

**Universidade de Brasília**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Departamento de Matemática**

**Choques transicionais com perfil reto nas soluções de  
problemas de Riemann**

por

Maryane da Silva Moreira Figueiredo

**2007**

Aos meus pais e à Tathiana, minha irmã.

---

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus pela orientação espiritual, por estar presente em meu coração em todos os momentos de minha vida abrindo portas para que eu alcance meus objetivos.

Agradeço a toda minha família, em especial, aos meus pais, Laércio e Conceição, que lutaram juntos para oferecer-me a melhor educação possível, pelo apoio, paciência, dedicação e amor concedidos a mim. Agradeço a minha irmã Tathiana pela amizade incondicional, por estar sempre me apoiando, pelos momentos de descontração e, também, ao meu cunhado Marco Antônio por alegrar nossa família e participar de minha vida nestes dois anos. Sem estas pessoas eu não teria como tornar possível este sonho.

Agradeço a todos que trabalham no departamento de matemática da Universidade de Brasília, a todos os professores que contribuíram com minha formação acadêmica. Agradeço, em especial, ao meu orientador Arthur Vicentini, não apenas pela orientação, mas pela disponibilidade, paciência, bons conselhos, bom humor, pelo enriquecimento matemático que me proporcionou, enfim pela verdadeira amizade que surgiu entre nós. Agradeço aos professores César Eschenazi, UFMG, e Carlos Alberto Pereira, UnB, pela participação na banca examinadora e

pelo tempo dispensado ao meu trabalho.

Agradeço a minha amiga Grazi que acompanhou cada momento de minha caminhada não só esses dois anos mas durante grande parte de minha vida. Igualmente agradeço a amiga Lígia pelos bons conselhos e risadas que me proporcionou.

Não posso deixar de agradecer aos amigos que fiz na universidade. Agradeço ao Ewerson pelo constante incentivo durante a graduação e amizade mesmo distante. E, é claro, agradeço a Bel, a Lu, ao Magno, ao Miguel e ao Léo pelas horas de estudo, por caminharmos juntos, por superarmos etapas juntos, pelo apoio quando desanimávamos, pelas risadas e choros. Também agradeço aos colegas Vagner, Flávia, Karise, Manu, Jorginho, Gi, Tertu dentre outros que também participaram deste processo. Enfim, agradeço a todos que de certa forma contribuíram para que eu concluísse este trabalho. Muito obrigada.

---

# Resumo

Problemas de Riemann modelam escoamentos de fluidos trifásicos em meios porosos. Estudamos as noções básicas de alguns tipos de problemas de Riemann e de suas soluções, utilizando o critério de entropia de viscosidade.

Obtemos uma forma normal para o sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação [14] e examinamos o papel dos choques transicionais nas soluções de Riemann, verificando em que circunstâncias estes choques possuem perfil reto [9].

Por fim, verificamos que o conjunto de soluções está associado a uma variedade que se assemelha a um helicóide, para um exemplo de problema em que a matriz de viscosidade é a identidade [1]. Em seguida, modificamos uma das entradas nulas da matriz de viscosidade identidade e comprovamos que o helicóide de soluções ainda existe. A maior parte desta dissertação está baseada em [1], [9] and [14].

---

**Palavras-chaves:** problema de Riemann, critério de entropia, choques transicionais, helicóide.

---

# Abstract

Riemann Problems model three phase flow in porous media. We study the basic notions of some type of Riemann problems and their solutions, using the viscous profile criterium.

We obtain a normal form to the  $2 \times 2$  system of conservation laws [14] and we examine the role of the transicional shocks in Riemann solutions checking in which circumstances these shocks posses straight line profiles [9].

Finally, we verify that the set of solutions is associated to a manifold that looks like an helicoid, for an example in which the viscosity matrix is the identity [1]. Next, we modify one of the zero entries of the identity viscosity matrix and we confirm that the helicoid of solutions still exists. The main part of this dissertation is based on [1], [9] and [14].

---

**Key words:** Riemann problem, profile criterium, transicional shocks, helicoid.

---

# SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Modelagem e aplicações</b>                           | <b>4</b>  |
| 1.1 Conservação da massa . . . . .                        | 4         |
| 1.2 Modelo de fluido trifásico . . . . .                  | 6         |
| <b>2 O problema de Riemann</b>                            | <b>11</b> |
| 2.1 Teoria para uma única lei de conservação . . . . .    | 11        |
| 2.2 Soluções Fracas . . . . .                             | 19        |
| 2.3 Noções básicas sobre o problema de Riemann . . . . .  | 21        |
| 2.4 Critérios de entropia . . . . .                       | 25        |
| 2.5 Classificação dos pontos críticos . . . . .           | 28        |
| <b>3 A forma normal do sistema de leis de conservação</b> | <b>30</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.1      | Alguns resultados para modelos quadráticos . . . . .  | 30        |
| 3.2      | A forma normal . . . . .  | 36        |
| <b>4</b> | <b>Ondas transicionais</b>  | <b>40</b> |
| 4.1      | Modelos quadráticos . . . . .   | 41        |
| 4.2      | Órbitas retas . . . . .   | 44        |
| 4.3      | Região transicional e solução do problema de Riemann contendo choques transicionais . . . . . | 50        |
| <b>5</b> | <b>O helicóide de soluções</b>  | <b>53</b> |
| 5.1      | O modelo . . . . .  | 53        |
| 5.2      | Classes de soluções . . . . .   | 57        |
| 5.3      | O helicóide . . . . .   | 58        |
| 5.4      | Perturbação da matriz de viscosidade . . . . .  | 60        |



---

# Introdução

Neste trabalho, consideraremos *problemas de Riemann*, que é um caso particular de um problema de Cauchy, para o sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0 ,$$

onde  $U = U(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $-\infty < x < \infty$  e  $t > 0$ ; e sujeito à condição inicial

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{para } x < 0 \\ U_R, & \text{para } x > 0 \end{cases} ,$$

onde,  $U_L, U_R \in \mathbb{R}^2$ , são constantes.

No decorrer do trabalho, faremos um estudo de sistemas com comportamento hiperbólico e, também, consideraremos um exemplo de problema de Riemann para um sistema de leis de conservação com comportamento misto, sendo elíptico para certos estados e hiperbólico para outros. Tais sistemas têm origem no escoamento de fluidos trifásicos em meios porosos, como ocorre na recuperação de petróleo.

Começaremos o trabalho descrevendo a origem das equações conhecidas como leis de conservação e um pouco das ferramentas matemáticas usadas para estudá-las. Em seguida, apresentaremos a teoria da solução para um problema de Riemann. Essa solução se compõe de

soluções contínuas ou clássicas (rarefações) e descontínuas (choques). Os choques satisfazem a equação

$$F(U_R) - F(U_L) - s(U_R - U_L) = 0 ,$$

onde  $s$  é a velocidade de propagação da descontinuidade, conhecida como *relação de Rankine-Hugoniot*. Com  $U_L$  fixo, esta relação tem como solução a equação de uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , chamada *curva de Hugoniot*.

Por surgir multiplicidade de soluções quando utiliza-se choques para compor as soluções é que consideramos restrições adicionais chamadas *critérios de entropia*, que objetiva selecionar de modo único as soluções fisicamente relevantes. O primeiro critério introduzido por Lax, em [11], para leis de conservação estritamente hiperbólicas e genuinamente não-lineares, conhecido por *critério de Lax*, torna-se insuficiente para modelos em que falha a hiperbolicidade estrita. Surge então, o *critério de viscosidade*, introduzido por Gel'Fand em [6] e Courant e Friedrichs em [5], que considera admissíveis, os choques que são limites de ondas viajantes de um sistema associado parabólico de equações diferenciais parciais.

Em [14], Schaeffer e Shearer mostraram como transformar um sistema de duas leis de conservação com função fluxo  $F$  quadrática em um sistema com função fluxo com apenas dois parâmetros livres. Para isto, eles demonstraram, entre outras coisas, um teorema que afirma que existe um polinômio cúbico da forma  $C(x, y) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2y + xy^2$ , tal que  $C(x, y)$  é um potencial da função de fluxo. Com isso, verificou-se, fazendo uma análise em torno do ponto umbílico isolado (isto é, um ponto onde os autovalores da matriz jacobiana de  $F$  são iguais, com  $DF(U) = \lambda I$ ), que podemos obter uma forma normal para o sistema de leis de conservação. Esta forma é útil para a investigação do comportamento local da solução de um problema de Riemann. No Capítulo 3 desta dissertação, daremos uma idéia do trabalho desenvolvido por Schaeffer e Shearer em [14]. Com este modelo, estudaremos o papel das ondas transicionais na resolução de problemas de Riemann, no Capítulo 4.

Soluções de problemas de Riemann contêm choques que podem ser associados a sistemas dinâmicos. Com o estudo do sistema dinâmico associado, sob o critério de perfis vis-

cosos, veremos, ainda no Capítulo 4, que as órbitas do sistema dinâmico ligando os estados  $U_L$  e  $U_R$  são segmentos de reta. Parametrizaremos a Hugoniot de  $U_0$  por coordenadas polares centrada em  $U_0$  por um ângulo  $\varphi$ . Escreveremos as equações da Hugoniot  $H_{u_0, v_0}(u, v)$  e da velocidade de propagação da descontinuidade  $s$  nessas coordenadas e a partir daí faremos uma análise de quando uma reta entre dois estados  $U_L$  e  $U_R$  é uma órbita para o sistema autônomo

$$-s[U - U_-] + F(U) - F(U_-) = D(U)\dot{U} ,$$

onde  $D(U)$  é a *matriz de viscosidade*.

Independente da classificação do ângulo  $\varphi$ , sob certas hipóteses, qualquer estado  $U_0$  é ligado a algum  $U \neq U_0$  por um perfil reto. Surge então a *região transicional* para o ângulo  $\varphi$ , que é o conjunto de estados  $U_0$  para os quais temos choques transicionais.

No último capítulo deste trabalho, descreveremos um comportamento topológico para soluções de Riemann para o sistema parabólico de um modelo particular de um sistema de leis de conservação. Azevedo, em [1], mostrou que o conjunto de soluções para um modelo particular cuja matriz de viscosidade é a identidade, pode ser ilustrado por uma variedade que se assemelha a um helicóide. Para isso, foi necessário agrupar soluções em *classes* que mudam de acordo com o número de choques transicionais contidas em cada uma.

Por fim, ainda no Capítulo 5, faremos uma pequena perturbação na matriz de viscosidade e, com auxílio dos programas *Maple* e *Riemann Solver* [8] e a teoria apresentada nos capítulos anteriores, mostraremos que ainda existe uma variedade de soluções que se assemelha a um helicóide para esse novo modelo.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Modelagem e aplicações

As equações básicas que descrevem fluidos mecânicos são derivadas das leis de conservação da massa, momento e energia. Supondo os fluidos perfeitos, obteremos as formas integral e diferencial da Lei de conservação da massa. Essas equações juntamente com a forma diferencial e integral das leis de conservação do momento e conservação de energia, ajudam a descrever o movimento de fluidos em uma região bi ou tridimensional, [4]. Neste capítulo, discutiremos apenas a conservação de massa usando a formulação Euleriana para especificar o movimento de um fluido em uma dada região do espaço.

---

### 1.1 Conservação da massa

---

Dados  $D \subset \mathbb{R}^3$  uma região delimitada por uma superfície fechada  $S$ ;  $L, M, N$  funções contínuas com derivadas primeiras contínuas em  $\overline{D}$  e  $\vec{F}$  um campo vetorial  $\vec{F} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ .

Do Teorema da Divergência temos

$$\iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário exterior à superfície  $S = \partial D$ .

A integral de superfície  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , representa o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  através da superfície  $S$  na direção  $\vec{n}$  e o vetor  $\vec{F}$  é visto como a “medida do fluir”.

Imaginando uma partícula de poeira suspensa no fluido, ela descreve uma trajetória bem-definida. Denotando por  $\vec{v}(\bar{x}, t)$  a velocidade da partícula em um ponto  $\bar{x} = (x, y, z)$  de  $D$  no tempo  $t$ , então, para cada tempo fixo,  $\vec{v}$  é um campo vetorial em  $D$ . E, para cada tempo,  $\rho(\bar{x}, t)$ , que é a densidade de massa do fluido, está bem-definida. Pelo teorema da divergência e, tomando  $\vec{F} = \rho\vec{v}$ , tem-se

$$\iiint_D \operatorname{div}(\rho\vec{v}) dV = \iint_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dS,$$

onde a integral do lado direito representa o fluxo do fluido.

A quantidade total de massa presente em uma região  $D$ , que não depende de  $t$ , é dada por  $\iiint_D \rho dV$  e a variação de massa em  $D$ , por unidade de tempo, é dada pela derivada dessa integral em relação ao tempo, ou seja,

$$\frac{-d}{dt} \iiint_D \rho dV = - \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Admitindo-se que não existem sumidouros de massa e nem tampouco criação de massa, podemos escrever

$$- \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iint_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \operatorname{div}(\rho\vec{v}) dV$$

ou,

$$\iiint_D \left[ \operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0, \quad (1.1)$$

que é a forma integral da Lei de Conservação da massa. Como a equação (1.1) vale para qualquer região  $D$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0,$$

que é a forma diferencial da Lei de Conservação da massa.

Uma forma mais geral de leis de conservação é

$$u_t + \operatorname{div} f = 0, \tag{1.2}$$

onde  $u$  representa a densidade de uma entidade física e o vetor  $f$  descreve seu fluxo em uma certa região.

Neste trabalho vamos estudar sistemas de leis de conservação da forma

$$u_t^j + \operatorname{div} f^j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde cada  $f^j$  é uma função de todos  $u^1, \dots, u^n$ , que descreve o escoamento de fluidos trifásicos em meios porosos. Estudaremos problemas de Cauchy com dados iniciais constantes, exceto em pontos de descontinuidade, para sistemas de leis de conservação. Tais problemas de valor inicial são conhecidos como *problemas de Riemann*.

---

## 1.2 Modelo de fluido trifásico

---

Consideraremos o fluxo unidimensional horizontal de um fluido trifásico imiscível, onde as fases do fluido são água ( $w$ ), óleo ( $o$ ) e gás ( $g$ ), em um meio poroso. Desconsideraremos efeitos gravitacional, térmico e de compressibilidade. Assumiremos ainda que todo o espaço é preenchido pelo fluido e que não existem fontes ou sumidouros dentro do meio. Denotando por  $\varphi$  a porosidade do meio,  $s_i$  a saturação,  $\rho_i$  a densidade,  $\mu_i$  a viscosidade e  $v_i$  a velocidade da partícula na fase  $i$ , temos as equações da conservação de massa de água, óleo e gás:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi s_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_i) = 0, \tag{1.3}$$

para  $i = w, o, g$ , respectivamente.

A porosidade  $\varphi$  e a permeabilidade absoluta, denotada por  $K$ , estão associadas as rochas e consideraremos constantes. Também consideraremos constantes as densidades e viscosidades das fases.

Darcy [13] e [15], realizou um experimento unidimensional para fluidos monofásicos em meios porosos e deduziu uma relação válida para tais escoamentos, conhecida como *lei de Darcy*. Tentou-se utilizar esta lei para a mistura de fases imiscíveis, mas verificou-se que para escoamentos multifásicos essa lei só é válida para cada uma das fases onde, porém, a permeabilidade de cada fase depende da saturação do meio poroso relativo à fase em questão, ou seja, usaremos a seguinte forma da lei de Darcy:

$$v_i = -K \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} p_i, \quad (1.4)$$

onde  $p_i$  denota a pressão na fase  $i$  e  $\lambda_i = k_i/\mu_i \geq 0$  a mobilidade da fase  $i$ , com  $k_i$  representando a permeabilidade relativa da fase  $i$ .

