalhamento quando ocorre incremento de trinca pois os incrementos são modelados com novos elementos gerando somente linhas e colunas à matriz existente. Sabendo que em volta da trinca há a *traction-free zone*, o lado direito do sistema de equações é somente estendido com os elementos correspondentes às variáveis introduzidas, como mostrado na Figura 3.22. Adotando o método da decomposição LU, a cada novo incremento de trinca somente as novas linhas e colunas necessitam ser decompostas, as já existentes previamente decompostas em iterações anteriores permanecem, mostrando-se dessa forma como um poderoso método para análise computacional de fratura.

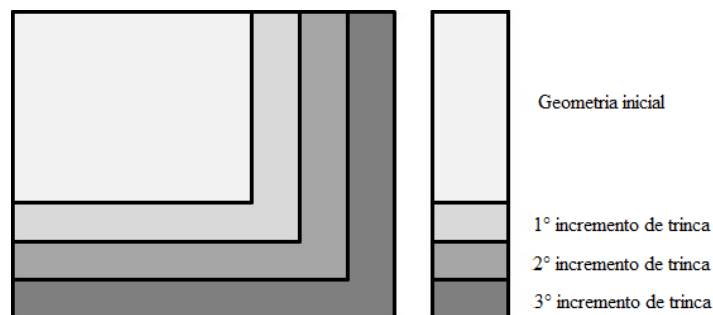


Figura 3.22 - Representação de novos elementos no sistema de equações a cada incremento

3.6 BEMLAB2D

O software BEMLAB2D é uma interface gráfica para manipulação de modelos bidimensionais de elementos de contorno, permitindo que informações geométricas, condições de contorno e atributos físicos possam ser gerenciados de forma eficiente e amigável evitando, assim, a tediosa tarefa do uso de arquivos de dados (DELGADO NETO, 2017). Este programa é totalmente implementado no ambiente de software Matrix Laboratory (MATLAB) e utilizou do módulo GUIA (Ambiente Gráfico de Desenvolvimento de Interface de Usuário) que foi usado para criar uma Interface Gráfica de Usuário (GUI) amigável. A interface do software é mostrada na Figura 3.23.

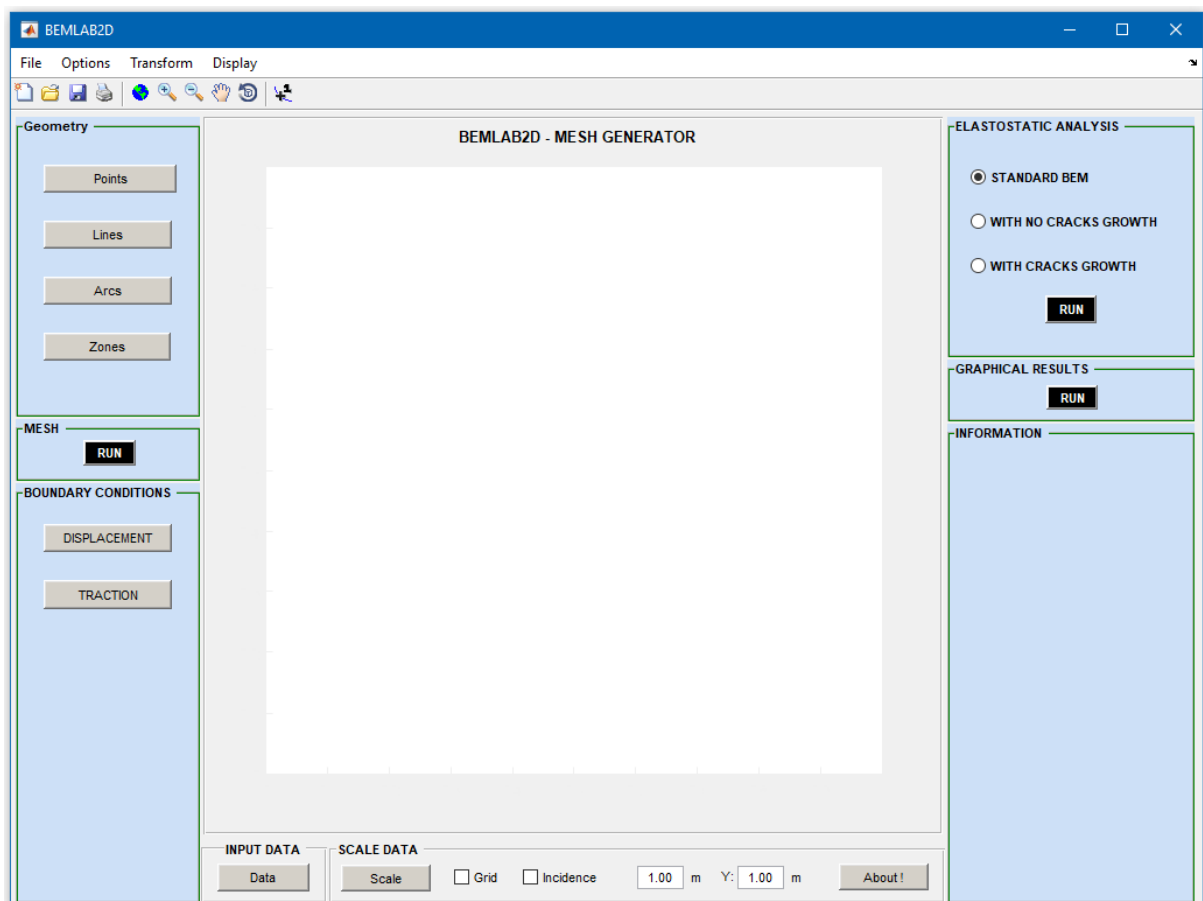


Figura 3.23 - Interface do BEMLAB2D

Como resultado o BemLab2D permite a geração de malha para Elementos de Contorno. As informações da malha e dos atributos são então passadas a um processador através de um arquivo de dados gerados na fase de pré-processamento.

O BemLab2D trabalha tanto como pré-processador quando na definição do modelo geométrico do problema, pela associação de atributos físicos à geometria e pela geração da malha de elementos de contorno, quanto como pós-processador quando utilizado para interpretar os dados fornecidos através de um arquivo de saída gerado pelo processador na análise numérica. A Figura 3.24 mostra a arquitetura de um sistema de análises de engenharia.

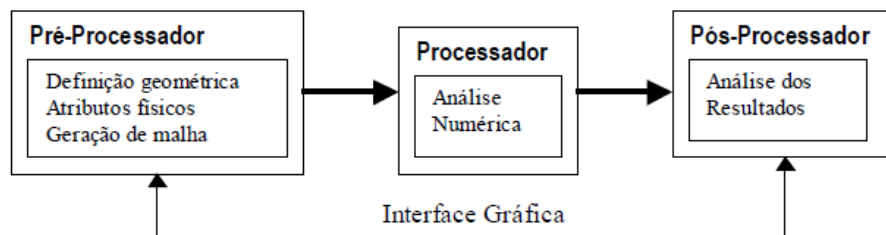


Figura 3.24 - Arquitetura de um sistema de análises de engenharia

Fonte: Gomes (2006)

Esta interface gráfica para pré- e pós-processamentos é capaz de representar modelos bidimensionais de elementos de contorno com as seguintes características (DELGADO NETO, 2017):

- Desenho do modelo 2D;
- Geração da malha (MEC/MEF) e *MESHLESS*;
- Atributos físicos e condições de contorno para MEC;
- Geração automática de arquivos de dados para análise com MEC, de informações de malha (coordenadas e topologia) para MEF e de coordenadas para métodos sem malha;
- Visualização de resultados diversos extraídos da análise com MEC;
- Interface com o programa BemCracker2D para análise via MEC.

3.7 BEMCRACKER2D

O BemCracker2D é o programa processador para análise elastostática de problemas 2D. Ele é escrito em linguagem C++ e todo estruturado nos conceitos da Programação Orientada à Objeto (POO) com objetivo de realizar análises por meio do Método dos Elementos de Contorno.

O BemCracker2D é solicitado através do BemLab2D em que o usuário informa qual tipo de processamento será realizado no solver que se compõe de três módulos de processamento:

1. MEC padrão (módulo I);
2. MECD Sem Propagação (módulo II);

3. MECD Com Propagação (módulo III)

- Análise de Tensão com MEC
- Avaliação de FITs (Integral J)
- Avaliação da Direção/Correção do Crescimento da Trinca (Critério de Tensão Máxima)
- Avaliação de Vida à Fadiga (Lei de Paris)
- Coalescência ou *linkup* de múltiplas trincas

Este software foi desenvolvido por Gomes (2006) a partir da modelagem do MEC padrão (equação de deslocamento e uso de elementos quadráticos contínuos) e Gomes (2016) na estratégia da análise incremental desenvolvida por Portela (1993) e Aliabadi (2002) para problemas envolvendo trincas. Baseado no diagrama de classes ilustrado na Figura 3.25, onde *BemCrk_BEMSYS* é a classe motora do programa e principal elo de ligação com a interface BEMLAB2D.

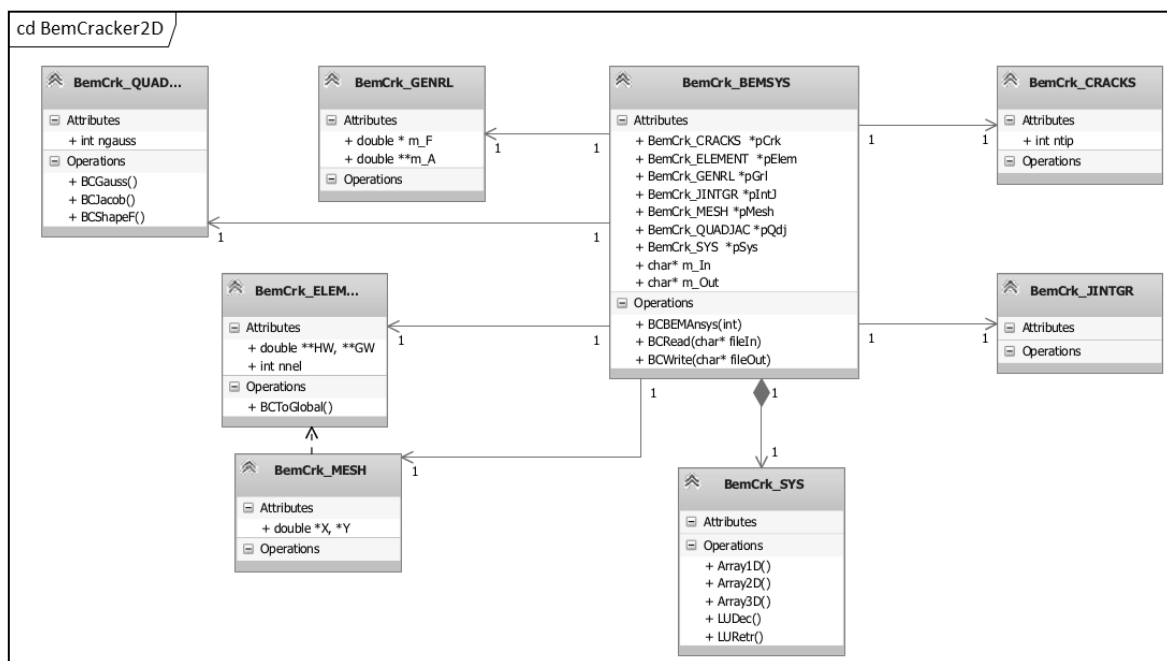


Figura 3.25 - Diagrama de classes do BemCracker2D

Fonte: Gomes (2016)

Outras classes implementadas no BemCracker2D são interligadas a classe descrita anteriormente. Dentre elas tem-se a classe *BemCrk_GENRL*, responsável pela montagem do sistema de equações $Ax = By = f$; a classe *BemCrk_ELEMENT* desenvolve a montagem do elemento quadrático contínuo e descontínuo (C/D) do modelo gerado no BEMLAB2D; *BemCrk_MESH* é a classe que monta a malha do elemento (C/D) a partir dos elementos

montados na classe anterior; a classe *BemCrk_QUADJAC* responsável por gerar os pontos de Gauss, o Jacobiano e as funções de forma (C/D) e ainda a *BemCrk_SYS* que é responsável pela alocação das matrizes e vetores e por resolver o sistema por LU.

As Classes relacionadas com modelos de propagação de trinca são as classes *BemCrk_CRACKS* e *BemCrk_JINTGR*, em que a primeira é responsável pela montagem do incremento de crescimento de trinca e a segunda é responsável por gerar os fatores de intensidade de tensão baseados na integral J. Para melhor esclarecer o entendimento da estratégia da análise incremental do crescimento da trinca tem-se a implementação do diagrama de sequências que pode ser visualizado na Figura 3.26.

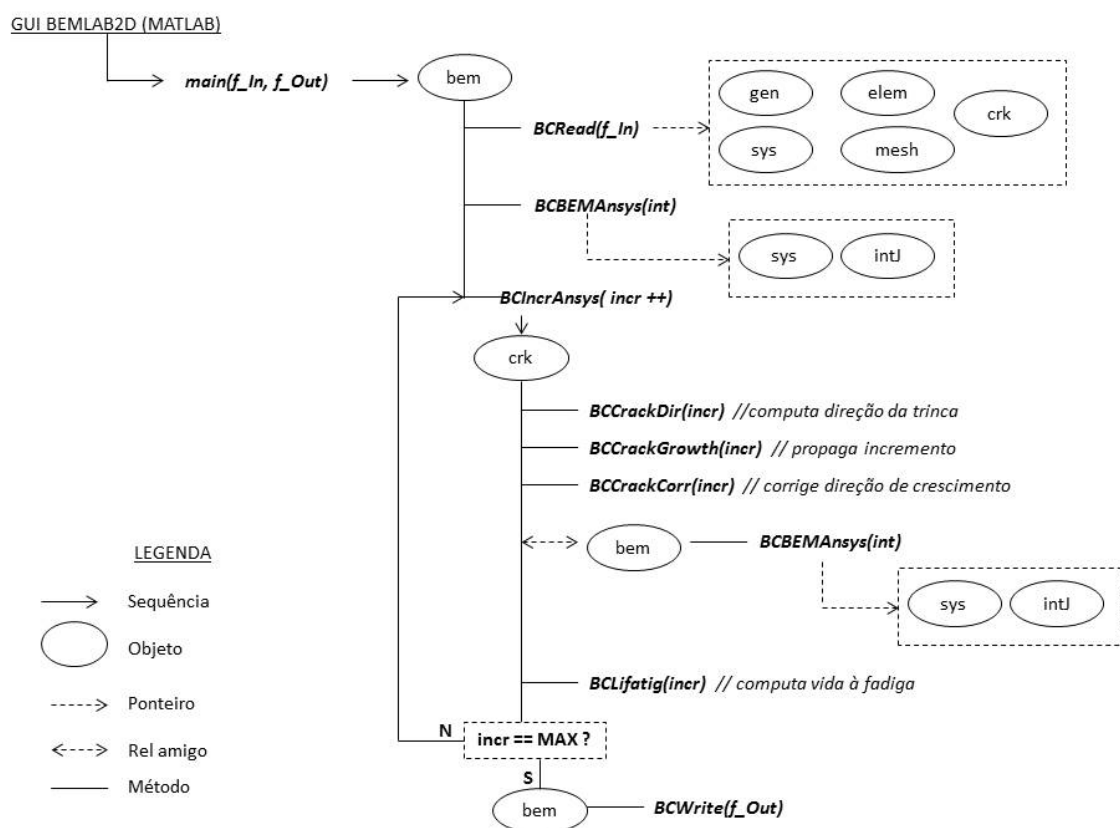


Figura 3.26 - Diagrama de sequência do crescimento da trinca

Fonte: Gomes (2016)

Para análise de problemas de Mecânica da Fratura, o BemCracker2D calcula tensões elásticas pelo MEC convencional e realiza análises incrementais da extensão da trinca por meio do MECD. Os fatores de intensidade de tensão (FIT) são computados para cada incremento através da integral-J, a direção de propagação pelo critério da máxima tensão circunferencial e a taxa

de crescimento da trinca por uma equação modificada de Paris, que utiliza um FIT equivalente considerando os modos I e II de fratura.

A utilização dos programas BEMLAB2D e BemCracker2D pode ser verificada em diversos trabalhos desde 2016, a saber Leite (2016), Rodrigues (2018), Oliveira (2018) e Gomes (2018).

3.8 ESTATÍSTICA

As estruturas responderão ao carregamento de acordo com o tipo e a magnitude da carga aplicada e sua resistência e rigidez. Para estabelecer se a resposta é considerada satisfatória depende dos requisitos que devem ser satisfeitos. Isso inclui segurança da estrutura contra o colapso, limitações do dano ou de deflexão, ou outros critérios. Cada requisito é considerado um estado limite. A violação de um estado limite é considerada como uma condição indesejada da estrutura. Alguns exemplos de Estado Limite são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Exemplos de Estados Limites

Estado Limite	Descrição	Exemplos
Último	Colapso de todo ou parte da estrutura	Ruptura, colapso progressivo, rótula plástica, instabilidade, corrosão, fadiga, incêndio
Dano		Trincas excessivas ou prematuras, deformação plástica permanente
Serviço	Perda do uso normal	Deflexões excessivas, vibrações, dano local, etc

Fonte: Melchers (1999)

O estudo da confiabilidade estrutural considera o cálculo e predição da probabilidade da violação de um estado limite para um sistema estrutural em algum estágio durante a vida útil. Em particular, a segurança estrutural está relacionada com a violação do Estado Limite Último.

Considerando os carregamentos S resistido por uma resistência R , considera-se falha do elemento estrutural quando $S > R$. A probabilidade de falha p_f é então calculada como:

$$p_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P[G(R, S) \leq 0] \quad (64)$$

onde $G(\)$ é definida como uma função estado limite tal que a probabilidade de falha é igual à probabilidade da violação do estado limite.

Como exemplo, considerando as funções densidade f_R e f_S para R e S , respectivamente mostradas na Figura 3.27, tem-se o domínio de falha definido no domínio $G < 0$ e o domínio seguro definido em $G > 0$.

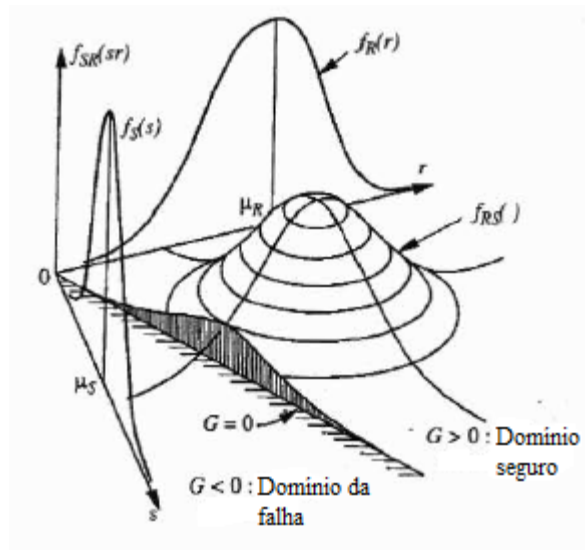


Figura 3.27 – Domínio de falha, junção de função densidade de duas variáveis aleatórias f_{RS} , funções densidades resistente e solicitante f_R e f_S , respectivamente

Fonte: Melchers (1999)

3.8.1 Simulação Monte Carlo

A simulação Monte Carlo envolve amostragem e aleatoriedade para simular um grande número de experimentos e observar um resultado. No caso da análise de confiabilidade estrutural, tal experimento é repetido inúmeras vezes, com um vetor \hat{x} escolhido aleatoriamente de \hat{x}_i valores. Nestas tentativas, ocorrerá falha do elemento estrutural se houver violação do estado limite (isto é $G(\hat{x}) \leq 0$). Assim, se N experimentos são conduzidos a probabilidade de falha é dada aproximadamente por:

$$p_f \approx \frac{n(G(\hat{x}_i) \leq 0)}{N} \tag{65}$$

Onde $n(G(\hat{x}_i) \leq 0)$ significa o número de tentativas n que $G(\hat{x}_i) \leq 0$.

Desse modo, a simulação de Monte Carlo representa um jogo de chance de propriedades probabilísticas conhecidas de maneira a deduzir um resultado requerido. Podendo assim ser utilizada como meio para avaliação da segurança estrutural, mais especificamente a probabilidade de falha.

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se o método para tratar vida à fadiga de peças de fuselagem de aeronave com diferentes distribuições de trincas e furos iniciais via Método dos Elementos de Contorno Dual. Para isso, foram automatizados dados de painéis de forma a obter diversos modelos para análise via MECD utilizando-se o BemCracker2D. A seguir é apresentado o modelo adotado.

4.1 MODELO

Estruturas de aviões, especificamente a fuselagem, utilizam a liga de alumínio 2024 como material base devido a sua alta capacidade de suportar danos, boa resistência mecânica e à corrosão (LIN et al. 2013). O material considerado para a placa foi a liga de alumínio 2024-T3, limite de escoamento e limite de resistência 338 MPa e 476 MPa, respectivamente, módulo de Young e coeficiente de Poisson de 74 GPa e 0.33, respectivamente, e tenacidade à fratura (K_{Ic}) 34 MPa \sqrt{m} (Dowling, 2012). Para análise de fadiga via Lei de Paris, os coeficientes C e m estão representados na Tabela 4.1 com base em Broek e Schijve (1963), onde R é a razão entre a carga máxima e mínima de fadiga.

