



**FILTRO DE KALMAN
ADAPTATIVO PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA.**

MIGUEL ENRIQUE PARRA MUÑOZ

**TESES DE DOUTORADO EM SISTEMAS MECATRÔNICOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FILTRO DE KALMAN
ADAPTATIVO PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA.**

Miguel Enrique Parra Muñoz

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM SISTEMAS MECATRÔNICOS.

APROVADA POR:

**Prof. Dr. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza ENM,UNB
(Orientador)**

**Prof. Dr, Carlos Humberto Llanos Quintero ENM/UnB
Membro Interno**

**Prof , Phd, Eduardo Stockler Tognetti ENE/UnB
Membro Externo**

**Dr. Mário Cesar M Massa de Campos, CENPES/PETROBRAS
Membro Interno**

BRASÍLIA, 20 DE 11 DE 2017.

FICHA CATALOGRÁFICA

PARRA MUÑOZ, MIGUEL ENRIQUE

Filtro de Kalman Adaptativo para sistemas em Malha fechada. [Distrito Federal] 2017.

xvi, Xp., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Sistemas Mecatrônicos, 2017).

Tese de doutorado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

1. FKA

2. Variâncias

3. Controle adaptativo

4. Malha fechada

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PARRA, M. E. (2017). Filtro de Kalman Adaptativo para sistemas em Malha fechada. , Tese de Doutorado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação PPGENE.TD-X/X, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Xp.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Miguel Enrique Parra Muñoz

TÍTULO: Filtro de Kalman Adaptativo para sistemas em Malha fechada. .

GRAU: Doutor ANO: 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Departamento de Eng. Mecânica (ENM) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

RESUMO

FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA.

Autor: Miguel Enrique Parra Muñoz

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza ENM,UNB

Programa de Pós-graduação em Sistemas Mecatrônicos

Brasília, 11 de 2017

Este documento mostra o trabalho realizado nos últimos quatro anos, na realização do doutorado onde foi desenvolvida uma técnica de adaptação do Filtro de Kalman para sistemas dinâmicos lineares, mediante a manipulação das variâncias nas perturbações e nos ruídos do sistema, o qual permite criar uma técnica de controle eficiente que é modificada de acordo com a perturbação entrante, mantendo estável o sistema e fazendo com que este possa continuar com a tarefa para a qual foi programada. É mostrada a eficiência da metodologia desenvolvida mediante simulação numérica para diferentes sistemas dinâmicos que estão sendo trabalhados no grupo de pesquisa, onde pode ser verificado que o filtro é mais reativo quando se têm perturbações grandes, fazendo as correções rapidamente e não usando muito os atuadores do sistema quando a perturbação é pequena, evitando desta maneira o desgaste dos mesmos, em todos os testes desenvolvidos foram obtidos resultados satisfatórios e melhores quando comparados com o uso de sistemas de controle que apresentam um Filtro de Kalman estacionário, analisa-se mostrando a implementação deste filtro numa bancada de dois tanques, gerando um sistema *MIMO* para testar a teoria aqui desenvolvida para tal classe de sistemas.

ABSTRACT

ADAPTIVE KALMAN FILTER FOR CLOSED LOOP SYSTEMS

Author: Miguel Enrique Parra Muñoz

Supervisor: Prof. Dr. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza ENM,UNB

Programa de Pós-graduação em Sistemas Mecatrônicos

This document shows the work carried out over the last four years in the PhD where a Kalman Filter adaptation technique was developed for linear dynamic systems, by manipulating the variances in the disturbances and in the system noises, which allows to create a technique of efficient control that is modified according to the incoming perturbation, keeping the system stable and allowing it to continue with the task for which it was programmed, the efficiency of the methodology developed using numerical simulation for different dynamic systems that are being in the research group, where it can be verified that the filter is more reactive when there are studied in large perturbations, making the corrections instantaneously and not using the actuators of the system when the disturbance is small, thus avoiding the wear of the same ones in all the developed tests were obtained results satisfactory and better when compared to the use of control systems that have a Stationary Kalman Filter, it is analyzed showing the implementation of this filter in a two-tank bench, generating a *MIMO* system to test the theory developed for this class of systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVO GERAL	2
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	2
1.3	PROPOSTA DO TRABALHO	3
1.4	ESTADO DA ARTE	4
1.5	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
2.1	SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO	12
2.2	METODOLOGIA DE CONTROLE LQR	12
2.2.1	PROBLEMAS DO CONTROLE LQR	13
2.2.2	SOLUÇÃO DO CONTROLE LQR	14
2.2.3	ESCOLHA DAS MATRIZES Q E R	14
2.2.4	ROBUSTEZ DO CONTROLE LQR	15
2.3	CONTROLE ADAPTATIVO	15
2.3.1	CONTROLE COM GANHO ESCALONADO	16
2.3.2	REGULADOR AUTO-AJUSTÁVEL	17
2.3.3	SISTEMAS ADAPTATIVOS POR MODELO DE REFERÊNCIA	18
2.4	FILTRO DE KALMAN	19
2.4.1	VANTAGENS DO FILTRO DE KALMAN	20
2.4.2	CARACTERÍSTICAS DO FILTRO DE KALMAN	21
2.4.3	DEFINIÇÃO DO FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO	21
2.4.4	EXEMPLO DE FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO	23
2.4.5	FILTRO DE KALMAN DISCRETO	24
2.4.6	EXEMPLO 1: FILTRO DE KALMAN DISCRETO:	29
2.4.7	EXEMPLO 2: FILTRO DE KALMAN DISCRETO	32
2.4.8	CONTROLE LQG	34
2.5	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (FKE)	38
2.6	FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO (FKA)	40
2.6.1	PRINCIPIO DE SUPERPOSIÇÃO PARA SISTEMAS LINEARES	42
3	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS APLICADAS AO PROBLEMA DE ADAP- TAÇÃO DO FK	44
3.1	MÉDIA ARITMÉTICA, VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO	44
3.1.1	MÉDIA ARITMÉTICA	44
3.1.2	VARIÂNCIA	45

3.1.3	DESVIO PADRÃO	46
3.2	FUNDAMENTOS BÁSICOS DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.....	46
3.3	VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA E FUNÇÃO DE PROBABILIDADE	47
3.3.1	VARIÁVEL ALEATÓRIA	47
3.3.2	FUNÇÃO DENSIDADE PROBABILIDADE	47
3.3.3	PROBABILIDADE CONDICIONAL	47
3.3.4	PROBABILIDADE TOTAL.....	47
3.3.5	FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO.....	48
3.4	FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE NORMAL	49
3.4.1	REGRA DE BAYES	50
3.5	AUTOCORRELAÇÃO	50
3.5.1	PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO	51
3.6	RUÍDO BRANCO	52
3.7	INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS DE MARKOV.....	53
3.7.1	CLASSIFICAÇÃO DOS ESTADOS.....	55
3.8	CÁLCULO DA RELAÇÃO DE VARIÂNCIA PARA UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM	56
4	APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN.....	59
4.1	ANALISE DA OBTENÇÃO DO FILTRO DIGITAL	59
4.2	OBTENÇÃO DA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO.....	62
4.2.1	ANALISE DA VARIÂNCIA DE UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM	66
4.2.2	ANALISE DA VARIÂNCIA DE UM SISTEMA DE ORDEM N EM MALHA ABERTA	66
4.2.3	ANALISE DA VARIÂNCIA DE UM SISTEMA DE ORDEM N EM MALHA FECHADA	68
4.3	INFLUÊNCIA DO FILTRO ADAPTATIVO NA PERFORMANCE DO CONTROLE EM MALHA FECHADA	72
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS REALIZADAS COM O FKA	74
5.1	SISTEMA IDEAL DE DOIS TANQUES EM SÉRIE.	74
5.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA BOLA - BARRA	78
5.3	COMPENSADO ACTIVO DE HEAVE	82
5.4	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA DE QUATRO TANQUES.....	91
6	RESULTADOS REAIS OBTIDOS COM O FKA.....	103
6.1	ANALISE DO FKA EM MALHA ABERTA.....	111
6.2	ANALISE DO FKA EM MALHA FECHADA	113
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	119

7.1 CONCLUSÕES	119
7.2 RECOMENDAÇÕES E TRABALHOS FUTUROS	120
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
ANEXOS	128
A APÊNDICE	129
A.1 EXEMPLO DA PROJEÇÃO DO CONTROLE LQR	129
A.1.1 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	131
A.1.2 MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS	132
A.1.3 REGULADOR LQR	135
A.1.4 PROJEÇÃO DO CONTROLADOR EM ESPAÇO DE ESTADOS	137
A.1.5 PROJEÇÃO DO OBSERVADOR	139
A.1.6 LQR COM AÇÃO INTEGRAL	141
A.2 EXEMPLO DO CONTROLE LQG	143
A.3 CALCULO DA VARIÂNCIA DE UM SISTEMA DISCRETO	144

LISTA DE FIGURAS

2.1	Controle de ganho escalonado. [2]	17
2.2	Controle adaptativo [3].	18
2.3	Controle reajustável [4].	18
2.4	Diagrama de Blocos do sistema com ruído de estado e medida [5]	22
2.5	Estados de um filtro de Kalman.....	26
2.6	Filtro de Kalman com Predição	27
2.7	Algoritmo do filtro de Kalman	30
2.8	Comparação de dados com o filtro de Kalman	33
2.9	Resposta obtida usando o filtro de kalman	33
2.10	Controle LQG [5]	36
2.11	Diagrama de blocos do controle LQG de ordem dois.....	37
2.12	Saída do controlador LQG de ordem dois.	38
3.1	Densidade normal $N(\mu, \sigma^2)$ [6].....	49
3.2	Ilustração de função de autocorrelação de processos aleatórios com flutuação mas lenta e mais rápida [7].....	52
3.3	Características do ruído branco (A) Densidade espectral de potência. (B) Função de autocorrelação [8].....	53
3.4	Comparação do sistema contínuo e discreto.	57
3.5	Variância do sistema em função da frequência.	58
3.6	Variância do sistema em função do tempo.	58
4.1	diagrama de blocos dos filtros	59
4.2	comparação das saídas dos filtros com variância 1/4.	60
4.3	Comparação da saída do Q variável para sistemas com filtros diferentes.....	61
4.4	Comparação da saída dos filtros de polos iguais para uma entrada degrau.....	61
4.5	Fluxograma da técnica de adaptação.....	69
4.6	Comparação das das saídas estimadas para perturbações inseridas no sistema..	70
4.7	Variância estimada das perturbações inseridas no sistema.....	70
4.8	Comparação das das saídas estimadas para perturbações inseridas no sistema..	71
4.9	Variância estimada das perturbações inseridas no sistema.....	71
4.10	Comparação da saída do sistema sem ruído relação 7x.	72
4.11	Comparação da saída do comando relação 17x	73
5.1	Sistema de tanques em serie	74
5.2	FKA SISO para uma entrada degrau.	76
5.3	FKA SISO para uma entrada quadrada.	76
5.4	Entrada ruidosa para teste ruidosa.	77

5.5	FKA SISO para uma entrada quadrada ruidosa.	78
5.6	Ball and beam system [9].	79
5.7	Posição [<i>m</i>].	81
5.8	Giro [<i>rad</i>].	81
5.9	Velocidade da barra.	82
5.10	Ilustração esquemática do sistema controlado e o atuador, fonte Hatlestkog [10].	83
5.11	Posição.	86
5.12	Perturbação.	86
5.13	Posição.	87
5.14	Perturbação.	87
5.15	Posição.	88
5.16	Perturbação.	88
5.17	Posição.	89
5.18	Perturbação.	89
5.19	Posição.	90
5.20	Perturbação.	90
5.21	Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques (esquerda); Planta didática (direita) [11].	92
5.22	Bancada de quatro tanques usada para a realização dos testes reais	97
5.23	Modelo estimado	98
5.24	Diagrama de blocos da técnica de adaptação.	99
5.25	Parte interna do bloco de adaptação.	99
5.26	Comparação dos das saídas usando Matlab e Simulink.	100
5.27	Comparação da saída do FKA e o FK sem adaptar para uma entradas degrau e outra quadrada ruidosa.	100
5.28	Comparação da entrada ruidosa com a resposta do FKA.	101
5.29	Variâncias das saídas.	101
5.30	Variância das saídas (Ampliadas).	102
6.1	Saída do sistema Real MIMO para o FKA para o primeiro teste.	103
6.2	Ampliação da saída do sistema Real MIMO para o FKA para o primeiro teste.	103
6.3	Bancada de quatro tanques real, usada para realizar os testes	104
6.4	variância das perturbações do sistema real.	105
6.5	variância das perturbações do sistema real.	105
6.6	Comparação das saídas estimadas dos FK	106
6.7	Ampliação do comportamento dos FK estimados	106
6.8	Comparação do comportamento do comando.	107
6.9	variância para as perturbações do sistema real.	107
6.10	Segundo teste realizado, comportamento das medições e os filtros.	108
6.11	Ampliação do comportamento dos filtros analisados	108

6.12	Ampliação dos sinais que representam os filtros trabalhados no segundo teste.	109
6.13	Comportamento dos filtros de Kalman para o terceiro teste.....	109
6.14	Comportamento dos comandos do sistema para o terceiro teste.	110
6.15	variância para as perturbações do sistema real no segundo teste.....	110
6.16	Referência em função das bombas.	111
6.17	Referência em função do nível dos tanques.	112
6.18	Referência em função das bombas.	112
6.19	Referência em função das bombas.	113
6.20	Esquema do FK em malha fechada	114
6.21	Esquema externo do FKA em malha fechada	114
6.22	Esquema interno do FKA em malha fechada	115
6.23	Comportamento do FK.....	115
6.24	Comportamento do FKA	116
6.25	Comparação do comportamento dos FKA e FK	116
6.26	Comparação do comportamento do FK com o FKA para a segunda entrada. ...	117
6.27	Comparação do comportamento do FK com o FKA para a primeira entrada. ...	118
A.1	Diagrama do pêndulo invertido. [12]	129
A.2	Diagrama do corpo livre do sistema [12]	130
A.3	Saída do sistema em malha aberta.	132
A.4	Saída do sistema em função do espaço de estados para o carro e o pêndulo. [12].....	135
A.5	Regulador LQR [13].....	136
A.6	Saída do sistema para o caso mais simples $R=1$	138
A.7	Modificação da entrada de referência [?]	138
A.8	Regulador LQR [?]	139
A.9	Projeção do observador [14].	140
A.10	Saída do sistema para o controle LQR modificando a entrada.	141
A.11	Projeto LQR com efeito integral. [15]	142
A.12	Lei de Controle, Ganho Proporcional e Integral.	143

LISTA DE TABELAS

1.1	Resumo das referências	10
2.1	Descrição matemática do Filtro de Kalman estendido	39
5.1	Parâmetros do sistema Ball and Beam.....	80
5.2	Parâmetros do sistema massa mola amortecedor	85
5.3	Parâmetros do sistema de tanques.	94
5.4	Parâmetros da bancada de quatro tanques.	96

LISTA DE SÍMBOLOS

$P(A)$	Probabilidade do evento A
$f_k(n)$	Frequência relativa do evento k
$N_k(n)$	Número de ocorrências do evento K
X_k	Vetor de estados do sistema no instante k
W_k	Ruído de processo no instante de tempo k
V_k	Ruído de medição no instante de tempo k
Q	Matriz de covariância do ruído de processo
R	Matriz de covariância do ruído de medição
$E(\mathbf{x}_k)$	Valor Esperado do vetor de estados \mathbf{x} no instante de tempo k
Y_t	Vetor de medições no instante de tempo t
$N(0, \sigma)$	Distribuição normal com média 0 e desvio padrão σ
K	Ganho de Kalman
e^-	Erro <i>a priori</i>
e^+	Erro <i>a posteriori</i>
N_{eff}	Tamanho efetivo de amostragem
i_{k-1}	Componente inercial no instante $k - 1$
V_i	Matriz de variação de estados
<i>SPE</i>	Semiplano esquerdo
<i>SPD</i>	Semiplano direito
<i>MIMO</i>	Sistema multiplas entradas multiplas saídas
<i>SISO</i>	Sistema única entrada única saída
<i>LQR</i>	Regulador Linear Quadrático
<i>EAR</i>	Equação Algébrica de Riccati
<i>FK</i>	Filtro de Kalman
<i>LQG</i>	Regulador Quadrático Gaussiano
<i>FB</i>	Filtro Butterworth
<i>FKVT</i>	Filtro de Kalman Variável no tempo
<i>VSA</i>	Veículo Submersível Autônomo
<i>ROV</i>	Veículo operado remotamente
<i>AUV</i>	Veículo subaquático autônomo
<i>VSSAs</i>	Veículos submarinos semi-autônomos
<i>LTR</i>	Recuperação da função de transferência
<i>FKA :</i>	Filtro de Kalman adaptativo
<i>FKA - VA</i>	Filtro de Kalman adaptativo variacional Bayesiano
<i>IW</i>	Inverso da distribuição de Wishart

<i>FKAR</i>	Filtro de Kalman adaptativo robusto
<i>PWM</i>	Modulação de largura de pulso
<i>CO</i>	Controlabilidade
<i>Obs</i>	Observabilidade
<i>K</i>	Matriz de realimentação de estados
<i>FIR</i>	Resposta impulsiva finita
<i>IIR</i>	Resposta impulsiva infinita
<i>LMS</i>	Mínimos quadrados
<i>VANT</i>	Veículo aéreo não tripulado
<i>NRMSE</i>	Erro quadrático médio padrão normalizado

1 INTRODUÇÃO

O filtro de Kalman surgiu em 1960, quando R. E Kalman reexaminou o problema de filtragem clássica usando o método de Bode/Shannon [16] para processos aleatórios em sistemas de transmissão, com a finalidade de tratar uma classe importante de problemas teóricos relacionados com controle e de natureza estatística, estes problemas foram identificados como: (i) Previsão de sinais aleatórios; (ii) separação de sinais aleatórios de ruído aleatório; (iii) detecção de sinais de forma conhecida (pulsos, sinusoidais) na presença de ruído aleatório, os quais tinham sido trabalhados por diferentes autores, entre eles Wiener que em 1945 [17] mostrou que os problemas (i) e (ii) levam à chamada equação integral de Wiener-Hopf [18]; ele também estudou um método (factorização espectral) para a solução desta equação integral no caso espacial, o artigo menciona diferentes autores como Darlington [19] e Franklin [20], os quais em seus trabalhos trataram de dar solução ao problema de Wiener objetivando obter a especificação de um sistema dinâmico linear (filtro Wiener) que realiza a predição, separação ou detecção de um sinal aleatório.

O aporte fundamental de Kalman é fundamentado na separação dos estágios do problema identificando cada parte do filtro proposto por Wiener e gerando um sistema mais robusto, onde para ser obtida uma descrição concreta de um problema a ser estudado separando as etapas de suavização, filtragem e previsão, para tal caso é considerado um cenário onde as estimativas pertencem ao domínio da teoria da probabilidade e estatística, sendo cada uma das variáveis sinal e ruídos variáveis aleatórias gaussianas, as quais cumprem com todas as propriedades definidas para elas, e que podem ser aplicadas a sistemas dinâmicos representados em espaço de estados, definidos como um conjunto de números, ou funções os quais são a menor quantidade de dados que deve ser conhecidos para entender o comportamento passado do sistema, com a finalidade de prever o comportamento futuro, considerando que as variáveis aleatórias são independentes [21].

Assim o filtro de Kalman FK é conhecido como conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado. Através da observação da variável denominada variável de observação outra variável, não observável, denominada variável de estado pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros. Além disso, o filtro de Kalman permite a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo através da maximização da verossimilhança via decomposição do erro de previsão.

O desenvolvimento de técnicas de controle é fundamental para representar modelos físicos reais, permitindo assim desenvolver controladores e testá-los mediante simulação computacional e aperfeiçoá-los, diminuindo a probabilidade de erros nos testes reais, evitando o uso desnecessário de recursos que possam ser onerosos, além, de ser prejudiciais para o desenvolvimento dos projetos, dado que o principal problema de um sistema dinâmico é o

sobre esforço que estes fazem quando se encontra frente a uma perturbação inesperada, o que leva a desgaste de atuadores e componentes mecânicos dos sistemas com os quais se está trabalhando, razão pela qual este trabalho faz uma proposta de criar uma teoria de controle onde o controlador seja o que faz o esforço e reaja de maneira eficiente e rápida frente a estas perturbações poupando desta tarefa aos atuadores e permitindo maior vida útil dos mesmos.

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver estratégias de controle adaptativos, que possam associar diferentes técnicas de controle, relacionando o FK e sistemas estocásticos de maneira que seja representado o mais aproximado possível um sistema real, e que permita gerar diferentes controladores que possam ser adaptados no tempo, permitindo controlar sistemas visando em futuras aplicações a plataformas que trabalham com sistemas no fundo marinho, dado que no fundo do mar, o uso de equipamentos como robôs para a manutenção destas plataformas é dificultada pelas condições físicas nas quais as tarefas são desenvolvidas, como as altas pressões e correntezas, o qual faz que estes equipamentos sejam altamente sensíveis, e é de necessidade a projeção de controladores capazes de agir frente a estas grandes perturbações, de maneira a garantir seu adequado funcionamento, em reduzir o custo de manutenção através do aumento da vida útil dos atuadores ao reduzir seu uso e conseqüentemente seu desgaste.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Resolver a teoria do FK adaptativo, para implementação de controle com o objetivo de:

- Desenvolver a teoria de controle associada ao Filtro de Kalman adaptativo FKA ;
- Evitar desgaste excessivo dos atuadores nos momentos em que as perturbações possuam pouca influência no sistema;
- Estudar o comportamento da variância de saída e entrada do sistema, para diferentes filtros e criar teorias e métodos que permitam realizar a análise de sistemas de diferente ordem;
- Desenvolver observadores de estados que filtrem os estados do sistema, de acordo com a instabilidade da perturbação presente no sistema de maneira a garantir performance e estabilidade do sistema e comparar sua resposta frente a aplicação de filtros adaptados e sem adaptação;
- Controlar sistemas que apresentem ruídos que tenham comportamento Gaussianos e ruídos com média diferente de zero e variância diferente ao valor unitário, projetando controladores baseados na variância dos sistemas, criando teorias de controle que permita analisar o FKA nestas condições, considerando sistemas em malha aberta e fechada.

1.3 PROPOSTA DO TRABALHO

Neste trabalho, com o melhor de nosso conhecimento, propomos uma abordagem de filtragem adaptativa para o filtro de Kalman, com a finalidade de rastrear e controlar de maneira eficiente sistemas lineares multivariáveis com base na relação entre a variação de entrada e de saída do sistema, se for submetido a uma grande perturbação, a nossa estratégia de filtragem Kalman adaptativa reage rapidamente com o fim de recuperação corretamente a informação relativa aos estados do sistema. Além disso, estendemos esta abordagem para uma classe especial de sistemas não-lineares através da teoria nivelamento diferencial.

Este trabalho aborda uma análise muito eficiente sobre as perturbações, uma vez que as perturbações são os principais fenômenos que afetam um sistema, além disso, esta metodologia pode ser implementada em sistemas não-lineares, apresentando respostas muito boas, como será mostrado mais adiante, neste trabalho não está sendo realizada uma adaptação do parâmetro R , dado que este fenômeno pode ser melhorado através da implementação de um filtro externo, além dos sensores de ruído são normalmente de pequena magnitude o qual facilitaria e reduziria cálculos e tempo do processo.

A principal proposta deste trabalho é a pesquisa, estudo e geração de alternativas de controle que permitam gerar um controlador, cuja resposta seja robusta a ruídos e perturbações no sistema, considerando ruídos Gaussianos e não Gaussianos, para projetar um controle conhecendo a relação entre a variância da perturbação da entrada e a variância da saída do sistema, de maneira a obter uma estimação da variância da perturbação de entrada à partir da medida da saída do sistema, atualizando os ganhos do controlador em tempo real, para que possa reagir de maneira adequada frente a mudanças bruscas, minimizando os esforços no sistema, reagindo rapidamente sem tirar o mesmo do estado de equilíbrio, o qual evita ao máximo os esforços desnecessários que causem desgaste nos atuadores, procurando-se que o controle reaja frente a estas mudanças e não ao sistema. Para esta finalidade se trabalhou com o FK , onde foi feita uma adaptação do parâmetro correspondente à perturbação, mediante o uso da variância dos parâmetros envolvidos, gerando um ganho que ajusta a matriz de covariância e os estados do sistema, fazendo-o muito reativo a perturbações grandes, e seu efeito seja reduzido quando se aplicada uma perturbação seja pequena de maneira que o sistema sempre permaneça estável.

Após realizar estudos pesquisa em deferentes trabalhos apresentados na literatura, propomos como hipótese de partida o conhecimento da ordem de grandeza da variância do ruído de medida R e a modificação em tempo real da matriz de perturbação Q a qual é obtida a partir da análise de variâncias da saída e entrada para sistemas $SISO$ e $MIMO$, tanto em malha aberta como em malha fechada, permitindo assim encontrar a variância dos estados em tempo real para iteração do observador de estados (FKA), os quais são modificados de acordo com a perturbação a qual é considerada variável, com a finalidade de obter um controlador que permita ser reagente frente a perturbações superando o FK estático que será

bem definido mediante a identificação da adequada ordem de grandeza da matriz Q , gerando um sistema de fácil implementação que tenha baixo custo computacional, o qual será testado mediante simulações numéricas e análise de um sistema real, objetivando na verificação da hipótese realizada e verificação do adequado funcionamento e definição da proposta de adaptação, visando em aplicações futuras mais complexas na área de petróleo, onde se é muito importante a criação de sistemas que tenham um bom comportamento frente a perturbações fortes ocasionadas pelo ambiente no qual se trabalha, e porém, se é de vital importância a proteção de atuadores dos sistemas de extração e ótima performance do sistema controle.

1.4 ESTADO DA ARTE

Na atualidade existem muitos processos industriais onde é indispensável a utilização de algum tipo de controle que permita melhorar a eficiência da produção e reproduzir processos mediante as mesmas condições, fato que não é possível se o trabalho é feito diretamente pelo homem, assim, a implementação de controladores facilita este trabalho e permite realizar tarefas que podem ser perigosas para o ser humano. Por essa razão, é muito importante o estudo e desenvolvimento de novas alternativas de controle que utilizem técnicas conhecidas e tenham uma variação em sua implementação gerando controladores mais precisos e adaptáveis para diferentes ambientes.

Os controles clássicos apresentam uma resposta boa frente ao controle de muitos processos industriais, é sabido que o controle mais aceito no mercado e mais estudado na indústria é um controle *PID* (controle proporcional, integral derivativo), este controle mesmo sendo básico é respeitado e aceito pela sua fácil implementação e baixo custo econômico e computacional, mas uma das desvantagens que ele apresenta, é sua sensibilidade ao ruído e perturbações, razão pela qual surgem outros métodos ou técnicas de controle que melhoram este comportamento mediante adaptação de algum dos parâmetros do sistema de controle. Na literatura são reportados alguns trabalhos, como o desenvolvido por Marcos [22], quem trabalhou em projetos de controle convencionais e adaptativos aplicados aos sistemas térmicos de uma bancada de ensaios de cabos condutores. O objetivo deste trabalho é o estudo do projeto de controladores *PID* convencionais e adaptativos usando uma técnica de otimização baseada em evolução diferencial para sistemas discretos, com a finalidade de comparar seu comportamento frente a uma mesma entrada e escolher a que melhor resposta para diferentes condições. Um dos interesses no trabalho com controladores é a obtenção de ganhos aceitáveis, esta abordagem é feita usando o critério de alocação de polos em malha fechada em função da identificação dos parâmetros de desempenho de um sistema para projetar um filtro de Kalman estendido [23].

O *FK* é conhecido pela sua ampla aplicação em tecnologia, numerosos estudos publicados na literatura rotineiramente são referidos nesta aplicação, a fim de estimar as variáveis

do estado atual, junto com suas incertezas [24]. Assumindo modelos lineares sujeitos a alguns ruídos Gaussianos aditivos aceitáveis com variância conhecida, a estrutura do FK implementa um tipo de estimador preditor-corretor que é ótimo no sentido de minimizar o erro de covariância estimado, o qual permite a convergência das variáveis de estado para o estado estacionário, independentemente das condições iniciais [21].

Outro aspecto importante é o conhecimento do processo e perfil estatística da medida do ruído [25], no entanto, na maioria das aplicações práticas, estas estatísticas são inicialmente desconhecidas, o qual leva à necessidade de criar um sistema que possa se adaptar a estas condições evitando a divergência do FK [26], dado que a análise de filtragem em tempo discreto do FK sob covariâncias de ruídos incorretos [27], leva a uma determinação de estados incorretos afetando grandemente a solução, uma vez que uma estimativa e levando degradação do desempenho do sistema e por conseguinte, conduz o filtro para a configuração de divergência.

Um dos grandes inconvenientes ao aplicar os Filtros tradicionais em um ambiente dinâmico em constante mudança é a determinação e ajuste das estimativas que possam mudar no transcurso do tempo, o qual leva a considerar técnicas adaptativas que tratam este problema [28]. Esta ideia de trabalhar com variáveis adaptativas tem sido trabalhada por muitos autores, considerando que é fundamental a estimação da covariância do ruído das matrizes Q_k e R_k pertencentes aos ruídos e perturbações do processo, respectivamente, esperando que uma formulação de um filtro de Kalman adaptado FKA levará a um melhor desempenho do sistema e impedirá a divergência do filtro [29], assim o FKA ajusta o conhecimento sobre os valores de R_k e Q_k de acordo com a diferença entre as estimativas previstas e as medições realizadas [30].

Por conseguinte, os filtros adaptativos são mais adequados quando as condições de sinal de entrada ou os parâmetros do sistema variam lentamente dado que o filtro é capaz de se auto ajustar para compensar essas mudanças [31], nesta mesma linha fathabadi [32] propõe um fator de desvanecimento para adaptar o filtro, chamando a sua proposta como filtro de Kalman estendido trabalhando para reduzir o efeito da incerteza da variância do ruído, que foi causado por informações incompletas e medições de sensores assíncronas, este fator é inserido na etapa de atualização do filtro, mediante uma comparação de fatores que relacionam o erro nas medidas.

Assim, Chui [33] mostram as características e vantagens que se tem quando se trabalha com FKA , no caso de conhecer todas as matrizes que representam a dinâmica do sistema e as matrizes Q_k e R_k e com variâncias iniciais dos estados conhecidas o FK fornece um processo de estimação ótimo e eficiente para calcular as variâncias dos estados em tempos relativamente curtos. No entanto, se não todas as matrizes do sistema são conhecidas o algoritmo de filtragem deve ser modificado para que as estimativas ótimas do estado, bem como as matrizes desconhecidas, sejam realizadas em tempo real a partir dos dados recebidos V_k . Algoritmos deste tipo podem ser chamados de algoritmos adaptativos, Se Q_k e R_k são

conhecidos, a filtragem adaptativa de Kalman pode ser usada para "identificar" o sistema e / ou as matrizes de medição. Por tanto, quando se conhecem todas as matrizes que representam a dinâmica do sistema e uma matriz Q_k ou R_k , pode ser criado um algoritmo adaptativos para identificar a matriz faltante, existem diferentes algoritmos propostos entre estes o de Mehra em 1970 [34] quem usou as funções de auto correlação da sequência de inovação para estimar Q_k e R_k para o sistema invariante no tempo, onde foi assumido que o sistema é constante e as estradas aleatórias são estacionárias, onde inicialmente é dado um teste de correlação que verifica se o FK está funcionando otimamente ou não, se o filtro for subótimo, é dada uma técnica para obter estimativas assintoticamente normais, imparciais e consistentes de Q_k e R_k , esta técnica funciona apenas para o caso em que a forma de Q_k é conhecida o número de elementos desconhecidos em Q_k não é menor que a dimensão do vetor de estados e da dimensão do vetor de medição, para outros casos, o ganho ótimo do estado estacionário K_{op} obteve diretamente por um procedimento iterativo sem identificar Q_k .

O trabalho de Wang, 2010, [35] propõe uma maneira inovadora de estimar simultaneamente a matriz de variância R_k do vetor de medição e a matriz de variância Q_k do vetor de ruído de processo com base na estimativa da componente variância-covariância, aproveitando as vantagens dos resíduos de medição e dos resíduos de ruído do processo, objetivado na identificação da posição relativa cinemática é determinar as coordenadas do objeto móvel A em relação a um ponto estacionário conhecido B . Este tipo de posicionamento requer observações simultâneas em dois pontos e pode ser executado com intervalos de código ou / e fases portadoras, o algoritmo proposto aqui considera a obtenção do vetor de atualização em do sistema em três grupos de resíduos correspondentes a: vetor de medição, vetor de ruído do processo e vetor de estado previsto, excluindo o efeito de o ruído do processo. Os dados de GPS simulados e reais em modo de posicionamento relativo cinemático foram utilizados para demonstrar o desempenho do FKA adaptado proposto, foram considerados como parâmetros de análise: a aceleração do veículo a qual é modelada como o ruído do processo, na variância atribuída ao processo de ruído, codificação e medições de fase foram arbitrárias e independentes dos ângulos de elevação do satélite. Os componentes de ruído do processo de aceleração 3D são estimados, o ruído do processo de ambiguidade flutuado é assumido como zero, os componentes de variação-covariância foram agrupados em relação à elevação do satélite e presume-se que, em intervalos curtos em ângulos de elevação do satélite, a variação não muda muito, os intervalos dos ângulos de elevação do satélite para cada grupo variam razoavelmente, de modo que cada grupo pode ter quase o mesmo número de medidas. Isso garante que há resíduos suficientes para estimar todos os componentes de variância de forma confiável. Como resultado, haverá intervalos irregulares e também serão diferentes para cada conjunto de dados. Este trabalho apresenta um algoritmo adaptativo para o FK baseado na estimativa da variância e covariância para estimar simultaneamente os parâmetros Q_k e R_k , concluindo que tem boa convergência com relação aos fatores de estimação. Já yoneyama 1994 [36] apresentou um controlador sub ótimo dual para sistemas lineares com variações paramétricas não lineares, considerando uma função de perda a ser

minimizada mediante a soma das variâncias da saída em torno de um valor de referência em dois passos futuros no tempo. São utilizados preditores ótimos para a estimação da saída futura necessária ao cálculo do sinal de controle a cada passo. Este trabalho usa o princípio de separação mostrado em Bar-Shalom e Tse (1974) [37], para dividir o problema de controle em duas etapas: estimação dos parâmetros e controle do sistema. No caso, da estimação esta é feita através do *FKE* linearizado em torno da estimativa atual dos parâmetros. Já o controle proposto tenta melhorar as estimativas em duas etapas. Primeiro, a ação de controle é escolhida para minimizar o desvio da saída de um valor de referência. Segundo, o sinal de controle ajuda a obter melhor informação sobre os parâmetros desconhecidos do sistema. Assim, o sinal de controle é calculado para minimizar o desvio da saída nos dois passos seguidos à sua aplicação no sistema. Sendo difícil para o cálculo do sinal de controle a necessidade da avaliação da saída futura à aplicação do mesmo, introduzida quando tenta-se melhorar a saída dois passos futuros ou adiantados, o qual leva a minimizar a variância da saída em função da referência, encontrando problemas de aplicação real, dado que a minimização da variância requer um algoritmo recursivo que é executado a cada iteração para comparação levando a grandes esforços computacionais, e outra dos inconvenientes é que a técnica é desenvolvida para sistemas invariantes não lineares obtendo um modelo não muito precisa de referência, além do desconhecimentos das estimativas reais Q_k e R_k evitando bons resultados para ser implementado em tempo real.

Assim, Mohamed1999, [38] trabalho na proposta de um *FKA* baseado no critério de máxima verossimilhança para a escolha adequada do peso e, portanto, dos fatores de ganho para calibrar um sistema de posicionamento *INS/GPS*, comparando os resultados com os dados de referência altamente precisos. Os resultados mostram que o *FKA* supera o convencional ajustando a variância do ruído do sistema da matriz Q_k ou a atualização de medição matriz R_k ou ambas. Para alcançar um melhor desempenho relacionado a precisão foi dividido o trabalho em duas etapas, uma de modelagem e outra de estima, dado que um modelo mais preciso permite identificar com mais precisão erros de estimativa, relacionando desta forma a otimização do algoritmo com a qualidade da informação a priori do processo e o ruído da medição que é atualizado mediante o uso do FK, mas o processo depende da adequada determinação do modelo para conseguir realizar a adaptação do parâmetro Q_k e R_k , conhecendo os limites de variância para poder escolher a adaptação requerida para o processo.

Outro trabalho analisado foi o de mbalawata [39], propõe um algoritmo variacional Bayesiano adaptativo Metropolis *vbam*, que atualiza a matriz de covariância do FK, criando assim um filtro de Kalman adaptativo variacional Bayesiano (*FKA – VB*), a ideia de algoritmo clássico Metropolis é essencialmente estimar empiricamente as covariâncias das amostras e utilizar esta estimativa para construir a proposta de distribuição que é formulada usando estimativa bayesiana recursiva, onde o termo usado para este tipo de estimativa recursiva é a filtragem Bayesiana, para o qual o modelo de espaço de estado deve ser uniforme e totalmente controlável e observável o campo de covariância utilizando, usa o inverso da distribuição de

Wishart (IW), que é inserido na equação de covariância do sistema do Filtro de Kalman para calcular os estados do sistema, concluiu-se que o modelo dá bons resultados uma vez que podem ser adaptados as diversas variáveis que resultam da manipulação da distribuição e o filtro, mas para casos não-lineares, não apresenta boa precisão, porque eles precisam ter um modelo no espaço estados bem definidos, mas, mbalawata [39], desenvolve uma aplicação muito mais parecida com a que irá a ser apresentada neste projeto, esta aplicação funciona com um (AUV), onde foi feito um filtro de Kalman adaptativo robusto ($FKAR$) mostrando adaptações de medição de covariância e do ruído das matrizes Q_k e R_k usando fatores adaptativos, a fim de controlar falhas nos sensores e os atuadores. O objetivo desejado é detectar a falha, e a executar o processo de adaptação necessária para que a característica estimada não deteriore o processo. O filtro executa um procedimento de adaptação na matriz de covariância do ruído R_k , e o processo Q_k , usando um fator de escala para a adaptação do termo R_k e outro fator de adaptação do parâmetro Q_k . A adaptação de R_k é efetuada comparando os valores reais e teóricos da matriz de covariância para cada atualização, se há uma falha do sistema, o erro é maior que o valor teórico para o caso é ajustado a matriz Q_k corrigindo o erro do atuador comparando o erro real de covariância real e teórica. A base da adaptação Q é a obtenção de um fator multiplicador para adaptação matrizes Q_k e R_k , esta adaptação é integral, concluindo que com base no erro teórico pode-se identificar que tipo de adaptação que deve ser feito sem a deterioração da estima.

Santana1999, [40] empregou um algoritmo preditivo para trabalhar com sistemas não lineares multivariáveis aplicados ao controle do fluxo de um rotor de velocidade de um motor de indução trifásico, o qual depende do conhecimento das tensões do terminador estator, corrente do estator, fluxo do rotor e velocidade de eixo do motor, identificando o fluxo do rotor e a velocidade do eixo do motor mediante a implementação de um FKE , o controle proposto preditivo baseado no modelo linearizado a cada amostragem realizada no controle da velocidade e do fluxo de rotor do MI (Motor de indução), sendo estas variáveis estimadas mediante um filtro de Kalman estendido FKE . Este trabalho foi realizado e testado mediante simulação numérica mostrando que é possível com a abordagem multivariável controlar o fluxo e a velocidade através da manipulação direta das tensões de estator, sem a necessidade de controladores de corrente, os testes realizados mostram ruídos significativos o qual indica que o trabalho pode ser melhorado mediante o tratamento dos mesmos e melhora do controle PI utilizado.

Uma das partes fundamentais deste trabalho é gerar um sistema de controle que pode ser usado e gere um desgaste mínimo dos atuadores de um sistema, de modo a deixar um controle mais robusto e seguro para ser aplicado em sistemas reais. Este aspecto, tem sido trabalhado por varios autores entre eles caliskan2014 [41], quem fez uma adaptação modificando duas etapas do FK linear para identificar a perda de eficiência de controle e a magnitude das falhas nos atuadores de um avião ($B747$), em malha fechada, para o qual trabalhou de forma eficiente o fator de controle de amplitude para quantificar os defeitos dos atuadores e realizar uma estabilização em tempo real, dado que o sistema é não linear, foi feita uma aproximação

mediante a linearização do sistema em torno de um ponto de operação, em seguida, por meio de simulações foram achadas as magnitudes das falhas dos atuadores, e o valor percentual das perdas parciais de estabilização, mas, a não linearidade do sistema gera grandes defeitos das estimativas, causando problemas para uma execução real.

Por outro lado Amoozgar [42] fez uma abordagem semelhante à que foi feita por Caliskan [41], trabalhando numa detecção de problemas e diagnóstico de avarias (*FDD*) de um helicóptero quadrotor, estes defeitos são analisados nos atuadores, para o qual é utilizado um FK em duas etapas *TSKF*, esse filtro é usado para calcular e isolar possíveis falhas em cada um dos atuadores, considerando cada falha como uma perda de eficiência dos rotores de controle, de modo que foram analisados três diferentes casos: a perda de eficiência de controle em um atuador, a simultânea perda na eficácia do controle dos motores, e a perda de controle da eficiência dos três motores com magnitude diferente, para este caso os atuadores são controlados usando técnicas (*PWM*) nas entradas dos motores aplicando a um controle para cada um dos atuadores, seu trabalho foi validado em um quadrotor (*qball - X4*).

Um estudo semelhante foi apresentado por Ma2015 [43], ele trabalhou em um (*AUV*), de seis graus de liberdade, continuando o trabalho de Ducard [44], utilizando o mesmo modelo físico, já totalmente definido, o seu trabalho foi baseado na identificação das falhas de atuadores, ele propôs o acompanhamento de vários modelos de estimativa de algoritmos adaptativos para alcançar um rápido diagnóstico de falhas causadas pelo atuador, para tal tarefa, foi usado um filtro de Kalman adaptativo, utilizando os fatores de desvanecimento, propondo uma equação de previsão da matriz covariância com parâmetros euclidianos, a metodologia implementada foi trabalhar com seis filtros, cada um para um grau de liberdade, a fim de fazer uma melhor detecção das falhas, dando origem a uma melhoria na equação de atualização da matriz covariância através da introdução de vários fatores de desvanecimento, e uma melhoria na precisão usando a norma euclidiana, que permite a realização de um menor número de cálculos.

Tabela 1.1: Resumo das referências

COMPARAÇÃO DAS RELEVÂNCIAS DE ALGUMAS REFERÊNCIAS						
Referência	Adaptação	Ccontrole	Teórico	Numérico	Real	Aplicação
Mehra1970	Q e R	Não	Sim	Sim	Não	Não
Yoneyama1994	Não	Sim	sim	Sim	Não	Não
Chui1999	Definição	Não	Sim	Não	Não	Não
Mohamed1999	Q e R	Não	Sim	Sim	Sim	INS/GPS
Santana2008	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Motor
Fathabadi2009	Q e R	Não	Sim	Sim	Não	DSK 6713
Wang2010	Q e R	Não	Sim	Sim	Sim	GPS
Amoozgar2013	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Atu-VANT
Caliskan2014	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Atu-B747
Marcos2014	Q e R	Sim	Sim	Sim	Não	Não
Ma2015	R	Não	Sim	Sim	não	Atu-UAV
Mbalawata2015	Q e R	Sim	Sim	Sim	Não	UAV
Miguel2017	Q	Sim	Sim	Sim	sim	Tanques

A tabela 2.1 mostra os aspectos relevantes de algumas referências bibliográficas analisadas, sendo a primeira coluna a referência indicando o autor e ano de publicação, a segunda coluna indica se houve neste trabalho adaptação e indica o parâmetro adaptado que pode ser Q_k e/ou R_k , a terceira coluna informa se houve aplicação de um controle ou foi aplicado só o FK como observador de estados, a quarta coluna informa se o trabalho foi teórico e teve contribuição na literatura, considerando livros, teses e artigos publicados, a quinta coluna mostra se foram feitas simulações numéricas para verificação das hipóteses propostas nestes trabalhos, a sexta coluna mostra se houve uma aplicação da proposta em um sistema físico real, e a última coluna mostra onde foi aplicado este trabalho mesmo sendo realizado como simulação ou como aplicação real.

Analisando os trabalhos reportados com relação ao estudo do FK , adaptação, controle, desenvolvimento teórico, criação de algoritmos de adaptação, análise numérica, implementação real e análise de atuadores, vemos que este conjunto de ações não são abortadas de forma completa, grande parte das referências analisadas realizam contribuições de adaptação das matrizes Q_k e R_k , mediante técnicas de variância da em relação à saída, ou fator de desvanecimento, mas não conseguem ser analisadas para malha aberta e fechada ao mesmo tempo, ou sistemas lineares e não lineares ou sistemas $SISO$ e $MIMO$, a diferença apresentada nesta proposta de adaptação em comparação com as mostradas em trabalhos consultados, é a abordagem completa que se faz dos itens anteriormente citados, encontrando um algoritmo de fácil implementação o qual é obtido mediante a análise da variância de entrada e saída do sistema dinâmico, não gerando grande custo computacional em sua aplicação dado que a variância da saída é calculada mediante a implementação de um filtro de primeira ordem

de variância conhecida permitindo realizar a adaptação da matriz correspondente à perturbação, partindo do fato que as perturbações são as principais causas das instabilidades ou divergências do sistema com relação ao ponto de equilíbrio mostrando de forma clara como pode ser aplicada a diferentes sistemas (Visando em aplicações na área de petróleo), além disso, será demonstrado mediante simulações numéricas que a técnica reage de forma forte a grandes perturbações e quando a perturbação não for tão grande o esforço é feito pelo controle e não pelo atuador, protegendo desta forma os mesmos, conseguindo encontrar as estimativas da matriz Q_k para um FK estático gerando bons resultados em malha aberta e fechada demonstrando que quando é feita uma comparação entre os dois filtros analisados o FKA proposto apresenta uma vantagem maior em filtragem e reação frente a perturbações mostrando sempre respostas mais suaves e uniformes comparadas com o caso sem adaptação, permitindo aproveitar desta forma os resultados obtidos os quais são aplicados a sistemas não lineares tratados aproveitando a planicidade diferencial do sistema e linearizados mediante a base canônica de Brunovsky encontrando bons resultados, concluindo que esta proposta é bem completa dado que pode ser implementada para sistemas SISO, MIMO, Lineares e Não lineares com baixo custo computacional, fácil implementação e boa performance das respostas obtidas nos diferentes sistemas dinâmicos analisados, resultados que não tem sido encontrados nos diferentes trabalhos analisados.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento esta organizado da seguinte forma, inicia-se com uma introdução e a identificação da proposta do problema e a importância do desenvolvimento deste projeto, posteriormente no capítulo 2 se mostra toda a base da teórica de controle que foi usada para implementar o projeto, onde se fala de diferentes técnicas de controle, como LQR, LQG, FK variante e invariante no tempo e FKA , este capítulo finaliza mostrando a importância de trabalhar com sistemas adaptativos, seguidamente no capítulo 3, é mostrado um suporte estatístico, dado que na proposta desenvolvida se trabalha com propriedades Markovianas para determinar a variância de sistemas dinâmicos lineares, termina-se mostrando como calcular a variância para um sistema de segunda ordem, já no capítulo 4, se mostra a proposta de adaptação para um sistema em malha aberta e malha fechada, terminando com um exemplo onde é mostrado o cálculo das constantes da adaptação, no capítulo 5 se apresenta uma seção de simulações numéricas para verificar a proposta de adaptação proposta, já no capítulo 6 se mostram os resultados obtidos om um sistema real (Uma bancada de quatro tanques), a qual foi usada para verificar a proposta de adaptação em malha aberta e malha fechada, finalizado com o capítulo 7 onde são mostradas as conclusões e recomendações.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo mostrar alguns conceitos fundamentais que serão usados no desenvolvimento do projeto. O capítulo inicia mostrando de maneira básica os diferentes controladores ótimos como controle LQR e LQG , e ainda mostra uma comparação do Filtro de Kalman variante e invariante no tempo para sistemas simples e a definição do filtro de Kalman adaptativo no qual é baseado o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

O controle ótimo é uma técnica matemática usada para resolver problemas que precisam de otimização em sistemas que evoluem no tempo, e que são sensíveis a perturbações externas, desta forma a solução do problema leva a definir o comportamento das variáveis de controle, indicando o comportamento das mesmas para conseguir um estado final ótimo [1].

O controle ótimo é o conjunto de técnicas para determinar o controle e trajetórias de um sistema dinâmico que minimiza uma função sobre um intervalo de tempo [1]. As técnicas de controle ótimo são diversas, e podem mudar de acordo com a aplicação, mas sempre o problema pode ser tratado de forma geral seguindo as seguintes instruções.

1. Definir o modelo matemático do sistema controlado;
2. Especificar o critério de contorno para o estado;
3. Descrever as restrições sobre o estado e o controle;
4. Descrever as variáveis do problema que estão livres.

Mesmo aplicando as instruções indicadas anteriormente, a totalidade dos problemas de controle ótimo não pode ser resolvidos analiticamente, precisam de algum tipo de ajuste o qual é feito de acordo com a aplicação para obter resposta adequada [1].

2.2 METODOLOGIA DE CONTROLE LQR

O controle LQR é analisado como uma aplicação particular de um problema de otimização, com o objetivo de procurar um vetor de entrada u que minimiza a função $J(\cdot)$ como mostra a equação 2.1, tendo como principal restrição de aplicação a definição de um modelo do sistema em espaço de estados como mostra a equação 2.2:

$$J(x, Q, u, R) \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.2)$$

A descrição das equações anteriores correspondem a um controle ótimo, no caso do caso do Regulador Linear Quadrático, o índice de desempenho J é um mapeamento dos espaços dos vetores de estados e do controle que são ponderados pelas matrizes constantes Q e R , respectivamente, desta forma foram identificadas algumas vantagens do controlador LQR [48]:

- a Obter uma lei de controle em malha fechada;
- b Os custos de computação são baixos;
- c Controle robusto com margem de estabilidade garantido e margem de fase grande [49].

Este controle tem como desvantagens a necessidade de conhecer os estados completos para realizar a realimentação do sistema, e a maior desvantagem é que não pode ser usado este controle se o sistema tiver ruído ou perturbações externas [48].

2.2.1 Problemas do controle LQR

O problema do controle LQR em relação a equação algébrica de Riccati EAR , é a escolha das matrizes de ponderação e suas relações com os métodos de busca ótima. A EAR por sua definição é estável, dado que as matrizes de ponderação e condições cumprem as condições que obedecem rigorosamente as restrições que garantem a existência de uma solução ótima, assim o LQR é formulado por meio de um índice de desempenho quadrático e tem como restrição a equação de estado linear invariante no tempo como apresenta a equação 2.3 [48].

$$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t)P(t)x(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T |(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u)| dt \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.4)$$

Sendo $x \in R^n$, e $u \in R^m$, o conjunto A, B controlável, o par A, C é observável, $P(T) \geq 0, Q(T) \geq 0$, e $R > 0$. Todas simétricas $Q \in R^{n \times n}$, e $R \in R^{m \times m}$ são matrizes definidas e semi-definidas, positivas respectivamente. Onde $[t_0, T]$ é o intervalo de tempo de interesse do problema [48].

