

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM NUMÉRICA DO FLUXO TRANSIENTE EM MEIO POROSO  
NÃO SATURADO SOB A AÇÃO DE CENTRIFUGAÇÃO**

**MATEUS BEZERRA ALVES DA COSTA**

**ORIENTADOR: PROF. ANDRÉ LUÍS BRASIL CAVALCANTE, D.Sc.**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM GEOTECNIA**

**PUBLICAÇÃO: G.DM 289/2017  
BRASÍLIA/DF: JULHO/2017**

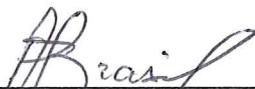
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

MODELAGEM NUMÉRICA DO FLUXO TRANSIENTE EM MEIO POROSO  
NÃO SATURADO SOB A AÇÃO DE CENTRIFUGAÇÃO

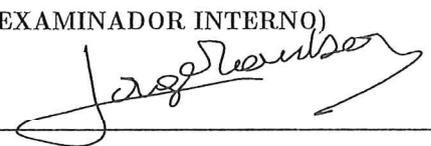
MATEUS BEZERRA ALVES DA COSTA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

  
\_\_\_\_\_  
PROF. ANDRÉ LUÍS BRASIL CAVALCANTE, D.Sc. (UNB)  
(ORIENTADOR)

  
\_\_\_\_\_  
PROF. ANDRÉ PACHECO DE ASSIS, D.Sc. (UNB)  
(EXAMINADOR INTERNO)

  
\_\_\_\_\_  
PROF. JORGE GABRIEL ZORNBERG, D.Sc. (UT AUSTIN)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

  
\_\_\_\_\_  
PROF. RAFAEL TEIXEIRA EUFRÁSIO, D.Sc. (UARK/NASA)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

DATA: BRASÍLIA/DF, 25 DE JULHO DE 2017.

## FICHA CATALOGRÁFICA

COSTA, MATEUS BEZERRA ALVES DA

Modelagem Numérica do Fluxo Transiente em Meio Poroso Não Saturado Sob a Ação de Centrifugação [Distrito Federal] 2017

xvii, 75 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Geotecnia, 2017)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Fluxo não saturado      2. Centrífuga  
3. Equações diferenciais      4. Métodos numéricos

I. ENC/FT/UnB

II. Mestre

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Costa, M.B.A. (2017). Modelagem Numérica do Fluxo Transiente em Meio Poroso Não Saturado Sob a Ação de Centrifugação. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-289/2017, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Mateus Bezerra Alves da Costa

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Modelagem Numérica do Fluxo Transiente em Meio Poroso Não Saturado Sob a Ação de Centrifugação

GRAU / ANO: Mestre / 2017

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

*Mateus Bezerra Alves da Costa*

Mateus Bezerra Alves da Costa

CA 2 Bloco A Apt 305 B

71503-502 - Brasília/DF – Brasil

## DEDICATÓRIA

*À Kathy.  
Seu amor, refletido em mim,  
está presente em cada linha  
deste trabalho.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, o criador de tudo, inclusive da geotecnia.

À minha esposa, companheira e melhor amiga Katherin. A quem tudo devo e por quem acordo todos os dias. A ela, que me dá ânimo, força e perseverança no meu caminhar. A ela, cujo modelo me serve de inspiração e amor, estimulando-me sempre a seguir em frente, evoluir e crescer. Obrigado por tudo!

À minha mãe Maria Helena, cujo exemplo sempre me levou adiante e me ensinou valores de honestidade, honra e dever. Obrigado por estar sempre presente e sempre me agraciando com sua sabedoria, calma e tranquilidade, contrabalanceando o meu jeito ansioso e frenético de fazer as coisas.

Ao meu pai José Roberto, cujos conselhos, dedicação e exemplo de capacidade de trabalho e de estudo me servem de inspiração até hoje. Obrigado por me ensinar coisas da vida que livro algum ensinará.

Aos meus irmãos Thiago e André que, mesmo distantes, me dão exemplo, apoio e carinho para o prosseguimento de minha caminhada.

Ao meu orientador e Prof. André Brasil que me acolheu, me recebeu, me ensinou e que desejo que continue me ensinando. Ele, que acreditou em meu potencial quando nem antes me conhecia, somente pelo seu olhar vívido e profético. Obrigado por me ensinar que as decisões mais sábias, técnicas ou não, saem do meu coração, e não dos livros.

À família Kyokushin Karatê Brasília Dojo, em especial ao Sensei Josimar Ikeda, que me ensinou e ensina, diariamente, valores de superação e de garra por meio do espírito do *Dojo Kun*.

Aos amigos mais que especiais: Raimundo León, Luiza Nicolato, Lucas Parreira e Lucas Leandro. Obrigado por contribuírem e fazerem com que minha caminhada fosse mais leve e mais serena. Ter o apoio de vocês durante todo esse tempo foi fundamental, criando laços para toda a vida. Contem comigo sempre!

Ao Prof. Rafael Eufrásio, pela dedicação e empenho em me ajudar, não só com referências e conselhos de cunho técnico-científico, mas também com o exemplo de humildade em simples gestos corriqueiros.

Aos Profs. Silvrano Adonias, Alfran Sampaio e Adriano Frutuoso, que me inspiraram e me deram ânimo e êxito para iniciar essa jornada pela geotecnia.

À Profa. Verônica Castelo Branco, cujas orientações pedagógicas e técnicas, orientações estas nunca esquecidas, me ajudaram enormemente na elaboração deste trabalho e na maneira de lidar com todos ao meu redor.

Aos professores, funcionários e amigos da geotecnia. Cada um de vocês, com suas particularidades, formam esse corpo com extremo potencial de evoluir, de crescer e de ser um fortíssimo programa de referência mundial para a engenharia.

## RESUMO

O conhecimento profundo do fluxo não saturado pode ajudar bastante na otimização de projetos e na acurácia de resultados em diversos problemas da engenharia geotécnica. Entretanto, as complexas leis que o regem, juntamente com a dificuldade de obtenção das propriedades hidráulicas para alguns tipos de solo, tornam a sua modelagem um processo desafiador, laborioso e, algumas vezes, com dados de saída do modelo um tanto questionáveis. Em geral, são necessárias duas curvas que refletem as propriedades hidráulicas de um solo não saturado: curva característica e curva de condutividade hidráulica não saturada. O longo tempo de obtenção dessas curvas para determinados tipos de solo utilizando técnicas tradicionais pode dificultar a utilização da análise não saturada e levar ao uso frequente de relações empíricas ou mesmo a considerar o solo sempre em saturação plena. Desta forma, o permeâmetro de centrífuga surge como alternativa de aceleração da obtenção das propriedades hidráulicas. O objetivo do trabalho foi desenvolver um modelo, caracterizado por uma equação diferencial parcial capaz de representar o ensaio de centrífuga considerando o fluxo não saturado, transiente e com aceleração centrífuga variável ao longo da amostra de solo. O modelo tinha como característica principal a possibilidade de utilização de dados de um único sensor de umidade para obter a curva característica e a curva de condutividade hidráulica não saturada, utilizando como partida os estudos desenvolvidos por Cavalcante & Zornberg (2017). O desenvolvimento analítico da solução e a solução numérica foi feita utilizando o método das diferenças finitas e o método das linhas. As soluções numéricas permitiram a visualização qualitativa com a análise paramétrica e de sensibilidade do fenômeno à frequência de rotação. O modelo proposto foi validado pela utilização de dados reportados em McCartney (2007). A solução do modelo, juntamente com o método dos mínimos quadrados, se revelaram adequados na obtenção das propriedades hidráulicas de solos, com excelente precisão e rapidez comparado às técnicas tradicionais. Por meio da análise das condições de contorno relativas ao experimento e à modelagem, foi possível definir uma região mais favorável para instalação do sensor de umidade. Em geral, o modelo foi capaz de representar o fenômeno em suas peculiaridades e foi criada uma metodologia de interpretação de dados transientes e estacionários que permitiram a obtenção das propriedades hidráulicas requeridas.

## ABSTRACT

The unsaturated flow can be a great ally to design optimization and to results accuracy in several problems to be solved in geotechnical engineering, but the complex laws governing it, along with the difficulty of obtaining the hydraulic properties for some soil types, make its modeling a challenging and laborious process with some questionable output data. In general, two curves that reflect the hydraulic properties of unsaturated soil are necessary: Soil Water Retention Curve and k-function. The testing time requirement of these curves, for certain soil types, using traditional techniques, can be long and costly, making the use of unsaturated analysis difficult and leading researchers to use, frequently, empirical relationships or considering the even considering the soil always in the saturated case. In this way, the centrifuge permeameter was developed as an alternative to accelerate the acquisition of the hydraulic properties. The object of this study was to develop a model, characterized by a partial differential equation, capable of representing the centrifuge test considering the unsaturated and transient flow and variable centrifuge acceleration along the soil sample. The model's proposal was to obtain the SWRC and the k-function based on only one TDR data and the model of Cavalcante & Zornberg (2017). The analytical development and its numerical solution was made using the finite difference method and the method of lines. The numerical solutions allowed the qualitative visualization with the parametric and frequency of the rotation's sensitivity analysis. The proposed model was validated by a soil studied at McCartney (2007). The model's solution, along with the least square minimum method, proved to be adequate in obtaining the hydraulic properties of the soil, with excellent accuracy and celerity compared to traditional techniques. A more favorable sensor installation position was defined through the analysis of the boundary conditions concerning the experiment and the modelling. In general, the model was able to represent the phenomenon in its peculiarities and a methodology for transient and stationary data interpretation was created, allowing the acquisition of the wanted hydraulic properties.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS	3
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
<b>2. MÉTODOS MATEMÁTICOS</b>	<b>6</b>
2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	6
2.2 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	9
2.3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	10
2.4 MÉTODO DAS LINHAS	14
2.5 MÉTODO DE AJUSTE: MÍNIMOS QUADRADOS	15
<b>3. FLUXO EM MEIO POROSO</b>	<b>17</b>
3.1 FLUXO NÃO SATURADO	17
3.2 MODELO CONSTITUTIVO DE CAVALCANTE & ZORNBERG (2017A)	23
3.3 FLUXO NÃO SATURADO SOB CENTRIFUGAÇÃO	25
3.4 EQUAÇÕES DE CAVALCANTE & ZORNBERG (2017B, <i>IN PRESS</i> ) PARA A CENTRÍFUGA	29
<b>4. METODOLOGIA</b>	<b>31</b>
4.1 MATERIAL	31
4.2 MÉTODOS	34
4.2.1 DESENVOLVIMENTO DA EDP REGENTE DO FENÔMENO	34
4.2.2 VALIDAÇÃO DA FERRAMENTA NDSOLVEVALUE POR MEIO DO MDF	34
4.2.3 ANÁLISE PARAMÉTRICA E DE SENSIBILIDADE À FREQUÊNCIA DE ROTAÇÃO	35
4.2.4 VALIDAÇÃO DO MODELO POR DADOS EXPERIMENTAIS	36
<b>5. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E SOLUÇÕES</b>	<b>39</b>
5.1 DEDUÇÃO DO MODELO PARA CENTRIFUGAÇÃO	39
5.2 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA SOLUÇÃO	41

<b>5.3</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA COM O MDF</b>	<b>44</b>
<b>5.4</b>	<b>CONDIÇÕES DE CONTORNO</b>	<b>48</b>
5.4.1	CONTORNO COM UMIDADE CONSTANTE	48
5.4.2	CONTORNO COM INFILTRAÇÃO COM VELOCIDADE CONSTANTE	48
<b>6.</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS</b>	<b>50</b>
<b>6.1</b>	<b>ANÁLISE PARAMÉTRICA E DE SENSIBILIDADE</b>	<b>50</b>
<b>6.2</b>	<b>VALIDAÇÃO DO MODELO PARA OBTENÇÃO DAS PROPRIEDADES HIDRÁULICAS</b>	<b>57</b>
6.2.1.	OBTENÇÃO DA CURVA CARACTERÍSTICA	57
6.2.2.	VALIDAÇÃO DO MODELO PARA O SENSOR A1 (R = 0,055M)	59
6.2.3.	VALIDAÇÃO DO MODELO PARA O SENSOR A2 (R = 0,105M)	62
6.2.4.	VALIDAÇÃO DO MODELO PARA O SENSOR A3 (R = 0,155M)	64
6.2.5.	VALIDAÇÃO DO MODELO PARA O SENSOR A4 (R = 0,205M)	65
6.2.6.	RESUMO DOS RESULTADOS ENCONTRADOS PARA OS SENSORES A1, A2, A3 E A4	67
6.2.7.	CURVA DE CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA NÃO SATURADA (K-FUNCTION) DO SOLO	68
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>70</b>
<b>7.1</b>	<b>SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>73</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Ilustração do esquema de discretização do MDF .....	11
Figura 2.2 - Gráfico da equação da equação da difusão resolvida pelo método das linhas (modificado de Schiesser & Griffiths, 2009) .....	15
Figura 3.1 - Diagrama de fases do solo com as indicações dos volumes (à esquerda) e das massas (à direita) de um solo genérico. ....	18
Figura 3.2 - Curva característica do solo obtida a partir de diferentes técnicas experimentais (modificado de McCartney, 2007). ....	20
Figura 3.3 - Exemplo de função de condutividade hidráulica não saturada em função da sucção mátrica (modificado de Lu & Likos, 2004). ....	22
Figura 3.4 - Aparecimento de vazios preenchidos por ar à medida que a sucção no solo aumenta. ....	22
Figura 3.5 – Permeâmetro de centrífuga: (a) Imagem externa da centrífuga (cedida pela Universidade do Texas em Austin); (b) Imagem dos componentes internos da centrífuga (cedida pela Universidade do Texas em Austin); (c) Seção transversal ilustrativa da centrífuga desenvolvida na Universidade de Texas em Austin (Zornberg & McCartney, 2010) .....	26
Figura 3.6 - Esquemática das principais variáveis do modelo apresentado em Zornberg & McCartney (2010) (modificado de Zornberg & McCartney, 2010).....	27
Figura 3.7 - Sistema de eixos da centrífuga com origem no início do fluxo.....	28
Figura 4.1 - Avanço da frente de umidade ao longo do tempo e do comprimento de solo (modificado de McCartney, 2007) .....	33

Figura 4.2 - Ilustração das posições dos sensores quantificados em termos de $r$ e de $z_m$ .....	33
Figura 4.3 - Curva característica do solo estudado obtida por meio dos ensaios de papel filtro e placa de pressão (modificado de McCartney, 2007).....	34
Figura 4.4 - Ilustração dos procedimentos de validação da ferramenta <i>NDSolveValue</i> que utiliza MOL.....	35
Figura 4.5 - Ilustração de como foi desenvolvida a análise paramétrica e a análise de sensibilidade.....	36
Figura 4.6 - Ilustração demonstrativa de como foi realizada a validação do modelo para os dados experimentais .....	38
Figura 6.1 - Análise da estabilidade de Von Neumann para determinação do $\Delta t$ que torna a discretização estável .....	50
Figura 6.2 - Validação do método das linhas (MOL) por meio do método das diferenças finitas (MDF) .....	51
Figura 6.3 - Simulação do fenômeno com as condições de contorno reais para pontos distintos no solo para uma frequência de rotação $f = 150 \text{ rpm}$ .....	52
Figura 6.4 - Avanço da frente de umidade ao longo da amostra para $f = 150 \text{ rpm}$ ...	54
Figura 6.5 - Simulação do fenômeno com as condições de contorno reais para pontos distintos no solo para uma frequência de rotação $f = 200 \text{ rpm}$ .....	55
Figura 6.6 - Análise de sensibilidade à frequência para um sensor localizado em $r = 10$ $cm$ .....	56
Figura 6.7 - Curva característica do solo estudado com porosidade $n = 0,47$ .....	58