Tabela 4.1 - Constantes de Paris ($da/dN=C\Delta K^m$) para liga de alumínio 2024-T3

R	C ($m/ciclo, MPa\sqrt{m}$)	m
0.66	2.00×10^{-10}	3.00
0.57	2.00×10^{-10}	2.80
0.5	7.00×10^{-11}	3.20
0.38	1.00×10^{-10}	2.90
0.29	2.00×10^{-10}	2.60
0.17	2.00×10^{-10}	2.60
0.06	2.00×10^{-10}	2.50

Fonte: Broek e Schijve (1963)

A automação possibilitou criar variáveis aleatórias para os parâmetros C e m da Lei de Paris tendo como base os valores de razão de carga $R = 0.5$ da Tabela 4.1 ($C = 7.00e-11$ e $m = 3.20$), as solicitações externas P e Q, o raio do furo e o tamanho das trincas. As distribuições das variáveis estão mostradas nos Apêndices A e B.

4.1.1 Análise macro

Submetendo o modelo macro a uma gama de carregamentos variando os seguintes dados: carga normal P e carga cisalhante Q , obtêm-se diferentes campos de tensões na placa a partir da análise da mecânica do contínuo tendo como referência as Equações (18). A plotagem do campo de tensões foi restrita à região de 20 x 40 cm da peça para poder prever os locais de máximo campo de tensões, Figura 4.1. Logo após é mostrado o fluxograma (Figura 4.2) da implementação em *Matlab* do código computacional para o cálculo do campo de tensões.

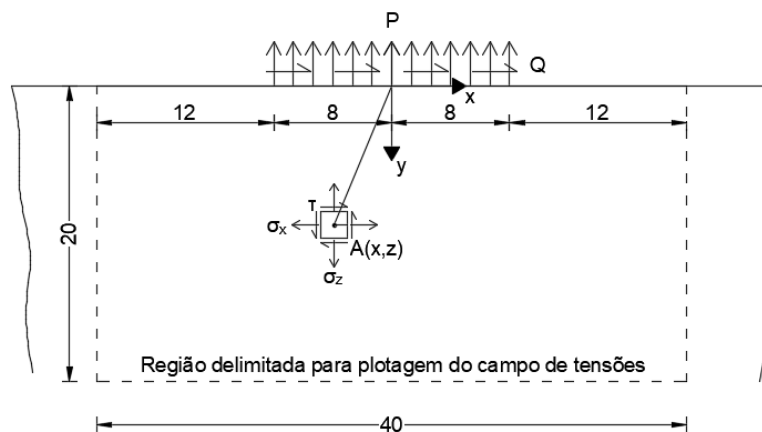


Figura 4.1 - Análise multiescala (cm)

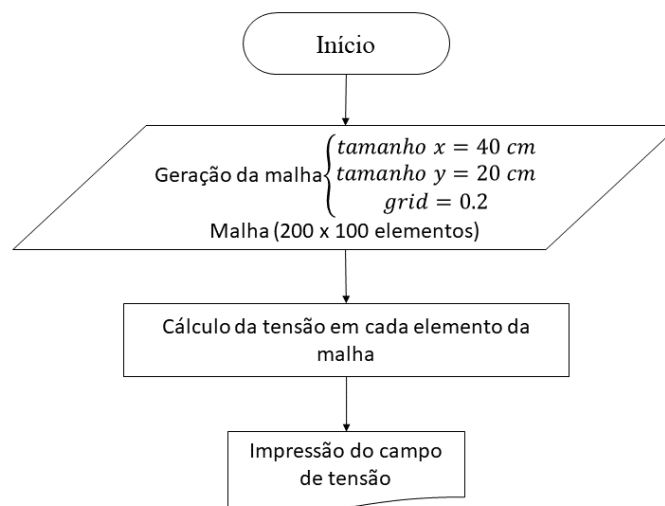


Figura 4.2 - Fluxograma para o cálculo do campo de tensões no elemento macro

Com o campo de tensões obtido no modelo macro, realiza-se as análises no modelo micro mostradas no item a seguir.

4.1.2 Análise micro

O modelo micro representa defeitos iniciais na peça. Este foi modelado no BemLab2D, seguindo os passos da Figura 4.3. O output da malha inicial do modelo micro é representado por um quadrado de lado unitário com carga nas bordas direita e superior e apoiada nas bordas esquerda e inferior, com um furo central e duas trincas inclinadas 45° conforme Figura 4.4. Sendo as tensões σ_x , σ_y e τ provenientes da análise macro, aplicadas na razão de carga $R = 0.5$.

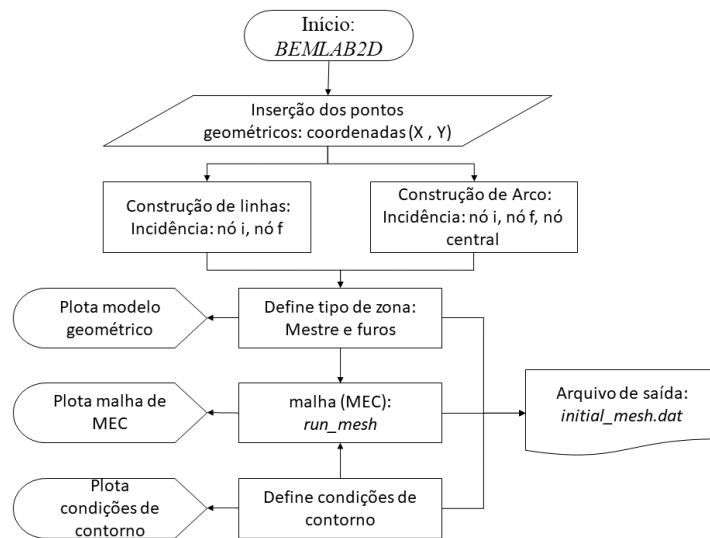


Figura 4.3 - Geração do modelo micro

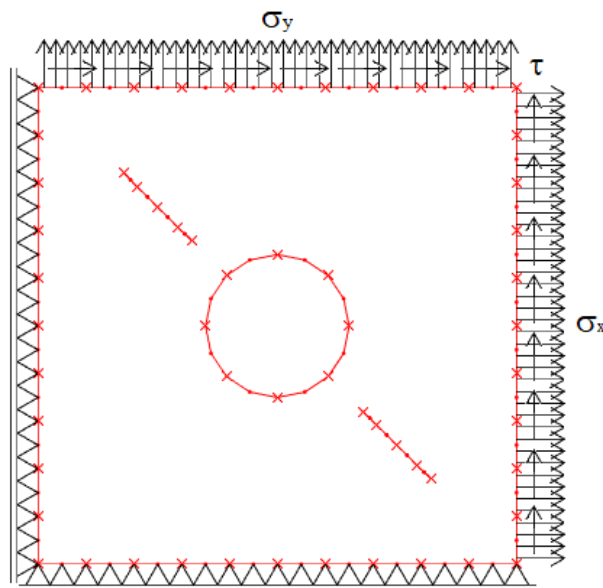


Figura 4.4 - Exemplo de modelo micro

Para representar a malha de MEC foram considerados 60 elementos e 120 nós geométricos. Com elementos contínuos quadráticos dispostos nas bordas e no furo circular central da placa e elementos descontínuos quadráticos representando as trincas com razão de 0.2, 0.3, 0.3, 0.2. Os elementos foram distribuídos da seguinte forma: 10 em cada borda externa somando 40, com distância 0.05 entre eles; 8 no furo circular central e 8 em cada trinca, somando 16, de acordo com a Figura 4.5.

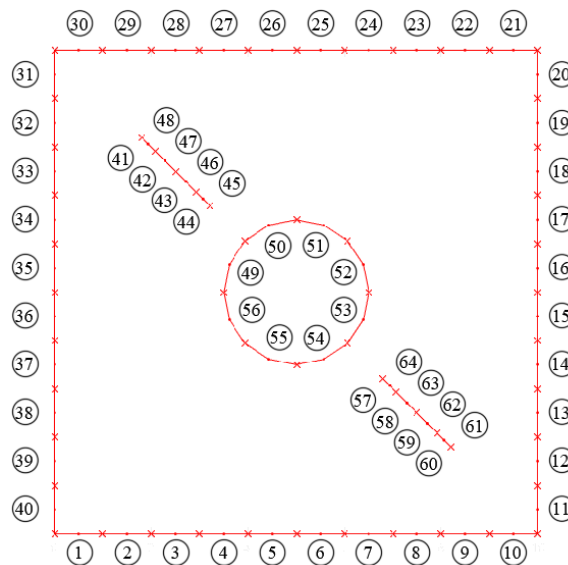


Figura 4.5 - Distribuição da malha de MEC

A análise micro foi realizada em 3 diferentes posições da análise macro. A posição 1 considera o elemento micro no centro da placa com coordenadas (0,10); a posição 2 considera este elemento na origem do eixo do sistema (0,0); e a posição 3, no limite da aplicação da solicitação externa (8,0), tais posições estão ilustradas na Figura 4.6.

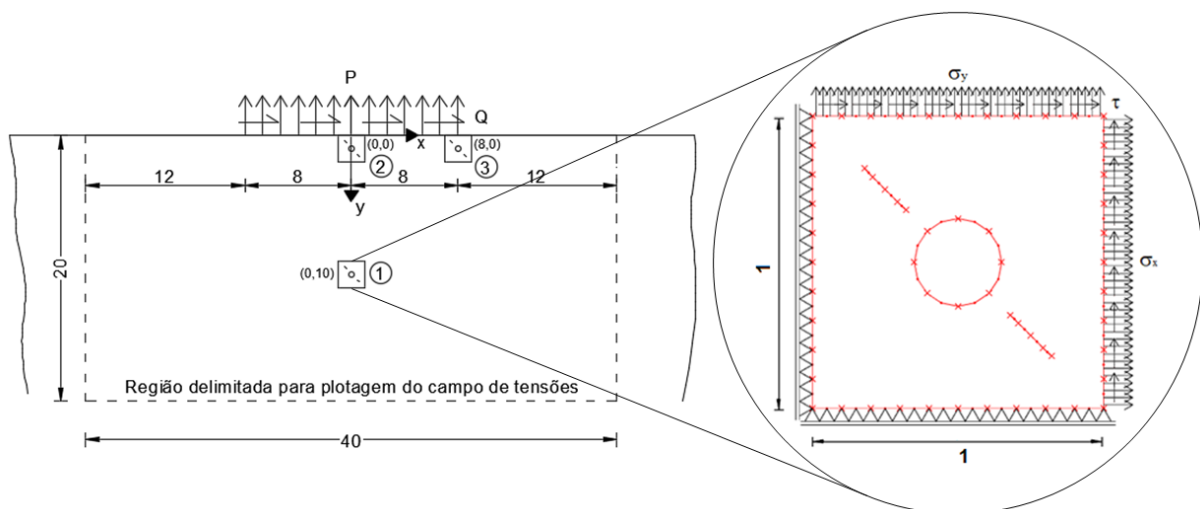


Figura 4.6 – Posições para análise de defeitos iniciais – análise micro (cm)

Definindo realização como o conjunto de dados utilizados nos *inputs* (das mil analisadas), a cada realização, altera-se os seguintes parâmetros de entrada: as constantes C e m da Lei de Paris, o tamanho inicial das trincas (superior e inferior), o furo central e o campo de tensões para cada posição (1, 2 e 3). Seguindo a sequência da Figura 4.7.

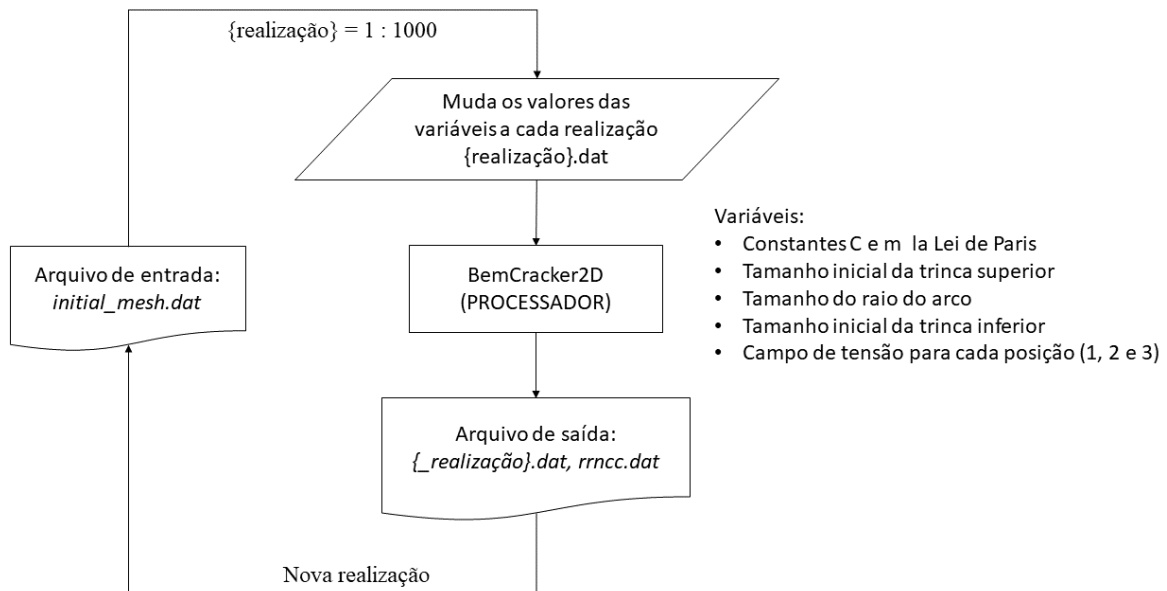


Figura 4.7 - Fluxograma de análise de cada realização

No BEMLAB2D consideram-se as seguintes taxas de crescimento de trinca: 1 – 25% do tamanho inicial da trinca, 2 – 50%, 3 – 75%, 4 – incremento do tamanho inicial da trinca. Nesta análise foi adotado incremento de 0.02 cm até o último incremento antes de atingir uma borda. O número de ciclos é calculado com base na Equação (56), sendo a_0 o tamanho inicial e a_{ac} o tamanho após a propagação. Ao executar cada realização, o BemCracker2D traz como resultado o número de ciclos e deslocamento da malha de contorno. Com estes resultados, calcula-se a *Compliance* a partir da média dos deslocamentos de cada borda e a respectiva tensão na borda considerada (direita ou superior) seguindo os passos da Figura 4.8, obtendo-se então os pontos para a formação do gráfico número de ciclos x *compliance* (Figura 4.9).

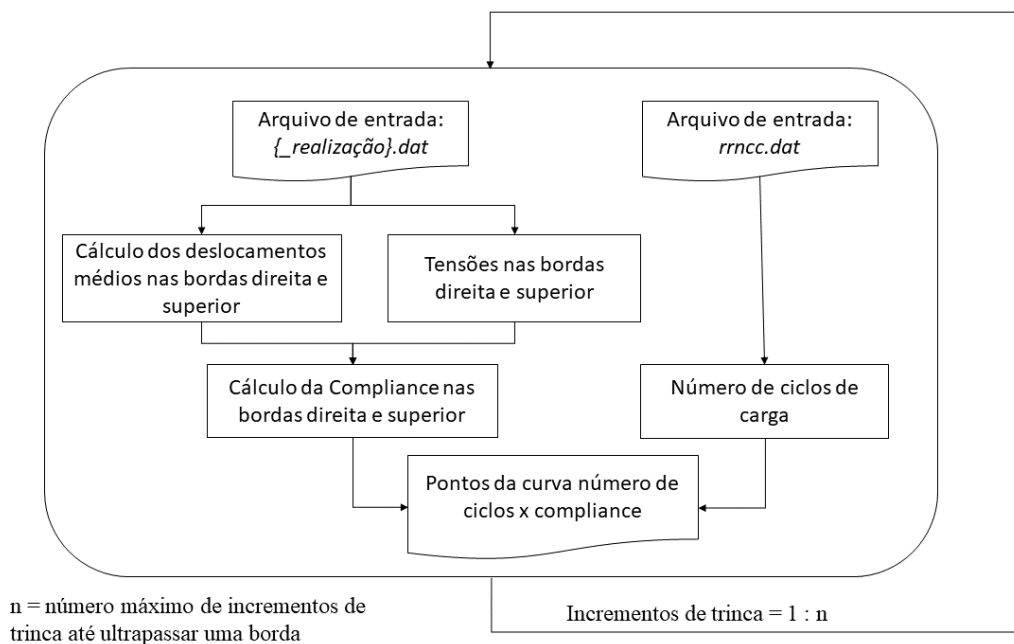


Figura 4.8 - Fluxograma para obtenção dos pontos da relação número de ciclos x *compliance* a cada incremento

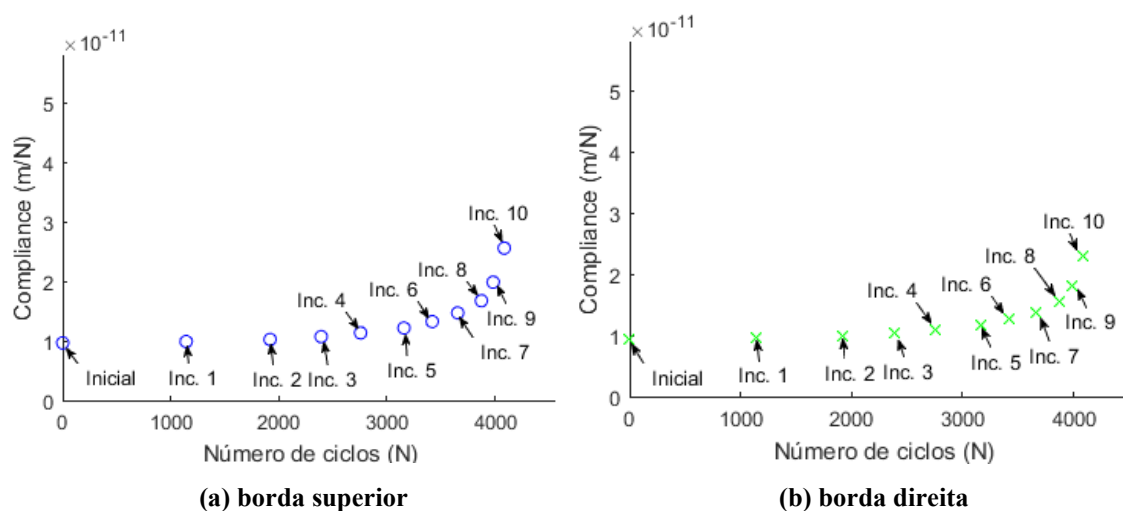
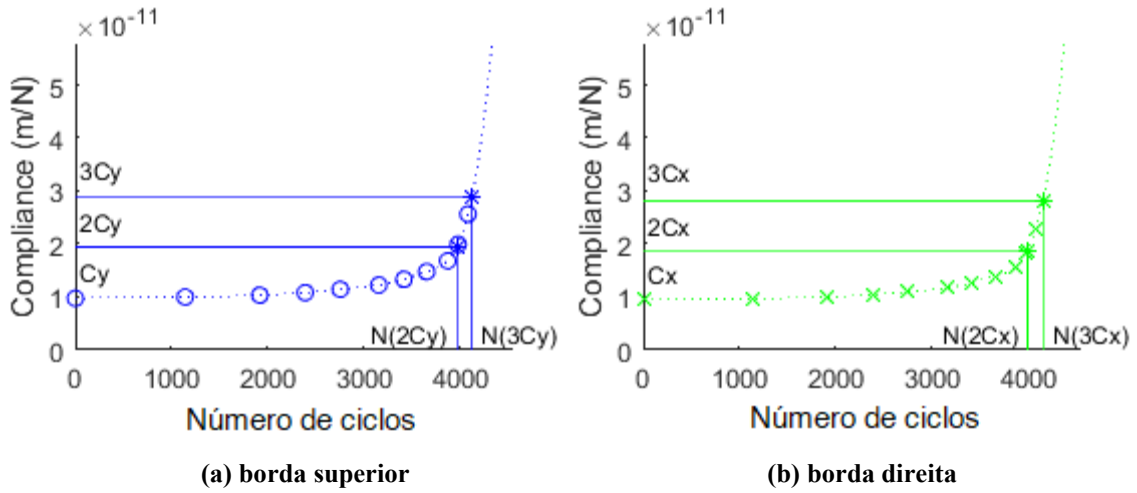


Figura 4.9 - Pontos da relação número de ciclos x *compliance* a cada incremento

Cada ponto (da esquerda para direita) representa um incremento de trinca. A *compliance* inicial está no eixo das abcissas. Com a propagação das trincas a placa vai perdendo rigidez aumentando exponencialmente a relação *compliance* x ciclos. A partir destes pontos, cria-se um *curvefit* correspondente ao *spline* no Matlab resultando nas curvas (Figura 4.10). Com as curvas, obtém-se o número de ciclos que corresponde a 2 x *Compliance* inicial e 3 x *Compliance* inicial.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	3.9669e+03	2.9018e-11	4.1257e+03

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	3.9967e+03	2.8144e-11	4.1554e+03

Figura 4.10 - Curvas número de ciclos x compliance

Estes resultados se referem à Ponta 1 da Trinca 1 (Crack 1 Tip 1) de acordo com a Figura 4.11. Nas realizações analisadas foram avaliados os resultados dos números de ciclos para as 4 pontas de trincas, em que C1 T1 significa Trinca 1 Ponta 1; C2 T2, Trinca 2 Ponta 2, e assim sucessivamente, sendo considerado o menor número de ciclos para atingir os resultados referentes à 2 x Compliance inicial e 3 x Compliance inicial.

