UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MÉTODO DE ISOMONODROMIA APLICADO AO MODELO DE RABI

Manuela Carvalho de Almeida

Tese de Doutorado

BRASÍLIA
23 de Agosto de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Manuela Carvalho de Almeida

MÉTODO DE ISOMONODROMIA APLICADO AO MODELO DE RABI

Trabalho apresentado ao Programa de PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA do INSTITUTO DE FÍSICA da UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em FÍSICA MATEMÁTICA.

Orientador: *Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz*

BRASÍLIA
23 de Agosto de 2018

À todos que trilham o Caminho.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a todos que contribuíram e me aguentaram durante essa caminhada tortuosa que foi o doutorado. Sem vocês, eu não estaria aqui.

Quero agradecer ao Kendo, a arte marcial que pratico desde 2009, que me ajudou a entender o que é um 'caminho'. Entender que não existe um fim e sim uma jornada. A física é uma jornada de disciplina e autoconhecimento, onde devemos construir conhecimento para ajudar nossa sociedade evoluir.

Não posso esquecer também das pessoas que encontrei no Kendo, me acompanharam e torceram fortemente por mim. Quero agradecer ao Carlos, Neimar e Takano por terem me recebido em Brasília em 2012 e me integrado. A Patrícia e Leonardo por serem amigos incríveis, que me escutaram e me ajudaram quando eu parecia não conseguir mais terminar o doutorado. Ao Taro Kodama, conhecido como Taro Sensei, pelos ensinamentos, broncas, conversas, viagens, por reforçar que temos que cada vez nos aperfeiçoar, estudar, procurar a estética e beleza em tudo que fazemos. Ao Ricardo Sugai, conhecido como Sugai Sensei, por mostrar que mesmo nas dificuldades, podemos fazer coisas incríveis, por me lembrar que devo continuar todo caminho e por acreditar no meu potencial como cientista. Infelizmente, não pode estar aqui para presenciar este momento. Ao Kimi Hirota e Mônica Oka, por acreditarem que eu podia continuar e me ajudarem a levantar a cabeça quando tudo parecia muito difícil. Ao Kendo de Recife, por ter me iniciado e sempre serem presentes na torcida para minha vida acadêmica.

Quero agradecer ao meu pai, que infelizmente não pode ver essa tese pronta. Um grande incentivador meu, acreditou que eu podia chegar longe desde de criança, me ensinou muita matemática e o mais difícil, a amá-la. Gostaria muito que estivesse aqui, te amo, pai. Quero agradecer a minha mãe, que também sempre me apoiou, veio ao meu socorro várias vezes. Além disso, me incentivou a viajar para congressos e me tornar mais capacitada. Por ficar comigo estudando do meu lado nas suas visitas a Brasília. Eu te amo demais, mainha. À minha irmã, Fernanda, que mesmo de longe me apoiou e confiou na minha capacidade. Quero agradecer ao meus tios Fernando Beça e Rosa Xavier, por terem ajudado minha família na época do falecimento do meu pai, me dando tranquilidade para terminar esse trabalho. Não posso esquecer de dizer que meu tio Beça também foi um grande incentivador para que eu fizesse física, me emprestando livros e conversando 'lero', me fazendo perguntas e respondendo as minhas sobre a aplicação da física no nosso dia-a-dia. A minha família de Natal, por torcer por mim na física como se fosse um jogo de futebol! Isso me faz rir e ir cada vez mais para frente!

Quero agradecer aos meus amigos Bruno e Arthur, que foram irmãos para mim em Brasília. Sempre me incentivando, discutindo e se divertindo comigo. A Breno Chamie, pelas conversas, risos e incentivo. Às minhas amigas Marina Mota e Hannah Sá por me acompanharem e me aturarem desde a escola. Aqui gostaria de colocar todos que cruzaram comigo e trocaram conhecimento. Todos vocês são meus amigos.

Quero agradecer enormemente ao Arsen Melikyan, professor da Universidade de Brasília, pelas discussões sobre fisica-matemática, seminários, orientações quando eu parecia estar perdida, por acreditar que eu tenho muito potencial e tentar extraí-lo de mim. Ao Professor Aleksandr Pinzul, conhecido como Sasha, por tantos cursos lecionados, que formaram a física que me tornei. Ao professor Bruno Cunha, sempre uma grande inspiração para mim, modelo de como um físico e professor deva ser.

Aos meus amigos do Facebook que me ajudaram quando o Latex não queria compilar! Sem vocês, esta tese não teria acontecido!

À Rebecca Lunière, minha companheira, que me apoiou, me ajudou, me compreendeu, me aturou, acreditou que eu conseguiria. E consegui. A sua família, Lúcia, Álvaro, Nayara, Marco, Marcello, Juliana, Seu Leôncio, Dona Dirce e tantos outros, por me acolherem como família também e torcerem para o sucesso deste momento.

Ao professor Amílcar Queiroz, orientador e amigo, que apesar de todos os tropeços de ambos lados, chegamos ao resultado final que é esta tese de doutorado.

Resumo

A discussão sobre soluções exatas remonta o início da ciência. Com o desenvolvimento da matemática e da física, cientistas perceberam que nem tudo pode ser exatamente resolvido. Porém, alguns sistemas especiais sim. A tentativa de encontrar soluções existe desde a mecânica clássica e o formalismo Hamiltoniano. Liouville atrelou que o sistema é dito Integrável se existe um conjunto de quantidades conservadas em convolução. Com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, surgiu um mundo novo de soluções a serem descobertas, além da seguinte pergunta: existe um análogo quântico para integrabilidade? O modelo de Rabi descreve a interação entre um átomo e um campo magnético rotacionando. O caso mais simples é um oscilador harmônico com dois níveis, análogo a um modelo de spin-1/2. Recentemente, o modelo tem atraído vividamente atenção, pois há muito tempo que tem sido um desafio provar exatamente sua solvabilidade. Em 2011, Braak resolveu o modelo em uma representação de Bargmann (estado coerente), obtendo de forma sistemática o seu espectro regular como zeros de uma função transcendental. A tese avança em algum esclarecimento na direção de provar que o modelo de Rabi não é apenas solúvel, mas também integrável. O ponto de partida é a representação de Bargmann do modelo de Rabi. Nesta representação, o modelo é descrito por uma equação de Heun confluente. Os dados da monodromia destas equações podem ser expressas em termos da função-tau da transcedental Painlevé V obtidas através de equações isomonodômicas. As propriedades globais estão codificados na noção de monodromias compostas, definindas através do parâmetro de monodromia composta do modelo. Finalmente, discute-se em termos gerais como se poderia usar este parâmetro composto de monodromia para obter o espectro do modelo de Rabi.

Palavras-chave: Modelo de Rabi, Painlevé V, Deformações Isomonodrômicas.

Abstract

The discussion of exact solutions goes back to the beginning of science. During the development of mathematics and physics, scientists have realized that not everything can be exactly solved. However, some special systems can. The attempt to find solutions exists from classical mechanics and Hamiltonian formalism. Liouville pointed out that the system is said to be integrable if there is a set of conserved quantities in convolution. When Quantum Mechanics appeared, a new world of solutions to be discovered has emerged, in addition, the following question: Is there a quantum analog for integrability? The Rabi model describes the interaction between an atom and a rotating magnetic field. The simplest case is a two-level harmonic oscillator analogous to a spin-1/2 model. Recently, the model has attracted vivid attention. It has long been a challenge to prove its solutions exactly. In 2011, Braak solved the model in a Bargmann representation (coherent state) and systematically he obtained its regular spectrum as zeros of a transcendental function. The present thesis advances at some clarification in the direction of proving Rabi's model integrability. The starting point is Bargmann's representation of Rabi's model. In this representation, the model is described by a confluent Heun equation. The monodromy data of these equations can be expressed in terms of the transcendental Painlevé V tau-function obtained by isomonodromic equations. The global properties are codified in the notion of composed monodromy, the monodromy parameter of the model. Finally, it is discussed in general terms how one could use this parameter composed of monodromy to obtain the spectrum of the Rabi model.

Keywords: Rabi Model, Painlevé V, Isomonodromy Method, Integrability

Sumário

1 Introdução **1**
1.1 Organização da Tese 5

2 Sistema de equações diferenciais **7**
2.1 Notação 7
2.2 Grupo de Homotopia 7
2.2.1 Grupo fundamental de homotopia 9
2.3 Equação diferencial de ordem n vs Sistema linear de primeira ordem com n equações 10
2.4 Sobre existência e unicidade das soluções 12
2.4.1 Em um disco aberto D 12
2.4.2 Superfície de Riemann simplesmente conexa 12
2.4.3 Superfícies de Riemann gerais: Cobertura Universal 12
2.5 Fatores de Automorfismo 13
2.6 Disco Perfurado 14
2.6.1 Sistemas equivalentes: Transformação de Gauge 16
2.7 Singularidades: Teoria local 17
2.7.1 Ponto regular 18
2.7.2 Ponto singular regular 19
2.7.3 Pontos singulares irregulares 21
2.7.4 Linhas de Stokes 22
2.7.5 Soluções Canônicas 24
2.7.6 Matrizes de Stokes e Fenômeno de Stokes 25
2.8 Apêndice: Exponencial de Matrizes 26
2.9 Apêndice 2: Séries Assintóticas 28

3 Isomonodromia **29**
3.1 Sistema de EDOs com m singularidades 29
3.1.1 Notação 29
3.1.2 Estudo das singularidades 30
3.1.3 Matrizes de Conexão 31
3.1.4 Dados de monodromia global 32
3.2 Grupo de Monodromia 32
3.2.1 Soluções 33
3.2.2 Caso regular 33

3.2.3 Caso Irregular 34
3.3 Problema Direto e Inverso: Problema de Riemann-Hilbert 34
3.4 Exemplos 36
3.4.1 Dois pontos regulares 36
3.4.2 Três pontos regulares 36
3.4.3 Quatro pontos regulares 38
3.5 Método de Isomonodromia 41
3.5.1 A 1-forma $\Theta(z,t)$ 42
3.5.2 Comportamento local de $\Theta(z,t)$ 42
3.5.3 Condição de compatibilidade 45
3.6 Teorema de Schlesinger 45
3.6.1 Deformação Isomodrômica para Painlevé VI 47
3.7 Apêndice: Classificação de Heun e Transcendentais de Painlevé 49
3.7.1 Equação de Heun 49
3.7.2 Equação de Painlevé 49
3.7.3 Equações de Painlevé como análogos clássicos das equações de Heun 50
3.7.4 Classificação das confluências da equação de Heun 50

4 Rabi e suas monodromias 53
4.1 Apresentando o modelo 53
4.2 Problema de Autovalor 55
4.2.1 Solução de Braak 55
4.3 Integrabilidade do Rabi 58
4.4 Método de Isomonodromia aplicado ao Rabi 60
4.4.1 Condição de curvatura nula 60

5 Conclusão 65

A Cadeia de Heisenberg 67
A.1 O toy model do Bethe Ansatz 67
A.2 O Modelo 67
A.2.1 Estado de vácuo 68
A.3 Uma perturbação do vácuo: magnon 68
A.4 Duas perturbações do vácuo: problema de espalhamento 70
A.5 Espalhamento de número arbitrário de excitações: a solução de Bethe 73
Hiato 73
A.6 Álgebra de observáveis 74
A.6.1 Operador de Lax 75
A.6.2 Matriz de monodromia e quantidades conservadas 75
A.7 Equações de Bethe 78
A.8 Espectro físico, limite termodinâmico e o caso antiferromagnético 82
A.8.1 Equação integral fundamental 83
A.8.2 Solução 84
A.8.3 Energia do Vácuo 85

CAPÍTULO 1

Introdução

A discussão sobre soluções exatas remonta o início da ciência. Com o desenvolvimento da matemática e da física, cientistas perceberam que existem sistemas especiais, os *Sistemas integráveis*. Liouville percebeu que um modelo é dito integrável se existe um conjunto, cuja dimensão é igual ao número de graus de liberdade do problema, de quantidades conservadas em convolução. A integrabilidade não é apenas assunto da moda na área da Física teórica, vem na natureza do cientista querer respostas simples, repletas de simetria. O 'como acontece' na Física-matemática é muito mais interessante que simplesmente uma resposta final.

Com o desenvolvimento da mecânica quântica, surgiu um mundo novo de soluções a serem descobertas, além das seguintes perguntas:

Existe um análogo quântico para integrabilidade? Pode um modelo ser solúvel e não-integrável? O que significa ser 'integrável'? Qual a diferença entre 'integrabilidade' e 'solvabilidade'?

De acordo com J. S. Caux em [38], uma definição precisa de Integrabilidade Quântica deve satisfazer três requisitos

1. Não deve ser ambígua,

2. Deve particionar o conjunto de todos os modelos quânticos possíveis em classes,

3. Diferentes classes devem ter comportamento físico distintos.

A discussão sobre integrabilidade quântica leva a perguntas mais básicas sobre as diferenças entre o mundo clássico e o quântico. A ausência de uma definição consistente mostra a ignorância humana em relação ao mundo quântico e sua correspondência com a mecânica clássica.

Em 1931, Bethe [26] resolveu um modelo de cadeia de Spin, a cadeia de spin XXX-$1/2$, conhecido como modelo de Heisenberg. O modelo descreve um metal unidimensional. A técnica conhecida hoje em dia como Bethe Ansatz Coordenado (Coordinate Bethe Ansatz) [78] consiste em uma sugestão inteligente para a função de onda do sistema da cadeia de spin baseada na simetria translacional do problema.

Com a conservação de energia e momento, duas partículas idênticas que interagem afetam a função de onda apenas por uma mudança de fase. Na essência, o significado de integrável é que qualquer interação pode ser decomposta em sucessivas interações entre pares de partículas e, na maioria das vezes, a ordem não importa (caso bosônico). Este é o significado da equação de Yang-Baxter (YB).

Uma vez que o efeito das interações pode ser codificado nas fases, o ansatz da função de onda pode ser construído em termos de superposições de ondas planas com *quasi-momentos* desconhecidos. Aplicando essa função de onda de coeficientes indeterminados num sistema Hamiltoniano, geramos equações de consistência conhecidas como as *equações de Bethe*. Finalmente, aplicam-se condições periódicas de contorno.

Depois deste procedimento, obtém-se para um sistema de N partículas um conjunto de N equações algébricas acopladas em N quasi-momentos desconhecidos e dependendo de N parâmetros. Estes parâmetros são na verdade números inteiros, eles especificam o estado quântico do sistema que estamos interessados. Resolvendo o conjunto de equações algébricas para obter os quasi-momentos, obtém-se uma completa descrição das autofunções do modelo.

Resumindo, o problema de resolver a equação diferencial relacionado ao problema de autovalor da Hamiltoniana da cadeia de Heisenberg é reduzido pelo Bethe Ansatz a um problema de sistema de equações algébricas. Mais uma simplificação emerge quando tomamos o limite termodinâmico. Neste caso estamos interessados na distribuição de quasi-momento, solução de uma equação integral cujas soluções tanto numéricas quanto analíticas podem ser encontradas. A função distribuição pode ser usada para formular todas as quantidades termodinâmicas do sistema. Portanto, o Bethe Ansatz é uma ferramenta muito eficiente para descrever a termodinâmica de um sistema integrável.

A maior limitação desta técnica é que ela provém apenas um conhecimento implícito das autofunções. Portanto, o cálculo das funções de correlação não é direto. Em muitos exemplos, até mesmo a abordagem numérica nas soluções do Bethe Ansatz não passam apenas de "força bruta".

O método Bethe Ansatz Algébrico (Algebraic Bethe Ansatz, ABA) é essencialmente uma segunda quantização do Coordinate Bethe Ansatz. De fato, é a versão quântica do Inverse Scattering Method (ISM) [78]: um formalismo que, através da representação de Lax das equações clássicas de movimento, permitiu estender e construir sistematicamente soluções solitônicas em teoria de campo. O método consiste em encontrar uma matriz de monodromia $T_a(\lambda)$ que satisfaz a *álgebra de Yang-Baxter*. As equações de Bethe emergem como condição de consistência.

A técnica do ABA para resolver um modelo integrável envolve um aumento do espaço de Hilbert físico através de um espaço auxiliar. O intuito é 'desacoplar' a interação de forma que os graus de liberdade não interajam. Ao final, basta tomar o traço sobre esse espaço auxiliar para projetar a solução no espaço físico. Podemos pensar nesse espaço auxiliar como um campo de gauge que engloba a interação entre todas as partículas livres.

Essa construção lógica nos permite, a partir da matriz de monodromia, construir um modelo integrável, como as cadeias de Heisenberg [84] e modelos mais gerais [126],[127]. A procura pela classificação de todas as possíveis soluções da equação de Yang Baxter foi iniciada por trabalhos como os [83][85], mas isso ainda é uma questão em aberto.

A descoberta de Bethe para a solução exata do problema é atemporalmente bonita e de extraordinária importância para matéria condensada e física matemática. O método continua a ser relevante para uma variedade de diferentes problemas. O exemplo da cadeia de Heisenberg se encontra no apêndice desta tese.

Paralelamente, em 1936, Isidor I Rabi investigou a versão semi-clássica de um modelo que agora possui o seu nome [109]. O modelo de Rabi descreve a mais simples interação entre um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético clássico. A versão completamente quantizada foi apresentada por Jaynes e Cummings em 1963 [71].

Batchelor e Zhou [22] levantaram a seguinte questão: *será o modelo de Rabi integrável em Yang-Baxter (YBI)?* Eles tiveram sucesso em mostrar YBI para dois pontos especiais no espaço de parâmetros do modelo de Rabi. Para um ponto genérico neste espaço moduli, YBI ainda era uma questão em aberto.

Em 1898, Painlevé [106] escreveu uma série de artigos nos quais ele introduziu uma classe de equações diferenciais de segunda ordem não-lineares cujas singularidades são apenas pólos. As soluções apresentavam a *Propriedade de Painlevé*: as soluções são livres de pontos críticos removíveis, i.e, a localização dos pontos de ramificação não dependem das condições iniciais.

A lista completa com as equações que possuem esta propriedade foi apresentada por Gambier e Garnier[60, 61], existindo apenas 50 [69]. Cada uma pode ser integrada em termos das funções conhecidas (hipergeométrica, seno, elíptica, etc) ou mapeada para um conjunto de seis equações, que não são integráveis por funções conhecidas. Essas seis equações especiais são as chamadas *equações de Painlevé*.

As transcendentais de Painlevé tem aplicações em várias áreas da física e da matemática. As equações de Painlevé apareceram como redução de equações diferenciais parciais muito famosas como a equação de Kortweg-de Vries (KdV) (P_I and P_{II}), equação de Schrödinger não linear (P_{VI}), equação de Ernst (P_{VI}) e a de Sine-Gordon (P_{III}).

Há também aplicações muito relevantes em física estatística e teoria quântica de campos, e algumas das mais importantes estão citadas em [55]: As funções de correlação de dois pontos para o modelo de Ising bidimensional [19], o modelo de gás de Bose impenetrável unidimensional a temperatura zero [74] e o modelo XY unidimensional isotrópico [99]. Aplicações em teoria topológica de campos podem ser encontradas em [43], e também sobre a função de partição de modelos de gravidade quântica em 2D [32, 64]. Esta última aplicação está ligado à teoria de matriz aleatória (random matrix) e polinômios ortogonais, à distribuição Tracy-Widom de autovalores (que tem importantes relações com os processos de percolação e crescimento) e aos determinantes de Fredholm e Toeplitz [41, 45, 125]. Por exemplo, determinantes de Fredholm podem ser calculados em termos da solução da forma sigma da P_V. O uso da Painlevés na dinâmica de fluidos, particularmente no estudo de superfícies que evoluem no tempo em fluxo de Hele-shaw com tensão superficial, pode ser encontrada em [56]. Finalmente, há também uma aplicação muito interessante em Teoria dos números: há evidências analíticas e numéricas de que a distribuição de zeros da função-ζ na linha $\Re z = 1/2$ segue o mesmo comportamento que a distribuição de autovalores do conjunto unitário gaussiano na teoria da matriz aleatória [76].

As transcendentais de Painlevé são melhor compreendidas em termos da teoria de deformações isomonodrômicas.

A descoberta das funções transcendentais de Painlevé ampliou o conhecimento humano sobre funções especiais, sendo tão importantes e fundamentais como por exemplo as funções Airy, funções de Bessel, entre outras. Devido ao estudo contínuo dessas novas funções, agora é possível derivar fórmulas de conexão para as funções Painlevé, relacionando os parâmetros assintóticos relevantes em diferentes pontos críticos. Este fato, aparentemente desconhecido pelo P. Painlevé e seus contemporâneos, baseia-se no *Método de Isomonodromia*.

Riemann, em seu artigo de 1857, foi o primeiro a introduzir o conceito de deformação uma equação diferencial linear ordinária (EDO) preservando a representação do grupo de monodromia. O problema proposto foi resolvido após sua morte, por Schlesinger [112], Fuchs [59], e Garnier [61].

Surgiu uma poderosa ferramenta matemática, o método de Isomonodromia, utilizada de forma exaustiva para atacar diversos problemas, como por exemplo os difíceis problemas de conexão por equações diferenciais não lineares. Uma função é determinada por suas expansões locais (que podem ser assintóticas) em torno de seus pontos singulares e como essas expansões se relacionam uma com a outra. O comportamento global de uma função é simplesmente obtido pela "colagem" de expansões locais convergindo para o próximo singular ponto. Essa é a essência do problema de conexão.

O ponto de partida do método é uma EDO linear e homogênea de ordem N, escrita na forma matricial como um sistema de N EDOs lineares de primeira ordem acopladas de primeira ordem. Um sistema de EDOs é dito *Fuchsiano* quando todas as sua singularidades são pólos simples. O problema de representação do grupo fundamental ou *representação de monodromia* de $\mathbb{CP}_1 \setminus \{a_1, ..., a_{m-1}, a_\infty\}$, onde $a_\nu, \nu = 1, ..., m-1, \infty$ são singularidades do sistema de EDO, é frequentemente referido como o problema de Riemann-Hilbert:

Dada uma equação diferencial com m pontos singulares, encontre uma representação de monodromia associada aos seus pontos singulares. Se houver pontos irregulares, também encontre as matrizes Stokes.

Esta é sua versão direta. A sua versão inversa é

Dada uma representação irredutível do grupo fundamental da esfera de Riemann perfurada, encontre uma equação diferencial Fuchsiana com representação de monodromia.

Em geral, o mapa do problema inverso não é injetivo. Apenas para o caso hipergeométrico, $m = 3$, o número de parâmetros coincide e a correspondência entre representações do grupo monodromia e da EDO Fuchsiana é única.

Portanto o objetivo da teoria da deformação isomodrômica é descrever uma família de equações diferenciais que compartilham a mesma representação de monodromia.

O trabalho de Jimbo, Miwa, e outros [72, 73, 70] é fascinante. Foi parte natural desta tese rever essa literatura, estudar a correspondência entre as transcendentais de Painlevé e as equações de Heun.

Na falta de uma definição final para a versão quântica de Integrabilidade, o método de Isomonodromia aparece como uma nova ferramenta para descrever sistemas integráveis. A ideia desta tese foi aplicar a mesma ferramenta matemática ao problema de Rabi e através do método de Isomonodromia propor uma maneira mais sistemática de tratar a integrabilidade do modelo. Substituímos o problema de encontrar a solução explícita do problema para o de encontrar matrizes de monodromia, culminando no trabalho [34]. O método de Isomonodromia já havia sido utilizado para encontrar coeficientes de espalhamento em buracos negros [35]. O método possibilitou encontrar uma equação de Yang-Baxter escrita em termo das matrizes de monodromia associadas ao problema de autovalor do modelo de Rabi. Uma razão pela qual antes não havia uma resposta para a integrabilidade do modelo de Rabi está no fenômeno de Stokes associado à singularidade irregular no infinito. Sem o método de Isomonodromia não seria possível levar em conta a singularidade irregular.

O ponto de partida desta tese é a representação de Bargmann para modelo de Rabi. Nesta representação, pode-se mostrar que o modelo de Rabi é descrito por uma equação de Heun confluente. Um fato conhecido [72, 70] é que os dados da monodromia destas equações podem ser expressas em termos da função-tau da Painlevé V [73] obtida através de transformações isomonodrômicas.

As propriedades globais, relevantes para o problema do espectro e para integrabilidade no sentido Yang-Baxter, estão codificadas na noção de monocromias compostas. Será apresentado o parâmetro composto de monodromia do modelo de Rabi e como se poderia usar este parâmetro para obter seu espectro.

Este trabalho consiste na apresentação das monodromias associadas aos pontos singulares da equação diferencial decorrente do problema do autovalor do Rabi. Será discutida a relevância do fenômeno Stokes, a fim de obter conjunto completo de dados de monodromia. O surgimento do fenômeno de Stokes fenômeno gera necessidade de parâmetros extras no conjunto de dados de monodromia, dificultando a demonstração completa da integrabilidade no sentido de Yang-Baxter do modelo de Rabi.

1.1 Organização da Tese

No capítulo 2, será apresentada o embasamento teórico de sistema de EDOs lineares com apenas uma singularidade, introduzindo o conceito de Fenômeno de Stokes. No capítulo 3, generalizamos o caso para m singularidades e discutiremos o método de Isomonodromia. No capítulo 4, o modelo Rabi será escrito como um sistema Fuchsiano padrão e, em seguida, será discutido o método de Isomonodromia aplicado ao modelo, encontrando as monodromias em torno dos pontos singulares. A situação especial acontece para a monodromia em torno de um único ponto singular irregular, o ponto no infinito, surgindo o Fenômeno de Stokes. Como resultado, obtemos a relação geral de grupo para as monodromias e como elas estão relacionadas com equação de Yang-Baxter. Em seguida, será discutido o método de isomonodomia visando a escrita da monodromia composta em termos do parâmetro monodromia no ponto irregular e dos parâmetros de stokes. Por outro lado, a existência de matrizes de monodromia para o sistema original é obtido a partir da função-tau da Painlevé V.

CAPÍTULO 2

Sistema de equações diferenciais

Para discutir o método de Isomonodromia, precisamos revisar teoria de sistema de equações de diferenciais ordinárias (EDO), com foco na versão matricial das EDOs. Será discutido a existência das soluções, grupo de monodromia e como as soluções se comportam em vizinhanças de pontos singulares regulares e irregulares.