Figura 6.8 - Modelagem da curva característica do solo estudado utilizando o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a) .....	59
Figura 6.9 - Dados do sensor de umidade A1 no ensaio do permeâmetro de centrífuga .....	59
Figura 6.10 - Variação do valor dos resíduos quadráticos com $\delta$ .....	60
Figura 6.11 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A1 .....	61
Figura 6.12 - Dados do sensor de umidade A2 no ensaio do permeâmetro de centrífuga .....	63
Figura 6.13 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A2 .....	63
Figura 6.14 - Dados do sensor de umidade A3 no ensaio do permeâmetro de centrífuga .....	64
Figura 6.15 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A3 .....	65
Figura 6.16 - Dados do sensor de umidade A4 no ensaio do permeâmetro de centrífuga .....	66
Figura 6.17 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A4 .....	66
Figura 6.18 - Curva de condutividade hidráulica obtida por meio do delta advindo do modelo proposto.....	68

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados para a simulação paramétrica do fenômeno .....	31
Tabela 4.2 - Dados para validação do modelo (Teste IA) (modificado de McCartney, 2007) .....	32
Tabela 6.1 - Relação dos $\delta$ encontrados e comparação com o $\delta$ real .....	68

## Lista de Abreviações e de Símbolos

Abreviação	Significado
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
MDF	Método das Diferenças Finitas
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MOL	<i>Method of Lines</i> (Método das Linhas)
PVI	Problema de Valor Inicial
TDR	<i>Time Domain Reflectometer</i>

Símbolo	Significado
$a_{cf}$	Aceleração centrífuga
$e$	Número de Euler
erf	Função erro de Gauss
$f$	Frequência de rotação da centrífuga
$G$	Fator de amplificação
$g$	Aceleração gravitacional
$H_\lambda$	Polinômio de Hermite
$I$	Número imaginário
$J_i$	Resíduos no MMQ
$k$	Constante de separação
$k(\theta)$	Função de condutividade hidráulica não saturada em função de $\theta$
$k(\psi)$	Função de condutividade hidráulica não saturada em função de $\psi$
$k_s$	Condutividade hidráulica saturada
$L$	Comprimento da amostra de solo utilizada na centrífuga
$n$	Porosidade
$N_r$	Nível de gravidade na centrífuga

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$Q$	Número de onda das séries de Fourier
$r$	Distância de um ponto do solo ao início da amostra
$r_I$	Distância do início da amostra ao eixo de rotação para o sistema de eixos usado no trabalho
$S$	Grau de saturação do solo
$u_a$	Pressão de ar no solo
$u_i^k$	Valor de $u(x_i, t_k)$ para o MDF
$U^k$	Amplitude do erro no instante $k$
$u_w$	Pressão de água no solo
$V$	Volume total do solo
$v_0$	Velocidade de infiltração da água no solo durante o ensaio do permeâmetro de centrífuga
$V_s$	Volume de partículas sólidas do solo
$V_w$	Volume de água presente no solo
$v_z$	Velocidade de percolação da água no eixo $z$
$w$	Umidade gravimétrica
$z$	Carga altimétrica
$z_m$	Vetor que define o sistema de coordenadas utilizado em Zornberg & McCartney (2010)
$\Delta$	Discriminante da EDP
$\delta$	Parâmetro de ajuste hidráulico
$\Delta r$	Espaçamento dos pontos da malha em $r$
$\Delta t$	Espaçamento dos pontos da malha em $t$

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$\Delta t_1$	Valor de $\Delta t$ que torna a discretização estável segundo à expressão de Von Neumann desenvolvida
$\Delta x$	Espaçamento dos pontos da malha em $x$
$\phi$	Carga hidráulica da água no solo
$\Phi_{\text{centrifugo}}$	Potencial centrífugo
$\gamma_w$	Peso específico da água
$\pi$	Sucção osmótica
$\theta$	Teor de umidade volumétrica
$\theta_1$	Valor de umidade constante em alguma fronteira do solo no ensaio de centrífuga
$\theta_i$	Teor de umidade volumétrica inicial
$\theta_r$	Teor de umidade residual
$\theta_s$	Teor de umidade volumétrica saturado
$\omega$	Velocidade angular do eixo de rotação da centrífuga
$\xi$	Parâmetro constante real positivo de transformação e ajuste usado na solução da EDP
$\psi$	Sucção total

## 1. INTRODUÇÃO

Ao analisar um fenômeno, deve-se compreender como o sistema observado funciona e, para uma compreensão razoável, criam-se modelos capazes de representá-lo de maneira aproximada. Na elaboração de um modelo, são determinadas quais grandezas físicas que fazem parte do ambiente estudado e as leis de conservação ou modelos constitutivos adequados são aplicados. Os resultados são equações que relacionam as grandezas entre si para um contínuo de espaço e de tempo (Fortuna, 2012).

As equações resultantes são, em sua maioria, equações diferenciais cujas soluções podem ser utilizadas para explicar ou prever fenômenos. Essas soluções podem ser do tipo analíticas, que são de difícil obtenção e, geralmente, encontradas sob condições simplificadas, ou numéricas, que são soluções obtidas para um conjunto finito de pontos de uma determinada malha de discretização para o espaço e/ou para o tempo (Fortuna, 2012).

Com presença constante em obras de engenharia geotécnica, o fluxo de água em meio poroso necessita ser estudado de forma que os modelos desenvolvidos possam representar, de forma prática, as situações nas quais ele é presente. Este estudo, porém, se torna laborioso, pois as equações desse fenômeno apresentam elevada complexidade matemática e dificilmente apresentam soluções analíticas explícitas (Fletcher, 1991).

O problema de fluxo de água em um solo, muitas vezes, considera o solo na situação de saturação total, assumindo um sistema bifásico na modelagem, ou seja, constituído apenas de partículas sólidas e de água. Essa simplificação, apesar de, na maioria das vezes, conduzir o resultado aos cenários de pior caso e apresentar uma

maior simplicidade matemática, acaba por impedir a otimização de projetos e a obtenção de resultados mais precisos (Fredlund & Rahardjo, 1993; Zornberg & McCartney, 2010).

Para uma melhor representação da realidade de comportamento de alguns solos, nos últimos anos, intensificaram-se os estudos sobre a mecânica dos solos não saturados (Lu & Likos, 2004). O conhecimento e a simulação do fenômeno, além da exigência matemática e de modelos constitutivos específicos, torna necessário, também, a aquisição de propriedades hidráulicas do solo que dirão como ele se comportará quando submetido ao fluxo não saturado.

Essas propriedades, entretanto, apresentam limitações para alguns tipos de solos, devido ao seu longo tempo de obtenção experimental (McCartney, 2007), gerando atrasos no desenvolvimento de projetos e/ou altos custos, e, muitas vezes, obrigando os engenheiros projetistas a utilizarem abordagens empíricas, ao invés de uma abordagem experimental específica para o tipo de solo a ser estudado (Zornberg & McCartney, 2010).

A centrífuga, já utilizada há décadas em outras áreas, como a médica, apresenta-se como uma alternativa viável para obtenção das características hidráulicas do solo. Por meio do aumento do campo gravitacional localizado, o permeâmetro de centrífuga possui a vantagem da otimização dos tempos de ensaio, especialmente quando o solo apresenta baixas permeabilidades (Nimmo et al., 1987).

Devido ao seu curto tempo de ensaio e também à transiência do evento ocorrido, os dados recebidos da centrífuga apresentam elevada dispersão e uma difícil interpretação para obtenção das características hidráulicas. Além disso, devido ao fato

de que as partículas de solo apresentam diferentes distâncias ao eixo de rotação, um gradiente de energia é formado ao longo da amostra de solo ensaiada. Como uma simplificação para os modelos, todas as abordagens da literatura consultadas consideraram tal gradiente de energia desprezível devido ao tamanho da amostra de solo (Alemi et al., 1976; Dell’Avanzi et al., 2004; McCartney, 2007; Nimmo, 1990).

Este estudo dedica-se, então, a compreender o fenômeno de fluxo por centrifugação em solos não saturados para tornar a análise transiente dos dados recebidos palpável, facilitando a sua interpretação por meio de um modelo matemático preciso que considera a variação de energia rotacional ao longo da amostra de solo, de forma a obter uma simulação correta do fenômeno e permitir a aquisição de propriedades hidráulicas do solo por meio desse ensaio.

## **1.1 Objetivos**

O objetivo desta dissertação é desenvolver um modelo numérico capaz de simular o fenômeno de fluxo não saturado e transiente sob a ação de uma força gravitacional gerada pelo permeâmetro de centrífuga considerando uma aceleração centrífuga variável ao longo do solo.

O trabalho conta com os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Fazer o desenvolvimento analítico e resolução numérica das equações diferenciais parciais regentes do fluxo não saturado e transiente na centrífuga quando se utiliza o modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a);
- ✓ Realizar a análise paramétrica e de sensibilidade à frequência de rotação do modelo desenvolvido, assim como a validação qualitativa conforme o fenômeno físico e ensaios previamente visualizados;

- ✓ Desenvolver uma metodologia de interpretação de dados transientes recebidos por um único sensor de umidade capaz de fornecer a curva característica e a curva de condutividade hidráulica não saturada do solo;
- ✓ Validar o modelo numérico desenvolvido a partir da utilização de dados reportados em McCartney (2007);
- ✓ Propor a posição ideal de instalação de um sensor de umidade para a centrífuga.

## **1.2 Estrutura da dissertação**

O Capítulo 1 trata da introdução e definição dos objetivos da pesquisa.

No Capítulo 2 são contemplados os métodos matemáticos que serão utilizados para realização dos objetivos propostos. É discutido, de forma sucinta, o tópico de equações diferenciais parciais e de como se encontra sua solução analítica usando o método de separação de variáveis. Apresentam-se, também, dois métodos para solução numérica, o método das diferenças finitas e o método das linhas, discutindo-se sobre quando há a necessidade de uma solução numérica. Por fim, discute-se como funciona o ajuste numérico de funções com base em dados experimentais.

Os conceitos base para o entendimento do fluxo não saturado, com os parâmetros normalmente utilizados e os gráficos que são, geralmente, obtidos em laboratório são abordados no Capítulo 3. Mostram-se as equações que regem o fluxo gravimétrico e sob ação de centrifugação, bem como os modelos constitutivos e leis de conservação que podem ser utilizados para relacionar as propriedades hidráulicas do solo entre si.

A metodologia da pesquisa é apresentada no Capítulo 4.

O Capítulo 5 trata do embasamento matemático do que será utilizado na análise de resultados. Faz-se a dedução do modelo com aceleração centrífuga variável e o

desenvolvimento analítico e numérico das soluções. Apresenta-se, também, como serão tratadas matematicamente as condições de contorno e o método a ser utilizado de ajuste de parâmetros no recebimento e interpretação de dados de ensaio.

O Capítulo 6 apresenta a análise e discussão dos resultados. Inicia-se com a simulação do fenômeno com a análise paramétrica e de sensibilidade à frequência de rotação. Em seguida, é realizado um estudo de caso dos ensaios executados previamente com uma sugestão de posição ideal para o sensor de umidade instalado. É plotada a curva de condutividade hidráulica não saturada para o solo estudado e justifica-se, com os resultados, a relevância e a necessidade de retratar o fenômeno com uma aceleração centrífuga variável.

Por fim, as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos posteriores são tratadas no Capítulo 7.

## 2. MÉTODOS MATEMÁTICOS

É provido, neste capítulo, o embasamento matemático a ser utilizado nos capítulos seguintes para o desenvolvimento do modelo.

### 2.1 Equações diferenciais parciais

A partir da modelagem, que relaciona as grandezas envolvidas com os seus modelos constitutivos respectivos, obtém-se as equações do modelo que são, em geral, equações com um operador diferencial (equações diferenciais). Quando existem derivadas parciais em termos de duas ou mais variáveis independentes, a equação se torna uma Equação Diferencial Parcial (EDP).

A ordem de uma equação representa a ordem da maior derivada parcial presente. As EDPs lineares de segunda ordem para fenômenos transientes são equações da física matemática de especial relevância para os problemas de engenharia em geral. Elas apresentam a seguinte forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \quad (2.1)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  representam funções de  $x$  e/ou de  $t$ .

O fenômeno não precisa, obrigatoriamente, ter a variável temporal. No caso, a EDP de segunda ordem apresentaria, em vez de uma variável temporal  $t$ , uma variável espacial  $y$ . As equações como a Eq. (2.1) apresentam uma singular classificação, fundamentada no discriminante  $\Delta$ . Este pode ser calculado por:

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (2.2)$$

Por meio da Eq. (2.2), as EDPs de segunda ordem podem ser classificadas como elípticas, parabólicas ou hiperbólicas, conforme seu discriminante seja, respectivamente,

negativo, nulo ou positivo. Essa classificação não é meramente acadêmica, uma vez que cada classe de equações está associada a uma categoria diferente de fenômenos físicos e também a resolutividades numéricas e analíticas diferentes (Oliveira & Tygel, 2010; Fortuna, 2012). Além disso, uma mesma equação pode apresentar classificações diferentes para determinadas regiões, pois as variáveis  $A$ ,  $B$ , e  $C$  podem não ser constantes, o que pode vir a aumentar a complexidade do problema.

Em especial, os fenômenos de fluxo unidimensional transiente apresentaram uma componente de 1ª ordem em  $t$  e componentes de 1ª ou 2ª ordem em  $x$ , permitindo que as suas equações sejam classificadas em parabólicas ou hiperbólicas. Conforme a natureza dos fenômenos, quando se manifestam mecanismos de dissipação de energia, os modelos são descritos por equações parabólicas, caso contrário, são representados por equações hiperbólicas (Fortuna, 2012).

Solucionar a EDP apresentada na Eq. (2.1) significa encontrar uma função  $u(x, t)$  que obedeça à equação e também às condições impostas do problema que, para um problema transiente, são as condições iniciais e de contorno, o que permite chamar esse problema de Problema de Valor Inicial (PVI). A condição inicial é o valor da variável  $u$  quando  $t = 0$  e as condições de contorno representam equações matemáticas a serem obedecidas nos contornos do problema para  $t > 0$ .

As condições de contorno são classificadas, em geral, em três tipos: condição de Dirichlet, de Robin e de Neumann. A condição de Robin unidimensional apresenta a seguinte formulação:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma \quad (2.3)$$

onde,

$\alpha, \beta$ , e  $\gamma =$  funções de  $x$  e de  $t$ ;

$n =$  normal ao contorno.

As condições de Dirichlet e de Neumann são casos particulares derivados da condição de Robin. Quando  $\alpha = 0$ , a condição descrita é de Neumann e, quando  $\beta = 0$ , de Dirichlet.

Fisicamente, as condições de Neumann e de Robin podem apresentar significados diferentes a depender do fenômeno descrito e a condição de Dirichlet estabelece o valor da variável em determinados pontos do contorno. Uma descrição detalhada e matemática das condições de contorno, em geral, pode ser vista em Borges (2016) e, do ponto de vista histórico, Cheng & Cheng (2005) apresentam as contribuições e a evolução matemática nesse tema.

