



Universidade de Brasília
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Lei de Stefan-Boltzmann e Efeito Casimir para o
Campo de Duffin-Kemmer-Petiau via Dinâmica de
Campos Térmicos**

Tarcio Fonseca Furtado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
conclusão do Mestrado em Física

Orientador

Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa

Coorientador

Prof. Dr. Faqir C. Khanna

Brasília
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

FF6761 Fonseca Furtado, Tarcio
Lei de Stefan-Boltzmann e Efeito Casimir para o Campo de
Duffin-Kemmer-Petiau via Dinâmica de Campos Térmicos /
Tarcio Fonseca Furtado; orientador Sérgio Costa Ulhoa; co
orientador Faqir Khanna. -- Brasília, 2018.
98 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2018.

1. Campo de Duffin-Kemmer-Petiau. 2. Dinâmica de Campos
Térmicos. 3. Lei de Stefan-Boltzmann. 4. Efeito Casimir. I.
Costa Ulhoa, Sérgio, orient. II. Khanna, Faqir, co-orient.
III. Título.

"Lei de Stefan-Boltzmann e Efeito Casimir para o
Campo de Duffin-Kemmer-Petiau via Dinâmica de
Campos Térmicos."

Por

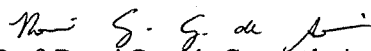
Tarcio Fonseca Furtado.

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como
parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

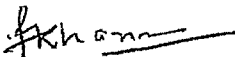
Aprovada por:



Prof. Sérgio Costa Ulhoa
IF/UnB



Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim
FGA/UnB



Prof. Faqir Khanna
University of Victoria

Prof. Dr. Geraldo Magela e Silva
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha amada e maravilhosa esposa Michele Santos Segarra Domench, ao meu filho Lucca, que logo chegará alegrando nosso mundo, ao Ryan Santos, meu filho de coração, e à minha querida e guerreira mãe Divanete Almeida Fonseca.

São vocês a maior motivação na minha vida!

Agradecimentos

Agradeço à Deus e à minha família.

Ao meu orientador Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa, por todos os seus ensinamentos, dedicação e auxílio.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Faqir C. Khanna, por toda a sua atenção e sabedoria quando estive no Canadá.

A todos os professores que passaram em minha vida, pois contribuíram para a minha jornada na Física.

Aos amigos que adquiri ao longo da vida.

A Universidade de Brasília pela oportunidade em desenvolver meus estudos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão sobre a teoria do campo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) e seus principais aspectos algébricos. Analisamos a estrutura das funções de onda para os setores escalares e vetoriais do formalismo de DKP correspondendo, respectivamente, à partículas de spin 0 e spin 1. Um estudo sobre o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) é realizado, expondo os principais aspectos teóricos e algébricos para os campos relativísticos bosônicos. Também é desenvolvida uma abordagem matemática para o cálculo do vácuo térmico do tensor de energia-momento do campo de DKP , após a duplicação do espaço de Hilbert. Em seguida, utilizamos esses resultados para calcular a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir sobre o formalismo do campo de DKP através dos processos de vácuo térmico.

Palavras-chave: Campo de Duffin-Kemmer-Petiau, Dinâmica de Campos Térmicos, Lei de Stefan-Boltzmann, Efeito Casimir

Abstract

This work presents useful information about the Duffin-Kemmer-Petiau (*DKP*) Field Theory. We analysed the structure of the wave functions in the scalar and vectors sectors of formalism in the *DKP* corresponding, respectively, at particles with spin 0 and particles with spin 1. A study on Thermo Fields Dynamics (*TFD*) is performed, exposing the very important theoretical and algebraic aspects for bosonic relativistic fields. It also developed a mathematical approach for calculation of thermal vacuum in the *DKP* energy-momentum tensor, after doubling Hilbert space. Then, we use these results for calculation of Stefan-Boltzmann Law and Casimir Effect in formalism *DKP* through of process thermal vacuum.

Keywords: Duffin-Kemmer-Petiau Field, Thermo Fields Dynamics, Stefan-Boltzmann Law, Casimir Effect

Sumário

1	Introdução	1
2	Campo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)	4
2.1	A equação de DKP e a álgebra das matrizes γ^μ	4
2.2	Projetores de Umezawa	7
2.2.1	Setor Escalar	7
2.2.2	Setor Vetorial	9
2.3	Campo Escalar de DKP	11
2.3.1	Função de onda de DKP - Setor de Spin 0	11
2.3.2	Lagrangiana do Campo de DKP - (Spin 0)	12
2.3.3	Tensor de Energia-Momento do Campo de DKP - (Spin-0)	14
2.3.4	Estado de Vácuo do Campo Escalar de DKP	16
2.4	Campo Vetorial de DKP	17
2.4.1	Função de onda de DKP - Setor de Spin 1	17
2.4.2	Lagrangiana do Campo de DKP - Setor Vetorial (Spin-1)	21
2.4.3	Tensor de Energia-Momento do Campo de DKP - Setor Vetorial (Spin-1)	22
2.4.4	Estado de Vácuo do Campo Vetorial de DKP	25
3	Dinâmica de Campos Térmicos	28
3.1	Espaço Termal de Hilbert	28
3.2	Osciladores Térmicos	31
3.2.1	Osciladores Bosônicos	31
3.2.2	Transformação de Bogoliubov de Operadores Bosônicos	34
3.2.3	Operadores Térmicos Bosônicos	36
3.3	Transformação Generalizada de Bogoliubov	39
4	Dinâmica de Campos Térmicos aplicada ao Campo de Duffin-Kemmer-Petiau	42
4.1	Estado de Vácuo Térmico do Campo de DKP	42
4.1.1	Vácuo Térmico - Setor Escalar	42

4.1.2	Vácuo Térmico - Setor Vetorial	44
5	Aplicações dos Campos Térmicos de DKP	47
5.1	O Campo Escalar de DKP	47
5.1.1	Lei de Stefan-Boltzmann	47
5.1.2	Efeito Casimir para o Campo Escalar de DKP à Temperatura Zero . .	56
5.1.3	Efeito Casimir para o Campo Escalar de DKP à Temperatura Finita .	65
5.2	O Campo Vetorial de DKP	74
5.2.1	Lei de Stefan-Boltzmann	74
5.2.2	Efeito Casimir para o Campo Vetorial de DKP à Temperatura Zero . .	75
5.2.3	Efeito Casimir para o Campo Vetorial de DKP à Temperatura Finita .	78
6	Conclusões	83
	Referências	85
	Apêndice	86
A	Matrizes γ^μ de DKP - Setor Escalar	87
B	Matrizes γ^μ de DKP - Setor Vetorial	88

Capítulo 1

Introdução

Um dos principais interesses da física é entender o comportamento das flutuações quânticas de vácuo. Com isso, é natural que se procure estudar teórica e experimentalmente os processos macroscópicos e microscópicos. Desta forma, quando ocorre o desenvolvimento de uma tecnologia baseada em algum fundamento da mecânica quântica, como ocorre com a Computação Quântica, por exemplo, o conceito que desempenha crucial importância é o da temperatura.

Na presente dissertação investigamos a lei de Stefan-Boltzmann e o efeito Casimir a partir do método da Dinâmica de Campos Térmicos (*DCT*) aplicada ao campo de Duffin-Kemmer-Petiau (*DKP*), para uma melhor compreensão dos efeitos térmicos em campos relativísticos bosônicos.

Após investigar o problema dos estados de energias da equação de Klein-Gordon-Fock, Dirac propõe uma teoria relativística explicando a existência de uma equação de primeira ordem na derivada temporal que conduzisse a uma densidade de probabilidade positiva-definida, análoga a equação de Schrödinger, e invariante pelas transformações de Lorentz. Com o sucesso da teoria de Dirac para descrever partículas relativísticas de massa m e spin- $\frac{1}{2}$ surge o interesse em direcionar os esforços na busca de equações relativísticas de primeira ordem que descrevam partículas de spin-0 e spin-1, que possam ser usadas como uma forma alternativa às equações de segunda ordem de Klein-Gordon (*KG*) e Proca, respectivamente. As primeiras investigações tiveram início principalmente com de Broglie [1], que buscou combinar dois léptons para obter um fóton massivo, e prosseguiram com Petiau [2] e, independentemente, com Kemmer [3] e Duffin [4]. A forma final do que passou a ser conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (*DKP*) foi apresentada por Kemmer em 1939 [5].

A equação de *DKP* é uma equação matricial de forma similar à de Dirac, em que as matrizes γ são substituídas por matrizes que satisfazem uma álgebra mais complicada, conhecida como álgebra de *DKP*, admitindo três representações irredutíveis: uma de

ordem 5 para partículas com spin-0, uma de ordem 10 para partículas com spin-1 e uma representação trivial de ordem 1.

Apesar de ter motivado a elaboração de vários trabalhos, o estudo da teoria de DKP apresentou algumas desilusões nos anos 1950 originadas da incerteza na equivalência completa com a teoria de KG . Contudo, resultados como os obtidos por [6] no estudo de quebras de simetria e processos hadrônicos mostram que os dois formalismos, DKP e KG , podem produzir resultados diferentes. Entretanto, o formalismo DKP mostrou-se mais rico do que o de KG quanto à introdução de interações [7]. Recentemente, pesquisas realizadas mostram provas de equivalência entre os elementos físicos da matriz S para o campo escalar quântico ao interagir com campos eletromagnéticos e de Yang-Mills, externos ou quânticos, e também com um campo gravitacional externo [8].

Ao longo dos anos, o estudo de efeitos térmicos no contexto de física fundamental, principalmente aqueles fenômenos ligados à física de altas energias e cosmologia, favoreceu a criação de três maneiras de introduzir efeitos de temperatura em estados quânticos. A primeira abordagem para tratar uma teoria quântica de campos à temperatura finita foi apresentada por Matsubara [9], chamada de formalismo do *tempo imaginário*, aplicada à sistemas em equilíbrio associando temperatura com uma coordenada complexa.

O segundo formalismo abordando efeitos de temperatura em teoria quântica de campos surge da necessidade de estudar sistemas fora do equilíbrio, onde o tempo real é fundamental. Diante deste contexto, Schwinger [10, 11] e Keldysh [12] propuseram um formalismo de tempo real construído a partir de elementos de tempo imaginário. Esse formalismo, via integrais de trajetória, é conhecido como trajetória temporal fechada.

Finalmente, há o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), a qual será usada neste trabalho, duplica o espaço de Fock e usa a transformação de Bogoliubov para introduzir temperatura. Tal teoria, baseada no estado $|0(\beta)\rangle$, foi desenvolvida por Takahashi e Umezawa [13, 14, 15] e é usado para sistemas em equilíbrio. Sendo elaborado a partir da noção de espaços vetoriais, a DCT se diferencia de outros formalismos térmicos por ser estabelecido numa estrutura vetorial de espaços de Hilbert H . Assim, a construção da DCT faz uma duplicação nos graus de liberdade, usando as chamadas *regras de conjugação til (dual)*. Dessa forma, o espaço de Hilbert térmico H_T é um espaço de Hilbert duplicado composto pelo produto direto entre espaço de Hilbert H original, que tem informações dos estados físicos, e o espaço de Hilbert til \tilde{H} ligado a um sistema fictício. De modo similar, todo operador A atuando em H tem um operador imagem \tilde{A} atuando em \tilde{H} .

Esta dissertação foi estruturada da seguinte forma: No Capítulo 2 revisamos o formalismo do campo de DKP , introduzindo a equação fundamental e as propriedades algébricas que as matrizes γ de DKP devem satisfazer [16, 17]. Além disso, apresentamos os

operadores que selecionam as componentes físicas do campo de DKP , ou seja, o setor de $spin-0$ (campo escalar) e o setor de $spin-1$ (campo vetorial). No Capítulo 3 desenvolvemos os principais aspectos do formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos para a construção da teoria quântica de campos à temperatura finita. O Capítulo 4 apresenta a Dinâmica de Campos Térmicos sobre o campo de DKP . Já o Capítulo 5 destina-se em apresentar a aplicação dos campo térmicos de DKP . As conclusões desta dissertação são apresentadas no Capítulo 6.

Capítulo 2

Campo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

2.1 A equação de DKP e a álgebra das matrizes γ^μ

A equação de *DKP* fundamental é dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (2.1)$$

onde γ^μ são as matrizes de *DKP* com dimensão 16 e que satisfazem a álgebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma^\sigma + g^{\sigma\nu} \gamma^\mu, \quad (2.2)$$

e $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski com assinatura $(+, -, -, -)$.

Há um conjunto de matrizes hermitianas que complementa as matrizes γ^μ de *DKP*, definidas por

$$\eta^\mu \equiv 2\gamma^\mu \gamma^\mu - g^{\mu\mu}, \quad (2.3)$$

que satisfaz a relação

$$(\eta^\mu)^2 = (g^{\mu\mu})^2 = \mathbb{1}. \quad (2.4)$$

A álgebra *DKP* das matrizes γ^μ admite três representações irredutíveis: uma representação de 5 dimensões associada com partículas de spin-0 (setor escalar), uma representação de 10 dimensões associada com partículas de spin-1 (setor vetorial) e uma representação trivial de 1 dimensão. Uma possível representação para as matrizes de *DKP* são definidas em (A.1) e (A.2), para *campos escalares*, e em (B.1) e (B.2), para *campos vetoriais*. O estado dinâmico ψ é uma função de onda multicomponente: para uma partícula de spin-0 tem um espinor de 5 componentes e para partículas de spin-1 tem um espinor de 10 componentes. Dessa forma, devido a irredutibilidade das três representações, das quais

uma é de ordem 1, uma de ordem 5 e a outra é de ordem 10, a álgebra expressa por (2.2) gera um conjunto de 126 matrizes linearmente independentes [5] dada por

$$(1)^2 + (5)^2 + (10)^2 = 126. \quad (2.5)$$

As matrizes γ^μ tem seu conjugado hermitiano dado através de

$$\gamma^{\mu\dagger} = \eta^0 \gamma^\mu \eta^0. \quad (2.6)$$

A função de onda ψ multicomponente de *DKP* tem função de onda adjunta $\bar{\psi}$ definida por

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \eta^0, \quad (2.7)$$

onde ψ^\dagger é o conjugado hermitiano de ψ .

Assim, tomando o conjugado hermitiano da equação de *DKP* em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi)^\dagger - m\psi^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \gamma^\mu \eta^0 - m\psi^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu (\psi^\dagger \eta^0) \gamma^\mu (\eta^0)^2 - m\psi^\dagger \eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A equação de continuidade da teoria de *DKP* é obtida através de uma prática manipulação matemática. Multiplicando a equação de *DKP* em (2.1) por $\bar{\psi}$ à esquerda, temos

$$i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = 0. \quad (2.9)$$

Agora, multiplicando a equação de *DKP* conjugada em (2.8) por ψ à direita, temos

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + m\bar{\psi} \psi = 0. \quad (2.10)$$

Somando (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, podemos definir a densidade de quadricorrente como

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.12)$$

e, portanto

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.13)$$

Entretanto, o componente temporal de quadricorrente, j^0 , não é positivo-definido, impedindo sua interpretação como uma densidade de probabilidade. Todavia j^0 pode ser interpretado como uma densidade de carga.

A covariância da equação de Duffin-Kemmer-Petiau é estudada sob as transformações de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.14)$$

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad (2.15)$$

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x), \quad (2.16)$$

$$m' = m, \quad (2.17)$$

onde a invariância da equação se expressa por

$$i\gamma'^\mu \partial'_\mu \psi'(x') - m'\psi'(x') = 0, \quad (2.18)$$

sob estas transformações. O operador $U(\Lambda)$ deve satisfazer

$$U^{-1}\gamma^\mu U = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (2.19)$$

Para as transformações infinitesimais, consideremos

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu + O(\omega^2), \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (2.20)$$

logo,

$$U = 1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde

$$S^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.22)$$

A densidade lagrangiana na teoria do campo de *DKP* é dada por

$$\mathcal{L}_{DKP} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.23)$$

a qual gera as equações de movimento (2.1) e (2.8). Portanto, sob as transformações de Lorentz, a densidade lagrangiana de *DKP* permanece invariante.

2.2 Projetores de Umezawa

O espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e a teoria deve ser suplementada por uma equação que permita a eliminação dos componentes redundantes. De modo a facilitar a identificação das componentes físicas e eliminar os componentes sem significado físico do campo de DKP , Umezawa [18] desenvolve um conjunto de *projetores* que selecionam componentes do espinor ψ que se transformam de acordo com as leis de *transformações de Lorentz* para escalares, vetores e tensores de ordem 2.

2.2.1 Setor Escalar

Seja um operador P , definido por

$$P \equiv -(\gamma^0)^2 (\gamma^1)^2 (\gamma^2)^2 (\gamma^3)^2, \quad (2.24)$$

onde $P^2 = P$ e

$$P^\mu \equiv P\gamma^\mu. \quad (2.25)$$

Disso, é possível mostrar que P e P^μ possuem as seguintes propriedades

$$P^\mu \gamma^\nu = P g^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

$$P S^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} P = 0, \quad (2.27)$$

$$P^\mu S^{\sigma\nu} = g^{\mu\sigma} P^\nu - g^{\mu\nu} P^\sigma. \quad (2.28)$$

Sob transformações infinitesimais (2.21), temos

$$P(U\psi) = P\psi. \quad (2.29)$$

Logo, o operador P seleciona o setor escalar da teoria de DKP pois $P\psi$ se transforma como um *escalar*. Similarmente, temos

$$P^\mu(U\psi) = P^\mu\psi + \omega^\mu{}_\nu(P^\nu\psi), \quad (2.30)$$

pois $P^\mu\psi$ transforma-se como um vetor na teoria de DKP .

Fazendo os operadores P e P^μ atuarem, respectivamente, na equação de DKP em (2.1), obtemos

$$i\partial_\mu(P^\mu\psi) - m(P\psi) = 0, \quad (2.31)$$

e

$$P^\mu\psi = \frac{i}{m}\partial^\mu(P\psi). \quad (2.32)$$

Então, substituindo (2.32) em (2.31) resulta que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)(P\psi) = 0. \quad (2.33)$$

Com esses resultados, todas as componentes da matriz coluna de $P\psi$ representam campos escalares de massa m que satisfazem a equação de Klein-Gordon.

