



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Convolução de funções de distribuição pertencentes
ao domínio de atração de leis max-estáveis**

Ingrit Gretha Maraví Alvarado

Brasília
2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Convolução de funções de distribuição pertencentes
ao domínio de atração de leis max-estáveis

por

Ingrit Gretha Maraví Alvarado

Orientadora: Prof. Dra. **Cátia Regina Gonçalves**

Brasília
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MM311c Maraví Alvarado, Ingrid Gretha
Convolução de funções de distribuição pertencentes ao domínio de atração de leis max-estáveis. / Ingrid Gretha Maraví Alvarado; orientador Cátia Regina Gonçalves. -- Brasília, 2018.
68 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Convolução. 2. Teoria dos Valores Extremos. 3. Max domínios de atração. 4. Leis max-estáveis. I. Gonçalves, Cátia Regina, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Convolução de Funções de Distribuição Pertencentes ao Domínio de Atração de Leis Max - Estáveis

por

Ingrit Gretha Maraví Alvarado*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

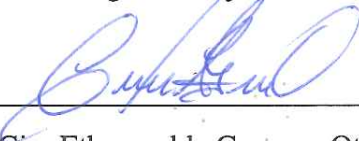
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:



Profa. Dra. Cátia Regina Gonçalves - MAT/UnB (Orientador)



Profa. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano – EST/UnB (Membro)



Prof. Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira – FCT/UNESP (Membro)

* A autora foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

*Dedico meu título de mestre ao meus queridos
pais e irmãos.*

“Nunca dejen que nadie defina sus límites por venir de donde vinieron, el único límite es su alma.”

Ratatouille

Agradecimentos

Primeiro, agradecer a Deus pelas oportunidades apresentadas ao longo da minha vida, por me dar saúde e força suficiente para superar as dificuldades que surgem em meu caminho.

Agradeço aos meus pais e irmãos que, apesar da distância, estão sempre comigo apoiando-me em tempos difíceis. Agradeço a meus pais, Gloria Alvarado e Guiener Maraví, por todos os seus ensinamentos e conselhos, por sua paciência e apoio incondicional em todas as decisões que tomei. Aos meus queridos irmãos, Melissa, Julissa e Marlon, pela grande amizade, porque crescemos juntos e sempre nos apoiamos sem hesitação. A minha prima Karina, pelo seu apoio e sua grande amizade ao longo de todos esses anos. Os amo muito.

Agradeço ao meu namorado Guillermo, porque ao longo desta etapa recebi o seu apoio incondicional. Por todos os bons momentos que tivemos juntos e pelas dificuldades que conseguimos superar. Obrigada por todo o amor e carinho.

Agradeço à minha orientadora, professora Cátia, por sua confiança, paciência e disponibilidade para me ajudar nas dificuldades que tive em meus estudos.

Aos membros da banca, por aceitarem prontamente o convite para avaliação deste trabalho.

Aos professores Ary Vasconcelos, Carlos Albertos dos Santos, Jaqueline Mesquita, Pedro Roitman e Sheyla Campos, pelos conhecimentos adquiridos durante o curso.

Aos colegas e amigos da Pós Graduação: Alancoc, Christe, Fabian, Lizeth, Felipe Quintino, Filipe, Jamer, Leonardo, Wállef, Welinton,.... pelo companheirismo e amizade durante todo o mestrado.

Agradeço a Vanda e Roberto, bons amigos que conheci no Brasil. Também quero agradecer a Rejane, uma amiga muito especial que me ofereceu a mão nos momentos mais difíceis, pela sua confiança e carinho nesses anos.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico (CNPq), pelo apoio financeiro, sem qual seria impossível manter-me em Brasília durante a elaboração deste trabalho.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Especialmente, aos porteiros das salas de mestrado, pela paciência e por sua gentileza.

À UnB, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos o max-domínio de atração da convolução de duas funções de distribuição pertencentes aos max-domínios de atração de algum dos três tipos possíveis de distribuições max-estáveis: Fréchet, Weibull ou Gumbel.

Palavras-chave: Convolução, Teoria dos Valores Extremos, Max-domínios de atração e Leis max-estáveis.

Abstract

In this dissertation, we study the max-domain of attraction of the convolution of two distribution functions belonging to max-domains of attraction of max-stable laws. The three possible types of max-stable distributions, Fréchet, Weibull and Gumbel are considered.

Keywords: Convolution, Theory of Extreme Values, Max-domains of attraction and Max-stable laws.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Definições e Propriedades Básicas	5
1.2 Funções Regularmente Variantes	7
1.3 Lemas Preliminares sobre Convolução de Distribuições	9
2 Teoria Clássica dos Valores Extremos	18
2.1 Distribuições Max-Estáveis e Max-Domínios de Atração	19
2.2 Max-Domínio de Atração da Fréchet: $D_{max}(\Phi_\alpha)$	22
2.3 Max-Domínio de Atração da Weibull: $D_{max}(\Psi_\alpha)$	25
2.4 Max-Domínio de Atração da Gumbel: $D_{max}(\Lambda)$	28
3 Convolução de funções de distribuição pertencentes aos max-domínios de atração	38
3.1 Caso Fréchet	38
3.2 Caso Weibull	50
3.3 Caso Gumbel	56
Referências Bibliográficas	66

Lista de Símbolos

f.d.	: Função de distribuição.
v.a.	: Variável aleatória.
i.i.d.	: Independente e identicamente distribuídas.
$F^{\leftarrow}(t)$: $\inf\{x : F(x) \geq t\}$.
$r(F)$: $\sup\{x : F(x) < 1\}$.
$l(F)$: $\inf\{x : F(x) > 0\}$.
\xrightarrow{p}	: Convergência em probabilidade.
$\xrightarrow{q.c.}$: Convergência quase-certa.
$X \stackrel{d}{=} Y$: X e Y têm a mesma função de distribuição.
$D_{max}(H)$: Max-domínio de atração de H .
$F_1 * F_2$: Convolução de duas funções de distribuição F_1 e F_2 .
\bar{F}	: Cauda da função de distribuição F .
RV_{α}	: Regularmente variante com índice α .
RV_0	: Lentamente variante.
$C(G)$: Conjunto dos pontos de continuidade de uma f.d. G .
\mathbb{R}	: Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}_+	: Conjunto dos números reais estritamente positivos.
\mathbb{Z}	: Conjunto dos números inteiros.
\mathbb{N}	: Conjunto dos números naturais.

Introdução

A modelagem matemática de eventos extremos é de grande interesse em diversas aplicações nas mais diferentes áreas. Em oceanografia, por exemplo, é de suma importância o estudo do comportamento de correntes marinhas extremas; em climatologia: inundações, temperaturas extremas, vendavais e outros fenômenos naturais extremos são questões de interesse; em análise de sobrevivência e confiabilidade, o tempo de falha de um equipamento, cujas componentes funcionam em paralelo, consiste no tempo máximo de vida dos seus componentes; em finanças, o estudo de valores extremos de ativos financeiros merece destaque; entre muitas outras aplicações.

Neste contexto, o problema consiste em obter informação sobre valores extremos (máximo ou mínimo) da variável de interesse, a partir de uma amostra dos seus valores observados. Precisamente, dada uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de uma variável aleatória (v.a.) X com função de distribuição F , ou seja, X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com função de distribuição F , o objetivo é analisar o comportamento do máximo amostral

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\},$$

ou do mínimo amostral $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Como $m_n = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}$, restringimos o estudo ao comportamento do máximo amostral.

O ponto extremo superior de F , dado por $r(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$ caracteriza o maior valor possível da v.a. X e o máximo amostral M_n é um estimador fortemente consistente para $r(F)$, baseado na amostra (X_1, \dots, X_n) , já que M_n converge quase certamente para $r(F)$, quando $n \rightarrow \infty$ ($M_n \xrightarrow{q.c.} r(F)$).

O ramo da Probabilidade e Estatística que estuda o comportamento assintótico

dos extremos amostrais é conhecido como Teoria dos Valores Extremos.

A Teoria Clássica dos Valores Extremos consiste basicamente no estudo das propriedades assintóticas da distribuição do máximo amostral M_n . Os resultados estabelecidos nessa teoria fornecem informações sobre as distribuições limites não degeneradas H do máximo M_n devidamente normalizado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad (1)$$

$\forall x \in C(H) = \{x : H \text{ é contínua em } x\}$, onde $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ são sequências de constantes devidamente escolhidas.

A família de distribuições limites extremas H satisfazendo (1) é caracterizada pelas distribuições max-estáveis, ou seja, as funções de distribuição não degeneradas H tais que: para cada $n \in \mathbb{N}$, existem constantes reais a_n e b_n , com $a_n > 0$, para as quais tem-se

$$H(x) = H^n(a_n x + b_n). \quad (2)$$

O domínio de atração de uma função de distribuição max-estável H , também chamado de max-domínio de atração e denotado $D_{max}(H)$, é definido pela classe de funções de distribuição F para as quais (1) é satisfeita.

Muitos autores contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Valores Extremos, desde o início da década de 1920. Dentre eles, merecem destaque: Fréchet (1927, [8]) e Fisher e Tippett (1928, [7]) que encontraram os três tipos possíveis de distribuições limites extremas, também conhecidas como distribuições do valor extremo (distribuição de Fréchet (Φ_α), de Weibull (Ψ_α) e de Gumbel (Λ)) e Gnedenko (1943, [10]), que apresentou uma demonstração rigorosa dessas descobertas anteriores. Nos livros de Galambos [9], Resnick [14] e Embrechts *et. al* [5], podemos encontrar um estudo detalhado dessa teoria clássica.

Diversos problemas de interesse em confiabilidade e análise estatística estão relacionados com o estudo dos max-domínios de atração de certos operadores de funções de distribuição que pertencem à max-domínios de atração de leis max-estáveis. Uma discussão sobre produto de funções de distribuição atraídas por leis max-estáveis pode ser encontrada em Resnick, [16] e [15]. Resultados desta natureza para mistura de funções de distribuição foram obtidos por Kale e Sebastian [11], AL-Hussaini, e El-Adll [1] e Sreehari e Ravi [19].

Neste trabalho, baseados no artigo de Sreehari *et. al* [20], nosso interesse prin-

principal é analisar o max-domínio de atração da convolução $F_1 * F_2$ de duas funções de distribuição F_1 e F_2 que pertencem a max-domínios de atração de leis max-estáveis.

A convolução de funções de distribuição caracteriza a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes.

Problemas relacionados à soma de variáveis aleatórias independentes, cujas distribuições estão no max-domínio de atração de distribuições max-estáveis, surgem naturalmente em diversas áreas, tais como análise de sobrevivência e processos industriais.

Como exemplo, consideremos uma central de serviços na qual o serviço a ser prestado a cada cliente é executado em duas etapas consecutivas. Por um lado, consideremos a situação em que são disponibilizadas as informações sobre os tempos máximos gastos por um cliente em cada uma das duas etapas. Se o interesse, neste caso, é analisar o tempo máximo que cada cliente gasta na central para realizar seu serviço, necessitamos ter informação sobre o comportamento do tempo total, não observado, gasto por cada cliente.

Por outro lado, podemos ter a situação em que temos acesso à informação do tempo total máximo que um cliente gasta para concluir seu serviço e desejamos analisar a eficiência de cada uma das etapas. Neste caso, necessitamos das informações dos tempos máximos gastos por um cliente em cada uma das etapas, as quais não estão disponíveis.

Neste contexto, se X e Y representam, respectivamente, os tempos que um cliente gasta para realizar a primeira e segunda etapa, então na primeira situação, descrita acima, temos informação dos valores máximos observados de X e Y e desejamos obter informação sobre o valor máximo de $X + Y$ e na segunda situação, conhecemos o valor máximo observado de $X + Y$ e desejamos obter informação sobre os valores máximos de X e Y respectivamente.

Assim, se X e Y são variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente, nosso interesse principal é o estudo dos resultados apresentados por Sreehari *et. al* [20] no que se refere à discussão dos seguintes problemas:

(P1) Se $F_1 \in D_{max}(H_1)$ e $F_2 \in D_{max}(H_2)$, para certas leis max-estáveis H_1 e H_2 , sob quais condições temos $F_1 * F_2 \in D_{max}(H)$ e quais são as possíveis funções de distribuição H ?

(P2) Se $F_1 * F_2 \in D_{max}(H)$, para alguma função de distribuição max-estável H , então o que podemos concluir sobre F_1 e F_2 , no que se refere aos max-domínios de

atração aos quais cada uma delas pode pertencer?

Para isso, organizamos esta dissertação em três capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados preliminares que serão úteis para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em particular, na Seção 1.2 apresentamos as principais propriedades básicas da teoria de variação regular, que é uma ferramenta essencial para a caracterização dos max-domínios de atração das distribuições max-estáveis. Finalizamos o capítulo, apresentando na Seção 1.3 uma série de lemas sobre convolução de funções de distribuição, que serão utilizados no desenvolvimento do Capítulo 3.

No Capítulo 2, apresentamos uma síntese da Teoria Clássica dos Valores Extremos. Os conceitos de distribuições max-estáveis, max-domínios de atração, as relações entre eles e o Teorema de Fisher e Tippett, que estabelece os três tipos possíveis de distribuições limite extremas são apresentados na Seção 2.1. As principais caracterizações dos max-domínios de atração de cada um dos três tipos de distribuições: Fréchet, Weibull e Gumbel, são apresentadas nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, respectivamente.

Finalmente, no Capítulo 3 apresentamos em detalhe uma análise dos problemas (P1) e (P2) para os casos em que as distribuições max-estáveis envolvidas são de cada um dos três tipos possíveis. Os resultados apresentados neste capítulo são essencialmente de Sreehari *et. al* [20].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos uma base para o texto, apresentando conceitos e resultados preliminares utilizados na construção dos próximos capítulos. Na Seção 1.1, apresentamos definições e propriedades básicas como inversa generalizada, funções distribuição cauda equivalentes e funções de distribuição do mesmo tipo. Na Seção 1.2, introduzimos o conceito e principais propriedades das funções regularmente variantes. Esta classe de funções é uma ferramenta fundamental para a caracterização dos domínios de atração das distribuições max-estáveis e serão estudados nos próximos capítulos. Finalmente, na Seção 1.3, apresentamos uma série de lemas sobre a convolução de funções de distribuição que serão utilizados no desenvolvimento de todo o Capítulo 3.

As principais referências deste capítulo são: [14], [2], [5], [20] e [17].

1.1 Definições e Propriedades Básicas

Definição 1.1.1 *Seja h uma função não decrescente sobre \mathbb{R} . A **inversa generalizada de h** é definida como*

$$h^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\}.$$

(Usamos a convenção: $\inf \emptyset = +\infty$.)

Observação 1.1.2

- a) *Se h é uma função inversível com função inversa h^{-1} então $h^{\leftarrow}(t) = h^{-1}(t)$.*
- b) *Se F é uma função de distribuição de probabilidade então sua inversa generalizada $F^{\leftarrow}(t)$, $0 < t < 1$ é também chamada **função quantil de F** .*

Como consequência da definição, temos as seguintes propriedades da inversa generalizada.

Proposição 1.1.3 *Seja h uma função não decrescente e contínua pela direita, então*

- (i) $\{x : h(x) \geq t\}$ é um conjunto fechado,
- (ii) $h(h^{\leftarrow}(t)) \geq t$,
- (iii) $h^{\leftarrow}(t) \leq x$ se, e somente se, $t \leq h(x)$,
- (iv) $x < h^{\leftarrow}(t)$ se, e somente se, $t > h(x)$.

Demonstração: Ver [14]. ■

Definição 1.1.4 *Seja F uma função de distribuição. Definimos o **ponto extremo superior** de F como sendo*

$$r(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$$

e o **ponto extremo inferior** de F por

$$l(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}.$$

Observação 1.1.5 *Segue da definição que: se $r(F) < \infty$ então $F(r(F)) = 1$. De fato, como a função F é contínua pela direita, temos*

$$\lim_{x \rightarrow r(F)^+} F(x) = F(r(F)).$$

Mas para $x > r(F)$, segue que $F(x) = 1$. Portanto $F(r(F)) = 1$.

Definição 1.1.6 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente. Dizemos que X **domina a cauda de** Y ou que **a cauda de** F_1 **domina a cauda de** F_2 se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 0,$$

onde $\overline{F}_i = 1 - F_i, i = 1, 2$.

Definição 1.1.7 *Sejam F e G duas funções de distribuição. Dizemos que F e G são **cauda-equivalentes** se elas tem o mesmo ponto extremo superior $r(F) = r(G) = x_0 \leq +\infty$ e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c,$$

para alguma constante $0 < c < \infty$.