2.1 Notação

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares

$$w' = A(z)w, \tag{2.1}$$

$$w(z_0) = w_0,$$

onde $A(z)$ é uma matriz $n \times n$ e holomorfa em z. Daqui em diante, usaremos as seguintes notações

Def 1. *O $M(n \times n, \mathbb{C})$ é o espaço das matrizes $n \times n$ nos números complexos $\mathbb{C}$.*

Def 2. *O $GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo de matrizes $n \times n$ invertíveis.*

Def 3. *Se X é uma Superfície de Riemann, então o mapa*

$$A : X \longrightarrow M(n \times n, \mathbb{C}) \tag{2.2}$$

$$a_{ij} : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

é holomorfo se todos os a_{ij} forem mapas holomorfos. O conjunto $M(n \times n, O(X))$ é o conjunto de todos os mapas holomorfos A em X.

2.2 Grupo de Homotopia

Seja X um espaço topológico e seja $I = [0, 1]$ um intervalo. O mapa

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

é um *caminho de x_0 a x_1* se

$$\gamma(0) = x_0 \;\; e \;\; \gamma(1) = x_1. \tag{2.3}$$

Se $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, então temos uma curva fechada (loop) com ponto base x_0.

O mapa $\gamma_x : I \longrightarrow X$ é dito *constante* se

$$\gamma_x(t) = x, \quad \forall t \in I \tag{2.4}$$

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$ caminhos tais que

$$\gamma_1(1) = \gamma_2(0),$$

o *produto de caminhos*, $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \equiv \gamma_1\gamma_2$, é o caminho em X definido por

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t < \dfrac{1}{2} \\ \\ \gamma_2(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

O *caminho inverso* γ^{-1} é definido por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \;\; t \in I. \tag{2.6}$$

Sejam γ_1 e γ_2 loops em x_0. Eles são *homotópicos*, i.e,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

se existe um mapa contínuo $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \gamma_1(t), \;\; \forall t \in I, \\ F(t,1) &= \gamma_2(t), \;\; \forall t \in I, \\ F(0,s) = F(1,s) &= x_0, \;\; \forall s \in I, \end{aligned} \tag{2.7}$$

O mapa $F(t,s)$ é chamado de *homotopia* entre γ_1 e γ_2. Duas curvas são homotópicas se existe uma função entre elas que satifaz (2.7). Denotamos por $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Teorema 1. *A relação de homotopia, i.e,*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \tag{2.8}$$

é uma relação de equivalência.

Para que uma relação seja uma relação de equivalência deve satisfazer

1. **Reflexibilidade:** $\gamma \sim \gamma$. A homotopia dada por $F(t,s) = \gamma(t)$ para todo $s \in I$

2. **Simetria: Se** $\gamma_1 \sim \gamma_2$**, então** $\gamma_2 \sim \gamma_1$. Se $F(t,s)$ com

   $$F(t,0) = \gamma_1(t)$$

   e

   $$F(t,1) = \gamma_2(t)$$

   for a homotopia entre γ_1 e γ_2, então a homotopia $\gamma_2 \sim \gamma_1$ é dada por $F(t,s-1)$.

3. **Transitividade:** Seja $\gamma_1 \sim \gamma_2$ e $\gamma_2 \sim \gamma_3$, então $\gamma_1 \sim \gamma_3$. Se $F(t,s)$ for a homotopia entre γ_1 e γ_2 e $G(t,s)$ a homotopia entre γ_2 e γ_3, então a homotopia entre γ_1 e γ_3 é dada por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(t,2s), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ G(t,2s-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2.1 Grupo fundamental de homotopia

Como a homotopia é uma relação de equivalência, então podemos separar os loops em classes de equivalência. Neste caso, chamaremos de *classe de homotopia*. Seja γ um loop, sua classe de homotopia é denotada por $[\gamma]$.

Seja X um espaço topológico. O conjunto de todas as classes de homotopia em $x_0 \in X$ é chamado de *grupo fundamental de X em x_0*, denotado por $\pi_1(X,x_0)$.

O *produto entre duas classes de homotopia* $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ é definido como

$$[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] \equiv [\gamma_1\cdot\gamma_2] \tag{2.10}$$

i.e, o produto entre classes de equivalência é a classe de equivalência do produto dos loops. O produto independe da escolha do representante da classe de homotopia.

Este produto satisfaz os axiomas de grupo:

1. Associatividade: $([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3] = [\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$

2. Elemento unitário: $[\gamma_1]\cdot[\gamma_x] = [\gamma]$ e $[\gamma_x]\cdot[\gamma_1] = [\gamma]$

3. Elemento inverso: $[\gamma_1]\cdot[\gamma_1^{-1}] = [\gamma_x]$, logo $[\gamma_1^{-1}] = [\gamma_1]^{-1}$

Def 4. *Suponha X e Y espaços topológicos e $p : Y \longrightarrow X$ um mapa contínuo. Para $x \in X$, o conjunto de pontos $p^{-1}(x)$ é chamado de* **fibra de** *p* **sobre** *x. Os pontos $y \in p^{-1}$ estão sobre x. Se considerarmos dois mapas $p : Y \longrightarrow X$ e $q : Z \longrightarrow X$ e se existir um mapa $f : Y \longrightarrow Z$ tal que o diagrama abaixo é comutativo,*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd},$$

i.e,

$$p = f \circ q$$

A partir da definição de fibra, podemos definir

Def 5. *Suponha X e Y espaços topológicos. O mapa $p : Y \longrightarrow X$ é chamado de* **Mapa de cobertura** *se $\forall x \in X$, existe uma vizinhança aberta U, $x \in U$, tal que sua pré-imagem $p^{-1}(U)$ pode ser representada como a união de abertos E_j's*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} E_j \qquad E_i \cap E_j = \varnothing \tag{2.11}$$

e as restrições

$$p|_{E_i} : E_i \longrightarrow U \tag{2.12}$$

são homeomorfismos.

Def 6. *Sejam X e Y espaços topológicos conectados e $p : Y \longrightarrow X$ mapa de cobertura. O mapa $p : X \longrightarrow Y$ é dito mapa universal de X se satisfizer a seguinte* **propriedade universal***: Para todo mapa de cobertura $q : Z \longrightarrow X$, Z conexo, e para qualquer escolha de $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$ com $p(y_0) = q(z_0)$ existe exatamente um mapa contínuo $f : Y \longrightarrow Z$ que preserva a fibra tal que*

$$f(y_0) = z_0. \tag{2.13}$$

Teorema 2. *Suponha X e Y variedades conexas e Y simplesmente conexo e $p : y \longrightarrow X$ mapa de cobertura. Então p é cobertura universal de X [57].*

Teorema 3. *Suponha X uma variedade conectada. Então sempre existe uma variedade conectada e simplesmente conexa $\tilde{X}$ e um mapa de cobertura $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ [57].*

Em suma, *a cobertura universal $(\tilde{X}, p)$ é um par de um espaço simplesmente conexo com uma cobertura*. Esse par sempre pode ser encontrado [57].

2.3 Equação diferencial de ordem n vs Sistema linear de primeira ordem com n equações

Considere a seguinte equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n:

$$w^{(n)} + a_1(z)w^{(n-1)} + a_2(z)w^{(n-2)} + ... + a_n(z)w = 0, \tag{2.14}$$

onde

$$w^{(n)} \equiv \frac{d^n w}{dz^n}.$$

A equação (2.14) pode ser escrita como um sistema de n de EDOs de primeira ordem acopladas:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{A}(z)\mathbf{w}(z), \tag{2.15}$$

onde $\mathbf{A}(z)$ é uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{w}(z)$ é um vetor com N componentes. Reciprocamente, dado um sistema como (2.15), cada componente de $\mathbf{w}(z)$ satisfaz uma EDO da forma (2.14). A solução geral para (2.15) é:

$$\mathbf{w}(z) = C_1\mathbf{w}_1(z) + ... + C_n\mathbf{w}_n(z), \tag{2.16}$$

onde $\mathbf{w}_1(x)$, ..., $\mathbf{w}_n(z)$ são n soluções particulares linearmente independentes. Elas forma um espaço de soluções L_A, onde $\dim L_A = n$. Podemos reescrever a equação acima como o seguinte produto de matrizes

$$\mathbf{w}(z) = [\mathbf{w}_1(z) \;...\; \mathbf{w}_n(z)]\,[C_1 \;...\; C_n]^T. \tag{2.17}$$

Então a base de L_A define uma matriz invertível

$$\Phi(z) \equiv [\mathbf{w}_1(z) \;...\; \mathbf{w}_n(z)] \in GL(n,\mathbb{C}) \tag{2.18}$$

é chamada de ***Matriz solução fundamental***. Ela também satisfaz (2.15)

$$\frac{d\Phi}{dz} = \mathbf{A}(z)\Phi(z). \tag{2.19}$$

Para o caso $n = 2$, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{dw_1}{dz} \\ \frac{dw_2}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

então

$$\frac{d^2w_1}{dz^2} - \left(\mathrm{Tr}A + \frac{(A')_{12}}{(A)_{12}}\right)\frac{dw_1}{dz} + \left(\mathrm{Det}A - (A')_{11} + (A)_{11}\frac{(A')_{12}}{(A)_{12}}\right)w_1 = 0. \tag{2.21}$$

O ***Wronskiano*** $W(\Phi;z)$ é definido como o determinante de $\Phi(z)$

$$W(\Phi;z) = \mathrm{Det}\,\Phi(z). \tag{2.22}$$

Quando as soluções são linearmente independentes, $W(\Phi;x) \neq 0$ e $\Phi(z)$ é invertível.

Em uma superfície de Riemann, uma equação diferencial linear pode ser escrita da forma

$$dw = Aw, \tag{2.23}$$

onde $A \in M(n \times n, \Omega(X))$, sendo $\Omega(X)$ o espaço de 1-forma em X, i.e,

$$A = (a_{ij}), \;\; a_{ij} \in \Omega(X).$$

Desta forma, a equação diferencial fica independente do sistema de coordenadas. Quando necessário usar algum específico, basta escolher uma carta (U,z) em X e escrever A explicitamente como a 1-forma

$$A = F dz, \quad F \in M(n \times n, O(X)),$$

recobrando a forma original da equação

$$\frac{dw}{dz} = Fw. \tag{2.24}$$

2.4 Sobre existência e unicidade das soluções

As soluções da equação () existem nas seguintes condições:

2.4.1 Em um disco aberto D

Teorema 4. *Seja $A \in M(n \times n, O(X))$ mapa holomorfo no disco*

$$D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < R\}, \quad 0 < R \leq \infty. \tag{2.25}$$

Então $\forall w_0 \in \mathbb{C}^n$, $\exists w : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$, com w único, tal que que

1. $w' = A(z)w, \quad \forall x \in D$
2. $w(0) = w_0$.

2.4.2 Superfície de Riemann simplesmente conexa

Teorema 5. *Suponha X uma superfície de Riemann simplesmente conexa, $A \in M(n \times n, \Omega(X))$ e $x_0 \in X$. Então, para qualquer $c \in \mathbb{C}^n$, existe uma solução única $w \in O(X)^n$ para a equação diferencial*

1. $dw = A(z)w$,
2. $w(x_0) = c$.

2.4.3 Superfícies de Riemann gerais: Cobertura Universal

Com esses dois teoremas, podemos generalizar para o caso de uma equação diferencial em uma superfície de Riemann geral.

Teorema 6. *Suponha X uma superfície de Riemann, $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ sua cobertura universal, $x_0 \in X$ e $y_0 \in \tilde{X}$ tal que*

$$p(y_0) = x_0. \tag{2.26}$$

Suponha $A \in M(n \times n, \Omega(X))$ e $c \in \mathbb{C}^n$. Então existe uma única solução $w \in O(X)^n$ na cobertura universal $\tilde{X}$ tal que

$$dw = (p^*A)w, \tag{2.27}$$

$$w(x_0) = w_0.$$

No caso do sistema de soluções fundamental, Φ satisfaz

$$d\Phi = (p * A)\Phi. \tag{2.28}$$

O **Teorema 1** mostra existência e unicidade de soluções da equação diferencial em um disco. O **Teorema 2** generaliza para superfícies de Riemann simplesmente conexa. O **Teorema 3** diz que se temos uma superfície de Riemann geral, podemos sempre encontrar uma cobertura universal simplesmente conexa de forma que o **Teorema 2** é válido e a equação diferencial será representada por (2.27).

2.5 Fatores de Automorfismo

Def 7. *Suponha X e Y espaços topológicos e $p : Y \longrightarrow X$ um mapa de cobertura. Entende-se por transformação de cobertura deste mapa (transformações de Deck) um homeomorfismo $h : Y \longrightarrow Y$ tal que o diagrama abaixo é comutativo,*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd},$$

i.e,

$$p = p \circ h.$$

O conjunto de todas as transformações de Deck formam um grupo [57] e é denotado por

$$\Gamma = Deck(Y \longrightarrow X). \tag{2.29}$$

A partir de agora, $Y = \tilde{X}$.

Teorema 7. *Suponha X variedade conectada e $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ sua cobertura universal. Então*

$$\Gamma = Deck(\tilde{X} \longrightarrow X) \cong \pi_1(X). \tag{2.30}$$

A prova deste teorema se encontra em [57].

Como a equação (2.27) depende de p, pode-se definir a ação de um elemento $\sigma \in \Gamma$ em Φ como

$$\sigma\Phi \equiv \Phi \circ \sigma^{-1}. \tag{2.31}$$

Note que $\sigma\Phi$ satisfaz

$$d(\sigma\Phi) = (p^*A)(\sigma\Phi), \tag{2.32}$$

portanto encontramos outro sistema fundamental de soluções da equação (2.27). Com isso, vemos que σ leva soluções em soluções, logo existe uma transformação de simetria entre os Φ's. Essa simetria é representada por uma matriz $T_\sigma \in GL(n, \mathbb{C})$

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma. \tag{2.33}$$

Caso exista um outro elemento $\tau \in \Gamma$, então

$$\Phi T_{\tau\sigma} = (\tau\sigma)\Phi = \tau(\Phi T_\sigma) = (\tau\Phi)T_\sigma = \Phi T_\tau T_\sigma. \tag{2.34}$$

A correspondência $\sigma \mapsto T_\sigma$ define um homomorfismo de grupo

$$\Gamma \cong \pi_1(X) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}). \tag{2.35}$$

Essas matrizes são chamadas de **fatores de Automorfismo de** Φ. Por outro lado, suponha o homomorfismo

$$\begin{aligned} T : \Gamma &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}), \\ \sigma &\mapsto T_\sigma \end{aligned} \tag{2.36}$$

e um mapa holomórfico

$$\Phi : \tilde{X} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \tag{2.37}$$

tais que

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma, \quad \forall \sigma \in \Gamma. \tag{2.38}$$

A matriz $(d\Phi) \cdot \Phi^{-1} \in M(n \times n, \Omega(X))$ é invariante sob transformações de cobertura. Isso deriva da definição (2.31) e do produto de funções. Considere duas funções f_1 e f_2, o produto delas é definido como

$$(f_1 \cdot f_2)(x) \equiv f_1(x) f_2(x).$$

Pela definição da ação (2.31), temos

$$\begin{aligned} \sigma(f_1 \cdot f_2)(x) &= (f_1 \cdot f_2)(\sigma^{-1}(x)), \\ &= f_1(\sigma^{-1}(x)) \cdot f_2(\sigma^{-1}(x)), \\ &= (\sigma f_1) \cdot (\sigma f_2). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Aplicando em $(d\Phi) \cdot \Phi^{-1}$, vemos que

$$\sigma((d\Phi) \cdot \Phi^{-1}) = [d(\sigma\Phi)](\sigma\Phi)^{-1} = (d\Phi T_\sigma)(\Phi T_\sigma)^{-1} = (d\Phi) \cdot \Phi^{-1}. \tag{2.40}$$

2.6 Disco Perfurado

Considere o caso especial do disco perfurado

$$X = D - \{0\} \equiv \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < R\}, \quad R > 0. \tag{2.41}$$

Seja a cobertura universal $\tilde{X}$

$$\tilde{X} = \exp^{-1}(X) = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(\tilde{z}) < 0\}, \tag{2.42}$$

então

$$p = \exp|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \longrightarrow X. \tag{2.43}$$

Defina a ação de um gerador $\sigma \in \Gamma$ como

$$\sigma : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X},$$

$$\sigma(\tilde{z}) = \tilde{z} - 2\pi i,$$

então

$$\sigma\tilde{z} \equiv \sigma^{-1}(\tilde{z}) = \tilde{z} + 2\pi i, \tag{2.44}$$

logo

$$\Gamma = \{\sigma^n : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.45}$$

Se $\Psi \in GL(n, O(\tilde{X}))$ for outra solução de (2.19), então existe uma matriz $S \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\Psi = \Phi S$

$$\begin{aligned} \sigma\Phi &= \Phi T, \\ \sigma\Phi S &= \Psi S^{-1} T S, \\ \sigma\Psi &= \Psi\tilde{T}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

então existe uma escolha de ψ que o fator de automorfismo está na forma normal de Jordan.

Teorema 8. *Suponha $T \in GL(n, \mathbb{C})$ e $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tal que*

$$\exp(2\pi i B) = T. \tag{2.47}$$

Considere a seguinte equação diferencial em $D - \{0\}$

$$w' = \frac{1}{z} B w. \tag{2.48}$$

Então

$$\Phi_0 = \exp(\log B\tilde{z}) \tag{2.49}$$

é um sistema fundamental de soluções de (2.19) na cobertura universal com fator de automorfismo

$$\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T \tag{2.50}$$

onde σ está definido pela equação (2.44).

Para demonstrar o teorema, considere $A \in M(n \times n, O(X)$ uma matriz que satisfaz

$$A \cdot dA = dA \cdot A,$$

então

$$d(\exp A) = dA \exp A = \exp A dA.$$

Derivando (2.49)

$$\begin{aligned} d\Phi_0 &= d(B \log \tilde{z})\Phi_0, \\ &= \frac{B}{\tilde{z}}\, d\tilde{z}\, \Phi_0, \end{aligned} \tag{2.51}$$

Portanto, Φ_0 é solução de (2.48). Além disso,

$$\begin{aligned} \sigma\Phi_0(\tilde{z}) &= \Phi_0(\sigma^{-1}(\tilde{z})) \\ &= \exp(B \log(\sigma^{-1}(\tilde{z})) \\ &= \exp(B\sigma \log(\tilde{z})) \\ &= \exp(B(\log \tilde{z} + 2\pi i)) \\ &= \exp(B \log \tilde{z}) \exp(B\, 2\pi i) \\ &= \Phi_0 T \end{aligned} \tag{2.52}$$

Teorema 9. *Seja $A \in M(n \times n, O(X))$ e a equação (2.19), então ela possui sistema fundamental de soluções $\Phi \in GL(n, O(\tilde{X}))$ da forma*

$$\Phi = \Psi\Phi_0 \tag{2.53}$$

onde $\Phi_0 = \exp(B \log \tilde{z})$ para uma matriz constante $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ e Ψ é invariante sob transformações de cobertura, i.e,

$$\sigma\Psi = \Psi \tag{2.54}$$

Suponha $\Phi \in GL(n, O(\tilde{X})$ que satisfaz

$$\sigma\Phi = \Phi T, \tag{2.55}$$

pelo teorema anterior, podemos encontrar $\Phi_0 = \exp(B \log \tilde{z})$ tal que

$$\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T, \tag{2.56}$$

então para $\Psi = \Phi \cdot (\Phi_0)^{-1}$, vemos

$$\begin{aligned} \sigma\Psi &= (\sigma\Phi) \cdot (\sigma\Phi_0)^{-1} \\ &= \Phi T T^{-1} (\Phi_0)^{-1} \\ &= \Psi. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Conclusão: a solução da EDO (2.19) em $X = \{0 < |z| < R\}$ do tipo

$$w' = Aw \tag{2.58}$$

pode ser representada pelo produto de uma função multivalente

$$\Phi_0 = \exp(B \log \tilde{z}) \tag{2.59}$$

e uma função monovalente Ψ, que pode ser expandida em série de Laurent.

2.6.1 Sistemas equivalentes: Transformação de Gauge

Def 8. *Seja $g(z)$ uma matriz invertível com entradas sendo funções holomorfas em um aberto $U \in \mathbb{C}$. Então dois sistemas lineares*

$$\frac{d\Phi}{dz} = A(z)\Phi \tag{2.60}$$

e

$$\frac{d\Psi}{dz} = B(z)\Psi \tag{2.61}$$

são equivalentes de gauge se existe uma transformação

$$B(z) = g(z)A(z)g^{-1}(z) + \frac{dg(z)}{dz} g^{-1}(z). \tag{2.62}$$

As soluções se transformam da seguinte forma

$$\Phi(z) \longrightarrow \Psi(z) = g(z)\Phi(z). \tag{2.63}$$

Seja $\Phi(z)$ solução do sistema de equações (2.19). Então, a fórmula seguinte é válida

$$\frac{d \ln \operatorname{Det} \Phi(z)}{dz} = \operatorname{Tr} A(z). \tag{2.64}$$

em particular,

$$\operatorname{Tr} A(z) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Det} \Phi(z) = \text{constante}.$$

Usando a fórmula (2.64) e escolhendo a matriz de gauge como

$$g(z) = \exp\left(-\frac{1}{N}\int^{z} \operatorname{Tr} A(\lambda) d\lambda\right) I,$$

derivando

$$\frac{dg(z)}{dz} = -\frac{1}{N} \operatorname{Tr} A(z) I.$$

Substituindo na equação (2.62), encontramos

$$B(z) = A(z) - \frac{1}{N} \operatorname{Tr} A(z) I,$$

pois $g(z)$ comuta com $A(z)$.

Como o traço é um operador linear, ao tomar o traço de $B(z)$, vemos que

$$\operatorname{Tr} B(z) = 0. \tag{2.65}$$

Conclusão: sempre podemos encontrar um sistema equivalente com traço nulo.

2.7 Singularidades: Teoria local

A teoria local de sistemas lineares de EDOS lida com o comportamento das soluções da equação (2.19) na vizinhança de um dado ponto $z_0 \in \mathbb{C}P^1$. Podemos encontrar três tipos de comportamento:

1. O coeficiente da matriz $A(z)$ é *holomorfo no ponto* z_0. Se $z_0 = \infty$, então $A(z)$ possui um zero no infinito de, no máximo, segunda ordem. O ponto z_0 é dito *regular*.

2. O coeficiente da matriz $A(z)$ possui *pólo simples no ponto* z_0. Se $z_0 = \infty$, então $A(z)$ possui um pólo no infinito. O ponto z_0 é dito *singular regular* ou *Fuchsiano*.

3. O coeficiente da matriz $A(z)$ possui *pólo múltiplo no ponto* z_0. Se $z_0 = \infty$, então $A(z)$ possui um pólo múltiplo no infinito. O ponto z_0 é dito *singular irregular*.

Defina a variável ξ como

$$\xi = \begin{cases} z - z_0, & z_0 \neq \infty \\ 1/z, & z_0 = \infty \end{cases}, \tag{2.66}$$

e disco D_{z_0} centrado em z_0

$$D_{z_0} = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}; |\xi| < \rho\} \;\; 0 < \rho \leq \infty, & z_0 \neq \infty \\ \{z \in \mathbb{C}; |\xi| > \rho\} \cup \{\infty\}, \;\; 0 \leq \rho < \infty, & z_0 = \infty \end{cases}. \tag{2.67}$$

2.7.1 Ponto regular

O ponto z_0 é um ponto regular do sistema de EDOs (2.19) se $A(z)$ é uma matriz holomorfa em $z = z_0$, com a seguinte expansão na série de Taylor

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k. \tag{2.68}$$

Caso $z_0 = \infty$, a expansão de Taylor é dada por

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} A_{-k-2} z^k. \tag{2.69}$$

Em termo da variável ξ, podemos unificar as equações (2.68) e (2.69)

$$A(z)dz = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k \right) d\xi, \quad z \in D_{z_0}. \tag{2.70}$$

A solução do sistema (2.19) pode ser escrita em série de potências

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \xi^k. \tag{2.71}$$

Substituindo (2.71) e (2.70) em (2.19), encontramos do lado esquerdo

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\xi} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \Phi_k \xi^{k-1}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Phi_{k+1} \xi^k \end{aligned} \tag{2.72}$$

e do lado direito

$$\begin{aligned} A(z)\Phi(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m \xi^m \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_k \Phi_m \xi^{k+m}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} A_{k-m} \Phi_m \xi^m. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Igualando (2.72) e (2.73) e isolando os termos de mesma potência em ξ, encontramos a seguinte relação de recorrência

$$(k+1)\Phi_{k+1} = \sum_{m=0}^{k} A_{k-m}\Phi_m \xi^m, \quad k = 0, 1, \ldots \,. \tag{2.74}$$

Junto com as condições iniciais

$$\Phi(z_0) = \Phi_0,$$

a relação (2.74) determina unicamente os coeficientes Φ_k da solução de (2.19).

2.7.2 Ponto singular regular

Um ponto $z = z_0$ é uma singularidade regular do sistema de EDOS (2.19) se $(z-z_0)A(z)$ é uma matriz holomorfa em $z = z_0$. A expansão de Laurent da matriz $A(z)$ em uma vizinhança do ponto z_0 é

$$A(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} A_{k+1}(z-z_0)^k, \tag{2.75}$$

onde $A_0 \neq 0$. O ponto no infinito é um ponto singular regular se $zA(z)$ é holomórfica no infinito. A expansão de Laurent da matriz $A(z)$ é dada por

$$A(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k-1} z^k. \tag{2.76}$$

Em termo da variável ξ, podemos unificar as equações (2.75) e (2.76)

$$A(z)dz = \left(\sum_{k=-1}^{\infty} A_{k+1}\xi^k \right) d\xi, \quad z \in D_{z_0} \setminus \{z_0\} \tag{2.77}$$

com $A_0 \neq 0$.

Utilizando o seguinte exemplo de $A(z)$

$$A(z) = \frac{A_0}{z-z_0}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \tag{2.78}$$

a equação (2.19) se torna

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{A_0}{z-z_0}\Phi. \tag{2.79}$$

Integrando ambos lados da equação, encontramos

$$\Phi(z) = (z-z_0)^{A_0}, \tag{2.80}$$

onde o termo $(z-z_0)^{A_0}$ é definido pela equação (2.150) no apêndice deste capítulo e com $\Phi_0 = I$, por conveniência.