Denotando a função de onda ψ por

$$\psi \equiv \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

e usando a representação 5×5 para as matrizes γ^μ do campo de DKP dada no apêndice A (ver expressões (A.1) e (A.2)), a atuação dos operadores P e P^μ em ψ nos fornece

$$P\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad P^\mu\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_\mu \end{bmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.35)$$

Assim, a equação (2.32) pode ser escrita como

$$\psi_\mu = \frac{i}{m} \partial_\mu \psi_4. \quad (2.36)$$

Definindo

$$\psi_4 \equiv \sqrt{m} \varphi \quad (2.37)$$

teremos

$$\psi_\mu = \frac{i}{\sqrt{m}} \partial_\mu \varphi. \quad (2.38)$$

Logo, podemos escrever ψ como

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_\mu \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} i\partial_0\varphi \\ i\partial_1\varphi \\ i\partial_2\varphi \\ i\partial_3\varphi \\ m\varphi \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

que é a forma física da função de onda do campo de DKP do setor de spin 0. Portanto, temos que $P\psi$ e $P^\mu\psi$ satisfazem a equação de Klein-Gordon

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0. \quad (2.40)$$

2.2.2 Setor Vetorial

Assim como no caso escalar, definimos o operador de seleção para o caso vetorial como

$$R^\mu \equiv (\gamma^1)^2 (\gamma^2)^2 (\gamma^3)^2 (\gamma^\mu\gamma^0 - g^{\mu 0}) \quad (2.41)$$

e

$$R^{\mu\nu} \equiv R^\mu\gamma^\nu. \quad (2.42)$$

Usando a álgebra das matrizes DKP em (2.2) podemos obter as seguintes propriedades

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}, \quad (2.43)$$

$$S^{\nu\rho}R^\mu = 0, \quad (2.44)$$

$$R^{\mu\nu}\gamma^\alpha = R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha}, \quad (2.45)$$

$$R^\mu S^{\nu\rho} = g^{\mu\nu}R^\rho - g^{\mu\rho}R^\nu, \quad (2.46)$$

$$R^{\mu\nu}S^{\rho\sigma} = g^{\nu\rho}R^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}R^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}R^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}R^{\nu\rho}. \quad (2.47)$$

Sob transformações infinitesimais de Lorentz, temos

$$R^\mu U\psi = R^\mu\psi + \omega^\mu{}_\nu (R^\nu\psi), \quad (2.48)$$

$$R^{\mu\nu}U\psi = R^{\mu\nu}\psi + \omega^\mu{}_\rho (R^{\rho\nu}\psi) + \omega^\nu{}_\rho (R^{\mu\rho}\psi). \quad (2.49)$$

Logo, essas relações mostram que o operador R^μ seleciona os componentes de ψ que se transformam como o componente μ de um quadrivetor. Entretanto, $R^{\mu\nu}$ seleciona aqueles que se transformam como o componente $\mu\nu$ de um tensor de segunda ordem.

Aplicando o operador R^μ na equação de DKP fundamental, temos

$$\begin{aligned} i\gamma^\nu \partial_\nu \psi - m\psi &= 0 \\ i(R^\mu \gamma^\nu) \partial_\nu \psi - mR^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\nu R^{\mu\nu} \psi &= -imR^\mu \psi, \end{aligned} \quad (2.50)$$

enquanto que aplicação do operador $R^{\mu\nu}$ na equação de DKP fundamental, conduz a

$$\partial^\nu (R^\mu \psi) - \partial^\mu (R^\nu \psi) = -imR^{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Definindo

$$U^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu (R^\nu \psi) - \partial^\nu (R^\mu \psi), \quad (2.52)$$

onde $U^{\mu\nu} = -U^{\nu\mu}$, podemos escrever

$$R^{\mu\nu} \psi = -\frac{i}{m} U^{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Então, substituindo (2.53) em (2.50)

$$\begin{aligned} \partial_\nu U^{\mu\nu} &= m^2 R^\mu \psi \\ \partial_\nu U^{\mu\nu} - m^2 R^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\nu U^{\nu\mu} + m^2 R^\mu \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

ou, de forma explícita,

$$\partial_\nu (\partial^\nu R^\mu \psi - \partial^\mu R^\nu \psi) + m^2 R^\mu \psi = 0, \quad (2.55)$$

que é a equação de *Proca* para uma partícula livre de spin 1. Disso, podemos obter mais informações aplicando ∂_μ em (2.55)

$$\begin{aligned} \partial_\mu [\partial_\nu (\partial^\nu R^\mu \psi - \partial^\mu R^\nu \psi) + m^2 R^\mu \psi] &= 0 \\ \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu R^\mu \psi - \partial_\mu \partial_\nu \partial^\mu R^\nu \psi + m^2 \partial_\mu (R^\mu \psi) &= 0 \\ \partial_\mu (R^\mu \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Combinando essas equações resulta em

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) R^\mu \psi = 0. \quad (2.57)$$

Portanto, os elementos da matriz $R^\mu\psi$ representam componentes de campos vetoriais que satisfazem as equações de Proca. Aplicando R^μ na função de onda ψ , na representação das matrizes γ^μ do campo de *DKP* dadas em (B.1) e (B.2), temos o setor físico selecionado

$$R^0\psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^1\psi = \begin{bmatrix} -\psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^2\psi = \begin{bmatrix} -\psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^3\psi = \begin{bmatrix} -\psi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Temos que a equação (2.56) vincula os componentes ψ_0, ψ_1, ψ_2 e ψ_3 do espinoir 10-dimensional, obtendo assim três componentes físicos. Os componentes restantes ($\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8$ e ψ_9) são os componentes não-físicos do setor de spin 1.

2.3 Campo Escalar de DKP

2.3.1 Função de onda de DKP - Setor de Spin 0

Da equação de DKP fundamental dada em (2.1), temos

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad (2.59)$$

onde aqui γ^μ são as matrizes de DKP com dimensão 5×5 .

Consideremos a seguinte função de onda para o campo de DKP dada por (2.39)

$$\psi \equiv \psi(x) = \psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} i\partial_0\varphi \\ i\partial_1\varphi \\ i\partial_2\varphi \\ i\partial_3\varphi \\ m\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Assim, o complexo conjugado da função de onda ψ é dado por

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} -i\partial_0\varphi^* & -i\partial_1\varphi^* & -i\partial_2\varphi^* & -i\partial_3\varphi^* & m\varphi^* \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

2.3.2 Lagrangeana do Campo de DKP - (Spin 0)

A lagrangeana do campo de DKP na sua forma livre é dada por

$$\mathcal{L}_{DKP} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.62)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Usando as funções de onda em (2.60) e (2.61) em conjunto com as matrizes DKP dadas em (A.1) e (A.2) temos que o primeiro termo dentro dos parênteses em (2.62) torna-se, após a realização do produto matricial,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= \psi^\dagger\eta^0\gamma^0\partial_0\psi + \psi^\dagger\eta^0\gamma^1\partial_1\psi + \psi^\dagger\eta^0\gamma^2\partial_2\psi + \psi^\dagger\eta^0\gamma^3\partial_3\psi \\ &= [-i(\partial_0\varphi^*)(\partial_0\varphi) + i\varphi^*\partial_0(\partial_0\varphi)] \\ &\quad + [i(\partial_1\varphi^*)(\partial_1\varphi) - i\varphi^*\partial_1(\partial_1\varphi)] \\ &\quad + [i(\partial_2\varphi^*)(\partial_2\varphi) - i\varphi^*\partial_2(\partial_2\varphi)] \\ &\quad + [i(\partial_3\varphi^*)(\partial_3\varphi) - i\varphi^*\partial_3(\partial_3\varphi)] \\ &= -i(\partial^0\varphi^*)(\partial_0\varphi) + i\varphi^*\partial^0(\partial_0\varphi) \\ &\quad -i(\partial^1\varphi^*)(\partial_1\varphi) + i\varphi^*\partial^1(\partial_1\varphi) \\ &\quad -i(\partial^2\varphi^*)(\partial_2\varphi) + i\varphi^*\partial^2(\partial_2\varphi) \\ &\quad -i(\partial^3\varphi^*)(\partial_3\varphi) + i\varphi^*\partial^3(\partial_3\varphi) \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= -i(\partial^\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) + i\varphi^*\partial^\mu(\partial_\mu\varphi). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para o segundo termo dentro dos parênteses em (2.62), temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= (\partial_0\psi^\dagger)\eta^0\gamma^0\psi + (\partial_1\psi^\dagger)\eta^0\gamma^1\psi + (\partial_2\psi^\dagger)\eta^0\gamma^2\psi + (\partial_3\psi^\dagger)\eta^0\gamma^3\psi \\ &= -i\partial_0(\partial_0\varphi^*)\varphi + i(\partial_0\varphi^*)(\partial_0\varphi) \\ &\quad + i\partial_1(\partial_1\varphi^*)\varphi - i(\partial_1\varphi^*)(\partial_1\varphi) \\ &\quad + i\partial_2(\partial_2\varphi^*)\varphi - i(\partial_2\varphi^*)(\partial_2\varphi) \\ &\quad + i\partial_3(\partial_3\varphi^*)\varphi - i(\partial_3\varphi^*)(\partial_3\varphi) \\ &= -i\partial_0(\partial^0\varphi^*)\varphi + i(\partial^0\varphi^*)(\partial_0\varphi) \\ &\quad -i\partial_1(\partial^1\varphi^*)\varphi + i(\partial^1\varphi^*)(\partial_1\varphi) \\ &\quad -i\partial_2(\partial^2\varphi^*)\varphi + i(\partial^2\varphi^*)(\partial_2\varphi) \\ &\quad -i\partial_3(\partial^3\varphi^*)\varphi + i(\partial^3\varphi^*)(\partial_3\varphi) \\ \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= -i\partial_\mu(\partial^\mu\varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para o terceiro termo em (2.62), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &= \psi^\dagger \eta^0 \psi \\
&= \frac{1}{m} [(\partial_0 \varphi^*)(\partial_0 \varphi) - (\partial_1 \varphi^*)(\partial_1 \varphi) - (\partial_2 \varphi^*)(\partial_2 \varphi) - (\partial_3 \varphi^*)(\partial_3 \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi] \\
&= \frac{1}{m} [(\partial_0 \varphi^*)(\partial^0 \varphi) + (\partial_1 \varphi^*)(\partial^1 \varphi) + (\partial_2 \varphi^*)(\partial^2 \varphi) + (\partial_3 \varphi^*)(\partial^3 \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi] \\
\bar{\psi}\psi &= \frac{1}{m} [(\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi]. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (2.63), (2.64) e (2.65) em (2.62), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{DKP} &= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \\
&= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \\
&= \frac{i}{2} [-i(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + i\varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi)] - \frac{i}{2} [-i\partial_\mu (\partial^\mu \varphi^*) \varphi + i(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi)] \\
&\quad - m \cdot \frac{1}{m} [(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi] \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial^\mu \varphi^*) \varphi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) \\
&\quad - (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) \varphi] - (\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\
\mathcal{L}_{DKP} &= -\frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*)] - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Notemos as seguintes equações diferenciais

$$\partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi) = \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) \tag{2.67}$$

e

$$\partial^\mu (\varphi \partial_\mu \varphi^*) = \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) + (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi). \tag{2.68}$$

Somando as (2.67) e (2.68), obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi + \varphi \partial_\mu \varphi^*) &= \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) + (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) \\
&= \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) \\
\partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi + \varphi \partial_\mu \varphi^*) &= \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) + 2 (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) = \partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi + \varphi \partial_\mu \varphi^*) - 2 (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi). \quad (2.69)$$

Substituindo (2.69) em (2.66), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DKP} &= -\frac{1}{2} [\partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi + \varphi \partial_\mu \varphi^*) - 2 (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi)] - m^2 \varphi^* \varphi \\ &= -\frac{1}{2} [\partial^\mu \partial_\mu (\varphi^* \varphi) - 2 (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi)] - m^2 \varphi^* \varphi \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu (\varphi^* \varphi) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\ \mathcal{L}_{DKP} &= (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu (\varphi^* \varphi). \end{aligned} \quad (2.70)$$

No último termo em (2.70) temos a *densidade de quadricorrente* para um campo escalar, isto é,

$$j^\mu = \varphi^* \varphi. \quad (2.71)$$

Disso, temos que a *equação de continuidade* para um campo escalar é dada por

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.72)$$

Assim, após eliminação do termo 4-divergente em (2.70), a lagrangeana *DKP* em termos da componente escalar φ é dada por

$$\mathcal{L}_{DKP} = (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (2.73)$$

2.3.3 Tensor de Energia-Momento do Campo de DKP - (Spin-0)

Consideremos a equação para o tensor de energia-momento dada por

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.74)$$

A partir da lagrangeana *DKP* em (2.62) obtemos o tensor de energia-momento para o campo de *DKP* como

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP}. \quad (2.75)$$

Substituindo as equações (2.63) e (2.64) em (2.75), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu g^{\nu\mu} \partial_\mu \psi - g^{\nu\mu} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= \frac{i}{2} g^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} g^{\nu\mu} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= \frac{i}{2} g^{\nu\mu} [-i(\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) + i\varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi)] - \frac{i}{2} g^{\nu\mu} [-i\partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) \varphi + i(\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi)] \\
&\quad - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} g^{\nu\mu} \varphi^* \partial^\mu (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} g^{\nu\mu} \varphi \partial^\mu (\partial_\mu \varphi^*) + \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) \\
&\quad - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} \varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*) + \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Então, a equação (2.76) fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad - g^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\alpha (\partial_\alpha \varphi) + \varphi \partial^\alpha (\partial_\alpha \varphi^*)] - m^2 \varphi^* \varphi \right\} \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\varphi^* \partial^\alpha (\partial_\alpha \varphi) + \varphi \partial^\alpha (\partial_\alpha \varphi^*)] + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^* \varphi \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\varphi^* \partial^\alpha (g_{\alpha\nu} \partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\alpha (g_{\alpha\nu} \partial^\nu \varphi^*)] + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^* \varphi \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} [\varphi^* \partial^\alpha (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\alpha (\partial^\nu \varphi^*)] + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^* \varphi \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu [\varphi^* \partial^\alpha (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\alpha (\partial^\nu \varphi^*)] + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^* \varphi \\
&= (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] \\
&\quad + \frac{1}{2} [\varphi^* \partial^\mu (\partial^\nu \varphi) + \varphi \partial^\mu (\partial^\nu \varphi^*)] + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^* \varphi \\
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu \varphi^*(x) \partial^\nu \varphi(x) + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^*(x) \varphi(x). \tag{2.77}
\end{aligned}$$

2.3.4 Estado de Vácuo do Campo Escalar de DKP

O cálculo do valor esperado de $\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x)$ no estado de vácuo não é bem definido para o produto de operadores de campo em um mesmo ponto do espaço-tempo. Para evitar divergências utilizamos um método de regularização no qual consiste em tomar o produto de dois operadores de campo em diferentes pontos do espaço-tempo e tomar o limite de separação zero no final do cálculo. Assim, o tensor de energia-momento fica dado por

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \tau \left\{ \partial^\mu \varphi^*(x) \partial'^\nu \varphi(x') + m^2 g^{\mu\nu} \varphi^*(x) \varphi(x') \right\}, \quad (2.78)$$

onde τ é o operador de ordenamento temporal.

Na presente dissertação os operadores de campo escalar φ são hermitianos. Assim, $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ e reescrevemos a equação acima como

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \tau \left\{ \partial^\mu \varphi(x) \partial'^\nu \varphi(x') + m^2 g^{\mu\nu} \varphi(x) \varphi(x') \right\}, \quad (2.79)$$

o que nos leva à

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) \tau[\varphi(x) \varphi(x')], \quad (2.80)$$

onde

$$\tau[\varphi(x) \varphi(x')] = \theta(x_0 - x'_0) \varphi(x) \varphi(x') + \theta(x'_0 - x_0) \varphi(x') \varphi(x) \quad (2.81)$$

é o operador de ordenamento temporal para bósons.

O valor esperado do tensor de energia-momento no estado de vácuo $|0\rangle$ é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle &= \langle 0 | \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) | 0 \rangle \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) \langle 0 | \tau[\varphi(x) \varphi(x')] | 0 \rangle \\ \langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) iG_0(x - x') \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde $G_0(x - x')$ é a função de Green para a equação de Klein-Gordon. O propagador para o campo escalar é dado por

$$\langle 0 | \tau[\varphi(x) \varphi(x')] | 0 \rangle = iG_0(x - x'). \quad (2.83)$$

2.4 Campo Vetorial de DKP

Nesta seção realizamos os cálculos afim de obter a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir para o campo vetorial de DKP (partículas de spin-1). Assim como no caso do campo escalar, obtemos a forma física do campo vetorial de DKP. A lagrangeana e o tensor de energia-momento do campo também são calculados.

2.4.1 Função de onda de DKP - Setor de Spin 1

Recordemos a equação de DKP fundamental dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (2.84)$$

onde γ^μ são as matrizes de DKP e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Para spin-1, as matrizes γ^μ tem dimensão 10×10 .