Chamamos de *pressão capilar* a diferença de pressão entre duas fases quaisquer  $i$  e  $j$  ( $i \neq j$ ),  $p_{ij} = p_i - p_j$ , medida experimentalmente como função das saturações. Com isso e definindo a mobilidade total  $\lambda = \sum_j \lambda_j$ , as funções fracionais de fluxo  $f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$  e a velocidade total  $v = \sum_j v_j$ , temos, de (1.4),

$$\begin{aligned} \sum_j v_j &= -K \sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \\ f_i v &= -K f_i \sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \\ &= -K \frac{\lambda_i}{\lambda} \sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \\ &= -K \lambda_i \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $v_i$  da expressão obtida anteriormente temos

$$\begin{aligned}
 f_i v &= v_i - v_i - K\lambda_i \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \\
 &= v_i + K\lambda_i \frac{\partial}{\partial x} p_i - K\lambda_i \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \\
 &= v_i - K\lambda_i \left\{ \left( \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \right) - \frac{\partial}{\partial x} p_i \right\} \\
 &= v_i - K\lambda_i \left\{ \left( \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x} p_j \right) - \left( \sum_j f_j \right) \frac{\partial}{\partial x} p_i \right\},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$v_i = v f_i + K\lambda_i \sum_{j \neq i} f_j \frac{\partial}{\partial x} p_{ji}. \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.3) sem o termo da densidade, já que este é constante, as equações do fluxo são:

- $i = w$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi s_w) + \frac{\partial}{\partial x}(v f_w) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K\lambda_w f_o \frac{\partial}{\partial x} p_{ow} + K\lambda_w f_g \frac{\partial}{\partial x} p_{gw} \right) = 0, \quad (1.6)$$

- $i = o$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi s_o) + \frac{\partial}{\partial x}(v f_o) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K\lambda_o f_w \frac{\partial}{\partial x} p_{wo} + K\lambda_o f_g \frac{\partial}{\partial x} p_{go} \right) = 0, \quad (1.7)$$

- $i = g$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi s_g) + \frac{\partial}{\partial x}(v f_g) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K\lambda_g f_w \frac{\partial}{\partial x} p_{wg} + K\lambda_g f_o \frac{\partial}{\partial x} p_{og} \right) = 0. \quad (1.8)$$



Ainda temos que a velocidade total  $v$  depende apenas de  $t$ , pois dividindo (1.3) por  $\rho_i$  e somando em  $i$ , encontramos  $\frac{\partial}{\partial x}v = 0$ . É possível também mudar as variáveis, desde que  $v$  seja diferente de zero, de forma que podemos remover  $v$ ,  $K$  e  $\varphi$  do sistema (1.6) - (1.7) - (1.8).

Considerando  $u_1$  e  $u_2$  duas saturações quaisquer, como  $\sum_i s_i = 1$ ,  $i = w, o, g$ , então podemos escrever  $u_3 = 1 - u_1 - u_2$ . E, ainda podemos escrever,  $p_{12} = p_{13} + p_{32}$ , onde  $p_{kl} = p_k - p_l$ ,  $k, l = 1, 2$  ou  $3$  ( $k \neq l$ ). Desta forma, este sistema de três componentes pode ser convenientemente escrito como um sistema de duas componentes apenas.

Se tomarmos dois eixos coordenados centrado em  $(0, 0)$ , com um deles sendo  $u_1$  e o outro  $u_2$ , a reta ligando os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  dos eixos, representa automaticamente  $u_3$  e forma um triângulo. Isto justifica chamarmos de *triângulo das saturações*, denotado por  $\Delta$ , a representação das saturações escolhidas para descrever o fluido.

Com essas modificações temos o novo sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u_1 + \frac{\partial}{\partial x}f_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1 \left[ -f_2 \frac{\partial}{\partial x}p_{23} + (1 - f_1) \frac{\partial}{\partial x}p_{13} \right] \right) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_2 + \frac{\partial}{\partial x}f_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2 \left[ -f_1 \frac{\partial}{\partial x}p_{13} + (1 - f_2) \frac{\partial}{\partial x}p_{23} \right] \right) \end{cases} \quad (1.9)$$

ou,

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \frac{\partial}{\partial x}F(U) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(U) \frac{\partial}{\partial x}U \right], \quad (1.10)$$

onde  $D(U) = Q(U)P'(U)$ , com

$$Q(U) = \begin{pmatrix} \lambda_1(1 - f_1) & -\lambda_1 f_2 \\ -\lambda_2 f_1 & \lambda_2(1 - f_2) \end{pmatrix}$$

e

$$P'(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{13}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{13}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_{23}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{23}}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

As matrizes  $D(U)$  e  $Q(U)$  são chamadas *matriz de difusão* e *matriz balanço*, respectivamente. Já a matriz  $P'(U)$  é a *Jacobiana da pressão capilar*.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

### O problema de Riemann

Neste capítulo, discutiremos a solução de um problema de Riemann para um sistema escalar de leis de conservação, introduziremos as notações a serem utilizadas em capítulos posteriores e apresentaremos alguns fatos básicos sobre o problema de Riemann para sistemas  $2 \times 2$  de leis de conservação. Discutiremos, também, a construção da solução do problema de Riemann e algumas características do mesmo. Grande parte deste capítulo foi baseada em [10].

---

#### 2.1 Teoria para uma única lei de conservação

---

Nesta seção vamos descrever a solução de um problema de Riemann não-linear (1.2) e unidimensional para uma única lei de conservação. A quantidade  $u$  varia apenas em uma dimensão espacial e em relação ao tempo, isto é, vamos considerar (1.2) na forma

$$u_t + f_x = 0, \tag{2.1}$$

onde  $f$  é uma função não-linear de  $u$ .

Denotando-se  $\frac{df}{du} = a(u)$ , podemos reescrever a equação acima como

$$u_t + a(u) u_x = 0. \quad (2.2)$$

As soluções de (2.2) são obtidas pelo método das características [10], o qual passamos a descrever.

Denotando  $\gamma(t) = u(x(t), t)$  temos  $\gamma'(t) = u_x \dot{x} + u_t$ . Se  $\dot{x} = a(u)$ , então (2.2) implica que  $\gamma'(t) = 0$ , ou seja, que  $\gamma(t) = u(x(t), t) = \text{constante}$ . Logo,  $u$  é constante ao longo de trajetórias  $x = x(t)$  que se propagam com velocidade  $a(u)$ , a qual é chamada de *velocidade do sinal* (ou *velocidade característica*). Como  $\dot{x} = a(u)$ , vemos que tais trajetórias são retas, ou seja,  $u$  é constante sobre as retas.

Essas trajetórias são chamadas *curvas características* da equação diferencial parcial (2.2) e a análise feita acima mostra que os sinais se propagam ao longo de características.

Desse modo a construção geométrica da solução de um problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + a(u) u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad (2.3)$$

pode ser obtida desenhando retas passando por pontos  $y$  do eixo- $x$  com inclinação  $\frac{1}{a(u_0(y))}$ .

Usando o teorema da função implícita, pode-se mostrar que, se  $u_0$  é uma função de classe  $C^1$ , essas retas cobrem uma vizinhança do eixo- $x$  e  $u(x, t)$  fica unicamente determinada perto do eixo- $x$ , já que o valor de  $u$  ao longo da reta saindo de um ponto  $y$  do eixo- $x$  é  $u_0(y)$ .

Usando o que foi feito acima, podemos obter uma forma da solução de (2.3). Para tanto, observe a Figura 2.1, onde  $(x, t)$  é um ponto e  $y$  a intersecção da característica por  $(x, t)$  com o

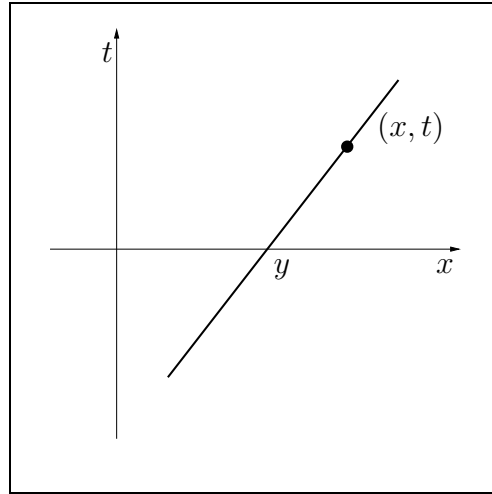


Figura 2.1: Reta característica.

eixo- $x$ . Assim,  $u = u(x, t)$  satisfaz

$$\begin{cases} u = u_0(y) \\ t = \frac{1}{a(u_0(y))} (x - y) \iff y = x - ta(u) \end{cases} \quad (2.4)$$

Assumindo  $u_0$  diferenciável e usando o teorema da função implícita, obtemos  $u$ , solução de (2.4), como função diferenciável de  $x$  e  $t$ , para  $t$  suficientemente pequeno. Como  $u = u_0(x - ta(u))$ , tem-se

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + u'_0 a_u t}, \quad u_t = \frac{-u'_0 a}{1 + u'_0 a_u t}. \quad (2.5)$$

Assim, pode-se ver, substituindo os resultados obtidos imediatamente acima em (2.2), que  $u$  como definida em (2.4) satisfaz (2.2).

Assuma, agora, que a equação  $u_t + a(u)u_x = 0$  é *genuinamente não-linear*, ou seja,  $a_u \neq 0$  para todo  $u$ . Sem perda de generalidade, suponha  $a_u > 0$ . Assim, se  $u'_0 \geq 0, \forall x$ , então (2.5) são funções limitadas para todo  $t > 0$ . Sendo  $\theta = \frac{1}{a(u_0(y))}$ , então a função da inclinação  $\theta$ , ou seja,  $\theta' = \frac{-1}{[a(u_0(y))]^2} a_u u'_0$  é decrescente quando  $u'_0 \geq 0$ , isto é, quando  $u_0(x)$  é uma função crescente de  $x$ . Assim, as características cobrem o semi-plano  $t > 0$ .

Agora, se  $u'_0 < 0$  em algum ponto, tanto  $u_t$  como  $u_x$  tendem a  $\infty$  quando  $(1 + u'_0 a_u(u_0) t)$  se aproxima de 0 e, além disso, existem  $y_1, y_2$  tais que  $y_1 < y_2$ ,  $u_1 = u_0(y_1) > u_0(y_2) = u_2$  e  $a_1 = a(u_1) > a(u_2) = a_2$ , pois  $a_u > 0$ . Assim, as características saindo de  $y_1$  e  $y_2$  se interceptam em  $t = \frac{y_2 - y_1}{a_1 - a_2}$ .

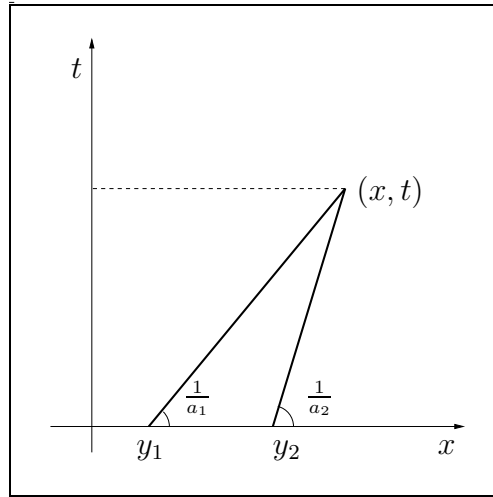


Figura 2.2: Intersecção entre características em  $t = \frac{y_2 - y_1}{a_1 - a_2}$ .

No ponto de intersecção na Figura 2.2,  $u = u_0(y_1) = u_1$  e, também,  $u = u_0(y_2) = u_2$ , que é uma impossibilidade, pois  $u_1 > u_2$ . Logo, se o valor inicial  $u_0$  não for uma função crescente de  $x$ , tanto a forma geométrica quanto a analítica não garantem existência de  $u(x, t)$  contínua,  $\forall t > 0$ , com valor inicial  $u_0$  que seja solução de (2.2).

Se voltarmos o estudo a experimentos com fluidos compressíveis poderemos responder o que acontece depois que a solução contínua pára de existir. Esses experimentos mostram claramente o aparecimento de soluções descontínuas. Vejamos o caso mais simples, o qual satisfaz  $u_t + f_x = 0$ , em cada lado de uma curva suave  $x = y(t)$  através da qual  $u$  é descontínua.

Denotamos por  $u_l$  e  $u_r$  os valores de  $u$  à esquerda e à direita de  $x = y(t)$ , respectivamente. Escolhemos  $a$  e  $b$  tal que a curva intersecte o intervalo  $a \leq x \leq b$  em  $t$  (Figura 2.3).

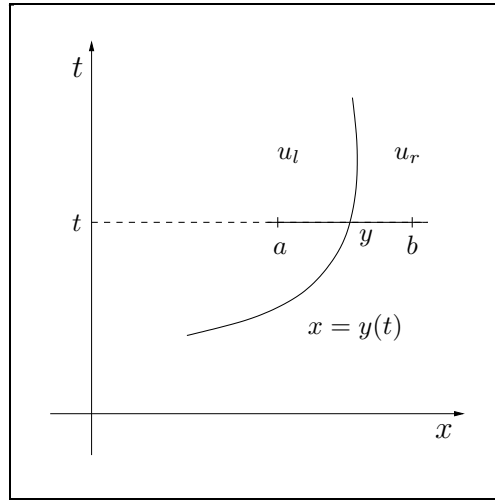


Figura 2.3: Descontinuidade.

Denotamos por  $I(t)$  a quantidade

$$I(t) = \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^{y(t)} u(x, t) dx + \int_{y(t)}^b u(x, t) dx ,$$

chamamos de  $F(x, t)$  a função primitiva de  $u(x, t)$ . Então,

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_a^{y(t)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx + \int_{y(t)}^b \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx \\ &= F(y(t), t) - F(a, t) + F(b, t) - F(y(t), t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= F_x(y(t), t) \dot{y} + F_t(y(t), t) - F_t(a, t) \\ &\quad + F_t(b, t) - F_x(y(t), t) \dot{y} - F_t(y(t), t) \\ &= u_l \dot{y} + \int_a^{y(t)} u_t(x, t) dx + \int_{y(t)}^b u_t(x, t) dx - u_r \dot{y} . \end{aligned}$$

Como  $u_t + f_x = 0$ , temos  $u_t = -f_x$  e substituindo:

$$\frac{dI(t)}{dt} = u_l \dot{y} - u_r \dot{y} - f(u_l) + f(u(a)) - f(u(b)) + f(u_r) .$$

Denotando por  $\dot{y} = s$  a velocidade de propagação da descontinuidade, temos

$$\frac{dI(t)}{dt} = f(u(a)) - f(u_l) + u_l s - f(u(b)) + f(u_r) - u_r s.$$

Combinando este resultado com a lei de conservação, onde

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_a^b u_t dx = -f \Big|_a^b = f(u(a)) - f(u(b)),$$

definimos a condição-salto

$$-f(u_l) + u_l s + f(u_r) - u_r s = 0$$

$$s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)$$

$$s[u] = [f], \tag{2.6}$$

em que  $[u]$  e  $[f]$  denotam o salto de  $u$  e  $f$  através de  $y$ . Essa relação é também conhecida como *condição de Rankine-Hugoniot*.