Estabelecidas a modelagem, a equação e as condições iniciais e de contorno, parte-se para encontrar a solução. A solução de uma EDP pode ser analítica, que é quando encontra-se uma função explícita contínua  $u(x, t)$  das variáveis independentes para todo o domínio espaço-temporal, ou numérica, em que os valores  $u(x, t)$  são determinados de forma aproximada apenas para pontos da malha discretizadora do domínio espaço-temporal.

Em geral, as soluções analíticas, embora forneçam uma maior flexibilidade de parâmetros e apresentem resultados exatos de acordo com o modelo proposto, são de difícil obtenção e, em geral, os cenários em que elas são obtidas são quando o fenômeno sofre simplificações (Fletcher, 1991; Fortuna, 2012), seja na sua formulação ou nas condições de contorno. Elas são, também, um meio de verificação da validade da solução numérica.

Quando não é possível a resolução analítica para o cenário requerido, procura-se uma solução numérica, que pode ser validada com uma solução analítica simplificada e também com a experimentação. Comparando os resultados numéricos e experimentais, a solução pode ser recalibrada até que haja uma harmonia entre o modelo matemático e o fenômeno físico, gerando uma maior confiabilidade e, posteriormente, a otimização de quantidades e formas de conduzir um procedimento laboratorial.

## 2.2 Método de separação de variáveis

Há, na literatura, uma variedade de métodos analíticos para resolução de EDPs. Como exemplos, podem ser citados os métodos de separação de variáveis, de transformadas integrais, de mudança de coordenadas e de expansão por séries de autovalores.

O método de separação de variáveis, também chamado de método de Fourier, é o método mais amplamente utilizado para a resolução de EDPs quando aplicável (Farlow, 1993). Ele é uma típica solução para o caso de domínios espaciais finitos (Oliveira & Tygel, 2010), possibilitando a resolução de clássicas e importantes equações da física matemática, como as equações da onda, da difusão e do adensamento de Terzaghi.

Nesse método, se for aplicado em uma EDP como a apresentada na Eq. (2.1), a função  $u(x,t)$  é escrita da seguinte forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2.4)$$

onde  $X(x)$  e  $T(t)$  são funções unicamente dependentes de  $x$  e de  $t$ , respectivamente.

A ideia geral é que sejam encontradas infinitas funções  $u_k(x,t)$  que satisfaçam à equação e às condições de contorno. Essas funções  $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$  (soluções

fundamentais) irão compor a solução final por uma combinação linear da seguinte forma:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) T_k(t) \quad (2.5)$$

onde  $A_k$  são constantes que compõem cada termo da combinação linear.

A linearidade da EDP garante que a combinação linear das soluções fundamentais também será solução. Após esse processo, aplicam-se as condições iniciais e de contorno estabelecidas no problema e tem-se a solução final. Garantindo a unicidade da solução, essa será a solução analítica do problema estudado. Outros métodos analíticos também podem ser utilizados para encontrar a solução analítica, cabendo ao pesquisador escolher o método que trará maior simplicidade de resolução.

### 2.3 Método das diferenças finitas

As soluções analíticas são, em geral, difíceis de serem obtidas e, por isso, pode-se optar por uma solução numérica da equação estudada. A essência geral dos métodos numéricos é a discretização do contínuo e, no caso do Método das Diferenças Finitas (MDF), sua ideia geral é a discretização dos domínios e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função (Cuminato & Meneguette Junior, 2013).

A metodologia tem como base a expansão em séries de Taylor de uma função. A expansão de Taylor de uma função de uma variável é uma expansão infinita dada por:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + \dots \quad (2.6)$$

Para uma aproximação da primeira derivada, pode-se utilizar a expansão até  $n = 1$  obtendo-se:

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad (2.7)$$

onde  $x_i$  representa a coordenada de um ponto no domínio da função onde se quer calcular a derivada.

A Eq. (2.7) representa uma aproximação da primeira derivada de primeira ordem em avanço. Quando  $h$  tende a zero, a derivada se torna uma função exata e, para um  $h > 0$ , a derivada é uma função aproximada. Caso a função seja do tipo  $u(x,t)$ , representando um fenômeno unidimensional transiente, a aproximação da primeira derivada de primeira ordem em avanço se torna:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \simeq \frac{u(x_i + \Delta x, t_k) - u(x_i, t_k)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

onde  $x_i$  e  $t_k$  representam pontos no domínio discretizado da função  $u(x,t)$ .

O termo  $\Delta x$  pode ser visto como um espaçamento entre os pontos que discretizam o domínio. A partir dele é que a malha é criada, juntamente com o espaçamento  $\Delta t$ . Para uma EDP de regime transiente, definem-se os espaçamentos e uma visualização geométrica pode ser feita da solução numérica, pois o termo  $u(x_i, t_k)$  pode ser simplificado, usualmente, pelo termo  $u_i^k$  e cada ponto deste se visualiza na Fig. 2.1.

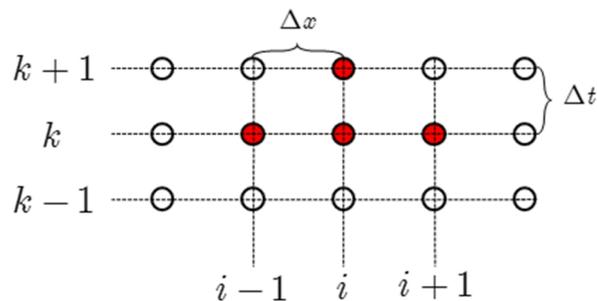


Figura 2.1 - Ilustração do esquema de discretização do MDF

Há infinitas aproximações que podem ser feitas para as derivadas de uma função pelo MDF, a depender da quantidade de pontos utilizados e da ordem da aproximação.

Existem, entretanto, formulações clássicas e de maior utilização prática para determinado tipo de derivação. Para a segunda derivada da função  $u(x,t)$ , pode-se utilizar a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \simeq \frac{u(x_i + \Delta x, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i - \Delta x, t_k)}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

Em teoria, caso se utilize uma discretização cada vez menor, a solução pelo MDF deveria se aproximar da solução analítica. Esse fato, entretanto, somente ocorre se a discretização utilizada for consistente, convergente e estável.

A consistência é a propriedade que une a discretização numérica utilizada à equação diferencial parcial original. Uma discretização é consistente quando, ao utilizar  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendendo a zero, ela volta à equação diferencial original (Fortuna, 2012). Isso pode ser verificado a partir da reexpansão dos termos do tipo  $u_i^k$  pela série de Taylor e, se a equação original for encontrada, existe uma correspondência biunívoca entre a equação original e a sua formulação por diferenças finitas.

A estabilidade está relacionada à propagação dos erros de truncamento à medida que o processo de cálculo numérico vai se perpetuando. Define-se o método numérico como estável quando o conjunto de erros acumulados nos cálculos seja desprezível (Noye, 1984).

Além de estável, um método numérico deve ser convergente, que é a correlação entre a solução numérica aproximada e a solução analítica exata. Em geral, não é possível encontrar a convergência e, para isso, adota-se um método alternativo: o Teorema de equivalência de Lax que diz que, para uma solução numérica de um

problema linear de valor inicial bem posto, com uma discretização consistente, a estabilidade é a condição necessária e suficiente para a convergência (Fortuna, 2012).

O método mais amplamente utilizado para a determinação das condições de estabilidade de uma EDP linear é a análise da estabilidade de Von Neumann. Ela se baseia no fato de que os erros de arredondamento do método numérico também devem obedecer à EDP estudada e eles não devem aumentar sem limites (Noye, 1984; Fortuna, 2012). Nesse método, faz-se a substituição da função na equação original por uma componente da série harmônica de Fourier, da seguinte forma:

$$u_i^k = U^k e^{IQx_i} \quad (2.10)$$

onde,

$U^k$  = amplitude do erro no instante  $k$ ;

$I$  = número imaginário, de valor numérico  $\sqrt{-1}$ ;

$Q$  = número de onda na série de Fourier.

Essa substituição pode ser feita porque a EDP é linear. A decomposição do erro propagado em uma série de Fourier foi feita e apenas um dos termos da série foi analisado. Caso em um dos termos a solução seja estável, pelo princípio da superposição dos termos lineares, a série por inteira será estável e, por conseguinte, o erro propagado será controlado e não se amplificará infinitamente.

Ao final, com a substituição, encontra-se uma equação do seguinte tipo:

$$U^{k+1} = GU^k \quad (2.11)$$

onde  $G$  é o fator de amplificação que controla a amplificação ou a atenuação do erro para o passo de tempo seguinte.

Este termo  $G$  será função de diversas variáveis e, dentre elas, os parâmetros de discretização. Deve-se buscar uma combinação de parâmetros de forma a obedecer à inequação  $|G| \leq 1$ , para que o erro não seja amplificado ao longo do processo de cálculo e, assim, o método de Von Neumann garante a estabilidade da equação a ser resolvida.

## 2.4 Método das linhas

O Método das Linhas (*Method of Lines*, ou *MOL*) se baseia no conceito de semi-discretização: a variável espacial é discretizada, enquanto a variável temporal é mantida contínua. Com isso, reduz-se o problema, numericamente, à resolução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) para os diversos pontos da malha espacial. Nesse caso, um conjunto de equações é gerado e apresentado da seguinte forma:

$$\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\} \quad (2.12)$$

onde cada função  $u_i(t)$  representa uma aproximação nos pontos da malha em que  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Esse método é uma poderosa ferramenta, também, para resolução de equações não lineares. O nome método das linhas se deve à sua aparência: para um problema transiente, a resolução da EDP geram várias EDOs cujas soluções são funções lineares e os seus gráficos, plotados em  $u(x,t)$  em  $x$  e  $t$ , geram um conjunto de linhas paralelas entre si no espaço (Schiesser & Griffiths, 2009). A Fig. 2.2 ilustra uma solução utilizando esse método para a equação da difusão.

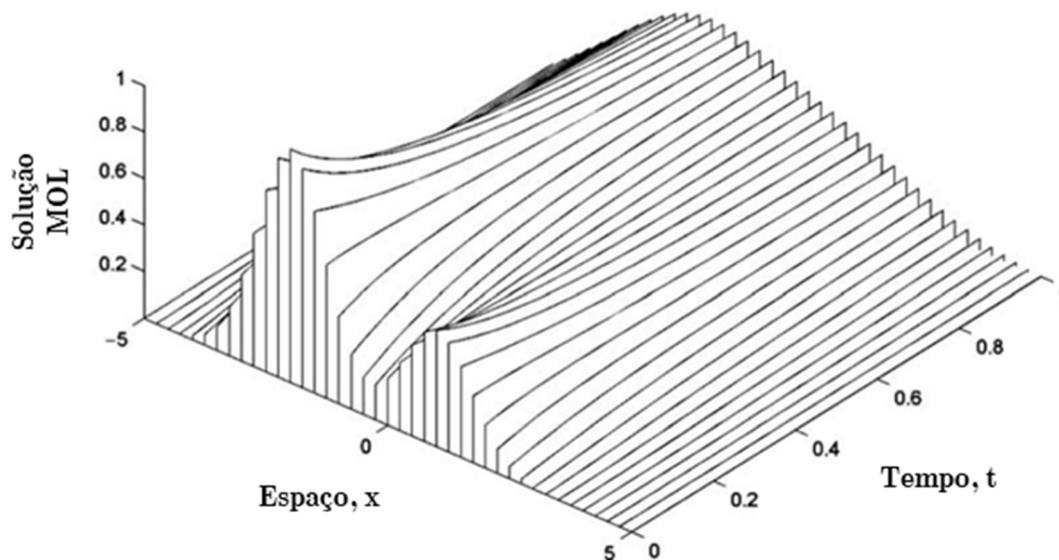


Figura 2.2 - Gráfico da equação da equação da difusão resolvida pelo método das linhas (modificado de Schiesser & Griffiths, 2009)

## 2.5 Método de ajuste: mínimos quadrados

Frequentemente, para as equações regentes dos fenômenos físicos, existem parâmetros de ajuste que são encontrados a partir de dados experimentais específicos para o tipo de solo ou de material a ser ensaiado. Existem ensaios, então, realizados prioritariamente e, com eles, parâmetros são calculados por retroanálise e, após isso, diversos fenômenos podem ser simulados para aquele tipo de material com os parâmetros calibrados para determinada equação.

As curvas características e curvas de condutividade hidráulica do solo, em seus diversos modelos encontrados na literatura, apresentam parâmetros de ajuste que podem ser encontrados a partir de ensaios de fluxo de água no solo. Para isso, entretanto, necessita-se de um modelo físico consolidado e coerente com o tipo de ensaio a ser utilizado, fazendo-se a equivalência de fenômeno, condições de contorno e condições iniciais.

Tanto para equações analíticas ou numéricas que regem o fenômeno, é necessário a definição de um método para o melhor ajuste do fenômeno a ser considerado e, para a verificação se o ajuste foi feito coerentemente, pode-se usar a estratégia de otimização com o auxílio do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Como premissa para abordagem do MMQ, o conceito de resíduo é estabelecido. Trata-se do critério para a determinação de quão bom foi o ajuste com base na diferença entre os valores observados e os valores previstos pelo fenômeno (Triola, 2015). Equacionando, obtém-se:

$$J_i = y_i - f(x_i) \quad (2.13)$$

onde,

$J_i$  = resíduos observados;

$y_i$  = valor numérico de um dado medido;

$f(x_i)$  = valor numérico de um dado calculado pelo modelo teórico.

O MMQ define que o melhor ajuste a ser utilizado é aquele que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, segundo a equação abaixo:

$$K = \sum J_i^2 \quad (2.14)$$

O objetivo é, portanto, minimizar o valor de  $K$ . Quando os dados observados são exatamente iguais aos teóricos previstos, esse é o melhor ajuste e igual a zero. A metodologia permite um ajuste de curvas para dados onde não há ponderação de resíduos e permite que até mesmo a solução numérica também seja utilizada para ajuste de parâmetros em um experimento, apesar de possivelmente requerer um maior custo e um maior desenvolvimento computacional se comparado com uma solução analítica.

### **3. FLUXO EM MEIO POROSO**

Apresentam-se, neste capítulo, os conceitos inerentes e fundamentais para a compreensão da modelagem do fluxo não saturado gravimétrico e também sob a ação de centrifugação, mostrando os principais modelos constitutivos das propriedades hidráulicas do solo e as equações diferenciais parciais regentes do fluxo para diferentes situações experimentais.

#### **3.1 Fluxo não saturado**

As propriedades inerentes ao solo influenciam diretamente os seus mecanismos de atuação e a sua análise, a depender da quantidade de fenômenos considerados, pode se tornar mais complexa e, possivelmente, mais realista. Considerar a saturação total e permanente no solo pode ser, em uma grande diversidade de situações práticas, uma análise simplista, podendo levar a erros de superdimensionamento em obras geotécnicas por uma impossibilidade de otimização do projeto (Zornberg & McCartney, 2010).

Surge, então, a necessidade de estudar o fenômeno em um maior grau de complexidade: em vez de o solo ser modelado em saturação plena, ou seja, como uma estrutura bifásica constituída de, somente, partículas sólidas e água, ele apresentará uma estrutura, no mínimo, trifásica, constituída por partículas sólidas, água e ar. A Fig. 3.1 apresenta, de forma esquemática, o diagrama de fases de um solo.