Definição 1.1.8 *Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias com funções de distribuição não degeneradas F_1 e F_2 , respectivamente. Dizemos que F_1 e F_2 (ou X_1 e X_2) são **do mesmo tipo** se existem números reais A e B , com $A > 0$ tais que*

$$F_2(x) = F_1(Ax + B), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação 1.1.9 *Claramente a relação entre F_1 e F_2 na Definição 1.1.8 é simétrica, reflexiva e transitiva e fornece classes de equivalência de funções de distribuição. Estas classes são chamadas **tipos**. Às vezes, um tipo é indicado por um representante de classes de equivalência.*

O próximo teorema relaciona convergência fraca e funções de distribuição do mesmo tipo. Sua demonstração pode ser encontrada em [12], página 7.

Teorema 1.1.10 *Sejam H_1 e H_2 funções de distribuição não-degeneradas. Suponha que $\{F_n\}$ é uma sequência de funções de distribuição, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências de constantes reais, com $a_n > 0$, tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n x + b_n) = H_1(x), \quad \forall x \in C(H_1).$$

Então existem sequências de constantes reais $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$, com $\alpha_n > 0$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = H_2(x), \quad \forall x \in C(H_2),$$

se, e somente se,

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \rightarrow A > 0, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \rightarrow B \in \mathbb{R},$$

H_1 e H_2 são do mesmo tipo e satisfazem

$$H_2(x) = H_1(Ax + B).$$

1.2 Funções Regularmente Variantes

Nesta seção apresentamos o conceito e principais propriedades de funções regularmente variantes. Estas funções são de fundamental importância para o estudo das distribuições max-estáveis que serão apresentadas no Capítulo 2.

As principais referências para esta seção são [14], [2], [5].

Definição 1.2.1 *Seja $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função mensurável. Dizemos que U é*

regularmente variante no ∞ com índice ρ e denotamos $U \in RV_\rho$, se para $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho.$$

Se $\rho = 0$, dizemos que U é **lentamente variante** e denotamos $U \in RV_0$.

Exemplo 1.2.2

(a) Seja $U(x) = x^\rho$, então $U \in RV_\rho$, pois $\frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho, \forall x > 0$.

(b) Sejam $L_1(x) = \log x$ e $L_2(x) = \exp\{(\log x)^\alpha\}$, com $0 < \alpha < 1$. Então $L_i \in RV_0$, para $i = 1, 2$. De fato,

(i) para $L_1(x) = \log x$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log x}{\log t}\right) = 1,$$

(ii) para $L_2(x) = \exp\{(\log x)^\alpha\}$, como $0 < \alpha < 1$ temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_2(tx)}{L_2(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\log t + \log x)^\alpha - (\log t)^\alpha} = 1.$$

(c) Seja $F(x) = e^x$ então F não é regularmente variante, pois se $x > 1$ segue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{tx}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(x-1)} = \infty.$$

Na próxima proposição listamos algumas propriedades básicas de funções regularmente variantes.

Proposição 1.2.3

(i) Se $U \in RV_\rho$ então $L(x) = x^{-\rho}U(x) \in RV_0$.

(ii) Se $U \in RV_{-\rho}$ então $1/U \in RV_\rho$.

(iii) Se $H(x) \sim x^{-\rho}L(x)$, onde $\rho > 0$ e $L \in RV_0$, então $H \in RV_{-\rho}$.

(iv) Sejam $U_i \in RV_{\rho_i}$, para $i = 1, 2$ e $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, então $U_1 + U_2 \in RV_\rho$, com $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ e $\frac{U_1}{U_2} \in RV_{\rho_1 - \rho_2}$.

A proposição a seguir, estabelece que a classe de funções de distribuição com cauda $\bar{F} = 1 - F$ regularmente variante e ponto extremo inferior infinito, é fechada com respeito à cauda-equivalência (conforme Definição 1.1.8) e sua demonstração segue facilmente das Definições 1.2.1 e 1.1.7.

Proposição 1.2.4 *Sejam F e G funções de distribuição que são cauda equivalentes, com $r(F) = r(G) = +\infty$. Então $\overline{F} = 1 - F \in RV_\alpha$ se, e só se, $\overline{G} = 1 - G \in RV_\alpha$.*

O próximo teorema é conhecido como Teorema de Representação de Karamata e sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 1.2.5 *Seja $U \in RV_\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então existem funções mensuráveis $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ com*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = \alpha \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0, (0 < c_0 < \infty) \quad (1.1)$$

e $x_0 \in \mathbb{R}_+$, tal que para todo $x > x_0$,

$$U(x) = c(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\}. \quad (1.2)$$

Reciprocamente, se (1.2) é válida com δ e c satisfazendo (1.1), então $U \in RV_\alpha$.

Como consequência da representação (1.2) temos o seguinte resultado.

Corolário 1.2.6 *Seja $U \in RV_\rho$, com $\rho \neq 0$, então*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } \rho > 0, \\ 0 & \text{se } \rho < 0. \end{cases}$$

Para uma melhor revisão sobre funções regularmente variantes e suas propriedades sugerimos [2].

1.3 Lemas Preliminares sobre Convolução de Distribuições

Nesta seção apresentamos uma sequência de lemas auxiliares, apresentados por Sreehari *et. al.*, em [20], sobre convoluções de funções de distribuição, que serão utilizadas no desenvolvimento do Capítulo 3.

Inicialmente, observamos que a convolução de funções de distribuição é a função de distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes. Ou seja, se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente, então a função de distribuição da soma de X_1 e X_2 é

$$F_{X_1+X_2}(x) = P(X_1 + X_2 \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-y) dF_2(y) = F_1 * F_2(x),$$

onde $F_1 * F_2$ denota a convolução de F_1 e F_2 . É fácil ver que $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$.

Nos primeiros três lemas são apresentadas desigualdades envolvendo a convolução de funções de distribuição.

Lema 1.3.1 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição não degeneradas. Então para todo $t > 0$ e $\epsilon > 0$ temos*

$$\begin{aligned} & \overline{F_1}(t(1+\epsilon))[\overline{F_2}(-t\epsilon) - \overline{F_2}(t\epsilon)] + \overline{F_2}(t(1+\epsilon))[\overline{F_1}(-t\epsilon) - \overline{F_1}(t\epsilon)] \\ & \leq \overline{F_1 * F_2}(t) \leq \overline{F_1}(t(1-\epsilon)) + \overline{F_2}(t(1-\epsilon)) + \overline{F_1}(t\epsilon)\overline{F_2}(t\epsilon). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Demonstração: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente. Para $t > 0$ e $\epsilon > 0$, considere os eventos

$$A = [X + Y > t], \quad B = [X > t(1 + \epsilon), |Y| < t\epsilon] \text{ e } C = [Y > t(1 + \epsilon), |X| < t\epsilon],$$

temos que B e C são disjuntos, pois se existisse $w \in B \cap C$, então teríamos

$$X(w) > t + t\epsilon \text{ e } X(w) < t\epsilon,$$

o que é impossível pois $t > 0$.

Além disso, temos que $B \cup C \subset A$. De fato, se $w \in B \cup C$, então $w \in B$ ou $w \in C$. Se $w \in B$, daí $X(w) > t(1 + \epsilon)$ e $-t\epsilon < Y(w) < t\epsilon$, o que implica que

$$X(w) + Y(w) > t,$$

ou seja, $w \in A$. Analogamente, se $w \in C$ então $w \in A$. Em consequência $B \cup C \subset A$. Assim, como B e C são disjuntos temos

$$P(A) \geq P(B) + P(C),$$

e como X e Y são independentes segue que

$$P(X > t(1 + \epsilon))P(|Y| < t\epsilon) + P(Y > t(1 + \epsilon))P(|X| < t\epsilon) \leq P(X + Y > t). \quad (1.4)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
[X + Y > t] &= [X + Y > t, X > t(1 - \epsilon)] \cup [X + Y > t, Y > t(1 - \epsilon), X \leq t(1 - \epsilon)] \\
&\cup [X + Y > t, Y \leq t(1 - \epsilon), X \leq t(1 - \epsilon)], \tag{1.5}
\end{aligned}$$

onde os eventos do lado direito são disjuntos. Como

$$[X + Y > t, X > t(1 - \epsilon)] \subset [X > t(1 - \epsilon)]$$

e

$$[X + Y > t, Y > t(1 - \epsilon), X \leq t(1 - \epsilon)] \subset [Y > t(1 - \epsilon)],$$

então de (1.5) segue que

$$\begin{aligned}
P(X + Y > t) &\leq P(X > t(1 - \epsilon)) + P(Y > t(1 - \epsilon)) + \\
&P(X + Y > t, Y \leq t(1 - \epsilon), X \leq t(1 - \epsilon)).
\end{aligned}$$

Agora considere os eventos

$$D = [X + Y > t, Y \leq t(1 - \epsilon), X \leq t(1 - \epsilon)] \text{ e } E = [X > t\epsilon, Y > t\epsilon].$$

Temos que $D \subset E$. De fato, se $w \in E^c \cap D$, então

$$X(w) \leq t\epsilon \text{ e } Y(w) \leq t - t\epsilon \text{ ou } Y(w) \leq t\epsilon \text{ e } X(w) \leq t(1 - \epsilon),$$

mas em ambos casos isto implica que

$$X(w) + Y(w) \leq t,$$

o que é impossível, pois sendo $w \in D$ temos que $X(w) + Y(w) > t$. Portanto $E^c \cap D = \emptyset$.

Logo $E^c \subset D^c$, o que equivale à $D \subset E$.

Em consequência, como X e Y são independentes

$$P(X + Y > t) \leq P(X > t(1 - \epsilon)) + P(Y > t(1 - \epsilon)) + P(X > t\epsilon)P(Y > t\epsilon) \tag{1.6}$$

De (1.4), (1.6) e da independência de X e Y concluímos (1.3). ■

Os próximos dois lemas fornecem cotas para a convolução de duas funções de distribuição de variáveis aleatórias não negativas.

Lema 1.3.2 *Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes não negativas, com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente e seja $t > 0$. Então para todo $\epsilon > 0$*

$$(F_1 * F_2)(t) \leq F_1(t(1 + \epsilon))F_2(t(1 + \epsilon)). \quad (1.7)$$

Demonstração: Seja $t > 0$. Dado $\epsilon > 0$, considere os eventos

$$A = [X + Y \leq t] \text{ e } B = [X \leq t(1 + \epsilon), Y \leq t(1 + \epsilon)].$$

Afirmamos que $A \subset B$. De fato, se $w \in A$ então $X(w) + Y(w) \leq t$. Como $X \geq 0$ e $Y \geq 0$, então segue que $X(w) \leq t(1 + \epsilon)$ e $Y(w) \leq t(1 + \epsilon)$, ou seja $w \in B$. Portanto, como X e Y são independentes temos

$$P(X + Y \leq t) \leq P(X \leq t(1 + \epsilon))P(Y \leq t(1 + \epsilon))$$

e segue (1.7). ■

Lema 1.3.3 *Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes não negativas com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente e seja $t > 0$. Então para todo $0 < \epsilon < 1/2$*

$$F_1 * F_2(t) \geq F_1(t(1 - \epsilon))F_2(t(1 - \epsilon)) - P(t\epsilon < X \leq t(1 - \epsilon), t\epsilon < Y \leq t(1 - \epsilon)). \quad (1.8)$$

Demonstração: Seja $t > 0$ e seja $0 < \epsilon < 1/2$. Neste caso, temos $t\epsilon < t(1 - \epsilon)$ e

$$(X \leq t\epsilon, Y \leq t(1 - \epsilon)) \cup (t\epsilon < X \leq t(1 - \epsilon), Y \leq t\epsilon) \subset (X + Y \leq t).$$

Assim, como a união acima é disjunta temos

$$P(X + Y \leq t) \geq P(X \leq t\epsilon, Y \leq t(1 - \epsilon)) + P(t\epsilon < X \leq t(1 - \epsilon), Y \leq t\epsilon) \quad (1.9)$$

mas é fácil ver que

$$(X \leq t\epsilon, Y \leq t(1 - \epsilon)) \cup (t\epsilon < X \leq t(1 - \epsilon), Y \leq t\epsilon) \cup (t\epsilon < X \leq t(1 - \epsilon), t\epsilon < Y \leq t(1 - \epsilon)) = (X \leq t(1 - \epsilon), Y \leq t(1 - \epsilon)),$$

e como a união é disjunta, segue que

$$\begin{aligned} & P(X \leq t\epsilon, Y \leq t(1-\epsilon)) + P(t\epsilon < X \leq t(1-\epsilon), Y \leq t\epsilon) \\ &= P(X \leq t(1-\epsilon), Y \leq t(1-\epsilon)) - P(t\epsilon < X \leq t(1-\epsilon), t\epsilon < Y \leq t(1-\epsilon)). \end{aligned}$$

Logo substituindo em (1.9), como X e Y são independentes obtemos

$$P(X+Y \leq t) \geq P(X \leq t(1-\epsilon))P(Y \leq t(1-\epsilon)) - P(t\epsilon < X \leq t(1-\epsilon), t\epsilon < Y \leq t(1-\epsilon)),$$

e segue (1.8). ■

O próximo lema caracteriza o ponto extremo superior da convolução de duas funções de distribuição.

Lema 1.3.4 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição não degeneradas. Então*

$$r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2).$$

Demonstração: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente.

Caso 1: $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$.

Se $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$, então pela definição de ponto extremo superior temos que $F_1(x) < 1$ e $F_2(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo $\overline{F_1}(x) > 0$ e $\overline{F_2}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, como X e Y são independentes, obtemos para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{F_1 * F_2}(x) &= P(X + Y > x) \\ &\geq P(X > x/2)P(Y > x/2) \\ &= \overline{F_1}\left(\frac{x}{2}\right)\overline{F_2}\left(\frac{x}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Assim $F_1 * F_2(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $r(F_1 * F_2) = +\infty = r(F_1) + r(F_2)$.

Caso 2: $r(F_i) = +\infty$ e $r(F_j) < +\infty$, para $i \neq j, i, j = 1, 2$.

Suponha $r(F_1) = +\infty$ e $r(F_2) < +\infty$. Como $r(F_2) < +\infty$, então seja $y_0 < r(F_2)$ tal que $F_2(y_0) < 1$. Agora para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{F_1 * F_2}(x) &= P(X + Y > (x - y_0) + y_0) \\
&\geq P(X > (x - y_0))P(Y > y_0) \\
&= \overline{F_1}(x - y_0)\overline{F_2}(y_0),
\end{aligned}$$

e como $F_1(z) < 1, \forall z \in \mathbb{R}$ e $F_2(y_0) < 1$ segue que

$$\overline{F_1 * F_2}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $F_1 * F_2(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $r(F_1 * F_2) = +\infty$. Logo

$$r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2).$$

Caso 3: $r(F_1) < +\infty$ e $r(F_2) < +\infty$.

Provemos inicialmente que

$$r(F_1 * F_2) \leq r(F_1) + r(F_2). \quad (1.10)$$

De fato, seja $\epsilon > 0$ dado, então

$$(X \leq r(F_1) + \epsilon/2, Y \leq r(F_2) + \epsilon/2) \subseteq (X + Y \leq r(F_1) + r(F_2) + \epsilon).$$

Logo, da independência de X e Y temos

$$\begin{aligned}
1 &\geq P(X + Y \leq r(F_1) + r(F_2) + \epsilon) \geq P(X \leq r(F_1) + \epsilon/2) \cdot P(Y \leq r(F_2) + \epsilon/2) \\
&= F_1(r(F_1) + \epsilon/2) \cdot F_2(r(F_2) + \epsilon/2).
\end{aligned}$$

Como $r(F_i) + \frac{\epsilon}{2} > r(F_i)$, temos que $F_i(r(F_i) + \frac{\epsilon}{2}) = 1, i = 1, 2$. Então segue que

$$F_1 * F_2(r(F_1) + r(F_2) + \epsilon) = 1.$$

Portanto, da definição de $r(F_1 * F_2)$ temos

$$r(F_1 * F_2) < r(F_1) + r(F_2) + \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

como ϵ é arbitrário, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos (1.10). Note que, como $r(F_i) < +\infty, i =$

1, 2 então $r(F_1 * F_2) < +\infty$.

Agora, suponhamos a desigualdade estrita em (1.10) seja satisfeita, ou seja,

$$r(F_1 * F_2) < r(F_1) + r(F_2). \quad (1.11)$$

Podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$r(F_1 * F_2) < r(F_1) + r(F_2) - \delta.$$

Então

$$\begin{aligned} P(X + Y > r(F_1 * F_2)) &\geq P(X + Y > r(F_1) + r(F_2) - \delta) \\ &\geq P(r(F_1) + r(F_2) - \delta < X + Y \leq r(F_1) + r(F_2)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Agora para $\delta > 0$ temos

$$\begin{aligned} &P(r(F_1) + r(F_2) - \delta < X + Y \leq r(F_1) + r(F_2)) \\ &\geq P(r(F_1) - \delta/2 < X \leq r(F_1)) \cdot P(r(F_2) - \delta/2 < Y \leq r(F_2)) \end{aligned}$$

Como X e Y são independentes e $F_i(r(F_i)) = 1, i = 1, 2$, segue de (1.12) que

$$\begin{aligned} P(X + Y > r(F_1 * F_2)) &\geq P(r(F_1) - \frac{\delta}{2} < X \leq r(F_1))P(r(F_2) - \frac{\delta}{2} < Y \leq r(F_2)) \\ &= \overline{F_1}(r(F_1) - \frac{\delta}{2})\overline{F_2}(r(F_2) - \frac{\delta}{2}) > 0, \end{aligned}$$

pois $r(F_i) - \frac{\delta}{2} < r(F_i), i = 1, 2$. Logo $F_1 * F_2(r(F_1 * F_2)) < 1$, o que é um absurdo.