Chamamos as descontinuidades do tipo salto que se propagam com velocidade “ $s$ ” e separam dois estados  $u_l$  e  $u_r$  por *choque*.

Vamos exemplificar a resolução de um problema de Cauchy onde descontinuidades aparecem.

**Exemplo 2.1.** Tome  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  e

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

Observe que para  $t \leq 1$  a solução geométrica, Figura 2.4, é única.



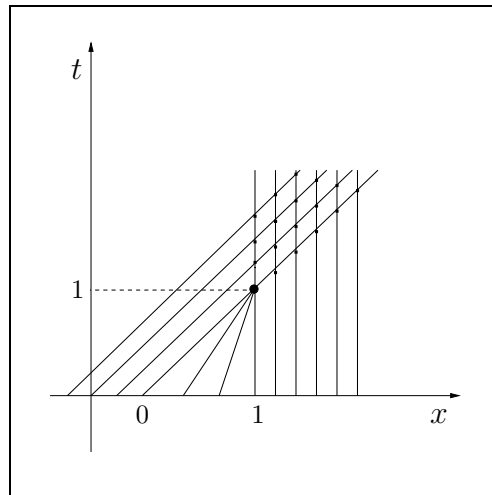


Figura 2.4: Solução geométrica com multiplicidade.

O mesmo não acontece para  $t \geq 1$ , onde definimos

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < \frac{(1+t)}{2} \\ 0, & \text{se } x > \frac{(1+t)}{2} \end{cases} .$$

A descontinuidade separa o estado à esquerda  $u_l = 1$  do estado à direita  $u_r = 0$  e satisfazendo a condição-salto (2.6) para a  $f(u)$  deste exemplo, temos

$$\begin{aligned} s[u] &= [f] \\ s &= \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \\ s &= \frac{-1/2}{-1} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Temos outro exemplo onde introduzindo soluções generalizadas é possível resolver um problema de Cauchy que não poderia ser solucionado com a classe de soluções contínuas. Porém, deve-se tomar cuidado para que a classe de soluções não seja tão grande ao ponto que exista multiplicidade de soluções generalizadas para o mesmo problema.

**Exemplo 2.2.** Tome  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  e

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Observe na Figura 2.5 a solução geométrica.

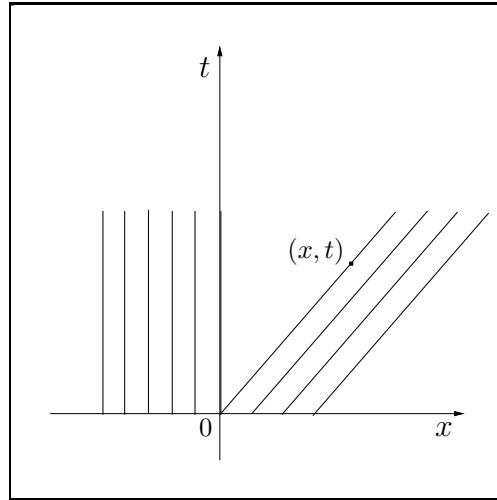


Figura 2.5: Solução geométrica.

Como essa solução não está determinada na cunha  $0 < x < t$ , definimos então,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ 1, & \text{se } x > \frac{t}{2} \end{cases}, \quad (2.7)$$

onde a velocidade de propagação da descontinuidade será

$$s = \frac{[f]}{[u]} = \frac{1/2 - 0}{1} = \frac{1}{2}.$$

Porém,

$$u(x, t) = \frac{x}{t}, \quad \text{se } 0 \leq x \leq t, \quad (2.8)$$

também satisfaz  $u_t + a(u)u_x = 0$  e, além disso, preenche o espaço vazio da solução geométrica acima. Mas devemos rejeitar a solução (2.7) acima por não satisfazer o seguinte critério introduzido por Lax, [11]:

as características começando em qualquer lado da curva de descontinuidade, quando estendidas na direção positiva de  $t$ , cruzam a linha de descontinuidade. Este é o caso se

$$a(u_l) > s > a(u_r). \quad (2.9)$$

A relação (2.9) é chamada de condição de entropia de Lax.

Quando  $a(u) > 0$ , tem-se  $u_l > u_r$ , que não acontece para a solução (2.7).

A condição de entropia deixa cada ponto da descontinuidade ser alcançado por características em ambos os lados, de tal forma que o choque é influenciado pelos valores iniciais da solução.

---

## 2.2 Soluções Fracas

---

Esta seção trata do conceito de solução generalizada para leis de conservação.

**Definição 2.1.** Uma função limitada e mensurável  $u(x, t)$  é chamada solução fraca do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

com valor inicial  $u_0$  limitado e mensurável, quando vale a relação

$$\iint_{t \geq 0} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0, \quad (2.11)$$

para toda  $\phi \in C_0^1$  (conjunto das funções de classe  $C^1$  com suporte compacto em  $t \geq 0$ ).

Daremos uma justificativa para a definição acima, obtendo a relação (2.11). Vamos supor, por um momento, que  $u$  é uma solução clássica do problema de valor inicial citado na definição. Sendo  $C_0^1$  a classe de funções  $\phi \in C^1$  tal como na definição anterior, isto é,  $(\text{supp } \phi) \cap (t \geq 0) \subseteq D$ , onde  $\text{supp } \phi$  denota o suporte de  $\phi$  e  $D$  é o retângulo  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$ , escolhido de forma que  $\phi = 0$  fora de  $D$  e nas linhas  $t = T$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .

Multiplicando  $u_t + f(u)_x = 0$  por  $\phi$  e integrando sobre  $t > 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{t>0} (u_t + f(u)_x) \phi \, dxdt &= \\ \iint_D (u_t + f(u)_x) \phi \, dxdt &= \int_a^b \int_0^T (u_t + f(u)_x) \phi \, dt dx = 0 \\ \Leftrightarrow \int_a^b \int_0^T u_t \phi \, dt dx + \int_a^b \int_0^T f(u)_x \phi \, dt dx &= 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes tem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T u_t \phi \, dt dx &= \int_a^b \left[ u \phi \Big|_0^T - \int_0^T u \phi_t \, dt \right] dx \\ &= \int_a^b [u(x, T) \phi(x, T) - u(x, 0) \phi(x, 0)] dx - \\ &\quad - \int_a^b \int_0^T u \phi_t \, dt dx \\ &= \int_a^b -u_0(x) \phi(x, 0) \, dx - \int_a^b \int_0^T u \phi_t \, dt dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T f(u)_x \phi \, dt dx &= \int_0^T \left[ f(u) \phi \Big|_a^b - \int_a^b f(u) \phi_x \, dx \right] dt = \\ &= \int_0^T [f(u(b, t)) \phi(b, t) - f(u(a, t)) \phi(a, t)] dt - \\ &\quad - \int_0^T \int_a^b f(u) \phi_x \, dx dt = \\ &= - \int_0^T \int_a^b f(u) \phi_x \, dx dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b -u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_a^b \int_0^T u \phi_t dt dx - \int_0^T \int_a^b f(u) \phi_x dx dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \int_0^T (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0.$$

Mostramos, assim, que se  $u$  é uma solução clássica de (2.10), então (2.11) vale para toda  $\phi \in C_0^1$ . Além disso, a condição (2.11) faz sentido se tivermos  $u$  e  $u_0$  limitadas e mensuráveis.

Com isso e os resultados da seção precedente temos que a função descontínua

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{para } x < st \\ u_r, & \text{para } x > st \end{cases},$$

com  $s \in \mathbb{R}$ , é um choque (solução fraca) de (2.10) se, e somente se, satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot:

$$s [u] = [f],$$

onde  $s$  é a velocidade de propagação da descontinuidade.

É bom salientar que todas as definições e conceitos apresentados anteriormente nestas seções são análogos para sistemas de leis de conservação que serão vistos adiante.

---

## 2.3 Noções básicas sobre o problema de Riemann

---

Nesta seção, trabalharemos com o problema de Riemann, definido como um caso particular de um problema de Cauchy para o sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0, \tag{2.12}$$

com  $U = U(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $-\infty < x < \infty$  e  $t > 0$ ; e sujeito à condição inicial

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{para } x < 0 \\ U_R, & \text{para } x > 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

onde,  $U_L, U_R \in \mathbb{R}^2$ , são constantes.

A função  $F$  é chamada *função de fluxo* e deve ser, pelo menos, de classe  $C^2$ . Os pontos do domínio da  $F$  são chamados *estados*, o conjunto dos estados é chamado *espaço de estados* e o plano  $(x, t)$  é chamado *espaço físico*.

Determinar geometricamente uma solução para o problema de Riemann é, de certa forma, fazer uma conexão entre os estados constantes  $U_L$  e  $U_R$ . Essa conexão deverá obedecer a certas condições que veremos mais adiante.

O sistema (2.12) é dito *hiperbólico* se os autovalores  $\lambda_i(U)$ ,  $i = 1, 2$ , da matriz jacobiana de  $F$ , denotada por  $DF(U)$ , forem reais e  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ,  $\forall U \in \mathbb{R}^2$ . O mesmo sistema é chamado *estritamente hiperbólico* em  $U$  se os autovalores são reais e  $\lambda_1(U) \neq \lambda_2(U)$ . Estados  $U$  onde  $\lambda_1(U) = \lambda_2(U)$ , com  $DF(U) = \lambda I$ , são chamados *pontos umbílicos*.

Uma função  $U(x, t)$  é uma *solução fraca* de (2.12) - (2.13), analogamente ao caso escalar visto anteriormente, se  $U$  e  $F$  são funções integráveis em todo conjunto compacto do semi-plano  $t \geq 0$  e

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(x, t)U(x, t) + \phi_x(x, t)F(U(x, t))] dxdt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0)U(x, 0) dx = 0$$

é satisfeita para toda função teste suave  $\phi$  de suporte compacto em  $t \geq 0$ .

Observe que se  $U(x, t)$  é solução do sistema (2.12)-(2.13), então  $U(ax, at)$ , para  $a > 0$ , também o é. Assim, faz sentido procurarmos soluções da forma  $U(x, t) = \tilde{U}\left(\frac{x}{t}\right)$ . Então, com a mudança de variáveis  $\xi = \frac{x}{t}$ , em (2.12), e supondo  $U$  suave, temos

$$-\tilde{U}'(\xi)\frac{x}{t^2} + dF(\tilde{U}(\xi))\frac{1}{t}\tilde{U}'(\xi) =$$

$$\left[ DF(\tilde{U}(\xi)) - \xi I \right] \tilde{U}'(\xi) = 0, \quad (2.14)$$

onde  $\tilde{U}'(\xi)$  denota a derivada de  $\tilde{U}$  em relação à variável  $\xi$  e  $I$  denota a matriz identidade.

De (2.14) tem-se que  $\tilde{U}'(\xi)$  é autovetor à direita de  $DF(\tilde{U}(\xi))$  associado ao autovalor  $\lambda = \xi$ , o que implica que as soluções suaves do problema de Riemann estão sobre as curvas integrais desses autovetores, logo satisfazem:

$$\frac{d\tilde{U}(\xi)}{d\xi} = r_i(\tilde{U}(\xi)),$$

onde  $r_i(\tilde{U}(\xi))$  denota o autovetor associado à velocidade característica  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Dizemos que o estado  $U_R$  é *conectável* a  $U_L$  por uma *i-rarefação* (ou *onda de rarefação* associada à família  $i$ ) ( $i=1$  ou  $2$ ), se esses estados estão na curva integral do autovetor  $r_i(\tilde{U}(\xi))$  e  $\lambda_i(U)$  cresce no sentido de  $U_L$  para  $U_R$ . Assim, uma *i-curva de rarefação* ( $i=1$  ou  $2$ ) por  $U_L$  é o conjunto de estados  $U$  que podem ser conectados a  $U_L$  por uma *i-rarefação*.

Fazer a exigência de que  $\lambda_i(U)$  cresce no sentido de  $U_L$  para  $U_R$  quer dizer que, no espaço físico  $(x, t)$ , a inclinação  $\frac{x}{t}$  deve ser estritamente crescente da esquerda para a direita, de forma que as *i*-características formam um leque de retas, passando pela origem, com inclinações crescendo de  $\lambda_i(U_L)$  a  $\lambda_i(U_R)$  (Figura 2.6).

Continuando ainda com mais definições, dizemos que o sistema (2.12) é *genuinamente não-linear* se a  $i$ -ésima velocidade característica é uma função estritamente monótona sobre a curva integral do campo de vetores associado, ou seja, se o produto interno  $\nabla \lambda_i(U) \cdot r_i(U) \neq 0$ ,  $\forall U \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , para todo campo de vetores da  $DF(U)$ .

Com isso, caracterizamos as soluções contínuas do problema de Riemann. Vamos, agora, caracterizar as descontinuidades.

Analogamente a seção 2.1 deste capítulo, definimos por *choque* as descontinuidades do

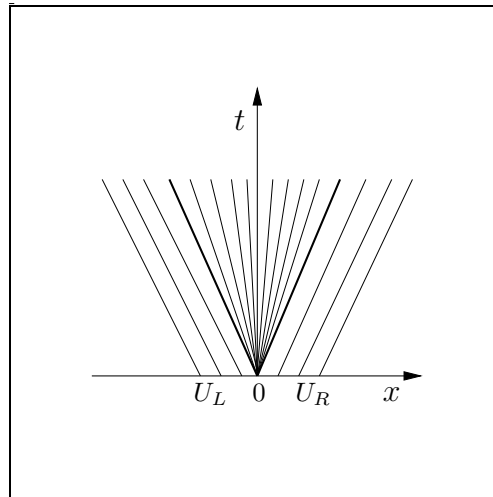


Figura 2.6: Rarefação no espaço físico.

tipo salto que se propagam com velocidade “ $s$ ” e separam dois estados  $U_L$  e  $U_R$ . E para sistemas  $2 \times 2$ , como apresentado no início desta seção, a função descontínua

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{para } x < st \\ U_R, & \text{para } x > st \end{cases},$$

com  $s \in \mathbb{R}$ , é um choque (solução fraca) do sistema (2.12)-(2.13) se, e somente se, satisfaz a equação de Rankine-Hugoniot:

$$H(U_L, s, U_R) = F(U_R) - F(U_L) - s(U_R - U_L) = 0, \quad (2.15)$$

onde  $s$  é a velocidade de propagação da descontinuidade.

Com  $U_L$  fixo, a relação de Rankine-Hugoniot representa um sistema de 2 equações e 3 incógnitas, o que tem como solução a equação de uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , chamada *curva de choque* ou *curva de Hugoniot*. Na abordagem clássica de problemas de Riemann consideramos a projeção desta curva no espaço de estados.

Os choques e rarefações usados na construção da solução de um problema de Riemann são chamados *ondas elementares*.

Uma solução do problema de Riemann para o sistema (2.12)-(2.13) é constituída de uma sequência de ondas elementares intercaladas por estados constantes conectando  $U_L$  a  $U_R$  e com



velocidade crescente no espaço  $(x, t)$ .

Definimos ainda *grupo de ondas* como uma sequência de ondas elementares conectando  $U_L$  a  $U_R$  sem estados constantes separando as ondas. Uma *i-curva de onda* ( $i=1$  ou  $2$ ) por um estado  $U_L$  é o conjunto de estados  $U$  que podem ser conectados à direita de  $U_L$  por um grupo de ondas da  $i$ -família característica ( $i=1$  ou  $2$ ).

Na construção de uma solução para o problema de Riemann, a primeira condição que a conexão  $U_L - U_R$  deve obedecer, chamada *condição de compatibilidade*, é que a velocidade final de cada onda usada deve ser menor que a velocidade inicial da onda seguinte.

