



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**DISCRETIZAÇÃO DA ENERGIA NO UNIVERSO PRIMORDIAL**

*Alexandre da Silva Fernandes*

Brasília - DF

2018



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISCRETIZAÇÃO DA ENERGIA NO UNIVERSO PRIMORDIAL**

*Alexandre da Silva Fernandes*

*Orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa*

Brasília - DF

2018



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISCRETIZAÇÃO DA ENERGIA NO UNIVERSO PRIMORDIAL**

*Alexandre da Silva Fernandes*

Tese de doutorado realizada sob a orientação do prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção de título de Doutor em Física

Brasília - DF

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F363d Fernandes, Alexandre da Silva  
Discretização da energia no universo primordial /  
Alexandre da Silva Fernandes; orientador Sérgio Costa  
Ulhoa. -- Brasília, 2018.  
100 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Física) -- Universidade de  
Brasília, 2018.

1. Relatividade Geral. 2. Teleparalelismo Equivalente à  
Relatividade Geral. 3. Cosmologia. 4. Cosmologia quântica.  
5. Inflação. I. Ulhoa, Sérgio Costa, orient. II. Título.

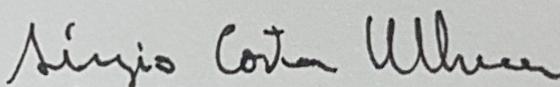
# “DISCRETIZAÇÃO DA ENERGIA NO UNIVERSO PRIMORDIAL.”

Por

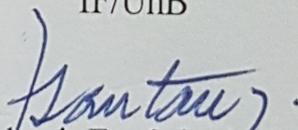
**ALEXANDRE DA SILVA FERNANDES.**

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

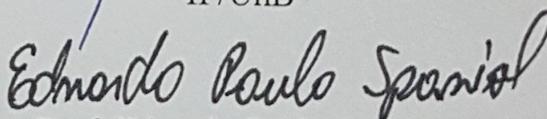
Aprovada por:



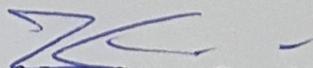
Prof. Sérgio Costa Ulhoa  
IF/UnB



Prof. Ademir Eugênio de Santana  
IF/UnB



Prof. Ednardo Paulo Spaniol  
UniCeub



Prof. Ivan Soares Ferreira  
IF/UnB

Ao meu filho Symon.

E ao meu prof. Claudio de Sousa: consegui!

## Agradecimentos

À Deus, o Soberano, por me dá graça mais do que eu poderia imaginar conseguir.

Ao meu orientador Sérgio, que me guiou durante esses últimos anos a trilhar por esse caminho árduo e me mostrar o que é pesquisa, o que é futuro na ciência e por abrir um multiverso de possibilidades.

Ao professor C. M. G. de Sousa, que me impulsionou a chegar até aqui.

Aos meus colegas de academia Hailleen, Rodrigo, xará Alexandre, Breytner e Fernando: ajuda, apoio e valiosas discussões.

Ao professor Sérgio Guedes (UFRJ), Vitória e outros colegas do grupo virtual Theoretical Physics, que sempre me trouxeram dúvidas, me ajudaram a melhorar a transmissão de conhecimento e me pautaram na caminhada.

Ao professor Ivan e todo o grupo LaCOSA pela acolhida, boa convivência e pelos excelentes e imensuráveis ensinamentos. Com eles, o aprendizado sobre cosmologia se expandiu de forma inflacionária!

À Amanda, pela gentil e preciosíssima ajuda na revisão do texto.

À minha família pelo apoio.

Porque assim como os céus são mais altos do que a terra, assim são os meus caminhos mais altos do que os vossos caminhos, e os meus pensamentos mais altos do que os vossos pensamentos.  
Isaías 55:9 - Bíblia Sagrada, edição Almeida Corrigida Fiel 2007

## Resumo

A cosmologia quântica na gravidade teleparalela é modelo construído sob a régia do Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TERG) e da aplicação do processo de quantização de Weyl. O TERG é uma teoria alternativa à descrição do campo gravitacional baseado em termos de um campo de tétradas. Ele permite escrever adequadamente as definições de energia-momento do campo gravitacional. Já a quantização apresentada por Weyl tem um formalismo claro e sem ambiguidades para o tratamento da correspondência entre operadores clássicos e quânticos. A cosmologia de Wheeler-DeWitt, formada pelo formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral (RG), tem vários problemas que são citados neste trabalho. Tomando a TERG, aplicando na métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) a cosmologia quântica é revisitada mas com aplicação em solução de vácuo e em um universo pequeno, resultando em relação de incerteza para o parâmetro de Hubble e induzindo um mecanismo de inflação.

**Palavras chaves:** Relatividade Geral. Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral. Cosmologia. Cosmologia quântica. Inflação.

## *Abstract*

Quantum cosmology in teleparallel gravity is a model constructed under the rule of Teleparallelism equivalent to General Relativity (TEGR) and the application of Weyl quantization process. TEGR is an alternative theory to the description of the gravitational field based in terms of a field of tetrad. It allows you to write properly the energy-momentum definitions of the gravitational field. The quantization presented by Weyl has a clear and unambiguous formalism for the correspondence between classical and quantum operators. The Wheeler-DeWitt cosmology, formed by the Hamiltonian formalism of General Relativity (GR), has several problems that are cited in this paper. Taking the TERG, applying in the Friedman-Lemaître-Robertson-Walker metric of the Standard Cosmological Model (SCM) the quantum cosmology is revisited but with application in vacuum solution and in a small universe, resulting in uncertainty relation for the Hubble parameter and inducing an inflation mechanism.

**Keywords:** General Relativity. Teleparallelism Equivalent to General Relativity. Cosmology. Quantum cosmology. Inflation.

# LISTA DE FIGURAS

**Figura 1:** Mesa de trabalho de Albert Einstein.

**Figura 2:** Imagens retiradas do relatório de Eddington, Dyson e Davidson. Eclipse de 1919.

**Figura 3:** Sinal do primeiro evento de ondas gravitacionais pelo *LIGO Scientific Collaboration*.

**Figura 4:** Telemetria do sinal de Cyg XR-1.

**Figura 5:** Posição do buraco negro Sgr A\*.

**Figura 6:** Monitoramento da estrela S2 em órbita do Sgr A\*.

**Figura 7:** Gráfico do artigo de Hayashi, de 1979, sobre a *New General Relativity*.

**Figura 8:** Nebulosa do Caranguejo (NGC 1952).

**Figura 9:** Esquema de uma paralaxe.

**Figura 10:** Dados de 1929 por.

**Figura 11:** Galáxia GN-z11, que é o objeto mais distante atualmente.

# SIGLAS

**$\Lambda$ CDM:** Modelo cosmológico que inclui a interpretação da expansão acelerada do universo e o conceitual de matéria escura fria.

**ADM:** Formalismo hamiltoniano da RG feito por Arnowitt, Deser e Misner.

**CMB:** Cosmic Microwave Background ou Radiação Cós mica de Fundo.

**CQGT:** Cosmologia Quântica na Gravidade Teleparalela.

**FLRW:** Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker.

$M_{\odot}$ : Massa solar.

**MCP:** Modelo Cosmológico Padrão.

**pc:** Parsec.  $1 \text{ pc} = 3,0856 \times 10^6 \text{ m} = 3,2616 \text{ anos-luz de distância}$ .

**RE:** Teoria da Relatividade Restrita ou Especial.

**RG:** Teoria da Relatividade Geral.

**TERG:** Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral.

**WDW:** Cosmologia Quântica de Wheeler-DeWitt.

# NOTAÇÃO

\* Assinatura métrica:  $(-+++)$

\* Índices gregos e latinos têm variação de 0 a 3 e repetidos e seguem a convenção de Einstein

\* Constantes  $\kappa \equiv \frac{1}{16\pi}$  e  $G = c = 1$  em unidades naturais, a menos que se explicita o contrário

\* Curvatura do espaço-tempo:  $k = \{-1, 0, 1\}$

\* Parâmetro de Hubble:  $H = \frac{\dot{a}}{a}$

\* Escala de Planck:

(i)  $r_{pl} \equiv (\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}} = 1,62 \times 10^{-33} \text{ cm}$

(ii)  $E_{pl} \equiv (\hbar c^5/G)^{\frac{1}{2}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$

(iii)  $m_{pl} \equiv (\hbar c/G)^{\frac{1}{2}} = 2,18 \times 10^{-5} \text{ g}$

(iv)  $\rho_{pl} \equiv c^5/\hbar G^2 = 2,22 \times 10^{76} \text{ GeV}^4$

(v)  $t_{pl} \equiv (\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ seg}$

(vi)  $T_{pl} \equiv (\hbar c^5/k_B G)^{\frac{1}{2}} = 1,42 \times 10^{32} \text{ K}$

# Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xi</b>
<b>SIGLAS</b>	<b>xii</b>
<b>NOTAÇÃO</b>	<b>xiii</b>
<b>PRODUÇÃO ACADÊMICA</b>	<b>17</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
<b>1 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>22</b>
1.1 Breve histórico da RG . . . . .	22
1.2 Fundamentos da RG . . . . .	23
1.3 Equações de campo pelo princípio variacional . . . . .	27
1.4 Alguns resultados da RG . . . . .	28
1.4.1 <i>Trajectoria da luz em um campo gravitacional</i> . . . . .	29
1.4.2 <i>Efeito relativístico no movimento de Mercúrio</i> . . . . .	29
1.4.3 <i>Ondas gravitacionais</i> . . . . .	30
1.4.4 <i>Descoberta de buracos negros</i> . . . . .	32

<b>2</b>	<b>TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>36</b>
2.1	Breve histórico da TEGR . . . . .	36
2.2	Campo de tétradas . . . . .	40
2.3	Construção do formalismo lagrangiano . . . . .	41
2.4	Equações de campo e energia-momento gravitacional . . . . .	44
2.5	Interpretação física . . . . .	48
<b>3</b>	<b>COSMOLOGIA</b>	<b>51</b>
3.1	Breve histórico . . . . .	51
3.1.1	<i>Cosmografia e lei de Hubble-Lemaître</i> . . . . .	54
3.2	Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	58
3.2.1	<i>A métrica de FLRW</i> . . . . .	59
3.2.2	<i>Equações dinâmicas de Friedman</i> . . . . .	61
3.2.3	<i>Problemas no MCP</i> . . . . .	63
<b>4</b>	<b>QUANTIZAÇÃO</b>	<b>65</b>
4.1	Breve histórico da física quântica . . . . .	65
4.2	Quantização canônica . . . . .	67
4.2.1	Aplicação de quantização canônica . . . . .	69
4.3	Quantização de Weyl . . . . .	70
4.3.1	Aplicação do procedimento de quantização de Weyl . . . . .	72
<b>5</b>	<b>COSMOLOGIA QUÂNTICA</b>	<b>75</b>
5.1	Cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt . . . . .	76
5.1.1	<i>Equação de Wheeler-DeWitt</i> . . . . .	77
5.2	Cosmologia quântica na gravidade teleparalela . . . . .	79

5.3	Cosmologia quântica: discretização de energia . . . . .	82
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>92</b>

# PRODUÇÃO ACADÊMICA

**Artigo:** Ulhoa, S. C., Amorim, R. G. G., Capistrano, A. J. S. e Fernandes, A. S. Towards Energy Discretization in Quantum Cosmology. DOI: 10.20944/preprints201808.0171.v1 [1].

**Livro:** Fernandes, A. S., *Cosmologia quântica na gravidade teleparalela: propostas de soluções*, Editora Novas Edições acadêmicas, Brasília, 2018. ISBN: 978-620-2-19043-5 [2].

**Artigo:** Fernandes, A. S., Ulhoa, S. C. e Amorim, R. G. G., J. Phys. Conf. Ser. **965** (2018) 012014. *On quantum cosmology in Teleparallel Gravity*. DOI: 10.1088/1742-6596/965/1/012014 [3].

# INTRODUÇÃO

No dia 18 de abril de 1955 suspirava um grande cientista que, até o fim dos seus dias, se debruçava sobre os problemas mais intrínsecos do universo. A mesa que ficou registrada na foto de Raph Morse demonstra como ainda era muito ativo. Retrocedendo 50 anos, Albert Einstein era um analista na Suíça publicava alguns artigos [4, 5] que, simplesmente, abria uma brecha de reboição na concepção de espaço-tempo. Mas, não ficou somente nesses (e na teoria da Relatividade Especial (RE), onde ficou mais conhecido): trabalhou em mais publicações até chegar em 1916 e mudar a concepção de universo com a teoria da Relatividade Geral (RG).

A RG é um modelo que, com suas equações de campo e seus postulados, traz uma grande mudança na concepção de visualização do universo. E não é apenas um modelo teórico, daqueles que apresentam uma matemática baseada em geometria não-euclidiana ou até mesmo, daqueles que têm apenas uma junção de espaço e tempo nas mãos a sua grande revolução. As previsões da RG estão alicerçadas em uma interpretação das equações físicas, e com plena atividade no século XXI. À luz da RG alguns fenômenos foram observados e interpretados, como por exemplo, a distorção, devido a campo gravitacional, no caminho da luz vinda de uma estrela [6, 7], o efeito relativístico na dinâmica do planeta Mercúrio [8, 9], os buracos negros [10, 11], as ondas gravitacionais [12, 13, 14, 15, 16, 17] e a astronomia multi-mensageira [18, 19]. Tudo isso representa feitos iguais realizados apenas com a física quântica.

No entanto, havia alguns problemas fundamentais que prejudicavam a RG e que impediam-na de fazer uma unificação geral na física, que fora iniciada por Newton, quando ele fez o ajuntamento entre céu e Terra. Uma dessas dificuldades se deu na definição de densidade de energia do campo gravitacional, quando um pseudotensor, com validade local e conectado a um sistema de coordenadas [20, 21, 22, 23] trava uma construção de uma teoria unificadora



**Figura 1:** Mesa de trabalho de Albert Einstein em sua sala. Princeton, 18 de abril de 1955. Ralph Morse - Time and Life Pictures. Reportagem acessada pela revista *TIME*: <http://time.com/3494553/the-day-albert-einstein-died-a-photographers-story/>

com a recém nascida física quântica. Apesar não trabalhar diretamente com quantização *à la* Bohr, Einstein já tentava generalizar a RG com as conhecidas equações de Riemann-Cartan [24, 25, 26].

Entre 1961 e 1994 o Teleparalelismo Equivalente à RG, modelo que trabalha em espaço de Weitzenböck e que tem apenas torção (sem curvatura) das equações de Riemann-Cartan, teve grandes desenvolvimentos que culminaram com Maluf montando a formulação hamiltoniana [27]. Intensas pesquisas foram desenvolvidas ao longo de 20 anos e com elas várias áreas foram surgindo, desembocando na gravitação e na cosmologia quânticas [3, 28]. Os remos acoplados na trirreme da busca pela unificação entre a cosmologia e o mundo microscópico foram possíveis graças, entre vários outros detalhes, o tensor verdadeiro de energia-momento do campo gravitacional,  $t^{\lambda\mu}$ , e na completa equivalência dinâmica que a TERG possui, onde mantém

---

as conquistas da RG, ou seja, sob uma nova interpretação da gravidade, todos os fenômenos explicados podem ser, perfeitamente, anexados mas, com alguns adicionais, como densidade de energia gravitacional.

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) é uma coluna de conhecimento construída sobre alguns pilares e com regência em todo o universo físico conhecido. Uma teoria que se candidate a ser o MCP deve levar em consideração esses pilares, tais como princípio cosmológico, explicar os dados coletados por Hubble [29] e tentar ser aplicável a fase inicial (ou o quanto mais perto possível) do universo. Para isso, inicialmente, a TERG trabalha conjuntamente com a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e sua dinâmica [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. Obviamente, o MCP tem problemas intrínsecos como, por exemplo, a aplicação direta no início do universo e nos dados da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background* ou CMB).

Até aqui, apresentou-se um quadro de uma teoria clássica, com aplicação dinâmica à cosmologia, mas que deve ter tratamento adequado às fases iniciais do universo, em que a escala de Planck impera. E, para tal tratamento, é necessário a parte quântica. O processo de quantização escolhido para este trabalho é tal que tem uma correspondência clara entre os observáveis clássicos e quânticos, tem uma estrutura matemática sem ambiguidades como a quantização canônica apresenta em seu escopo e que vale para qualquer tipo de função, ou seja, polinomial ou não. Para tal tarefa, os trabalhos de Weyl [39] foram tomados e aplicados, inicialmente, com uma explicação panorâmica de seu funcionamento e um exemplo prático.

Com todas as bases lançadas, o caminho natural é ir para o Santo Graal e caçá-lo. A cosmologia quântica se inicia com o formalismo hamiltoniano da RG por Arnowitt, Deser e Misner (ADM), adotado por Wheeler e DeWitt para a equação de Einstein-Schrödinger (futuramente conhecida como cosmologia quântica padrão ou equação de Wheeler-DeWitt - WDW) [40, 41, 42, 43]. Contudo, mesmo por meio de intensas pesquisas teóricas, tentativas de consertos e formação de grandes físicos nos últimos 50 anos, esse modelo tem problemas intrínsecos e que não permite um quadro completo do início de tudo: parte da RG (que já tem seus problemas internos) e tempo (problemas de conceituação) [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50], para citar apenas alguns. Por isso, um outro caminho para sanar esses problemas é trabalhar com a TERG, o procedimento de quantização de Weyl e construir uma cosmologia quântica [2] e aplicar no universo primordial. Tudo isso é feito sob a tutela de algumas hipóteses: universo

pequeno no início e solução de vácuo (sem campos de matéria).

O trabalho será desenvolvido a partir de uma breve contextualização histórica. No capítulo 1 trabalhar-se-à a RG e serão apresentados as equações de campo pelo princípio variacional e alguns importantes resultados. O capítulo 2, se basilará pela construção das equações de campo e interpretação física, além de um breve histórico. A cosmologia e seus fundamentos, partindo das primeiras soluções da RG com Friedman até os dias atuais e levantando alguns problemas, será apresentada no capítulo 3. Hermann Weyl e seu processo de quantização contrapondo com a o canônico é mostrado no capítulo 4. O modelo de WDW, conjuntamente com a cosmologia quântica na gravidade teleparalela (CQGT) e com a aplicação na fase inicial do universo, finaliza este trabalho no capítulo 5. Breves considerações finais e perspectivas encerram a tese.

# Capítulo 1

## TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A Relatividade Geral (RG) será apresentada nesse primeiro capítulo de forma panorâmica, ou seja, será brevemente contextualizada, a partir de um rápido contexto histórico, o desenvolvimento das principais ideias, do surgimento dos grandes resultados que ela já obteve até hoje (2018) e uma breve citação dos problemas que reside em sua interpretação da teoria de gravitação.

### 1.1 Breve histórico da RG

Em 1905 um ex-aluno formado na Escola Politécnica Federal Suíça (ETH-Zurique) e analista do Instituto Federal Suíço de Propriedade Intelectual (IGE / IPI - Berna, Suíça) publicou 4 artigos, [51, 52, 53, 54, 55], além de uma tese, [4, 5], que balançam as estruturas do imóvel palco do espaço-tempo newtoniano. Em cada um desses árduos trabalhos, Albert Einstein tratou de várias áreas da Física e um deles, destacando, trata sobre a Relatividade Especial (RE) [53, 54, 56, 57]. Nesse seminal trabalho, Einstein lançou os postulados "as leis físicas têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais" e "a velocidade da luz é independente do movimento de sua fonte"[58] que são as bases para a RE. As consequências desse trabalho em específico são belicosos: tempo e espaço não são entidades absolutas ou palanque onde eventos acontecem, como Newton colocou no século XVII; todo fenômeno está intrinsecamente conectado ao observador.

Uma generalização da RE foi feita cerca de 11 anos depois. Einstein publicou sua teoria

[59, 60] em que os pilares são o princípio da equivalência, "o movimento de qualquer partícula de prova em queda livre é independente de sua constituição e estrutura", e a curvatura do espaço-tempo, que advém da geometria riemanniana [58]. Em uma descrição mais global, a RG é um conjunto de princípios físico e geométrico que constituem as bases para as equações de campo de Einstein determinando o campo gravitacional e as equações de geodésica que irão descrever a propagação da luz e o movimento das partículas neste campo [61]. E nesses mais de 100 anos a RG tem tido muitos sucessos com diversos experimentos e observações confirmando sua validade.

Entretanto, como toda teoria física e, principalmente, de cunho que se propõe a ser geral, a RG tem vários problemas. Um deles, advém do uso da geometrização da gravitação, é a impraticabilidade de se obter uma expressão de densidade energia gravitacional independente de coordenadas [62]. Outro, proveniente da necessidade de se interpretar e descrever o campo gravitacional a partir do momento angular deste, peça que também tem impossibilidade no contexto da RG [63]. Um outro ângulo dessa problemática o próprio Einstein já tinha visto: efeitos quânticos gravitacionais [20, 21, 24, 25, 64].

Os problemas da RG serão melhores contornados ao utilizar um outro modelo que preserva os sucessos já conhecidos da RG: Teleparalelismo Equivalente à RG. Inclusive, o próprio Einstein já deu alguns passos nesse terreno quando estava na busca pela Teoria de Campo Unificado [24, 25]. Este modelo será melhor apresentado no próximo capítulo 2.

## 1.2 Fundamentos da RG

As bases principais onde o modelo da RG está colocado são [61]:

(i) Uma estrutura de espaço-tempo quadridimensional;

(ii) Princípio de equivalência;

(iii) Causalidade local;

(iv) Sistemas de coordenadas preferencialmente locais.

As ideias consequentes desses pilares podem ser resumidamente destacadas como [2, 61, 65]:

- (a) A gravidade como efeito da geometria riemanniana, ou seja, a força gravitacional que se tem na mecânica newtoniana é explicada como sendo uma curvatura do espaço-tempo quadridimensional;
- (b) Massa-energia é a fonte responsável pela curvatura do espaço-tempo quadridimensional;
- (c) O caminho das massas livres de ação externa é a geodésica.

A geometria da RG é a riemanniana e nela são modeladas as métricas [2, 66, 67]. Localmente, a geometria é a euclidiana [68]. Apenas como relembração: variedade um conjunto de objetos que tem propriedades definidas [67, 69]. No caso físico, além da variedade, utiliza-se o mapeamento entre cada ponto dessa coleção de objetos e o espaço euclidiano  $\mathfrak{R}^n$  (variedade topológica) [67]. Ou seja, os objetos desse conjunto podem ser quantidades físicas ou fenômenos físicos que são mensuráveis [62]. Dado a geometria de Riemann é possível traçar curvas e superfícies sobre essa variedade. Um conjunto de pontos que se conectam perpassando uma curva

$$x^\alpha = x'^\alpha(u), (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

pode ter  $n$  dimensões dado  $u$  parâmetros e sendo  $x^\alpha$  as suas  $n$  funções [2, 66].

Outro conceito matemático muito importante no contexto da RG versa sobre as transformações de coordenadas. Elas não devem modificar as quantidades físicas (energia, por exemplo), ou seja, esses objetos mensuráveis são invariantes sob mudança de coordenadas. Dito de outra maneira, a forma que um observador, com seu sistema de coordenadas, é modificada mas a quantidade física não é alterada. E a forma como se faz transformação de coordenadas:  $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$  é dado pelas  $n$  equações [66]

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

sendo  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . E, para a transformação em cada coeficiente das coordenadas, é utilizado a matriz de transformação [66]

$$\left( \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

cujo determinando  $J$  é o jacobiano

$$J' = \left| \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right|.$$

Generalizando esses conceitos é possível se ter um tensor, que é um objeto com características de um conjunto de quantidades que associa um sistema de coordenadas em um ponto e pode-se aplicar transformações, ou seja, levar esse ponto que tem tais coordenadas a outro ponto, na variedade, que terá outras coordenadas sem, contudo, perder as propriedades físicas. Matematicamente [66],

$$X'^{\alpha \dots \beta \dots} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdots \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} X^{\gamma \dots \mu \dots}.$$

Um conceito que deve ser citado aqui é o derivada covariante. Para um campo escalar  $\phi$ , por exemplo, ele é definido como [66, 70]

$$\nabla_{\alpha} \phi = \partial_{\alpha} \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}}.$$

Já para um vetor  $X^{\alpha}$  [66, 70],

$$\nabla_{\beta} X^{\alpha} = X^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv X^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} X^{\gamma},$$

onde  $\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$  são os símbolos de Christoffel [70],

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\gamma,\beta} + g_{\mu\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

com

$$g_{\mu\gamma,\beta} = \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\beta}}.$$

Há uma quantidade matemática na expressão dos símbolos de Christoffel: a métrica, de forma

geral,  $g_{\alpha\beta}$ . Ela é um tensor simétrico, covariante e de 2ª ordem e que, fisicamente, é o formato de medida de distância entre dois pontos. A métrica é definida, de forma geral [66],

$$du^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta .$$

A partir desse conceito, dos que já foram anteriormente mencionados e com adição de detalhes, é possível determinar a curva de menor distância entre dois pontos em uma variedade: a geodésica. Sua equação é [66, 70]

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} = 0. \quad (1.1)$$

Apenas para efeito de exemplificação, a reta é a geodésica do espaço plano e a circunferência é a da esfera.