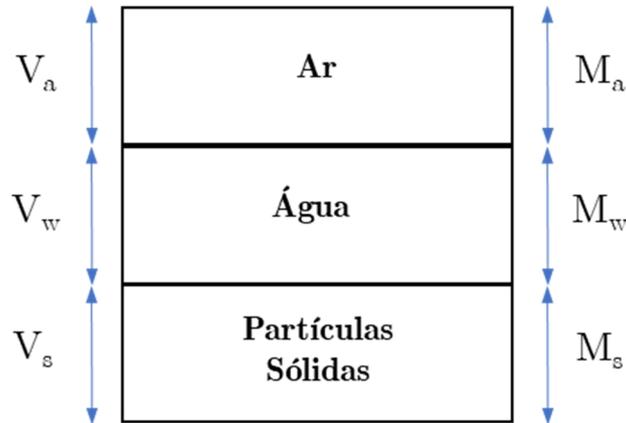


Figura 3.1 - Diagrama de fases do solo com as indicações dos volumes (à esquerda) e das massas (à direita) de um solo genérico.

É necessário obter, a partir do diagrama mostrado, variáveis quantitativas de caracterização do solo em relações de volume e de massa. A literatura aborda diversos parâmetros a serem obtidos e, em especial, cita-se os que medem a quantidade de água contida no solo. Esses são, principalmente, três: grau de saturação ( $S$ ), unidade gravimétrica ( $w$ ) e teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ). O teor de umidade volumétrica é um parâmetro tipicamente utilizado para quantificar a água presente no solo, especialmente para solos com baixa compressibilidade (McCartney, 2007). Ele é dado por:

$$\theta = \frac{V_w}{V} \quad (3.1)$$

onde,

$V_w$  = volume de água presente no solo [ $L^3$ ];

$V$  = volume total do solo, incluindo partículas sólidas, água e ar [ $L^3$ ].

Os vazios do solo estarão, então, preenchidos por água e por ar. Se o solo estiver saturado, isto é, todo o volume de ar for ocupado por água, o teor de umidade

volumétrica será igual a  $\theta_s$ , indicando saturação total, e este será igual à porosidade total do solo, isto é:

$$\theta_s = \frac{V_w}{V_w + V_s} = n \quad (3.2)$$

onde,

$V_s$  = volume total de partículas sólidas no solo [ $L^3$ ];

$n$  = porosidade do solo [ $L^3L^{-3}$ ].

Matematicamente, uma das diferenças na modelagem do solo não saturado é que haverá, em contabilização, o valor da pressão de ar nos poros juntamente com a pressão da água (Fredlund & Rahardjo, 1993). A variável sucção, que representa a energia livre do solo, é utilizada para contabilizar a contribuição do ar e da água em sua constituição, em vez de considerar somente a poropressão, como é feito no caso saturado. A sucção total  $\psi$  é dada por:

$$\psi = (u_a - u_w) + \pi \quad (3.3)$$

onde,

$u_a - u_w$  = sucção mátrica do solo [ $ML^{-1}T^{-2}$ ];

$u_a$  = pressão de ar no solo [ $ML^{-1}T^{-2}$ ];

$u_w$  = pressão da água no solo, ou poropressão [ $ML^{-1}T^{-2}$ ];

$\pi$  = sucção osmótica do solo [ $ML^{-1}T^{-2}$ ].

Em geral, a sucção osmótica não é contabilizada. Isso se deve ao fato dela estar relacionada com a concentração de sais no solo e as suas variações ao longo do espaço, de forma geral, não são significativas, fazendo com que seu gradiente seja considerado como aproximadamente zero.

Fisicamente, também, é aceitável considerar a pressão de ar como sendo zero. Essa situação ocorre quando o solo está aberto para a atmosfera e a pressão contabilizada é a pressão relativa. Neste caso, a sucção se torna, de forma simplificada:

$$\psi = -u_w \quad (3.4)$$

Quanto mais o teor de umidade volumétrica se aproxima do seu valor na saturação, menor será a sucção (em módulo), pois a pressão da água vai se tornando cada vez maior (menos negativa). Espera-se, então, que exista uma relação matemática entre a quantidade de água no solo e a sua sucção. Essa relação gráfica é denominada curva característica, ou curva de retenção, do solo, sendo mostrado, um exemplo, na Fig. 3.2.

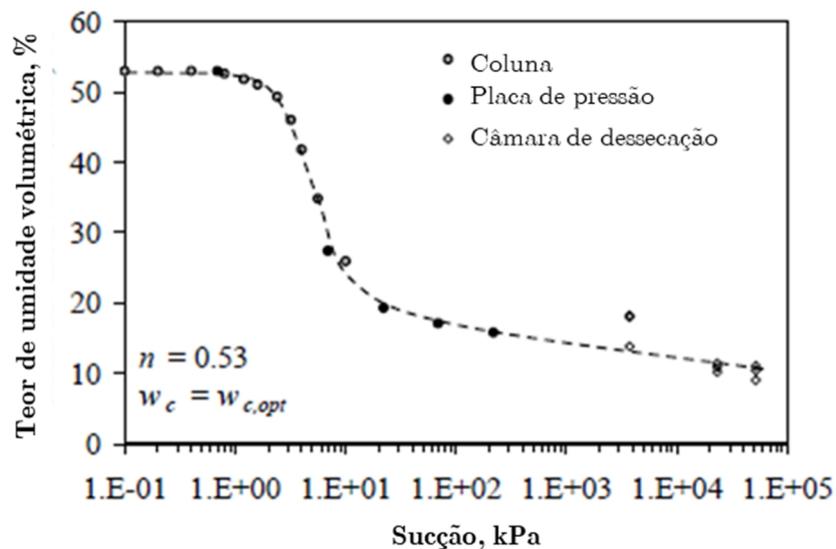


Figura 3.2 - Curva característica do solo obtida a partir de diferentes técnicas experimentais (modificado de McCartney, 2007).

McCartney (2007) descreve a curva característica como sendo a demonstração da energia requerida para remover água do solo. Ele divide as técnicas de obtenção da curva em duas categorias: técnicas físicas, que envolvem a expulsão de água do solo a

partir da imposição de um valor conhecido de sucção em sua fronteira, ou técnicas termodinâmicas, que envolvem a evaporação de água do solo em um ambiente controlado com umidade relativa conhecida. Como exemplo de técnicas físicas usuais pode-se citar o ensaio de placa de pressão ou ensaio em coluna e, de técnicas termodinâmicas, o ensaio de papel filtro.

Na análise saturada, um dos parâmetros de grande relevância prática que controla o fluxo de água em um solo é a condutividade hidráulica ou coeficiente de permeabilidade  $k_s$  (Harr, 1991; Das & Sobhan, 2013). Ela indica a facilidade com a qual um fluido Newtoniano percola através de um meio poroso e o seu valor depende tanto das propriedades da matriz sólida como da fase líquida, ou seja, propriedades como a porosidade do solo, densidade e viscosidade do fluido que o percola influenciam no valor de  $k_s$  (Harr, 1991; Camapum de Carvalho et al., 2015).

Na região não saturada, além da influência do esqueleto sólido e do líquido, a condutividade hidráulica depende, também, da quantidade de água presente nos vazios do solo que pode ser medida, por exemplo, por meio do teor de umidade volumétrica  $\theta$ . Neste momento, não mais existe um valor de permeabilidade saturada, mas sim uma função de condutividade hidráulica não saturada, ou *k-function* (Lu & Likos, 2004).

À medida que o solo se dessatura, o volume de água ocupado diminui e o ar que ocupa os vazios do solo forma canais que podem ser considerados canais de não condutividade da água. O acréscimo do módulo da sucção gera um maior volume de ar nos vazios do meio, uma menor quantidade de água e, por conseguinte, uma menor quantidade de caminhos preferenciais para o fluxo e, então, uma menor condutividade hidráulica da água (Fredlund & Rahardjo, 1993).

A função de condutividade hidráulica não saturada pode ser plotada com o eixo horizontal na variável sucção mátrica ou teor de umidade volumétrica representando, respectivamente,  $k(\psi)$  e  $k(\theta)$ . Um exemplo de função de condutividade hidráulica pode ser visualizado na Fig. 3.3.

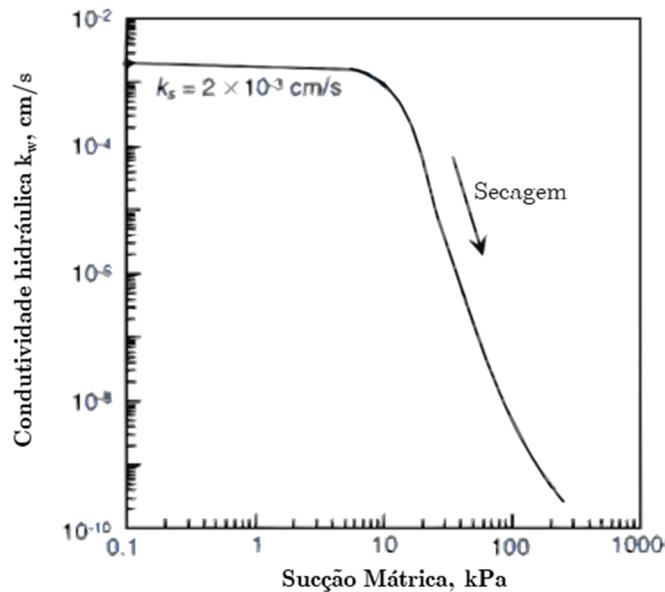


Figura 3.3 - Exemplo de função de condutividade hidráulica não saturada em função da sucção mátrica (modificado de Lu & Likos, 2004).

A Fig. 3.4 demonstra, ilustrativamente, o aparecimento do volume de ar à medida que a sucção aumenta.

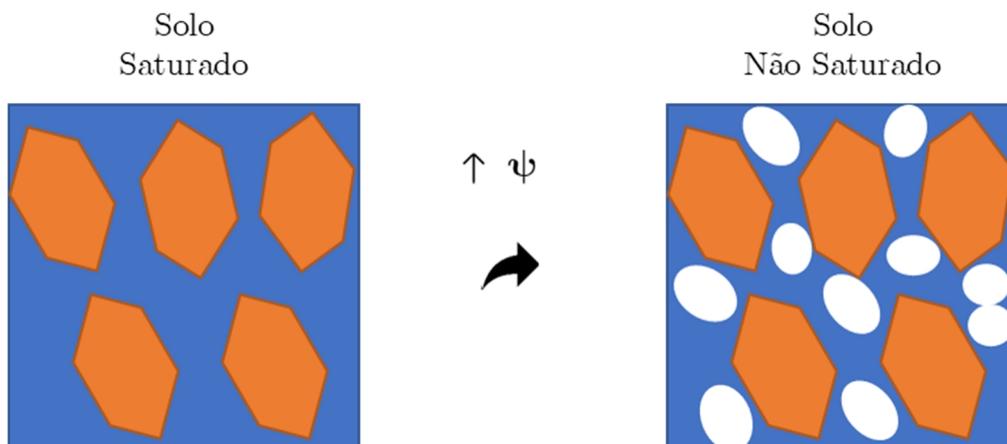


Figura 3.4 - Aparecimento de vazios preenchidos por ar à medida que a sucção no solo aumenta.

Devido à dificuldade de obtenção experimental, diversos pesquisadores têm trabalhado em relações empíricas, modelos estatísticos e modelos teóricos para a obtenção da função de condutividade hidráulica não saturada (Fredlund et al., 1994). Na prática, apesar de existirem técnicas experimentais que se baseiam na aplicação de fluxo de água ou gradientes de sucção, devido à dificuldade de execução e imprecisão nos resultados para toda a faixa de sucção, o único valor calculado na curva de condutividade hidráulica não saturada é o coeficiente de permeabilidade saturado  $k_s$ . Os outros pontos são determinados a partir de relações matemáticas (McCartney, 2007).

### 3.2 Modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a)

Ao longo do tempo surgiram diversos estudos que buscaram encontrar uma função matemática capaz de representar a curva de retenção e de condutividade hidráulica do solo. Dois exemplos de modelos comumente usados são os modelos de van Genuchten (1980) e de Fredlund & Xing (1994).

Cavalcante & Zornberg (2017a), entretanto, inovaram ao propor modelos constitutivos que fossem capazes de resolver, analiticamente, a equação diferencial parcial que rege o fluxo não saturado gravimétrico do solo: a equação de Richards.

Para fluidos incompressíveis e homogêneos, a equação da continuidade da água unidimensional estabelece que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.5)$$

onde  $v_z$  é a velocidade de percolação da água no eixo  $z$  [ $LT^{-1}$ ].

A velocidade  $v_z$  também obedece à lei de Darcy-Buckingham (Buckingham, 1907):

$$v_z = -k(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.6)$$

onde  $\phi$  é a carga hidráulica da água no solo [ $L$ ].

E a carga hidráulica pode ser obtida a partir da equação de Bernoulli, considerando que a parcela cinética é desprezível:

$$\phi = -z + \frac{\psi}{\gamma_w} \quad (3.7)$$

onde,

$z$  = carga altimétrica [ $L$ ];

$\gamma_w$  = peso específico da água [ $ML^{-2}T^{-2}$ ].

Substituindo as Eqs. (3.6) e (3.7) na Eq. (3.5), obtém-se a equação de Richards, escrita em termos de  $\theta$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{k_z(\theta)}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial k_z(\theta)}{\partial z} \quad (3.8)$$

Poucos estudos haviam apresentado soluções analíticas para a Eq. (3.8) e todos eles apresentaram a solução em formas integrais que necessitavam de aproximações numéricas para seu uso. Cavalcante & Zornberg (2017a) apresentaram, em seu trabalho, um modelo constitutivo capaz de resolver analiticamente a equação de Richards explicitamente para quatro condições de contorno diferentes. O modelo constitutivo para a curva característica do solo é dado por:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \quad (3.9)$$

onde,

$\delta$  = parâmetro de ajuste hidráulico [ $M^{-1}LT^2$ ];

$\theta_r$  = teor de umidade residual [ $L^3L^{-3}$ ].

E para a curva de condutividade não saturada:

$$k_z(\theta) = k_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \quad (3.10)$$

Os modelos constitutivos apresentados nas Eqs. (3.9) e (3.10) permitiram a escrita da equação de Richards como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k_s}{\delta(\theta_s - \theta_r)\gamma_w} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{k_s}{(\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.11)$$

### 3.3 Fluxo não saturado sob centrifugação

O permeâmetro de centrífuga é uma alternativa viável e eficiente para a simulação de um fluxo em uma amostra de solo por sua rápida operação e precisão (Nimmo, 1990). Por ser uma técnica que permite o controle do fluxo, com um princípio físico parecido com o do ensaio em coluna, ela pode ser utilizada para a obtenção das propriedades hidráulicas do solo na condição não saturada (McCartney & Zornberg, 2010). As Figs. 3.5 (a) e (b) mostram uma centrífuga localizada na Universidade do Texas em Austin e a Fig. 3.5 (c) mostra uma ilustração do sistema interno de uma centrífuga.