Uma solução possível para o campo vetorial de DKP é dada por uma função de onda com 10 componentes tal que

$$\psi \equiv \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi^0(x) \\ \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \\ \psi^5(x) \\ \psi^6(x) \\ \psi^7(x) \\ \psi^8(x) \\ \psi^9(x) \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Assim, expandindo (2.84) em termos das matrizes de *DKP*, temos

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^1 \partial_1 \psi + i\gamma^2 \partial_2 \psi + i\gamma^3 \partial_3 \psi - m\psi = 0. \quad (2.86)$$

Substituindo (2.85) e as matrizes (B.1) e (B.2) em (2.86), e após os devidos cálculos, obtemos

$$i \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_0 \psi^4 \\ \partial_0 \psi^5 \\ \partial_0 \psi^6 \\ \partial_0 \psi^1 \\ \partial_0 \psi^2 \\ \partial_0 \psi^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \partial_1 \psi^4 \\ 0 \\ -\partial_1 \psi^9 \\ \partial_1 \psi^8 \\ -i\partial_1 \psi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\partial_1 \psi^3 \\ \partial_1 \psi^2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \partial_2 \psi^5 \\ \partial_2 \psi^9 \\ 0 \\ -\partial_2 \psi^7 \\ 0 \\ -i\partial_2 \psi^0 \\ 0 \\ \partial_2 \psi^3 \\ 0 \\ -\partial_2 \psi^1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \partial_3 \psi^6 \\ -\partial_3 \psi^8 \\ \partial_3 \psi^7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i\partial_3 \psi^0 \\ -\partial_3 \psi^2 \\ \partial_3 \psi^1 \\ 0 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \\ \psi^5 \\ \psi^6 \\ \psi^7 \\ \psi^8 \\ \psi^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Disso, vem o seguinte sistema de dez equações acopladas

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + i\partial_1 \psi^4 + i\partial_2 \psi^5 + i\partial_3 \psi^6 - m\psi^0 = 0 \\ i\partial_0 \psi^4 + 0 + i\partial_2 \psi^9 - i\partial_3 \psi^8 - m\psi^1 = 0 \\ i\partial_0 \psi^5 - i\partial_1 \psi^9 + 0 + i\partial_3 \psi^7 - m\psi^2 = 0 \\ i\partial_0 \psi^6 + i\partial_1 \psi^8 - i\partial_2 \psi^7 + 0 - m\psi^3 = 0 \\ i\partial_0 \psi^1 + \partial_1 \psi^0 + 0 + 0 - m\psi^4 = 0 \\ i\partial_0 \psi^2 + 0 + \partial_2 \psi^0 + 0 - m\psi^5 = 0 \\ i\partial_0 \psi^3 + 0 + 0 + \partial_3 \psi^0 - m\psi^6 = 0 \\ 0 + 0 + i\partial_2 \psi^3 - i\partial_3 \psi^2 - m\psi^7 = 0 \\ 0 - i\partial_1 \psi^3 + 0 + i\partial_3 \psi^1 - m\psi^8 = 0 \\ 0 + i\partial_1 \psi^2 - i\partial_2 \psi^1 + 0 - m\psi^9 = 0. \end{array} \right. \quad (2.88)$$

Então, de forma simplificada, temos

$$m\psi^0 = i(\partial_1 \psi^4 + \partial_2 \psi^5 + \partial_3 \psi^6), \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} m\psi^1 &= i(\partial_0 \psi^4 + \partial_2 \psi^9 - \partial_3 \psi^8), \\ m\psi^2 &= i(\partial_0 \psi^5 - \partial_1 \psi^9 + \partial_3 \psi^7), \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$m\psi^3 = i(\partial_0 \psi^6 + \partial_1 \psi^8 - \partial_2 \psi^7),$$

$$\begin{aligned} m\psi^4 &= i\partial_0 \psi^1 + \partial_1 \psi^0, \\ m\psi^5 &= i\partial_0 \psi^2 + \partial_2 \psi^0, \\ m\psi^6 &= i\partial_0 \psi^3 + \partial_3 \psi^0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}
m\psi^7 &= i\partial_2\psi^3 - i\partial_3\psi^2, \\
m\psi^8 &= -i\partial_1\psi^3 + i\partial_3\psi^1, \\
m\psi^9 &= i\partial_1\psi^2 - i\partial_2\psi^1.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Sendo que as equações do campo vetorial de DKP se reduzem às de Proca para spin-1, identificamos as componentes de ψ com funções escalares e funções vetoriais conforme

$$\psi^0 = \varphi, \quad \mathbf{F} = (\psi^1, \psi^2, \psi^3), \quad \mathbf{G} = (\psi^4, \psi^5, \psi^6), \quad \mathbf{H} = (\psi^7, \psi^8, \psi^9). \tag{2.93}$$

Então, da equação (2.89) obtemos

$$\begin{aligned}
m\psi^0 &= i(\partial_1\psi^4 + \partial_2\psi^5 + \partial_3\psi^6) \\
m(\varphi) &= i(\partial_1G^1 + \partial_2G^2 + \partial_3G^3) \\
m\varphi &= i\nabla \cdot \mathbf{G}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Das equações em (2.90), temos

$$\begin{aligned}
mF^1 &= i(\partial_0G^1 + \partial_2H^3 - \partial_3H^2), \\
mF^2 &= i(\partial_0G^2 - \partial_1H^3 + \partial_3H^1), \\
mF^3 &= i(\partial_0G^3 + \partial_1H^2 - \partial_2H^1).
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Mas o vetor \mathbf{F} pode ser representado por

$$\mathbf{F} = F^1\hat{\mathbf{e}}_1 + F^2\hat{\mathbf{e}}_2 + F^3\hat{\mathbf{e}}_3. \tag{2.96}$$

Disso, vem

$$\begin{aligned}
m\mathbf{F} &= mF^1\hat{\mathbf{e}}_1 + mF^2\hat{\mathbf{e}}_2 + mF^3\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= i(\partial_0G^1 + \partial_2H^3 - \partial_3H^2)\hat{\mathbf{e}}_1 \\
&\quad + i(\partial_0G^2 - \partial_1H^3 + \partial_3H^1)\hat{\mathbf{e}}_2 \\
&\quad + i(\partial_0G^3 + \partial_1H^2 - \partial_2H^1)\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= i\partial_0(G^1\hat{\mathbf{e}}_1 + G^2\hat{\mathbf{e}}_2 + G^3\hat{\mathbf{e}}_3) \\
&\quad + i(\partial_2H^3 - \partial_3H^2)\hat{\mathbf{e}}_1 - i(\partial_1H^3 - \partial_3H^1)\hat{\mathbf{e}}_2 + i(\partial_1H^2 - \partial_2H^1)\hat{\mathbf{e}}_3 \\
m\mathbf{F} &= i\partial_t\mathbf{G} + i\nabla \times \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Agora, das equações em (2.91), temos

$$\begin{aligned}
mG^1 &= i\partial_0 F^1 + \partial_1 \varphi, \\
mG^2 &= i\partial_0 F^2 + \partial_2 \varphi, \\
mG^3 &= i\partial_0 F^3 + \partial_3 \varphi.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Mas

$$\mathbf{G} = G^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + G^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + G^3 \hat{\mathbf{e}}_3. \tag{2.99}$$

Então

$$\begin{aligned}
m\mathbf{G} &= mG^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + mG^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + mG^3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= (i\partial_0 F^1 + \partial_1 \varphi) \hat{\mathbf{e}}_1 + (i\partial_0 F^2 + \partial_2 \varphi) \hat{\mathbf{e}}_2 + (i\partial_0 F^3 + \partial_3 \varphi) \hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= i\partial_0 (F^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + F^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + F^3 \hat{\mathbf{e}}_3) + (\partial_1 \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \partial_2 \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + \partial_3 \varphi \hat{\mathbf{e}}_3) \\
m\mathbf{G} &= i\partial_t \mathbf{F} + \nabla \varphi.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

E das equações (2.92), obtemos

$$\begin{aligned}
mH^1 &= i(\partial_2 F^3 - \partial_3 F^2), \\
mH^2 &= -i(\partial_1 F^3 - \partial_3 F^1), \\
mH^3 &= i(\partial_1 F^2 - \partial_2 F^1).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Mas

$$\mathbf{H} = H^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + H^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + H^3 \hat{\mathbf{e}}_3. \tag{2.102}$$

Então

$$\begin{aligned}
m\mathbf{H} &= mH^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + mH^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + mH^3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= i(\partial_2 F^3 - \partial_3 F^2) \hat{\mathbf{e}}_1 - i(\partial_1 F^3 - \partial_3 F^1) \hat{\mathbf{e}}_2 + i(\partial_1 F^2 - \partial_2 F^1) \hat{\mathbf{e}}_3 \\
m\mathbf{H} &= i\nabla \times \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Assim, a função de onda ψ do campo vetorial de DKP tem os termos φ , \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} acoplados como

$$\begin{aligned}
m\varphi &= i\nabla \cdot \mathbf{G}, \\
m\mathbf{F} &= i\partial_t \mathbf{G} + i\nabla \times \mathbf{H}, \\
m\mathbf{G} &= i\partial_t \mathbf{F} + \nabla \varphi, \\
m\mathbf{H} &= i\nabla \times \mathbf{F}.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Portanto, usando (2.98) e (2.101) a função de onda ψ em (2.85) pode ser reescrita como

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ G^1 \\ G^2 \\ G^3 \\ H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ \frac{1}{m}(i\partial_0 F^1 + \partial_1 \varphi) \\ \frac{1}{m}(i\partial_0 F^2 + \partial_2 \varphi) \\ \frac{1}{m}(i\partial_0 F^3 + \partial_3 \varphi) \\ \frac{i}{m}(\partial_2 F^3 - \partial_3 F^2) \\ \frac{i}{m}(\partial_3 F^1 - \partial_1 F^3) \\ \frac{i}{m}(\partial_1 F^2 - \partial_2 F^1) \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

O vetor de DKP ψ nos remete ao campo de Proca, que pode ser descrito em termos de um quadri-vetor

$$F^\mu = (F^0, F^1, F^2, F^3) = (\varphi, \mathbf{F}) \quad (2.106)$$

e mais seis componentes de um tensor antissimétrico de segunda ordem

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu F^\nu - \partial^\nu F^\mu. \quad (2.107)$$

2.4.2 Lagrangeana do Campo de DKP - Setor Vetorial (Spin-1)

A densidade Lagrangeana \mathcal{L} é um escalar de Lorentz que pode ser construída de um campo vetorial A^μ e suas derivadas. Disso, e das equações vistas na seção anterior, temos que a Lagrangeana para o campo vetorial massivo de DKP é dada por

$$\mathcal{L}_{DKP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu, \quad (2.108)$$

onde j_ν é definido como sendo a *densidade de quadricorrente* e, por simplicidade na nomenclatura, fazemos $F^\mu \equiv \sqrt{m}A^\mu$.

Considerando que não há fontes, $j^\nu = 0$, a lagrangeana torna-se

$$\mathcal{L}_{DKP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu. \quad (2.109)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

2.4.3 Tensor de Energia-Momento do Campo de DKP - Setor Vetorial (Spin-1)

Nesta seção calculamos o tensor de energia momento para o campo vetorial de DKP. Para isso, lembremos que

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.110)$$

Logo, para o campo de DKP, temos

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{DKP}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP}. \quad (2.111)$$

Da análise vetorial e tensorial [19], temos

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} A_{\gamma\nu}, \\ \delta_\mu^\nu A_\nu &= A_\mu, \end{aligned} \quad (2.112)$$

onde o delta de Kronecker δ_μ^ν é definido por

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{se } \mu = \nu. \end{cases} \quad (2.113)$$

Calculemos inicialmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (F_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} F_{\gamma\nu}) \\ &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\nu}) \\ &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \{(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\gamma A_\nu - \partial_\nu A_\gamma)\} \\ &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} \left\{ (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (\partial_\gamma A_\nu - \partial_\nu A_\gamma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] (\partial_\gamma A_\nu - \partial_\nu A_\gamma) \right\} \\ &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} \left\{ (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (\delta_\gamma^\mu \partial_\mu \delta_\nu^\sigma A_\sigma - \delta_\nu^\mu \partial_\mu \delta_\gamma^\sigma A_\sigma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (\delta_\alpha^\mu \partial_\mu \delta_\beta^\sigma A_\sigma - \delta_\beta^\mu \partial_\mu \delta_\alpha^\sigma A_\sigma) \right] (\partial_\gamma A_\nu - \partial_\nu A_\gamma) \right\} \\ &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\nu} \left\{ F_{\alpha\beta} (\delta_\gamma^\mu \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\mu \delta_\gamma^\sigma) + (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\sigma) F_{\gamma\nu} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{\alpha\beta} \left(g^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\mu g^{\beta\nu} \delta_\nu^\sigma - g^{\beta\nu} \delta_\nu^\mu g^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\sigma \right) + \left(g^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\mu g^{\beta\nu} \delta_\beta^\sigma - g^{\beta\nu} \delta_\beta^\mu g^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\sigma \right) F_{\gamma\nu} \\
&= F_{\alpha\beta} \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\sigma} - g^{\beta\mu} g^{\alpha\sigma} \right) + \left(g^{\mu\gamma} g^{\sigma\nu} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\gamma} \right) F_{\gamma\nu} \\
&= g^{\alpha\mu} g^{\beta\sigma} F_{\alpha\beta} - g^{\beta\mu} g^{\alpha\sigma} F_{\alpha\beta} + g^{\mu\gamma} g^{\sigma\nu} F_{\gamma\nu} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\gamma} F_{\gamma\nu} \\
&= g^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\sigma\alpha} F_{\beta\alpha} + g^{\mu\gamma} g^{\sigma\nu} F_{\gamma\nu} + g^{\mu\nu} g^{\sigma\gamma} F_{\nu\gamma} \\
&= F^{\mu\sigma} + F^{\mu\sigma} + F^{\mu\sigma} + F^{\mu\sigma}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} = 4F^{\mu\sigma}. \quad (2.114)$$

Assim, usando (2.111) e a identidade (2.114) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{DKP}}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right\} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{DKP}. \quad (2.115)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (2.109) em (2.115) obtemos o *tensor de energia-momento* do campo de DKP

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right]. \quad (2.116)$$

Notemos que o tensor (2.116) não é simétrico sob trocas dos índices $\mu\nu$. Assim, para torná-lo simétrico é necessário reescrevê-lo para satisfazer as exigências do tensor de energia-momento [20]

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= -F^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \partial_\lambda A_\sigma - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right] \\
&= -F^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} (F_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma A_\lambda) - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right] \\
&= -F^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} F_{\lambda\sigma} - F^{\mu\sigma} \partial_\sigma (g^{\nu\lambda} A_\lambda) - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right] \\
&= -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^\nu - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right].
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu) &= F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^\nu + (\partial_\sigma F^{\mu\sigma}) A^\nu \\ &\vdots \\ F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^\nu &= \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu) - (\partial_\sigma F^{\mu\sigma}) A^\nu.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} &= -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - [\partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu) - (\partial_\sigma F^{\mu\sigma}) A^\nu] - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \right] \\ &= -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} A_\alpha A^\alpha + (\partial_\sigma F^{\mu\sigma}) A^\nu - \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu).\end{aligned}$$

Mas da equação vetorial de *DKP*, dada em (2.55), temos

$$\begin{aligned}\partial_\sigma (\partial^\sigma A^\mu - \partial^\mu A^\sigma) + m^2 A^\mu &= 0 \\ \partial_\sigma F^{\sigma\mu} + m^2 A^\mu &= 0 \\ \partial_\sigma F^{\sigma\mu} &= -m^2 A^\mu \\ \partial_\sigma F^{\mu\sigma} &= m^2 A^\mu.\end{aligned}\tag{2.117}$$

Disso, obtemos

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} A_\alpha A^\alpha + m^2 A^\mu A^\nu + \partial_\sigma K^{\sigma\mu\nu},\tag{2.118}$$

onde $K^{\sigma\mu\nu} = -K^{\mu\sigma\nu} = -F^{\mu\sigma} A^\nu$ é um tensor antissimétrico nos dois primeiros índices.

Dessa forma, o tensor de energia-momento do campo vetorial de *DKP* pode ser escrito como

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = \Theta_{DKP}^{\mu\nu} + \partial_\sigma K^{\sigma\mu\nu},\tag{2.119}$$

onde

$$\Theta_{DKP}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} A_\alpha A^\alpha + m^2 A^\mu A^\nu\tag{2.120}$$

é o tensor simétrico. Assim, as *leis de conservação* permanecem inalteradas pois

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu} = \partial_\mu \Theta_{DKP}^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\sigma K^{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Theta_{DKP}^{\mu\nu} = 0.\tag{2.121}$$

2.4.4 Estado de Vácuo do Campo Vetorial de DKP

Prosseguimos para o cálculo do valor esperado do tensor de energia-momento do campo vetorial de DKP no *estado de vácuo*. Para isso, usamos o tensor simétrico dado em (2.120), à saber

$$\Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) = -F^{\mu\sigma}(x)F^\nu{}_\sigma(x) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}A_\alpha(x)A^\alpha(x) + m^2A^\mu(x)A^\nu(x). \quad (2.122)$$

Assim como no caso escalar, também temos para o caso vetorial que o produto de dois operadores em um mesmo ponto do espaço-tempo não é bem definido. Para contornar essa divergência utilizamos novamente o método de regularização à diferentes pontos do espaço. Então, o tensor simétrico de energia-momento fica dado por

$$\begin{aligned} \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} \tau \left\{ -F^{\mu\sigma}(x)F^\nu{}_\sigma(x') + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}A_\alpha(x)A^\alpha(x') + m^2A^\mu(x)A^\nu(x') \right\} \\ \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\tau [F^{\mu\sigma}(x)F^\nu{}_\sigma(x')] + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\tau [F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x')] \right\} \\ &\quad + \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}\tau [A_\alpha(x)A^\alpha(x')] + m^2\tau [A^\mu(x)A^\nu(x')] \right\}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

onde τ é o operador de ordenamento temporal.

De modo simplificado, fazemos

$$\Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) = \mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu}(x) + \mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x), \quad (2.124)$$

onde

$$\mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\tau [F^{\mu\sigma}(x)F^\nu{}_\sigma(x')] + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\tau [F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x')] \right\} \quad (2.125)$$

é o tensor de energia-momento para o campo eletromagnético *sem fonte* e

$$\mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}\tau [A_\alpha(x)A^\alpha(x')] + m^2\tau [A^\mu(x)A^\nu(x')] \right\} \quad (2.126)$$

é o tensor de energia-momento associado ao termo de massa na teoria do campo de DKP.

Tomando o valor esperado no estado de vácuo do tensor de energia-momento do campo de DKP em (2.124) como $\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle = \langle 0 | \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) | 0 \rangle$, temos

$$\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle = \langle \mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu}(x) \rangle + \langle \mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x) \rangle. \quad (2.127)$$

A solução do termo $\langle \mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu}(x) \rangle$ em (2.127) corresponde ao valor esperado do tensor de energia-momento para o campo eletromagnético sem fonte e seu cálculo é descrito nas referências [21] e [22]. Apresentamos aqui a solução deste limite como sendo

$$\langle \mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu}(x) \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') G_0(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \right\}, \quad (2.128)$$

onde

$$\Gamma^{\mu\nu}(x, x') = 2 \left(\partial^\mu \partial'^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\beta \partial'_\beta \right) \quad (2.129)$$

e

$$\begin{aligned} iD_{\alpha\beta}(x - x') &= \langle 0 | \tau [A_\alpha(x) A_\beta(x')] | 0 \rangle \\ &= g_{\alpha\beta} iG_0(x - x'), \end{aligned} \quad (2.130)$$

é o propagador para campos vetoriais A^μ , conforme referência [23].

Neste momento nos concentramos na resolução da equação para $\langle \mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x) \rangle$. Assim, usando a métrica covariante para baixar índices,

$$A^\alpha = g^{\alpha\delta} A_\delta \quad (2.131)$$

$$A^\mu = g^{\mu\varepsilon} A_\varepsilon \quad (2.132)$$

$$A^\nu = g^{\nu\gamma} A_\gamma \quad (2.133)$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \delta_\nu^\mu \quad (2.134)$$

temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x) \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} \langle 0 | \tau [A_\alpha(x) A^\alpha(x')] | 0 \rangle + m^2 \langle 0 | \tau [A^\mu(x) A^\nu(x')] | 0 \rangle \right\} \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} \langle 0 | \tau [A_\alpha(x) A_\rho(x')] | 0 \rangle + m^2 g^{\mu\varepsilon} g^{\nu\gamma} \langle 0 | \tau [A_\varepsilon(x) A_\gamma(x')] | 0 \rangle \right\} \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g_{\alpha\rho} iG_0(x - x') + m^2 g^{\mu\varepsilon} g^{\nu\gamma} g_{\varepsilon\gamma} iG_0(x - x') \right\} \\ &= i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(-\frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\alpha + m^2 g^{\mu\varepsilon} \delta_\varepsilon^\nu \right) G_0(x - x') \right\} \\ &= i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(-\frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu} \right) G_0(x - x') \right\} \\ \langle \mathcal{T}_{MASS}^{\mu\nu}(x) \rangle &= i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} G_0(x - x') \right\}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Então, substituindo (2.128) e (2.135) em (2.127), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') G_0(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \right\} \\
&\quad + i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} G_0(x - x') \right\} \\
&= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') G_0(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} G_0(x - x') \right\} \\
&= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\Gamma^{\mu\nu}(x, x') - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} \right) G_0(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \right\} \\
&\quad \therefore \\
\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') G_0(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \right\}, \quad (2.136)
\end{aligned}$$

onde

$$\Lambda^{\mu\nu}(x, x') = \Gamma^{\mu\nu}(x, x') - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} = 2 \left(\partial^\mu \partial'^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\beta \partial'_\beta \right) - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu}. \quad (2.137)$$

Portanto, a expressão acima para $\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu}(x) \rangle$ fornece o valor esperado no estado de vácuo do tensor de energia-momento do campo de DKP para o setor vetorial.