Podemos encontrar uma matriz P invertível tal que

$$\Lambda_0 = P^{-1}A_0P, \quad \mathrm{Det}\,P \neq 0, \tag{2.81}$$

onde Λ_0 é uma forma canônica de Jordan de A_0. Usando a equação (2.139), podemos escrever a solução (2.80) como

$$\Phi(z) = P(z-z_0)^{\Lambda_0}P^{-1},$$

onde P é uma matriz constante. A função

$$\Phi(z) = P(z-z_0)^{\Lambda_0} \tag{2.82}$$

também é solução de (2.19). Usando a definição da variável (2.66), podemos reescrever a equação (2.82)

$$\Phi(\xi) = P\xi^{\Lambda_0}. \tag{2.83}$$

No caso de uma matriz $A(z)$ geral, a solução $\Phi(z)$ pode ser expandida na série de Laurent em torno de uma vizinhança dos pontos singulares regulares da seguinte forma

$$\Phi(z) = \xi^{\mathscr{A}} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \xi^k \tag{2.84}$$

Substituindo (2.84) na equação (2.19), o lado esquerdo da equação pode ser escrito da forma

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k (kI + \mathscr{A})\xi^{k+\mathscr{A}-1} \tag{2.85}$$

e o lado direito escrito da forma

$$\begin{aligned} A(\xi)\Phi &= \sum_{k=-1}^{\infty} A_{k+1}\xi^k \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m \xi^{m+\mathscr{A}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=-1}^{k} A_{m-k+1}\Phi_k \right) \xi^{m+\mathscr{A}}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Comparando os termos de mesma potência m das equações (2.85) e (2.86), encontramos as seguintes possibilidades

1. **Caso** $m = -1$**:** As equações (2.85) e (2.86) se tornam

$$\Phi_0 \mathscr{A} \xi^{\mathscr{A}} = A_0 \Phi_0 \xi^{\mathscr{A}}, \tag{2.87}$$

Escolhendo Φ_0 como

$$\Phi_0 = I \ \text{ ou } \ \Phi_0 = \lambda I, \tag{2.88}$$

encontramos

$$\mathscr{A} = A_0, \tag{2.89}$$

coerente com o encontrado em (2.83).

2. **Caso $m \neq -1$:**
   Substituindo $\mathscr{A} = A_0$ em (2.85) e (2.86), temos

$$\Phi_m(mI + A_0) = A_0\Phi_m + \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k}\Phi_k,$$

$$m\,\Phi_m - (A_0\,\Phi_m - \Phi_m\,A_0) = \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k}\Phi_k, \tag{2.90}$$

$$m\,\Phi_m - [A_0, \Phi_m] = \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k}\Phi_k.$$

Em suma, temos para o caso Fuchsiano a solução

$$\Phi(z) = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \xi^k\right)\xi^{\Lambda_0}, \quad \Phi_0 = I \tag{2.91}$$

com os coeficientes Φ_k satisfazendo a relação de recursão (2.90).

2.7.3 Pontos singulares irregulares

Seja z_0 um ponto singular não-Fuchsiano da equação (2.19) escrita em série de potências como

$$\frac{d\Phi}{dz} = \left(\sum_{k=-r-1}^{\infty} A_{k+1}\,\xi^k\right)\Phi(z), \quad z \in D_{z_0} \setminus \{z_0\}, \tag{2.92}$$

onde A_k são matrizes constantes e $A_\infty \neq 0$. O número r é um inteiro positivo, chamado de *rank de Poincaré da singularidade* z_0. Se $r = 0$, recobramos o caso regular. Se $r > 0$, a singularidade é dita *irregular*. Assumiremos que a matriz A_{-r} tem autovalores distintos. Portanto, existe P matriz invertível tal que

$$P^{-1}A_{-r}P = \Lambda_{-r}, \quad \det P \neq 0, \tag{2.93}$$

$$\Lambda_{-r} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ para } i \neq j, \tag{2.94}$$

A primeira diferença entre o caso Fuchsiano e o caso irregular é a estrutura das soluções formais. Considere a equação

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{A_{-r}}{\xi^{r+1}}\Phi. \tag{2.95}$$

Integrando ambos lados, encontramos a seguinte solução

$$\Phi = P\exp\left\{\frac{\Lambda_{-r}}{r}|\xi|^{-r}\right\}. \tag{2.96}$$

O fator da exponencial indica a existência de uma singularidade essencial.

Teorema 10. *Sob as condições* (2.94), *a equação* (2.92) *tem uma única solução formal*

$$\Phi_f(z) = P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k\xi^k\right)e^{\Lambda(\xi)}, \quad \Phi_0 = I, \tag{2.97}$$

onde

$$\Lambda(\xi) = \sum_{k=-r}^{-1}\frac{\Lambda_k}{k}\xi^k + \Lambda_0 \ln \xi \tag{2.98}$$

onde Λ_k, $k = -r, ...0$ *são matrizes diagonais e a matriz* Λ_{-r} *é definida pelas condições* (2.94). *Os coeficientes* Φ_k *e* $\Lambda(\xi)$ *são determinadas recursivamente, via* (2.92), *como polinômios dos coeficientes das matrizes,* $k \geq -r$ *[55, 66]. Quando* $r = 0$, *recuperamos o caso Fuchsiano e o termo da exponencial se torna idêntico ao da equação* (2.91).

Segunda diferença é que a série (2.97) não converge. Na verdade, a solução formal $\Phi_f(z)$ da equação (2.97) representa o *limite assintótico* (ver Apêndice do capítulo) da solução genuína da equação (2.19), quando $z \longrightarrow z_0$. Para que isso aconteça, z deve pertencer a um setor contido em D_{z_0} com propriedades especiais.

2.7.4 Linhas de Stokes

Em qualquer discussão sobre equações diferenciais, levanta-se a questão da unicidade das soluções. No caso irregular, não temos as soluções genuínas da equação (2.19), então devemos introduzir as *linhas de Stokes*.

Suponha que a solução $\Phi(z)$ satisfaça o seguinte limite assintótico

$$\Phi(z) \sim \Phi_f(z), \quad z \longrightarrow z_0, \;\; z \in \Omega \tag{2.99}$$

para um dado setor Ω definido como

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < |\xi| < \rho, \;\; \theta_1 < \arg\xi < \theta_2\}. \tag{2.100}$$

Para determinar θ_1 e θ_2, suponha $\tilde{\Phi}(z)$ outra solução para mesma EDO (2.19) e que tenha a mesmo limite assintótico $\Phi_f(z)$ quando $z \longrightarrow z_0$. De acordo com a definição de fatores de automorfismo, existe uma matriz T constante que conecta as duas soluções

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z)T, \tag{2.101}$$

Como T é independente de z, temos $T = [\Phi(z)]^{-1}\tilde{\Phi}(z)$ e

$$T = \lim_{z \longrightarrow z_0}[\Phi(z)]^{-1}\tilde{\Phi}(z), \quad z \in \Omega. \tag{2.102}$$

Usando a equação (2.97), a equação acima pode ser escrita como

$$T = \lim_{\xi \longrightarrow 0} e^{-\Lambda(\xi)}\{I + O(\xi)\}e^{\Lambda(\xi)}, \quad \xi \in \Omega, \tag{2.103}$$

em componentes

$$T_{ij} = \lim_{\xi \longrightarrow 0} e^{\Lambda(\xi)_{jj} - \Lambda(\xi)_{ii}} \{\delta_{ij} + O(\xi)\}, \quad \xi \in \Omega. \tag{2.104}$$

Para que $\tilde{\Phi}(z)$ e $\Phi(z)$ coincidam e a solução de (2.19) seja única, T deve ser a matriz identidade, i.e,

$$T_{ij} = \delta_{ij}. \tag{2.105}$$

Para isso, o setor Ω deve conter ao menos um raio que satisfaça a seguinte relação

$$\mathrm{Re}\{(\lambda_i - \lambda_j)\xi^{-r}\} = 0, \quad \forall (i,j), i < j. \tag{2.106}$$

A matriz Λ em componentes é dada por

$$\Lambda_{ij} = \frac{\delta_{ij}\lambda_j}{\xi^r}, \tag{2.107}$$

Note também que dado um número complexo

$$z = x + iy,$$

para que a parte real seja nula, o número deve ser puramente imaginário, ou seja,

$$|z| = |\Im(z)| = |y|,$$

então z deve ter a seguinte forma

$$z = y\ e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}, \tag{2.108}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Voltando a equação (2.106), vemos que

$$\lambda_i - \lambda_j = Ae^{\left[i \arg(\lambda_i - \lambda_j)\right]}$$

$$\xi^{-r} = Be^{[-ir \arg \xi]}$$

onde $A = |\lambda_i - \lambda_j|$ e $B = |\xi^{-r}|$, então

$$(\lambda_i - \lambda_j)\xi^{-r} = \rho e^{i[\arg(\lambda_i - \lambda_j) - r \arg \xi]}. \tag{2.109}$$

usando (2.108) e (2.109), encontramos

$$\arg \xi = \frac{1}{r} \arg(\lambda_i - \lambda_j) + \frac{\pi}{r}\left(\frac{1}{2} + k\right). \tag{2.110}$$

Note que se $k = 2r$, as soluções começam a se repetir, portanto k deve assumir os seguintes valores

$$0 \leq k \leq 2r - 1, \tag{2.111}$$

Def 9. *Os raios de Stokes são as linhas no plano complexo que satisfazem*

$$l_k^{(i,j)} = \left\{ |\xi| < \rho\ ;\ \arg \xi = \frac{1}{r} \arg(\lambda_i - \lambda_j) + \frac{\pi}{r}\left(\frac{1}{2} + k\right) \right\}, \tag{2.112}$$

$$k = 0, 1, ..., 2r - 1,$$

Nessas linhas, (2.106) é satisfeita, então

$$T_{ii} = 1, \quad \forall j = 1, ..., n. \tag{2.113}$$

Para cada par (i, j), $i \neq j$, podemos escolher um caminho ao longo de $\xi = 0$ tal que

$$\mathrm{Re}\{(\Lambda(\xi))_{jj} - (\Lambda(\xi))_{ii}\} < 0, \tag{2.114}$$

e assim o termo exponencial de (2.104) decai. Neste caminho, temos

$$T_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j, \tag{2.115}$$

Juntando as condições (2.113) e (2.115), temos

$$T = I. \tag{2.116}$$

Def 10. *Um setor Ω que contém exatamente uma linha de Stokes da família*

$$\{l_k^{(i,j)}\}_{k=0}^{2r-1} \tag{2.117}$$

para cada par (i, j) é chamado de setor de Stokes no ponto $z = z_0$. Assim, a solução $\Phi(z)$ está unicamente determinada, neste setor, pelas condições assintóticas (2.99).

2.7.5 Soluções Canônicas

Seja o ângulo θ o argumento da diferença entre λ_i e λ_j

$$\theta = \arg(\lambda_i - \lambda_j). \tag{2.118}$$

De acordo com a definição de setor de Stokes, dado um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, qualquer setor da forma

$$\Omega = \{|\xi| < \rho \ \in \mathbb{C} \ ; \ \theta - \delta < \arg \xi < \theta + \frac{\pi}{r}\} \tag{2.119}$$

é um setor de Stokes. Portanto, o setor

$$\Omega = \{|\xi| < \rho \ \in \mathbb{C} \ ; \ \theta_1 < \arg \xi < \theta_2\}, \tag{2.120}$$

com

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{r} + \delta, \tag{2.121}$$

também é um setor de Stokes, assim como todos os setores Ω_k

$$\Omega_k = e^{i\frac{\pi}{r}(k-1)}\Omega \tag{2.122}$$

$$\Omega_k = \left\{\xi \mid 0 < |\xi| < \rho, \ \theta_1 + \frac{\pi}{r}(n-1) < \arg \xi < \theta_2 + \frac{\pi}{r}(n-1))\right\}, \quad k = 1, ..., 2r, \tag{2.123}$$

Note que

$$\Omega_k = e^{i\frac{\pi}{r}(k-m)}\Omega_m, \tag{2.124}$$

portanto

$$\Omega_1 = \Omega_{2r+1},$$

então o disco perfurado $D_{z_0} \setminus \{z_0\}$ pode sempre ser coberto por $2r$ setores de Stokes.

Para cada setor Ω_k, existe uma única solução Φ_k da equação (2.92) que satisfaz a seguinte condição assintótica

$$\Phi_k(z) \sim \Phi(z), \quad z \longrightarrow z_0, \quad z \in \Omega_k \tag{2.125}$$

$$k = 1, ..., 2r.$$

As funções $\Phi_k(z)$ são chamadas de *soluções canônicas* da (2.92) no ponto irregular z_0.

Observe que, mesmo que os setores satisfaçam

$$\Omega_1 = \Omega_{2r+1}, \tag{2.126}$$

as soluções canônicas não, i.e,

$$\Phi_1(z) \neq \Phi_{2r+1}(z). \tag{2.127}$$

Na verdade, temos

$$\Phi_{2r+1}(z) = \Phi_1(z)e^{2\pi i\Lambda_0}. \tag{2.128}$$

2.7.6 Matrizes de Stokes e Fenômeno de Stokes

Def 11. *Dada as soluções fundamentais Φ_k e Φ_{k+1} da mesma EDO, existe uma matriz constante S_k tal que*

$$S_k = \Phi_k^{-1}(z)\Phi_{k+1}(z), \quad k = 1, ..., 2r \tag{2.129}$$

independente de z. Essas matrizes são denominadas matrizes de Stokes *e suas entradas não-nulas são os* multiplicadores de Stokes.

As matrizes de Stokes *não são trivialmente a matriz identidade*, diferente da matriz T discutida anteriormente. De fato, Φ_k e Φ_{k+1} estão definidas em setores diferentes, logo apenas podemos compará-las na interseção $\Omega_k \cap \Omega_{k+1}$. Na interseção dos setores, não existe linhas de Stokes, portanto as condições (2.106) e (2.114) não são satisfeitas.

Def 12. *Dado o conjunto de setores de Stokes $\{\Omega_k\}_{k=1}^{2r+1}$, a coleção de dados*

$$SPh_{z_0} = \{\Lambda_{-r}, \Lambda_{-r+1}, ..., \Lambda_{-1}, \Lambda_0; \ S_1, ..., S_{2r}\} \tag{2.130}$$

é determinada unicamente via os coeficientes da matriz $A(z)$, dada a matriz de transição P definida em (2.94). O conjunto (2.130) é chamado de fenômeno de Stokes da equação (2.92) correspondente ao ponto irregular z_0.

O fenômeno de Stokes SPh_{z_0} caracteriza totalmente o comportamento local da solução de um sistema linear na vizinhança de uma singularidade irregular. Além disso, se dois sistemas compartilharem do mesmo fenômeno de Stokes, eles serão equivalentes. De fato, suponha dois sistema lineares

$$\frac{d\Phi}{dz} = A(z)\Phi \tag{2.131}$$

e

$$\frac{d\Phi}{dz} = B(z)\Phi \tag{2.132}$$

que possuem o mesmo ponto singular $z_0 \in \mathbb{C}P^1$ irregular de mesmo rank de Poincaré $r > 0$. Além disso, suponha que

$$SPh_{z_0}(A) = SPh_{z_0}(B). \tag{2.133}$$

Com essas condições, os sistemas são localmente equivalentes de gauge, i.e,

$$B(z) = g(z)A(z)g^{-1}(z) + \frac{dg}{dz}g^{-1}, \tag{2.134}$$

ou equivalentemente, existe

$$\Psi(z) = g(z)\Phi(z) \tag{2.135}$$

para alguma matriz $g(z)$ holomoforma e invertível no disco D_{z_0}, logo os dois sistemas são compatíveis.

2.8 Apêndice: Exponencial de Matrizes

Def 13. *A exponencial de uma matriz A é definida como a série de Taylor*

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k. \tag{2.136}$$

Sejam A e B matrizes que comutam, i.e,

$$AB = BA, \tag{2.137}$$

então a igualdade

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B \tag{2.138}$$

é válida. Seja S uma matriz invertível, então

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}(\exp A)S. \tag{2.139}$$

Def 14. *O **espectro de uma matriz** A é o conjunto de números λ_j, chamados **autovalores** ou **valores característicos**, raízes da **equação característica***

$$\mathrm{Det}[\lambda I - A] = 0. \tag{2.140}$$

Os λ_i's podem ter multiplicidade $r \neq 1$.

Def 15. *O resolvente da matriz A, $R(\lambda,A)$, é a matriz inversa de $\lambda I - A$, i.e,*

$$R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}. \tag{2.141}$$

Logo, $R(\lambda,A)$ é uma matriz racional com pólos em λ_i.

Suponha $\lambda = a$ um autovalor com multiplicidade r. O resolvente então tem a forma

$$R(\lambda,A) = \frac{P}{\lambda - a} + \frac{N}{(\lambda - a)^2} + ... + \frac{N^{r-1}}{(\lambda - a)^r}. \tag{2.142}$$

A matriz P é chamada de **projeção** e satisfaz

$$P^2 = P \tag{2.143}$$

e N é uma matriz nilpotente, tal que

$$N^{r-1} \neq 0,\ N^r = 0. \tag{2.144}$$

No caso de vários λ_i's, o resolvente se escreve como

$$R(\lambda,A) = \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \frac{N_i}{(\lambda - \lambda_i)^2} + ... + \frac{N^{r_i - 1}}{(\lambda - \lambda_i)^{r_i}} \right] \tag{2.145}$$

onde r_i são as multiplicidades do autovalor λ_i.

O número de projetores é igual ao número de λ_i's distintos e eles satisfazem as equações

$$P_1 + ... + P_p = I,\ \ P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \tag{2.146}$$

conhecida como resolução da identidade. Além disso

$$A = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_p P_p + N_1 + ... + N_p. \tag{2.147}$$

Note que

$$P_i N_j = N_j P_i = \delta_{ij} N_j,\quad N_i N_j = 0, i \neq j. \tag{2.148}$$

Com essas informações, podemos escrever a matriz $\exp(zA)$ como

$$\exp(zA) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i z} \left[P_i + N_i z + \frac{N_i^2}{2!} z^2 + ... + \frac{N^{r_i - 1}}{(r_j - 1)!} z^{r_j - 1} \right], \tag{2.149}$$

substituindo $z = \log u$, obtemos a expressão para u^A

$$u^A = \sum_{i=1}^{p} u^{\lambda_i} \left[P_i + N_i \log u + \frac{N_i^2}{2!} (\log u)^2 + ... + \frac{N^{r_i - 1}}{(r_j - 1)!} (\log u)^{r_j - 1} \right]. \tag{2.150}$$

2.9 Apêndice 2: Séries Assintóticas

Vamos considerar expansões em torno da origem, sem perda de generalidade. Seja S um setor

$$S = \{z \in \mathbb{C} | \theta_1 < \arg z < \theta_2, 0 < |z| < R\}. \tag{2.151}$$

Se $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1 > 2\pi$, S é um setor de uma superfícies de Riemann multifolhada.

Def 16. *Uma série de potências, em geral divergente, é uma* expansão assintótica *de $f(z)$ em S se*

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\left[f(z) - \sum_{k=0}^{N} f_k z^k\right]}{z^N} = 0 \tag{2.152}$$

para todo $N \geq 0$.

Essa afirmação é expressa pela notação

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{N} f_k z^k. \tag{2.153}$$

Portanto, existe um número infinito de funções que possuem a mesma expansão assintótica em S. Conhecer uma expansão assintótica não é suficiente para determinar a função $f(z)$, mesmo que ela convirja em S. O símbolo $\sim$ permite adição de ambos lados, multiplicação, composição, inversa, sem restrição. Integração também é válida. Se a abertura do ângulo θ_{12} em S não for nula, então diferenciação também é válida dentro de um subsetor próprio de S.

Se $f(z)$ for analítica em S, então a série de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \tag{2.154}$$

é a série assintótica de $f(z)$ em S.

Considere agora uma função $f(z,t)$ de duas variáveis z e t, analítica em z. Seja T uma região limitada e fechada no plano complexo t. Assuma que, para cada t fixo em T, $f(z,t)$ admite a expansão assintótica

$$f(z,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) z^k, \tag{2.155}$$

isso significa que

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\left[f(z,t) - \sum_{k=0}^{N} f(t)_k z^k\right]}{z^N} = 0 \tag{2.156}$$

para todo $N \geq 0$ e todo $t \in T$. Se a convergência de (2.156) é uniforme em t, para todo $t \in T$, então dizemos que *a expansão assintótica* (2.155) *é uniforme em t*. Com isso podemos definir a derivada de $f(z,t)$ com respeito a t como

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d f_k(t)}{dt} z^k. \tag{2.157}$$

CAPÍTULO 3

Isomonodromia

No capítulo anterior, revisamos a teoria de sistema de equações diferenciais de primeira ordem sob uma esfera de Riemann com uma singularidade z_0. Neste capítulo, generalizamos o caso do capítulo anterior para m singularidades, $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{m}$. Em seguida, descreveremos o método de Isomonodromia.

3.1 Sistema de EDOs com m singularidades

3.1.1 Notação

Defina a variável ξ_ν como

$$\xi_\nu = \begin{cases} z - a_\nu, & a_\nu \neq \infty \\ 1/z, & a_\nu = \infty \end{cases}, \tag{3.1}$$

com $\nu = 1, \ldots, m$. Toda a discussão do capítulo anterior será generalizada para m singularidades.

A expansão em série de Laurent da matriz $A(z)$ em torno da singularidade a_ν é dada por

$$A(z) = \left(\sum_{k=-r_\nu-1}^{\infty} A_{k+1}^{(\nu)} \, \xi_\nu^k \right) \frac{d\xi_\nu}{dz}, \quad z \in D_{a_\nu} \setminus \{a_\nu\}. \tag{3.2}$$

Note que os coeficientes da matriz agora são representados por

$$A_k \longrightarrow A_k^{(\nu)},$$

e rank de Poincaré associado à singularidade a_ν é dado por

$$r \longrightarrow r_\nu,$$

com $r_\nu = 0$ se a_ν for regular e $r_\nu > 0$ se for irregular.

O coeficiente da série de Laurent associado ao termo

$$\frac{1}{(z - a_\nu)^{r_\nu+1}} \tag{3.3}$$

é agora denotado por

$$A_{-r} \longrightarrow A_{-r_\nu}^{(\nu)}.$$

Suponha que cada $A_{-r_\nu}^{(\nu)}$ admita uma forma de Jordan, i.e, existe matriz $P_\nu \in GL(N,\mathbb{C})$ tal que

$$P_\nu^{-1} A_{-r_\nu}^{(\nu)} P_\nu = \Lambda_{-r_\nu}^{(\nu)}, \quad \mathrm{Det} P_\nu \neq 0. \tag{3.4}$$

Portanto, a matriz de diagonalização (2.81), do capítulo anterior, agora também depende do índice ν,

$$P \longrightarrow P_\nu.$$

3.1.2 Estudo das singularidades

Para m singularidades, existe as seguintes possibilidades:

1. Se o caso for *regular*, $r_\nu = 0$, $\Lambda_0^{(\nu)}$ ou admite uma forma de bloco de Jordan

$$\Lambda_0^{(\nu)} = \alpha I + J, \tag{3.5}$$

onde J é uma matriz nilpotente, i.e,

$$J_{ij} = \delta_{i+1,j}, \quad J^N = 0, \tag{3.6}$$

ou é diagonalizável com autovalores distintos módulo inteiro não-nulo

$$(\Lambda_0^{(\nu)})_{ij} = \lambda_i^{(\nu)} \delta_{ij}, \quad \lambda_i^{(\nu)} - \lambda_j^{(\nu)} \notin \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

O conjunto de soluções canônicas em torno de a_ν consiste em uma única função $\Phi^{(\nu)}(z)$ definida pela equação

$$\Phi^{(\nu)}(z) = P_\nu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\Phi}_j^{(\nu)} \xi_\nu^j \right) \xi_\nu^{\Lambda_0^{(\nu)}}, \quad \hat{\Phi}_0^{(\nu)} = I \tag{3.8}$$

Os dados de monodromia correspondentes às singularidades regulares a_ν são os expoentes de monodromia

$$\Lambda_0^{(\nu)}, \ \nu = 1, ..., m.$$

2. Se o caso for *irregular*, $r_\nu > 0$, $\Lambda_{-r_\nu}^{(\nu)}$ é uma matriz diagonal com autovalores distintos

$$(\Lambda_{-r_\nu}^{(\nu)})_{ij} = \lambda_i^{(\nu)} \delta_{ij}, \quad \lambda_i^{(\nu)} \neq \lambda_j^{(\nu)}, \quad i \neq j. \tag{3.9}$$

O conjunto de setores de Stokes centrados em a_ν é dado por

$$\Omega_k^{(\nu)} = \left\{ \xi_\nu \ , \ 0 < |\xi_\nu| < \rho, \ \theta_\nu + \frac{\pi}{r_\nu}\left(k - \frac{1}{2}\right) < \arg \xi_\nu < \theta_\nu + \frac{\pi}{r_\nu}\left(k_\nu + \frac{1}{2}\right) \right\},$$

com

$$k = 1, ..., 2r_\nu + 1.$$

O conjunto de soluções canônicas consiste em $2r_\nu+1$ funções $\Phi_k^{(\nu)}(z)$, $k=1,...,2r_\nu+1$, definida pelas seguintes condições assintóticas

$$\Phi_n^{(\nu)}(z) \sim P_\nu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j^{(\nu)} \xi_\nu^j \right) \xi_\nu^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)},$$

$$\Phi_0^{(\nu)} = I, \tag{3.10}$$

$$z \in \Omega_k(\nu), \;\; z \longrightarrow a_\nu,$$

com $\Lambda^{(\nu)}(\xi)$ definida por

$$\Lambda^{(\nu)}(\xi) = \sum_{k=-r_\nu}^{-1} \frac{\Lambda_k^{(\nu)}}{k} \xi^k + \Lambda_0^{(\nu)} \ln \xi, \tag{3.11}$$

onde as matrizes $\Lambda_k^{(\nu)}$, $k=-r_\nu,...,0$, são definidas pela equação (3.4).