2.2.2 Solução do controle LQR

O propósito do projeto *LQR* é estabelecer uma relação entre as energias do vetor de estado $x(t)$ e do vetor de controle $u(t)$, sendo o sistema em espaço de estados representado nas equações 2.5 e 2.6:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.5)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.6)$$

O objetivo do trabalho e a determinação da lei de controle $u(t)$ que minimiza a função de custo quadrática, também conhecida como índice de desempenho quadrático a ser minimizada, com os limites de integração entre 0 e ∞ representada pela equação 2.7 [5]:

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} \left| (x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)) \right| dt \quad (2.7)$$

A lei de controle estabelecida está em função das matrizes de $Q \in R^{n \times n}$ de estado simétrica, semi-definida positiva ($Q \geq 0$) e de controle $R \in R^{m \times m}$ simétrica e definida positiva ($R > 0$) [5]. Se o sistema é estável, a lei de controle que estabiliza o sistema e minimiza o critério, é dada pela equação 2.8:

$$u(t) = -kx(t), k \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.8)$$

Assim, o projeto de controle ótimo é reduzido à determinação dos elementos da matriz de realimentação dos estados K mostrados na equação 2.9:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.9)$$

Sendo P , uma matriz definida positiva obtida da solução da equação algébrica de Riccati, representada pela equação 2.10:

$$A'P + AP - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (2.10)$$

2.2.3 Escolha das matrizes Q e R.

A escolha dos parâmetros das matrizes Q e R estão relacionados com a lei de controle linear do sistema, composta pelos vetores de estado e do vetor de controle que são usados para minimizar a equação de Riccati [50], levando à necessidade do conhecimento dos vetores de estado que serão minimizados e os valores máximos dos estados e da lei de controle, e

finalizasse realizando simulações destes valores, recebendo um ajuste mais fino para encontrar os valores que sejam mais adequados para a aplicação realizada [51], o que geralmente não é fácil de fazer, por essa razão se procuram metodologias adaptativas para estes ajustes.

2.2.4 Robustez do controle LQR

O controle *LQR* garante estabilidade, robustez, apresentando uma margem de fase mínima de 60° , uma margem de ganho crescente infinito, e uma margem de ganho decrescente de 0.5. Que garante que o sistema em malha fechada com controle *LQR* seja estável para qualquer incremento no ganho, e para todos os ganhos superiores, é a metade do valor nominal do projeto. [52]

A adição da parte integral elimina os erros de regime permanente ocasionado pelas perturbações, o que proporciona robustez frente às variações dos parâmetros do modelo do sistema, a parte integral é importante nos casos que o modelo precise de pequenos sinais no cálculo do controlador *LQR*, onde o modelo depende do ponto de trabalho. O erro causado ao projetar um controle longe do ponto do trabalho pode ser cancelado mediante a implementação da ação integral. Se é analisada a robustez do projeto *LQR*, a ação integral permite obter erro estacionário nulo, mesmo o modelo apresentando erros grandes [53].

Outra vantagem do controle *LQR* em relação à sua robustez é que apresenta uma sensibilidade inferior ou igual a unidade para toda a margem de frequências. Assim é de supor que a função de transferência do sistema completo tem uma variação mínima em relação à variação dos elementos do sistema, para qualquer frequência [53].

2.3 CONTROLE ADAPTATIVO

Existem muitos processos e situações onde os parâmetros da planta podem variar com o tempo, por diferentes causas, por exemplo no caso da manipulação de um robô que se movimenta a variação da carga, faz uma variação dos parâmetros do sistema. Se a função de transferência da planta muda, então é necessário uma nova sintonização dos parâmetros do controlador, no caso de um controle *PID*, deve ser feita a uma nova sintonização dos parâmetros: derivativo, proporcional e integral. O sistema de controle adaptativo é baseado no uso de um microprocessador que faz a função do controlador. Este dispositivo permite que o modo e os parâmetros do controle sejam ajustados ou adaptados em circunstâncias diversas, modificando-as conforme as circunstâncias mudam. Assim, um sistema de controle adaptativo está dividido em três etapas de operação [2]:

1. Começa a operar com as condições definidas no controlador tendo como base uma condição inicial considerada;

2. O desempenho desejado é comparado continuamente com o desempenho atual do sistema;
3. O modo de sistema de controle e os parâmetros são automáticos e continuamente ajustados para minimizar a diferença entre o desempenho atual do sistema e o desejado.

O controle adaptativo é aquele que identifica a planta para ajustar os parâmetros do controlador para valores ideais. Em qualquer problema de projeto de sistemas de controle vai ser necessário a distinção de oito considerações importantes [54]:

1. Estabilidade;
2. Comportamento dinâmico;
3. Monitoramento de desempenho;
4. Restrições ;
5. Robustez;
6. Velocidade de convergência;
7. Capacidade de rastreamento;
8. Estabilidade numérica.

Este controle enfatiza no seguimento do sinal de referência, considerando o projeto de controladores com base em um modelo capaz de prever saídas futuras, em função das saídas passadas e entradas passadas e presentes, fazendo que ação de controle em um instante de tempo presente, permitindo transferir a saída futura para um valor desejado. Estocasticamente falando, o equivalente deste tipo de controle é um controlador de variância mínima, onde se faz a minimização de uma função para garantir a estabilidade da planta [55]:

Os controles adaptativos podem assumir algumas formas, as mais comuns são: Controle com ganho escalonado, Regulador autoajustável e Sistemas adaptativos por modelo de referência.

2.3.1 Controle com ganho escalonado

Este controle é conhecido como controle adaptativo pré-programado, variações prévias nos parâmetros do controlador são feitas com base em uma medição auxiliar de uma variável de processo. A figura 2.1 mostra este processo [2].

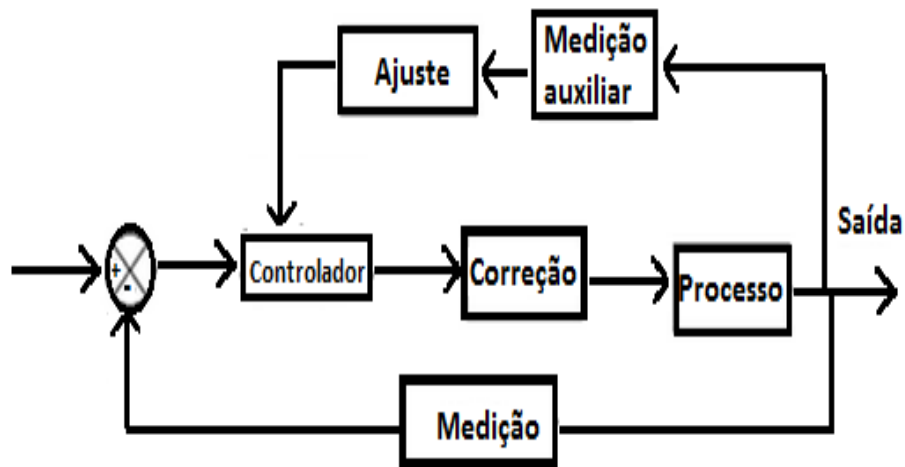


Figura 2.1: Controle de ganho escalonado. [2]

Uma desvantagem deste sistema é que os parâmetros de controle têm que ser determinados para muitas condições de operação, com a finalidade que o controlador possa selecionar um conjunto de parâmetros para se ajustar às condições predominantes. Portanto, uma vantagem é que as mudanças podem ser feitas rapidamente quando as condições mudarem [2].

2.3.2 Regulador auto-ajustável

Com o controle auto-ajustável o sistema é sintonizado continuamente, modificando os parâmetros baseados no monitoramento da variável do sistema que está sendo controlado e da saída a partir do controlador. A figura 2.2 mostra estas características [2], onde o auto-ajuste é normalmente encontrado em controladores *PID* comerciais, geralmente conhecidos como auto-sintonizáveis. Quando o operador pressiona um botão o controlador injeta um pequeno distúrbio no sistema e mede a resposta, a qual é comparada com a resposta desejada e os parâmetros do controlador são auto-ajustados pelo método de sintonização de Ziegles-Nichols, para que a resposta atual seja próxima à resposta desejada [2].

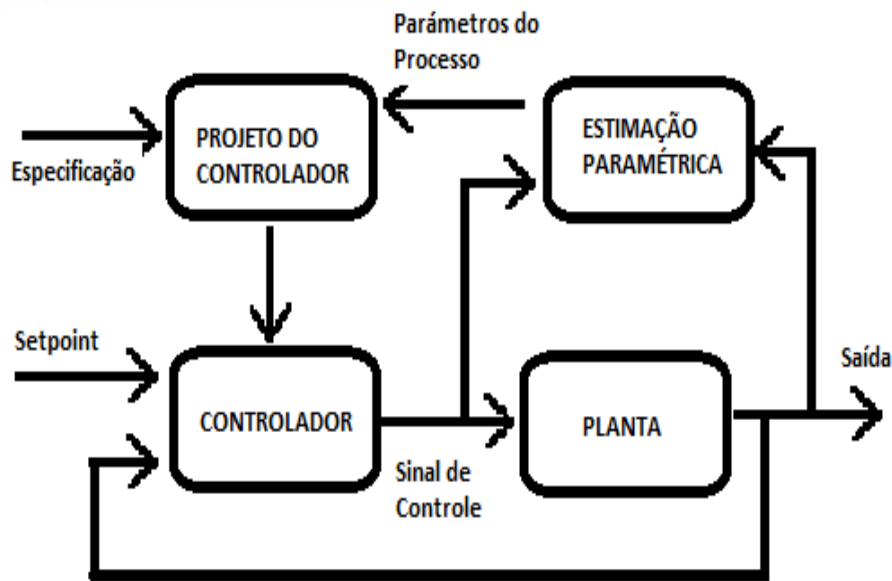


Figura 2.2: Controle adaptativo [3].

2.3.3 Sistemas adaptativos por modelo de referência

O sistema adaptativo por modelo de referência é um importante controlador adaptativo. Ele pode ser considerado como um servo sistema adaptativo, no qual o desempenho desejado é expresso em termos de um modelo de referência que dá a resposta desejada ao sinal de comando [4]. Um diagrama de blocos do sistema é apresentado na figura 6.16.

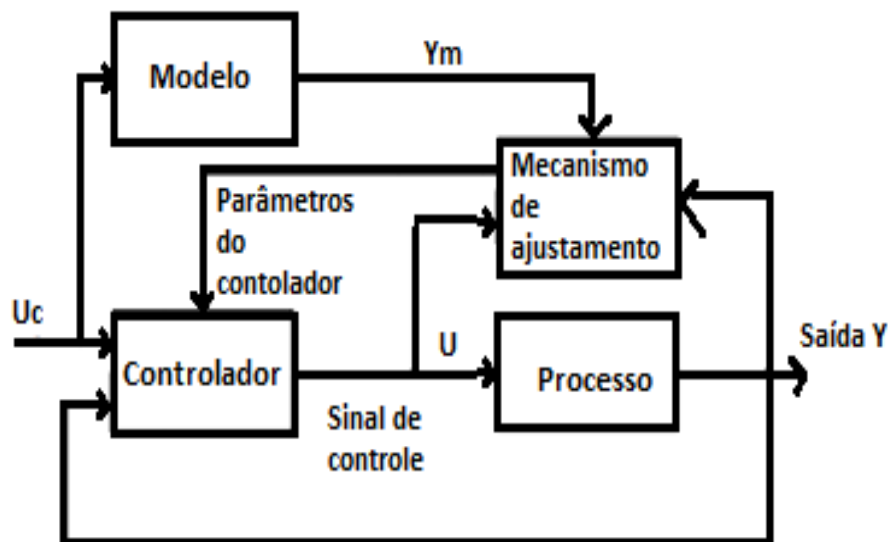


Figura 2.3: Controle reajustável [4].

O sistema tem uma malha de realimentação comum (malha interna), composta pelo processo e o controlador, e uma outra malha de realimentação que modifica os parâmetros do

controlador (malha externa). Os parâmetros são modificados com base na realimentação a partir do erro, que é a diferença entre a saída do sistema e a saída do modelo de referência. O mecanismo de ajustamento dos parâmetros do controlador pode ser obtido por dois métodos [4]:

1. Controle usando o método do gradiente ou aplicando teoria de estabilidade (Teoria de Estabilidade de Lyapunov);
2. Teoria para Estabilidade de Entrada-Saída.

Portanto, o problema principal é determinar o mecanismo de ajustamento para que seja obtida uma estabilidade do sistema, o qual indica que o erro deve tender a zero [4].

2.4 FILTRO DE KALMAN

No ano de 1960, Rudolph. E. Kalman publicou um trabalho que descreve uma solução de maneira recursiva para o problema de filtragem de dados discretos em sistemas lineares. O trabalho mostra que, partindo de alguns valores iniciais, podem ser preditos e ajustados os parâmetros de modelos através de cada nova medição, obtendo a estimativa do erro em cada atualização. A sua habilidade para incorporar os efeitos de erros e sua estrutura computacional fez com que o *FK* tivesse um amplo campo de aplicações, especialmente no que se refere à análise de trajetórias em visão computacional e controle de sistemas dinâmicos, devido ao fator que o filtro permite analisar sistemas que estão expostos a ruídos e perturbações que são analisados de maneira estocástica. Por isso, teoricamente, o *FK* é conhecido como um estimador na solução do problema Quadrático Linear, que é o problema de estimar o estado instantâneo de um sistema linear perturbado por um ruído branco [21].

Existem muitas definições do *FK*, mas é basicamente um algoritmo recursivo muito eficiente. E sua utilização é baseada na estimativa das variáveis de estado de sistemas representados por equações de estado lineares. Quase sempre é considerado que o sistema é perturbado por ruídos brancos e Gaussianos, de forma que os estados possam ser tratados como variáveis aleatórias gaussianas.

Os métodos de resolução mediante a teoria do *FK* permitem a utilização de uma estimativa recursiva, na qual a informação, a priori, sobre o estado estimado se combina com as medida para atualizar o parâmetro estimado [56]. O *FK* pode estimar de forma contínua ou discreta.

O *FK* é um algoritmo de processamento de dados ótimos recursivos. Ótimo porque minimiza um critério e porque incorpora toda a informação que é subministrada para determinar a filtragem; e recursivo porque não precisa manter os dados prévios, o que facilita sua

implementação em sistemas de processamento em tempo real. Este algoritmo é de processamento de dados pelo fato de que foi projetado para ser usado em sistemas discretos. O objetivo do *FK* é estimar o estado de maneira ótima, de modo que possa ser minimizado o índice de erro quadrático meio [1].

Na filtragem tradicional do tipo resposta impulsiva finita (*FIR*) ou do tipo resposta impulsiva infinita (*IIR*), assume-se que os parâmetros do processo estocástico de entrada são conhecidos, tais parâmetros determinam as características do sinal de entrada. Porém, em muitos casos práticos, no mínimo algum parâmetro de entrada ou saída pode mudar ou não pode ser conhecido de forma exata, o qual faz necessário a implementação de um filtro que possua o atributo de auto aprendizado, de maneira que este possa ajustar-se automaticamente de acordo com cada situação [57].

Entre os algoritmos adaptativos usados está *LMS* (*Least Mean Squares*), que constitui uma das técnicas mais conhecidas para a implementação de um filtro adaptativo. O *LMS* utiliza um algoritmo de gradiente estocástico para adaptar a carga de um filtro. Esta adaptação consiste no ajuste contínuo (e adaptativo) dos valores dos coeficientes do filtro, tendo como métrica a minimização do erro no sentido da média dos quadrados [57].

2.4.1 Vantagens do filtro de Kalman

O Filtro é projetado supondo que o sistema pode ser descrito por meio de um modelo estocástico linear, onde o erro associado, tanto ao sistema quanto à informação adicional que é incorporado nele mesmo, tem uma distribuição normal com média zero e variância determinada [1]. A solução é ótima pelo fato de que o filtro combina toda a informação observada e o conhecimento prévio do comportamento do sistema para produzir uma estimativa do estado de maneira que o erro é minimizado estatisticamente. O termo recursivo faz referência a que o filtro recalcula a solução a cada nova observação ou medida incorporada ao sistema [1].

O *FK* é o principal algoritmo para estimar sistemas dinâmicos representado em forma de espaço de estados. Nessa representação, o sistema é descrito pelo conjunto de variáveis denominadas estados. Os estados contêm toda a informação relativa ao sistema em instantes específicos de tempo. Esta informação deve permitir a inferência do comportamento passado do sistema, com o objetivo de prever seu comportamento futuro [1].

O que faz o filtro interessante é precisamente a habilidade para prever o estado de um sistema no passado, presente e futuro, mesmo quando a natureza do sistema modelado seja desconhecida. Na prática, as variáveis dos estados individuais de um sistema dinâmico não podem ser exatamente determinadas pela medição direta. Pelo qual sua medição é feita pelos processos estocásticos que envolvem algum grau de incerteza na medição [1].

Os modelos em forma de espaço de estados de processos aleatórios estão baseados na

chamada "propriedade de Markov". Segundo esta propriedade, o futuro do processo com respeito ao passado é independente, sempre que não seja conhecido o estado presente. Em um sistema deste tipo o estado do processo resume toda a informação relativa ao passado que resulta relevante para prever o futuro [1].

O algoritmo do *FK* pode ser analisado usando a teoria de controle para sistemas realimentados [58], sendo assim, que a efetividade do filtro está na identificação de um estado em um tempo k . Assim, o sistema realimentado obtém uma resposta (*medida ruidosa*). Sendo representado duas atualizações importantes que são de tempo e de medida, onde as atualizações de tempo é usada para identificar um estado nesse tempo e a variância do erro para a estimativa em um tempo próximo $k + 1$ e a atualização da medida é responsável pela realimentação, a qual é usada para obter uma estimativa futura melhorada [59].

2.4.2 Características do filtro de Kalman

- a O *FK* é implementável, de forma discreta, em um computador digital, permitindo economizar recursos e uma melhor resposta que a obtida com um filtro analógico [60];
- b O *FK* não exige o conhecimento das dinâmicas determinísticas de um sistema. Normalmente, os processos aleatórios são analisados de maneira estacionária e muitas aplicações de importância incluem processos estocásticos não estacionários [60];
- c O *FK* é compatível com a formulação matemáticas de sistemas dinâmicos em espaço de estados, assim permite a implementação de controladores opcionais para sistemas dinâmicos [60];
- d A descrição matemática do *FK* apresenta a vantagem sobre outros filtros, como o filtro de Wiener, que em sua representação matemática é mais simples, obtendo assim ótimos resultados, pelo qual, sua implementação é superior na maioria dos casos e é uma ferramenta muito utilizada para estudantes de engenharia [60]. O *FK* fornece as informações matemáticas necessárias para detectar, estatisticamente, e rejeitar medições anômalas [60];
- e O *FK* é o principal algoritmo para estimar sistemas dinâmicos representados na forma de espaço - estados, dado que o sistema é descrito por um conjunto de variáveis de estados;
- f O estado contém toda a informação relativa ao sistema em um tempo determinado.

2.4.3 Definição do Filtro de Kalman Contínuo

Seja a planta definida como apresentam as equações 2.11 e 2.12 [5]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad (2.11)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (2.12)$$

Sendo $x(t) \in R^n$ o vetor de estados, $u(t) \in R^m$ e $y(t) \in R^q$ são os vetores de entrada e de saída, respectivamente, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ e $C \in R^{q \times n}$ são matrizes que representam o modelo do sistema, $v(t) \in R^n$ é o ruído do processo, $v(t) \in R^q$ o ruído de medida, que são sinais não correlacionados, ambos são ruídos brancos Gaussianos com média zero e matrizes de covariâncias w e v , respectivamente [5], como mostram as equações 2.13 e 2.14:

$$E \{w(t)w(t)'\} = W \geq 0 \quad (2.13)$$

$$E \{v(t)v(t)'\} = V > 0 \quad (2.14)$$

Sendo w a matriz de covariância do ruído no estado positivo semi-definido, v é a matriz de covariância do ruído de média-positiva definida. Adicionalmente é assumido o ruído dos sinais como não correlacionados entre si, como apresenta a equação 2.16 [5].

$$E \{w(t)v(t)'\} = 0 \quad (2.15)$$

$$E \{v(t)w(t)'\} = 0 \quad (2.16)$$

O sistema anterior pode ser representado no diagrama de blocos da Figura 2.4.

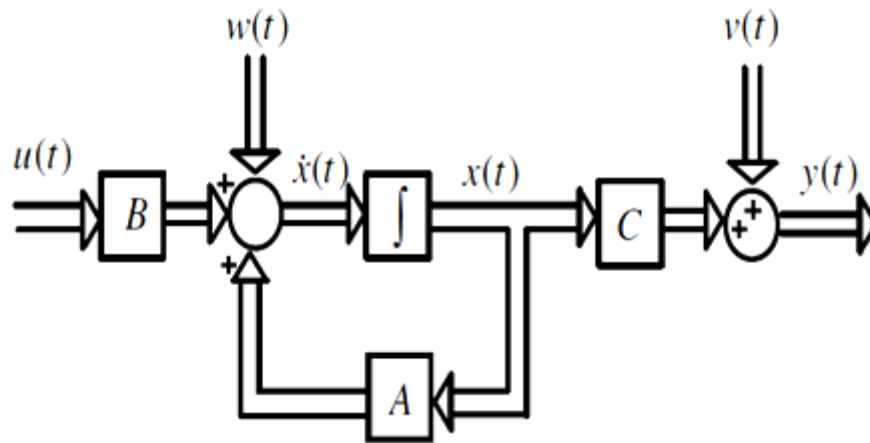


Figura 2.4: Diagrama de Blocos do sistema com ruído de estado e medida [5]

O problema a ser resolvido em regime permanente consiste em:

- Obter-se uma estimativa $x'(t)$ do estado $x(t)$, partindo da observação da saída $y(t)$ [5].
- A estrutura de um FK é semelhante ao de um observador de estados [5].

A dinâmica do FK é dada pela equação 2.17:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.17)$$

O erro entre $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ é dado pela equação 2.18:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.18)$$

Substituindo a equação 2.12 na equação 2.17, o FK pode ser representado como apresenta a equação 2.19:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - K(t)C)\hat{x}(t) + wu(t) - K(t)v(t) \quad (2.19)$$

Assim, o FK é um sistema dinâmico, onde a matriz de ganho ótimo $L(t)$ é representada pela equação 2.20.

$$L(t) = PC'V^{-1} \quad (2.20)$$

Sendo P a única solução simétrica definida positiva da equação Algébrica de Riccati, a qual é representada pela equação 2.21 [5].

$$PA' + AP - PC'v^{-1}CP + w = 0 \quad (2.21)$$

Onde o FK deve cumprir que:

$$R_e[\lambda_1(A - K(t))] < 0, (i = 1, 2, \dots, n)$$

Então a estimativa gerada pelo filtro é ótima no sentido que a variância do erro de estimação seja mínima, como apresenta a equação 2.22 [5]:

$$\min \sum_{i=1}^n E \{[x_i(t) - \hat{x}(t)]\} \quad (2.22)$$

2.4.4 Exemplo de filtro de Kalman contínuo

No seguinte exemplo deseja-se obter o ganho ótimo do sistema, baseado na matriz que minimiza a equação de Riccati 2.24 [61], para tal caso são feitas as seguintes considerações: Ruído do processo $v(t)$ tem média zero e covariância $v = 0.09$, perturbação na medição é assumido com média zero e covariância $w = 0.025$, os estados são inicializados como: $x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$, com covariância de estado inicial $P_0 = I_{2 \times 2}$, então o sistema descrito em espaço de estado representado pelas equações 2.23 e 2.24 é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} w \quad (2.23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + v \quad (2.24)$$

Baseando-se no modelo de espaço de estado apresentado na equação 2.11, para descrever o comportamento do *FK* do sistema, como foi mostrado nas equações 2.19 à 2.21. Substituindo os parâmetros das matrizes do sistema em espaço de estado tem-se as equações 2.25 à 2.27:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} v + K(t)(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t)) \quad (2.25)$$

$$L(t) = \begin{bmatrix} P1 & P2 \\ P2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T (0.25)^{-1} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 & P2 \\ P2 & P3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P1 & P2 \\ P2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}^T \\ &- \begin{bmatrix} P1 & P2 \\ P2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T (0.25)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 & P2 \\ P2 & P3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (0.09) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para dar solução à equação 2.27, a qual é uma solução numérica, foi utilizado como ferramenta o software MATLAB. Obtendo assim a solução da equação de Riccati como representam a equação 2.28:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0066 & -0.0088 \\ -0.0088 & 0.0153 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Então o ganho ótimo é dado pela equação 2.29.

$$L(t) = \begin{bmatrix} 0.0066 & -0.0088 \\ -0.0088 & 0.0153 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T (0.25)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.264 \\ -0.352 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.4.5 Filtro de Kalman discreto

O *FK* é usado para analisar problemas onde são considerados sistemas diferentes aos sistemas ideais determinísticos, dado que não existe realmente um modelo matemático perfeito de um sistema real, portanto o sistema estará exposto a perturbações do modelo ou dos sensores que não são perfeitos, pelo qual é necessário desenvolver modelos que consideram as incertezas, e que possam estimar de maneira ótima os dados de interesse do sistema, que pode apresentar problemas de modelagem e que precisa ser controlado de forma ótima [62].

Esta informação deve permitir a inferência do comportamento passado do sistema, presente ou futuro, dependendo do tipo de problema analisado por parte do FK que pode ser alisado, filtragem ou predição. O objetivo principal do FK é estimar os estados de uma maneira ótima, de maneira que possa se minimizar o índice do erro quadrático médio [62].

Para o caso discreto, que é de interesse, o FK é definido como mostram as equações 2.30 e 2.31 [63]:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (2.30)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.31)$$

Onde A , B , C são os parâmetros do espaço de estados do sistema discreto e os sinais de entrada $v(k)$ e $w(k)$, são processos aleatórios considerados *ruídos brancos estacionários com média zero, variância R e Q , respectivamente e não correlacionados entre si*, pelo qual apresentam as seguintes propriedades [61]:

$$\begin{aligned} E \{v_k\} &= E \{w_k\} = 0, \forall j, k \\ E \{v_k^T v_k\} &= R \\ E \{v_k^T v_j\} &= 0 \\ E \{v_j^T w_k\} &= 0, \forall j, k \\ E \{w_k^T w_j\} &= 0, \forall k \neq j \\ E \{w_k^T w_k\} &= Q \end{aligned}$$

Assim a matriz de covariância conjunta pode ser expressada como mostra a equação 2.32:

$$E\left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k^T & v_k^T \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

Deste modo, o problema pode ser abordado de três formas diferentes:

”**Predição**” É obtida a estimativa $\hat{x}(k+1)$, conhecendo as medidas $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k)$

”**Filtragem**” Se obter a estimativa $\hat{x}(k)$, conhecendo as medidas $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k)$

”**Alisado**” é obtida a estimativa $\hat{x}(k-1)$, conhecendo as medidas $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k)$

O critério para obter a matriz de covariância ótima é minimizar o erro estimado

$$P(n) = E [e(n)e^T(n)] \quad (2.33)$$

Com $n = k + 1$, $n = k$ e $n = k - 1$, independente da etapa de filtragem, predição ou alisado, a matriz de covariância do erro $e(k)$ é minimizada.

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (2.34)$$

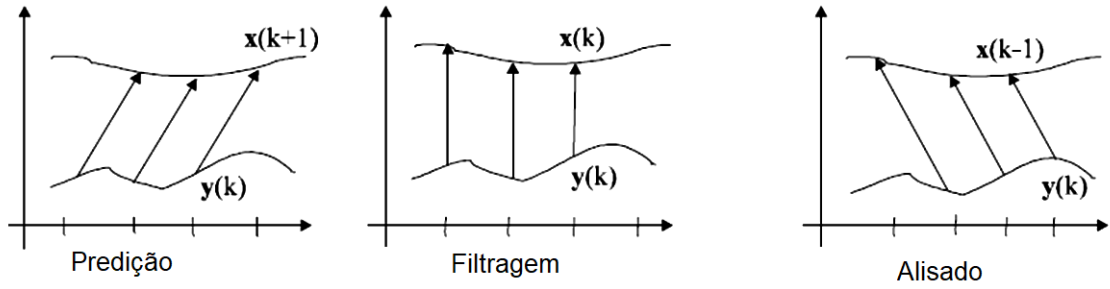


Figura 2.5: Estados de um filtro de Kalman

Quando a matriz de covariância $P(k)$ é minimizada, qualquer forma quadrática

$$\alpha^T P(k) \alpha \quad (2.35)$$

é minimizada, sendo $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. É assumido que se conheça o valor esperado ou valor médio do estado inicial $X(0)$;

$$E[x(0)] = \bar{x}(0) \quad (2.36)$$

Que é um valor determinístico, além disso, se conhece a matriz de covariância do estado inicial

$$E\left[[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]^T\right] = P_0 \quad (2.37)$$

O estado inicial e o ruído cumprem

$$E\left[[x(0) - \bar{x}(0)]v^T(k)\right] = E\left[[x(0) - \bar{x}(0)]w^T(k)\right] = 0 \quad (2.38)$$

Sendo independentes, brancos e de média zero. Assumidas todas as condições anteriores, o objetivo é determinar a estimação $\hat{x}(k+1)$, conhecendo as média contaminadas pelo $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k)$, para que a matriz $P(k+1)$, de covariância do erro, no instante $(k+1)$ seja mínima. A solução encontrada por Kalman e Bucy foi um estimador ótimo dos estados que tem por equação:

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + K(k)[y(k) - \hat{y}(k)] = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) \quad (2.39)$$

E o digrama de blocos é representado na figura.

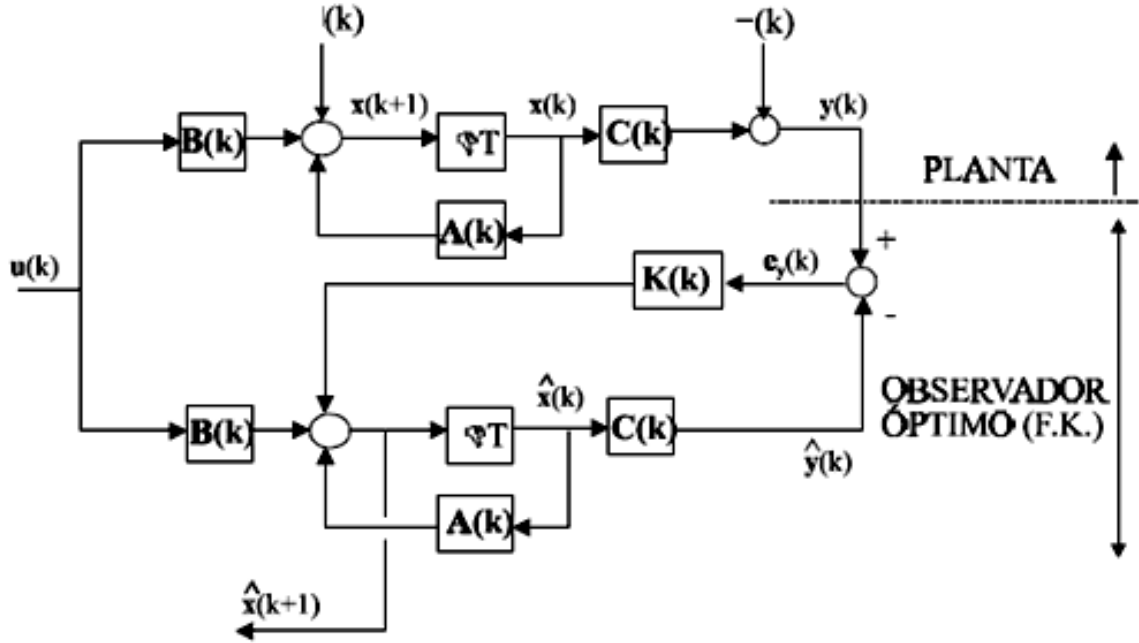


Figura 2.6: Filtro de Kalman com Predição

O erro do sistema no instante $k + 1$ é:

$$e(k + 1) = x(k + 1) - \hat{x}(k + 1) = [A(k) - K(k)C(k)]e(k) - L(k)\omega(k) + v(k) \quad (2.40)$$

O qual é representado como:

$$e(k + 1) = \hat{A}(k)e(k) - K(k)\omega(k) + v(k) \quad (2.41)$$

e

$$e^T(k + 1) = e^T(k)\hat{A}^T(k) - \omega(k)^T K^T(k) + v^T(k) \quad (2.42)$$

Onde a matriz $A(k)$ é determinística e o objetivo é minimizar a matriz de covariância do erro:

$$P(k + 1) = E [e(k + 1)e^T(k + 1)] \quad (2.43)$$

E não o índice escalar

$$J = \frac{1}{2}e^T(k + 1)e(k + 1) \quad (2.44)$$

Substituindo as equações do erro e erro transposto, tem-se:

$$\begin{aligned} P(k + 1) = E [e(k + 1)e^T(k + 1)] = & \hat{A}(k)P(k)\hat{A}^T(k) \\ & - \hat{A}^T(k)E[e(k)\omega^T(k)]K^T(k)\hat{A}(k)E[e(k)v^T(k)] - K(k)E[\omega(k)e^T(k)]\hat{A}^T(k) \\ & + E[v(k)e^T(k)]\hat{A}^T(k) + K(k)R(k)L^T(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (2.45)$$

E como:

$$E[e(k)w^T(k)] = \widehat{A}^T(k+1)E[e(k-1)w^T(k)] \quad (2.46)$$

Assim, o valor esperado pode se expressar como mostra a seguinte equação:

$$\begin{aligned} E[e(k)w(k)] &= \widehat{A}(k-1)E[e(k-1)w^T(k)] = \widehat{A}(k-1)\widehat{A}(k-2)E[e(k-2)w^T(k)] = \\ &\widehat{A}(k-1)\widehat{A}(k-2)\dots\widehat{A}(0)E[e(0)w^T(k)] = \widehat{A}(k-1)\widehat{A}(k-2)\dots\widehat{A}(0)E[[x(0) - \widehat{x}(0)]w^T(k)] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como:

$$E[[x(0) - \widehat{x}(0)]w^T(k)] = 0 \quad (2.48)$$

Os termos:

$$E[e(k)v^T(k)] = E[w(k)e^T(k)] = 0 \quad (2.49)$$

Então,

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \widehat{A}(k)P(k)\widehat{A}^T(k) + K(k)R(k)K^T(k) + Q(k) = [A(k) - K(k)C(k)]P(k)[A(k) \\ &\quad - K(k)C(k)]^T + K(k)R(k)K^T(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para minimizar $P(k+1)$, é derivada a equação anterior em função de $K(k)$ obtendo o valor mínimo da função.

$$\frac{dP(k+1)}{dK(k)} = 0 = -2A(k)P(k)C(k)^T + 2K(k)C(k)P(k)C(k)^T + 2K(k)R(k) \quad (2.51)$$

Manipulando a equação anterior é obtida

$$K(k) = A(k)P(k)C^T(k)[R(k) + C(k)P(k)C^T(k)]^{-1} \quad (2.52)$$

$K(k)$ é o valor que faz mínima a forma quadrática $\alpha^T P(k+1)\alpha$

$$K(k) - A(k)P(k)C^T(k)D^{-1}(k) = 0 \quad (2.53)$$

$$K(k) = A(k)P(k)C^T(k)[R(k) + C(k)P(k)C^T(k)]^{-1} \quad (2.54)$$

É importante notar que

$$e(0) = x(0) - \widehat{x}(0) = x(0) - \bar{x}(0) \quad (2.55)$$

Assim, avaliando a equação anterior, a matriz de covariância do erro é representada como:

$$P(k+1) = Q(k) + [A(k) - K(k)C(k)]P(k)A^T(k) \quad (2.56)$$

A equação anterior representa a equação de Riccati, estas equações mediante algumas manipulações matemáticas podem ser representados como mostra a equação 2.57:

$$\begin{cases} P(k+1) = A * P(k)A^T + Q \\ K(k+1) = A * P(k) * C^T * (C * P(k)C^T + R)^{-1} \\ P(k+1) = [I - K(k) * C] * P \end{cases} \quad (2.57)$$

A equação 2.57, mostra que pode ser calculada a matriz de covariância sem a necessidade de calcular o ganho de Kalman, porém, este é atualizado em cada um dos processos recursivos, em resumo, neste procedimento o *FK* discreto pode ser programado mediante o algoritmo mostrado na figura 2.7, onde se mostra um organograma do *FK* discreto, sendo o primeiro bloco a inicialização dos estados e a matriz de covariância do filtro, o segundo bloco representa:

- O calculo do Ganho de Kalman $K(k)$, o qual depende de cada passo de tempo discreto, representado com a letra k ,
- A (Matriz de transição de estados);
- B (é a relação da entrada com o controle do estado x);
- C (Relação entre a medição e vetor de estados no instante k);
- $P(k)$ representa a covariância do erro associada à estimação a priori.

O terceiro bloco representa a predição do Filtro de Kalman, aqui está sendo calculado os estados atualizados do filtro, os quais dependem tanto do sistema, como do ganho calculado, o quarto bloco representa a etapa de correção ou atualização, onde é atualizada a matriz de covariância e esta é usada para realimentar o ciclo e recalcular até que o tempo de amostragem termine.

2.4.6 Exemplo 1: Filtro de Kalman discreto:

Este exemplo consiste em usar o sistema representado no caso contínuo, o qual foi mostrado nas equações 2.23, a discretização do sistema em espaço de estados pode ser feita mediante as equações 2.58 até 2.60 [64].

$$A_d = e^{AT} \quad (2.58)$$

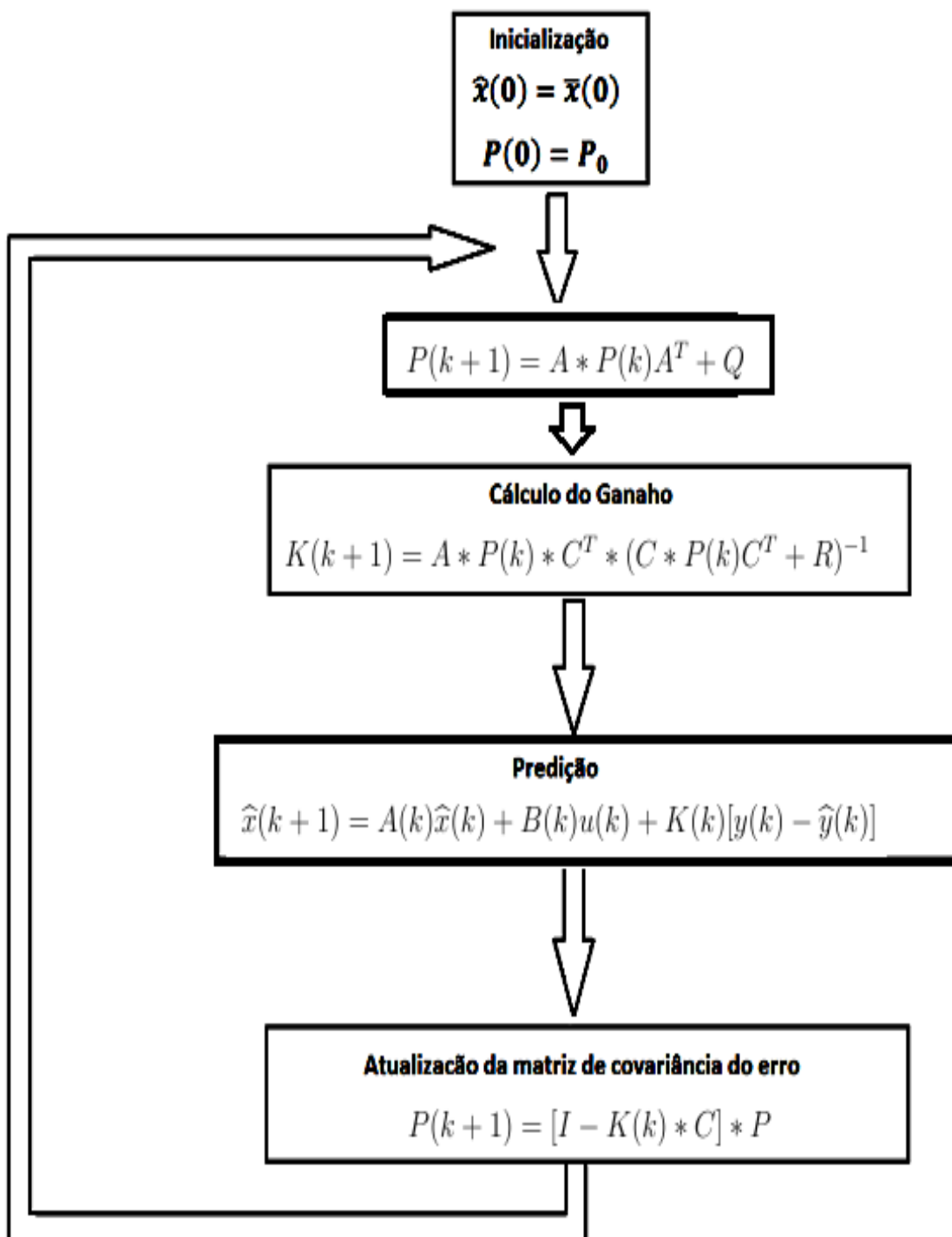


Figura 2.7: Algoritmo do filtro de Kalman

$$B_d = A^{-1}(A_d - I)B \quad (2.59)$$

$$G_d = A^{-1}(A_d - I)G \quad (2.60)$$

Com base nas equações anteriores é discretizado o sistema para um tempo de amostragem $T = 0.05s$, obtendo, assim, as equações 2.61 e 2.62 [61]:

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.002188 \\ -0.045245 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0.043 \\ -0.0447 \end{bmatrix} w_k \quad (2.61)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (2.62)$$

O termo do ruído v tem média zero e covariância $v = 0.09$. e o ruído de medição é assumido com média zero e covariância $w = 0.25$. Aplicando uma entrada $u = \sin(kt)$, com um período de amostragem $T = 0.05s$, para um intervalo $KT \in [0 \ 1]s$ e condição inicial x_0 . Substituindo o sistema discreto nas equações 2.64 a 2.67, tem-se a estimativa a priori do estado:

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.002188 \\ -0.045245 \end{bmatrix} u_k \quad (2.63)$$

Então, o ganho de Kalman é definido pela equação 2.64.

$$\begin{aligned} K_{k+1} = & \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} S_k \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} 0.043 \\ -0.0447 \end{bmatrix} (0.09) \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.043 \\ -0.0447 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} 0.043 \\ -0.0447 \end{bmatrix} (0.09) \begin{bmatrix} 0.043 \\ -0.0447 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + (0.25)^{-1} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Assim, a estimativa a posteriori, corrigida com a saída $y_{(k+1)}$, é dada pela equação 2.65.

$$\hat{x}_{k+1} = (I - K_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) \left\langle \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} \right\rangle \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 0.002188 \\ 0.045245 \end{bmatrix} u_k + K_{k+1} \quad (2.65)$$

E a matriz de covariância, para próxima iteração, é representada na equação 2.66.

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix} S_k \begin{bmatrix} 0.8146 & 0.08173 \\ -0.08173 & 0.8146 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0.002188 \\ 0.045245 \end{bmatrix} (0.09) \begin{bmatrix} 0.002188 \\ 0.045245 \end{bmatrix}^T (I - K_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) + K_{k+1} (0.025) L_{k+1}^T (I - K_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) \quad (2.66)$$

A solução das equações anteriores é feita mediante a ajuda do software MATLAB, onde foi obtida a matriz de covariância para próxima interação e o ganho do Kalman, como apresentam as equações 2.67 e 2.68

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0130 \\ -0.0174 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$P(k+1) = 1^{-3} \begin{bmatrix} 0.3260 & -0.4352 \\ -0.4352 & 0.7580 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.4.7 Exemplo 2: Filtro de Kalman discreto

Seja o sistema em espaço de estados dado pelas equações 2.30 e 2.31, onde as matrizes discretas têm a forma que apresentam as equações 2.69 e 2.70.

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.1269 & -0.4940 & 0.1129 \\ 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0.3832 \\ 0.5919 \\ 0.5191 \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (2.69)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (2.70)$$

Projetar um *FK* baseados nas medições de ruído $y[k] = Cx[k] + v[k]$, pode ser utilizada a função de *KALMAN* no Matlab para projetar o *FK* estacionário, Esta função determina os estados para o filtro estacionário com ganho K baseado no processo de ruído de covariância Q e o ruído do sensor de covariância R . Para desenvolver o exemplo vai se tomar como covariância, para o ruído e para o sensor respetivamente:

- $Q = 2.3$;
- $R = 1.0$.

Assim, o *FK* em estado estacionário, que será projetado, tem as equações 2.71 e 2.72

$$x[k+1|k] = Ax[k|k-1] + Bu[k] \quad (2.71)$$

$$x[k|k] = x[k|k-1] + K(yv[k] - Cx[k|k-1]) \quad (2.72)$$

Sendo $L(k+1)$ é um ganho ótimo de inovação, representado pela equação:

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5345 \\ 0.0101 \\ -0.4776 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

O funcionamento do FK pode ser representado como mostra a figura 2.8.

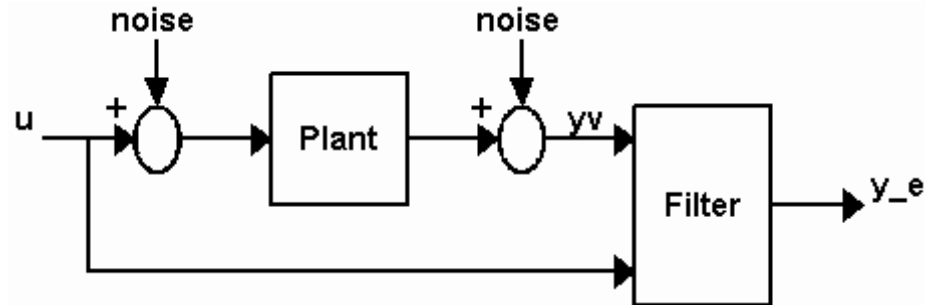


Figura 2.8: Comparação de dados com o filtro de Kalman

A figura 2.8, mostra como os dados que entram no filtro são comparados com verdadeira resposta da planta. Como entrada no sistema, será usada uma função senoidal e gerados os ruídos w e v , partindo dos valores das variâncias Q e R , obtendo assim a saída mostrada na figura 2.9.

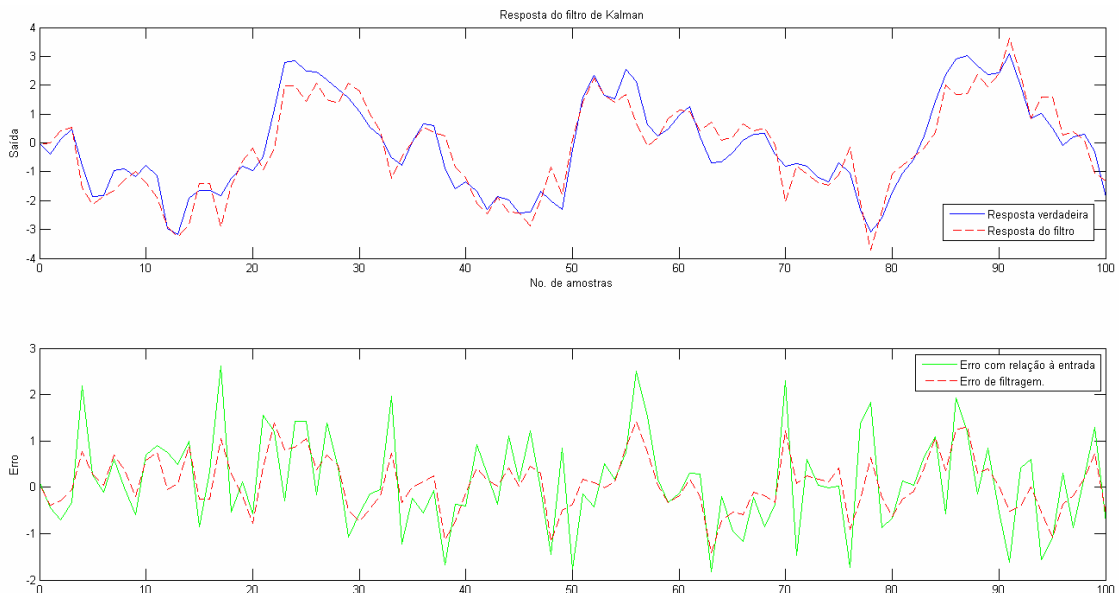


Figura 2.9: Resposta obtida usando o filtro de kalman

É observado na segunda figura 2.9 do gráfico da cor vermelha uma redução do erro mediante a implementação do FK , o qual é verificado observando sua variância. Mostra-se

que antes da filtragem a variância de erro tinha um valor de 0,9871 , e após da filtragem, a variância de erro tem um valor de 0.3479.

2.4.8 Controle LQG

Dado que controlador LQR é projetado para analisar sistemas que não apresentam ruído nem perturbações, e necessário o conhecimento prévio dos estados do sistema, para superar estes problemas, e conveniente recorrer a teoria dos processos estocásticos. Considerando os fatos anteriormente ditos, é necessário adicionar um observador estocástico ao projeto LQR , normalmente este observador é um Filtro de Kalman do inglês (Kalman Filter FK), o qual resolve o problema de estimação ótima dos valores das variáveis de estado do sistema conhecido em presença de ruído nas próprias variáveis e nas medidas, onde o observado de estados considera os componentes aleatórias do sistema [65].

Depois da estimação dos valores das variáveis dos estados, pode ser feita uma realimentação das variáveis de estado para projetar um regulador linear ótimo quadrático LQG , este projeto é desenvolvido em duas etapas.

1. Determinação da matriz de ganho do filtro de Kalman;
2. Determinar a matriz de ganho de realimentação ótima.

Assim entre as vantagens do projetos de controladores LQG estão:

- Ação integral que pode ser introduzida facilmente;
- Sinais de referência estocásticos que podem ser incluídos;
- Sistemas multi-variáveis não quadrados, com atraso nas diferentes malhas, podem ser controlados.

Por outro lado o controlador LQG apresenta desvantagens, algumas desvantagens, entre elas estão a perda da robustez devido à inclusão do estimador e ao tempo gasto com a estimação. No controlador LQG , a dinâmica da planta é linear e conhecida , e as perturbações presentes são estocásticas com as propriedades estatísticas conhecidas [66], assim, um sistema a ser controlado normalmente pode ser representado pelas equações 2.74 e 2.75:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad (2.74)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (2.75)$$

Onde:

- $x \in R^n$ é o estado do sistema;
- $y \in R^q$ é o vetor de medidas contaminado pelo ruído $v \in R^q$;
- $u \in R^m$ é o vetor do controle a ser determinado;
- $w \in R^n$ é o vetor de perturbação;
- $v \in R^n$ é o vetor de ruído que afeta a saída.