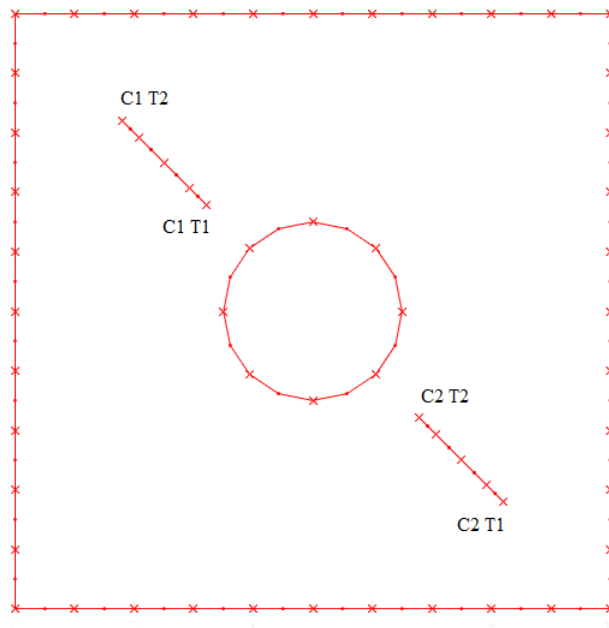


Figura 4.11 - Pontas de trinca

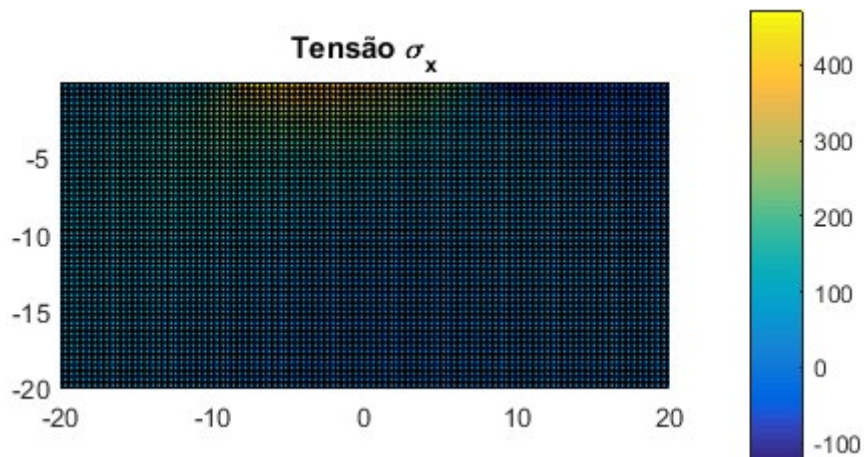
4.2 ESTUDO DE CASO 1

O Estudo de Caso 1 refere-se à primeira simulação das mil realizações. As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14, mostram o campo de tensões da região delimitada para análise do modelo macro (Figura 4.1) gerado nesta realização; composta dos seguintes dados representados na Tabela 4.2:

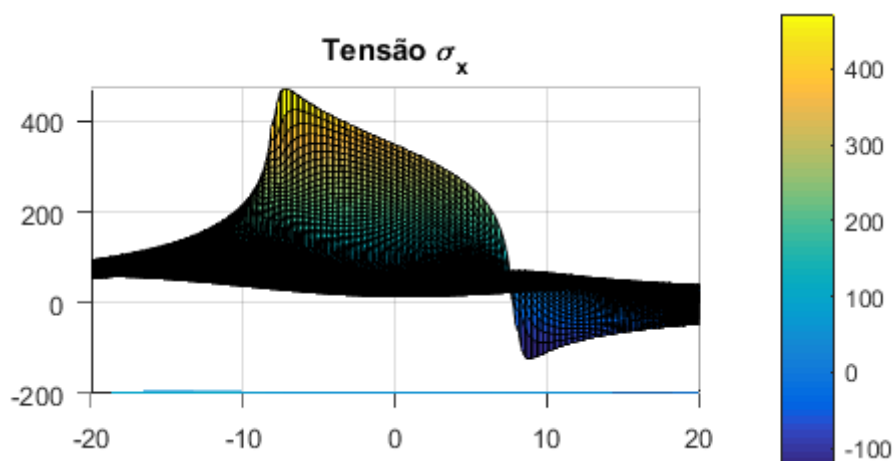
Tabela 4.2 – Valores das variáveis do Estudo de Caso 1

P (MPa)	360.47
Q (MPa)	92.78
C	7.20e-11
m	3.52
r (cm)	0.093
L1 (cm)	0.086
L2 (cm)	0.093

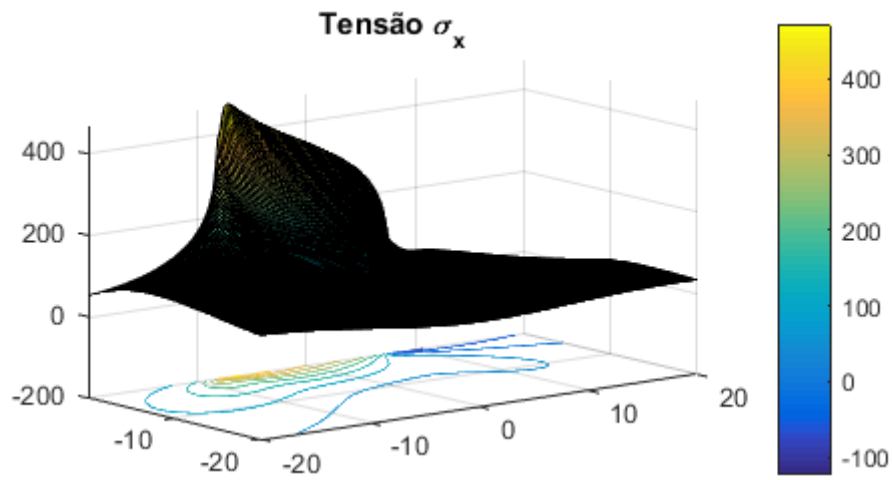
sendo P e Q as sollicitações normal e cisalhante, respectivamente, C e m as constantes de Paris, r o raio do furo central, L1 e L2 o tamanho das trincas superior e inferior, respectivamente.



(i) Vista superior

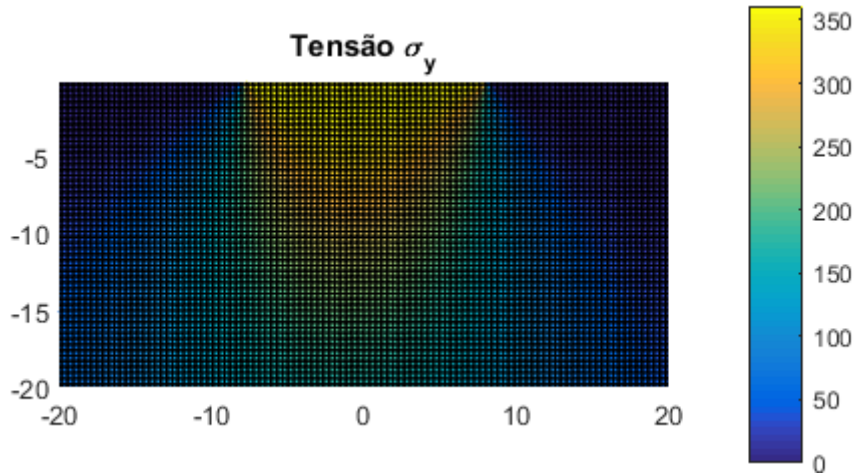


(ii) Vista frontal

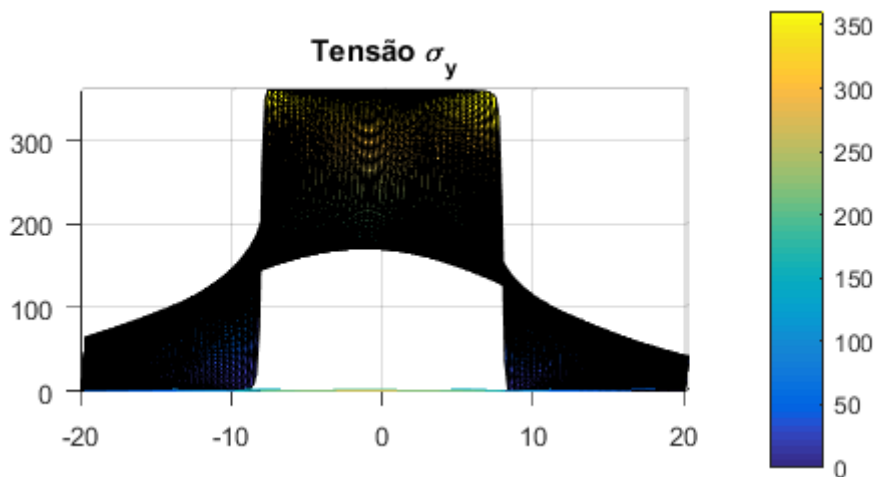


(iii) Vista panorâmica

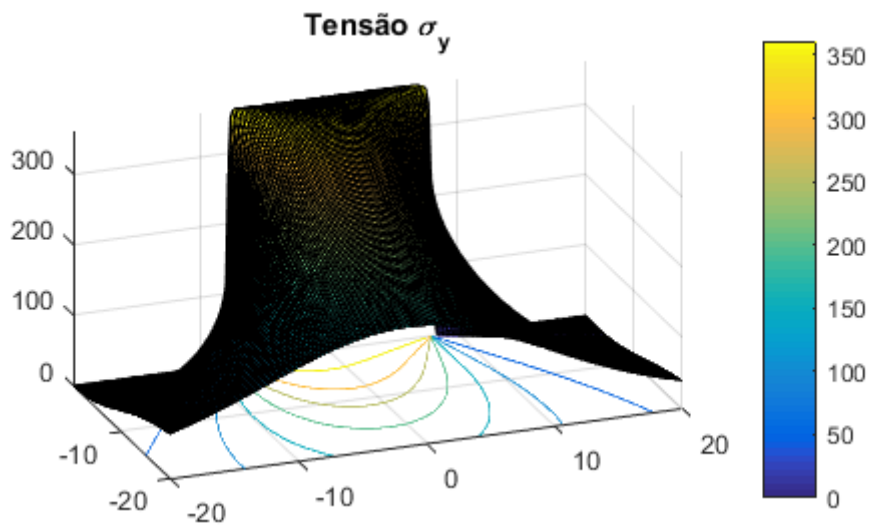
Figura 4.12 - Tensão sigma x (MPa)



(i) Vista superior

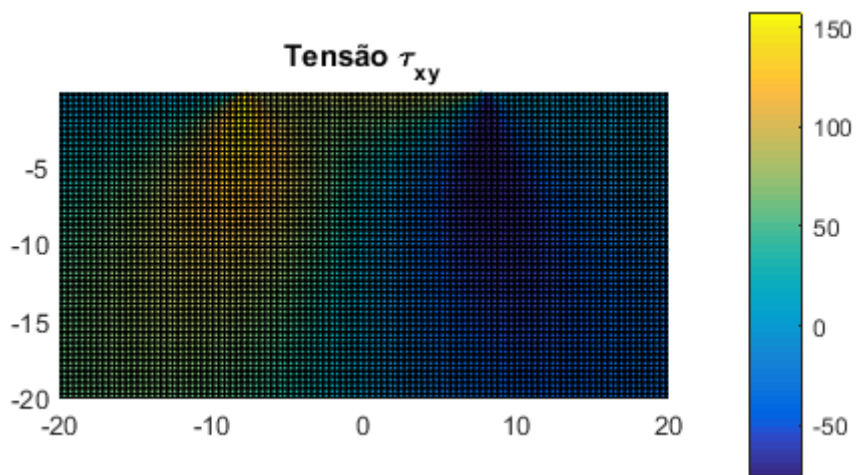


(ii) Vista frontal

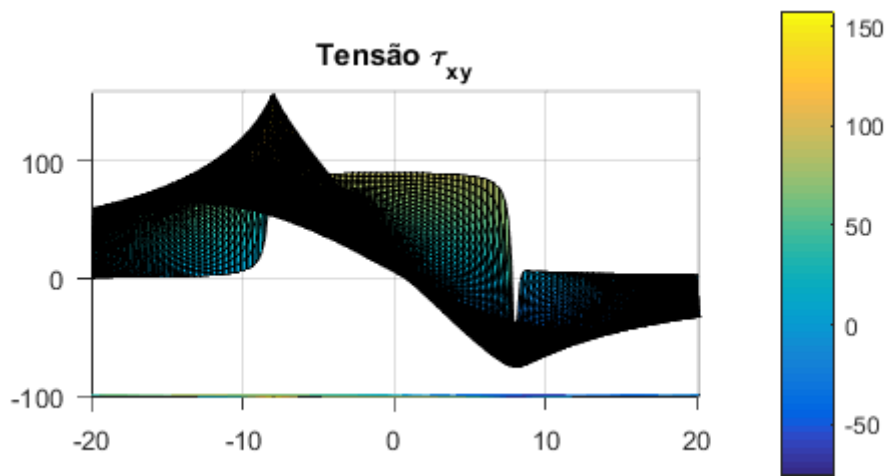


(iii) Vista panorâmica

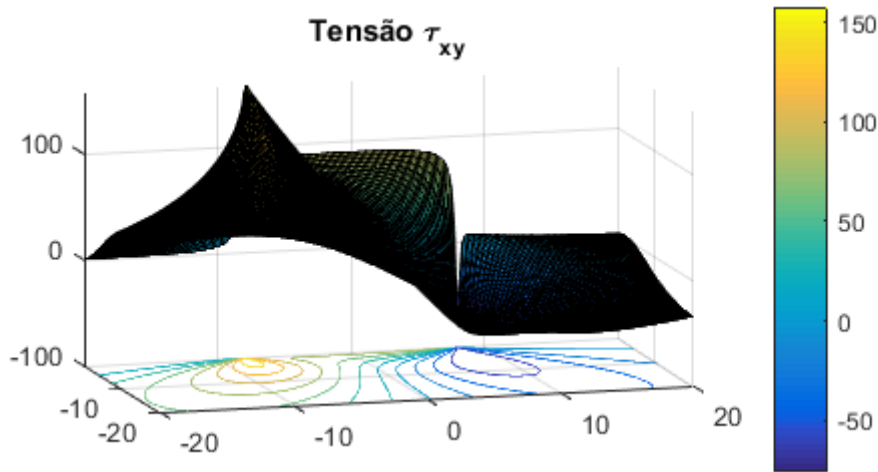
Figura 4.13 - Tensão sigma y (MPa)



(i) Vista superior



(ii) Vista frontal



(iii) Vista panorâmica

Figura 4.14 - Tensão cisalhante (MPa)

A seguir são mostradas as análises dos elementos micro em cada posição (1, 2 e 3) referente à esta realização do modelo macro.

4.2.1 Considerações para a posição 1

A Tabela 4.3 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 1 (Tabela 4.2) considerando o elemento micro na posição 1 da Figura 4.1.

Tabela 4.3 - Campo de tensões (MPa) na posição 1

σ_x	42,90
σ_y	266,78
τ	11,04

A Figura 4.15 ilustra os incrementos de trinca. Para esta análise resultou em 10 propagações. Em seguida, a Figura 4.16 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento têm-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.17.

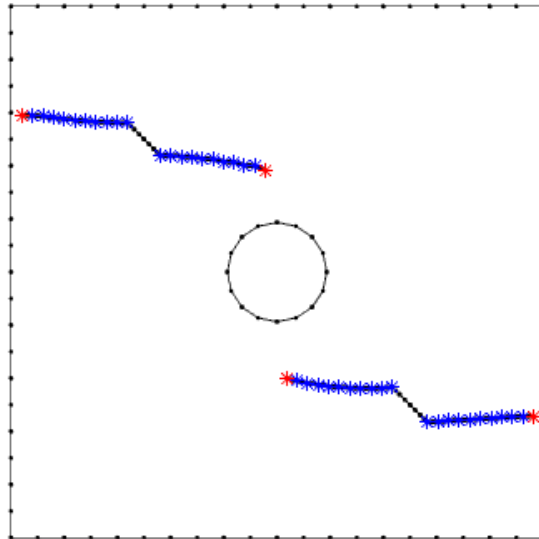


Figura 4.15 - Propagação da trinca para o elemento na posição 1

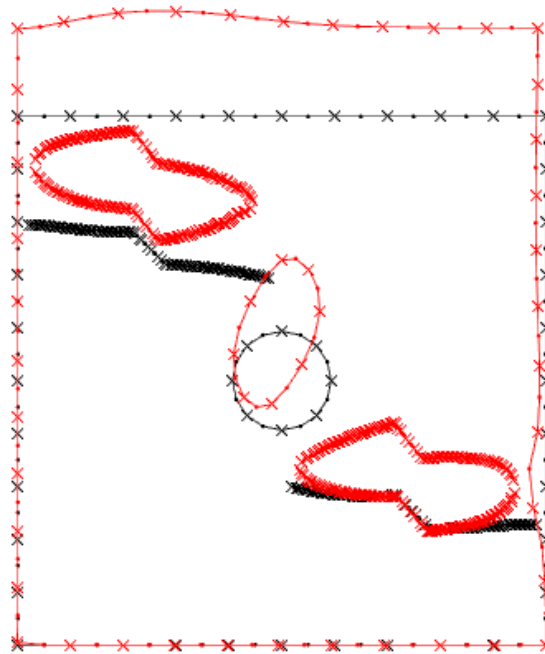


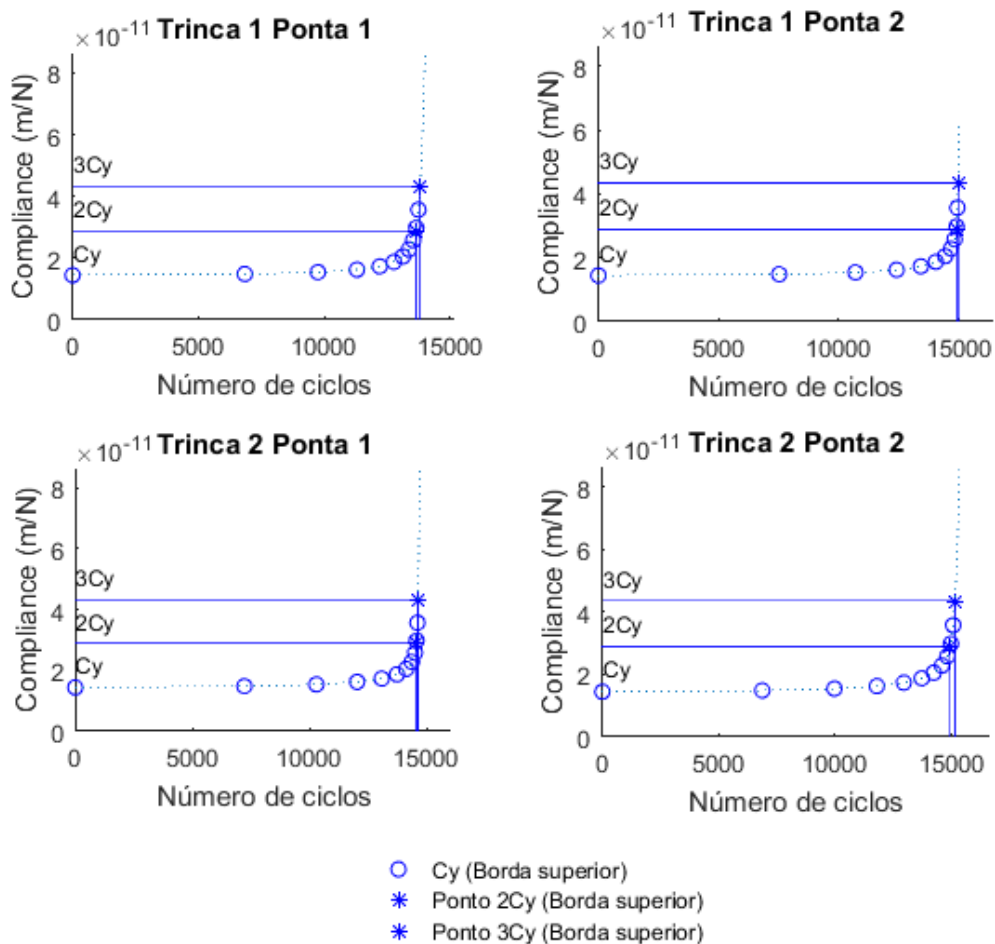
Figura 4.16 - Malha deformada para o elemento na posição 1

A Figura 4.16 apresenta dois detalhes:

- 1) Como a tensão normal σ_y tem magnitude bem superior à σ_x (ver Tabela 4.3), as deformações em y foram bem superiores à em x , ocorrendo ainda deformação contrária à direção da tensão aplicada (σ_x tração e deformação no sentido negativo do eixo x). Isto implica na desconsideração desta *compliance* visto que a consideração seria uma incoerência (σ_x tração e deformação negativa resultaria em *compliance* negativa). Portanto, a Figura 4.17 considera somente a análise para a borda superior.

2) A análise foi capaz de detectar a perda de rigidez local da placa perto das zonas de trinca. Na borda superior, a malha perto da trinca superior teve um deslocamento bem maior que nos outros pontos; o mesmo ocorrendo na borda lateral próximo à trinca inferior.

Como resultado, o menor número de ciclos para atingir $2 \times C_y$ e $3 \times C_y$ tem-se $N(2C) = 1.3635e+04$ e $N(3C) = 1.3811e+04$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	1.4475e-11	2.8950e-11	1.3635e+04	4.3424e-11	1.3811e+04
C1 T2	1.4475e-11	2.8950e-11	1.4885e+04	4.3424e-11	1.4956e+04
C2 T1	1.4475e-11	2.8950e-11	1.4567e+04	4.3424e-11	1.4629e+04
C2 T2	1.4475e-11	2.8950e-11	1.4954e+04	4.3424e-11	1.5145e+04

Figura 4.17 - Número de ciclos x *compliance* das bordas para o elemento na posição 1

4.2.2 Considerações para a posição 2

A Tabela 4.4 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 1 (Tabela 4.2) considerando o elemento micro na posição 2 da Figura 4.1.