Outra equação de extrema importância para o estudo da RG é o tensor de Riemann-Christoffel: ele demonstra como é a curvatura do espaço e tem dependência na métrica e nas derivadas [66, 70]

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\nu\gamma}. \quad (1.2)$$

e é antissimétrico,  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = -R^\mu_{\alpha\gamma\beta}$ . Para se chegar as equações de campo da RG é necessário perpassar pela identidade de Bianchi, definida como [66]

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv 0$$

e fazer o uso do tensor de Ricci, que é a contração de um dos índices do tensor de Riemann-Christoffel,

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\beta\gamma} = g^{\gamma\mu} R_{\mu\alpha\gamma\beta},$$

sendo o escalar de curvatura ou de Ricci,

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (1.3)$$

O tensor de Einstein é definido como [66]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu},$$

onde a condição

$$\nabla_\beta G_\alpha{}^\beta \equiv 0 \quad (1.4)$$

é satisfeita pela contração das identidades de Bianchi.

Por último [70],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

são as equações de campo da RG. O tensor de Einstein aparece no lado esquerdo da equação,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Einstein demonstrou, ao tomar a equação (1.4), [23, 59, 60]

$$t^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{16\pi} \left[ L\delta^{\mu}{}_{\nu} - g_{\alpha\beta,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\mu}} \right], \quad (1.5)$$

com  $\mathcal{L} = g^{\alpha\beta} (\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta})$ . Ou seja, a quantidade derivada  $t^{\mu}{}_{\nu}$ , que seria a densidade de energia gravitacional, é um pseudotensor, pois, os seus componentes não podem ser transformados em quaisquer coordenadas de forma livre. Isso está relacionado ao fato de que é possível se obter uma energia gravitacional mas ela sempre deverá estar ligada a um sistema de coordenadas e não a qualquer sistema de coordenadas, como deveria ser. As quantidades físicas como energia e densidade de energia não podem estar presas a um sistema de coordenadas e, infelizmente, a RG não fornece outra opção. Por isso, há busca por outras teorias, como o Teleparalelismo equivalente à RG. O grande interesse por trás desse fato é a quantização da energia gravitacional ou da densidade de energia gravitacional [22].

### 1.3 Equações de campo pelo princípio variacional

Considerando os fundamentos gerais que foram mostrados na seção anterior, o próximo passo será demonstrar a construção das equações de campo da RG perpassando pelo caminho do princípio variacional. Acrescenta-se que não foi o mesmo usado por Einstein, em contrapartida, é importante salientar que não há apenas aquele caminho [66, 71]. Aplicando o funcional [2, 72]

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0, \quad (1.6)$$

obtem-se uma quantidade invariante sob transformações de coordenadas e em termos da métrica  $g_{\mu\nu}$  e a densidade lagrangiana sendo

$$\mathcal{L} = R \sqrt{-g}$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci, definido em (1.3), e  $g = \det g_{\mu\nu}$ . Isto levará a ação [71, 73]

$$S_{EH} = \int R \sqrt{-g} d^4x$$

ser a ação de Einstein-Hilbert. A quantidade  $\sqrt{-g} d^4x$  é um elemento de volume invariante e  $\sqrt{-g}$ , uma densidade escalar. Aplicando a expressão anterior,  $S_{EH}$ , no funcional (1.6) com o uso do escalar de Ricci (1.3) e simplificando,

$$\delta S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Tomando apenas a parte geométrica da ação e com o reuso do funcional (1.6) se chega a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0.$$

Mas, a forma completa das equações de campo da RG leva em consideração a parte da matéria,  $S_M$ , que é adicionada a  $S_{EH}$ ,

$$S = \frac{1}{16\pi} S_{EH} + S_M,$$

e ficando na configuração de

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

O último termo dessa expressão é definido como  $T_{\mu\nu} = 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  e é o que responde pela parte da densidade de energia total, quantidade esta que é medida por um observador inercial [2, 73].

## 1.4 Alguns resultados da RG

A RG tem cerca de mais de 100 anos. Considerando como parâmetro outros modelos físicos, como, por exemplo, a mecânica newtoniana, ela é jovem. Além disso, ele obteve sua formulação completa, após alguns anos de montagem, a partir da RE. Relembrando que a RE foi uma teoria com referenciais inerciais e uma tentativa, bem sucedida, de explicar alguns fenômenos que falham quando se tem velocidades próximas da luz (no eletromagnetismo, por exemplo [54, 74]). Só que a RE foi trabalhada de 1905 até 1916 para ser mais geral com a inclusão da gravitação.

Acrescenta-se que a RG, depois de formulada matematicamente, trazia consigo uma revisão de universo conhecido, ou seja, a forma que se via a força gravitacional foi reformulada e a visão de um universo, que foi "descoberto" observacionalmente com Hubble, mudou completamente;

apenas para citar dois casos. Entretanto, até a sua publicação [59, 60], era apenas mais um modelo matemático; para se tornar uma teoria aceitável deveria ter comprovações. E a história fez uma grande demonstração de evidências, pelo menos nos limites que foram feitos até agora.

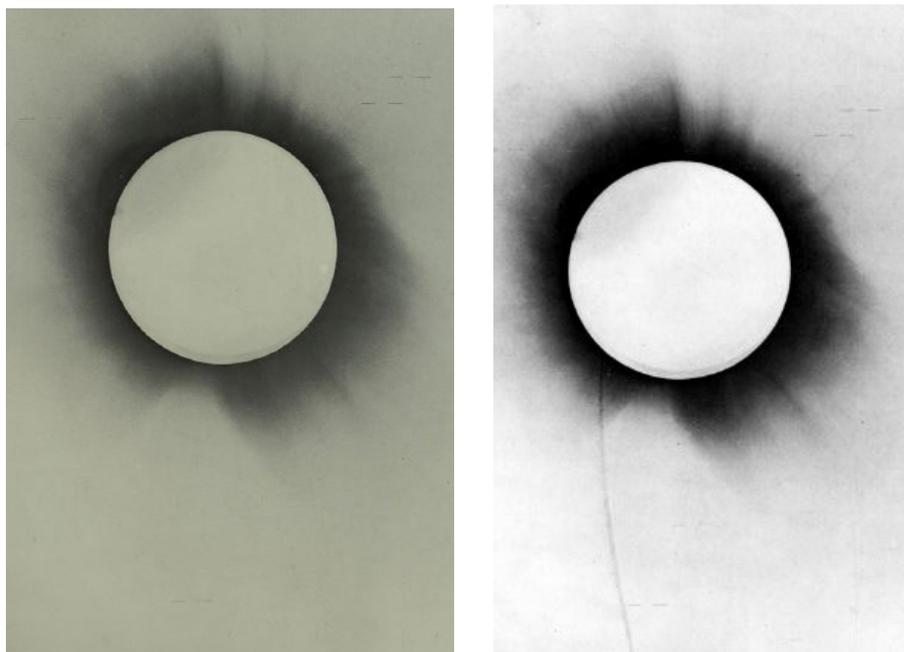
#### **1.4.1** *Trajatória da luz em um campo gravitacional*

Como a RG é formada em um espaço curvo riemanniano a geodésica é determinada, pela equação (1.1). Isso significa que se um corpo tem muita massa a curvatura que ele fará no espaço-tempo será grande o suficiente para modificar a trajetória de um feixe de luz que passe perto desse objeto. E uma das previsões da RG era justamente uma trajetória modificada da luz advinda de uma estrela passando perto do Sol.

O valor calculado na RG para esse ângulo seria de apenas 1,75" de arco [58]. Em 1919 houve um eclipse solar e o astrônomo inglês Eddington montou duas equipes para observar esse fenômeno e testar esse cálculo. Juntamente com Dyson e Davidson, ele publicou os resultados das expedições (uma na ilha do Príncipe e outra na cidade de Sobral, Ceará). Eles observaram a deflexão da luz de 13 estrelas e o valor do ângulo estava na casa dos  $1,98'' \pm 0,30''$ , ou seja, dentro do faixa prevista pela RG [6, 7, 58]. Este resultado deu grande repercussão à RG. Como se não bastasse, esse fenômeno foi reobservado em outras ocasiões, inclusive sendo o planeta Júpiter um dos objetos de deflexão da luz [58, 75]. Em junho de 2018 um artigo foi publicado testando a RG em lentes gravitacionais com o mesmo fenômeno de luz curvada mas em um objeto muito massivo e distante. A galáxia ESO 325-G004 tem, em sua frente com relação à Terra, uma lente gravitacional de 2,95" de arco e teve uma precisão de 68% em comparação com o previsto da RG, ou seja, a primeira vez que ela é testada a uma grande distância e tem uma boa precisão [76].

#### **1.4.2** *Efeito relativístico no movimento de Mercúrio*

Todos os planetas conhecidos têm movimentos bem explicados pela mecânica clássica e incluem perturbações gravitacionais devido configuração que eles possuem em volta da estrela. Um desses movimentos é o de precessão, onde há uma alteração angular em relação ao plano da órbita. Essa alteração, apesar de muito pequena, pode ser mensurável e é catalogada no sistema solar há décadas. Mas, o periélio do planeta Mercúrio possui uma alteração que foge da



**Figura 2:** Imagem positiva (à esquerda) e negativa (à direita) retiradas do relatório de Eddington, conjuntamente com Dyson e Davidson, relativo ao eclipse de 1919 [7].

explicação newtoniana e é um problema conhecido há muito tempo [8, 9, 77].

Desde 1859, essa anomalia já é conhecida. Le Verrier deu algumas possíveis soluções, envolvendo uma alteração na massa de Vênus (até de 10%), objeção perfeitamente colocada. Essa anomalia se deve ao fato de Mercúrio ter um ângulo de  $1,38''$  de arco em relação ao seu plano de órbita somada em cada translação. A perturbação acontece devido a outros planetas, retira  $1,28''$  de arco mas há  $0,10''$  que não tem explicação e, por século, dá um avanço de  $43.03''$  [7, 8, 9, 58, 77]

Os cálculos de Einstein deram uma contribuição para o suporte a essa pequena parte que não foi explicada do periélio de Mercúrio o qual escapava das mãos da teoria gravitacional de Newton [7, 8, 9, 58, 77, 78].

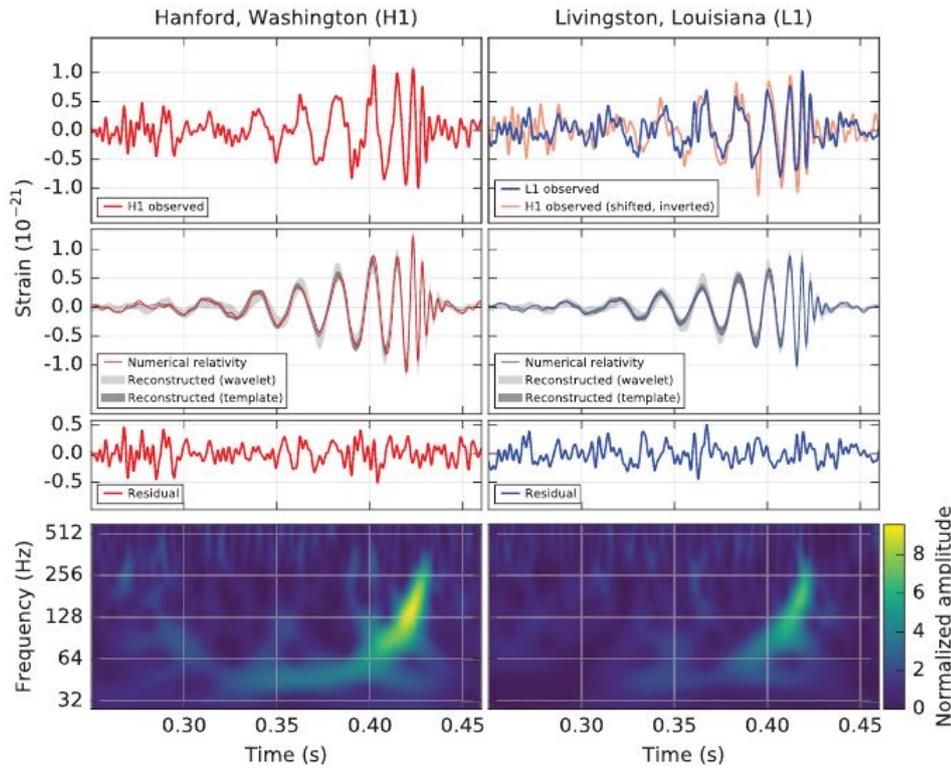
### 1.4.3 Ondas gravitacionais

Um fenômeno previsto na RG é a geração de ondas do tipo transversais e que tem velocidade de deslocamento igual a da luz [79]. Essas ondulações do espaço-tempo, tem sinais de detecção muito pequenas, de acordo com a interpretação da RG, sendo necessários laboratórios com a mais alta tecnologia para tal empreendimento. Em 1974, um sistema binário, denominado PSR

B1913+16, foi descoberto por Hulse e Taylor [80] e, alguns anos depois, Taylor e Weisberg detectam que esse pulsar tinha um comportamento anômalo com relação as interações gravitacionais entre os objetos, indicando que poderia ter evidenciado ondas gravitacionais de forma indireta [81]. Depois de 30 anos de subsequentes observações relativas a esse objeto, eles publicam mais resultados sobre o fenômeno relativístico [82]

O *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) detectou a primeira onda gravitacional de forma direta e usando interferometria. Esse gigantesco laboratório terrestre tem dois braços em perpendicular de 4 km cada e emissão de laser com retorno e comparação do sinal emitido e recebido. Caso alguma onda gravitacional perturbe o tamanho (diminuindo ou aumentando) dos braços, essa interferência é detectável no atraso / adiantamento das frentes de onda da luz.

A primeira detecção no LIGO foi feita no dia 14 de setembro de 2015. O evento foi a fusão de dois buracos negros do tipo estelar com aproximadamente 29 e 36  $M_{\odot}$  (massas solares), gerando um novo objeto com massa de 62  $M_{\odot}$  e a diferença foi emitida em forma de energia gravitacional [12, 83, 84, 85]. No mesmo ano, no dia 26 de dezembro, outro sinal perpassou pelos detectores advindo de uma coalescência de dois buracos negros com, aproximadamente, 7,5 e 14,2  $M_{\odot}$  cada. Após a fusão nasce um novo objeto com 20,8  $M_{\odot}$  e a diferença ficando a cargo do LIGO detectar no formato de ondas gravitacionais [13]. O ano de 2017 foi bastante promissor ao LIGO. No dia 04 de janeiro, foi detectada uma onda gravitacional com energia de, aproximadamente, 2  $M_{\odot}$ , advinda da fusão de dois buracos negros com aproximadas 19,4 e 31,2  $M_{\odot}$  cada [15]. No dia 14 de agosto, um sinal de aproximadamente 2,7  $M_{\odot}$  em forma de energia gravitacional sai de uma fusão de dois buracos negros com 30,5 e 25,3  $M_{\odot}$  cada [14, 16, 86, 87]. O ano fecha com a publicação de uma outra onda que foi detectada no dia 8 de junho: dois buracos negros com, aproximadamente, 7 e 12  $M_{\odot}$  cada se fundem gerando uma emissão aproximada de 0,85  $M_{\odot}$  de energia gravitacional [17]. Todas essas detecções, somadas às tecnologias de observação em ótico, raios gama, raio X (e outras) tem aberto uma nova janela de pesquisa: a astronomia multimensageira, ou seja, são colaborações de vários detectores para observações de fenômenos que, a princípio, só tinha previsão teórica [18]. O exemplo dessa nova área é a detecção das ondas gravitacionais pelo LIGO no dia 17 de agosto de 2017 e que teve contrapartidas em ondas eletromagnéticas, ou seja, observações independentes de outras equipes, como o *Fermi Gamma-ray Burst Monitor*, dentre outros [19].



**Figura 3:** Sinal do primeiro evento de detecção direta de onda gravitacional pelo *LIGO Scientific Collaboration* às 09:50:45 do dia 14 de setembro de 2015 [12].

#### 1.4.4 Descoberta de buracos negros

A validade da RG em determinados regimes cósmicos foi atestada por meio de vários outros fenômenos, dentre eles, uma classe de objetos supermassivos com uma densidade extremamente grande e que tem visibilidade estonteante dentro da astrofísica são os chamados buracos negros. Eles podem ser divididos em algumas classes mas todos têm a mesma característica: velocidade de escape é igual ou maior do que a da luz.

Esse conceito de um objeto muito massivo não é da RG; já vem das especulações de Michell e Laplace nos séculos XVIII e XIX. A hipótese seria de haver astros no universo onde a própria luz não escaparia de sua influência devido a velocidade de escape ser igual à da luz. Essas *estrelas negras* poderiam ter a massa do Sol mas concentradas em um raio de apenas 18,5 km. A conhecida equação da mecânica clássica da velocidade de escape era [58]

$$v_e = \sqrt{\frac{2M}{R}}.$$

Mas esses objetos astrofísicos ainda não tinham sido vistos. Com o advento da RG em 1916 foi possível encontrar soluções das equações de campo (1.7) e, dentre elas, uma que tivesse uma massa crítica específica o suficiente para haver astros com essas configurações. Schwarzschild encontra uma solução [70, 88, 89]

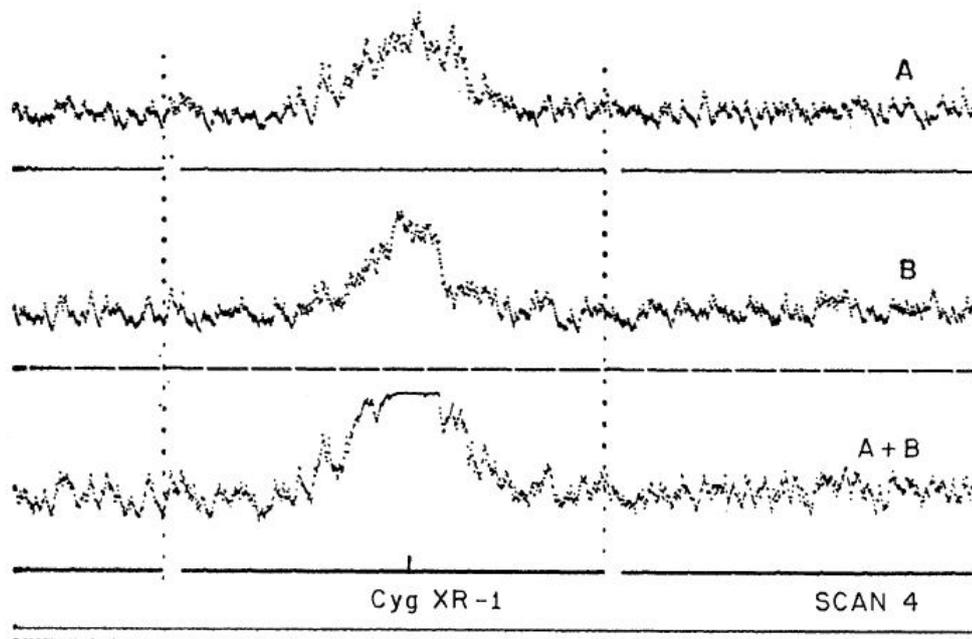
$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

cujo raio  $R_S$  (conhecido como *raio de Schwarzschild*) é

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Isso significa que pode haver objetos cuja massa confinada no  $R_S$  terão velocidade de escape  $v_e \geq c$ .

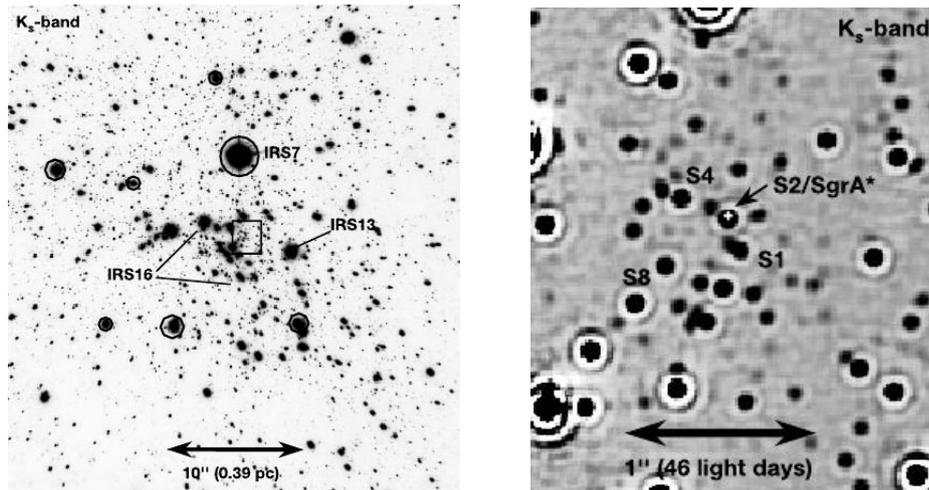
A primeira detecção com inferência sobre esses massivos objetos ocorreu em 1965 [10], sob fortes revisões e simulações com os dados observados [90, 91, 92, 93] e atualmente já são conhecidos e catalogados vários objetos com essas mesmas características inferindo que os modelos teóricos indicam: buracos negros.



**Figura 4:** Telemetria do sinal de Cyg XR-1, a fonte de raios X cósmicos que teve o primeiro candidato a buraco negro [10].