Portanto a desigualdade estrita em (1.11) não é válida e de (1.10) segue que

$$r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2).$$

■

Finalizamos a seção com um lema que pode ser encontrado em [17] pág. 188.

Lema 1.3.5 *Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente e $Y > 0$. Suponha que $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e que a cauda de X*

domina a cauda de Y , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 1, \quad (1.13)$$

ou seja, $F_1 * F_2$ e F_1 são cauda-equivalentes.

Demonstração: Dado $t > 0$ e $0 < \sigma < 1$, temos

$$\begin{aligned} \overline{F_1 * F_2}(t) &= P(X + Y > t) \\ &= P(X + Y > t, Y > \sigma t) + P(X + Y > t, Y \leq \sigma t) \\ &\leq P(Y > \sigma t) + P(X > t - Y, -Y \geq -\sigma t) \\ &= P(Y > \sigma t) + P(X > t(1 - \sigma)) \\ &= \overline{F_2}(\sigma t) + \overline{F_1}(t(1 - \sigma)). \end{aligned}$$

Então

$$\frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \leq \frac{\overline{F_2}(\sigma t) + \overline{F_1}(t(1 - \sigma))}{\overline{F_1}(t)},$$

e segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(\sigma t)}{\overline{F_1}(t)} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(t(1 - \sigma))}{\overline{F_1}(t)}. \quad (1.14)$$

Mas como por hipótese a cauda de X domina a cauda de Y e $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(\sigma t)}{\overline{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{F_2}(\sigma t)}{\overline{F_1}(\sigma t)} \cdot \frac{\overline{F_1}(\sigma t)}{\overline{F_1}(t)} \right] = 0$$

e $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(t(1 - \sigma))}{\overline{F_1}(t)} = (1 - \sigma)^{-\alpha}$. Substituindo em (1.14) obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \leq (1 - \sigma)^{-\alpha}.$$

Sendo σ arbitrário, fazendo $\sigma \rightarrow 0$, segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \leq 1. \quad (1.15)$$

Por outro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \geq 1, \quad (1.16)$$

pois como $Y > 0$ temos $P(X + Y > t) \geq P(X > t)$. Portanto, de (1.15) e (1.16) segue (1.13). ■

Capítulo 2

Teoria Clássica dos Valores Extremos

Neste capítulo apresentamos uma síntese da Teoria Clássica dos Valores Extremos, que estuda o comportamento assintótico dos valores extremos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Restringimos nosso estudo às propriedades do máximo amostral

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, n \geq 1,$$

onde X_1, X_2, \dots são variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição comum não degenerada F .

Resultados análogos para o mínimo amostral podem ser obtidos dos resultados apresentados para o máximo, utilizando-se a relação

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}, n \geq 1.$$

Muitos autores contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Valores Extremos, desde a década de 1920. Entre os trabalhos pioneiros merecem destaque o de Fisher e Tippett [7], em 1928, que estabeleceram que as distribuições limites para o máximo M_n devidamente normalizado são reduzidas à três tipos. Já Gnedenko [10], em 1943, apresentou rigorosamente as condições necessárias e suficientes sobre a função de distribuição F para cada um dos três tipos de distribuição limites extremas.

Este capítulo está dividido em 4 seções. Na Seção 2.1 estudamos as distribuições max-estáveis, os max-domínios de atração e a relação entre os dois conceitos. Aqui

também enunciamos as três classes de distribuições de valores extremos dadas por Fisher e Tippet [7]. Nas seções seguintes, 2.2, 2.3 e 2.4 apresentamos as principais caracterizações de cada um dos max-domínios de atração, Fréchet, Weibull e Gumbel, respectivamente.

As referências básicas utilizadas neste capítulo foram [9], [14] e [5].

2.1 Distribuições Max-Estáveis e Max-Domínios de Atração

Considere $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com função de distribuição comum F .

O máximo amostral

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, n \geq 1,$$

é um estimador fortemente consistente para o ponto extremo superior de F , $r(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$, ou seja, $M_n \xrightarrow{q.c.} r(F)$, quando $r(F) < +\infty$ ($\xrightarrow{q.c.}$ indica a convergência quase-certa). Para verificar isto, observamos que a função de distribuição de M_n é dada por

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\ &= F^n(x), \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < r(F), \\ 1 & \text{se } x \geq r(F). \end{cases}$$

Assim, $M_n \xrightarrow{d} r(F)$ e, como $r(F)$ é uma constante real, segue que $M_n \xrightarrow{P} r(F)$, onde \xrightarrow{d} indica convergência em distribuição e \xrightarrow{P} indica convergência em probabilidade. Agora, como $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência não decrescente, segue das relações entre as convergências que $M_n \xrightarrow{q.c.} r(F)$.

O primeiro problema de interesse da Teoria dos Valores Extremos consiste em estudar as possíveis funções de distribuição H não degeneradas para as quais existem

sequências de constantes reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $a_n > 0$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad \forall x \in C(H), \quad (2.1)$$

onde $C(H)$ é o conjunto dos pontos de continuidade de H . Neste caso, dizemos que H é uma **distribuição do valor extremo** ou **distribuição limite extremal**.

A família de distribuições dos valores extremos é caracterizada pelas distribuições max-estáveis, conforme a definição e teorema a seguir.

Definição 2.1.1 *Seja X uma variável aleatória e H sua função de distribuição. Dizemos que X é **max-estável**, ou que H é uma **distribuição max-estável**, se para cada $n \in \mathbb{N}$ existem sequências de constantes reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $a_n > 0$, tais que*

$$M_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n, \quad (2.2)$$

onde $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, com X_1, \dots, X_n v.a's i.i.d. com função de distribuição H ou, equivalentemente, se

$$H(x) = H^n(a_n x + b_n) \quad (2.3)$$

Observação 2.1.2 *Note que (2.2) é equivalente a*

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} X.$$

Portanto, concluímos que toda distribuição max-estável é uma distribuição limite para o máximo de v.a's i.i.d. Além disso, as distribuições max-estáveis são as únicas leis limites para o máximo.

Teorema 2.1.3 *A classe de distribuições max-estáveis coincide com a classe de todas as possíveis leis limites (não degeneradas) para o máximo de variáveis aleatórias i.i.d..*

Demonstração: A prova pode-se encontrar em [5], pág. 121. ■

A seguir, enunciamos o teorema básico da Teoria Clássica dos Valores Extremos, apresentado por Fisher e Tippett em 1928, [7], que estabelece que existem apenas 3 tipos de distribuições max-estáveis, ou equivalentemente, 3 tipos de distribuições limites para o máximo de v.a's i.i.d..

Teorema 2.1.4 (Fisher e Tippett) *Suponha que existam sequências reais $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ com $a_n > 0$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad (2.4)$$

$\forall x \in C(H)$, onde H é não degenerada. Então H é do mesmo tipo de uma das seguintes funções de distribuição

$$(i) \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (\text{Fréchet})$$

para algum $\alpha > 0$.

$$(ii) \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (\text{Weibull})$$

para algum $\alpha > 0$.

$$(iii) \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Gumbel})$$

Demonstração: Ver [7], ou [9] ou [14]. ■

Observação 2.1.5 As funções $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$ e suas funções do mesmo tipo apresentadas no Teorema 2.1.4 são chamadas **distribuições do valor extremo** ou **distribuições limites extremas**.

Observação 2.1.6 Como aplicação direta do Teorema 1.1.10, segue que a distribuição limite em (2.3) é unicamente determinada a menos de transformações afins. Ou seja: Se existem sequências de constantes $\{a_n\}, \{b_n\}, \{a'_n\}$ e $\{b'_n\}$, com $a_n > 0$ e $a'_n > 0$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_1(x), \quad \forall x \in C(H_1) \quad (2.5)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b'_n}{a'_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a'_n x + b'_n) = H_2(x), \quad \forall x \in C(H_2) \quad (2.6)$$

onde H_1 e H_2 são funções de distribuição não degeneradas, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a_n} = A > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b'_n - b_n}{a_n} = B \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

e $H_2(x) = H_1(Ax + B)$, ou seja, H_1 e H_2 são do mesmo tipo.

Além disso, aplicando o Teorema 1.1.10 podemos obter outras possibilidades para as sequências de constantes normalizadoras $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Especificamente, se (2.5) é válida então para sequências $\{a'_n\}$ e $\{b'_n\}$, $a'_n > 0$, satisfazendo (2.7) temos o limite (2.6) com $H_2(x) = H_1(Ax + B)$.

Após estabelecer os três tipos possíveis de distribuições limites extremas, o segundo problema de interesse da Teoria dos Valores Extremos consiste em determinar condições necessárias e suficientes sobre uma função de distribuição F sob as quais existam sequências de constantes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que o limite (2.1) seja satisfeito para alguma distribuição do valor extremo H . Para isso, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.7 *Seja H uma função de distribuição não degenerada. Dizemos que F pertence ao **max-domínio de atração de H** (ou domínio de atração de H) e denotamos $F \in D_{max}(H)$, se existem sequências de constantes reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $a_n > 0$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x)$$

$\forall x \in C(H)$. As constantes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são chamadas **constantes de normalização**.

Assim, o segundo problema abordado pela Teoria dos Valores Extremos consiste em determinar condições necessárias e suficientes para $F \in D_{max}(H)$ e como podem ser escolhidas as respectivas normalizadoras $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Nas próximas seções apresentamos os resultados referentes a cada um dos três tipos de distribuições max-estáveis: Fréchet (Φ_α), Weibull (Ψ_α) e Gumbel (Λ).

2.2 Max-Domínio de Atração da Fréchet: $D_{max}(\Phi_\alpha)$

Apresentamos nesta seção, alguns resultados que nos fornecem condições para que uma função de distribuição pertença ao max-domínio de atração $D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Iniciamos com o resultado obtido por von Mises, em 1936, [13], que fornece condições suficientes para que uma função de distribuição absolutamente contínua pertença à $D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Proposição 2.2.1 *Seja F uma função de distribuição com $r(F) = \infty$. Suponha que existe $F' = f$ em (z_0, ∞) , para algum z_0 . Se*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{F(x)} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (2.8)$$

então $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [4], ou [9] ou [14]. ■

Um exemplo de aplicação desta proposição é apresentado a seguir.

Exemplo 2.2.2 *Seja a função de distribuição de Cauchy-padrão:*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então $F \in D_{max}(\Phi_1)$.

De fato, temos que F é absolutamente contínua com função densidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

logo aplicando *L'Hospital* temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\pi(1+x^2)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(1+x^2) - x(2\pi x)}{\pi^2(1+x^2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\pi(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 > 0. \end{aligned}$$

A primeira caracterização rigorosa dos max-domínios de atração dos três tipos de leis max-estáveis foi apresentada por Gnedenko [10], em 1943. Os critérios apresentados por Gnedenko são baseados na propriedade de variação regular e no ponto extremo superior de F . Enunciamos em seguida, para o caso $D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Teorema 2.2.3 *Seja F uma função de distribuição e $\alpha > 0$. Então $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ se, e somente se,*

$$r(F) = +\infty \quad e \quad \overline{F} = (1 - F) \in RV_{-\alpha}. \quad (2.9)$$

Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\} \quad e \quad b_n = 0. \quad (2.10)$$

Demonstração: Ver [10], ou [9] ou [14]. ■

Vale observar que a Proposição 2.2.1, segue como corolário do Teorema 2.2.3, pois é possível mostrar, usando a teoria de variação regular, que a condição de von Mises (2.8) implica que $\overline{F} \in RV_{-\alpha}$ (veja Bingham *et. al* [2]).

No exemplo a seguir, calculamos as constantes de normalização para a distribuição de Cauchy do Exemplo 2.2.2.

Exemplo 2.2.4 Seja $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Vimos no Exemplo 2.2.2 que $F \in D_{max}(\Phi_1)$. Agora pelo Teorema 2.2.3, por (2.10), as constantes de normalização podem ser escolhidas por

$$a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}, \quad e \quad b_n = 0.$$

Mas temos

$$\begin{aligned} F^{\leftarrow}(1 - 1/n) &= \inf\{x : \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \geq 1 - \frac{1}{n}\} \\ &= \inf\{x : \arctan x \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\} \\ &= \inf\{x : x \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\} \end{aligned}$$

e assim, $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$.

No próximo exemplo aplicamos o Teorema 2.2.3 para verificar que a distribuição de Pareto, com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, pertence ao $D_{max}(\Phi_\alpha)$ e calculamos as respectivas constantes de normalização.

Exemplo 2.2.5 Seja a função de distribuição de Pareto, com parâmetros $\alpha, \beta > 0$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Então $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, com $a_n = (\beta n)^{1/\alpha}$ e $b_n = 0$.

De fato, como $F(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que $r(F) = +\infty$. Por outro lado, temos $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta + x}{\beta + tx}\right)^\alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\frac{\beta}{t} + 1}{\frac{\beta}{tx} + 1}\right)^\alpha \\ &= x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\bar{F} = (1 - F) \in RV_{-\alpha}$ e pelo Teorema 2.2.3 temos que $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. Além disso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como em (2.10):

$$a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}, \quad e \quad b_n = 0.$$

Mas $F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha \geq 1 - \frac{1}{n}$, se e somente se, $x \geq \beta(n^{1/\alpha} - 1)$. Logo

$a_n = \beta(n^{1/\alpha} - 1)$, ou equivalentemente, por (2.5) podemos escolher $a_n = \beta n^{1/\alpha}$.

Finalizamos esta seção com um resultado que fornece uma ideia da estrutura do max-domínio de atração de Φ_α . Ele está relacionado com a Proposição 1.2.4 que estabelece que a classe das funções de distribuição com cauda regularmente variante é fechado com respeito à cauda-equivalência.

Proposição 2.2.6 *Sejam F e G duas funções de distribuição. Suponha que $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, com constantes de normalização $a_n > 0$ e $b_n = 0$, i.e.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x) = \Phi_\alpha(x), \text{ para todo } x > 0.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a_n x) = \Phi_\alpha(Ax), \text{ para todo } x > 0,$$

para algum $A > 0$ se, e só se, F e G são cauda equivalentes com

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = A^\alpha.$$

Demonstração: Para a prova da necessidade veja [14], pág. 17, ou [16]. Para a prova da suficiência veja [5], pág. 133. ■

Portanto, podemos concluir que $D_{max}(\Phi_\alpha)$ consiste das funções de distribuição satisfazendo as condições von Mises (2.8) e suas funções de distribuição cauda-equivalentes. De fato, pelo Teorema 2.2.3 temos que $F \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ se, e só se, $\bar{F} = (1 - F) \in RV_{-\alpha}$. Agora o Teorema 1.2.5, da representação de funções regularmente variantes, implica que toda função de distribuição F tal que $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ é cauda-equivalente a uma função de distribuição absolutamente contínua satisfazendo a condição von Mises (2.8).

2.3 Max-Domínio de Atração da Weibull: $D_{max}(\Psi_\alpha)$

Apresentamos nesta seção, os principais resultados que nos fornecem condições para que uma função de distribuição pertença ao max-domínio de atração $D_{max}(\Psi_\alpha)$. Observamos que esses resultados estão estreitamente relacionados com os apresentados para $D_{max}(\Phi_\alpha)$, já que $\Psi_\alpha(-x^{-1}) = \Phi_\alpha(x)$, $x > 0$.

Analogamente à seção anterior, iniciamos com a condição suficiente obtida por Von Mises [13], em 1936.

Proposição 2.3.1 *Seja F uma função de distribuição com $r(F) < \infty$. Suponha que F tem densidade f que é positiva em algum intervalo finito $(z, r(F))$. Se*

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{(r(F) - x)f(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (2.11)$$

então $F \in D_{\max}(\Psi_\alpha)$.

Demonstração: Ver [4], pág. 167-168 (Teorema 4). ■

A seguir apresentamos a caracterização do max-domínio de atração de Ψ_α , obtida por Gnedenko [10], em 1943.

Teorema 2.3.2 *Seja F uma função de distribuição e $\alpha > 0$. Então $F \in D_{\max}(\Psi_\alpha)$ se, e somente se,*

$$r(F) < \infty \quad e \quad (1 - F(r(F) - x^{-1})) \in RV_{-\alpha}.$$

Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$a_n = r(F) - F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \quad e \quad b_n = r(F).$$

Demonstração: Ver [10], ou [14] ou [9]. ■

No exemplo a seguir, aplicamos o teorema anterior para verificar que a função de distribuição uniforme pertence a Domínio $D_{\max}(\Psi_1)$.