Temos a seguinte condição de contorno para cada $\Phi_k^{(\nu)}(z)$

$$\Phi_{2r_\nu+1}^{(\nu)}(z) = \Phi_1^{(\nu)}(z) e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}}. \tag{3.12}$$

Os dados de monodromia local correspondentes às singularidades irregulares a_ν são dados pelo Fenômeno de Stokes

$$SPh^{(\nu)} = \{\Lambda_{-r_\nu}^{(\nu)}, \Lambda_{-r_\nu+1}^{(\nu)}, ..., \Lambda_0^{(\nu)}; S_1^{(\nu)}, ..., S_{2r_\nu}^{(\nu)}\}. \tag{3.13}$$

Note que as matrizes de Stokes agora possuem o índice ν, associando-as às singularidades a_ν

$$S_k \longrightarrow S_k^{(\nu)}, \tag{3.14}$$

com

$$\Phi_{k+1}^{(\nu)}(z) = \Phi_k^{(\nu)}(z) S_k^{(\nu)}, \tag{3.15}$$

$$z \in \Omega_k^{(\nu)} \cap \Omega_{k+1}^{(\nu)}$$

3.1.3 Matrizes de Conexão

Fixando a condição inicial $\Phi_0 \in GL(M,\mathbb{C})$ e seja $\Phi(z)$ a solução fundamental de (2.19) determinada pelo par $\{a_0, \Phi_0\}$, i.e,

$$\Phi(a_0) = \Phi_0.$$

Cada uma das funções $\Phi(z)$, $\Phi^{(\nu)}(z)$, e $\Phi_k^{(\nu)}(z)$ é solução da mesma EDO, portanto, elas diferem apenas por uma matriz constante, chamada *Matriz de Conexão*:

Def 17. *As matrizes de conexão E_ν são matrizes constantes definidas pela equação*

$$\Phi(z) = \Phi^{(\nu)}(z)E_\nu, \tag{3.16}$$

se a_ν é um ponto singular regular, e pela equação

$$\Phi(z) = \Phi_1^{(\nu)}(z)E_\nu, \tag{3.17}$$

se a_ν é um ponto singular irregular.

3.1.4 Dados de monodromia global

Pode-se organizar todas as informações sobre a monodromia em um conjunto denominado *Dados de monodromia local* da equação (2.19), definido como

$$\mathbb{M} = \{a_1, ..., a_m; \Lambda_0^{(1)}, ..., \Lambda_0^{(p)}; SPh^{(p+1)}, ..., SPh^{(m)}; E_1, ..., E_m\}, \tag{3.18}$$

onde os pontos singulares a_ν foram ordenados de forma que os pontos singulares regulares, se existirem, $a_1, ..., a_p$, $0 < p < m$. Se $p = m$, então não há pontos singulares irregulares e a outra parte do conjunto, os fenômenos de Stokes, não existe. Os termos E_ν, $\nu = 1, ..., m$ são as matrizes de conexão.

3.2 Grupo de Monodromia

Def 18. *O **grupo de monodromia** do sistema linear* (2.19) *é definido como a representação do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_\nu\}_{\nu=1}^m)$.*

Fixe um ponto base $a_0 \in (\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_\nu\}_{\nu=1}^m$. Seja uma matriz $\Phi_0 \in GL(N, \mathbb{C})$ tal que $\Phi(a_0) = \Phi_0$. Podemos continuar analiticamente $\Phi(z)$ ao longo de um loop $\gamma \in \pi_1$,

$$\Phi(z) \longrightarrow \Phi_\gamma(z). \tag{3.19}$$

Como ambas funções satisfazem (2.19), pela equação (2.33), a transformação (3.19) resulta em uma multiplicação matricial, constante em z, pela direita

$$\Phi_\gamma(z) = \Phi(z)M. \tag{3.20}$$

Como fixamos o ponto a_0 e Φ_0, a matriz M depende apenas do loop γ,

$$M = M(\gamma),$$

então a correspondência

$$\gamma \mapsto M(\gamma) \tag{3.21}$$

é uma representação linear de $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_\nu\}_{\nu=1}^m$.

Sejam $\gamma_1, ..., \gamma_m$ loops geradores do grupo fundamental de π_1, onde cada γ_ν representa um loop em torno do ponto a_ν. Então as matrizes

$$M_\nu = M(\gamma_\nu), \quad \nu = 1, 2, ..., m \tag{3.22}$$

formam um conjunto de geradores do grupo de monodromia.

*Conclusão: As matrizes de monodromia são os fatores de automorfismo e portanto formam um grupo chamado **Grupo de monodromia**.*

Como o produto de todas as curvas γ_ν é homotópico ao ponto a_0, i.e,

$$\gamma_1 ... \gamma_m \sim \{a_0\}, \tag{3.23}$$

então as matrizes de monodromia satisfazem a relação cíclica

$$M_m....M_1 = I \tag{3.24}$$

3.2.1 Soluções

3.2.2 Caso regular

Suponha que a matriz $A(z)$ tenha apenas polos simples e assuma que o m-ésima singularidade seja no infinito, i.e, $a_m = \infty$. Portanto, podemos escrever a equação (2.19) como

$$\frac{d\Phi}{dz} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{A_\nu}{z - a_\nu}, \tag{3.25}$$

com

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu = 0. \tag{3.26}$$

Sejam M_ν matrizes de monodromia, $\Lambda_0^{(\nu)}$ formas canônicas de Jordan e E_ν matrizes de conexão. A solução $\Phi(z)$ pode ser escrita em torno de a_ν como

$$\begin{gathered} \Phi(z) = P_\nu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{j=0}^{(\nu)} (z - a_\nu)^j \right) (z - a_\nu)^{\Lambda_0^{(\nu)}} E_\nu, \\ \Phi_0 = I, \\ z - a_\nu \longrightarrow z^{-1}, \text{ caso } \nu = m. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Continuando analiticamente a solução (3.27) em um loop centrado em a_ν, obtemos

$$\Phi((z - a_\nu)e^{2\pi i} + a_\nu) = P_\nu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{j=0}^{(\nu)} (z - a_\nu)^j \ e^{2\pi i j} \right) (z - a_\nu)^{(\Lambda_0^{(\nu)}} \ e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}} E_\nu,$$

$$= \Phi(z) E_\nu^{-1} e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}} E_\nu. \tag{3.28}$$

Comparando as equações (3.28) e (3.20), encontramos

$$M_\nu = E_\nu^{-1} e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}} E_\nu, \ \ \nu = 1, ..., m. \tag{3.29}$$

3.2.3 Caso Irregular

No caso irregular, temos $r_\nu \geq 1$. Além dos dados anteriores, precisa-se das matrizes de Stokes $S_n^{(\nu)}$ para descrever completamente a solução $\Phi(z)$ em termos de $\Phi_1(\nu)(z)$. O cálculo das matrizes de monodromia segue o mesmo argumento que (3.28), porém, lembremos que

$$\Phi(z) = \Phi_1^{(\nu)}(z)E_\nu,$$

$$\Phi_k^{(\nu)}(z) = \Phi_1^{(\nu)}(z)S_1^{(\nu)}...S_{k-1}^{(\nu)},$$

portanto

$$\Phi(z) = \Phi_n^{(\nu)}(z)[S_{k-1}^{(\nu)}]^{-1} \, ... \, [S_1^{(\nu)}]^{-1}E_\nu. \;\; k \geq 3 \tag{3.30}$$

Quando realizamos o loop em torno da singularidade a_ν, $\Phi(z)$ se transforma da forma

$$\Phi((z-a_\nu)e^{2\pi i} + a_\nu) = \Phi_{2r_\nu+1}^{(\nu)}(z)[S_{2r_\nu}^{(\nu)}]^{-1} \, ... \, [S_1^{(\nu)}]^{-1}E_\nu.$$

Por outro lado

$$\Phi_{2r_\nu+1}(\nu) = \Phi_1^{(\nu)}(z)\; e^{2\pi i\Lambda^{(\nu)}}, \tag{3.31}$$

então

$$\Phi((z-a_\nu)e^{2\pi i} + a_\nu) = \Phi_1^{(\nu)}(z)\; e^{2\pi i\Lambda^{(\nu)}}[S_{2r_\nu}^{(\nu)}]^{-1} \, ... \, [S_1^{(\nu)}]^{-1}E_\nu, \tag{3.32}$$

$$= \Phi(z)\; E_\nu^{-1}\; e^{2\pi i\Lambda^{(\nu)}}[S_{2r_\nu}^{(\nu)}]^{-1} \, ... \, [S_1^{(\nu)}]^{-1}E_\nu. \tag{3.33}$$

Comparando as equações (3.32) e (3.20), encontramos

$$M_\nu = E_\nu^{-1}\; e^{2\pi i\Lambda^{(\nu)}}[S_{2r_\nu}^{(\nu)}]^{-1} \, ... \, [S_1^{(\nu)}]^{-1}E_\nu. \tag{3.34}$$

3.3 Problema Direto e Inverso: Problema de Riemann-Hilbert

O foco principal da teoria global de sistemas de EDOs lineares com coeficientes racionais é a análise dos mapas direto,

$$\mathscr{A} \mapsto \mathscr{M}, \tag{3.35}$$

e inverso,

$$\mathscr{M}_e \mapsto \mathscr{A}, \tag{3.36}$$

associado à equação (2.19). O problema de Riemann-Hilbert, também conhecido como vigésimo primeiro problema de Hilbert, consiste em provar a existência de um sistema Fuchsiano dado um conjunto $\{a\}_{\nu=1,...,m}$ de pontos singulares regulares e dado grupo monodromia. Birkhoff generalizou o problema de Riemann-Hilbert para equações não-fuchsianas, provando a existência de uma EDO linear da forma (2.19) dado um conjunto $\{a\}_{\nu=1,\ldots,m}$ de pontos singulares, regulares ou não, dado grupo monodromia e o dado fenômeno de Stokes em cada ponto singular irregular.

Seja

$$\mathscr{A} = \{A(z)\} \tag{3.37}$$

o conjunto de todas as matrizes racionais com m pólos e multiplicidade r para cada polo. Seja também

$$\mathscr{M}_e = \{\mathbb{M}\}, \tag{3.38}$$

o conjunto de dados de monodromia do sistema de EDO (2.19).

Teorema 11. *O mapa*

$$A(z) \in \mathscr{A} \mapsto \mathbb{M} \in M_e, \tag{3.39}$$

é injetivo.

Para demonstrar, sejam $A(z), B(z) \in \mathscr{A}$ e suponha que

$$\mathbb{M}(A(z)) = \mathbb{M}(B(z)). \tag{3.40}$$

Sejam $\Psi(z)$ e $\Phi(z)$ soluções fundamentais das equações

$$\frac{d\Psi}{dz} = A(z)\Psi \tag{3.41}$$

e

$$\frac{d\Phi}{dz} = B(z)\Phi \tag{3.42}$$

respectivamente. Considere a matriz

$$g(z) = \Phi(z)\Psi^{-1}(z). \tag{3.43}$$

A função matricial $g(z)$ possui as mesmas propriedades analíticas que as $\Psi(z)$ e $\Phi(z)$. A relação (3.40) implica que as equações (3.41) e (3.42) possuem exatamente o mesmo grupo de monodromia, i.e, as funções $\Psi(z)$ e $\Phi(z)$ são multiplicadas à direita pela mesma matriz M_ν quando continuadas analiticamente em torno da singularidade a_ν. Portanto, a função $g(z)$ é monovalorada no espaço base $X = \mathbb{C}P^1 \setminus \{a_\nu\}_{\nu=1}^m$. Na verdade, as singularidades de (3.41) e (3.42) são canceladas quando combinadas na função $g(z)$. Então, cada ponto a_ν é uma singularidade removível de $g(z)$. Como ambas funções são normalizadas pelo mesmo par $\{a_0, \Psi_0\}$, conclui-se que $g(z) = I$. Em outras palavras,

$$\Psi(z) = \Phi(z), \tag{3.44}$$

implicando $A(z) \equiv B(z)$.

Com esse teorema, concluímos que o sistema linear (2.19) é unicamente determinado por seus dados de monodromia estendidos.

3.4 Exemplos

3.4.1 Dois pontos regulares

Seja o sistema

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{A_0}{z}\Phi \tag{3.45}$$

onde $z = 0$ é uma singularidade. Fazendo a transformação

$$w \longrightarrow \frac{1}{z},$$

então

$$\frac{d}{dz} = \frac{dw}{dz}\frac{d}{dw} = -w^2\frac{d}{dw}.$$

Com isso

$$z = \infty \longrightarrow w = 0$$

e

$$\frac{d\Phi}{dw} = wA_\infty\Phi, \;\; A_\infty = -A_0, \tag{3.46}$$

então o ponto $z = \infty$ também é uma singularidade regular.

Uma solução fundamental $\Phi(z)$ possível é

$$\Phi(z) = z^{A_0}.$$

Quando continuamos analiticamente em torno do ponto singular, $\Phi(z)$ se transforma da forma

$$\Phi(ze^{2\pi i}) = z^{A_0}e^{2\pi iA_0} = \Phi(z)M_0. \tag{3.47}$$

Pela relação cíclica (3.24), temos

$$M_0 = [M_\infty]^{-1} = e^{2\pi iA_0}. \tag{3.48}$$

3.4.2 Três pontos regulares

Seja a equação

$$\frac{d\Phi}{dz} = \left[\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1}\right]\Phi. \tag{3.49}$$

com $z = 0, 1$ e ∞ singularidades regulares.

Pelo resultado (2.65), podemos escolher $\mathrm{Tr}A(z) = 0$. Além disso, temos a liberdade de gauge para normalizar em relação a matriz de monodromia no infinito

$$\Lambda_\infty = A_\infty = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

As matrizes A_0, A_1 e $A_\infty = -A_0 - A_1$ possuem autovalores não-nulos, na forma de Jordan

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \ \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

A forma geral das matrizes A_0 e A_1 é

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

Aplicamos as seguintes condições para fixar os parâmetros

1. **Condição 1:** $\mathrm{Tr} A_\nu = 0$

$$\begin{aligned} a + d &= 0 \\ e + h &= 0 \end{aligned}$$

então

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & -e \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

2. **Condição 2:** $A_0 + A_1 + A_\infty = 0$

$$\begin{aligned} a + e &= -\gamma \\ f + b &= 0 \\ c + g &= 0 \end{aligned}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma - a & -b \\ -c & \gamma + a \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

3. **Condição 3: Ao diagonalizar A_0 e A_1, temos que obter os autovalores correspondentes.**

Denotemos $a = w$. Ao diagonalizar A_0, encontramos

$$\mathrm{Det} \begin{vmatrix} w - \alpha & b \\ c & -w - \alpha \end{vmatrix} = 0, \tag{3.55}$$

$$bc = w^2 - \alpha^2 = (w + \alpha)(w - \alpha).$$

Podemos escolher

$$\begin{aligned} b &= -u(w - \alpha), \\ c &= \frac{1}{u}(w + \alpha). \end{aligned}$$

Assim,

$$A_0 = \begin{pmatrix} w & -u(w-\alpha) \\ \frac{1}{u}(w+\alpha) & -w \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma - z & u(w-\alpha) \\ -\frac{1}{u}(w+\alpha) & \gamma + w \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Como os autovalores de A_1 são $\pm\beta$, então temos

$$w = \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{2\gamma}. \tag{3.57}$$

Vemos que as matrizes são parametrizadas por 4 quantidades, α, β, γ, u, dando

$$\dim \mathscr{A} = 4. \tag{3.58}$$

Por outro lado, usando

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr} A_\nu = 0 \Rightarrow \mathrm{Det} M_\nu = I, \quad \nu = 0, 1, \infty, \\ M_\infty \, M_1 \, M_0 = I, \\ M_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \gamma} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \gamma} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.59}$$

Com essas equações, vemos que o número de parâmetros livres do grupo de monodromia é 4, logo

$$\dim \mathscr{M}_e = 4,$$

portanto

$$\dim \mathscr{A} = \dim \mathscr{M}.$$

Então, existe um mapa bijetivo entre os pontos singulares e os dados de monodromia.

3.4.3 Quatro pontos regulares

Seja a equação

$$\frac{d\Phi}{dz} = \left[\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-t} \right] \Phi, \tag{3.60}$$

com $z = 0, 1, t$ e ∞ singularidades regulares.

Podemos escolher $\mathrm{Tr} A(z) = 0$ e as matrizes A_0, A_1, A_2 e $A_\infty = -A_0 - A_1 - A_2$ possuem autovalores não-nulos, na forma de Jordan

$$\Lambda_0^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \theta_\nu & 0 \\ 0 & -\theta_\nu \end{pmatrix}, \quad \nu = 0, 1, 2, \infty. \tag{3.61}$$

Usando a liberdade de gauge para normalizar em relação a matriz, temos

$$\Lambda_\infty = A_\infty = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

A forma geral das matrizes A_0, A_1 e A_t são

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

1. **Condição 1:** $\mathrm{Tr}A_\nu = 0$ Temos

$$a+d=0,$$

$$e+h=0,$$

$$p+s=0,$$

então

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & -e \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

2. **Condição 2:** $A_0 + A_1 + A_2 + A_\infty = 0$

$$a+e+p=-\delta,$$

$$f+b+q=0,$$

$$c+g+r=0.$$

Redefinindo os parâmetros

$$a \equiv w_0, \;\; e \equiv w_1, \;\; p \equiv w_2,$$

temos

$$A_0 = \begin{pmatrix} w_0 & b \\ c & -w_0 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} w_1 & f \\ g & -w_1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} w_2 & q \\ r & -w_2 \end{pmatrix}.$$

3. **Condição 3: Ao diagonalizar, temos que obter os autovalores correspondentes.**

Ao diagonalizar A_0, encontramos

$$bc = w_0^2 - \theta_0^2 = (w_0+\theta_0)(w_0-\theta_0).$$

Podemos escolher

$$b = -u_0(w_0-\theta_0),$$

$$c = \frac{1}{u_0}(w_0+\theta_0).$$

Logo, A_0 tem a forma

$$A_0 = \begin{pmatrix} w_0 & -u_0(w_0-\theta_0) \\ \frac{1}{u_0}(w_0+\theta_0) & -w_0 \end{pmatrix}.$$

Pelo mesmo raciocínio, podemos encontrar então a fórmula geral para todas as matrizes

$$A_\nu = \begin{pmatrix} w_\nu & -u_\nu(w_\nu - \theta_\nu) \\ \frac{1}{u_\nu}(w_\nu + \theta_\nu) & -w_\nu \end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

com $\nu = 0, 1, 2, \infty$.

O conjunto $\{A_\nu\}$, $\nu = 0, 1, 2, \infty$, são parametrizadas por dez parâmetros

$$\delta, \ w_\nu, \ u_\nu, \ \theta_\nu, \ \nu = 0, 1, 2$$

e possui duas equações de vínculo

$$\sum_{\nu=0}^{2} u_\nu(w_\nu - \theta_\nu) = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{2} \frac{1}{u_\nu}(w_\nu + \theta_\nu) = 0,$$

somando um total de 8 parâmetros, então

$$\dim \mathscr{A} = 8. \tag{3.66}$$

Por outro lado, usando

$$\mathrm{Tr} A_\nu = 0 \Rightarrow \mathrm{Det} M_\nu = I, \ \ \nu = 0, 1, 2, \infty,$$

$$M_\infty \, M_2 \, M_1 \, M_0 = I, \tag{3.67}$$

$$M_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \delta} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \delta} \end{pmatrix},$$

vemos que o número de parâmetros livres do grupo de monodromia é sete, logo

$$\dim \mathscr{M}_e = 7$$

portanto

$$\dim \mathscr{A} + 1 = \dim \mathscr{M}_e.$$

Esta é a principal diferença entre o caso anterior. Existe uma defasagem na contagem de parâmetros, portanto o mapa

$$\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{M}_e \tag{3.68}$$

não é mais injetivo. É o primeiro encontro com um caso onde precisa-se do método de isomonodromia.

3.5 Método de Isomonodromia

A teoria das deformações isomonodrômicas estuda a família de equações (2.19) que têm os mesmos dados de monodromia. Começou com o problema de classificar equações da forma

$$u_{zz} = R(z, u, u_z), \tag{3.69}$$

onde

$$u_z \equiv \frac{du}{dz},\ u_{zz} \equiv \frac{d^2u}{dz^2} \tag{3.70}$$

e $R(z, u, u_z)$ função analítica em z, racional em u e u_z. As soluções apresentavam a *Propriedade de Painlevé*: as soluções são livres de pontos críticos removíveis, i.e, a localização dos pontos de ramificação não dependem das condições iniciais.

A lista completa de equações com esta propriedade foi apresentada por Gambier e Garnier[60, 61], existindo apenas 50 [69]. Cada uma pode ser integrada em termos das funções conhecidas (hipergeométrica, seno, elíptica, etc) ou mapeada para um conjunto de seis equações, que não são integráveis por funções conhecidas. Essas seis equações especiais são as chamadas *equações de Painlevé*.

Riemann foi o primeiro a introduzir o conceito de deformação de uma equação diferencial linear ordinária preservando a representação do grupo de monodromia. O problema proposto foi resolvido após sua morte, por Schlesinger [112], Fuchs [59], e Garnier [61]. A ideia é associar à equação diferencial inicial não-linear da forma (3.70) a um certo sistema linear

$$\frac{d\Phi}{dz} = A(z, t, u, u_z)\Phi \tag{3.71}$$

com $A(z, t, u, u_z)$ uma matriz racional em z. [1]

As deformações dos coeficientes ao variar t é tal que os dados de monodromia do sistema (2.19) são conservados. Por exemplo, a Painlevé II

$$u_{zz} - zu - 2u^3 = \nu \tag{3.72}$$

está associada ao sistema

$$\frac{d\Phi}{dz} = \begin{pmatrix} -4iz^2 - it - 2iu^2 & 4izu - 2u_z - \frac{i\nu}{z} \\ -4izu - 2u_z + \frac{i\nu}{z} & 4iz^2 + it + 2iu^2 \end{pmatrix} \Phi \tag{3.73}$$

Portanto, os dados de monodromia da equação linear (2.19) representam as primeiras integrais da equação diferencial não-linear (3.70). Então, o problema de resolver esta equação é substituído pelo problema de encontrar os mapas direto (3.35) e inverso (3.36).

Por simplicidade, denotaremos

$$A(z) \longrightarrow A(z, t), \tag{3.74}$$

onde t

$$t = (t_1, ..., t_q),\ \ \geq 1,\quad t \in V, \tag{3.75}$$

[1] É o mesmo sistema (2.19), apenas explicitamos a dependência em u e u_z.

com V conjunto aberto em $\mathbb{C}^q$.

Observação: A transformação é dita admissível se as seguintes condições forem satisfeitas

1. O número de singularidades não depende de t, i.e, não haverá mais ou menos singularidades ao final da transformação;
2. A natureza das singularidades não mudam com a transformação;
3. O tipo de bloco de Jordan não muda com a transformação;
4. O rank de Poincaré da singularidade irregular r_ν não muda com a transformação.

3.5.1 A 1-forma $\Theta(z,t)$

Seja $\Phi(z)$ solução da equação (2.19). Considere a seguinte 1-forma

$$\Theta(z,t) = d\Phi \cdot (\Phi)^{-1}, \tag{3.76}$$

onde

$$d\Phi = \sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} dt_j. \tag{3.77}$$

De acordo com (2.40), essa forma é invariante. De fato, se fizermos a continuação analítica em torno da singularidade a_ν, vemos que ela se transforma da forma

$$\begin{aligned} \Theta((z-a_\nu)e^{2\pi i}+a_\nu) \equiv \Theta(\tilde{z}) &= d\Phi(\tilde{z}) \cdot (\Phi(\tilde{z}))^{-1} \\ &= (d\Phi(z)M_\nu)\,(\Phi(z)M_\nu)^{-1} \\ &= (d\Phi(z))\,M_\nu M_\nu^{-1}\,(\Phi(z))^{-1} \\ &= d\Phi \cdot (\Phi)^{-1} = \Theta(z,t) \end{aligned} \tag{3.78}$$

3.5.2 Comportamento local de $\Theta(z,t)$

Para analisar o comportamento da 1-forma $\Theta(z,t)$ em torno das singularidades a_ν, $\nu = 1,\ldots,m$, usaremos

$$\Phi(z) = P_\nu\, \hat{\Phi}^{(\nu)}(z)\, \xi_\nu^{\Lambda_0^{(\nu)}}\, E_\nu \tag{3.79}$$

se a_ν forem singularidades regulares, onde $\hat{\Phi}^{(\nu)}(z)$ é uma função holomórfica. Caso a_ν seja um singularidade irregular, ela será caracterizada pelo fenômeno de Stokes

$$SPh_\nu = \{\Lambda_{-r_\nu}^{(\nu)},\ldots,\Lambda_{-1}^{(\nu)},\Lambda_0^{(\nu)}\ ;\ S_1^{(\nu)},\ldots,S_{2r_\nu}^{(\nu)}\} \tag{3.80}$$

e a função $\Phi(z)$ tem o seguinte comportamento assintótico

$$\Phi(z) \sim P_\nu\, \hat{\Phi}^{(\nu)}(z)\, \xi_\nu^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\, E_\nu, \tag{3.81}$$

$$z \in \Omega_1^{(\nu)},\ z \longrightarrow a_\nu.$$

Logo

$$\begin{aligned}\Phi(z) \sim P_\nu\ \hat{\Phi}^{(\nu)}(z)\ \xi_\nu^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\ [S_{n-1}^{(\nu)}]^{-1}...[S_1^{(\nu)}]^{-1}\ E_\nu,\\ z \in \Omega_n^{(\nu)},\ z \longrightarrow a_\nu,\\ n = 1,...,2r_\nu + 1.\end{aligned} \tag{3.82}$$

Tanto a série convergente quanto a série assintótica podem ser diferenciadas em relação a t termo a termo.