Tabela 4.4 - Campo de tensões (MPa) na posição 2

σ_x	349,00
σ_y	360,47
τ	89,83

A Figura 4.18 ilustra os incrementos de trinca. Esta análise também resultou em 10 propagações. Em seguida, a Figura 4.19 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento tem-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.20.

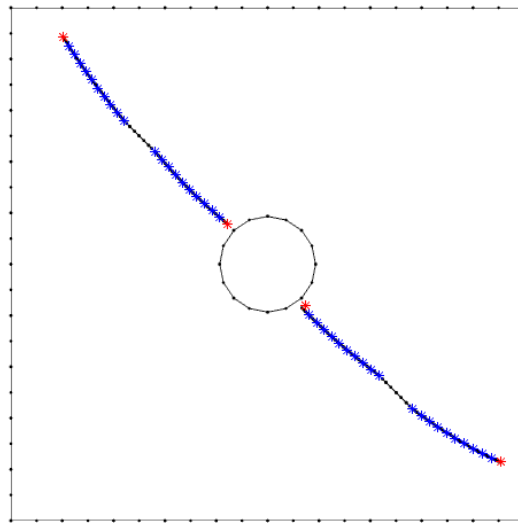


Figura 4.18 – Propagação de trincas para o elemento na posição 2

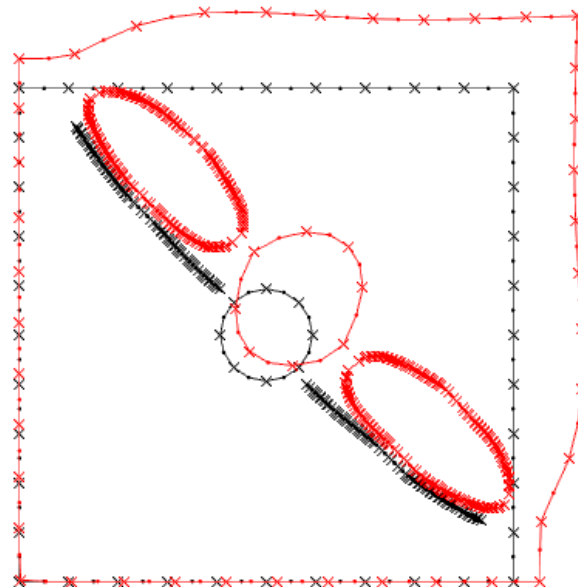
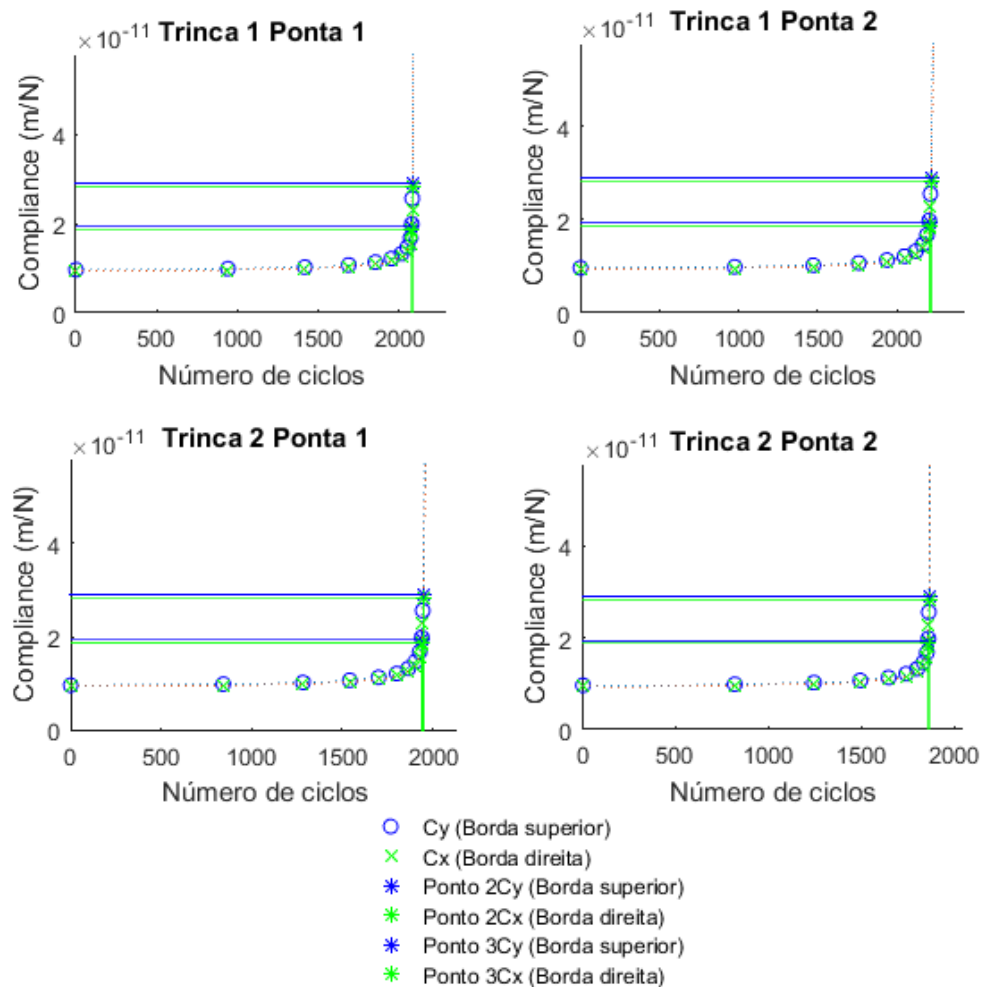


Figura 4.19 - Malha deformada para o elemento na posição 2

Como resultado, pode-se perceber que como as tensões possuem magnitude semelhantes ($\sigma_x = 349,00$ MPa e $\sigma_y = 360,47$ MPa) as deformações no elemento apresentam uma certa simetria. Com isso, as duas bordas apresentam *compliance*, devendo-se avaliar o menor número de ciclos para cada ponta de trinca que resulta no primeiro valor de 2 x C e 3 x C. O resultado aponta $N(2C) = 1.8601e+03$ e $N(3C) = 1.8636e+03$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	2.0804e+03	2.9018e-11	2.0848e+03
C1 T2	9.6728e-12	1.9346e-11	2.2020e+03	2.9018e-11	2.2131e+03
C2 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	1.9368e+03	2.9018e-11	1.9454e+03
C2 T2	9.6728e-12	1.9346e-11	1.8601e+03	2.9018e-11	1.8636e+03

(i) Borda superior

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	2.0812e+03	2.8144e-11	2.0856e+03
C1 T2	9.3814e-12	1.8763e-11	2.2043e+03	2.8144e-11	2.2150e+03
C2 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	1.9386e+03	2.8144e-11	1.9469e+03
C2 T2	9.3814e-12	1.8763e-11	1.8607e+03	2.8144e-11	1.8643e+03

(ii) Borda direita

Figura 4.20 - Número de ciclos x *compliance* das bordas para o elemento na posição 2

4.2.3 Considerações para a posição 3

A Tabela 4.5 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 1 (Tabela 4.2) considerando o elemento micro na posição 3 da Figura 4.1.

Tabela 4.5 - Campo de tensões (MPa) na posição 3

σ_x	406,67
σ_y	209,76
τ	160,38

A Figura 4.21 ilustra os incrementos de trinca. Esta análise também resultou em 10 propagações. Em seguida, a Figura 4.22 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento tem-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.23.

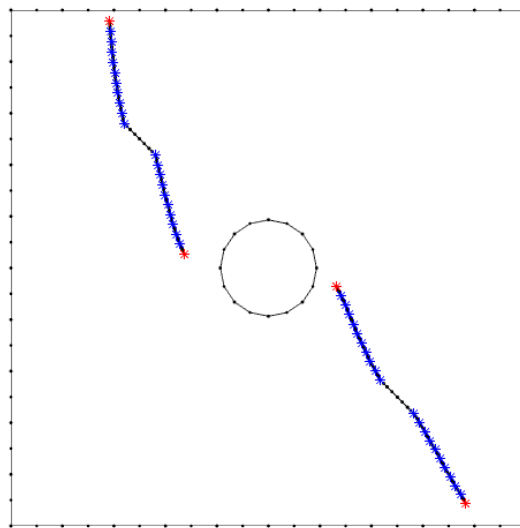


Figura 4.21 - Propagação de trincas para a posição 3

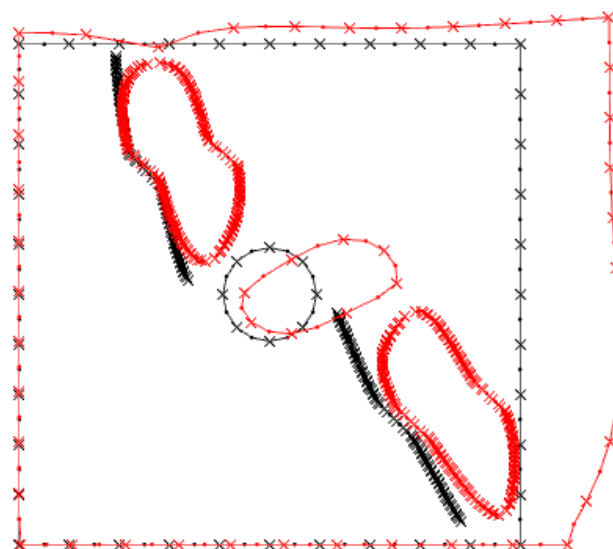
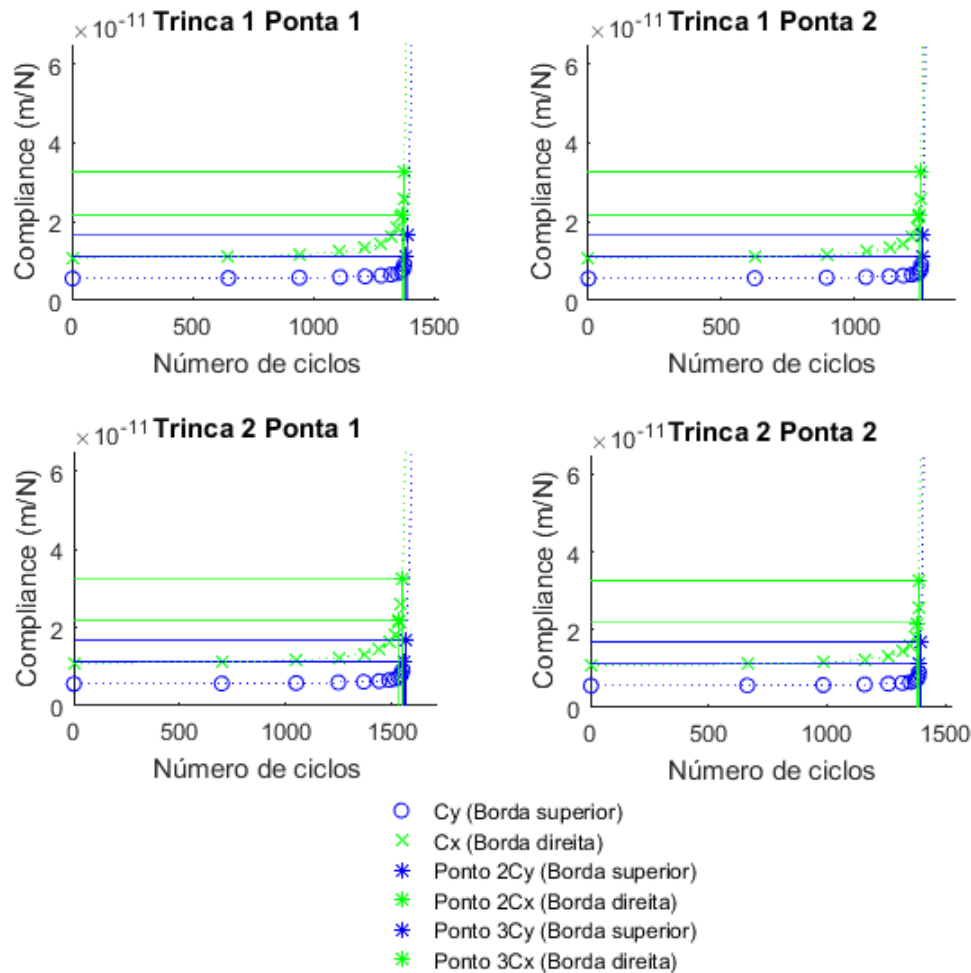


Figura 4.22 - Malha deformada para o elemento na posição 3

Como resultado, percebe-se que como σ_x possui magnitude bem maior que σ_y , o elemento possui deformação mais proeminente na borda direita. Nesta análise, as duas bordas também apresentam *compliance*, devendo-se avaliar o menor número de ciclos para cada ponta de trinca que resulta no primeiro valor de 2 x C e 3 x C. O resultado aponta $N(2C) = 1.2467e+03$ e $N(3C) = 1.2521e+03$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	5.6294e-12	1.1259e-11	1.3785e+03	1.6888e-11	1.3850e+03
C1 T2	5.6294e-12	1.1259e-11	1.2543e+03	1.6888e-11	1.2575e+03
C2 T1	5.6294e-12	1.1259e-11	1.5564e+03	1.6888e-11	1.5658e+03
C2 T2	5.6294e-12	1.1259e-11	1.3917e+03	1.6888e-11	1.3958e+03

(i) Borda superior

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	1.0888e-11	2.1776e-11	1.3629e+03	3.2663e-11	1.3741e+03
C1 T2	1.0888e-11	2.1776e-11	1.2467e+03	3.2663e-11	1.2521e+03
C2 T1	1.0888e-11	2.1776e-11	1.5345e+03	3.2663e-11	1.5499e+03
C2 T2	1.0888e-11	2.1776e-11	1.3819e+03	3.2663e-11	1.3889e+03

(ii) Borda direita

Figura 4.23 - Número de ciclos x *Compliance* para o elemento na posição 3

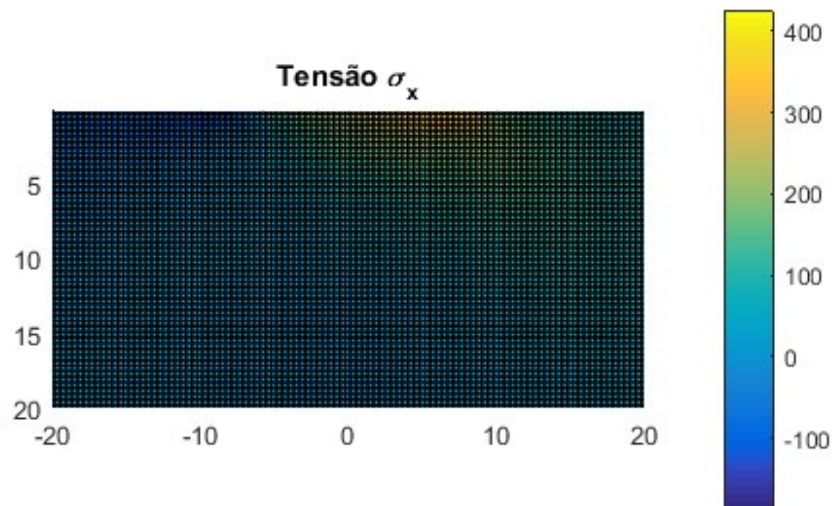
4.3 ESTUDO DE CASO 2

O Estudo de Caso 2 refere-se à terceira simulação das mil realizações. As Figuras 4.24, 4.25 e 4.26, mostram o campo de tensões da região delimitada para análise do modelo macro (Figura 4.1) gerado nesta realização; composta dos seguintes dados na Tabela 4.6:

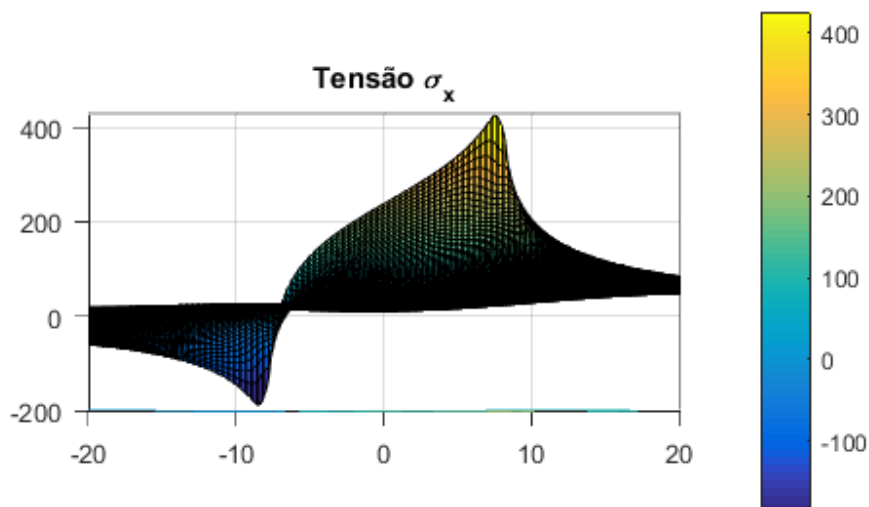
Tabela 4.6 – Valores das variáveis do Estudo de Caso 2

P (MPa)	246.16
Q (MPa)	113,54
C	7.91e-11
m	2.70
r (cm)	0.12
L1 (cm)	0.10
L2 (cm)	0.11

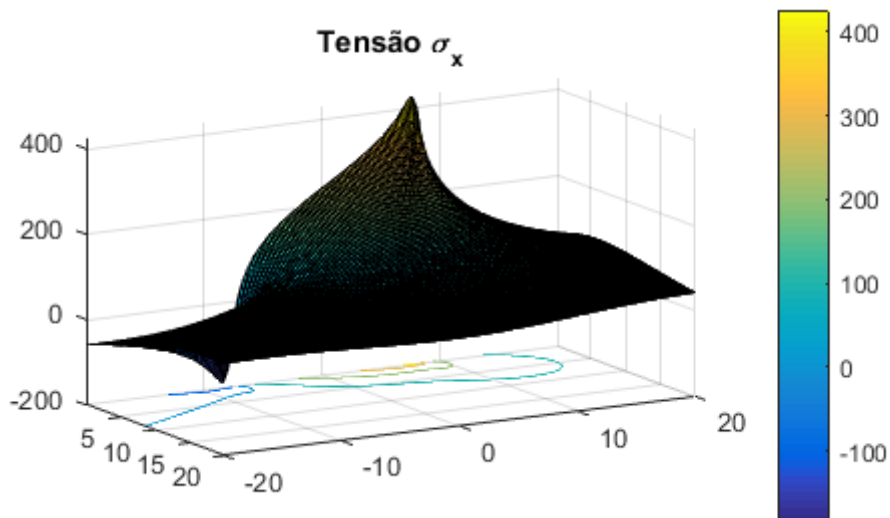
Sendo P e Q as solicitações normal e cisalhante, respectivamente, C e m as constantes de Paris, r o raio do furo central, L1 e L2 o tamanho das trincas superior e inferior, respectivamente.