Capítulo 3

Dinâmica de Campos Térmicos

Neste capítulo são introduzidas as principais ideias da teoria da Dinâmica de Campos Térmicos (*DCT*). Esta teoria consiste essencialmente em introduzir a temperatura nos campos através de uma transformação unitária, chamada de transformação de Bogoliubov, aplicada ao vácuo. Em linhas gerais, seguiremos as referências [14], [15] e [21] para os principais aspectos algébricos.

3.1 Espaço Termal de Hilbert

Considerando um sistema em equilíbrio térmico, a média de um operador A no *ensemble* canônico é dada por

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} A), \quad (3.1)$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição, H é o hamiltoniano do sistema e $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$, com T a temperatura e κ_B a constante de Boltzmann. No presente trabalho, adotaremos as unidades naturais: $\kappa_B = c = \hbar = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e \hbar é a constante de Planck.

Seja a base formada pelos autoestados $|n\rangle$ do hamiltoniano H e que respeita as seguintes relações

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3.2)$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}, \quad (3.4)$$

temos que

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \quad (3.5)$$

O objetivo essencial da *DCT* é encontrar um estado térmico, denota por $|0(\beta)\rangle$ e definido em um espaço de Hilbert apropriado, pelo qual podemos expressar o valor esperado de qualquer operador nesse estado de modo análogo à teoria a temperatura zero, ou seja

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &\equiv \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Assim, investigando como $|0(\beta)\rangle$ pode ser um vetor no espaço de Hilbert, usamos a relação de completeza em (3.4), temos

$$\begin{aligned}|0(\beta)\rangle &= \mathbb{1}|0(\beta)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle \\ |0(\beta)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\beta) |n\rangle,\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde $g_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle$ é uma função escalar.

O valor médio do operador A pode ser reescrito como

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \sum_{nm} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n|A|m\rangle.\tag{3.8}$$

Usando a condição imposta por (3.6), temos

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}.\tag{3.9}$$

Contudo, a expressão (3.9) não pode ser satisfeita, pois $g_n(\beta)$ são números. Portanto, $|0(\beta)\rangle$ não poder ser um elemento do espaço original de Hilbert. Entretanto, a condição acima é como uma *condição de ortogonalidade*, sugerindo então que $g_m(\beta)$ seja elemento de um espaço vetorial. Uma forma de contornarmos esse problema é introduzir um *duplicamento* do espaço de Hilbert. Dessa maneira, o espaço de Hilbert duplicado será dado pelo produto tensorial entre o espaço de Hilbert \mathcal{H} original e um espaço fictício idêntico, chamado de sistema *til*, que denotamos por $\tilde{\mathcal{H}}$. Disso, resulta que um vetor arbitrário nesse espaço duplicado é dado por $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$.

Em *DCT*, cada grau de liberdade dinâmico é duplicado; para qualquer operador A é associado à ele um conjugado til \tilde{A} . Esses operadores obedecem as seguintes relações básicas [15], chamadas de *regras de conjugação til*

$$(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \quad (3.10)$$

$$(cA_i + A_j)^\sim = c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \quad (3.11)$$

$$(A_i^\dagger)^\sim = (\tilde{A}_i)^\dagger, \quad (3.12)$$

$$(\tilde{A}_i)^\sim = A_i, \quad (3.13)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0, \quad (3.14)$$

$$|0(\theta)\rangle^\sim = |0(\theta)\rangle, \quad (3.15)$$

$$\langle 0(\theta)|^\sim = \langle 0(\theta)|. \quad (3.16)$$

Agora, considerando $|0(\beta)\rangle$ um vetor do espaço de Hilbert duplicado, tomemos

$$g_m(\beta) = f_m(\beta)|\tilde{m}\rangle, \quad (3.17)$$

de modo que (3.7) torna-se

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta)|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta)|n, \tilde{n}\rangle. \quad (3.18)$$

Assumindo que o operador A atua somente nos vetores *sem-til*, temos que o valor esperado fica

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n}|A|m, \tilde{m}\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n| \otimes \langle \tilde{n}|A|m\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n|A|m\rangle \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n|A|m\rangle \delta_{nm} \\ \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n|A|n\rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O *til* em um vetor $|m, \tilde{m}\rangle$ indica que $|\tilde{m}\rangle$ é uma cópia de $|m\rangle$. Em um vetor como $|m, \tilde{n}\rangle$, o *til* enfatiza somente o elemento do espaço de Hilbert-*til*. Com o objetivo de

reproduzir a média termal, comparando (3.6) e (3.19), temos

$$f_n^*(\beta)f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n}, \quad (3.20)$$

cuja solução é dada por

$$f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2}. \quad (3.21)$$

Portanto, o estado de vácuo termal pode ser escrito como

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (3.22)$$

Assim, o vetor $|0(\beta)\rangle$ é então definido no espaço de Hilbert duplicado.

3.2 Osciladores Térmicos

Nesta seção iremos discutir as ideias do formalismo da *DCT* considerando um sistema simples com osciladores bosônicos. A abordagem algébrica aplicada aqui será útil para o estudo de campos termais. O processo de termalização será implementado via transformação de Bogoliubov em notação de duplete.

3.2.1 Osciladores Bosônicos

Iniciamos o formalismo da *DCT* através de um exemplo simples. Consideremos um oscilador bosônico, à temperatura zero, descrito pela Hamiltoniana

$$H = \omega a^\dagger a. \quad (3.23)$$

Os operadores criação e destruição, respectivamente a^\dagger e a , satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1; \\ [a, a] &= 0; \\ [a^\dagger, a^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os autovalores e autoestados de H são dados por

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle, \quad (3.25)$$

onde o estado de vácuo $|0\rangle$, definido como sendo o estado de menor energia possível, é tal que

$$a|0\rangle = 0, \quad (3.26)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3.27)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.28)$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (3.29)$$

O operador número, definido por $N = a^\dagger a$, satisfaz a equação de autovalor

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (3.30)$$

onde os autovalores de N , os inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$, determinam os níveis de energia do oscilador, ou seja, $E_n = n\omega$. Assim, sendo que os operadores a^\dagger e a descrevem bósons, temos que $|n\rangle$ é o estado com n bósons.

Afim de construir o formalismo da *Dinâmica de Campos Térmicos* para o sistema bosônico, devemos realizar a duplicação dos graus de liberdade aplicando as regras de conjugação *til* em (3.24) resultando na introdução dos operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} . Assim, teremos

$$\tilde{H} = \omega\tilde{a}^\dagger\tilde{a}, \quad (3.31)$$

onde os operadores criação e destruição, respectivamente \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} , satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] &= 1; \\ [\tilde{a}, \tilde{a}] &= 0; \\ [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

O estado de vácuo termal $|0(\beta)\rangle$ em (3.22) é agora dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{\tilde{n}!}} |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sendo que $|0(\beta)\rangle$ é um estado normalizado, temos que a função partição $Z(\beta)$ é obtida como

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle m, \tilde{m} | e^{-\beta\omega(n+m)/2} | n, \tilde{n} \rangle \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta\omega(n+m)/2} \delta_{nm} \delta_{mn} \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Usando o fato que $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ e a expansão da série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{3.35}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\omega})^n \\
Z(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\omega})^n \\
Z(\beta) &= \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Com isso, a expressão para $|0(\beta)\rangle$ em (3.33) torna-se

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n \frac{e^{-n\beta\omega/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \tag{3.37}$$

Exploramos na próxima *sub-seção* que o estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ pode ser escrito como uma transformação unitária na forma

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \tag{3.38}$$

onde $U(\beta)$ é um operador unitário, ou seja,

$$U^\dagger(\beta)U(\beta) = \mathbf{1}. \tag{3.39}$$

3.2.2 Transformação de Bogoliubov de Operadores Bosônicos

A transformação de Bogoliubov é uma transformação canônica que leva o estado de vácuo não térmico ao estado de vácuo térmico. Afim de determiná-la, notemos que a soma na expressão (3.37) é a exponencial de um operador. Logo, podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n \frac{e^{-n\beta\omega/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle \\
 &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n \frac{[e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger]^n}{n!} |0, \tilde{0}\rangle \\
 |0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp(e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Este resultado pode ser escrito como uma única função exponencial, tal como um operador unitário. Para isso, consideremos a seguinte relação de conjugação canônica para os operadores bosônicos de criação e destruição

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

Definimos um novo par de operadores, b e b^\dagger , escritos em termos dos operadores a e a^\dagger . Assim, temos

$$b = ua + va^\dagger, \tag{3.41}$$

$$b^\dagger = u^* a^\dagger + v^* a, \tag{3.42}$$

onde u e v são números complexos.

Avaliando o comutador $[b, b^\dagger]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 [b, b^\dagger] &= [ua + va^\dagger, u^* a^\dagger + v^* a] \\
 &= [ua, u^* a^\dagger] + [ua, v^* a] + [va^\dagger, u^* a^\dagger] + [va^\dagger, v^* a] \\
 &= uu^* [a, a^\dagger] + uv^* [a, a] + vu^* [a^\dagger, a^\dagger] + vv^* [a^\dagger, a] \\
 &= |u|^2 [a, a^\dagger] - |v|^2 [a, a^\dagger] \\
 &\quad \therefore \\
 [b, b^\dagger] &= |u|^2 - |v|^2.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Então, para que tenhamos uma transformação canônica é necessário que $[b, b^\dagger] = 1$. Consequentemente

$$|u|^2 - |v|^2 = 1. \tag{3.44}$$

Esta forma sugere uma *identidade hiperbólica*, pois

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (3.45)$$

Com isso, definimos as seguintes funções hiperbólicas

$$\cosh \theta(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv u(\beta), \quad (3.46)$$

$$\sinh \theta(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv v(\beta), \quad (3.47)$$

onde

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2 \theta(\beta) - \sinh^2 \theta(\beta) = 1. \quad (3.48)$$

Como resultado destas definições, temos

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2}. \quad (3.49)$$

Portanto, substituindo (3.46) e (3.49) em (3.40), obtemos

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= [\cosh \theta(\beta)]^{-1} e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta(\beta) (-\tilde{a} a)} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde usamos

$$e^{f(\theta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.51)$$

para o qual $f(\theta)$ é uma função arbitrária de θ .

Para prosseguir, consideremos inicialmente a seguinte identidade para operadores

$$e^{\tau(A+B)} = e^{\tanh \tau B} e^{\ln \cosh \tau C} e^{\tanh \tau A}, \quad (3.52)$$

onde $C = [A, B]$.

Disso, fazemos a associação

$$A = -\tilde{a} a, \quad (3.53)$$

$$B = a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \quad (3.54)$$

$$C = [A, B] = -\tilde{a} \tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \quad (3.55)$$

$$\tau = \theta = \theta(\beta). \quad (3.56)$$

Isso leva à

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.57)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (3.58)$$

Então, um operador unitário que transforma $|0, \tilde{0}\rangle$ em $|0(\beta)\rangle$, é dado por

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)}, \quad (3.59)$$

onde o operador $U(\beta)$ é chamado de transformação de Bogoliubov.

3.2.3 Operadores Térmicos Bosônicos

Usando $U(\beta)$ podemos construir os operadores termais através das relações

$$a(\beta) = U(\beta)aU^\dagger(\beta) \quad (3.60)$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta) \quad (3.61)$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta) \quad (3.62)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta) \quad (3.63)$$

Fazendo o operador destruição termalizado $a(\beta)$ atuar sobre o estado térmico $|0(\beta)\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a(|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) \\ &= U(\beta)(a|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) \\ a(\beta)|0(\beta)\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

De modo análogo para $\tilde{a}(\beta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)\tilde{a}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)\tilde{a}(|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) \\ &= U(\beta)(|0\rangle \otimes \tilde{a}|\tilde{0}\rangle) \\ \tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Notemos assim que $|0(\beta)\rangle$ é o estado de vácuo para os operadores $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$. No entanto, $|0(\beta)\rangle$ não é vácuo para os operadores a e \tilde{a} , pois

$$\begin{aligned}
a|0(\beta)\rangle &= a \left(\frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} a (|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (a|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (\sqrt{n}|n-1\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
a|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty \sqrt{n} e^{-\beta E_n/2} |n-1, \tilde{n}\rangle
\end{aligned} \tag{3.66}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{a}|0(\beta)\rangle &= \tilde{a} \left(\frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} \tilde{a} (|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (|n\rangle \otimes \tilde{a}|\tilde{n}\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (|n\rangle \otimes \sqrt{\tilde{n}}|\tilde{n}-1\rangle) \\
\tilde{a}|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n^\infty \sqrt{\tilde{n}} e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}-1\rangle.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Neste sentido, $|0(\beta)\rangle$ é um *estado puro* para operadores térmicos, e um *estado termal* para operadores não-termais.

Sendo que $U(\beta)$ é uma transformação unitária, a álgebra dos operadores originais a e \tilde{a} mante-se invariante, ou seja, os operadores termais $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned}
[a(\beta), a^\dagger(\beta)] &= 1, \\
[\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] &= 1,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

com todas as outras relações de comutação sendo nulas.

Usando a relação (3.59), podemos escrever o operador $a(\beta)$ como

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta)aU^\dagger(\beta) \\ &= e^{-iG(\beta)}ae^{-iG(\beta)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

O desenvolvimento da expressão em (3.69) é realizada utilizando a seguinte relação entre operadores

$$e^{-iB}Ae^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots \quad (3.70)$$

Escolhendo $A = a$ e $B = G(\beta)$, de (3.69) temos

$$\begin{aligned} a(\beta) &= \left(1 + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) + \dots\right)a \\ &\quad - \left(\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) + \dots\right)\tilde{a}^\dagger \\ &= \cosh \theta(\beta)a - \sinh \theta(\beta)\tilde{a}^\dagger \\ a(\beta) &= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Procedendo de forma similar, derivamos também as relações para os operadores $a^\dagger(\beta)$, $\tilde{a}(\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$. Em suma, temos

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (3.72)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger, \quad (3.73)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \quad (3.74)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a, \quad (3.75)$$

onde $u(\beta)$ e $v(\beta)$ são dadas pelas expressões em (3.46) e (3.47), respectivamente.

Os operadores não-termais a e a^\dagger são obtidos dos termais através da inversão dessas relações. Em suma, temos

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (3.76)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (3.77)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (3.78)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (3.79)$$

Em muitos casos, as observáveis físicas são escritas como uma combinação dos operadores a e a^\dagger . Com isso, é conveniente escrever os operadores não-termais em termos

dos termais. Como exemplo, calculemos o valor médio do operador número $N = a^\dagger a$ no estado de vácuo térmico. Encontramos que

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\
&= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},
\end{aligned} \tag{3.80}$$

onde foi usado $a(\beta)|0(\beta)\rangle = 0$ e $\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0$. O resultado em (3.80) mostra que a média do operador número N , quando tomada em termos do vácuo térmico, nos dá a distribuição de Bose-Einstein para um sistema em equilíbrio térmico.

A notação de duplete é introduzida definindo

$$A = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{3.81}$$

Assim, podemos escrever os operadores térmicos na forma matricial

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

onde

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

3.3 Transformação Generalizada de Bogoliubov

A transformação de Bogoliubov é escrita como uma matriz 2×2 ,

$$B(k_\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} u(k, \alpha) & -v(k, \alpha) \\ -v(k, \alpha) & u(k, \alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.85}$$

onde

$$u^2(k, \alpha) - v^2(k, \alpha) = 1. \tag{3.86}$$

Escrevemos uma função de Green duplicada como

$$G^{(ab)}(x - x'; \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} G^{(ab)}(k; \alpha), \quad (3.87)$$

onde

$$G^{(ab)}(k; \alpha) = B^{(ac)}(k_\alpha, \alpha) G^{(cd)}(k) B^{\dagger(db)}(k_\alpha, \alpha); \quad (3.88)$$

e as componentes de $G_0^{(ab)}(k; \alpha)$, com $v_k^2(\alpha) = v^2(k_\alpha; \alpha)$, são

$$\begin{aligned} \overline{G}^{(11)}(k; \alpha) &= \overline{G}^{(22)}(k; \alpha) = v_k^2(\alpha) [G_0(k) - G_0^*(k)], \\ \overline{G}^{(12)}(k; \alpha) &= \overline{G}^{(21)}(k; \alpha) = v_k(\alpha) [1 + v_k^2(\alpha)]^{1/2} [G_0^*(k) - G_0(k)]. \end{aligned}$$

Na presente dissertação, um teoria de campo em topologia $\Gamma_D^d = (\mathbb{S}^1)^d \times \mathbb{R}^{D-d}$, com $1 \leq d \leq D$, é considerada [21]. D são as dimensões espaço-tempo e d representa o número de dimensões compactificadas. O parâmetro α é assumido como um *parâmetro de compactificação* definido por $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{D-1})$. A temperatura é descrita pela escolha $\alpha_0 \equiv \beta$, onde $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$. A transformação de Bogoliubov generalizada é dada por

$$v^2(k_\alpha; \alpha) = \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \times \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^s \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right\}, \quad (3.89)$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, com N sendo o número de coordenadas espaciais compactificadas. Isto leva ao caso geral de $(N + 1)$ -dimensões, de modo que

$$\begin{aligned} \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \alpha) &= \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \\ &\times \left[G_0^*(x - x' - i \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j}) - G_0(x - x' - i \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j}) \right], \end{aligned} \quad (3.90)$$

onde $\eta_{\sigma_j} = +1$, se $\sigma_j = 0$, e $\eta_{\sigma_j} = -1$ para $\sigma_j = 1, 2, \dots, N$. Ainda temos que $f(\alpha_j) = 0$ para $\alpha_j = 0$, $f(\alpha_j) = 1$ para $\alpha_j \neq 0$ e $\{\sigma_s\}$ denotam o conjunto de todas as combinações com s elementos, $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$, dos primeiros $N + 1$ números naturais $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, que são todos subconjuntos contendo s elementos, os quais escolhemos escrever em forma ordenada, $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s$.

Na situação mais geral do espaço-tempo 4-dimensional (com $N = 3$), o tensor de energia-momento renormalizado para o campo livre devido ao parâmetro- α é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\mu\nu(11)}(x; \alpha) &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \alpha) \right\} \\
&= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{s=1}^4 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1, \dots, l_{\sigma_s}}=1}^{\infty} \\
&\quad \times \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^2} - \frac{2 \sum_{j,r=1}^s (1 + \eta_{\sigma_j} \eta_{\sigma_r}) (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j}) (\alpha_{\sigma_r} l_{\sigma_r}) n_{\sigma_j}^{\mu} n_{\sigma_r}^{\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^3} \right].
\end{aligned} \tag{3.91}$$

A expressão geral em (3.91) o tensor de energia-momento renormalizado será útil em cálculos posteriores neste trabalho.