Teorema 12. *A forma diferencial $\Theta(z,t)$ definida em (3.76), é uma função matricial racional em função de z, seus pólos estão localizados a_ν, $\nu = 1,...,m-1,\infty$, e a decomposição em série de potências associada a parte principal é dada por*

$$\Theta(z) = \Theta^{(\infty)}(z) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \Theta^{(\nu)}(z), \tag{3.83}$$

onde

$$\begin{aligned}\Theta^{(\nu)}(z) = \sum_{k=1}^{r_\nu+1} (z-a_\nu)^{-k}\ \Theta_k^{(\nu)},\\ \nu = 1,...,m-1\end{aligned} \tag{3.84}$$

e $\Theta_k^{(\nu)}$ são coeficientes. Por conveniência de notação, a dependência t foi suprimida. Se $z=\infty$ é um ponto regular, então o termo $\Theta^{(\infty)}(z)$ é identicamente zero. Se $z=\infty$ é um ponto singular irregular, então

$$\Theta^{(\infty)}(z) = \sum_{k=0}^{r_\infty} z^k \Theta_k^{(\infty)}. \tag{3.85}$$

Para mostrar o teorema, suponha que a_ν seja uma singularidade irregular. As matrizes $\Lambda_0^{(\nu)}$, $S_k^{(\nu)}$ e E_ν são independentes de t, então em cada setor $\Omega_k^{(\nu)}$, $k = 1,...,2r_\nu$, temos

$$\Theta(z) \sim d\left(P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\right) \cdot \left(P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\right)^{-1}. \tag{3.86}$$

Calculando a diferencial

$$\begin{aligned} d\left(P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\right) &= P_\nu d\left(\hat{\Phi}^{(\nu)}\right) e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)} + P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} d\left(e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}\right), \\ &= P_\nu d\left(\hat{\Phi}^{(\nu)}\right) e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)} + P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} \cdot d\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu) \cdot e^{\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

quando substituimos (3.87) em (3.86), encontramos

$$\Theta(z) \sim P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)} \cdot d\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu) \cdot \left[P_\nu \hat{\Phi}^{(\nu)}\right]^{-1} + O(z^0), \tag{3.88}$$

$$z \longrightarrow a_\nu.$$

Lembrando que $\Lambda^{(\nu)}(\xi_\nu)$ é um polinômio,

$$\Lambda^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{r_\nu} \frac{\Lambda_{-k}^{(\nu)}}{-k} \xi_\nu^{-k} + \Lambda_0^{(\nu)} \ln \xi_\nu$$

e fazendo $k \longrightarrow -k$, a diferencial $d\Lambda^{(\nu)}$ em (3.88) é dada por

$$d\xi = -da_\nu,$$

$$d(\xi_\nu^{-k}) = -k\xi_\nu^{-k-1}(-da_\nu),$$

$$d(\ln \xi_\nu) = \frac{1}{\xi_n u}(-da_\nu),$$

$$d\Lambda^{(\nu)} = -\sum_{k=0}^{r_\nu} \Lambda_{-k}^{(\nu)} \xi_\nu^{-k-1}(-da_\nu) - \sum_{k=1}^{r_\nu} \frac{\xi_\nu^{-k}}{k} da_\nu, \tag{3.89}$$

portanto (3.88) tem comportamento polinomial.

Supondo $\Theta(z)$ uma série de potências em torno da singularidade a_ν

$$\Theta(z) = \sum_{k=1}^{r_\nu+1} \Theta^{(\nu)} \xi_\nu^{-k} + O(z^0). \tag{3.90}$$

Comparando as equações (3.88) e (3.90), pode-se determinar os coeficientes $\Theta_k^{(\nu)}$. No caso regular, $r_\nu = 0$, então o segundo termo da equação (3.89) desaparece.

Para o caso em que o infinito é um ponto singular, podemos aplicar a transformação de coordenadas

$$\frac{1}{z} \longrightarrow w,$$

então a 1-forma $\Theta(w)$ é dada por

$$\Theta(w) = \sum_{k=0}^{r_\infty} w^k \Theta_k^{(\nu)} + O\left(\frac{1}{w}\right) \tag{3.91}$$

e seus coeficientes são determinados por

$$\sum_{k=0}^{r_\infty} w^k \Theta_k^{(\nu)} = \hat{\Phi}^{(\infty)}(w) \cdot (d\Lambda^{(\infty)}(w)) \cdot [\hat{\Phi}^{(\infty)}(w)]^{-1}. \tag{3.92}$$

Como

$$\Lambda^{(\infty)}(w) = -\sum_{k=0}^{r_\infty} \frac{\Lambda_{-k}^{(\infty)}}{k} w^k - \Lambda_0^{(\infty)} \ln w,$$

então

$$d\Lambda^{(\infty)} = -\sum_{k=1}^{r_\infty} \frac{w^k}{k} d\Lambda_{-k}^{(\infty)}. \tag{3.93}$$

3.5.3 Condição de compatibilidade

A função $\Phi(z,t)$ satisfaz, além da equação em z

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A(z)\Phi, \tag{3.94}$$

um sistema linear auxiliar em relação ao parâmetro t

$$d\Phi = \Theta(z)\Phi. \tag{3.95}$$

Expandindo na base das 1-forma

$$\Theta(z) = \sum_j \Theta_j(z) dt_j, \tag{3.96}$$

a equação (3.95) assume a seguinte forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j} = \Theta_j(z)\Phi. \tag{3.97}$$

Aplicando a diferencial em (2.19) e usando a equação (3.95), encontramos a seguinte *condição de compatibilidade* ou *condição de curvatura zero*. Se definirmos a curvatura F como

$$F = dA - \frac{\partial \Theta}{\partial z} - [\Theta, A], \tag{3.98}$$

e impormos

$$F = 0 \tag{3.99}$$

teremos

$$dA = \frac{\partial \Theta}{\partial z} + [\Theta, A]. \tag{3.100}$$

Em componentes

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} + [\Theta_j, A] \tag{3.101}$$

Ambos os lados da equação (3.100) são funções racionais em z. Esse sistema forma as *equações de deformação isomonodômicas*.

3.6 Teorema de Schlesinger

Considere um sistema fuchsiano, i.e,

$$\frac{d\Phi}{dz} = A(z)\Phi$$

$$A(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{z - a_\nu},$$

onde

$$A_\infty = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu$$

é uma matriz diagonal. As deformações de isomonodromia associadas a este sistema foram descritas por Schlessinger [?], que escolheu os pontos $a_1,...,a_m$ como os próprios parâmetros de deformação

$$t = \{a_1,...,a_\nu\}. \tag{3.102}$$

A 1-forma $\Theta(z)$, neste caso, é dada por

$$\Theta(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \Theta^{(\nu)}(z)$$

onde de acordo com (3.84) com (3.88),

$$\begin{aligned} \Theta^{(\nu)}(z) &= -\frac{1}{z-a_\nu} P_\nu \cdot \Lambda_0^{(\nu)} [P_\nu]^{-1}\, da_\nu, \\ &= -\frac{A_\nu}{z-a_\nu}\, da_\nu. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Assim, a equação (3.95) torna-se

$$d\Phi = -\sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{z-a_\nu}\, \Phi\, da_\nu \tag{3.104}$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_\nu} = -\frac{A_\nu}{z-a_\nu}\, \Phi,\ \nu = 1,...,m \tag{3.105}$$

Portanto, a equação de deformação isomonodômica (3.100) é equivalente ao sistema

$$dA_\nu = \sum_{\mu\neq\nu,\mu=1}^{m} [A_\mu, A_\nu] \frac{da_\nu - da_\nu}{a_\mu - a_\nu} \tag{3.106}$$

$$\nu = 1,...,m$$

A forma em componentes do sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\nu}{\partial a_\nu} &= -\sum_{\mu\neq\nu,\mu=1}^{m} [A_\mu, A_\nu] \\ \frac{\partial A_\nu}{\partial a_\mu} &= [A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \tag{3.107}$$

é conhecido como as *equações de Schlesinger*.

As equações de compatibilidade

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{z-a_\nu}\,\Phi$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_\nu} = -\frac{A_\nu}{z-a_\nu}\,\Phi \tag{3.108}$$

as equações (3.108) formam um par Lax para as equações de Schlesinger. O sistema não linear (3.107) descreve as deformações isomonodromias da equação em z em (3.108).

O sistema (3.107) possui as seguintes quantidades conservadas:

1. O espectro de A_ν, ou seja, os expoentes de monodromia $\Lambda_0^{(\nu)}$, $\nu = l,...,n$.
2. A soma
$$\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu = A_\infty = \Lambda_0^{(\infty)} = cte \tag{3.109}$$

A coleção $\{\Lambda_0^{(\nu)}\}$ representa a parte "trivial"do conjunto total de quantidades conservadas de (3.107) formado pelos dados de monodromia da equação (2.19),

$$\mathscr{M}_e = \{\Lambda_0^{(\nu)}; E_\nu\}_{\nu=1,...,m}. \tag{3.110}$$

Vale salientar que no caso Fuchsiano genérico, o conjunto completo das primeiras integrais (quantidades conservadas) de (3.107) pode ser descrito como o conjunto das matrizes de monodromia de (2.19),

$$\mathscr{A} = \{M_\nu\},\ \nu = 1,...,m. \tag{3.111}$$

A relação entre os conjuntos (3.110) e (3.111) é expressa através da equação

$$M_\nu = E_\nu^{-1}\, e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}}\, E_\nu,\ \ \nu = l,...,n. \tag{3.112}$$

3.6.1 Deformação Isomodrômica para Painlevé VI

O caso não-trivial da aplicação das equações de Schlesinger (3.107) é o que as matrizes A_ν são 2×2 com três singularidades a distância finita. Via uma transformação de Möebius [55], podemos fixar duas delas em $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ e a última em $a_t = t$. O parâmetro t será o parâmetro da deformação do sistema:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,t) = \left[\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_t(t)}{z-t}\right]\Phi(z,t), \tag{3.113}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t) = -\frac{A_t(t)}{z-t}\Phi(z,t). \tag{3.114}$$

Denotaremos

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t). \tag{3.115}$$

Aplicando o sistema nas equações de Schlessinger (3.107) , temos

$$\dot{A}_0 = -\frac{1}{t}[A_0, A_t], \tag{3.116}$$

$$\dot{A}_1 = -\frac{1}{1-t}[A_1, A_t], \tag{3.117}$$

$$\dot{A}_t = \frac{1}{t}[A_0, A_t] - \frac{1}{t}[A_1, A_t]. \tag{3.118}$$

Como o infinito é um ponto regular, temos

$$A_0 + A_1 + A_t + A_\infty = 0. \tag{3.119}$$

Podemos remover o A_t usando essa relação

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{t}[A_0, A_1 + A_\infty], \tag{3.120}$$

$$\dot{A}_1 = -\frac{1}{1-t}[A_1, A_0 + A_t]. \tag{3.121}$$

$$\tag{3.122}$$

Escolhendo o gauge onde $\mathrm{Tr}A_\nu = 0$, os autovalores das matrizes A_ν são denotados por

$$\Lambda_0^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \theta_\nu & 0 \\ 0 & -\theta_\nu \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Escolhendo A_∞ diagonal, temos

$$A_\infty = \Lambda_0^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \theta_\infty & 0 \\ 0 & -\theta_\infty \end{pmatrix}. \tag{3.124}$$

Como fizemos no exemplo de 4 singularidades regulares, as matrizes podem ser parametrizadas da seguinte forma

$$A_\nu = \begin{pmatrix} w_\nu & -u_\nu(w_\nu - \theta_\nu) \\ \frac{1}{u_\nu}(w_\nu + \theta_\nu) & -w_\nu \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

Defina a função $y(z)$ como o zero da entrada $[A_(z)]_{12}$ da matriz $A(z)$, então

$$[A(z)]_{12} = \frac{k(z)(z - y(z))}{z(z-1)(z-t)} \tag{3.126}$$

A função $y(z)$ satisfaz a equação de Painlevé VI.

3.7 Apêndice: Classificação de Heun e Transcendentais de Painlevé

3.7.1 Equação de Heun

Em 1889, Heun escreveu uma artigo [65] sobre as soluções de uma equação diferencial de segunda ordem Fuchsiana com quatro singularidades regulares. Essa equação ficou conhecida como *equação de Heun*. A classe de equações diferenciais de Heun engloba todas as equações obtidas a partir do processo de confluência dos 4 pontos regulares, a depender do tipo de processo. A equação básica de Heun na forma canônica natural é

$$L_z^{(1,1,1;1)}(a,b,c,d;t;\sigma)y(z) = 0$$

$$\left[D^2 + \left(\frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} + \frac{e}{z-t}\right)D + \frac{ab(z-t)-\sigma}{z(z-1)(z-t)}\right] y(z) = 0 \tag{3.127}$$

com

$$D = \frac{d}{dz}$$

Os números $1-c$, $1-d$ e $1-e$ são os expoentes característicos das soluções do tipo Frobenius nos pontos $z=0$, $z=1$ e $z=\infty$, respectivamente, a e b são os expoentes característicos no infinito e todos devem satisfazer a condição de Fuchs

$$a+b+1 = c+d+e \tag{3.128}$$

3.7.2 Equação de Painlevé

As soluções são as *funções de Painlevé* e as formas canônicas das equações são

- PI
$$u_{zz} = 6u^2 + z \tag{3.129}$$

- PII
$$u_{zz} = zu + 2u^3 - \alpha \tag{3.130}$$

- PIII
$$u_{zz} = \frac{1}{u}u_z^2 - \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \tag{3.131}$$

- PIV
$$u_{zz} = \frac{1}{2u}u_z^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2-\alpha)u + \frac{\beta}{u} \tag{3.132}$$

- PV
$$u_{zz} = \frac{3u-1}{2u(u-1)}u_z^2 - \frac{1}{z}u_z + \frac{(u-1)^2}{z^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \frac{\gamma u}{z} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1} \tag{3.133}$$

- PVI

$$u_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u-z}\right)u_z^2 - \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{u-z}\right)u_z$$

$$+\frac{u(u-1)(u-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{z}{u^2}+\gamma\frac{z-1}{(u-1)^2}+\delta\frac{z(z-1)}{(u-z)^2}\right) \tag{3.134}$$

3.7.3 Equações de Painlevé como análogos clássicos das equações de Heun

Na física, existem duas formulações sobre uma mesma teoria: dada uma Hamiltoniana $H(p,q,t)$, uma função das variáveis canônicas q, p e t, podemos escrever as equações de movimento em termos de $q(t)$ e $p(t)$, soluções das equações de Hamilton. Por outro lado, o formalismo Lagrangeano estuda a função $q(t)$, solução das equações de Euler-Lagrange.

Fuchs em seu artigo [59] encontrou uma relação entre a equação de Heun e a Painlevé VI. Em seus estudos, a PVI apareceu como condição de compatibilidade. Depois, Schlesinger [112] encontrou um sistema de equações diferenciais parciais onde a PVI aparecia [72, 73, 54], obtidas a partir do método baseado em manter as característica de monodromia invariantes. Esse é o atual conhecido *método de Isomonodromia* [70].

Foi demonstrado que a Painlevé VI pode ser considerada uma equação Newtoniana

$$q_{tt} = F(q, q_t, t, \theta_i) \tag{3.135}$$

para um problema quântico de autovalor (i.e, q e p são operadores que satisfazem $[q,p]=i$) correspondente a Hamiltoniana

$$H(q,p,t,\theta_i)y(q,t) = \lambda y(q,t) \tag{3.136}$$

onde $y(q,t)$ é solução da equação de Heun [118, 93, 105].

3.7.4 Classificação das confluências da equação de Heun

A classificação principal das equações de Heun baseada nos processos de confluência foi proposta em [119] e completada por [120]. Esta classificação inclui as seguintes equações:

1. A equação básica de Heun (EH)
2. Quatro tipos de casos confluentes:
   (a) A equação confluente de Heun (ECH), uma equação com duas singularidades regulares e uma irregular no infinito;
   (b) A equação biconfluente de Heun (EBH), uma equação com uma singularidade regular e uma irregular no infinito resultante da confluência de três singularidades regulares;
   (c) A equação confluente dupla de Heun (EDH), uma equação com duas singularidades irregulares, em zero e infinito;

   (d) A equação triconfluente de Heun (ETH), uma equação com uma singularidade irregular no infinito como resultado da confluência de quatro singularidades regulares.

3. Cinco tipos de casos confluentes reduzidos:

   (a) A equação confluente reduzida de Heun (ECRH);
   (b) A equação biconfluente reduzida de Heun (EBRH);
   (c) A equação duplamente confluente reduzida de Heun(EDRH);
   (d) A equação triconfluente reduzida de Heun (ETRH);
   (e) A equação dupla confluente duplamente reduzida de Heun (EDRDH).

CAPÍTULO 4

Rabi e suas monodromias

Neste capítulo final, será aplicado o método de isomonodromia ao modelo de Rabi.

4.1 Apresentando o modelo

O modelo de Rabi descreve a interação entre um átomo e um campo magnético rotacionando [109]. O caso mais simples é um oscilador harmônico com dois níveis, análogo a um modelo de spin-$1/2$. Na aproximação de dipolo, quando o comprimento de onda do campo é maior que o tamanho do átomo, a interação átomo-campo faz com que os estados do sistema oscilem entre si. Essa oscilação é chamada de *oscilações de Rabi* [115]. Bloch e Siegert [27] descreveram o caso do campo variável não-rotativo, encontrando um shift (deslocamento) na posição da ressonância - chamado *shift de Bloch-Siegert*. É um modelo simples e ainda assim tem um espectro interessante e rico.

Recentemente, o modelo tem atraído vividamente atenção devido a razões matemáticas. O modelo quântico de Rabi é descrito pela Hamiltoniana ($\hbar = 1$)

$$H_R = \Delta\sigma_z + \omega a^\dagger a + g\sigma_x(a^\dagger + a), \tag{4.1}$$

onde a e $a^\dagger$ são, respectivamente, os operadores de destruição e criação para o modo bosônico de frequência ω, σ_x e σ_z são as matrizes de Pauli, Δ é uma constante referente à energia do vácuo e g é a constante de acoplamento da interação entre o modo bosônico e o campo magnético. Em função dos operadores $\sigma^\pm$

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y),$$

o termo de interação se torna

$$g\sigma_x(a^\dagger + a) = g(\sigma^- a^\dagger + \sigma^+ a) + g(\sigma^+ a^\dagger + \sigma^- a),$$

sendo conhecidos como

$$\text{Termo de rotação} = g(\sigma^- a^\dagger + \sigma^+ a),$$

$$\text{Termo de contra-rotação} = g(\sigma^+ a^\dagger + \sigma^- a).$$

Jaynes e Cummings estudaram a primeira forma do modelo de Rabi em 1963 [71], descrevendo um átomo de dois níveis que interage com um modo quantificado em uma cavidade óptica. O objetivo era estudar a relação entre a teoria quântica da radiação e a teoria semi-clássica correspondente. Essa teoria é uma aproximação da Hamiltoniana do Modelo de Rabi quando desprezamos o termo de CRT,

$$H_{JC} = \Delta\sigma_z + \omega a^\dagger a + g(\sigma^- a^\dagger + \sigma^+ a). \tag{4.2}$$

Neste modelo, o operador número

$$N = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-$$

comuta com H_{JC}, logo existe autovetor $|f_n\rangle \in \mathscr{H}(H_{JC})$ tal que

$$N|f_n\rangle = f_n |f_n\rangle .$$

Então, o espaço de estados do modelo de Jayne-Cummings, $\mathscr{H}(H_{JC})$, decompõe-se em uma soma infinita de subespaços invariantes

$$|f_n\rangle \in \mathscr{H}_n, \quad \mathscr{H}(H_{JC}) = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$$

onde $\dim \mathscr{H}_n = 2$ para cada n. No modelo de Rabi, essa simetria é quebrada com a reintrodução do termo de CRT.

Os vários regimes de acoplamento do modelo de Rabi quântico podem ser definidos em termos do valor de 2Δ, da frequência do modo ω e da constante de acoplamento g entre os dois sistemas. Esses regimes são [123]

1. regime de desacoplamento: $2\Delta \ll g \ll \omega$,
2. regime de JC: $g \ll \omega, 2\Delta$ e $|\omega - 2\Delta| \ll |\omega + 2\Delta|$,
3. regime anti JC: $g \ll \omega, 2\Delta$ e $|\omega - 2\Delta| \gg |\omega + 2\Delta|$,
4. regime intermediário: $2\Delta \sim g \ll \omega$,
5. regime da dispersão degenerado:$g \ll \omega,\ 2\Delta, |\omega - 2\Delta|,\ |\omega + 2\Delta|$,
6. regime de acoplamento forte: $0.1 < g < \omega$,
7. regime de acoplamento muito forte: $g > \omega$.

Recentemente, em 2011, Braak [29] resolveu o modelo em uma representação de Bargmann (estado coerente), obtendo de forma sistemática o seu espectro regular como zeros de uma função transcendental. A parte excepcional do espectro já era conhecida desde o final dos anos 1970 [75], mas também pode ser obtido pelo método proposto por Braak [20]. A equação de movimento do modelo era uma equação de Heun. Em paralelo, Cunha e Novaes [35, 36] encontraram a mesma equação de Heun no problema espalhamento em buracos negros. A ideia aqui é aplicar o método de Isomonodromia desenvolvido nos capítlos anteriores e encontrar uma equação de Yang-Baxter associada ao Rabi, mostrando que o modelo é solúvel e integrável.

4.2 Problema de Autovalor

Seja a Hamiltoniana de Rabi

$$H_R = \Delta\sigma_z + \omega a^\dagger a + g\sigma_x(a^\dagger + a), \tag{4.3}$$

onde a e $a^\dagger$ são os operadores de destruição e criação para o modo bosônico de frequência ω, σ_x e σ_z são as matrizes de Pauli, Δ é uma constante referente a energia do vácuo e g é a constante de acoplamento da interação entre o modo bosônico e o campo magnético.

Defina um autoestado para o modelo de Rabi como

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$H_R\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,. \tag{4.5}$$

Uma vez que as matrizes de Pauli são

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

podemos escrever a forma matricial de H_R

$$H_R = \begin{pmatrix} \omega a^\dagger a + \Delta & g(a^\dagger + a) \\ g(a^\dagger + a) & \omega a^\dagger a - \Delta \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Quando aplicada no auto estado $|\psi\rangle$, obtêm-se o sistema de equações acopladas

$$\begin{pmatrix} \omega a^\dagger a + \Delta & g(a^\dagger + a) \\ g(a^\dagger + a) & \omega a^\dagger a - \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\ \psi_1 \\ E\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

na forma de sistema de equações

$$\begin{aligned} [\omega a^\dagger a + \Delta]\psi_1 + g(a^\dagger + a)\psi_2 &= E\psi_1, \\ [\omega a^\dagger a - \Delta]\psi_2 + g(a^\dagger + a)\psi_1 &= E\psi_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.2.1 Solução de Braak

Em seu artigo [29], Braak apresentou uma solução analítica para o modelo quântico de Rabi utilizando o espaço de Bargmann-Fock de funções analíticas.

Def 19. *O espaço de Bargmann-Fock $\mathscr{B}$ é o espaço de funções holomorfas F em n-variáveis complexas que satisfaz a condição de quadrado integrável*

$$\|F\| = -\pi^n \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 e^{-|z|^2} dz \tag{4.10}$$

com

$$dz = \Pi_{i=1}^{n} dz_i d\bar{z}_i \tag{4.11}$$

Para o caso do modelo de Rabi, $n = 2$, os operadores bosônicos de criação e destruição tem a seguinte representação

$$a^\dagger \longrightarrow z, \quad a \longrightarrow \frac{d}{dz}, \tag{4.12}$$

logo

$$a^\dagger a = z\frac{d}{dz}, \tag{4.13}$$

então a Hamiltoniana nesse espaço se escreve

$$\tilde{H}_R = \begin{pmatrix} \omega z\frac{d}{dz} + \Delta & g(z + \frac{d}{dz}) \\ g(z + \frac{d}{dz}) & \omega z\frac{d}{dz} - \Delta \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Nessa nova representação, o sistema de equações se torna

$$\begin{aligned} \omega z\frac{d\psi_1}{dz} + g\left(z\psi_2 + \frac{d\psi_2}{dz}\right) + \Delta\psi_1 = E\psi_1, \\ \omega z\frac{d\psi_2}{dz} + g\left(z\psi_1 + \frac{d\psi_1}{dz}\right) - \Delta\psi_2 = E\psi_2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Fazendo a seguinte mudança de base

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

encontramos o sistema de equações

$$\frac{df_1}{dz} = \frac{E - gz}{\omega z + g} f_1 - \frac{\Delta}{\omega z + g} f_2, \tag{4.18}$$

$$\frac{df_2}{dz} = \frac{E + gz}{\omega z - g} f_2 - \frac{\Delta}{\omega z - g} f_1, \tag{4.19}$$

matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dz} \\ \\ \frac{df_2}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E-gz}{\omega z+g} & -\frac{\Delta}{\omega z+g} \\ \\ -\frac{\Delta}{\omega z-g} & \frac{E+gz}{\omega z-g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

A partir de agora, faremos $\omega = 1$. Fazendo uma seguinte transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} w &= -2g(z+g), \\ t &= -4g^2, \end{aligned} \tag{4.21}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} &= \frac{dz}{dw}\frac{d}{dz}, \\ \frac{d}{dz} &= -2g\frac{d}{dw}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

logo, cada termo da matriz (4.20) se torna

$$\begin{aligned} \frac{E-gz}{z+g} &= -2g\left[\frac{(E+g^2)}{w} + \frac{1}{2}\right], \\ \frac{\Delta}{z+g} &= -\frac{2g}{w}\Delta, \\ \frac{\Delta}{z-g} &= -\frac{2g}{w-t}\Delta, \\ \frac{E+gz}{z-g} &= -2g\left[\frac{(E+g^2)}{w-t} - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) na equação (4.20), encontramos o seguinte sistema de EDOs lineares e trocando z por w, temos

$$\frac{df}{dz} = A(z)f(z), \tag{4.24}$$

onde $A(z)$ é uma matriz dada por

$$A(z) = \begin{pmatrix} \frac{(E+g^2)}{z} + \frac{1}{2} & -\frac{\Delta}{z} \\ \\ -\frac{\Delta}{z-t} & \frac{(E+g^2)}{z-t} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

4.3 Integrabilidade do Rabi

Podemos escrever o sistema matricial (4.25) usando a matriz de solução fundamental (2.18) de forma que

$$\frac{d\Phi}{dz} = A(z)\Phi(z) \tag{4.26}$$

Reescrevendo a matriz (4.25) em termos das matrizes de Pauli, encontramos

$$A(z) = \frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{1}{z}A_0 + \frac{1}{z-t}A_t, \tag{4.27}$$

com

$$A_0 = \begin{pmatrix} E+g^2 & -\Delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta & E+g^2 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

A matriz (4.27) possui dois pontos singulares regulares em $z=0$ e $z=t$, e um ponto irregular singular em $z=\infty$ com rank de Poincaré $r_\infty = 2$. A estrutura analítica do sistema em torno das singularidades regulares é caracterizado pelas matrizes de monodromia M_0 and M_t, com

$$\Phi((z-a_\nu)e^{2\pi i} + a_\nu) = \Phi(z)M_\nu, \qquad \nu = 0, t. \tag{4.29}$$

Além disso, podemos escolher as condições iniciais de (4.27) tais que, em torno do ponto singular a_ν, $\nu = 0,t$, tenhamos o seguinte comportamento

$$\Phi(z)|_{z\approx a_\nu} = (z-a_\nu)^{\Lambda_0^{(\nu)}}, \tag{4.30}$$

onde $\Lambda_0^{(\nu)}$ são as formas de Jordan das matrizes A_ν

$$\Lambda_0^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \alpha_\nu^+ & 0 \\ 0 & \alpha_\nu^- \end{pmatrix}, \ \nu = 0,t. \tag{4.31}$$

De acordo com (3.29) uma matriz de monodromia M_ν pode ser escrita genericamente como

$$M_\nu = E_\nu \, e^{2\pi i \Lambda_0^{(\nu)}} \, E_\nu^{-1}, \tag{4.32}$$

onde $E_\nu \in GL(2,\mathbb{C})$ são as matrizes de conexão. Para propósitos algébricos, apenas a diferença dos autovalores das matrizes A_ν

$$\theta_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu^+ - \alpha_\nu^-), \nu = 0,t \tag{4.33}$$

importa.