A título de exemplificação, será citado o caso do *redshift* gravitacional da estrela S2 ao

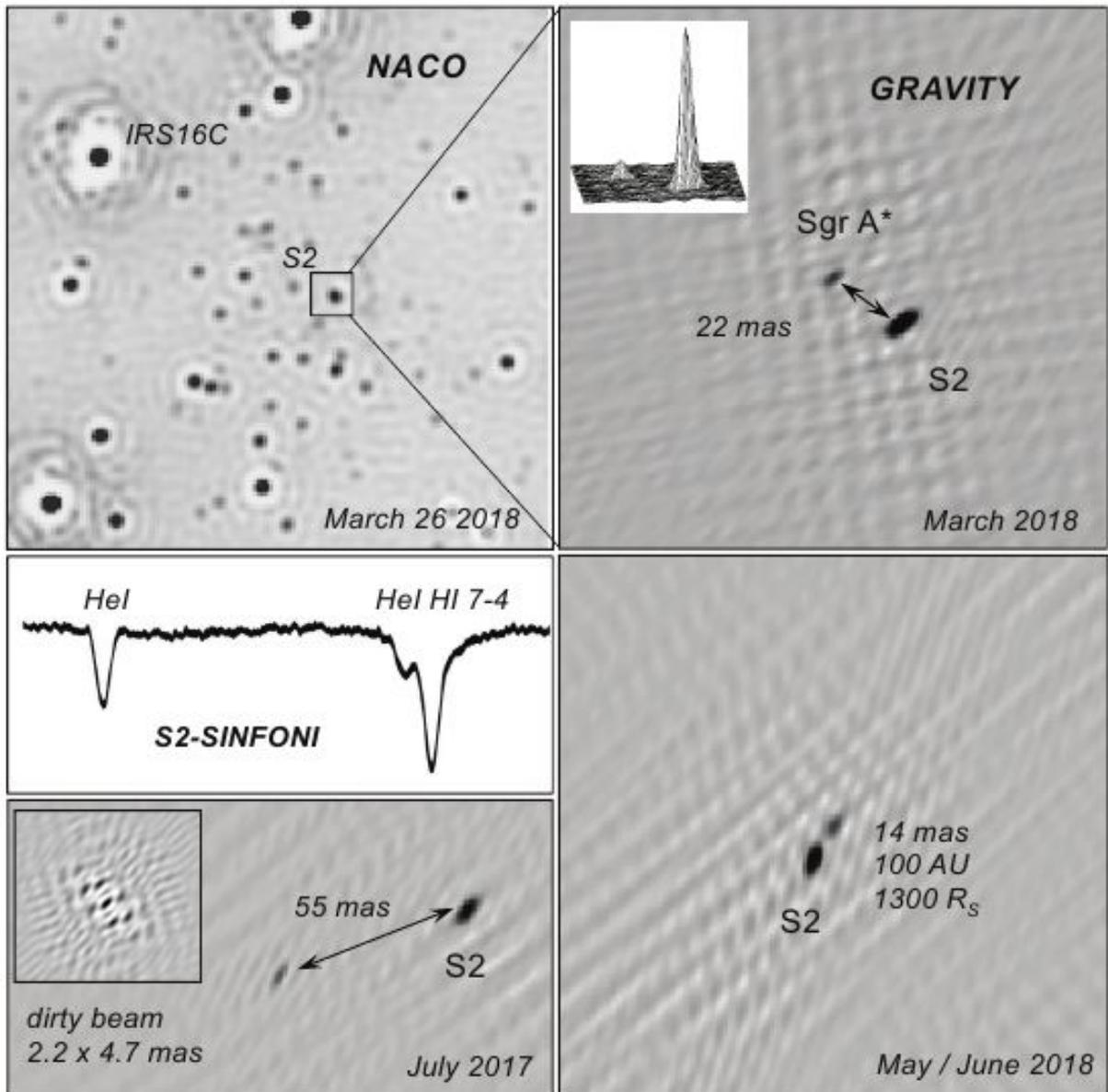
passar pelo buraco negro supermassivo, Sgr A\*, a 26 mil anos-luz de distância no centro da Via Láctea e período de 16 anos. O VLT (*Very Large Telescope*) do ESO (*European Southern Observatory*) analisou várias medidas (posições em relação ao buraco negro) durante 26 anos [11]. O Sgr A\* tem uma massa aproximada de 4 milhões  $M_{\odot}$ . Há diversos trabalhos na literatura que evidenciam a presença desse objeto no centro da galáxia [94, 95, 96]



**Figura 5:** Do lado esquerdo: região onde há fontes de emissão de radiação infravermelha (IRS) e o Sgr A\* no retângulo. Do lado direito: aumento da região retangular, que tem 2'', destacando a posição do buraco negro com uma cruz. As duas imagens foram feitas por difração limitada banda  $K_S$  (2,18  $\mu\text{m}$  de radiação) [94].

Quando passa pelo pericentro, a estrela S2 tem uma velocidade aproximada de 7.650 km/s ou quase 3% da velocidade da luz. Os efeitos relativísticos desse sistema devem ser considerados dada a alta velocidade e, claro da interferência gravitacional que o Sgr A\* impõe no sistema. Quando é analisado a dinâmica apenas com órbita kepleriana a curva não explica as posições observadas. Utilizando a medida da velocidade no pericentro e os os termos de primeira ordem do PPN <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>*Parametrized Post-Newtonian* é um formalismo que se utiliza de correções dos modelos newtoniano e pós-newtoniano da gravidade. O uso de um conjunto de valores específicos desses modelos leva o PPN a estar dentro do que é previsto pela RG [97]



**Figura 6:** Monitoramento da estrela S2 orbitando o Sgr A\*. Do lado esquerdo, superior: posição da estrela S2 semanas antes da passagem pelo pericentro. Do lado direito, superior: mesma imagem mas por outro interferômetro. Inferior: posição da S2 em julho de 2017 (esquerdo) e alguns dias depois, entre maio e junho de 2018, da passagem pelo pericentro. Todas as imagens foram feitas na banda  $K_S$  ( $2,18 \mu\text{m}$  de radiação)[11].

## Capítulo 2

# TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL

O ponto inicial de estudos cosmológicos é um modelo sintetizado por Einstein que tem proporcionado bons resultados, ao longo desses mais de 100 anos, mas que também deram problemas que inabilitam maiores passos no contexto geral para explicar o universo. Esses avanços se concentram desde as grandes estruturas e o seu desenvolvimento, como conceitos de matéria e energia escuras, até o início do universo, onde é necessário todo o aparato físico, como a física quântica e gravidade. Uma possível saída para solucionar esse problema é formular um modelo que abarque as conquistas observacionais da RG mas que tenha braços de atuação na física quântica, principalmente no que concerne a gravidade e o seu funcionamento no início do universo. E esse modelo teórico, que será focado nesse trabalho, é o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR). Um breve histórico, um sumário da estrutura matemática com envolvimento de lagrangiana e das equações de campo, conjuntamente com rápida interpretação física serão os temas deste segundo capítulo.

### 2.1 Breve histórico da TEGR

A RG é uma teoria que abarca feitos gravitacionais devido a curvatura do espaço-tempo riemanniano mas, ela tem alguns problemas, por exemplo, a energia do campo gravitacional é descrita por um pseudotensor e que tem validade local, ou seja, é só definida em uma região específica do espaço e está atrelada a um sistema de coordenadas [20, 21, 22, 23]. Isso inviabiliza

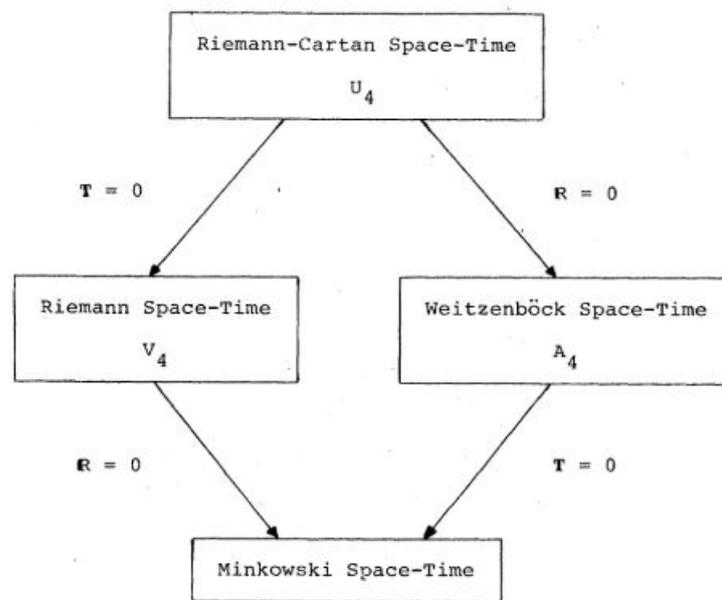
a construção de uma teoria geral que possa discretizar a energia desse campo e explorar mais detalhes do universo, como o seu estágio inicial.

A TEGR tem por base o campo de tétradas  $e^a{}_\mu$ . Com esse objeto é possível construir o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  do espaço tempo físico, os símbolo de Christoffel  ${}^0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ , dentre outras quantidades. Esses objetos serão melhor definidos mais adiante, no entanto, é importante mencionar que eles entidades matemáticas que dão sustentação teórica e que realizam algumas soluções, dentre elas, a construção de expressões de energia, densidade de energia e momento angular gravitacionais. Diferente da RG, que tem sua geometria embasada na riemanniana, o espaço do TEGR é o de Weitzenböck, matemático alemão que publicou em 1923 uma obra onde apresenta esses conceitos [98]. A diferença entre esse espaço e do da RG é que no TEGR se tem torção mas a curvatura é nula; já na RG é o inverso.

A busca por um modelo que fosse mais "geral" que a RG começou com Einstein. Ao trabalhar com o que é conhecido como equações de Einstein-Cartan ele já visualizava que seriam necessários modelos desse tipo; isto já em 1930, enquanto tentava uma unificação o eletromagnetismo e a gravitação [24, 25]. E uma das formas que ele trabalhava era com o que é conhecido por equações de Einstein-Cartan: um modelo que tem espaço-tempo curvo (geometria riemanniana) e torção (geometria de Weitzenböck) [26].

Em 1961, Møller demonstrou que é impossível anular o campo gravitacional por apenas transformação de coordenadas, ou seja, utilizando o pseudotensor da RG não é possível construir uma expressão que seja independente de coordenadas; a dependência não desaparece. Mas, deixou uma porta aberta: a densidade de energia gravitacional pode ser construída [99]. Dois anos depois, utilizando as ideias de Møller, Pellegrini e Plebanski encontram uma formulação lagrangiana e as equações de campo, além de demonstrarem que elas são completamente equivalentes à RG [100]. Chegando em 1976, Y. M. Cho deriva uma teoria de gravidade em tétradas como uma teoria de grupos (translação) e que é equivalente à densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert da RG [2, 101, 102].

No ano seguinte, Hayashi publicou um artigo que era uma síntese da *New General Relativity* (NGR). No trabalho, ela foi construída no espaço de Weitzenböck, onde o tensor de curvatura é nulo, e a gravidade se dá do tensor torção, reproduzindo a teoria newtoniana (aproximação de campo fraco) e, além disso, para os testes que a RG passou, ela contemplava de forma equivalência [103]. Em 1979 / 1981, Hayashi retornou com Shirafuji descrevendo a NGR



**Figura 7:** Gráfico do artigo de Hayashi, de 1979, sobre a *New General Relativity* [26]. Nela é mostrado como o espaço-tempo de Riemann-Cartan é reduzido para o espaço-tempo de Riemann (da RG, com torção = 0 e curvatura  $\neq 0$ ) ou para o espaço-tempo de Weitzenböck (do futuro TERG, com torção  $\neq 0$  e curvatura = 0). Quando a curvatura = torção = 0 se tem o espaço-tempo de Minkowski

de forma completa: tensores de curvatura nulo e torção formado por quatro campos vetoriais paralelos, ou seja, gravidade é efeito da torção [26]. Além do mais, ao fazer os ajustes necessários dos parâmetros, a densidade lagrangiana se reduz a densidade de curvatura escalar,  $eR$ , da geometria riemanniana [26, 27, 104]. E, pra finalizar, nos apêndices do artigo de 1979, há uma tabela comparativa entre a RG e a NGR, demonstrando o espaço-tempo, estrutura, gravitação, campos fortes, aproximação de campo franco, dentre outros elementos [26].

Em 1994, Maluf estabelece a formulação hamiltoniana da TERG a partir de vários desenvolvimentos e novas implementações para o modelo. [105]. E uma das consequências futuras desse trabalho foi motivar outros pesquisadores a avançar, com essa base, em novas ideias de como quantizar a gravidade. Ao passo que várias tentativas foram infelizes e outras ainda estão em progresso, a realidade daquele momento é que os modelos não reproduziam a RG em larga escala quando se vinha da escala de Planck e isso é um sério problema quando se tem em mente uma teoria geral física. O destaque, dentre diversos pontos que podem ser levantados desse trabalho, é que a formulação hamiltoniana e seus componentes são muito similares à de ADM (Arnowitt, Deser e Misner), que foi uma formulação hamiltoniana da RG.

Diversas evoluções e desenvolvimentos de aplicações e ferramentas dentro da TEGR têm sido feitas nos últimos 20 anos. Algumas citações serão separadas. Em 2009, uma área de pesquisa para construir uma expressão para o momento angular do campo gravitacional que seja independente das coordenadas, foi tema de uma tese [63]; não obstante, este problema não pôde ser resolvido no ambiente da RG. Acrescenta-se ainda um outro destaque presente na revisão do eletromagnetismo em referenciais acelerados, em que a quantidade física aceleração é absoluta (e não relativa) quando se analisa uma carga pontual em repouso com relação a um referencial acelerado [106]. Um problema análogo ao eletromagnetismo, que é a descrição dos feitos gravitoeletrônicos e gravitomagnéticos, teve uma linha de pesquisa em andamento dentro do âmbito da TEGR [107]. As ondas gravitacionais, que tem sido motivo de alegria e movimentação tanto no LIGO quanto na comunidade científica, continuam sendo investigadas no espaço-tempo de Weitzenböck [108, 109]. Objetos astrofísicos superdensos, como as estrelas de nêutrons e algumas de suas propriedades estão nas mesas de cálculos do TEGR [73, 110].

Já em 2014, um grande passo foi dado em relação à TEGR, a partir da publicação de um trabalho que apresentava um processo de quantização para espaço-tempo tipo Schwarzschild. Nele, com a posse de um hamiltoniano do sistema advindo da TEGR, foi possível montar um processo para se obter quantidades físicas dentro do contexto quântico e, aplicado ao espaço-tempo de Schwarzschild, permitiu uma quantização de matéria. Para tal, o resultado foi uma definição de  $m_0$  (o quantum de matéria) e a discretização da massa do buraco negro em função desse mínimo de quantidade física [28]. No ano seguinte uma linha de pesquisa avança em contexto clássico da cosmologia no que tange à expansão acelerada do universo [111]. Uma outra aplicação cosmológica foi feita com o Teleparalelismo Conforme, no qual se fez um modelo de FLRW [112] e se encontra a definição de energia gravitacional [113, 114]. Neste ano de 2018, destaca-se um novo trabalho dilatou a TEGR amarrando pesquisas com termodinâmica [115] e avanços na quantização do momento angular para espaços-tempo tipo Kerr com baixas rotações [116].

Menciona-se como destaques destaques finais, a inserção de um texto em português sobre o TEGR aplicado em cosmologia do mesmo autor dessa tese [2]. Além do mais, um artigo foi publicado mostrando como foi feita a cosmologia quântica, detalhe possível fora do contexto da RG e trabalhado com a TEGR [3]. Um terceiro trabalho está em processo de publicação e é o cerne dessa tese: discretização de energia em cosmologia quântica [3].

## 2.2 Campo de tétradas

O teleparalelismo é um conjunto geométrico que é possível estabelecer a noção de distância paralela. Em outras palavras, considerando um campo vetorial  $V^\mu(x)$ , um ponto  $x^\mu$  com componentes de tétradas  $V^a(x) = e^a{}_\mu(x)V^\mu(x)$ , uma distância  $x^\lambda + dx^\lambda$  com componentes de tétradas  $V^a(x+dx)$ , a derivada covariante será  $V^a(x+dx) = V^a(x) + \nabla V^a(x)$ , sendo  $\nabla V^a(x) = e^a{}_\mu(\nabla_\lambda V^\mu)dx^\lambda$  [27].

A configuração da TERG é feita em termos de campo de tétradas. Esse campo tem informações sobre: a construção do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ; o espaço-tempo tangente plano ( $\eta^{ab}$ ); os símbolos de Christoffel ( ${}^0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ ), que responsáveis pela mudança dos versores; conexão de Levi-Civita ( ${}^0\omega_{\mu ab}(e)$ ); o tensor de contorção  $K_{\mu ab}$ , construído com uma operação entre os tensores de torção e que é acompanhado pelo campo de tétradas para converter os índices locais de Lorentz em de espaço-tempo e vice-versa; a conexão de Weitzenböck ( $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ ), que é responsável por estabelecer conjuntamente o espaço-tempo da teoria; a conexão de spin ( $\omega_{\mu ab}$ ), quando zerada, faz o ponteamto entre o espaço-tempo de Weitzenböck e a geometria riemanniana, permitindo que elas sejam completamente equivalentes em todos os efeitos físicos; tensor de torção ( $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ ), que é a quantidade responsável pelos efeitos gravitacionais (contrário ao tensor de curvatura de Riemann na RG) e o tensor  $\Sigma^{abc}$ , que tem em sua composição operações de soma, subtração e multiplicação com os tensores de torção e  $\eta^{ab}$ . Todos esses elementos serão definidos adiante [2, 27, 62, 105].

O campo de tétradas é descrito por 4 vetores no espaço-tempo ortonormais e linearmente independentes,  $e^a{}_\mu$ , com o índice do espaço-tempo tangente plano  $a = (0), (i)$ . Já os índices de espaço-tempo físico são descritos como  $\mu = 0, i$ . Os dois tipos de índices variam de 0 a 3. O espaço-tempo de Minkowski é fixado como  $\eta_{ab} = e_{a\mu}e_{b\nu}g^{\mu\nu} = (-+++)$ . Os vetores do tipo tempo são descritos por  $e^{(0)}{}_\mu$  e os do tipo espaço por  $e^{(i)}{}_\mu$ . Este último se transforma covariantemente sob transformações de coordenadas SO(3, 1), Lorentz:  $\tilde{e}^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b e^b{}_\mu$ , sendo a representação do grupo SO(3, 1) dada pelas matrizes  $\{\Lambda^a{}_b\}$  satisfazendo  $\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}$  [27, 117, 118]

Algumas relações entre o campo de tétradas  $e^a{}_\mu$ , o espaço-tempo físico  $g_{\mu\nu}$  e o plano tangente  $\eta^{ab}$ . Considerando um vetor no espaço-tempo físico, a sua correspondente no tangente, usando a

tétrada, é dada por

$$V^\mu = e_a^\mu V^a,$$

com inversa

$$V^a = e^a_\mu V^\mu.$$

A relação de ortonormalidade é

$$e^a_\mu e_b^\mu = \delta_b^a,$$

$$e^a_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

Utilizando as relações anteriores, o tensor métrico do espaço-tempo curvo físico fica como

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{a\nu},$$

$$g^{\mu\nu} = e^{a\mu} e_a^\nu.$$

e tangente como

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu},$$

$$\eta^{ab} = e^a_\mu e^b_\nu g^{\mu\nu},$$

com  $\eta^{ab} = e^{a\mu} e^b_\mu$  sendo a métrica de Minkowski [2, 62, 72]. O determinante do campo de tétradas é dado por  $e = \det(e^a_\mu)$ . As unidades contantes físicas estão escolhidas fixamente como  $G = c = 1$ , salvo explicitamente o contrário [27, 62].

## 2.3 Construção do formalismo lagrangiano

As tétradas são as quantidades responsáveis por relacionarem os índices de Lorentz e os do espaço-tempo. E, para se construir uma formulação lagrangiana da teoria (necessária para a construção das equações de campo, definições de energia e densidade de energia, dentre outras quantidades físicas) é exigido, a princípio, que esse modelo tenha uma invariância local de Lorentz. Para tal, se introduz uma conexão de spin  $\omega_{\mu\alpha\nu}$  do grupo  $SO(3, 1)$  local e, impondo que essa conexão seja nula (para se obter a equivalência com a RG) se obtém uma densidade de lagrangiana, que é invariável sob transformações globais de Lorentz. A partir desses detalhes são obtidos as equações de campo e, para efeitos de comparação, a relação delas com a RG é de clara compatibilidade [62, 63].

Inserindo a conexão de spin o TERG exige que a derivada covariante da tétroda seja nula, ou seja, garante que o campo de tétradas estabeleça um conjunto de campos auto-paralelos [63, 73],

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} e^a_{\nu} &= e^a_{\nu;\mu} = 0, \\ \partial_{\mu} e^a_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^a_{\lambda} + \omega_{\mu}{}^a{}_b e^b_{\nu} &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Separando a conexão  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^a_{\lambda}$ , que é descrita em função da tétroda e da conexão de spin,

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} e^b_{\nu} \omega_{\mu ab} + e^{a\lambda} \partial_{\mu} e_{a\nu} \quad (2.2)$$

e, substituindo-a na expressão definida de tensor usual de curvatura, é obtido o tensor de curvatura geral em função

$$R^{\lambda}_{\gamma\mu\nu}(\Gamma) = \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} + \Gamma^c{}_{\gamma\nu} \Gamma^{\lambda}_{c\mu} - \Gamma^c{}_{\gamma\mu} \Gamma^{\lambda}_{c\nu} = e_a{}^{\lambda} e^b{}_{\gamma} R^a{}_{b\mu\nu}(e, \omega), \quad (2.3)$$

que é o tensor curvatura geral. Desenvolvendo os termos da equação (2.3) e considerando a derivada do campo de tétradas, equação (2.1), se tem

$$R^{\lambda}_{\gamma\mu\nu}(e, \omega) = e_a{}^{\lambda} e^b{}_{\gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\nu ab} - \partial_{\nu} \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ac} \omega_{\nu cb} - \omega_{\nu ac} \omega_{\mu cb}). \quad (2.4)$$

Usando a equação (2.2) para se calcular o tensor torção, definido como

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \quad (2.5)$$

é obtido [2, 63, 73]

$$T^a{}_{\mu\nu}(e, \omega) = \partial_{\mu} e^a_{\nu} - \partial_{\nu} e^a_{\mu} + \omega_{\mu}{}^a{}_b e^b_{\nu} - \omega_{\nu}{}^a{}_b e^b_{\mu}. \quad (2.6)$$

A conexão de spin da equação (2.6),  $\omega_{\mu a\nu}$ , é formalizada identicamente

$$\omega_{\mu ab} = {}^0\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}, \quad (2.7)$$

sendo a conexão de Levi-Civita como  ${}^0\omega_{\mu ab}$  e possuindo torção nula, sendo que a outra expressão é o tensor de contorção,  $K_{\mu ab}$ . Estes objetos são definidos como

$$\begin{aligned}{}^0\omega_{\mu ab} &= -\frac{1}{2} e^c{}_{\mu} (\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}), \\ K_{\mu ab} &= -\frac{1}{2} e_a{}^{\lambda} e_b{}^{\nu} (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}),\end{aligned}\quad (2.8)$$

onde

$$\Omega_{abc} = e_{av} (e_b^\mu \partial_\mu e_c^\nu - e_c^\mu \partial_\mu e_b^\nu).$$

Com isso, uma identidade relacionando a conexão de Levi-Civita da equação (2.8),  ${}^0\omega_{\mu ab}$ , com o tensor de contorção  $K_{\mu ab}$  é [27, 73, 119]

$${}^0\omega_{\mu ab} = -K_{\mu ab}.$$

Trazendo a derivada covariante de (2.1), aplicando a conexão de spin como  $\omega_{\mu ab} = 0$  e fazendo algumas manipulações, é obtido

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^0\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + e^{a\lambda} K_{\mu ab} e^b_\nu.$$

Esta é a conexão de Weitzenböck por  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e^{a\lambda} \partial_\mu e_{a\nu}$ , sendo assimétrica pelos índices  $\mu$  e  $\nu$ . Aplicando-a no tensor torção, equação (2.5), conjuntamente com o tensor de curvatura  $R^d_{abc}$  da equação (1.2), é obtido um tensor torção não nulo,  $T^\lambda_{\mu\nu} = e^{a\lambda} (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu})$ , e um tensor nulo. Ou seja, a parte não nula é o agente do efeito gravitacional nessa teoria, em contrário à interpretação de curvatura da RG [2, 119].

Com o uso da equação (2.7) para o cálculo do escalar de curvatura, que advém da contração dos índices do tensor de curvatura geral definido na equação (2.3), e da multiplicação do determinante da tetrada, a relação básica para calcular a densidade de lagrangiana no TERG é obtida como [62, 63]:

$$eR(e, \omega) = eR(e) + e \left( \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a_a \right) - 2\partial_\mu (eT^\mu). \quad (2.9)$$

Impondo que a conexão de spin seja zerada,  $\omega_{\mu ab} = 0$ , o escalar de curvatura, retirado da contração dos índices do tensor da equação (2.3), são zerados, o tensor de torção  $T^a_{\mu\nu}$ , (2.6), é feito como

$$T^a_{\mu\nu}(e) = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu. \quad (2.10)$$

e a expressão (2.9) se torna [2, 62, 63]

$$eR(e) \equiv -e \left( \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a_a \right) + 2\partial_\mu (eT^\mu), \quad (2.11)$$

$T^a_a = T^b_b$ . É importante salientar que tanto o lado direito quanto o lado esquerdo dessa expressão (2.11) são invariantes sob as mesmas transformações locais  $SO(3, 1)$  [27].

A densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  é descrita desprezando a divergência da equação (2.10), pois ela não tem contribuição na ação total [2, 62, 63]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e_{a\mu}) &= -ke \left( \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) - \mathcal{L}_M \\ &\equiv -ke \Sigma^{abc} T_{abc} - \mathcal{L}_M\end{aligned}\quad (2.12)$$

sendo  $k = \frac{1}{16\pi}$  e a densidade de lagrangiana para os campos de matéria,  $\mathcal{L}_M$ . Ela pode ter outro formato,

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}) = -ke \Sigma^{abc} T_{abc} - \mathcal{L}_M, \quad (2.13)$$

onde o tensor  $\Sigma^{abc}$  é definido como [27, 105]

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} \left( T^{abc} + T^{bac} - T^{cab} \right) + \frac{1}{2} \left( \eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c \right). \quad (2.14)$$

## 2.4 Equações de campo e energia-momento gravitacional

De posse da densidade lagrangiana e de todos os elementos apresentados na seção anterior 2.3, o próximo passo que será apresentado no panorama desse modelo gravitacional é a construção das equações de campo e sua comparação com a RG, mostrando a equivalência dinâmica. E uma quantidade essencial será referenciada em boa parte desse trabalho e que é um diferencial da RG: tensor de energia-momento gravitacional. Com ele será possível construir uma equação de continuidade e, focando nesse último, uma cosmologia quântica de universo primordial, [1, 2, 3].

Quando se toma a variação da ação total, descrita em (2.12), e aplicando nas equações de Euler-Lagrange, dadas como

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_{a\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_{a\mu}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu e_{a\mu})} = 0,$$

se encontra as equações de campo da TERG [62, 73, 113, 119, 120], que são descritas como:

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e \Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left( \Sigma^{bv}{}_a T_{bv\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{4k} e T_{a\mu}. \quad (2.15)$$

Mesmo a densidade de lagrangiana não sendo invariante sob uma  $SO(3, 1)$  arbitrária, essas equações de campo (2.15) são covariantes sob uma transformação local do mesmo grupo [73]. Analisando a expressão acima (2.15) é notável que o termo  $\Sigma^{abc} T_{abc}$  tem proporcionalidade ao

escalar de curvatura advindo da relação (2.9) com uma divergência total a menos. Isso implica, fazendo vários cálculos, que o lado esquerdo da equação (2.15) é proporcional ao tensor de Einstein,  $G_{a\mu} = e_a{}^\nu G_{\nu\mu}$ , resultando na relação

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e \Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left( \Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{2} e \left[ R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) \right], \quad (2.16)$$

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) = \frac{1}{2k} T_{a\mu}. \quad (2.17)$$

As equações (2.16) e (2.17) são completamente equivalentes, i. e., essa teoria construída até aqui é justificada no nome com a RG, e ainda continua sendo uma teoria essencialmente geométrica, tendo curvatura nula e tensor torção diferente de zero (montagem dada inicialmente pela imposição da conexão de spin zerada).

Uma importante quantidade a ser destacada advém da reescrita das equações de campo (2.15). A sua reconfiguração fica [2, 27]:

$$\partial_\nu (e \Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4} e e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (2.18)$$

com destaque ao tensor

$$t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}) \quad (2.19)$$

Este tensor é interpretado como sendo o de energia-momento do campo gravitacional e tem como característica fundamental, dentre outras [121], ser verdadeiro sob transformações de coordenadas, mesmo não sendo simétrico. E ele entra em rota de colisão de forma natural com a expressão (1.5) que não é um tensor real sob qualquer transformação de coordenadas.

Um outro detalhe que deve ser destacado vem do tensor  $\Sigma^{a\lambda\nu}$ , que é anti-simétrico nos dois últimos índices,  $\Sigma^{a\lambda\nu} = -\Sigma^{a\nu\lambda}$ . Uma lei de conservação, para  $e t^{\lambda\mu}$  e  $e T^{\lambda\mu}$  é feita derivando a equação (2.18) em relação à  $\partial_\nu$ ,

$$\partial_\mu \partial_\nu (e \Sigma^{a\lambda\nu}) \equiv 0,$$

e obtendo

$$\partial_\mu [e e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})] = 0. \quad (2.20)$$

Em outras palavras, essa última relação é uma lei de conservação local para os tensores de energia-momento gravitacional,  $t^{\lambda\mu}$ , e para os de campo de matéria,  $T^{\lambda\mu}$ , e não há equivalente

na RG. Utilizando essa mesma expressão (2.20) para escrever a equação de continuidade como

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x e e^a{}_\mu (t^0{}_\mu + T^{0\mu}) = - \oint_S dS_j [e e^a{}_\mu (t^{j\mu} + T^{j\mu})] \quad (2.21)$$

onde a parte da integral é sobre todo o volume  $V$  que tem, por delimitação, a superfície  $S$ . Reescrevendo o lado esquerdo dessa equação (2.21) com objetivo de obter uma expressão do quadrivetor de energia-momento total dentro do volume  $V$ , se tem [27, 63, 73, 120, 122]

$$P^a = \int_V d^3x e e^a{}_\mu (t^0{}_\mu + T^{0\mu}) \quad (2.22)$$

e com componentes do tipo  $P^a = (E/c, \mathbf{P})$  levando a ser reescrito como

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_j \Pi^{aj} = - \oint_S dS_j \Pi^{aj}, \quad (2.23)$$

sendo

$$\Pi^{aj} = -4k e \Sigma^{a0j}, \quad (2.24)$$

que é interpretado como densidade de energia-momento gravitacional. As componentes de  $P^a$  tem correspondência com energia total quando  $a = 0$  e os outros índices, indo de 1 a 3, dizem respeito a parte do momento. O termo  $\Pi^{aj}$  está relacionado tanto ao tensor  $t^{a\mu}$  quanto ao  $T^{a\mu}$ . Outro ponto a ser relevado é que a equação (2.23) é invariante sob transformações de coordenadas [3].

Um detalhe adicional, para finalizar esse panorama sobre a TERG, é concernente ao momento angular gravitacional. Não serão tratados todos os pontos mas, há um campo de tetradas importante que é fixado no observador e será utilizado no último capítulo na construção da cosmologia quântica. Para se obter a parte do momento angular gravitacional, equações de restrição são colocadas. Tomando da definição de momento canonicamente conjugado da formulação hamiltoniana da TERG, [27]

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{e}_{a\mu}} = -4k e \Sigma^{a0\mu},$$

ela levará a uma restrição de ordem primária,  $\Gamma^{ab} = 0$ ,

$$\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba} = \Pi^{[ab]} + 4k e (\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})$$

e  $\Pi^{a0} = 0$ . A densidade hamiltoniana com essa restrição, adicionado a outras modificações,

levará a

$$2\Pi^{[ab]} + 4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}).$$

Definindo a densidade de momento angular como

$$M^{ab} = 2\Pi^{[ab]} = -4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}),$$

e o momento angular total do campo gravitacional, dentro de um volume  $V$  tridimensional, como

$$L^{ab} = - \int_V d^3x M^{ab}.$$

Um tensor métrico mais geral descrevendo o espaço-tempo gerado por uma fonte com rotação estacionária, arbitrária e com simetria axial é a que tem por elemento de linha

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2 + 2g_{03} d\phi dt$$

sendo  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$ . Dotando um observador estacionário por um conjunto de tétradas e estabelecendo as condições

$$e_{(0)}^i = l^i = 0,$$

em coordenadas esféricas, escolhendo a componente  $e_{(3)}^\mu$  com orientação assintótica,  $r \rightarrow \infty$ , vetor unitário  $\hat{z}$  ao longo do eixo  $z$ ,

$$e_{(3)}^\mu(t, x, y, z) \cong (0, 0, 0, 1),$$

produzirá um referencial em  $(t, r, \theta, \phi)$  [27, 123]

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -C \\ 0 & B \sin \theta \cos \phi & \sqrt{g_{22}} \cos \theta \cos \phi & -Dr \sin \theta \sin \theta \\ 0 & B \sin \theta \sin \phi & \sqrt{g_{22}} \cos \theta \sin \phi & Dr \sin \theta \cos \phi \\ 0 & B \cos \theta & -\sqrt{g_{22}} \sin \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde

$$A(r, \theta) = \sqrt{-g_{00}}, \quad B(r) = \sqrt{g_{11}}, \quad C(r, \theta) = -\frac{g_{03}}{\sqrt{-g_{00}}},$$

$$D(r, \theta) = \sqrt{\frac{-\delta}{(r^2 \sin^2 \theta) g_{00}}}, \quad \delta = g_{03} g_{03} - g_{00} g_{33}.$$

O determinante da tétrada  $e^a{}_\mu$  é  $e = \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{g_{11} g_{22} \delta}$ . E esse campo de tétradas (2.25) gera uma quadrivelocidade  $e_{(0)}{}^\mu = (\frac{1}{A}, 0, 0, 0)$ , que significa uma adaptação a observador estático [62].

## 2.5 Interpretação física

A interpretação do campo de tétradas como sistema de referência é dado pela invariância mostrada na lagrangiana de (2.12). Isso quer dizer que a teoria é invariante por transformações globais  $SO(3, 1)$  e, através de dois campos de tétradas que são soluções das equações de campo, eles produzem o mesmo tensor métrico e, além do mais, descrevem sistemas de referências diferentes (não se relacionam por transformação global de Lorentz). Com isso, essas quantidades podem ser sistemas de referência adaptados a observadores de massa nula no espaço-tempo [27, 62].

O sistema de referência local, dado pelo campo de tétradas, tem um observador se movendo ao longo de uma trajetória  $C$ , representado pelo tempo próprio  $\gamma$ , linha-mundo  $x^\mu(\gamma)$ , velocidade denotado por  $l^\mu(\gamma) = dx^\mu/d\gamma$  e, aplicando  $a = (0)$  em  $e_a{}^\mu$  obtém  $e_{(0)}{}^\mu = l^\mu(\gamma)/c$ . A aceleração  $a^\mu$  desse mesmo observador é dado por [27, 62, 117, 118]

$$a^\mu = \frac{Dl^\mu}{d\gamma} = c \frac{De_{(0)}{}^\mu}{d\gamma} = c l^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu$$

sendo a derivada covariante construída sob os símbolos de Christoffel, representados por  ${}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ .

Então,

$$\begin{aligned} \frac{De_{(0)}{}^\mu}{d\gamma} &= \frac{de_{(0)}{}^\mu}{d\gamma} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\gamma} e_{(0)}{}^\beta \\ &= \frac{dx^\alpha}{d\gamma} \frac{\partial e_{(0)}{}^\mu}{\partial x^\alpha} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\gamma} e_{(0)}{}^\beta \\ &= l^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu \end{aligned}$$

Ou seja, o campo de tétradas  $e_a{}^\mu$  dá ao observador velocidade e aceleração ao longo dessa linha-mundo  $x^\mu(\gamma)$ . Agora, um detalhe importante: dado um conjunto  $e_0{}^\mu$ , que descreve uma

congruência de curvas do tipo tempo, é acoplado uma classe particular de observadores que tem características de velocidade e aceleração citadas acima. Se  $e^a{}_\mu \rightarrow \delta^a_\mu$  para  $r \rightarrow \infty$ , então  $e^a{}_\mu$  é conectado a observadores estáticos no tipo espaço infinito [27, 72].

A aceleração do referencial no observador é fixada pela derivada absoluta de  $e_a{}^\mu$  ao longo da linha-mundo. Isto pode ser generalizado por [27, 72]

$$\frac{De_a{}^\mu}{d\gamma} = \phi_a{}^b e_b{}^\mu,$$

onde  $\phi_{ab}$  é o tensor de aceleração antissimétrico. Ele pode ser obtido por

$$\phi_a{}^b = e^b{}_\mu \frac{De_a{}^\mu}{d\gamma} = e^b{}_\mu l^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu \quad (2.26)$$

descrito em relação aos símbolos de Christoffel. Esta conexão está relacionada com a conexão de spin  $\omega_{\mu ab}$  da equação (2.26) e, tomando por 2.1, aplicando na expressão acima, tem-se

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} [T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}],$$

que é interpretado, nesse modelo, como sendo a aceleração inercial  $x^\mu(\gamma)$  [27, 62].

Dado um campo de tétradas em um espaço-tempo, tanto pela velocidade  $l^\mu = e_{(0)}{}^\mu$  junto com os componentes ( $a = 1, \dots, 3$ ) de  $e_{(a)}{}^\mu$  ou pelo tensor aceleração  $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$  que caracteriza o estágio inicial do referencial podem ser interpretação geométrica de um conjunto de campos de tétradas para um espaço-tempo arbitrário. A fatia de  $e_{(0)}{}^0$  determina apenas as três componentes  $e_{(0)}{}^1, e_{(0)}{}^2, e_{(0)}{}^3$ , pois a primeira componente,  $e_{(0)}{}^0$ , vem da normalização de  $l^\mu l^\nu g_{\mu\nu} = -c^2$ . Independente dos dois casos, o referencial é fixado requer estabelecimento de seis componentes do campo de tétradas [2, 27].

Uma última palavra com relação à interpretação física dessa teoria é um reforço ao ponto central. Como foi mostrado inicialmente e desenvolvido, de forma panorâmica, no campo de tétradas há detalhes que podem reconstruir o espaço-tempo físico através do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e do plano tangente ( $\eta^{ab}$ ). A conexão de Weitzenböck ( $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ ) monta, conjuntamente com outras quantidades, o espaço-tempo do modelo e é pontuada, para o espaço riemanniano, através da conexão de spin  $\omega_{\mu ab}$  (2.7): quando imposta que seja zero, permite que as duas teorias sejam completamente equivalentes no que tange à dinâmica e aos efeitos físicos observáveis que dependerão de interpretação. Por exemplo, o efeito gravitacional que, aqui, é advindo do tensor de torção ( $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ ) [2, 27, 62, 105]. Neste trabalho foi destacado inicialmente a conexão de spin

---

$\omega_{\mu ab}$  de forma livre, ou seja, sem determinar ou impor algum valor inicial, pois pode-se construir outros modelos onde ela seja diferente de zero e, assim, obter outras configurações [124].

## Capítulo 3

# COSMOLOGIA

A cosmologia é a ciência que estuda o universo como um todo, incluindo sua estrutura, evolução e composição. Em outras palavras, isso implica que é considerado como um sistema dentro de um limite afim de se ter um objeto completo para investigação. Por estrutura, a forma, a organização da matéria e energia são consideradas para saber sua evolução, desde as fases mais primordiais até as previsões. Por fim, fazem parte da composição, as galáxias e aglomerados, que são considerados como pequenos objetos, pois representam o esqueleto e o interior desse sistema. Ou seja, a abrangência, em relação ao ser humano, vai para as maiores escalas observáveis e até inimagináveis [125, 126]. Neste terceiro capítulo, o panorama se guiará por alguns destaques históricos e o núcleo do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) [127].

### 3.1 Breve histórico

A humanidade, desde a antiguidade, tem observado os céus e se guiado por ele, seja para uso coletivo (como agricultura), seja para orientação espacial (como navegações). E a partir dessas observações, a curiosidade e as questões mais fundamentais do ser intrínseco humano têm acompanhado o desenvolvimento da civilização. Relacionado à isso, porém, dentro de um intervalo de tempo extremamente pequeno comparado ao tempo cosmológico, o avanço do conhecimento recebeu muitas contribuições de filósofos e cientistas, dentre eles, destacam-se Copérnico, Kepler e Newton e compreendem a construção de modelos de universo capaz de abarcar a maior quantidade de observações possível [2, 128].

Todo o desenvolvimento científico da cosmologia singularizou para o século XX e hoje, 2018, está em um ponto de impulso que promete grandes revoluções. O século passado começou com abalos quase sísmicos no modelo newtoniano de mundo: Einstein publica alguns artigos em 1905 modificando o modelo de Newton [51, 52, 53, 54, 55]. Uma década depois, ele unifica sua própria teoria, a RE, incrementando um análogo que faltava ou se ajustaria de forma semelhante ao modelo newtoniano: gravidade [59, 60]. As implicações dessa nova teoria eram igualmente inovadoras com relação à mudança de entendimento: distorção de espaço-tempo, apenas para destacar um ponto do que já foi mencionado na seção 1.2 [129].

Por outro lado, eram necessários comprovações ou observações do que estava escrito nas equações de campo da RG. Mas, antes, um avanço adicional foi feito com os trabalhos, ainda teóricos, de Friedmann [30, 31], Lemaître [32, 33, 130, 131], Robertson [34, 35, 36] e Walker [37, 38]. Com todo esse avanço, a contrapartida observacional, que veio depois das previsões teóricas, veio no meio desses anos: 1929, do Monte Palomar em Pasadena (Mount Wilson Observatory). Edwin Powell Hubble publica seus trabalhos gráficos mostrando, praticamente a escrita de Lemaître e suas previsões, que o universo tem uma dinâmica expansiva [29].

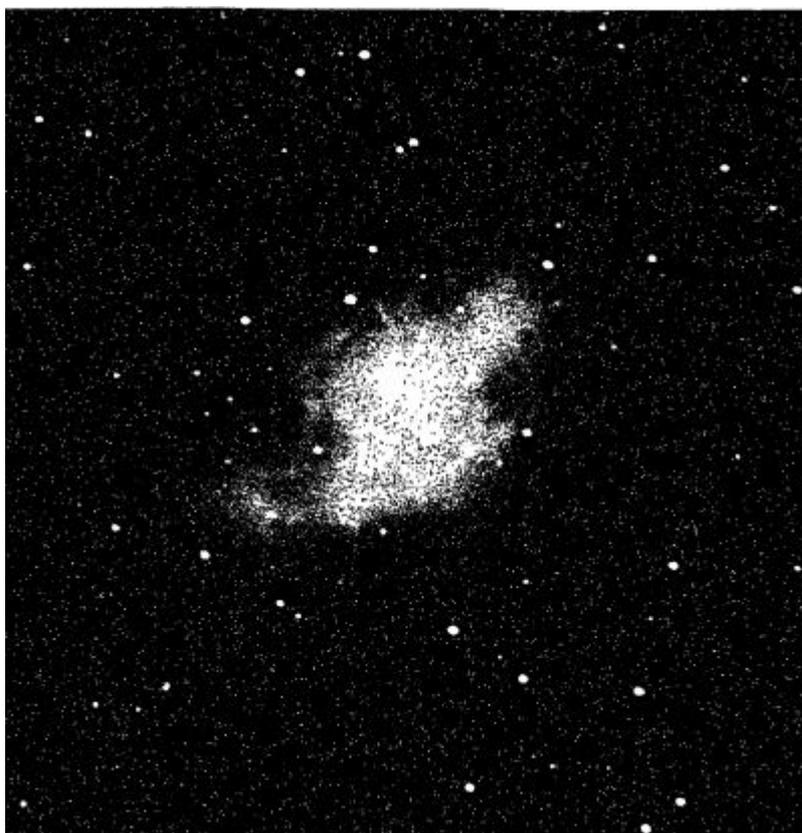
Todo esse conhecimento, toda essa ciência que ajunta matemática abstrata, física já conhecida, previsões, observações, somado com o que se tem de mais refinado na astronomia atual, se converge ao nomeado na literatura como Modelo Cosmológico Padrão (MCP), que tem por base matemática a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e os conceitos de matéria e energia escuras pelo  $\Lambda$ CDM (*Cold Matter Dark*) [127].

No capítulo 1 a RG proposta, depois de anos de desenvolvimento por Einstein, acalentou umas das "pequeninas nuvens" da lenda de Kelvin [132]. Mas, antes de se ter esse desenvolvimento teórico já se tinha grandes debates e discussões observacionais em décadas anteriores sobre o universo em si. Até a descoberta de outras galáxias além da Via Láctea, o que se imaginava de universo como um todo era o que se podia observar a olho nu ou com os instrumentos usados em navegações até o séc. XVII e que tiveram readaptações, por exemplo, a luneta que Galilei utilizou para ver a Lua e suas crateras, Júpiter e suas luas, dentre outros objetos.

Os primeiros objetos que caracterizaram como galáxias foram descobertos por Thomas Wright e Immanuel Kant e eram chamadas de nebulosas: corpos extensos e difusos. A maioria desses objetos observados desde o séc. XVIII realmente são aglomerados de estrelas, grandes extensões de nuvens de gás iluminadas por estrelas em seus interiores mas, uma outra parte

de "nebulosas" são outras galáxias [133]. Então, havia um problema a ser resolvido para se determinar se essas nebulosas eram universos ilhas, agrupamento de estrelas ou outras galáxias, e a solução seria dada pela observação da distância. Esses debates no campo observacional duraram até a década de 1920 e os últimos expoentes dessa disputa foram Harlow Shapley, do Mount Wilson Observatory, e Herbert Curtis, do Lick Observatory [133, 134].

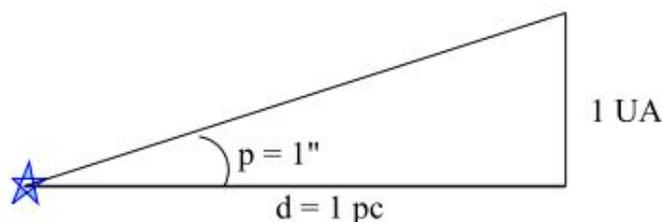
O ponto de Curtis era que a evidência, advinda dos estudos que ele fez com sistemas de aglomerados globulares (com aproximadamente  $10^6$  estrelas em uma distribuição radial de 10 pc e concluindo que o centro gravitacional desses objetos estavam a mais de 8 pc de distância na direção de Sagitarius, apontava que as nebulosas espirais eram galáxias ou universos ilhas comparáveis à Via Láctea [128, 134]. Já Shapley, com seus trabalhos demonstrando a posição do Sol na Via Láctea, pontuava que as evidências apontavam para o simples fato de que eram nebulosas (compostos de estrelas, gás e outros elementos) da própria galáxia que habitavam [133, 134].



**Figura 8:** Nebulosa do Caranguejo. Figura 11, NGC 1952, do artigo publicado por H. D. Curtis em 1918 [135].

Um último detalhe é sobre a definição de parsec (pc). Esta quantidade é definida como

o espaço entre um observador e um objeto de tal forma que, esse mesmo observador, veria a distância média entre a Terra e o Sol com um tamanho angular ou paralaxe de  $1''$ . A distância média entre a Terra e o Sol é definida como unidade astronômica, AU, que tem por valor  $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$ .



**Figura 9:** Desenho esquemático de uma paralaxe. [133].

Então,  $1 \text{ pc} = 3,0856 \times 10^6 \text{ m} = 3,2616 \text{ anos-luz}$  de distância e é muito comum utilizar os prefixos kpc e Mpc para kiloparsecs e megaparsecs, respectivamente [133, 136, 137].

### 3.1.1 *Cosmografia e lei de Hubble-Lemaître*

As divergências foram amenizadas com as observações de Hubble. Em 1923, utilizando o telescópio de 100 polegadas do Mount Wilson, ele observa estrelas variáveis tipo Cefeidas na, ainda chamada, nebulosa de Andrômeda (catalogada como M31). Essas estrelas são pulsantes, instáveis, com massa aproximada de 10 vezes a massa do Sol e brilho com oscilação periódica. Utilizando o pesado conhecimento que já se tinha sobre estrelas, ele concluiu que a distância até lá estaria além da ordem de grandeza que a Via Láctea teria, ou seja, Andrômeda seria o universo ilha de Kant [128, 134, 138]. Obviamente, a controvérsia finalizada entre Curtis e Shapley não significava, na prática, um fim e uma explicação completa e total para todos os objetos observados.

Alguns anos antes, trabalhando no Observatório Lowell no Arizona, Vesto Slipher tinha desenvolvido algumas técnicas de observação utilizando o que se conhece hoje de espectroscopia. Essa técnica consistia em verificar qual era o espectro do objeto e, aplicando o conhecido efeito Doppler, era possível determinar a velocidade em relação à Terra [134]. Hubble ampliou seus trabalhos, junto com seu colaborador Milton Humanson, de observação, espectroscopia, determinação de distâncias, pela técnica de das Cefeidas, e da velocidade. O *redshift*, que é uma

medida de afastamento de um objeto que relaciona o seu espectro,

$$z \equiv \frac{\lambda_{ab} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}},$$

onde  $\lambda_{ab}$  é o comprimento de onda de absorção, medido em laboratório e o  $\lambda_{em}$  é o de emissão, que advém do objeto observado [125], foi uma das ferramentas essenciais pra correlacionar o que se conhece como lei de Hubble-Lemaître.