$v(t)$ e $w(t)$ são sinais estocásticas com média e variância conhecidos em relação ao sistema, pode-se assumir as seguintes características de $v(t)$ e $w(t)$:

- $v(t)$ e $w(t)$ são ruídos brancos, isto é variáveis estocásticas de média nula, ou seja, $E\{w(t)'\} = 0, E\{v(t)'\} = 0$ e não correlacionadas no tempo, o que é igual a ter $E\{w(t)w(\lambda)'\} = 0, E\{v(t)v(\lambda)'\} = 0$ para $t \neq \lambda$ [12];
- $v(t)$ e $w(t)$ são não correlacionadas entre si, $E\{v(t)w(\lambda)'\} = 0$;
- $v(t)$ e $w(t)$ possuem matriz de covariância conhecida e são $E\{w(t)w(\lambda)'\} = Q_w \geq 0$ e $E\{v(t)v(\lambda)'\} = R_v \geq 0$.

A parte fundamental, do controle LQG , é encontrar uma lei de controle $u(t)$ que ao ser aplicado no sistema, possa minimiza a função 2.76 [66].

$$J(t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)| dt \quad (2.76)$$

Sendo Q e R matrizes de ponderação definidas positivas definidas representadas em 2.77 e 2.78 :

$$Q \geq Q^T \geq 0 \quad (2.77)$$

$$R \geq R^T \geq 0 \quad (2.78)$$

A solução para o problema LQG pode ser apresentada em duas etapas:

- Projeta-se um controle LQR com $u(t) = -Kx(t)$, sendo K uma matriz de realimentação de estados que não depende de v e w ;
- Projeta-se um observador onde a variância do erro de estimação $E\{(x - x_f)(x - x_f)'\}$ é minimizada mediante o FK.

De maneira tal que a solução do problema LQG , pode ser representada como apresenta a figura 2.10

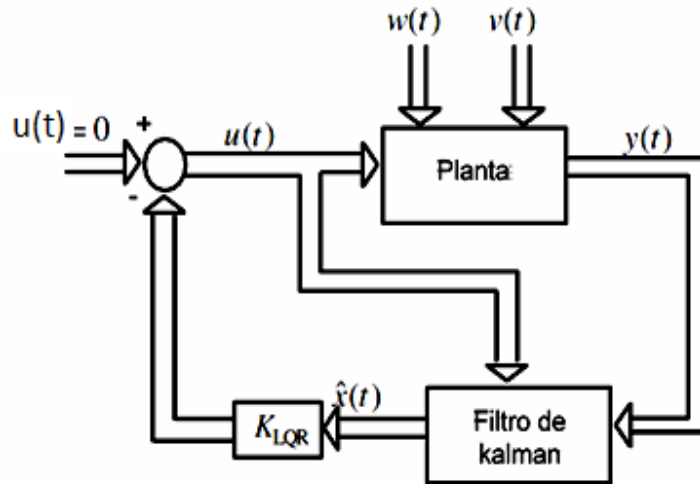


Figura 2.10: Controle LQG [5]

2.4.8.1 Propriedades do LQG

Para a análise do controlador LQR , substituindo a equação 2.8 na equação 2.6 é obtida a equação do sistema de malha fechada dada pela equação 2.79:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.79)$$

Os autovalores $(A - BK)$ estão no semiplano esquerdo, caracterizando o sistema LQR como assintoticamente estável. A representação do FK é um observador de estados [66], sendo representado pela equação 2.80.

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \quad (2.80)$$

Os autovalores de $(A - LC)$ estão no semi-plano esquerdo, caracterizando o FK como assintoticamente estável. Sendo L o ganho do observador, é projetado para minimizar a variância do erro estimado [66]. A determinação do FK é feita buscando um valor de L tal que possa minimizar a equação 2.81

$$\min_L E \{e(t)', e(t)\} = x(t) - x_f(t) \quad (2.81)$$

Assim, a determinação de L é obtida da equação de Riccati como mostra a equação 2.82.

$$SA' + AS - AC'R_v^{-1}CS + Q_w = 0 \quad (2.82)$$

E o ganho do estado é dado pela equação 2.83.

$$K(t) = SC'R_v^{-1} \quad (2.83)$$

O *LQR* e o *FK* possuem excelentes propriedades de robustez, margem de fase de 60 graus e margem de ganho infinita, quando analisados isoladamente. Seria de se esperar que o sistema formado pela junção destes dois projetos também apresentassem as mesmas propriedades de robustez. Entretanto, a inclusão do *FK* pode resultar da degradação das propriedades do *LQR*, de forma que no Projeto *LQG* as propriedades de robustez não são garantidas [67], no anexo, pode-se encontrar um exemplo onde é mostrado como projetar um controle *LQG* básico.

2.4.8.2 Exemplo do controle LQG

Para desenvolver o seguinte exemplo foi usado o exemplo de dois tanques em paralelo, este trabalho foi feito para desenvolver um *FK* como observador de estados e verificar seu funcionamento, no capítulo 5 será desenvolvida a função de transferência que representa este sistema. Neste exemplo se mostra o *FK* em malha fechada, onde serão aproveitados os estados do *FK* como observador para conseguir projetar um controle *LQG*, seguindo o diagrama de blocos apresentado nas figuras 2.11.

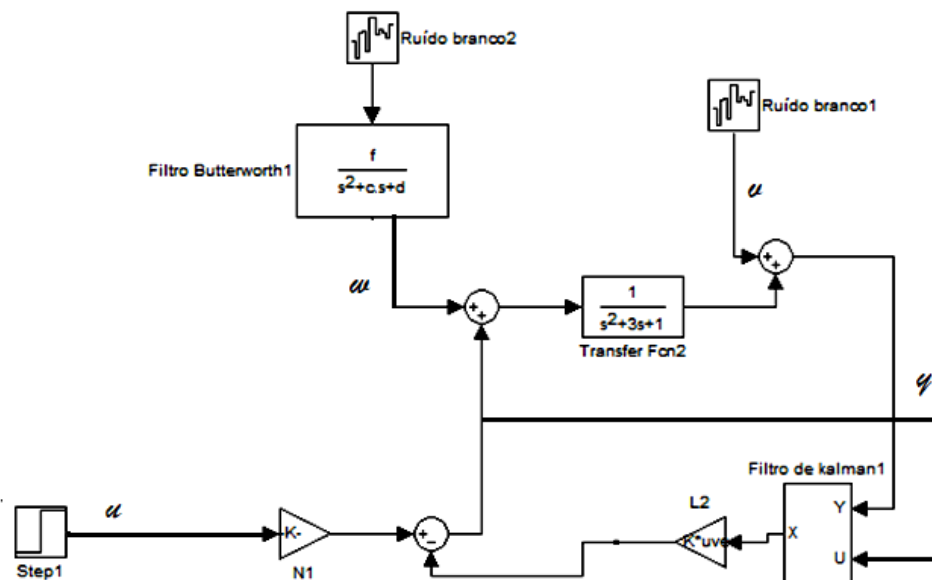


Figura 2.11: Diagrama de blocos do controle LQG de ordem dois.

na figura e 2.12 se mostra um ganho inserido no sistema *N1*, o qual foi obtido a partir do sistema dinâmico para ajustar o ganho estático, os resultados são mostrados na 2.12

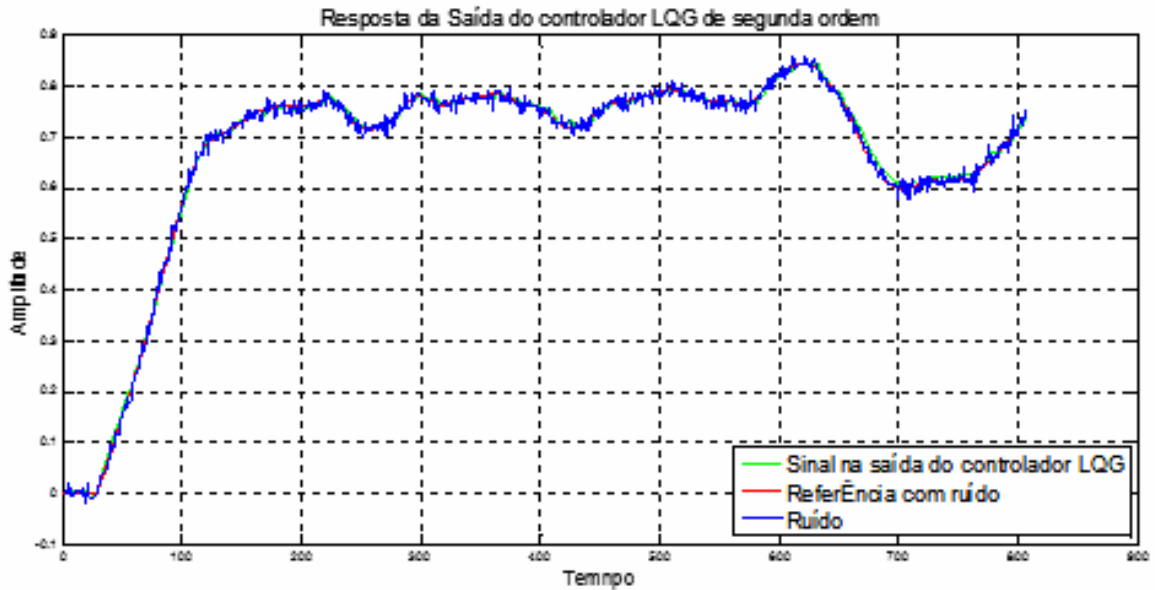


Figura 2.12: Saída do controlador LQG de ordem dois.

A figura 2.12 mostra o comportamento do controlador LQG usando um observador de estados de ordem dois e um observador de estados de ordem quatro. Nos dois casos, o controlador diante de um ruído no processo e na medida tem um comportamento bom, conseguindo fazer o seguimento do sinal de referência; se o ruído no processo for zero os dois controladores serão superpostos ao sinal de referência, este caso será abordado mais para a frente para um sistema de tanques, onde ele é controlado mediante a implementação do filtro de Kalman adaptado (FKA).

2.5 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (FKE)

Este filtro é uma adaptação feita do FK tradicional de maneira que ele possa ser usado para resolver problemas que envolvem sistemas não lineares, uma das aplicações é a estimação de parâmetros de sistemas dinâmicos (lineares e não lineares), onde a solução do problema é feita mediante a estimação dos estados do sistema dinâmico estocástico, possuindo, assim, o FK a formulação do algoritmo de mínimos quadrados recursivos com ganho normalizado [68].

O FK não foi projetado inicialmente para solucionar problemas não lineares, pelo qual não é possível aplicar ele para uma estimação recursiva das variáveis de estado, porém a solução mais conhecida é linearizar as equações não lineares, em torno das estimativas das variáveis de estado e posteriormente aplicar o FK tradicional para o sistema linearizado, assim o novo filtro é conhecido como Filtro de Kalman Estendido (EKF, do inglês extended Kalman filter) [69] e [70].

Tabela 2.1: Descrição matemática do Filtro de Kalman estendido

Descrição do filtro EKF.	
Descrição matemática do EKF	Processo
$h_k _{k-1} = F(k, h_{k-1} _{k-1})$	definição do sistema não linear;
$P_k _{k-1} = F_k P_k _{k-1} F_k^H + Q(k)$	Inicialização da matriz de covariância;
$K_k _{k-1} = P_k _{k-1} C_k^H [C_k P_k _{k-1} C_k^H + R(k)]^{-1}$	Calculo do ganho de Kalman;
$\alpha_k = y_k + C(k, h_k _{k-1})$	Atualização dos estados do sistema;
$h_k _{k-1} = h(k _{k-1}) + K_k \alpha_k$	Erro de medição;
$P_k _{k-1} = [I - K_k C_k] P_k _{k-1}$	Atualização da matriz de covariância

Desta maneira, o sistema dinâmico genérico pode ser representado como mostra as equações 2.84 e 2.85:

$$h_k = F(h, h_{k-1}) + G_k w_k \quad (2.84)$$

$$y_k = C(h, h_k) + n_k \quad (2.85)$$

Onde $F(h, h_{k-1})$ e $C(h, h_k)$ são funções, possivelmente não-lineares, do estado h . Nessas equações, F_k e C_k são matrizes obtidas da linearização, respectivamente $F(h, h_{k-1})$ e $C(h, h_k)$, em torno das estimativas do estado. Assim as matrizes F_k e C_k correspondem, matrizes Jacobianas de $F(h, h_{k-1})$ e $C(h, h_k)$ e podem ser representadas como mostra as 2.86 e 2.87.

$$C_k = \frac{\partial C(k, h_k)}{\partial h_k} \quad (2.86)$$

$$F_k = \frac{\partial F(k, h_{k-1})}{\partial h_{k-1}} \quad (2.87)$$

É importante destacar que quando as funções $F(h, h_{k-1})$ e $C(h, h_k)$ são lineares, o EKF se reduz ao FK convencional, sua descrição matemática é representada na tabela 2.1:

Mas quando a estimação envolve simultaneamente estados e parâmetros de um processo, a solução é dada mediante um controle adaptativo ou um controle preditivo de forma adaptativa, e por tanto uma reformulação aumentada do problema em espaço de estados é a solução mais comumente empregada [71], [72].

Um dos problemas apresentados mediante o trabalho com estimadores recursivos, é a necessidade de empregar um modelo linearizado do problema de estimação simultânea dos estados e os parâmetros do modelo, o qual pode resultar em divergência, então a abordagem normalmente é feita ajustando as matrizes de covariância do filtro [68].

Para problemas de estimação de estados de sistemas não-lineares, é usada uma abordagem bayesiana representada mediante Monte Carlo (Filtro de partículas), esta solução pode

reduzir o risco de divergência, mas precisa de algumas hipóteses, tais como:

1. Incertezas da distribuição Gaussiana,
2. O conhecimento exato do modelo,
3. Consistência estatística da estimativa inicial.

Se estas hipóteses são respeitadas, a convergência e a consistência na estimação são garantidas [25].

2.6 FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO (FKA).

A formulação do FK estático, assume que é conhecido a priori o processo e estatística do ruído de medição, que seriam as matrizes Q e R , respectivamente. No entanto, na maioria das aplicações práticas estas estatísticas são inicialmente estimadas ou de fato são desconhecidas [25].

A importância da adequada informação a priori para a estimação dos estados do FK , é devida a que uma errada estimação, afetará a precisão do filtro, degradando seriamente sua performance e por tanto levando o filtro a um estado de divergência [26] e [27]. Portanto pode-se argumentar que o uso de um FK fixo (Estático), projetado por métodos convencionais, em um ambiente dinâmico mudando, é uma desvantagem grande [28]. A partir deste ponto de vista, pode-se esperar que uma formulação estimativa adaptada do FK irá resultar em um desempenho melhor ou impedirá divergência do filtro [29], em outras palavras pode-se dizer os filtros adaptativos são mais adequados para aplicações em que as condições do sinal de entrada ou os parâmetros do sistema variam lentamente e o filtro seja capaz de se auto ajustar para compensar essas mudanças [31].

Em um sistema real, sempre se têm dois tipos de interferências, as quais fazem que o comportamento do sistema não seja ideal, as primeiras são as perturbações nas medições, as quais são ocasionadas por inexatidão nas medições ou nos modelos físicos inadequados, e as segundas são os ruídos inseridos nas medidas, estes ruídos normalmente são causados pelos sensores usados nas medições, o quais podem ser minimizados mediante filtragem e normalmente podem ser considerados como constantes, mas, as perturbações podem ocasionar sérios problemas nos modelos reais, porém devem ser controlados ou minimizados, para fazer este controle uma alternativa é usar o FK , que é um conjunto de equações que oferece uma solução computacional eficiente para os métodos dos mínimos quadrados [24]. Quando as características da perturbação e do ruído são coerentes com as definições usadas no desenvolvimento do filtro de Kalman, ou seja, são variáveis aleatórias brancas e suas densidades espectrais são precisamente conhecidas, então o FK é considerado como um

processo ótimo de estimação de estados, garantindo a mínima variância. No entanto, é difícil obter informações sobre as propriedades estocásticas de uma perturbação a priori. Neste caso, a estimativa de estado pode sofrer uma degradação devido a incertezas nos distúrbios estatísticos [73]. Então, as perturbações as que está sujeito um sistema de controlo automático causa com que sua saída fique longe da idealidade. Portanto, um bom design deve incluir medidas que lhe permitem manter um desempenho satisfatório, mesmo na presença de tais sinais, que podem ser consideradas de natureza determinística ou aleatória. O estudo sistemático de sinais aleatórios e os meios que poderiam ser usados para minimizar os efeitos tem sido originados na década dos anos quarenta, com os filtros de erro quadrático médio, (Filtro de Wiener). No entanto, sua aplicação naquele momento enfrentado limitações como uso com sinais discretos e problemas complexos de múltiplas entradas e saídas [74].

Assim, pode-se analisar que o principal problema quando se trabalha com um sistema não são os ruídos nas medidas, dado que ele podem ser controlados ou reduzidos, mas, sim, os problemas das perturbações, dado que elas podem tirar o sistema do ponto de estabilidade, por essa razão este trabalho baseasse em uma alternativa de adaptação do FK , onde é feito um estudo profundo, e desenvolvida uma teoria para conseguir adaptar a variância da perturbação do sistema, de maneira que ela seja reagente e possa mudar os parâmetros das estimativas do FK a cada atualização deles, assim, conseguir que o sistema se recupere facilmente se for submetido a uma perturbação muito grande e volte a seu estado e consiga fazer a tarefa para a qual foi programada, estes resultados são mostrados em dois exemplos, um sistema de tanques, representado um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas MIMO, e um sistema Bola barra (BB), como será mostrado nos próximos capítulos.

No caso estudado, para a adaptação de um FK , o modelo de medição e o modelo do processo são representados como mostram as equações 2.88 e 2.89:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad (2.88)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad (2.89)$$

Sendo: $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w_k \in \mathbb{R}^n$, o vetor do ruído do processo, $y_k \in \mathbb{R}^m$, o vetor da medição, $v_k \in \mathbb{R}^m$ e vetor do ruído de medição, e as matrizes A, B, C são matrizes que representam um sistema dinâmico. Nas equações anteriores, ambos vetores v_k e w_k são assumidos como sequência não correlacionadas, brancas Gaussianas e com média zero [30], cumprindo as estatísticas:

$$w(k) \sim (0, Q_k) \quad (2.90)$$

$$v(k) \sim (0, R_k) \quad (2.91)$$

$$E \{w(k)w(k)'\} = Q_k \delta_{k-j} \quad (2.92)$$

$$E \{v(k)v(k)'\} = R_k \delta_{k-j} \quad (2.93)$$

$$E \{w(k)v(k)'\} = 0 \quad (2.94)$$

Onde δ_{ij} , corresponde à função delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e zero caso contrário [32].

O algoritmo do *FKA* adaptativo depende diretamente da adaptação requerida, pode ser adaptada as variáveis Q e R , modificando dessa forma o ganho do sistema, assim o *FKA* pode ser representado partindo do *FK* estático definido anteriormente, onde foram obtidas as equações seguintes:

$$K_k = P_k C [C P_k C^T + R_k]^{-1} \quad (2.95)$$

$$\hat{x}_k = x_k + K_k [y_k - \hat{y}_k] \quad (2.96)$$

$$P_{k/k} = [I - K_k C] P_k \quad (2.97)$$

$$v_k = y_k - \hat{y}_k \quad (2.98)$$

Sendo os parâmetros a serem adaptados Q e R , no capítulo 4 é mostrado a metodologia para realizar a adaptação do parâmetro Q de um sistema dinâmico linear multi-variável, onde são aplicados princípios de superposição de sistemas o qual será mostrado a continuação, assumindo que o sistema esta sendo modelado de forma aproximadamente linear, tal suposição é normalmente verificada observando-se o comportamento do sistema numa faixa relativamente estreita de operação.

2.6.1 Princípio de superposição para sistemas lineares

Formalmente, diz-se que um sistema é linear se ele satisfaz o princípio da superposição. [75]. Para atender este princípio, é considerado um sistema que ao ser excitado pela entrada $u_1(t)$, produz uma saída $y_1(t)$, e quando o sistema é excitado por $u_2(t)$, ele produz uma saída $y_2(t)$. Se tal sistema satisfizer o princípio da superposição então, quando excitado por $a * u_1(t) + b * u_2(t)$, sua saída será $a * y_1(t) + b * y_2(t)$, sendo a e b constantes possivelmente

complexas. Em resumo pode-se dizer que um sistema linear tem o mesmo tipo de comportamento, independente do ponto de operação. A continuação é apresentado um exemplo de um sistema linear simples, que ajudará a entender o princípio de superposição [75].

Este princípio pode ser entendido usando como exemplo uma equação diferencial linear de primeira ordem $\dot{y} + ky = u$. Onde pode ser assumida a entrada $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ a qual causa uma saída $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Então $\dot{y} = \alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2$, substituindo essas equações na equação do sistema vai se ter a equação 2.99.

$$\begin{cases} \alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2 + K(y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \\ \alpha_1 (\dot{y}_1 + K y_1 - u_1) + \alpha_2 (\dot{y}_2 + K y_2 - u_2) = 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

Se y_1 é a solução com entrada u_1 e y_2 é a solução com entrada u_2 , então a equação 2.99 é satisfeita, a resposta é soma de respostas individuais e a propriedade da superposição é cumprida [76].

Em outras palavras uma maneira de saber se uma solução é linearmente independente é testar o determinante Wronskiano, o qual está composto das saídas e as derivadas das saídas, desta maneira se o determinante for de ordem 2, indica que teríamos uma solução composta por duas variáveis as quais serão independentes si e só si, o determinante Wronskiano for diferente de zero, gerando uma solução geral a qual está composta pela soma das duas variáveis multiplicadas por uma constante, onde as constantes são determinadas mediante as condições iniciais do problema.

3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS APLICADAS AO PROBLEMA DE ADAPTAÇÃO DO FK

Dado um fenômeno aleatório qualquer, com um certo espaço de probabilidade, deseje-se estudar a estrutura probabilística de quantidades associadas a esse fenômeno [6]. seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidade. Denomina-se variável aleatória, qualquer função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1} = \omega \in \Omega : X(\omega) \in I \in F$. Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Em outras palavras, C é tal que sua imagem inversa de intervalos $I \subset \mathbb{R}$ pertencem a $\sigma - F$. Uma variável aleatória é, portanto, uma função do espaço amostral (Ω) nos números reais, para a qual é possível calcular a probabilidade de ocorrência de seus valores [6].

3.1 MÉDIA ARITMÉTICA, VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

Ao estudar as variações nas propriedades e nas características dos elementos mecânicos, na realidade esta-se trabalhando com um fenômeno de elementos finitos, onde o número total desses elementos é denominado como população, a qual em alguns casos pode ser muito grande. Assim, pode ser definidos [77]:

- Média Aritmética;
- Variância;
- Desvio padrão.

3.1.1 Média Aritmética

A média de uma variável aleatória X é uma medida de tendência central, também denominada valor esperado de X e representado por $E(X)$. É definida como a média aritmética dos valores de X , isto é, como mostra a equação 3.1:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (3.1)$$

Onde:

- N é o número de elementos [77];
- x_i é a amostra.

A equação anterior pode-se escrever como mostra a equação 3.2:

$$E(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.2)$$

A média aritmética apresenta algumas propriedades [78], entre elas estão:

- $E(k) = k$;
- $E(kX) = kE(X)$;
- $E(k + X) = E(X) + k$;
- $E(Y + X) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
- $E(XY) = E(X)E(Y)$.

3.1.2 Variância

A variância de uma variável aleatória X é uma medida de dispersão dos valores da variável em torno da sua média. Ela é definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios dos valores de X em relação à média dos próprios valores de X . Em uma população de tamanho N , a variância de uma variável aleatória é denotada por $Var(x)$ [79], e é dada pela equação 3.3

$$Var(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (3.3)$$

Onde μ é a média da variável X .

É importante notar que a variância mede a distância entorno da média e não em torno de outra medida-resumo, a variância apresenta as seguintes propriedades [79]:

- $Var(K) = 0$;
- $Var(kX) = k^2Var(X)$;
- $Var(X + k) = Var(X)$;
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$;
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
- $E(XY) = E(X)E(Y)$.

3.1.3 Desvio padrão

O desvio padrão da amostra, é definido como a raiz quadrada da variância da amostra e é representado pela equação 3.4:

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x(i) - \bar{x})^2} \quad (3.4)$$

A equação anterior não é muito conveniente para realizar cálculos. Para tal, utiliza-se a equação 3.5:

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^N x_i)^2}{N} \right)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \right)} \quad (3.5)$$

Deve-se esclarecer que alguns autores para o cálculo da variância e o desvio padrão empregam N em vez de $N - 1$ no denominador, o qual não faz muita diferença se o número de amostras é grande, mas se o número de amostras é pequeno faz, pelo qual $N - 1$ fornece uma melhor estimativa da variância da população da qual a amostra é tomada [77].

3.2 FUNDAMENTOS BÁSICOS DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Objetivando a realização de um estudo sobre um fenômeno real, surge o problema relacionado à obtenção de modelos que se aproximem ao máximo do comportamento real. Devido à elevada complexidade para obter modelos físicos que representam o sistema a ser estudado, faz-se o uso de modelos matemáticos simplificados, procurando encontrar uma quantificação dos fenômenos de estudo. Em diversas situações, estes modelos matemáticos não conseguem refletir este comportamento, sendo necessário o emprego de métodos mais detalhados, muitas das vezes com elevado grau de complexidade. Uma destas modalidades de modelagem detalhado pode ser expressa a partir de uma solução probabilística de modelagem utilizando uma representação por processos estocásticos. Os processos estocásticos são representados por variáveis aleatórias e funções destas variáveis aleatórias.

Diferente dos métodos estatísticos amostrais, a resposta de um processo estocástico será uma função ou uma sequência de valores e não apenas um número [80]. Essa função em geral representa a densidade de probabilidade de um conjunto de resultados possíveis para uma determinada variável aleatória.

3.3 VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA E FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Uma variável aleatória é classificada como discreta, se assumir somente um número de valores finitos. A função de probabilidade de uma variável discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável. Isto é, sendo X uma variável com valores X_1, X_2, \dots , para $i = 1, 2, \dots$ [6].

3.3.1 Variável Aleatória

Uma variável aleatória é uma variável cujo valor é igual ao resultado de um experimento aleatório, ou seja, representa todo o espaço amostral da experiência realizada. Dependendo do tipo de experimento, esta variável pode ser de natureza contínua ou discreta [81].

3.3.2 Função Densidade Probabilidade

Para uma variável aleatória contínua, a função de densidade de probabilidade descreve a probabilidade de uma a variável aleatória assumindo um determinado valor dentro de um conjunto dado. Em outras palavras, a função densidade probabilidade é uma expressão matemática que representa o comportamento provável de um conjunto de resultados possíveis da variável aleatória [80].

3.3.3 Probabilidade Condicional

Supondo que temos dois eventos A e B , e desejamos conhecer como eles estão relacionados entre si, de tal maneira que o conhecimento sobre o evento B dê uma informação sobre o evento A . Para conseguir isso, tem que ser empregada a probabilidade condicional $P(A|B)$. A probabilidade condicional pode ser definida como:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (3.6)$$

3.3.4 Probabilidade Total

Seja S o espaço amostral de um dado experimento que foi dividido em p_i partes. Define-se A um evento contido no espaço amostral, então pode-se definir que:

$$A = (A \cap S) \quad (3.7)$$

E que:

$$S = \sum_i^n p_i. \quad (3.8)$$

Então, a probabilidade de $P(A)$ pode ser estendida como:

$$P(A) = P(A \cap S). \quad (3.9)$$

Substituindo S e aplicando a regra de distribuição tem-se:

$$P(A) = \sum_i^n P(A \cap p_i). \quad (3.10)$$

Manipulando a equação anterior, temos que:

$$P(A) = \sum_i^n P(A|p_i)P(p_i) \quad (3.11)$$

3.3.5 Função de Distribuição

Sendo X uma variável aleatória em (Ω, F, P) , sua função de distribuição é definida pela equação 3.12:

$$F_X(x) = P(x \in (-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad (3.12)$$

Com x percorrendo todos os reais.

O conhecimento da função de distribuição permite obter qualquer informação sobre a variável. Mesmo que a variável só assuma valores num subconjunto dos números reais, a função de distribuição é definida em toda a reta [6].

3.3.5.1 Propriedades da função da distribuição

Uma função de distribuição de uma variável X em (Ω, F, P) obedece às seguintes propriedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (3.13)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (3.14)$$

F é contínua à direita e não decrescente, isto é $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ [6].

3.3.5.2 Propriedades da função de probabilidade

A função de probabilidade de X em (Ω, F, P) satisfaz:

- $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots;$
- $\sum p(x_i) = 1.$

Com a soma percorrendo a todos os possíveis valores (eventualmente infinitos)

3.4 FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE NORMAL

Uma variável X segue o modelo normal se sua densidade é representada pela equação 3.15:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.15)$$

com $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. É usada a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Onde μ, σ^2 são respectivamente a média e a variância da variável e a quantidade σ é conhecida como desvio padrão, o gráfico da densidade de probabilidade $N(\mu, \sigma^2)$ é apresentado na figura seguinte:

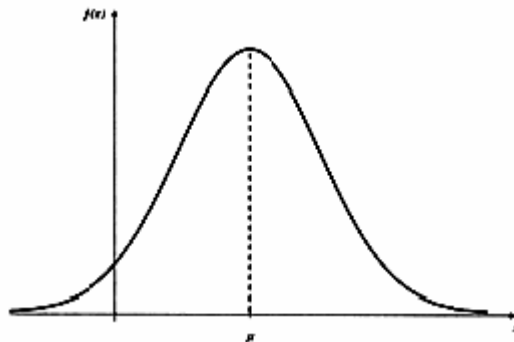


Figura 3.1: Densidade normal $N(\mu, \sigma^2)$ [6]

A função de distribuição de probabilidade $N(\mu, \sigma^2)$ não tem uma forma fechada, pelo qual o cálculo de probabilidade com a densidade normal não pode ser feito pela integral, pois esta não possui primitiva. Assim, valores de probabilidade são obtidos por integração numérica e apresentados em tabelas, o qual facilita o trabalho porque não é necessário fazer uma tabela por cada par de valores dos parâmetros em que se tenha interesse. Basta apenas tabular as probabilidades para $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ tal como mostra a seguinte proposição [82].

Demonstração.

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq z\sigma + \mu) \quad (3.16)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{z\sigma + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.17)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.18)$$

Em que é usado $y = (x - \mu)/\sigma$. Observa-se que o último integrando é uma função de densidade de uma $N(0, 1)$ e, portanto, o resultado está verificado. A distribuição $N(0, 1)$ é denominada Normal Padrão ou Normal Reduzida. Assim, por exemplo, a probabilidade de X está em duas constantes a e b , $a < b$. Pode-se expressar como apresenta a equação 3.19:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.19)$$

Cujo valor numérico pode ser obtido por uso de tabelas [6].

3.4.1 Regra de Bayes

A regra de Bayes considera a relação entre incerteza do conhecimento da ocorrência de um evento. De acordo com [83] a partir de dois eventos mutuamente dependentes A e B , pode-se escrever uma expressão para a probabilidade condicional seguindo a regra de Bayes como é apresentado na equação 3.20.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (3.20)$$

Em que $P(A|B)$ é a probabilidade *a posteriori*, $p(B|A)$ a probabilidade de verossimilhança, $P(A)$ e $P(B)$ são as probabilidades *a priori* dos eventos. Com a regra de Bayes e possível conhecer o comportamento de A , tendo como base o comportamento individuais de A e B anteriores e sua probabilidade conjunta para obter uma estimativa resultante.

3.5 AUTOCORRELAÇÃO

A autocorrelação do processo $X(t)$ é definida como a expectativa do produto de duas variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$, obtidas observando-se o processo $X(t)$ nos tempos t_1 e t_2 , respectivamente. [7] De maneira mais específica, pode-se escrever como apresenta a equação 3.21:

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x(t_1), x(t_2)}(X_1, X_2) dx_1 dx_2 \quad (3.21)$$

Onde $f_{x(t_1),x(t_2)}(X_1 X_2)$ é uma função de densidade de probabilidade de segunda ordem do processo. Então pode-se falar que um processo aleatório é estritamente estacionário se $f_{x(t_1),x(t_2)}(X_1 X_2)$ depende somente da diferença entre os tempos de observação t_1 e t_2 . Isso significa que uma função de autocorrelação de um processo estritamente estacionário depende somente da diferença de tempos $t_2 - t_1$, como mostra a equação 3.22:

$$R_x(t_1, t_1) = R_x(t_2 - t_1) \forall t_1, t_2 \quad (3.22)$$

Assim, a função de autocorrelação de um processo estritamente estacionário $x(t)$ é escrita como mostra a equação 3.23:

$$C_x(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_x)(X(t_2) - \mu_x)] = R_x(t_2 - t_1) - \mu_x^2 \quad (3.23)$$

Na equação anterior, a semelhança entre a função de autocorrelação e função de autocovariância de um processo estritamente estacionário $X(t)$, depende somente da diferença de tempos $t_2 - t_1$. A equação anterior mostra que se é conhecida a média e a função de autocorrelação do processo, pode ser determinada de maneira única a função de autocovariância [7].

3.5.1 Propriedades da função de autocorrelação

A autocorrelação de um processo estacionário $X(t)$ é definida como mostra a equação 3.24:

$$R_x(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] \quad (3.24)$$

Essa função tem diversas propriedades:

a O valor médio quadrático do processo pode ser obtido de $R_x(\tau)$ simplesmente quando $\tau = 0$

$$R_x(0) = E[X^2(t)] \quad (3.25)$$

b A função de autocorrelação $R_x(\tau)$, é uma função par de τ .

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (3.26)$$

c O qual permite escrever a função de autocorrelação como apresenta a seguinte equação:

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t - \tau)] \quad (3.27)$$

d A função de autocorrelação $R_x(\tau)$ tem uma magnitude máxima em $\tau = 0$, ou seja

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0). \quad (3.28)$$

A importância física da função de autocorrelação $R_x(\tau)$, se dá no fato dela constituir um meio de descrever a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas observando-se um processo aleatório $X(t)$ em tempo τ segundos separados. Torna-se claro, portanto, que quanto mais rapidamente o processo aleatório $X(t)$ se modifica com o tempo, mais rapidamente a função de autocorrelação $R_x(\tau)$ decrescerá a partir de seu máximo $R_x(0)$ à medida que τ se eleva, como mostra a figura seguinte:

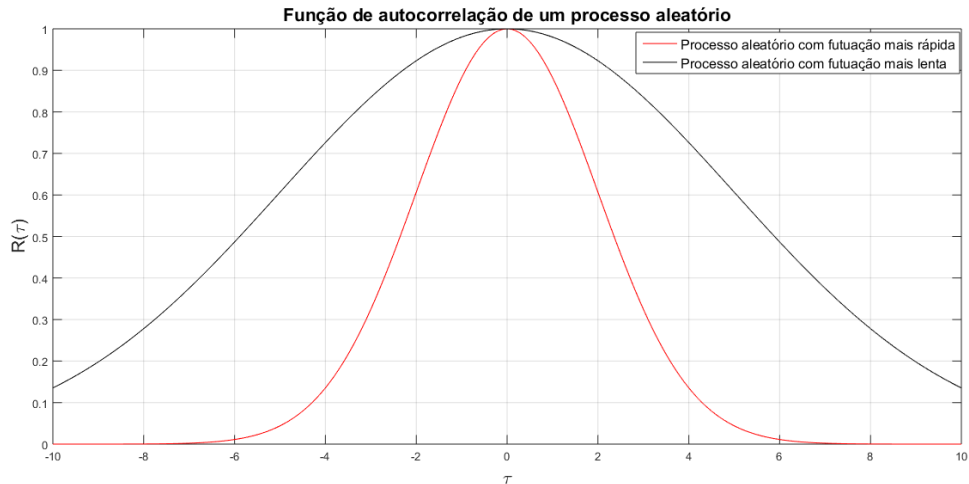


Figura 3.2: Ilustração de função de autocorrelação de processos aleatórios com flutuação mais lenta e mais rápida [7]

Esse decréscimo pode ser causado por um tempo de decorrelação τ_0 de forma que $\tau > \tau_0$. A magnitude da função de autorrelação $R_x(\tau)$ permanecerá abaixo de um algum valor prescrito. Dessa forma, pode-se definir o tempo de decorrelação τ_0 de um processo estacionário $X(t)$, de valor médio igual a zero, com tempo necessário para que a magnitude da função de autocorrelação $R_x(\tau)$ decresça até um valor máximo $R_x(0)$ [7].

3.6 RUÍDO BRANCO

As análises de ruídos de sistemas de comunicação, geralmente, são fundamentadas em uma forma idealizada de ruído, chamada de ruído branco, cuja densidade espectral de potência é independente da frequência de operação. O adjetivo branco é utilizado no sentido de que a luz branca contém intensidades iguais de todas as frequências dentro da banda visível de radiação eletromagnética [8]. Assim, a densidade espectral de potência de um ruído branco com uma função amostral indicada por $S_w(t)$ e representado pela equação 3.29:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}. \quad (3.29)$$

A qual é ilustrada na figura 3.3. As dimensões de N_0 são expressas em Watts por hertz.

O parâmetro N_0 geralmente é referenciado ao estágio de entrada do receptor de um sistema de comunicação. Ele pode ser expresso como:

$$N_0 = KT_e. \quad (3.30)$$

Onde K é constante de Boltzmann e T_e é a temperatura equivalente de ruído do receptor. A característica importante da temperatura equivalente do ruído é que ela depende somente dos parâmetros do sistema. Como a função de autocorrelação é a transformada de Fourier inversa da densidade espectral de potência o ruído branco pode ser expresso como apresenta a equação 3.31:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \delta(f). \quad (3.31)$$

Ou seja, a função de autocorrelação de um ruído branco consiste em uma função delta, ponderada pelo fator $\frac{N_0}{2}$ e que ocorre em $\tau = 0$, como mostra a figura 3.3 observa-se que $R_w(\tau)$ é igual a zero para $\tau \neq 0$. Conseqüentemente, duas amostras diferentes qualquer ruído branco, não importando o quanto próximo no tempo elas sejam tomadas, não são correlacionadas. Se o ruído branco $w(t)$ também for Gaussiano, então as duas amostras serão estaticamente independentes [7].

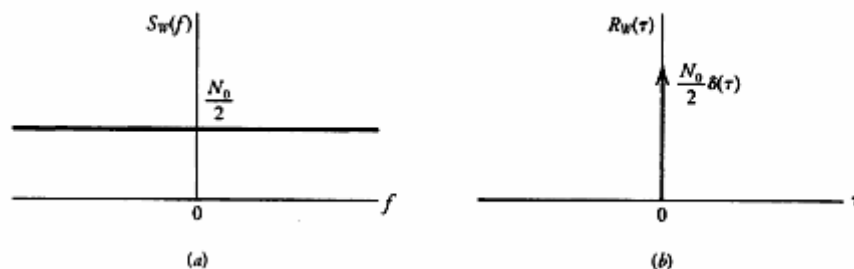


Figura 3.3: Características do ruído branco (A) Densidade espectral de potência. (B) Função de autocorrelação [8]

3.7 INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS DE MARKOV

Seja um processo discreto de N componentes distintos como: i_1, i_2, \dots, i_n , o sistema pode mudar ou permanecer constante de acordo com um conjunto de probabilidades de transição. Si as probabilidades dependem do estado de partida e de chegada e não dos estados anteriores, se diz que o processo é de Markov e cumpre as seguintes definições [45]:

Definição: Um processo estocástico X_k , $k = 1, 2, \dots$, com um espaço de estados $S = i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$. É um processo (cadeia) de Markov, se para cada n , todos os estados $i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$. Cumpre que:

$$p(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = p(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}). \quad (3.32)$$

Esta propriedade é equivalente à equação:

$$p(X_0 = i_0 \dots X_n = i_n) = p(X_0 = i_0) p(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots p(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}). \quad (3.33)$$

E também à equação:

$$p(AB | X_n = j) = p(A | X_n = j) p(B | X_n = j) \quad (3.34)$$

Onde A é um sucesso arbitrário definido pelos resultados dos passos $0, 1, \dots, N - 1$, e B é um sucesso definido pelos resultados dos passos $n + 1, n + 2, \dots$. Esta equação descreve normalmente a "independência entre futuro e passado, sé o presente é conhecido". No caso das cadeias de Markov, o sistema está descrito por uma matriz P de dimensão $N \times N$ onde a probabilidade de transitar do estado i no tempo $t - 1$ até o estado j no tempo t , é definida como:

$$P(i, j)(t) = P_{i,j}(t) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) \quad (3.35)$$

Sendo, X_t a variável aleatória da cadeia de Markov, e os valores $P_{i,j}(t)$ definem a matriz $P_{i,j}(t)$ de probabilidade de transição de um estado a outro no decorrer do tempo.

Definição: A probabilidade para se movimentar de um estado i até o estado j no decorrer de t , é chamada de probabilidade de transição $P_{i,j}(t)$. Se a probabilidade de transição é independente de t , a cadeia de Markov é chamada de homogênea. Se a cadeia de Markov é homogênea o espaço $S = i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$, é finito, por tanto, as probabilidades de transição são dadas por uma matriz de transição $P = P_{i,j}(t)$ que verifica $P_{i,j} \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$, as matrizes com estas propriedades são chamadas estocásticas.

A matriz de transição de n passos é a n -ésima potência de P é definida pelas equações:

$$P_{i,j}^{(n)} = p_{i,j}^{(n)} = P(X_t = j | X_{t-n} = i) \quad (3.36)$$

Verifica-se a equação:

$$P_{i,j}^{(n+m)} = \sum_k P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)}, \forall n \geq 0, \forall m \geq 0 \quad (3.37)$$

Que é chamada de equação de Markov. Também pode ser escrita de forma matricial como mostra a seguinte equação:

$$P^{(m+n)} = P^m P^n \quad (3.38)$$

É também possível calcular as probabilidades condicionais sobre um conjunto de estados J .

$$P_{i,j}^{(n)} = p(X_t \in J | X_{t-n} = i) = \sum_{j \in J} P_{i,j}^{(n)} \quad (3.39)$$

3.7.1 Classificação dos estados

Definição 2: Um estado j é acessível a partir de um estado i , quando, se pode ir de i até j em um número finito de passos, esta definição implica:

- $i \rightarrow j$, se para algum n $P_{ij}^n > 0$;
- $i \leftrightarrow j$, se para algum n e algum m , $P_{ij}^n > 0$ e $P_{ji}^m > 0$.

Neste último caso, se diz que os estados i e j se comunicam.

Proposição: a relação de comunicação é uma relação de equivalência.

- Reflebilidade: $i \leftrightarrow j$, já que $P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$;
- Simetria: se $i \leftrightarrow j$ então $j \leftrightarrow i$. É imediato a partir da definição;
- Transitibilidade: se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$. Também é uma aplicação imediata da definição.

Definição 3: Se uma cadeia de Markov tem todos seus estados na mesma classe de equivalência se diz que é irreduzível. Em uma cadeia de Markov irreduzível há uma probabilidade positiva e um estado a qualquer outro estado.

Definição 4: Uma cadeia de Markov é aperiódica se o máximo comum divisor de m para $P^m(i, j) > 0, \forall x \in J$. O complementar é chamado de cadeia de Markov periódica, e nesses processos existem estados que não comunicam para certos números de passos.

Definição 5: Uma cadeia que é aperiódica e irreduzível é chamada regular.

Definição 6: Um estado se chama transitório se há uma probabilidade positiva para que o processo volte para o estado i .

Definição 7: f_{ij}^n = probabilidade de início no estado i , o processo volta para i pela primeira vez em n passos.

Definição 8:

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n \quad (3.40)$$

Definição 9: Um estado é chamado de recorrente quando o retorno a ele é sucesso seguro.

Definição 10: O valor esperado matemático do número de passos que são necessários para voltar ao mesmo estado, é chamado de tempo recorrente.

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^n \quad (3.41)$$

Definição 11: Um estado é absorvente quando $P_{ij} = 1$, se o estado, é absorvente, então, ele é recorrente.

3.8 CÁLCULO DA RELAÇÃO DE VARIÂNCIA PARA UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Para calcular a relação de variância de um sistema de segunda ordem, é usada a função de transferência mostrada na equação 3.42:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + as + b} \quad (3.42)$$

Onde: a, b e K são parâmetros de um FB de segunda ordem, o qual é comparado com um sistema de segunda ordem, como apresenta a equação 3.43:

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (3.43)$$

Para o sistema, é desejado um amortecimento $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Assim, a função de transferência analisada é:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + \sqrt{2}bs + b} \quad (3.44)$$

Onde serão encontradas as constantes K e b , para que o sistema consiga atingir uma variância desejada. Para tal fim, será discretizado o sistema e representado como mostra a equação 3.45, e como foi desenvolvido no apêndice A3, e representado na equação A.49:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 \frac{d}{f}}{z^2 - \frac{g}{f}z + \frac{h}{f}} = \frac{Kz^2}{(z+a)(z+\bar{a})} \quad (3.45)$$

Onde: d, f, g e h são os parâmetros correspondentes ao sistema discretizado para um tempo de amostragem T , definidos como:

- $d = KT^2$;

- $f = bT^2 + aT + 1$;
- $g = 2 + aT$;
- $h = 1$.

Para o sistema anterior deseja-se uma variância $Var = 0.25$. Para obter esta variância foi usada a equação A.60, representada no apêndice A3, e amostrada a continuação.

$$var[y(n)] = \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{(\dot{a} - \dot{\hat{a}})^2} \sigma^2 \left(\frac{1}{1 - (\dot{a}^2 - \dot{\hat{a}}^2)}\right)^2 \quad (3.46)$$

Onde \dot{a} e $\dot{\hat{a}}$ são os polos do sistema discreto. Como é conhecido, o amortecimento do sistema é assumido por um polo que represente este amortecimento, e é encontrado o polo faltante; assim podem ser calculadas as constantes d, f, g com um tempo de amostragem $T = 0.1s$, e conseguir representar o sistema discreto, mostrado na equação 3.45

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.03473}{z^2 - 1.627z + 0.6617} \quad (3.47)$$

Partindo da equação 3.47 foi encontrada a expressão que representa o sistema contínuo de segunda ordem como mostra a equação 3.48.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{5.249}{s^2 + 4.588s + 5.249} \quad (3.48)$$

Comparando a resposta do sistema discreto e contínuo para uma entrada degrau, pode-se observar que estes apresentam um ganho estático unitário, como é mostrado na figura 3.4:

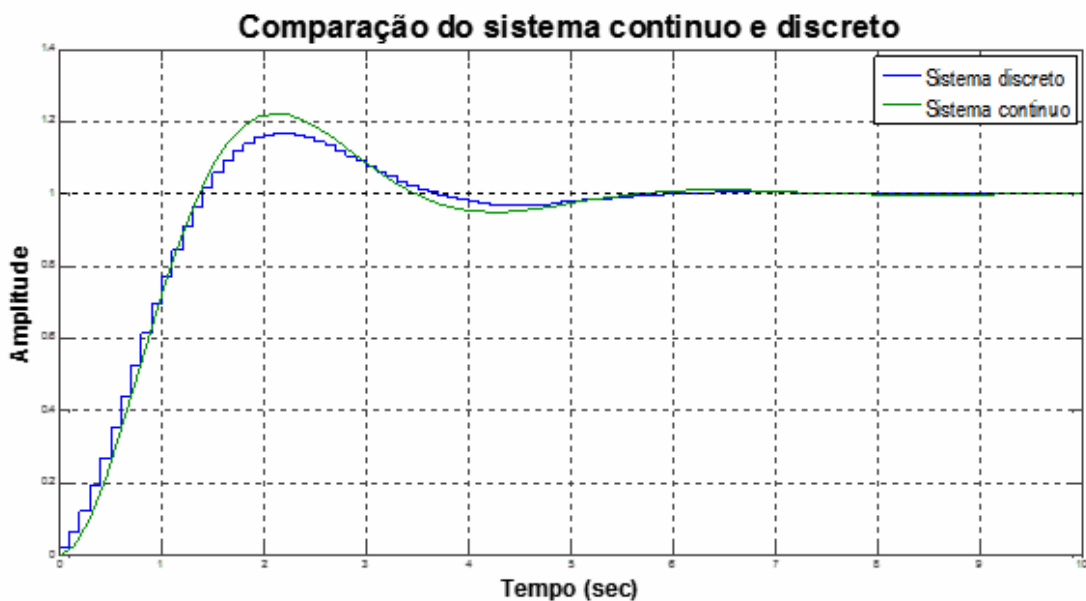


Figura 3.4: Comparação do sistema contínuo e discreto.

Testando o comportamento das variâncias se mostram duas figuras, uma que representa o sistema discreto obtido em função da frequência, neste caso foi verificado que apresenta uma relação entre as variâncias de entrada e saída de $1/4$, como se mostra na figura 3.5, posteriormente com o mesmo ruído, mas no domínio do tempo, foi plotada uma figura, que mostra as relações dos ruído de entrada e o ruído na saída, obtendo o mesma relação de variâncias de $1/4$ como se verifica na figura 3.6.

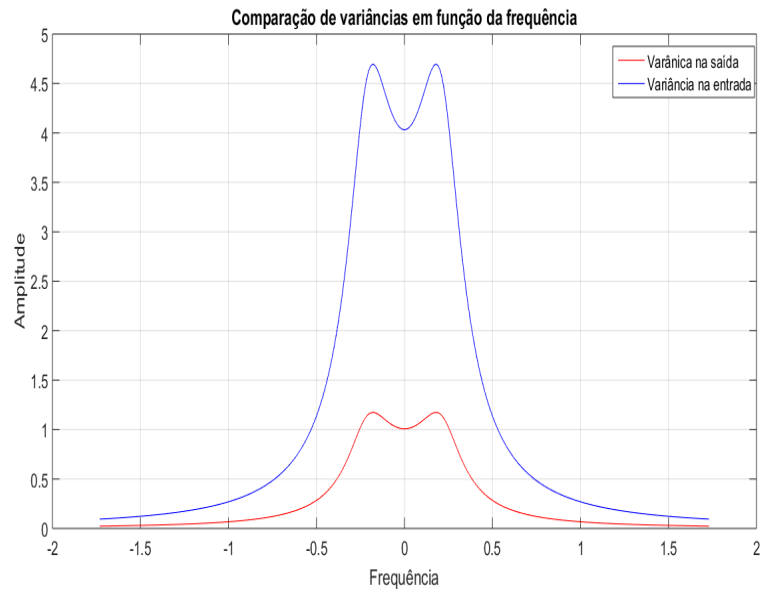


Figura 3.5: Variância do sistema em função da frequência.