Capítulo 4

Dinâmica de Campos Térmicos aplicada ao Campo de Duffin-Kemmer-Petiau

4.1 Estado de Vácuo Térmico do Campo de DKP

Neste capítulo direcionamos nossa atenção para calcular o vácuo térmico do tensor de energia-momento no campo de DKP usando as ferramentas matemáticas desenvolvidas no Capítulo 2. Para isso, aplicamos as regras de conjugação *til*, bem como a notação de duplete para os campos α -dependentes. Disso, construímos o valor esperado no vácuo térmico para os setores escalar e vetorial do campo de DKP, os quais correspondem, respectivamente, às partículas com *spin* 0 e *spin* 1.

4.1.1 Vácuo Térmico - Setor Escalar

Usando a notação de duplete, o tensor de energia-momento no espaço duplicado, em termos de um parâmetro α , é dado por

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle &= \langle 0(\alpha) | \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) | 0(\alpha) \rangle \\ \langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) iG_0^{(ab)}(x - x'; \alpha)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Afim de estimar o efeito da topologia, caracterizada pelo conjunto de parâmetros α , introduzimos, via um procedimento de regularização, um tensor de energia-momento finito dado por

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = \langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle - \langle \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) \rangle. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) e (2.82) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i G_0^{(ab)}(x - x') \\
&= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i \left\{ G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(ab)}(x - x') \right\} \\
&\quad \dots \\
\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i \bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde

$$\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(ab)}(x - x'). \tag{4.4}$$

Na representação de Fourier, temos

$$G_0^{(ab)}(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k), \tag{4.5}$$

com

$$G_0^{(ab)}(k) = \begin{pmatrix} G_0(k) & 0 \\ 0 & G_0^*(k) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

A parte α -dependente da função de Green, na representação de Fourier, é dada por

$$G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k; \alpha) \tag{4.7}$$

onde $G_0^{(ab)}(k; \alpha) = \mathcal{B}^{-1}(\alpha) G_0^{(ab)}(k) \mathcal{B}(\alpha)$.

Também temos que $G_0^{(ab)}(k; \alpha)$ é dada explicitamente por

$$G_0^{(ab)}(k; \alpha) = G_0^{(ab)}(k) + v^2(k; \alpha) \left[G_0^{(ab)*}(k) - G_0^{(ab)}(k) \right]. \tag{4.8}$$

Sendo $G_0^{(11)}(k) = G_0(k)$, temos

$$G_0^*(k) - G_0(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.7) e (4.5) em (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) &= G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(ab)}(x - x') \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k; \alpha) - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \left[G_0^{(ab)}(k; \alpha) - G_0^{(ab)}(k) \right].
\end{aligned}$$

E usando (4.8) na equação acima, vem

$$\tilde{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} v^2(k; \alpha) [G_0^{(ab)*}(k) - G_0^{(ab)}(k)]. \quad (4.10)$$

4.1.2 Vácuo Térmico - Setor Vetorial

Nesta seção empregaremos as regras de conjugação *til*, bem como a notação de dupletos, para o cálculo do valor esperado do tensor de energia-momento do *campo vetorial de DPK* no vácuo térmico. Assim, a eq. (2.122) torna-se

$$\begin{aligned} \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) &= -F^{\mu\sigma(ab)}(x) F_{\sigma}^{\nu(ab)}(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^{(ab)}(x) F^{\alpha\beta(ab)}(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} A_{\alpha}^{(a)}(x) A^{\alpha(b)}(x) + m^2 A^{\mu(a)}(x) A^{\nu(b)}(x), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde os índices $a, b = 1, 2$ são definidos de acordo com a notação de dupletos, e

$$F_{\alpha\beta}^{(ab)} = \partial_{\mu} A_{\alpha}^{(a)} - \partial_{\nu} A_{\alpha}^{(b)}. \quad (4.12)$$

O propagador em notação de dupletos dado em (2.130) para campos vetoriais (fóton) fica reescrito como

$$\begin{aligned} iD_{\alpha\beta}^{(ab)}(x - x') &= \langle 0, \tilde{0} | \tau [A_{\alpha}^{(a)}(x) A_{\beta}^{(b)}(x')] | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= g_{\alpha\beta} iG_0^{(ab)}(x - x'), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde as componentes não-nulas de $G_0^{(ab)}(x - x')$ são

$$G_0^{(ab)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k), \quad (4.14)$$

com

$$(G_0^{(ab)}(k)) = \begin{pmatrix} G_0(k) & 0 \\ 0 & -G_0^*(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

No espaço de configuração, temos

$$(G_0^{(ab)}(x - x')) = \begin{pmatrix} G_0(x - x') & 0 \\ 0 & -G_0^*(x - x') \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

O valor esperado do tensor de energia-momento no vácuo térmico

$$\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) \rangle = \langle 0, \tilde{0} | \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) | 0, \tilde{0} \rangle. \quad (4.17)$$

Então, usando (2.136), temos

$$\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \delta_b^a \right\}, \quad (4.18)$$

onde

$$\Lambda^{\mu\nu}(x, x') = \Gamma^{\mu\nu}(x, x') - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} = 2 \left(\partial^\mu \partial'^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\beta \partial'_\beta \right) - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Em termos dos campos α -dependentes, introduzimos o tensor

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle &= \langle 0, \tilde{0} | \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \langle 0(\alpha) | \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) | 0(\alpha) \rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

o qual nos dá

$$\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \delta_b^a \right\}, \quad (4.21)$$

Usando o procedimento de regularização como aquele realizado para o campo escalar de DKP, introduzimos um tensor de energia-momento *finito*, dado pela diferença entre o valor esperado do tensor energia-momento α -dependente e o valor esperado do tensor energia-momento *sem efeitos* devido ao parâmetro α

$$\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = \langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle - \langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) \rangle. \quad (4.22)$$

O objetivo central do procedimento de renormalização visa obtermos uma expressão finita descrevendo quantidades físicas que podem ser medidas. Explicitamente, usando as expressões $\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle$ e $\langle \Theta_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x) \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \delta_b^a \right\} \\ &\quad + i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x') + 2 \left(\eta_0^\mu \eta_0^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x') \delta_b^a \right\} \\ &= -2i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') \left[G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(ab)}(x - x') \right] \right\} \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(ab)}(x - x'; \alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde fizemos

$$\overline{G}^{(ab)}(x-x';\alpha) = G^{(ab)}(x-x';\alpha) - G_0^{(ab)}(x-x'). \quad (4.24)$$

Na representação de Fourier, temos

$$G^{(ab)}(x-x';\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} G^{(ab)}(k;\alpha), \quad (4.25)$$

onde

$$G^{(ab)}(k;\alpha) = B_k^{-1(ac)}(\alpha) G_0^{(cd)}(k) B_k^{(db)}(\alpha). \quad (4.26)$$

Portanto, apresentamos neste capítulo as ferramentas matemáticas necessárias para o cálculo do vácuo térmico do tensor de energia-momento no campo de DKP.

Capítulo 5

Aplicações dos Campos Térmicos de DKP

No capítulo que segue abordaremos a aplicação da *Dinâmica de Campos Térmicos* ao campo de DKP com o objetivo de obter a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir. Partículas de *spin-0* são descritas pelos campos escalares e partículas de *spin-1* são descritas por campos vetoriais.

A *lei de Stefan-Boltzmann* estabelece que todo corpo que possui temperatura acima de zero grau Kelvin emite radiação cuja magnitude é proporcional à temperatura com quarta potência. O *Efeito Casimir* é uma das mais notáveis manifestações de flutuações quânticas de vácuo. Este fenômeno é uma modificação na energia de vácuo de um dado campo quântico devido às condições de contorno e efeitos topológicos neste campo. Para o campo eletromagnético, o Efeito Casimir consiste na atração entre duas placas metálicas neutras paralelas uma com a outra e colocadas no vácuo.

5.1 O Campo Escalar de DKP

5.1.1 Lei de Stefan-Boltzmann

Nesta seção a *lei de Stefan-Boltzmann para o campo escalar de DKP* é obtida a partir da equação do tensor de energia-momento dado em (4.3), à saber

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) \quad (5.1)$$

Aqui, o parâmetro- α da topologia de compactificações é $\alpha = (\beta, 0, 0, 0)$ e a transformação de Bogoliubov generalizada, eq. (3.89) para $p=1$ e $s=1$, toma a forma

$$v^2(k; \beta) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k_0 l_0}. \quad (5.2)$$

Usando (4.10), obtemos o conteúdo físico dado explicitamente por

$$\bar{G}^{(11)}(x - x', \beta) = 2 \sum_{l_0=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0). \quad (5.3)$$

Portanto, o tensor de energia-momento finito fica dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta) \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) i 2 \sum_{l_0=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) \\ \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) &= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu + m^2 g^{\mu\nu} \right) G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para $\mu = \nu = 0$ obtemos a *lei de Stefan-Boltzmann* para o campo escalar de DKP

$$\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) = 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^0 \partial'^0 + m^2 \right) G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0). \quad (5.5)$$

A função de Green para $G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0)$ na forma integral é dada por

$$G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.6)$$

Sendo $x \equiv x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$, temos

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}), \quad (5.7)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

$$k = (k_0, \mathbf{k}), \quad (5.9)$$

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2, \quad (5.10)$$

$$n_0 = (n_0^{(0)}, \mathbf{n}_0) = (1, 0, 0, 0), \quad (5.11)$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2, \quad (5.12)$$

$$kx = k^\mu x_\mu = k_0 x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \quad (5.13)$$

Calculamos $G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0)$ em (5.6) como segue

$$\begin{aligned}
G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-i\beta l_0 \mathbf{n}_0)} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0-i\beta l_0 n_0^{(0)})}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0-i\beta l_0)}}{k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2) + i\epsilon} \\
G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0\lambda_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

onde

$$\lambda_0 = x_0 - x'_0 - i\beta l_0. \tag{5.15}$$

Sendo ϵ um parâmetro muito pequeno, notemos que

$$\begin{aligned}
(k_0 + \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)(k_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon) &= [k_0 + (\omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)][k_0 - (\omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)] \\
&= k_0^2 - (\omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)^2 \\
&= k_0^2 - (\omega_{\mathbf{k}}^2 - 2\omega_{\mathbf{k}}i\epsilon - \epsilon^2) \\
&= k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + 2\omega_{\mathbf{k}}i\epsilon + \epsilon^2 \\
&\approx k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + 2\omega_{\mathbf{k}}i\epsilon \\
(k_0 + \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)(k_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon) &\approx k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

onde trocamos $2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon$ por ϵ . Também temos $\epsilon^2 \ll \epsilon$, desde que ϵ seja um parâmetro infinitesimal tendendo a zero.

Assim, a integral sobre k_0 na equação (5.14) fica

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0\lambda_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\pi} \int dk_0 \frac{e^{-ik_0\lambda_0}}{(k_0 + \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)(k_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon)}. \tag{5.17}$$

Usando o *Teorema do Resíduo*, o resultado acima é dado por

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0\lambda_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} = -\frac{ie^{i\omega_{\mathbf{k}}\lambda_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \tag{5.18}$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Logo, a equação (5.14) torna-se

$$\begin{aligned}
G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-\frac{i e^{i\omega_{\mathbf{k}}\lambda_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{i\lambda_0\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\omega_{\mathbf{k}}} \\
G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{i\lambda_0\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Identificamos o integrando acima como

$$\mathbb{I}(\mathbf{k}) = \int d^3 k \frac{e^{i\lambda_0\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}. \tag{5.20}$$

Fazendo uso das coordenadas esféricas, temos

$$d^3 k = |\mathbf{k}|^2 \text{sen } \theta \, dk \, d\theta \, d\phi,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq |\mathbf{k}| \leq \infty.$$

Assim, a integral em (5.20) fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= \iiint |\mathbf{k}|^2 \text{sen } \theta \, dk \, d\theta \, d\phi \frac{e^{i\lambda_0\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \\
&= 2\pi \iint \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i\lambda_0\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \text{sen } \theta \, d\theta \, dk \\
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= -2\pi \iint \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i\lambda_0\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} d(\cos\theta) \, dk
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = |\mathbf{k}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta \tag{5.21}$$

$$\text{sen } \theta \, d\theta = -d(\cos \theta). \tag{5.22}$$

Fazendo $\cos \theta = \xi$, temos

$$\cos \pi = -1 \implies \xi = -1 \tag{5.23}$$

$$\cos 0 = +1 \implies \xi = +1 \tag{5.24}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= -2\pi \int_0^\infty \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} dk \int_{+1}^{-1} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\xi} d\xi \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} dk \int_{-1}^{+1} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\xi} d\xi \\
&= \frac{4\pi}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{k}| e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} dk \left[\frac{e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{2i} \right] \\
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{k}| e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \text{sen}(|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) dk \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Usando a tabela de integrais em [24], temos

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-\omega \sqrt{x^2 + c^2}}}{\sqrt{x^2 + c^2}} \text{sen}(bx) dx = \frac{cb}{A} K_1(cA) \tag{5.26}$$

onde $A = \sqrt{\omega^2 + b^2}$. Os fatores K_ν são as *funções de Bessel modificadas de segunda espécie*.

Disso, identificamos

$$\begin{aligned}
x &\equiv k \\
b &\equiv |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \\
c &\equiv m \\
\omega &\equiv -i\lambda_0
\end{aligned}$$

de modo que

$$A = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}. \tag{5.27}$$

Então, a equação (5.25) fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{A} K_1(mA) \\
\mathbb{I}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi m}{A} K_1(mA) \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (5.28) em (5.19), obtemos

$$G_0(x-x' - i\beta l_0 n_0) = -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(mA)}{A}. \tag{5.29}$$

Agora, da equação (5.6), também obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_0^2 e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-i\beta l_0 \mathbf{n}_0)} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{k_0^2 e^{-ik_0(x_0-x'_0-i\beta l_0 n_0^{(0)})}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{k_0^2 e^{-ik_0(x_0-x'_0-i\beta l_0)}}{k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2) + i\epsilon} \\
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{k_0^2 e^{-ik_0 \lambda_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon}. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o *Teorema do Resíduo*, o resultado da integral em k_0 acima é dado por

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{k_0^2 e^{-ik_0 \lambda_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} = -\frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{2} e^{i\omega_{\mathbf{k}} \lambda_0}, \tag{5.31}$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Disso,

$$\begin{aligned}
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-\frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{2} e^{i\omega_{\mathbf{k}} \lambda_0} \right) \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \omega_{\mathbf{k}} e^{i\lambda_0 \omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \mathbb{G}(\mathbf{k}), \tag{5.32}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{G}(\mathbf{k}) = \int d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \tag{5.33}$$

Em coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}(\mathbf{k}) &= \iiint \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \text{sen } \theta \, dk \, d\theta \, d\phi \\
&= 2\pi \iint \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \text{sen } \theta \, d\theta \, dk \\
&= -2\pi \iint \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos \theta} \, d(\cos \theta) \, dk. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Então, fazendo $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2$, vem

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}(\mathbf{k}) &= -2\pi \int_0^\infty \int_{+1}^{-1} \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\xi} d\xi dk \\
&= -2\pi \int_0^\infty \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} dk \int_{+1}^{-1} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\xi} d\xi \\
&= 2\pi \int_0^\infty \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} dk \int_{-1}^{+1} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\xi} d\xi \\
&= 2\pi \int_0^\infty |\mathbf{k}|^2 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} dk \left[\frac{e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\xi}}{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{-1}^{+1} \\
&= \frac{4\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty |\mathbf{k}| \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} dk \left[\frac{e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{2i} \right] \\
\mathbb{G}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty |\mathbf{k}| \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} e^{i\lambda_0 \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \text{sen}(|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) dk. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Usando uma tabela de integrais [24], a solução da integral acima é dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x \sqrt{x^2 + c^2} e^{-\omega \sqrt{x^2 + c^2}} \text{sen}(bx) dx &= \left(-\frac{bc^2}{A^2} + \frac{4b\omega^2 c^2}{A^4} \right) K_0(cA) \\
&+ \left(-\frac{2bc}{A^3} + \frac{8b\omega^2 c}{A^5} + \frac{b\omega^2 c^3}{A^3} \right) K_1(cA) \tag{5.36}
\end{aligned}$$

onde, como definido anteriormente,

$$\begin{aligned}
x &\equiv k \\
b &\equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\
c &\equiv m \\
\omega &\equiv -i\lambda_0
\end{aligned}$$

Logo, a solução para $\mathbb{G}(\mathbf{k})$ é

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \left(-\frac{bc^2}{A^2} + \frac{4b\omega^2 c^2}{A^4} \right) K_0(cA) + \left(-\frac{2bc}{A^3} + \frac{8b\omega^2 c}{A^5} + \frac{b\omega^2 c^3}{A^3} \right) K_1(cA) \right\} \\
&= \frac{4\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| m^2}{A^2} + \frac{4|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| (-i\lambda_0)^2 m^2}{A^4} \right) K_0(mA) \\
&+ \frac{4\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(-\frac{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| m}{A^3} + \frac{8|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| (-i\lambda_0)^2 m}{A^5} + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| (-i\lambda_0)^2 m^3}{A^3} \right) K_1(mA) \\
\mathbb{G}(\mathbf{k}) &= -\left(\frac{4\pi m^2}{A^2} + \frac{16\pi \lambda_0^2 m^2}{A^4} \right) K_0(mA) - \left(\frac{8\pi m}{A^3} + \frac{32\pi \lambda_0^2 m}{A^5} + \frac{4\pi \lambda_0^2 m^3}{A^3} \right) K_1(mA). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (5.37) em (5.32), obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \mathbb{G}(\mathbf{k}) \\
&= -\frac{i}{16\pi^3} \left[-\left(\frac{4\pi m^2}{A^2} + \frac{16\pi \lambda_0^2 m^2}{A^4} \right) K_0(mA) \right] \\
&\quad -\frac{i}{16\pi^3} \left[-\left(\frac{8\pi m}{A^3} + \frac{32\pi \lambda_0^2 m}{A^5} + \frac{4\pi \lambda_0^2 m^3}{A^3} \right) K_1(mA) \right] \\
\partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= \frac{im}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m}{A^2} + \frac{4\lambda_0^2 m}{A^4} \right) K_0(mA) + \left(\frac{2}{A^3} + \frac{8\lambda_0^2}{A^5} + \frac{\lambda_0^2 m^2}{A^3} \right) K_1(mA) \right].
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Agora, substituindo (5.29) e (5.38) em (5.5) vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^0 \partial'^0 + m^2 \right) G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) \\
&= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) + m^2 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) \right\} \\
&= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{im}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m}{A^2} + \frac{4\lambda_0^2 m}{A^4} \right) K_0(mA) + \left(\frac{2}{A^3} + \frac{8\lambda_0^2}{A^5} + \frac{\lambda_0^2 m^2}{A^3} \right) K_1(mA) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{im^3}{4\pi^2} \frac{K_1(mA)}{A} \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m}{A^2} + \frac{4\lambda_0^2 m}{A^4} \right) K_0(mA) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{A^3} + \frac{8\lambda_0^2}{A^5} + \frac{\lambda_0^2 m^2}{A^3} - \frac{m^2}{A} \right) K_1(mA) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Finalmente, tomando o limite na equação acima quando $x' \rightarrow x$, obtemos a expressão da *lei de Stefan-Boltzmann* para o setor escalar do campo de DKP. Assim

$$\begin{cases} \lambda_0 \equiv -i\beta l_0 \\ A \equiv \beta l_0 \end{cases} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{\beta^2 l_0^2} - \frac{4\beta^2 l_0^2 m}{\beta^4 l_0^4} \right) K_0(m\beta l_0) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\beta^3 l_0^3} - \frac{8\beta^2 l_0^2}{\beta^5 l_0^5} - \frac{\beta^2 l_0^2 m^2}{\beta^3 l_0^3} - \frac{m^2}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\} \\
&= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{\beta^2 l_0^2} - \frac{4m}{\beta^2 l_0^2} \right) K_0(m\beta l_0) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\beta^3 l_0^3} - \frac{8}{\beta^3 l_0^3} - \frac{m^2}{\beta l_0} - \frac{m^2}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3m^2}{\beta^2 l_0^2} \right) K_0(m\beta l_0) + \left(\frac{6m}{\beta^3 l_0^3} + \frac{2m^3}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\}. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

No limite de massas muito pequenas ($m \rightarrow 0$), a função de Bessel modificada pode ser escrita como

$$K_\nu(z) \approx \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad (5.42)$$

onde $\Gamma(\nu)$ é a função gama.