Em 1929, Hubble publicou o célebre artigo onde plota um gráfico relacionando distâncias e velocidades das chamadas nebulosas extragalácticas. Alguns anos antes, Carl Wirtz já tinha proposto utilizar um ferramental parecido com o do Hubble, mas as incertezas nas determinações das distâncias eram muito grandes e foram necessárias a obtenção de mais dados [128, 134].

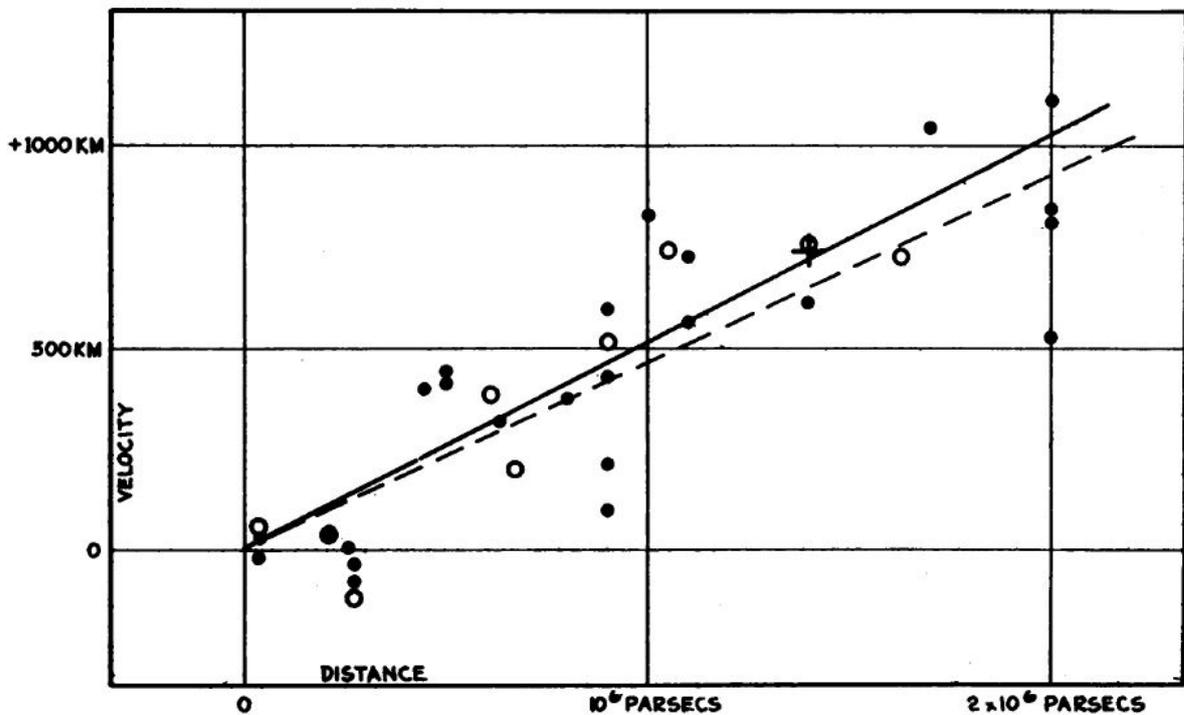


Figura 10: Dados obtidos por Hubble em 1929 [29].

A equação dada por Hubble e deduzida dos dados observacionais é formatada como

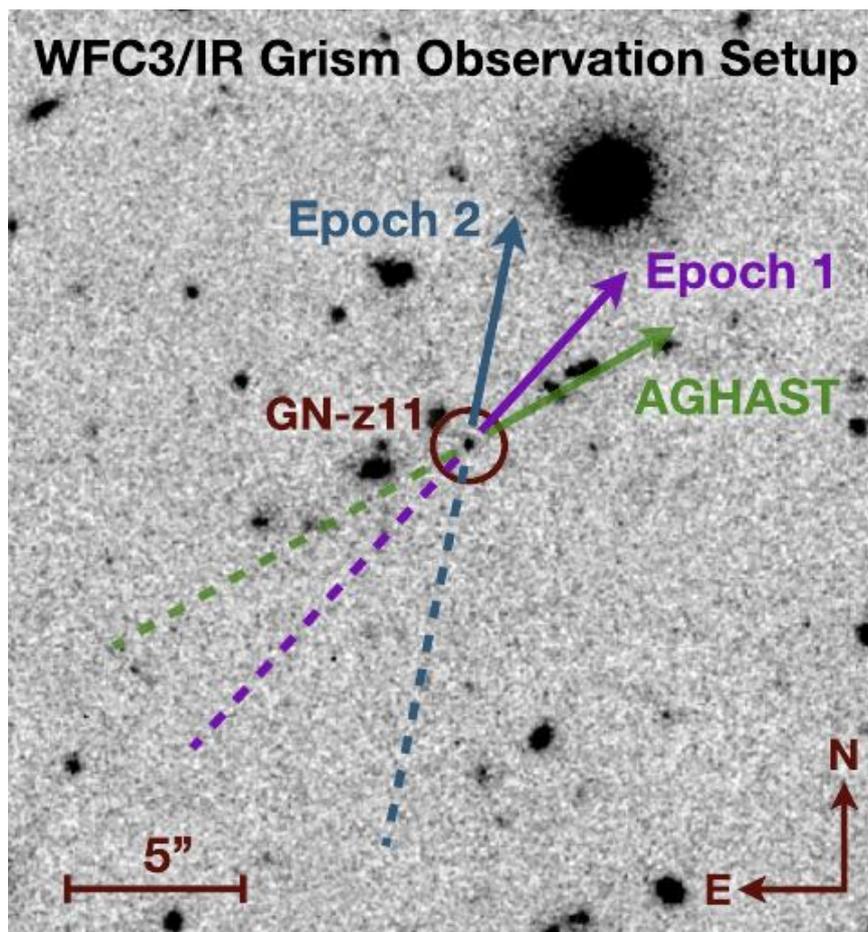
$$v = H_0 d,$$

onde  $v$  é a velocidade a ser aferida,  $d$  é a distância até o objeto e  $H_0$  é a *constante de Hubble* [125, 134]. Atualmente, há algumas técnicas para se obter esse valor, cujas mais acuradas vêm por meio do uso do *Hubble Space Telescope* e, também, através de observações em galáxias

e Supernovas tipo Ia, dando  $H_0 = (73,24 \pm 1.74) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [139]. Há outra técnica que é oriunda da missão Planck, e que este ano teve novos refinamentos nos dados pela observação da CMB, oferecendo um valor de  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [140]. Um detalhe adicional que merece destaque é que a lei de Hubble-Lemaître, de forma geral, é escrita como

$$v(t) = H(t)d(t), \quad (3.1)$$

ou seja, a velocidade é uma função que dependerá da distância e da variação da constante de Hubble ao longo do tempo, pois, a constante  $H_0$  é determinada no momento atual da medida. E, uma observação adicional: a equação que é obtida do plote das medidas observacionais, tem validade limitada, ou seja, ela funcionará para pequenas distâncias ou variações de redshift. Já a lei de Hubble-Lemaître geral, descrita pela expressão (3.1), é válida de forma geral desde que se tenha o valor de  $H(t)$  no momento cosmológico a ser estudado [134].



**Figura 11:** Objeto mais distante observado no universo até agora (10 de março de 2018). A galáxia, nominada como GN-z11 tem um redshift de  $\approx 11,09$ , ou seja, quando o universo tinha uma idade de  $\approx 400$  milhões de anos [141].

Todas essas informações supracitadas permitem obter interpretações físicas que já foram trabalhadas em modelos cosmológicos, que serão mencionados a frente e que foram desenvolvidos em paralelo, no tempo, com os trabalhos de Hubble. Uma primeira observação que se tira é que, pelo gráfico de Hubble, pelas observações atuais e voltando no tempo, houve um instante na história do universo que não existiam galáxias e estrelas, apenas nuvens de gás. Ao se utilizar a lei de Hubble-Lemaître e a constância da velocidade da luz, tudo o que se tem disponível de espectro, mais perto do universo, é uma relação entre a imagem que deixou o objeto e a posição do observador hoje. Detalhando um pouco mais: quando a luz deixa um objeto com velocidade  $c$ , depois de passar um tempo  $dt$ , viajará uma distância  $d$ , de modo que, quanto mais distante um objeto está, mais tempo o observador olhará para o passado. Desse modo, dois conceitos necessários para amarrar esses parâmetros são: a de observador comóvel (que vê as galáxias durante um tempo  $dt$  mantendo as distâncias entre si, que é a distância comóvel  $d_c$ ) e outro conceito é a distância própria (observador que não acompanha a evolução cosmológica, ou seja, a distância aumenta com o tempo devido a expansão do universo). Pode-se detalhar do seguinte modo: suponha uma galáxia na posição  $\mathbf{r}_1$ , emitindo luz no instante  $t_1$  com um observador na posição  $\mathbf{r}_0$ . A distância comóvel  $d_c$  será dada como  $d_c = a_0 r_1$ , onde  $a_0 = a(t_0)$ , que é o fator de escala do universo hoje [128]. Este fator está relacionado com distâncias e sua derivada,  $a'_0 = a'(t_0)$ , estará relacionado com a velocidade com que este fator aumenta.

Na última reunião da *International Astronomical Union*, na ocasião da *XXX General Assembly* foi votada a resolução **B4**. Essa recomendação considera, dentre vários pontos, a descoberta visual da recessão das galáxias [29], o trabalho anterior de Lemaître [32, 33] e alguns destaques envolvendo outras discussões. O resultado foi a renomeação da *Lei de Hubble* para *Lei de Hubble-Lemaître*. Nessa reunião histórica no dia 29 de outubro de 2018 teve a participação, na votação, de 78% contra 20% no intuito de aprovar essa reescrita na literatura <sup>1</sup>.

Até aqui foi dado um panorama sobre a cosmologia com enfoque observacional e, mais especificamente, convergindo para os trabalhos observacionais de 1929 com Hubble. Só que, entre a publicação da RG em 1916 e o trabalho derradeiro de Walker em 1937, fechando, em um primeiro momento, o MCP, teve diversos outros desenvolvimentos teóricos. Nas seções seguintes será apresentado, de forma geral, o MCP e suas peças de quebra-cabeça teóricas, perpassando por

---

<sup>1</sup>A votação sobre a resolução **B4** pode ser lida integralmente em <https://www.iau.org/static/archives/announcements/pdf/ann18048a.pdf> que tem, inclusive, o artigo original de Lemaître [32]. Já o painel sobre a votação pode ser encontrado em <https://www.mi-vote.com/files/iau/results.pdf>.

Friedman, Lemaître, Robertson e, como elo final, Walker. A cosmografia neste momento, como uma área observacional, casando com as previsões e descartando outras, pode ser considerada como o nascimento da cosmologia moderna, pois os avanços tecnológicos, as observações, a obtenção de grande quantidade de dados (hoje é necessário utilizar áreas da computação como o *Big Data*) e os modelos teóricos cosmológicos tem avançado para patamares com intenção de descortinar os primeiros instantes e, talvez, futuro do universo.

## 3.2 Modelo Cosmológico Padrão

Antes de adentrar no cerne do MCP, é necessário enunciar dois princípios que serão basilares para toda a cosmologia, inclusive nos dias atuais para análise de dados de satélites, como a missão Planck, Sloan Digital Sky Survey - SDSS, dentre outras. O primeiro deles é o **Princípio Cosmológico**: não há localização especial para um observador no universo. Isso quer dizer, em outras palavras, que o universo é isotrópico e homogêneo, porque apresenta a mesma aparência em todas as direções e em cada ponto, respectivamente, para escala maior que 100 Mpc de distância [142]. Esse princípio advém de uma generalização de Copérnico: universo não tem centro [125]. O outro é o **Princípio de Weyl**, que advoga sobre o espaço e o tempo a nível cosmológico: há uma rede de geodésicas que conectam as galáxias e formam uma hipersuperfície no universo isotrópico e homogêneo [68].

O MCP é baseado em um conjunto de conhecimento que advém desde a RG. Ele pode ser, resumidamente, sintetizado como [68, 143]:

(i) Princípio Cosmológico;

(ii) Lei de Hubble-Lemaître (3.1),  $v(t) = H(t) d(t)$  ;

(iii) Dinâmica cosmológica regida pelas equações de campo da RG (1.7),  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$ ;

- (iv) Retrocedendo no tempo, o universo começa em um estado extremamente denso, quente e pequeno, com dominação da radiação;
- (v) Expansão. As interpretações dos dados dos grupos de pesquisa *High-z Supernova Search Team* e *The Supernova Cosmology Project* é de que o universo está se expandindo de forma acelerada [144, 145, 146].

A geometria do MCP é não-euclidiana, ou seja, como tem em seu cerne as equações de campo da RG, só foi possível geometrizar o universo com os avanços matemáticos anteriores, passando por Bolyai, Lobachevski, Gauss e chegando em de Riemann [147]. Conforme já visto no capítulo 1 sobre a RG, o conteúdo do universo, massa e energia, tem conexão com a variedade do espaço-tempo [72, 125].

Uma grande massa de evidências e suportes matemáticos dão sustentação ao MCP. Mas, falta um componente para fechar esse modelo: soluções das equações de campo da RG, adicionando algumas hipóteses para o início quente e denso do universo. Esse componente é a métrica de FLRW que, ao longo do seu desenvolvimento, trouxe dinâmica e base teórica para as observações tanto nas décadas de 1960 quanto para os dias atuais e futuros e culminou com o que se conhece modernamente de Teoria do Big Bang. Claro, não é uma teoria final e muito menos responde todas as grandes questões (nas seções adiante serão destacados alguns problemas). Mas, por hora, é a teoria que suporta as análises do MCP ou também chamado de  $\Lambda$ CDM (por incluir a as observações de galáxias se afastando aceleradamente [144, 145, 146], representado por  $\Lambda$ , e o conceitual da matéria escura fria na sigla inglesa CDM de *Cold Matter Dark*) [142].

### 3.2.1 A métrica de FLRW

Em 1922, um cientista nascido na cidade de São Petersburgo em 1887, publicou soluções dinâmicas das equações da RG, apesar da insistência tanto do de Sitter quanto de Einstein sobre as propriedades espaço-temporais do universo serem estáticas [134]. As soluções que Aleksandr Aleksandrovich Friedman obteve, dizia uma nota publicada por Einstein, devem estar incorretas. No ano seguinte, voltou atrás e reconheceu o trabalho [134]. O modelo cosmológico tratado por Friedman [30, 31] é espacialmente homogêneo, isotrópico e, voltando ao passado, a densidade de matéria diverge. Chegou até mesmo a calcular uma periodicidade para o universo (caso ele fosse

eterno e tivesse a massa da ordem de  $5 \times 10^{21} M_{\odot}$ ) de 10 bilhões de anos, sendo que a idade mais acurada, hoje, é de  $13,801 \pm 0,024$  bilhões de anos [140]. No mesmo trabalho relacionou o fator de escala  $a(t)$ , a geometria do universo  $k$  ( $-1$  para fechado,  $0$  para plano e  $1$  para aberto), o raio  $r$ , a densidade de energia  $\rho(t)$  e a pressão  $P(t)$  com o conteúdo do universo [125].

Em 1927, antes da publicação dos trabalhos de Hubble, um padre jesuíta publicou na *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* um artigo em que trata sobre a dinâmica do universo, trazendo da RG a homogeneidade e sem centro de gravidade. Até este ano, haviam duas soluções possíveis para as equações da RG: uma vinda de de Sitter (universo sem matéria) e outra de Einstein (com matéria). Trabalhando com as vantagens e as desvantagens de cada solução, Georges-Henri Édouard Lemaître propõe uma combinação das vantagens e chega a algumas conclusões no seu artigo *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*: encontra uma relação de constância da massa do universo, cresce vindo de um limite assintótico quanto  $t \rightarrow -\infty$  e que há uma relação entre a velocidade de recessão das "nebulosas extragalácticas" com a expansão do universo. Lemaître cita dados de Hubble que, neste período, já trabalhava no Mount Wilson [148] e conclui que, ao que tudo indica, a expansão do universo é causada pela própria radiação [32, 33]. Um pequeno artigo em 1931, Lemaître chama a atenção para utilização de usar física quântica (em franco desenvolvimento na época) e modelos cosmológicos para a fase inicial do universo [131]. Já em 1933, o mesmo físico fez um grande artigo expandindo as ideias iniciais de 1927, e nele trabalha com o início do universo, qual seria o tamanho, algumas ideias de um universo cíclico, dentre vários outros detalhes [130].

Entre os anos de 1933 e 1936, Robertson publica uma série de três artigos na *The Astrophysical Journal* onde trata sobre cinemática, dinâmica e estrutura do universo. Ele conclui as investigações sob um tripé: teoria de gravitação advinda da RG a nível cosmológico e com tratamento de sistema estatístico (todo o conteúdo do universo), coloca uma extensão relativística na teoria newtoniana e finaliza, com a teoria cinético-estatística de Milne, o modelo cosmológico [34, 35, 36]. Nesse meio tempo, em 1935, Walker trabalha com a mesma teoria de Milne e aplica, também, à RG e faz um modelamento no universo [37]. Em junho de 1936, foi publicado um último artigo, menos de um mês após a finalização da série de Robertson, finaliza seu modelo dinâmico cosmológico suportado pela teoria de Milne [38].

O quadro geral dos trabalhos independentes de Friedman, Lemaître, Robertson e Walker,

em paralelo com, também trabalhando independentemente, Hubble, é a conhecida Teoria do Big Bang que dá suporte completo ao modelo  $\Lambda$ CDM. A estrutura matemática que governa a cosmologia, tendo por base os pressupostos a listagem acima do MCP, é a conhecida métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker ou FLRW. Partindo de [125, 149]

$$d\Omega^2 \equiv d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2$$

e

$$\kappa = \begin{cases} -1 \rightarrow \text{curvatura espacial negativa; universo hiperbólico} \\ 0 \rightarrow \text{curvatura espacial nula; universo plano} \\ +1 \rightarrow \text{curvatura espacial positiva; universo esférico} \end{cases}$$

a métrica é escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.2)$$

e em formato matricial,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1 - \kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala que tem dependência temporal e dita como é a dinâmica da geometria do espaço-tempo do universo. O valor mais apurado que se tem atualmente é de que o universo tenha uma hipersuperfície plana [140].

### 3.2.2 Equações dinâmicas de Friedman

Apesar de não ser o objetivo desse trabalho dissecar todos os desenvolvimentos teóricos da cosmologia, desde os primórdios da RG até os modelos ainda em pesquisa atualmente, é necessário um último panorama teórico sobre as equações de dinâmica de Friedman pois vários modelos cosmológicos partem de soluções diretas da RG ou de alterações na parte dinâmica das

equações de Friedman. Diante do que foi exposto na seção 3.2.1 sobre o trabalhos publicados em 1922, Friedman desenvolve dois tipos de universo. Partindo das equações de campo de Einstein dada pela expressão (1.7),  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$ , e separando o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  para descrever um universo preenchido com um fluido homogêneo e isotrópico [150],

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu},$$

onde  $p$  é a pressão e  $\rho$  a densidade desse fluido, sendo  $u_\mu$  é a quadri-velocidade de um elemento do fluido. Trazendo a conexão da geodésica de (1.1) como reescrita para

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$$

e reescrevendo o tensor de Riemann (1.2) com contrações,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

e aplicando com os elementos da matriz (3.3), depois de algumas manipulações, se chega a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p),$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(t) - \frac{\kappa}{a^2(t)},$$

(3.4)

onde  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble, são as equações dinâmicas de Friedman [125, 149].

Das equações de Friedman as pesquisas vão depender de como resolvê-las dando algum formado à pressão e à densidade. Apenas para efeitos gerais, é interessante citar algumas equações de onde se tiram as análises e os valores sobre alguns dados cosmológicos. Um deles é a o parâmetro de densidade  $\Omega$ , definido como [125, 149]

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho,$$

onde  $\rho_c$  é a densidade crítica do universo, que determinará qual é a dinâmica da geometria (universo hiperbólico, plano ou esférico), e é setado como

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi}.$$

Os valores para  $\Omega(t)$  dependerão do tipo de conteúdo. Apenas para efeito de exemplo, a missão

Planck forneceu dados sobre a densidade de matéria, que está em  $\Omega_m = 0,315 \pm 0.007$ , e a densidade total, que é praticamente 1, ou seja, uma indicação de que a geometria no modelo  $\Lambda$ CDM é plana <sup>2</sup> [140].

### 3.2.3 Problemas no MCP

Como não se tem por foco o dissecamento por completo do MCP, alguns destaques foram feitos e os problemas que ele tem merecem luz. Há diversas entraves nesse modelo e milhares de pesquisadores e trabalhos são desenvolvidos e divulgados para contornar, costurar e até substituir o MCP. Um desses problemas é concernente à planaridade. A missão Planck refinou os dados adquiridos nos últimos anos e aponta que o universo tem uma densidade  $\Omega_0 = 1$ . E ainda tem uma questão adicional sobre esse valor: se no passado ele fosse diferente, maior ou menor do que 1, o universo seria completamente diferente do que é hoje. Para tentar resolver esse problema, houve o surgimento de uma nova área que se acoplou na cosmologia. São modelos inflacionários, que iniciaram as pesquisas mais intensamente, no início dos anos 1980 [151, 152, 153, 154].

Outro problema com merecido destaque refere-se a isotropia do universo. Para se ter, praticamente, a mesma temperatura quando se observa grandes graus de abertura, algo como conexão causal e depois, separação antes de resfriar áreas diferentes, deve ter acontecido. Isso indicaria alguma expansão com velocidade maior do que a da luz? E, para completar essa questão de temperatura, os dados da CMB indicam que as variações térmicas para pequenos ângulos são da ordem de  $10^{-5}$ . Como explicar ou qual mecanismo pode trazer respostas termodinâmicas? A área de inflação, citada anteriormente, tenta colocar em seu arcabouço esse problema.

Além disso, outros dois intrigantes problemas referem-se aos conceitos de matéria e energia escuras, pois as medidas do Planck dão conta de mais de 20% do universo está em matéria escura e quase 70% está concentrado em energia escura. Esses dois objetos são distintos: o primeiro está relacionado com efeitos gravitacionais conectados ao observador e o segundo, a um efeito de expansão acelerada do universo. Diversos modelos teóricos tem trabalhado nesses problemas.

Por último e não menos importante se trata de origem ou surgimento do universo. Pelo MCP o máximo que se consegue chegar nos primórdios do universo é na escala de Planck, da ordem de

---

<sup>2</sup>Para maiores informações sobre a missão Planck, bem como todos os dados e artigos publicados até outubro de 2018, acesse a página da *European Space Agency*: <https://www.cosmos.esa.int/web/planck/publications>

$t = 10^{-44}$  s. Para tratamentos perto dessa escala e além dela, em direção ao  $t = 0$  s é necessário um modelo que englobe a gravidade, aplicação dela na cosmologia e, dentro de suas entranhas, a física quântica. Em outras palavras, é necessário se ter uma gravitação quântica com aplicação em cosmologia. As pesquisas com cosmologia quântica não são recentes; já remontam à época de Einstein.

## Capítulo 4

# QUANTIZAÇÃO

Este quarto capítulo envolverá o tema de quantização com um balanço entre o processo canônico e o utilizado para os resultados do capítulo 5: Weyl. Alguns lampejos sobre a história e os processos de quantização canônico e de Weyl serão apresentados.

### 4.1 Breve histórico da física quântica

Tudo o que se faz em Física parte de dois pilares: modelo e experimento. A modelagem é uma forma de descrever leis, teorias e a receita por onde o cientista vai estudar o objeto primordial da ciência: a natureza. Já o experimento é a comprovação ou não se o modelo, ou seja a imitação no papel, está de acordo com o que é visto no universo. O que foi visto até aqui é um grande modelamento de como a realidade física se comporta e, a contraposição, os experimentos e as observações tem descartado e fortalecido várias teorias. Uma delas, é a RG que, até certo ponto, dá boas previsões e comprovações. Mas, é um modelo que é incompleto (o próprio criador tentou "generalizá-la"). Avançando, o TERG resgata as conquistas da RG e avança alguns passos a mais em direção a uma quantização da gravidade por meio de uma expressão muito importante, dentre outras características: densidade de energia gravitacional.