(i) Vista superior

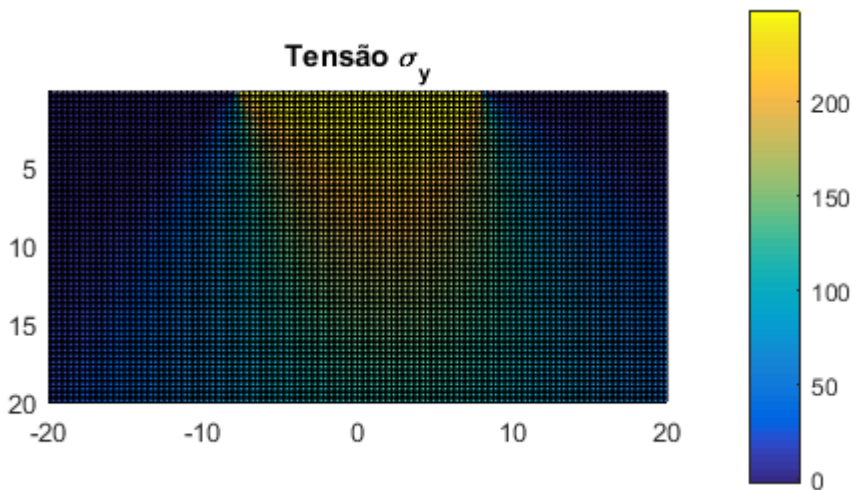


(ii) Vista frontal

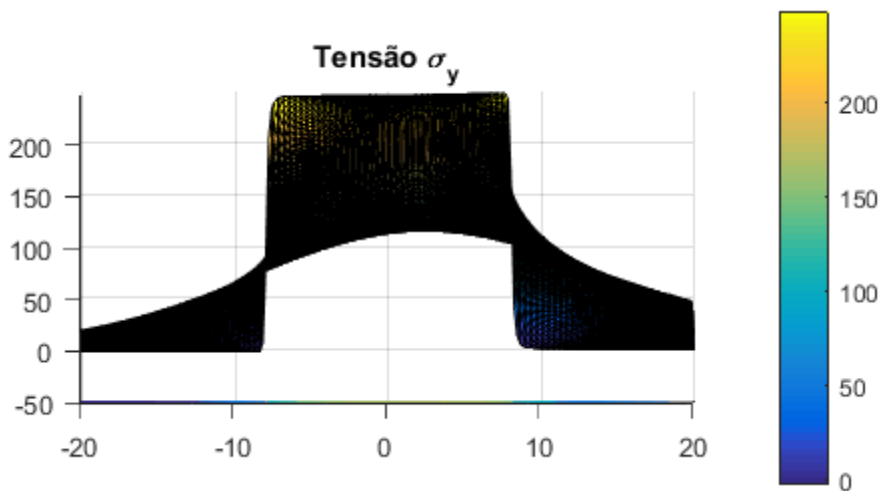


(iii) Vista panorâmica

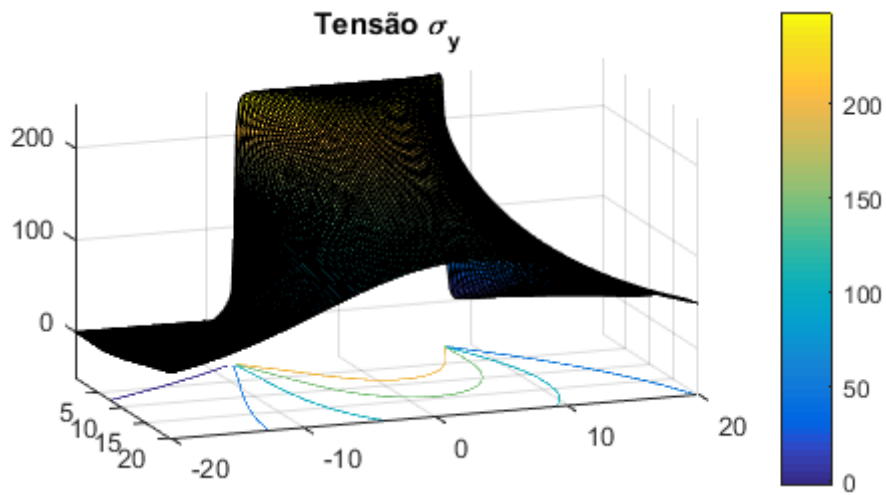
Figura 4.24 - Tensão sigma x



(i) Vista superior

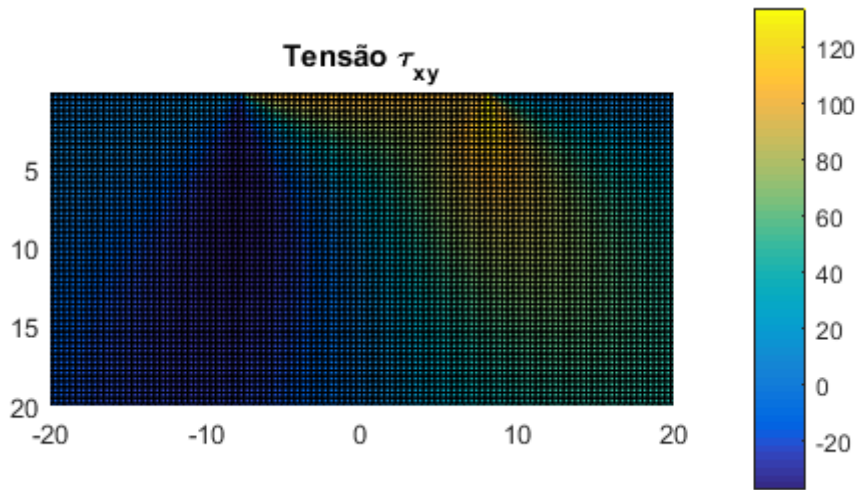


(ii) Vista frontal

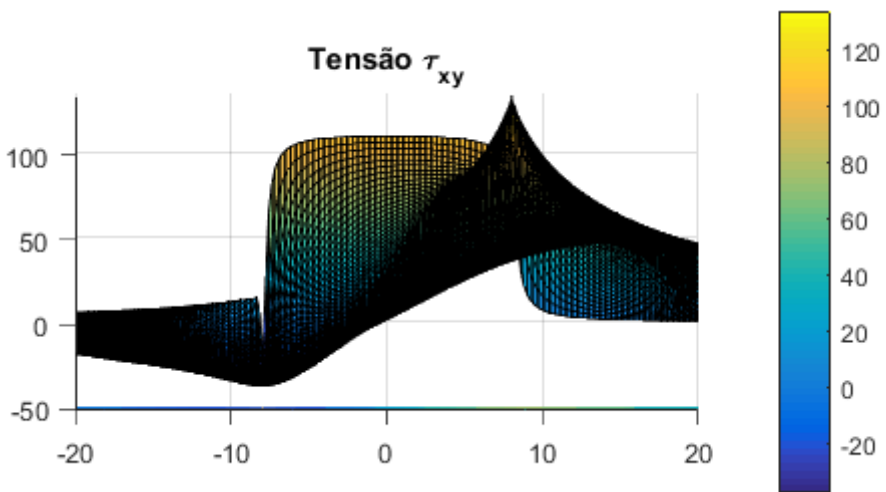


(iii) Vista panorâmica

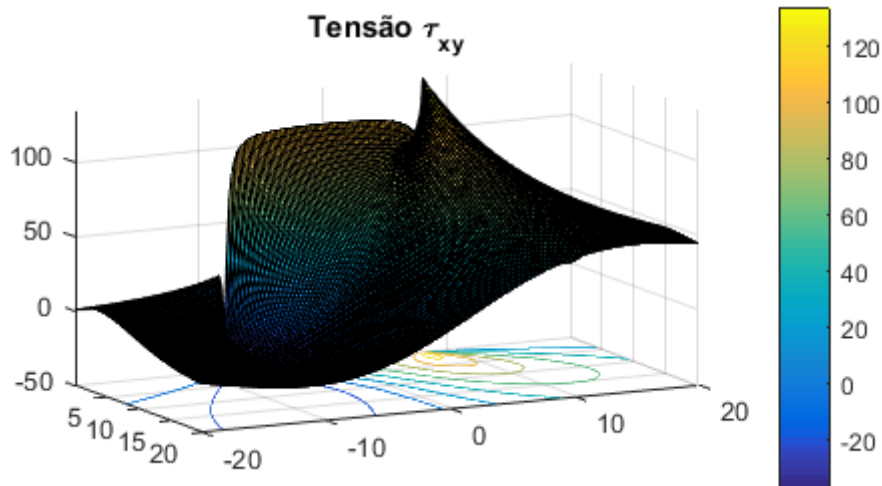
Figura 4.25 - Tensão sigma y



(i) Vista superior



(ii) Vista frontal



(iii) Vista panorâmica

Figura 4.26 - Tensão cisalhante

A seguir são mostradas as análises dos elementos micro em cada posição (1, 2 e 3) referente à esta realização do modelo macro.

4.3.1 Considerações para a posição 1

A Tabela 4.7 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 2 (Tabela 4.6) considerando o elemento micro na posição 1 da Figura 4.1.

Tabela 4.7 - Campo de tensões (MPa) na posição 1

σ_x	29,30
σ_y	182,18
τ	13,51

A Figura 4.27 ilustra os incrementos de trinca. Para esta análise resultou em 8 propagações. Em seguida, a Figura 4.28 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento tem-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.29.

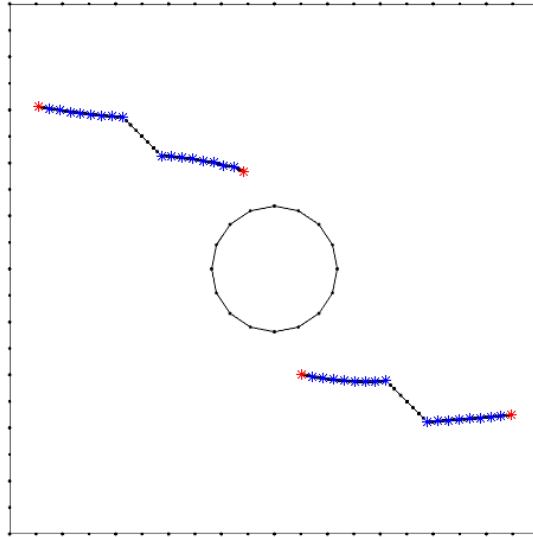


Figura 4.27 - Propagação da trinca para o elemento na posição 1

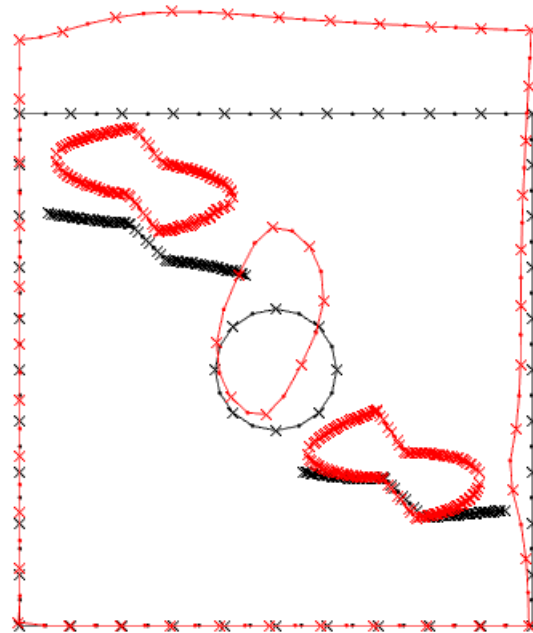
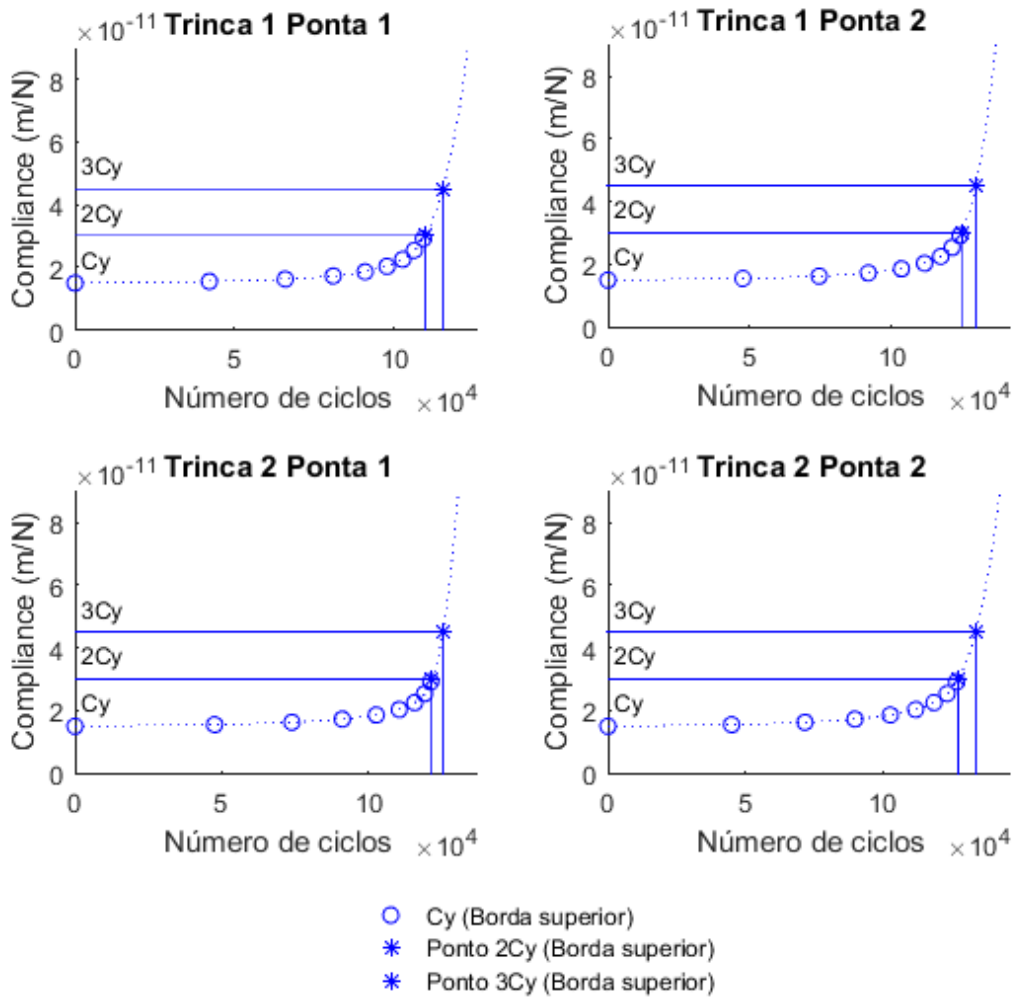


Figura 4.28 - Malha deformada para o elemento na posição 1

A Figura 4.28 mostra que novamente, com a tensão normal σ_y bem superior à σ_x (ver Tabela 4.7), as deformações em y foram bem superiores às em x, ocorrendo novamente deformação contrária à direção da tensão aplicada (σ_x tração e deformação no sentido negativo do eixo x). Isto implica na desconsideração desta *compliance* visto que a consideração seria uma incoerência (σ_x tração e deformação negativa resultaria em *compliance* negativa). Portanto, a Figura 4.29 considera somente a análise para a borda superior. Como resultado, o menor

número de ciclos para atingir 2 x Cy e 3 x Cy tem-se $N(2C) = 1.0976e+05$ e $N(3C) = 1.1537e+05$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	1.5044e-11	3.0087e-11	1.0976e+05	4.5131e-11	1.1537e+05
C1 T2	1.5044e-11	3.0087e-11	1.2471e+05	4.5131e-11	1.2982e+05
C2 T1	1.5044e-11	3.0087e-11	1.2153e+05	4.5131e-11	1.2533e+05
C2 T2	1.5044e-11	3.0087e-11	1.2744e+05	4.5131e-11	1.3385e+05

Figura 4.29 - Número de ciclos x compliance das bordas para o elemento na posição 1

4.3.2 Considerações para a posição 2

A Tabela 4.8 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 2 (Tabela 4.6) considerando o elemento micro na posição 2 da Figura 4.1.

Tabela 4.8 - Campo de tensões (MPa) na posição 2

σ_x	238,33
σ_y	246,16
τ	109,93

A Figura 4.30 ilustra os incrementos de trinca. Esta análise também resultou em 8 propagações. Em seguida, a Figura 4.31 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento tem-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.32.

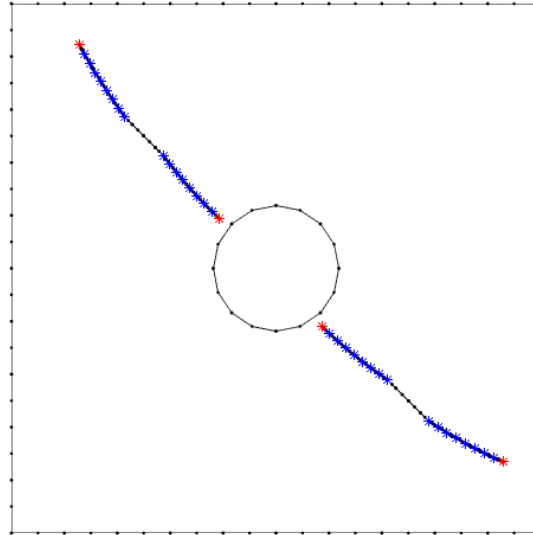


Figura 4.30 – Propagação de trincas para o elemento na posição 2

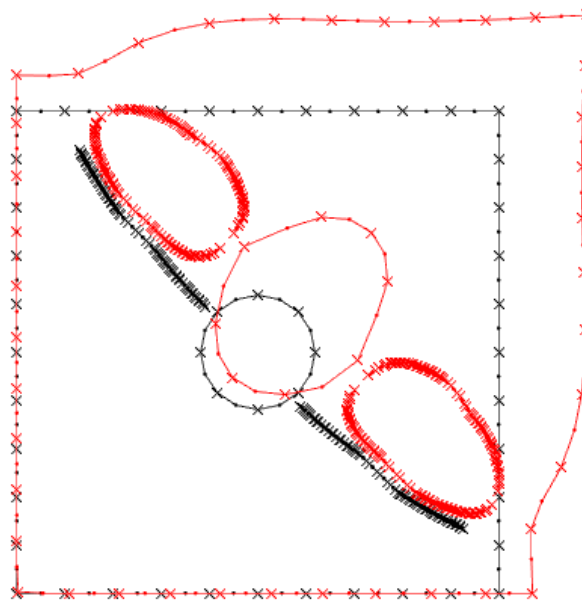
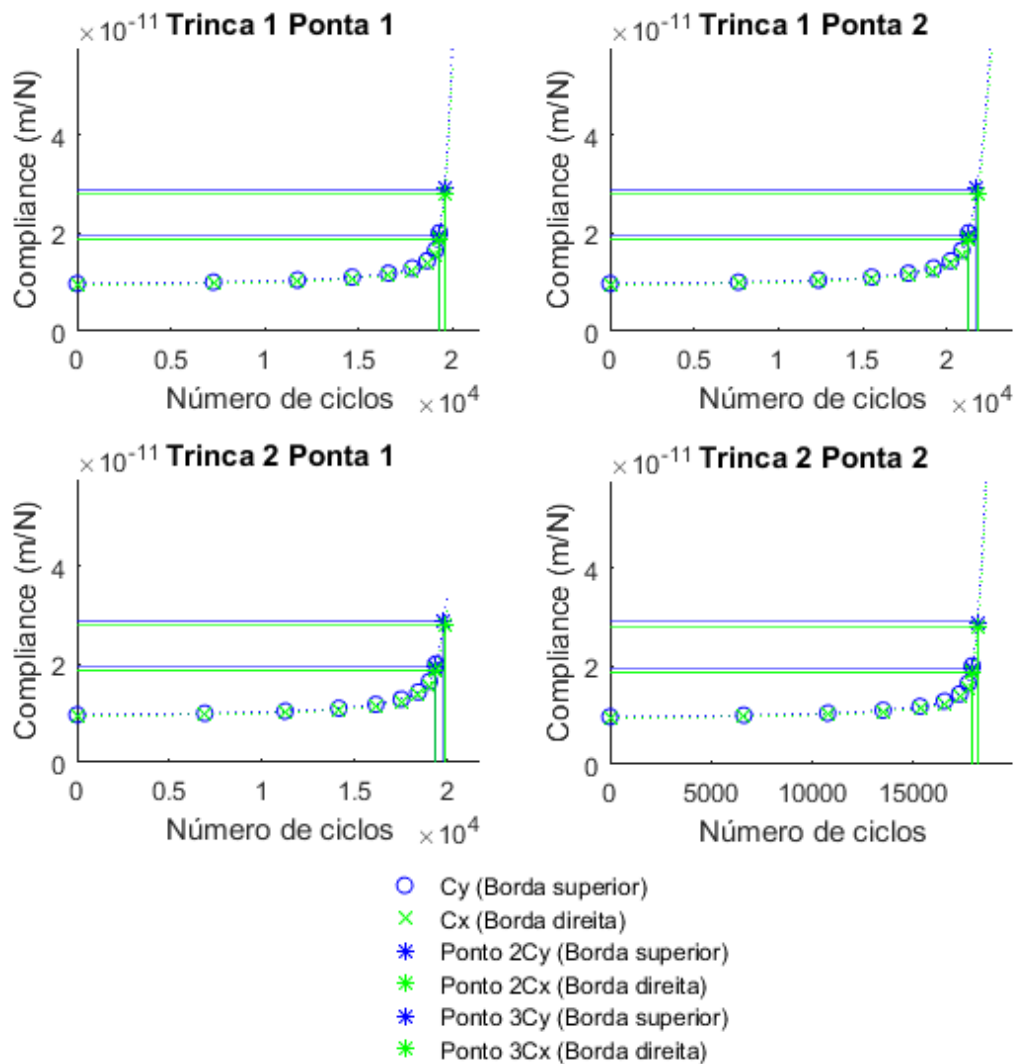


Figura 4.31 - Malha deformada para o elemento na posição 2

Como resultado, pode-se perceber que como as tensões possuem magnitude semelhantes ($\sigma_x = 238,33$ MPa e $\sigma_y = 246,16$ MPa) as deformações no elemento apresentam uma certa simetria. Com isso, as duas bordas apresentam *compliance*, devendo-se avaliar o menor número de ciclos

para cada ponta de trinca que resulta no primeiro valor de 2 x C e 3 x C. O resultado aponta $N(2C) = 1. e+03$ e $N(3C) = 1.8636e+03$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	9.6541e-12	1.9308e-11	1.9259e+04	2.8962e-11	1.9559e+04
C1 T2	9.6541e-12	1.9308e-11	2.1184e+04	2.8962e-11	2.1749e+04
C2 T1	9.6541e-12	1.9308e-11	1.9333e+04	2.8962e-11	1.9830e+04
C2 T2	9.6541e-12	1.9308e-11	1.7851e+04	2.8962e-11	1.8136e+04

(i) Borda superior

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	9.3764e-12	1.8753e-11	1.9285e+04	2.8129e-11	1.9585e+04
C1 T2	9.3764e-12	1.8753e-11	2.1234e+04	2.8129e-11	2.1797e+04
C2 T1	9.3764e-12	1.8753e-11	1.9377e+04	2.8129e-11	1.9873e+04
C2 T2	9.3764e-12	1.8753e-11	1.7876e+04	2.8129e-11	1.8161e+04

(ii) Borda direita

Figura 4.32 - Número de ciclos x *compliance* das bordas para o elemento na posição 2

4.3.3 Considerações para a posição 3

A Tabela 4.9 mostra o campo de tensões resultante das variáveis do Estudo de Caso 2 (Tabela 4.6) considerando o elemento micro na posição 3 da Figura 4.1.

Tabela 4.9 - Campo de tensões (MPa) na posição 3

σ_x	401,74
σ_y	159,22
τ	134,21

A Figura 4.33 ilustra os incrementos de trinca. Esta análise também resultou em 8 propagações. Em seguida, a Figura 4.34 representa a malha deformada após todos os incrementos. A cada incremento tem-se os pontos para a construção da curva de vida à fadiga (N) x *compliance* média das bordas, Figura 4.35.