Logo, para $m \rightarrow 0$, temos

$$K_0(m\beta l_0) \approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(m\beta l_0) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0} \quad (5.43)$$

Para o problema em questão, temos $\nu = 0$ e $\nu = 1$. Então, das propriedades da função gama, temos

$$\Gamma(0) = \infty \quad ; \quad \Gamma(1) = 1 \quad (5.44)$$

Disso, a equação (5.41) fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3m^2}{\beta^2 l_0^2} \right) \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6m}{\beta^3 l_0^3} + \frac{2m^3}{\beta l_0} \right) \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left(\frac{6}{\beta^3 l_0^3} \frac{\Gamma(1)}{\beta l_0} \right) \\
&= \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_0^4} \right) \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \zeta(4), \quad (5.45)
\end{aligned}$$

onde

$$\zeta(4) = \sum_{l_0=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_0^4} \right) = \frac{\pi^4}{90} \quad (5.46)$$

é a função zeta de Riemann.

Portanto,

$$\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) = \frac{\pi^2}{30\beta^4}. \quad (5.47)$$

5.1.2 Efeito Casimir para o Campo Escalar de DKP à Temperatura Zero

Usando a transformação de Bogoliubov dada em (3.89) e o parâmetro $\alpha = (0, 0, 0, i2d)$, obtemos

$$v^2(k; d) = \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3}. \quad (5.48)$$

Assim, da equação (4.10) e sendo $n_3 = (0, 0, 0, 1)$, vem

$$\bar{G}_0^{(11)}(x - x'; d) = 2 \sum_{l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - 2dl_3 n_3). \quad (5.49)$$

Energia de Casimir à Temperatura Zero

O tensor de energia-momento finito em (4.3) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$, fica

$$\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) = 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^0 \partial'^0 + m^2 \right) G_0(x - x' - 2dl_3 n_3). \quad (5.50)$$

Então, realizando o procedimento de cálculo similar ao realizado para calcular a *lei de Stefan-Boltzmann*, a função de Green torna-se

$$\begin{aligned} G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x'-2dl_3 n_3)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x-x'_0-2dl_3 n_3^{(0)}) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3 \mathbf{n}_3)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3 \mathbf{n}_3)} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0-2dl_3 n_3^{(0)})}}{k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2) + i\epsilon} \\ G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3 \mathbf{n}_3)} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Usando um resultado similar ao encontrado em (5.18), temos

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} = -\frac{ie^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-x'_0)}}{2\omega_{\mathbf{k}}}, \quad (5.52)$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Então,

$$\begin{aligned}
G_0(x - x' - 2dl_3\mathbf{n}_3) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3\mathbf{n}_3)} \left(-\frac{ie^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-x'_0)}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3\mathbf{n}_3)} e^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-x'_0)}}{\omega_{\mathbf{k}}} \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\
G_0(x - x' - 2dl_3\mathbf{n}_3) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \mathbb{J}(\mathbf{k}), \tag{5.53}
\end{aligned}$$

onde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' - 2dl_3\mathbf{n}_3 \tag{5.54}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(\mathbf{k}) &= \int d^3k \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\
&= \iiint |\mathbf{k}|^2 \text{sen } \theta dk d\theta d\phi \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\
&= 2\pi \iint \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \text{sen } \theta d\theta dk \\
&= -2\pi \iint \frac{|\mathbf{k}|^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}|\cos\theta}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} d(\cos\theta) dk \\
&\therefore \\
\mathbb{J}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi m}{\Delta} K_1(m\Delta), \tag{5.55}
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta = \sqrt{-(x_0 - x'_0)^2 + |\boldsymbol{\Sigma}|^2}. \tag{5.56}$$

Portanto, substituindo (5.55) em (5.53) obtemos

$$G_0(x - x' - 2dl_3\mathbf{n}_3) = -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Delta)}{\Delta}. \tag{5.57}$$

Agora, através de um cálculo similar ao realizado em (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} \partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) &= \frac{im}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m}{\Delta^2} + \frac{4(x_0 - x'_0)^2 m}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{\Delta^3} + \frac{8(x_0 - x'_0)^2}{\Delta^5} + \frac{(x_0 - x'_0)^2 m^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Finalmente, substituindo (5.57) e (5.58) em (5.50) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \partial^0 \partial'^0 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) + m^2 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) \right\} \\ &= 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{im}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m}{\Delta^2} + \frac{4(x_0 - x'_0)^2 m}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2}{\Delta^3} + \frac{8(x_0 - x'_0)^2}{\Delta^5} + \frac{(x_0 - x'_0)^2 m^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \right] - \frac{im^3 K_1(m\Delta)}{4\pi^2 \Delta} \right\} \\ &= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m}{\Delta^2} + \frac{4(x_0 - x'_0)^2 m}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{\Delta^3} + \frac{8(x_0 - x'_0)^2}{\Delta^5} + \frac{(x_0 - x'_0)^2 m^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) - m^2 \frac{K_1(m\Delta)}{\Delta} \right\} \\ \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m}{\Delta^2} + \frac{4(x_0 - x'_0)^2 m}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{\Delta^3} + \frac{8(x_0 - x'_0)^2}{\Delta^5} + \frac{(x_0 - x'_0)^2 m^2}{\Delta^3} - \frac{m^2}{\Delta} \right) K_1(m\Delta) \right\}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Tomando o limite quando $x' \rightarrow x$ na equação (5.59), temos

$$\begin{cases} x_0 - x'_0 \equiv 0, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{0}, \\ \Delta \equiv |\boldsymbol{\Sigma}| \equiv 2dl_3. \end{cases} \quad (5.60)$$

Disso, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m}{\Delta^2} + \frac{4(x_0 - x'_0)^2 m}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\Delta^3} + \frac{8(x_0 - x'_0)^2}{\Delta^5} + \frac{(x_0 - x'_0)^2 m^2}{\Delta^3} - \frac{m^2}{\Delta} \right) K_1(m\Delta) \right\} \\
&= -\frac{m}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{m}{(2dl_3)^2} K_0(2dl_3m) + \left(\frac{2}{(2dl_3)^3} - \frac{m^2}{2dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \\
&= \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{8\pi^2 d^2 l_3^2} K_0(2dl_3m) + \left(-\frac{m}{8\pi^2 d^3 l_3^3} + \frac{m^3}{4\pi^2 dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} K_0(2dl_3m) + \left(-\frac{m}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \quad (5.61)
\end{aligned}$$

Tomando o limite para $m \rightarrow 0$, temos

$$K_0(2dl_3m) \approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(2dl_3m) \approx \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m}. \quad (5.62)$$

Portanto, a energia de Casimir à temperatura zero para o campo escalar de DKP é

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(-\frac{m}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(-\frac{1}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^2}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2d^3 l_3^3} \frac{\Gamma(1)}{2dl_3} \right\} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2 d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_3^4} \right) \\
&= -\frac{1}{16\pi^2 d^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{1440d^4}. \quad (5.63)
\end{aligned}$$

Pressão de Casimir à Temperatura Zero

O tensor de energia-momento finito em (4.3) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$, fica

$$\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) = 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^3 \partial'^3 - m^2 \right) G_0(x - x' - 2dl_3 \mathbf{n}_3). \quad (5.64)$$

Considerando que $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 0, 1)$, calculamos $\partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 \mathbf{n}_3)$

$$\begin{aligned} \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 \mathbf{n}_3) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_3^2 e^{-ik_0(x_0-x'_0)+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3\mathbf{n}_3)}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_3^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-2dl_3\mathbf{n}_3)} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_3^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}} \left(-\frac{ie^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-x'_0)}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k_3^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\ \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 \mathbf{n}_3) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \mathbb{K}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (5.65)$$

onde

$$\mathbb{K}(\mathbf{k}) = \int d^3 k \frac{k_3^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}. \quad (5.66)$$

Em coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned} d^3 k &= |\mathbf{k}|^2 \sin \theta \, dk \, d\theta \, d\phi, \\ k_3 &= |\mathbf{k}| \cos \theta, \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Sigma} &= |\mathbf{k}| |\boldsymbol{\Sigma}| \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Disso, a equação (5.66) torna-se

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\mathbf{k}) &= \int d^3 k \frac{k_3^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\ &= \int |\mathbf{k}|^2 \sin \theta \, dk \, d\theta \, d\phi \frac{(|\mathbf{k}| \cos \theta)^2 e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} e^{i|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}| \cos \theta}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \\ &= \int |\mathbf{k}|^4 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} dk \int \sin \theta \cos^2 \theta e^{i|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}| \cos \theta} d\theta \int d\phi \\ \mathbb{K}(\mathbf{k}) &= 2\pi \int_0^{\infty} |\mathbf{k}|^4 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} dk \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta e^{i|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}| \cos \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Para resolver a integral sobre θ fazemos

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta & \cos \pi &= -1 \\ du &= -\operatorname{sen} \theta d\theta & \cos 0 &= +1 \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|\cos \theta} d\theta &= -\int_{+1}^{-1} u^2 e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|u} du = \int_{-1}^{+1} u^2 e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|u} du \\ &= e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|} \left(\frac{1}{i|\mathbf{k}||\Sigma|} + \frac{2}{|\mathbf{k}|^2 |\Sigma|^2} - \frac{2}{i|\mathbf{k}|^3 |\Sigma|^3} \right) \\ &\quad - e^{-i|\mathbf{k}||\Sigma|} \left(\frac{1}{i|\mathbf{k}||\Sigma|} - \frac{2}{|\mathbf{k}|^2 |\Sigma|^2} - \frac{2}{i|\mathbf{k}|^3 |\Sigma|^3} \right) \\ &= \frac{1}{i|\mathbf{k}||\Sigma|} (e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|} - e^{-i|\mathbf{k}||\Sigma|}) + \frac{2}{|\mathbf{k}|^2 |\Sigma|^2} (e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|} + e^{-i|\mathbf{k}||\Sigma|}) \\ &\quad - \frac{2}{i|\mathbf{k}|^3 |\Sigma|^3} (e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|} - e^{-i|\mathbf{k}||\Sigma|}) \\ \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta e^{i|\mathbf{k}||\Sigma|\cos \theta} d\theta &= \frac{2}{|\mathbf{k}||\Sigma|} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) + \frac{4}{|\mathbf{k}|^2 |\Sigma|^2} \cos(|\mathbf{k}||\Sigma|) \\ &\quad - \frac{4}{|\mathbf{k}|^3 |\Sigma|^3} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\mathbf{k}) &= 2\pi \int_0^\infty |\mathbf{k}|^4 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} dk \\ &\quad \times \left[-\frac{4}{|\mathbf{k}|^3 |\Sigma|^3} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) + \frac{4}{|\mathbf{k}|^2 |\Sigma|^2} \cos(|\mathbf{k}||\Sigma|) + \frac{2}{|\mathbf{k}||\Sigma|} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) \right] \\ \mathbb{K}(\mathbf{k}) &= -\frac{8\pi}{|\Sigma|^3} \int_0^\infty |\mathbf{k}| \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) dk \\ &\quad + \frac{8\pi}{|\Sigma|^2} \int_0^\infty |\mathbf{k}|^2 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \cos(|\mathbf{k}||\Sigma|) dk \\ &\quad + \frac{4\pi}{|\Sigma|} \int_0^\infty |\mathbf{k}|^3 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) dk. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Considerando a equação (5.25) e as devidas modificações, a primeira integral em (5.71) torna-se

$$\int_0^\infty |\mathbf{k}| \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \operatorname{sen}(|\mathbf{k}||\Sigma|) dk = \frac{m|\Sigma|}{\Delta} K_1(m\Delta), \quad (5.72)$$

onde $\Delta = \sqrt{-(x_0 - x'_0)^2 + |\Sigma|^2}$.

Sejam as seguintes relações de recorrência para as *funções de Bessel modificadas* [25]

$$\begin{aligned}
K_{\nu+1}(x) &= K_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x), \\
\frac{dK_{\nu}(x)}{dx} &= -\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)], \\
\frac{dK_{\nu}(x)}{dx} &= \frac{\nu}{x}K_{\nu}(x) + K_{\nu+1}(x).
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Assim, usando as equações em (5.73) e através de um procedimento algébrico um tanto longo, obtemos

$$\int_0^{\infty} |\mathbf{k}|^2 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \cos(|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}|) dk = -\frac{m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^2}K_0(m\Delta) + \left[\frac{m}{\Delta} - \frac{2m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^3}\right]K_1(m\Delta), \tag{5.74}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |\mathbf{k}|^3 \frac{e^{i(x_0-x'_0)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}} \text{sen}(|\mathbf{k}||\boldsymbol{\Sigma}|) dk &= \left[\frac{3m^2|\boldsymbol{\Sigma}|}{\Delta^2} - \frac{4m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^4}\right]K_0(m\Delta) \\
&+ \left[\frac{6m|\boldsymbol{\Sigma}|}{\Delta^3} - \frac{8m|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^5} - \frac{m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^3}\right]K_1(m\Delta).
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Agora, substituindo (5.72), (5.74) e (5.75) em (5.71), vem

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}(\mathbf{k}) &= -\frac{8\pi}{|\boldsymbol{\Sigma}|^3} \left\{ \frac{m|\boldsymbol{\Sigma}|}{\Delta} K_1(m\Delta) \right\} + \frac{8\pi}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2} \left\{ -\frac{m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^2} K_0(m\Delta) + \left[\frac{m}{\Delta} - \frac{2m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^3} \right] K_1(m\Delta) \right\} \\
&+ \frac{4\pi}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left\{ \left[\frac{3m^2|\boldsymbol{\Sigma}|}{\Delta^2} - \frac{4m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^4} \right] K_0(m\Delta) + \left[\frac{6m|\boldsymbol{\Sigma}|}{\Delta^3} - \frac{8m|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^5} - \frac{m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^3}{\Delta^3} \right] K_1(m\Delta) \right\} \\
&= -\frac{8\pi m}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2 \Delta} K_1(m\Delta) - \frac{8\pi m^2}{\Delta^2} K_0(m\Delta) + \left[\frac{8\pi m}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2 \Delta} - \frac{16\pi m}{\Delta^3} \right] K_1(m\Delta) \\
&+ \left[\frac{12\pi m^2}{\Delta^2} - \frac{16\pi m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^4} \right] K_0(m\Delta) + \left[\frac{24\pi m}{\Delta^3} - \frac{32\pi m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^5} - \frac{4\pi m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^3} \right] K_1(m\Delta) \\
&= \left(-\frac{8\pi m^2}{\Delta^2} + \frac{12\pi m^2}{\Delta^2} - \frac{16\pi m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \\
&+ \left(-\frac{8\pi m}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2 \Delta} + \frac{8\pi m}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2 \Delta} - \frac{16\pi m}{\Delta^3} + \frac{24\pi m}{\Delta^3} - \frac{32\pi m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^5} - \frac{4\pi m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \\
\mathbb{K}(\mathbf{k}) &= \left(\frac{4\pi m^2}{\Delta^2} - \frac{16\pi m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) + \left(\frac{8\pi m}{\Delta^3} - \frac{32\pi m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^5} - \frac{4\pi m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta).
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Então, substituindo (5.76) em (5.65), obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) &= -\frac{i}{16\pi^3} \left[\left(\frac{4\pi m^2}{\Delta^2} - \frac{16\pi m^2 |\Sigma|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{8\pi m}{\Delta^3} - \frac{32\pi m |\Sigma|^2}{\Delta^5} - \frac{4\pi m^3 |\Sigma|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \right] \\
\partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) &= -\frac{i}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{4m^2 |\Sigma|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Delta^3} - \frac{8m |\Sigma|^2}{\Delta^5} - \frac{m^3 |\Sigma|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \right]. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (5.57) e (5.77) em (5.64) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) - m^2 G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) \right\} \\
&= 2i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{i}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{4m^2 |\Sigma|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{2m}{\Delta^3} - \frac{8m |\Sigma|^2}{\Delta^5} - \frac{m^3 |\Sigma|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) \right] + \frac{im^3 K_1(m\Delta)}{4\pi^2 \Delta} \right\} \\
&= 2i \left(-\frac{i}{4\pi^2} \right) \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{4m^2 |\Sigma|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Delta^3} - \frac{8m |\Sigma|^2}{\Delta^5} - \frac{m^3 |\Sigma|^2}{\Delta^3} \right) K_1(m\Delta) - \frac{m^3}{\Delta} K_1(m\Delta) \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{4m^2 |\Sigma|^2}{\Delta^4} \right) K_0(m\Delta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Delta^3} - \frac{8m |\Sigma|^2}{\Delta^5} - \frac{m^3 |\Sigma|^2}{\Delta^3} - \frac{m^3}{\Delta} \right) K_1(m\Delta) \right\}. \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Novamente, tomando o limite quando $x' \rightarrow x$, temos

$$\begin{cases} x_0 - x'_0 \equiv 0, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{0}, \\ \Delta \equiv |\Sigma| \equiv 2dl_3. \end{cases} \tag{5.79}$$