A física quântica se destaca como um modelo de grandiosas conquistas científicas e tecnológicas. As primeiras ideias de algo pequeno, de um mundo micro, remontam da filosofia quando se tentava entender o mundo ao redor. Nos últimos séculos, com o desenvolvimento tecnológico do microscópio e das primeiras observações com cortiça um novo mundo estava

sendo descortinado. Ao final do século XIX a física clássica já tinha avançado muito a ponto de, décadas antes, ter fechado a Segunda Revolução Industrial e "não existe nada de novo a ser descoberto em física agora, pois, tudo o que resta são experimentos mais e mais precisos" (tradicional frase apócrifa atribuída a Kelvin em 1900 [132]). E a lenda sob a sombra de Kelvin sublimou para o ponto de que existia apenas duas pequeninas nuvens a serem dissipadas no céu da física, ou seja, dois problemas que ainda estavam causando discussões. Um deles foi dirimido em capítulos anteriores desse trabalho, que é a Relatividade, começando com a Especial, perpassando pela Geral e ascendendo ao mundo cosmológico. O outro, a ser tratado rapidamente e com outro foco, é a nuvem do micro: física quântica.

A mecânica quântica teve vários desenvolvimentos e revoluções ao longo da primeira metade do século XX. O primeiro deles começa com os trabalhos de Planck em 1900 ao atacar o problema da radiação de corpo negro e passando pela explicação do efeito fotoelétrico por Einstein; trabalho este que lhe rendeu o Nobel de física em 1921. Depois, vieram os trabalhos de Bohr [155] e em meados de 1925 ela a mecânica quântica foi reformulada com as relações de comutação ou álgebra do espaço de fase, conjuntamente com o princípio, de Heisenberg [28, 156, 157]. Os anos seguintes trouxeram toda uma formulação matemática, física e tecnológica baseada em um universo muito amplo de "pequenos" objetos, abrindo entendimento para partículas, antipartículas, forças, campos, interações e, se tudo isso não fosse o bastante, aplicação desse caldeirão na fase inicial do universo.

Focando para o ponto central da mecânica quântica: quantização. De forma geral, há duas formas de abordá-la, sendo a primeira como discretizar um conjunto de valores de uma certa quantidade física qualquer. O outro entendimento, amplamente descrito na literatura, é tomar um sistema quântico que vai para o clássico quando  $\hbar \rightarrow 0$ , ou seja, um sistema deve transitar do quântico ao clássico sem perda de quantidades físicas mensuráveis, baseado pelo princípio de correspondência [158, 159].

E, para fazer essa passagem entre o mundo quântico e o clássico, surgiram diversos tratamentos e métodos [157, 159, 160, 161]. Um dos mais conhecidos é o de quantização canônica, proposto inicialmente por Dirac [162], e o integral de caminho, dado por Feynman [157]. Mas em 1931 foi publicado um livro onde foi apresentado um outro procedimento de quantização por Weyl [39].

Hermann Klaus Hugo Weyl, originário da Alemanha, nasceu em Elmsborn em 1885. Estudou

matemática em Göttinger e Munique, obtendo o doutorado sob Hilbert. Trabalhou na mesma ETH-Zurique onde Einstein esteve detalhando a RG. Desenvolveu vários trabalhos com grupos compactos em representações matriciais, grupos de Lie compactos e o seu clássico livro, *The theory of groups and quantum mechanics*, do início da década de 1930, abriu vários caminhos em direção a teoria invariante. Faleceu em 1955, em Zurique (Suíça), depois de passar alguns anos em Princeton e de deixar uma grande obra para a matemática e para a física [113, 163].

Para fins gerais, nesse trabalho será feita uma comparação entre a quantização canônica e o procedimento modelado por Weyl. Inicialmente, será dado um panorama sobre a quantização canônica e um exemplo tradicional de aplicação ao oscilador harmônico. Na sequência, um panorama é dado no processo de quantização de Weyl e, analogamente à seção anterior do procedimento canônico, um exemplo simples de quantização de uma função típica  $f(q, p) = qp$  é feita.

## 4.2 Quantização canônica

A quantização canônica é feita sobre uma correspondência entre observáveis clássicos, como energia e posição, dados como valores reais de funções

$$f(p, q), \quad (p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$$

espaço de fase, e operadores autoadjuntos  $A_f$  no espaço de Hilbert  $L^2(\mathfrak{R}^n)$  tendo algumas características, destacadas [2, 28, 161]:

- (i) correspondência entre  $f \mapsto \hat{A}_f$  linear;
- (ii) obediência a regra de von Neumann: para qualquer função  $\Phi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  para o qual  $\hat{A}_{\Phi \circ f}$  são bem definidos,  $\hat{A}_{\Phi \circ f} = \Phi(\hat{f})$ , sendo o domínio do mapa  $\hat{A} : f \mapsto \hat{A}_f$  chamado de espaço de observáveis quantizáveis;
- (iii) operadores  $\hat{f}_{p_j}$  e  $\hat{f}_{q_j}$  correspondem às coordenadas das funções  $p_j$  e  $q_j$ , com  $(j = 1, \dots, n)$

e são formados, com  $\Psi \in L^2(\mathfrak{R}^n, d\mathbf{q})$ , por

$$\begin{aligned} \hat{f}_{q_j} \Psi &= q_j \Psi, \\ \hat{f}_{p_j} \Psi &= -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A constante de Planck  $h$ , parâmetro colocado anteriormente, é um valor positivo muito pequeno e que também pode ser reescrito como  $\hbar = h/2\pi$ . Do teorema de Stone e von Neumann [161, 164] os operadores (4.1) são únicos que agem em  $\mathcal{H}$  satisfazendo a condição de irreduzibilidade e as relações de comutação

$$[\hat{A}_{p_j}, \hat{A}_{p_k}] = [\hat{A}_{q_j}, \hat{A}_{q_k}] = 0, \quad [\hat{A}_{q_k}, \hat{A}_{p_j}] = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_{jk} I.$$

Uma outra forma de visualizar é tomando um espaço não-comutativo feito pelos operadores que satisfazem a condição dada acima, reescrita como

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\omega_{ij},$$

onde  $i = 1, 2$  são os índices para os operadores de coordenada  $i$  e  $\omega_{ij}$  é real e antissimétrico. O espaço de fase será [157]

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\omega_{ij}, \quad [\hat{A}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Fisicamente, essa abordagem significa um sistema clássico com  $n$  graus de liberdade, habitando em um de fase  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$  e tendo  $q_j$  e  $p_j$  observáveis de posição e momento. O estado desse sistema é regido como uma medida da distribuição de probabilidade, no mesmo espaço, sendo os subespaços  $C_u$  de uma dimensão de  $L^2(\mathfrak{R}^n)$  com  $\|u\| = 1$ , resultando na distribuição de probabilidade  $\langle \Pi(A_f)u, u \rangle$ , onde o espectro de  $A_f$  é  $\Pi(A_f)$  [2, 161].

Para se executar uma quantização com esse procedimento canônico, inicialmente toma-se as coordenadas de posição,  $q_i$ , e as de momento,  $p_i$ , sendo os índices  $i$  variando de 1 a  $n$ , que serão os graus de liberdade que o sistema tem. Os operadores  $\hat{q}_i$  e  $\hat{p}_i$  virão pela aplicação da expressão (4.1), depois agirão em um conjunto de vetores, por exemplo  $\psi$ , [161]

$$(\hat{q}_i \psi)(\mathbf{x}) = x_i \psi(\mathbf{x}),$$

$$(\hat{p}_i \psi)(\mathbf{x}) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}).$$

Os estados quânticos desse sistema, descrito pelo conjunto de vetores  $\Psi$ , evolui pela equação de Schrödinger [155]:

$$\hat{H}\Psi(t) = i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}, \quad (4.2)$$

sendo o hamiltoniano  $\hat{H}$  construído da função clássica inicial. Em outras palavras: dada uma função advinda de um sistema clássico, procura-se um hamiltoniano quântico utilizando um procedimento de quantização (aqui descrito pelo canônico).

O procedimento de quantização canônico tem alguns problemas, mesmo com enormes sucessos e sendo base para um primeiro estudo em mecânica quântica. Um deles é que os observáveis são descritos, aparentemente, por uma estrutura matemática que não é natural. Outra dificuldade é na aplicação de sistemas clássicos em espaços que não são lineares, ou seja, a função a ser quantizada não é polinomial, englobando funções com expoentes maiores do que três [157]. Esse, e outros problemas, acabam sendo entraves para entendimento de sistemas físicos, como o que será tratado aqui [28].

### 4.2.1 Aplicação de quantização canônica

Como complemento, um exemplo de aplicação de quantização mais comum é o do oscilador harmônico. A função que o rege [155]

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

sendo  $k$  a constante de força e  $m$ , a massa. Uma solução possível é do tipo

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

com  $A$  e  $B$ , constantes e a frequência de oscilação,  $\omega \equiv \frac{k}{m}$ . A energia potencial é dada por

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

Executando uma perturbação pequena em  $(x - x_0)$  a energia potencial se aproxima para

$$V \approx \frac{1}{2} V''(x_0) (x - x_0)^2,$$

Tomando a constante da mola como  $k = V''(x_0)$ , o problema de quantização da energia se resume a resolver a equação de Schrödinger para o potencial  $V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ . Resolvendo para a equação

estacionária,

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi.$$

Aplicando o procedimento canônico com operadores hermitianos do tipo

$$\hat{p} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \quad \hat{x} = x,$$

o hamiltoniano fica

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + m^2 \omega^2 \hat{x}^2).$$

e a relação de comutação desses dois operadores,  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$ , é

$$[\hat{p}, \hat{x}] = \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = i\hbar.$$

Os próximos passos seriam resolver as equações acima, analisar para parâmetros, condições de contorno específicos, inserção e testes de novas hipóteses, dentre outras visualizações físicas desejadas.

### 4.3 Quantização de Weyl

Uma outra ferramenta de quantização é a que foi desenvolvida por Weyl em 1931. Ela é bem definida matematicamente, pode ser estendida para espaços curvos e não tem problemas para ser utilizada em funções não-polinomiais que, aliás, é um grande ponto positivo. Esse procedimento pode ser descrito tomando um sistema clássico com  $n$  variáveis do tipo  $z_1, z_2, \dots, z_n$  e que terão suas correspondentes quânticas como  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n$ . Em outras palavras, isso significará que as variáveis clássicas tomam forma automaticamente em suas correspondentes quânticas [3, 28]

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n).$$

A forma que essa operação ocorre, de forma direta, é dada como [3, 28, 165, 166]

$$\mathcal{W}: f(z_n) \rightarrow \hat{f} = \mathcal{W}[f],$$

que é o mapa de Weyl definido por

$$\mathcal{W}[f(z_n)] := \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n z f(z_n) \exp \left( i \sum_{l=1}^n k_l (z_l - \hat{z}_l) \right). \quad (4.3)$$

Esta correspondência entre as quantidades clássicas e quânticas é a quantização de Weyl. O núcleo dessa transformação é dado por

$$\Delta(\hat{z}, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \exp \left( i \sum_{l=1}^n k_l (z_l - \hat{z}_l) \right),$$

e o mapa pode ser simplificado para

$$\mathcal{W}[f](z_n) := \int d^n z \Delta(z, \hat{z}) f(z_n).$$

O conjunto de operadores  $\hat{z}_n$  formam um espaço não-comutativo, ou seja, é dado pela troca das coordenadas locais  $z_n$  pelos operadores hermitianos  $\hat{z}_n$  e que tem, como relação de comutação, a expressão

$$[\hat{z}_a, \hat{z}_b] = i \omega_{ab}, \quad (4.4)$$

onde  $\omega_{ab}$  é um tensor anti-simétrico.

Esse tipo de procedimento tem algumas vantagens que sobressaltam da quantização apresentada anteriormente na seção 4.2. Uma delas é que não é necessário simetrização, como é feito na quantização canônica: a solução da integral dá o mesmo resultado se for usado o procedimento anterior com simetrização. Outra vantagem a ser observada é que a função para se trabalhar não precisa, necessariamente, ser polinomial: funções das mais diversas formas podem ser trabalhadas aqui naturalmente. Mais um ponto a ser destacado advém da parte matemática e, claro, física: não há ambiguidades. Por exemplo, suponha que queira se quantizar uma função do tipo  $A = q^2 p$ . O operador correspondente seria  $\hat{A} = \hat{q}^2 \hat{p}$ ,  $\hat{A} = \hat{q} \hat{p} \hat{q}$  ou  $\hat{A} = \hat{p} \hat{q}^2$ ? A solução dada pela quantização canônica, nesse exemplo, é uma simetrização que abarcará todas as combinações,

$$A = \frac{1}{3} (q^2 p + q p q + p q^2),$$

e que, quantizado, será

$$\hat{A} = \frac{1}{3} (\hat{q}^2 \hat{p} + \hat{q} \hat{p} \hat{q} + \hat{p} \hat{q}^2).$$

Ou seja, é um procedimento que elimina ambiguidades físicas por se ter uma sequência matemática clara e bem definida.

### 4.3.1 Aplicação do procedimento de quantização de Weyl

Um simples exemplo de aplicação desse procedimento é tomando dois operadores hermitianos  $q$  e  $p$  com relação de comutação advinda da expressão (4.4) <sup>1</sup>

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

e função [2, 3]

$$f(q, p) = qp. \quad (4.5)$$

Aplicando a equação (4.5) na expressão de Weyl (4.3) se tem

$$\mathcal{W}[qp] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint d\alpha d\beta dq dp qp e^{i\alpha(\hat{q}-q)+i\beta(\hat{p}-p)}. \quad (4.6)$$

Tomando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [167],

$$e^{i(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})} = e^{i\alpha\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} e^{1/(2\alpha\beta)}.$$

Colocando essa relação na equação (4.6),

$$\mathcal{W}[qp] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint d\alpha d\beta dq dp qp e^{i\alpha q} e^{i\beta p} e^{i\alpha\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} e^{1/(2\alpha\beta)}$$

e reescrevendo para

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[qp] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint d\alpha d\beta dq dp qp e^{i\alpha(\hat{q}-q)} e^{i\beta(\hat{p}-p-i/(2\alpha))}, \\ \mathcal{W}[qp] &= \frac{1}{2\pi} \iiint d\alpha dq dp qp e^{i\alpha(\hat{q}-q)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int d\beta e^{i\beta[\hat{p}-p-i/(2\alpha)]} \right\}, \\ \mathcal{W}[qp] &= \frac{1}{2\pi} \iiint d\alpha dq dp qp e^{i\alpha(\hat{q}-q)} \delta[p - \hat{p} + i/(2\alpha)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>Texto baseado no minicurso *Da quantização de Weyl à mecânica quântica no espaço de fase* ministrado pelo prof. Dr. Ronni Amorim em ocasião da **VII Escola de Física Roberto A. Salmeron - VII Efras** entre os dias 08 e 11 de outubro de 2018

Há algumas propriedades que vêm de relações da função delta de Dirac [168, 169]:

$$(i) \quad \int \delta(x) dx = 1,$$

$$(ii) \quad \int f(x) \delta(x) dx = f(0),$$

$$(iii) \quad \int f(x) \delta(x - a) dx = f(a),$$

$$(iv) \quad \int f(x) \delta(x) dx = f(0),$$

$$(v) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta x} d\eta.$$

Utilizando a propriedade (iii) das relações anteriores de Dirac e reaplicando na equação 4.7 chega-se a

$$\mathcal{W}[qp] = \frac{1}{2\pi} \iint d\alpha dq dp q [\hat{p} - i/(2\alpha)] e^{i\alpha(\hat{q}-q)},$$

$$\mathcal{W}[qp] = \left( \frac{1}{2\pi} \iint d\sigma dp q e^{i\sigma(\hat{q}-q)} \right) \hat{p} - i/2 \left( \frac{1}{2\pi} \iint d\sigma dq q \sigma e^{i\sigma(\hat{q}-q)} \right),$$

$$\mathcal{W}[qp] = \left[ \int dq q \left( \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{i\alpha(\hat{q}-q)} \right) \right] \hat{p} - i/2 \left[ \int dq q \left( -i \frac{d}{dq} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{i\sigma(\hat{q}-q)} \right) \right],$$

$$\mathcal{W}[qp] = \left[ \int dq q \delta(\hat{q} - q) \right] \hat{p} - i/2 \left[ \int dq q \left( -i \frac{d}{dq} \right) \delta(\hat{q} - q) \right].$$

Tomando, novamente, as propriedades (iii) e (iv) das relações de Dirac da lista acima, se obtém

$$\mathcal{W}[qp] = \hat{q} \hat{p} - i/2,$$

$$\mathcal{W}[qp] = \frac{1}{2} (\hat{q} \hat{p} + \hat{p} \hat{q}), \quad (4.8)$$

que é, exatamente, o resultado esperado caso fosse usado a quantização canônica sequenciada pela simetrização. Mas, aqui, no procedimento de quantização de Weyl não há ambiguidades, não há necessidade de se fazer simetrização e o formalismo matemático é claro. O resultado encontrado

---

é o mesmo que seria se tivéssemos utilizado a quantização canônica após a simetrização. Percebe-se que no formalismo de Weyl não há ambiguidades na quantização e não há a necessidade de se realizar a simetrização.

## Capítulo 5

# COSMOLOGIA QUÂNTICA

Neste último capítulo será abordada a área de grande intensidade de pesquisa atualmente: cosmologia quântica. Inicialmente, a apresentação do modelo proposto por DeWitt, com colaboração de Wheeler, é a porta de entrada. Esta teoria, por mais de de 50 anos, abriu um leque natural pra diversas outras pesquisas e atuação de estudos cosmológicos, principalmente no que tange ao universo primordial. Mas, ela tem problemas de ordem física, assim como seu tronco originário, a RG.

Um outro modelo será visto de forma panorâmica pois foi apresentado recentemente (2017). A cosmologia quântica na gravidade teleparalela (CQGT) parte de outro tronco evolutivo aparentado da RG. Através do TERG foi construído expressões de energia e densidade de energia gravitacional, aplicado na métrica de FLRW, base do MCP, e, através do processo de quantização via Weyl, descrito no capítulo 4, foi obtido duas aplicações, uma delas análoga ao modelo de Wheeler-DeWitt (WDW) e outra, ausente na WDW, mas com formato mais completo e, temporalmente, mais amplo (se estendendo por toda a história do universo e não somente à fase inicial).

Por derradeiro, uma aplicação da CQGT é executada com algumas características e resultados interessantes. Inicialmente, a CQGT é trabalhada para um universo pequeno e em solução de vácuo apenas, ou seja, campos de matéria não são inclusos no cálculo entrando, somente, a parte do campo gravitacional. Quando isso é feito, é encontrado uma densidade de energia e, prontamente, aplicado à ela a quantização de Weyl. O resultado obtido é uma discretização dessa energia nos primórdios do universo. A hipótese trabalhada é a de que nesse sistema, o universo é

pequeno e sem campos de matéria, poderia ser por onde tudo começa: a consequência imediata da quantização dessa energia é uma expansão do espaço-tempo; isso lembra um mecanismo de inflação. Não será desenvolvido, nesse trabalho, um modelo inflacionário mas, a partir dos resultados aqui obtidos, é um passo natural a ser continuado.

## 5.1 Cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt

Na seção 3.2 do capítulo 3 sobre cosmologia, na seção onde foi discorrido sobre o MCP, um item chama a atenção: o universo está se expandido e, quando se retrocede até seus primórdios, seu início é em um estado quente, denso e minúsculo [68, 143]. Vários questionamentos foram feitos mas, como tratar esta fase inicial do universo? Como a sua gênese ocorreu? Foi única? É cíclica? Essas e milhares de outras questões podem cair, tranquilamente, para a área de metafísica ou de teologia. Só que a Física tenta chegar perto do início de tudo, dentro do seu escopo matemático e até onde as previsões e evidências permitirem, inclusive escolhendo qual modelo melhor lhe reflete seu estado.

E para se resolver o problema do início do universo é necessário se ter a aplicação completa de todas as leis físicas; necessariamente, isso englobará todas as quatro forças conhecidas: forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. As três primeiras forças, conjuntamente com as partículas elementares, tem unificações diversas em no contexto da física quântica e são reunidas no Modelo Padrão das Partículas Elementares e o nível clássico tem seu regime na mecânica newtoniana). Para se estudar o carácter cosmológico e astrofísico, como modelar uma estrela, uma radiogaláxia ou um sistema planetário, a união destes conhecimentos apresenta um quadro quase completo. Mas, quando começa a considerar a gravidade e o início do universo, os problemas de não considerar uma gravitação quântica e cosmologica tem um início perturbador.

Do ponto de vista clássico, a gravidade pode ser bem aproximada com a física newtoniana: com ela é possível enviar sondas à Plutão, dentre vários outros exemplos. Quando se considera níveis cosmológicos, até certo regime, a gravidade da interpretação da RG é bem testada; alguns exemplos foram mostrados na seção 1.4. Os problemas começam quando se tenta utilizar a RG, como modelo gravitacional, conjuntamente com a física quântica (dentro de buracos negros ou início do universo). A principal dificuldade em se utilizar a RG, como modelo de gravidade, é que não há uma expressão de densidade de energia gravitacional:  $t^\mu{}_\nu$  é um pseudotensor e

que trás diversas complicações. Einstein já tinha visto este problema [20, 21, 64]. Rosenfeld investigou as consequências de uma quantização do campo gravitacional, em 1930, abrindo uma caixa de Pandora de possibilidades, sem sucesso por anos [64, 170, 171].

Para contornar este problema específico da RG com relação a energia gravitacional, foi trabalhado um formalismo hamiltoniano em no final da década 1950. Arnowitt, Deser e Misner fizeram um estudo onde separaram o espaço e o tempo e aplicaram em hipersuperfícies. Mas, isso só é possível de obter considerando um conjunto de coordenadas particular e associado a variáveis canônicas específicas [172, 173]. O processo de quantização da expressão advinda do ADM resultou na equação de WDW [40, 41, 42] mas com dois principais problemas: conceito de tempo [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50] e como esse conceito é recuperado em aproximação semi-clássica [174].

### 5.1.1 Equação de Wheeler-DeWitt

A equação, no formato [175, 176]

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(a, \phi) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} \left( a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - a + \frac{\Lambda a^3}{3} + m^2 a^3 \phi^2 \right] \psi(a, \phi) = 0, \quad (5.1)$$

é a que Bryce S. DeWitt publica, em uma série de três artigos, na *Physical Review* em 1967 [40, 41, 42], nominando-a de equação de Einstein-Schrödinger [43]. Os termos são:

$a \rightarrow$  fator de escala cosmológico;

$\phi \rightarrow$  campo escalar com massa  $m$ ;

$\Lambda \rightarrow$  constante cosmológica;

Este modelo foi trabalhado por DeWitt durante vários anos e com intensas discussões com Wheeler até ser concluída. Desde então, diversos físicos tem trabalhado com ela, inclusive o próprio DeWitt até falecimento [43, 177, 178, 179]. Hartle [180], e conjuntamente com o saudoso

Hawking, deram contribuições [181]. Narlikar, juntamente com Padmanabhan [182], Kiefer [175, 176], Mukhanov [183] e Bojowald [184, 185, 186] são alguns exemplos de professores que deixaram livro-texto com aplicações e desenvolvimentos desta teoria. Rovelli tem diversos trabalhos baseados na WDW [187]. Linde utilizou-a intensamente [172, 188, 189, 190].

Vilenkin é um outro destacado físico que tem uma intensa pesquisa em cosmologia quântica e, particularmente, utilizando-se da teoria de WDW. Tem atividades com tunelamento quântico cosmológico [191, 192, 193, 194], multiverso [195, 196, 197] e inflação [198], dentre outros trabalhos. Vários outros físicos se formaram, em estudos de pós-graduação, se basiliando com WDW [174, 199, 200, 201, 202, 203]. Aqui foram citados apenas alguns exemplos; a lista de trabalhos é muito maior e isso reflete que, mesmo depois de 50 anos, essa teoria ainda é levada em conta para tentar obter uma cosmologia quântica aplicável em todo e qualquer contexto onde a escala de Planck apareça.