A condição de compatibilidade faz com que conjuntos de estados onde a velocidade característica é crítica tornem-se importantes, pois a solução de problemas de Riemann podem sofrer alterações quando  $U_L$  cruza algum desses conjuntos. Esses conjuntos são definidos como *conjuntos de bifurcação*.

Além da condição de compatibilidade, surgem, também, os critérios de entropia, os quais explicaremos a seguir.

---

## 2.4 Critérios de entropia

---

As condições de entropia surgiram do fato de que o problema estudado tem interesse real, ou seja, por acontecerem fenômenos naturais que são modelados por esse problema. Com isso, espera-se unicidade de solução e como soluções múltiplas do problema de Riemann são originadas pelos choques, utiliza-se essas condições a fim de que apenas soluções únicas e fisicamente relevantes sejam selecionadas.

- Critério de entropia de Lax

Em [11], Lax introduziu um critério de entropia para sistemas estritamente hiperbólicos e genuinamente não-lineares. Segundo ele, um choque admissível associado à  $i$ -ésima família

característica, é uma descontinuidade entre os estados  $U_L$  e  $U_R$ , que se propaga com velocidade  $s$ , e satisfaz

$$\begin{aligned}\lambda_i(U_R) < s < \lambda_i(U_L) , \\ \lambda_{i-1}(U_L) < s < \lambda_{i+1}(U_R) .\end{aligned}$$

Um choque satisfazendo  $\lambda_1(U_L) > s > \lambda_1(U_R)$  e  $\lambda_2(U_R) > s$  é chamado *1-choque de Lax* denotado por  $S_1$  e um satisfazendo  $\lambda_2(U_L) > s > \lambda_2(U_R)$  e  $\lambda_1(U_L) < s$  é um *2-choque de Lax* denotado por  $S_2$ .

Para sistemas que não são estritamente hiperbólicos o critério de Lax é insuficiente para garantir existência de solução. Por isto outros tipos de choque são considerados, dentre os quais destacamos os *choques de cruzamento* que satisfazem

$$\begin{aligned}\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L) , \\ \lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R) .\end{aligned}\tag{2.16}$$

Um critério de entropia mais geral que o de Lax é o chamado critério de viscosidade.

- Critério de entropia de viscosidade

Introduzido por Gel'Fand em [6] e Courant e Friedrichs em [5], este critério considera admissíveis choques que são limites de ondas viajantes de um sistema parabólico associado, obtido com o acréscimo de um pequeno termo difusivo no sistema (2.12), ou seja,

$$U_t + (F(U))_x = \epsilon [D(U)U_x]_x ,\tag{2.17}$$

com  $\epsilon > 0$ , onde  $D(U)$  é uma matriz cujos autovalores têm parte real positiva e é chamada *matriz de viscosidade*.

As descontinuidades que são limites, quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , de soluções suaves de (2.17) da forma  $U(x, t) = \tilde{U}\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right)$ , satisfazendo  $\tilde{U}(-\infty) = U_L$  e  $\tilde{U}(+\infty) = U_R$  são chamadas *ondas viajantes com velocidade  $s$* .

Substituindo  $\tilde{U}$  em (2.17), temos

$$-\tilde{U}'(\xi)\frac{s}{\epsilon} + F'(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}'(\xi)\frac{1}{\epsilon} = \epsilon \left[ D'(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}'(\xi)\frac{1}{\epsilon^2}\tilde{U}'(\xi) + D(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}''(\xi)\frac{1}{\epsilon^2} \right]$$

$$-s\tilde{U}'(\xi) + F'(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}'(\xi) = [D(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}'(\xi)]'.$$

Integrando com relação à  $\xi$ ,

$$-s\tilde{U}(\xi) + F(\tilde{U}(\xi)) = [D(\tilde{U}(\xi))\tilde{U}'(\xi)] + C.$$

Como  $U_L$  é solução,

$$-sU_L + F(U_L) = C.$$

Portanto, obtemos o sistema dinâmico

$$D^{-1}(\tilde{U}) \left[ -s[\tilde{U} - U_L] + F(\tilde{U}) - F(U_L) \right] = \frac{d\tilde{U}}{d\xi}, \quad (2.18)$$

que depende dos parâmetros  $u_l$ ,  $v_l$  e  $s$ , onde  $U_L$  e  $U_R$  são singularidades que estão sobre uma curva de Hugoniot.

Assim, um choque é admissível segundo o *critério de viscosidade* se existir uma órbita do sistema dinâmico (2.18) conectando  $U_L$  e  $U_R$  e tal que

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) = U_L$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{U}(\xi) = U_R.$$

Choques satisfazendo a condição de viscosidade são ditos *admissíveis* ou *com perfil viscoso*.

Omitiremos, por simplicidade, à partir deste ponto do trabalho o “ $\sim$ ” da notação acima.

## 2.5 Classificação dos pontos críticos

Para o sistema dinâmico (2.18), um ponto crítico é, como já foi dito, um estado  $U_c$  que satisfaz a relação de Rankine-Hugoniot para  $U_L$  e  $s$  fixados.

O comportamento das soluções na vizinhança de um ponto crítico  $U_c$  é refletido nas características qualitativas das soluções da linearização de (2.18) em torno de  $U_c$ :

$$[-s + DF(U_c)](U - U_c) = D(U_c)U' .$$

Considerando o caso onde  $D(U_c)$  é a matriz identidade e denotando  $dH = -sI + DF(U)$ , onde  $H = -s[U - U_L] + F(U) - F(U_L)$ , temos que

$$\frac{d\tilde{U}}{d\xi} = H . \quad (2.19)$$

Assim, os autovalores de  $dH$  são dados por

$$\mu_i(U_c) = \lambda_i(U_c) - s ,$$

onde  $\lambda_i(U_c)$  são os autovalores de  $DF(U_c)$ .

Neste caso, um 1-choque de Lax deve satisfazer  $\mu_1(U_L) = \lambda_1(U_L) - s > 0$ ,  $\mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0$ ,  $\mu_1(U_R) = \lambda_1(U_R) - s < 0$  e  $\mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0$ .

As duas primeiras desigualdades implicam que  $U_L$  é um nó repulsor de (2.19), enquanto as duas últimas implicam que  $U_R$  é uma sela de (2.19).

Analogamente, um 2-choque de Lax deve satisfazer  $\mu_1(U_L) = \lambda_1(U_L) - s < 0$ ,  $\mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0$ ,  $\mu_1(U_R) = \lambda_1(U_R) - s < 0$  e  $\mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s < 0$ .

Neste caso, as duas primeiras desigualdades nos dá que  $U_L$  é uma sela enquanto as outras desigualdades implicam que  $U_R$  é um nó atrator de (2.19). Assim, vemos que um choque de

Lax que satisfaz o critério de viscosidade ( $S_1$  ou  $S_2$ ) está associado a uma ligação entre uma sela e um nó.

No caso de uma descontinuidade de cruzamento, que satisfaz (2.16), temos  $\mu_1(U_L) = \lambda_1(U_L) - s < 0$ ,  $\mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0$ ,  $\mu_1(U_R) = \lambda_1(U_R) - s < 0$  e  $\mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0$ . Ou seja, um choque de cruzamento  $(U_L, s, U_R)$  satisfaz o critério de viscosidade se existir uma órbita conectando as selas  $U_L$  e  $U_R$ . Choques de cruzamento admissíveis são chamados *choques transicionais*.

No caso em que  $D(U_c)$  não é múltiplo da identidade, o sinal de  $\lambda_i(U_c) - s$  nem sempre determina a natureza do ponto crítico  $U_c$ .

---

---

## CAPÍTULO 3

---

### A forma normal do sistema de leis de conservação

Neste capítulo, faremos um estudo do comportamento local da solução de um problema de Riemann para um sistema hiperbólico através de uma análise em torno do ponto umbílico. Schaeffer e Shearer, em [14], mostraram em detalhes que existe uma forma normal para o sistema de leis de conservação. Aqui, daremos uma idéia do que foi feito por eles.

---

#### 3.1 Alguns resultados para modelos quadráticos

---

Nesta seção faremos um estudo do sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0 ,$$

na vizinhança de um ponto umbílico,  $U = U^*$ , onde  $U$  e  $F$  são dados como no capítulo anterior. Para isso, consideramos a série de Taylor para  $F(U)$  em torno de  $U^*$ :

$$F(U) = F(U^*) + dF(U^*)(U - U^*) + Q(U - U^*) + r , \quad (3.1)$$

onde  $r$  representa o resto e  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação quadrática homogênea.

Denotamos a série truncada por  $F_T(U)$  :

$$F_T(U) = F(U^*) + dF(U^*)(U - U^*) + Q(U - U^*) .$$

Neste trabalho, estamos interessados em modelos que satisfazem as hipóteses

**HIPÓTESES (H):**

**(H1)**  $dF(U^*)$  é diagonalizável;

**(H2)**  $dF_T(U)$  tem autovalores distintos  $\forall U \in V - \{U^*\}$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $U^*$ .

As proposições abaixo são úteis no estudo de modelos que satisfazem **(H1)** e **(H2)**. Antes de enunciá-las, vamos introduzir a aplicação  $dev : \Lambda \rightarrow \Gamma$  que associa a cada matriz do espaço das matrizes (reais)  $2 \times 2$ , denotado por  $\Lambda$ , uma matriz do espaço das matrizes sem traço ( $tr = 0$ ), denotado por  $\Gamma$ , que podemos escrever nas coordenadas

$$\begin{bmatrix} X & Y + Z \\ Y - Z & -X \end{bmatrix} . \quad (3.2)$$

Consideramos então,  $M$  uma matriz (real)  $2 \times 2$  e

$$dev M = M - \frac{1}{2}(tr M)I ,$$

a projeção de  $M$  no espaço das matrizes sem traço. Assim, por dependerem de apenas três coordenadas, essas matrizes  $dev M$  podem ser vistas como pontos em  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 3.1.**  $M$  tem autovalores iguais e é diagonalizável se, e somente se,  $dev M = 0$ .

*Demonstração.* Se  $M$  tem autovalores iguais e é diagonalizável, então existe uma base  $\beta$  de autovetores de  $M$  tal que  $[M]_\beta$  é diagonal e a diagonal é formada pelos autovalores correspondentes, então, suponha  $M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ . Assim,  $dev M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \frac{1}{2} 2 \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$ .

Agora, se  $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}$ , com  $\text{dev } M = 0$ , então

$$M = \frac{1}{2}(\text{tr } M)I \iff M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha + \theta) \end{bmatrix},$$

o que prova a afirmação.  $\square$

**Proposição 3.2.** *M tem autovalores reais distintos, reais iguais ou complexos conjugados, se  $\text{dev } M$  está fora, sobre, ou dentro do cone  $X^2 + Y^2 = Z^2$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Seja  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , uma matriz genérica. Assim,  $\text{dev } M = \begin{bmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & -(a-d)/2 \end{bmatrix}$  e, denotando  $a-d = X$ ,  $b = \frac{Y+Z}{2}$ ,  $c = \frac{Y-Z}{2}$ , temos a forma (3.2). Então, calculando os autovalores de  $M$  e pensando nessas matrizes  $\text{dev } M$  como pontos em  $\mathbb{R}^3$ , temos

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc &= 0. \end{aligned}$$

E o discriminante

$$\Delta = (a-d)^2 + 4bc.$$

Logo,

- $\Delta > 0 \iff (a-d)^2 + 4bc > 0 \iff X^2 + 4\frac{(Y+Z)(Y-Z)}{2} > 0 \iff X^2 + Y^2 > Z^2$ , ou seja, se  $M$  tem autovalores reais e distintos, então  $\text{dev } M$  está fora do cone,
- $\Delta = 0 \iff (a-d)^2 + 4bc = 0 \iff X^2 + Y^2 = Z^2$ , ou seja, se  $M$  tem autovalores reais e iguais, então  $\text{dev } M$  está sobre o cone,
- $\Delta < 0 \iff (a-d)^2 + 4bc < 0 \iff X^2 + Y^2 < Z^2$ , ou seja, se  $M$  tem autovalores complexos conjugados, então  $\text{dev } M$  está dentro do cone.



□

Podemos, agora, fazer uma interpretação das hipóteses **(H)** usando as notações introduzidas acima. Considere uma função de fluxo  $F$  satisfazendo **(H)** e a aplicação

$$\begin{aligned} dev\ dF : \text{plano } -U &\longrightarrow \Gamma \\ (u, v) &\longmapsto \{dev\ dF\} \end{aligned}$$

Esta aplicação define uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , denotada por  $\{dev\ dF\}$ , já que podemos associar uma matriz sem traço a pontos de  $\mathbb{R}^3$  como já vimos anteriormente. Sendo  $U^*$  um ponto umbílico, a condição **(H1)** implica que  $U^*$  é levado pela aplicação  $dev\ dF$  na origem (no vértice do cone  $X^2 + Y^2 = Z^2$ ). Esta é uma implicação direta da proposição 3.1.

Para  $DF$  estritamente hiperbólica em uma vizinhança  $V^* = V - \{U^*\}$ , de  $U^*$ , a imagem de  $V^*$  por  $dev\ dF$  deve estar fora do cone, de acordo com a proposição 3.2.

Supondo que esta superfície  $\{dev\ dF\}$  é não-singular em  $U^*$  (diferencial injetiva), segue-se que o plano tangente está fora da região fechada  $\{X^2 + Y^2 \geq Z^2\}$ , ou seja, temos a seguinte proposição:

**Proposição 3.3.** *A condição **(H2)** de **(H)** é satisfeita se, e somente se, a superfície  $\{dev\ dF\}$  é não-singular em  $U^*$  e, exceto para  $U^*$ , o plano tangente está na região aberta  $\{X^2 + Y^2 > Z^2\}$ .*

*Demonstração.* Note que  $dev\ dF_T$ , onde  $F_T$  é o polinômio de Taylor de grau 2 truncado, é uma aplicação linear a qual define um plano tangente a  $\{dev\ dF\}$ . Essa aplicação deve ser não-singular (injetiva), pois caso seu núcleo fosse diferente de zero,  $dF_T$  teria autovalores iguais neste subespaço, violando, portanto, a condição **(H2)**. Agora, **(H2)** requer que uma vizinhança furada de  $U^*$  no plano tangente esteja na região aberta  $\{X^2 + Y^2 > Z^2\}$ , pela proposição 3.2. Por homogeneidade pode-se estender essa conclusão para o plano tangente inteiro. □

**Observações 3.4.** A Figura 3.1 apresenta quatro configurações para a superfície  $\{dev\ dF\}$ . A Figura 3.1(a) mostra essa superfície intersectando o cone  $X^2 + Y^2 = Z^2$  da maneira requerida

pelas hipóteses **(H)**. Em contraste, a Figura 3.1(b) mostra o caso em que a condição **(H1)** falha, porém **(H2)** não, ou seja,  $\{dev dF\}$  é não-singular. Ainda contrastando com a Figura 3.1(a), a Figura 3.1(c) mostra o caso em que o ponto umbílico é levado na origem, ou seja, **(H1)** é satisfeita, mas **(H2)** não. Já a Figura 3.1(d) difere da Figura 3.1(a) somente pela inclinação da superfície  $\{dev dF\}$ . Neste caso existe uma reta de pontos umbílicos.