Portanto, a pressão de Casimir à temperatura zero para o campo escalar de DKP é

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m^2}{(2dl_3)^2} - \frac{4m^2(2dl_3)^2}{(2dl_3)^4} \right) K_0(2dl_3m) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{(2dl_3)^3} - \frac{8m(2dl_3)^2}{(2dl_3)^5} - \frac{m^3(2dl_3)^2}{(2dl_3)^3} - \frac{m^3}{2dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m^2}{(2dl_3)^2} - \frac{4m^2}{(2dl_3)^2} \right) K_0(2dl_3m) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{(2dl_3)^3} - \frac{8m}{(2dl_3)^3} - \frac{m^3}{2dl_3} - \frac{m^3}{2dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3m^2}{(2dl_3)^2} K_0(2dl_3m) + \left(\frac{6m}{(2dl_3)^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

No limite de pequenas massas ($m \rightarrow 0$) e usando (5.62), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3m^2}{(2dl_3)^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6m}{(2dl_3)^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m} \right\} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{6}{(2dl_3)^4} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{6}{16d^4 l_3^4} \\
&= -\frac{3}{16\pi^2 d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{l_3^4} \\
&= -\frac{3}{16\pi^2 d^4} \zeta(4) \\
&= -\frac{3}{16\pi^2 d^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) \\
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{480d^4}.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

5.1.3 Efeito Casimir para o Campo Escalar de DKP à Temperatura Finita

Nesta seção calculamos o *efeito Casimir para o campo escalar de DKP* à temperatura finita. Aqui, tomamos o parâmetro de compactificações como $\alpha = (\beta, 0, 0, i2d)$, correspondendo ao confinamento ao longo do eixo- z , ou seja, $n_3 = (0, 0, 0, 1)$. O vetor tipo-tempo é $n_0 = (1, 0, 0, 0)$, o número de dimensões compactificadas é $p = 2$ para $s = 2$ elementos. Então, a transformação de Bogoliubov é

$$v^2(\beta, d) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} + \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3}. \quad (5.82)$$

Energia de Casimir à Temperatura Finita

De (4.10), temos

$$\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} v^2(k; \alpha) \left[G_0^{(ab)*}(k) - G_0^{(ab)}(k) \right].$$

Logo, para $G_0^{(11)}(k) = G_0(k)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{G}_0^{(11)}(\beta, d) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} + \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3} \right] \\ &\quad \times e^{-ik(x-x')} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\ &\quad + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\ \bar{G}_0^{(11)}(\beta, d) &= \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta) + \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; d) + \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d), \end{aligned} \quad (5.83)$$

onde usamos (5.3) e (5.49) e

$$\bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) = 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3). \quad (5.84)$$

Então, o tensor de energia-momento fica

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) = \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) + \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; d) + \mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta, d). \quad (5.85)$$

Para $\mu = 0$ e $\nu = 0$, temos que os dois primeiros termos da equação anterior são, respectivamente (5.4) e (5.50). Do terceiro termo, temos a seguinte forma

$$\mathcal{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta, d) = 4i \lim_{x' \rightarrow x} (\partial^\mu \partial^\nu + m^2 g^{\mu\nu}) \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3). \quad (5.86)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta, d) &= 4i \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \partial^0 \partial^0 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \right. \\ &\quad \left. + m^2 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \right\} \\ &= 4i \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{i}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m^2}{\Omega^2} + \frac{4\lambda_0^2 m^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} + \frac{8\lambda_0^2 m}{\Omega^5} + \frac{\lambda_0^2 m^3}{\Omega^3} \right) K_1(m\Omega) \right] - \frac{im^3}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Omega)}{\Omega} \right\} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Omega^2} + \frac{4\lambda_0^2 m^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} + \frac{8\lambda_0^2 m}{\Omega^5} + \frac{\lambda_0^2 m^3}{\Omega^3} \right) K_1(m\Omega) - \frac{m^3}{\Omega} K_1(m\Omega) \right\} \\ \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta, d) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Omega^2} + \frac{4\lambda_0^2 m^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} + \frac{8\lambda_0^2 m}{\Omega^5} + \frac{\lambda_0^2 m^3}{\Omega^3} - \frac{m^3}{\Omega} \right) K_1(m\Omega) \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde $\lambda_0 = x_0 - x'_0 - i\beta l_0$, e

$$\Omega = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}' - i\beta l_0 \mathbf{n}_0 - 2dl_3 \mathbf{n}_3|^2}. \quad (5.88)$$

Tomando o limite quando $x' \rightarrow x$, temos

$$\begin{cases} x_0 - x'_0 \equiv 0, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{0}, \\ \lambda_0 = -i\beta l_0. \end{cases}$$

Logo,

$$\Omega = \sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}. \quad (5.89)$$

Disso, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta, d) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Omega^2} + \frac{4(-i\beta l_0)^2 m^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} + \frac{8(-i\beta l_0)^2 m}{\Omega^5} + \frac{(-i\beta l_0)^2 m^3}{\Omega^3} - \frac{m^3}{\Omega} \right) K_1(m\Omega) \right\} \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Omega^2} - \frac{4(\beta l_0)^2 m^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} - \frac{8(\beta l_0)^2 m}{\Omega^5} - \frac{(\beta l_0)^2 m^3}{\Omega^3} - \frac{m^3}{\Omega} \right) K_1(m\Omega) \right\} \\
\mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta, d) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^2} m^2 K_0 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{5/2}} 2m K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(2dl_3)^2 + 2(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{3/2}} m^3 K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right\} \quad (5.90)
\end{aligned}$$

Assim, usando (5.41), (5.61) e (5.90) a energia de Casimir do campo de DKP à temperatura finita é então dada por

$$\begin{aligned}
E(\beta, d) &= \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(\beta, d) \\
&= \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) + \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) + \mathcal{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta, d) \\
E(\beta, d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3m^2}{\beta^2 l_0^2} \right) K_0(m\beta l_0) + \left(\frac{6m}{\beta^3 l_0^3} + \frac{2m^3}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} K_0(2dl_3 m) + \left(-\frac{m}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) K_1(2dl_3 m) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^2} m^2 K_0 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{5/2}} 2m K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(2dl_3)^2 + 2(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{3/2}} m^3 K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right\}. \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Então, tomando o limite de massas muito pequenas ($m \rightarrow 0$), temos

$$\begin{aligned} K_0(m\beta l_0) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(m\beta l_0) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0}, \\ K_0(2dl_3m) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(2dl_3m) \approx \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m}, \\ K_0\left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}\right) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1\left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}\right) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}}, \end{aligned}$$

e a equação (5.91) para a energia de Casimir torna-se

$$\begin{aligned} E(\beta, d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3m^2}{\beta^2 l_0^2} \right) \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6m}{\beta^3 l_0^3} + \frac{2m^3}{\beta l_0} \right) \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0} \right\} \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(-\frac{m}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m} \right\} \\ &- \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^2} m^2 \frac{\Gamma(0)}{2} \right. \\ &+ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{5/2}} 2m \left(\frac{\Gamma(1)}{m[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \right) \\ &\left. - \frac{(2dl_3)^2 + 2(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{3/2}} m^3 \left(\frac{\Gamma(1)}{m[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3m^2}{\beta^2 l_0^2} \right) \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6}{\beta^3 l_0^3} + \frac{2m^2}{\beta l_0} \right) \frac{\Gamma(1)}{\beta l_0} \right\} \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{m^2}{2d^2 l_3^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(-\frac{1}{2d^3 l_3^3} + \frac{m^2}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3} \right\} \\ &- \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^2} m^2 \frac{\Gamma(0)}{2} \right. \\ &+ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} 2\Gamma(1) - \frac{(2dl_3)^2 + 2(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^{3/2}} m^2 \Gamma(1) \left. \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{6}{\beta^3 l_0^3} \right) \frac{1}{\beta l_0} \right\} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{2d^3 l_3^3} \right) \frac{1}{2dl_3} \right\} \\ &- \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} 2 \right\} \\ &= \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_0^4} \right) - \frac{1}{16\pi^2 d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_3^4} \right) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} \right\} \\ E(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{30\beta^4} - \frac{\pi^2}{1440d^4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2dl_3)^2 - 3(\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} \right\}. \tag{5.92} \end{aligned}$$

Pressão de Casimir à Temperatura Finita

Calculamos a *pressão de Casimir à temperatura finita* a partir de (5.85) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$

$$\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta, d) = \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta) + \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) + \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d). \quad (5.93)$$

Disso, calculamos inicialmente $\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta)$. Logo, usando (5.4), obtemos

$$\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta) = 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} (\partial^3 \partial'^3 - m^2) G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0). \quad (5.94)$$

Então, para $A = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}$ e $\lambda_0 = x - x' - i\beta l_0 n_0$, temos

$$\begin{aligned} \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) &= -\frac{im}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m}{A^2} - \frac{4m|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^4} \right) K_0(mA) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{A^3} - \frac{8|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^5} - \frac{m^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^3} \right) K_1(mA) \right]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Assim, a equação (5.94) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta) &= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left[\partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) - m^2 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) \right] \\ &= 2i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{i}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m^2}{A^2} - \frac{4m^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^4} \right) K_0(mA) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2m}{A^3} - \frac{8m|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^5} - \frac{m^3|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^3} \right) K_1(mA) \right] \right. \\ &\quad \left. - m^2 \left[-\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(mA)}{A} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{A^2} - \frac{4m^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^4} \right) K_0(mA) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{A^3} - \frac{8m|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^5} - \frac{m^3|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{A^3} - \frac{m^3}{A} \right) K_1(mA) \right\}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Agora, tomando o limite quando $x' \rightarrow x$ na equação anterior, vem

$$\begin{aligned} x_0 - x'_0 &= 0, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' &= 0, \\ \lambda_0 &= -i\beta l_0, \\ A &= \beta l_0 \end{aligned} \quad (5.97)$$

Portanto,

$$\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \frac{m^2}{(\beta l_0)^2} K_0(m\beta l_0) + \left(\frac{2m}{(\beta l_0)^3} - \frac{m^3}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\}. \quad (5.98)$$

Em seguida, usando (5.86) obtemos o terceiro na expressão (5.93) como

$$\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d) = 4i \lim_{x' \rightarrow x} (\partial^3 \partial'^3 - m^2) \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3). \quad (5.99)$$

Então, calculamos inicialmente

$$\begin{aligned} \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) &= \partial^3 \partial'^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial^3 \partial'^3 \left[e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3)} \right]}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_3^2 e^{-ik(x-x'-i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_3^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - i\beta l_0 \mathbf{n}_0 - 2dl_3 \mathbf{n}_3)} \\ &\quad \times \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0 - x'_0 - i\beta l_0 n_0^{(0)} - 2dl_3 n_3^{(0)})}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_3^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - 2dl_3 \mathbf{n}_3)} \\ &\quad \times \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0 - x'_0 - i\beta l_0)}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

e usando (5.18), vem

$$\begin{aligned} \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_3^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - 2dl_3 \mathbf{n}_3)} \\ &\quad \times \left[- \frac{i e^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0 - x'_0 - i\beta l_0)}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right] \\ \partial^3 \partial'^3 G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) &= - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k_3^2 e^{i\lambda_0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \Sigma}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= x_0 - x'_0 - i\beta l_0, \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}' - 2dl_3\mathbf{n}_3, \\ \omega_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.\end{aligned}$$

Então, fazendo uso da equação (5.76), com as devidas modificações, obtemos

$$\begin{aligned}\partial^3\partial'^3G_0(x - x' - i\beta l_0n_0 - 2dl_3n_3) &= -\frac{i}{4\pi^2}\left[\left(\frac{m^2}{\Omega^2} - \frac{4m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^4}\right)K_0(m\Omega)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} - \frac{8m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^5} - \frac{m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^3}\right)K_1(m\Omega)\right],\end{aligned}\tag{5.102}$$

e usando também (5.57), com as devidas modificações, temos

$$G_0(x - x' - i\beta l_0n_0 - 2dl_3n_3) = -\frac{im}{4\pi^2}\frac{K_1(m\Omega)}{\Omega},\tag{5.103}$$

onde $\Omega = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}' - i\beta l_0\mathbf{n}_0 - 2dl_3\mathbf{n}_3|^2}$.

Assim, substituindo (5.102) e (5.103) em (5.99), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d) &= 4i \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \partial^3\partial'^3G_0(x - x' - i\beta l_0n_0 - 2dl_3n_3)\right. \\ &\quad \left. - m^2G_0(x - x' - i\beta l_0n_0 - 2dl_3n_3) \right\} \\ &= 4i \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{i}{4\pi^2} \left[\left(\frac{m^2}{\Omega^2} - \frac{4m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega)\right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} - \frac{8m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^5} - \frac{m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^3} \right) K_1(m\Omega) \right] \right. \\ &\quad \left. - m^2 \left[-\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Omega)}{\Omega} \right] \right\} \\ \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \left(\frac{m^2}{\Omega^2} - \frac{4m^2|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^4} \right) K_0(m\Omega)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{\Omega^3} - \frac{8m|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^5} - \frac{m^3|\boldsymbol{\Sigma}|^2}{\Omega^3} - \frac{m^3}{\Omega} \right) K_1(m\Omega) \right\}.\end{aligned}\tag{5.104}$$

Tomando o limite quando $x' \rightarrow x$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^2} m^2 K_0 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{5/2}} 2m K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(\beta l_0)^2 + 2(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{3/2}} m^3 K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right\}. \quad (5.105)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo as expressões (5.98), (5.80) e (5.105) em (5.93) obtemos a *pressão de Casimir à temperatura finita para o campo escalar de DKP* como

$$\begin{aligned}
P(\beta, d) &= \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta, d) \\
&= \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta) + \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) + \mathcal{T}_{DKP}^{33(11)}(x; \beta, d) \\
P(\beta, d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \frac{m^2}{(\beta l_0)^2} K_0(m\beta l_0) + \left(\frac{2m}{(\beta l_0)^3} - \frac{m^3}{\beta l_0} \right) K_1(m\beta l_0) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3m^2}{(2dl_3)^2} K_0(2dl_3m) + \left(\frac{6m}{(2dl_3)^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) K_1(2dl_3m) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^2} m^2 K_0 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{5/2}} 2m K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(\beta l_0)^2 + 2(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{3/2}} m^3 K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \right\} \quad (5.106)
\end{aligned}$$

No limite de massas muito pequenas ($m \rightarrow 0$), temos

$$\begin{aligned}
K_0(m\beta l_0) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(m\beta l_0) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0}, \\
K_0(2dl_3m) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1(2dl_3m) \approx \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m}, \\
K_0 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) &\approx \frac{\Gamma(0)}{2} \quad ; \quad K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}},
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(\beta, d) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \frac{m^2}{(\beta l_0)^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{2m}{(\beta l_0)^3} - \frac{m^3}{\beta l_0} \right) \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3m^2}{(2dl_3)^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6m}{(2dl_3)^3} + \frac{m^3}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3m} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^2} m^2 \frac{\Gamma(0)}{2} \right. \\
&\quad + \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{5/2}} 2m \left(\frac{\Gamma(1)}{m [(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(\beta l_0)^2 + 2(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{3/2}} m^3 \left(\frac{\Gamma(1)}{m [(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \frac{m^2}{(\beta l_0)^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{2}{(\beta l_0)^3} - \frac{m^2}{\beta l_0} \right) \frac{\Gamma(1)}{\beta l_0} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3m^2}{(2dl_3)^2} \frac{\Gamma(0)}{2} + \left(\frac{6}{(2dl_3)^3} + \frac{m^2}{dl_3} \right) \frac{\Gamma(1)}{2dl_3} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^2} m^2 \frac{\Gamma(0)}{2} \right. \\
&\quad + \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} 2\Gamma(1) - \frac{(\beta l_0)^2 + 2(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^2} m^2 \Gamma(1) \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{(\beta l_0)^3} \right) \frac{1}{\beta l_0} \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{6}{(2dl_3)^3} \right) \frac{1}{2dl_3} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} 2 \right\} \\
&= \frac{1}{\pi^2 \beta^4} \sum_{l_0=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_0^4} \right) - \frac{3}{16\pi^2 d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_3^4} \right) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi^2 \beta^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) - \frac{3}{16\pi^2 d^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3(2dl_3)^2 - (\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} \right\} \\
P(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{90\beta^4} - \frac{\pi^2}{480d^4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left\{ \frac{3(2dl_3)^2 - (\beta l_0)^2}{[(2dl_3)^2 + (\beta l_0)^2]^3} \right\}. \tag{5.107}
\end{aligned}$$

5.2 O Campo Vetorial de DKP

5.2.1 Lei de Stefan-Boltzmann

Nesta seção a *lei de Stefan-Boltzmann para o campo vetorial de DKP* é obtida a partir da equação do tensor de energia-momento dada em (4.23), à saber

$$\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(ab)}(x - x'; \alpha) \right\}. \quad (5.108)$$

Aqui, o parâmetro- α da topologia de compactificações é $\alpha = (\beta, 0, 0, 0)$ e a transformação de Bogoliubov generalizada, eq. (3.89) para $p=1$ e $s=1$, toma a forma

$$v^2(k, \beta) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0}. \quad (5.109)$$

Disso, e usando (4.10), obtemos

$$\overline{G}^{(11)}(x - x', \beta) = 2 \sum_{l_0=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0). \quad (5.110)$$

Então, de (5.108) obtemos o tensor de energia-momento à *temperatura finita* no vácuo térmico é

$$\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(11)}(x - x', \beta) \right\} + \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}^{(11)}(x - x', \beta) \right\}. \quad (5.111)$$

De forma compacta, fazemos

$$\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) = \mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta) + \mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta), \quad (5.112)$$

onde

$$\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta) = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(11)}(x - x', \beta) \right\} \quad (5.113)$$

e

$$\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta) = \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}^{(11)}(x - x', \beta) \right\}. \quad (5.114)$$

Temos que a solução de $\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}$, a qual está relacionada com o valor esperado da temperatura finita no estado de vácuo do campo eletromagnético *sem fonte*, é descrita nas referências [21] e [22], à saber

$$\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu}{(\beta l_0)^4}. \quad (5.115)$$

com n_0 um quadri-vetor tipo-tempo.

Recordando a equação (5.29), temos

$$G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) = -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(mA)}{A}, \quad (5.116)$$

onde $A = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}$ e $\lambda_0 = x_0 - x'_0 - i\beta l_0$.

Portanto, reescrevendo a equação (5.111) com as devidas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) &= -\frac{\pi^2}{45\beta^4} (g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu) + i \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \left[-\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(mA)}{A} \right] \right\} \\ &= -\frac{\pi^2}{45\beta^4} (g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu) + \frac{m^3}{4\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_0=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{K_1(mA)}{A} \right\} \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) &= -\frac{\pi^2}{45\beta^4} (g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu) + \frac{m^3}{4\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{\beta l_0} K_1(m\beta l_0). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Para $\mu = \nu = 0$ e $n_0 = (n_0^\mu) = (1, 0, 0, 0)$, obtemos a *lei de Stefan-Boltzmann* para o campo vetorial massivo de DKP. Logo

$$\mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} + \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{\beta l_0} K_1(m\beta l_0). \quad (5.118)$$

No limite de massas muito pequenas ($m \rightarrow 0$), temos $K_1(m\beta l_0) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\beta l_0} = \frac{1}{m\beta l_0}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} + \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{\beta l_0} \left(\frac{1}{m\beta l_0} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} + \frac{m^2}{4\pi^2} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta l_0)^2} \\ \mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; \beta) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4}. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Esta é a *lei de Stefan-Boltzmann* para o campo vetorial sem massa.