Mas, como todo modelo físico, há vários problemas que, até o momento, não foram completamente resolvidos:  $\Psi$  sendo a função de onda do universo, qual seria o seu papel ou interpretação física? A estrutura matemática, que vem da montagem da hamiltoniana da RG, tem ambiguidades não resolvidas. Devido o contexto matemático ser em uma hipersuperfície, o superhamiltoniano é construído analogamente a um clássico e isso vai interferir na questão de ordenamento [203] e é nessa parte de verificar qual ordem é que surge o problema do conceito do tempo [49]. Outro problema, também não resolvido até hoje, é com relação às condições de contorno para se obter uma solução única e que as funções de onda tenham quadrado integráveis garantidas [203].

Um outro fator importante e que não é, necessariamente, um problema insolúvel, é com relação à interpretação da mecânica quântica. A mais utilizada na academia e que tem gerado todos os frutos de pesquisa e tecnologia é a de Copenhague. Ela tem suportado as outras escolas de interpretação e ao célebre trabalho de John Bell de 1964. Claro que, novamente, como um modelo de imitação da Natureza, ela não dá todas as respostas mas é a mais ampla até o momento [155]. Já na teoria de WDW, a interpretação da mecânica quântica é a trabalhada por Everett-Wheeler, a de muitos mundos. Ela descreve outros tipos de realidades físicas, através da função de onda cosmológica  $\Psi$ , de uma forma que todos os acontecimentos ou possibilidades seriam reais mas, na realidade ou no universo que se observa só teria a possibilidade que foi testada; as outras estariam em outros mundos e sem acesso. É uma interpretação que tenta generalizar as propostas da de Copenhague mas, a parte de testes ou de evidências físicas ficam em sérios

problemas [43, 174, 203, 204]. Não que seja algo proibitivo, ou impossível de se conseguir, buscar por novas interpretações físicas; isso é feito constantemente. Mas, outras possibilidades podem ser mais factíveis sem, contudo, reescrever toda a física quântica.

Outrossim, um problema adicional e ainda em vias de se contornar é que a equação de WDW se perde na noção de autovalores e, conseqüentemente, no que seria o espectro do operador. Isso seria quase que mortal para uma teoria, ou seja, não se ter o que medir é muito problemático. Para fechar o cerco, o modelo tem diversos problemas no conceito de tempo que ainda não estão solucionados ou contornados [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50].

## 5.2 Cosmologia quântica na gravidade teleparalela

Esta seção trata como uma alternativa à teoria de WDW é perpassar outro caminho, procurando algo que seja equivalente à RG (obviamente, sem perda de nenhum fenômeno já testado, como mostrado na seção 1.4) mas que tenha soluções na bagagem onde há falhas. Também, é necessário que esse outro caminho alternativo tenha possibilidades de aplicações em gravitação quântica, ou seja, que fenômenos gravitacionais apareçam em micro escala. E, como versa esse trabalho, haja aplicações cosmológicas com possibilidades de toque ao estado mais primitivo do universo. Por fim, uma teoria que tivesse todos os requisitos anteriores deve escapar de problemas semelhantes aos dos constados na de WDW, sem cair em possíveis armadilhas insolúveis.

Um modelo alternativo e completamente equivalente à RG já se tem: TERG, que foi panoramicamente descrito no capítulo 2. Também foi visto que com a TERG, já iniciada com os olhos do próprio Einstein, tem em seu cerne componentes que dão possibilidade de aplicação de um processo de quantização, ou seja, tem expressões de densidade de energia, dentre várias outras vantagens. Um processo de quantização que se tem em seu bojo a interpretação de Copenhague e uma estrutura matemática clara e sem ambiguidades seria excelente para aplicar à TERG; isso veio com a quantização de Weyl descrito rapidamente no capítulo 4. Para completar o quadro, todo esse arcabouço de conhecimento deve ser aplicado à cosmologia e ao MCP, com a métrica base de FLRW, descrito de forma concisa no capítulo 3. Um último detalhe, apenas para efeitos de validação, seria interessante comparar o modelo construído com o de WDW laconicamente descrito na seção 5.1; afinal, essa teoria tem ampla divulgação e labor aplicado que é necessário, para a comunidade científica, mostrar a alternativa com suas vantagens sobre o que se tem

padronizado.

A teoria que tem todas as características acima é a cosmologia quântica na gravidade teleparalela. A CQGT foi uma aplicação, em 2017 [2, 3, 72], a nível cosmológico da gravidade quântica apresentada em 2011 [28]. Nela tem a TERG, tem expressões de densidade de energia em regime cosmológico, uso da ferramenta de quantização de Weyl, comparação com a equação estacionária de WDW e uma expressão do tipo Schrödinger, além de ser um formato para outras aplicações cosmológicas, como será apresentado na próxima seção.

Os próximos passos estão descritos nas referências [2, 3]. Tomando um observador estacionário por um campo de tetradas em coordenadas esféricas do tipo (2.25) para a métrica de FLRW (3.2) produzindo

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \sin \theta \cos \phi & ar \cos \theta \cos \phi & -ar \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \sin \theta \sin \phi & ar \cos \theta \sin \phi & ar \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \cos \theta & -ar \sin \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Tomando o tensor torção  $T^a{}_{\mu\nu}$  da equação (2.6), juntamente com as relações

$$T^{\beta} = T^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\beta} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} T_{\lambda\alpha\gamma},$$

o tensor  $\Sigma^{001}$  da expressão (2.14) toma a forma de

$$\Sigma^{001} = \frac{\sqrt{1-kr^2} - (1-kr^2)}{a^2 r}.$$

O determinante de (5.2) é calculado como

$$e = \det(e^a{}_{\mu}) = \frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}}$$

e, em seguida, é usado para determinar a densidade de energia-momento gravitacional  $\Pi^{aj}$  da expressão (2.24), que é

$$\Pi^{(0)1} = 4\kappa ar \sin \theta \left( \sqrt{1-kr^2} - 1 \right).$$

Esta é a densidade de energia total do universo. Para efeito de comparação com a equação de cosmologia de WDW deve-se encontrar a energia total cosmológica. E ela vem da componente  $\{a = 0\}$  aplicado em  $P^a$  da expressão (2.23), com as condições de integração  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ :

$$E = - \lim_{r \rightarrow r_0} 8\pi\kappa ar \left[ \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right],$$

onde  $r_0$  é o horizonte aparente [205] que, associado a métrica de FLRW (3.2), tem a forma de [2, 111]  $r_0 = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}$ , sendo o parâmetro de Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Resolvendo a expressão acima, com uma primeira aproximação do tipo  $(1+x)^n$ , encontra-se a energia total do universo,

$$E \approx \frac{2ak\sqrt{k} - 2a^2k\sqrt{k} - a^3k\sqrt{k} + \frac{1}{2}a^4(\dot{a})^2\sqrt{k} + a^6k\sqrt{k}}{2k^2}.$$

Quando se aplica a quantização de Weyl, descrito no capítulo 4, com os operadores escolhidos  $\hat{a} = a$  e  $\hat{a} = -i\omega \frac{\partial}{\partial a}$ , a expressão análoga à WDW tem a forma de

$$\left( 2ak\sqrt{k} - 2a^2k\sqrt{k} - a^3k\sqrt{k} - \frac{1}{2}\omega^2 a^4\sqrt{k} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + a^6k\sqrt{k} - 3\omega^2 a^2\sqrt{k} - \omega^2 2a\sqrt{k} \frac{\partial}{\partial a} \right) \Psi = 0.$$

O próximo desdobramento é com respeito à cosmologia quântica completa (energia total cosmológica), ou seja, uma expressão do tipo Schrödinger [2, 3]. Da densidade de energia total,  $\Pi^{(0)1} = 4\kappa ar \sin\theta \left( \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right)$  se define uma função auxiliar do tipo  $\varepsilon(r, \tau) = A r \tau \left( \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right)$  com  $A = 4a\kappa$  e  $\tau = \sin\theta$ . Aplicando o procedimento de quantização de Weyl, (4.3), e a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [167],  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$  e simetriação, além de outros passos intermediários, é encontrado a equação no formato

$$\hat{\mathcal{H}} = \left[ \frac{A}{2} (\hat{r}\hat{\tau} - \hat{\tau}\hat{r}) \right] (-k\hat{r}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{A}{2} (\hat{r}\hat{\tau} - \hat{\tau}\hat{r}) \right].$$

Tomando a primeira ordem na expansão  $(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}$ , operadores no formato de  $\hat{r} = r$  e  $\hat{\tau} = -i\alpha \frac{\partial}{\partial r}$ , além de outros passos intermediários, para encontrar

$$\hat{\mathcal{H}} = 3a\kappa k i \alpha r^2 + 2a\kappa k r^3 i \alpha \frac{\partial}{\partial r},$$

a equação completa da cosmologia quântica em contexto da gravidade teleparalela toma a estrutura de

$$3a\kappa k \alpha r^2 \Psi + 2a\kappa k r^3 \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Essas expressões finais tem todas as características que foram descritas no *caput* desta seção: teoria equivalente à RG, aplicação em FLRW da cosmologia, princípios de quantização coerentes

e sem ambiguidades do processo de Weyl, comparação com a WDW e, um adicional, uma equação tipo Schrödinger. Com esse processo feito, com a gravidade e cosmologia quânticas estabelecidas teoricamente, o próximo passo é estudar como seria, na fase inicial do universo, o comportamento discretivo da energia gravitacional.

### 5.3 Cosmologia quântica: discretização de energia

Há diversas aplicações que podem ser feitas com a cosmologia quântica. Uma delas será na fase primordial do universo, com tamanho pequeno (será feita aproximação de primeira ordem), em solução de vácuo (apenas com campo gravitacional; sem campos de matéria), densidade de energia gravitacional quantizada com procedimento de Weyl afim de obter uma expressão discreta.

Uma outra possibilidade de uso do campo de tétradas para a métrica de FLRW (3.2) adaptado a um observador estacionário da expressão (2.25) é

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1kr^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar \sin \theta \end{pmatrix} .$$

Fazendo uso da equação (2.23),  $P^a$ , para o cálculo da densidade de energia gravitacional mas apenas com a componente zero, ou seja,

$$E = E_g + E_M$$

onde

$$E_g = \int d^3x e t^{(0)0} \quad (5.3)$$

é a energia do campo gravitacional e

$$E_M = \int d^3x e T^{(0)0}$$

é a dos campos de matéria. Como aqui será utilizado apenas a expressão  $E_g$ , ou seja, somente campo gravitacional (solução de vácuo), a densidade de energia será

$$e t^{0(0)} = (2) \left( \frac{1}{16\pi} \right) \frac{(-a \sin \theta)}{\sqrt{1 - k r^2}} [(3\dot{a}^2 - k) r^2 + 1].$$

O raio  $R$  para este pequeno universo será modelo pelo horizonte aparente [205], reescrito como

$$R = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 + K}}.$$

Considerando o universo observável como uma esfera e tendo esse raio  $R$ , basta aplicar a integração  $E_g$  na equação correspondente (5.3), é obtido

$$E_g = -\frac{a}{2} \left[ 3\dot{a}^2 \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{1 + k r^2}} dr + \int_0^R \sqrt{1 - k r^2} dr \right]. \quad (5.4)$$

Alguns passos intermediários para se obter a expressão final a ser quantizada. Um deles são as integrais, resolvidas de forma geral, da expressão anterior:

$$\int \sqrt{1 - k r^2} dr = \frac{1}{2} r \sqrt{1 - k r^2} + \frac{1}{2\sqrt{k}} \arctan \left( \frac{\sqrt{k} r}{\sqrt{1 - k r^2}} \right),$$

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{1 - k r^2}} dr = \frac{1}{2k} \left[ -r \sqrt{1 - k r^2} + \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \left( \frac{\sqrt{k} r}{\sqrt{1 - k r^2}} \right) \right].$$

Voltando na equação (5.4),

$$E_g = \frac{a}{4} \left[ \left( \frac{3\dot{a}^2}{k} - 1 \right) R \sqrt{1 - k R^2} - \left( \frac{3\dot{a}^2}{k} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \left( \frac{\sqrt{k} R}{\sqrt{1 - k R^2}} \right) \right].$$

Utilizando  $R$  e as manipulações abaixo,

$$1 - kR^2 = 1 - \frac{ka^2}{\dot{a}^2 + k} = \frac{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}{\dot{a}^2 + k},$$

$$\sqrt{1 - kR^2} = \sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)} \frac{k}{a},$$

$$\frac{R}{\sqrt{1 - kR^2}} = \frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}},$$

$$R \sqrt{1 - kR^2} = \sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)} \frac{a}{\dot{a}^2 + k}$$

se produz

$$kE_g = \frac{(3\dot{a}^2 - k) \sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}}{4\dot{a}^2 + k} a^2 - \frac{a(3\dot{a}^2 + k)}{4\sqrt{k}} \arctan \left[ \frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}} \right].$$

Um detalhe importante aqui: a equação não pode ter  $k = 0$ , pois não é interessante solução identicamente nula ou do tipo  $0 = 0$ . Isso já induz uma interpretação nesse ponto: para esse modelo, nessa configuração expressa no *caput* desta seção, o universo não pode ser plano. Então, a restrição será para  $k = \pm 1$ .

Uma suposição que será considerada é que esse sistema cosmológico é dirigido por uma equação do tipo Schrödinger e apenas estacionária. O formato é

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (5.5)$$

$$k\hat{H}_g\psi = Ek\psi,$$

onde o mapa de Weyl da expressão (4.3) gera

$$W[kE_g] = k\hat{H}_g,$$

já que  $\hat{H}_M$  será desconsiderada para a solução é em vácuo, ou seja, não há campos de matéria nesses primórdios do universo considerado. E, para o cálculo de  $\hat{H}_g$ , duas quantidades de auxílio serão perpassadas:

$$\epsilon_g^1 = \frac{1}{4} a^2 \frac{3\dot{a}^2 - k}{\dot{a}^2 + k} \sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}$$

e

$$\epsilon_g^2 = -\frac{a(3\dot{a}^2 + k)}{4\sqrt{k}} \arctan \left[ \frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{\dot{a}^2 + k(1-a^2)}} \right].$$

As escolhas do mapa de Weyl serão

$$W[\dot{a}] = \hat{a} = -i\omega \frac{\partial}{\partial a}, \quad W[a] = \hat{a} = a.$$

Começando pelo cálculo de  $W[\epsilon_g^1] = \hat{\epsilon}_g^1$ ,

$$(\hat{\epsilon}_g^1)^2 = \frac{1}{16} \left[ -\frac{7}{2} (\hat{a}^2 \dot{a}^4 + \dot{a}^4 \hat{a}^2) + k a^4 (1-a^2) - \frac{8}{2} (\hat{a}^2 a^6 + \dot{a}^6 \hat{a}^2) \right]. \quad (5.6)$$

Buscando auxílios,

$$\hat{a} a^6 = -i\omega \frac{\partial}{\partial a} (a^6) = -i\omega 6a^5 - i\omega a^6 \frac{\partial}{\partial a},$$

$$\hat{a}^2 a^6 = -\omega^2 \left[ 30a^4 + 6a^5 \frac{\partial}{\partial a} + 6a^5 \frac{\partial}{\partial a} + a^6 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right],$$

$$\hat{a}^2 a^6 = -\omega^2 \left( 30a^4 + 12a^5 \frac{\partial}{\partial a} \right) + a^6 \frac{\partial^2}{\partial a^2},$$

$$\hat{a}^2 a^4 = -\omega^2 \left( 12a^2 + 8a^3 \frac{\partial}{\partial a} + a^4 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right).$$

Reescrevendo a equação (5.6) e manipulando como

$$16(\hat{\epsilon}_g^1)^2 = k a^4 (1-a^2) + \omega^2 \left[ 42a^2 + 28a^3 \frac{\partial}{\partial a} + 7a^4 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 120a^4 + 48a^5 \frac{\partial}{\partial a} + 4a^6 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right],$$

$$16(\hat{\epsilon}_g^1)^2 = k a^4 (1-a^2) + \omega^2 a^2 \left[ (42 + 120a^2) + (28 + 48a^2) \frac{\partial}{\partial a} + (7 + 4a^2) a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right],$$

$$\hat{\epsilon}_g^1 = -\frac{1}{4} \sqrt{k} a^2 \sqrt{1-a^2} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 a^2}{k a^4 (1-a^2)} \left[ (42 + 120a^2) + (28 + 48a^2) a \frac{\partial}{\partial a} + (7 + 4a^2) a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \right\},$$

produzirá, após outras regularizações algébricas,

$$\hat{\epsilon}_g^1 = -\frac{\sqrt{k} a^2 \sqrt{1-a^2}}{4} + \frac{\omega^2}{8\sqrt{k}\sqrt{1-a^2}} \left[ (42 + 120a^2) + (28 + 48a^2) a \frac{\partial}{\partial a} + (7 + 4a^2) a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right]. \quad (5.7)$$

Já o  $\epsilon_g^2$  será aproximado para

$$\epsilon_g^2 \cong -\frac{a(3\dot{a}^2+k)}{4\sqrt{k}} \frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{\dot{a}^2+k(1-a^2)}}$$

$$\epsilon_g^2 = -\frac{a^2(3\dot{a}^2+k)}{4\sqrt{k}},$$

e o  $W[\epsilon_g^2] = \widehat{\epsilon}_g^2$  terá os cálculos sumários como

$$\widehat{\epsilon}_g^2 = -\frac{\sqrt{ka^2}}{4} - \frac{3}{8\sqrt{k}} (\dot{a}^2 a^2 + a^2 \dot{a}^2),$$

$$-\widehat{\epsilon}_g^2 = -\frac{\sqrt{ka^2}}{4} - \frac{3}{8\sqrt{k}} \left[ \dot{a}^2 (-i\omega)(2a + a^2 \frac{\partial}{\partial a}) - \omega^2 a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right],$$

$$-\widehat{\epsilon}_g^2 = \frac{\sqrt{ka^2}}{4} - \frac{3\omega^2}{8\sqrt{k}} \left( 2 + 4a \frac{\partial}{\partial a} + 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \right),$$

levando a

$$\widehat{\epsilon}_g^2 = -\frac{\sqrt{ka^2}}{4} + \frac{3\omega^2}{4\sqrt{k}} \left( 1 + 2a \frac{\partial}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right). \quad (5.8)$$

Retomando a expressão estacionária do tipo Schrödinger (5.5), com universo pequeno, sem campos de matéria,

$$(\widehat{\epsilon}_g^1 + \widehat{\epsilon}_g^2) \Psi = kE \Psi,$$

considerando a definição

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\omega^2} E,$$

que é uma quantidade adimensional, e a utilização em soma das equações (5.7) e (5.8),

$$\left[ \frac{1}{8} (120a^2 + 42) + \frac{1}{8} (48a^2 + 28) a \frac{d}{da} + \frac{1}{8} (4a^2 + 7) a^2 \frac{d^2}{da^2} + 3 + 6a \frac{d}{da} + 3a^2 \frac{d^2}{da^2} \right] \Psi(a) = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\omega^2} E \Psi(a),$$

se tem

$$\left[ 15a^2 + \frac{66}{8} + \left( 6a^2 + \frac{76}{8} \right) a \frac{d}{da} + \left( \frac{a^2}{2} + \frac{31}{8} \right) a^2 \frac{d^2}{da^2} \right] \Psi = \epsilon \Psi. \quad (5.9)$$

Definindo outra expressão,

$$B^2 = 992\epsilon - 6159$$

a solução da equação (5.9) é dada por

$$\Psi(a) = \exp \left[ -\frac{45 \pm B}{162} \right] {}_2F_1 \left( \frac{327 \pm B}{124}, \frac{265 \pm B}{124}; 1 \pm \frac{B}{62}; -\frac{4a^2}{31} \right),$$

onde  ${}_2F_1$  é a função hipergeométrica. Com objetivo de se obter uma solução bem comportada o parâmetro da função hipergeométrica deverá ser um número inteiro não positivo, ou seja

$$327 - B = -124n.$$

Adicionando algumas manipulações,

$$B_n = 124n + 327,$$

$$B^2_n = 124^2 + \left[ n^2 + 2 \frac{327n}{124} + \frac{327^2}{124} \right],$$

se chega a

$$992\varepsilon_n - 6159 = 124^2 \left[ n^2 + 2 \frac{327n}{124} + \frac{327^2}{124} \right] \quad (5.10)$$

Esta equação representa a discretização da energia na fase inicial do universo. Isso significa que é possível calcular o menor ou nível fundamental de energia nos instantes iniciais do universo, dado para  $n = 0$

$$992\varepsilon_0 = 327^2 + 6159$$

e obtendo

$$\varepsilon_0 \sim 114.$$

Assim sendo, o nível fundamental de energia nesse estágio de vida do universo dependerá da magnitude de  $\omega$ , que é a relação de comutação entre os operadores vindo da expressão (4.4),

$$[\hat{a}, \hat{a}] = i\omega$$

e, conseqüentemente, haverá uma relação de incerteza entre a medida dos observáveis

$$\Delta a \Delta \dot{a} \leq \frac{\omega}{2}.$$

Com esse conjunto de quantidades matemáticas em mãos, é possível estimar um limite para o valor de incerteza ou de erro na determinação da constante de Hubble  $H_0$  (hoje, com pesquisas variando entre  $H_0 = (73,24 \pm 1.74) km s^{-1} Mpc^{-1}$  [139] e  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) km s^{-1} Mpc^{-1}$  [140]; apenas o futuro com mais estudos e observações determinará o  $H_0$ ), que é estimado em

$$\omega \sim 2.10^{-20} s^{-1}.$$

Este resultado não depende do valor de  $H_0$ ; apenas da incerteza que há entre os operadores que, de certa forma, está amarrada com o parâmetro de Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  e, conseqüentemente, deverá ser testado nas observações astronômicas para confirmação, se for o caso. Um último detalhe interessante advém do autovalor de  $\hat{a}$  ser diferente de zero. Isso implica que há uma dinâmica expansiva na fase inicial do universo. Atrelado ao detalhe que o valor de  $k$  deve ser equiparavelmente, em ordem de grandeza, com o autovalor real do operador, então ele dá uma geometria positiva. Em outras palavras, a consequência de se ter uma cosmologia quântica aplicada a esse contexto primordial (seria uma espécie de nascimento?) dá, como resultado um início expansivo (curvatura positiva) e sem campos de matéria. E é exatamente este cenário que o palco para um mecanismo de inflação.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Einstein iniciou uma profunda mudança na forma de visualizar o universo, Friedman, Lemaître, Robertson, Walker, Hubble, Weyl, Wheeler e DeWitt deram impulsos e abriram as cortinas para o entendimento da física de forma esplêndida. As entranhas da matéria foram investigadas com tal precisão, as galáxias e a radiação do início de tudo foram observados e parece que o quadro estava completo e fechado.

Foram percebidos problemas e entraves que surgiram desde a publicação da RG. Einstein mudou os rumos da pesquisa de unificação entre a gravitação e o eletromagnetismo por ter problemas com densidade de energia gravitacional, por exemplo. Claro que, mesmo não aceitando a física quântica, a RG trazia em seu escopo problemas que evitava ser discretizada e aplicada na escala de Planck na fase inicial do universo.

Como um subgrupo das equações de Riemann-Cartan (ou também conhecidas como Einstein-Cartan), a geometria de Weitzenböck nasce sem curvatura e com apenas torção. A TERG é formatada, durante décadas e resolve problemas intrínsecos da RG. O resgate da densidade de energia gravitacional é um dos exemplos onde ela é aplicada, sem contar com a completa equivalência dinâmica que pontea com a RG. Fenômenos que a RG tem ampla aprovação também são considerados.

Em contrapartida Wheeler e DeWitt tomaram a formulação hamiltoniana de ADM e montaram uma cosmologia quântica. Os problemas não perdoaram: interpretação de muitos mundos estranho à escola de Copenhague usual da física quântica, problema com tempo e estrutura mate-

---

mática. Diante disso e tomando os benefícios da TERG, uma cosmologia quântica é construída para contrapor e apresentar novas aplicações.

Weyl entra como um outro requisito imprescindível para quantização das expressões de densidade de energia gravitacional. Ela é um procedimento claro na estrutura matemática, sem ambiguidades na interpretação física e com ampla aplicação. E ela é utilizada em conjunto com a TERG, que já está aplicada à cosmologia.