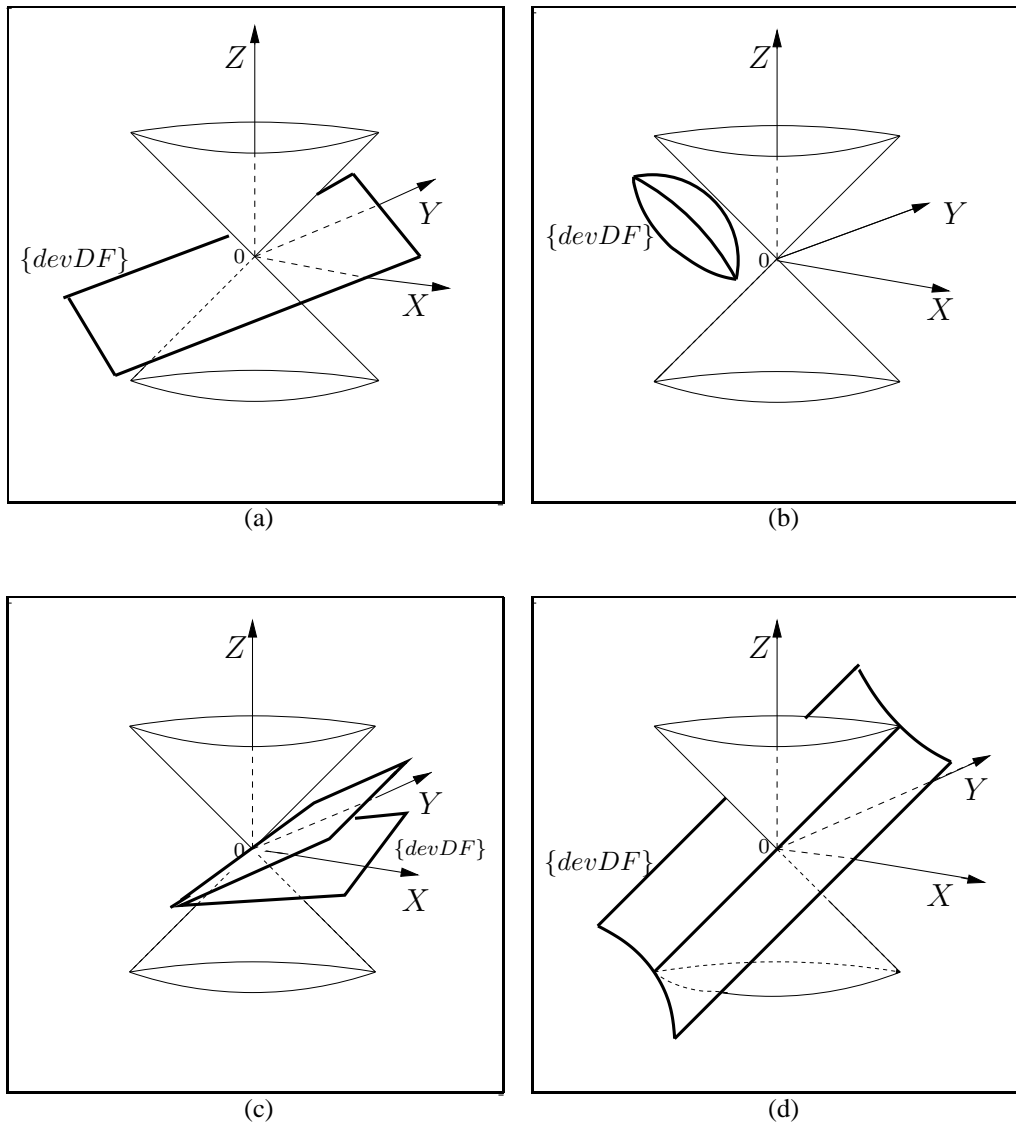


Figura 3.1: Configurações da superfície  $\{dev dF\}$ .

Escreveremos estas informações nas coordenadas  $u$  e  $v$ , para prosseguir nosso estudo.

Se  $U = (u, v)$  e  $F = (f, g)$ , então a condição **(H1)** de **(H)** implica que, em  $U^*$ ,  $f_u - g_v = f_v = g_u = 0$ , pois  $dF(U) = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I = dF(U)$ .

Com respeito à **(H2)** existe um polinômio quártico homogêneo na segunda derivada de  $F$  no ponto umbílico,  $p(Q)$ , tal que  $p(Q)$  é positivo se, e somente se, **(H2)** é satisfeita.

De fato, seja  $n = (n_1, n_2, n_3)$  a normal ao plano tangente de  $\{dev dF_T\}$ . Devido à Proposição 3.3, basta mostrar que o plano tangente está fora do cone. Isto acontece se, e somente se, a normal está dentro do cone, isto é, se, e só se,  $n_1^2 + n_2^2 < n_3^2$ . Mas,  $Q(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_{uu}u^2 + f_{uv}uv + \frac{1}{2}f_{vv}v^2 \\ \frac{1}{2}g_{uu}u^2 + g_{uv}uv + \frac{1}{2}g_{vv}v^2 \end{bmatrix}$ , onde todas as derivadas segundas são avaliadas no ponto umbílico.

Com os vetores do plano tangente de  $\{dev dF_T\}$ ,

$$t_u = (f_{uu} - g_{vv}, f_{uv} + g_{uv}, f_{uv} - g_{uu})$$

e

$$t_v = (f_{uv} - g_{vv}, f_{vv} + g_{uv}, f_{vv} - g_{uv}),$$

calculamos o vetor normal  $n = t_u \times t_v$  e obtemos, assim,  $p(Q) = n_3^2 - n_1^2 - n_2^2$ , que é o polinômio desejado.  $\square$

Podemos resumir essas informações no lema seguinte.

**Lema 3.5.** *F satisfaz as hipóteses **(H)** se, e somente se, existe um ponto  $U^*$  onde  $f_u - g_v = f_v = g_u = 0$  e onde  $p(Q) > 0$ .*

Faremos agora reduções em (3.1) e introduziremos algumas definições e lemas a fim de mostrar que existe uma forma normal para o sistema de leis de conservação.

Primeiro, podemos assumir que a expansão (3.1) começa com termos lineares, já que o sistema de leis de conservação não muda se trocarmos  $F(U)$  por  $F(U) - F(U^*)$ . A seguir,

como  $dF(U^*)$  é diagonalizável, temos  $dF(U^*) = \lambda I$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; por fim, a mudança de variáveis  $x' = x - \lambda t$  elimina os termos lineares e tomando  $U^*$  como a origem (renomeamos  $U - U^*$  como  $U$ ), obtendo

$$F(U) = Q(U) + r.$$

Assim nosso foco, à partir de agora, será sobre não-linearidades puramente quadráticas

$$U_t + Q(U)_x = 0. \quad (3.3)$$

Para o caso em que consideramos os termos de ordem mais alta,  $r$ , contanto que  $Q$  satisfaça algumas hipóteses, o teorema 2.4 de [14] garante que existe uma correspondência biunívoca entre as curvas de onda de  $F$  através do ponto umbílico com as curvas de ondas de  $Q$  através deste mesmo ponto. Mais ainda, toda tal curva de onda de  $F$  é tangente, no ponto umbílico, à curva de onda de  $Q$  (cf. demonstração em [14]).

---

## 3.2 A forma normal

---

Iremos, nesta seção, concluir o objetivo principal deste capítulo mostrando o teorema que nos dá condições para que a função de fluxo seja gradiente.

Duas aplicações quadráticas  $Q_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $Q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são *equivalentes* se existe uma matriz constante invertível  $S$  tal que

$$Q_2(U) = S^{-1}Q_1(SU), \quad \forall U \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Se  $Q(U) = dC(U)$  para  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  polinômio cúbico homogêneo, então  $C$  é chamado de *potencial*.

E  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *fortemente hiperbólico* se  $dQ(u, v)$  tem autovalores reais e é diagonalizável para todo  $(u, v)$ .

O estudo da aplicação  $dev$  é útil nas demonstrações (que podem ser encontradas em [14]) das duas observações seguintes. Assumiremos estas observações como resultados e as utilizaremos na demonstração do próximo teorema deste capítulo.

**Observação 3.6.** Equivalência preserva a estrutura de curvas de onda. Isto é, a aplicação  $U \rightarrow S^{-1}U$  associa curvas de onda a curvas de onda.

**Observação 3.7.**  $Q$  é fortemente hiperbólico se, e somente se, existe uma aplicação cúbica homogênea  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Q$  é equivalente à  $dC$ .

**Lema 3.8.** *Seja  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação quadrática com potencial  $C(U)$  e seja  $\tilde{Q}(U) = S^{-1}Q(SU)$ . Se  $S = \alpha I$ , para algum escalar  $\alpha \neq 0$ , ou se  $S$  é uma matriz ortogonal, então  $\tilde{Q}$  também tem um potencial, especificadamente  $\tilde{Q}$  tem o potencial  $\tilde{C}(U) = \alpha C(U)$  ou  $\tilde{C}(U) = C(SU)$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Como  $Q$  tem um potencial, então  $dQ$  é simétrica, logo  $d\tilde{Q}$  é simétrica, portanto  $\tilde{Q}$  tem um potencial. Se  $S = \alpha I$ , então  $Q(SU) = \alpha^2 Q(U)$  e temos  $\tilde{Q} = \frac{1}{\alpha} \alpha^2 Q(U) = \alpha dC$ . Assim, o potencial de  $\tilde{Q}$  é  $\tilde{C} = \alpha C(U)$ . Agora, se  $S$  é ortogonal, temos  $\tilde{Q} = S^{-1}Q(SU) = S^T Q(SU) = S^T dC(SU) = S dC(SU)$ , mas  $d\tilde{C} = d(C(SU)) = S dC(SU)$ , o que prova o lema.  $\square$

**Teorema 3.1.** Se  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação quadrática tal que (3.3) é hiperbólico com um ponto umbílico isolado em  $U = 0$ , então existem  $a, b$  com  $a \neq 1 + b^2$  tal que  $Q$  é equivalente à  $dC$ , onde

$$C(u, v) = \frac{1}{3}au^3 + bu^2v + uv^2. \quad (3.4)$$

*Demonstração.* Como (3.3) é hiperbólico com um ponto umbílico isolado,  $Q$  é fortemente hiperbólico e, pela Observação 3.7, podemos trocar  $Q$  por uma aplicação equivalente que tem potencial  $C$ , polinômio cúbico, que denotaremos em sua forma geral por

$$C(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3.$$

Dividindo  $C(x, y)$  por  $y^3$  temos

$$C_1(x, y) = \alpha \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \beta \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \gamma \left(\frac{x}{y}\right) + \delta.$$

Agora,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : C_1(x, y) = 0\} \quad (3.5)$$

consiste de uma, duas ou três retas através da origem no plano- $xy$ .

Considere, primeiro, o caso em que pelo menos uma das retas é obtida de um zero simples de  $C_1(x, y) = 0$ . Pelo Lema 3.8 podemos rotacionar as coordenadas de forma que esta reta de zero simples seja o eixo- $y$  (ou seja,  $\delta = 0$ ), então,

$$C(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2.$$

Mais ainda, pelo Lema 3.8, podemos reescalar  $Q$  de forma que o coeficiente  $\gamma$  seja igual a 1, já que este deve ser diferente de *zero* pois o eixo- $y$  é uma reta de zero simples. Assim, convenientemente, temos a forma normal (3.4). Para que se verifiquem as hipóteses **(H)** é necessário  $a \neq 1 + b^2$ .

Sempre é possível essa construção já que o conjunto (3.5) sempre contém pelo menos uma reta de zero simples. Caso (3.5) possua três zeros coincidentes podemos rotacionar as coordenadas de forma que  $C(x, y) = \alpha x^3$  e podemos ver que este potencial viola **(H)**. Com isto fica provado o teorema.  $\square$

Com esse teorema, sendo a origem um ponto umbílico isolado, podemos escrever sistemas de duas leis de conservação com  $U = (u, v)^T$  e função de fluxo quadrática como um sistema da forma

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + v^2)_x = 0 \\ v_t + \frac{1}{2}(bu^2 + 2uv)_x = 0 \end{cases},$$

onde  $a \neq 1 + b^2$  e  $F^T$  se iguala ao gradiente de um polinômio cúbico, como acima.

**Observação 3.9.** Schaeffer e Shearer, ainda em [14], estudaram curvas de ondas originando em pontos umbílicos e identificaram quatro tipos de problemas que ficaram conhecidos, desde então, por problemas do tipo I, II, III, IV, dependendo das regiões em que se encontram. Eles mostraram que à medida em que  $a$  e  $b$  variam, existem quatro configurações diferentes para as curvas de ondas através de pontos umbílicos, correspondendo as quatro regiões no plano- $ab$  como na Figura 3.2.

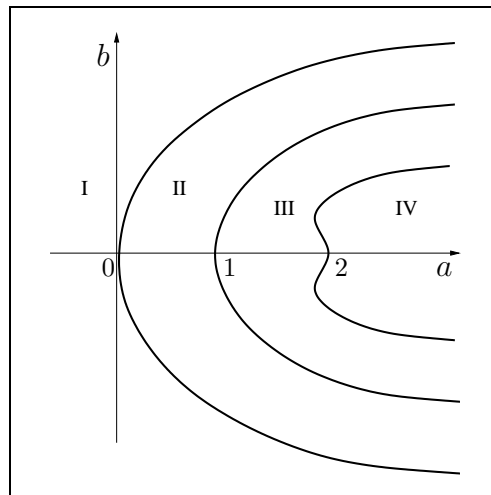


Figura 3.2: Regiões no plano- $ab$ .

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Ondas transicionais

Já estudamos em capítulos precedentes a estrutura das soluções de problemas de Riemann. Para modelos com duas equações, estritamente hiperbólicos e estados iniciais próximos, a solução consiste de dois grupos de onda, cada um correspondendo a uma família característica [9]. Para modelos mais gerais, a solução pode conter ondas transicionais que interpolam (são transições) entre as famílias.

Neste capítulo, vamos examinar choques transicionais para modelos quadráticos. Estes choques correspondem a órbitas ligando selas do sistema dinâmico

$$-s[U(\xi) - U_-] + F(U(\xi)) - F(U_-) = D(U(\xi))\dot{U}(\xi), \quad (4.1)$$

com a função de fluxo  $F$  quadrática, neste caso, dada por

$$F = (f, g)^T,$$

sendo

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2) + d_1u + e_1v,$$

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(a_2u^2 + 2b_2uv + c_2v^2) + d_2u + e_2v.$$



## 4.1 Modelos quadráticos

Considerando o sistema de leis de conservação  $2 \times 2$  com função de fluxo quadrática como dada anteriormente, observamos que a introdução de uma perturbação linear na função de fluxo pode fazer com que o modelo falhe em ser estritamente hiperbólico em algum lugar do *plano-uv*, logo, regiões elípticas, onde as velocidades características são complexas, ocorrem. Um exemplo onde isto ocorre é no modelo de Stone, [3].