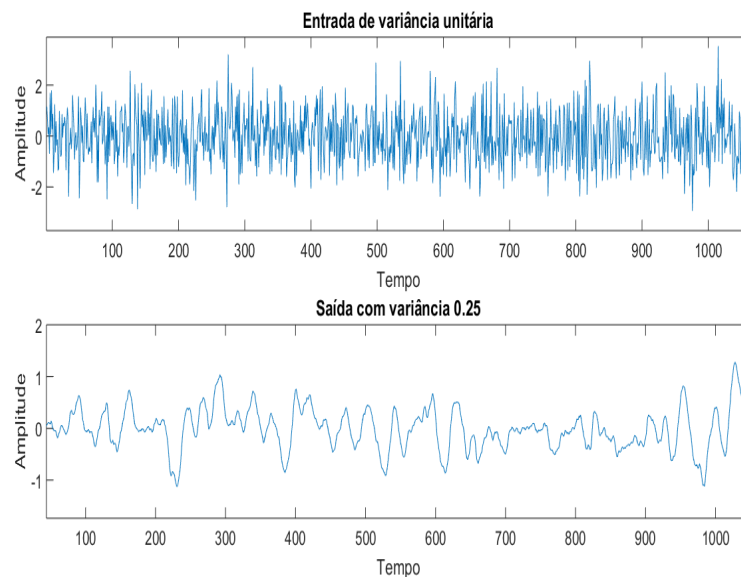


Figura 3.6: Variância do sistema em função do tempo.

4 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

Neste capítulo é mostrada a proposta de adaptação, para tal caso inicia-se obtendo o filtro que será usado para determinar a variância das saídas estimadas do *FKA*, passando a obtenção da proposta de adaptação onde é mostrado como obter um sistema adaptado para as perturbações em malha aberta e fechada e mostrado como calcular as constantes envolvidas para esta análise, finalizando com a influencia do *FKA* na performance do controle em malha fechada.

4.1 ANÁLISE DA OBTENÇÃO DO FILTRO DIGITAL

Na análise desenvolvida é preciso considerar um filtro que permita facilitar o cálculo da variância das saídas estimadas do sistema para este caso, foram consideradas diferentes alternativas, entre estas um sistema digital de ordem um, um sistema digital de ordem 3 e um filtro butterworth discreto de segunda ordem como mostra a figura 4.1:

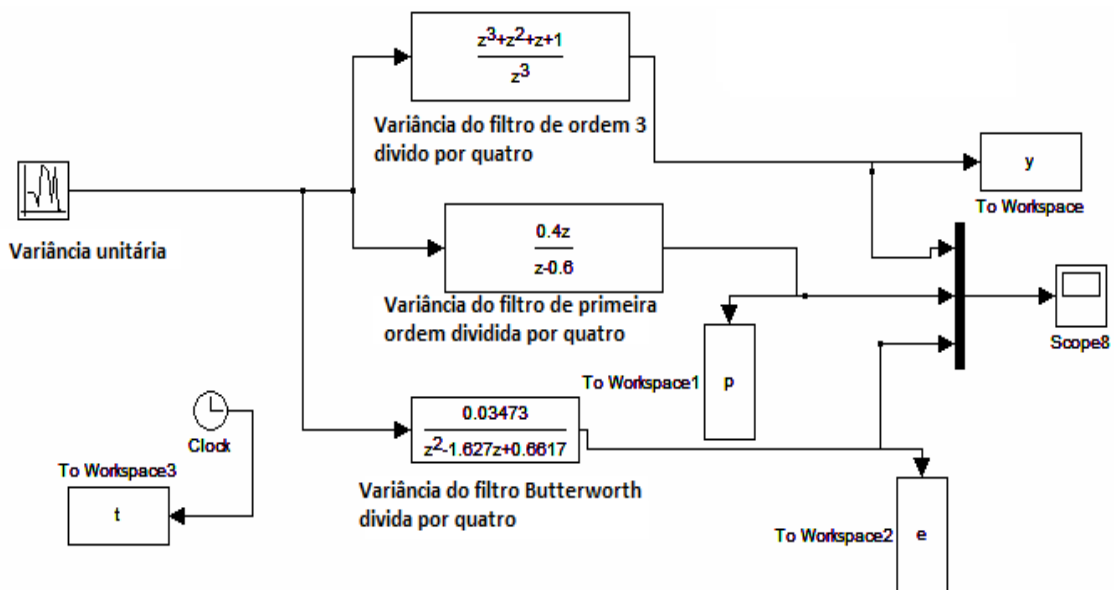


Figura 4.1: diagrama de blocos dos filtros

A figura 4.2 mostra as saídas dos filtros para um ruído branco de media zero e variância unitária com mesma atenuação, a escolha do filtro indicado será feita em função do menor tempo de resposta e a máxima rejeição da variância inserida, é observado que para estes casos os três filtros apresentam saídas com as mesmas variâncias $1/4$.

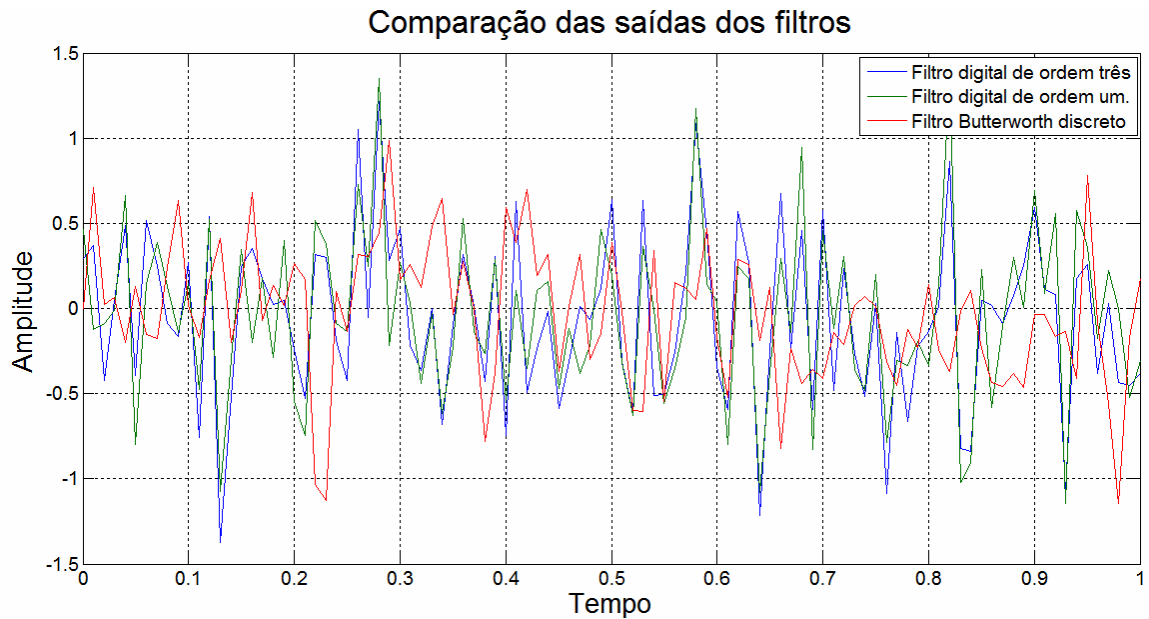


Figura 4.2: comparação das saídas dos filtros com variância 1/4.

Além disso, os três filtros apresentam uma filtragem muito próxima entre eles, o objetivo é encontrar um filtro que cuja resposta seja mais rápida, e os custos computacionais para implementação sejam menores, para esta verificação foi feita uma comparação da variância do sistema, para diferentes filtros, um digital de ordem 50, conhecido como janela deslizante, um filtro digital de ordem um com variância 0.0178. Esta comparação é feita para verificar se quando se trabalha com filtros de ordem superior consegue-se estabilizar o filtro muito mais rápido na variância desejada, mas, a variação entre estes filtros não é muito grande em relação a otimização, porém, sim, em relação a recursos computacionais, a figura 4.3 mostra a resposta da comparação destes filtros.

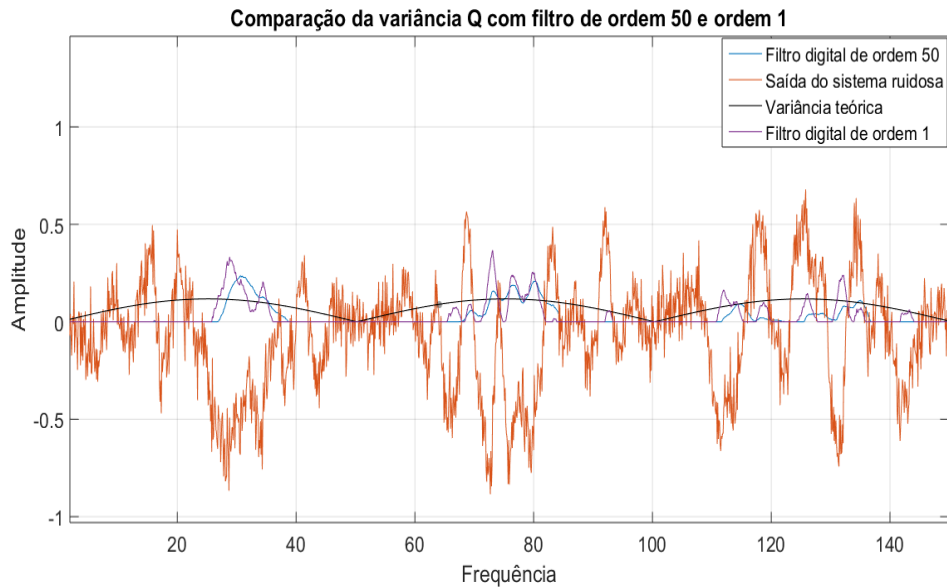


Figura 4.3: Comparação da saída do Q variável para sistemas com filtros diferentes

Finalmente, foi feita uma comparação entre diferentes filtros incluído a janela deslizante de ordem 50, quando é aplicado um degrau, os filtros analisados apresentam polos iguais, é observado que todos chegam ao valor unitário como mostra a figura 4.4:

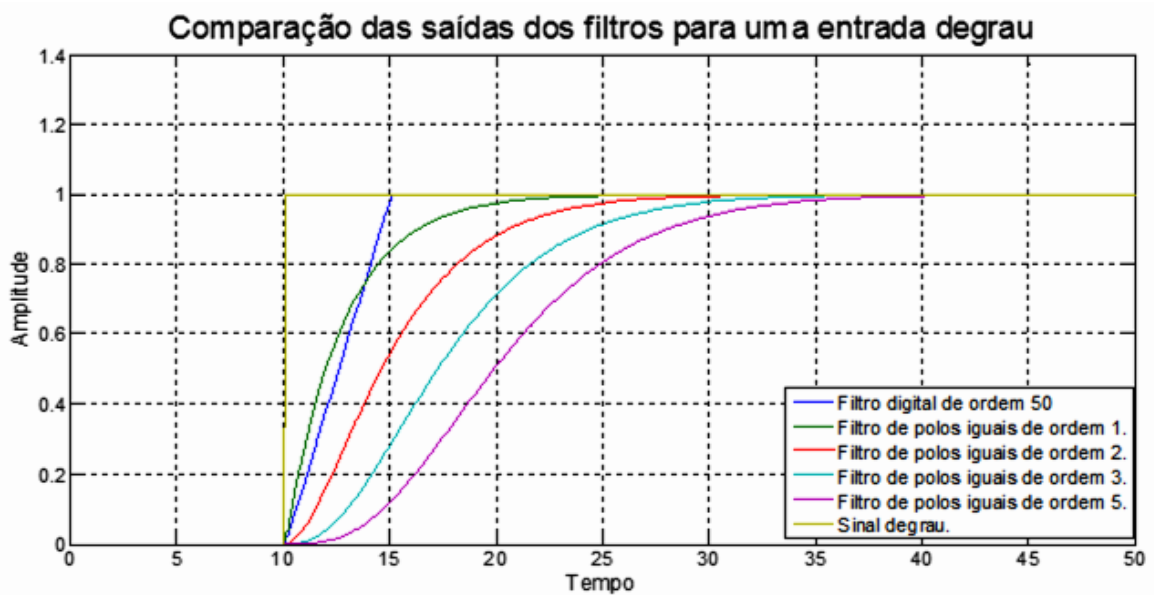


Figura 4.4: Comparação da saída dos filtros de polos iguais para uma entrada degrau

Pode-se observar nos filtros mostrados na figura 4.4 que todos eles apresentam um comportamento parecido, mas o filtros de ordem dois, três e quatro tem uma resposta em um tempo maior comparada com o filtro de ordem 1, além disso, o filtro que melhor faz o seguimento do filtro digital é o filtro de primeira ordem, por essa razão foi escolhido este filtro para trabalhar as variâncias das saídas estimadas, é importante ressaltar que o filtros analisados

foram calculados usando o mesmo método analítico para calcular a variância do filtro Butterworth mostrado no Apêndice, mas, para este caso com polos iguais. Concluindo-se que o filtro de ordem unitário tem um menor tempo de resposta e máxima reação frente a variâncias de ruído branco, em comparação aos outros filtros testados que apresentam o mesmo nível de atenuação, por este motivo será usado este filtro para prosseguir com o desenvolvimento do projeto.

4.2 OBTENÇÃO DA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO

A proposta de adaptação mostrada aqui é feita partindo de uma descrição geral de um sistema em espaço de estados o qual foi representado mediante as equações 2.30 e 2.30 e reescrito como:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_K + Bu_K + Bw_K \\ y_K = Cx_K + v_K \end{cases} \quad (4.1)$$

Sendo: A,B,C matrizes que definem a dinâmica do um sistema, u_K é a referência do sistema, x_k os estados do sistema, v_K e w_K ruídos na medição e processos definidos como brancos de média zero com variâncias R e Q, os quais são não correlacionados entre si, indicando que $Cov[x_k, w_k] = 0$.

Aplicando as propriedades da variância mostradas no capítulo 3 nas equações dos estados do sistema é obtido:

$$Var[x_{k+1}] = AVar[x_k]A^T + BVar[u_k]B^T + BVar[w_k]B^T \quad (4.2)$$

Assim a variância na saída para um sistema dinâmico depende diretamente da variância dos estados do sistema. Tendo em vista que a frequência de amostragem do sistema é muito maior que a frequência de resposta do sistema é possível aproximar $Var[x_{k+1}] \simeq Var[x_k]$, além disso, pode ser considerada a variância $Var[u_k] = 0$, isto pode ser feito, dado que o comando em malha aberta permanece invariável na maior parte do tempo (o equivalente em considerar o valor de referencia da saída constante para o sistema em malha fechada). Desta maneira é possível reescrever a equação 4.2 da seguinte maneira:

$$AVar[x_k]A^T - Var[x_k] + BVar[w_k]B^T = 0 \quad (4.3)$$

A equação 4.3, é uma relação matricial cuja solução que pode ser abordada, mediante desigualdade matricial, encontrando assim o valor da matriz $Var[x_k]$, mas, esta seria uma solução particular que muda com a ordem do sistema analisando, de maneira geral, a equação 4.3, pode ser comparada de forma discreta, usando uma desigualdade matricial linear

assumindo a forma:

$$AVar[x_k]A^T - Var[x_k] = -BVar[w_k]B^T \quad (4.4)$$

Se for conhecida a matriz que representa a variância da perturbação, pode ser obtida a variância dos estados mediante a implementação de um *LMI* [84] o qual é representado como mostra a equação 4.5

$$A^T N * A - N \leq -Z \quad (4.5)$$

Onde Z , uma matriz quadrada que deve cumprir que $Z = Z^T$, A , é a matriz constante de ordem $n \times n$ do sistema em espaço de estados e N é uma matriz que deve cumprir que $N > 0$ o que indica que é uma matriz positiva definida, Assim, desta maneira pode ser usada esta solução considerando que: $N = Var[x_k]$ e $Z = BVar[w_k]B^T$, obtendo a matriz de variância $Var[x_k]$ que cumpre a desigualdade representada pelo *LMI*, usando este raciocínio e mediante as propriedades de superposição de sistemas lineares pode ser encontrada a relação geral para o sistema em malha aberta mostrada em 4.6:

$$Var[x_k] = k_m * Var[w_k] \quad (4.6)$$

Desta maneira a partir da relação anterior pode ser obtida a variância estimada na saída do sistema substituindo a equação 4.6 na variância da saída estimada e mostrada como mostrada como 4.7.

$$Var[y_k] = C * k_m * Var[w_k] * C^T + Var[v_k] \quad (4.7)$$

A equação 4.7 representa a variância que pode ser modificada mediante propriedades de superposição de sistemas lineares, obtendo desta maneira a equação 4.8.

$$Var[w_k] = G_m(Var[y_k] - Var[v_k]) \quad (4.8)$$

Onde G_m , é o ganho obtido das variâncias, o qual permite encontrar uma relação entre a entrada e saída do sistema e que será mostrado na próxima seção para sistemas de ordem $n \times n$.

A análise anterior pode ser expandida em um sistema de malha fechada considerado o observador de estados, o qual pode ser representado de maneira matricial como mostra a equação 4.9

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK_k \\ 0 & A - BK_k - L_k C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} w_k + \begin{pmatrix} 0 \\ L_k \end{pmatrix} y_k \quad (4.9)$$

sendo:

$$y_k = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} + v_k \quad (4.10)$$

Usando a equação 2.89, e o sistema representado na equação 4.9 é representado como apresenta a equação 4.11

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK_k \\ L_k C & A - BK_k - L_k C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} w_k + \begin{pmatrix} 0 \\ L_k \end{pmatrix} v_k \quad (4.11)$$

Executando a discretização do sistema, os estados podem ser representados como se mostram nas equações 4.12:

$$x_{k+1} = A_2 x_k + B_1 u_k + B_2 w_k + L_2 v_k \quad (4.12)$$

Onde v_k , representa o ruído do processo, que pode ser considerado branco e de variância constante e está relacionado com sensor de medida, então é de interesse encontrar uma relação da variância da perturbação, dado que a perturbação pode causar instabilidade no sistema. O propósito deste trabalho é encontrar uma relação da intensidade da variação da saída e a perturbação que a gera, de maneira que possa ser controlados os efeitos no sistema e no controlador, assim calculado a variância da equação 4.12, da mesma forma como foi calculada a variância da equação 4.3. Considerando a correlação nula entre o ruído de medida e a perturbação é possível representar a variância dos estados do sistema como mostra a equação 4.13.

$$Var[\hat{x}_{k+1}] = A_2 Var[\hat{x}_k] A_2^T + B_1 Var[\hat{u}_k] B_1^T + L_2 Var[v_k] L_2^T + B_2 Var[w] B_2^T \quad (4.13)$$

A equação 4.13, é uma equação similar com a equação 4.4 obtida anteriormente, lembrando que $Var[u_k] = 0$, porém, pode ser representada em função de uma desigualdade que pode ser trabalhada mediante a implementação de novos *LMI*, considerando $N = Var[x_k]$, e Z pode ser trabalhada usando o princípio de superposição obtendo uma primeira solução de $Z = L_2 Var[v_k] L_2^T$ encontrando $k_{m1} * Var[v_k]$, más, o cálculo da variância da perturbação vai depender do número de entradas do sistema, dado que cada entrada é perturbada por ruídos de variância diferente, por tanto a solução para estas entradas são calculadas para um $Z = B_2 Var[w_i k] B_2^T$, com $Var[w_i k]$ representando cada uma das entradas do sistema, obtendo solução no final $k_{m2} * Var[w_k]$, gerando expressões matemáticas similares às obtidas nas equações 4.7 e 4.8, mostradas anteriormente.

$$Var[x_k] = k_{m1} * Var[v_k] + k_{m2} * Var[w_k] \quad (4.14)$$

Sendo k_{m1} e k_{m2} ganhos matriciais obtidos através do método da superposição para cada uma das entradas do sistema *MIMO* de forma geral, desta maneira baseados na equação 4.14 é obtida a variância estimada na saída como mostra a equação 4.15.

$$Var[y(k)] = C * (k_{m1} * Var[v_k] + k_{m2} * Var[w_k]) * C^T + Var[v_k] \quad (4.15)$$

Sendo assim, uma representação das variâncias que pode ser modificada mediante propriedades de superposição dado que $C * (k_{m1} * Var[v_k] * C^T + Var[v_k])$ podem ser representados em um termo $G_{m2} * Var[v_k]$, por se tratar de sistemas lineares, obtendo desta maneira uma combinação linear de soluções com ganhos G_{m1} e G_{m2} mostradas na equação 4.16, estas expressões poderão ser entendidas de forma clara no exemplo apresentado na próxima seção deste capítulo.

$$Var[w_k] = G_m * (Var[y_k] - Var[v_k] - C * (k_{m1} * Var[v_k]) * C^T) \quad (4.16)$$

Até o momento foi calculada a variância da saída estimada em função das contribuições de ruído e perturbação do sistema, como mostrou a equação 4.15, partindo desta relação foi calculado a variância da perturbação que está sendo inserido no sistema como mostrou a equação 4.16, esta relação representa da variância da perturbação a qual está sendo adaptada em função das ruídos inseridos no sistema e depende da saída estimada do observador e do ruído, para este caso é necessário a determinação da variância da saída estimada, que apresenta o formato mostrado na equação 4.17, assumindo que o saída y converge para seu valor de referencia y_{ref} .

$$Var[y_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k (y(j) - y_{ref})^2 \quad (4.17)$$

Esta variância é estimada em tempo real através de um filtro de primeira ordem analisado no início deste capítulo cuja variância foi calculada conforme foi mostrada no apêndice, desta maneira a variância da saída estimada é calculada como mostra a equação 4.18;

$$Var[y_k] = (1 - \alpha) * Var[y_{k-1}] + \alpha[y(k) - y_{ref}]^2 \quad (4.18)$$

Onde α é escolhido de maneira que a dinâmica do filtro seja muito rápida comparada com o sistema em malha fechada e muito mais lenta que a frequência de amostragem. A equação 4.18, garante que a variância do estado seja positiva definida cumprindo com as condições algébricas de Ricatti para a matriz de variância mostrada na equação 4.16, para este caso é fixado um valor mínimo de saturação, que permita limitar a variância de maneira que quando seja feita a subtração dos dois termos, possa-se ter variâncias positivas, levando aqueles valores negativos ao valor mínimo fixado.

A continuação será mostrado como pode ser calculada a variância para um sistema de múltiplas entradas, iniciando com um sistema de primeira ordem e passando a analisar sistemas de múltiplas variáveis em malha aberta e fechada.

4.2.1 Análise da variância de um sistema de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem pode ser representado mediante o modelo em espaço de estados como mostrou as equações 2.30 e 2.30, dado que o sistema é de primeira ordem as matrizes A,B,C são constantes, gerando desta maneira uma representação de variâncias da seguinte forma:

$$\begin{cases} Var[x_k] - AVar[x_k]A^T = BVar[w_k]B^T \\ Var[y_k] = CVar[x_k]C^T + Var[v_k] \end{cases} \quad (4.19)$$

A equação 4.19 pode ser representado como mostra a equação 4.20:

$$\begin{cases} Var[x_k] - A^2Var[x_k] = B^2Var[w_k] \\ Var[y_k] = C^2Var[x_k] + Var[v_k] \end{cases} \quad (4.20)$$

Assim a variância do estado pode ser calculada como mostra a equação e pode ser determinada desta forma a variância da saída estima 4.21:

$$\begin{cases} Var[x_k] = \frac{B^2}{1-A^2}Var[w_k] \\ Var[y_k] = C^2\frac{B^2}{1-A^2}Var[w_k] + Var[v_k] \end{cases} \quad (4.21)$$

4.2.2 Análise da variância de um sistema de ordem n em malha aberta

De forma similar à considera no caso de um sistema de primeira ordem, pode ser representado um sistema de ordem $n \times n$, mediante a mesma representação de espaço de estados mostrada nas equações 2.30 e 2.30, fazendo o cálculo de variâncias para elas, considerando que u_k e w_k , são não correlacionados entre si, e que que a variância da referência $Var[u_k] = 0$, como foi analisado na no caso da malha aberta, é obtido o sistema de equações mostrado 4.22.

$$\begin{cases} Var[x_k] - AVar[x_k]A^T = BVar[w_k]B^T \\ Var(y) = CVar[x_k]C^T + Var[v_k] \\ Var[x_k] = (C)^{-1}[Var[y_k] - Var[v_k]](C^T)^{-1} \end{cases} \quad (4.22)$$

Lembrando que para este caso analisado a malha aberta do sistema, a solução geral foi representada como: $Var[x_k] = K_m Var[w_k]$

Manipulando a equação 4.22 pode ser obtida a equação 4.23, onde pode ser comparados os ganhos do sistema.

$$\begin{cases} Var[w_k] = (BB^T)^{-1}GVar(\hat{x}_k) \\ Var(\hat{x}_k) = BB^TG^{-1}Var[w_k] \end{cases} \quad (4.23)$$

Sendo $K_m = BB^TG^{-1}$, correspondente ao ganho mostrado na equação 4.6, onde G representa o ganho correspondente ao filtro de primeira ordem usado para calcular a variância das saídas estimas, cuja determinação foi realizada como mostra a equação 4.21.

A continuação é mostrado um exemplo usando o sistema em espaço de estados obtido na planta real para representar o sistema e mostrar como se calcula os ganhos do método de adaptação, para este caso é usada a variância obtida dos ruídos para as entradas do sistema sendo $R1 = 0.6785$ e $R2 = 1.56$ e as matrizes que representam o sistema dinâmico analisado:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0.7833 & 0.1024 \\ 0.2167 & 0.8193 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0.2612 & 0 \\ 0 & 0.2184 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.24)$$

Aplicando as matrizes do sistema dinâmico nas equações obtidas 4.22 e 4.23 para calcular a variância dos estados estimados em função da variância da saída estimada e o ruído da medição encontra-se, que a variância dos estados pode ser representada para este caso como mostra a equação 4.25, onde a matriz C é a identidade para este exemplo, permitindo fazer a representação mostrada a continuação:

$$Var[x_k] = Var[y_k] - Var[v_k] \quad (4.25)$$

Analisado a matriz de variância dos estados, pode ser observado que corresponde a uma matriz diagonal, sendo o primeiro elemento da diagonal a variância correspondente ao estado representado o tanque 4 e o quarto elemento da matriz a variância que representa o estado do tanque 2, para calcular a variância da matriz perturbação foi usada a equação 4.21, onde o ganho G , corresponde a $G = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 4 \times 10^{-4}$, representando desta maneira a matriz de variância da perturbação como mostra a equação 4.26:

$$Var[w_k] = \begin{bmatrix} 0.0059 & 0 \\ 0 & 0.0077 \end{bmatrix} Var[x_k] \quad (4.26)$$

Desta forma a variância dos estados fica representada como:

$$Var[x_k] = \begin{bmatrix} 170.5636 & 0 \\ 0 & 130.4164 \end{bmatrix} Var[w_k] \quad (4.27)$$

sendo assim o ganho $K_m = \begin{bmatrix} 170.5636 & 0 \\ 0 & 130.4164 \end{bmatrix}$ Os resultados obtidos mediante esta análise serão mostrados no capítulo 6 onde é analisado o comportamento do *FKA* com o *FK* sem adaptação o qual foi projetado mediante a identificação da matriz de variância usando o sistema em malha aberta.

4.2.3 Análise da variância de um sistema de ordem n em malha fechada

Para o sistema de ordem $n \times n$ em malha fechada foram analisadas as equações 4.12, 4.13 e 4.14, obtendo desta forma duas soluções, uma em função da variância perturbação e outra em função da variância da medição como mostra a equação 4.28.

$$\begin{cases} Var[x_k] - AVar[x_k]A^T = BB^TVar[w_k] \\ Var[x_k] - AVar[x_k]A^T = KVar[v_k]K^T \\ Var[x_k] = (C)^{-1}[Var[y_k] - Var[v_k]](C^T)^{-1} \end{cases} \quad (4.28)$$

A equação 4.28 pode ser representada de forma geral como mostra em 4.29, a qual mostra uma combinação linear entre as variáveis de medição e perturbação e onde pode ser determinado os ganhos mostrados na equação 4.16.

$$Var[x_k] = GBB^TVar[w_k] + GKVar[v_k]K^T \quad (4.29)$$

Desta forma a variância da perturbação para o sistema em malha fechada é calculado como mostra a equação 4.30:

$$Var[w_k] = (BB^T)^{-1}G[Var([\hat{x}_k]) - KVar([v_k])K^T] \quad (4.30)$$

Sendo o ganho $G_m = (BB^T)^{-1}G$ mostrado na equação 4.18.

Usando o mesmo exemplo analisado em malha aberta e substituindo nas equações 4.28 até 4.30 se tem:

$$Var[x_k] = \begin{bmatrix} 0.0682 & 0 \\ 0 & 0.0522 \end{bmatrix} Var[w_k] + K \begin{bmatrix} 0.6785 & 0 \\ 0 & 1.56 \end{bmatrix} K^T \quad (4.31)$$

Onde K o ganho do *FKA* o qual está sendo atualizado em cada instante, porém, ele é um termo variável, desta maneira pode ser representada a variância da matriz perturbação para o sistema em malha fechada como mostra a equação:

$$\text{Var}[w_k] = \begin{bmatrix} 0.0009 & 0 \\ 0 & 0.0012 \end{bmatrix} [\text{Var}[x_k] + K\text{Var}[v_k]K^T] \quad (4.32)$$

Onde $\text{Var}(x)$ depende das variações das saídas estimadas e a variância da medição representada como foi mostrada na equação 4.22.

Os resultados obtidos nesta análise serão mostrados no capítulo 6, onde é analisado o comportamento dos dois filtros testados, tanto em malha aberta, como em malha fechada, para o sistema adaptado e sem adaptação.

Definida a proposta de adaptação proposta, foi feita uma representação mediante o fluxograma da figura 4.5 que mostra como pode ser montado o *FKA*.

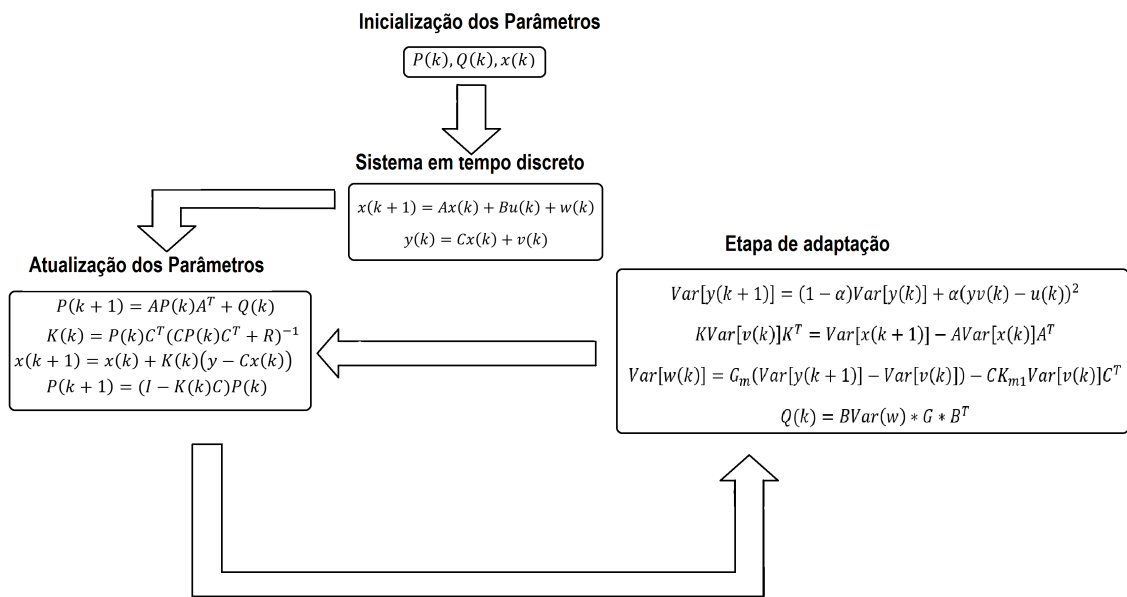


Figura 4.5: Fluxograma da técnica de adaptação.

O fluxograma proposto mostrado na figura 4.5 apresenta quatro etapas, uma de inicialização das variáveis, onde são inicializadas as matrizes de covariância P a matriz perturbação Q a qual é inicializada como $Q = B * B^T$, para a primeira estimativa, sabendo que na segunda estimativa ela assume um valor real do processo e são inicializados com valores zeros os estados x para iniciar a atualização dos mesmos, seguidamente é mostrada a etapa correspondente à obtenção das saídas estimadas, passando as atualizações dos parâmetros correspondentes à matriz de covariância, o ganho que faz minimiza a matriz de covariância K e a atualização dos estados, seguindo com a etapa de adaptação proposta, onde é obtida a matriz de covariância Q , a qual depende dos ganhos do sistema G e foi mostrado nesta seção como realizar a adaptação que permite a realimentação do sistema.

Usando o fluxograma proposto, foi feito um teste onde se tinha o sistema identificado e foram eliminados os efeitos de ruído inserindo perturbações de valores diferentes para

cada entrada, com a finalidade de obter estes valores na saída do sistema e assim usar esta metodologia na determinação do tamanho da perturbação de um sistema real, as figuras 4.6 até 4.9 representam os resultados obtidos:

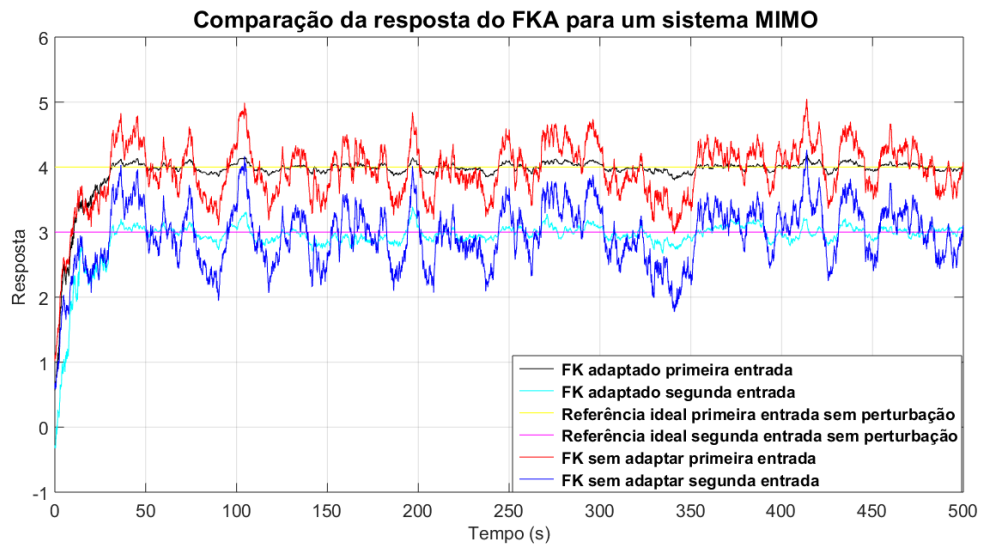


Figura 4.6: Comparação das das saídas estimadas para perturbações inseridas no sistema.

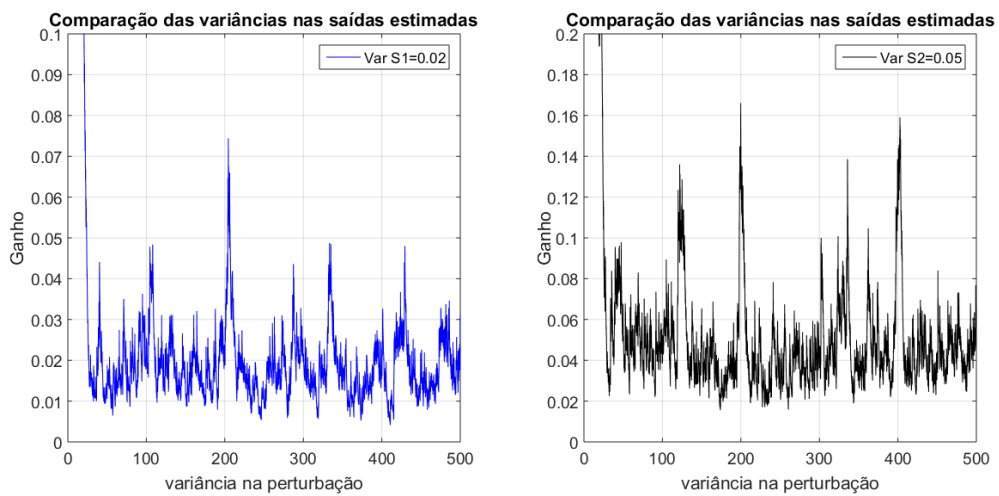


Figura 4.7: Variância estimada das perturbações inseridas no sistema.

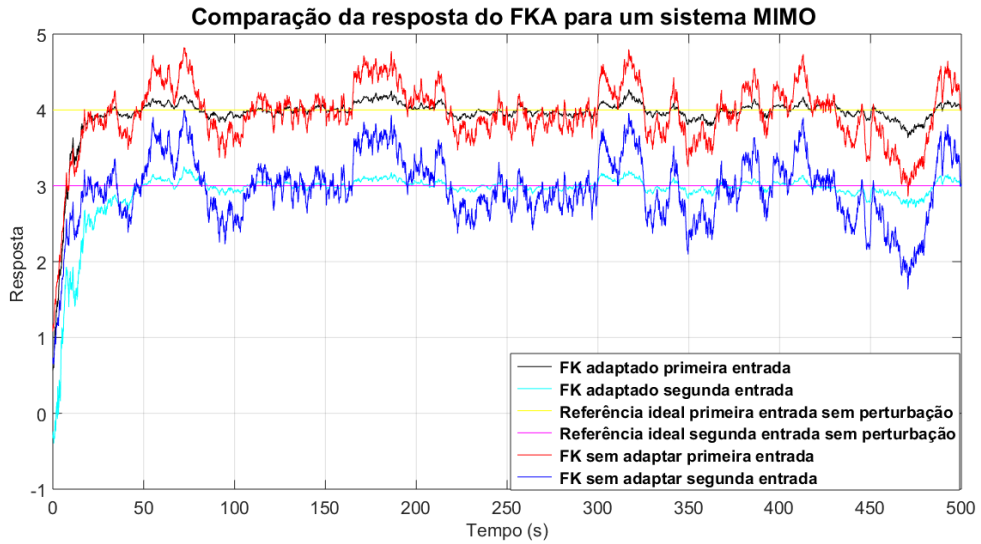


Figura 4.8: Comparação das das saídas estimadas para perturbações inseridas no sistema.

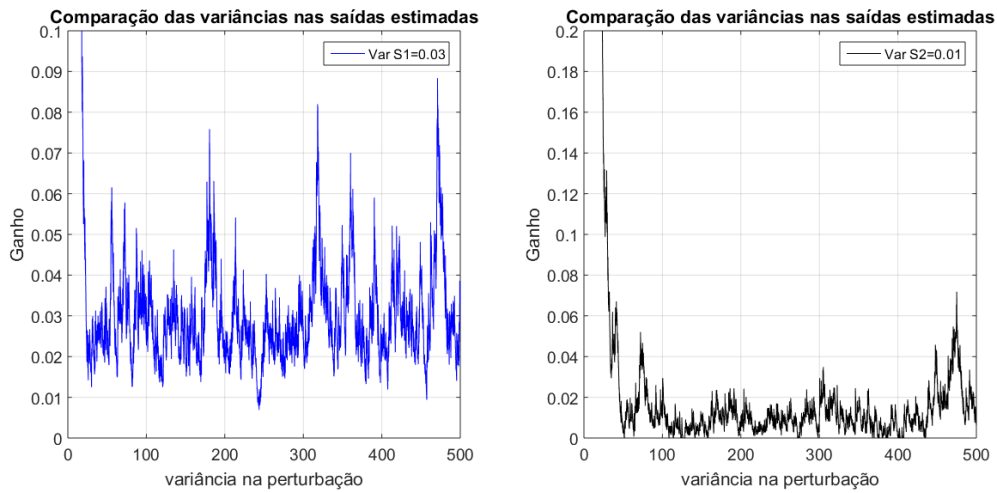


Figura 4.9: Variância estimada das perturbações inseridas no sistema.

A figura 4.6 mostra as saídas estimada 1 e 2 inserindo perturbações de variância 0.02 e 0.05 respetivamente, pode-se observar que o *FKA* para as duas saídas responde bem melhor comparado com o *FK* sem adaptar os quais são mostrados nas figuras de cores vermelho e azul, já, a figura 4.7, mostra a obtenção da variância da perturbação inserida no sistema, pode-se observar na primeira figura que está variando entorno do valor 0.02, que foi o variância da perturbação, da mesma maneira a segunda figura representada pela cor preta, mostra como a segunda saída estabiliza em 0.05 como era esperado, posteriormente foi feita outra simulação numérica mostradas nas figuras 4.8 e 4.9, onde podemos observar os mesmos comportamento já para variâncias na perturbação diferentes, neste caso 0.03 e 0.01 respetivamente, pode ser observado que dado que as variâncias nesta perturbação são menores o *FKA* reage muito melhor, más, em todos os testes realizados foi verificado que sempre a

adaptação proposta apresenta melhores resultados.

4.3 INFLUÊNCIA DO FILTRO ADAPTATIVO NA PERFORMANCE DO CONTROLE EM MALHA FECHADA

Durante todo este processo tem sido testados numericamente diferentes alternativas de controle, sendo definido que a melhor opção encontrada é trabalhar com um sistema adaptativo, como será mostrado ainda neste capítulo mediante as avaliações numéricas realizadas a diferentes sistemas, foi dito que a principal vantagem que apresenta a teoria aqui apresentada é sua forte reação frente a ruídos inseridos no sistema, por essa razão foi feita uma análise considerando como entrada ruídos com variâncias conhecidas, o que faz que a entrada seja uma constante zero, onde é mostrado e comparado os resultados obtidos usando um FK sem adaptação com um FKA , iniciou-se usando perturbações fixas de variância 0.25 e 5 respectivamente. A figura 4.10 representa a saída do sistema sem ruído, onde é observado que as duas figuras apresentam o mesmo formato, mas sua amplitude é diferente, isso a causa da perturbação, comparando a relação dos valores, a diferença é 7 a 1, da mesma maneira analisando a figura 4.11 que representa o comando, é perceptível uma diferença nas amplitudes de 17 a 1, concluindo-se que o FK reage de maneira forte para perturbações grandes no sistema; sendo assim que o FK é mais reativo.

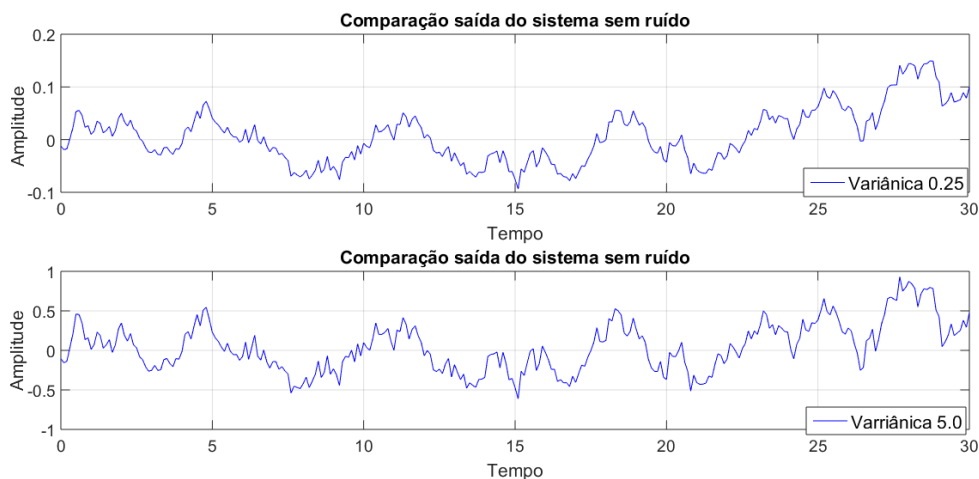


Figura 4.10: Comparação da saída do sistema sem ruído relação 7x.

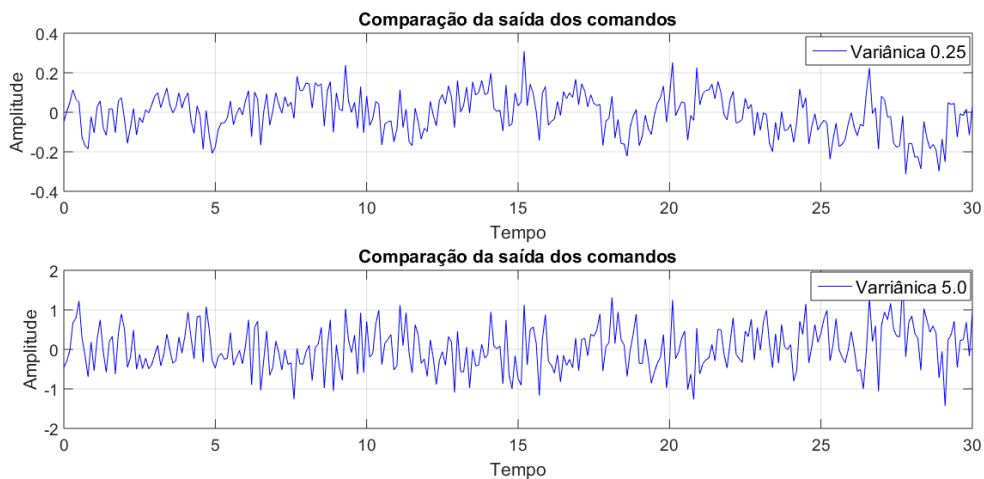


Figura 4.11: Comparação da saída do comando relação 17x

A figura 4.11 denominada comando representa a saída do controlador usado para garantir o ganho estático do sistema, neste caso foi suficiente o uso de um controlador proporcional dado que o sistema está em malha fechada ele é atualizado a cada passo de tempo, é importante mencionar que este trabalho tem como principal objetivo gerar uma técnica de controle adaptativo usando o filtro de Kalman para conseguir reagir de forma muito forte frente perturbações grandes, porém, não é trabalhado de forma muito forte na parte dos controladores clássicos dado que não acrescentaria muito a pesquisa desenvolvida.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS REALIZADAS COM O FKA

Neste capítulo se apresentam uma série de simulações numéricas realizadas como o objetivo de validar a teoria de adaptação proposta, inicia-se mostrando um sistema de tanques simples, posteriormente um sistema sistema barra bola, seguido das simulações feitas com um compensador ativo de Heave.

5.1 SISTEMA IDEAL DE DOIS TANQUES EM SÉRIE.

O primeiro teste do *FKA* é realizado com sistema simples usado para controlar o fluxo da água mediante um *FK* de segunda ordem, o qual está sendo perturbado por um ruído não gaussiano, o esquema é mostrado na figura 5.1.

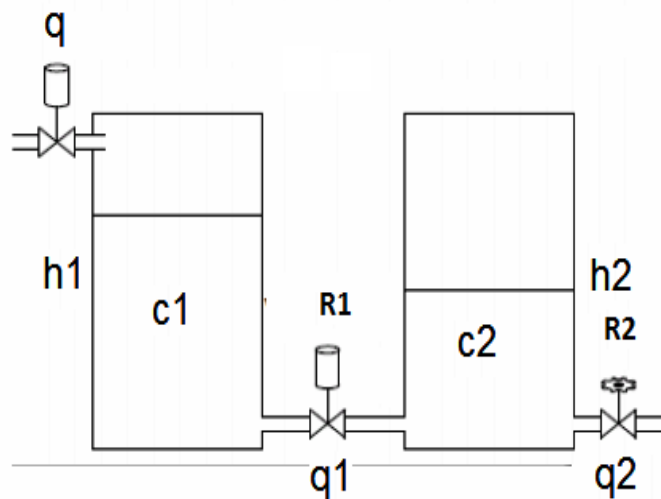


Figura 5.1: Sistema de tanques em serie

Onde:

- Q é a vazão volumétrica;
- h é a altura;
- R resistência ao fluxo;
- C capacitância.

Este sistema pode ser representado em função da vazão volumétrica como apresenta a seguinte equação:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \\ q - q_1 = C_1 \frac{dh_1}{dt} \\ q_2 = \frac{h_2}{R_2} \\ q_1 - q_2 = C_2 \frac{dh_2}{dt} \end{cases} \quad (5.1)$$

E suas respectivas transformadas de Laplace são representadas por:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{H_1 - H_2}{R_1} \\ Q - Q_1 = SC_1 H_1 \\ Q_2 = \frac{H_2}{R_2} \\ Q_1 - Q_2 = SC_2 H_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Das equações anteriores é obtido:

$$\dot{h}_1 = \frac{q}{C_1} - \frac{h_1}{R_1 C_1} + \frac{h_2}{R_1 C_1} \quad (5.3)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{h_1}{C_2 R_2} - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) h_2 \quad (5.4)$$

Para realizar a comparação dos controladores que estão sendo projetados, será considerado inicialmente um caso ideal, onde: $R_1 = R_2 = 1$ e $C_1 = C_2 = 1$, dessa forma o sistema de equações é representado pelas equações 5.5 e 5.6.

$$\dot{h}_1 = h_2 - h_1 + u \quad (5.5)$$

$$\dot{h}_2 = h_1 - 2h_2 \quad (5.6)$$

Sendo o espaço de estados mostrado nas equações 5.7 e 5.8:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (5.7)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

O sistema anterior foi submetido a uma perturbação Gaussiana com media zero e variância unitária, e foi simulado o nível de água de um tanque mediante uma entrada degrau, a resposta obtida é mostrada na figura 5.2.

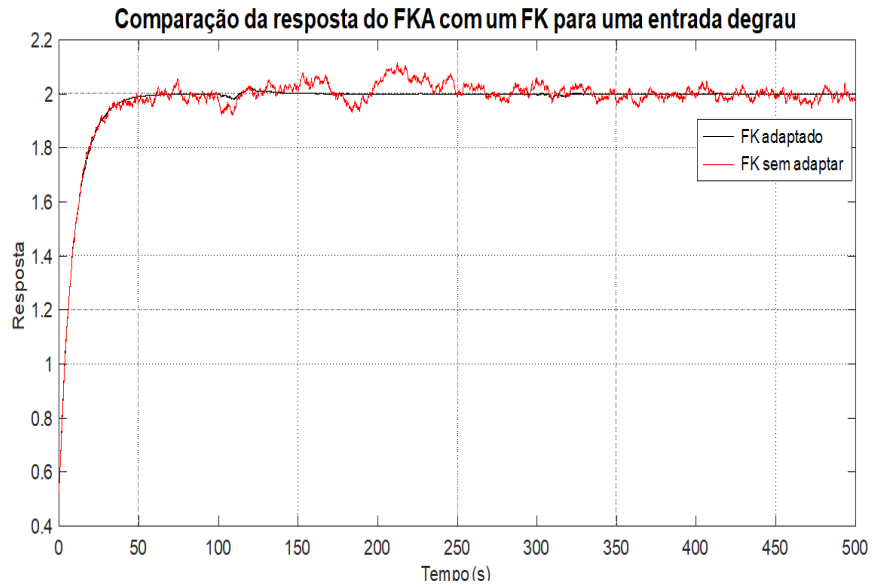


Figura 5.2: FKA SISO para uma entrada degrau.