Vimos no capítulo 3 que o ponto singular irregular, no caso do Rabi em $z=\infty$, apresenta o *Fenômeno de Stokes*, dado pela equação (3.15). O sistema no infinito tem a seguinte forma

$$\frac{d\Phi}{dz}\Phi^{-1} = -\frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{A_0 + A_t}{z} + \mathscr{O}(z^{-2}). \tag{4.34}$$

A partir do coeficiente $A_\infty = -(A_0 + A_t)$ do termo z^{-1}, podemos definir a monodromia em $z = \infty$, dada por

$$M_\infty = E_\infty^{-1}\, e^{2\pi i \Lambda^{(\infty)}} [S_{2r_v}^{(\infty)}]^{-1} \dots [S_1^{(\infty)}]^{-1} E_\infty, \tag{4.35}$$

sendo a diferença de autovalores de $\Lambda^{(\infty)}$

$$\theta_\infty = (\alpha_\infty^- - \alpha_\infty^+)/2. \tag{4.36}$$

Para descrever o fenômeno de Stokes do modelo de Rabi, onde $r_\infty = 2$, a equação (2.123) pode ser escrita da forma

$$\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} \,|\, (2j-5)\frac{\pi}{2} < \arg z < (2j-1)\frac{\pi}{2}\}, \tag{4.37}$$

$j \in \mathbb{Z}$, utilizando (4.36). Para cada Ω_j, temos o seguinte comportamento assintótico para as soluções do sistema (4.27):

$$\Phi_j(z) = G_j(z^{-1}) \exp(\tfrac{1}{2} z \sigma_3) z^{-\frac{1}{2}\theta_\infty \sigma_3}, \tag{4.38}$$

onde $G_j(z^{-1}) = I + \mathscr{O}(z^{-1})$ é uma matriz analítica na vizinhança de $z = \infty$. O fenômeno de Stokes relaciona soluções do sistema (4.38) em diferentes setores Ω_j

$$\Phi_{j+1}(z) = \Phi_j(z) S_j, \tag{4.39}$$

onde S_j são as matrizes de Stokes (2.129). Como

$$\Phi_j(e^{2\pi i} z) = \Phi_{j+2}(z) e^{-\pi i \theta_\infty \sigma_3}, \tag{4.40}$$

temos que

$$S_{j+2} = e^{\pi i \theta_\infty \sigma_3}\, S_j\, e^{\pi i \theta_\infty \sigma_3}, \tag{4.41}$$

portanto, podemos escolher uma base em que

$$S_{2j} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2j+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2j+1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

onde os números s_k são chamados de *multiplicadores de Stokes*. Por identificação dos S_{j+2} com rotações de 2π, podemos definir a monodromia no infinito no setor Ω_j por

$$M_\infty|_{\Omega_j} = S_j S_{j+1} e^{i\pi\theta_\infty\sigma_3}, \tag{4.43}$$

que satisfaz a relação cíclica com as outras matrizes

$$M_\infty M_t M_0 = I. \tag{4.44}$$

Note que uma vez que escolhemos um setor Ω_j, basta conhecer apenas dois parâmetros consecutivos de Stokes s_1 e s_2 para reconstruir toda série de matrizes de Stokes S_j.

O resultado da análise acima é que o conjunto de dados de monodromia (3.38) é dado, no caso do Rabi, por

$$\mathscr{M}_e = \{\theta_0, \theta_t, \theta_\infty, s_1, s_2\}. \tag{4.45}$$

Eles são suficientes para determinar as matrizes de monodromia.

A existência das matrizes de monodromia fornece uma representação explícita do grupo de permutação $\mathbb{S}_3$ agindo nas M_ν como

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(M_i) &= M_j M_i M_j^{-1}, \\ \sigma_{ij}(M_j) &= (M_j M_i) M_j (M_j M_i)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Esses geradores satisfazem

$$\sigma_{ij} \circ \sigma_{jk} \circ \sigma_{ki} = \sigma_{ik} \circ \sigma_{kj} \circ \sigma_{ji}, \tag{4.47}$$

conhecida como a relação de Yang-Baxter[42].

Portanto, *a existência de matrizes de monodromia garante que o modelo de Rabi é integrável no sentido de Yang-Baxter*. Encontrar uma forma exata para as matrizes de monodromia não é uma tarefa trivial, como os resultados negativos de [21] podem atestar.

4.4 Método de Isomonodromia aplicado ao Rabi

A existência das matrizes de monodromia descrita acima está profundamente relacionada com o problema de Riemann-Hilbert. O caso do Rabi é o problema inverso: dado o sistema de Schlesinger (4.27), queremos encontrar as matrizes de monodromia descritas na seção anterior. Para resolver essa questão, notamos que existem diferentes famílias de A_ν's que tem a mesma monodromia (Capítulo 3). Schlesinger quem primeiro descreveu como encontrar essa família [72, 73, 70], entendido mais facilmente em termos de conexão plana [11].

4.4.1 Condição de curvatura nula

Suponha F uma curvatura associada a uma conexão $\mathscr{A}$. Então

$$F \equiv d\mathscr{A} + \mathscr{A} \wedge \mathscr{A}. \tag{4.48}$$

Quando $F = 0$, temos que $\mathscr{A}$ é uma conexão plana. No caso do Rabi, temos

$$F = \partial_t \mathscr{A}_z - \partial_z \mathscr{A}_t + [\mathscr{A}_z, \mathscr{A}_t] \tag{4.49}$$

e

$$\mathscr{A}_z(z,t) = \frac{\sigma_3}{2} + \frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_t(t)}{z-t} = \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} \Phi^{-1}(z,t), \tag{4.50}$$

como a componente z da conexão $\mathscr{A}$. É imediato ver que, se considerarmos a componente t como

$$\mathscr{A}_t = -\frac{A_t(t)}{z-t}, \tag{4.51}$$

então a curvatura (4.49) associada se anula se os $A_\nu(t)$ satisfazem o sistema de Schlessinger

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_0}{\partial t} &= \frac{1}{t}[A_t, A_0],\\ \frac{\partial A_t}{\partial t} &= -\frac{1}{t}[A_t, A_0] - \frac{1}{2}[A_t, \sigma_3],\end{aligned} \tag{4.52}$$

lembrando que as matrizes A_0 e A_t podem ser interpretadas como um par de Lax para o fluxo de isomonodromia.

Pode parecer que o problema de Rabi está sendo abordado de uma maneira mais complicada, porém as equações de Schlesinger (4.52) possuem uma estrutura Hamiltoniana. Escolhendo o gauge

$$\mathrm{Tr} A_\infty = \theta_\infty, \tag{4.53}$$

considere o termo fora da diagonal $(A(z))_{12}$ da equação (4.50), ele pode ser escrito em termo de $k(z,t)$ e $u(z,t)$, funções lineares de $(A_0)_{12}$ e $(A_t)_{12}$ [40, 6],

$$(A(z))_{12} = \frac{(A_0)_{12}}{z} + \frac{(A_t)_{12}}{z-t} = \frac{k(z-u)}{z(z-t)}, \tag{4.54}$$

A função $u(z,t)$ é solução da Painlevé V

$$u_{zz} = \frac{3u-1}{2u(u-1)}u_z^2 - \frac{1}{z}u_z + \frac{(u-1)^2}{z^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \frac{\gamma u}{z} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1}. \tag{4.55}$$

Escrevendo a solução como

$$\Phi(z,t) = \begin{pmatrix} f_+^{(1)}(z,t) & f_+^{(2)}(z,t) \\ f_-^{(1)}(z,t) & f_-^{(2)}(z,t) \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

e utilizando (2.21), pode-se checar que de acordo com (4.50), os elementos da primeira linha $f_+^{(1,2)}(z,t)$ da matriz fundamental de solução $\Phi(z,t)$ satisfará

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}f_+^{(1,2)} + p(z)\frac{d}{dz}f_+^{(1,2)} + q(z)f_+^{(1,2)} &= 0,\\ p(z) &= \frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_t}{z-t} - \frac{1}{z-\lambda},\\ q(z) &= -\frac{1}{4} + \frac{H_0}{z} + \frac{H_t}{z-t} + \frac{\mu}{z-\lambda},\end{aligned} \tag{4.57}$$

onde H_0, H_t, λ e μ são funções de $A_0(t)$ e $A_t(t)$. Essa EDO é a equação de Heun associada a Painlevé V.

O sistema de Schlesinger (4.52) produz a equação de Painlevé V para a seguinte função das entradas A_i:

$$y(t) = \frac{(A_0)_{11}(A_t)_{12}}{(A_t)_{11}(A_0)_{12}} = \frac{\theta_0 + \theta_t - \theta_\infty - (2\mu - 1)(\lambda - t)}{\theta_0 + \theta_t - \theta_\infty - (2\mu - 1)\lambda}.$$

De acordo com [6], a função-tau é definida por

$$\frac{d}{dt}\log\tau(t,\vec{\theta},\vec{\sigma}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_3 A_t) - \frac{1}{t}\mathrm{Tr}(A_0 A_t) \tag{4.58}$$

que satisfaz uma EDO de terceira ordem não linear, a conhecida forma-σ da equação de Painlevé V [63]. Essa função-tau tem interpretação de função geradora das funções de correlação. Expressões assintóticas para função-tau da Painlevé V foram derivadas em [72]. Podemos definir uma 1-forma ω como

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1,\nu\neq\mu}^{m}\mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu)\frac{da_\mu - da_\nu}{a_\mu - a_\nu} \tag{4.59}$$

tal que

$$d\omega = 0, \tag{4.60}$$

logo, ω é uma forma exata, i.e,

$$\omega = dG \tag{4.61}$$

e denotaremos G como

$$G = \ln\tau \tag{4.62}$$

onde τ é a função-tau da Painlevé. Para descrever essa função, precisa-se definir os parâmetros de monodromia composta definidos por

$$\begin{aligned} 2\cos\pi\sigma &= \mathrm{Tr}(M_t M_0) = \mathrm{Tr}(M_\infty^{-1}) \\ &= 2\cos\pi\theta_\infty + e^{\pi i\theta_\infty}s_1 s_2, \end{aligned} \tag{4.63}$$

então os dados de monodromia estendidos são $\vec{\theta} = \{\theta_0,\theta_t,\theta_\infty,\sigma,s_i\}$. Essas informações podem ser escritas em termos dos parâmetros do sistema Δ, g e da energia E.

Em termos da (4.58), a existência das matrizes de monodromia do sistema de Garnier (4.27) para o Rabi remonta a existência de uma solução para função-tau dadas condições iniciais

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log\tau(t,\vec{\theta},\vec{\sigma})\bigg|_{t=-4g^2} &= \frac{E+g^2}{2} + \frac{\Delta^2}{4g^2} \\ \frac{d^2}{dt^2}\log\tau(t,\vec{\theta},\vec{\sigma})\bigg|_{t=-4g^2} &= \frac{1}{t^2}\mathrm{Tr}A_0 A_t = \frac{\Delta^2}{16g^4}, \end{aligned} \tag{4.64}$$

Note que temos

$$\theta_0 = \theta_t = E + g^2, \quad \text{and} \quad \theta_\infty = 0. \tag{4.65}$$

As condições (4.64) fornecem uma equação transcendental implícita para os dados de monodromia estendidos, os parâmetros de Stokes s_1 e s_2. Com o conjunto completo dos dados de monodromia $\mathscr{M}_e = \{\theta_0,\theta_t,\theta_\infty,\sigma,s_i\}$, podemos completar a missão de escrever uma representação implícita da equação das matrizes de monodromia e assim provar que o modelo é integrável no sentido Yang-Baxter. O mesmo tipo de Painlevé V foi estudada em uma série de artigos [96, 97, 96].

A Painlevé V, encontrada no problema do Rabi, faz parte da família de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes racionais estudadas por [101, 70]. A Painlevé V em particular, foi importante no cálculo das funções de correlação de sistemas bosônicos fortemente acoplados [72], funções de distribuição de matrizes aleatórias, limites dos blocos conformes do modelo XY [129].

CAPÍTULO 5

Conclusão

O capítulo 2 desta tese é dedicado à revisão de sistemas de EDO de primeira ordem com apenas uma singularidade (para fins didáticos). Discutiu-se a classificação das singularidades em regulares e irregulares, relevante para o problema do modelo de Rabi. No caso das singularidades irregulares, mostramos como o fenômeno de Stokes e as matrizes de Stokes aparecem.

Em seguida, no capítulo 3 generalizamos para o caso com m singularidades, tanto regulares como irregulares. A ideia foi gerar um material com uma notação clara. Discutiu-se a definição de grupo de monodromia como representação do grupo fundamental de homotopia da esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1, ..., a_{m-1}, a_\infty\}$, seja o caso regular ou irregular. Também neste capítulo, foi desenvolvido o método de Isomonodromia. A partir do sistema de N EDOs, supomos que a matriz de coeficientes racionais $A(z)$ dependia de um parâmetro extra t, tornando-se uma função $A(z,t)$. Para encontrar a família de matrizes que eram invariantes sob a mudança de parâmetros, precisamos introduzir a 1-forma invariante $\Omega(z,t)$ e assim derivar as equações de Schlessinger.

Finalmente, com esses capítulos, pudemos aplicar o método de isomonodromia ao modelo de Rabi. Encontramos a equação de Heun confluente utilizando representação de Bargmann para modelo de Rabi. Um fato conhecido [72, 70] é que os dados da monodromia destas equações podem ser expressas em termos da função tau da Painlevé V [73] obtida através de equações isomonodrômicas. O sistema de compatibilidade de Schlessinger, ou a condição de curvatura nula, pode ser considerado como uma representação de Lax para a equação de Heun. Com isso, a teoria das deformações isomonodômicas se enquadra na teoria de sistemas integráveis (Teoria de Solitons). Os dados de monodromia da equação estendida em $A(z,t)$ formam um conjunto completo de primeiras integrais do sistema linear de EDOs. Calculamos as matrizes de monodromias associadas aos pontos singulares da equação diferencial decorrente do problema do autovalor do Rabi. Porém, existe uma singularidade irregular, sendo necessário introduzir o fenômeno Stokes, a fim de obter o conjunto completo de dados de monodromia. Com essa descrição das monodromias do Rabi, foi possível mostrar a integrabilidade no sentido de Yang-Baxter utilizando a representação de monodromia em termos das coordenadas de traço.

Os métodos descritos aqui são úteis não apenas para mostrar a existência das matrizes de monodromia,mas também a integrabilidade no sentido Yang-Baxter, para o modelo de Rabi, além de fornecer uma solução para o problema do autovalor em termos da equação transcendental da Painlevé V.

Portanto, a questão da integração da equação não-linear encontrada no problema de autovalor do modelo de Rabi é reduzida à análise dos mapas de monodromia direta e inversa do sistema linear.

Os primeiros capítulos foram escritos com propósito didático, servindo de fonte para futuros trabalho envolvendo o método de isomonodromia. Minha perspectiva com esta tese é que o método possa ser utilizado em outros modelos, exemplo a extensão do modelo de Rabi com simetria de paridade quebrada, proposta por Braak, ao introduzir um termo da forma $\gamma\sigma_1$ à Hamiltoniana de Rabi, uma simples extensão do que foi descrito por esse trabalho.

APÊNDICE A

Cadeia de Heisenberg

A.1 O toy model do Bethe Ansatz

A cadeia de spin de Heisenberg é o nosso 'toy model' para entender o Bethe Ansatz. Em particular, podemos estudar com bastante acurácia os estados de vácuo da teoria.

A.2 O Modelo

A hamiltoniana do modelo de Heisenberg de spin-$1/2$ em uma dimensão com N sítios e condições periódicas de contorno, i.e, $j+N \equiv j$ é dada por

$$\begin{aligned} H &= J\sum_{j=1}^{N} \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}, \\ &= J\sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2}(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^z S_{j+1}^z\right], \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $S^{\pm} \equiv S_j^x \pm iS_j^y$ são os operadores escada. A hamiltoniana (A.1) age em um espaço de Hilbert de dimensão 2^N gerados pela base ortogonal

$$\left|\sigma_1^z ... \sigma_N^z\right\rangle \equiv \left|\sigma_1^z\right\rangle \otimes ... \otimes \left|\sigma_N^z\right\rangle, \tag{A.2}$$

onde $|\sigma_n^z\rangle = |\pm\rangle_n$, onde o estado $|+\rangle$ representa spin z up e $|-\rangle$ representa o spin z down do n-ésimo sítio. Queremos encontrar os autoestados da Hamiltoniana (A.1). Definindo o spin total na direção z como

$$S_T^z = \sum_j S_j^z, \tag{A.3}$$

temos que

$$[S_T^z, H] = 0. \tag{A.4}$$

Portanto existe um autoestado comum entre esses dois operadores.

Além da simetria (A.4), a hamiltoniana (A.1) também possui simetria global $SU(2)$, pois comuta com o spin total, consequentemente com o spin total quadrado,

$$[S_T^2, H] = 0, \qquad \text{onde} \qquad S_T^2 = (S_T^x)^2 + (S_T^y)^2 + (S_T^z)^2. \tag{A.5}$$

O conjunto completo de operadores comutantes é composto por H, S_z^T e S_T^2. Uma vez que os 3 spins não comutam entre si, temos que escolher um deles para rotular o autoestado de H. Por praticidade, será S_T^z.

A.2.1 Estado de vácuo

Existe apenas um estado com $S_T^z = \frac{N}{2}$, que possui todos os spins up. Ele é autoestado de H,

$$|A\rangle = |+ \; + \ldots +\rangle\,, \tag{A.6}$$

$$H\,|A\rangle = J\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}(S_j^+S_{j+1}^- + S_j^-S_{j+1}^+) + S_j^zS_{j+1}^z\right]|A\rangle \tag{A.7}$$

$$\therefore \qquad H\,|A\rangle = J\sum_{j=1}^{N}\left[0+\frac{1}{4}\right]|A\rangle = \frac{JN}{4}\,|A\rangle\,. \tag{A.8}$$

com autovalor de energia $E_A = \frac{JN}{4}$.

Se J for negativo, veremos que este estado é o verdadeiro estado de vácuo (ground state, estado com menor energia). Como todos os spins estão alinhados (para cima), ele é ferromagnético. O autovalor E_A é a energia dessa configuração de spins e é exatamente igual ao caso clássico. Os mesmos argumentos mostram que caso todos os spins estivessem alinhados para baixo, esse estado também seria autoestado de H com a mesma autoenergia, porém com sinal negativo.

Se J for positivo então esse estado, na verdade, é o estado de maior energia. Continua sendo um autoestado, porém não é mais o estado de vácuo. Este caso chamado antiferromagnético será tratado mais adiante.

A.3 Uma perturbação do vácuo: magnon

Consideremos agora uma perturbação deste estado que possui $S_T^z = \frac{N}{2} - 1$, ou seja, aplicamos o operador S_j^- no vácuo. Temos N possibilidades de fazê-lo

$$|\, + \; + \ldots \underbrace{-}_{j} \ldots + \,\rangle \equiv |j\rangle\,, \qquad j = 1, ..., N. \tag{A.9}$$

O $|\,j\rangle$ não é autoestado da hamiltoniana (A.1). De fato, basta calcular,

$$\begin{aligned} H\,|j\rangle &= J\left[\left(\frac{N}{4}-1\right)|j\rangle + \frac{1}{2}\,|j-1\rangle + \frac{1}{2}\,|j+1\rangle\right] \\ &= E_A\,|j\rangle + J\left[\frac{1}{2}\,|j-1\rangle + \frac{1}{2}\,|j+1\rangle - |j\rangle\right]. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Percebe-se então que o autoestado verdadeiro é uma combinação dos $|\,j\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} f(j)\,|j\rangle\,, \qquad f(j) \text{ são coeficientes.} \tag{A.11}$$

Para determinar os $f(j)$, precisamos resolver a equação de autovalor

$$H\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{A.12}$$

e aplicar as condições de contorno.

Temos que resolver o seguinte problema

$$H\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{A.13}$$

$$\sum_{j=1}^{N} f(j)H\,|j\rangle = \sum_{i=1}^{N} Ef(j)\,|j\rangle \tag{A.14}$$

$$\sum_{j=1}^{N} f(j)E_A\,|j\rangle + f(j)J\left[\frac{1}{2}\,|j-1\rangle + \frac{1}{2}\,|j+1\rangle - |j\rangle\right] = \sum_{j=1}^{N} Ef(j)\,|j\rangle \tag{A.15}$$

Tomando produto interno com $\langle l|$ em (A.15) e escolhendo esta base como sendo ortonormal,

$$\langle l|j\rangle = \delta_{l,j}, \tag{A.16}$$

Encontramos a seguinte equação

$$E_A f(l) + J\left[\frac{f(l+1)}{2} + \frac{f(l-1)}{2} - f(l)\right]J = Ef(l). \tag{A.17}$$

Bethe então, supôs que $f(l)$ seria da forma

$$f(l) = C_k e^{ipl}, \tag{A.18}$$

pois a cadeia possui invariância translacional. Com isso, temos que

$$J\left[\frac{1}{2}e^{ip(l+1)} + \frac{1}{2}e^{ip(l-1)} - e^{ipl}\right] = \varepsilon_p e^{ipl},$$

$$J\left[\frac{1}{2}e^{ip} + \frac{1}{2}e^{-ip} - 1\right] = \varepsilon_p$$

e finalmente

$$\varepsilon_p = J[\cos p - 1]. \tag{A.19}$$

As funções $f(l)$ devem obedecer a condições periódicas de contorno, i.e,

$$f(l+N) = f(l), \tag{A.20}$$

logo, obtemos

$$C_k e^{ip(l+N)} = C_k e^{ipl} \Longrightarrow e^{ipN} = 1 = e^{i2\pi I}.$$

Isso implica dizer que o p em (A.19) é quantizado,

$$p = \frac{2\pi I}{N},\; I = 0,...,N-1. \tag{A.21}$$

Existem N autoestados diferentes porque I pode assumir N diferentes valores. Logo, o autoestado com $S_T^z = \frac{N}{2} - 1$ é

$$|\psi\rangle = C_p \sum_{l=1}^{N} e^{ipl} |l\rangle, \qquad p = \frac{2\pi I}{N} \tag{A.22}$$

com energia

$$E = \sum_{p=0}^{N-1} \varepsilon_p = J \sum_{p=0}^{N-1} (\cos p - 1). \tag{A.23}$$

Para que tenhamos

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

devemos ter

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{A.24}$$

A.4 Duas perturbações do vácuo: problema de espalhamento

Vamos aplicar mais uma vez o operador escada S_j^-. Desta forma, construiremos um estado com $S_T^z = \frac{N}{2} - 2$. Existem $\frac{N(N-1)}{2}$ estados com dois $-$'s

$$|+ + \ldots \underbrace{-}_{j_1} \ldots \underbrace{-}_{j_2} \ldots + \rangle \equiv |j_1, j_2\rangle, \qquad j_1, j_2 = 1, ..., N \tag{A.25}$$

com $|j_1, j_2\rangle = |j_2, j_1\rangle$ e $j_2 > j_1$. O autoestado deve ser combinação de $|j_1, j_2\rangle$'s

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, j_2} f(j_1, j_2) |j_1, j_2\rangle, \qquad j_2 > j_1, \tag{A.26}$$

e deve obedecer

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{A.27}$$

com condições de contorno periódicas. Portanto

$$\sum_{j_1=1}^{N-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{N} f(j_1, j_2) H |j_1, j_2\rangle = \sum_{j_1=1}^{N-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{N} f(j_1, j_2) E |j_1, j_2\rangle, \tag{A.28}$$

onde

$$\langle l_1, l_2 | j_1, j_2\rangle = \delta_{l_1, j_1} \delta_{l_2, j_2}. \tag{A.29}$$

Separando em dois casos, encontramos as seguintes equações

1. Excitações não- vizinhas, ou seja, $j_2 \neq j_1 + 1$

$$\begin{aligned} &J\left(\frac{N}{4} - 2\right) f(l_1, l_2) + \\ &\frac{J}{2}\left(f(l_1+1, l_2) + f(l_1-1, l_2) + f(l_1, l_2+1) + f(l_1, l_2-1)\right) = Ef(l_1, l_2) \end{aligned} \tag{A.30}$$

2. Excitações vizinhas, ou seja, $j_2 = j_1 + 1$

$$J\left(\frac{N}{4}-1\right)f(l_1,l_1+1)+ \\ \frac{J}{2}\left(f(l_1+1,l_1-1)+f(l_1-1,l_2)+f(l_1,l_1+2)\right)=Ef(l_1,l_1+1) \tag{A.31}$$