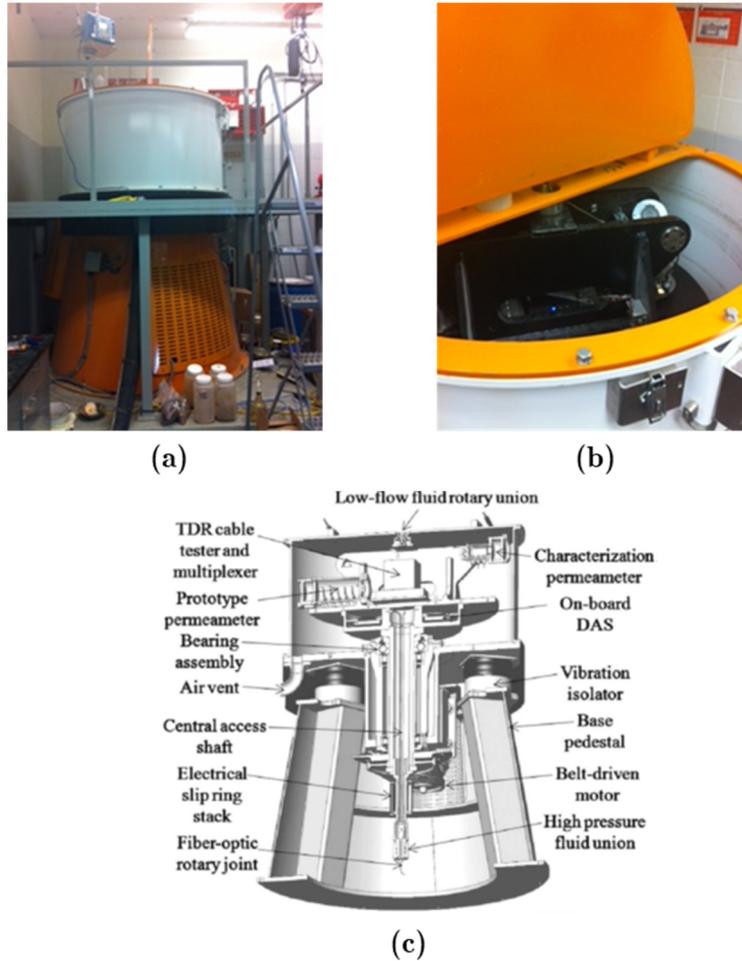


Figura 3.5 – Permeômetro de centrífuga: (a) Imagem externa da centrífuga (cedida pela Universidade do Texas em Austin); (b) Imagem dos componentes internos da centrífuga (cedida pela Universidade do Texas em Austin); (c) Seção transversal ilustrativa da centrífuga desenvolvida na Universidade de Texas em Austin (Zornberg & McCartney, 2010)

Para a correta interpretação dos dados, é necessário o desenvolvimento do modelo matemático que rege o fenômeno e este se baseia na validade da Lei de Darcy no ambiente de centrifugação. Para o fluxo estacionário e saturado, Nimmo et al. (1987) mostraram consistentes resultados de que a Lei de Darcy funcionou coerentemente para as diferentes gravidades utilizadas nos testes da centrífuga por eles utilizada. Assume-se, por consequência, que a lei de Darcy-Buckingham e a equação de Richards são válidas para o fluxo não saturado sob a ação de centrifugação.

O início do desenvolvimento do modelo para a centrífuga é a adoção do sistema de eixos. Dell'Avanzi et al. (2004) e Zornberg & McCartney (2010) optaram por adotar o mesmo sistema de eixos: um sistema unidimensional, em que a origem do sistema se localiza na face de saída da água e tem o sentido apontado em direção ao eixo de rotação da centrífuga. A Fig. 3.6 apresenta uma representação esquemática do modelo proposto em Zornberg & McCartney (2010). A extremidade do vetor  $z_m$  corresponde à coordenada espacial de um ponto qualquer no solo e a sua origem corresponde à origem do sistema de eixos.

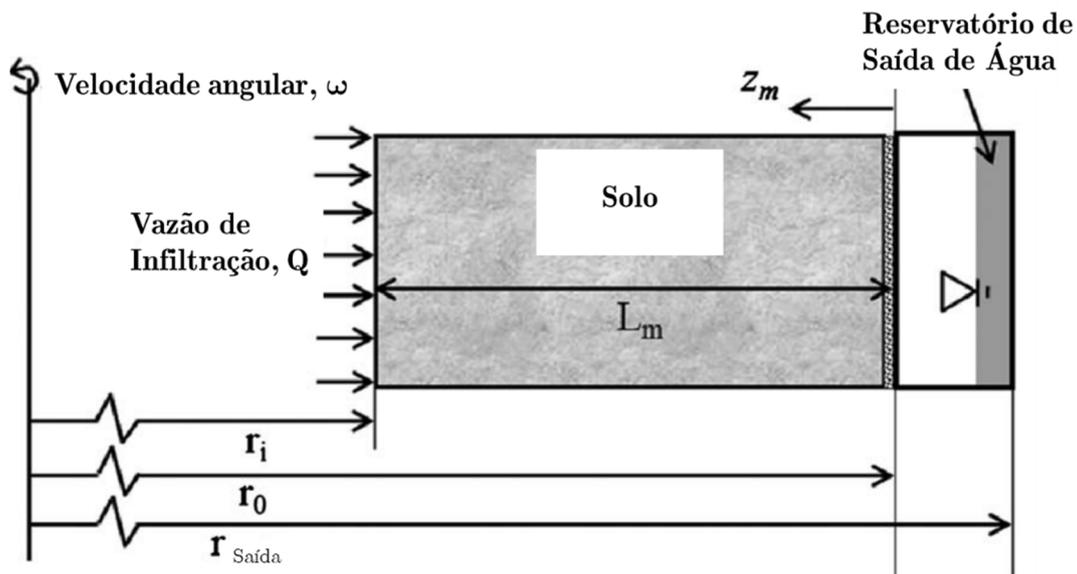


Figura 3.6 - Esquematização das principais variáveis do modelo apresentado em Zornberg & McCartney (2010) (modificado de Zornberg & McCartney, 2010).

Cavalcante & Zornberg (2017a), entretanto, optaram por utilizar outro sistema de eixos na coluna de solo analisada no fluxo gravimétrico: a origem do sistema se localiza na origem do fluxo (topo da coluna), e não na base. Fazendo uma analogia à coluna de solo, pode-se adotar o mesmo sistema de eixos para a centrífuga, como é visualizado na Fig. 3.7, e esse foi o mesmo sistema de eixos adotado por Cavalcante &

Zornberg (2017b, *In Press*), em seu posterior modelo que retrata o fluxo não saturado na centrífuga sob a ação de uma aceleração constante.

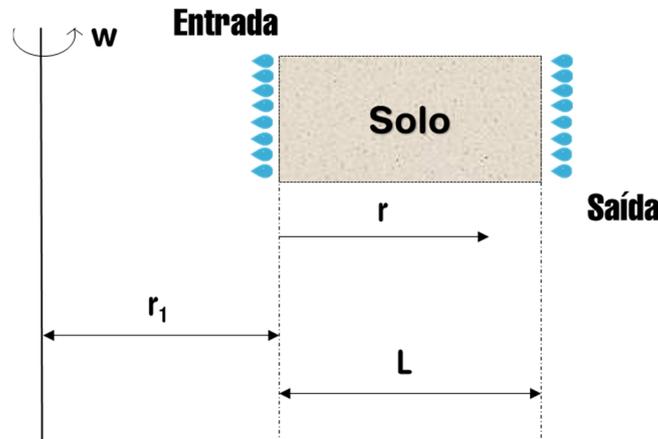


Figura 3.7 - Sistema de eixos da centrífuga com origem no início do fluxo.

A diferenciação no ensaio do permeâmetro de centrífuga é que existe um acréscimo na energia das moléculas de água devido à rotação angular do eixo central. Esse acréscimo será, matematicamente, devido ao potencial centrífugo que, utilizando o sistema de eixos indicado na Fig. 3.7, é dado pela seguinte equação:

$$\Phi_{\text{centrifugo}} = -\frac{1}{2}\omega^2(r_1 + r)^2 \quad (3.12)$$

onde,

$\omega$  = velocidade angular do eixo de rotação da centrífuga [ $T^{-1}$ ];

$r_1$  = distância do início da amostra ao eixo de rotação [ $L$ ];

$r$  = distância de um ponto do solo ao início da amostra [ $L$ ].

Dessa forma, desconsiderando a carga altimétrica, pois o problema pode ser considerado unidimensional analisando o fluxo no eixo que passa pelo centro da amostra de solo, a Eq. de Bernoulli se torna, para o fluxo na centrífuga:

$$\phi = \frac{\psi}{\gamma_w} - \frac{\omega^2(r_1 + r)^2}{2g} \quad (3.13)$$

onde,

$g$  = aceleração gravitacional [ $LT^{-2}$ ].

A Eq. (3.13) é a mesma apresentada por Nimmo (1990), indicando que ele utilizou o mesmo sistema de eixos. Esse termo de carga hidráulica pode ser substituído nas Eqs. (3.5) e (3.6) para encontrar a equação diferencial parcial geral que rege o fenômeno do fluxo não saturado sob centrifugação. A equação da continuidade apresentada na Eq. (3.5) pode ser utilizada devido a ser um fenômeno igualmente unidimensional.

### 3.4 Equações de Cavalcante & Zornberg (2017b, *in press*) para a centrífuga

Cavalcante & Zornberg (2017b, *In Press*) apresentaram um modelo para o fluxo não saturado sob a ação de centrifugação a partir da inserção das equações do modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a) nas Equações (3.5), (3.6) e (3.13), com o mesmo sistema de eixos apresentado na Fig. 3.7.

Utiliza-se, no artigo, a variável  $N_r$ , que representa o nível de gravidade da centrífuga. Matematicamente, por ser definida como a divisão da aceleração centrífuga no solo pela gravidade local, ela representa quantas vezes a centrífuga será acelerada com relação a um fluxo gravitacional vertical. Equacionando, obtém-se:

$$N_r = \frac{a_{cf}}{g} \quad (3.14)$$

onde  $a_{cf}$  é a aceleração centrífuga a qual um ponto do solo está submetido [ $LT^{-1}$ ];

A aceleração centrífuga será, então (Walker et al., 2013):

$$a_{cf} = \omega^2 (r_1 + r) \quad (3.15)$$

Em teoria, cada ponto do solo, ao longo do eixo  $r$ , deveria ter um  $N_r$  diferente. No trabalho de Cavalcante & Zornberg (2017b, *In Press*), entretanto, os pesquisadores

optaram por considerar que, ao longo de todo o comprimento  $L$ , o solo deve ser submetido a uma aceleração constante e, como padronização, utilizaram o ponto médio da amostra de solo.

Unindo as Eqs. (3.14) e (3.15) e considerando a aceleração centrífuga unificada pelo ponto médio do solo, tem-se:

$$N_r = \frac{\omega^2 \left( r_1 + \frac{L}{2} \right)}{g} \quad (3.16)$$

onde  $L$  é o comprimento da amostra de solo  $[L]$ .

A velocidade angular de rotação  $\omega$  pode ser facilmente convertida em frequência angular de rotação  $f$  segundo à equação:

$$\omega = 2\pi f \quad (3.17)$$

Com essas considerações, ao final, a seguinte EDP é apresentada como regente do fluxo não saturado na centrífuga sob a ação de uma aceleração centrífuga constante:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k_s}{\delta(\theta_s - \theta_r) \rho_w g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - N_r \frac{k_s}{(\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (3.18)$$

A Eq. (3.18) assemelha-se à Eq. (3.11) por também conter os termos advectivos e dispersivos, sendo que a diferença é que na coluna de solo o fluxo é devido à aceleração gravitacional e, na centrífuga, devido à aceleração centrífuga. Foram apresentadas, também, no trabalho de Cavalcante & Zornberg (2017b, *In Press*) as soluções analíticas da Eq. (3.18) para quatro condições de contorno diferentes.

## 4. METODOLOGIA

### 4.1 Material

Os dados a serem utilizados na análise paramétrica inicial foram retirados da literatura e caracterizam um solo tipicamente argiloso. A Tab. 4.1 mostra esses dados.

Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados para a simulação paramétrica do fenômeno

<b>Parâmetros</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
$g$	9,8	m/s <sup>2</sup>
$\gamma_w$	10,0	kN/m <sup>3</sup>
$r_1$	0,700	m
$L$	0,150	m
$f$	150	rpm
$v_0$	8,00E-08	m/s
$\delta$	0,030	kN <sup>-1</sup>
$\theta_s$	0,410	-
$\theta_r$	0,040	-
$\theta_i$	0,250	-
$k_s$	8,20E-09	m/s

Para a validação do modelo, foram utilizados os dados do trabalho de McCartney (2007). O solo estudado tem o nome de RMA Tipo II. Ele foi coletado e armazenado em 2001 próximo à cidade de Denver, no estado do Colorado.

Esse solo tem diversas características que o tornaram ideal para estudá-lo e analisá-lo no permeâmetro de centrífuga. É uma argila de baixa plasticidade, com aproximadamente 60% passante na peneira #200 e com baixa deformabilidade quando submetida às tensões advindas da gravidade na centrífuga.

Os dados utilizados foram os do permeâmetro tipo protótipo, no Teste IA. A partir da leitura do trabalho, os dados do solo e da geometria da centrífuga foram resumidos na Tab. 4.2. Eles já foram ajustados ao sistema de eixos a ser utilizado.

Tabela 4.2 - Dados para validação do modelo (Teste IA) (modificado de McCartney, 2007)

<b>Parâmetros</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
$g$	9,8	m/s <sup>2</sup>
$\gamma_w$	10,0	kN/m <sup>3</sup>
$r_l$	0,319	m
$L$	0,305	m
$f$	138	rpm
$v_0$	1,55E-07	m/s
$\theta_s$	0,44	-
$\theta_r$	6,90E-04	-
$\theta_i$	0,1583	-
$k_s$	4,70E-06	m/s

O parâmetro  $k_s$ , da Tab. 4.2, foi obtido a partir da curva característica do mesmo solo estudado para uma porosidade de 0,47. Para esta mesma porosidade, foi obtido  $\theta_r$  pelo ajuste de sua curva característica com o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a). Esses dois procedimentos foram feitos pois não foram encontrados os dados no trabalho de McCartney (2007) para o solo com porosidade de 0,44.

O resultado do ensaio do permeâmetro de centrífuga, para o solo com dados da Tab. 4.2, pode ser visualizado na Fig. 4.1. Este gráfico representa o avanço da frente de umidade a partir de uma infiltração constante no início da amostra. A umidade foi medida por meio de um sensor de umidade do tipo TDR.

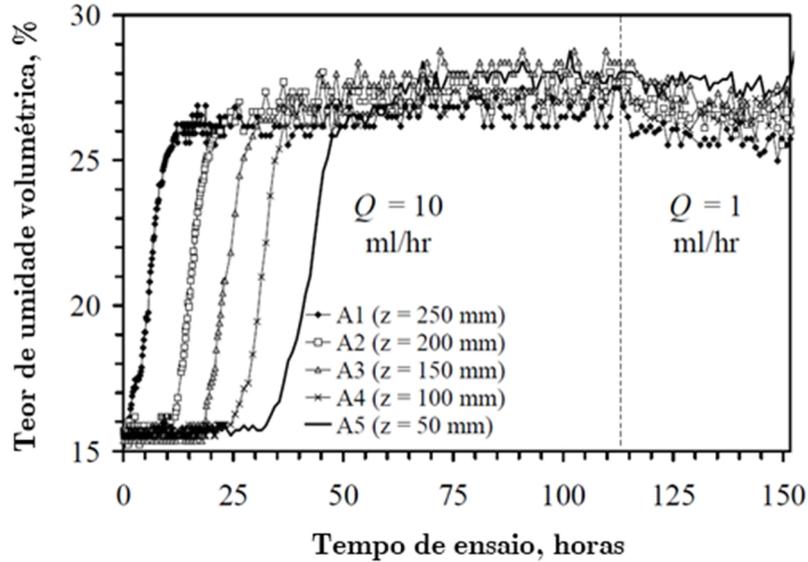


Figura 4.1 - Avanço da frente de unidade ao longo do tempo e do comprimento de solo (modificado de McCartney, 2007)

Um desenho esquemático da posição dos sensores no ensaio de McCartney (2007) pode ser visualizado na Fig. 4.2. Este desenho considera tanto os valores de  $r$  quanto de  $z$  para a posição dos sensores.