Vamos eliminar a velocidade  $s$  da condição de Rankine-Hugoniot

$$-s[U_+ - U_-] + F(U_+) - F(U_-) = 0.$$

Com  $U_0 = U_-$  fixo, temos uma única equação para os estados  $U = U_+$  na Hugoniot de  $U_0$ . Então,

$$\begin{aligned} & -s[U_+ - U_-] + F(U_+) - F(U_-) = 0 \\ & -s \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(u, v) - f(u_0, v_0) \\ g(u, v) - g(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} -s(u - u_0) + f(u, v) - f(u_0, v_0) &= 0 \quad \text{e} \\ -s(v - v_0) + g(u, v) - g(u_0, v_0) &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Com isso, } s = \frac{f(u, v) - f(u_0, v_0)}{(u - u_0)} \quad \text{e} \quad s = \frac{g(u, v) - g(u_0, v_0)}{(v - v_0)}.$$

Igualando esses resultados, temos

$$H_{u_0, v_0}(u, v) = (u - u_0)[g(u, v) - g(u_0, v_0)] - (v - v_0)[f(u, v) - f(u_0, v_0)] = 0 \quad (4.3)$$

De (4.2), temos

$$\begin{bmatrix} u - u_0 & v - v_0 \end{bmatrix} s \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_0 & v - v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u, v) - f(u_0, v_0) \\ g(u, v) - g(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

$$s[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] = (u - u_0)[f(u, v) - f(u_0, v_0)] + (v - v_0)[g(u, v) - g(u_0, v_0)]$$

$$s = \frac{(u - u_0)[f(u, v) - f(u_0, v_0)] + (v - v_0)[g(u, v) - g(u_0, v_0)]}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}. \quad (4.4)$$

Para modelos quadráticos, a curva de Hugoniot por  $U_0$  dada por  $H_{u_0, v_0}(u, v)$  é um polinômio cúbico nas variáveis  $u$  e  $v$ , a qual podemos parametrizar por coordenadas polares centrada em  $U_0$  por um ângulo  $\varphi$ . Mais precisamente, escrevendo  $U = U_0 + R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sen(\varphi) \end{pmatrix}$ , onde  $R \in \mathbb{R}$  representa a distância entre  $U$  e  $U_0$ , ou ainda,  $u = u_0 + R\cos(\varphi)$  e  $v = v_0 + R\sen(\varphi)$  em (4.3) e (4.4), temos

$$H_{u_0, v_0}(u, v) = R^2 \left\{ \frac{1}{2} R [\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi)] + \alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) \right\} \quad (4.5)$$

e

$$s = \frac{1}{2} R [\tilde{\alpha}(\varphi)\cos(\varphi) + \tilde{\beta}(\varphi)\sen(\varphi)] + \tilde{\alpha}(\varphi)u_0 + \tilde{\beta}(\varphi)v_0 + \tilde{\gamma}(\varphi), \quad (4.6)$$

respectivamente, onde

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (a_2 + b_1)\cos 2\varphi + (b_2 - a_1)\sen 2\varphi + a_2 - b_1 \}, \\ \beta(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_1)\cos 2\varphi + (c_2 - b_1)\sen 2\varphi + b_2 - c_1 \}, \\ \gamma(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (d_2 + e_1)\cos 2\varphi + (e_2 - d_1)\sen 2\varphi + d_2 - e_1 \}, \\ \tilde{\alpha}(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (a_1 - b_2)\cos 2\varphi + (b_1 + a_2)\sen 2\varphi + a_1 + b_2 \}, \\ \tilde{\beta}(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (b_1 - c_2)\cos 2\varphi + (c_1 + b_2)\sen 2\varphi + b_1 + c_2 \}, \\ \tilde{\gamma}(\varphi) &= \frac{1}{2} \{ (d_1 - e_2)\cos 2\varphi + (e_1 + d_2)\sen 2\varphi + d_1 + e_2 \}. \end{aligned}$$

Um ângulo  $\varphi$  é chamado *ângulo característico* para um dado estado  $U_0$  quando satisfaz

$$\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) = 0. \quad (4.7)$$

O conjunto de estados  $U_0$  satisfazendo (4.7) é chamado *reta característica* denotada por  $L(\varphi)$ . Ângulos que satisfazem

$$\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi) = 0 \quad (4.8)$$

são chamados *ângulos assintóticos*.  $L(\varphi)$  chama-se *reta de bifurcação* se  $\varphi$  é assintótico. É bom salientar que ângulos assintóticos e retas de bifurcação dependem somente dos coeficientes do modelo e não de  $U_0$ .

Observe, também, que são válidas as seguintes igualdades

$$\alpha(\varphi)\cos\varphi + \beta(\varphi)\sen\varphi = (-\sen\varphi, \cos\varphi)F''(0) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sen\varphi \end{pmatrix}^2, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\alpha}(\varphi)\cos\varphi + \tilde{\beta}(\varphi)\sen\varphi = (\cos\varphi, \sen\varphi)F''(0) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sen\varphi \end{pmatrix}^2. \quad (4.10)$$

Com elas podemos definir *ângulo de viscosidade* como sendo o ângulo que satisfaz (4.9), porém com a função de fluxo dada por  $D^{-1}F$ . A reta característica  $L(\varphi)$  associada a um ângulo de viscosidade é chamada *reta de viscosidade*.

Com isso, vale o resultado:

**Proposição 4.1.** (a) *Suponha que  $\varphi$  não é ângulo assintótico. Então a reta por  $U_0$  com ângulo  $\varphi$  cruza a Hugoniot de  $U_0$  em um estado  $U \neq U_0$  se, e somente se,  $\varphi$  não é um ângulo característico para  $U_0$ .*

(b) *Suponha que  $\varphi$  é ângulo assintótico. Então a reta por  $U_0$  com ângulo  $\varphi$  cruza a Hugoniot de  $U_0$  em um estado  $U \neq U_0$  se, e somente se,  $U_0$  está sobre a reta de bifurcação associada a  $\varphi$ . Neste caso, a Hugoniot contém esta reta.*

*Demonstração.* (a) Se  $U$  está na Hugoniot de  $U_0$ , então

$$H_{u_0, v_0}(u, v) = R^2 \left\{ \frac{1}{2}R[\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi)] + \alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) \right\} = 0.$$

Mas  $R \neq 0$ , pois  $U \neq U_0$  e  $\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi) \neq 0$ , já que  $\varphi$  não é assintótico. Então,

$$R = -2 \frac{\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi)}{\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi)}.$$

Isso implica que

$$\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) \neq 0.$$

Agora, supondo que  $\varphi$  não é um ângulo característico para  $U_0$  e ângulo não assintótico, temos que

$$R = -2 \frac{\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi)}{\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi)} \neq 0,$$

é solução de  $H_{u_0, v_0}(u, v) = 0$ , logo a reta por  $U_0$  com ângulo  $\varphi$  cruza a Hugoniot de  $U_0$  em um estado  $U \neq U_0$ .  $\square$

(b) Se  $U$  está na Hugoniot de  $U_0$ , então

$$H_{u_0, v_0}(u, v) = R^2 \left\{ \frac{1}{2}R[\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi)] + \alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) \right\} = 0.$$

Mas  $R \neq 0$ , pois  $U \neq U_0$  e  $\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sen(\varphi) = 0$ , já que  $\varphi$  é assintótico. Então,

$$\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) = 0,$$

ou seja,  $U_0$  está sobre a reta de bifurcação associada à  $\varphi$ .

Agora, se  $U_0$  está sobre a reta de bifurcação e  $\varphi$  é assintótico, então  $H_{u_0, v_0}(u, v) = 0$ .  $\square$

---

## 4.2 Órbitas retas

---

Nesta seção, vamos voltar nossa atenção ao estudo de choques transicionais com perfil reto. Daremos condições necessárias e suficientes para encontrar tais choques.

Denotaremos por  $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)$ , o ponto médio entre os estados  $U_+$  e  $U_-$  e por  $\Delta U = U_+ - U_-$ , a diferença entre esses mesmos estados.

**Lema 4.2.** *Suponha  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função quadrática tal que  $Q(U_+) = Q(U_-)$ . Então,*

$$Q(\bar{U} + \rho\Delta U) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2 Q''(\bar{U})(\Delta U)^2.$$

*Demonstração.* Temos a aproximação  $Q(\bar{U} + \rho\Delta U) \cong Q(\bar{U}) + \rho Q'(\bar{U})\Delta U + \frac{1}{2}\rho^2 Q''(\bar{U})(\Delta U)^2$ .

Assim, como  $Q'(\bar{U})$  é linear,  $Q'(\bar{U})\Delta U = Q(U_+) - Q(U_-) = 0$ . □

**Proposição 4.3.** *Seja  $F$  quadrático,  $s, U_+, U_- \neq U_-$  satisfazendo Rankine-Hugoniot. Então o segmento de reta entre  $U_-$  e  $U_+$  é uma órbita para o sistema autônomo*

$$-s[U(\xi) - U_-] + F(U(\xi)) - F(U_-) = D(U(\xi))\dot{U}(\xi) \quad (4.11)$$

*se, e somente se, existe uma constante  $\mu \neq 0$  tal que*

$$\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2. \quad (4.12)$$

*A órbita segue de  $U_-$  para  $U_+$  se, e somente se,  $\mu < 0$ .*

*Demonstração.* Uma órbita para o sistema ligando  $U_-$  e  $U_+$  sobre uma reta é da forma  $U(\xi) = \bar{U} + \rho(\xi)\Delta U$ , com  $-\frac{1}{2} < \rho(\xi) < \frac{1}{2}$ . Se  $Q(U) = -s(U - U_-) + F(U) - F(U_-)$  é uma função quadrática satisfazendo as hipóteses do lema anterior, o sistema dinâmico (4.11) torna-se

$$D(U(\xi))\dot{U}(\xi) = -s[U(\xi) - U_-] + F(U(\xi)) - F(U_-),$$

$$D(U(\xi))\dot{U}(\xi) = Q(U(\xi)),$$

com  $U(\xi) = \bar{U} + \rho(\xi)\Delta U$ .

Do Lema 4.2, temos

$$\rho D\Delta U = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2 Q''(\bar{U})(\Delta U)^2. \quad (4.13)$$

Assim, para  $\rho = -\frac{1}{2}$ , temos

$$0 = Q(U_-) = Q(U) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{8}Q''(\bar{U})(\Delta U)^2, \text{ por (4.13).}$$

Então,

$$Q(\bar{U}) = -\frac{1}{8}Q''(\bar{U})(\Delta U)^2. \quad (4.14)$$

Substituindo este resultado (4.14) e  $Q''(\bar{U}) = F''(0)$  em (4.13), temos

$$\dot{\rho}D\Delta U = \frac{1}{2}\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right)F''(0)(\Delta U)^2, \quad (4.15)$$

onde  $\rho$  satisfaz

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho^2 - \frac{1}{4}} = \mu \iff \dot{\rho} = \mu\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right). \quad (4.16)$$

Com isso, sendo  $\mu \neq 0$ , (4.16) tem uma solução com  $\rho$  variando entre  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ .

Portanto, se  $\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2$  e  $\dot{\rho} = \mu\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right)$ , então (4.15) é satisfeita e temos que o segmento é uma órbita.

Por outro lado, se  $\rho$  parametriza uma órbita sobre uma reta, (4.15) mostra que (4.16) deve valer para algum  $\mu \neq 0$  e, portanto,  $\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2$  é satisfeita.

Para mostrar a última afirmação da proposição, basta observar que se  $\rho$  cresce de  $-\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{2}$ , então  $\rho^2 - \frac{1}{4} < 0$ . E  $\dot{\rho} > 0$ . Portanto,  $\mu < 0$ , ou seja, a órbita segue de  $U_-$  para  $U_+$  se, e somente se,  $\mu < 0$ .  $\square$

Mostraremos que a constante  $\mu$  está relacionada aos autovalores  $\mu_{\pm}$  do sistema dinâmico (4.1) linearizado, como na Seção 2.3 do Capítulo 2, em torno dos pontos críticos. Temos

$$[-s + F'(U_+)]\Delta U = \mu_+ D\Delta U \quad (4.17)$$

e

$$[-s + F'(U_-)]\Delta U = \mu_- D\Delta U, \quad (4.18)$$

onde os autovalores correspondem aos autovetores  $\Delta U$ , com  $\mu_+ \leq 0 \leq \mu_-$ .

Subtraindo (4.18) de (4.17), temos

$$[F'(U_+) - F'(U_-)]\Delta U = (\mu_+ - \mu_-)D\Delta U.$$

E como  $F$  é quadrática,

$$F''(0)\Delta U\Delta U = (\mu_+ - \mu_-)D\Delta U.$$

Assim, dividindo por 2 para obtermos (4.12), temos  $\frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2 = \mu D\Delta U$ , com  $\mu = \frac{1}{2}(\mu_+ - \mu_-) \leq 0$ .

Agora, somando (4.17) com (4.18), temos

$$\left[-2s + F'(U_+) + F'(U_-)\right] \Delta U = (\mu_+ + \mu_-)D\Delta U.$$

Como  $F'$  é linear,

$$\left[-2s + 2F'\left(\frac{U_+ + U_-}{2}\right)\right] \Delta U = (\mu_+ + \mu_-)D\Delta U,$$

$$[-s + F'(\bar{U})] \Delta U = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-)D\Delta U.$$

Mas se  $U_-$ ,  $U_+$  e  $s$  satisfazem Rankine-Hugoniot, então

$$s\Delta U = F(U_+) - F(U_-) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F'(\bar{U} + \rho\Delta U) d\rho = F'(\bar{U})\Delta U.$$

Com este resultado, temos que o lado esquerdo da equação obtida somando-se (4.17) com (4.18) se anula, o que nos dá, conseqüentemente,  $\mu_+ + \mu_- = 0 \iff \mu = \mu_+ = -\mu_-$ .

O próximo lema relaciona a Proposição 4.3 aos ângulos de viscosidade.

**Lema 4.4.** *Considere um estado  $U_+$  sobre a reta que passa por  $U_-$  com ângulo  $\varphi$ , com  $U_+ \neq U_-$ . Então,  $\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2$  vale para algum  $\mu$  se, e somente se,  $\varphi$  é um ângulo de viscosidade.*

*Demonstração.* Seja  $\Delta U = R(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ . Assim,

$$\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2,$$

$$\mu\Delta U = \frac{1}{2}D^{-1}F''(0)(\Delta U)^2,$$

$$\mu R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}D^{-1}F''(0)R^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}^2.$$

Então, multiplicando-se ambos os lados da última igualdade por  $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$  temos que  $\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2$  vale para algum  $\mu$  se, e somente se,

$$0 = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \frac{1}{2}D^{-1}F''(0)R^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}^2,$$

isto é,  $\varphi$  é ângulo de viscosidade. □

Supondo  $\varphi$  ângulo de viscosidade e  $U_+$  sobre a reta de viscosidade, passando por  $U_-$ , ou seja,  $U_+ = U_- + R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ , de (4.12), temos

$$\mu\Delta U = \frac{1}{2}D^{-1}F''(0)(\Delta U)^2,$$

$$\mu R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}D^{-1}F''(0)R^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}^2,$$

$$\mu(\cos\varphi, \sin\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}R(\cos\varphi, \sin\varphi)D^{-1}F''(0) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}^2$$



e

$$\mu = \frac{1}{2}R(\tilde{\alpha}_D(\varphi)\cos\varphi + \tilde{\beta}_D(\varphi)\sen\varphi),$$

onde a última igualdade foi obtida da expressão (4.10) com  $\tilde{\alpha}_D$  e  $\tilde{\beta}_D$  funções associadas à  $D^{-1}F$ .

Isto sugere a definição de *ângulo de viscosidade excepcional* como sendo aquele que satisfaz  $\tilde{\alpha}_D(\varphi)\cos\varphi + \tilde{\beta}_D(\varphi)\sen\varphi = 0$ . Ou seja, de acordo com a Proposição 4.3, não é possível existir perfis retos com ângulos de viscosidade excepcionais, já que  $\mu = 0$ .

Dizemos que  $U_+$  está *corretamente orientado* com respeito à  $U_-$  sobre a reta de viscosidade se  $\mu < 0$ .

Com isso, traçando-se as retas de viscosidade e a Hugoniot por  $U_0$  podemos encontrar sua intersecção  $U$ . Este procedimento nos permite construir discontinuidades com perfil reto entre  $U_0$  e  $U$  (veja a Figura 4.1 dessa construção). É bom salientar que esta intersecção pode não existir.