Note que o primeiro caso não podemos ter $j_1 = 1$ e $j_2 = N$ ao mesmo tempo, mas no segundo podemos. Portanto, a (A.31) funciona como condição de contorno. Para encontrar a solução, tentemos

$$f(l_1,l_2)=C(p_1,p_2)e^{ip_1l_1}e^{ip_2l_2}, \tag{A.32}$$

portanto

$$\varepsilon = J(\cos p_1+\cos p_2-2)=\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}. \tag{A.33}$$

Porém, não só (A.32) é solução de (A.33), temos também

$$f(l_1,l_2)=C(p_2,p_1)e^{ip_2l_1}e^{ip_1l_2}. \tag{A.34}$$

Então a solução geral é a superposição das duas possibilidades,

$$f(l_1,l_2)=C(p_1,p_2)e^{ip_1l_1}e^{ip_2l_2}+C(p_2,p_1)e^{ip_2l_1}e^{ip_1l_2}. \tag{A.35}$$

Para calcular os coeficientes $C(p_i,p_j)$, temos que eliminar os termos não diagonais das equações (A.30) e (A.31). Substituindo (A.35) em (A.31) e fazendo $j_1 = N$, encontramos que

$$\frac{C(p_1,p_2)}{C(p_2,p_1)}=\frac{e^{i(p_1-p_2)}+e^{-2ip_2}-2e^{-ip_2}}{e^{i(p_2-p_1)}+e^{-2ip_1}-2e^{-ip_1}}. \tag{A.36}$$

Se definirmos $\lambda_j \equiv \cot\left(\frac{p_j}{2}\right)$ e utilizando que

$$e^{ip_i}=\frac{\lambda_i+i}{\lambda_i-i} \tag{A.37}$$

obtemos

$$\frac{C(p_1,p_2)}{C(p_2,p_1)}=\frac{\lambda_1-\lambda_2+2i}{\lambda_1-\lambda_2-2i}. \tag{A.38}$$

Este número tem módulo igual a 1. Portanto, podemos codificá-lo em uma fase $e^{i\phi}$. Logo, somente a razão entre os dois coeficientes é importante

$$\frac{C(p_1,p_2)}{C(p_2,p_1)}=e^{i\phi}, \tag{A.39}$$

então

$$f(l_1,l_2)=C(e^{i(p_1l_1+p_2l_2+\phi/2)}+e^{i(p_2l_1+p_1l_2-\phi/2)}). \tag{A.40}$$

A fase ϕ deve obedecer a seguinte equação

$$2\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)=\cot\left(\frac{p_1}{2}\right)-\cot\left(\frac{p_2}{2}\right). \tag{A.41}$$

Usando as condições periódicas de contorno

$$f(l_1+N,l_2+N) = f(l_1,l_2), \tag{A.42}$$

temos

$$e^{i(p_1+p_2)N} = 1 \implies (p_1+p_2)N = 2\pi I \implies p_1+p_2 = \frac{2\pi I}{N}.$$

O vetor de onda total deve ser um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{N}$. Isto é consequência da invariância translacional. Também devemos ter

$$\begin{aligned} f(l_2,l_1+N) &= f(l_1,l_2), \\ f(l_1,l_2+N) &= f(l_2,l_1), \end{aligned}$$

uma vez que o $(l+N)$-ésimo sítio é igual ao l-ésimo e de acordo com a convenção, o primeiro índice é menor que o segundo, logo

$$\begin{aligned} e^{i(p_2N+\phi/2)} &= e^{-i\phi} \implies p_2N+\phi = 2\pi I_2, \\ e^{i(p_1N-\phi/2)} &= e^{i\phi} \implies p_1N-\phi = 2\pi I_1. \end{aligned}$$

Em resumo, o autoestado com duas excitações tem a forma

$$|\psi\rangle = \sum_{l_1,l_2} f(l_1,l_2)\,|l_1,l_2\rangle\,,\ (l_2 > l_1), \tag{A.43}$$

com

$$f(l_1,l_2) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(e^{i(p_1l_1+p_2l_2+\phi/2)} + e^{i(p_2l_1+p_1l_2-\phi/2)}\right), \tag{A.44}$$

$$E = \sum_{p_1,p_2=0}^{N-1} J(\cos p_1 + \cos p_2 - 2), \tag{A.45}$$

e p_1, p_2 e ϕ satisfazem as equações

$$2\cot\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cot\left(\frac{p_1}{2}\right) - \cot\left(\frac{p_2}{2}\right), \tag{A.46}$$

$$k_1 = \frac{2\pi I_1}{N} + \frac{\phi}{N}, \tag{A.47}$$

$$k_2 = \frac{2\pi I_2}{N} - \frac{\phi}{N}. \tag{A.48}$$

A.5 Espalhamento de número arbitrário de excitações: a solução de Bethe

Vamos agora generalizar para o caso onde

$$S_T^z = \frac{N}{2} - r. \tag{A.49}$$

Temos r valores de $p_i, i = 1, ..., r$. Existem $M = r!$ permutações rotuladas por $\sigma(1), ..., \sigma(r)$. Definindo $p_{\sigma(i)}$ como o i-ésimo momento permutado por σ, e $\sigma = 1, ..., r!$. A função de onda de Bethe é

$$f(l_1, ..., l_r) = \sum_{\sigma=1}^{M} A_\sigma e^{i(k_{\sigma(1)} l_1 + ... + k_{\sigma(r)} l_r)}. \tag{A.50}$$

O ansatz de Bethe requer

$$A_\sigma = C \exp\left[\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \phi_{ij}^\sigma\right], \qquad \phi_{ij}^\sigma = \pm\phi_{ij}. \tag{A.51}$$

A energia deste estado é

$$E = J \sum_{p_1,...,p_r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{r} (\cos p_i - 1) \tag{A.52}$$

e as equações relacionando ϕ e p

$$2\cot\left(\frac{\phi_{ij}}{2}\right) = \cot\left(\frac{p_i}{2}\right) - \cot\left(\frac{p_j}{2}\right). \tag{A.53}$$

Condições periódicas de contorno implicam

$$Np_i = 2\pi I_i + \sum_{j\neq i} \phi_{ij},\ i = 1, ..., r. \tag{A.54}$$

Estas são as *equações de Bethe* e foram escritas por Bethe em 1931 [26]. Bethe mostrou que elas funcionam para o modelo de Heisenberg $S = 1/2$, porém falham para $S > 1/2$. O fato de funcionar para $S = 1/2$ significa que este exemplo é *integrável*. Infelizmente não existe uma maneira sistemática de predizer quais sistemas serão integráveis, cada caso deve ser demonstrado diretamente. Claramente esses sistemas são casos especiais e em geral o sistema não será integrável. No entanto, uma vez que resultados exatos estão disponíveis para modelos integráveis, eles são extremamente importantes e contribuíram para o entendimento de sistemas de muitos corpos.

Hiato

Nossa tarefa agora é investigar o espectro da Hamiltoniana usando *Bethe Ansatz Algébrico*(Algebraic Bethe Ansatz).

A.6 Álgebra de observáveis

A álgebra de observáveis $\mathscr{A}$ é gerada pelas variáveis dinâmicas X_j^α, vinculada a cada sítio j. O índice α assume valores finitos, rotulando a α-ésima função no sítio j. A álgebra $\mathscr{A}$ estará definida se além dos geradores, definirmos as relações de comutação entre os X_j^α. Vamos apresentar alguns exemplos conhecidos.

1. Variáveis canônicas φ_n^α, π_n^α, $\alpha = 1,...,l$ com relações

$$\begin{aligned}
[\varphi_n^\alpha, \varphi_m^\beta] &= 0,\\
[\pi_n^\alpha, \pi_m^\beta] &= 0,\\
[\varphi_n^\alpha, \pi_m^\beta] &= i\, I\, \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

2. Variáveis de spin S_n^α, $\alpha = 1,2,3$ com a relação

$$[S_n^\alpha, S_m^\beta] = i\, I\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, S_n^\gamma\, \delta_{nm} \tag{A.55}$$

   onde $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ é o tensor completamente antissimétrico, $\varepsilon_{123} = 1$. Matematicamente, essas variáveis definem em cada sítio uma álgebra de Lie $su(2s+1)$, com representações finito-dimensional que são rotuladas pelos semi-inteiros $s = 0, 1/2, 1, ...$ e realizadas em C^{2s+1}. Na menor dimensão não trivial ($s = 1/2$), operadores S_n^α são representados pelas matrizes de Pauli σ_n^α com $S_n^\alpha = \frac{1}{2}\sigma_n^\alpha$.

O espaço de Hilbert para a representação da álgebra $\mathscr{A}$ tem uma forma natural de produtos tensoriais

$$\mathscr{H} = \bigotimes_{n=1}^{N} h_n = h_1 \otimes ... \otimes h_N \tag{A.56}$$

(onde todos h_n são iguais) e a variável X_n^α age não trivialmente apenas no espaço h_n, i.e,

$$X_n^\alpha = I \otimes ... \otimes X^\alpha \otimes ... \otimes I. \tag{A.57}$$

O espaço de Hilbert que realiza a cadeia XXX-$1/2$ é

$$\mathscr{H}_N = \bigotimes_{n=1}^{N} h_n, \tag{A.58}$$

onde cada espaço local h_n é bidimensional

$$h_n = \mathbb{C}^2. \tag{A.59}$$

A.6.1 Operador de Lax

O personagem principal do Algebraic Bethe Ansatz é o *operador de Lax*. A definição deste operador envolve o espaço local h_n e um espaço auxiliar V, que definimos no início como sendo $\mathbb{C}^2$. O operador $L_{n,a}(\lambda)$ age em $h_n \otimes V$ e tem a seguinte expressão explícita para o caso XXX-1/2

$$\begin{aligned} L_{n,a} : h_n \otimes V &\longrightarrow h_n \otimes V \\ L_{n,a}(\lambda) &= \lambda I_n \otimes I_a + i \sum_\alpha S_n^\alpha \otimes \sigma^\alpha \end{aligned} \tag{A.60}$$

onde I_n, S_n^α agem em h_n e I_a, σ^α são a unidade e as matrizes de Pauli em $V = \mathbb{C}^2$, λ é um parâmetro complexo, usualmente chamado de *parâmetro espectral*, lembrando-nos do seu papel como autovalor do operador de Lax.

Uma forma alternativa de escrever $L_{n,a}(\lambda)$ é usar o operador

$$P = \frac{1}{2}\left(I \otimes I + i \sum_\alpha \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha\right), \tag{A.61}$$

que é uma permutação em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$,

$$P(a \otimes b) = b \otimes a. \tag{A.62}$$

Em termos de $P_{n,a}$, que faz sentido devido ao fato que h_n e V são os mesmos espaços $\mathbb{C}^2$, temos

$$L_{n,a}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{i}{2}\right) I_{n,a} + iP_{n,a}. \tag{A.63}$$

A principal propriedade do operador de Lax é a relação de comutação para suas entradas. Considere dois exemplares de operadores de Lax $L_{n,a_1}(\lambda)$ e $L_{n,a_2}(\mu)$ agindo em h_n e V_1 e V_2. O produto $L_{n,a_1}(\lambda)L_{n,a_2}(\mu)$ e $L_{n,a_2}(\mu)L_{n,a_1}(\lambda)$ faz sentido no espaço $h_n \otimes V_1 \otimes V_2$. Por outro lado, deve existir um operador $R_{a_1,a_2}(\lambda - \mu)$ em $V_1 \otimes V_2$ tal que

$$R_{a_1,a_2}(\lambda - \mu)L_{n,a_1}(\lambda)L_{n,a_2}(\mu) = L_{n,a_1}(\lambda)L_{n,a_2}(\mu)R_{a_1,a_2}(\lambda - \mu). \tag{A.64}$$

A expressão explícita para $R_{a_1,a_2}(\lambda)$ é

$$R_{a_1,a_2}(\lambda) = \lambda I_{a_1,a_2} + iP_{a_1,a_2}, \tag{A.65}$$

onde I_{a_1,a_2} e P_{a_1,a_2} são a unidade e o operador de permutação em $V_1 \otimes V_2$. Chamaremos o operador $R_{a_1,a_2}(\lambda)$ de *R-matrix*. A equação (A.64) é chamada de *relação fundamental de comutação*.

A.6.2 Matriz de monodromia e quantidades conservadas

O operador de Lax $L_{n,a}(\lambda)$ têm uma interpretação geométrica natural como conexão ao longo da cadeia. Definindo o transporte paralelo entre os sítios n e $n+1$ através da equação de Lax

$$\psi_{n+1} = L_n \psi_n \tag{A.66}$$

para o vetor

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \end{pmatrix}, \tag{A.67}$$

com as entradas sendo elementos de $\mathscr{H}$, definido em (A.56). Usando recursivamente a equação (A.66), podemos definir o seguinte produto ordenado

$$T_{n_1 a}^{\ n_2}(\lambda) = L_{n_2,a}(\lambda)...L_{n_1,a}(\lambda), \tag{A.68}$$

que define o transporte de n_1 para n_2, e o produto completo da cadeia

$$T_{N,a}(\lambda) = L_{N,a}(\lambda)...L_{1,a}(\lambda), \tag{A.69}$$

chamado de *matriz de monodromia*. A matriz $T_{N,a}$tem a seguinte forma geral

$$T_{N,a} = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{A.70}$$

com entradas sendo operadores em $\mathscr{H}$. A matriz de monodromia satisfaz a equação

$$R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu)T_{N,a_1}(\lambda)T_{N,a_2}(\mu) = T_{N,a_2}(\mu)T_{N,a_1}(\lambda)R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu). \tag{A.71}$$

A monodromia $T_{N,a}(\lambda)$ é um polinômio em λ de ordem N, pois é formalmente um produto de N operadores de Lax,

$$T_{N,a}(\lambda) \approx L^N \approx \left(\lambda I \otimes I + i\sum_{\alpha}(S_n^{\alpha} \otimes \sigma^{\alpha})\right)^N.$$

Usando a fórmula do binômio de Newton, obtemos

$$T_{N,a}(\lambda) = \lambda^N + i\lambda^{N-1}\sum_{\alpha}(S_n^{\alpha} \otimes \sigma^{\alpha}) + ...$$

O spin total S^{α} aparece nos coeficientes do segundo termo do polinômio em λ. Se tomarmos o traço da equação (A.71) e usarmos o fato que

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B),$$

obtemos

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr}(R(\lambda-\mu))\ \mathrm{Tr}(T_{a_1}(\lambda))\ \mathrm{Tr}(T_{a_2}(\mu)) = \mathrm{Tr}(T_{a_2}(\mu))\ \mathrm{Tr}(T_{a_1}(\lambda))\ \mathrm{Tr}(R(\lambda-\mu)), \\ \mathrm{Tr}(T_{a_1}(\lambda))\ \mathrm{Tr}(T_{a_2}(\mu)) = \mathrm{Tr}(T_{a_2}(\mu))\ \mathrm{Tr}(T_{a_1}(\lambda)), \\ [\mathrm{Tr}(T_{a_1}(\lambda)), \mathrm{Tr}(T_{a_2}(\mu))] = 0. \end{gathered}$$

Definindo

$$F(\lambda) \equiv \mathrm{Tr}\,T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda), \tag{A.72}$$

temos uma família infinita de quantidades comutantes.

Vamos mostrar que a hamiltoniana XXX-$1/2$ pertence a essa família.

O ponto $\lambda = i/2$ é especial[49, 126] porque o operador (A.63) calculado neste ponto é

$$L_{n,a}(i/2) = iP_{n,a} \tag{A.73}$$

e para todo λ, temos

$$\frac{d}{d\lambda} L_{n,a}(\lambda) = I_{n,a}. \tag{A.74}$$

Vamos expandir $F(\lambda)$ em torno desse ponto. Para isso, vamos calcular a matriz de monodromia em $\lambda = i/2$

$$T_{N,a}(i/2) = i^N \, P_{N,a} \, P_{N-1,a} \, \dots \, P_{1,a}. \tag{A.75}$$

Usando o fato que

$$P_{a,b} \, P_{c,b} = P_{a,c} \, P_{a,b}, \tag{A.76}$$

a cadeia de permutações se torna

$$P_{1,2} \, P_{2,3} \, \dots \, P_{N-1,N} \, P_{N,a} \tag{A.77}$$

e tomando o traço sobre o espaço auxiliar, obtemos

$$\mathrm{Tr}_a P_{N,a} = I_N, \tag{A.78}$$

então

$$F(i/2) = \mathrm{Tr}_a \; T_{N,a}(i/2) = i^N \, P_{1,2} \, P_{2,3} \, \dots \, P_{N-1,N}. \tag{A.79}$$

Finalmente, vamos expandir $F(\lambda)$. Lembrando que

$$\begin{aligned} T_N(\lambda) &= \prod_{n=1}^{N} L_{n,a} \approx \left(\left(\lambda - \frac{i}{2} \right) I_{n,a} + iP_{n,a} \right)^N, \\ &= \left(\lambda - \frac{i}{2} \right)^N I_{n,a} + \sum_n \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) \, i^{N-1} \, P_{N,a} \dots \hat{P}_{n,a} \dots P_{1,a}, \end{aligned} \tag{A.80}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} T_N(\lambda) \bigg|_{\lambda = i/2} &= \sum_n \, i^{N-1} \, P_{N,a} \dots \hat{P}_{n,a} \dots P_{1,a}, \\ &= \sum_n \, i^{N-1} P_{1,2} \, P_{2,3} \, \dots P_{n-1,n+1} \dots \, P_{N-1,N} \, P_{N,a}, \end{aligned} \tag{A.81}$$

tomando o traço da equação, temos

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \bigg|_{\lambda = i/2} = \sum_n \, i^{N-1} P_{1,2} \, P_{2,3} \, \dots P_{n-1,n+1} \dots \, P_{N-1,N}, \tag{A.82}$$

e multiplicando por $F^{-1}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\lambda}F(\lambda)\right)F^{-1}(\lambda)\Big|_{\lambda=i/2} &= -i\sum_n P_{1,2}\ P_{2,3}\ ...P_{n-1,n+1}...\ P_{N-1,N}, \\
&\times P_{1,2}\ P_{2,3}\ ...P_{n-1,n}P_{n,n+1}...\ P_{N-1,N}, \\
\frac{d}{d\lambda}\ln F(\lambda)\Big|_{\lambda=i/2} &= -i\sum_n P_{n-1,n+1}\ P_{n,n+1}\ P_{n,n+1}, \\
&= \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{N-1} P_{n,n+1}. \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$P = \frac{1}{2}\left(I\otimes I + i\sum_\alpha \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha\right),$$

temos

$$\therefore H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} P_{n,n+1} - \frac{N}{2}. \qquad \text{(A.84)}$$

Portanto a Hamiltoniana de XXX-$1/2$ se escreve como

$$H = \frac{i}{2}\frac{d}{d\lambda}\ln F(\lambda)\Big|_{\lambda=i/2} - \frac{N}{2}. \qquad \text{(A.85)}$$

A.7 Equações de Bethe

Vamos calcular os autoestados do operador $F(\lambda)$. A partir de

$$T = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.86)}$$

$$T_{a_1} \equiv T\otimes I, \qquad \text{(A.87)}$$

$$T_{a_2} \equiv I\otimes T, \qquad \text{(A.88)}$$

e multiplicando as matrizes da equação (A.71), encontramos

$$\begin{aligned}
[B(\lambda), B(\mu)] &= 0, && \text{(A.89)}\\
A(\lambda)B(\mu) &= f(\lambda-\mu)B(\mu)A(\lambda) + g(\lambda-\mu)B(\lambda)A(\mu), && \text{(A.90)}\\
D(\lambda)B(\mu) &= h(\lambda-\mu)B(\mu)D(\lambda) + k(\lambda-\mu)B(\lambda)D(\mu), && \text{(A.91)}
\end{aligned}$$

onde

$$f(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda}, \qquad g(\lambda) = \frac{i}{\lambda}, \qquad \text{(A.92)}$$

$$h(\lambda) = \frac{\lambda + i}{\lambda}, \qquad k(\lambda) = -\frac{i}{\lambda}. \qquad \text{(A.93)}$$

Para encontrar a representação de 'mais alto peso' (highest weight representation), temos que encontrar um estado no espaço de Hilbert aniquilado por um operador de criação, no caso, escolheremos $C(\lambda)$

$$C(\lambda)|\Omega\rangle = 0. \tag{A.94}$$

Basta observar que para cada h_n, existe um vetor $|\omega_n\rangle$ tal que o operador de Lax $L_{n,a}(\lambda)$ se torna triangular no espaço auxiliar,

$$L_n(\lambda)|\omega_n\rangle = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & * \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix} |\omega_n\rangle . \tag{A.95}$$

O símbolo $*$ denota uma expressão de operadores que não são relevantes para a discussão. O vetor $|\Omega\rangle$ em $\mathscr{H}$ é o produto tensorial desses $|\omega_n\rangle$, i.e,

$$|\Omega\rangle = \bigotimes_{n=1}^{N} |\omega_n\rangle \tag{A.96}$$

então

$$T(\lambda)|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda)^N & * \\ 0 & \delta(\lambda)^N \end{pmatrix} |\Omega\rangle \tag{A.97}$$

onde

$$\alpha(\lambda) = \lambda + \frac{i}{2}, \qquad \delta(\lambda) = \lambda - \frac{i}{2}. \tag{A.98}$$

Resumindo, temos

$$C(\lambda)|\Omega\rangle = 0, \quad A(\lambda)|\Omega\rangle = \alpha(\lambda)^N |\Omega\rangle , \quad D(\lambda)|\Omega\rangle = \delta(\lambda)^N |\Omega\rangle \tag{A.99}$$

tal que $|\Omega\rangle$ é um autoestado de $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ simultaneamente, logo também de $F = A + D$. Outros autoestados são criados a partir de $|\Omega\rangle$ aplicando os operadores $B(\lambda)$

$$|\lambda_1 ... \lambda_l\rangle = B(\lambda_1)...B(\lambda_l)|\Omega\rangle . \tag{A.100}$$

Vamos analisar quais condições o vetor $|\lambda_1 ... \lambda_l\rangle$ deve satisfazer para que seja autovetor de $F(\lambda)$. Vamos calcular $A(\lambda)|\lambda_1 ... \lambda_l\rangle$

$$\begin{aligned} A(\lambda)|\lambda_1 ... \lambda_l\rangle &= A(\lambda)B(\lambda_1)...B(\lambda_l)|\Omega\rangle , \\ &= \prod_{k=1}^{l} f(\lambda - \lambda_k)\alpha^N(\lambda)|\lambda_1 ... \lambda_l\rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^{l} M_k(\lambda, \{\lambda\}) \left|\lambda_1 ... \hat{\lambda}_k ... \lambda_l, \lambda\right\rangle \end{aligned} \tag{A.101}$$

O primeiro termo já é diagonal. A expressão para M_k é

$$M_k(\lambda, \{\lambda\}) = g(\lambda_k - \lambda_j) \prod_{k \neq j}^{l} f(\lambda_k - \lambda_j)\alpha^N(\lambda_k). \tag{A.102}$$

Analogamente para $D(\lambda)$

$$\begin{aligned} D(\lambda)\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle &= D(\lambda)B(\lambda_1)...B(\lambda_l)\,|\Omega\rangle\,, \\ &= \prod_{k=1}^{l} h(\lambda-\lambda_k)\delta^N(\lambda)\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle +, \\ &+ \sum_{k=1}^{l} N_k(\lambda,\{\lambda\})\left|\lambda_1...\hat{\lambda}_k...\lambda_l,\lambda\right\rangle \end{aligned} \tag{A.103}$$

com

$$N_k(\lambda,\{\lambda\}) = k(\lambda_k-\lambda_j)\prod_{k\neq j}^{l} h(\lambda_k-\lambda_j)\delta^N(\lambda_k). \tag{A.104}$$

Observe que, pelas equações (A.92) e (A.93), temos

$$g(\lambda-\lambda_k) = -k(\lambda-\lambda_k),$$

logo, podemos escrever

$$N_k(\lambda,\{\lambda\}) = -g(\lambda_k-\lambda_j)\prod_{k\neq j}^{l} h(\lambda_k-\lambda_j)\delta^N(\lambda_k).$$

Assim,

$$(A(\lambda)+D(\lambda))\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle = \Lambda(\lambda,\{\lambda\})\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle \tag{A.105}$$

com

$$\Lambda(\lambda,\{\lambda\}) = \prod_{k=1}^{l} f(\lambda-\lambda_k)\alpha^N(\lambda) + \prod_{k=1}^{l} h(\lambda-\lambda_k)\delta^N(\lambda) \tag{A.106}$$

para cancelar o termo indesejado, devemos ter

$$\prod_{j\neq k}^{l} f(\lambda_k-\lambda_j)\alpha^N(\lambda_k) = \prod_{j\neq k}^{l} h(\lambda_k-\lambda_j)\delta^N(\lambda_k), \tag{A.107}$$

como

$$f(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda}, \quad h(\lambda) = \frac{\lambda+i}{\lambda},\ \alpha(\lambda) = \lambda+\frac{i}{2},\ \delta(\lambda) = \lambda-\frac{i}{2}, \tag{A.108}$$

temos

$$\prod_{j\neq k}^{l} \frac{\lambda_k-\lambda_j-i}{\lambda}\left(\lambda_k+\frac{i}{2}\right)^N = \prod_{j\neq k}^{l} \frac{\lambda_k-\lambda_j+i}{\lambda}\left(\lambda_k-\frac{i}{2}\right)^N.$$

$$\therefore \left(\frac{\lambda_k+\frac{i}{2}}{\lambda_k-\frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{j\neq k}^{l} \frac{\lambda_k-\lambda_j+i}{\lambda_k-\lambda_j-i}. \tag{A.109}$$

Esse sistema de equação é exatamente iguais às equações de Bethe encontradas anteriormente. Para visualizar isso, basta tomar o logaritmo da equação (A.109). Lembrando que

$$p(\lambda_j) = \frac{1}{i}\log\frac{\lambda+\frac{i}{2}}{\lambda-\frac{i}{2}},$$

e

$$\frac{1}{i}\ln\frac{\lambda+in}{\lambda-in}=\pi-2\arctan\frac{\lambda}{n}, \tag{A.110}$$

então

$$N\;i\;p(\lambda_k)=2\;i\;\pi+\sum_{j\neq k}^{l} i\pi-2\arctan\frac{\lambda_j-\lambda_k}{2} \tag{A.111}$$

$$Np(\lambda_j)\equiv N\;p_j=2\pi I_j+\sum_{k\neq j}^{l}\phi(\lambda_j-\lambda_k), \tag{A.112}$$

onde os inteiros I_j, $0\leq I_j\leq N-1$ definem o ramo do log e $\phi(\lambda)$ é um ramo fixo de $\frac{\lambda_k-\lambda_j+i}{\lambda_k-\lambda_j-i}$. que é exatamente a equação de Bethe encontrada anteriormente.