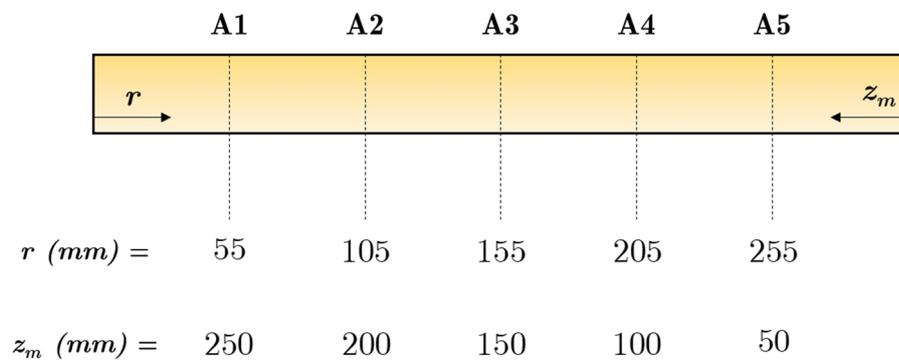


Figura 4.2 - Ilustração das posições dos sensores quantificados em termos de  $r$  e de  $z_m$

Para o mesmo solo, com diferentes porosidades, McCartney (2007) também apresenta dados de curvas características. A Fig. 4.3 mostra as curvas características obtidas a pelas técnicas de papel filtro e de placa de pressão.

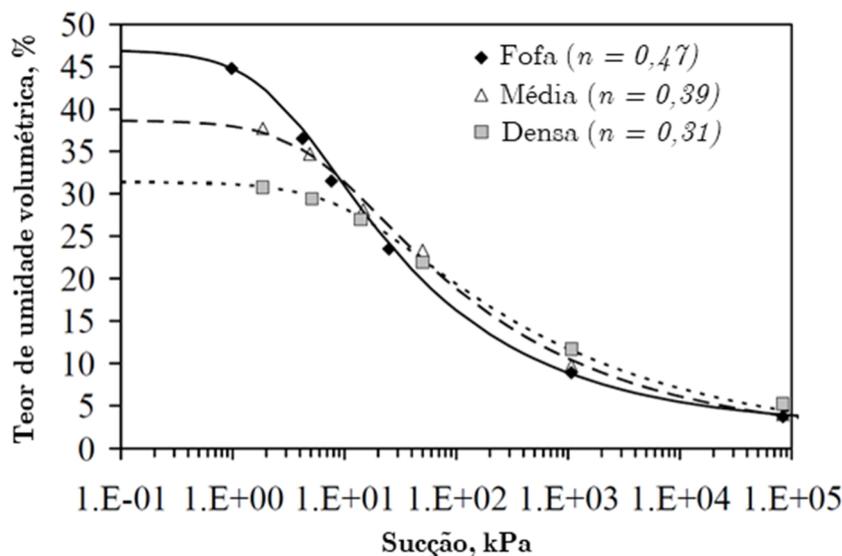


Figura 4.3 - Curva característica do solo estudado obtida por meio dos ensaios de papel filtro e placa de pressão (modificado de McCartney, 2007)

## 4.2 Métodos

### 4.2.1 Desenvolvimento da EDP regente do fenômeno

O trabalho iniciou-se com o desenvolvimento da EDP regente do fenômeno considerando o fluxo de água não saturado, transiente, sob a ação de centrifugação e considerando uma aceleração centrífuga variável da amostra de solo. Foi feito o desenvolvimento analítico da solução e também a solução numérica utilizando o MDF, bem como os critérios de estabilidade para este método. Também foi feito o desenvolvimento matemático das condições de contorno que foram utilizadas, sendo todos estes procedimentos descritos apresentados no Cap. 5.

### 4.2.2 Validação da ferramenta *NDSolveValue* por meio do MDF

Todos os códigos confeccionados foram programados utilizando o *software Mathematica*. Particularmente, este programa apresenta uma ferramenta chamada

*NdSolveValue*, sendo esta capaz de resolver a EDP do problema utilizando o método das linhas (MOL).

Foi confeccionado um código manual, utilizando o MDF, para a validação da ferramenta *NdSolveValue*, que utiliza o MOL. Para essa validação, utilizou-se a EDP do problema com condições de Dirichlet nas extremidades, considerando ambas saturadas. O desenvolvimento matemático necessário foi feito no Cap. 5 e uma ilustração que representa a etapa de validação é vista na Fig. 4.3.

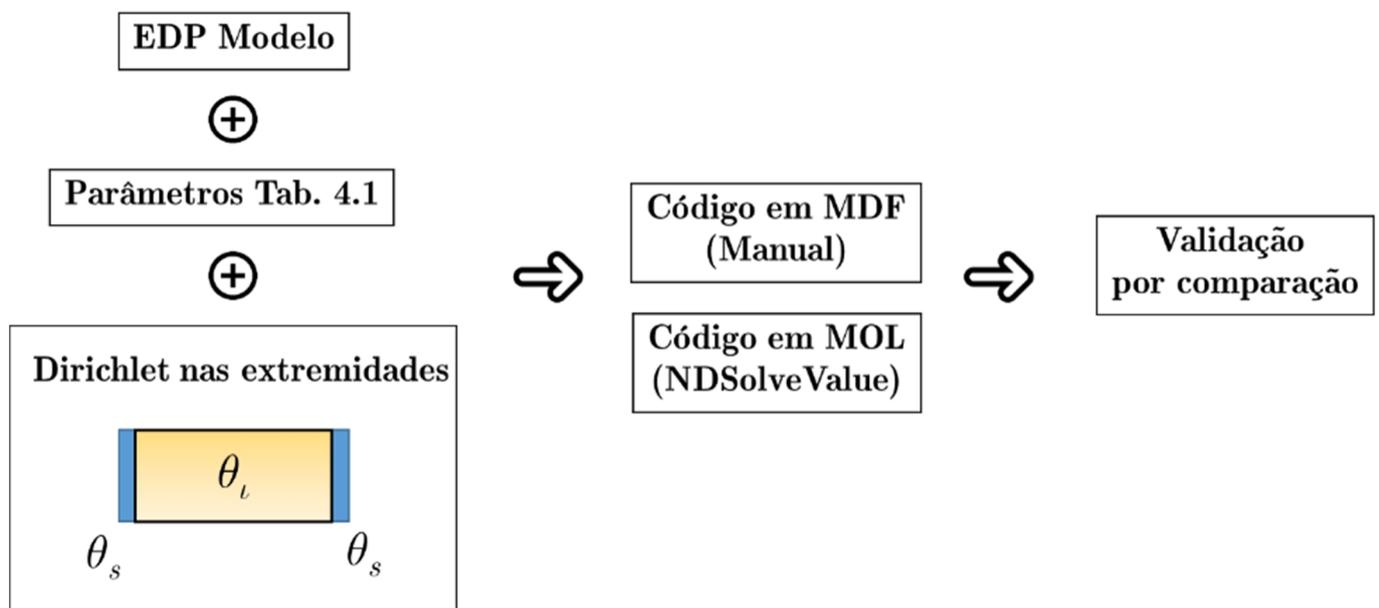


Figura 4.4 – Ilustração dos procedimentos de validação da ferramenta *NDSolveValue* que utiliza MOL

#### 4.2.3 Análise paramétrica e de sensibilidade à frequência de rotação

A análise paramétrica foi feita com os dados da Tab. 4.1. O objetivo nessa análise foi verificar as tendências do comportamento da função  $\theta(r,t)$ , solução da EDP regente do fenômeno. As condições de contorno consideravam uma infiltração constante no início da amostra ( $r = 0$ ) e, no final da amostra ( $r = L$ ), uma umidade constante e igual a  $\theta_s$ .

Foi realizada, também, uma análise de sensibilidade à frequência de rotação da centrífuga. Para isso, aumentou-se a frequência de rotação e foram validadas as tendências esperadas: diminuição da umidade do solo e do tempo de convergência para o estado estacionário. A Fig. 4.4 mostra um fluxograma das análises paramétrica e de sensibilidade.

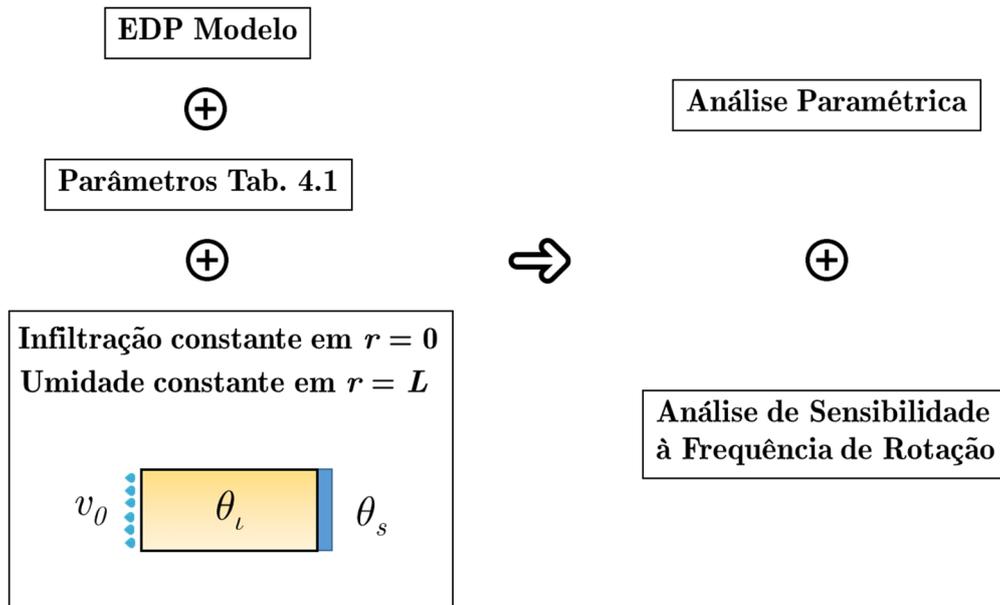


Figura 4.5 - Ilustração de como foi desenvolvida a análise paramétrica e a análise de sensibilidade

#### 4.2.4 Validação do modelo por dados experimentais

A Fig. 4.1 ilustra os dados que foram coletados dos sensores de umidade ao longo do comprimento da amostra de solo durante a realização do ensaio do permeâmetro de centrífuga. Esses dados foram extraídos e colocados em formato de matriz utilizando o programa *WebPlotDigitizer*. Após isso, as informações foram importadas ao *Mathematica*.

Os dados da curva característica da Fig. 4.2, já extraídos e importados, foram plotados e o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a) foi utilizado para encontrar o

parâmetro hidráulico  $\delta$  que melhor se ajusta à curva característica. Esse  $\delta$  pode ser chamado de  $\delta$  original ou real do solo.

Com as informações dos ensaios e os parâmetros da Tab. 4.2, o parâmetro  $\delta$  pôde ser encontrado utilizando a solução numérica do modelo para cada sensor de umidade no ensaio de centrífuga. Esse ajuste numérico foi feito por meio do método dos mínimos quadrados (MMQ), onde o  $\delta$  encontrado foi aquele que minimizou a soma dos quadrados dos resíduos.

Com os parâmetros  $\delta$ ,  $\theta_r$ ,  $\theta_s$  e  $k_s$  obtidos para o solo em questão, a curva característica foi construída utilizando o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a). Para a verificação de que essa curva característica realmente corresponde ao solo em estudo, fez-se uma comparação com a curva característica obtida para o mesmo solo, porém com as técnicas convencionais de papel filtro e de placa de pressão, para uma porosidade semelhante de valor 0,47. A comparação feita foi tanto visual quanto a partir da diferença entre os valores de  $\delta$  obtidos. A Fig. 4.5 mostra o procedimento descrito.

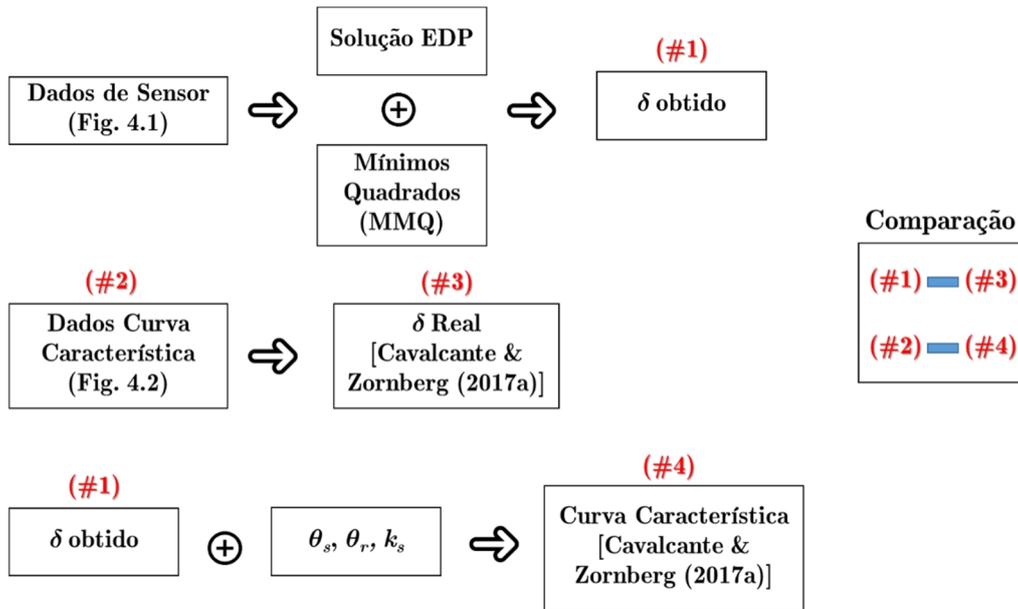


Figura 4.6 - Ilustração demonstrativa de como foi realizada a validação do modelo para os dados experimentais

## 5. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E SOLUÇÕES

Um novo modelo, que determina o comportamento do avanço da frente de umidade no solo quando submetido ao fluxo por centrifugação, foi desenvolvido. Ele considera o fenômeno transiente e com uma aceleração centrífuga variável ao longo da amostra de solo. Apresenta-se abaixo o desenvolvimento matemático e uma EDP foi gerada a partir dos modelos constitutivos característicos. Apresentam-se, também, o desenvolvimento analítico da solução e a solução numérica pelo MDF.