Exemplo 2.3.3 *Seja F a distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, então $F \in D_l(\Psi_1)$ e as constantes de normalização são $a_n = 1/n$ e $b_n = 1$.*

De fato, seja $x > 0$, como $r(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} = 1 < \infty$, logo

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{tx} = x^{-1},$$

ou seja, $\overline{F}^ \in RV_{-1}$. Pelo Teorema 2.3.2 temos que $F \in D_{\max}(\Psi_1)$ e as constantes de normalização podem ser escolhidas como*

$$\begin{aligned}
a_n &= r(F) - F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \\
&= 1 - \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

e

$$b_n = r(F) = 1.$$

A próxima proposição estabelece que, assim como $D_{max}(\Phi_\alpha)$, o max-domínio de atração de Ψ_α é fechado com respeito à propriedade de cauda-equivalência. Consequentemente, é possível mostrar que o max-domínio $D_{max}(\Psi_\alpha)$ consiste de todas as funções de distribuição satisfazendo a condição de von Mises (2.11) e as funções de distribuição que são cauda-equivalentes à elas.

Proposição 2.3.4 *Sejam F e G duas funções de distribuição, com o mesmo ponto extremo superior $r(F) = r(G) = x_0 < \infty$. Suponha que $F \in D_{max}(\Psi_\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, com constantes de normalização $a_n > 0$ e $b_n = x_0$; i.e.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + x_0) = \Psi_\alpha(x), \quad x < 0.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a_n x + x_0) = \Psi_\alpha(Ax), \quad x < 0,$$

para alguma constante $A > 0$ se, e só se, F e G são cauda equivalentes com

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = A^{-\alpha}.$$

Demonstração: Vide [16], ou [14]. ■

Finalizamos esta seção, demonstrando que toda função de distribuição F no max-domínio de atração de Ψ_α é contínua no seu ponto extremo superior.

Proposição 2.3.5 *Se F é uma função de distribuição tal que $F \in D_{max}(\Psi_\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, então F é contínua em $r(F)$.*

Demonstração: Como $F \in D_{max}(\Psi_\alpha)$, do Teorema 2.3.2 segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + r(F)) = \exp\{-(-x)^\alpha\}, \quad \forall x < 0,$$

com $a_n > 0$. Então, para todo $x < 0$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log(F(a_n x + r(F))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(F^n(a_n x + r(F))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log(\exp\{-(-x)^\alpha\}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ou seja, para todo $x < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + r(F)) = 1 = F(r(F)).$$

Logo, F é contínua pela esquerda em $r(F)$ e, em consequência, F é contínua em $r(F)$. ■

2.4 Max-Domínio de Atração da Gumbel: $D_{max}(\Lambda)$

Apresentamos nesta seção, os principais resultados que fornecem condições para que uma função de distribuição pertença ao max-domínio de atração $D_{max}(\Lambda)$. As referências nesta seção são principalmente [5], [16] e [23].

Iniciamos com os resultados de von Mises [13], que estabelece condições para $F \in D_{max}(\Lambda)$, quando F é uma função de distribuição absolutamente contínua. Para isso, apresentamos primeiramente a definição de função de von Mises.

Definição 2.4.1 *Seja F uma função de distribuição com ponto extremo superior $r(F)$. F é chamada uma **função de von Mises** se existe $z_0 < r(F)$ tal que para $z_0 < x < r(F)$, a cauda de F tem a representação*

$$\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_{z_0}^x (1/a(u)) du \right\}, \tag{2.13}$$

onde $c > 0$ é uma constante real, a é uma função absolutamente contínua e estritamente positiva sobre $(z_0, r(F))$ com densidade $a'(u)$ tal que $\lim_{u \uparrow r(F)} a'(u) = 0$. A função a é chamada **função auxiliar**.

Observação 2.4.2 *A relação (2.13) deve ser comparada com a representação de Karamata de uma função regularmente variante (veja Teorema 1.2.5). Substituindo na equação (2.13) a função $a(x) = x/\delta(x)$ tal que $\delta(x) \rightarrow \alpha \in [0, \infty)$ quando $x \rightarrow \infty$, e $c(x) = c$, por (1.2), do Teorema 1.2.5, $1 - F(x)$ se torna uma cauda regularmente variante com expoente $-\alpha$.*

A seguir apresentamos alguns exemplos de funções de von Mises.

Exemplo 2.4.3

1. *Distribuição Exponencial.*

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0,$$

então F é uma função de von Mises, com função auxiliar $a(x) = \lambda^{-1}$.

2. *Distribuição Weibull.*

$$\bar{F}(x) = \exp\{-cx^\tau\}, x \geq 0, \quad c, \tau > 0,$$

então F é uma função de von Mises, com função auxiliar

$$a(x) = (c\tau)^{-1}x^{1-\tau}, \quad x > 0.$$

3. *Distribuição de Erlang.*

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, x \geq 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N},$$

então F é uma função de von Mises com função auxiliar

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \lambda^{-(k+1)} x^{-k}, x > 0.$$

Uma caracterização das funções de von Mises [13] é apresentada na seguinte proposição.

Proposição 2.4.4 *Seja F uma função de distribuição com ponto extremo superior $r(F) \leq \infty$. Suponha que existe $z < r(F)$ tal que F é duas vezes diferenciável sobre $(z, r(F))$ com densidade positiva $f = F'$ e $F''(x) < 0$ para $z < x < r(F)$. Então F é uma função de von Mises com função auxiliar $a = \frac{\bar{F}}{f}$ se, e somente se,*

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{\bar{F}(x)F''(x)}{f^2(x)} = -1, \quad (2.14)$$

ou equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow r(F)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\bar{F}(x)}{F'(x)} \right] = 0. \quad (2.15)$$

Demonstração: Vide [14], pág. 40 (Proposição 1.1b). ■

Exemplo 2.4.5 *Seja a função de distribuição*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{1-x}\right) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Claramente, temos $r(F) = 1$ e para $0 < x < 1$ temos

$$F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \exp\left(\frac{-x}{1-x}\right).$$

Então

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1 - F(x)}{F'(x)} \right] = \frac{d}{dx} ((1-x)^2) = -2(1-x).$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1 - F(x)}{F'(x)} \right] = 0,$$

e pela Proposição 2.4.4 segue que $F \in D_{\max}(\Lambda)$.

Uma das propriedades das funções de von Mises, que apresentaremos na próxima proposição, é que elas possuem caudas rapidamente variantes conforme definição a seguir.

Definição 2.4.6 *Seja h uma função mensurável positiva sobre $(0, \infty)$. Dizemos que h é rapidamente variante com índice $-\infty$, $h \in RV_{-\infty}$, se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 1, \\ \infty & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.4.7 *A função $h(x) = e^x$ é rapidamente variante, pois*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(1-x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 1, \\ \infty & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Proposição 2.4.8 *Toda função de von Mises F é absolutamente contínua sobre $(z, r(F))$ com densidade positiva f . A função auxiliar pode ser escolhida como $a(x) = \frac{\overline{F}(x)}{f(x)}$. Além disso, temos as seguintes propriedades:*

a) Se $r(F) = \infty$ então $\overline{F} \in RV_{-\infty}$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{\overline{F}(x)} = \infty. \quad (2.16)$$

b) Se $r(F) < \infty$ então $\overline{F}(r(F) - x^{-1}) \in RV_{-\infty}$ e

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{(r(F) - x)f(x)}{\overline{F}(x)} = \infty. \quad (2.17)$$

Finalmente, apresentamos o resultado de von Mises [13], que estabelece que as funções de von Mises pertencem ao $D_{max}(\Lambda)$.

Teorema 2.4.9 *Se uma função de distribuição F é uma função de von Mises então $F \in D_{max}(\Lambda)$. Além disso, uma possível escolha das constantes de normalização é*

$$b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad e \quad a_n = a(b_n).$$

Demonstração: Vide [5], pág. 141. ■

A primeira e principal caracterização do max-domínio de atração de Λ , é atribuída a Gnedenko [10], em 1943, cujo resultado enunciamos a seguir.

Teorema 2.4.10 *Seja F uma função de distribuição e $\alpha > 0$. Então $F \in D_{max}(\Lambda)$ se, e somente se, para algum $a \in \mathbb{R}$, temos*

$$\int_a^{r(F)} (\overline{F}(y)) dy < \infty \quad (2.18)$$

e para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow r(F)} \frac{\overline{F}(t + xf(t))}{\overline{F}(t)} = e^{-x}, \quad (2.19)$$

onde para $l(F) < t < r(F)$

$$f(t) = \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^{r(F)} (\overline{F}(y)) dy. \quad (2.20)$$

Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - 1/n\right) \quad e \quad a_n = f(b_n). \quad (2.21)$$

Demonstração: Ver [10], ou [14] ou [9]. ■

No exemplo a seguir aplicamos o Teorema 2.4.10 para verificar que a distribuição exponencial pertence a $D_{max}(\Lambda)$.

Exemplo 2.4.11 *Seja a função distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$,*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Então $F \in D_{max}(\Lambda)$, com constantes de normalização $b_n = (1/\lambda) \log n$ e $a_n = 1/\lambda$. De fato, facilmente vemos que $r(F) = +\infty$ e, assim temos

$$\int_t^{r(F)} \bar{F}(y) dy = \int_t^\infty e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} < \infty,$$

ou seja, (2.18) é satisfeita.

Agora, usando (2.20), podemos obter

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}, 0 < t < +\infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow r(F)} \frac{\bar{F}(t + x f(t))}{\bar{F}(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(t + x/\lambda)}{\bar{F}(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda(t+x/\lambda)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

e (2.19) é também satisfeita. Portanto, pelo Teorema 2.4.10 segue que $F \in D_{max}(\Lambda)$ e as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$\begin{aligned} b_n &= F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \inf \left\{ x : 1 - e^{-\lambda x} \geq 1 - \frac{1}{n} \right\} \\ &= \inf \left\{ x : x \geq \frac{1}{\lambda} \log n \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \log n, \end{aligned}$$

e

$$a_n = f(b_n) = \frac{1}{\lambda}.$$

Por outro lado, as funções de von Mises não caracterizam completamente $D_{max}(\Lambda)$. No entanto, uma leve modificação da relação (2.13) produz uma caracterização completa de $D_{max}(\Lambda)$, conforme o teorema a seguir, que pode ser encontrado em [14].

Teorema 2.4.12 *Seja F uma função de distribuição com ponto extremo superior $r(F)$. Então $F \in D_{\max}(\Lambda)$ se, e somente se, existe $z < r(F)$ tal que a cauda de F tem a representação*

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z_0 < x < r(F), \quad (2.22)$$

onde c e g são funções mensuráveis satisfazendo $c(x) \rightarrow c > 0$, $g(x) \rightarrow 1$ quando $x \uparrow r(F)$ e $a(x)$ é uma função positiva e absolutamente contínua (com respeito à medida de Lebesgue), com densidade a' tal que $\lim_{u \uparrow r(F)} a'(u) = 0$. Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como em (2.21) e a função auxiliar como

$$a(x) = \int_x^{r(F)} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt, \quad x < r(F). \quad (2.23)$$

Demonstração: Ver [14], págs. 46 e 48 (Corolário 1.7 e Proposição 1.9, respectivamente). ■

Observação 2.4.13 *A representação (2.22) não é única. A seguinte representação pode ser usada de maneira alternativa([14] Prop. 1.4),*

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < r(F),$$

onde c e a satisfazem as propriedades no Teorema 2.4.12.

Na próxima proposição enunciamos uma outra caracterização baseada no fato que toda função de von Mises satisfaz

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{\bar{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

onde \tilde{a} é uma função positiva.

Teorema 2.4.14 *Seja F uma função de distribuição. Então $F \in D_{\max}(\Lambda)$ se, e somente se, existe uma função positiva \tilde{a} tal que (2.24) é satisfeita. Neste caso, podemos escolher $\tilde{a} = a$, com a dado em (2.23).*

Demonstração: Vide [3], Teorema 2.5.1. ■

Finalmente, podemos concluir que o max-domínio de atração de Λ , consiste de todas as funções de von Mises e as funções de distribuição que são cauda-equivalentes com elas. Resnick [16], em 1971, estabelece a proposição a seguir.

Proposição 2.4.15 *Sejam F e G funções de distribuição com o mesmo ponto extremo superior $r(F) = r(G)$. Suponha que $F \in D_{max}(\Lambda)$ com constantes de normalização $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x), x \in \mathbb{R},$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x + b), x \in \mathbb{R}$$

se, e somente se, F e G são cauda-equivalentes, com

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = e^b, \text{ para algum } b \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Vide [16] ou [14]. ■

Finalizamos esta seção observando que nas caracterizações de $D_{max}(\Lambda)$, apresentadas nos Teoremas 2.4.9 e 2.4.10, as constantes de normalização a_n e b_n são construídas utilizando-se a função inversa generalizada. Porém, eventualmente, é praticamente impossível determinar explicitamente a função inversa generalizada de $F \in D_{max}(\Lambda)$, como vemos no seguinte exemplo.

Exemplo 2.4.16 (Parte 1) *Seja a função de distribuição*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x + 1)e^{-x^2} & \text{se } x \geq 1, \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Temos que $r(F) = \infty$, pois $F(x) = 1 - (x + 1)e^{-x^2} < 1, \forall x \geq 1$. Além disso,

$$F'(x) = (2x^2 + 2x - 1)e^{-x^2} \quad e \quad F''(x) = (-4x^3 - 4x^2 + 6x + 2)e^{-x^2}$$

e podemos obter

$$\frac{1 - F(x)}{F'(x)} = \frac{(x + 1)e^{-x^2}}{(2x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - F(x)}{F'(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 2x - 1) - (x + 1)(4x + 2)}{(2x^2 + 2x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 4x - 3}{4x^4 + 8x^3 - 4x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.4.4 temos F é uma função de von Mises. Pelo Teorema 2.4.9 temos que $F \in D_{max}(\Lambda)$ e podemos escolher as constantes de normalização por $b_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ e $a_n = f(b_n)$. Mas, temos que

$$\begin{aligned} F^{\leftarrow}(1 - 1/n) &= \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\} \\ &= \inf\{x : (x+1)e^{-x^2} \leq \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Portanto, para obter b_n devemos resolver a equação $(x+1)e^{-x^2} \leq \frac{1}{n}$, o que não é uma tarefa fácil.

Neste sentido, para o caso $r(F) = +\infty$, Villaseñor [23] obteve uma caracterização alternativa do $D_{max}(\Lambda)$ e uma escolha das sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, cujos resultados apresentamos a seguir.

Teorema 2.4.17 *Seja F uma função de distribuição com $r(F) = \infty$. $F \in D_{max}(\Lambda)$ com*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta e^{x^\alpha} (1 - F(x)) = c, \quad 0 < c < \infty, \quad (2.27)$$

para certas constantes reais $\alpha > 0$ e β . Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$a_n = (\alpha \{\log(nc)\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}})^{-1}$$

e

$$b_n = (\log(nc))^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\beta \log(\log(nc))}{\alpha^2 (\log(nc))^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Demonstração: Vide [23]. ■

Corolário 2.4.18 *Seja F uma função de distribuição com $r(F) = \infty$. Então $F \in D_{max}(\Lambda)$ com (2.26) se, e somente se,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx + \ell)^\beta e^{kx^\alpha + \ell} (1 - F(x)) = b, \quad 0 < b < \infty \quad (2.28)$$

para certas constantes reais $\alpha > 0, k > 0, \beta, \ell$. Neste caso, as constantes de normalização podem ser escolhidas por

$$a_n = (\alpha k (\log(nb))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}})^{-1}$$

e

$$b_n = \frac{(\log(nb))^{\frac{1}{\alpha}}}{k} - \frac{\beta \log(\log(nb))}{\alpha^2 k (\log(nb))^{(\alpha-1)/\alpha}} - \frac{\ell}{k}.$$

Demonstração: Vide [23]. ■

Exemplo 2.4.19 (Parte 2) Para a f.d. F dada por (2.25), $F(x) = 1 - (x+1)e^{-x^2}$, para $x \geq 1$. Logo, escolhendo $\alpha = 2$ e $\beta = -1$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta e^{x^\alpha} (1 - F(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

Assim (2.27) do Teorema 2.4.17 é satisfeita com $\alpha = 2, \beta = -1$ e $c = 1$. Logo $F \in D_{max}(\Lambda)$ e as constantes de normalização podem ser escolhidas por

$$a_n = \frac{1}{2}(\log n)^{-1/2} \quad e \quad b_n = (\log n)^{1/2} + \frac{\log(\log n)}{4(\log n)^{1/2}}.$$

No próximo exemplo, aplicamos o Corolário 2.4.18 para verificar que a distribuição Gama pertence a $D_{max}(\Lambda)$, calculando as respectivas constantes de normalização.