No trabalho desenvolvido foi projetado um FK estático representado pela cor vermelho e um FKA representado pela cor preta, o qual tem média zero e variância unitária para o sistema, a figura 5.2 mostra que o comportamento obtido com o sistema adaptativo é muito melhor que o encontrado com o filtro sem adaptação, dado que é observado que o FKA tem uma resposta mais lisa comparada com FK estático, posteriormente foi analisada e comparada a resposta do filtro quando se tem uma mudança brusca frente ao nível dos tanques, representando esta mudança entre um nível alto e um nível baixo mediante a implementação de uma entrada quadrada, como mostra a figura 5.3.

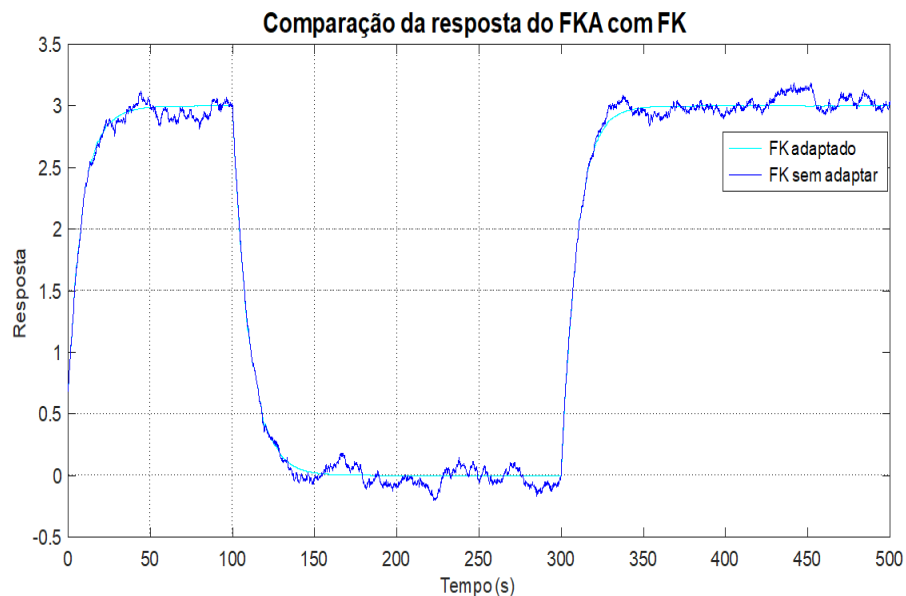


Figura 5.3: FKA SISO para uma entrada quadrada.

Na figura 5.3 se trabalha com o mesmo sistema, mas agora se muda o sinal de entrada a para um comportamento quadrado, pode-se observar que os dois sistemas reagem bem frente a uma mudança brusca no nível do fluido, porém o sistema adaptativo representado pela cor azul continua tendo uma melhor resposta já que consegue reagir de maneira forte ao ruído inserido no sistema e manter uma resposta mais uniforme, os sinais usados para realizar estes testes de comparação são mostrados na figura 5.4 sendo representada pela cor roxa o sinal quadrado e pela cor amarela o sinal degrau.

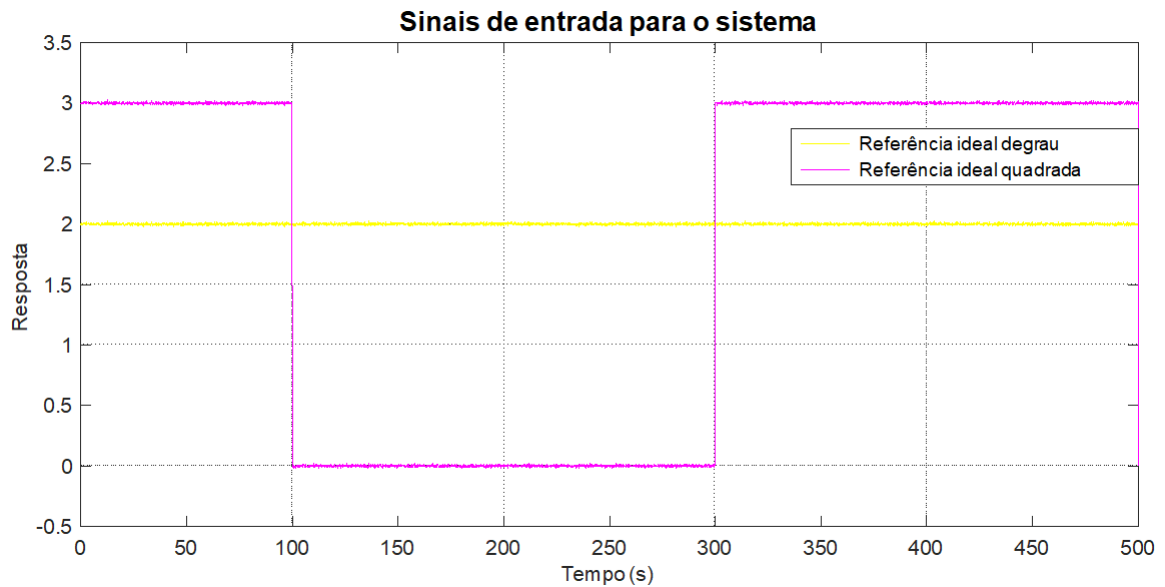


Figura 5.4: Entrada ruidosa para teste ruidosa.

Seguidamente foi analisada uma entrada ruidosa a qual é eliminada em um intervalo para verificar a reatância do FKA o resultado obtido com este teste é mostrada na figura 5.5, encontrando que o FK estático representado pela cor vermelho não consegue eliminar os efeitos do ruído na parte do sinal de entrada onde este ruído foi anulado, mas o FKA representado pela cor azul, reage de maneira mais forte frente a estas perturbações, além disso, é mostrado que os dois filtros tem respostas muito parecidas no sinal ruidos, e que o FKA é muito mais reativo na parte do sinal onde foi anulado este ruído.



Figura 5.5: FKA SISO para uma entrada quadrada ruidosa.

O sistema modelado na figura 5.5, corresponde a um sistema SISO ideal, com o objetivo de verificar o comportamento do *FKA* dado que nesta parte do trabalho não eram conhecidos parâmetros reais do sistema físico, porém mediante este trabalho verificou-se que a adaptação realizada tem um comportamento bem superior ao realizado utilizando o FK estático.

5.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA BOLA - BARRA

Outro sistema analisado para testar o comportamento do filtro de Kalman adaptado, foi o trabalhado feito pelo José Oniram [85], onde é analisado um problema de rastreamento de trajetória para um sistema não-linear barra-esfera, nesse trabalho, a planicidade diferencial do sistema é explorada tanto para desenvolver uma estrutura de controle por realimentação de estados visando estabilizar o erro de rastreamento de trajetória com respeito as trajetórias desejadas. Sistemas não-lineares diferencialmente planos podem ser escritos na sua forma canônica de Brunovsky, o que se permite realizar a estimação de estados através do Filtro de Kalman.

O modelo do sistema trabalhado está mostrado na seguinte figura 5.6:

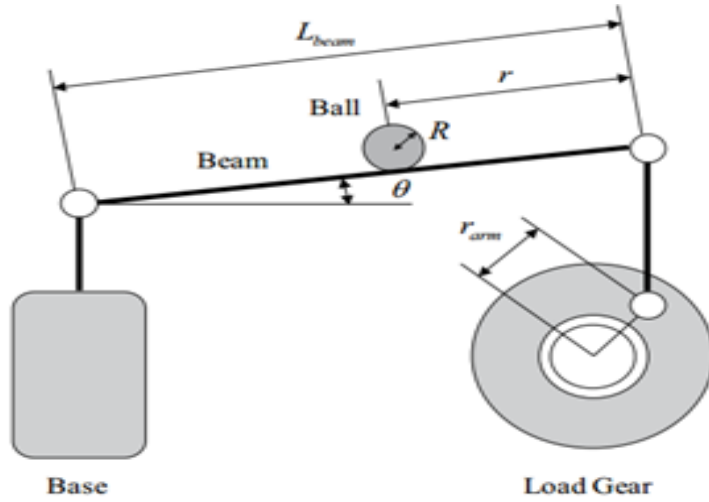


Figura 5.6: Ball and beam system [9].

Este modelo corresponde a um sistema não-linear, o qual foi trabalhando matematicamente por koo [9], encontrando a seguinte representação matemática:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{mr_{arm}gR^2}{L_{beam}(mR^2+J_b)} \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\dot{\theta}\frac{K_1}{V_m} \end{cases} \quad (5.9)$$

Sendo, θ e r são ângulos do feixe e da posição da bola, respectivamente. τ é a constante de tempo, K_1 é o ganho de estado estacionário, L_{beam} é o comprimento do feixe, m e J_b são a massa e o momento de inércia da bola, respectivamente. Além disso, R é o raio da esfera, g é a aceleração da gravidade, r_{arm} a forma é a distância entre o parafuso e a engrenagem do motor. A entrada do sistema é dada pela voltagem do motor V_m [85].

Seja $(x_1; x_2; x_3; x_4)^T = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$. O sistema anterior pode ser representado pelas equações de espaço de estados 5.10 e 5.11:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = K_{bb}\sin(x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \beta_1 x_4 + \beta_2 V_m \end{cases} \quad (5.10)$$

Onde:

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{\tau} \\ \beta_2 = \frac{K_1}{V_m} \\ K_{bb} = \frac{mr_{arm}gR^2}{L_{beam}(mR^2+J_b)} \end{cases} \quad (5.11)$$

Este sistema é representado na base canônica de Brunovsky como mostra as equações

5.12 e 5.14, *informação detalhada do sistema em [85]:*

$$\dot{X}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (5.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_T \quad (5.13)$$

Sendo y a saída planejada do sistema, para realizar as simulações foram usados os parâmetros mostrados na tabela 5.1:

Tabela 5.1: Parâmetros do sistema Ball and Beam.

Parâmetros do sistema Ball and Beam.		
Simbolo	Definição	Valor
m	Massa 1	0.064[Kg]
J_b	Momento de inércia da bola	$4.129 * 10^{-6}$ [Kg]
R	Raio da esfera	0.0127[m]
r_{arm}	Distância entre o parafuso e a engrenagem do motor	0.0254[m]
g	Aceleração da gravidade	9.81[m/s ²]
L_{beam}	Comprimento do feixe	0.7363
τ	Constante de tempo	0.425[m]
K_1	Ganho de estado estacionário	1.5286

Este sistema como foi mencionado corresponde a um sistema não linear, e o objetivo de usar ele para realizar testes, é verificar a eficiência da teoria de controle desenvolvida em função de sistemas não lineares que possam ser linearizados em torno de um ponto de referência, os resultados obtidos são mostrados nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9.

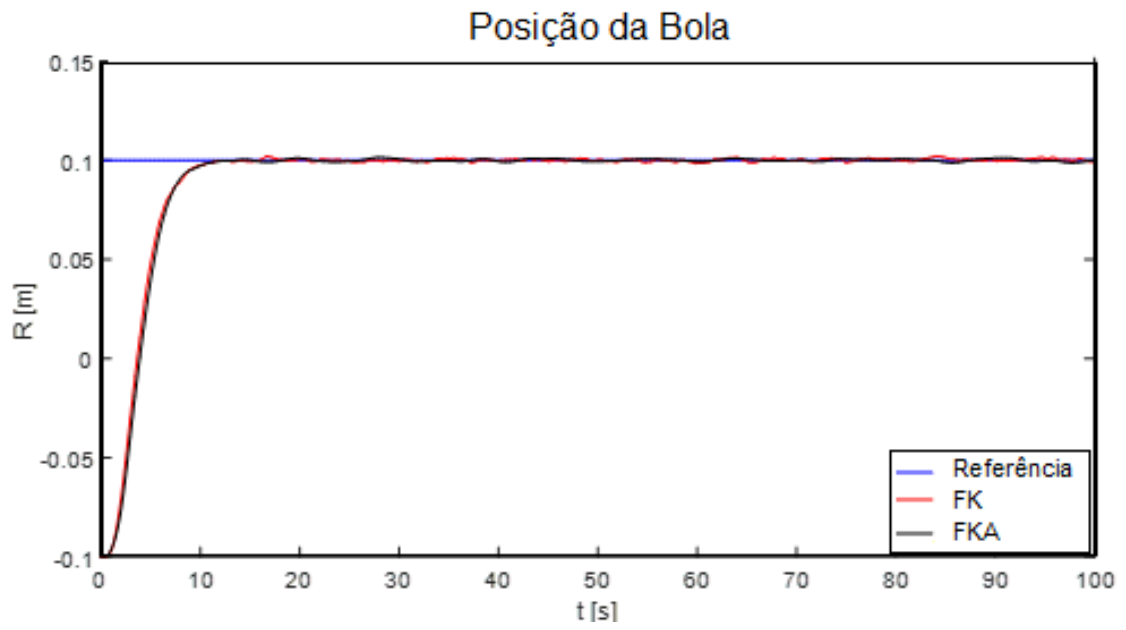


Figura 5.7: Posição [m].

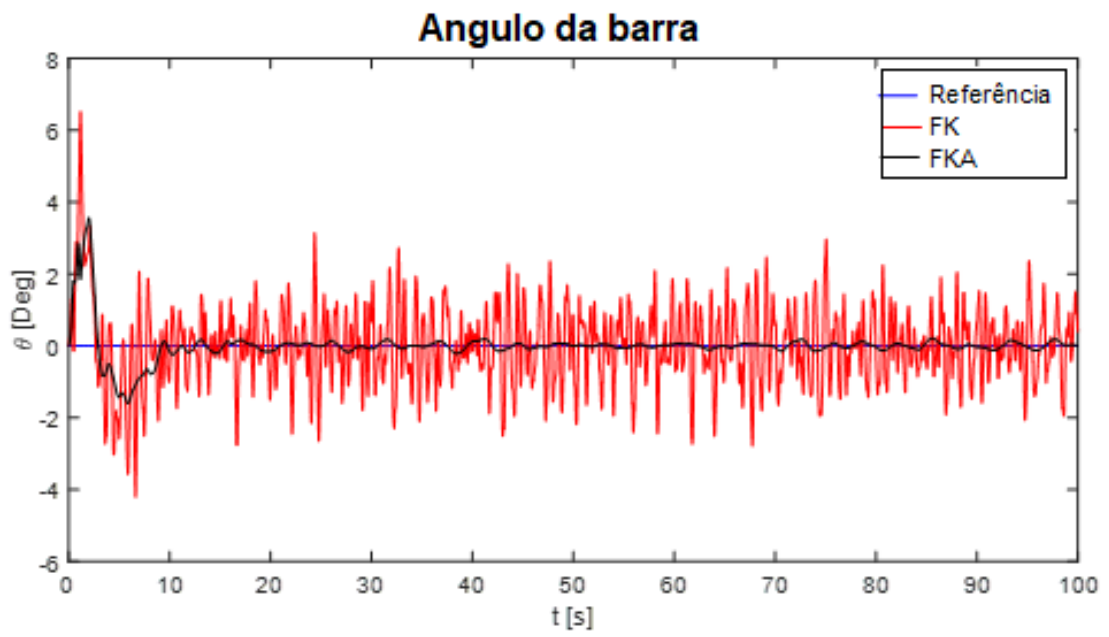


Figura 5.8: Giro [rad].

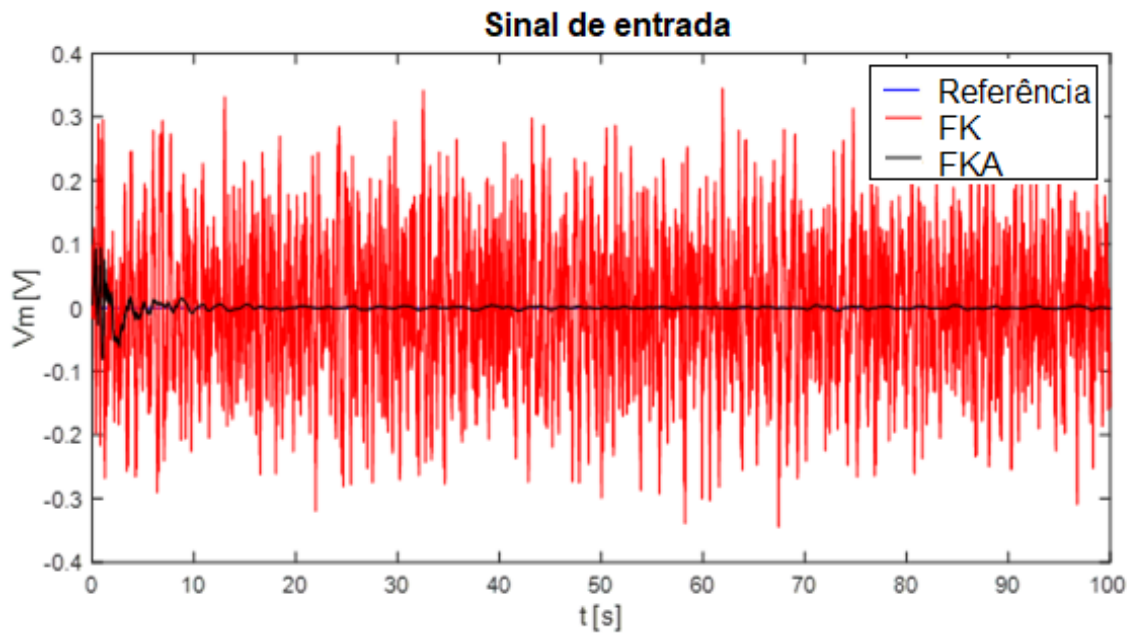


Figura 5.9: Velocidade da barra.

O resultado obtido mediante estes testes está sendo publicado em um artigo, onde é mostrado que para efeitos de sistemas não lineares a adaptação realizada funciona de maneira satisfatória, neste nível o ideal era manter a posição em um valor determinado e o ângulo e velocidades da barra próximos de zero, para tal tarefa foi comparado um FK seguida a metodologia mostrada para o sistema de tanques simples, onde é comparando o comportamento de um FK invariante representado pela cor vermelho com o FKA representado pela cor preta, é observado nos gráficos das figuras 5.7, 5.8 e 5.9, que efetivamente a melhor metodologia para realizar esta tarefa é usar a adaptação proposta neste documento, dado que o sistema estabiliza rápido, isso foi possível porque foram usados as variâncias dos parâmetros envolvidos, gerando um ganho para o sistema, que ajusta a matriz de covariância e os estados do sistema, fazendo que o sistema seja muito reativo a perturbações grandes e seu efeito seja reduzido quando se aplicada uma perturbação pequena, de maneira que o sistema sempre permaneça estável.

5.3 COMPENSADO ACTIVO DE HEAVE

Outro sistema que foi fornecido para realizar testes do FKA projetado foi parte do trabalho que está sendo realizada pelo aluno de mestrado Tassio Melo, o qual publicou um artigo que pode ser encontrado em [86], onde é mostrada uma abordagem de controle baseado na teoria de planicidade diferencial para um sistema massa mola-amortecedor com um cilindro de dupla via, com propósito é estabilizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio quando está sujeito a perturbações externas desconhecidas. A partir das equações governantes do

sistema é projetado um sistema de controle combinando a propriedade plana do sistema com um estimador de perturbações baseados no Filtro de kalman. O trabalho aqui descrito tem como proposta projetar um controlador que possa compensar os efeitos das perturbações do sistema, visando na aplicação de sistemas marítimos, a planta trabalhada corresponde a um sistema de segunda ordem, onde as equações descrevem a dinâmica da suspensão e a massa, o modelo final equivalente obtido corresponde a um sistema onde a força é transmitida à massa suspensa pelo movimento do navio, o qual é interpretado como uma perturbação externa que é estimada usando o FK na funcionalidade de observador de distúrbios, além, de estimação de estados. O modelo proposto é similar ao apresentado por Hatlestkog no trabalho [10] que é mostrado na figura 5.10:

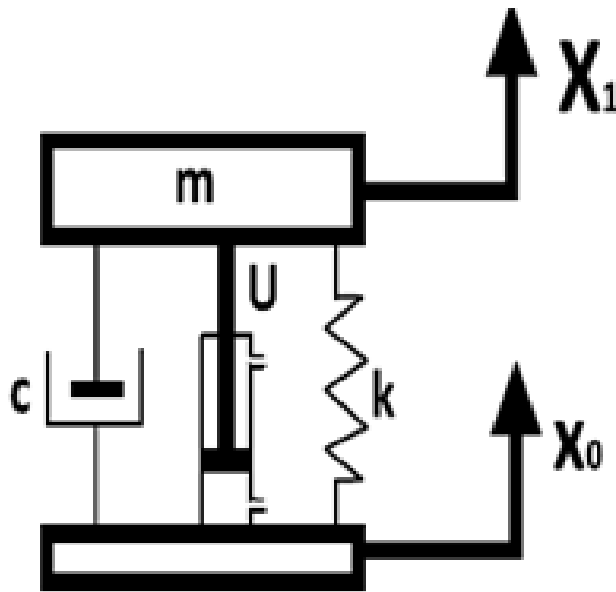


Figura 5.10: Ilustração esquemática do sistema controlado e o atuador, fonte Hatlestkog [10].

A Figura 5.10 mostra a ilustração esquemática de um sistema onde X_1 é a posição da massa suspensa, x_0 é a posição do navio, k é o coeficiente de rigidez e c é o coeficiente de amortecimento entre o navio e a massa suspensa m , o qual gera um sistema de um grau de liberdade.

Este trabalho não considera a dinâmica do atuador, como saturação e atrito de coulomb, Isso significa que, o atuador é capaz de fornecer o exato controle do comando exigido, além disso, a dinâmica do navio em relação ao oceano não é modelada porque o sistema de compensação de alçada ativo deve funcionar para qualquer perturbação, ou seja, o sistema de compensação deve ser independente do movimento do navio e das ondas do oceano.

O deslocamento x_1 pode ser medido através de uma unidade de medida inercial (*IMU*), com eletrômetros, giroscópios, magnetômetros e combinações destes instrumentos, como foi explicado por Kuchler em [87], a equação 5.14 apresenta as forças que atuam na massa suspensa m .

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - c\dot{x}_1 + kx_0 + c\dot{x}_0 + U \quad (5.14)$$

Onde \dot{x}_1 é a velocidade massa suspensa, \ddot{x}_1 é a aceleração massa suspensa, \dot{x}_0 é a velocidade navio e u é o comando de controle. A equação 5.14 pode ser reescrita em um espaço de estados utilizando estados variáveis de x_1 e x_2 , tal como mostrado em 5.15.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{kx_1}{m} - \frac{cx_1}{m} + \frac{U}{m} + \frac{F_p}{m} \end{cases} \quad (5.15)$$

Sendo F_p corresponde uma perturbação adicional devido ao deslocamento do barco, e é dada pela equação 5.16:

$$F_p = kx_0 + c\dot{x}_0 \quad (5.16)$$

O sistema descrito aqui, é trabalhado usando uma representação da base canônica de Brunovsky, o qual facilita o análise do vetor de estados, para tal caso é assumindo que $F_p = 0$, assim a equação 5.14, é representada como mostra a equação 5.17:

$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 \\ U = m\ddot{x}_1 + kx_1 + c\dot{x}_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Por definição a entrada do sistema de controle é representa como mostra a equação 5.18:

$$v = -\frac{kx_1}{m} - \frac{c\dot{x}_1}{m} + \frac{U}{m} \quad (5.18)$$

Dessa forma o sistema pode ser transformado em linear usando a base canônico de Brunovsky em forma de espaço de estados como mostra as equações 5.19 e 5.20:

$$\begin{aligned} \dot{X}_P &= AX_P + Bv \\ Y &= CX_P \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} X_P &= \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^T & A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

O objetivo principal deste trabalho é estabilizar o sistema em uma trajetória constante igual a zero (isto é, o ponto de equilíbrio), para tal caso serão comprados os resultados obtidos pelo autor deste trabalho usando um FK constante, com o resultado que seria obtido usando o FKA para este sistema. O trabalho de simulação foi desenvolvido são usados os dados representados na tabela 5.2 [88].

Tabela 5.2: Parâmetros do sistema massa mola amortecedor

Parâmetros do sistema.		
Simbolo	Definição	Valor
m	Massa	286 Toneladas
K	Rigidez	$60.2K N/m$
ζ	Coefficiente de amortecimento	0.1
c	Amortecedor	$13.12K N s/m$
T_s	Tempo de amostragem	0.0737s

Para esta simulação foram consideradas os seguintes parâmetros:

- R Matriz de covariância do ruído de medição;
- Q Matriz de covariância do processo do ruído;

É assumido que a variável medida x_1 apresenta um ruído Gaussiano branco aditivo com variância igual a 0,0001 e desvio padrão de $0.01m$, o qual vai ser aumentado para verificar as diferenças entre os dois filtros. Os ganhos do controlador foram escolhidos como os coeficientes do polinômio de um Hurwitz caracterizada por ter duas raízes iguais $-1.5 \pm 1.5i$, estes ganhos proporcionam uma taxa de atenuação razoável, como também um sinal de controle aceitável.

Sabendo que o FKA proposto está tendo um comportamento muito eficiente para diferentes sistemas, e que este pode ser adaptado mudando o espaço de estados para diferentes sistemas dinâmicos lineares, foi feito outro teste para comparar o comportamento usando o problema de planicidade usando o sistema descrito anteriormente, para este teste foram usados dados do trabalho [86], o objetivo fundamental deste trabalho é manter a resposta do sistema sempre em função de uma entrada planejável determinada, que foi considerada como zero, e dessa maneira submeter o sistema a um ruído e determinar uma perturbação para estas condições, os resultados obtidos são mostrados nas figuras 5.11 e 5.12, estes resultados estão inseridos no artigo [86], o trabalho dele consiste em criar um controlador que permita manter o sistema nas condições desejadas, e posteriormente melhorar sua performance usando um FK, neste caso o FK é não adaptado.

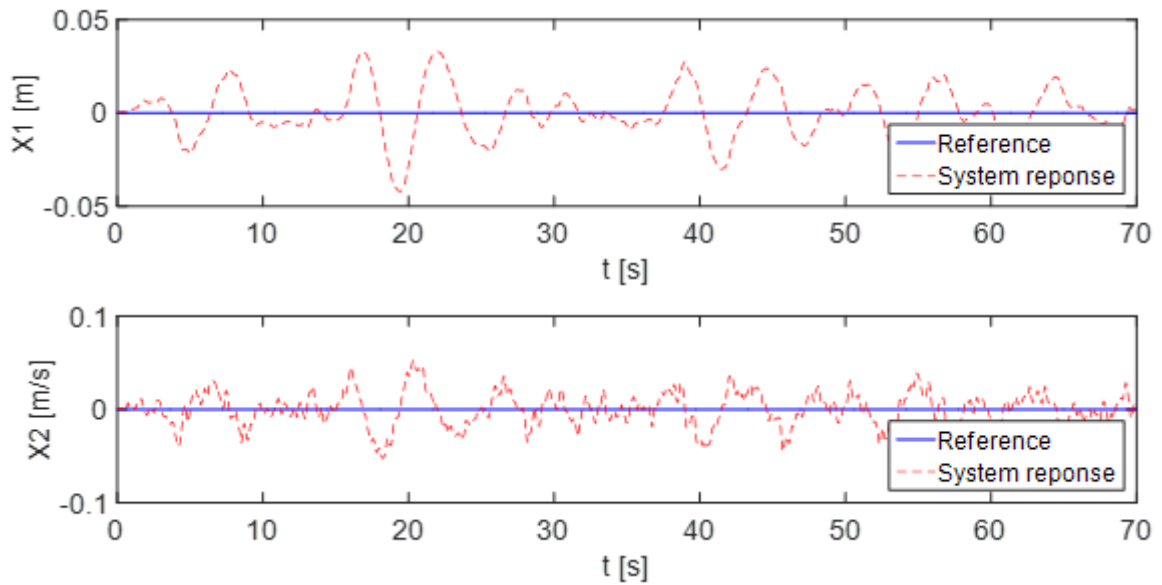


Figura 5.11: Posição.

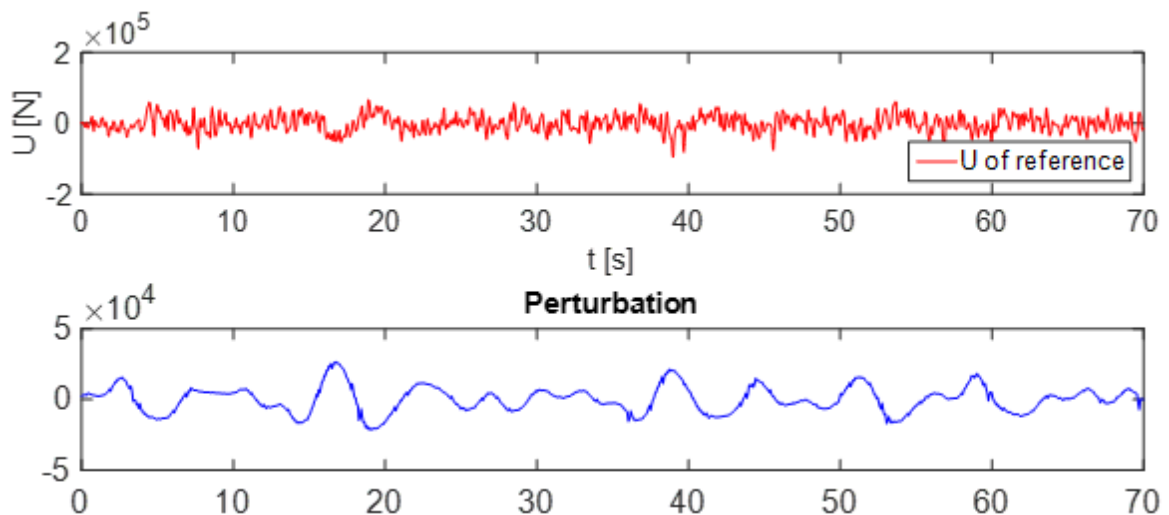


Figura 5.12: Perturbação.

Nas figuras 5.11 e 5.12 observa-se que uma resposta boa frente as entradas do sistema, que para este caso é um sistema SISO, onde são mantidas as trajetórias próximas de zero (saída e derivada da saída) que é o desejado pelo autor, e obtidos a entrada de referência e a perturbação do sistema que gera as trajetórias encontradas, é importante comentar, que este sistema é um sistema não linear, que foi linearizado para trabalhar a nível de simulação numérica, seguidamente foi substituído o FK sem adaptação por um FKA, o qual gera uma matriz que realimenta a matriz de covariância do sistema e ganhos para cada tempo, e foram obtidos os resultados mostrados nas figuras 5.13 e 5.14:

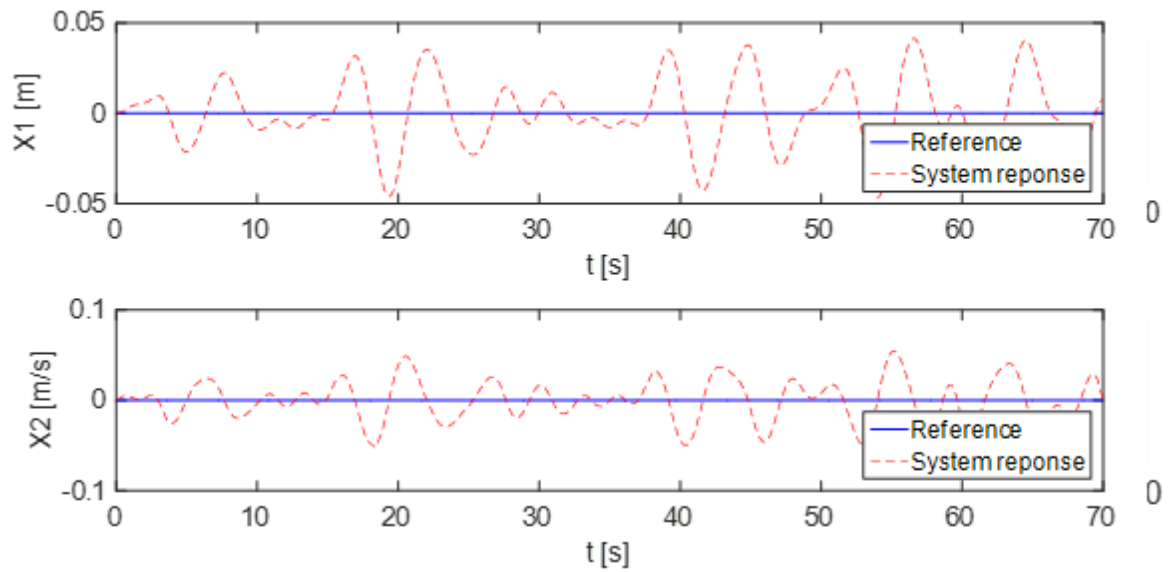


Figura 5.13: Posição.

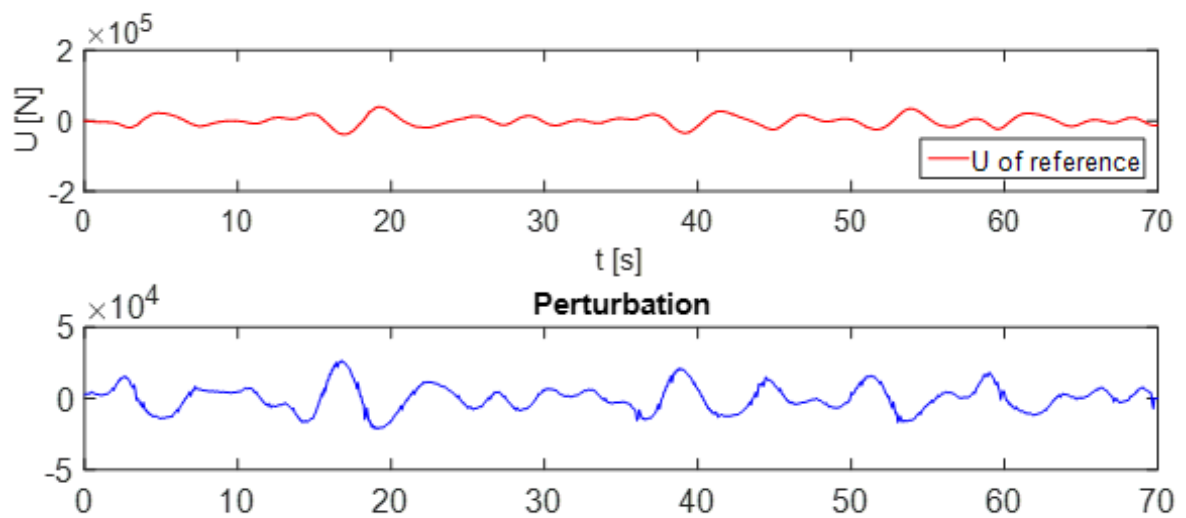


Figura 5.14: Perturbação.

Sabendo que o FKA adaptativo foi projetado para reagir frente a perturbações grandes, foi decidido aumentar a variância do ruído 10 vezes, para analisar o comportamento do FKA frente a um filtro invariante, os resultados obtidos são mostrados na figura 5.15 e 5.16

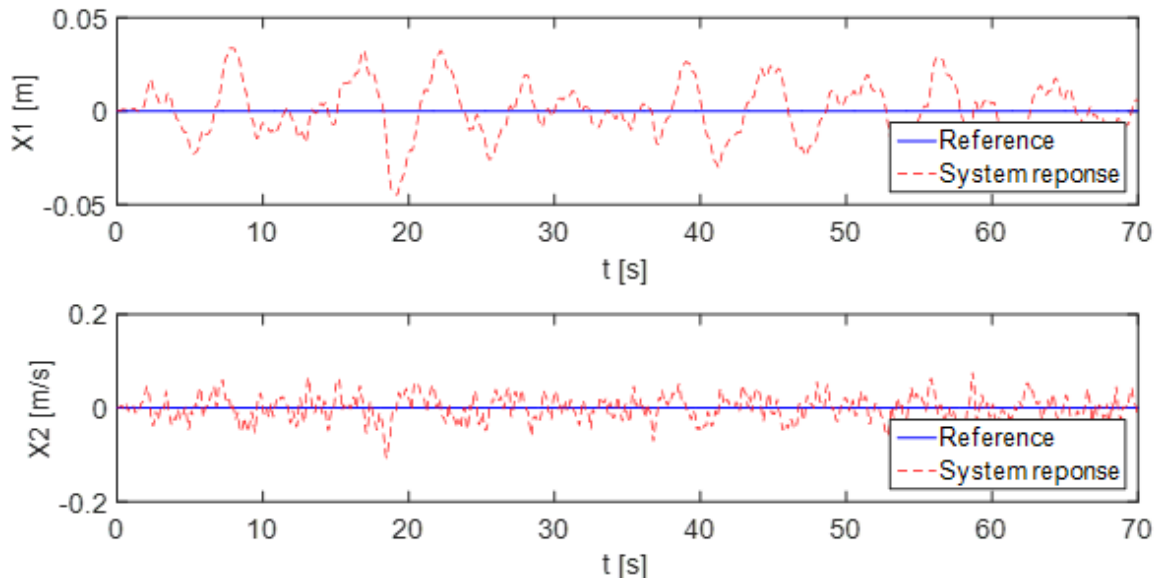


Figura 5.15: Posição.

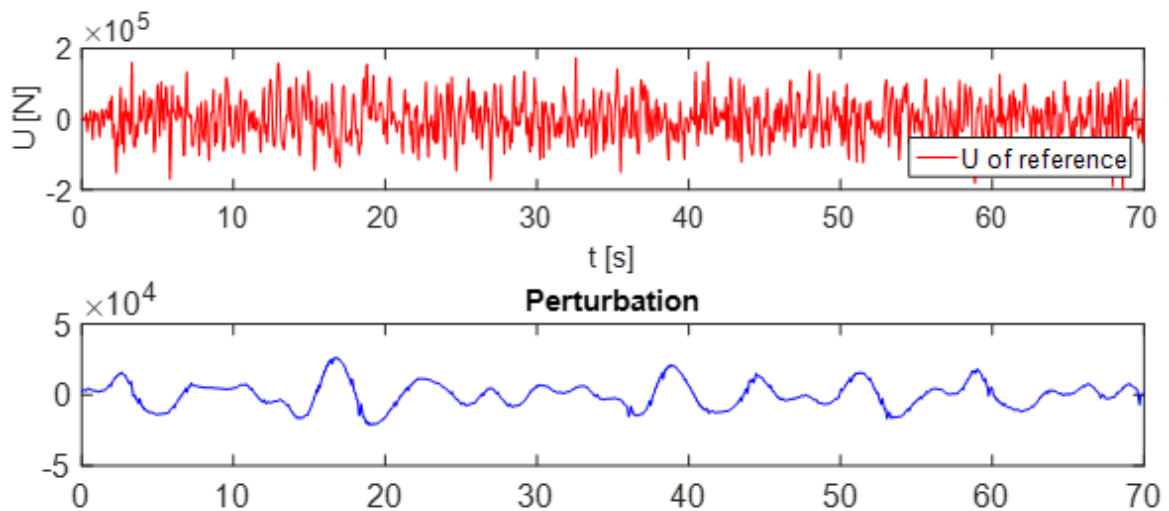


Figura 5.16: Perturbação.

Pode ser observado nas figuras anteriores que a amplitude da saída e saída derivada do sistema X_1 e X_2 , estão sendo aumentados pela perturbação, o qual está ocasionando que o ruído na referência fique maior, levando a aumento na amplitude da perturbação, comparando estes resultados com os mostrados nas figuras 5.17 e 5.18, é observado que efetivamente o FKA está funcionando de melhor maneira que o FK sem adaptar, dado que está conseguindo manter a magnitude dos estados do sistema bem mais perto de zero e o ruído na referência está sendo mais suave, gerando uma perturbação uniforme como é desejado para este projeto.

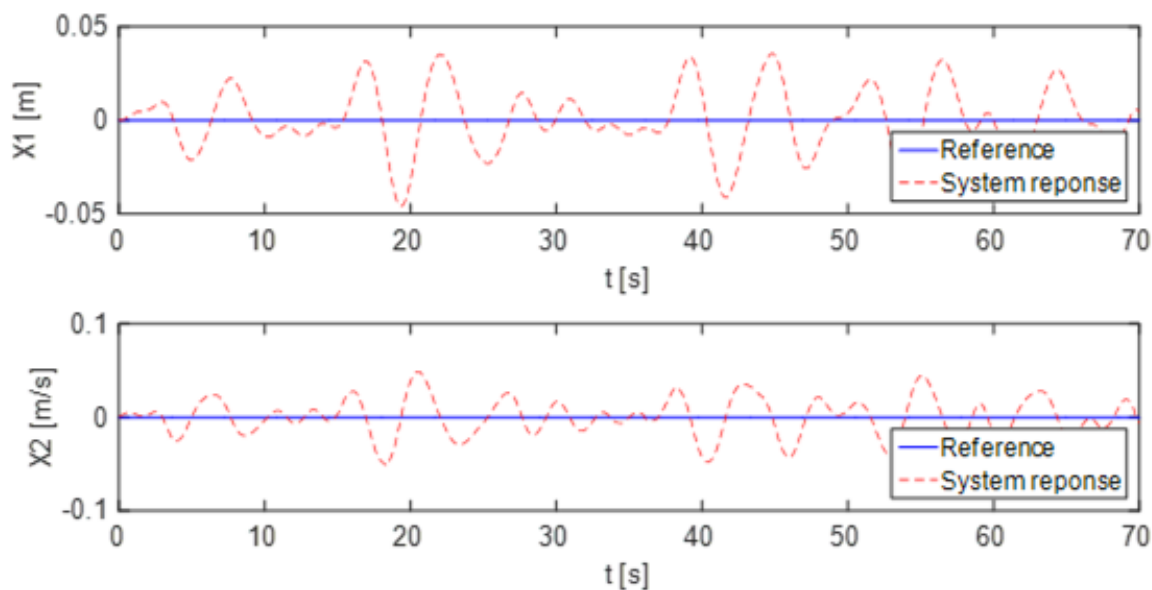


Figura 5.17: Posição.

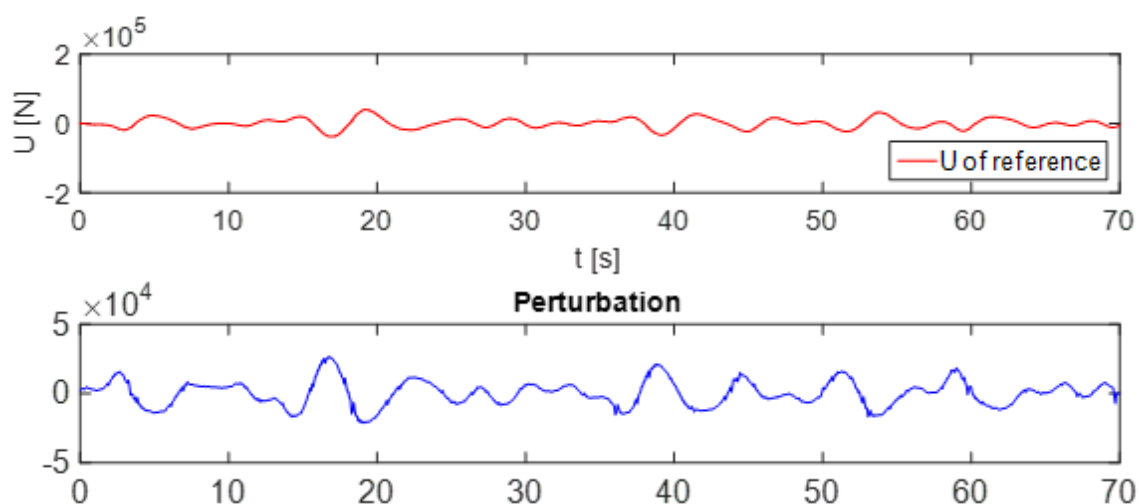


Figura 5.18: Perturbação.

Finalmente, tentou-se mostrar o comportamento do sistema se a variância do ruído fosse aumentada 100 vezes, mas infelizmente com o FK sem adaptação não foi possível realizar este teste, dado que sempre se encontrava um erro numérico, mas com o FKA os resultados são mostrados nas figuras 5.19 e 5.20 .

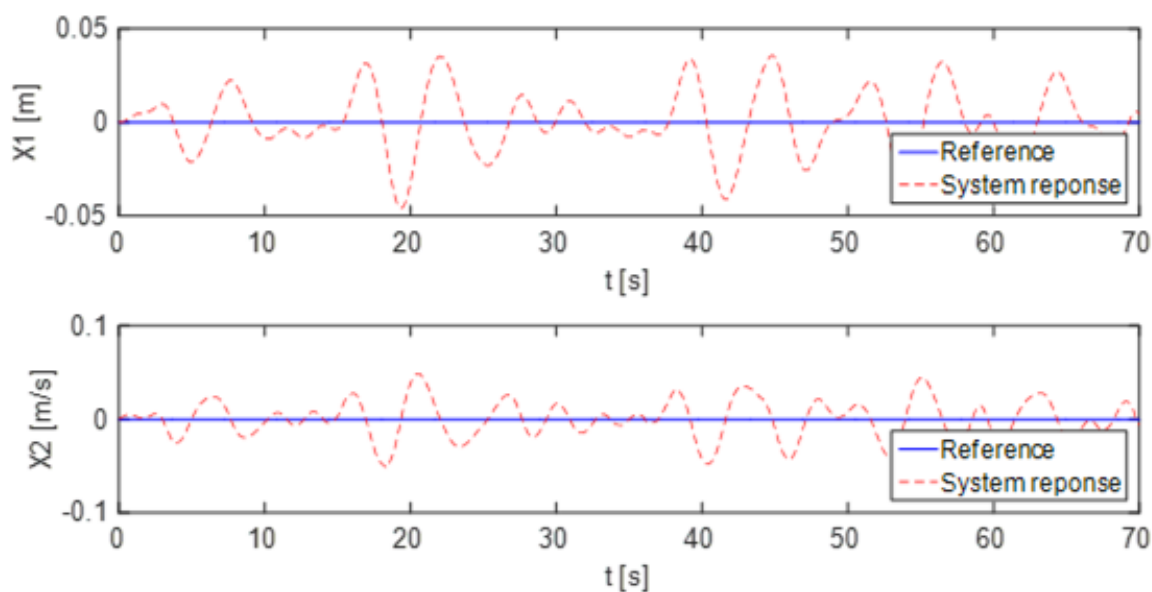


Figura 5.19: Posição.

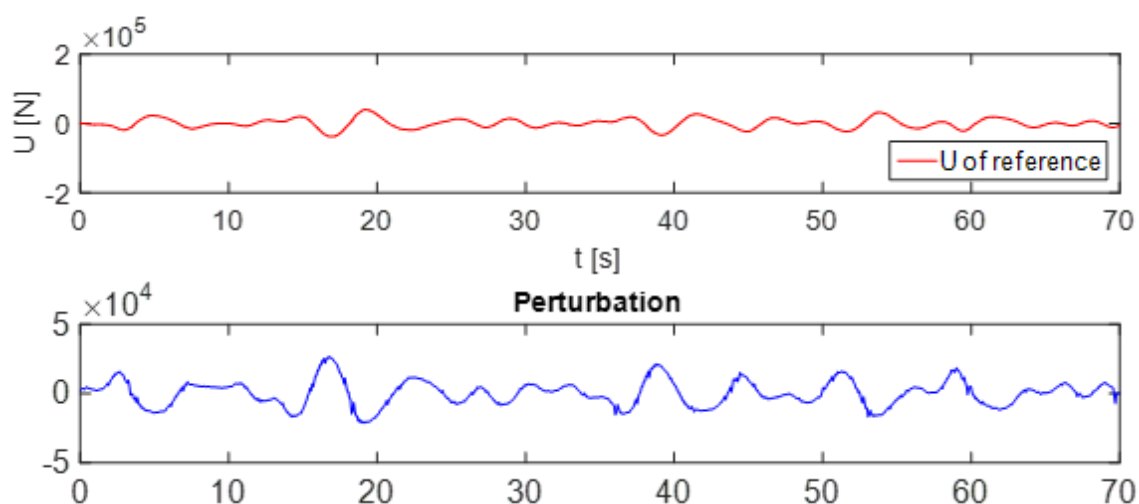


Figura 5.20: Perturbação.

Nestas figuras é observado que o sistema continua mantendo sua magnitude para os estados analisados bem perto de zero e que conseguiu-se rejeitar o ruído inserido do sistema, fazendo com que o sistema fique bem mais robusto. O desejado neste trabalho comparativo é evidenciar as vantagens que tem uma técnica adaptativa, dado que ela muda no tempo em relação as perturbações inseridas e conseguir manter o controle na linha planejada, é importante ressaltar que aqui só foi analisado a parte do FK que apresenta o sistema, não a eficiência do controlador que foi trabalho em [86], dado que o trabalho desenvolvido é bem mais profundo do que foi comentado neste documento.

5.4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA DE QUATRO TANQUES

A modelagem matemática é fundamental na teoria de controle porque uma adequada identificação de um sistema dinâmico é crítico para o projeto do controle, quando este modelo não pode ser encontrado com toda exatidão se requer trabalhar com modelos aproximados que geram uma boa performance, porém, sempre estes modelos podem ser melhorados.

Nesta seção será descrita a modelagem matemática de um sistema de quatro tanques, onde será testado o filtro de Kalman adaptado de forma numérica e de maneira real, é importante ressaltar que a escolha deste sistema foi fundamentada em que o sistema é *MIMO*, sendo interessante sua aplicação, e por tanto, permite generalizar a teoria desenvolvida, pelo fato de poder avaliar mais de uma entrada e uma saída paralelamente, e assim, pode ser verificado adequadamente as estratégias de controle propostas neste trabalho.

O sistema de quatro tanques foi trabalhado por Johansson [89] com o objetivo didático de demonstrar de forma ilustrativa muitos dos conceitos e propriedades de sistemas *MIMO* (*do inglês, multiple input, multiple output*), o sistema apresenta a vantagem de permitir a alocação de zeros no semiplano esquerdo ou no semiplano direito, ou seja, determinar uma configuração de fase mínima ou de fase não mínima para o sistema, apenas manipulando duas válvulas. Esse sistema permite aplicar diversas técnicas de controle de nível, como será testado neste trabalho. Muitos outros autores têm trabalhado nesta classe de sistemas, obtendo resultados muito bons, por exemplo: Johansson [89] obteve resultados satisfatórios com a realização de controle Proporcional Integrador (*PI*) descentralizado para o sistema de fase mínima, mas observou que para o sistema de fase não-mínima a resposta era lenta e que os resultados com técnicas de controle baseados na norma H_∞ eram de 30 a 40 por cento mais rápidos [11]. Mehmet e Francis [90] mostraram que o controle preditivo fornece resultados significativamente melhores do que o descentralizado. Shneiderman e Palmor [91] estudaram os efeitos dos atrasos que haviam sido ignorados por Johansson em sua descrição matemática.

O sistema de quatro tanques é não linear. No entanto, é possível obter um modelo linearizado em torno de um ponto de operação. O modelo linearizado apresenta um zero multivariável que pode estar localizado tanto no semi-plano esquerdo quanto no semi-plano direito dependendo da configuração das válvulas da planta. A abertura das válvulas determina se o sistema é de fase mínima ou de fase não-mínima afetando a estratégia de controle a ser adotada [11].