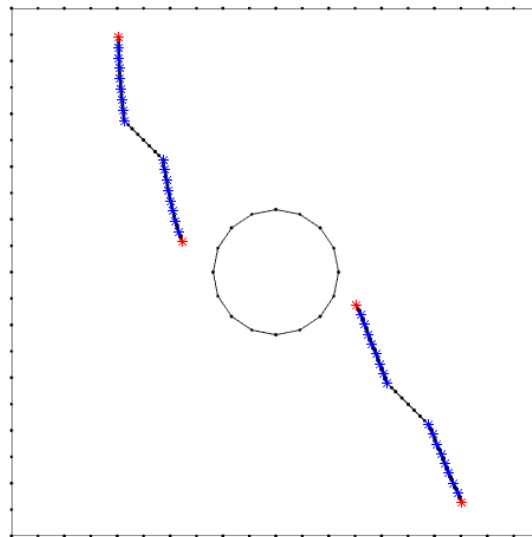


Figura 4.33 - Propagação de trincas para a posição 3

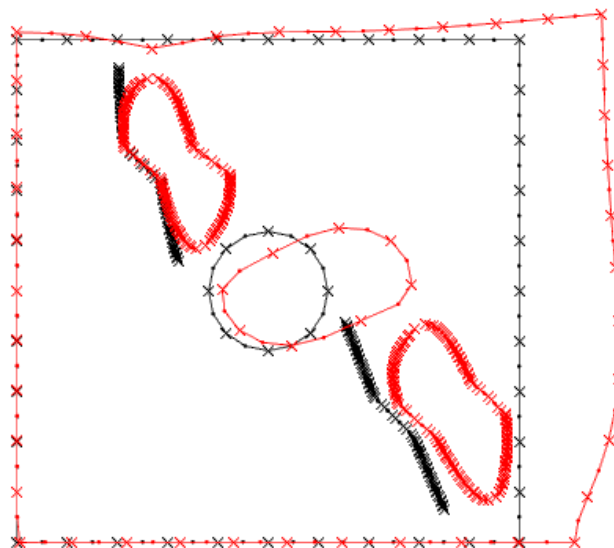
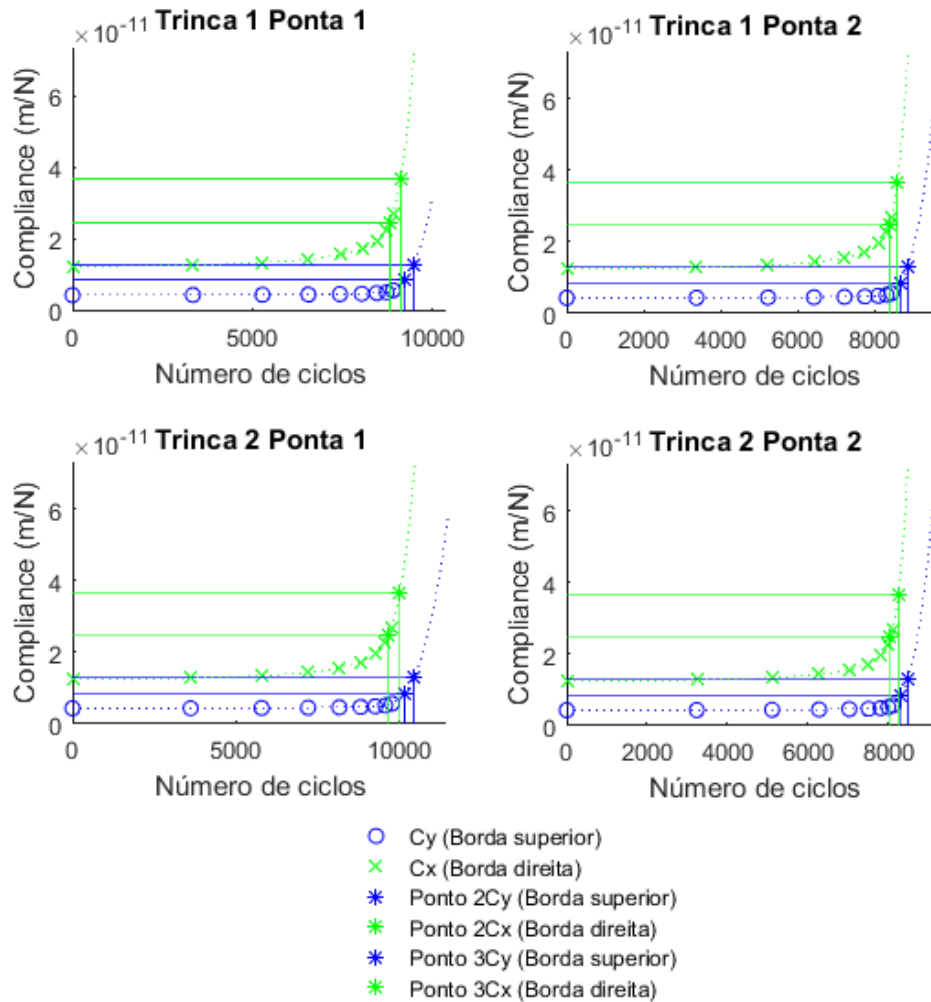


Figura 4.34 - Malha deformada para o elemento na posição 3

Como resultado, percebe-se que como σ_x possui magnitude bem maior que σ_y , o elemento possui deformação maior na borda direita. Nesta análise, as duas bordas também apresentam *compliance*, devendo-se avaliar o menor número de ciclos para cada ponta de trinca que resulta no primeiro valor de $2 \times C$ e $3 \times C$. O resultado aponta $N(2C) = 8.0498e+03$ e $N(3C) = 8.2396e+03$.



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	4.2776e-12	8.5553e-12	9.2426e+03	1.2833e-11	9.4796e+03
C1 T2	4.2776e-12	8.5553e-12	8.6771e+03	1.2833e-11	8.8527e+03
C2 T1	4.2776e-12	8.5553e-12	1.0143e+04	1.2833e-11	1.0416e+04
C2 T2	4.2776e-12	8.5553e-12	8.3227e+03	1.2833e-11	8.4776e+03

(i) Borda superior

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	1.2290e-11	2.4579e-11	8.8219e+03	3.6869e-11	9.1182e+03
C1 T2	1.2290e-11	2.4579e-11	8.3683e+03	3.6869e-11	8.5821e+03
C2 T1	1.2290e-11	2.4579e-11	9.6567e+03	3.6869e-11	1.0003e+04
C2 T2	1.2290e-11	2.4579e-11	8.0498e+03	3.6869e-11	8.2396e+03

(ii) Borda direita

Figura 4.35 - Número de ciclos x *Compliance* para o elemento na posição 3

Das Figuras 4.29, 4.32 e 4.35, nota-se que quando a *compliance* atinge o valor de três vezes a *compliance* inicial, o elemento já se torna instável e tende a deformar infinitamente. A seguir é mostrado os resultados finais das realizações analisadas em cada posição.

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da utilização da metodologia proposta. Os resultados foram divididos em duas análises de mil realizações cada, sendo a Análise 1 para avaliação geral do método e a Análise 2 para validação dos resultados.

5.1 ANÁLISE 1

A Análise 1 foi utilizada para avaliação geral do método. Esta consiste em mil realizações com variação dos parâmetros carregamento normal (P), carregamento cisalhante (Q), constantes de Paris (C e m), o raio do círculo (r) e o tamanho inicial das trincas (L1 e L2) seguindo uma distribuição lognormal destacada no APÊNDICE A – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 1.

5.1.1 Posição 1 (Meio)

A Figura 5.1 refere-se aos resultados para a análise micro na Posição 1. Percebe-se que a instabilidade ocorre para ciclos de carga variando entre 10^3 e 10^6 , conforme Tabela 5.1 .

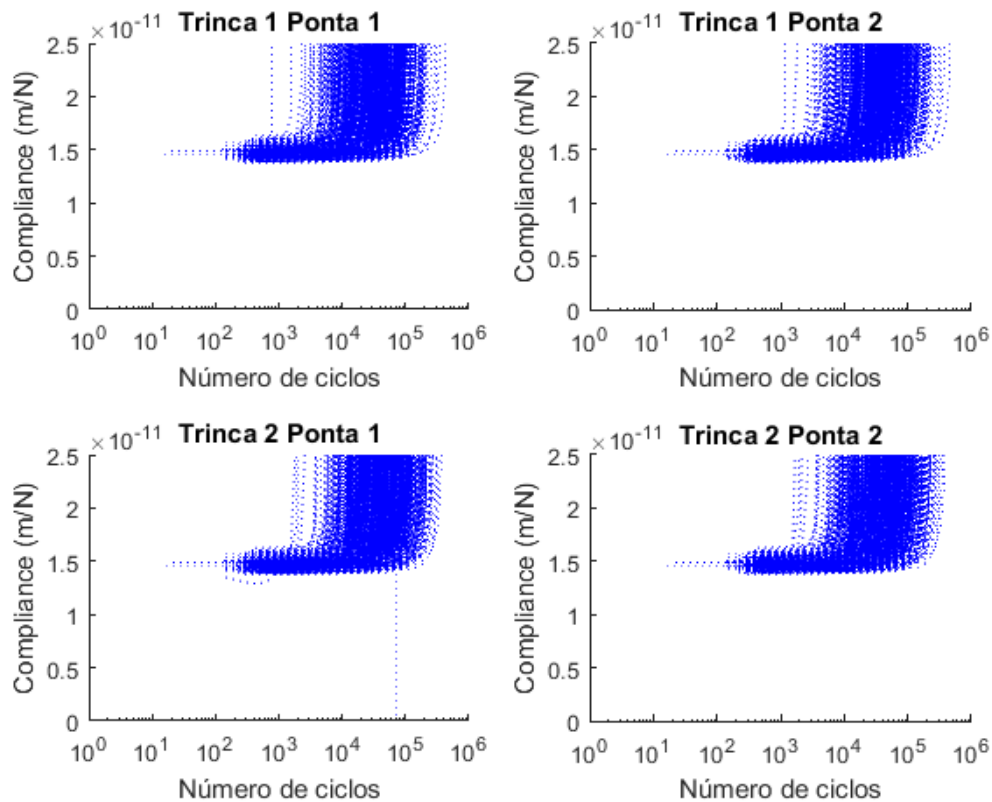


Figura 5.1 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 1

Tabela 5.1 – Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 1

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Superior	1.6197e-11	1.3783e-11	4.7247e+05	1.1010e+03	4.8063e+05	1.1132e+03

5.1.2 Posição 2 (Superior)

A Figura 5.2 refere-se aos resultados para a análise micro na Posição 2. Nota-se que para este caso a instabilidade ocorre para ciclos de carga variando entre 10^2 e 10^5 de acordo com a Tabela 5.2.

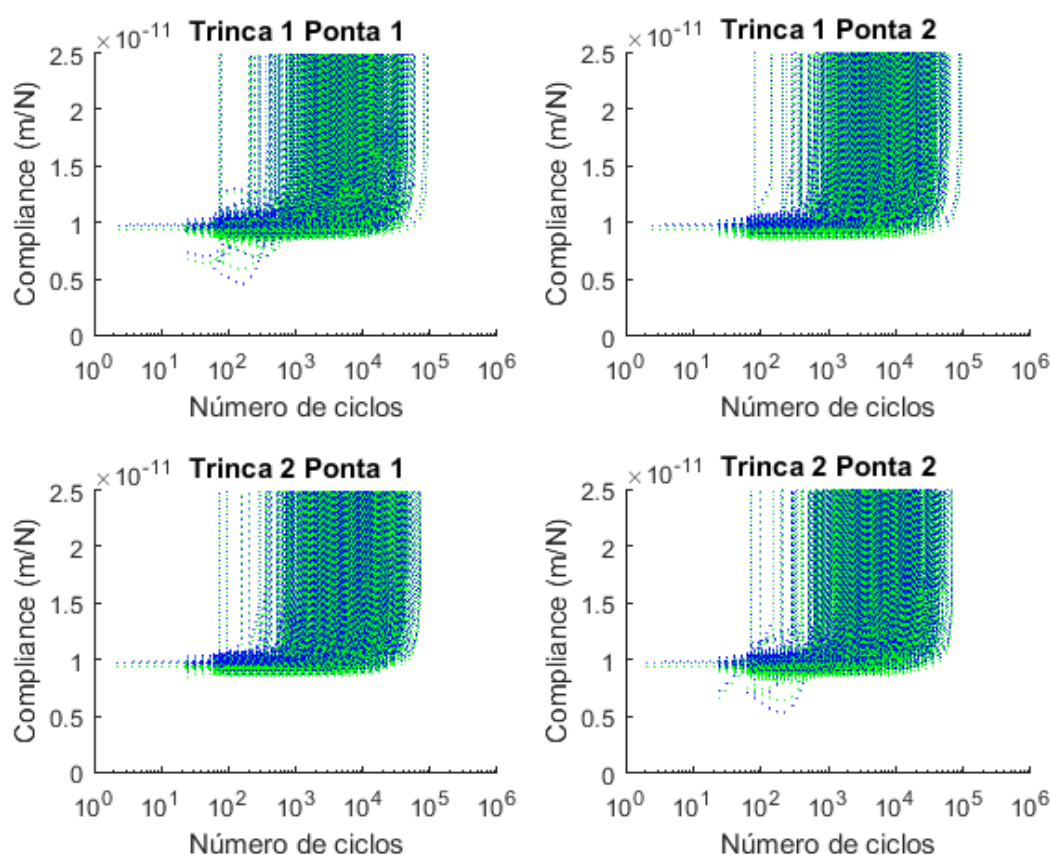


Figura 5.2 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 2

Tabela 5.2 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 2

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Direita	1.0517e-11	8.4726e-12	9.3000e+04	1.1181e+02	9.4196e+04	1.1196e+02
Superior	1.0839e-11	8.7040e-12	9.2864e+04	1.1182e+02	9.4175e+04	1.1196e+02

5.1.3 Posição 3 (Lado)

A Figura 5.3 refere-se aos resultados do elemento micro na Posição 3. Pode-se notar que a instabilidade ocorre já em baixos ciclos de carga, variando entre 10^1 e 10^5 , mostrado na Tabela 5.3.

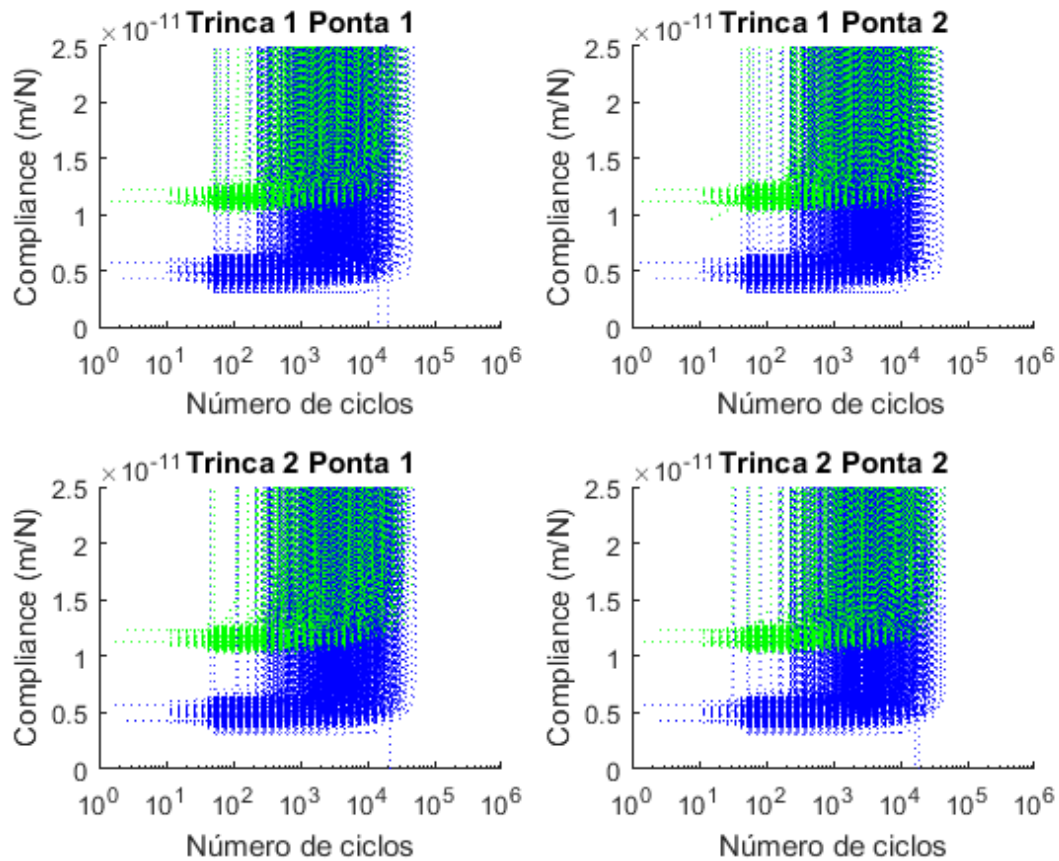


Figura 5.3 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 1 na Posição 3

Tabela 5.3 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 1 na Posição 3

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Direita	1.2942e-11	1.0138e-11	4.9702e+04	4.6576e+01	5.1154e+04	4.6704e+01
Superior	6.9934e-12	3.1218e-12	5.1785e+04	4.6737e+01	5.2591e+04	4.6785e+01

5.1.4 Tolerância ao dano

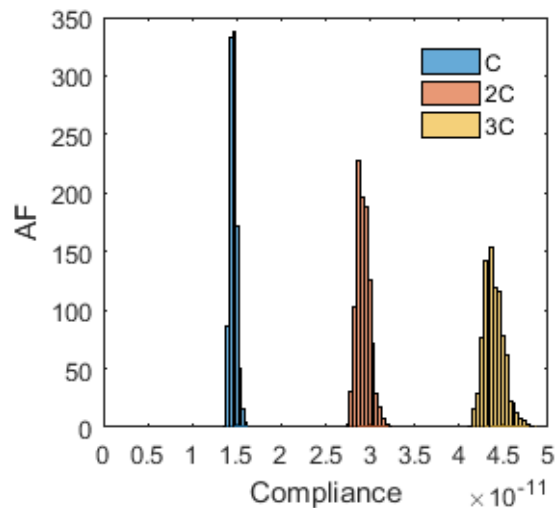
A Tabela 5.4 mostra o número de ciclos mínimos que leva o elemento micro a atingir 3C, ocorrendo a instabilidade. Considerar o menor valor de N significa o pior caso, visto que é o menor número de ciclos que já atinge 3C, sendo, portanto, a favor da segurança. Para a Posição

1 a instabilidade ocorre em $1.1132e+03$ ciclos. Para a Posição 2, em $1.1196e+02$ ciclos. Neste caso há uma redução de ciclos em relação ao caso anterior (dez vezes menos ciclos). Na Posição 3, a instabilidade ocorre em $4.6704e+01$ ciclos, sendo a pior situação de defeitos iniciais.

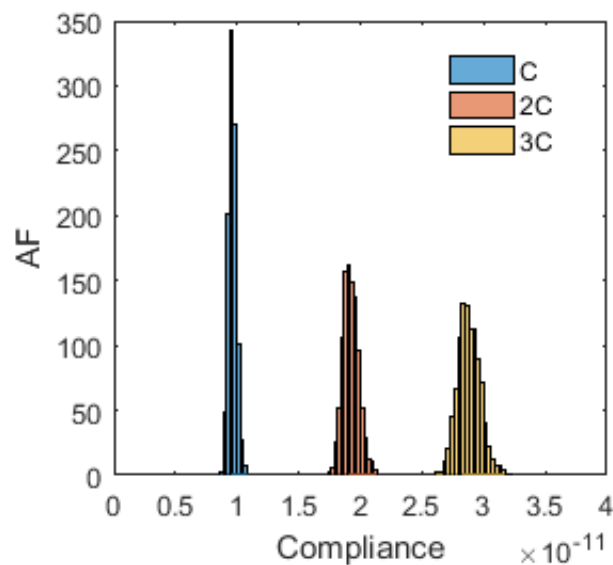
Tabela 5.4 - Número de ciclos mínimos que leva o elemento micro à instabilidade

Posição 1	Posição 2	Posição 3
$1.1132e+03$	$1.1196e+02$	$4.6704e+01$

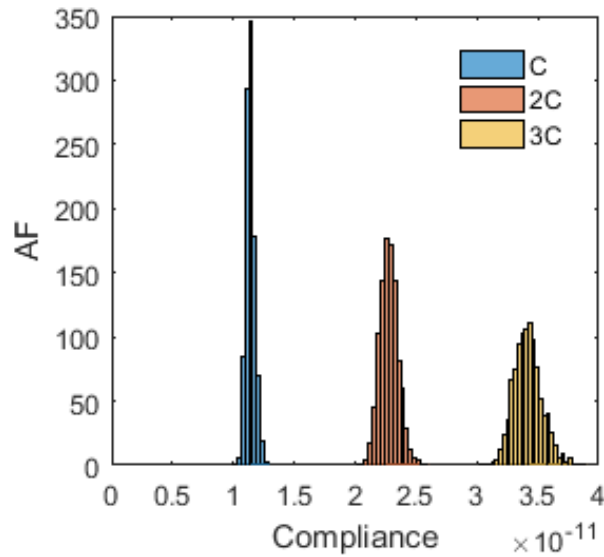
A Figura 5.4 mostra a Frequência Absoluta (AF) das incidências dos valores das *compliances* correspondentes à *Compliance* Inicial (C), 2 x *Compliance* Inicial (2C) e 3 x *Compliance* Inicial (3C), sendo Figura 5.4 (a), (b) e (c) para o elemento micro nas Posições 1, 2 e 3, respectivamente. Nota-se um maior desvio padrão, conseqüentemente uma maior dispersão para maiores valores de *compliance*.