Exemplo 2.4.20 Seja F a f.d. Gama(ν, γ), com $\nu \in \mathbb{N}, \nu > 0, \gamma > 0$, cuja densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^{\nu-1} e^{-x/\gamma}}{\gamma^\nu \Gamma(\nu)} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como ν é inteiro positivo, temos que $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$, e para determinar

$$F(x) = \frac{1}{\gamma^\nu (\nu-1)!} \int_0^x y^{\nu-1} e^{-y/\gamma} dy$$

aplicamos o método de integração por partes $\nu-1$ vezes na integral de acima e obtemos

$$F(x) = -\frac{\gamma^{1-\nu}}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-x/\gamma} - \frac{\gamma^{2-\nu}}{(\nu-2)!} x^{\nu-2} e^{-x/\gamma} - \dots - \frac{\gamma^{-2}}{2!} x^2 e^{-x/\gamma} - e^{-x/\gamma} + 1. \quad (2.29)$$

Para verificar a condição (2.28) do Corolário 2.4.18, fatoramos o termo $\frac{x^{\nu-1} e^{-x/\gamma}}{\gamma^{\nu-1} (\nu-1)!}$ em (2.29) para obter

$$1 - F(x) = \frac{x^{\nu-1} e^{-x/\gamma}}{\gamma^{\nu-1} (\nu-1)!} \left[1 + \frac{(\nu-1)\gamma}{x} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)\gamma^2}{x^2} + \dots + \frac{(\nu-1)! \gamma^{\nu-1}}{x^{\nu-1}} \right].$$

Logo

$$\frac{1}{\gamma} x^{1-\nu} e^{x/\gamma} (1 - F(x)) = \frac{1}{\gamma^\nu (\nu - 1)!} \left[1 + \frac{(\nu - 1)\gamma}{x} + \dots + \frac{(\nu - 1)! \gamma^{\nu-1}}{x^{\nu-1}} \right]$$

e assim

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} x^{1-\nu} e^{x/\gamma} \{1 - F(x)\} = \frac{1}{\gamma^\nu (\nu - 1)!} > 0.$$

Portanto, (2.28) é satisfeita com $k = 1/\gamma$, $\ell = 0$, $\beta = 1 - \nu$, $\alpha = 1$, $b = \frac{1}{\gamma^\nu (\nu - 1)!}$ e pelo Corolário 2.4.18, $F \in D_{\max}(\Lambda)$ e as constantes de normalização são dadas por

$$a_n = \gamma \quad e \quad b_n = \gamma \log(n/\gamma^\nu (\nu - 1)!) + \gamma(\nu - 1) \log(\log(n/\gamma^\nu (\nu - 1)!)).$$

Capítulo 3

Convolução de funções de distribuição pertencentes aos max-domínios de atração

Este capítulo é a parte central do trabalho. Aqui estudamos o max-domínio de atração da convolução de duas funções de distribuição atraídas por um dos três tipos de distribuições max-estáveis: Fréchet (Φ_α), Weibull (Ψ_α) e Gumbel (Λ).

Basicamente, discutimos os dois problemas (P1) e (P2) enunciados na Introdução desta dissertação, considerando separadamente os três casos possíveis.

Na Seção 3.1 analisamos o caso em que a convolução pertence ao max-domínio de atração da distribuição de Fréchet. O caso do max-domínio de atração da Weibull é estudado na Seção 3.2 e na Seção 3.3 discutimos o caso do max-domínio de atração da Gumbel.

A principal referência deste capítulo é Sreehari *et. al* [20].

3.1 Caso Fréchet

Primeiramente, nesta seção, consideramos o problema (P1), apresentado na Introdução, para o caso em que temos $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ ou $F_2 \in D_{max}(\Phi_\beta)$ e procuramos condições sob as quais $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\gamma)$ para algum $\gamma > 0$.

No primeiro teorema, que pode ser encontrado em Feller [6] ou Embrechts *et. al* [5] (Lema 1.3.1, pág. 37), consideramos o caso $\alpha = \beta$, com $F_i \in D_{max}(\Phi_\alpha), i = 1, 2$.

Teorema 3.1.1 *Se F_1 e F_2 são funções de distribuição tais que $F_i \in D_{max}(\Phi_\alpha), i = 1, 2$ então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.*

Demonstração: Para a demonstração do teorema utilizamos a caracterização do max-domínio de atração da distribuição de Fréchet dada no Teorema 2.2.3. Assim, como por hipótese $F_i \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, segue do Teorema 2.2.3 que $r(F_i) = +\infty$ e $\overline{F}_i = 1 - F_i \in RV_{-\alpha}, i = 1, 2$.

Agora, pelo Lema 1.3.4 temos que $r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2)$ e, assim, $r(F_1 * F_2) = +\infty$.

Resta provar que $\overline{F_1 * F_2} \in RV_{-\alpha}$. Para isso, basta provar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t) + \overline{F_2}(t)} = 1. \quad (3.1)$$

Pois, como $\overline{F}_i \in RV_{-\alpha}, i = 1, 2$, segue da Proposição 1.2.3 (iv) que $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 \in RV_{-\alpha}$, e assim, por (3.1) e pela Proposição 1.2.3 (iii) concluimos que $\overline{F_1 * F_2} \in RV_{-\alpha}$.

Para provar (3.1), consideramos X e Y variáveis aleatórias independentes com função de distribuição F_1 e F_2 respectivamente. Por um lado, sejam $t, \delta > 0$ e $t' = (1 + \delta)t$, então temos

$$(X > t', Y > -\delta t) \cup (X > -\delta t, Y > t') \subseteq (X + Y > t)$$

e podemos obter

$$P(X + Y > t) \geq P(X > t', Y > -\delta t) + P(X > -\delta t, Y > t') - P(X > t', X > -\delta t, Y > t', Y > -\delta t).$$

Agora, como X e Y são independentes, $(X > t', X > -\delta t) \subset (X > t')$ e $(Y > t', Y > -\delta t) \subset (Y > t')$, segue que

$$P(X + Y > t) \geq P(X > t')P(Y > -\delta t) + P(X > -\delta t)P(Y > t') - P(X > t')P(Y > t').$$

Ou seja,

$$\overline{F_1 * F_2}(t) \geq \overline{F_1}(t')\overline{F_2}(-\delta t) + \overline{F_1}(-\delta t)\overline{F_2}(t') - \overline{F_1}(t')\overline{F_2}(t'). \quad (3.2)$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F_1}(t')\overline{F_2}(t') = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F}_i(-\delta t) = 1$, então dado $\epsilon > 0$, existe t_0 tal que para todo $t > t_0$,

$$-\epsilon < \overline{F_1}(t')\overline{F_2}(t') < \epsilon \quad \text{e} \quad 1 - \epsilon < \overline{F}_i(-\delta t) < 1 + \epsilon.$$

Assim, de (3.2) segue que para $t > t_0$,

$$\begin{aligned}\overline{F_1 * F_2}(t) &\geq \overline{F_1}(t')(1 - \epsilon) + \overline{F_2}(t')(1 - \epsilon) - \epsilon \\ &= (\overline{F_1}(t') + \overline{F_2}(t'))(1 - \epsilon) - \epsilon.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Por outro lado, fazendo $t'' = (1 - \delta)t$, com $0 < \delta < 1/2$, do Lema 1.3.1 temos

$$\overline{F_1 * F_2}(t) \leq \overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'') + \overline{F_1}(\delta t)\overline{F_2}(\delta t).\quad (3.4)$$

Agora, como por hipótese temos que $\overline{F_i} \in RV_{-\alpha}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F_i}(\delta t) = 0, i = 1, 2$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(\delta t)\overline{F_2}(\delta t)}{\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')}{\overline{F_1}(\delta t)\overline{F_2}(\delta t)} \right)^{-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\overline{F_1}(t(1-\delta))}{\overline{F_1}(t)}}{\frac{\overline{F_1}(\delta t)}{\overline{F_1}(t)}} \cdot \frac{1}{\overline{F_2}(\delta t)} + \frac{\frac{\overline{F_2}(t(1-\delta))}{\overline{F_2}(t)}}{\frac{\overline{F_2}(\delta t)}{\overline{F_2}(t)}} \cdot \frac{1}{\overline{F_1}(\delta t)} \right)^{-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim da definição de limite temos que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe t_1 tal que se $t > t_1$ temos

$$-\epsilon[\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')] < \overline{F_1}(\delta t)\overline{F_2}(\delta t) < \epsilon[\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')].$$

Então, usando a desigualdade a direita em (3.4), obtemos

$$\overline{F_1 * F_2}(t) \leq (1 + \epsilon)(\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')).\quad (3.5)$$

Das desigualdades (3.3) e (3.5), tomando $t^* = \max\{t_1, t_2\}$, temos

$$(1 - \epsilon)(\overline{F_1}(t') + \overline{F_2}(t')) \leq \overline{F_1 * F_2}(t) \leq (1 + \epsilon)(\overline{F_1}(t'') + \overline{F_2}(t'')), \quad \forall t > t^*.$$

Fazendo $\delta, \epsilon \rightarrow 0$ (logo $t' \rightarrow t$ e $t'' \rightarrow t$) obtemos (3.1) e da Proposição 1.2.3 (iii) e (iv), segue que $\overline{F_1 * F_2} \in RV_{-\alpha}$. ■

O teorema a seguir é devido à Sreehari *et. al* [20] e considera o caso em que $\alpha < \beta$, com $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e $F_2 \in D_{max}(\Phi_\beta)$.

Teorema 3.1.2 *Se F_1 e F_2 são funções de distribuição tais que $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e $F_2 \in D_{max}(\Phi_\beta)$, com $0 < \alpha < \beta$ então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, ou seja, $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_{\min\{\alpha, \beta\}})$.*

Demonstração: Analogamente à prova do Teorema 3.1.1, usaremos a caracterização do max-domínio de atração da distribuição de Fréchet dada no Teorema 2.2.3. Assim, das hipóteses iniciais segue que do Teorema 2.2.3 que $r(F_i) = +\infty, i = 1, 2, \overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e $\overline{F_2} \in RV_{-\beta}$.

Pelo Lema 1.3.4 temos que $r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2) = +\infty$. Então resta provar que $\overline{F_1 * F_2} \in RV_{-\alpha}$. Para isto, seja $\epsilon > 0$ dado e sejam $t, x > 0$. Por facilidade, denotemos $G = F_1 * F_2$. Por um lado, segue do Lema 1.3.1 que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} &\leq \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon)) + \overline{F_2}(tx(1-\epsilon)) + \overline{F_1}(tx\epsilon)\overline{F_2}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))[\overline{F_2}(-t\epsilon) - \overline{F_2}(t\epsilon)] + \overline{F_2}(t(1+\epsilon))[\overline{F_1}(-t\epsilon) - \overline{F_1}(t\epsilon)]} \\ &= \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} \cdot \frac{\left[1 + \frac{\overline{F_2}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} + \frac{\overline{F_1}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} \cdot \overline{F_2}(tx\epsilon)\right]}{\left[\overline{F_2}(-t\epsilon) - \overline{F_2}(t\epsilon)] + \frac{\overline{F_2}(t(1+\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))}[\overline{F_1}(-t\epsilon) - \overline{F_1}(t\epsilon)]\right]}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, como $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}\left(\frac{x(1-\epsilon)}{1+\epsilon}t(1+\epsilon)\right)}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} = \left(\frac{x(1-\epsilon)}{1+\epsilon}\right)^{-\alpha} \quad (3.7)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}\left(tx(1-\epsilon)\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} = \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{-\alpha}. \quad (3.8)$$

Além disso, como $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e $\overline{F_2} \in RV_{-\beta}$, temos pela Proposição 1.2.3 (iv) que $\frac{\overline{F_2}}{\overline{F_1}} \in RV_{\alpha-\beta}$. Como $\alpha < \beta$, segue do Corolário 1.2.6 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 0. \quad (3.9)$$

Assim, usando (3.7), (3.8), (3.9) e os fatos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F_2}(tx\epsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [\overline{F_i}(-t\epsilon) - \overline{F_i}(t\epsilon)] = 1$$

segue de (3.6) que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \leq \left(\frac{x(1-\epsilon)}{1+\epsilon}\right)^{-\alpha}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, do Lema 1.3.1, também temos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} &\geq \frac{\overline{F}_1(tx(1+\epsilon))[\overline{F}_2(-tx\epsilon) - \overline{F}_2(tx\epsilon)] + \overline{F}_2(tx(1+\epsilon))[\overline{F}_1(-tx\epsilon) - \overline{F}_1(tx\epsilon)]}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon)) + \overline{F}_2(t(1-\epsilon)) + \overline{F}_1(t\epsilon)\overline{F}_2(t\epsilon)} \\ &= \frac{\overline{F}_1(tx(1+\epsilon))}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} \cdot \frac{\left[\overline{F}_2(-tx\epsilon) - \overline{F}_2(tx\epsilon) \right] + \frac{\overline{F}_2(tx(1+\epsilon))}{\overline{F}_1(tx(1+\epsilon))} [\overline{F}_1(-tx\epsilon) - \overline{F}_1(tx\epsilon)]}{\left[1 + \frac{\overline{F}_2(t(1-\epsilon))}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} + \frac{\overline{F}_1(t\epsilon)}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} \cdot \overline{F}_2(t\epsilon) \right]}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando os mesmos argumentos utilizados anteriormente, podemos obter que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(tx(1+\epsilon))}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\left(\frac{x(1+\epsilon)}{1-\epsilon}t(1-\epsilon)\right)}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} = \left(\frac{x(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\right)^{-\alpha}, \quad (3.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(t\epsilon)}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\left(t(1-\epsilon)\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)}{\overline{F}_1(t(1-\epsilon))} = \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{-\alpha}, \quad (3.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_2(t)}{\overline{F}_1(t)} = 0, \quad (3.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F}_2(t\epsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [\overline{F}_i(-t\epsilon) - \overline{F}_i(t\epsilon)] = 1. \quad (3.15)$$

Logo, usando (3.12) à (3.15) em (3.11) obtemos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \geq \left(\frac{x(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\right)^{-\alpha}. \quad (3.16)$$

Assim, de (3.10) e (3.16) temos

$$\left(\frac{x(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\right)^{-\alpha} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \leq \left(\frac{x(1-\epsilon)}{1+\epsilon}\right)^{-\alpha}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} = x^{-\alpha},$$

ou seja, $\overline{F}_1 * \overline{F}_2 \in RV_{-\alpha}$, como queríamos. ■

Observação 3.1.3 Note que se $F_1 = F_2 = \Phi_\alpha$, então do teorema anterior segue que

$$F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha).$$

A próxima proposição é uma consequência do Lema 1.3.5.

Proposição 3.1.4 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e o suporte de F_2 está em $(0, \infty)$. Se a cauda de F_1 domina a cauda de F_2 , então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.*

Demonstração: Como $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, do Teorema 2.2.3 segue que $r(F_1) = +\infty$ e $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$.

Assim, como $r(F_1) = \infty$, do Lema 1.3.4 temos $r(F_1 * F_2) = r(F_1) + r(F_2) = +\infty$. Agora, como $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e F_1 domina a cauda de F_2 , ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 0$, segue do Lema 1.3.5 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 1.$$

Logo, como $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$, então para todo $x > 0$ podemos obter

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(tx)}{\overline{F_1 * F_2}(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{F_1 * F_2}(tx)}{\overline{F_1}(tx)} \cdot \frac{\overline{F_1}(tx)}{\overline{F_1}(t)} \cdot \left(\frac{\overline{F_1 * F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} \right)^{-1} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(tx)}{\overline{F_1}(t)} = x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{F_1 * F_2} \in RV_{-\alpha}$, como queríamos. ■

Na Proposição 3.1.4, note que F_1 pode pertencer ao $D_{max}(\Psi_\beta)$ para algum $\beta > 0$ ou $D_{max}(\Lambda)$.

Corolário 3.1.5 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e o suporte de F_2 está em $(0, \infty)$. Se $r(F_2) < \infty$, então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.*

Demonstração: Como $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, então pelo Teorema 2.2.3, temos que $r(F_1) = \infty$. Pela hipótese $r(F_2) < \infty$, temos $F_2(x) = 1$, para todo $x > r(F_2)$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, considerando $x_0 = r(F_2) + \epsilon > 0$, temos que $F_1(x) < 1$ e $F_2(x) = 1$ para todo $x > x_0$. Logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)} = 0$$

e da Proposição 3.1.4 segue que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. ■

Observação 3.1.6 Com a hipótese adicional que o suporte de F_2 está em $(0, +\infty)$, podemos obter uma prova alternativa mais simples do Teorema 3.1.2. De fato, usando o Teorema 2.2.3 temos que $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e $\overline{F_2} \in RV_{-\beta}$. Assim da Proposição 1.2.3 (iv) temos que

$$\frac{\overline{F_2}}{\overline{F_1}} \in RV_{\alpha-\beta}$$

e como $\alpha < \beta$, do Corolário 1.2.6 segue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(t)}{\overline{F_1}(t)} = 0.$$

Isto é, a cauda de F_1 domina a cauda de F_2 , e como o suporte de F_2 está em $(0, +\infty)$ pela Proposição 3.1.4 concluímos que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Nesta segunda parte da seção, abordamos o problema (P2) apresentado na Introdução para o caso Fréchet, ou seja, se $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ implica que ou $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ ou $F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.