O diagrama esquemático do sistema de quatro tanques é apresentado na Figura 5.21 juntamente com a planta didática utilizada do fabricante Didaticontrol Automação e Controle. O sistema consiste de quatro tanques interconectados, um reservatório inferior, quatro válvulas esfera e duas bombas de corrente contínua que bombeiam o fluido do reservatório inferior para os tanques de forma cruzada de acordo com a razão entre os fluxos definida pela posição das válvulas [11].

O objetivo é controlar os níveis do fluido nos tanques inferiores 1 e 2. As entradas do processo são as tensões de entrada das bombas, e as saídas são os níveis de fluido nos tanques 1 e 2. As demais variáveis de processo são os níveis do fluido nos tanques 3 e 4, os fluxos da bomba e a razão entre os fluxos para os tanques [11].

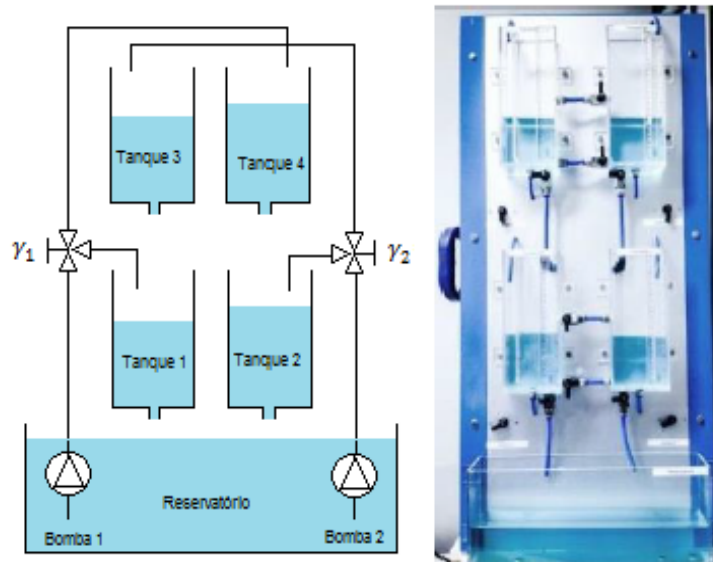


Figura 5.21: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques (esquerda);Planta didática (direita) [11].

A modelagem matemática do sistema de quatro tanques basea-se nos princípios de conservação de massa e na lei de Bernoulli para líquidos incompressíveis, onde são descritas os sistemas de equações não lineares que descrevem o processo, as partes fundamentais são mostradas a continuação, mas a modelagem completa corresponde ao trabalho desenvolvido por Johansson [89], foi assumida esta modelagem dado que o importante para este trabalho é testar as teorias de controle desenvolvidas, porém, se trabalhará com um modelo matemático bem definido e testado por muitos autores. Com relação aos valores numéricos que representam a planta, foi trabalhado com uma caracterização feita no laboratório *LARA* da *UNB* por alunos que trabalham com a mesma.

A modelagem do sistema de quatro tanques é baseada nos princípios de conservação de massa e na equação de Bernoulli para líquidos incompressíveis, sendo aplicada para cada tanque o princípio de balanço de massas, representados na equação 5.21:

$$\dot{V} = q_{in} - q_{out} \quad (5.21)$$

Sendo:

- \dot{V} = Volume de água no tanque;

- $A =$ Área da secção transversal do tanque;
- $h =$ Nível de água ;
- $q_{in} =$ Fluxo de entrada ;
- $q_{out} =$ Fluxo de saída.

A equação de Bernoulli para líquidos incompressíveis é representada pela equação 5.22:

$$\frac{\rho v_m^2}{2} + \rho gh + P = Constante \quad (5.22)$$

onde:

- $v_w =$ Velocidade de escoamento da água;
- $g =$ Aceleração da gravidade;
- $P =$ Pressão;
- $\rho =$ Massa específica da água.

Assumindo que na superfície da água a velocidade seja nula ($v_w = 0$) e que na parte inferior de cada tanque o nível é igual a zero ($h = 0$), vai se ter:

$$\rho gh + P = Constante \quad (5.23)$$

$$\frac{\rho v_m^2}{2} + P = Constante \quad (5.24)$$

Igualando as duas equações 5.23 e 5.24, é encontrada a velocidade da água no fluxo de saída mostrada na equação 5.25:

$$v_m = \sqrt{2gh} \quad (5.25)$$

Sabendo que o fluxo na saída (q_{out}) é a velocidade da água no fluxo de saída (vm) multiplicada pela área da secção transversal da saída do tanque (o). Assim, para o caso de escoamento turbulento, vai se ter:

$$q_{out,i} = o_i v_{w,i} = o_i \sqrt{2gh} \quad (5.26)$$

As bombas geram um fluxo linearmente proporcional à tensão aplicada e cujas expressões podem ser encontradas na Tabela 5.3.

$$q_{bomba} = k_i v_i \quad (5.27)$$

Tabela 5.3: Parâmetros do sistema de tanques.

Fluxos das bombas para cada tanque.				
	Tanque 1	Tanque 2	Tanque 3	Tanque 4
Bomba 1	$\gamma_1 k_1 v_1$	—	—	$(1 - \gamma_1) k_1 v_1$
Bomba 2	—	$\gamma_2 k_2 v_2$	$(1 - \gamma_2) k_2 v_2$	—

A representação em espaço de estados pode ser feito baseado na tabela anterior e nas equações 5.25 e 5.26, obtendo as relações mostradas nas equações 5.28 até 5.36.

Para o tanque 1:

$$\dot{h} = \frac{1}{A} (q_{in,i} - q_{out,i}) \quad (5.28)$$

$$q_{in,1} = q_{out3} + q_{Bomba1,1} = o_3 \sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 \quad (5.29)$$

$$q_{out,1} = o_1 \sqrt{2gh_1} \quad (5.30)$$

Para o tanque 2:

$$q_{in,2} = q_{out4} + q_{Bomba2,2} = o_4 \sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2 \quad (5.31)$$

$$q_{out,2} = o_2 \sqrt{2gh_2} \quad (5.32)$$

Para o tanque 3:

$$q_{in,3} = q_{Bomba2,3} = (1 - \gamma_2) k_2 v_2 \quad (5.33)$$

$$q_{out,3} = o_3 \sqrt{2gh_3} \quad (5.34)$$

Para o tanque 4:

$$q_{in,4} = q_{Bomba1,4} = (1 - \gamma_1) k_1 v_1 \quad (5.35)$$

$$q_{out,4} = o_4 \sqrt{2gh_4} \quad (5.36)$$

Assim, o sistema pode ser representado como mostra a equação 5.37;

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} (o_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 - o_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} (o_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2 - o_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3} ((1 - \gamma_2)k_2 v_2 - o_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4} ((1 - \gamma_1)k_1 v_1 - o_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \quad (5.37)$$

Em que, h_i , A_i e o_i são o nível de água, a área da secção transversal e a área de secção transversal do orifício de saída do tanque i , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. A constante de fluxo e a tensão aplicada na bomba j são dadas respectivamente por k_j e v_j , $j = 1, 2$. O parâmetro γ_1 é a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4, γ_2 , é a razão entre os fluxos para os tanques 2 e 3 e g é a aceleração da gravidade.

O sistema anterior pode ser linearizado entorno de um ponto de operação $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4)$ e $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, por expansão em série de Taylor, obtém-se a representação no espaço de estados mostrada na equação 5.38:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \\ \Delta \dot{h}_3 \\ \Delta \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-o_1\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{\bar{h}_1}} & 0 & \frac{o_3\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{\bar{h}_3}} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{\bar{h}_2}} & 0 & \frac{o_4\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{\bar{h}_4}} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3\sqrt{2g}}{2A_3\sqrt{\bar{h}_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4\sqrt{2g}}{2A_4\sqrt{\bar{h}_4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_3}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Sendo y_i as saídas medidas do sistema, $\Delta h_i = h_i - \bar{h}_i$, $\Delta v_i = v_i - \bar{v}_i$, e $i = 1, 2, 3, 4$, E finalmente, a matriz função de transferência do sistema é obtida aplicando a transformada de Laplace nas equações linearizadas do sistema apresentadas acima e considerando a condição inicial $h_i(0) = \bar{h}_i$, é dada pela equação 5.40:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1 \gamma_1 k_1}{A_1(1+sT_1)} & \frac{T_1(1-\gamma_2)k_1}{A_1(1+sT_2)(1+sT_1)} \\ \frac{T_2(1-\gamma_1)k_1}{A_2(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{T_2 \gamma_2 k_2}{A_2(1+sT_2)} \\ 0 & \frac{T_3(1-\gamma_2)k_2}{A_3(1+sT_3)} \\ \frac{T_4(1-\gamma_1)k_1}{A_4(1+sT_4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Onde $G(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta v(s)}$ e $T_i = \frac{2A_i\sqrt{\bar{h}_i}}{o_i\sqrt{2g}}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

A identificação do sistema utilizada neste trabalho foi desenvolvida pelos alunos Arthur e Mayra [92] em seu trabalho de conclusão de curso, sendo a caracterização para o sistema

de tanques a seguinte:

Tabela 5.4: Parâmetros da bancada de quatro tanques.

Parâmetros da bancada de quatro tanques.		
Símbolo	Definição	Valor
o_1	Área da seção transversal do orifício de saída 1	0.1143
o_2	Área da seção transversal do orifício de saída 2	0.1214
o_3	Área da seção transversal do orifício de saída 3	0.0183
o_4	Área da seção transversal do orifício de saída 4	0.0403
g	Aceleração da gravidade	981
γ_1	Razão dos fluxos para os tanques 1 e 4	0.7363
γ_2	Razão dos fluxos para os tanques 2 e 3	0.7577
k_1	Constante de proporcionalidade 1	8.36
k_2	Constante de proporcionalidade 1	12.72

Obtendo-se dessa forma o espaço de estados mostrado na equação 5.41:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \\ \Delta \dot{h}_3 \\ \Delta \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0197 & 0 & 0.0186 & 0 \\ 0 & -0.0137 & 0 & 0.0139 \\ 0 & 0 & -0.0186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0083 & 0 \\ 0 & 0.0063 \\ 0 & 0.0048 \\ 0.0031 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

O espaço de estados representado na equação 5.41, corresponde a um sistema *MIMO*, de ordem quatro, mas, para a realização dos testes, foi identificado um modelo de ordem dois, mediante a manipulação de dois tanques como mostra a bancada da figura 5.22.



Figura 5.22: Bancada de quatro tanques usada para a realização dos testes reais

Para a realização dos testes reais, foi identificado um modelo discreto em espaço de estados do processo de dois tanques acoplados com duas entradas e duas saídas mostrado na equação 5.42:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7833 & 0.1024 \\ 0.2167 & 0.8193 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} 0.2612 & 0 \\ 0 & 0.2284 \end{bmatrix} u_K \\ y_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_K \end{cases} \quad (5.42)$$

Em que X são os estados do sistema correspondentes ao nível dos tanques 2 e 4. Esses parâmetros foram identificados utilizando dados com taxa de amostragem igual a 2s, com 42h de experimento, onde 5 %, dos dados não foram utilizados, 65 % para identificação e 30 % para validação. O ajuste NRMSE(Normalized Root Mean Square Error) obtido foi de 71.78 %, para a saída Y1 correspondente ao nível do tanque 2 e 88.03 %, para a saída Y2 correspondente ao nível do tanque 4. A figura 5.23 apresenta o resultado obtido

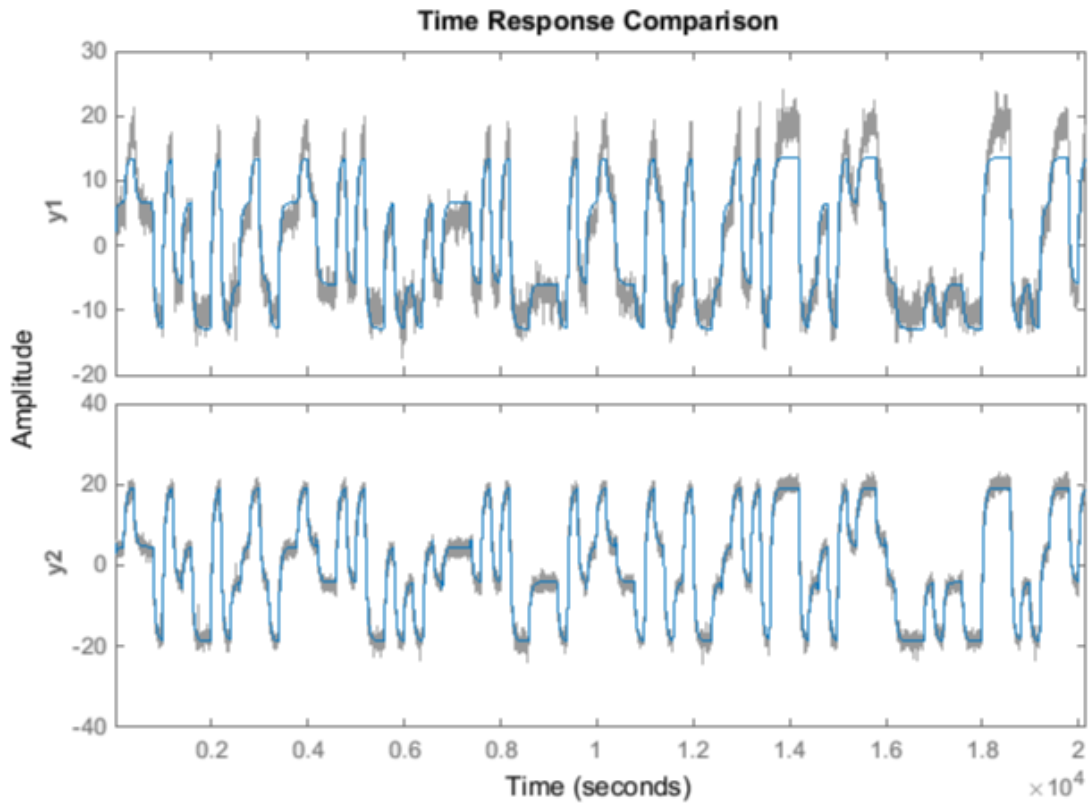


Figura 5.23: Modelo estimado

A variância obtida a partir do tanque 2 foi de 1.56 %, enquanto a variância do tanque 4 foi de 0.6785 %. A média do tanque 2 foi de 10.85 por cento e do tanque 4 igual a 69.1%. Esses valores foram obtidos em ponto de operação da bomba 1 igual 37 % e bomba 2 com 43 %.

Com o modelo identificado foi montado o sistema *MIMO* em *SIMULINK* para realizar simulações numéricas para ser comparadas com os dados obtidos com o sistema real, este modelo é mostrado na figura 5.24:

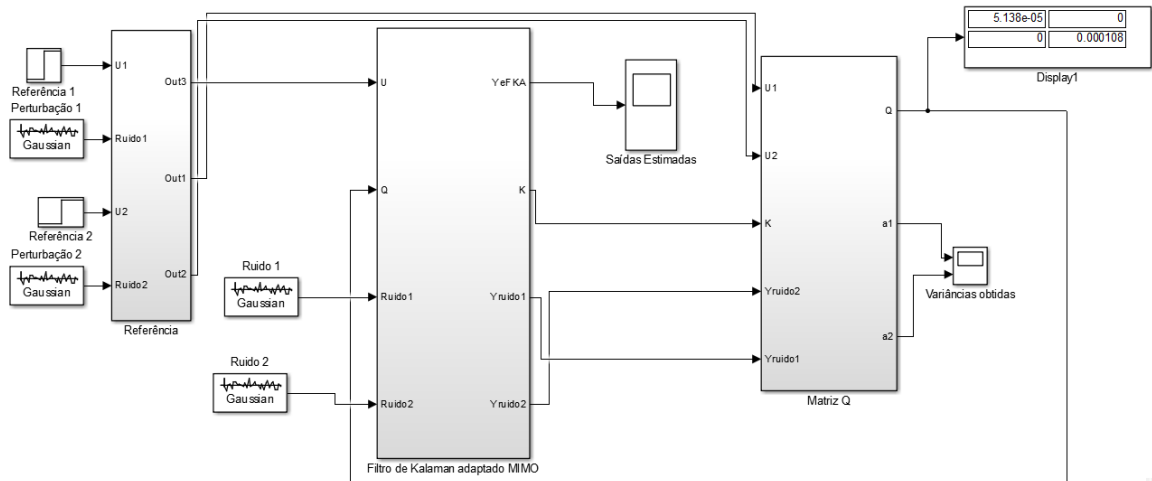


Figura 5.24: Diagrama de blocos da técnica de adaptação.

O diagrama de blocos proposto apresenta um bloco de referência onde pode ser modificadas as entradas do sistema e as perturbações, para este caso de simulação numérica estas perturbações tem variâncias de 0.02 e 0.01, seguido de um bloco que apresenta o FKA e um bloco que mostra o cálculo da matriz Q que faz a adaptação do sistema, este sistema foi projetado desta maneira para conseguir fazer comparações com o FK sem adaptação e validar numericamente a eficiência do filtro projetado, o bloco que calcula a Matriz Q , apresenta internamente o formato mostrado na figura 5.25:

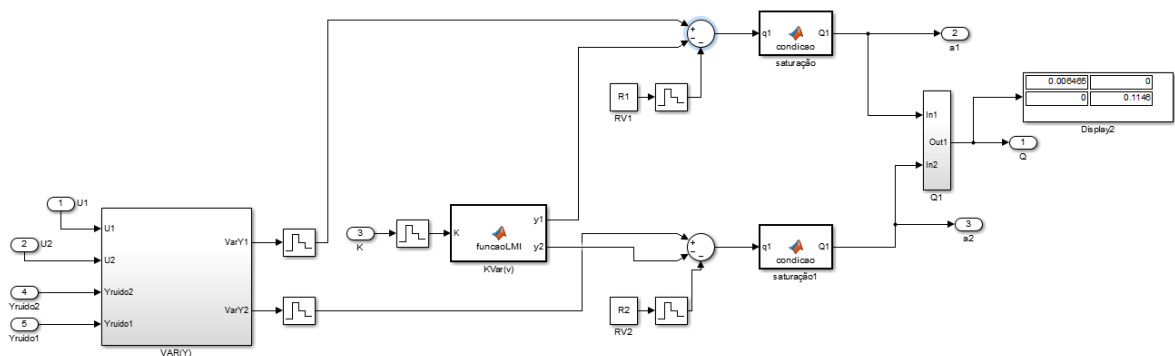


Figura 5.25: Parte interna do bloco de adaptação.

No esquema da adaptação é mostrado um bloco que calcula a variância dos estados estimados, dentro dele encontra-se projetado o filtro de ordem um calculado no início do capítulo 4, conforme indicou a equação 4.18, seguidamente cada um dos blocos MATLAB FUNCTION representam as equações de adaptação que geram a matriz Q mostrada no display. Para trabalhar foram realizadas duas versões deste programa uma usando os comando do MATLAB e outra usando o SIMULINK como mostra a figura 5.26, a diferença que se apresenta nestes resultados estão relacionadas com os ruídos inseridos no sistema os quais apresentem frequência diferentes, pode observar que o FKA apresenta o mesmo comportamento

programado nas duas versões do MATLAB.

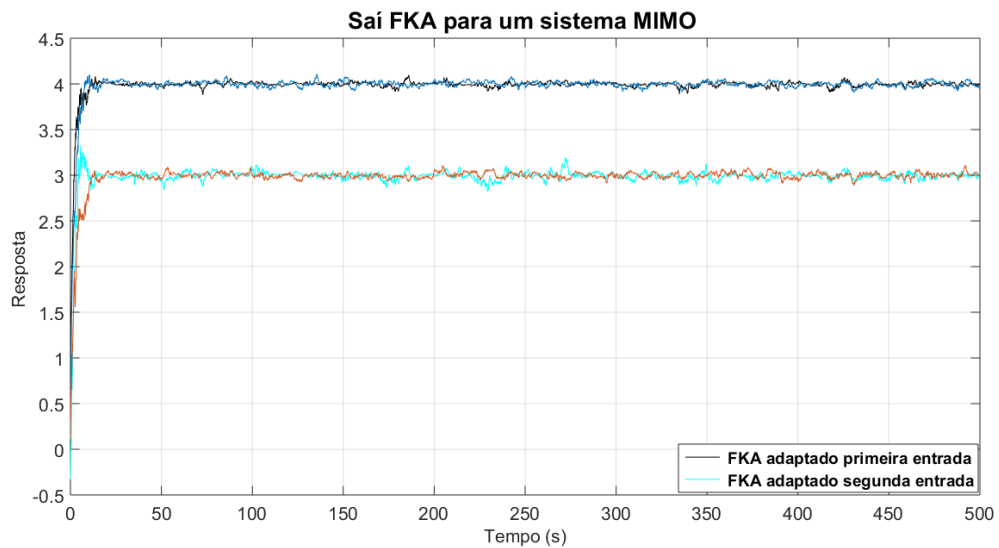


Figura 5.26: Comparação dos das saídas usando Matlab e Simulink.

Seguidamente foi mudadas entradas no sistema para um sinal quadrado, o qual apresenta ruído em uma parte do sinal e em outra não, o objetivo é verificar que tão eficiente é o filtro, foi feita a comparação usando um FK sem adaptação com mesmos valores de covariância R e Q representado pelas cores cores roxo (Primeira entrada) e laranja (Segunda entrada), os resultados apresentados são mostrados na figura 5.27.

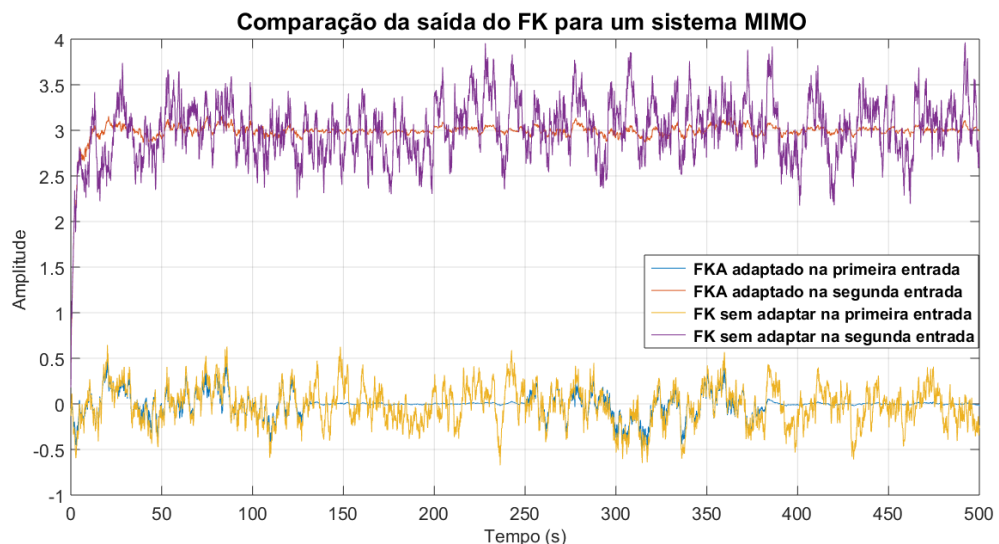


Figura 5.27: Comparação da saída do FKA e o FK sem adaptar para uma entradas degrau e outra quadrada ruidosa.

Na figura 5.27 é observado que o FKA representado pelas cores vermelho (Primeira entrada) e azul (Segunda entrada) reage melhor ao ruído inserido no sistema como é desejado

conseguindo eliminar o ruído inserido no sistema, o qual não é conseguido com o FK sem adaptação, o sinal testado para cada uma das entradas é mostrado na figura 5.28

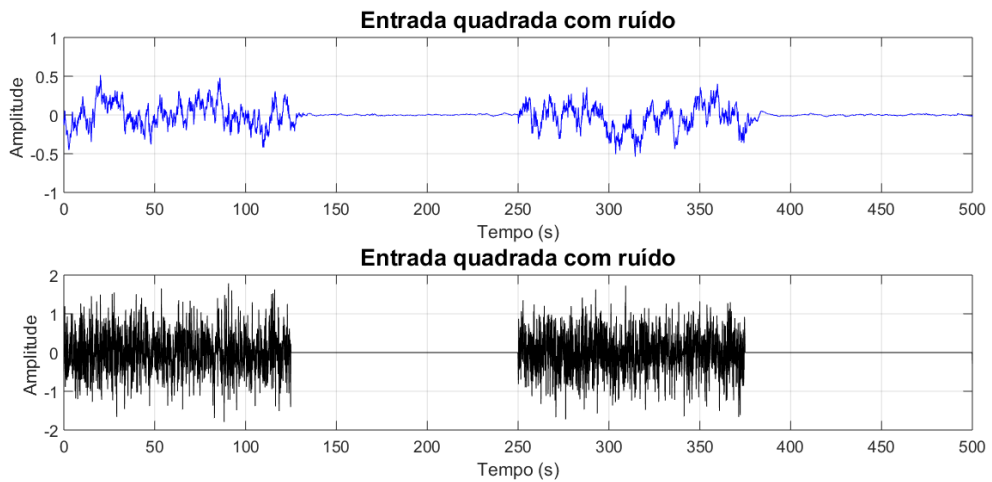


Figura 5.28: Comparação da entrada ruidosa com a resposta do FKA.

Na figura anterior o sinal preto mostra a entrada ruidosa do sistema e o sinal azul, indica a filtragem realizada pelo FKA, seguidamente foi analisada a variância gerada na saída a causa da adaptação, é observado na figura 5.29 que estas apresentam um comportamento de função que decai exponencialmente, mas deve ser esperado que na saída esteja sendo encontrada a variância da perturbação inserida no sistema, fazendo um zoom desta imagem encontramos a figura 5.30:

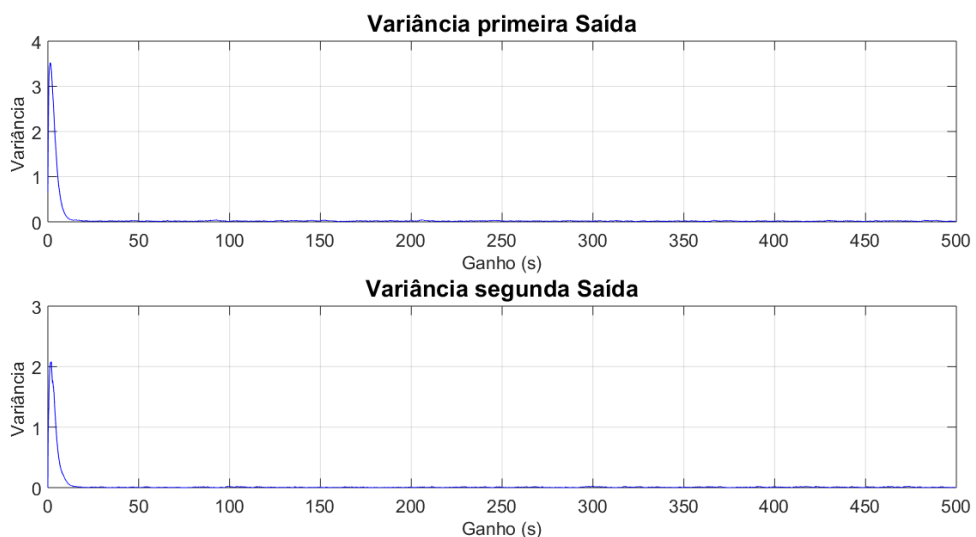


Figura 5.29: Variâncias das saídas.

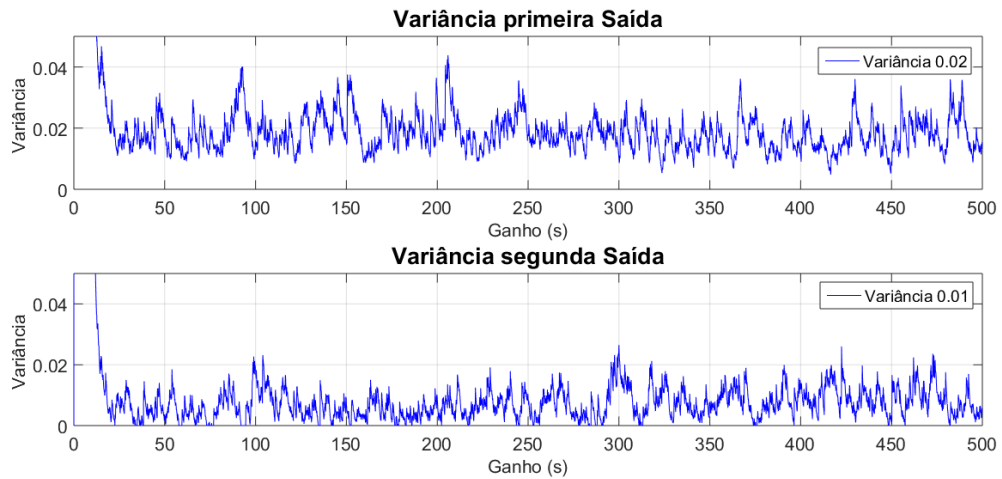


Figura 5.30: Variância das saídas (Ampliadas).

A figura 5.30 mostra que o decaimento da curva de variância é exponencial e esta convergindo para a variância da perturbação inserida no sistema para cada uma das entradas do filtro, para este caso foram um valor 0.02 e 0.01 respectivamente, concluído que está sendo projetado um filtro adaptativo que permite identificar as variâncias na saída das perturbações inseridas nas entradas, que é o propósito de este trabalho, assim, é concluído que numericamente estão sendo cumpridos os objetivos propostos na realização desta tese de doutorado, dado que está sendo projetado um filtro que pode ser projetado em malha fechada ou malha aberta para sistemas *MIMO* ou *SISO* obtendo uma ferramenta robusta frente a perturbações externas e que pode ser aplicada a múltiplos sistemas lineares que apresentem ruídos e perturbações de diferente natureza, dado que é identificando estas perturbações, e o filtro reage fortemente frente as mudanças grandes e consegue manter o processo sem a necessidade de forçar os atuadores do sistema o que permite aumentar a vida útil do equipamento onde ele possa ser implementado.

6 RESULTADOS REAIS OBTIDOS COM O FKA

Neste capítulo é mostrado o trabalho de validação do modelo o qual consistiu na realização de três testes em um sistema real, além, da análise do sistema em malha aberta e malha fechada, usando como planta uma bancada de quatro tanques, modificando as entradas para serem usadas duas das quatro disponíveis como foi mostrado na equação 5.42, neste caso o sistema é não linear, porém, ele foi linearizado ao redor de um ponto para trabalhar com duas entradas e duas saídas como mostra a figura 6.1, o processo iniciou comparando o desempenho do *FKA* em função da entrada programada de nível para a bancada.

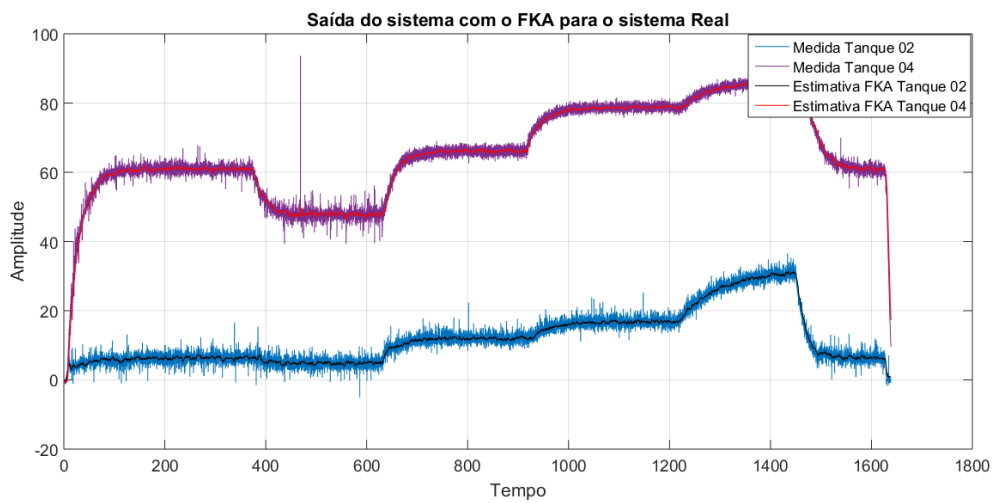


Figura 6.1: Saída do sistema Real MIMO para o FKA para o primeiro teste.

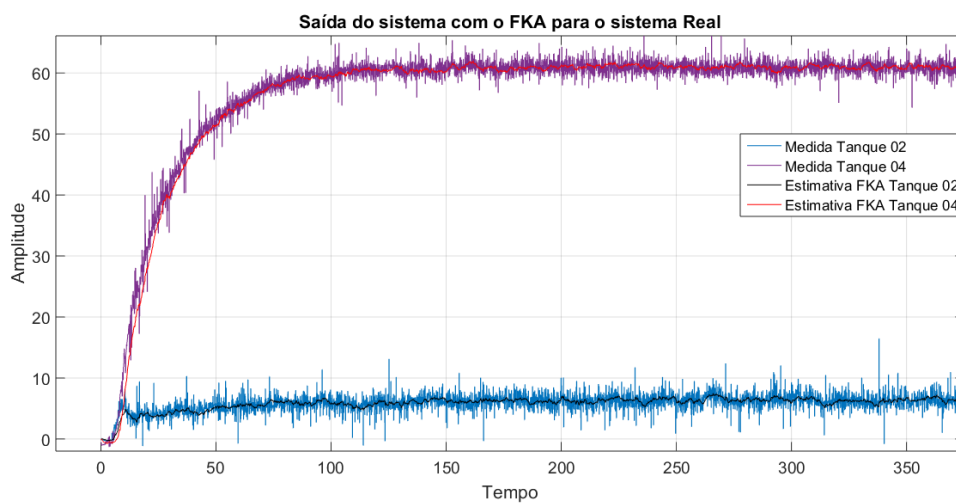


Figura 6.2: Ampliação da saída do sistema Real MIMO para o FKA para o primeiro teste.

Na figura 6.1 se mostra a medida dos tanques 02 e 04 representadas pelas cores azul e

roxo respectivamente, as quais estão sendo comparadas com as saídas estimadas do *FKA* que são mostradas mediante as cores preto e vermelho para cada um destes tanques, observa-se que o sistema projetado para filtrar está funcionando de maneira adequada, dado que permite obter um sinal mais limpo o qual pode ser observado de forma mais clara na figura 6.2 que mostra uma aplicação nos primeiros 370s, é de esclarecer que em todos os experimentos realizados, só foram usados os tanques 02 e 04 para representar o sistema *MIMO*, porém, não se mostram resultados relacionados com os tanques 01 e 03, dado que os mesmos não foram usados nos experimentos ver figura 6.3.

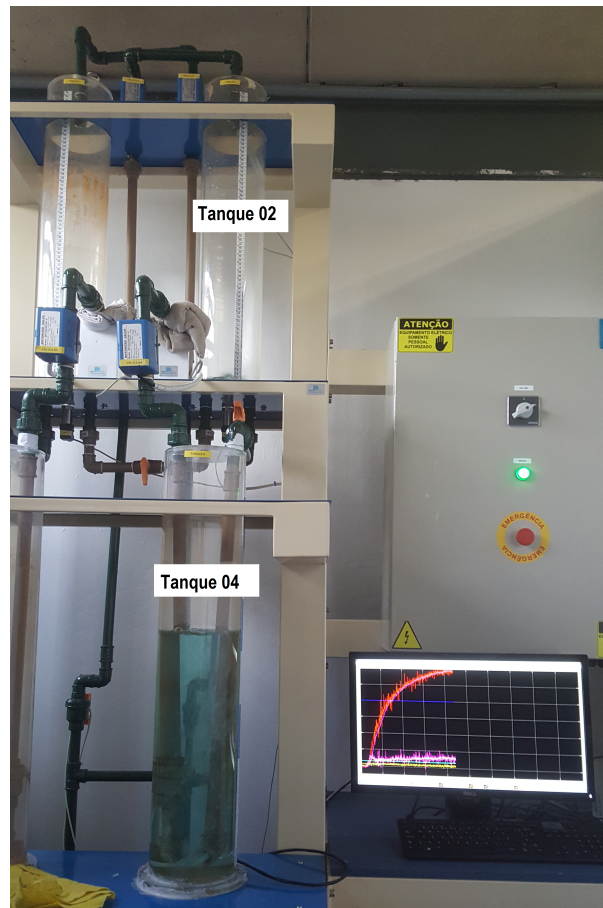


Figura 6.3: Bancada de quatro tanques real, usada para realizar os testes

A figura 6.3 mostra que o nível maior é do tanque 04 e o nível menor é do tanque 02, este teste foi feito para verificar que quando o nível dos tanques é menor se tem uma maior presença de ruído devido ao comportamento físico do sistema, quando o nível é baixo se apresenta uma saída de bolhas de ar muito grande e quando o nível é maior esta saída diminui, já nos tanques que não foram trabalhados apresentou-se um ruído constante o qual é causado pelas vibrações da bancada gerada no fluxo de água, foi perceptível que esta bancada é muito sensível a qualquer tipo de perturbação, o qual pode ser verificado na figura 6.1, onde se apresenta um pico grande perto dos 500 segundos, este pico corresponde a uma pequena batida dada na base bancada, verificando a sensibilidade da mesma a qualquer tipo de

perturbação externa, o propósito deste teste é verificar se o FKA funciona corretamente para as entradas programadas, verificou-se que após o sistema ser perturbado ele consegue voltar e acompanhar o sinal programado no início do teste.

Seguidamente, foi observadas as variâncias nas perturbações que aparecem de forma natural no sistema, estas são mostradas para cada tanque nas figuras 6.4 e 6.5:

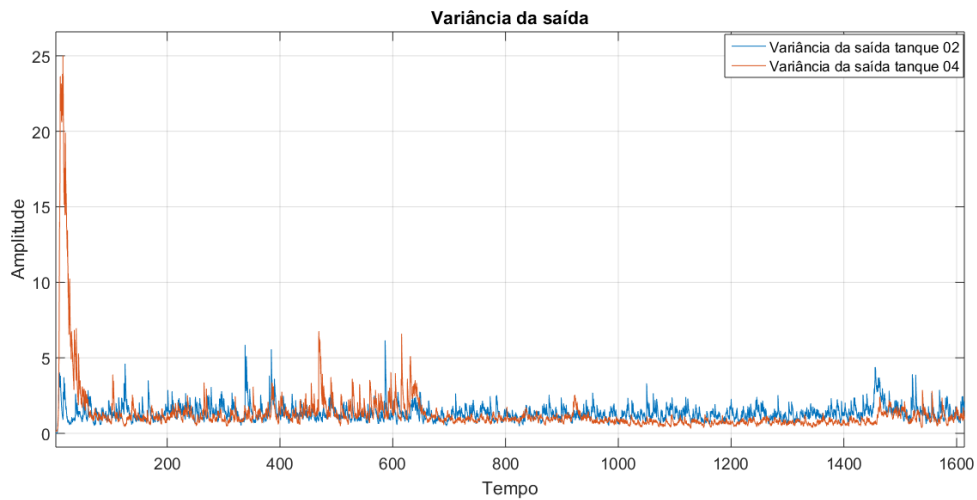


Figura 6.4: variância das perturbações do sistema real.

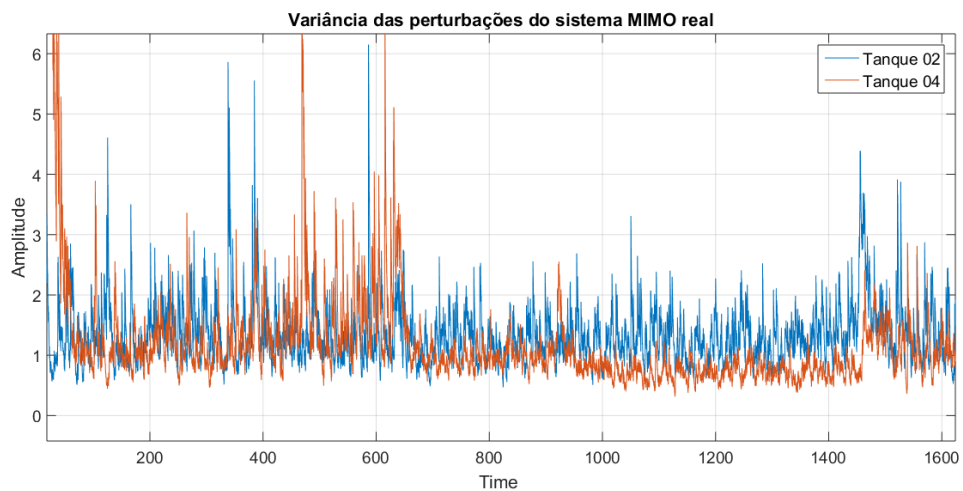


Figura 6.5: variância das perturbações do sistema real.

É observado que cada tanque tem uma variância diferente, sendo maior a variância na perturbação do tanque 02 representada pela cor azul que sempre teve um menor nível, este teste mostra que a variância é grande quando os níveis dos tanques são baixos e as perturbações próprias do sistema são menores quando os níveis são aumentados, desta forma mediante a análise desta variação conseguiu-se identificar as variâncias das perturbações do sistema que modificam a sua vez a matriz que ganhos Q , e que atualiza a planta no tempo e cada mudança de nível. Após, a identificando destas variâncias foi criada uma matriz de covariâncias

constante para testar um FK sem adaptação a partir da análise realizada com o FKA , com o objetivo de verificar que o comportamento dos filtros seja similar dado que está sendo usando a variância das perturbação real do sistema, os resultados são mostrados para as entradas na figura 6.6.

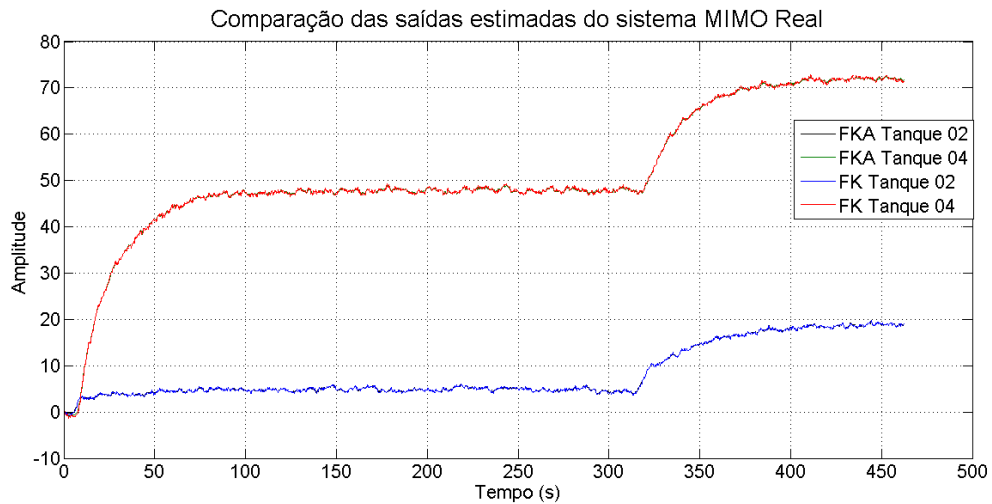


Figura 6.6: Comparação das saídas estimadas dos FK

A figura 6.6 mostra o mesmo comportamento descrito para o teste anterior, verificando que os filtros apresentam um comportamento parecido, comparado com o FK sem adaptação de matriz Q constante, a figura 6.7 mostra uma ampliação da saída estimada para os filtros analisados, sendo representados os FKA pelas cores azul e vermelho e os FK invariantes pelas cores laranja e roxo.

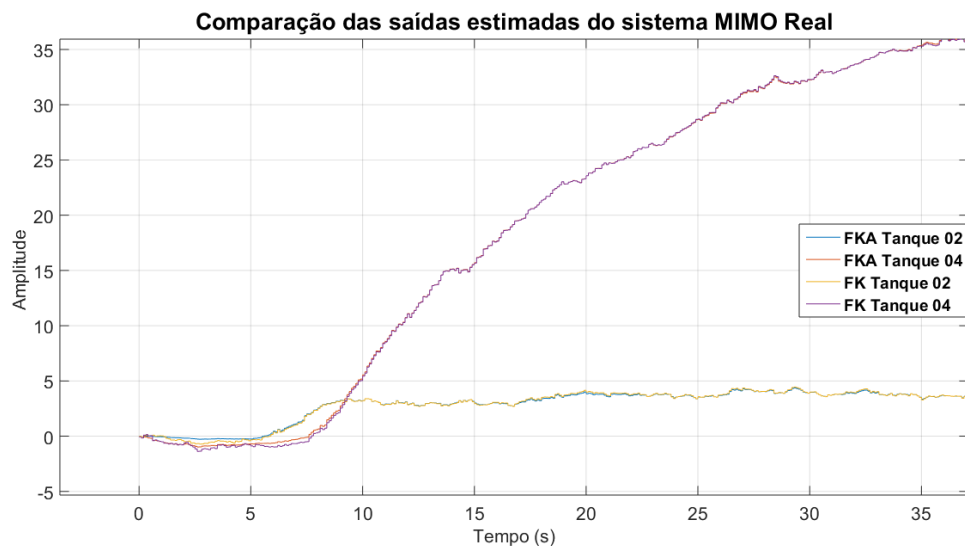


Figura 6.7: Ampliação do comportamento dos FK estimados

Verificando que os dois filtros testados fazem o seguimento adequado da referência e que

os dois filtros conseguem tem uma resposta boa frente ao ruído natural do sistema, tendo que o *FKA* consegue ser mais uniforme comparado com o FK sem adaptação, posteriormente foi observado o comando para este teste, mostrado na figura 6.8.

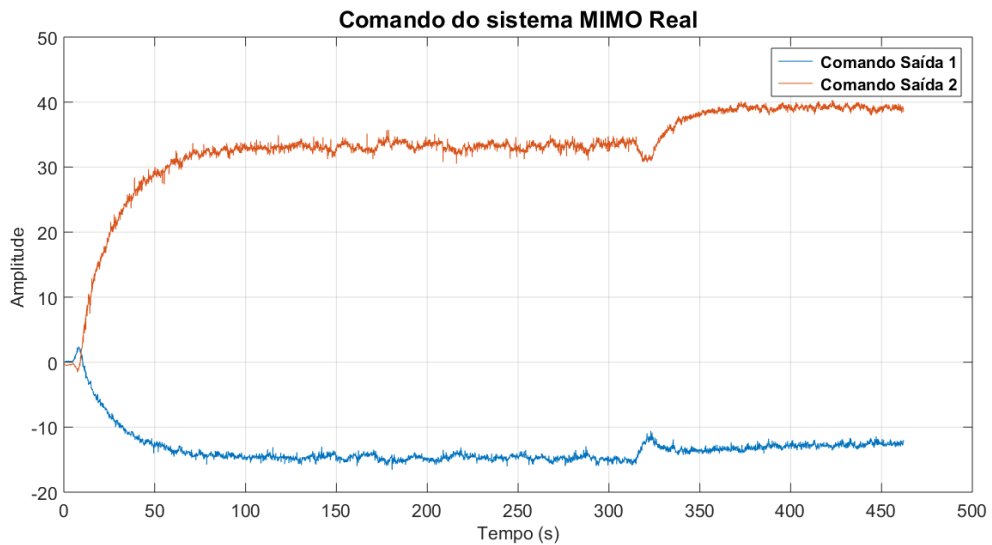


Figura 6.8: Comparação do comportamento do comando.

A figura mostra que o comando é mais reativo frente a mudanças de nível que gerariam uma perturbação grande, este comportamento é perceptível tanto no tanque 04 (cor laranja) como no tanque 02 (Cor azul), depois foi observada a variância nas perturbações do *FKA* encontrado a resposta mostrada na figura 6.9, onde é evidente que quando o tanque tem um nível maior a perturbação fica menor, isto pode ser observado no gráfico na parte final após 350s, onde foi aumentado o nível dos tanques:

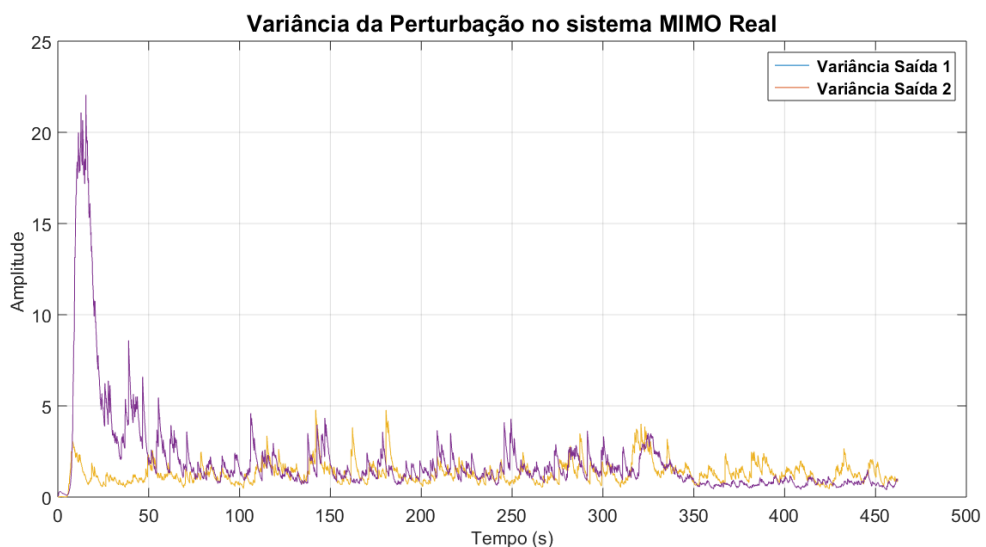


Figura 6.9: variância para as perturbações do sistema real.

Seguidamente, foi realizado um segundo teste de duração 1 hora e 40 minutos, mas, para melhor entendimento é apresentado o comportamento nos primeiros 600s, facilitando a identificação dos sinais, como mostrado na figura 6.10, onde pode ser observado as referências e as saídas estimadas com cada um dos filtros para cada uma das entradas.

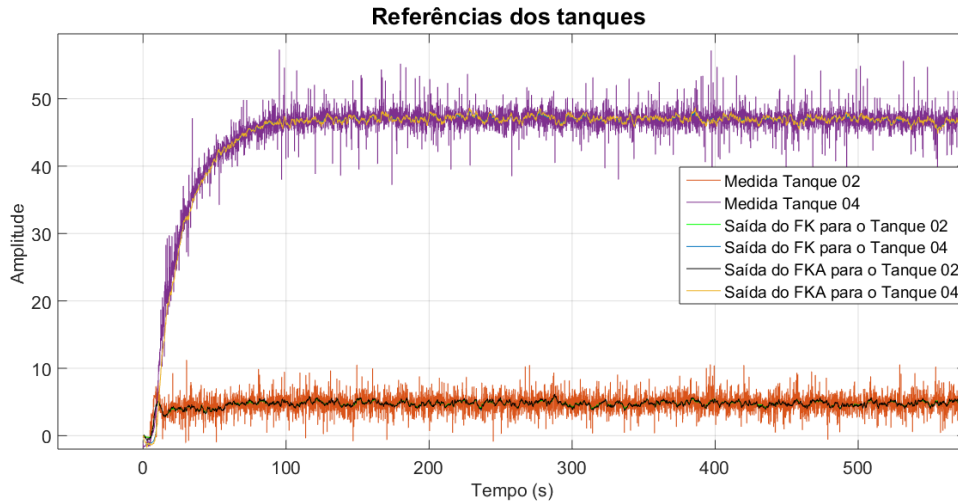


Figura 6.10: Segundo teste realizado, comportamento das medições e os filtros.