### 5.1 Dedução do modelo para centrifugação

A carga hidráulica foi equacionada na Eq. (3.13), em que o sistema de eixos utilizado é o mesmo da Fig. 3.7. Derivando a carga hidráulica com relação à variável espacial  $r$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\omega^2 (r_1 + r)}{g} \quad (5.1)$$

Como pontua Nimmo (1990), as equações de Darcy-Buckingham e, por conseguinte, a de Richards são equações consolidadas e aceitas que definem o fluxo transiente e não saturado. Substituindo a Eq. (5.1) na Eq. (3.6):

$$v = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{k\omega^2 (r_1 + r)}{g} \quad (5.2)$$

Considerando também a Eq. (3.5), que considera a propriedade de continuidade da água num fluxo unidimensional, e substituindo a Eq. (5.2) nela, equaciona-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k (r_1 + r) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \quad (5.3)$$

O termo  $\partial \psi / \partial r$  pode ser escrito em termos de  $\theta$  utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (5.4)$$

Com o mesmo raciocínio, escreve-se:

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (5.5)$$

Substituindo as Eqs. (5.4) e (5.5) na Eq. (5.3), o resultado será:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{g} \left( k + r \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + r_1 \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (5.6)$$

Nesse momento, foi obtida uma equação diferencial parcial com três variáveis dependentes. Para resolvê-la, deve-se reduzir essa equação a uma só variável dependente. Para isso, recorre-se aos modelos constitutivos e, no presente trabalho, escolheu-se o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a), cujas equações são (3.9) e (3.10). Construindo a derivada parcial da permeabilidade:

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r} \quad (5.7)$$

E a derivada parcial da sucção:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\delta(\theta - \theta_r)} \quad (5.8)$$

Substituindo as Eqs. (5.7) e (5.8) na Eq. (5.6), tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{g} \left( k_s \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} + \frac{rk_s}{\theta_s - \theta_r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{r_1 k_s}{\theta_s - \theta_r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k_s}{\delta \gamma_w (\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (5.9)$$

Desenvolvendo a Eq. (5.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \frac{k_s}{\gamma_w \delta (\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{\omega^2 k_s r}{g (\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\omega^2 k_s r_1}{g (\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\omega^2 k_s}{g (\theta_s - \theta_r)} \theta \\ & + \frac{\omega^2 k_s \theta_r}{g (\theta_s - \theta_r)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sejam:

$$A = \frac{k_s}{\gamma_w \delta (\theta_s - \theta_r)} \quad (5.11)$$

$$B = \frac{\omega^2 k_s}{g (\theta_s - \theta_r)} \quad (5.12)$$

$$C = \frac{\omega^2 k_s r_1}{g (\theta_s - \theta_r)} \quad (5.13)$$

$$D = \frac{\omega^2 k_s \theta_r}{g (\theta_s - \theta_r)} \quad (5.14)$$

Substituindo as constantes das Eqs. (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) na Eq.(5.10), encontra-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - Br \frac{\partial \theta}{\partial r} - C \frac{\partial \theta}{\partial r} - B\theta + D \quad (5.15)$$

A Eq. (5.15) foi a EDP linear parabólica de 2<sup>a</sup> ordem desenvolvida. Ela rege o fluxo não saturado e transiente na centrífuga utilizando-se do modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a). Ela considera, também, a variação da aceleração centrífuga em cada ponto da amostra de solo.

## 5.2 Desenvolvimento analítico da solução

Resolver a Eq. (5.15), analiticamente, significa encontrar uma função explícita  $\theta(r, t)$  que obedeça à equação e às condições iniciais e de contorno estabelecidas de acordo com o fenômeno físico. O método de separação de variáveis, explicado no Subcapítulo 2.2, permite que a solução seja desenvolvida, até certo momento, sem a imposição das condições de contorno e da condição inicial.

Inicialmente, faz-se uma translação linear a partir da função  $\theta(r,t)$  para fazer a homogeneização da EDP original aplicando o método de separação de variáveis:

$$\theta(r,t) - \frac{D}{B} = R(r) \cdot T(t) \quad (5.16)$$

Substituindo a Eq. (5.16) na Eq. (5.15), esta será reescrita em termos de  $R$  e de  $T$ :

$$A \frac{d^2 R}{dr^2} T - B \left( r + \frac{C}{B} \right) \frac{dR}{dr} T - B R T = R \frac{dT}{dt} \quad (5.17)$$

Dividindo a Eq. (5.17) por  $RT$ :

$$\frac{A}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{B}{R} \left( r + \frac{C}{B} \right) \frac{dR}{dr} - B = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \quad (5.18)$$

Nesse momento, como só existem funções de  $r$  de um lado da equação e de  $t$  do outro, essa equação pode ser igualada a uma constante  $k$ , que pode ser real ou imaginária. Fazendo esse procedimento para a equação no tempo:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = k \quad (5.19)$$

A Eq. (5.19) pode ser resolvida e é uma EDO de segunda ordem, com solução:

$$T = ce^{kt} \quad (5.20)$$

Agora, é necessário resolver a equação em  $r$ . Tem-se a seguinte EDO:

$$\frac{A}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{B}{R} \left( r + \frac{C}{B} \right) \frac{dR}{dr} - B = k \quad (5.21)$$

Multiplicando a Eq. (5.21) por  $R/A$ :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{B}{A} \left( r + \frac{C}{B} \right) \frac{dR}{dr} - \frac{(B+k)}{A} R = 0 \quad (5.22)$$

Fazendo, agora, a seguinte mudança de variável:

$$\eta = \xi \left( r + \frac{C}{B} \right) \quad (5.23)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro constante real positivo de transformação e ajuste.

De forma que:

$$d\eta = \xi dr \quad (5.24)$$

Substituindo as Eqs. (5.23) e (5.24) na Eq. (5.22):

$$\frac{d^2 R}{d\eta^2} - \frac{B}{A\xi^2} \eta \frac{dR}{d\eta} - \frac{(B+k)}{A\xi^2} R = 0 \quad (5.25)$$

Impondo, agora, o valor de  $\xi$  de forma que obedeça à condição  $B/(A\xi^2)=2$ , tem-se:

$$\xi = \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (5.26)$$

E fazendo  $(B+k)/(A\xi^2) = -\lambda$ , a equação resulta em:

$$\frac{d^2 R}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dR}{d\eta} + \lambda R = 0 \quad (5.27)$$

A Eq. (5.27) é uma conhecida EDO chamada de Equação Diferencial de Hermite, cuja solução, para valores de  $\lambda$  inteiros não negativos, são os polinômios de Hermite, de sorte que:

$$R = H_\lambda(\eta) \quad (5.28)$$

onde,

$H_\lambda$  = polinômio de Hermite.

E a fórmula do polinômio de Hermite pode ser apresentada de diversas formas.

Uma delas é descrita por:

$$H_\lambda(\eta) = \frac{1}{2} (-1)^\lambda e^{\eta^2} \sqrt{\pi} \frac{d^{\lambda+1}}{d\eta^{\lambda+1}} \text{erf}(\eta) \quad (5.29)$$

onde  $\text{erf}$  é a função erro de Gauss, definida por:

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-x^2} dx \quad (5.30)$$

Porém,  $\lambda$  pode ou não ser um inteiro não negativo, pois depende da constante de separação  $k$ . As condições iniciais e de contorno é que estabelecerão os valores de  $\lambda$ , de  $k$  e das constantes que constituem o polinômio de Hermite, quando este for substituído na Eq. (5.16). Esse desenvolvimento foi um importante marco para a solução analítica da equação buscada.

O próximo passo é a imposição das condições iniciais e de contorno, possivelmente utilizando a ferramenta de cálculo fracionário, ou fazendo a decomposição de cada um dos polinômios em séries de potência infinitas.

Esse problema deverá ser estudado em um momento posterior e os passos desenvolvidos no presente trabalho permanecem de relevante contribuição para o estudo e também como justificativa do porquê da necessidade de se utilizar, no presente momento, uma solução numérica.

### 5.3 Solução numérica com o MDF

Para a variável  $\theta(r, t)$  e as discretizações em  $\Delta r$  e em  $\Delta t$ , a aproximação explícita em avanço para a derivada de primeira ordem espacial pode ser dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \simeq \frac{\theta_{i+1}^k - \theta_i^k}{\Delta r} \quad (5.31)$$

A notação  $\theta_i^k$  foi explicada no Subcapítulo 2.3. A aproximação para a derivada de primeira ordem temporal pode ser dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\Delta t} \quad (5.32)$$

A aproximação da derivada de segunda ordem explícita e espacial também pode ser dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{\theta_{i+1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i-1}^k}{\Delta r^2} \quad (5.33)$$

Substituindo as Eqs. (5.31), (5.32) e (5.33) na Eq. (5.15), obtém-se:

$$\frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\Delta t} = A \frac{\theta_{i+1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i-1}^k}{\Delta r^2} - B \Delta r (i-1) \frac{\theta_{i+1}^k - \theta_i^k}{\Delta r} - C \frac{\theta_{i+1}^k - \theta_i^k}{\Delta r} - B\theta_i^k + D \quad (5.34)$$

Desenvolvendo e evidenciando os termos de fator comum:

$$\begin{aligned} \theta_i^{k+1} = & \left( \frac{A\Delta t}{\Delta r^2} - B(i-1)\Delta t - \frac{C\Delta t}{\Delta r} \right) \theta_{i+1}^k \\ & + \left( -\frac{2A\Delta t}{\Delta r^2} + B(i-2)\Delta t + \frac{C\Delta t}{\Delta r} + 1 \right) \theta_i^k + \frac{A\Delta t}{\Delta r^2} \theta_{i-1}^k + D\Delta t \end{aligned} \quad (5.35)$$

Optou-se, na Eq. (5.35), por iniciar a discretização nos pontos  $(i,k) = (1,1)$  e, também, foi utilizada a transformação:

$$r = \Delta r (i-1) \quad (5.36)$$

E, ao final, com a Eq. (5.35) é possível obter a solução numérica com os valores das condições iniciais e de contorno estabelecidas. A discretização foi consistente com o polinômio de Taylor e deve-se encontrar os valores que testifiquem sua estabilidade e sua convergência.

A estabilidade da Eq. (5.35) dependerá dos coeficientes que a compõem e também da discretização utilizada e, então, devem ser determinadas as condições em que ela é convergente com a solução analítica, fornecendo resultados coerentes. Deve-se determinar a estabilidade e, pelo teorema de equivalência de Lax, ela automaticamente será convergente.

Utiliza-se a estabilidade de von Neumann para determinar as condições de estabilidade. Transformando a Eq. (5.15) em homogênea por meio da seguinte transformação:

$$u(r, t) = \theta(r, t) - \frac{D}{B} \quad (5.37)$$

A Eq. (5.15) se torna:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - Br \frac{\partial u}{\partial r} - C \frac{\partial u}{\partial r} - Bu \quad (5.38)$$

Nesse momento, pode-se aplicar a análise de estabilidade, considerando que a estabilidade da equação original está condicionada à estabilidade da Eq. (5.38). Fazendo a seguinte substituição, por uma componente da série harmônica de Fourier:

$$u_i^k = U^k e^{IQr_i} \quad (5.39)$$

A discretização explícita em diferenças finitas da Eq. (5.38) é dada por:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = A \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta r^2} - (Br + C) \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta r} - Bu_i^k \quad (5.40)$$

Optou-se por não discretizar o termo  $r$  para que se escolha a opção, ao final, mais conservadora (com maior instabilidade) a fim de obter a discretização temporal mínima para a estabilidade. Substituindo a Eq. (5.39) na Eq. (5.40):

$$\begin{aligned} \frac{U^{k+1} e^{IQr_i} - U^k e^{IQr_i}}{\Delta t} &= A \frac{U^k e^{IQr_i} e^{IQ\Delta r} - 2U^k e^{IQr_i} + U^k e^{IQr_i} e^{-IQ\Delta r}}{\Delta r^2} \\ &\quad - (Br + C) \frac{U^k e^{IQr_i} e^{IQ\Delta r} - U^k e^{IQr_i}}{\Delta r} - BU^k e^{IQr_i} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dividindo a Eq. (5.41) por  $e^{IQr_i}$ :

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = A \frac{U^k e^{IQ\Delta r} - 2U^k + U^k e^{-IQ\Delta r}}{\Delta r^2} - (Br + C) \frac{U^k e^{IQ\Delta r} - U^k}{\Delta r} - BU^k \quad (5.42)$$

Rearranjando os termos:

$$U^{k+1} = U^k \left[ \Delta t \left( A \frac{e^{IQ\Delta r} - 2 + e^{-IQ\Delta r}}{\Delta r^2} - (Br + C) \frac{e^{IQ\Delta r} - 1}{\Delta r} - B \right) + 1 \right] \quad (5.43)$$

Com o intuito de eliminar o termo  $e^{IQ\Delta r}$ , a identidade de Euler é apresentada:

$$e^{Iy} = \cos(y) + I \operatorname{sen}(y) \quad (5.44)$$

Com a substituição da Eq. (5.44) na Eq. (5.43), uma equação do tipo  $U^{k+1} = GU^k$  é obtida. Esse termo  $G$  é o fator de amplificação, de forma que o erro não será amplificado quando  $|G| \leq 1$ . Este termo é dado por:

$$G = A\Delta t \frac{2\cos(Q\Delta r) - 2}{\Delta r^2} - (Br + C)\Delta t \frac{\cos(Q\Delta r) + I \operatorname{sen}(Q\Delta r) - 1}{\Delta r} - B\Delta t + 1 \quad (5.45)$$

O  $G$  é, então, um número complexo com parte imaginária não nula. Separando a sua parte real de sua parte imaginária, obtém-se:

$$G = \left[ A\Delta t \frac{2\cos(Q\Delta r) - 2}{\Delta r^2} - (Br + C)\Delta t \frac{\cos(Q\Delta r) - 1}{\Delta r} - B\Delta t + 1 \right] - \left[ (Br + C)\Delta t \frac{\operatorname{sen}(Q\Delta r)}{\Delta r} \right] I \quad (5.46)$$

O conjugado de  $G$  é dado pela fórmula:

$$\bar{G} = \left[ A\Delta t \frac{2\cos(Q\Delta r) - 2}{\Delta r^2} - (Br + C)\Delta t \frac{\cos(Q\Delta r) - 1}{\Delta r} - B\Delta t + 1 \right] + \left[ (Br + C)\Delta t \frac{\operatorname{sen}(Q\Delta r)}{\Delta r} \right] I \quad (5.47)$$

Sabendo que:

$$\bar{G}G = |G|^2 \quad (5.48)$$

O erro não será amplificado, como explicitado, quando  $|G| \leq 1$ . Unindo as Eqs. (5.46), (5.47) e (5.48), o seguinte critério de estabilidade deve ser atendido:

$$\left[ A\Delta t \frac{2\cos(Q\Delta r) - 2}{\Delta r^2} - (Br + C)\Delta t \frac{\cos(Q\Delta r) - 1}{\Delta r} - B\Delta t + 1 \right]^2 + \left[ (Br + C)\Delta t \frac{\sin(Q\Delta r)}{\Delta r} \right]^2 \leq 1 \quad (5.49)$$

Este é o critério estabelecido para que a solução pelo método das diferenças finitas explícito seja estável.

## 5.4 Condições de contorno

### 5.4.1 Contorno com umidade constante

A equação diferencial parcial que rege o fluxo na centrífuga está escrito em termos da variável  $\theta$ . A condição de contorno que denota um valor de umidade constante é uma condição de Dirichlet, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\theta(r, t) = \theta_1 \quad (5.50)$$

onde  $\theta_1$  é a umidade constante em alguma fronteira, quando  $r = 0$  ou  $r = L$ .