(a) Posição 1



(b) Posição 2



(c) Posição 3

Figura 5.4 - Frequência Absoluta (AF) das incidências dos valores de *Compliances*
 (C – *Compliance* Inicial, 2C – 2 x *Compliance* Inicial, 3C – 3 x *Compliance* Inicial)

A Figura 5.5 mostra a função densidade de probabilidade $f(N_{3C})$ para análise da tolerância ao dano do elemento micro. Nela percebe-se que o elemento na Posição 3 apresenta uma curva mais acentuada e consequentemente uma menor variabilidade de tolerância ao dano, isto é, a faixa de variação de N que atinge 3C limita-se em $0.4e+05$. Já o elemento na Posição 2, tem variação de N que atinge 3C até $0.7e+05$. A Posição 1 apresenta uma curva mais dispersa, isso significa uma maior variação dos valores de N_{3C} . Isto é comprovado pela Tabela 5.5 pelo maior coeficiente de variação.

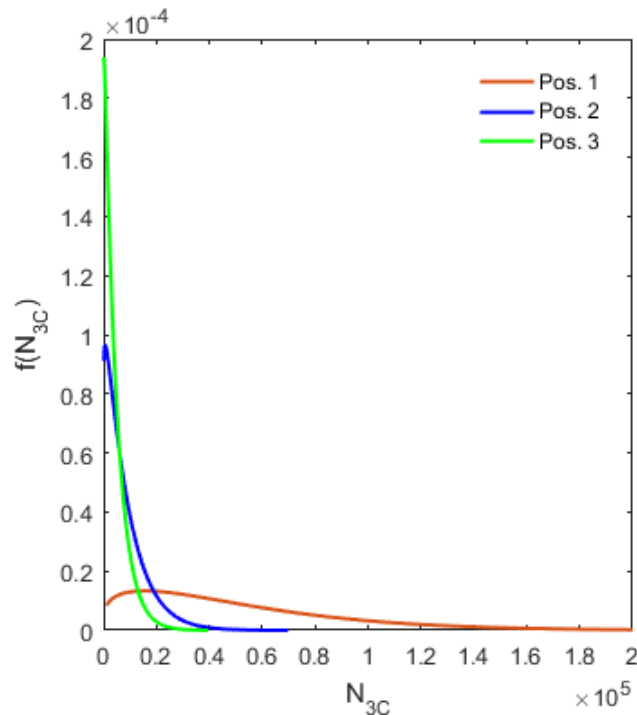


Figura 5.5 - Vida à Fadiga do elemento micro para 3C

Tabela 5.5 - Valores estatísticos de Vida à Fadiga para 3C

	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação
Posição 1	5.1e+04	4.5e+04	1.1333
Posição 2	8.5e+03	9.0e+03	0.9444
Posição 3	4.7e+03	5.1e+03	0.9216

Considerando Vida à Fadiga Característica (N_k) o número de ciclos com probabilidade de não atingir X%, a Figura 5.6 mostra que 75% dos valores N estão abaixo de N_k , na Posição 1, $N_k = 7.1e+04$; na Posição 2, $N_k = 1.1e+04$ e na Posição 3, $N_k = 0.8e+04$. E, para 95%, na Posição 1, $N_k = 13.1e+04$; na Posição 2, $N_k = 2.8e+04$ e na Posição 3, $N_k = 1.3e+04$.

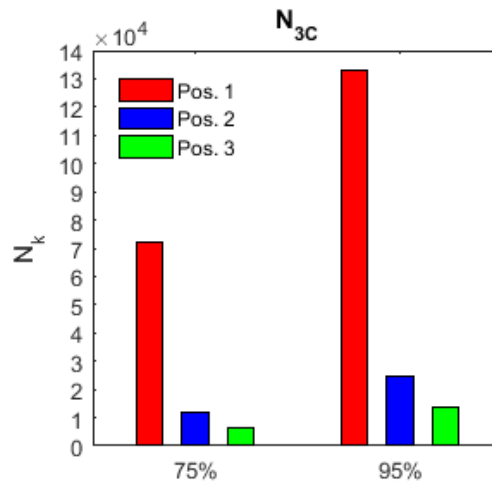


Figura 5.6 - Vida à Fadiga característica

A Figura 5.7 mostra a probabilidade de falha das três posições. Pode-se perceber que a probabilidade de falha é maior para a Posição 3, seguido da Posição 2 e, posteriormente, da Posição 1. A probabilidade de falha é calculada baseada na simulação de Monte Carlo a partir das Equações (66) e (67).

$$p_f = \frac{N_{G<0}}{N_{total}} \quad (66)$$

$$G(N_{3C}) = \underbrace{\lambda \mu_{N_{3C}}}_{\text{vida à fadiga que a peça tem que resistir}} - \underbrace{N_{3C}}_{\text{vida à fadiga da solicitação}} \quad (67)$$

Sendo p_f a probabilidade de falha do elemento estrutural e G a função estado limite. Se o estado limite é violado (i.e. $G < 0$), o elemento estrutural “falha”. Em que, $N_{G<0}$ denota o número de simulações em que $G < 0$, N_{total} o número total de simulações, λ um fator de segurança e $\mu_{N_{3C}}$ média da vida à fadiga da solicitação e N_{3C} a vida à fadiga.

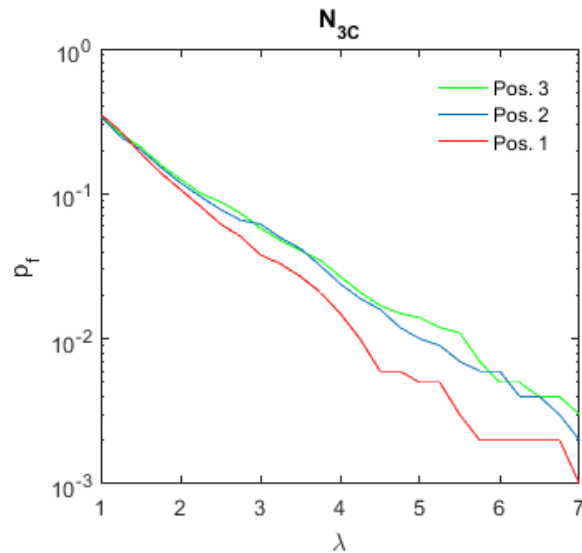


Figura 5.7 - Probabilidade de falha

Percebe-se ainda na Figura 5.7 que aumento o fator de segurança λ , reduz a probabilidade de falha do elemento estrutural.

5.2 ANÁLISE 2

A Análise 2 foi utilizada para validação dos resultados encontrados pelo método. Esta consiste em outras mil realizações com variação dos parâmetros carregamento normal (P), carregamento cisalhante (Q), constantes de Paris (C e m), o raio do círculo (R) e o tamanho inicial das trincas (L1 e L2) seguindo uma distribuição lognormal destacada no APÊNDICE B – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 2.

5.2.1 Posição 1 (Meio)

A Figura 5.8 refere-se aos resultados da segunda análise considerando o elemento micro na Posição 1. Esta análise corrobora os dados obtidos na anterior e percebe-se novamente que a instabilidade ocorre para ciclos de carga variando entre 10^3 e 10^6 , conforme Tabela 5.6.

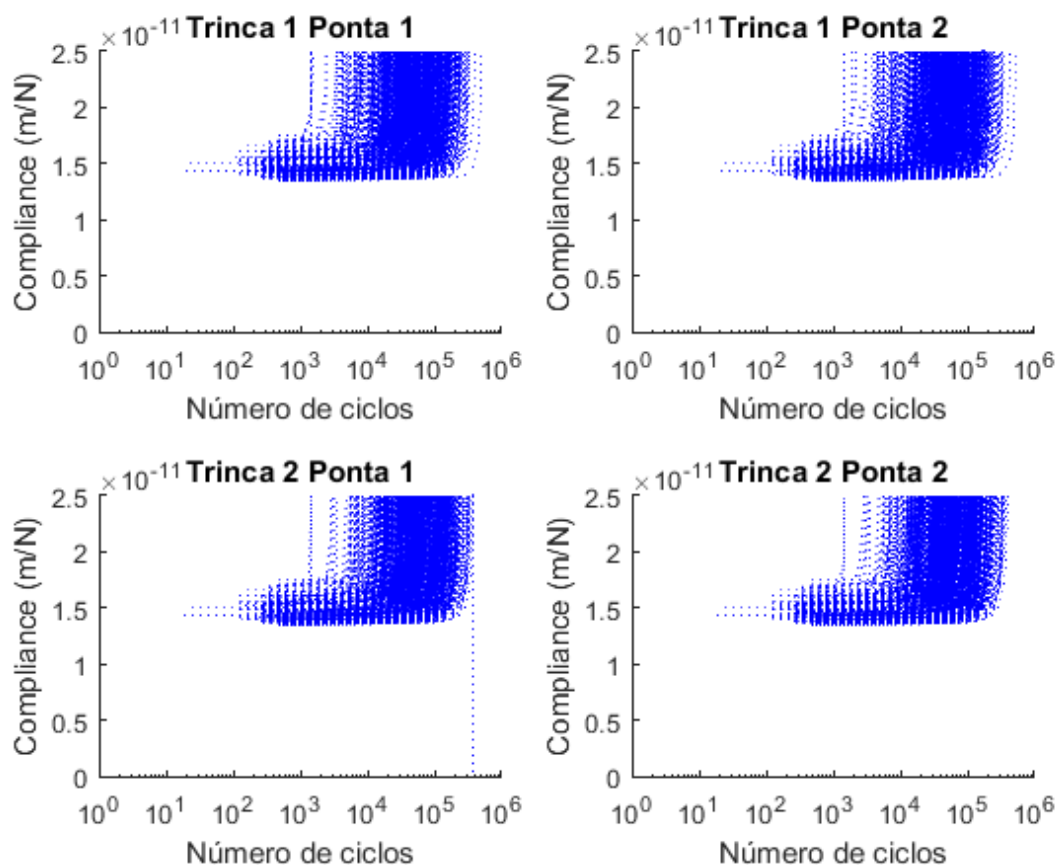


Figura 5.8 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 1

Tabela 5.6 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 1

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Superior	1.7415e-11	1.3420e-11	5.1858e+05	1.4840e+03	5.2030e+05	1.4875e+03

5.2.2 Posição 2 (Superior)

A Figura 5.9 refere-se aos resultados para a análise micro na Posição 2. Novamente os dados obtidos na análise anterior são similares com instabilidade ocorrendo para ciclos de carga variando entre 10^1 e 10^5 de acordo com a Tabela 5.7.

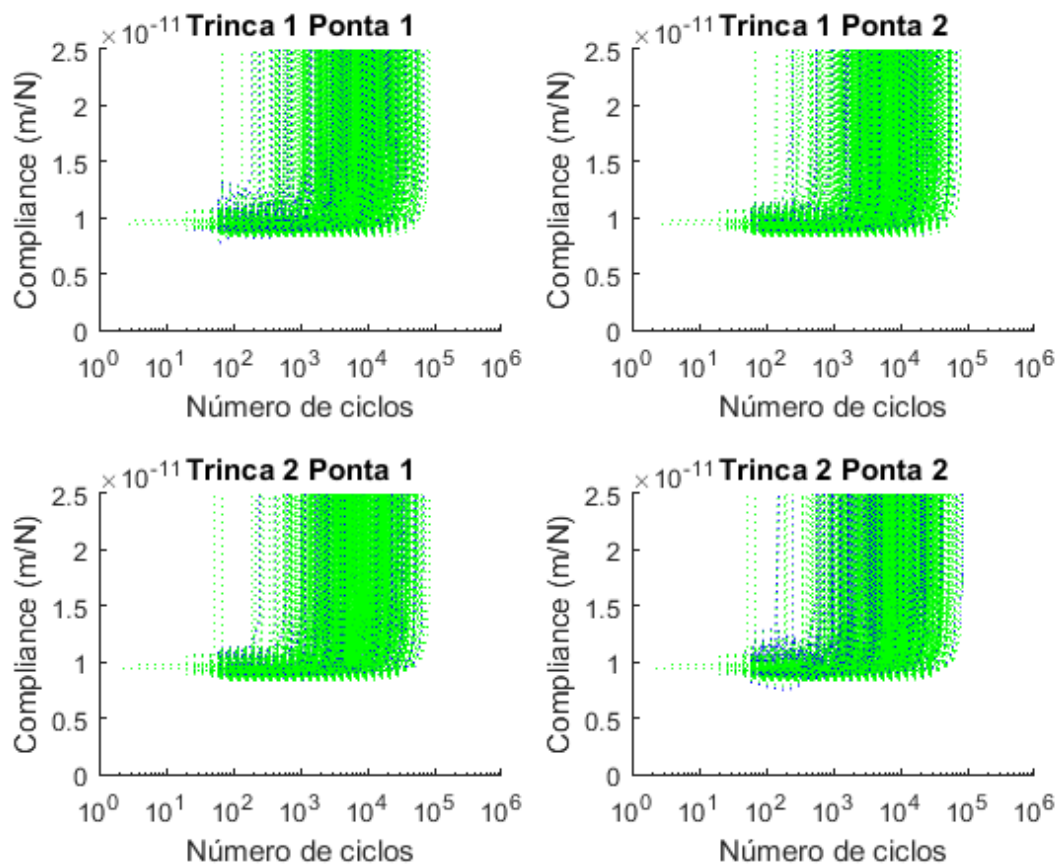


Figura 5.9 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 2

Tabela 5.7 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 2

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Direita	1.1128e-11	8.2998e-12	8.3591e+04	6.5940e+01	8.4455e+04	6.6112e+01
Superior	1.1173e-11	8.2985e-12	8.3576e+04	6.5979e+01	8.4438e+04	6.6159e+01

5.2.3 Posição 3 (Lado)

A Figura 5.10 refere-se aos resultados do elemento micro na Posição 3. Os resultados mostram que novamente a instabilidade ocorre em baixos ciclos de carga, variando entre 10^0 e 10^5 , mostrado na Tabela 5.8.

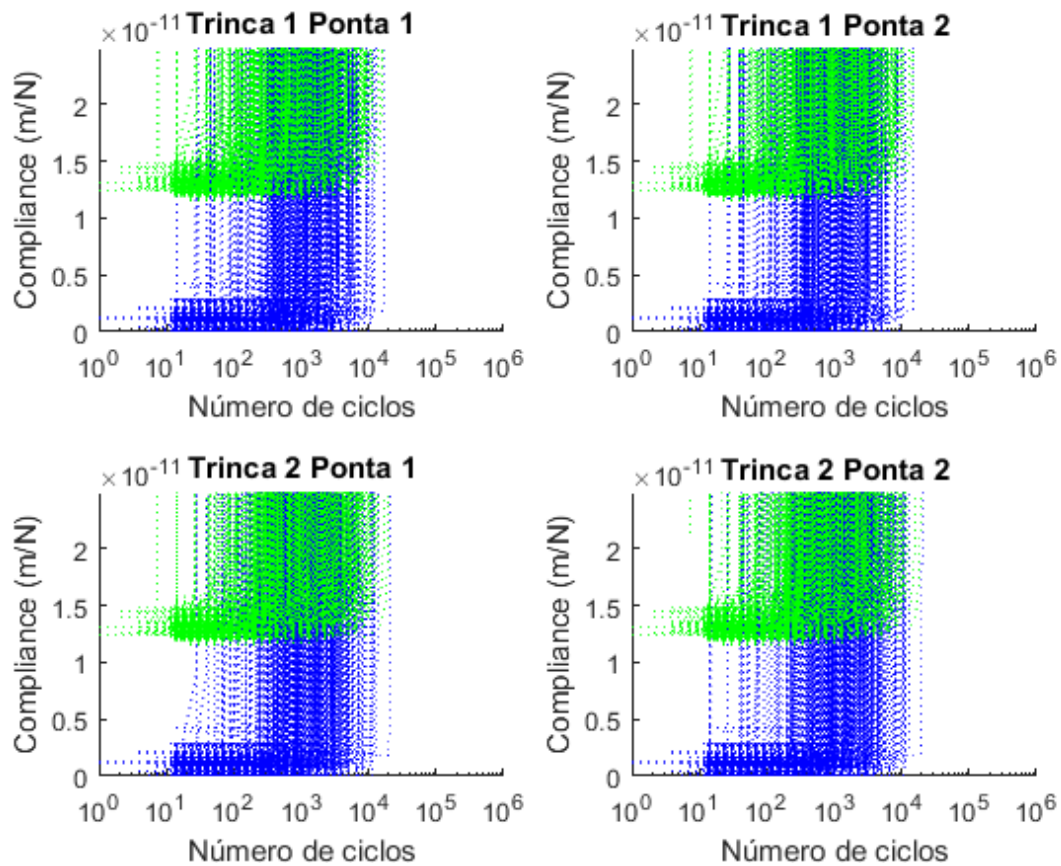


Figura 5.10 - Todas as curvas *Compliance* x Número de Ciclos da Análise 2 na Posição 3

Tabela 5.8 - Faixa de variação dos resultados das curvas da Análise 2 na Posição 3

Borda	<i>Compliance</i> Inicial (m/N)		Número de ciclos para 2 x <i>Compliance</i> Inicial		Número de ciclos para 3 x <i>Compliance</i> Inicial	
	Máxima	Mínima	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
Direita	1.5753e-11	1.1505e-11	1.9680e+04	2.7292e+00	2.0009+04	2.7474e+00
Superior	4.2440e-12	4.8177e-15	2.0067e+04	-	2.0142e+04	-

Obs.: Não foi possível detectar os mínimos para a borda superior, visto que para baixos ciclos, a *compliance* já tende ao infinito.

A seguir é apresentada uma visão geral do trabalho realizado, concluindo-se os resultados obtidos e apresentando sugestões de possíveis outras análises que podem ser previstas para trabalhos futuros a partir da utilização desta metodologia adotada.

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

O uso do Método dos Elementos de Contorno, como um método numérico, foi essencial pois através de sua flexibilidade foi possível desenvolver a técnica de tolerância ao dano avaliando a *compliance* das bordas de microelementos em uma chapa metálica de fuselagem de aeronave. A automação das milhares de análises realizadas permitiram o tratamento estatístico para prever a pior posição que a chapa pode ter defeitos iniciais. A partir desta técnica este estudo mostrou que quando os defeitos iniciais ocorrem na borda da solitação externa (Posição 3 da Figura 4.1) para baixos números de ciclos o microelemento tem alta *compliance* tendendo à instabilidade repentinamente, tratando-se portanto do pior caso. A Posição 2 vem logo em seguida, estando suscetível à instabilidade em números de ciclos ligeiramente maior que a Posição 3. A Posição 1 trata-se da situação com menor probabilidade de falha, requerendo alto número de ciclos de carregamento para a ocorrência da instabilidade.

A automação e utilização dos programas computacionais BEMLAB2D e BemCracker2D foram de cunho essencial para realização do trabalho ao possibilitar a avaliação de milhares de análises com múltiplas variáveis. Dessa forma foi possível a observação de que quando a *compliance* atinge o valor de 3 x *compliance* inicial, leva-se à instabilidade local do micro elemento. Com a série de dados, foi possível realizar um tratamento estatisticamente para definir a tolerância ao dano de forma a evitar a ocorrência de um Estado Limite.

De forma geral, a utilização desta metodologia se mostra como uma alternativa à análise de tolerância ao dano tendo como referência ao processo adotado pela bibliografia clássica em que o dano é considerado a partir de um tamanho crítico de trinca. Neste método utilizado desconsidera-se o tamanho crítico e a *compliance* é avaliada como variável definidora da instabilidade.

Com estas conclusões, a seguir é apresentada algumas sugestões para trabalhos futuros de forma a dar continuação da metodologia adotada e desenvolvimento da pesquisa realizada.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com estes dados observa-se como sugestões para trabalhos futuros:

- análise do elemento macro com outros materiais, em especial compósitos que estão sendo bastante utilizados neste tipo de estruturas;
- adoção de novas séries de solicitações podendo prever diversos processos de danos possíveis;
- análise micro com trincas e furos em posições variáveis observando as diferenças em relação ao modelo proposto;
- novas implementações nos programas propostos, mais especificamente no BemLab2D e BemCracker2D, de maneira a possibilitar uma análise multiescala única a cada realização, tornando-se uma ferramenta computacional poderosa em análise multiescala, mecânica da fratura, e tolerância ao dano utilizando o Método dos Elementos de Contorno;
- construção de modelos tridimensionais utilizando os métodos desenvolvidos nesta pesquisa;
- utilização de métodos de confiabilidade e quantificação de incerteza em sistemas complexos da engenharia.

REFERÊNCIAS

- ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method - Application in Solids and Structures**. [S.l.]: Wiley, v. 2, 2002.
- ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: Fundamentals and Applications**. [S.l.]: CRC Press, 2005.
- BAPTISTA, C. Ensaio mecânico: Ensaio de fadiga, 2016. Universidade de São Paulo. Notas de aula.
- BARTER, S. et al. An experimental evaluation of fatigue crack growth. **Engineering failure analysis**, Australia, n. 12, p. 99-128, 2005.
- BATHE, K. J.; WILSON, E. L. **Numerical methods in finite element analysis**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1976.
- BAUXBAUM, O.; HUTH, H. Expansion of cracked fastener holes as a measure of extension of lifetime to repair. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, p. 689-698, 1987.
- BAZANT, Z. P.; PLANAS, J. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. **CRC Press**, London, 1998.
- BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, n. 17, p. 387-404, 1981.
- BOLLER, C.; BUDERATH, M. Fatigue in aerostructures—where structural health monitoring can contribute to a complex subject. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 365, p. 561-587, 2007.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element methods for engineers**. New York: Halstead Press, 1978.
- BREITBARTH, E.; BESEL, M.; REH, S. Biaxial testing of cruciform specimens representing characteristics of a. **International Journal of Fatigue**, Cologne, Germany, n. 108, p. 116-126, 2018.
- BROEK, D. **The practical use of fracture mechanics**. 1. ed. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- BROEK, D.; SCHIJVE, J. **The influence of the mean stress on the propagation of fatigue cracks in aluminium alloy sheet**. NLR-TR M2111. [S.l.]: [s.n.]. 1963.
- BROT, A.; PELEG-WOLFIN, Y. **The damage tolerance behavior of integrally stiffened metallic structures**. 48th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. [S.l.]: [s.n.]. 2008.