A cosmologia quântica em cenário de gravidade teleparalela foi estabelecida a partir das aplicações do modelo de discretização de massa de um buraco negro do tipo Schwarzschild. A produção de uma primeira aplicação foi uma equação análoga à WDW. Partindo de um campo de tétradas adaptado a um observador estacionário e com coordenadas esféricas, a densidade de energia-momento  $\Pi^{a_j}$  pôde ser determinada. Os limites para aplicação da energia total cosmológica foram dados através do horizonte aparente quando o raio  $r$  tende a esse parâmetro. Resolvendo a expressão com uma primeira aproximação, ou seja, para um universo pequeno, e aplicando o processo de quantização de Weyl, uma equação salta de forma análoga à WDW. A outra aplicação realizada foi concernente à equação completa, ou seja, uma expressão do tipo Schrödinger dinâmica. O destaque é que não há esse tipo de expressão na cosmologia quântica de WDW.

De face a esses desenvolvimentos, a tese eleva esses procedimentos a outro patamar. Indo no mesmo sentido, um outro campo de tétradas para a métrica de FLRW (essa escolha é livre), uma separação na energia total cosmológica é feita. A parte onde há campos de matéria é descartado e trabalhado apenas com a outra parcela de energia do campo gravitacional, ou seja, apenas em vácuo. O raio desse sistema também tende ao raio do horizonte aparente, o formato da equação a ser procurada é a do tipo Schrödinger estacionária e o processo de quantização de Weyl é aplicado.

O que é encontrado, depois de vários cálculos, é uma equação de que representa a discretização de energia no universo primordial. E isso é adquirido depois de aplicar as hipóteses: universo pequeno nesse começo e solução de vácuo (não há campos de matéria, apenas campo gravitacional). E este resultado trás mais informações: é possível encontrar o nível fundamental de energia nessa parte inicial de vida do universo e uma relação de incerteza entre a medida dos observáveis se aprisiona no parâmetro de Hubble como uma correção ou incerteza. Este detalhe, que é amarrado ao  $H_0$ , virá de futuras observações astronômicas. E a caixa de Pandora

não finaliza: o autovalor de  $\hat{a}$  é diferente de zero, é atrelado, em ordem de grandeza, a curvatura do universo  $k$  e dando a ela uma interpretação positiva, ou seja, uma espécie de expansão, exatamente o que é esperado para modelo inflacionário.

A cosmologia quântica na gravidade teleparalela é, com tudo isso, estabelecida e aplicada. Isso não significa que os problemas acabaram ou que não há dificuldades a serem transpassadas. Pelo contrário: um amplo caminho se abre para ser desbravado. Há várias outras aplicações que poderão ser feitas no futuro: construção de uma teoria completa de inflação, termodinâmica de fase inicial do universo, início ( $t = 0s$ ) do universo, mecanismo formação de partículas nos primeiros instantes, variação e impressão da CMB, dentre vários outros casos aplicáveis. Talvez o trabalho iniciado por Einstein e pausado em 1955 tenha sido retomado. Mas, somente o futuro poderá indicar o caminho da cosmologia quântica na gravidade teleparalela, aqui desenvolvida e aplicada, está no rumo certo.

## Referências Bibliográficas

- [1] Ulhoa, S. C., Amorim, R. G. G., Capistrano, A. J. S., and Fernandes, A. S., Towards Energy Discretization in Quantum Cosmology. DOI: 10.20944/preprints201808.0171.v1, 2018.
- [2] Fernandes, A. S., *Cosmologia quântica na gravidade teleparalela: Proposta de soluções*, Novas Edições Acadêmicas, Brasília, 2018.
- [3] Fernandes, A. S., Ulhoa, S. C., and Amorim, R. G. G., J. Phys. Conf. Ser. **965** (2018) 012014.
- [4] Einstein, A., Ann. Phys. **14** (1905) 229.
- [5] Einstein, A., *Investigations on the theory of the brownian movement*, Dover Publications, 1956.
- [6] Eddington, A. S., Obs. **42** (1919) 119.
- [7] Dyson, F. W., Eddington, A. S., and Davidson, C., Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. **220** (1920) 291.
- [8] Biswas, A. and Mani, K., Open Phys. **6** (2008) 754.
- [9] Biswas, A. and Mani, K., Open Phys. **3** (2005) 69.
- [10] Bowyer, S., Byram, E. T., Chubb, T. A., and Friedman, H., Science. **147** (1965) 394.
- [11] GRAVITY Collaboration, Astron. Astrophys. **615** (2018) L15.

- 
- [12] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102.
- [13] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 241103.
- [14] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astrophys. J.* **850** (2017) L40.
- [15] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 221101.
- [16] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 141101.
- [17] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astrophys. J.* **851** (2017) L35.
- [18] Branchesi, M., *J. Phys. Conf. Ser.* **718** (2016) 022004.
- [19] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astron. J. Lett.* **848** (2017) 1.
- [20] Einstein, A., Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, in *Albert Einstein Akad.*, pages 99–108, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, FRG, 1916.
- [21] Einstein, A., Approximative integration of the field equations of gravitation, in *Collect. Pap. Albert Einstein*, volume 6, chapter 32, pages 201–210, Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [22] Landau, L. and Lifchitz, E., *Teoria do campo*, Hemus, São Paulo, 2004.
- [23] Banerjee, N. and Sen, S., *Pramana* **49** (1997) 609.
- [24] Einstein, A., *Math. Ann.* **102** (1930) 685.
- [25] Unzicker, A. and Case, T., *ArXiv: physics/0503046* (2005).
- [26] Hayashi, K. and Shirafuji, T., *Phys. Rev. D* **19** (1979) 3524.
- [27] Maluf, J. W., *Ann. Phys.* **525** (2013) 339.
- [28] Ulhoa, S. C. and Amorim, R. G. G., *Adv. High Energy Phys.* **2014** (2014) 1.

- 
- [29] Hubble, E., Proc. Natl. Acad. Sci. **15** (1929) 168.
- [30] Friedman, A., Zeitschrift für Phys. **10** (1922) 377.
- [31] Friedman, A., Gen. Relativ. Gravit. **31** (1999) 1991.
- [32] Lemaître, G., Ann. la Société Sci. Bruxelles **47** (1927) 49.
- [33] Lemaître, G., Gen. Relativ. Gravit. **45** (2013) 1635.
- [34] Robertson, H. P., Astrophys. J. **82** (1935) 284.
- [35] Robertson, H. P., Astrophys. J. **83** (1936) 187.
- [36] Robertson, H. P., Astrophys. J. **83** (1936) 257.
- [37] Walker, A. G. and Milne, E. A., Mon. Not. R. Astron. Soc. **95** (1935) 263.
- [38] Walker, A. G., Proc. London Math. Soc. **s2-42** (1937) 90.
- [39] Weyl, H., *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, New York, 1931.
- [40] DeWitt, B. S., Phys. Rev. **160** (1967) 1113.
- [41] DeWitt, B. S., Phys. Rev. **162** (1967) 1195.
- [42] DeWitt, B. S., Phys. Rev. **162** (1967) 1239.
- [43] DeWitt, B. S., Gen. Relativ. Gravit. **1** (1970) 181.
- [44] Vilenkin, A., Phys. Rev. D **33** (1986) 3560.
- [45] Unruh, W. G., Phys. Rev. D **40** (1989) 1048.
- [46] Kuchar, K. V., Time and Interpretation of Quantum gravity, in *Proc. 4th Can. Conf. Gen. Relativ. Relativ. Astrophys.*, edited by Kunstatter, G., Vincent, D., and Williams, J., pages 1–104, Singapore, 1992, World Scientific.
- [47] Isham, C. J., Canonical quantum gravity and the problem of time, in *Integr. Syst. Quantum Groups, Quantum F. Theor.*, edited by Ibort, L. A. and Rodríguez, M. A., pages 157–287, Springer Netherlands, Dordrecht, 1993.

- 
- [48] Shestakova, T. P. and Simeone, C., The problem of time and gauge invariance in the quantization of cosmological models. I. Canonical quantization methods. ArXiv: gr-qc/0409114v1, 2004.
- [49] Anderson, E., *Ann. Phys.* **524** (2012) 757.
- [50] Shestakova, T. P., *Int. J. Mod. Phys. D* **27** (2017) 1841004.
- [51] Einstein, A., *Ann. Phys.* **14** (1905) 164.
- [52] Einstein, A., *Ann. Phys.* **14** (1905) 182.
- [53] Einstein, A., *Ann. Phys.* **14** (1905) 194.
- [54] Einstein, A., On the electrodynamics of moving bodies, in *Collect. Pap. Albert Einstein*, volume 2, chapter 23, pages 140–174, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [55] Einstein, A., *Ann. Phys.* **14** (1905) 225.
- [56] Mermin, N., *Ann. Phys.* **14** (2005) 103.
- [57] Lämmerzahl, C., *Ann. Phys.* **14** (2005) 71.
- [58] Gazzinelli, R., *Teoria da relatividade especial*, Editora Blucher, São Paulo, 2 edition, 2009.
- [59] Einstein, A., *Ann. Phys.* **354** (1916) 769.
- [60] Einstein, A., The foundation of the General Theory of Relativity, in *Collect. Pap. Albert Einstein*, volume 6, chapter 30, pages 146–200, Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [61] Coley, A. A. and Wiltshire, D. L., **92** (2016).
- [62] Ulhoa, S. C., *Physicae* **8** (2009) 11.
- [63] Ulhoa, S. C., *O momento angular do campo gravitacional e o grupo de Poincaré*, Tese, Universidade de Brasília, 2009.
- [64] Rocci, A., *J. Phys. Conf. Ser.* **470** (2013) 012004.
- [65] Hartle, J. B., *Am. J. Phys.* **74** (2006) 14.

- 
- [66] D’Inverno, R., *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [67] Amorim, R. G. G., Ulhoa, S. C., Rocha, P. M. M., and Paiva, R. A., *Rev. Bras. Ens. Fís.* **37** (2015) 2302.
- [68] Henrique, A. B., *Teoria da Relatividade Geral: uma introdução*, IST, Lisboa, 2 edition, 2015.
- [69] Maia, M. D., *Geometry of the Fundamental Interactions*, Springer New York, New York, 2011.
- [70] Foster, J. and Nightingale, J. D., *A Short Course in General Relativity*, Springer New York, New York, NY, 2006.
- [71] R. P. Feynman, F. B. Moringo, and W. G. Wagner, *Feynman lectures on gravitation*, Wesley Publishing Company, Reading, 1995.
- [72] Fernandes, A. S., *Cosmologia quântica na gravidade teleparalela*, Dissertação, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- [73] González, H. G. V., *Uso do Einstein Toolkit na Gravidade Teleparalela*, Dissertação, Universidade de Brasília, 2016.
- [74] Einstein, A., A new formal interpretation of Maxwell’s field equations of electrodynamics, in *Collect. Pap. Albert Einstein*, volume 6, chapter 27, pages 132–137, Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [75] Fomalont, E. B. and Kopeikin, S. M., *Astrophys. J.* **598** (2003) 704.
- [76] Collett, T. E. et al., *Science*. **360** (2018) 1342.
- [77] Clemence, G. M., *Rev. Mod. Phys.* **19** (1947) 361.
- [78] Einstein, A., Explanation of the perihelion motion of Mercury from the General Theory of Relativity, in *Collect. Pap. Albert Einstein*, volume 6, chapter 24, pages 113–116, Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [79] Weber, J., *General relativity and gravitational waves*, Dover Publications, Mineola, 2004.

- 
- [80] Hulse, R. A. and Taylor, J. H., *Astrophys. J.* **195** (1975) L51.
- [81] Taylor, J. H. and Weisberg, J. M., *Astrophys. J.* **253** (1982) 908.
- [82] Weisberg, J. M. and Taylor, J. H., *Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*, 2004.
- [83] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astrophys. J.* **818** (2016) L22.
- [84] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 221101.
- [85] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Ann. Phys.* **529** (2017) 1600209.
- [86] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 161101.
- [87] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astrophys. J.* **851** (2017) L16.
- [88] Schwarzschild, K., *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akad. der Wissenschaften* (1916) 189.
- [89] Antoci, S. and Liebscher, D.-E., *Gen. Relativ. Gravit.* **35** (2003) 945.
- [90] Willmore, A. P., *Rept. Prog. Phys.* **41** (1978) 511.
- [91] Esin, A. A., McClintock, J. E., and Narayan, R., *Astrophys. J.* **489** (1997) 865.
- [92] Miller, J. M., Miller, M. C., and Reynolds, C. S., *Astrophys. J.* **731** (2011) L5.
- [93] Orosz, J. A. et al., *Astrophys. J.* **742** (2011) 84.
- [94] Schödel, R. et al., *Nature* **419** (2002) 694.
- [95] Wang, Q. D. et al., *Science* (80-. ). **341** (2013) 981.
- [96] Hailey, C. J. et al., *Nature* **556** (2018) 70.
- [97] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [98] Weitzenböck, R., *Invariantentheorie*, P. Noordhoff, Groningen, 1923.

- 
- [99] Møller, C., *Ann. Phys. (N. Y.)* **12** (1961) 118.
- [100] Pellegrini, C. and Plebanski, J., *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.* **2** (1963).
- [101] Cho, Y. M., *Phys. Rev. D* **14** (1976) 2521.
- [102] Cho, Y. M., *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3335.
- [103] Hayashi, K., *Phys. Lett. B* **69** (1977) 441.
- [104] Hayashi, K. and Shirafuji, T., *Phys. Rev. D* **24** (1981) 3312.
- [105] Maluf, J. W., *J. Math. Phys.* **35** (1994) 335.
- [106] Maluf, J. and Ulhoa, S., *Ann. Phys.* **522** (2010) 766.
- [107] Spaniol, E. P., *Gravitoeletromagnetismo na gravidade teleparalela*, Tese, Universidade de Brasília, 2011.
- [108] Maluf, J. W., Ulhoa, S. C., and da Rocha-Neto, J. F., *Gen. Relativ. Gravit.* **45** (2013) 1163.
- [109] Carneiro, F. L., *Ondas gravitacionais, efeito memória e o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral*, Dissertação, Universidade de Brasília, 2018.
- [110] Ulhoa, S. C. and Rocha, P. M. M., *Brazilian J. Phys.* **43** (2013) 162.
- [111] Moraes, B. R., *Aceleração e termodinâmica do horizonte aparente da métrica de FLRW no contexto do TEGR*, Dissertação, Brasília, 2015.
- [112] da Silva, J. G. et al., *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 167.
- [113] da Silva, J. G., *Cosmologia e Energia Gravitacional no Teleparalelismo Conforme*, Tese, Universidade de Brasília, 2017.
- [114] da Silva, J. G. and Ulhoa, S. C., *Mod. Phys. Lett. A* **32** (2017) 1750113.
- [115] da Rocha-Neto, J. F. and Moraes, B. R., *Gen. Relativ. Gravit.* **50** (2018) 35.
- [116] Ulhoa, S. C., Spaniol, E. P., and Amorim, R. G. G., *ArXiv: gen-ph/1808.07929* (2018) 1.
- [117] Maluf, J. W., Faria, F. F., and Ulhoa, S. C., *Class. Quantum Gravity* **24** (2007) 2743.

- 
- [118] Maluf, J. and Faria, F., *Ann. Phys.* **17** (2008) 326.
- [119] Faria, F. F., *O fluxo de energia-momento gravitacional*, Dissertação, Universidade de Brasília, 2005.
- [120] Maluf, J. W. and Da Rocha-Neto, J. F., *Gen. Relativ. Gravit.* **31** (1999) 173.
- [121] Babak, S. V. and Grishchuk, L. P., *Phys. Rev. D* **61** (1999) 024038.
- [122] Maluf, J. W., da Rocha-Neto, J. F., Toríbio, T. M., and Castello-Branco, K. H., *Phys. Rev. D - Part. Fields, Gravit. Cosmol.* **65** (2002) 12.
- [123] Maluf, J. W. and Ulhoa, S. C., *Gen. Relativ. Gravit.* **41** (2009) 1233.
- [124] Cai, Y.-F., Capozziello, S., De Laurentis, M., and Saridakis, E. N., *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016) 106901.
- [125] Ryden, B., *Introduction to cosmology*, Addison-Wesley, San Francisco, 1 edition, 2002.
- [126] Rosenfeld, R., *Física na Esc.* **6** (2005) 31.
- [127] Cheng, T.-P., *Relativity, gravitation and cosmology*, Oxford University Press, New York, 2 edition, 2010.
- [128] Horvath, J. E., Lugones, G., Scarano Jr., S., Teixeira, R., and Allen, M. P., *Cosmologia física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*, Livraria da Física, São Paulo, 2 edition, 2011.
- [129] Maia, J. M. F., *Algumas aplicações de campos escalares em cosmologia*, Tese, Universidade de São Paulo, 2000.
- [130] Lemaître, A. G., *Gen. Relativ. Gravit.* **29** (1997) 641.
- [131] Lemaître, G., *Nature* **127** (1931) 706.
- [132] Schulz, P. A., *Rev. Bras. Ens. Fís.* **29** (2007) 509.
- [133] Filho, K. S. O. and Saraiva, M. F. O., *Astronomia e Astrofísica*, Livraria da Física, São Paulo, 3 edition, 2014.
- [134] Waga, I., *Rev. Bras. Ens. Fís.* **22** (2000) 163.

- 
- [135] Curtis, H. D., Publ. Lick Obs. **XIII** (1918) 55.
- [136] Weinberg, S., *Cosmology*, Oxford University Press, New York, 1 edition, 2008.
- [137] Liddle, A., *An introduction to modern cosmology*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2015.
- [138] Berendzen, R. and Hoskin, M., Leaflet. Astron. Soc. Pacific **10** (1971) 425.
- [139] Riess, A. G. et al., *Astrophys. J.* **826** (2016) 56.
- [140] Planck Collaboration, ArXiv: astro-ph/1807.06209 (2018) 1.
- [141] Oesch, P. A. et al., *Astrophys. J.* **819** (2016) 129.
- [142] da Silva Neto, G. P., *Rev. Bras. Ens. Fís.* **40** (2018) 12.
- [143] de Sousa, C. M. G., *Um universo eterno no contexto da gravitação com campo escalar conforme*, Dissertação, Universidade Estadual Paulista, 1992.
- [144] High-z Supernova Search Team, *Astron. J.* **116** (1998) 1009.
- [145] The Supernova Cosmology Project, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
- [146] Perlmutter, S., *Phys. Today* **56** (2003) 53.
- [147] Dario, D. F., *Geometrias não euclidianas: elíptica e hiperbólica no ensino médio*, Dissertação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2014.
- [148] Hubble, E. P., *Astrophys. J.* **64** (1926) 321.
- [149] Secco, L. F., *Um modelo de energia escura na determinação da dinâmica do universo*, Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- [150] Cuzinatto, R. R., *Modelos de universo e equação de estado na cosmologia*, Dissertação, Universidade Estadual Paulista, 2002.
- [151] Guth, A. H., *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347.
- [152] Guth, A. H. and Pi, S.-Y., *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1110.

- 
- [153] Albrecht, A., Steinhardt, P. J., Turner, M. S., and Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1437.
- [154] Linde, A. D., *Rept. Prog. Phys.* **47** (1984) 925.
- [155] Griffiths, D. J., *Mecânica quântica*, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2 edition, 2011.
- [156] Cohen, L., *The Weyl Operator and its Generalization*, volume 9, Springer Basel, Basel, 2013.
- [157] Gouba, L., *Int. J. Mod. Phys. A* **31** (2016) 1630025.
- [158] Berezin, F. A., *Math. USSR-Izvestiya* **8** (1974) 1109.
- [159] Berezin, F. A., *Commun. Math. Phys.* **40** (1975) 153.
- [160] Balzer, K. and Bonitz, M., *Methods of Quantization*, volume 572 of *Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [161] Ali, S. T. and Englis, M., *Rev. Math. Phys.* **17** (2005) 391.
- [162] Giulini, D., *That Strange Procedure Called Quantisation*, volume 40, pages 17–40, 2003.
- [163] Tent, K., editor, *Groups and analysis: the legacy of Hermann Weyl*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [164] von Neumann, J., *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.
- [165] Amorim, R. G. G., *Formulação de teorias de campos via estruturas simpléticas e o produto de Weyl*, Dissertação, Universidade de Brasília, 2006.
- [166] Amorim, R. G. G., *Geometria não-comutativa e teoria de campos simplética*, Tese, Universidade de Brasília, 2009.
- [167] Gilmore, R., *J. Math. Phys.* **15** (1974) 2090.
- [168] Griffiths, D. J., *Eletrodinâmica*, Person Addison Wesley, São Paulo, 3 edition, 2011.
- [169] Smith, G. S., *An introduction to classical eletromagnetic radiation*, Cambridge University Press, New York, 1 edition, 1997.

- 
- [170] Rosenfeld, L., *Ann. Phys.* **397** (1930) 113.
- [171] Rosenfeld, L., *Zeitschrift für Phys.* **65** (1930) 589.
- [172] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W., *Phys. Rev.* **116** (1959) 1322.
- [173] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W., *Phys. Rev.* **118** (1960) 1100.
- [174] de Pinho, E. J. C., *Teoria de Perturbações Invariantes de Calibre em Cenários de Cosmologia Quântica e sua Confrontação com as Observações*, Tese, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2006.
- [175] Kiefer, C., Quantum gravity - a general introduction, in *Quantum gravity from theory to Exp. search*, edited by Giulini, D., Kiefer, C., and Lämmerzahl, C., pages 3 – 13, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2003.
- [176] Kiefer, C., *Quantum gravity*, Oxford University Press, New York, 2007.
- [177] DeWitt, B. S., *Phys. Rep.* **19** (1975) 295.
- [178] DeWitt, B. S. and Esposito, G., *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **05** (2008) 101.
- [179] DeWitt, B. S., *Gen. Relativ. Gravit.* **41** (2009) 413.
- [180] Hartle, J. B., *The State of the Universe*. ArXiv: gr-qc/0209046v1, 2002.
- [181] Hartle, J. B. and Hawking, S. W., *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960.
- [182] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T., *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1986.
- [183] Mukhanov, V. and Winitzki, S., *Introduction to quantum effects in gravity*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [184] Bojowald, M., *Quantum cosmology: a fundamental description of the universe*, Springer, New York, 2011.
- [185] Bojowald, M., *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, quantum gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

- 
- [186] Bojowald, M., *The universe: a view from classical and quantum gravity*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2013.
- [187] Rovelli, C., *Class. Quantum Gravity* **8** (1991) 297.
- [188] Linde, A., Inflation, quantum cosmology, and the anthropic principle, in *Sci. Ultim. Real.*, edited by Barrow, J. D., Davies, P. C. W., and Harper, C. L. J., volume 56, pages 426–458, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [189] Linde, A., ArXiv: hep-th/0503203 (2005).
- [190] Linde, A., *Rept. Prog. Phys.* **80** (2017) 022001.
- [191] Vilenkin, A., *Phys. Lett. B* **117** (1982) 25.
- [192] Mithani, A. T. and Vilenkin, A., *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2014** (2014) 006.
- [193] Vilenkin, A. and Yamada, M., *Phys. Rev. D* **98** (2018) 066003.
- [194] Garriga, J. and Vilenkin, A., *Phys. Rev. D* **56** (1997) 2464.
- [195] Vilenkin, A., *Phys. Rev. D* **27** (1983) 2848.
- [196] Vilenkin, A., *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 3135.
- [197] Vilenkin, A., *Phys. Rev. D* **57** (1998) R7069.
- [198] Shafi, Q. and Vilenkin, A., *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 691.
- [199] Santini, E. S., *Geometrodinâmica Quântica na Interpretação de Bohm-de Broglie*, Tese, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2000.
- [200] Silva e Costa, S., *Cosmologia quântica com topologias não-triviais*, Tese, Universidade Estadual Paulista, 2000.
- [201] Santos, F. M. d. N., *Cosmologia inflacionária e o problema da medida*, Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- [202] Moura, F. d. F., *Quantização do modelo de mini-superespaço de Friedmann-Robertson-Walker permeado por poeira e uma constante cosmológica*, Dissertação, Universidade Federal Fluminense, 2010.

- [203] de Bom, C. R., *Histórias Consistentes em modelos de Cosmologia Quântica Dominados por Radiação*, Dissertação, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2013.
- [204] Fernandes, A. S., e-Boletim de Física **6** (2017) 2101.
- [205] Faraoni, V., Phys. Rev. D **84** (2011) 024003.