No exemplo a seguir, mostramos que podemos ter $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ e ambas F_1 e F_2 não pertencer à $D_{max}(\Phi_\alpha)$. Ou seja, necessitamos de condições adicionais para que a implicação anterior seja verdadeira.

Exemplo 3.1.7 Sejam as funções de distribuição F_1 e F_2 dadas por

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log x)\right) & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log x)\right) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i) Primeiramente mostramos que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.

De fato, seja $G = F_1 * F_2$. Usando o Lema 1.3.1, dado $\epsilon > 0$, para x suficientemente grande tal que $\epsilon x > 1$, temos

$$\overline{G}(x) \geq \overline{F_1}(x(1+\epsilon))[F_2(x\epsilon) - F_2(-x\epsilon)] + \overline{F_2}(x(1+\epsilon))[F_1(x\epsilon) - F_1(-x\epsilon)]. \quad (3.17)$$

Como $\epsilon x > 1$ então $F_i(-x\epsilon) = 0, i = 1, 2$. Então substituindo as expressões de F_1 e F_2 em (3.17) obtemos

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &\geq \\ &\frac{1}{[x(1+\epsilon)]^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(x(1+\epsilon)))\right) \left(1 - \frac{1}{(x\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right)\right) \\ &+ \frac{1}{[x(1+\epsilon)]^{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(x(1+\epsilon)))\right) \left(1 - \frac{1}{(x\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right)\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{2}}\overline{G}(x) &\geq \\ &\frac{1}{(1+\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left[\left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(x(1+\epsilon)))\right) \left(1 - \frac{1}{(x\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right)\right) \right] + \\ &\frac{1}{(1+\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left[\left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(x(1+\epsilon)))\right) \left(1 - \frac{1}{(x\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(x\epsilon)^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right)\right) = 1,$$

segue que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}}\overline{G}(x) \geq \frac{2}{(1+\epsilon)^{\sqrt{2}}}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}}\overline{G}(x) \geq 2. \quad (3.18)$$

Por outro lado, também do Lema 1.3.1, para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &\leq [\overline{F}_1(x(1-\epsilon))] + [\overline{F}_2(x(1-\epsilon))] + \overline{F}_1(x\epsilon)\overline{F}_2(x\epsilon) \\ &= \frac{1}{[x(1-\epsilon)]^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log((1-\epsilon)x)) + 1 - \frac{1}{12} \sin(\log((1-\epsilon)x))\right) \\ &+ \frac{1}{(\epsilon x)^{\sqrt{2}}(\epsilon x)^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right) \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$x^{\sqrt{2}}\overline{G}(x) \leq \frac{2}{(1-\epsilon)^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\epsilon^{\sqrt{2}}}(\epsilon x)^{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right) \left(1 - \frac{1}{12} \sin(\log(\epsilon x))\right).$$

Como o limite do segundo termo da soma na direita da desigualdade é zero temos

que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}} \overline{G}(x) \leq \frac{2}{(1 - \epsilon)^{\sqrt{2}}}$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}} \overline{G}(x) \leq 2. \quad (3.19)$$

Portanto de (3.18) e (3.19) temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}} \overline{G}(x) = 2$$

e daí segue que $\overline{G} \in RV_{-\sqrt{2}}$.

ii) Temos que $F_i \notin D_{max}(\Phi_\alpha)$, para nenhum $\alpha > 0$.

De fato, verificaremos que F_1 não é regularmente variante. Analogamente podemos mostrar para F_2 .

Para $x = e^\pi > 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}_1(tx)}{\overline{F}_1(t)} &= \frac{\frac{1}{(tx)^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log(tx)) \right)}{\frac{1}{t^{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{12} \sin(\log t) \right)} \\ &= (e^\pi)^{-\sqrt{2}} \frac{12 + \sin(\log t + \pi)}{12 + \sin(\log t)} \\ &= (e^\pi)^{-\sqrt{2}} \frac{12 - \sin(\log t)}{12 + \sin(\log t)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mas, por um lado, se considerarmos a sequência $t_n = \exp(\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1))$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - \sin(\log t_n)}{12 + \sin(\log t_n)} = \frac{11}{13}$$

e por outro lado se considerarmos a sequência $t_n = \exp(\frac{3\pi}{2} + 2\pi(n-1))$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - \sin(\log t_n)}{12 + \sin(\log t_n)} = \frac{13}{11}.$$

Portanto, concluímos que o limite quando $t \rightarrow \infty$ em (3.20) não existe e F_1 não é regularmente variante.

Finalmente, apresentamos no teorema e corolário a seguir, as condições suficientes obtidas por Sreehari, M. et. al [20] para que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ implique em $F_i \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ para $i = 1$ ou $i = 2$.

Teorema 3.1.8 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. Se $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$ e são satisfeitos os limites*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)} = A, 0 < A < \infty \quad (3.21)$$

e

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(x\theta)}{\overline{F_1}(x)} < \infty, \forall 0 < \theta < 1. \quad (3.22)$$

Então $F_i \in D_{max}(\Phi_\alpha)$ para $i = 1, 2$.

Demonstração: Por facilidade, denotemos $G = F_1 * F_2$. Como $G \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, do Teorema 2.2.3 segue que $r(G) = +\infty$ e $\overline{G} \in RV_{-\alpha}$.

Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ dado. Então do Lema 1.3.1 segue que para todo $t > 0$ e $x > 0$ temos que

$$\frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \leq \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon)) + \overline{F_2}(tx(1-\epsilon)) + \overline{F_1}(tx\epsilon)\overline{F_2}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))[\overline{F_2}(-t\epsilon) - \overline{F_2}(t\epsilon)] + \overline{F_2}(t(1+\epsilon))[\overline{F_1}(-t\epsilon) - \overline{F_1}(t\epsilon)]}$$

ou ainda

$$\frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \leq \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} \frac{\left[1 + \frac{\overline{F_2}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} + \frac{\overline{F_1}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} \overline{F_2}(tx\epsilon) \right]}{\left[\overline{F_2}(-t\epsilon) - \overline{F_2}(t\epsilon) \right] + \frac{\overline{F_2}(t(1+\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} [\overline{F_1}(-t\epsilon) - \overline{F_1}(t\epsilon)]}. \quad (3.23)$$

Mas, para $x > 0$ e $0 < \epsilon < 1/2$ temos que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(tx\epsilon)}{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))} \overline{F_2}(tx\epsilon) = 0, \quad (3.24)$$

pois $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F_2}(tx\epsilon) = 0$ e para $0 < \epsilon < 1/2$ e $x > 0$ temos $\overline{F_1}(tx\epsilon) \geq \overline{F_1}(tx(1-\epsilon))$.

Além disso, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F_i}(-t\epsilon) - \overline{F_i}(t\epsilon) = 1. \quad (3.25)$$

Então, usando (3.21), (3.24), (3.25) e o fato que $\overline{G} \in RV_{-\alpha}$ podemos obter de (3.23) que, para todo $x > 0$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(tx(1-\epsilon))}{\overline{F_1}(t(1+\epsilon))} \geq x^{-\alpha} \quad (3.26)$$

Para todo $y > 0$, fazendo $x = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} y$ de (3.26) segue

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(ty)}{\overline{F}_1(t)} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\left(\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}xt\right)}{\overline{F}_1(t)} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\left((1 - \epsilon)x \frac{t}{1 + \epsilon}\right)}{\overline{F}_1\left((1 + \epsilon)\frac{t}{1 + \epsilon}\right)} \\ &\geq x^{-\alpha} = \left(\frac{y(1 + \epsilon)}{1 - \epsilon}\right)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos para $y > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(ty)}{\overline{F}_1(t)} \geq y^{-\alpha}. \quad (3.28)$$

Por outro lado, pelo Lema 1.3.1 também temos para $x, t > 0$ que

$$\frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \geq \frac{\overline{F}_1(tx(1 + \epsilon))[\overline{F}_2(-tx\epsilon) - \overline{F}_2(tx\epsilon)] + \overline{F}_2(tx(1 + \epsilon))[\overline{F}_1(-tx\epsilon) - \overline{F}_1(tx\epsilon)]}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon)) + \overline{F}_2(t(1 - \epsilon)) + \overline{F}_1(t\epsilon)\overline{F}_2(t\epsilon)},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{G}(tx)}{\overline{G}(t)} \geq \frac{\overline{F}_1(tx(1 + \epsilon)) \left[\overline{F}_2(-tx\epsilon) - \overline{F}_2(tx\epsilon) + \frac{\overline{F}_2(tx(1 + \epsilon))}{\overline{F}_1(tx(1 + \epsilon))} [\overline{F}_1(-tx\epsilon) - \overline{F}_1(tx\epsilon)] \right]}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon)) \left[1 + \frac{\overline{F}_2(t(1 - \epsilon))}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon))} + \frac{\overline{F}_1(t\epsilon)}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon))} \overline{F}_2(t\epsilon) \right]}. \quad (3.29)$$

Agora, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{F}_2(t\epsilon) = 0$, de (3.22) segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(t\epsilon)}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon))} \overline{F}_2(t\epsilon) = 0. \quad (3.30)$$

Então, usando (3.25) com $x\epsilon$ no lugar de ϵ , (3.30), (3.21) e $\overline{G} \in RV_{-\alpha}$, podemos obter de (3.29) que, para todo $x > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(tx(1 + \epsilon))}{\overline{F}_1(t(1 - \epsilon))} \leq x^{-\alpha}.$$

Analogamente ao raciocínio utilizado para obter (3.28) a partir de (3.27) podemos obter para $y > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1(ty)}{\overline{F}_1(t)} \leq \left(\frac{y(1 - \epsilon)}{1 + \epsilon}\right)^{-\alpha}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos para $y > 0$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(ty)}{\overline{F_1}(t)} \leq y^{-\alpha}. \quad (3.31)$$

Portanto, das equações (3.28) e (3.31) segue que, para $y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(ty)}{\overline{F_1}(t)} = y^{-\alpha}.$$

Isto é, $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e como pela hipótese $r(F_1) = +\infty$, usando o Teorema 2.2.3, obtemos que $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.

Finalmente, da hipótese (3.21) temos que F_1 e F_2 são cauda-equivalentes e como $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$, segue da Proposição 1.2.4 que $F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. Como por hipótese $r(F_2) = +\infty$, segue que $F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. ■

Corolário 3.1.9 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. Então*

(i) *Se $r(F_1) = +\infty$ e $r(F_2) < \infty$ então $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.*

(ii) *Se $r(F_2) = +\infty$ e $r(F_1) < \infty$ então $F_2 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$.*

Demonstração: Basta provar (i), pois (ii) segue analogamente trocando-se F_1 por F_2 e vice-versa, já que $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$.

Como $r(F_2) < +\infty$, usando os mesmos argumentos utilizados no início da demonstração do Corolário 3.1.5 podemos obter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)} = 0,$$

ou seja, obtemos (3.21) com $A = 0$. Agora segundo os mesmo passos da primeira parte da prova do Teorema 3.1.8, podemos obter que para $y > 0$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(ty)}{\overline{F_1}(t)} \geq y^{-\alpha}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, como $r(F_2) = +\infty$, então para t suficientemente grande $\overline{F_2}(tx\epsilon) = 0$ para $x > 0$ e $\epsilon > 0$.

Assim, podemos repetir os mesmos argumentos da prova de (3.31) na demonstração do Teorema 3.1.8, sem a necessidade da hipótese (3.22), pois como $\overline{F_2}(tx\epsilon) = 0$ para t

suficientemente grande e $x, \epsilon > 0$ temos em (3.29) que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(t\epsilon)}{\overline{F_1}(t(1-\epsilon))} \overline{F_2}(t\epsilon) = 0$, no lugar de (3.30). Portanto, podemos concluir analogamente que para $y > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1}(ty)}{\overline{F_1}(t)} \leq y^{-\alpha}. \quad (3.33)$$

Portanto das equações (3.32) e (3.33) temos que $\overline{F_1} \in RV_{-\alpha}$ e da hipótese $r(F_1) = \infty$, segue do Teorema 2.2.3 que $F_1 \in D_{max}(\Phi_\alpha)$. ■

Observação 3.1.10 *Note que em (i) (ou (ii)) no Corolário 3.1.9 temos que como $r(F_2) < +\infty$ (respectivamente $r(F_1) < +\infty$) então necessariamente $F_2 \notin D_{max}(\Phi_\alpha)$ (respectivamente $F_1 \notin D_{max}(\Phi_\alpha)$) podendo ter $F_2 \in D_{max}(\Psi_\delta)$, para algum $\delta > 0$ ou $F_2 \in D_{max}(\Lambda)$ (respectivamente $F_1 \in D_{max}(\Psi_\delta)$ ou $F_1 \in D_{max}(\Lambda)$).*

3.2 Caso Weibull

Nesta seção abordamos os dois problemas em estudo neste capítulo, no caso do max-domínio de atração da distribuição Weibull, Ψ_α , apresentando os resultados obtidos por Sreehari *et. al* [20].

Iniciamos com o teorema que estabelece que a convolução de duas funções de distribuição pertencentes aos max-domínios de atração de Ψ_{α_1} e Ψ_{α_2} , respectivamente, pertence ao max-domínio de $\Psi_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Teorema 3.2.1 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$ e $F_2 \in D_{max}(\Psi_\beta)$, com $\alpha, \beta > 0$, então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_{\alpha+\beta})$.*

Demonstração: Seja $x > 0$. Defina

$$F_i^*(x) = F_i(r(F_i) - 1/x) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Como $F_1 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$ e $F_2 \in D_{max}(\Psi_\beta)$, então pelo Teorema 2.3.2 temos que $r(F_i) < \infty, i = 1, 2, \overline{F_1^*} \in RV_{-\alpha}$ e $\overline{F_2^*} \in RV_{-\beta}$. Sejam X_1 e X_2 v.a's independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente. Defina

$$Y_1 = r(F_1) - X_1 \quad \text{e} \quad Y_2 = r(F_2) - X_2.$$

Como $F_i(r(F_i)) = 1$ para $i = 1, 2$, então temos

$$P(Y_i \geq 0) = P(X_i \leq r(F_i)) = F_i(r(F_i)) = 1$$

e sendo X_1 e X_2 independentes segue que Y_1 e Y_2 também são.