CASTRO, P. T. **Problemas de fadiga e fractura em estruturas de aviões fabricadas em alumínio**. Lisboa: [s.n.], 2012.

DELGADO NETO, A. M. BEMLAB2D: Interface gráfica de modelagem, visualização e análise com elementos de contorno - Uma aplicação em problemas elastostáticos, Brasília, p. 113, 2017. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília..

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**. 4. ed. S. C.: Prentice Hall, 2012.

ERDOGAN, F.; SIH, G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. **Journal of basic engineering**, v. 85, p. 519-527, 1963.

EWALDS, H. L. **Fracture Mechanics**. 1. ed. London: Edward Arnold Publishers, 1984.

GOMES, G. Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em problemas de plasticidade 2D orientada a objeto, Brasília, p. 165, 2006. Universidade de Brasília.

GOMES, G. et al. **Multiscale analysis of multiple cracks in aircraft fuselage**. XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. [S.l.]: [s.n.]. 2018. p. 218-221.

GOMES, G.; DELGADO NETO, A. M.; WROBEL, L. C. **Modelling and 2D cracks view using dual boundary integral equation**. XXXCII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Brasília: [s.n.]. 2016.

GOMES, G.; MIRANDA, A. C. O. Analysis of crack growth problems using the object-oriented program BemCracker2D. **FRATTURA ET INTEGRITA STRUTTURALE**, v. 12, p. 67-85, 2018.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 221, p. 163-198, 1921.

GRIFFITH, A. A. The theory of rupture. **First International Congress of Applied Mechanics**, Waltman, Delft, Netherlands, n. In C. B. Biezeno and J. M. Burgers, p. 55-63, 1924.

HUTCHINSON, J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, n. 16, p. 13-31, 1968.

HUTCHINSON, J. W. **ASME Timoshenko medal acceptance speech**. ASME Applied Mechanics Division newsletter. [S.l.]: [s.n.]. 2003. p. 1,3 and 4.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Transactions of the Institute of Naval Architects**, v. 55, p. 219-241, 1913.

INGRAFFEA, A. R.; BLANDFORD, G. E.; LIGGET, J. A. **Automatic Modelling of Mixed-Mode Fatigue and Quasi-Static Crack Propagation Using the Boundary Element Method**.

Proc. of Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium, ASTM STP 791. [S.l.]: J.C. Lewis and G. Sines. 1983. p. 407-I 426.

IRWIN, G. R. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminium Alloys. **Sagamore Research Conference Proceedings**, v. 2, p. 289-305, 1956.

IRWIN, G. R. Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 361-364, 1957.

JANSSEN, M.; ZUIDEMA, J.; WANHILL, R. J. H. **Fracture mechanics**. 2. ed. Netherlands: VSSD, 2002.

JEONG, D. Y.; TONG, P. Onset of multiple site damage and widespread fatigue damage in aging airplanes. **International Journal of Fracture**, v. 85, p. 185-200, May 1997.

JISAN, J.; XIAOCHUAN, Y. Dynamic fracture analysis technique of aircraft fuselage containing damage subjected to blast. **Mathematical and Computer Modelling. Elsevier**, China, 2011.

JOHNSON, K. L. **Contact mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.

KHAN, S.; KINTZEL, O.; MOSLER, J. Experimental and numerical lifetime assessment of Al 2024 sheet. **International Journal of Fatigue**, Geesthacht, Germany, n. 37, p. 112-122, October 2011.

KREJSA, M. et al. Probabilistic prediction of fatigue damage based on linear fracture mechanics. **Frattura ed Integrità Strutturale**, p. 143-159, 2017.

LEITE, P. G. P.; GOMES, G. **Numerical simulation of fatigue crack growth under mixed-mode condition (I+II)**. XXXVIII IberianLatin American Congress on Computational Methods in Engineering. Florianópolis: [s.n.]. 2017.

LIU, T. H. et al. **A new testing method for fatigue of reinforced concrete beam**. Structure Congress 2008: Crossing borders. [S.l.]: [s.n.]. 2008.

LOPEZ, I.; SARIGUL-KLIJN, N. A review of uncertainty in flight vehicle structural damage monitoring. **Progress in Aerospace Science**, Davis CA USA, May 2010.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 2. ed. Chichester, United Kingdom: Wiley, 1999. 456 p.

NEWMAN JR., J. C.; PHILLIPS, E. P.; SWAIN, M. H. Fatigue-life prediction methodology using small-crack theory. **International Journal of Fatigue**, Hampton, VA, USA, n. 21, 1999.

OLIVEIRA, T. A. A. et al. **Evaluation of cracked fuselage subject to contact mechanics**. XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Paris: [s.n.]. 2018. p. 546-549.

PALMBERG, B.; BLOM, A. F.; EGGWERTZ, S. Probabilistic damage tolerance analysis of

aircraft structures. **Engineering Application of Fracture Mechanics**, v. 6, n. Probabilistic fracture mechanics and reliability, p. 47-130, 1987.

PARIS, P. C.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of basic engineering**, n. 85, p. 528-534, 1960.

PLATZ, R.; STAPP, C.; HANSELKA, H. Statistical approach to evaluating active reduction of crack propagation in aluminum panels with piezoelectric actuator patches. **Smart Materials and Structures**, v. 20, July 2011. ISSN 8.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1269-1287, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique. **International Journal of Fracture**, v. 55, p. 17-28, 1993.

PYO, C. R.; OKADA, H.; ATLURI, S. N. An elastic-plastic finite element alternating method for analyzing wide-spread fatigue damage in aircraft structures. **Computational Mechanics**, v. 16, p. 62, 1995.

RICE, J. R. The mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. **Syrup. on fatigue crack growth**, n. ASTM-STP-415, 1967.

RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. **Journal of applied mechanics**, v. 35, p. 379-386, 1968.

RODRIGUES, W. M.; GOMES, G. **Linkup de múltiplas trincas com elementos de contorno dual usando o programa BemCracker2D**. XIII SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional. Vitória/ES: [s.n.]. 2018.

SANFORD, R. J. **Principles of Fracture Mechanics**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. 416 p.

SCHIJVE, J. **Fatigue damage in aircraft structures, not wanted, but to be tolerated?** International Conference on Damage Tolerance of Aircraft Structure. Delft: [s.n.]. 2007. Keynote lecture.

SKORUPA, A. et al. Fatigue crack location and fatigue life for riveted lap joints in aircraft fuselage. **International Journal of Fatigue**, Krakow, Poland, n. 58, p. 209-217, 2014.

SKORUPA, M. et al. Effect of production variables on the fatigue behaviour of riveted lap joints. **International Journal of Fatigue**, Krakow, Poland, n. 32, p. 996-1003, 2010.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory Elasticity**. [S.l.]: McGraw Hill, 1951.

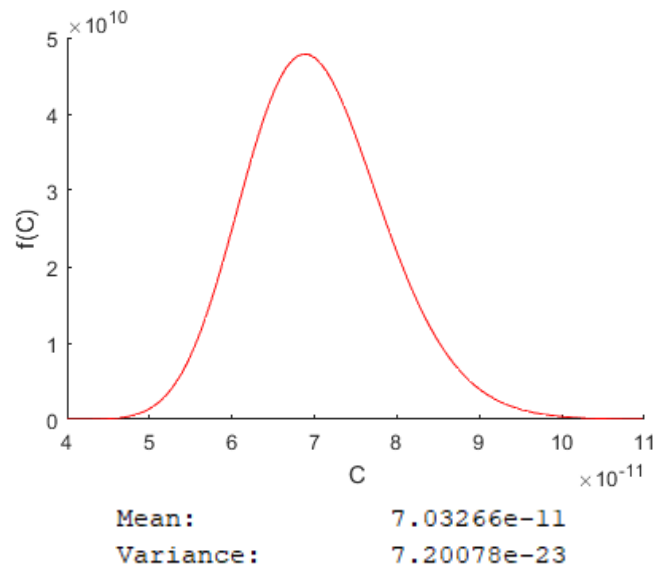
WANHILL, R. J. H. Milestone case histories in aircraft structural integrity. **Comprehensive**

structural integrity, v. 1, n. I. Milne, R. O. Ritchie, B. Karahaloo, p. 61-72, 2003.

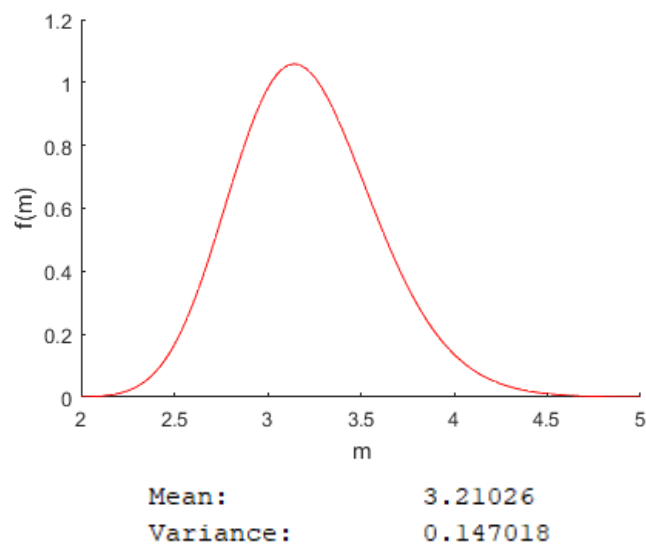
APÊNDICE A – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 1

Variáveis aleatórias da Análise 1

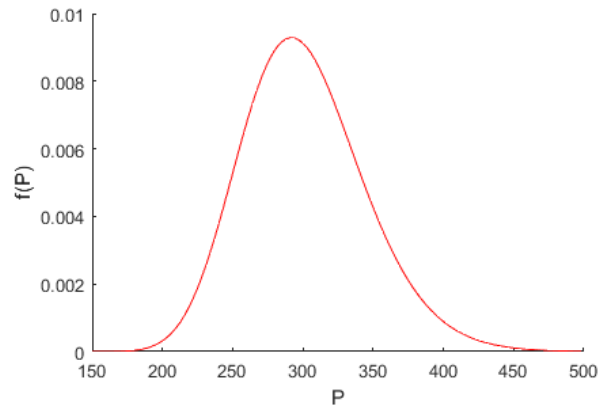
Variável aleatória	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação
C	7.0e-11	8.5e-12	0.12
m	3.2	0.4	0.12
P (MPa)	301.2	44.1	0.15
Q (MPa)	99.1	15.1	0.15
R (cm)	0.1	1.2e-02	0.12
L1 (cm)	0.1	9.8e-03	0.10
L2 (cm)	0.1	1.0e-02	0.10



Faixa de variação da constante C da Lei de Paris

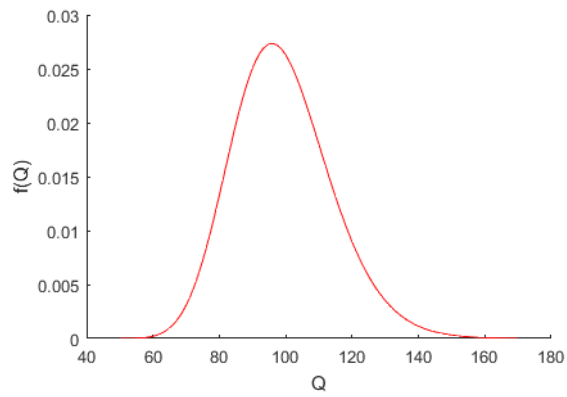


Faixa de variação da constante m da Lei de Paris



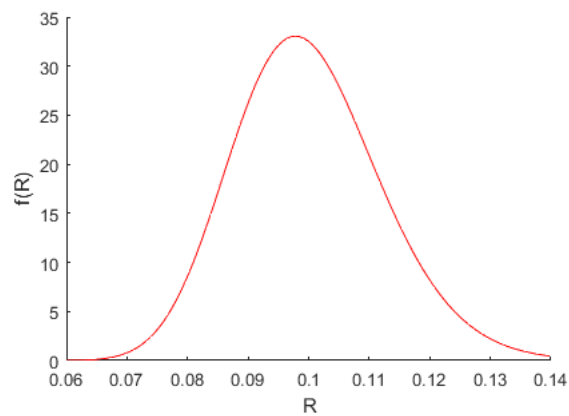
Mean: 301.213
 Variance: 1944.55

Faixa de variação da solicitação externa normal (P)



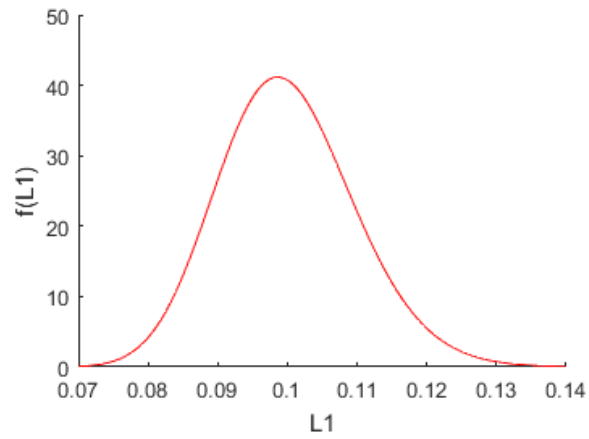
Mean: 99.1429
 Variance: 225.165

Faixa de variação da solicitação externa cisalhante (Q)



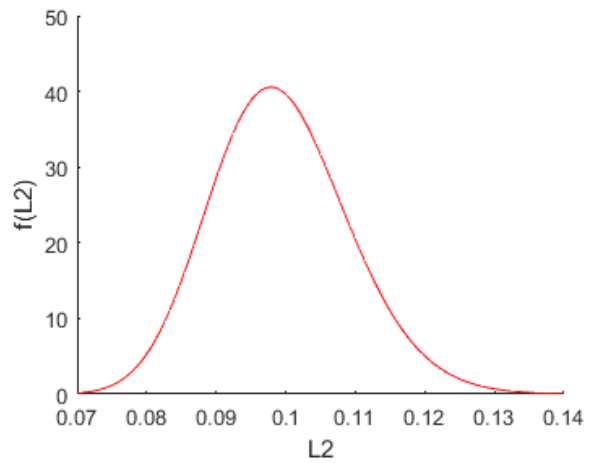
Mean: 0.100022
 Variance: 0.000151159

Faixa de variação do raio do furo circular central



Mean: 0.100021
Variance: 9.60659e-05

Faixa de variação do tamanho inicial da Trinca 1 (superior)



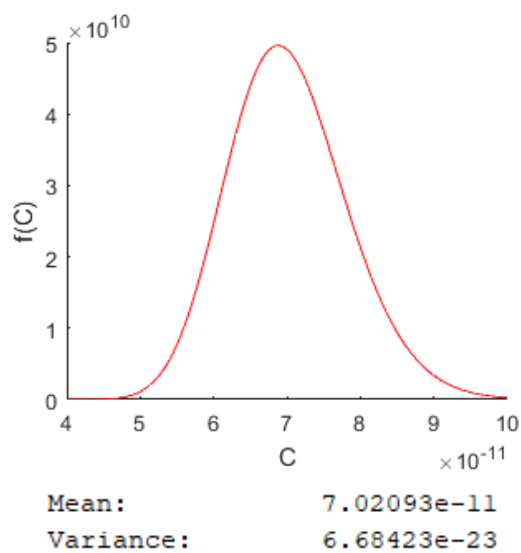
Mean: 0.0993244
Variance: 9.90249e-05

Faixa de variação do tamanho inicial da Trinca 2 (inferior)

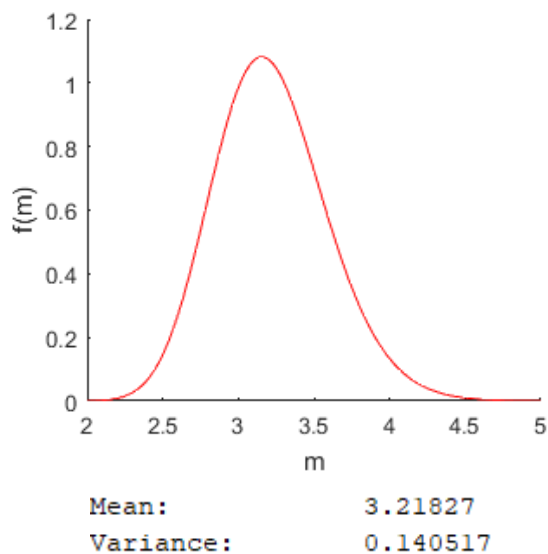
APÊNDICE B – SÉRIE DE DADOS DA ANÁLISE 2

Variáveis aleatórias da Análise 2

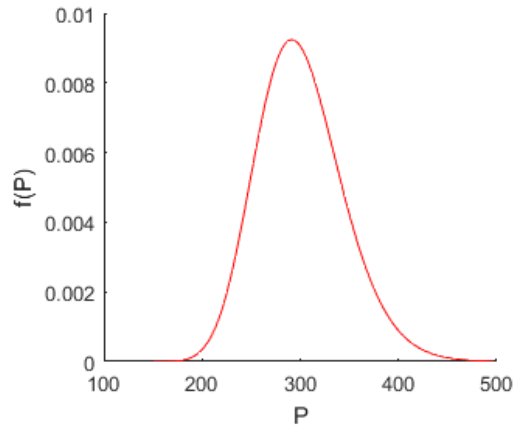
Variável aleatória	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação
C	7.0e-11	8.2e-12	0.11
m	3.2	0.4	0.11
P (MPa)	300.8	44.4	0.15
Q (MPa)	99.6	15.1	0.15
R (cm)	0.1	2.0e-02	0.23
L1 (cm)	0.1	1.9e-02	0.22
L2 (cm)	0.1	1.9e-02	0.22



Faixa de variação da constante C da Lei de Paris

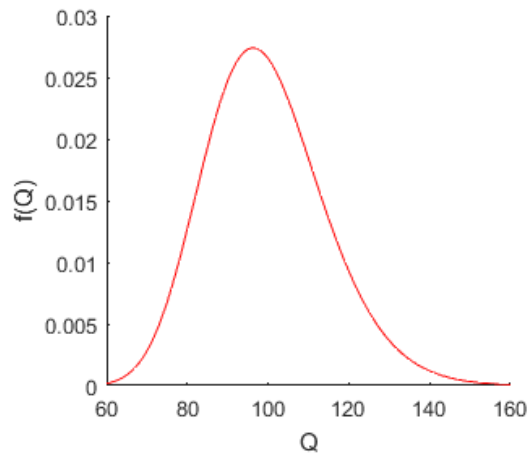


Faixa de variação da constante m da Lei de Paris



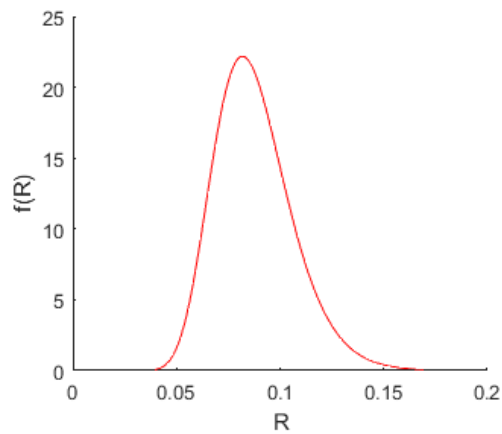
Mean: 300.769
 Variance: 1965.41

Faixa de variação da solicitação externa normal (P)



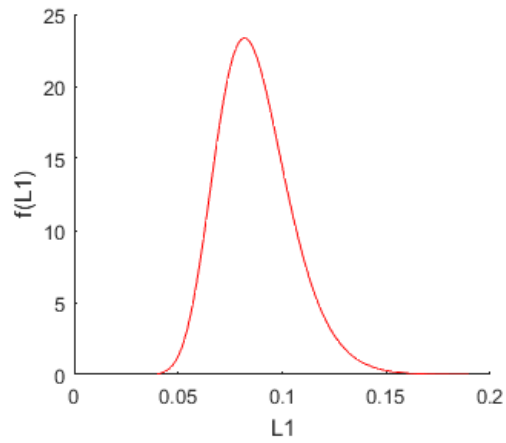
Mean: 99.5498
 Variance: 224.18

Faixa de variação da solicitação externa cisalhante (Q)



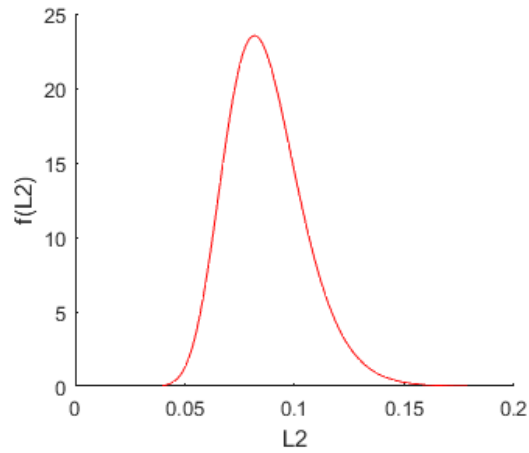
Mean: 0.0876566
 Variance: 0.000362746

Faixa de variação do raio do furo circular central



Mean: 0.0870918
Variance: 0.000323759

Faixa de variação do tamanho inicial da Trinca 1 (superior)



Mean: 0.0868656
Variance: 0.000318265

Faixa de variação do tamanho inicial da Trinca 2 (inferior)