O comportamento dos filtros pode ser apreciado de maneira mais clara na figura 6.11, sendo o *FKA* representado pelas cores azul e vermelho para os tanques 02 e 04 respectivamente e o *FK* sem adaptação representado pelas cores laranja e roxo para os tanques 02 e 04.

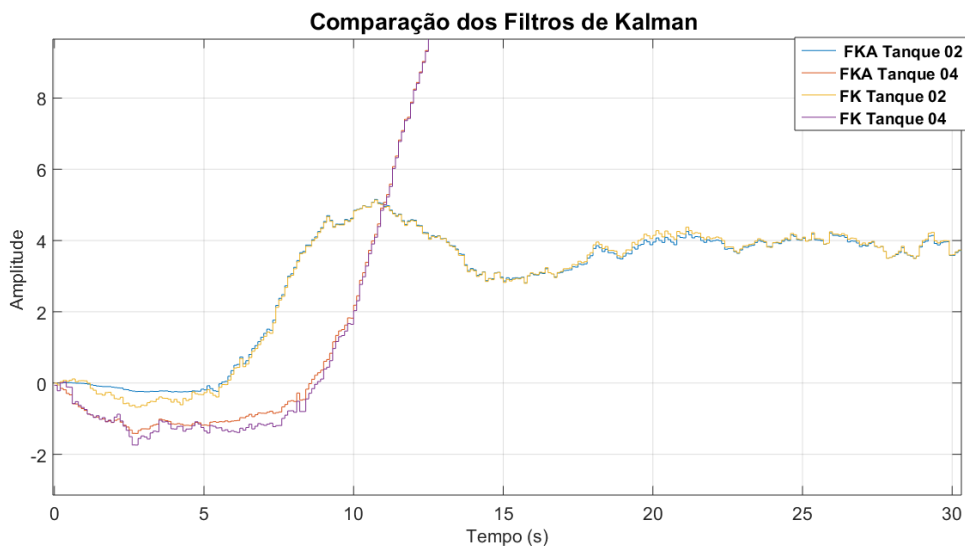


Figura 6.11: Ampliação do comportamento dos filtros analisados

Da figura 6.11 é observado que o comportamento dos dois filtros nos tanques é praticamente o mesmo, devido a que a variância da matriz Q do filtro de Kalman sem adaptação

foi criada considerando a variância na perturbação obtida do FKA , porém era de se esperar resultados parecidos, mas quando é feita uma ampliação da imagem, pode se perceber que o FKA apresenta um comportamento mais suave comparado com o FK com matriz Q constante, porém, os dois fazem um bom trabalho de acompanhamento do sinal de entrada, este comportamento é refletido em outra ampliação do da imagem, mostrado na figura 6.12.

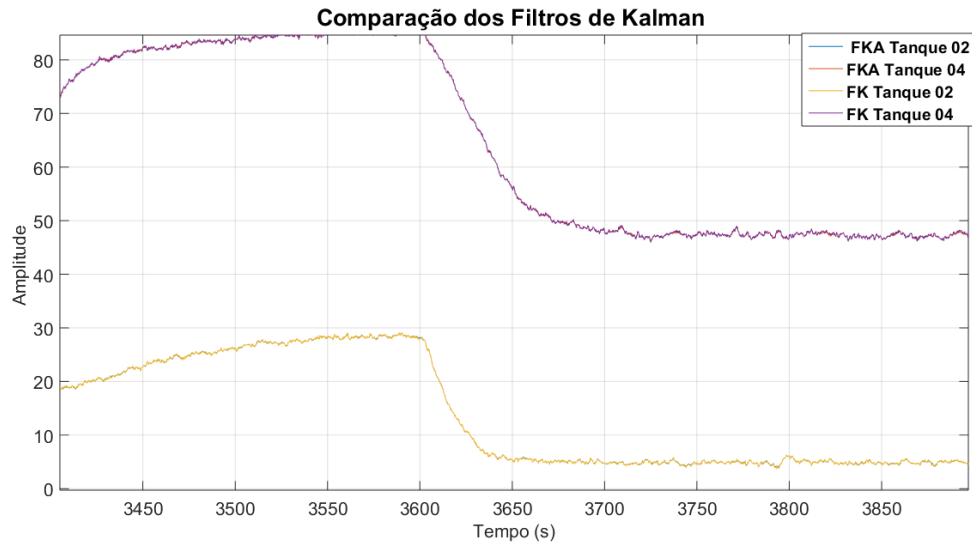


Figura 6.12: Ampliação dos sinais que representam os filtros trabalhados no segundo teste.

Posteriormente foi verificado o comando para cada um dos filtros testados implementado com o mesmo controlador P projetado, o comportamento é mostrado nas figuras 6.13 e 6.14.

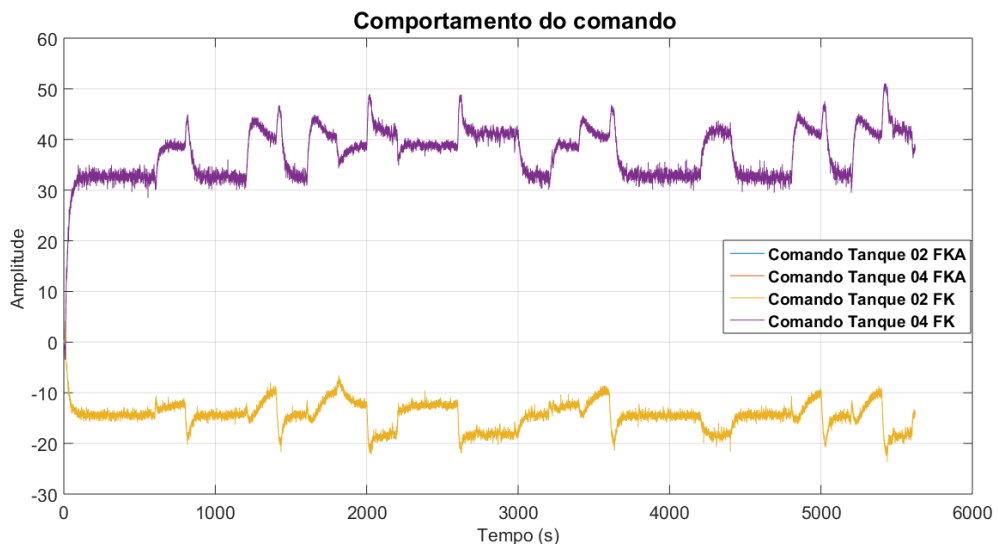


Figura 6.13: Comportamento dos filtros de Kalman para o terceiro teste.

Na figura 6.13 não é observada uma diferença notória entre os comando dos dois filtros analisados porque se está apresentado o teste durante todo o tempo de execução, já, na figura

6.14, se mostra uma aplicação da imagem que representa os filtros e pode-se observar de forma clara o comportamento dos mesmos.

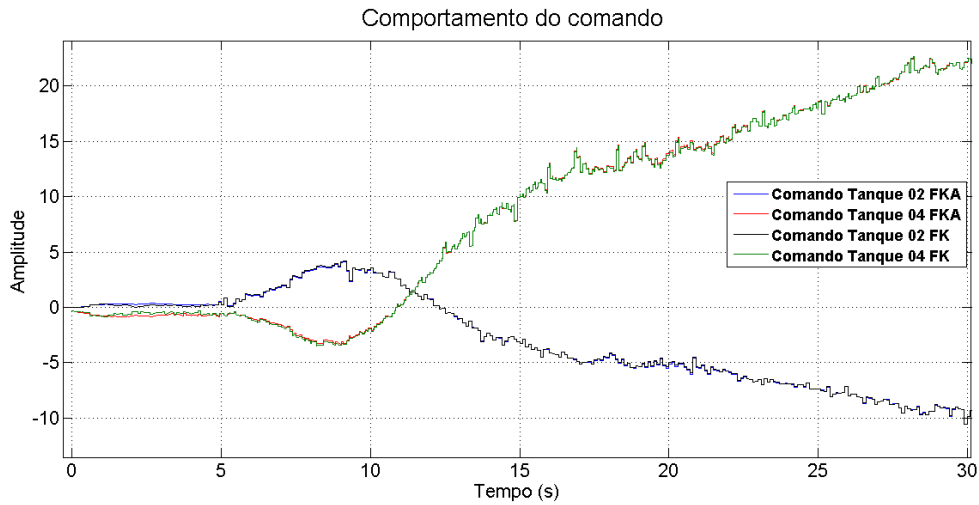


Figura 6.14: Comportamento dos comandos do sistema para o terceiro teste.

É claro que o comando do *FKA* (Azul e vermelho) fica mais liso comparado com o *FK* (Laranja e roxo) sem adaptação quando este estabiliza, dado que o esforço realizado pelo controle é diminuído. Seguidamente foram analisadas as variâncias mostradas na figura 6.15, onde se identifica o comportamento das perturbações da entrada no *FKA* e pode-se verificar que estas são sempre as mesmas. Nos dois testes desenvolvidos nesta validação e identificado que sempre que o nível for maior a perturbação fica menor e que o *FKA* reage mais forte.

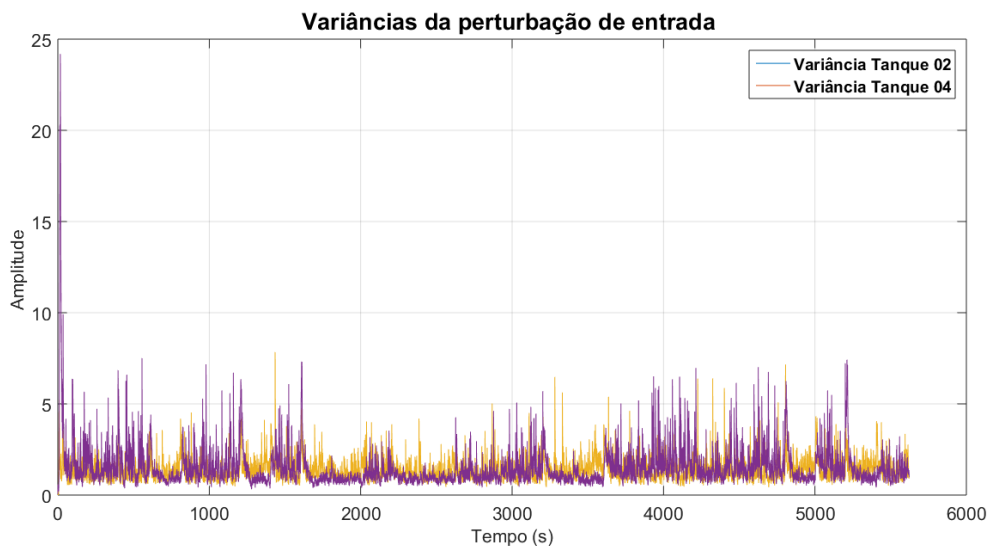


Figura 6.15: variância para as perturbações do sistema real no segundo teste.

A figura 6.15 mostra que as variâncias maiores são apresentadas nos níveis dos tanques

menores e que quando os níveis aumentam as perturbações são menores, no início do gráfico apresenta-se uma variação grande de amplitude, dado que o sistema está fazendo um maior esforço o qual é minimizado rapidamente, permitindo controlar de forma forte as perturbações, sendo um dos objetivos principais do trabalho desenvolvido, desta maneira é verificada a teoria proposta desta pesquisa mediante simulação numérica de diferentes sistemas físicos trabalhados no grupo, e de maneira prática em um sistema real correspondente a uma bancada de quatro tanques, identificando as variâncias nas saída do sistema que relacionam as perturbações de entrada, permitindo testar um FK com matriz Q constante a qual é obtida a partir da análise do FKA , e desta maneira comprar os dois comportamentos, obtendo bons resultados com os dois filtros e respostas mais uniformes com o FKA .

O desenvolvimento desta pesquisa é muito importante porque a criação de um filtro que possa identificar perturbações fortes e possa agir para minimizar-las mediante a filtragem e o controlador resulta em uma vantagem para o sistema físico dado que estaria poupando de grandes esforços os atuadores do sistema e fazendo que o controle seja bem mais robusto comparado com controladores tradicionais.

6.1 ANÁLISE DO FKA EM MALHA ABERTA

A continuação é analisado o comportamento do FKA em malha aberta, para este caso foi criada uma referência em função da resposta obtida do sistema para realizar a análise mediante observação dos pontos da bomba da bancada que permite o controle do nível, que para o caso analisado em 37 para o tanque 02 e 40 para o tanque 04, posteriormente, foram relacionadas os pontes em função do tempo com as amplitudes correspondentes encontradas, construído desta maneira a referência mostrado na figura 6.16.

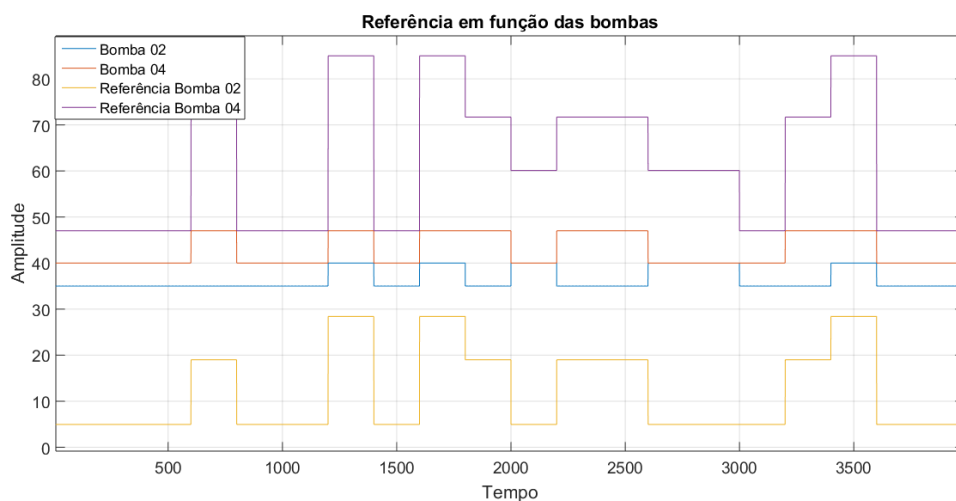


Figura 6.16: Referência em função das bombas.

É observado na figura 6.17 que o sinal obtido realmente corresponde de maneira muito aproximada à referência do sistema, dado que este se ajusta muito bem ao nível dos tanques encontrados neste teste.

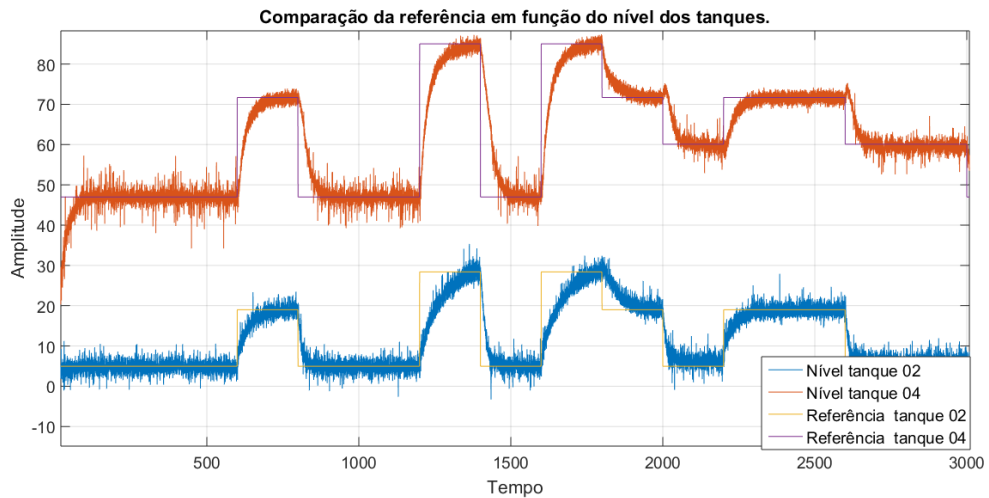


Figura 6.17: Referência em função do nível dos tanques.

Seguida mente foi analisado o comportamento do *FKA* em função do nível dos tanques os quais foram representados pelas figuras de cor laranja e roxo, é notado que ele faz o acompanhamento do nível eliminado o ruído do sistema, como mostra a figura 6.18.

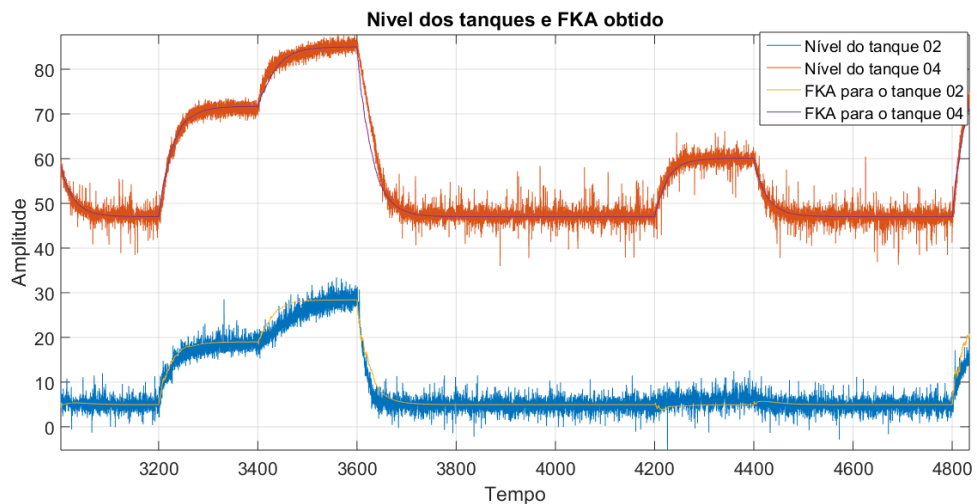


Figura 6.18: Referência em função das bombas.

O filtro de Kalman adaptado mostrado nesta simulação numérica é o proposto no fluxograma mostrado na figura 4.5, é observado que ele consegue reagir frente as perturbações no sistema mudando a variância da perturbação em cada instante, verificando que a proposta de adaptação planteada neste documento funciona adequadamente para um sistema em malha aberta, seguidamente, foi comparado o comportamento do *FKA*, com um FK

onde a variância Q permanece contante, para este caso de simulação foi usada a matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

A mudança feita em relação ao FKA foi a substituição da matriz Q variável pela matria Q constante, obtendo o resultado apresentado na figura 6.19

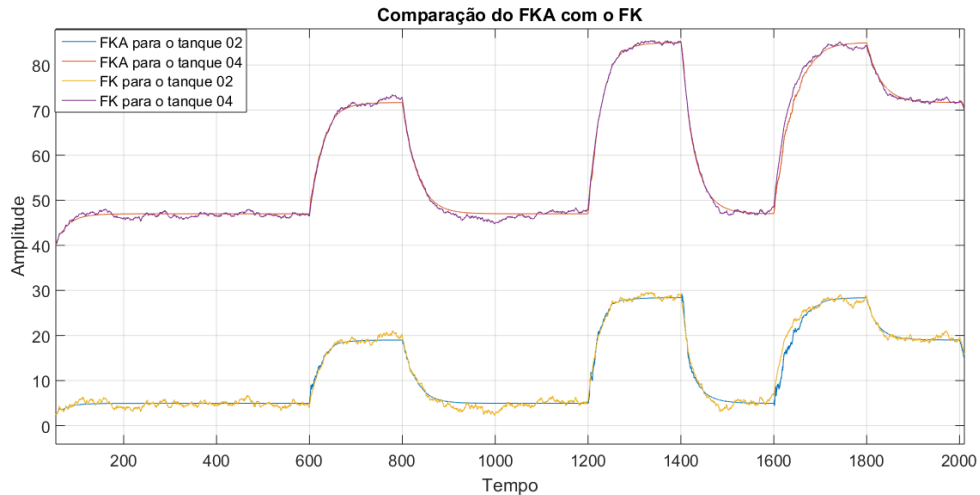


Figura 6.19: Referência em função das bombas.

A figura 6.19 mostra o comportamento dos dois filtros analisados, é observado que o FKA (azul e vermelho) é muito mais suave que o FK (laranja e roxo) com Q constante, o qual é esperado, dado que o objetivo da adaptação é melhor a performance do filtro mediante a modificação da variância da matriz perturbação em cada passo de tempo. Além disso, o FKA tem a mesma resposta que apresenta o FK com Q constante, quando se tem uma mudança da referência, mas quando o sinal estabiliza o FKA consegue fazer uma melhor filtragem comparada com o FK sem adaptação, resultado que era esperado pelo ajuste realizado na variância da perturbação.

6.2 ANÁLISE DO FKA EM MALHA FECHADA

Anteriormente foi analisado o comportamento do FK e do FKA para o sistema em malha aberta, e foi verificado que a técnica de adaptação proposta aqui funcionada adequada mente para esta situação, posteriormente foi fechada a malha para verificar o comportamento da adaptação nestas condições, segundo foi mostrado na equação 4.11, a qual descreve o sistema a ser adaptado em malha fechada, para este caso foi recalculado o ganho do sistema nestas condições e foi montado o sistema como apresentam diagramas de blocos, mostrados nas figuras 6.20,6.21 e 6.22.

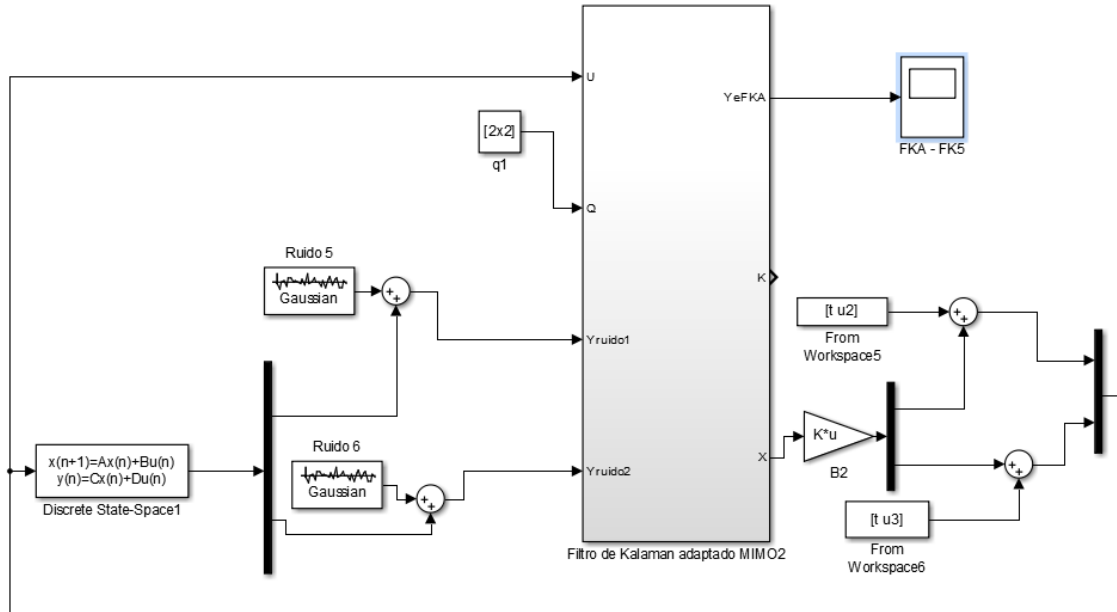


Figura 6.20: Esquema do FK em malha fechada

A figura 6.20, mostra o esquema do FK sem adaptação em malha fechada, a figura 6.21 mostra o esquema externo do FKA, e a figura 6.22 mostra o esquema interno, nesta figura é mostrado o bloco de adapção, neste bloco se encontram as funções programadas que permitem encontrar a matriz Q variável qual realimenta o sistema.

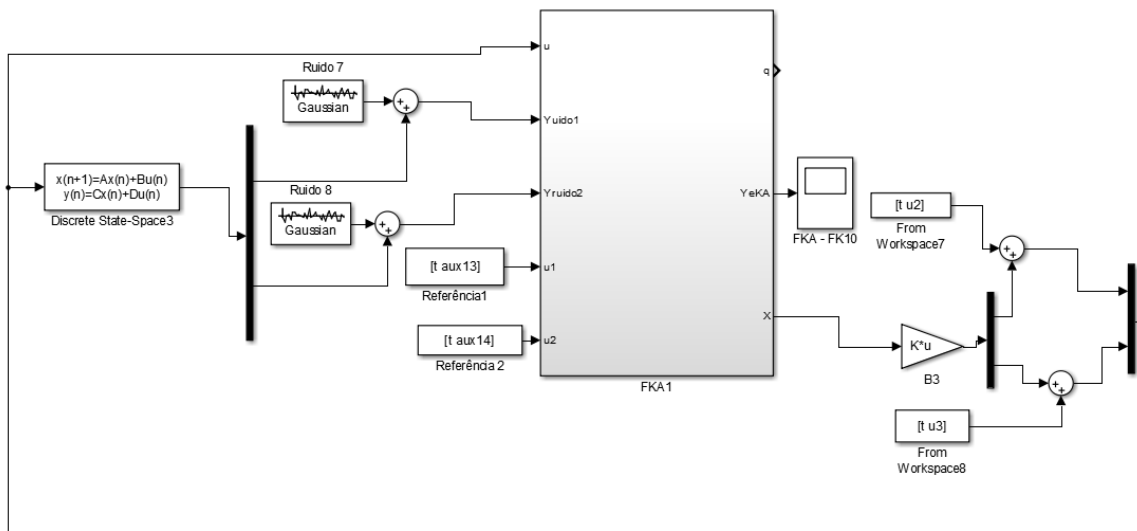


Figura 6.21: Esquema externo do FKA em malha fechada

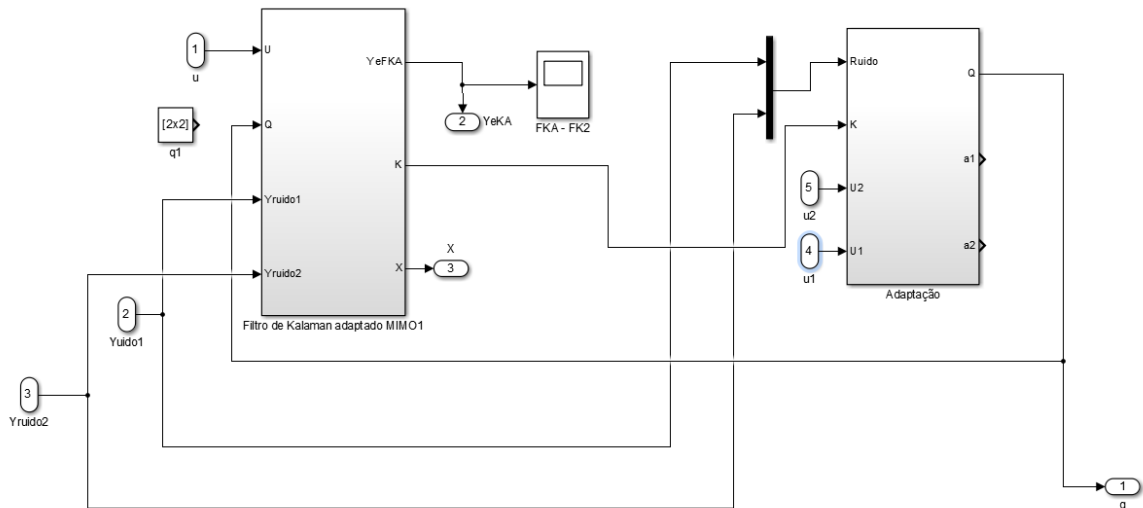


Figura 6.22: Esquema interno do FKA em malha fechada

Da figura 6.20 foi encontrada a saída mostrada na figura 6.23, para o sistema sem adaptação, neste caso como é desejado, encontra-se que o FK tenha um bom comportamento comprada com a referência, de forma que possa seguir o sinal inserido e que este consiga eliminar em boa parte o ruído e a perturbação.

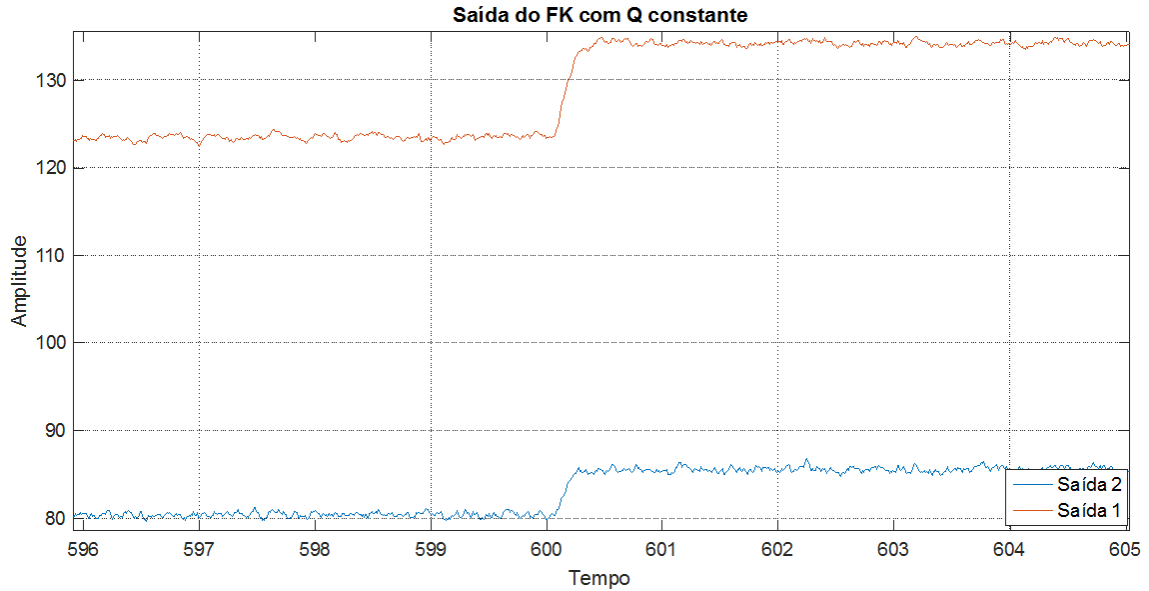


Figura 6.23: Comportamento do FK

Seguidamente na figura 6.24, observa-se que o comportamento na figura 6.23 é melhorado mediante a substituição do FKA , o qual é esperado da adaptação implementada gerando um sinal muito mais liso e uniforme, este comportamento é notado de forma mais clara na figura 6.25 onde se comparam os dois resultados.

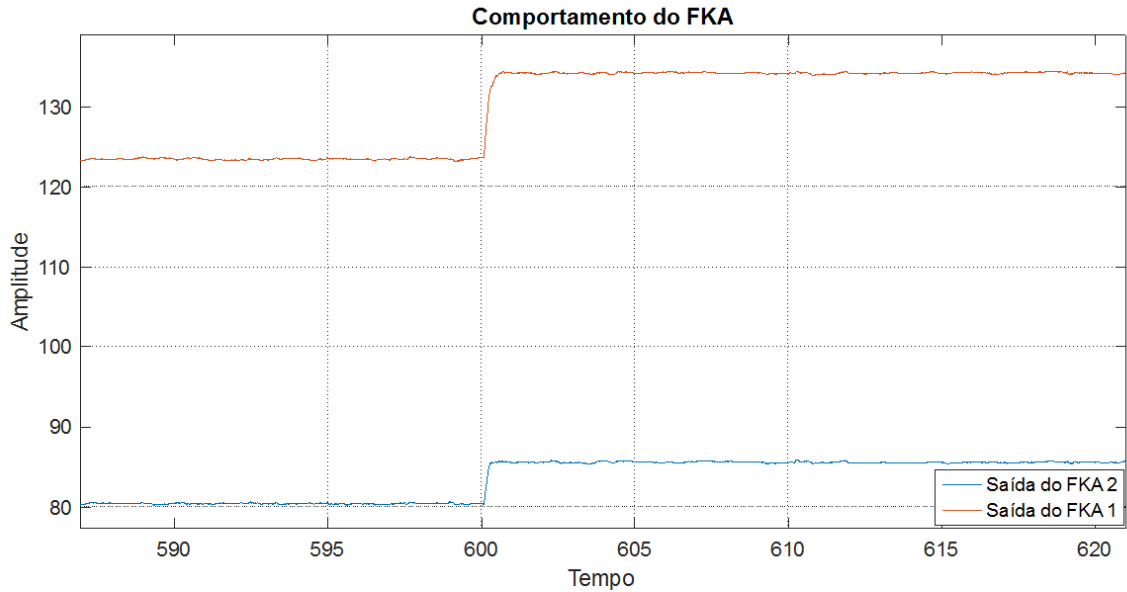


Figura 6.24: Comportamento do FKA

A figura 6.24 mostra que efetivamente o *FKA* é bem mais suave comparado com o *FK* com matriz *Q* constante, mostrando que a adaptação está melhorando o comportamento natural do *FK*, isto se deve a que para cada passo de tempo, é gerado um ganho de Kalman e a sua vez um ganho do sistema em malha fechada, o qual é atualizado no sistema, permitindo com que a matriz *Q* adaptada aumente e diminuiria de acordo com a perturbação inserida no sistema permitindo com que a resposta na saída seja mais lisa e consiga rejeitar desta forma a perturbação.

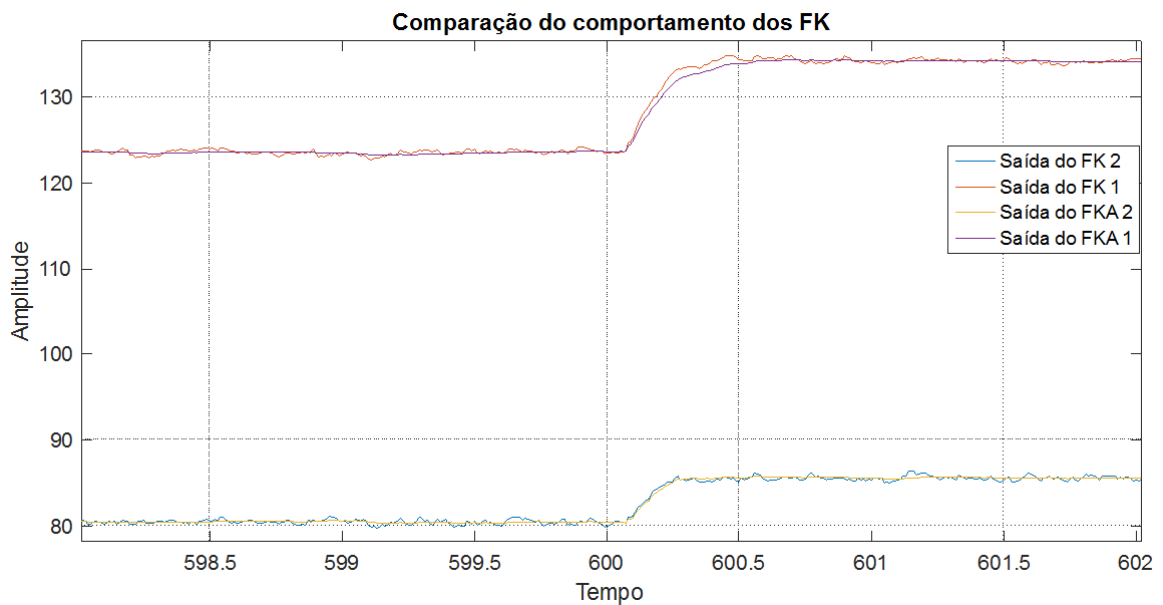


Figura 6.25: Comparação do comportamento dos FKA e FK

As figuras 6.26 e 6.27, mostram de maneira mais clara o comportamento dos dois filtros em função da entrada em presença do ruído, é notado que para as duas entradas analisadas encontra-se saídas estimadas dos filtros projetados, mas para cada um dos casos o comportamento do *FKA* supera o comportamento do *FK*, dado que sempre se obtêm respostas mais suaves e robustas frente a grandes perturbações, como pode ser observado nas figuras seguintes, as quais mostras duas entradas por separado para cada tanque.

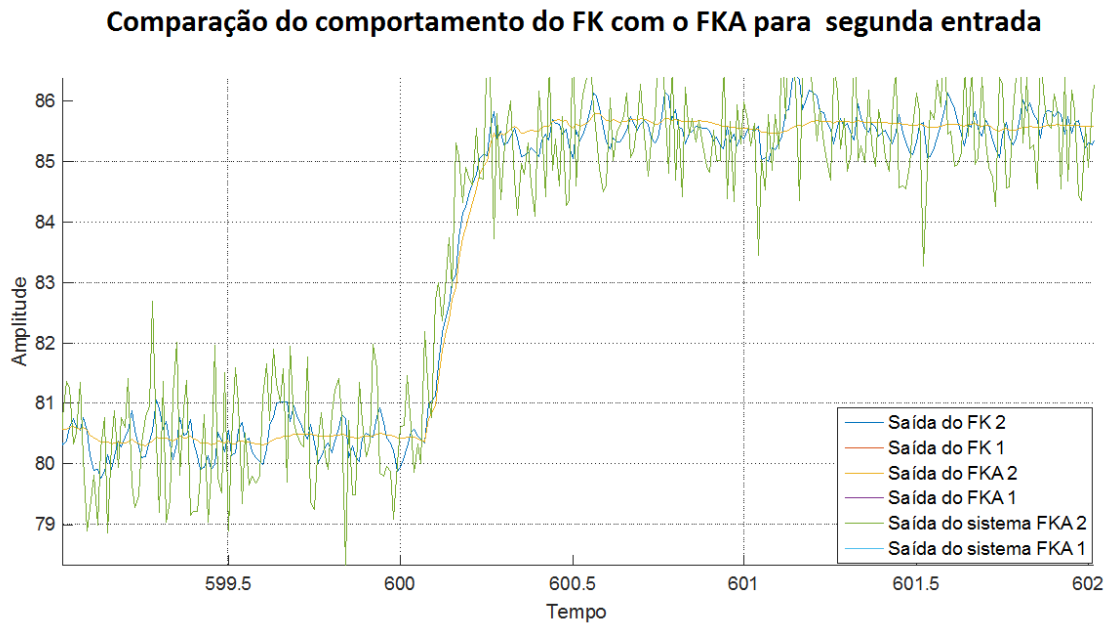


Figura 6.26: Comparação do comportamento do FK com o FKA para a segunda entrada.

Na figura 6.26, está sendo comparado a resposta do *FKA* (cor laranja) em malha fechada com o *FK* (cor azul) invariante, é observado que a resposta do *FKA* é sempre mais suave e consegue acompanhar muito melhor o sinal de referencia, e notado que sempre que se estabiliza o sistema o ruído no *FK* com Q constante fica maior comparado com *FKA*. Analisado a figura 6.27 é observado os mesmos resultados com o tanque 04 obtendo um menor ruído no sistema adaptado mesmo o sistema sem adaptação apresentou um ruído menor, dado que o nível deste tanque era sempre maior, o que reduzia um pouco o ruído por vibração da bancada.

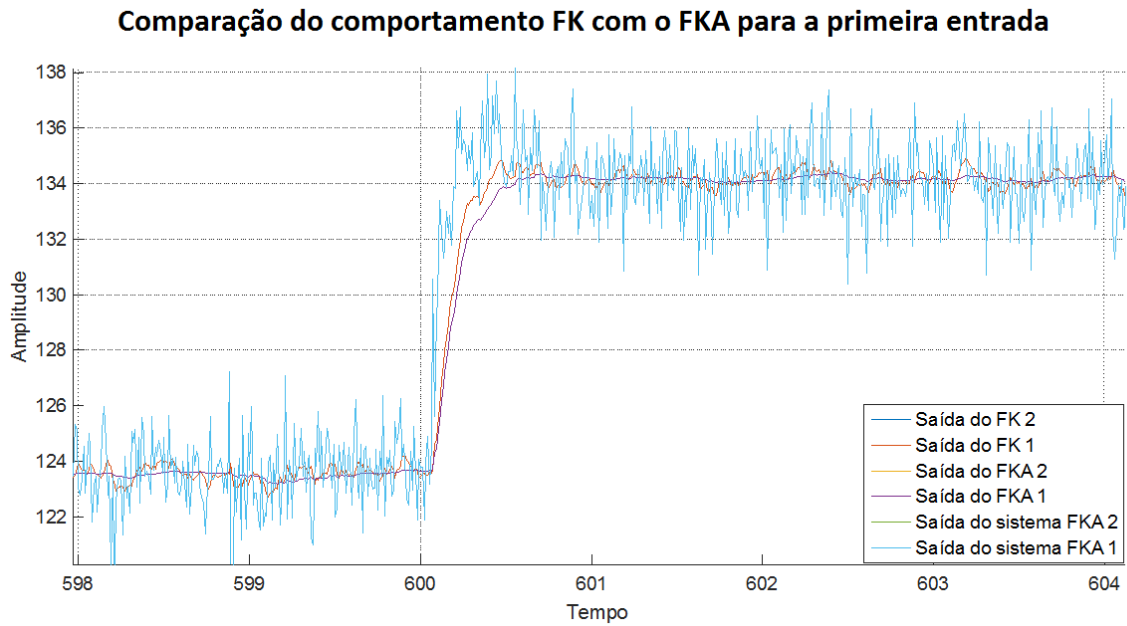


Figura 6.27: Comparação do comportamento do FK com o FKA para a primeira entrada.

Estes resultados obtidos são muito importantes para esta pesquisa porque por meio deles pode ser verificada a teoria de adaptação proposta neste trabalho, iniciando com uma proposta em malha aberta e terminando com uma proposta em malha fechada, foi possível testar o FK em malha aberta de forma real, como foi testado anteriormente, seguidamente foram projetados uma serie de dados que permitiram realizar testes em malha fechada para verificação das teorias de adaptação propostas aqui, encontrando ótimos resultados e por tanto deixando a teoria proposta pronta para ser testada em diferentes sistemas físicos do grupo de pesquisa, com a finalidade de melhor a performance do comportamento dos sistemas aqui trabalhados.

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 CONCLUSÕES

1. Com o intuito de validar a metodologia de adaptação foram feitas diferentes simulações numéricas comparando a performance entre o filtro de Kalman adaptado e o filtro de Kalman sem adaptação para casos onde as perturbações não tinham variância constante ao longo do tempo. Para isto foram escolhidos modelos numéricos que representam sistemas reais tais como o sistema de tanques, o mecanismo de barra e bola, e o compensador ativo de heave para colunas de perfuração. Em todos os casos estudados o filtro de Kalman adaptativo apresentou melhor resposta do que filtro de Kalman convencional em relação ao uso dos atuadores e performance semelhante no quesito de controle das saídas do sistema;
2. Neste trabalho foi apresentado o conceito de um filtro de Kalman adaptativo a partir da estimação em tempo real da variância da perturbação de entrada à partir da mediada da variância da perturbação da saída. Tal metodologia foi desenvolvida tanto para sistemas lineares SISO e MIMO em malha aberta e fechada;
3. A adaptação proposta se baseia na hipótese de se conhecer a ordem de grandeza da variância do ruído de medida R e na modificação em tempo real da matriz Q referente à variância da perturbação. Desta maneira é possível atualizar o filtro de Kalman e adaptá-lo às reais condições do sistema.
4. Em outras palavras o ajuste preciso da matriz Q ao longo do tempo permite a utilização de um filtro de Kalman mais suave quando as perturbações do sistema são pequenas e uma configuração mais reativa quando as perturbações do sistema são mais significativas. Desta maneira evita-se o uso excessivo dos atuadores nos casos onde a perturbação é pouco significativa em relação ao ruído de medida.
5. Foi obtido um filtro de Kalman, onde pode ser analisado ruídos diferentes ao ruído branco, mediante a incorporação de um filtro Butterworth de variância conhecida;
6. De maneira a testar este filtro em um caso mais próximo do real foi utilizado uma série de dados obtidos em malha aberta em um experimento com dois tanques. Desta maneira foi possível validar a atuação do filtro em cima de dados reais utilizando um modelo identificado à partir de uma planta real (tratando ruídos não brancos e perturbações devido aos erros de modelagem). Também neste caso o filtro adaptativo mostrou performance superior além de uma maior facilidade para a determinação de seus parâmetros (tendo em vista que não é necessário estimar a matriz Q a priori da utilização do filtro);

7. Aproveitando o modelo identificado do sistema real, também foi realizada a simulação numérica em malha fechada para o modelo obtido à partir da planta real. Como nas simulações numéricas anteriores o resultado do filtro de Kalman adaptativo foi superior ao do filtro de Kalman convencional.
8. Desta maneira o trabalho conclui que o filtro de Kalman adaptativo proposto no presente trabalho apresenta potencial para o uso em sistemas de controle, ao garantir com o mesmo filtro uma performance idêntica ao filtro de Kalman tradicional nos momentos críticos da operação e uma forte atenuação do sinal em momentos que o sistema converge para o valor desejado. Desta maneira o filtro proposto garante um uso reduzido dos atuadores sem comprometer a performance do sistema;
9. Os resultados teóricos apresentados neste manuscrito serão submetidos a uma revista científica em conjunto com o trabalho de outros membros do grupo de pesquisa que expandiram o uso dessa teoria de adaptação para sistemas não lineares com controladores baseados na teoria de planicidade diferencial e linearização exata através da base canônica de Brunovsky. Um segundo artigo científico com os resultados experimentais e simulação numérica do sistema identificado deve ser submetido para congresso científico da área de controle de processo;

7.2 RECOMENDAÇÕES E TRABALHOS FUTUROS

1. Como trabalhos futuros ficam a aplicação dessa teoria de adaptação para outros filtros de Kalman para sistemas não lineares tais como o Extended Kalman Filter EKF e o Unscented Kalman Filter UKF assim como o complemento da parte experimental fechando a malha fechada com o filtro adaptativo no experimento;
2. Recomenda-se trabalhar na implementação de esta estratégia de adaptação em um CLP ou microcontrolador para realizar testes reais em diferentes sistemas em malha fechada, com a finalidade de criar um sistema onde só seja mudada a descrição física do mesmo e a adaptação proposta seja ajustada automaticamente para diferentes sistemas físicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G. A. González, Torres and M. A. Bucheli García, “Aplicación de técnicas de control óptimo usando filtro de kalman sobre un modelo de generador eólico,” 2011.
- [2] B. William, *mecatronica, uma abordagem multidisciplinar*, D. W. Nowaczyk, Ed. Bookman 4ta ed., 2008.
- [3] A. C. Guedes, R. B. de Carvalho, J. A. Real, and M. R. Trindade, “Controle de temperatura de ar em duto utilizando controle adaptativo auto-ajustável (self-tuning),” *Revista de Controle e Automação*, vol. 1, no. 1, 2013.
- [4] Y. C. Gomes, T. V. Araújo, and A. M. Lima, “Abordagem didática com controle adaptativo.”
- [5] V. P. Pinto, “Controladores robustos lqg/ltr com ação integral aplicados ao controle de geradores eólicos interligados ao sistema de distribuição de energia elétrica baseados em máquina de indução duplamente alimentada,” 2012.
- [6] M. N. Magalhães, *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.
- [7] S. S. HAYKIN and B. Van Veen, “Sinais e sistemas,” 2001.
- [8] C. J. L. Pimentel, *Comunicação Digital*. Brasport, 2007.
- [9] M.-S. Koo, H.-L. Choi, and J.-T. Lim, “Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using centrifugal force term,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 8, no. 9, pp. 5999–6009, 2012.
- [10] J. Hatleskog and M. Dunnigan, “Active heave crown compensation sub-system,” in *OCEANS 2007-Europe*. IEEE, 2007, pp. 1–6.
- [11] M. C. F. W. E. S. T. Arthur M. Machado, Jhonantans M. Rocha, “Implementação experimental de estratégias de controle em planta didática de um processo de quatro tanques,” *XII Simposio Brasileiro de Automação inteligente (SBAI), Natal RN*, pp. 791–794, 2015.
- [12] O. O. Rodríguez-Díaz, E. L. Téllez-Valderrama, and D. A. Gutiérrez-Ramírez, “Simulación del péndulo invertido rotacional usando easy java simulations y matlab,” *Tecno Lógicas*, no. 28, 2012.
- [13] W. C. Messner, D. M. Tilbury, and A. P. R. Hill, *Control Tutorials for MATLAB and Simulink*. Addison-Wesley, 1999.

- [14] K. Pathak, J. Franch, and S. K. Agrawal, "Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization," *IEEE Transactions on robotics*, vol. 21, no. 3, pp. 505–513, 2005.
- [15] G. E.C. Vivas, "Control del helicoptero 2d usando metidos de control robusto h1," Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia facultad de ingenieria departamento de electrica e electronica, 2011.
- [16] H. W. Bode and C. E. Shannon, "A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory," *Proceedings of the IRE*, vol. 38, no. 4, pp. 417–425, 1950.
- [17] N. Wiener, "Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series," vol. 7, 1949.
- [18] R. C. Booton, "An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs," *Proceedings of the IRE*, vol. 40, no. 8, pp. 977–981, 1952.
- [19] S. Darlington, "Linear least-squares smoothing and prediction, with applications," *Bell Labs Technical Journal*, vol. 37, no. 5, pp. 1221–1294, 1958.
- [20] G. Franklin, "The optimum synthesis of sampled-data systems," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Electronics Research Laboratories, Columbia University Engineering Center, 1955.
- [21] R. E. Kalman *et al.*, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [22] J. M. Marcos, "Projetos de controle convencionais e adaptativos aplicados aos sistemas termicos de uma bancada de ensaios de cabos condutores." Master's thesis, Universidade Catolica do Parana, Curitiba, 2014.
- [23] I. Dourado, "Controle adaptativo de um servo motor utilizando o filtro de kalman estendido de tempo discreto," *61 Reuniao anual da SBPC, amazonia ciencia e cultura*, 2009.
- [24] T. Kailath, "An innovations approach to least-squares estimation—part i: Linear filtering in additive white noise," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, no. 6, pp. 646–655, Dec 1968.
- [25] R. G. Brown and P. Y. Hwang, "Introduction to random signals and applied kalman filtering: with matlab exercises and solutions," *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*, by Brown, Robert Grover.; Hwang, Patrick YC New York: Wiley, c1997., vol. 1, 1997.