Podemos definir o operador U tal que

$$U\equiv i^{-N}F(i/2)=i^{-N}\,\mathrm{Tr}_a\,T_{N,a}(i/2)=P_{1,2}\;P_{2,3}\;...\;P_{N-1,N} \tag{A.113}$$

e U é o operador translação em $\mathscr{H}$. Note que

$$P_{n_1,n_2}X_{n_2}P_{n_1,n_2}=X_{n_1}, \tag{A.114}$$

além disso, o operador U é unitário

$$U^*U=UU^*=I, \tag{A.115}$$

porque as permutações tem a propriedade de

$$P^*=P;\qquad P^2=I. \tag{A.116}$$

Logo

$$U^{-1}\;X_n\;U=X_{n-1}. \tag{A.117}$$

Com isso, podemos introduzir um observável importante - o momento. Como o operador é unitário, podemos escrevê-lo na forma $U=e^{iP}$. O momento P produz uma translação infinitesimal correspondente a uma translação entre sítios na cadeia.

Vamos calcular a ação desse operador no autoestado $|\lambda_1...\lambda_l\rangle$

$$U\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle=i^NF(i/2)\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle=\prod_j\frac{\lambda_j+\frac{i}{2}}{\lambda_j-\frac{i}{2}}\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle\,, \tag{A.118}$$

como $U=e^{iP}$, então $P=-i\log U$. Tomando o logaritmo da equação anterior, temos

$$P\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle=\sum_j p(\lambda_j)\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle\,, \tag{A.119}$$

onde

$$p(\lambda)=\frac{1}{i}\log\frac{\lambda+\frac{i}{2}}{\lambda-\frac{i}{2}}. \tag{A.120}$$

Para calcular a energia, basta lembrar que

$$H = \frac{i}{2}\frac{d}{d\lambda}\ln F(\lambda)\bigg|_{\lambda=i/2} - \frac{N}{2},$$

como

$$F = i^N\, U = i^N\, e^{iP},$$

logo

$$\frac{d}{d\lambda}\ln F = i\frac{d}{d\lambda}P \tag{A.121}$$

e

$$P = \sum_j p(\lambda_j) = \sum_j \frac{1}{i}\log\frac{\lambda+\frac{i}{2}}{\lambda-\frac{i}{2}}.$$

Derivando a equação acima com respeito a λ

$$\begin{aligned} p(\lambda_j) &= \frac{1}{i}(\ln(\lambda+i/2)-\ln(\lambda-i/2)),\\ p'(\lambda_j) &= \frac{1}{i}\left(\frac{1}{\lambda+i/2}-\frac{1}{\lambda-i/2}\right),\\ &= \frac{-1}{\lambda^2+\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

temos

$$H\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle = \frac{1}{2}\sum_j(\varepsilon(\lambda_j)-1/2)\,|\lambda_1...\lambda_l\rangle \tag{A.122}$$

onde

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{4}}. \tag{A.123}$$

Podemos encontrar o espectro em função de p_j, basta eliminar o parâmetro λ invertendo a equação (A.120)

$$\varepsilon(p_j) = \cos p_j - 1/2. \tag{A.124}$$

A.8 Espectro físico, limite termodinâmico e o caso antiferromagnético

Quando se trata do caso antiferromagnético, $J < 0$, o vácuo tem número de excitações igual à $N/2$, em uma configuração muito especial,

$$...+\;-\;+\;-\;+\;-\;+\;-\;+... \tag{A.125}$$

onde os spins estão anti-alinhados. Quanticamente, corresponde ao estado

$$|+\;-\;+\;-\;+...\rangle \tag{A.126}$$

Este estado não é um autoestado do Hamiltoniano.

A equação de Bethe no limite termodinâmico se simplifica drasticamente. x

A.8.1 Equação integral fundamental

Temos que tomar o limite termodinâmico da equação

$$Np_i = 2\pi I_i + \sum_{j\neq i} \phi_{ij}, \; i = 1, ..., r, \tag{A.127}$$

com

$$2\cot\left(\frac{\phi_{ij}}{2}\right) = \cot\left(\frac{p_i}{2}\right) - \cot\left(\frac{p_j}{2}\right). \tag{A.128}$$

Claramente $I_i + N$ é equivalente a I_i (uma vez que adicionando N a I_i incrementa 2π em p_i). Portanto, podemos restringir I_i ao intervalo de inteiros $0 \leq I_i \leq N-1$ sem perda de generalidade.

Como I_i estão uniformemente espaçados, podemos introduzir uma nova variável

$$x_i = \frac{2i-1}{N} = \frac{I_i}{N} \tag{A.129}$$

que se tornará contínua no limite $N \longrightarrow \infty$, com valores de 0 a 1. Da mesma forma, podemos promover p_i para uma função contínua, i.e,

$$x_i = \frac{I_i}{N} \underbrace{\longrightarrow}_{N\longrightarrow\infty} x, \qquad p_i \longrightarrow p(x), \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{A.130}$$

$$x_j = \frac{I_j}{N} \underbrace{\longrightarrow}_{N\longrightarrow\infty} y, \qquad p_j \longrightarrow p(y), \qquad 0 \leq y \leq 1 \tag{A.131}$$

Portanto

$$2\cot\left(\frac{\phi(x,y)}{2}\right) = \cot\left(\frac{p(x)}{2}\right) - \cot\left(\frac{p(y)}{2}\right). \tag{A.132}$$

e vamos restringir ϕ ao intervalo $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

A equação (A.127) se torna

$$p(x) = 2\pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(x,y)dy, \tag{A.133}$$

(o fator de $1/2$ aparece porque os I_j's estão separados por 2 inteiros).

Devido ao comportamento da função cotangente, vamos dividir a integral em (A.133) em duas partes

$$p(x) = 2\pi x + \frac{1}{2}\int_0^x \phi(x,y)dy + \frac{1}{2}\int_x^1 \phi(x,y)dy. \tag{A.134}$$

Se $\cot\frac{\phi}{2} < 0$ e $-\pi \leq \phi \leq \pi$, devemos ter $\phi < 0$. Similarmente na segunda integral devemos ter $\phi > 0$.

Vamos agora achar a equação integral que rege o $\rho(\lambda)$. Diferenciando (A.133) com respeito a x, temos

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} = 2\pi + \frac{1}{2}\phi_1(x,x) + \frac{1}{2}\int_0^x \partial_x\phi(x,y)dy,\\ -\frac{1}{2}\phi_2(x,x) + \frac{1}{2}\int_x^1 \partial_x\phi(x,y)dy,\end{aligned}$$

onde

$$\phi_1(x,x) = \lim_{y \longrightarrow x-} \phi(x,y) = -\pi \tag{A.135}$$

na primeira integral, e

$$\phi_2(x,x) = \lim_{y \longrightarrow x+} \phi(x,y) = +\pi \tag{A.136}$$

na segunda integral. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= 2\pi + \frac{1}{2}(-\pi) - \frac{1}{2}(\pi) + \frac{1}{2}\int_0^x \partial_x \phi(x,y)dy + \frac{1}{2}\int_x^1 \partial_x \phi(x,y)dy, \\ &= \pi + \frac{1}{2}\int_0^1 \partial_x \phi(x,y)dy.\end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho(\lambda)}\frac{dp}{d\lambda},$$

com

$$p(\lambda) = \frac{1}{i}[\ln(\lambda + i/2) - \ln(\lambda - i/2)], \tag{A.137}$$

$$p'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2 + 1/4}, \tag{A.138}$$

então

$$\frac{1}{\rho(\lambda)}\left[\frac{-1}{\lambda^2 + 1/4}\right] = \pi + \frac{1}{2}\int \partial_x \phi(x,y)dy, \tag{A.139}$$

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi(\lambda^2 + 1/4)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\eta)d\eta}{\frac{1}{4}(\lambda - \eta)^2 + 1}. \tag{A.140}$$

A.8.2 Solução

Para resolver essa equação integral, devemos tomar a transformada de Fourier

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(q) e^{-iq\lambda} dq. \tag{A.141}$$

Substituindo na equação, temos

$$\tilde{\rho}(q') = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq'\lambda} d\lambda}{(\lambda^2 + 1/4)} - e^{-2q'}\tilde{\rho}(q'),$$

tal que

$$\begin{aligned}(1 + e^{-2q'})\tilde{\rho}(q') &= 2e^{-q\prime}, \\ \therefore \tilde{\rho}(q') &= \frac{1}{\cosh q'}.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iq\lambda}}{\cosh(q)} dq = \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}. \tag{A.142}$$

A.8.3 Energia do Vácuo

Conseguiremos agora calcular a energia do vácuo antiferromagnético. Para uma cadeia com N sítios vimos que a energia do ground state é

$$\varepsilon = J\sum_i(\cos p_i - 1).$$

No limite $N \longrightarrow \infty$, fazemos as mesmas transformações

$$p_i \longrightarrow p(x) \text{ e } \sum_{i=1}^{N/2} \longrightarrow \frac{N}{2}\int_0^1 dx,$$

de forma que a energia fica

$$\varepsilon = \frac{JN}{2}\int_0^1 dx[\cos p(x) - 1], \tag{A.143}$$

mas

$$\begin{aligned}\cos p(x) - 1 &= -2\sin^2\frac{p}{2}\\ &= -\frac{2}{\operatorname{cossec}^2\frac{p}{2}} = \frac{-2}{1+\cot^2\frac{p}{2}}\\ &= \frac{-2}{1+\lambda^2}\end{aligned} \tag{A.144}$$

e

$$dx = \frac{dx}{d\lambda}d\lambda = \rho(\lambda) \tag{A.145}$$

portando, o momento e a energia do estado de vácuo são dados por

$$P = N\int p_0(\lambda)\rho_0(\lambda)d\lambda = \frac{\pi}{2}N \mod 2\pi \equiv P_{\mathrm{AFM}} \tag{A.146}$$

$$E = E_0 + N\int \varepsilon_0(\lambda)\rho_0(\lambda)d\lambda = N\left(\frac{1}{4} - \ln 2\right) \equiv E_{\mathrm{AFM}} \tag{A.147}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Abrikosov, L. Gor'kov, I. Dzyaloshinskii, *Quantum field theoretical methods in statistical physics*, (2 ed., Pergamon, 1965).

[2] V. V Albert et al 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 504002

[3] V. Alba, M. Fagotti, and P. Calabrese, *Entanglement entropy of excited states*, J.Stat.Mech.0910 (2009) P10020, [arXiv:0909.1999].

[4] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Entanglement in many-body systems*, Rev. Mod. Phys. 80 (May, 2008) 517-576.

[5] Amico L and Korepin V,*Universality of the one-dimensional Bose gas with delta interaction*, 2004 Ann. Phys. 314 496

[6] F. Andreev, A. V. Kitaev, Nonlinearity 13, 1801,2000.

[7] F. Ares, J. G. Esteve, F. Falceto, and E. Sanchez-Burillo, *Excited state entanglement inhomogeneous fermionic chains*, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (Jan., 2014) 245301, [arXiv:1401.5922].

[8] F. Ares, J. G. Esteve, and F. Falceto, *Entanglement of several blocks in fermionic chains*, arXiv:1406.1668.

[9] I. Ya. Arefyeva, V. E. Korepin, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20, 1974, 680.

[10] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer,1978.

[11] M. F. Atiyah, R. Bott, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A308, 523 (1982).

[12] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge monographs on mathematical physics, 1951

[13] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, A. R. de Queiroz, and A. F. Reyes-Lega, *Entanglement and particle identity: A unifying approach*, Phys. Rev. Lett. 110 (Feb, 2013) 080503.

[14] A. Balachandran, T. Govindarajan, A. R. de Queiroz, and A. Reyes-Lega, *Algebraic Approach to Entanglement and Entropy*, Phys.Rev. A88 (2013) 022301, [arXiv:1301.1300].

[15] E. Barouch, B. M. McCoy, and M. Dresden, *Statistical mechanics of the xy model. i*, Phys. Rev. A 2 (Sep, 1970) 1075-1092.

[16] E. Barouch and B. M. McCoy, *Statistical mechanics of the xy model. ii. spin-correlation functions*, Phys. Rev. A 3 (Feb, 1971) 786-804.

[17] E. Barouch and B. M. McCoy, *Statistical mechanics of the xy model. iii*, Phys. Rev. A 3 (Jun, 1971) 2137-2140.

[18] B. M. McCoy, E. Barouch, and D. B. Abraham, *Statistical mechanics of the xy model. iv. time-dependent spin-correlation functions*, Phys. Rev. A 4 (Dec, 1971) 2331-2341.

[19]] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, and E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional ising model: Exact theory in the scaling region*, Physical Review B, vol. 13, no. 1, p. 316, 1976.

[20] H. Zhong, Q. Xie, M. Batchelor, and C. Lee, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 415302 (2013), 1305.6782.

[21] M. T. Batchelor and H.-Q. Zhou, (2014), 1408.3816

[22] M. T. Batchelor, H.-Q. Zhou , *Integrability vs exact solvability in the quantum Rabi and Dicke models*, Phys. Rev. A 91, 053808 (2015)

[23] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[24] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, *Quantum information and computation*, Nature 404 (2000), no. 6775 247-255.

[25] F.A. Berezin, G.P. Pokhil, V.M. Finkelberg, *Vestn. Mosk. Univ. Mat. Mekh*, 1,21,1964.

[26] H.A. Bethe: Z. Phys. 71, 205-226 (1931) 36, 38

[27] F. Bloch F, A. Siegert, 1940 Phys. Rev. 57 522

[28] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, *A Quantum Source of Entropy for Black Holes*, Phys. Rev. D34 (1986) 373-383.

[29] D. Braak, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 100401.

[30] D. Braak et al 2016 J. Phys. A: Math. Theor. 49 300301

[31] A.Braverman, P. Etingof P, D.Gaitsgory, *Quantum integrable systems and differential Galois theory*, 1997.

[32] E. Brezin and V. Kazakov,*Exactly solvable field theories of closed strings*, Physics Letters B, vol. 236, no. 2, pp. 144–150, 1990

[33] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, S. Haroche, 1996 Phys. Rev. Lett. 76 1800

[34] B. C. da Cunha, A. Queiroz, M. Carvalho de A., *On the Existence of Monodromies for the Rabi model*, 2016 J. Phys. A: Math. Theor. 49 194002

[35] F. Novaes, B.C. da Cunha, J. High Energ. Phys. (2014) 2014: 132

[36] B. C. da Cunha F. Novaes, Phys. Rev. D 93, 024045, 2016

[37] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2004 (2004), no. 06 P06002.

[38] J.-S. Caux and J. Mossel, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2011, P02

[39] Chen Q-H, Wang C, He S, Liu T and Wang K-L 2012 Phys. Rev. A 86 023822

[40] R. Conte, *The Painleve property: one century later, CRM series in mathematical physics*, 199

[41] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*, American Mathematical Soc., 2000, vol. 3

[42] B. Dubrovin, M. Mazzocco, (2007), math/9806056

[43] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, Springer, 1996.

[44] H.-P. Eckle, H. Johannesson 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 29400

[45] A. Edelman and N. R. Rao, *Random matrix theory*, Acta Numerica, vol. 14, pp. 233–297, 2005

[46] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Area laws for the entanglement entropy - a review*, Rev. Mod. Phys. 82, (Aug., 2008) 277, [arXiv:0808.3773].

[47] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons(Gamiltonov podkhod v teorii solitonov, Publisher Nauka, Moscow 1986)*, translation by Springer Series in Soviel Mathematics, 1987.

[48] L.D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*, C95-09-26, p.pp. 149-219 [arXiv:9605187 [hep-th]].

[49] V.O. Tarasov , I,. A. Takhtadzhyan, and L. D. Faddeev, *Local Hamiltonians for Integrable Quantum Models on a Lattice*, Translated from Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, Vol.57, No.2, pp.163-181, November, 1983

[50] H. Flaschka, A.C. Newell, *Monodromy and spectrum-preserving deformations I*, Comm. Math. Phys. 76 (1980) 65-116.

[51] H. Flaschka, A.C. Newell, *The inverse monodromy transform is a canonical transformation*, Math.Studies 61, North Holland, (1982) 65-91

[52] M.V. Fedoryuk, *Asymptotics integrals and series*, Moscow, Nauka, 1987.

[53] I. D. Feranchuk et al 2016 J. Phys. A: Math. Theor. 49 454001

[54] H. Flashka, A. C. Newell, Commun. Math. Phys., 76, 65 (1980)

[55] A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, and V. Novokshenov, *Painlevé transcendents: The Riemann-Hilbert approach*, 2006.

[56] A. Fokas and S. Tanveer, *A hele-shaw problem and the second painlevé transcendent*, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 124, no. 01. Cambridge Univ Press, 1998, pp. 169–191

[57] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 81, Springer-Verlag, 1981

[58] F. Franchini, *Notes on Bethe Ansazt Techniques*, Trieste, Italy, 2011.

[59] R. Fuchs, Math. Annal., 63, 301 (1907).

[60] B. Gambier, Acta Math., 33, 1 (1909).

[61] R. Garnier, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 29, 1 (1912).

[62] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, JHEP 1210, 038 (2012), 1207.0787.

[63] O. Gamayun, N. Iorgov, and O. Lisovyy, J.Phys. A46, 335203 (2013), 1302.1832

[64] D. J. Gross and A. A. Migdal, *A nonperturbative treatment of two-dimensional quantum gravity*, Nuclear Physics B, vol. 340, no. 2, pp. 333–365, 1990

[65] K. Heun, Math. Annal., 33, 161 (1889)

[66] E. Hille, Einar, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley-Interscience, 1976

[67] D. Iagolnitzer, Saclay, 1977.

[68] A.R. Its and V.Y. Novokshcnov, *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[69] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.

[70] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Ioshida, *From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig (1991).

[71] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Proc. IEEE 51 (1963) 89.

[72] M. Jimbo, T. Miwa, and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I*, Physica 2D (1981), 306-352.

[73] M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II*, Physica 2D (1981), 407-448.

[74] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato, *Density matrix of an impenetrable bose gas and the fifth painlevé transcendent*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 1, no. 1, pp. 80–158, 1980

[75] B. R. Judd, Journal of Physics C: Solid State Physics 12, 1685 (1979)

[76] N. M. Katz and P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Soc., 1999, vol. 45.

[77] G. Khitrova, H.M. Gibbs, M. Kira, S.W. Koch, A. Scherer, Nat. Phys. 2 (2006) 81.

[78] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge: Cambridge University Press),1993

[79] O. I. Patu, V. E. Korepin, and D. V. Averin, *Correlation functions of one-dimensional lieb-liniger anyons*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (July, 2007) 14963-14984,

[80] O. I. Patu, V. E. Korepin, and D. V. Averin, *One-dimensional impenetrable anyons in thermal equilibrium. i. anyonic generalization of lenard's formula*, J. Phys. A: Math. Theor.41 (Jan., 2008) 145006, [arXiv:0801.4397]

[81] V. Korepin, *Universality of entropy scaling in 1d gap-less models*, Physical Review Letters 096402 (2004) [cond-mat/0311056].

[82] P.P. Kulish, *Teor. Mat. Fiz.* , 26, 1976, 188.

[83] Kulish P, Reshetikhin N and Sklyanin, *Yang-Baxter equation and representation theory: I* , 1981 Lett. Math. Phys. 5 393

[84] Kulish P P and Sklyanin E K, *Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet*, 1979, Phys. Lett. A 70 461

[85] P. P. Kulish, K. E. Sklyanin, *Solutions of the Yang-Baxter equation*, 1982 J. Math. Sci. 19 1596

[86] G. Landi, *An introduction to noncommutative spaces and their geometry*, hep-th/9701078.

[87] J. I. Latorre, E. Rico, G. Vidal, *Ground state entanglement in quantum spin chains*, Quant.Inf.Comput. 4 (2004) 48-92, [quant-ph/0304098]

[88] J. I. Latorre and A. Riera, *A short review on entanglement in quantum spin systems*, J. Phys. A: Math. Theor. 42 (June, 2009) 504002, [arXiv:0906.1499].

[89] W. Lay, A. Seeger, S. Yu Slavyanov, *Classification Heun's Differential Equation*, Oxford: Oxford University Presss, 1995.

[90] D. Levi and P. Winternitz,*Painlevé Transcendents: Their Asymptotics and Physical Applications: Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop on..., Held September 3-7, 1990, in Sainte-Adéle, Québec, Canada*, Plenum Press, 1992.

[91] A. J Maciejewski, T. Stachowiak, 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 244003

[92] Maciejewski A J, Przybylska M, Stachowiak T 2014 Phys. Lett. A 378 16

[93] J. Malmquist, Ark. Mat. Astr. Fys., 17, 1 (1922-1923).

[94] V. E Manucharyan et al 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 294001

[95] T. Matsubara, *A New Approach To Quantum Statistical Mechanics*, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351.

[96] B. M. McCoy and S. Tang, Physica 18D, 190 (1985).

[97] B. M. McCoy and S. Tang, Physica 19D, 42 (1986).

[98] B. M. McCoy and S. Tang, Physica 20D, 187 (1986).

[99] B. M. McCoy, J. H. Perk, and R. E. Shrock, *Time-dependent correlation functions of the transverse ising chain at the critical magnetic field, Nuclear Physics B, vol. 220*, no. 1, pp. 35–47, 1983.

[100] J.B. McCuire. *J. Math Phys.*, 5, 1964,622.

[101] T. Miwa, *Painleve property of monodromy preserving deformation equation and analytictry of τ-functions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,17 (1981), 703-721.

[102] G. Mussardo, *Statistical field theory : an introduction to exactly solved models in statistical physics*, Oxford graduate texts, Oxford University Press, 2010.

[103] T. Nishioka, *Holographic Entanglement Entropy: An Overview*, J.Phys. A42 (2009) 504008 arXiv:0905.0932 [hep-th]

[104] F. Novaes and B. Carneiro da Cunha, JHEP 1407, 132 (2014), arXiv:1404.5188 [hep-th].

[105] K. Okamoto, Ann. Math. Pure Appl., 146, 337 (1986)

[106] P. Painlevé, Bull. C. R. Acad. Sci. Paris, 126, 1697 (1898); Bull. Soc. Math. France, 28, 201 (1900); Acta Math., 25, 1 (1902).

[107] J.B. Parkinson, D.J.J. Farnell, *An Introduction to Quantum Spin Systems*, Springer, Berlin Heidelberg 2010

[108] I. Peschel, *Calculation of reduced density matrices from correlation functions*, J.Phys.A:Math.Gen. 36, (2003) L205, [cond-mat/0212631].

[109] I. I. Rabi, Phys. Rev. 49, 324 (1936).

[110] I. I. Rabi, Phys. Rev. 51, 652 (1937).

[111] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, (Oxford University Press, Oxford, New York), 1995

[112] L. Schlesinger, Uber eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mir resten kritischen Punkten, J. ffir R. und Angcw. Math. 141 (1912), 96-145.

[113] B. Schroer, T.T. Truong, P.H. Weisz, *Phys. Lett. B*, 63, 1976, 422.

[114] S. Schweber, Ann. Phys., NY 41 (1967) 205

[115] M. O. Scully, and M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[116] J. Semple, M. Kollar 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 044002

[117] S.Y. Slavyanov, W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities, Oxford Mathematical Monographs*, 2000

[118] S. Yu. Slavyanov, J. Phys. A, 29, 7329 (1996).

[119] S. Yu. Slavyanov, W. Lay, and A. Seeger, *Classification of Heun's Differential Equations*, Oxford Univ. Press, Oxford (1995)

[120] S. Yu. Slavyanov, Theor. Math. Phys., 119, 393 (1999)

[121] Y. Sibuya, Stokes Phenomena, Bull. Amer. Math. Soc, 83 (1977) No 5, 1075-1077.

[122] S. N. Solodukhin, *Entanglement entropy of black holes*, Living Rev. Relativity 14, (Apr., 2011) ,8, [arXiv:1104.3712].

[123] Pedernales J S, Lizuain I, Felicetti S, Romero G, Lamata L and Solano E 2015 Sci. Rep. 5 15472

[124] M. Srednicki, *Entropy and area*, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 666-669, [hep-th/9303048].

[125] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, American Mathematical Soc., 2012, vol. 132

[126] Tarasov V O, Takhtadzhyan L A and Faddeev L D, Local Hamiltonians for integrable quantum models on a lattice, 1983 Theor. Math. Phys. 57 1059

[127] Tarasov V O, Local Hamiltonians for integrable quantum models on a lattice. II , 1984 Theor. Math. Phys. 61 1211

[128] R. J. Thompson, G. Rempe G, H. J. Kimble, 1992 Phys. Rev. Lett. 68 1132

[129] C. A. Tracy and H. Widom, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto 47, 361 (2011).

[130] J. Tuorila, M. Silveri, M. Sillanpaa, E. Thuneberg, Y. Makhlin, P. Hakonen, 2010 Phys. Rev. Lett. 105 257003

[131] E. R J Vandaele et al 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 114002

[132] S.N. Vergeles, V.M. Gryanik, *Yyad. Fiz.*, 23, 1976, 1324.

[133] M. Wakayama 2017 J. Phys. A: Math. Theor. 50 174001

[134] W. Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Interscience-Wiley, New York, 1965.

[135] S. Weigert, The problem of quantum integrability, 1992 Physica D 56 107

[136] S. Weigert, G. Muller, Quantum integrability and action operators in spin dynamics, 1995 Chaos, Solitons Fractals 5 1419 Integrals, Entropy and Chaos

[137] M. Werther, F. Grossmann 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 014001

[138] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models*, Annals Phys. 120 (1979) 253.

[139] Al. B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: Scaling 3-state potts and Lee-Yang models*, Nuclear Physics B, Volume 342, Issue 3, 8 October 1990, Pages 695-720

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).