Por facilidade, denotamos $G = F_1 * F_2$. Pelo Lema 1.3.4 temos que $r(G) = r(F_1) + r(F_2) < \infty$, pois $r(F_i) < +\infty, i = 1, 2$. Para mostrar que $G \in D_{max}(\Psi_{\alpha+\beta})$, pelo Teorema 2.3.2, basta mostrarmos $\overline{G^*} = 1 - G^*(x) = 1 - G(r(G) - 1/x), x > 0$ é regularmente variante com expoente $-(\alpha + \beta)$. Para isso, podemos escrever para todo $x > 0$

$$\begin{aligned} G^*(x) &= P(X_1 + X_2 \leq r(F_1) + r(F_2) - 1/x) \\ &= P((r(F_1) - X_1) + (r(F_2) - X_2) \geq 1/x) \\ &= P(Y_1 + Y_2 \geq 1/x) \end{aligned}$$

e

$$\overline{G^*}(x) = P(Y_1 + Y_2 < 1/x), \forall x > 0. \quad (3.34)$$

Agora como Y_1 e Y_2 são variáveis aleatórias independentes não negativas, do Lema 1.3.2 segue, para todo $\epsilon > 0$ que

$$\overline{G^*}(x) \leq P\left(Y_1 \leq \frac{1+\epsilon}{x}\right) \cdot P\left(Y_2 \leq \frac{1+\epsilon}{x}\right). \quad (3.35)$$

Mas, temos que

$$P\left(Y_i \leq \frac{1+\epsilon}{x}\right) = 1 - P\left(Y_i > \frac{1+\epsilon}{x}\right) = 1 - P\left(X_i < r(F_i) - \frac{1+\epsilon}{x}\right).$$

Então, substituindo em (3.35) obtemos

$$\overline{G^*}(x) \leq P\left(X_1 \geq r(F_1) - \frac{1+\epsilon}{x}\right) \cdot P\left(X_2 \geq r(F_2) - \frac{1+\epsilon}{x}\right). \quad (3.36)$$

Por outro lado, repetindo os mesmos argumentos usados no Lema 1.3.3, podemos obter para $0 < \epsilon < 1/2$ que

$$\begin{aligned} \overline{G^*}(x) &= P(Y_1 + Y_2 < 1/x) \\ &\geq P\left(Y_1 \leq \frac{1-\epsilon}{x}\right) P\left(Y_2 \leq \frac{1-\epsilon}{x}\right) - P\left(\frac{\epsilon}{x} < Y_1 < \frac{1-\epsilon}{x}\right) P\left(\frac{\epsilon}{x} < Y_2 < \frac{1-\epsilon}{x}\right) \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \overline{G^*}(x) &\geq \overline{F_1} \left(r(F_1) - \frac{1-\epsilon}{x} \right) \overline{F_2} \left(r(F_2) - \frac{1-\epsilon}{x} \right) - \\ &P \left(r(F_1) - \frac{1-\epsilon}{x} < X_1 < r(F_1) - \frac{\epsilon}{x} \right) P \left(r(F_2) - \frac{1-\epsilon}{x} < X_2 < r(F_2) - \frac{\epsilon}{x} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora, como $F_1 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$ e $F_2 \in D_{max}(\Psi_\beta)$ então pela Proposição 2.3.5 temos que para $i = 1, 2$, F_i é contínua em $r(F_i)$. Logo, temos para $i = 1, 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P \left(r(F_i) - \frac{1-\epsilon}{x} < X_i < r(F_i) - \frac{\epsilon}{x} \right) = 0 \quad (3.38)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P \left(X_i \geq r(F_i) - \frac{1+\epsilon}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} P \left(X_i > r(F_i) - \frac{1+\epsilon}{x} \right). \quad (3.39)$$

Assim de (3.36) à (3.39), obtemos por un lado

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{P \left(X_1 > r(F_1) - \frac{1+\epsilon}{tx} \right) \cdot P \left(X_2 > r(F_2) - \frac{1+\epsilon}{tx} \right)}{P \left(X_1 > r(F_1) - \frac{1-\epsilon}{t} \right) \cdot P \left(X_2 > r(F_2) - \frac{1-\epsilon}{t} \right)} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{tx}{1+\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{tx}{1+\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*} \left(\frac{t}{1-\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{t}{1-\epsilon} \right)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{P \left(X_1 > r(F_1) - \frac{1-\epsilon}{tx} \right) \cdot P \left(X_2 > r(F_2) - \frac{1-\epsilon}{tx} \right)}{P \left(X_1 > r(F_1) - \frac{1+\epsilon}{t} \right) \cdot P \left(X_2 > r(F_2) - \frac{1+\epsilon}{t} \right)} \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{tx}{1-\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{tx}{1-\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*} \left(\frac{t}{1+\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{t}{1+\epsilon} \right)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Fazendo $\tau = \frac{t}{1-\epsilon}$ em (3.40) e $\tau = \frac{t}{1+\epsilon}$ em (3.41) segue que quando $t \rightarrow \infty$ então $\tau \rightarrow \infty$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \leq \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{x\tau(1-\epsilon)}{1+\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{x\tau(1-\epsilon)}{1+\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*}(\tau) \overline{F_2^*}(\tau)},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \geq \liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{x\tau(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{x\tau(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*}(\tau) \overline{F_2^*}(\tau)}.$$

Agora, como $\overline{F_1^*} \in RV_{-\alpha}$ e $\overline{F_2^*} \in RV_{-\beta}$, segue

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \leq \left(\frac{x(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} \right)^{-\alpha} \left(\frac{x(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} \right)^{-\beta} = \left(\frac{x(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} \right)^{-(\alpha+\beta)}$$

e

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \geq \left(\frac{x(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right)^{-\alpha} \left(\frac{x(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right)^{-\beta} = \left(\frac{x(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} \right)^{-(\alpha+\beta)}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos, $\forall x > 0$

$$x^{-(\alpha+\beta)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \leq x^{-(\alpha+\beta)},$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} = x^{-(\alpha+\beta)}. \forall x > 0.$$

Assim, $\overline{G^*} \in RV_{-(\alpha+\beta)}$ e como $r(F_1 * F_2) < \infty$ segue que $G = F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_{\alpha+\beta})$. ■

Observação 3.2.2 *Do Teorema 3.2.1 podemos concluir que se $F_1 = F_2 = \Psi_\alpha$ então $\Psi_\alpha * \Psi_\alpha \in D_{max}(\Psi_{2\alpha})$.*

No que se refere ao problema recíproco, ou seja, se temos $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, então sob quais condições podemos ter $F_i \in D_{max}(\Psi_{\beta_i})$ com $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, Sreehari *et. al* [20] observaram que não é válida a recíproca de Teorema 3.2.1, ao menos que se assuma que uma das classes das $F_i \in D_{max}(\Psi_{\beta_i})$, para algum $\beta_i > 0$.

De fato, se $G = F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$, então pelo Teorema 2.3.2 temos que $r(G) < +\infty$ e $\overline{G^*} \in RV_{-\alpha}$, com $G^* = G(r(G) - \frac{1}{x})$, $x > 0$. Como, pelo Lema 1.3.4, $r(G) = r(F_1) + r(F_2)$, segue que $r(F_i) < +\infty$, $i = 1, 2$. Agora, na tentativa de obter condições sob as quais $F_i \in D_{max}(\Psi_{\beta_i})$, $i = 1, 2$, com $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, Sreehari *et. al* [20] observaram que, seguindo os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.2.1, podemos obter das equações (3.36) à (3.39) que, para $0 < \epsilon < 1/2$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \leq \liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{x\tau(1-\epsilon)}{1+\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{x\tau(1-\epsilon)}{1+\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*}(\tau) \overline{F_2^*}(\tau)},$$

onde $\tau = \frac{t}{1-\epsilon}$ e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^*}(tx)}{\overline{G^*}(t)} \geq \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \left(\frac{x\tau(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \right) \overline{F_2^*} \left(\frac{x\tau(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \right)}{\overline{F_1^*}(\tau) \overline{F_2^*}(\tau)},$$

onde $\tau = \frac{t}{1+\epsilon}$. Então fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$x^{-\alpha} \leq \liminf_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\overline{F_1^*}(\tau x)}{\overline{F_1^*}(\tau)} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{F_2^*}(\tau x)}{\overline{F_2^*}(\tau)} \right\} \leq \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\overline{F_1^*}(\tau x)}{\overline{F_1^*}(\tau)} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{F_2^*}(\tau x)}{\overline{F_2^*}(\tau)} \right\} \leq x^{-\alpha},$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\overline{F_1^*}(tx)}{\overline{F_1^*}(t)} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{F_2^*}(tx)}{\overline{F_2^*}(t)} \right\} = x^{-\alpha}. \quad (3.42)$$

Assim, a primeira conclusão obtida a partir de (3.42) é enunciada na seguinte proposição.

Proposição 3.2.3 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição tais que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$. Então, se $\overline{F_1^*} \in RV_{-\beta}$, com $F_1^*(x) = F_1(r(F_1) - \frac{1}{x})$, $x > 0$, então $F_1 \in D_{max}(\Psi_\beta)$ e $F_2 \in D_{max}(\Psi_{\alpha - \beta})$.*

Agora, a equação (3.42) pode ser reescrita como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^*} \cdot \overline{F_2^*}(tx)}{\overline{F_1^*} \cdot \overline{F_2^*}(t)} = x^{-\alpha},$$

ou seja, $\overline{F_1^*} \cdot \overline{F_2^*} \in RV_{-\alpha}$. Assim, uma questão que se coloca é que se existem funções de distribuição F_1 e F_2 tais que $\overline{F_1^*}$ e $\overline{F_2^*}$ não sejam regularmente variantes mas o produto $\overline{F_1^*} \cdot \overline{F_2^*}$ seja. O exemplo a seguir, apresentado por Sreehari *et. al* [20], mostra que a resposta é afirmativa e assim podemos ter $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Psi_\alpha)$ e $F_i \notin D_{max}(\Psi_{\beta_i})$ para qualquer $\beta_i > 0, i = 1, 2$.

Exemplo 3.2.4 *Sejam as funções de distribuição F_1 e F_2 , dadas por*

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - (1-x)^{\alpha/3} \left(1 - \frac{1}{c} \sin(-\log(1-x)) \right) & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - (1-x)^{2\alpha/3} \left(\frac{c}{c - \sin(-\log(1-x))} \right) & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

onde $c > 1 + \frac{3}{\alpha}$ e $\alpha > 0$.

De imediato temos que $r(F_i) = 1$ para $i = 1, 2$. Assim as funções $F_i^*(x) = F_i(r(F_i) - \frac{1}{x})$, $x > 0$, $i = 1, 2$, podem ser descritas como

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x^{-\alpha/3} \left(1 - \frac{1}{c} \sin(\log x)\right) & \text{se } x \geq 1, \end{cases} \quad (3.43)$$

e

$$F_2^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x^{-2\alpha/3} \left(\frac{c}{c - \sin(\log x)}\right) & \text{se } x \geq 1, \end{cases} \quad (3.44)$$

Então facilmente segue que

$$\overline{F_1^*}(x) \cdot \overline{F_2^*}(x) = x^{-\alpha/3} x^{-2\alpha/3} = x^{-\alpha}, x \geq 1$$

e assim, $\overline{F_1^*} \cdot \overline{F_2^*} \in RV_{-\alpha}$.

Mostraremos que ambas $\overline{F_1^*}$ e $\overline{F_2^*}$ não são funções regularmente variantes. Iniciemos com $\overline{F_1^*}$. De (3.43) podemos obter

$$\frac{\overline{F_1^*}(tx)}{\overline{F_1^*}(t)} = x^{-\alpha/3} \left(\frac{c - \sin(\log t + \log x)}{c - \sin(\log t)} \right), \quad \forall x \geq 1.$$

Então, escolhendo $x = e^\pi$, como $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, podemos obter

$$\frac{\overline{F_1^*}(te^\pi)}{\overline{F_1^*}(t)} = (e^\pi)^{-\alpha/3} \left(\frac{c + \sin(\log t)}{c - \sin(\log t)} \right). \quad (3.45)$$

Mas o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c + \sin(\log t)}{c - \sin(\log t)}$ não existe, pois se escolhermos a sequência $t_n = \exp(\frac{\pi}{2} + 2\pi(n - 1))$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \sin(\log t_n)}{c - \sin(\log t_n)} = \frac{c + 1}{c - 1} \quad (3.46)$$

e se escolhermos outra sequência $t'_n = \exp(\frac{3\pi}{2} + 2\pi(n - 1))$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \sin(\log t'_n)}{c - \sin(\log t'_n)} = \frac{c - 1}{c + 1}. \quad (3.47)$$

Como $c > 0$, segue que os limites em (3.46) e (3.47) são distintos. Assim o limite em (3.45) não existe e podemos concluir que $\overline{F_1^*} \notin RV_\beta$ para qualquer $\beta > 0$.

Agora, para provar que $\overline{F_2^*}$ não é regularmente variante, obtemos de (3.44) que

$$\frac{\overline{F_2^*}(tx)}{\overline{F_2^*}(t)} = x^{-2\alpha/3} \left(\frac{c - \sin(\log t)}{c - \sin(\log tx)} \right).$$

Novamente, escolhendo $x = e^\pi$ e usando a regra de $\sin(a + b)$ descrita acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F_2^*}(te^\pi)}{\overline{F_2^*}(t)} &= (e^\pi)^{-2\alpha/3} \left(\frac{c - \sin(\log t)}{c - \sin(\log t + \log(e^\pi))} \right) \\ &= (e^\pi)^{-\alpha/3} \left(\frac{c - \sin(\log t)}{c + \sin(\log t)} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

e escolhendo as seqüências t_n e t'_n como anteriormente temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c - \sin(\log t_n)}{c + \sin(\log t_n)} = \frac{c - 1}{c + 1}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c - \sin(\log t'_n)}{c + \sin(\log t'_n)} = \frac{c + 1}{c - 1}.$$

Logo, como $c > 0$ segue que o limite quando $t \rightarrow \infty$ de (3.48) não existe e $\overline{F_2^*} \notin RV_{-\delta}$ para qualquer $\delta > 0$.

3.3 Caso Gumbel

Nesta última seção abordamos o caso de convolução de funções de distribuição pertencentes ao max-domínio de atração da função de distribuição Gumbel.

Iniciamos com o primeiro problema em análise: se $F_i \in D_{max}(\Lambda)$, $i = 1, 2$, sob quais condições teremos $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$?

Ao contrário dos casos estudados nas seções anteriores (Fréchet e Weibull), não existem na literatura resultados conclusivos para F_1 e F_2 gerais e apenas para F_1 ou F_2 em famílias de distribuições específicas fixadas. Por exemplo, Villaseñor [22], em 1981, considera F_1 a distribuição log-normal e F_2 a distribuição normal padrão, ambas no max-domínio de Λ , e prova que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$.

Nesta seção, consideramos o caso estudado por Sreehari *et. al* [20], em 2011, onde assume-se que F_1 é a distribuição *Gama*(ν, γ), com $\nu > 0, \nu \in \mathbb{Z}$, que, como vimos no exemplo 2.4.20, pertence ao $D_{max}(\Lambda)$, e procura-se condições sobre F_2 para as quais tem-se $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$.

Primeiramente, consideramos o caso em que $r(F_2) = +\infty$ e apresentamos os

resultados encontrados em Villaseñor [23]. Neste caso, o resultado que estabelece condições sobre F_2 tais que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$, com F_1 a f.d. $Gama(\nu, \gamma)$, $\nu > 0$, $\gamma > 0$, $\nu \in \mathbb{Z}$, segue como corolário do Teorema 3.3.2 que apresentamos a seguir. Primeiramente, apresentamos um lema que será útil para a prova do teorema em questão.

Lema 3.3.1 *Sejam F e G funções de distribuição com $r(F) = r(G) = +\infty$. Seja H uma distribuição limite extremal. Se $F \in D_{max}(H)$ e existe $a > 0$ e b constantes tais que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(ax + b)} = L, \text{ com } 0 < L < \infty, \quad (3.49)$$

então $G \in D_{max}(H)$.

Demonstração: Como $F \in D_{max}(H)$, então, por definição, existem sequências de constantes reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $a_n > 0$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x).$$

Como $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$, então dos Teoremas 2.1.4, 2.2.3 e 2.4.10 segue que H é do tipo Φ_α ou do tipo Λ .

Agora, defina a distribuição $F_*(x) = F(ax + b)$. Então, considerando $\alpha_n = \frac{a_n}{a}$ e $\beta_n = \frac{b_n - b}{a}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_*^n(\alpha_n x + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x),$$

ou seja, $F_* \in D_{max}(H)$. Então, da hipótese (3.49) segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_*}(x)}{\overline{G}(x)} = \frac{1}{L}, \quad 0 < L < \infty,$$

isto é, F_* e G são cauda-equivalentes. Como H é ou do tipo Φ_α ou do tipo Λ , segue das proposições 2.2.6 e 2.4.15, que $G \in D_{max}(H)$. ■

Teorema 3.3.2 *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição com $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$ e seja H uma distribuição limite extremal. Suponha $F_1 \in D_{max}(H)$, e que existem constantes $a, \alpha > 0, b, \beta$ e uma função de distribuição J com $r(J) = +\infty$ tal que*

$$\overline{F_1 * F_2}(x) = K \overline{F_1}(ax + b) J(\alpha x + \beta) + R(x), \quad (3.50)$$

com $0 < K < \infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{\overline{F_1}(ax + b)} = 0, \quad (3.51)$$

então $F_1 * F_2 \in D_{max}(H)$.