- [26] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the kalman filter," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 6, pp. 736–747, 1971.
- [27] S. Sangsuk-Iam and T. E. Bullock, "Analysis of discrete-time kalman filtering under incorrect noise covariances," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 12, pp. 1304–1309, 1990.
- [28] K. H. Kim, J. G. Lee, and C. G. Park, "Adaptive two-stage extended kalman filter for a fault-tolerant ins-gps loosely coupled system," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 1, pp. 125–137, 2009.
- [29] P. Escamilla, Ambrosio and N. Mort, "Adaptive kalman filtering through fuzzy logic," in *Proceedings of the 7th UK Workshop On Fuzzy Systems, Recent Advances and Practical Applications of Fuzzy, Neuro-Fuzzy, and Genetic Algorithm-Based Fuzzy Systems*, 2000, pp. 26–27.
- [30] M. Oussalah and J. De Schutter, "Adaptive kalman filter for noise identification," in *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis*, vol. 3. KU Leuven; 1998, 2001, pp. 1225–1232.
- [31] D. K. Takayama, R. V. Pereira, V. L. A. de Camargo, and T. Abrão, "Implementação eficiente de filtros adaptativos utilizando a plataforma tms320c6713," *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, vol. 32, no. 1, pp. 115–131, 2011.
- [32] V. Fathabadi, M. Shahbazian, K. Salahshour, and L. Jargani, "Comparison of adaptive kalman filter methods in state estimation of a nonlinear system using asynchronous measurements," in *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, vol. 2, 2009, pp. 884–891.
- [33] C. K. Chui, G. Chen *et al.*, "Kalman filtering," *With real time applications*, 1999.
- [34] R. Mehra, "On the identification of variances and adaptive kalman filtering," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 15, no. 2, pp. 175–184, 1970.
- [35] J. Wang, S. N. Gopaul, and J. Guo, "Adaptive kalman filtering based on posteriori variance-covariance components estimation," in *Proceeding of the CPGPS Technical Forum Satellite Navigation and Positioning, Shanghai, China*, vol. 1720, 2010, p. 111.
- [36] T. Yoneyama and A. L. Maitelli, "Um controlador dual sub-ótimo para sistemas com parâmetros estocásticos não-leneares," *Revista SBA: Controle e Automação*, vol. 4, no. 2, pp. 62–65, 1994.
- [37] Y. Bar-Shalom and E. Tse, "Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, no. 5, pp. 494–500, 1974.

- [38] A. Mohamed and K. Schwarz, "Adaptive kalman filtering for ins/gps," *Journal of geodesy*, vol. 73, no. 4, pp. 193–203, 1999.
- [39] I. S. Mbalawata, S. Särkkä, M. Vihola, and H. Haario, "Adaptive metropolis algorithm using variational bayesian adaptive kalman filter," *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 83, pp. 101–115, 2015.
- [40] E. S. d. Santana, E. Bim, and W. C. Amaral, "Algoritmo preditivo baseado em modelo aplicado ao controle de velocidade do motor de indução," *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, vol. 19, no. 2, pp. 155–164, 2008.
- [41] F. Caliskan, Y. Zhang, N. E. Wu, and J.-Y. Shin, "Actuator fault diagnosis in a boeing 747 model via adaptive modified two-stage kalman filter," *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [42] M. H. Amoozgar, A. Chamseddine, and Y. Zhang, "Experimental test of a two-stage kalman filter for actuator fault detection and diagnosis of an unmanned quadrotor helicopter," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 70, no. 1-4, pp. 107–117, 2013.
- [43] J. Ma, S.-h. Ni, W.-j. Xie, and W.-h. Dong, "An improved strong tracking multiple-model adaptive estimation: a fast diagnosis algorithm for aircraft actuator fault," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, pp. 846–854, 2015.
- [44] G. Ducard and H. Geering, "A reconfigurable flight control system based on the emmae method," in *2006 American Control Conference*. IEEE, 2006, pp. 6–pp.
- [45] S. Garrido, "Identificación, estimación y control de sistemas no-lineales mediante rgo," Ph.D. dissertation, Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de ingeniería de sistemas y automática, 1999.
- [46] S. John Wiley, *Optimal State Estimation: Kalman H, and Nonlinear Approaches*. Inc, Publication, 2006.
- [47] K. Ogata, "Engenharia de controle moderno. 2011," 2011.
- [48] J. G. Brito Filho *et al.*, "Controle robusto lqg/ltr com recuperação do ganho da malha de transferência," 2006.
- [49] J. M. D. Cano, *Modelo y Control LQR de una aeronave de cuatro rotores*, 2008.
- [50] A. Komanduri, G. A. Jr, and L. S. Martins-Filho, "Controle de atitude e posição para um simulador experimental de satélite artificial," in *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. Anais... In: Dincon*, vol. 10.
- [51] J. M. Kanieski, H. A. Gründling, and R. Cardoso, "A new lqr modeling approach for power quality conditioning devices," in *IECON 2010-36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE, 2010, pp. 2001–2006.

- [52] *Modern Control Theory*. Brogan, 1991.
- [53] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley New York, 2007, vol. 2.
- [54] J. A. García, “Nuevos algoritmos de filtrado adaptativo mediante combinación adaptativa y sus aplicaciones,” *Universidad Carlos III de Madrid, Tesis Doctoral*, 2004.
- [55] D.-J. Jwo, F.-C. Chung, and T.-P. Weng, “Adaptive kalman filter for navigation sensor fusion,” 2009.
- [56] P. J. Z. Periñán and A. G. Expósito, *Estimación de estado y de parámetros en redes eléctricas*. Universidad de Sevilla, 1999, no. 11.
- [57] D. K. Takayama, R. V. Pereira, V. L. A. de Camargo, and T. Abrão, “Implementação eficiente de filtros adaptativos utilizando a plataforma tms320c6713,” *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, vol. 32, no. 1, pp. 115–131, 2011.
- [58] *An Introduction to the Kalman Filter*. Chapel Hill, 2001.
- [59] R. H. H. Velasco, “Detecção on-line de discontinuidades no processo de soldagem gtaw usando sensoriamento infravermelho e fpgas.” *Publicação: ENM. DM*, vol. 37, p. 10.
- [60] *Kalman Filtering Theory and Practice Using Matlab*. John Wiley and Sons. publisher, 2001.
- [61] O. F. Bote, “Modelo y control del pendulo invertido sobre carro mediante sistemas híbridos,” Master’s thesis, Universidad de Sevilla, Escuela tecnica Superior de ingenieros, 2012.
- [62] D. Millán, Domingo, “Estudio y comparativa de diferentes algoritmos adaptativos para la identificación de sistemas,” 2012.
- [63] F.Castellanos, “Levantamiento y estabilizacion del pendulo invertido,” Master’s thesis, Facultad de Ingenieria, UNAM, Mexico, 2003.
- [64] F. Fajardo, “Simulacion de sistemas dinamicos mediante discretizacion en espacio de estados,” *Revista Sigma*, 2010.
- [65] J. F. S. Golmayo, “Búsqueda de estructuras de reguladores en sistemas de control discreto que minimicen los efectos debidos a la utilización de aritmética de precisión finita,” Ph.D. dissertation, Universidad de Alcalá, 2007.
- [66] D. F. Coutinho *et al.*, “Controle multivariavel de um trocador de calor,” 1993.

- [67] J. Maciejowski, “Multivariable feedback design,” *Addison-Wesley Publishing Company*, 1989.
- [68] A. A. d. Freitas, “Linearização exata adaptativa aplicada ao controle preditivo de processo de nível multivariável,” 2009.
- [69] J. P. Kaipio, A. Seppänen, and E. Somersalo, “Inference of velocity fields with tomographic measurements,” in *Proc. 4th World Congress on Industrial Process Tomography*, 2005.
- [70] S. K. Sengijpta, “Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory,” *Technometrics*, vol. 37, no. 4, pp. 465–466, 1995.
- [71] R. Chen and J. S. Liu, “Mixture kalman filters,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, vol. 62, no. 3, pp. 493–508, 2000.
- [72] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [73] S. T. Façanha, L. A. Carneiro, and J. T. FILHO, “Filtro de kalman via programação quadrática,” in *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Fortaleza, 2013.
- [74] J. G. Díaz, A. M. Mejías, and F. Arteaga, “Aplicación de los filtros de kalman a sistemas de control,” *Revista ingeniería UC*, vol. 8, no. 1, pp. 1–18, 2001.
- [75] *Introducao a identificacao de sistemas, Tecnicas lineares e nao lineares aplicadas a sistemas reais*. Ed. UFMG 3ta ed Belo Horizonte, 2007.
- [76] *Sistemas de Controle para Engenharia*. Ed. Bookman 6ed, Porto Alegre, 2013.
- [77] *Projeto de engenharia mecanica*. McGraw-Hill ,NY EUA, Ed 7,editorial., 2004.
- [78] C. B. d. Silva *et al.*, “Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de matemática,” 2007.
- [79] M. S. B. B. Correia, “Probabilidade e estatística,” 2003.
- [80] Z. Alejandro, *Probabilidad y Estadística*. Nueva Libreria, 2005.
- [81] G. A. Borges, “Probabilidade e variáveis aleatórias,” 2006.
- [82] D. D. Neto, J. ASSIS, L. C. Timm, P. Manfron, G. Sparovek, and T. Martin, “Ajuste de modelos de distribuição de probabilidade a séries históricas de precipitação pluvial diária em piracicaba–sp,” *Rev. Bras. Agrometeorologia*, vol. 13, no. 2, pp. 273–283, 2005.
- [83] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, Ed., 2006.

- [84] V. M. de Souza and A. A. Raposo, “Estabilidade de sistemas lineares discretos baseada em lmis usando linguagem de programacao c++,” in *Congresso de Matematica Aplicada e Computacional*, 2012, pp. 278–280.
- [85] E. L. F. f. Jose, Oniram de Aquino Limaverde Filho, “Control of the ball and beam using kalman filter - a flatness based approach,” *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automatica, Belo Horizonte, MG*, pp. 2601 – 2606, 2014.
- [86] T. M. Linhares, J. O. d. A. Limaverde Filho, W. H. Cuellar, and E. L. F. Fortaleza, “Active heave compensator using kalman filter-based disturbance estimator,” 2016.
- [87] S. Küchler, T. Mahl, J. Neupert, K. Schneider, and O. Sawodny, “Active control for an offshore crane using prediction of the vessel motion,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 16, no. 2, pp. 297–309, 2011.
- [88] W. H. Cuellar and E. Fortaleza, “Compact hydropneumatic heave compensator,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 6, pp. 189–193, 2015.
- [89] K. H. Johansson, “The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero,” *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 8, no. 3, pp. 456–465, 2000.
- [90] M. Mercangöz and F. J. Doyle, “Distributed model predictive control of an experimental four-tank system,” *Journal of Process Control*, vol. 17, no. 3, pp. 297–308, 2007.
- [91] D. Shneiderman and Z. Palmor, “Properties and control of the quadruple-tank process with multivariable dead-times,” *Journal of Process Control*, vol. 20, no. 1, pp. 18–28, 2010.
- [92] J. Limaverde Filho, M. Cristina de Faria Wiira, E. Fortaleza, and E. Tognetti, “Plani- cidade diferencial aplicada ao controle de n^ovel do processo de quatro tanques,” 10 2016.
- [93] C. JM. Diaz, “Modelo y control lqr de una aeronave de cuatro rotores.” Master’s thesis, Universidad de Sevilla Escuela Superior de Ingenieros Departamento de Ingenieria de Sistemas y Automatica., 2007.
- [94] *Discrete-Time Control systems*. Ed. Prentice Hall 3ra ed., 1997.
- [95] M. E. P. Muñoz, E. L. F. Fortaleza, and J. M. A. da Silva, “Modelamiento matemático y control de un helicóptero de cuatro motores,” *Scientia et technica*, vol. 18, no. 4, pp. 672–681, 2013.

APÊNDICES

A. APÊNDICE

A.1 EXEMPLO DA PROJEÇÃO DO CONTROLE LQR

Deseja-se controlar a posição de um carro e o ângulo de um pêndulo invertido, como apresenta a figura A.1 [12]:

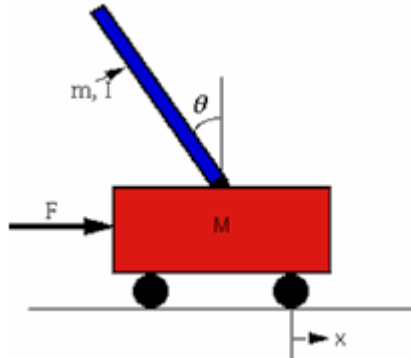


Figura A.1: Diagrama do pêndulo invertido. [12]

Onde:

- M Massa do carro.
- m Massa de pêndulo
- b Atrito do carro
- l Comprimento do centro do massa ao pêndulo
- I Inércia do pêndulo
- F Força aplicada ao carro
- x Coordenadas da posição do carro
- θ Ângulo do pêndulo em relação à vertical.

O exemplo apresentado permite a simulação do comportamento físico de um sistema dinâmico que evolui no tempo. O objetivo é projetar um sistema de controle ótimo que permita a estabilização do pêndulo invertido, o qual está localizado na parte superior do carro, como apresenta a figura A.1 [12], por tanto, para modelar projetar a modelagem do pêndulo invertido pode-se considerar um corpo sólido, onde seu movimento é limitado em duas dimensões. A figura A.2 representa o modelo do corpo livre do sistema, e às equações

fundamentais do movimento no plano do corpo sólido são representadas pelas equações A.1, A.2 e A.3: [12]:

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i = ma_i \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j = ma_j \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_G = m\alpha_i \quad (\text{A.3})$$

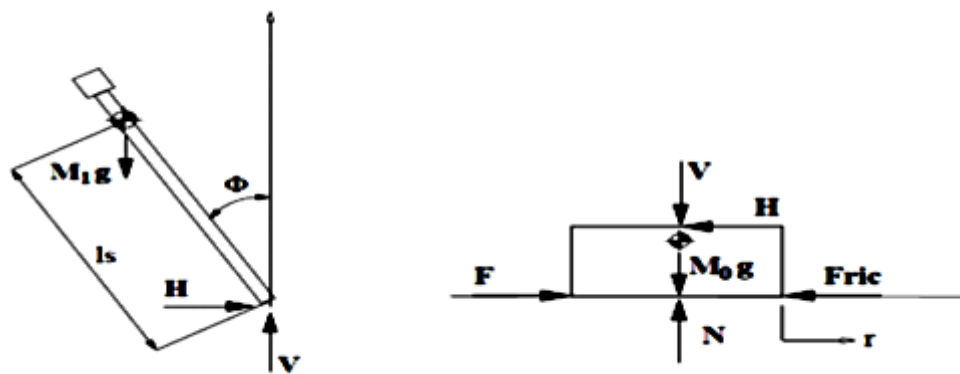


Figura A.2: Diagrama do corpo livre do sistema [12]

Somando as forças do corpo livre do carro, horizontalmente, a equação de movimento é representada pela equação A.4:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (\text{A.4})$$

Do diagrama do corpo livre do pêndulo, tem-se a equação A.5:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação A.4, na equação A.5 tem-se a equação A.6:

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (\text{A.6})$$

Somando as forças perpendiculares do pêndulo, tem-se a equação A.7:

$$Pl \sin \theta + Nl \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (\text{A.7})$$

Dos momentos do centróide do pêndulo são obtidas as equações A.8 e A.9:

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (\text{A.8})$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (\text{A.9})$$

Linearizando os termos, as equações do movimento são representadas nas equações A.10 e A.11:

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \quad (\text{A.10})$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \quad (\text{A.11})$$

A.1.1 Função de transferência

O objetivo da representação da função de transferência do sistema, em relação da entrada e saída do sistema, isto é feito mediante aplicação a transformada de Laplace as equações A.10 e A.11 linearizadas, assim as equações A.12 e A.13 representam o sistema:

$$(I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \quad (\text{A.12})$$

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (\text{A.13})$$

Da equação A.12, tem-se a equação A.14:

$$X(s) = \frac{[(I + ml^2)s^2 - mgl]\Phi(s)}{mls^2} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo a A.14, na equação A.13 tem-se a equação A.15:

$$[(M + m)s^2 + bs] \frac{[(I + ml^2)s^2 - mgl]\Phi(s)}{mls^2} - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (\text{A.15})$$

Onde o sistema geral de saída, em função da entrada, é representado pela equação A.17:

$$\begin{aligned} \Phi(s)[(M + m)(I + ml^2)s^4 - mgl(M + m)s^2 + b(I + ml^2)s^3 - mglbs - (ml)^2s^4] \\ = mls^2U(s) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \Phi(s)[(M + m)(I + ml^2)s^4 - mgl(M + m)s^2 + b(I + ml^2)s^3 - mglbs - (ml)^2s^4] \\ = mls^2U(s) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Com:

$$q = ((M + m)(I + ml^2) - (ml)^2) \quad (\text{A.18})$$

Então a função de transferência é representada pela equação A.20, onde ela mostra a saída do sistema em malha aberta para uma entrada impulso como apresenta a figura A.3.

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m l s^2}{q}}{\left[s^4 + \frac{b(I+m l^2) s^3}{q} - \frac{m g l (M+m) s^2}{q} - \frac{m g l b s}{q} \right]} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m l s}{q}}{\left[s^3 + \frac{b(I+m l^2) s^2}{q} - \frac{m g l (M+m)}{q} - \frac{m g l b}{q} \right]} \quad (\text{A.20})$$

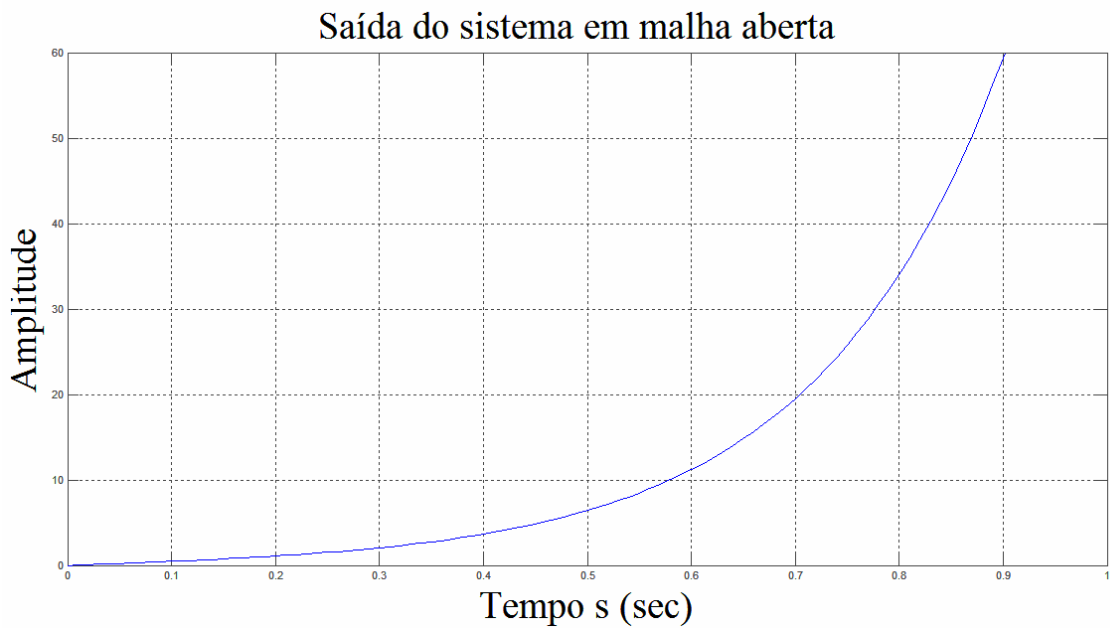


Figura A.3: Saída do sistema em malha aberta.

A.1.2 Modelo em espaço de estados

Como a representação de um sistema em espaço é dada pelas equações A.21 e A.22:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A.21})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{A.22})$$

Onde:

- \dot{x} É o estado do sistema de ordem n ;
- u é o vetor de entradas dos m elementos;
- y é o vetor de saídas dos p elementos;
- A é a matriz do sistema de $n \times n$ elementos;

- B é a matriz de entradas de $n \times m$ elementos;
- C é a matriz saídas de $p \times n$ elementos;
- D é uma matriz de $p \times m$ elementos.

A vantagem da representação de espaço de estados é fundamentada em conhecer o comportamento interno do sistema, além de isso, permite trabalhar com condições iniciais diferente de zero e facilitar o desenho e representação do sistema mediante software[12]. Das equações A.10 e A.11, substituindo a equação A.10 na equação A.11, tem-se a equação A.24:

$$\frac{(M + m)}{ml}((I + ml^2)\ddot{x} - mgl\phi) + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \quad (\text{A.23})$$

$$((M + m)(I + ml^2) - (ml)^2)\ddot{\phi} - mgl(M + m)\phi + mlb\dot{x} = ml u \quad (\text{A.24})$$

Substituindo a equação A.18 na equação A.24: tem-se a equação A.25:

$$\ddot{\phi} = \frac{mlu}{q} + \frac{mgl(M + m)\phi}{q} - \frac{mlb\dot{x}}{q} \quad (\text{A.25})$$

Fazendo o mesmo procedimento para a outra equação, substituindo a equação A.11 na equação A.10 tem-se a equação A.29:

$$\frac{(I + ml^2)}{ml}((M + m)\ddot{x}) + b\dot{x} - u - mgl\phi = ml\ddot{x} \quad (\text{A.26})$$

$$(I + ml^2)(M + m)\ddot{x} + b(I + ml^2)\dot{x} - (I + ml^2)u - (ml)^2g\phi = (ml)^2\ddot{x} \quad (\text{A.27})$$

$$((I + ml^2)(M + m) - (ml)^2)\ddot{x} = (I + ml^2)u + (ml)^2g\phi - b(I + ml^2)\dot{x} \quad (\text{A.28})$$

Então:

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)}{q} + \frac{(ml)^2g\phi}{q} - \frac{b(I + ml^2)\dot{x}}{q} \quad (\text{A.29})$$

Mediante as transformações seguintes é obtido o modelo de espaço de estados:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_1 = \dot{x} \\ x_3 &= \phi \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\phi} \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\phi} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{(ml)^2 gu}{q} + \frac{(ml)^2 gx_3}{q} - \frac{b(I+ml^2)x_2}{q} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(ml)u}{q} + \frac{mgl(M+m)x_3}{q} - \frac{mlbx_2}{q}\end{aligned}$$

Assim, a representação em espaço de estados é mostrada nas equações A.30 e A.31:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b(I+ml^2)}{q} & \frac{(ml)^2 g}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mlb}{q} & \frac{mgl(M+m)}{q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(ml)}{q} \\ 0 \\ \frac{ml}{q} \end{bmatrix} u \quad (\text{A.30})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Substituindo os seguintes parâmetros numéricos para a realização das simulações do sistema:

- $M = 0.5kg$
- $m = 0.2kg$
- $b = Ns/m$
- $l = 0.3m$
- $I = 0.006kgm^2$
- $g = 9.8m/s^2$

É obtido o sistema em espaço de estados de forma numérica o qual é representado pelas equações A.32 e A.33:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.32})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Como o sistema têm múltiplas saídas, o objetivo é controlar o ângulo do pêndulo e a posição do carro, baseados nos seguintes requerimentos do desenho [12]:

- Tempo de estabilização de x e θ menor a 5s.
- Tempo de impulso máximo menor aos 0.5s.
- Sobre sinal de θ menor aos 20 graus.

Para uma entrada degrau de $0.2m$ tem-se:



Figura A.4: Saída do sistema em função do espaço de estados para o carro e o pêndulo. [12]

Na figura A.4 , os asteriscos representam a posição do carro. A figura representada por círculos mostra o ângulo. Então pode-se analisar que para melhorar a dinâmica do sistema tem que se projetar um controle, neste caso, será projetado um controle LQR [12].

A.1.3 Regulador LQR

A vantagem de ter um sistema representado em espaço de estados é que projetar um controlador LQR resulta simples. A idéia é estabelecer uma retroalimentação completa mediante uma combinação linear das variáveis de estado. Para o caso ideal, a realidade é que o estado medido não é completo, pelo qual é necessária a utilização de um observador de ordem reduzido para fazer a estimação da parte do estado. Para este caso é assumido que todos os estados são medíveis [12], então a representação é a mostrada na figura A.5:

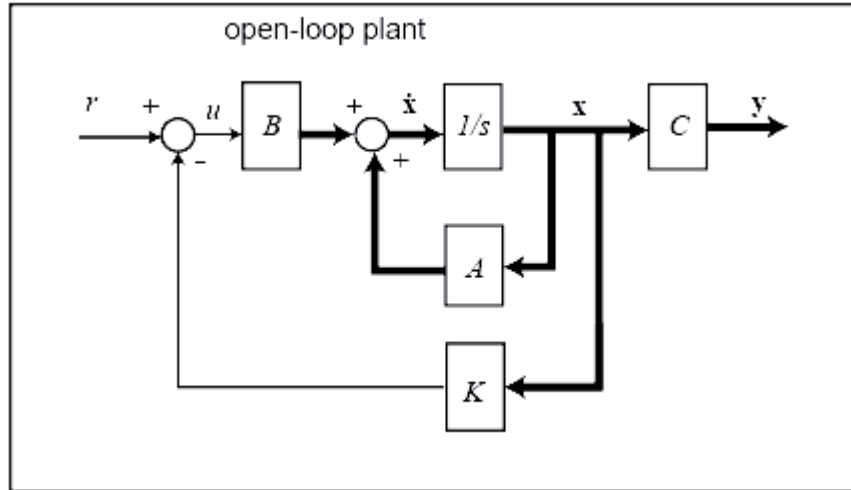


Figura A.5: Regulador LQR [13]

Na figura A.5 pode-se observar uma representação do algoritmo de controle. K é a matriz de retroalimentação para obter o sinal de controle, onde $u(k) = -Kx(k)$. Precisa-se encontrar o valor de K que determina o valor da lei de controle de realimentação o qual pode ser feito de muitas formas [12]:

- A primeira opção é inserir arbitrariamente o valor dos pólos que deseja-se que o sistema tenha, em malha fechada.
- A segunda opção é fazer um controle ótimo variável no tempo.

Para a segunda opção trata-se de minimizar a função representada pela equação A.34

$$J = \sum_{k=0}^N [x^T(k)Q(t)x(k) + u^T(k)R(x)u(x)] \quad (\text{A.34})$$

J é uma função que geralmente está associada com a energia do sistema. O controle é ótimo porque o objetivo é minimizar a energia. A expressão $X_n^T(k)QX_n(k)$ representa a energia aportada para cada estado Q é uma matriz não negativa definida. A importância de Q é que permite a eleição do peso que tem cada estado da função J . Como o estado $u(k)$ tem um só elemento, $R \geq 0$ é um elemento que indica o peso que deseja-se dar à energia associada com o sinal de controle, se por exemplo, a função tem as características representada na equação A.35:

$$X_n(k+1) = A_d X_n(k) + B_d u(k) \quad (\text{A.35})$$

Para dar solução a equação anterior, é usado métodos numéricos, obtendo a lei de controle variável no tempo como apresenta a equação A.36:

$$u(k) = K(k)X_n(k) \quad (\text{A.36})$$

Se o sistema tem coeficientes constantes, $K(k)$ é fixado durante o período de tempo e posteriormente converge para zero [12]. O valor exato de J não é relevante, só é pretendido encontrar um valor de K que permita obter o mínimo valor para J . A importância está no valor relativo que tem os elementos Q e R entre eles. Estes parâmetros são os encarregados de balancear a importância relativa da entrada e os estados em relação ao sistema que se pretende otimizar. O caso mais simples é para um valor de $R = 1$ obter um valor de Q , em relação ao valor de R [12].

A.1.4 Projeção do controlador em espaço de estados

Baseados nas condições de desenho apresentadas anteriormente, adicionando o erro em estado estacionário, que é menor ao 2%. [12]. Para projetar o regulador é utilizada a função LQR que produz um controlador ótimo, isso é feito mediante MATLAB, onde pode ser escolhidos os parâmetros R e Q . Para o caso mais simples as escolhas são: $R = 1$, onde $Q = C' * C$. O método LQR vai permitir encontrar as duas saídas, para obter uma resposta desejável, permitindo que o controle possa ser sintonizado mudando os elementos não nulos da matriz Q [12]. Para esta condição o valor da matriz Q , é mostrada na equação A.37:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$k = \begin{bmatrix} -1.0000 & -1.6567 & 18.6854 & 3.4594 \end{bmatrix}$$

Mediante a utilização de MATLAB, fazendo a representação do sistema, é obtida a saída como é mostrado na figura A.6:

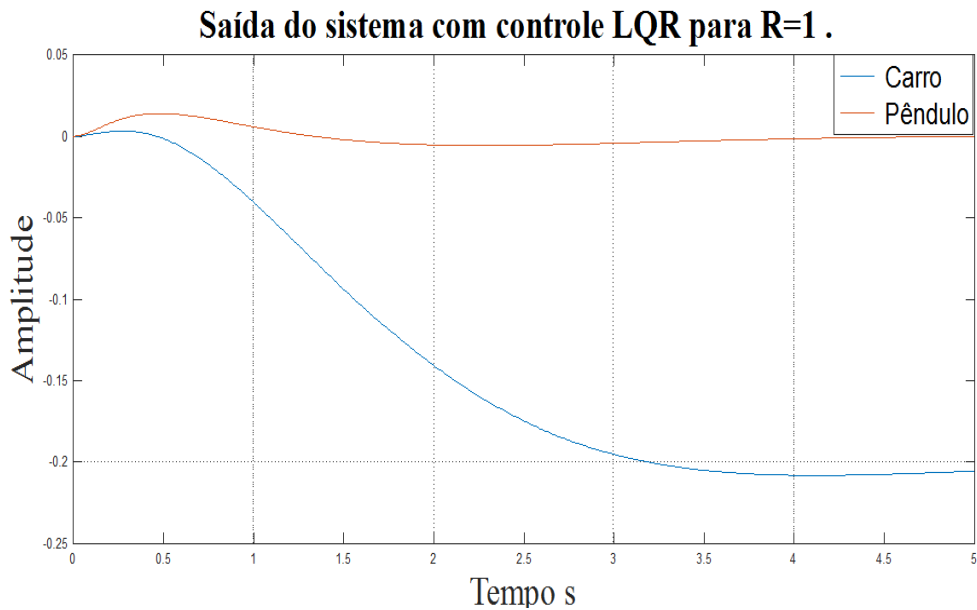


Figura A.6: Saída do sistema para o caso mais simples R=1.

Na figura A.6, a imagem representada pelos asteriscos mostra o ângulo do pêndulo em radiais, e a figura dos círculos representa a posição do carro em metros. Como pode-se observar os resultados obtidos representados pela figura A.6 não são os mais adequados, mesmo o sinal do pêndulo e do carro estando, aparentemente, certos, o problema encontra-se no tempo de estabilização que é consideravelmente grande. Adicionalmente, pode-se observar que o carro não está próximo da posição desejada, dado que está se movimentando na direção oposta [12], o que faz que no sistema, em malha fechada, não possa ser realizada a comparação da saída diretamente com a referência para obter o resultado desejado, neste caso é necessário dimensionar a entrada de referência, de modo que a saída seja igual à referência. Isso pode ser feito através da introdução de um fator de escala \bar{N} , na entrada de referência do sistema [?], como apresenta figura A.7:

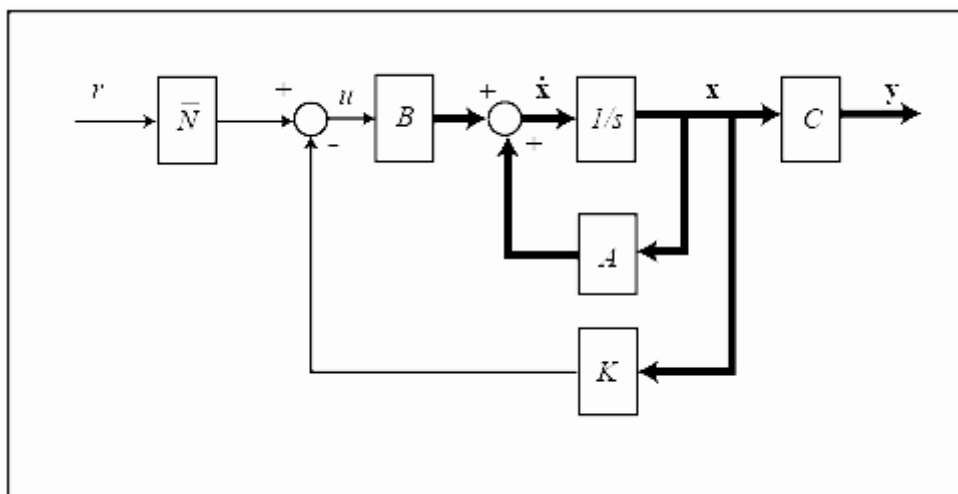


Figura A.7: Modificação da entrada de referência [?]

Agora, mudando os parâmetros da matriz Q , é melhorar com tempos de estabilização, obtendo a equação A.38:

$$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$k = \begin{bmatrix} -70.7107 & -37.8345 & 105.5298 & 20.9238 \end{bmatrix}$$

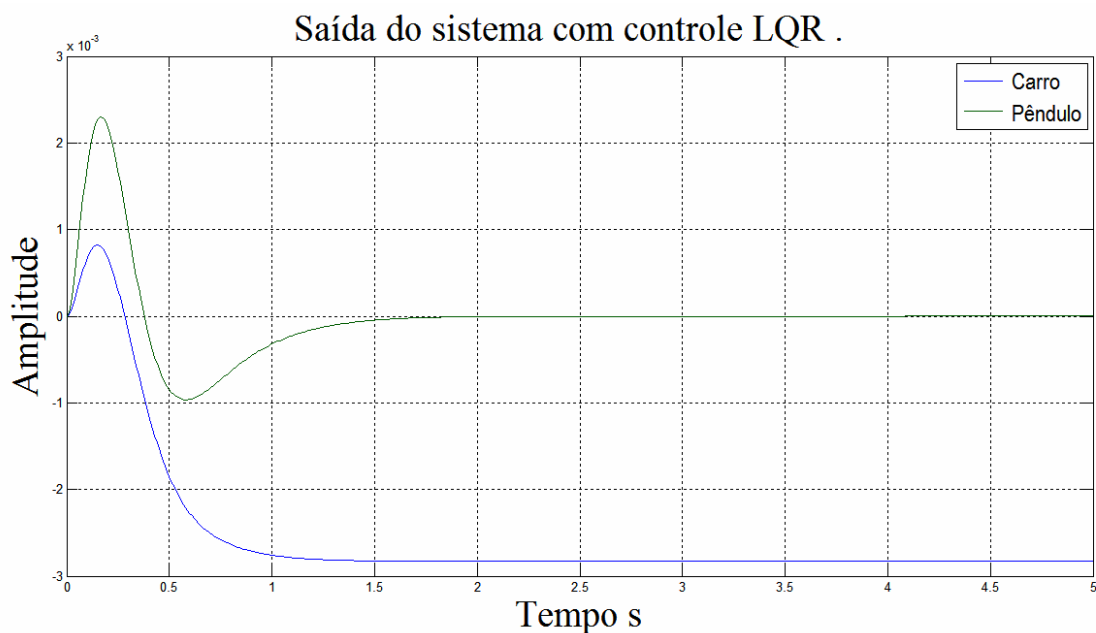


Figura A.8: Regulador LQR [?]

A figura A.8 mostra o incremento dos valores da matriz Q , onde a resposta é melhorada, mas os esforços vão ser maiores do controle projetado, assim pode-se cumprir com o objetivo desejado que é obter um tempo de estabilização menor aos 2s para a posição do carro e o ângulo do pêndulo [12].

A.1.5 Projeção do observador

Para a implementação da realimentação completa de estados, é necessário adicionar um dispositivo dinâmico, chamado observador, o estimador de estados, onde a saída é um estimador do vetor de estados, onde a ordem do observador completo tem a mesma ordem da planta [12], ou seja, é estimado todo o vetor de estados, para o sistema representado nas equações (espaço de estados), sendo A, B, C são conhecidas e a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ são medíveis, mas não o estado $x(t)$, como mostra a figura A.9 [14]:

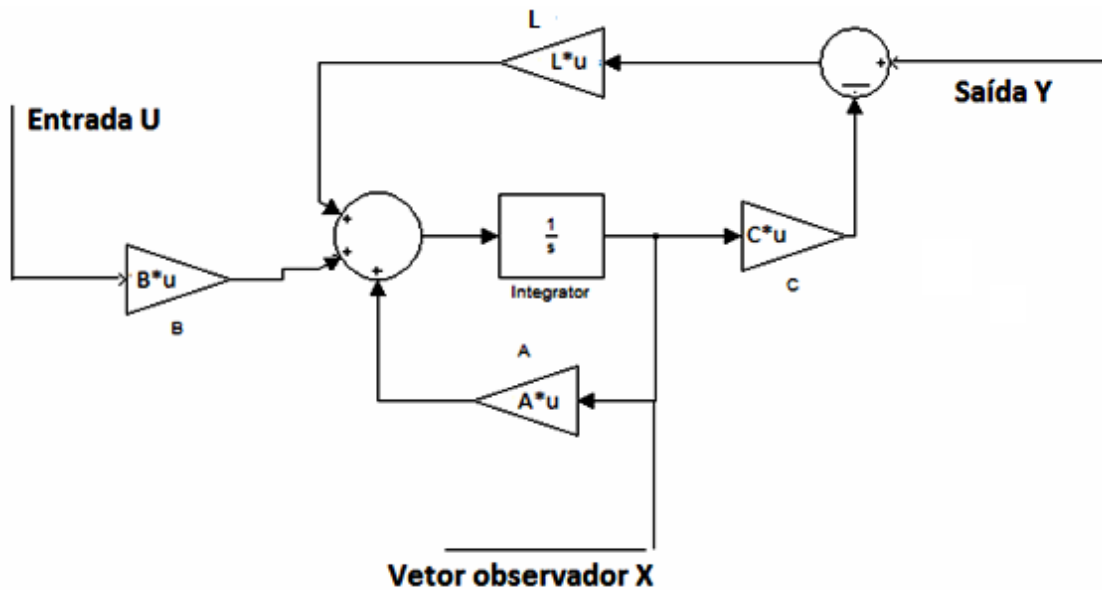


Figura A.9: Projeção do observador [14].

Assim, para iniciar o trabalho, é preciso conhecer os polos do sistema controlado. Para este exemplo, os polos mudam os parâmetros da matriz Q , como foi dito anteriormente, então eles são [12]:

$$p = -8.491 + 7.9283i - 8.491 - 7.9283i - 4.7592 + 0.839i - 4.7592 - 0.839i$$

Pode se perceber que os polos do sistema são diferentes. Deseja-se projetar um estimador que seja 10 vezes mais rápido que o menor dos polos. Como existem quatro polos, com a ajuda do MATLAB, mediante o comando *PLACE*, pode-se obter o observador. Este comando precisa de polos diferentes, então:

$$P = [-40 - 41 - 42 - 43]$$

$$L = place(A', C', P)'$$

Onde: L é o observador e P os polos inseridos ao sistema. Mediante a combinação do controlador e observador, é obtida a resposta que apresenta a figura A.10:

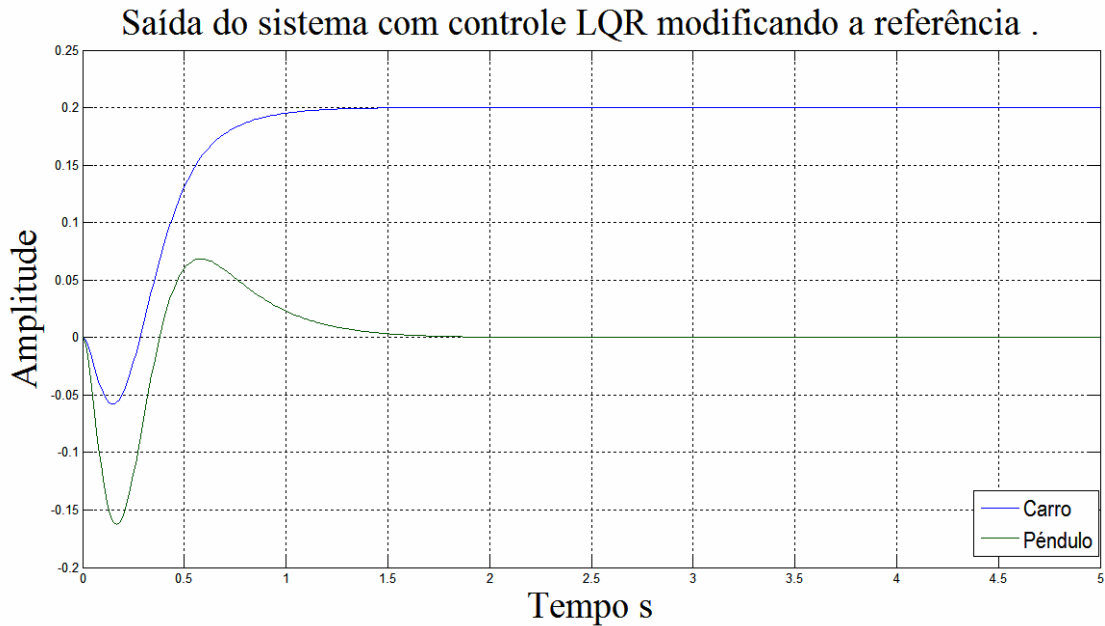


Figura A.10: Saída do sistema para o controle LQR modificando a entrada.

Na figura A.10 pode-se observar que o erro estático fica dentro dos limites esperados, obtendo a amplitude desejada mediante a utilização da matriz de pré-compensação, satisfazendo os requisitos de desenho impostos [12].

A.1.6 LQR com ação integral

Dado que o controle LQR tem o problema de não ser robusto quando o sistema tem perturbações, para dar solução ao problema e conseguir um controlador que rejeite perturbações, é necessário adicionar ao projeto LQR um efeito integral que afete o erro das variáveis do modelo. O efeito integral tem como funcionalidade integrar o erro dos estados afetados pelas perturbações [93]; as razões são:

- A lei de controle LQR $U = -kx$, responde essencialmente a um controle proporcional, dado que o controle proporcional origina efeitos do erro estacionário no caso de existir perturbações no sistema de controle [93].
- O modelo do sistema utiliza cálculo dos valores do ponto do trabalho (X, U) , onde o sistema pode apresentar desvios importantes com relação à planta (quedas de tensão em semi-condutores, desvio dos valores de componentes passivos, etc) [93]. Estes desvios geram perturbações no sistema de controle e erro estacionário [93].
- Qual quer perturbação existente na planta gera erro estacionário que o controle proporcional não pode corrigir [93].

Para o projeto *LQR* deve ser corrigidos os erros em estado permanente e estacionário, como é conhecido da teoria de controle clássico, incorporando ao sistema uma parte integral, permitindo rechaçar assintoticamente as perturbações [93], como apresenta a figura A.11 [15]:

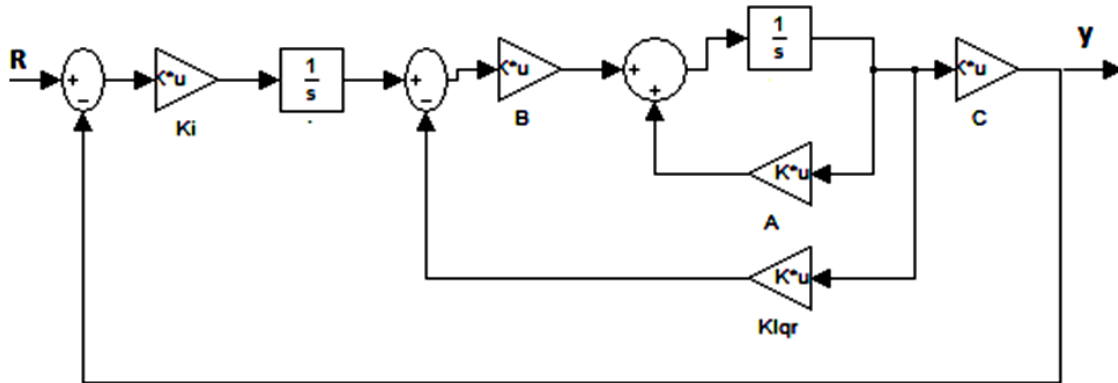


Figura A.11: Projeto LQR com efeito integral. [15]

A parte integral pode ser implementada para eliminar o erro estacionário em todas ou algumas das variáveis de estado. Por exemplo, deseja-se adicionar parte integral aos estados x_1 e x_2 . É necessário incrementar a ordem com dois novos estados Ix_1, Ix_2 que são as integrais dos estados sobre os que deseja-se adicionar ação integral, [52] [94].

$$Ix_1 = \int x_1 \Rightarrow \frac{dIx_1}{dt} = x_1 \quad (\text{A.39})$$

$$Ix_2 = \int x_2 \Rightarrow \frac{dIx_2}{dt} = x_2 \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{Ix}_1 \\ \dot{Ix}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ Ix_1 \\ Ix_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Baseados no novo sistema é necessário definir as novas matrizes Q e R da função de coste, a qual também aumenta sua dimensão. Os termos das matrizes relacionadas com os estados originais condicionam a parte proporcional do controlador [93], e o cálculo da matriz *LQR* é desenvolvido no MATLAB.

Para o exemplo proposto a matriz de controle que resultaria ao aplicar a lei de controle *LQR*, tem a forma apresentada na figura A.12:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]_{\text{total}}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ Ix_1 \\ Ix_2 \end{bmatrix}$$

Figura A.12: Lei de Controle, Ganho Proporcional e Integral.

A.2 EXEMPLO DO CONTROLE LQG

Para o pêndulo invertido, onde foi projetado um controle LQR representado pelas equações A.32 até A.34, será projetado um controle LQG , dado que o sistema requer, do modelo discreto, a discretização do modelo, que é feita em MATLAB mediante o comando $c2d$, onde é necessário um tempo de amostragem, neste caso será $T = 1/100$; o sistema discretizado é representado pelas equações A.42 e A.43 [?].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.9982 & 0.0267 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & -0.0045 & 0.3119 & 1.0016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0182 \\ 0.0002 \\ 0.0454 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.42})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

As condições de desenho para uma entrada degrau de $0.2m$, na posição desejada tem as seguintes características:

- Tempo de estabilização de x e θ menor a 5s;
- Tempo de impulso máximo menor aos 0.5s;
- Sobre sinal de θ menor aos 20 graus;
- Erro de estado estacionário menor ao 2 cento para x e θ .

A.3 CALCULO DA VARIÂNCIA DE UM SISTEMA DISCRETO

O calculo da variância do sistema é analisado relacionando o sistema com uma cadeia de Markov, Para realizar este calculo e obter uma expressão que represente a variância em função dos polos do sistema foi seguida a metodologia apresentada no trabalho de mestrado do Miguel Parra [95]. Onde se mostra detalhadamente o procedimento para um sistema de segunda ordem utilizando processos Markovianos.

Para um sistema de segunda ordem discreto, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$G(z) \approx \frac{k}{z^2 + 2\zeta\omega_n z + \omega_n^2} \approx \frac{k}{(z+a)(z+\bar{a})} \quad (\text{A.44})$$

Onde a relação de s e z esta relacionada com a equação seguinte, a qual mostra como pode ser discretizado um sistema.

$$s = \frac{z-1}{zT} \quad (\text{A.45})$$

$$G(z) = \frac{z^2 d}{f z^2 - g z + h} \quad (\text{A.46})$$

Seja o sistema de segunda ordem contínuo representado por A.47:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a s + b} \quad (\text{A.47})$$

Substituindo a equação A.45 na equação A.47 tem-se a equação A.48.

$$G(Z) = \frac{k}{\left(\frac{z-1}{zT}\right)^2 + a \left(\frac{z-1}{zT}\right) + b} = \frac{z^2(kT^2)}{z^2(bT^2 + aT + 1) - (2 + aT)z + 1} \quad (\text{A.48})$$

Onde:

- $d = kT^2$
- $f = bT^2 + aT + 1$
- $g = 2 + aT$
- $h = 1$
- $T = 0.1$
- $K = 1$
- $b = 1$
- $a = \sqrt{2}$

assim o sistema pode ser escrito como apresenta a equação A.49

$$G(z) = \frac{z^2 \frac{d}{f}}{z^2 - \frac{g}{f}z + \frac{h}{f}} = \frac{kz^2}{(z+a)(z+\bar{a})} \quad (\text{A.49})$$

Seguindo o procedimento apresentado por Miguel, esta equação discretizada pode ser representada mediante somatórias como apresenta a equação A.50 e A.51:

$$y(n) = \frac{d}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{\dot{a}^j \dot{a}^{(i-j)} X(n-i)}{X(n)} \quad (\text{A.50})$$

$$y(n) = \frac{d}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{\dot{a}}{\dot{a}}\right)^j \dot{a}^i X(n-i) \quad (\text{A.51})$$

Usando algumas propriedades dos somatórios

$$\sum_{j=0}^i (l)^j = \frac{(1-l)^{i+1}}{1-l} \quad (\text{A.52})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (l)^j = \frac{1}{1-l} \quad (\text{A.53})$$

Aplicando estas propriedades e manipulando matematicamente a equação A.51, a somatória pode ser representada pela equação A.54:

$$y(n) = \frac{d}{f} \sum_{j=0}^{\infty} (l)^j = \frac{b^i}{a - \dot{a}} \quad (\text{A.54})$$

Onde:

$$b^i = \dot{a}^{(i+1)} - \dot{\dot{a}}^{(i+1)} \quad (\text{A.55})$$

Que relaciona os polos do sistemas,então o sistema fica representado pela equação A.56:

$$y(n) = \left(\frac{1}{\dot{a} - \dot{\dot{a}}}\right) \frac{d}{f} \left[\sum_{i=0}^{\infty} b^i X(n-i) \right] \quad (\text{A.56})$$

Assim a equação anterior apresenta o sistema em função dos estados futuros em base dos estados atuais,de maneira que o calculo da variância é representada pela equação A.57

$$var[y(n)] = var \left[\left(\frac{1}{\dot{a} - \dot{\dot{a}}}\right) \frac{d}{f} \left[\sum_{i=0}^{\infty} b^i X(n-i) \right] \right] \quad (\text{A.57})$$

Como a equação A.57 apresenta propriedades de Markov, pelo fato que os instantes futuros são independentes dos estados passados, a variância pode ser calculada de maneira independente para cada um destes estados e representada como apresenta a equação A.58:

$$\text{var}[y(n)] = \left(\frac{1}{\dot{a} - \dot{\bar{a}}}\right)^2 \left(\frac{d}{f}\right)^2 \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} b^i\right)^2 \quad (\text{A.58})$$

como:

- $b^0 = \dot{a} - \dot{\bar{a}}$
- $b^1 = \dot{a}^{(2)} - \dot{\bar{a}}^{(2)}$
- $b^2 = \dot{a}^{(3)} - \dot{\bar{a}}^{(3)}$

usando a propriedade A.52 e A.53.

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^i = \frac{1}{1 - (\dot{a}^2 - \dot{\bar{a}}^2)} \quad (\text{A.59})$$

Então a variância é representada pela equação A.60:

$$\text{var}[y(n)] = \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{(a - \bar{a})^2} \sigma^2 \left(\frac{1}{1 - (\dot{a}^2 - \dot{\bar{a}}^2)}\right)^2 \quad (\text{A.60})$$

Onde esta equação é programada em MATLAB para obter o valor da variância de entrada ao filtro Butterworth.