5.2.2 Efeito Casimir para o Campo Vetorial de DKP à Temperatura Zero

Nesta seção calculamos o *efeito Casimir para o campo vetorial de DKP* à temperatura zero. Aqui, tomamos o parâmetro de compactificações como $\alpha = (0, 0, 0, i2d)$, correspondendo ao confinamento ao longo do eixo- z , ou seja, $n_3 = (0, 0, 0, 1)$. Então, a transformação de Bogoliubov é

$$v^2(k; d) = \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} \quad (5.120)$$

e

$$\overline{G}_0^{(11)}(x - x'; d) = 2 \sum_{l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - 2dl_3n_3) \quad (5.121)$$

é a função de Green.

Usando o tensor de energia-momento renormalizado em (5.108), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; d) &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(ab)}(x - x'; d) \right\} \\ &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(11)}(x - x', d) \right\} + \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}^{(11)}(x - x', d) \right\} \\ &= \mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(d) + \mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(d), \end{aligned} \quad (5.122)$$

onde

$$\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(d) = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \overline{G}^{(11)}(x - x', d) \right\} \quad (5.123)$$

e

$$\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(d) = \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}^{(11)}(x - x', d) \right\}. \quad (5.124)$$

Mas a solução para $\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(d)$ é encontrada fazendo uso da equação (3.91). Assim, após os devidos cálculos, obtemos

$$\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(d) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2dl_3)^4}. \quad (5.125)$$

O tensor de energia-momento renormalizado associado à massa é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(d) &= \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}^{(11)}(x - x', d) \right\} \\ &= \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} 2 \sum_{l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - 2dl_3n_3) \right\} \\ &= i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} G_0(x - x' - 2dl_3n_3) \right\}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Da equação (5.57), temos

$$G_0(x - x' - 2dl_3n_3) = -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Delta)}{\Delta}, \quad (5.127)$$

onde $\Delta = \sqrt{-(x_0 - x'_0)^2 + |\boldsymbol{\Sigma}|^2}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' - 2dl_3\mathbf{n}_3$.

Assim, substituindo (5.125) e (5.126) em (5.122), obtemos o tensor de energia-momento no vácuo térmico com compactificação $\alpha = (0, 0, 0, i2d)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4}(g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu) + i \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) \right\} \\
&= -\frac{\pi^2}{720d^4}(g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu) + im^2 g^{\mu\nu} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) \right\} \\
&= -\frac{\pi^2}{720d^4}(g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu) + im^2 g^{\mu\nu} \sum_{l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Delta)}{\Delta} \right\} \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4}(g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu) + \frac{m^3}{4\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} K_1(m2dl_3). \tag{5.128}
\end{aligned}$$

Energia de Casimir à Temperatura Zero

A *energia de Casimir* para o campo vetorial de *DKP* à temperatura nula é descrita quando $\mu = \nu = 0$. Então, sendo $n_3 = (n_3^\mu) = (0, 0, 0, 1)$ e usando (5.128), obtemos

$$\mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) = -\frac{\pi^2}{720d^4} + \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} K_1(m2dl_3). \tag{5.129}$$

No limite de massas muito pequenas ($m \rightarrow 0$), temos $K_1(m2dl_3) \approx \frac{\Gamma(1)}{m2dl_3} = \frac{1}{m2dl_3}$. Logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4} + \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} \left(\frac{1}{m2dl_3} \right) \\
&= -\frac{\pi^2}{720d^4} + \frac{m^2}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{(2dl_3)^2} \\
\mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4}. \tag{5.130}
\end{aligned}$$

Pressão de Casimir à Temperatura Zero

A *pressão de Casimir* para o campo vetorial de *DKP* à temperatura zero é obtida quando $\mu = \nu = 3$. Logo, usando (5.128), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4}(g^{33} + 4n_3^3 n_3^3) + \frac{m^3}{4\pi^2} g^{33} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} K_1(m2dl_3) \\
&= -\frac{\pi^2}{720d^4}(-1 + 4) - \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} K_1(m2dl_3) \\
\mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} K_1(m2dl_3). \tag{5.131}
\end{aligned}$$

Para o caso de partículas de massa muito pequenas ($m \rightarrow 0$), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{K_1(m2dl_3)}{2dl_3} \\
&= -\frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{m^3}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{2dl_3} \left(\frac{1}{m2dl_3} \right) \\
&= -\frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{m^2}{4\pi^2} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{(2dl_3)^2} \\
\mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(x; d) &= -\frac{\pi^2}{240d^4}. \tag{5.132}
\end{aligned}$$

5.2.3 Efeito Casimir para o Campo Vetorial de DKP à Temperatura Finita

Nesta seção calculamos o *efeito Casimir para o campo vetorial de DKP à temperatura finita*. Assim, a *energia de Casimir à temperatura finita* e a *pressão de Casimir à temperatura finita* serão dadas, respectivamente, por $E(\beta, d) = \mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(\beta; d)$ e $P(\beta, d) = \mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta; d)$.

Tomamos o parâmetro de compatificações como $\alpha = (\beta, 0, 0, i2d)$, correspondendo ao confinamento ao longo do eixo- z , à temperatura finita. Então, a transformação de Bogoliubov fica dada por

$$v^2(\beta; d) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} + \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3}. \tag{5.133}$$

De (4.10), temos

$$\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} v^2(k; \alpha) \left[G_0^{(ab)*}(k) - G_0^{(ab)}(k) \right].$$

Logo, para $G_0^{(11)}(k) = G_0(k)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{G}_0^{(11)}(\beta, d) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} + \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3} \right] \\
&\quad \times e^{-ik(x-x')} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\
&\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\
&\quad + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3} [G_0^*(k) - G_0(k)] \\
\bar{G}_0^{(11)}(\beta, d) &= \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta) + \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; d) + \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d), \tag{5.134}
\end{aligned}$$

onde usamos (5.3) e (5.49); e

$$\bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) = 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \quad (5.135)$$

é a função de Green. Também temos

$$n_0 = (1, 0, 0, 0) = (1, \mathbf{n}_0), \quad \text{com } \mathbf{n}_0 = (0, 0, 0), \quad (5.136)$$

$$n_3 = (0, 0, 0, 1) = (0, \mathbf{n}_3), \quad \text{com } \mathbf{n}_3 = (0, 0, 1). \quad (5.137)$$

Então, o tensor de energia-momento *completo* para o campo de *DKP* pode ser decomposto em

$$\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) = \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta) + \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; d) + \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \beta, d). \quad (5.138)$$

Com isso, podemos calcular $\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d)$ considerando que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(x; \alpha) &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Lambda^{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \alpha) \right\} \\ &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \alpha) \right\} + \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \alpha) \right\} \\ &= -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) \right\} + \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) \right\} \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= \mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) + \mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta, d), \end{aligned} \quad (5.139)$$

para

$$\mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) \right\} \quad (5.140)$$

e

$$\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) = \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) \right\}. \quad (5.141)$$

Resolvendo (5.140) a partir de (3.91), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{LIVRE}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu}{(\beta l_0)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2dl_3)^4} \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 [g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu] + (2dl_3)^2 [g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu]}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\}. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Para o termo associado à massa em (5.141), usamos (5.135)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) \right\} \\
&= \frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ m^2 g^{\mu\nu} 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - \beta k^0 l_0 - 2dl_3 n_3) \right\} \\
&= 2im^2 g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ G_0(x - x' - \beta k^0 l_0 - 2dl_3 n_3) \right\}. \tag{5.143}
\end{aligned}$$

Mas $G_0(x - x' - \beta k^0 l_0 - 2dl_3 n_3)$ tem solução dada em (5.103), cujo valor é

$$G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) = -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Omega)}{\Omega}, \tag{5.144}$$

onde $\Omega = \sqrt{-\lambda_0^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}' - i\beta l_0 \mathbf{n}_0 - 2dl_3 \mathbf{n}_3|^2}$ e $\lambda_0 = x_0 - x'_0 - i\beta l_0$.

Então, substituindo (5.144) em (5.143), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= 2im^2 g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ G_0(x - x' - \beta k^0 l_0 - 2dl_3 n_3) \right\} \\
&= 2im^2 g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ -\frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\Omega)}{\Omega} \right\} \\
&= \frac{m^3}{2\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{K_1(m\Omega)}{\Omega} \right\} \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{T}_{MASSA}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= \frac{m^3}{2\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1\left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}\right)}{\left[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2\right]^{1/2}}. \tag{5.145}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (5.142) e (5.145) em (5.139), temos a solução completa para o tensor renormalizado $\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{\mu\nu(11)}(\beta, d) &= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu}{(\beta l_0)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2dl_3)^4} \right. \\
&\quad \left. + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 [g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu] + (2dl_3)^2 [g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu]}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\
&\quad + \frac{m^3}{2\pi^2} g^{\mu\nu} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1\left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}\right)}{\left[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2\right]^{1/2}}. \tag{5.146}
\end{aligned}$$

Energia de Casimir à Temperatura Finita

A energia de Casimir para o campo vetorial de *DKP* à temperatura finita é descrita quando $\mu = \nu = 0$. Então, usando (5.146), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(\beta, d) &= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ -\frac{3}{\beta^4} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{l_0^4} + \frac{1}{16d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{l_3^4} + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-3(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\
&\quad + \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \\
&= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ -\frac{3}{\beta^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) + \frac{1}{16d^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-3(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\
&\quad + \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \tag{5.147}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\beta, d) &= \mathbf{T}_{DKP}^{00(11)}(\beta; d) \\
E(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{720d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-3(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \\
&\quad + \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}}. \tag{5.148}
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $m \rightarrow 0$, temos que a função de Bessel torna-se

$$K_1 \left(m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right) \approx \frac{\Gamma(1)}{m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}} = \frac{1}{m\sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}}. \tag{5.149}$$

Então

$$\begin{aligned}
E(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{720d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-3(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \\
&\quad + \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \cdot \frac{1}{m[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \\
&= \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{720d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-3(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \\
&\quad + \frac{m^2}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \\
E(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{720d^4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - (2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3}. \tag{5.150}
\end{aligned}$$

Pressão de Casimir à Temperatura Finita

A *pressão de Casimir* para o campo vetorial de *DKP* à temperatura finita é descrita quando $\mu = \nu = 3$. Então, usando (5.146), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta, d) &= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\beta^4} \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{1}{l_0^4} + \frac{3}{16d^4} \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{1}{l_3^4} + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-(\beta l_0)^2 + 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\ &\quad - \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \\ \mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta, d) &= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\beta^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) + \frac{3}{16d^4} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) + 4 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-(\beta l_0)^2 + 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \right\} \\ &\quad - \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(\beta, d) &= \mathbf{T}_{DKP}^{33(11)}(\beta, d) \\ P(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-(\beta l_0)^2 + 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \\ &\quad - \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Para o caso de partículas de massa muito pequenas ($m \rightarrow 0$), usamos (5.149). Então

$$\begin{aligned} P(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-(\beta l_0)^2 + 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} \\ &\quad - \frac{m^3}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \right)}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{-(\beta l_0)^2 + 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3} - \frac{m^2}{2\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2} \\ &\quad \therefore \\ P(\beta, d) &= \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{\pi^2}{240d^4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 - 3(2dl_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2dl_3)^2]^3}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Portanto, nas equações (5.150) e (5.152) os dois primeiros termos reproduzem a *radiação de corpo negro* e as *contribuições do efeito Casimir*, separadamente. O último termo representa a interação entre os dois efeitos.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho realizamos uma revisão dos principais tópicos que envolvem a teoria do campo de Duffin-Kemmer-Petiau, analisando algumas de suas propriedades algébricas. Fizemos uma introdução sobre a equivalência entre os formalismos de *DKP* e os formalismos de Klein-Gordon e Proca, para o caso livre de interação, através dos operadores de seleção, que são estruturas matemáticas que selecionam o setor de spin 0 e spin 1 da teoria *DKP*. Fizemos um estudo detalhado sobre os campos escalares e vetoriais presentes na teoria, obtendo expressões para o estado de vácuo do tensor de energia-momento do campo de *DKP*.

Em seguida, introduzimos a Dinâmica de Campos Térmicos (*DCT*), um formalismo em tempo real para a teoria quântica de campos, mostrando as principais propriedades algébricas da teoria para os campos relativísticos bosônicos. Com isso, expomos o processo de termalização de campos através da transformação de Bogoliubov, que consiste em uma transformação canônica que leva um o estado de vácuo não-térmico ao estado de vácuo térmico pela duplicação do espaço de Hilbert, isto é, pelo produto tensorial entre o espaço original de Hilbert e um espaço fictício idêntico, com propriedades algébricas análogas ao espaço original. Então, aplicamos a *DCT* ao campo de *DKP* usando as ferramentas matemáticas desenvolvidas anteriormente e usando as funções de Green apropriadas para os campos escalares e vetoriais.

Finalmente estudamos os efeitos de temperatura sobre o campo de *DKP*. Diante disso, a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir são obtidas através do processo de termalização do campo de *DKP* no contexto da Dinâmica de Campos Térmicos. Dessa forma, desenvolvemos um aparato matemático para o campo de *DKP* à temperatura finita, onde a energia e pressão de Casimir são calculadas para os setores escalares (partículas de spin 0) e vetoriais (partículas de spin 1). Nosso estudo mostrou que ao introduzir temperatura no campo de *DKP* as expressões para a energia e pressão são modificadas, de modo que a equivalência é somente alcançada quando é tomado o limite de $T \rightarrow 0$. Realizando também o limite quando $m \rightarrow 0$ para os campos massivos de partículas com spin 0 e com spin 1 encontramos resultados equivalentes com aqueles presentes na literatura científica. Isto é, temos que à temperatura nula a energia e pressão de Casimir são proporcionais à $\frac{1}{d^4}$, onde d é a distância de separação entre duas placas paralelas no fenômeno do efeito de Casimir. Fato também confirmado em nossos estudos para

o campo de DKP à temperatura finita, onde encontramos resultados proporcionais à $\frac{1}{d^4}$. Foi encontrada a proporcionalidade de $\frac{1}{\beta^4}$ para o campo de DKP , confirmando a Lei de Stefan-Boltzmann.

Além dos resultados obtidos com desenvolvimento de flutuações quânticas de vácuo térmico sobre o campo de DKP , nos setores escalares e vetoriais, e do maior entendimento do mesmo, é de grande importância ressaltar os aspectos do formalismo da DCT . Isto implica na facilidade em que permite introduzir temperatura nos campos a partir de espaços Hilbertianos. Com isso, como perspectivas de futuros trabalhos, é bastante promissor implementar a estrutura e formalismo DCT ao estudos de campos físicos gravitacionais.

Referências

- [1] Broglie, L. de. Comptes Rendus de l'Académie des Acta, 199, 445, 1934. 1
- [2] Petiau, G. Académie Royale de Belgique, 16, 1936. 1
- [3] Kemmer, N. Proc. Roy. Soc. A 166, 127, 1938. 1
- [4] Duffin, R.J. Physical Review, 54, 1114, 1938. 1
- [5] Kemmer, N. Proc. Roy. Soc. A 173, 91, 1939. 1, 5
- [6] Matyjasek, Jerzy. Int. J. Theor. Phys., 33, 967-982, 1994. 2
- [7] E. Fishbach, M.M. Nieto e C.K. Scott. J. Math. Phys. 14, 1760, 1973. 2
- [8] Fainberg, V.Ya. e B.M. Pimentel. Phys. Lett. A 271, 2000. 2
- [9] Matsubara, T.: *Progress of Theoretical Physics*. 14, 351, 1955. 2
- [10] Schwinger, J.: *On the Green's functions of quantized fields. 1.* 37, 452-455, 1951. 2
- [11] Schwinger, J.: *On the Green's functions of quantized fields. 2.* 37, 455-459, 1951. 2
- [12] Keldysh, L. V.: *Diagram technique for nonequilibrium processes.* 47, 1515-1527, 1964. 2
- [13] Takahashi, Y. e H. Umezawa: *Coll. Phenomena 2, 55, (1975) (Reprinted in Int. J. Mod. Phys. B10, 1755, (1996)).* 2
- [14] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki: *Thermo Field Dynamics and Condensed States.* North-Holland, 1982. 2, 28
- [15] Umezawa, H.: *Advanced Field Theory - Micro, Macro, and Thermal Physics.* American Institute of Physics, 1992. 2, 28, 30
- [16] Lunardi, J.T.: *O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau.* 2001. Tese de Doutorado. 2
- [17] Cardoso, T.R. e B.M. Pimentel: *Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 38, 3.* 2016. 2
- [18] Umezawa, H.: *Quantum Field Theory.* North-Holland, 1956. 7
- [19] A. I. Borisenko, I. E. Tarapov, Richard A. Silverman: *Vector and Tensor Analysis with Applications*, capítulo 2. Dover Publications, 1979. 22
- [20] Walter Greiner, Joachim Reinhardt: *Field Quantization.* Springer, 1996. 23

- [21] Faqir C. Khanna, Adolfo P. C. Malbouisson, Jorge M. C. Malbouisson e Ademir E. Santana: *Thermal Quantum Field Theory - Algebraic Aspects and Applications*. World Scientific, 2009. 26, 28, 40, 74
- [22] Costa, Caroline Silva Rocha: *Aplicações da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) à Análise do Efeito Casimir de Bósons e Férmions em Topologias Torodais*. Universidade de Brasília, 2016. Dissertação de Mestrado. 26, 74
- [23] Claude Itzykson, Jean Bernard Zuber: *Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*, capítulo 3. McGraw-Hill, 1980. 26
- [24] Gradshteyn, I. S. e I. M. Ryzhik: *Table Of Integrals, Series, And Products*, página 491. Elsevier, 2007. 51, 53
- [25] Arfken, George B. e Hans J. Weber: *Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Elsevier, 2007. 62

Apêndice A

Matrizes γ^μ de DKP - Setor Escalar

Na presente dissertação é adotada uma representação real para as matrizes γ^μ .

Uma representação para o setor escalar das matrizes γ^μ pode ser escrita como segue:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

As matrizes hermitianas η^μ para o setor escalar (spin-0) que complementam as matrizes γ^μ são definidas como:

$$\eta^\mu \equiv 2\gamma^\mu\gamma^\mu - g^{\mu\mu}$$

Então

$$\eta^0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Apêndice B

Matrizes γ^μ de DKP - Setor Vetorial

Uma representação para o setor vetorial das matrizes γ^μ pode ser escrita como segue:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

As matrizes hermitianas η^μ para o setor vetorial (spin-1) que complementam as matrizes γ^μ são definidas como:

$$\eta^\mu \equiv 2\gamma^\mu\gamma^\mu - g^{\mu\mu}$$

Então

$$\eta^0 \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$