Demonstração: Como $r(F_1) = r(F_2) = +\infty$, então pelo Lema 1.3.4 tem $r(F_1 * F_2) = +\infty$. Logo, das equações (3.50) e (3.51) segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(x)}{\overline{F_1}(ax + b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K\{\overline{F_1}(ax + b)\}J(\alpha x + \beta) + R(x)}{\overline{F_1}(ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} KJ(\alpha x + \beta) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{\overline{F_1}(ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} KJ(\alpha x + \beta). \end{aligned}$$

Mas, como $\alpha > 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} J(\alpha x + \beta) = 1$, e assim, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(x)}{\overline{F_1}(ax + b)} = K,$$

onde $0 < K < \infty$. Disto e da hipótese do que $F_1 \in D_{max}(H)$, temos pelo Lema 3.3.1 que $F_1 * F_2 \in D_{max}(H)$. ■

Corolário 3.3.3 *Seja F_1 a função de distribuição Gama(ν, γ), com $\nu \in \mathbb{Z}, \nu > 0$, $\gamma > 0$. Se F_2 é uma função de distribuição com $r(F_2) = +\infty$ e com densidade f_2 tal que*

$$e^{x/\gamma} f_2(x) = K j(x), \quad (3.52)$$

onde $K > 0$ é constante e j é uma função densidade com $(\nu - 1)$ -ésimo momento finito, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^k j(y) dy < \infty, \quad \forall k \leq \nu - 1, \quad (3.53)$$

então

$$F_1 * F_2 \in D_{max}(A).$$

Demonstração: Do Exemplo 2.4.20 temos que

$$1 - F_1(x) = e^{-x/\gamma} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(x/\gamma)^l}{l!}. \quad (3.54)$$

Por outro lado, como $F_1(y) = 0$ para $y < 0$, podemos obter

$$\overline{F_1 * F_2}(x) = \int_{-\infty}^x [1 - F_1(x - y)] f_2(y) dy + (1 - F_2(x)). \quad (3.55)$$

Substituindo (3.54) na equação (3.55) obtemos

$$\overline{F_1 * F_2}(x) = e^{-x/\gamma} \int_{-\infty}^x \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(x-y)^l}{\gamma^l l!} e^{y/\gamma} f_2(y) dy + (1 - F_2(x)).$$

Das hipóteses (3.52) e (3.53) segue que

$$\overline{F_1 * F_2}(x) = K e^{-x/\gamma} \int_{-\infty}^x \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(x-y)^l}{\gamma^l l!} e^{y/\gamma} j(y) dy + (1 - F_2(x)). \quad (3.56)$$

Usando a expansão binomial

$$(x-y)^l = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} y^k,$$

e denotando por J a função distribuição com densidade j , obtemos

$$\begin{aligned} \overline{F_1 * F_2}(x) &= K e^{-x/\gamma} \int_{-\infty}^x \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{1}{\gamma^l l!} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} y^k dJ(y) + (1 - F_2(x)) \\ &= K e^{-x/\gamma} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{x^l}{\gamma^l l!} J(x) + K e^{-x/\gamma} \sum_{l=1}^{\nu-1} \frac{1}{\gamma^l l!} \sum_{k=1}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} \int_{-\infty}^x y^k dJ(y) \\ &\quad + (1 - F_2(x)). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Fazendo

$$R(x) = K e^{-x/\gamma} \sum_{l=1}^{\nu-1} \frac{1}{\gamma^l l!} \sum_{k=1}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} \int_{-\infty}^x y^k dJ(y) + (1 - F_2(x)), \quad (3.58)$$

e usando (3.54), segue de (3.57) que

$$\overline{F_1 * F_2}(x) = K(1 - F_1(x))J(x) + R(x). \quad (3.59)$$

Assim, $\overline{F_1 * F_2}(x)$ satisfaz a condição (3.50) do Teorema 3.3.2, com $a = \alpha = 1$ e $b = \beta = 0$. Então, basta mostrar que $R(x)$ em (3.58) satisfaz o limite (3.51). Para isso, temos, de (3.58) e (3.54), que

$$\frac{R(x)}{1 - F_1(x)} = \frac{Ke^{-x/\gamma} \sum_{l=1}^{\nu-1} \frac{1}{\gamma^l l!} \sum_{k=1}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} \int_{-\infty}^x y^k dJ(y)}{e^{-x/\gamma} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(x/\gamma)^l}{l!}} + \frac{1 - F_2(x)}{F_1(x)}. \quad (3.60)$$

Mas, por L'Hospital, das hipótese que F_1 é a distribuição *Gama*(ν, γ) e F_2 tem densidade satisfazendo (3.52) e (3.53) segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F_1(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Kj(x)e^{-x/\gamma}}{x^{\nu-1}e^{-x/\gamma}} \\ &= \frac{K}{\gamma^\nu(\nu-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{j(x)}{x^{\nu-1}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (3.53), isto é, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x y^k j(y) dy < \infty, \forall k \leq \nu - 1$.

Logo, fazendo $x \rightarrow \infty$ em (3.60) obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{1 - F_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K \sum_{l=1}^{\nu-1} \frac{1}{\gamma^l l!} \sum_{k=1}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{l-k} \int_{-\infty}^x y^k dJ(y)}{\sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(x/\gamma)^l}{l!}}. \quad (3.61)$$

Desenvolvendo o numerador da equação (3.61) temos

$$N = -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2 2!} \left[-\binom{2}{1} x + 1 \right] + \dots + \frac{1}{\gamma^{\nu-1} (\nu-1)!} \left[-\binom{\nu-1}{1} x^{\nu-2} + \dots + 1 \right].$$

Logo na equação (3.61) o maior expoente do numerador é $\nu - 2$ e o maior expoente do denominador é $\nu - 1$, e podemos concluir que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{1 - F_1(x)} = 0.$$

Portanto, das condições do Teorema 3.3.2 temos $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$. ■

Nesta segunda parte desta seção vamos considerar a situação em que F_1 tem distribuição *Gama*(ν, γ), $\nu > 0, \gamma > 0, \nu \in \mathbb{Z}$ e F_2 é uma função de distribuição com

$r(F_2) < +\infty$ e apresentamos os resultados obtidos por Sreehari *et. al* [20], que estabelecem condições para $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$.

Teorema 3.3.4 *Seja F_1 função de distribuição Gama(ν, γ), com $\nu > 0, \gamma > 0, \nu \in \mathbb{Z}$. Se F_2 é uma função de distribuição absolutamente contínua, cuja densidade f_2 tem suporte em $(0, a]$, com $0 < a < +\infty$ então $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\gamma = 1$, ou seja, F_1 é a função de distribuição Gama($\nu, 1$) com $\nu > 0, \nu \in \mathbb{Z}$. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F_1 e F_2 respectivamente.

Do Exemplo 2.4.20 temos que $F_1 \in D_{max}(\Lambda)$ e as constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$a_n = 1, \quad e \quad b_n = \log(n/(\nu - 1)!) + (\nu - 1) \log(\log(n/(\nu - 1)!)). \quad (3.62)$$

Observe também que das hipóteses sobre F_2 temos $r(F_2) < +\infty$. Seja $G = F_1 * F_2$ e g sua função densidade. Então, como f_2 tem suporte em $(0, a]$, usando a expansão binomial podemos obter

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^a f_1(z-x)f_2(x)dx \\ &= \int_0^a \frac{(z-x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{-(z-x)} f_2(x)dx \\ &= \frac{e^{-z}}{(\nu-1)!} \int_0^a e^x \left[\sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k z^{\nu-1-k} x^k f_2(x) \right] dx \\ &= \frac{e^{-z}}{(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k z^{\nu-1-k} \int_0^a e^x x^k f_2(x) dx \\ &= \frac{e^{-z}}{(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k z^{\nu-1-k} \mathbb{E}[e^Y Y^k]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Sejam as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ em (3.62). Então para n suficientemente grande tal que $b_n > a$ (pois como $a_n x > 0$ para $x > 0$ então $a_n x + b_n > a$), de (3.63) obtemos para $x > 0$

$$\begin{aligned} \overline{F_1 * F_2}(x + b_n) &= \int_{x+b_n}^{\infty} g(z) dz \\ &= \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k \mathbb{E}[e^Y Y^k] \int_{x+b_n}^{\infty} e^{-z} z^{\nu-k-1} dz. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Seja $x_n = x + b_n$ e denote para $q > 0, q \in \mathbb{Z}$, $I_{q,n} = \int_{x_n}^{\infty} e^{-z} z^{q-1} dz$. Integrando por partes, fazendo $u = z^{q-1}$ e $dv = e^{-z} dz$ então $du = (q-1)z^{q-2}$ e $v = -e^{-z}$, podemos obter para $q > 0, q \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} I_{q,n} &= x_n^{q-1} e^{-x_n} + (q-1) \int_{x_n}^{\infty} e^z z^{q-2} dz \\ &= x_n^{q-1} e^{-x_n} + (q-1) I_{q-1,n}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, integrando por partes mais $q-2$ vezes podemos obter

$$\begin{aligned} I_{q,n} &= x_n^{q-1} e^{-x_n} + (q-1)[x_n^{q-2} e^{-x_n} + (q-2)I_{q-2,n}] \\ &= x_n^{q-1} e^{-x_n} + (q-1)x_n^{q-2} e^{-x_n} + (q-1)(q-2)I_{q-2,n} \\ &\vdots \\ &= x_n^{q-1} e^{-x_n} + (q-1)x_n^{q-2} e^{-x_n} + \cdots + (q-1)(q-2)\cdots 2 \cdot x_n^0 e^{-x_n} \\ &= e^{-x_n} [x_n^{q-1} + (q-1)x_n^{q-2} + (q-1)(q-2)x_n^{q-3} + \cdots + (q-1)!]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{-x_n} &= e^{-x} \cdot e^{\log(n/(\nu-1)!)} \cdot e^{-(\nu-1)\log(\log(n/(\nu-1)!))} \\ &= e^{-x} \frac{(\nu-1)!}{n} \left[\log \left(\frac{n}{(\nu-1)!} \right) \right]^{-(\nu-1)} \end{aligned}$$

e substituindo em (3.65) obtemos

$$I_{q,n} = e^{-x} \frac{(\nu-1)!}{n} \left[\log \left(\frac{n}{(\nu-1)!} \right) \right]^{-(\nu-1)} [x_n^{q-1} + (q-1)x_n^{q-2} + \cdots + (q-1)!], \quad (3.66)$$

agora, substituindo (3.66) na equação (3.64) temos

$$\begin{aligned} \overline{F_1 * F_2}(x + b_n) &= \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k \mathbb{E}[e^Y Y^k] I_{\nu-k,n} \\ &= \frac{1}{(\nu-1)!} \mathbb{E}[e^Y] I_{\nu,n} + \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{k=1}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (-1)^k \mathbb{E}[e^Y Y^k] I_{\nu-k,n}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Primeiramente, provemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_{\nu,n} = (\nu - 1)!e^{-x}. \quad (3.68)$$

De fato, por (3.66) segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_{\nu,n} = e^{-x}(\nu - 1)! \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x_n^{\nu-1} + (\nu - 1)x_n^{\nu-2} + \dots + (\nu - 1)!]}{\left[\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)\right]^{\nu-1}}. \quad (3.69)$$

Mas, note que substituindo b_n por (3.62) temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} + \frac{b_n}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} + \frac{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} + (\nu - 1) \frac{\log \log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{\nu-1}}{\left[\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)\right]^{\nu-1}} = 1 \quad (3.70)$$

e para $2 \leq i \leq \nu$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{\nu-i}}{\left[\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)\right]^{\nu-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x_n}{\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)} \right]^{\nu-i} \frac{1}{\left[\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)\right]^{i-1}} = 0. \quad (3.71)$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.69) obtemos (3.68). Em segundo lugar, provemos que para $1 \leq k \leq \nu - 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_{\nu-k,n} = 0. \quad (3.72)$$

De fato, por (3.66) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_{\nu-k,n} = e^{-x}(\nu - 1)! \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x_n^{\nu-k-1} + (\nu - k - 1)x_n^{\nu-k-2} + \dots + (\nu - k - 1)!]}{\left[\log\left(\frac{n}{(\nu-1)!}\right)\right]^{\nu-1}}. \quad (3.73)$$

Logo, usando (3.70) e (3.71) em (3.73) segue (3.72).

Finalmente, fazendo $n \rightarrow \infty$ na equação (3.67), segue de (3.68) e (3.73) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F_1 * F_2}(x + b_n) = e^{-x} \mathbb{E}[e^Y]. \quad (3.74)$$

Considerando $\beta = -\log \mathbb{E}[e^Y]$, temos que (3.74) é equivalente à $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_1 * F_2)^n(x + b_n) = \exp\{-e^{-(x+\beta)}\}$. Ou ainda, considerando $b'_n = b_n - \beta$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_1 * F_2)^n(x + b'_n) = \Lambda(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$. ■

Observamos que qualquer função de distribuição F_2 com $F_2(0) = 0$ e $r(F_2) < +\infty$ satisfaz a hipóteses do Teorema 3.3.4 e assim $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$, $\nu > 0$, $\gamma > 0$ e $\nu \in \mathbb{Z}$.

A seguir apresentamos um exemplo no qual $F_2 \in D_{max}(\Lambda)$ e satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.4.

Exemplo 3.3.5 *Considere a função de distribuição*

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{1-x}\right) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

No exemplo 2.4.5, mostramos que $F_2 \in D_{max}(\Lambda)$. Por outro lado, como $r(F_2) < +\infty$ e $F_2(x) = 0, \forall x \leq 0$, ou seja, F_2 tem densidade com suporte $(0, 1)$, segue do Teorema 3.3.4 que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$, com F_1 função de distribuição Gama(ν, γ), $\nu, \gamma > 0$ e $\nu \in \mathbb{Z}$. Assim, neste caso temos $F_i \in D_{max}(\Lambda), i = 1, 2$ e $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$.

Finalizamos a seção considerando o problema recíproco, ou seja, se $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$ implica que ambas F_1 e F_2 também pertencem ao $D_{max}(\Lambda)$. Usando o Teorema 3.3.4, apresentamos a seguir um exemplo mostrando que a implicação não é verdadeira.

Exemplo 3.3.6 *Seja F_2 a função de distribuição $U[0, 1]$, ou seja,*

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Temos que $r(F_2) = 1$ e definindo $F_2^*(x) = F_2(r(F_2) - \frac{1}{x})$, para todo $x > 0$, temos

$$F_2^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Assim para $x \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2^*}(tx)}{\overline{F_2^*}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{tx} = x^{-1},$$

ou seja, $\overline{F_2^*} \in RV_{-1}$. Pelo Teorema 3.3.4 segue que $F_2 \in D_{max}(\Psi_1)$. Por outro lado, como $r(F_2) < \infty$ e $F_2(x) = 0, \forall x \leq 0$, segue do Teorema 3.3.4 que $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$, com F_1 função de distribuição Gama(ν, γ), com $\nu, \gamma > 0, \nu \in \mathbb{Z}$. Portanto, neste caso, temos $F_1 * F_2 \in D_{max}(\Lambda)$ mas $F_2 \notin D_{max}(\Lambda)$.

Referências Bibliográficas

- [1] AL-Hussaini, E. K and El-Adll, M. E. **Asymptotic distribution of normalized maximum under finite mixture models.** *Statist. Probab. Lett.* 70, 109-117, 2004.
- [2] Bingham, N. H.; Goldie, C.M. and Teugels J.L. **Regular Variation: Encyclopedia of Mathematics and its Applications**, v. 27, 1^a ed. Cambridge University Press, 1987.
- [3] de Hann, L. **On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes**, v. 32, Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1970.
- [4] de Haan, L **Sample extremes: an elementary introduction.** *Statistica Neerlandica*, v 30, no. 4, 161-172, 1976.
- [5] Embrechts, P; Klupperlberg, C and Mikosch, T. **Modelling extremal events: With a view towards insurance and finance**, v.4, 1^a ed. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1997.
- [6] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, 2nd edn. Wiley, New York, 1971.
- [7] Fisher, R., Tippet, L. **Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample.** *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v.24, pp. 180-190, 1928.
- [8] Fréchet, M. **Sur la loi de probabilité de l'écart maximum.** *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, Cracovie 6: 93-116, 1927.
- [9] Galambos, J. **The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics.** Jonh Wiley, New York, 1978.

- [10] Gnedenko, B. **Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire**. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 44, No. 3, pp. 423-453, 1943.
- [11] Kale, B. K and Sebastian, G. **On a class of symmetric nonnormal distributions with a kurtosis of three**, in **Statistical Theory and Applications, in honour of H. A. David** (eds. H. N. Nagaraja et al.). Springer, New York, 55-63, 1995.
- [12] Leadbetter, M. R.; Lindgren, G. and Rootzen, H. **Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes** Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1983.
- [13] von Mises, R. **La distribution de la plus grande de n valeurs**. Rev. math. Union interbalcanique v. 1, 141-160, 1936.
- [14] Resnick, S. I. **Extreme Values, Regular Variation and Point Processes**. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [15] Resnick, S. I. **Products of distribution functions attracted to Extreme Value Laws**. Journal of Applied Probability, Vol. 8, No. 4, pp. 781-793, 1971.
- [16] Resnick, S. I. **Tail equivalence and its applications**. Journal of Applied Probability, v.8, no. 1, 136-156, 1971.
- [17] Samorodnitsky, G and Taqqu, M. **Stable non-gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance**. CRC Press, v. 1, 1994.
- [18] Sreehari, M. **On a class of limit distributions for normalized sums of independent random variables**. Theory of Probability and its Applications. v.15, no. 2, 258-281, 1970.
- [19] Sreehari, M. and Ravi, S. **On extremes of mixtures of distributions**, **Metrica**. 71, 117-123, 2010.
- [20] Sreehari, M., S. Ravi, and R. Vasudeva. **On sums of independent random variables whose distributions belong to the max domain of attraction of max stable laws**. Extremes v.14, 267-283, 2011.
- [21] Tucker, H.G. **Convolutions of distributions attracted to stable laws**. The Annals of Mathematical Statistics, 1381-1390, 1968.

- [22] Villasenor, J.A. **Norming constants for maxima attracted to $\exp(-e^{-x})$.** 43rd Session, ISI. Buenos Aires, Argentina, 1981.
- [23] Villasenor, J.A. **On univariate and bivariate extreme value theory.** Ph.d. thesis, Iowa State University, 1976.