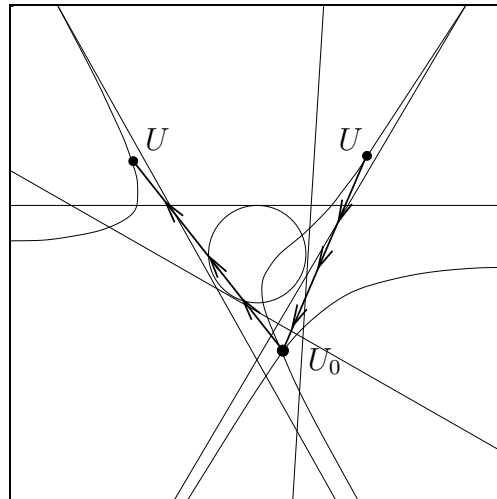


Figura 4.1: Perfil reto.

O teorema abaixo fornece condições precisas para garantir existência de perfis retos e condições para que uma discontinuidade em um modelo quadrático tenha perfil reto. A

demonstração do mesmo é consequência direta da Proposição 4.1 e dos resultados obtidos anteriormente neste mesmo capítulo.

**Teorema 4.1.** Suponha que a matriz de viscosidade  $D$  é invertível e  $\varphi$  é ângulo de viscosidade não excepcional. Seja  $L(\varphi)$  a reta de viscosidade associada à  $\varphi$ .

(a) Suponha  $\varphi$  ângulo não-assintótico. Então  $U_0$  é ligado a algum  $U \neq U_0$  na Hugoniot de  $U_0$  por uma órbita sobre uma reta com ângulo  $\varphi$  se, e somente se,  $U_0 \notin L(\varphi)$ . Neste caso, o estado correspondente  $U$  é único.

(b) Suponha  $\varphi$  ângulo assintótico. Então  $U_0$  é ligado a algum  $U \neq U_0$  na Hugoniot de  $U_0$  por uma órbita sobre uma reta com ângulo  $\varphi$  se, e somente se,  $U_0 \in L(\varphi)$ . Neste caso,  $U$  compreende parte da reta de bifurcação  $L(\varphi)$ .

A órbita vai de  $U_0$  a  $U$  se, e somente se,  $U$  está corretamente orientado com relação a  $U_0$ .

---

### 4.3 Região transicional e solução do problema de Riemann contendo choques transicionais

---

Descreveremos, agora, o conjunto de descontinuidades de cruzamento com perfil reto. Assuma que valem as hipóteses do Teorema 4.1. Então, qualquer ponto  $U_0$  é ligado a algum  $U \neq U_0$  por um perfil reto. O conjunto de pontos  $U_0$  para os quais um choque transicional com perfil reto é chamado *região transicional* para o ângulo de viscosidade  $\varphi$ .

Na situação (a) do Teorema 4.1, a região transicional é um subconjunto aberto do plano no formato de uma cunha, onde para cada um de seus pontos corresponde um único choque transicional para  $\varphi$ . Por outro lado, na situação (b), essa região é parte da reta de bifurcação  $L(\varphi)$  e para cada ponto  $U_L$  deste segmento de reta correspondem estados  $U_R$ 's para os quais a ligação entre  $U_L$  e  $U_R$  é um choque transicional. A ilustração destes itens do Teorema 4.1 encontra-se na Figura 4.2, onde o segmento em negrito da reta  $L_1$  representa a região transicional para um ângulo assintótico enquanto as cunhas hachuradas entre  $L_2$  e  $L_3$  inferiormente e, também, entre  $L_4$  e  $L_5$  superiormente, representam a região transicional para ângulos não-assintóticos.



**Teorema 4.2.** Para sistemas em que a função de fluxo é um gradiente e ainda é quadrática no plano, uma órbita ligando duas selas é um segmento de reta.

Já discutimos, no Capítulo 2, em que consiste uma solução do problema de Riemann. Agora, descreveremos o uso de choques transicionais nessa solução.

Com base na situação (a) do Teorema 4.1 para modelos quadráticos, a classe de choques transicionais para funções fluxo genéricas é caracterizada por uma *aplicação transicional*  $X$ . Esta aplicação é definida em um aberto  $T$ , a região transicional. Ela associa cada ponto  $U$  de  $T$  um ponto  $U' = X(U)$  em  $T' = X(T)$  tal que  $U$  e  $U'$  são ligados por um choque transicional. Temos, como exemplo, na Figura 4.2, que o domínio  $T$  da aplicação transicional corresponde as regiões hachuradas e a parte em negrito da reta  $L_1$ , enquanto que a imagem  $T'$  deste mapeamento corresponde as duas cunhas não-hachuradas e o segmento restante da reta  $L_1$ . Mais exatamente, estes choques são usados para resolver problemas de Riemann da seguinte maneira:

- para um dado estado  $U_L$  à esquerda, construímos a 1-curva de onda;
- se a 1-curva de onda passa pela região  $T$ , então cada estado intermediário  $U_M$  sobre a curva nesta região é ligado ao seu estado imagem  $U' = X(U_M)$  por um choque transicional;
- A velocidade desta onda transicional deve exceder a velocidade da 1-onda de  $U_L$  à  $U_M$ ;
- É gerada uma curva que é imagem da 1-curva de onda pelo mapeamento  $X$ ;
- Desenhemos as 2-curvas de onda (ou ondas transicionais) à partir dos pontos sobre essa curva transicional, imagem da 1-curva de onda.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## O helicóide de soluções

Neste capítulo, inicialmente, vamos descrever o comportamento topológico de soluções de Riemann para o sistema parabólico associado a um modelo particular de sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação, com matriz de viscosidade igual a identidade. O conjunto de soluções será associado a uma variedade que se assemelha a um helicóide. Por fim, faremos uma pequena perturbação em uma das entradas da matriz de viscosidade e mostraremos que o helicóide de soluções ainda está presente.

---

### 5.1 O modelo

---

Para obter o helicóide de soluções vamos considerar um modelo de sistema  $2 \times 2$  de leis de conservação do tipo elíptico-hiperbólico e que satisfaça, ao menos, as doze condições que serão descritas mais adiante. Esse modelo é do tipo I de acordo com a classificação de Schaeffer e Shearer, em [14], apresentada na última seção do Capítulo 3 deste trabalho. Assim, consideraremos como exemplo o problema de Riemann

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_t + \left(\frac{1}{2}(v^2 - u^2) + \rho v\right)_x = 0 \\ v_t + (vu - \rho u)_x = 0 \end{array} \right. \\ U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{para } x \leq 0, \\ U_R, & \text{para } x \geq 0. \end{cases} \end{array} \right. , \quad (5.1)$$

com o sistema parabólico associado tendo a matriz de viscosidade como sendo a identidade.

Observe que o modelo (5.1) tem comportamento elíptico dentro do círculo  $O = \{(u, v) : u^2 + v^2 < \rho^2\}$  e hiperbólico fora de  $O$ , já que os autovalores  $\lambda_i(U_L) = (-1)^i \sqrt{u^2 + v^2 - \rho^2}$ ,  $i = 1, 2$ , de  $DF(u, v)$ , são complexos conjugados para  $U$  dentro do círculo e reais e distintos para  $U$  fora.

Neste exemplo, uma solução onda viajante é uma solução do sistema de equações diferenciais dependendo de  $u_-$ ,  $v_-$  e  $s$ :

$$\begin{cases} \dot{u} = -s(u - u_-) + \frac{1}{2}(v^2 - u^2) + \rho v - \frac{1}{2}(v_-^2 - u_-^2) + \rho v_- \\ \dot{v} = -s(v - v_-) + vu - \rho u - v_- u_- - \rho u_- \end{cases} \quad (5.2)$$

O modelo considerado nesta seção é um exemplo de modelos que satisfazem as condições:

**(C1)** O problema de Riemann, no espaço de estados, tem uma região elíptica  $O$  compacta com fronteira fechada  $C^1$ , isto é, a matriz  $DF(U)$  tem autovalores complexos conjugados se  $U$  está dentro de  $O$  e autovalores reais e distintos se  $U$  está fora de  $O$ .

**(C2)** As soluções de Riemann contém somente 1-choque de Lax, 2-choque de Lax e choques transicionais.

**(C3)** O sistema dinâmico associado ao problema de Riemann tem no máximo quatro singularidades. Se ele tem quatro singularidades, então elas devem ser três selas e uma não-sela.

**(C4)** As órbitas ligando duas selas do sistema dinâmico associado são de dois tipos:

linhas retas e curvas. Denotamos por  $T_r$  choques transicionais associados a órbitas retas e  $T_c$  para transicionais com órbitas curvas. Neste trabalho utilizaremos o primeiro tipo de choques transicionais.

**(C5)** O retrato de fase de (5.2) tem três retas invariantes  $R_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), formando um triângulo  $\nabla$ , tal que se duas selas estão sobre  $R_i$  e são ligadas por órbitas, então pelo menos uma órbita  $\gamma$  está sobre  $R_i$ . Cada reta é tangente a fronteira da região elíptica em exatamente um ponto e não existe outra intersecção. Cada reta é composta de duas partes: a sela  $\alpha$ -limite de cada  $\gamma$  está na primeira parte  $R_{i\alpha}$  e a  $\omega$ -limite de cada  $\gamma$  está na segunda parte  $R_{i\omega}$ . O ponto de tangência entre a reta e a fronteira da região elíptica é a fronteira entre essas duas partes. Veja essa condição ilustrada na Figura 5.1.

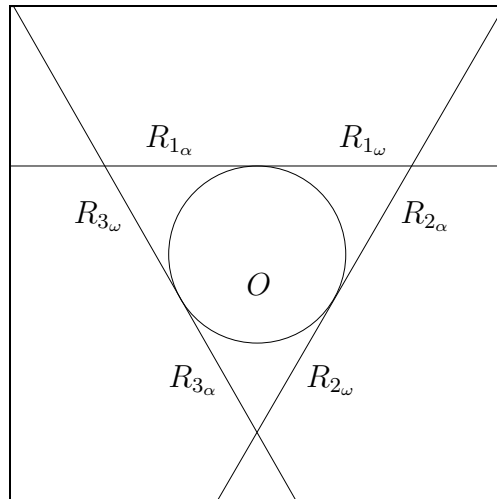


Figura 5.1: Retas invariantes.

**(C6)** Para valores iguais de  $s$  e valores apropriados de  $U_-$ , o sistema (5.2) possui 3-ciclos, que são três selas conectadas por órbitas do mesmo sistema dinâmico (mesmos  $U_-$  e  $s$ ) e seus cantos coincidem com os cantos do  $\nabla$  (então o  $\nabla$  coincide com um 3-ciclo).

**(C7)** A partir de estados apropriados, as curvas de 1-choque de Lax intersectam transversalmente a parte  $R_{i\alpha}$  da reta invariante  $R_i$  e as curvas de 2-choques de Lax intersectam transversalmente a parte  $R_{i\omega}$  da reta invariante  $R_i$ . Veja a Figura 5.2.

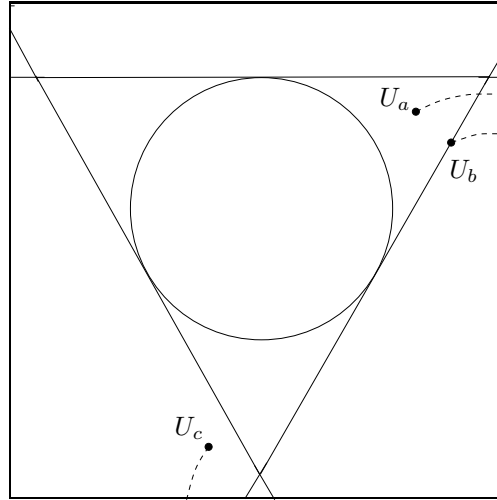


Figura 5.2: Curvas de 1-choque.

(C8) Seja  $S_1^{-1}(R_{i_\alpha})$  o conjunto de todos os estados  $U_L$  tal que a 1-curva de choque a partir de  $U_L$  intersecta  $R_{i_\alpha}$  e seja  $S_2(R_{i_\omega})$  o conjunto de todos os estados  $U_R$  tal que a 2-curva de onda para trás por  $U_R$  ( $S_2^{-1}(U_R)$ ) intersecta  $R_{i_\omega}$ . Esses dois conjuntos são não vazios.

(C9) Em uma sequência de mais de dois choques transicionais, todos os choques têm a mesma velocidade exceto, possivelmente, o primeiro e o último choques.

(C10) Fixe um estado em cada  $R_{i_\alpha}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que é uma sela. Variando  $s$ , existe um intervalo  $I_i$  contido em  $R_{i_\omega}$  tal que toda sela em  $I_i$  é ligada a uma sela em  $R_{i_\alpha}$  por uma ligação reta.

(C11) Exceto em casos de bifurcação, o comprimento da órbita ligando dois estados  $U_-$  e  $U_+$  depende continuamente de  $U_-$  e  $U_+$ .

(C12) Uma ligação, reta ou curva, entre duas selas pode desaparecer através de uma não-sela colidindo com uma das selas. Em leis de conservação, essas colisões ocorrem sobre a fronteira entre ramos da curva de Rankine-Hugoniot.

Com essas condições satisfeitas vamos, agora, introduzir a noção de classes de soluções.



## 5.2 Classes de soluções

Um conjunto de soluções com a mesma sequência de ondas elementares chama-se *classe de solução*. Em nosso caso, duas classes diferem-se pelo número de choques transicionais retos presentes.

Denotaremos uma sequência de ondas usadas para descrever uma solução, fixado um estado  $U_L$ , pela notação do primeiro tipo de onda utilizada, seguido de dois pontos, seguido da notação para o segundo tipo de onda utilizada e assim sucessivamente até o último tipo de onda, como por exemplo  $S_1 : T_r : T_r : T_r : S_2$ , que significa uma sequência de ondas começando por um 1-choque seguido de três transicionais retos e seguido de um 2-choque.

Apresentaremos as classes de soluções para nosso exemplo na Tabela 5.1, onde  $3C_n$  denota um  $n$  3-ciclo ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) com  $n$  representando quantas vezes o 3-ciclo foi percorrido.

| Classe    | Descrição da solução                        |
|-----------|---|
| $V$       | $S_1 : T_r : T_r : T_r : S_2.$              |
| $VI$      | $S_1 : T_r : T_r : T_r : T_r : S_2.$        |
| $XX_n$    | $S_1 : 3C_n : T_r : S_2.$                   |
| $XXI_n$   | $S_1 : 3C_n : T_r : T_r : S_2.$             |
| $XXII_n$  | $S_1 : 3C_n : T_r : T_r : T_r : S_2.$       |
| $XXIII_n$ | $S_1 : T_r : 3C_n : T_r : S_2.$             |
| $XXIV_n$  | $S_1 : T_r : 3C_n : T_r : T_r : S_2.$       |
| $XXV_n$   | $S_1 : T_r : 3C_n : T_r : T_r : T_r : S_2.$ |

Tabela 5.1: Classes de soluções

As fronteiras das classes ocorrem através do aparecimento ou desaparecimento de choques transicionais. Os dois mecanismos responsáveis pela mudança entre classes usados no modelo considerado neste capítulo são:

**(M1)** Um choque transicional aparece ou desaparece após o 1-choque. Por exemplo, uma sequência de ondas da forma  $S_1 : T_r$  (ou  $U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{T_r} U_{M_2}$ ), isto é, formada por um 1-choque seguido de um choque transicional, muda para uma sequência com um 1-choque  $S_1$  (ou

$U'_L \xrightarrow{S_1} U'_{M_2}$ ), apenas. A mudança ocorre quando o estado intermediário  $U_{M_2}$  cruza a fronteira entre o ramo de choque transicional e o ramo de 1-choque de Lax na curva de Rankine-Hugoniot de  $U_{M_1}$ .

**(M2)** Um choque transicional aparece ou desaparece antes do 2-choque. Por exemplo, uma sequência de ondas  $T_r : S_2$  (ou  $U_{M_1} \xrightarrow{T_r} U_{M_2} \xrightarrow{S_2} U_R$ ), isto é, formada um choque transicional seguido por um 2-choque, muda para uma sequência com um 2-choque  $S_2$  (ou  $U'_{M_2} \xrightarrow{S_2} U'_R$ ), somente. A mudança ocorre quando o estado intermediário  $U_{M_2}$  cruza a fronteira entre o ramo de choque transicional e o ramo de 2-choque de Lax na curva de Rankine-Hugoniot de  $U_{M_1}$ .

Em **(M1)**, usamos a notação  $(M1+)$  para o caso em que  $T_r$  aparece e a notação  $(M1-)$  o caso em que  $T_r$  desaparece. Analogamente, usamos as notações  $(M2+)$  e  $(M2-)$  em **(M2)**. Mais detalhes sobre classes e fronteiras de classes em [1].

---

## 5.3 O helicóide

---

Já que a mudança de classes de solução é devida ao aparecimento ou desaparecimento de choques transicionais, devemos nos concentrar na região transicional, onde podemos observar tais mudanças.

Vimos no Capítulo 4 deste trabalho que para identificar os choques transicionais podemos parametrizar a Hugoniot de  $U_0$  por coordenadas polares centrada em  $U_0$  por um ângulo  $\varphi$ . Em seguida, definimos ângulo de viscosidade usando essas coordenadas e vimos, na Seção 4.3, como encontrar a região transicional.

Encontramos, com o auxílio do programa *Maple*, para o exemplo em que a matriz de viscosidade é a identidade, usando a expressão (4.9), o polinômio

$$p_1(\varphi) = 4\text{sen}(\varphi)\text{cos}^2(\varphi) - \text{sen}(\varphi) . \quad (5.3)$$

Obtemos como solução de  $p_1(\varphi) = 0$  os ângulos de viscosidade  $0$  e  $\pm\frac{\pi}{3}$ . Substituindo estes ângulos em (4.8), vemos que são ângulos assintóticos, logo pelo item (b) do Teorema 4.1, as ligações retas estão todas sobre as retas de bifurcação. Mais especificamente, com o ângulo  $\frac{\pi}{3}$ , para cada ponto  $U_L$  do segmento  $R_{2\alpha}$  da Figura 5.1 corresponde um segmento de estados  $U_R$ 's para os quais a ligação entre  $U_L$  e  $U_R$  é um choque transicional. Analogamente, para o ângulo  $-\frac{\pi}{3}$ , a região transicional é o segmento  $R_{3\alpha}$ , enquanto que para o ângulo  $0$  é o segmento  $R_{1\alpha}$ . Ou seja, neste exemplo, os choques transicionais  $T_r$  ocorrem sobre as bifurcações que coincidem com as retas invariantes que formam o  $\nabla$ .

Sejam  $U_L$  fixo e  $U_R$  variando dentro do  $\nabla$ . Em virtude das condições (C7) e (C9) podemos construir uma solução na classe  $V$  da seguinte maneira,  $U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{T_r} U_{M_2} \xrightarrow{T_r} U_{M_3} \xrightarrow{T_r} U_{M_4} \xrightarrow{S_2} U_R$ , onde o segundo choque transicional tem velocidade zero. Uma ilustração deste caso encontra-se na Figura 5.3.

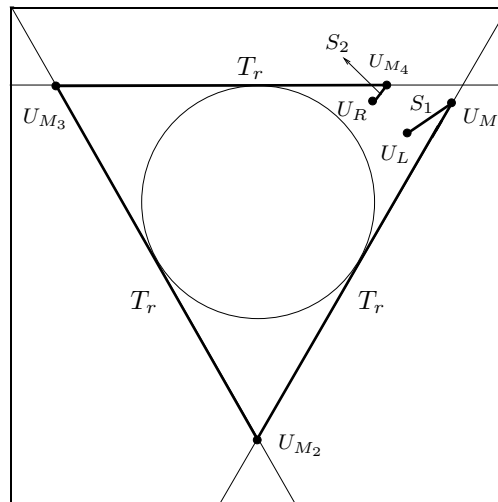


Figura 5.3: Solução classe  $V$  no plano- $uv$ .

Ainda variando  $U_R$ , no sentido horário, dentro do  $\nabla$  e aproximando-o da parte inferior direita, temos que o estado  $U_{M_4}$  move-se para direita, fazendo com que a solução permaneça na classe  $V$  até que  $U_{M_4}$  alcance o canto superior direito do  $\nabla$ . Neste ponto a solução fica na

fronteira das classes  $V$  e  $VI$  até que movendo-se um pouco mais  $U_R$ , a solução entra na classe  $VI$ , por  $(M2+)$ .

Continuando esse processo, ainda por  $(M2+)$ , a solução deixa a classe  $VI$  e entra na classe dada por  $S_1 : T_r : T_r : T_r : T_r : T_r : S_2$ , que de acordo com as condições **(C6)** e **(C9)**, corresponde a classe  $XXIII_1$ . As soluções então mudam para a classe  $XXIV_1$ , em seguida para a  $XXV_1$  e assim sucessivamente, sempre cruzando as fronteiras entre uma classe e outra.

Podemos descrever as soluções apresentadas acima através de uma variedade em  $\mathbb{R}^3$ . Para tanto, adicionamos ao espaço de estados um parâmetro  $\eta$  dado pela soma do comprimento do arco da 1-curva de choque entre  $U_L$  e o primeiro estado intermediário, com o comprimento das órbitas ligando as selas dos choques transicionais e com o comprimento da 2-curva de choque do último estado intermediário ao estado  $U_R$ . Desta forma, à medida que o parâmetro  $\eta$  aumenta as soluções mudam de classe e, tridimensionalmente, temos uma superfície que se assemelha a um helicóide, onde cada folha do helicóide corresponde a um estado  $U_L$ . O helicóide de soluções no plano- $u_r v_r$  está ilustrado na Figura 5.4(a). Já o helicóide no espaço- $u_r v_r \eta$  encontra-se ilustrado na Figura 5.4(b), que foi cedida por Azevedo, para  $U_L$  dado anteriormente.

---

## 5.4 Perturbação da matriz de viscosidade

---

No modelo estudado nas seções anteriores consideramos a matriz de viscosidade como sendo a identidade. Vamos agora, mudar uma entrada da matriz e mostrar que o comportamento semelhante ao helicóide de soluções ainda está presente.

Seja a matriz de viscosidade denotada por  $D(U) = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . A princípio, deixamos

$d_{12}$  genérico. O aparecimento de um 3-ciclo é indispensável para a construção do helicóide,

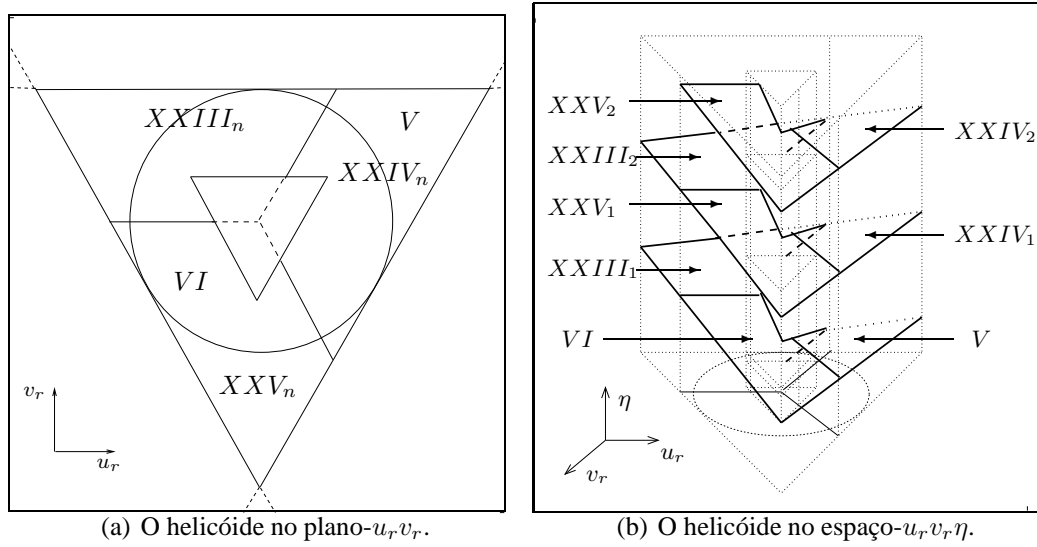


Figura 5.4: O helicóide de soluções.

como foi visto na seção anterior. Então, ainda com interesse nos choques transicionais retos que formam o 3-ciclo, encontraremos a fronteira da região transicional, seguindo os passos do Capítulo 4, para nosso modelo com a matriz de viscosidade perturbada.

Com a expressão (4.9), do Capítulo 4, porém com a função de fluxo dada por  $D^{-1}F$ , encontramos um polinômio cúbico que nos fornece o valor dos ângulos de viscosidade  $\varphi$ . Fizemos este cálculo com auxílio do programa *Maple* e obtivemos o polinômio

$$p_2(\varphi) = -2d_{12}\cos^3(\varphi) + 2d_{12}\cos(\varphi) + 4\text{sen}(\varphi)\cos^2(\varphi) - \text{sen}(\varphi). \quad (5.4)$$

Dividindo (5.4) por  $\cos^3(\varphi)$  podemos escrevê-lo em função de  $tg(\varphi)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & -2d_{12} + 2d_{12}\frac{1}{\cos^2(\varphi)} + 4tg(\varphi) - tg(\varphi)\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = \\ & = -2d_{12} + 2d_{12} + 2d_{12}tg^2(\varphi) + 4tg(\varphi) - tg(\varphi) - tg^3(\varphi). \end{aligned}$$

Denotando  $tg(\varphi)$  por  $T$  chegamos ao seguinte polinômio

$$-T^3 + 2d_{12}T^2 + 3T,$$

que sempre tem como solução  $T = 0$ . Isso implica que entre os ângulos de viscosidade  $\varphi$ , encontra-se o *zero*, não importando o valor de  $d_{12}$ . E com este ângulo, a região transicional é apenas parte da reta  $L_1$ , como já visto, que coincide com a reta de bifurcação.

Tomamos como exemplo, a partir de agora,  $d_{12} = 1/2$  e encontramos os ângulos de viscosidade dados pelo polinômio  $-T^3 + T^2 + 3T$  correspondente a este exemplo. Com isso, temos como região transicional parte da reta  $L_1$  descrita acima correspondente ao ângulo *zero* e como fronteira da região transicional duas retas cruzando-se e formando cunhas, como previsto na Seção 4.3 do Capítulo 4 deste trabalho, para os outros dois ângulos de viscosidade (Figura 5.5).

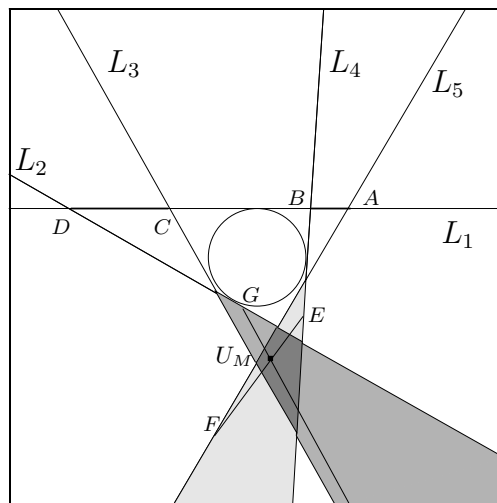


Figura 5.5: Regiões transicionais e imagem da aplicação transicional.

Com o auxílio do programa *Riemann Solver* [8], verificamos que a imagem do segmento  $\overline{AB}$  da reta  $L_1$ , pela aplicação transicional, nos dá uma curva na região hachurada entre  $L_4$  e  $L_5$  representada por  $\overline{EF}$  na Figura 5.5. Traçando-se a Hugoniot para trás pelos pontos do segmento de reta  $\overline{CD}$  de  $L_1$ , temos outra curva na região também hachurada entre as retas  $L_2$  e  $L_3$  representada por  $\overline{GH}$ , onde o ponto  $H$  não aparece na Figura 5.5, mas é imagem do ponto  $D$  pela mesma aplicação transicional. Temos um ponto de intersecção  $U_M$  entre estas duas curvas e que está na intersecção dessas duas regiões. Esse ponto  $U_M$  é um estado intermediário entre

dois choques transicionais. Isso permite a formação de uma sequência de três transicionais, conseqüentemente de 3-ciclos, que dão origem a um helicóide, de modo análogo ao que foi feito em [1], usando os espaço de estados e o parâmetro  $\eta$ .

Com isso, podemos concluir que fazendo uma perturbação na entrada  $d_{12}$  da matriz de viscosidade, o comportamento topológico das soluções semelhante a um helicóide ainda está presente.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Azevedo, A. V., *Helicoid of Riemann solutions: A new mechanism for multiplicity of solutions*, *Matemática Contemporânea*, **22** (2002), 1-17.
- [2] Azevedo, A. V.; Marchesin, D.; Plohr, B. J.; Zumbrun, K., *Capillary instability in models for three-phase flow*, *Z. angew. Math. Phys.*, **53** (2002), 713-746.
- [3] Aziz, K.; Settari A., *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science, New York - London, 1990.
- [4] Chorin, A. J.; Marsden J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [5] Courant, R.; Friedrichs, K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, New York, 1948.
- [6] Gel'Fand, I. M., *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations*, English transl. in *Amer. Mat. Soc. Trans.*, Ser. 2 **29** (1963), 295-381.
- [7] Gomes, M. E. S., *Problema de Riemann singular para um modelo de quarta ordem em escoamento multifásico*, Tese de Doutorado, PUC - Rio de Janeiro, 1987.
- [8] Isaacson, E. L.; Marchesin, D.; Plohr, B. J., *Riemann Solver*, (2004).



- [9] Isaacson, E. L.; Marchesin, D.; Plohr, B. J., *Transicional waves for conservation laws*, SIAM J. Math. Anal., **21** (1990), 837-866.
- [10] Lax, P. D., *The formation and decay of shock waves*, Amer. Math. Monthly, **79** (1972), 227-241.
- [11] Lax, P. D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1957), 537-566.
- [12] Nachbin, A., *Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos - 23º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [13] Peaceman, D., *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, Amsterdam, 1977.
- [14] Schaeffer, D. G.; Shearer, M., *The classification of  $2 \times 2$  systems of non-strictly hyperbolic conservations laws, with application to oil recovery*, Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 141-178.
- [15] Scheidegger, A. E., *The Physics of Flow Through Porous Media*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1963.
- [16] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Second Edition, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1994.
- [17] Souza, A. J., *Sistemas singulares de três leis de conservação em escoamento multifásico*, Tese de Doutorado, PUC - Rio de Janeiro, 1989.
- [18] Wenstrom, J. H.; Plohr, B. J., *Classification of homogeneous quadratic conservation laws with viscous terms*, Computational and Applied Mathematics , **26**, n. 2, ISSN 0101-8205, 2007.