Particularmente, se o desejo for fixar que, na região da saída de água, ou final da amostra, a amostra está saturada (valor de sucção  $\psi = 0$ ), então:

$$\theta(L, t) = \theta_s \quad (5.51)$$

Para a discretização, basta fixar o valor numérico de uma das células em um dos extremos.

### 5.4.2 Contorno com infiltração com velocidade constante

A condição de contorno do modelo físico deve ser estabelecida a partir dos modelos constitutivos aplicados. A velocidade surge na equação diferencial da centrífuga a partir da lei de Darcy-Buckingham. A Eq. (3.6) relaciona a velocidade do fluxo de Darcy-

Buckingham e, utilizando a coordenada espacial  $r$  com o modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a) nessa equação, obtém-se:

$$v = -k_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \left( \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\omega^2 r_1}{g} - \frac{\omega^2 r}{g} \right) \quad (5.52)$$

Fazendo as substituições do modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a) na Eq. (5.52) e, no caso em que se queira impor uma condição de contorno que estabeleça que a velocidade de infiltração no início da amostra ( $r = 0$ ) seja constante, basta fixá-la em um valor  $v_0$ . O resultado é a seguinte condição de Robin:

$$\frac{k_s \omega^2 r_1}{g(\theta_s - \theta_r)} \theta(0, t) - \frac{k_s}{\gamma_w \delta(\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial r} = v_0 + \frac{k_s \omega^2 r_1 \theta_r}{g(\theta_s - \theta_r)} \quad (5.53)$$

Substituindo as Eqs. (5.11) e (5.13) na Eq. (5.53):

$$C\theta(0, t) - A \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial r} = v_0 + C\theta_r \quad (5.54)$$

A Eq. (5.54) é a equação regente caso se queira impor uma infiltração constante no início da amostra de solo na centrífuga. No modelo de MDF, deve-se ter uma formulação matemática para essa condição e, neste caso, o ponto  $\theta(0, t)$  é equivalente à célula  $\theta_1^k$  e a derivada espacial dele pode ser expressa por aproximações do polinômio de Taylor, como as citadas anteriormente ou variações destas.

## 6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

### 6.1 Análise paramétrica e de sensibilidade

Inicialmente, fez-se uma validação do método das linhas (MOL) por meio do método das diferenças finitas (MDF). Para que o MDF convirja para a solução analítica da equação ele necessita ser consistente, convergente e estável. A verificação da consistência foi feita no Subcapítulo 5.3 e a formulação da análise da estabilidade de Von Neumann também foi apresentada.

No Cap. 4 foram apresentados os dados para a validação inicial, que baseou-se em condições de contorno saturadas nas extremidades das amostras e uma umidade inicial  $\theta_i$  de 0,25. Foi escolhida uma discretização de 300 pontos em  $r$ , resultando em um  $\Delta r$  de 0,000501672.

Executou-se um código de estabilidade de Von Neumann a partir da Eq. (5.49) variando o ângulo  $Q\Delta r$  e o  $r$ . O ângulo  $Q\Delta r$  pode variar no intervalo de  $[0, 2\pi]$  e o  $r$  pode variar no intervalo de  $[0, r]$ . A Fig. 6.1 mostra como foram feitas as manipulações dos parâmetros. O valor  $\Delta t_1$  mostrado é o valor de  $\Delta t$  que torna a expressão da Eq. (5.49) igual a 1. Executando a variação dos valores, percebe-se que uma discretização de  $\Delta t = 1.5$  atinge os critérios de estabilidade para todos os valores do intervalo.

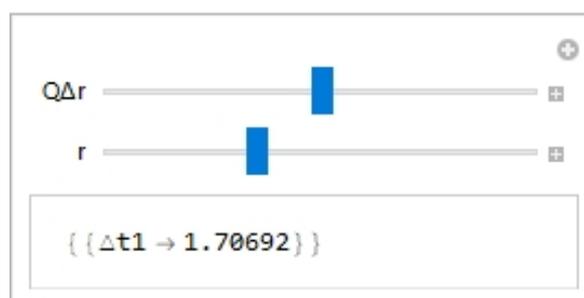


Figura 6.1 - Análise da estabilidade de Von Neumann para determinação do  $\Delta t$  que torna a discretização estável

Partiu-se, então, para a simulação do fenômeno em ambos os métodos, para um sensor localizado a 1,5 cm do início da amostra. A Fig. 6.2 mostra os resultados para ambos os métodos, com o fator de conversão de unidades em  $t$  que permita a equivalência de instantes de medida, comprovando a validação do MOL, já contido na biblioteca de funções do *Mathematica* por meio da função *NDSolveValue*, e a possibilidade de utilizá-lo nas futuras análises por sua eficiência computacional e rapidez de convergência.

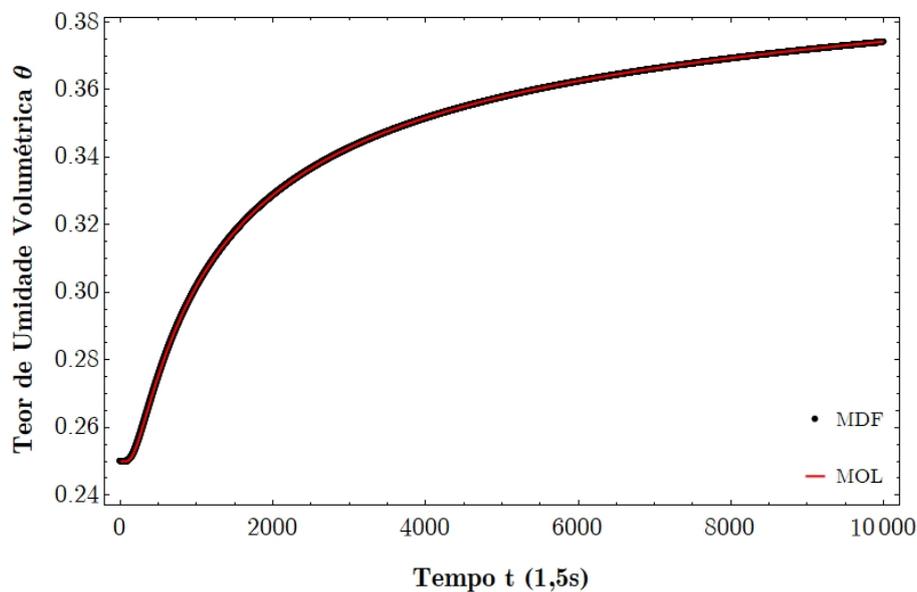


Figura 6.2 - Validação do método das linhas (MOL) por meio do método das diferenças finitas (MDF)

Com a validação da ferramenta e do método, pôde-se partir para a análise paramétrica com as condições de contorno reais do experimento. Buscou-se uma condição de contorno que mais se aproximasse do experimento na realidade.

A partir da análise do fenômeno e de como o experimento é conduzido, decidiu-se pelas seguintes condições de fronteira: uma infiltração de velocidade constante  $v_0$  em  $r = 0$  e, no final da amostra ( $r = L$ ), a fixação de uma umidade saturada  $\theta = \theta_s$ . Pelo

desenvolvimento numérico do modelo a primeira condição se transformou, matematicamente, em uma condição de Robin e a segunda, em uma condição de Dirichlet.

Com os dados da Tab. 4.1, o fenômeno pôde ser simulado. A Fig. 6.3 mostra como seria o gráfico dos sensores de umidade localizados às distâncias  $r = 0, 2, 4, 8$  e  $13 \text{ cm}$  em uma amostra de tamanho  $L = 15 \text{ cm}$ .

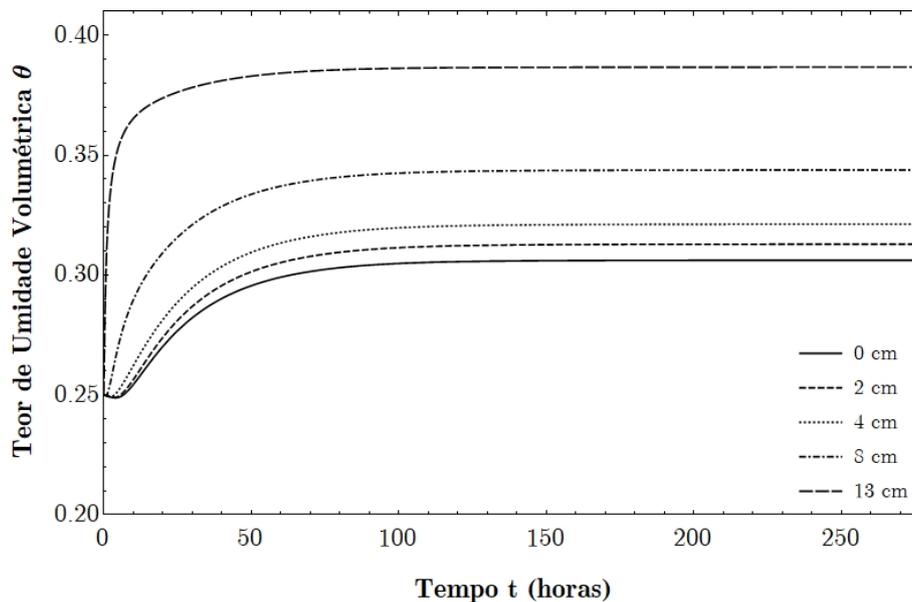


Figura 6.3 - Simulação do fenômeno com as condições de contorno reais para pontos distintos no solo para uma frequência de rotação  $f = 150 \text{ rpm}$

Inicialmente, observando o gráfico da Fig. 6.3, percebe-se que há dois momentos distintos no comportamento do solo: a região transiente e a região estacionária. Isso se traduz em que o teor de umidade volumétrica está variando com o tempo e, em um dado momento, ele estabiliza e passa a não variar mais.

Na literatura pesquisada, observa-se uma tendência dos pesquisadores que já estudaram o fenômeno de fluxo sob centrifugação de utilizar somente a região estacionária para a obtenção de dados buscados. Isso se deve ao fato de, na região transiente, haver uma quantidade muito grande de dados em um curto espaço de tempo

e não existir uma solução matemática transiente para o fenômeno estudado, dificultando a sua análise. Isso, entretanto, gera um prejuízo pois, devido à perda de grande parte dos dados, em geral, necessitam-se de que sejam feitos diversos experimentos semelhantes, para o solo em diversas condições diferentes, de forma obter dados procurados.

No presente trabalho, entretanto, optou-se por utilizar, por meio da solução transiente, os dados das duas regiões. O fenômeno físico é bem posto: a infiltração de água por meio do início da amostra ( $r = 0$ ) faz o umedecimento do solo ao longo de seu comprimento. O fenômeno se tornou estacionário, para a frequência aplicada em, aproximadamente, 100 horas.

Outra informação a ser extraída desse gráfico é algo que já vinha sendo observado nos resultados dos experimentos: o solo fica longe da saturação (que seria quando  $\theta = 0.41$ ) e, além disso, há a formação de patamares de umidades diferentes ao longo da amostra. Essas duas tendências podem ser comprovadas, também, na Fig. 4.1.

A formação de patamares se deve ao modelo considerar que, em cada ponto do solo, há uma energia rotacional diferente. Matematicamente, sabe-se que a energia rotacional tem, em sua constituição, uma componente  $r$  que varia ao longo do solo: quanto mais distante o ponto está do eixo de rotação da centrífuga, maior a energia rotacional. Essa é a explicação do porquê desse modelo ser chamado de modelo de aceleração centrífuga variável. Por ter uma diferença energética entre os pontos, há, também, diferentes teores de umidade volumétrica em cada ponto, originando os patamares.

Caso a equação de Cavalcante & Zornberg (2017b, *in press*), que considera uma aceleração centrífuga constante, fosse plotada com as mesmas condições de contorno do presente trabalho (infiltração em  $r = 0$  e umidade constante e saturada em  $r = L$ ), não haveria uma diferença de energia rotacional entre os pontos da amostra, fazendo com que os patamares não fossem gerados. Isso pode ser visualizado também em Cavalcante & Zornberg (2017a), pois a equação é a mesma gerada, a ser diferenciada apenas pelo valor dos coeficientes dos termos diferenciais e lá os patamares não são observados.

Pode-se plotar o mesmo gráfico sob um ângulo de visão diferente: no eixo horizontal, o comprimento da amostra, e, no eixo vertical, o teor de umidade volumétrica (Fig. 6.4). Plotou-se o gráfico para tempos diferentes, confirmando que o tempo de convergência se dará em torno de  $t = 100$  horas.

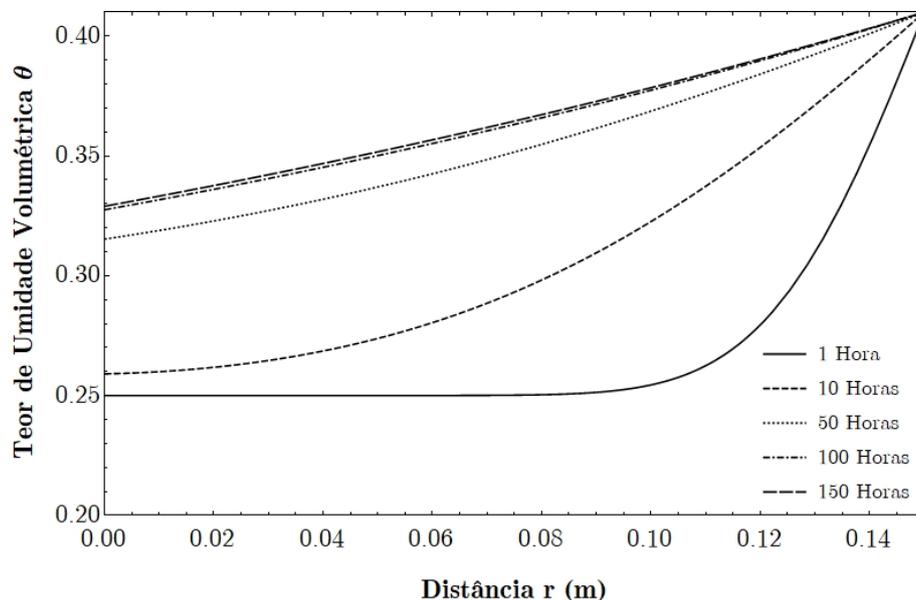


Figura 6.4 - Avanço da frente de umidade ao longo da amostra para  $f = 150$  rpm

O gráfico da Fig. 6.4 confirma o fenômeno previamente observado: o avanço de uma frente de umidade por meio da infiltração em  $r = 0$  de forma que, em um dado

momento, por volta de  $t = 100$  horas, o fenômeno se torna estacionário e converge para uma determinada curva de umidade.

Essa curva, assim como observada, mostra que os pontos ao longo da amostra de solo apresentam teores de umidades volumétrica diferentes durante ao final do ensaio, fenômeno que não seria observado se o modelo considerasse uma aceleração centrífuga constante. Considerando a aceleração variável para cada ponto do solo, observa-se essa diferença entre os teores de umidade ao longo do comprimento  $r$  da amostra.

Caso a frequência de rotação seja aumentada para  $f = 200 \text{ rpm}$ , sendo os outros parâmetros mantidos, o resultado pode ser observado na Fig. 6.5.

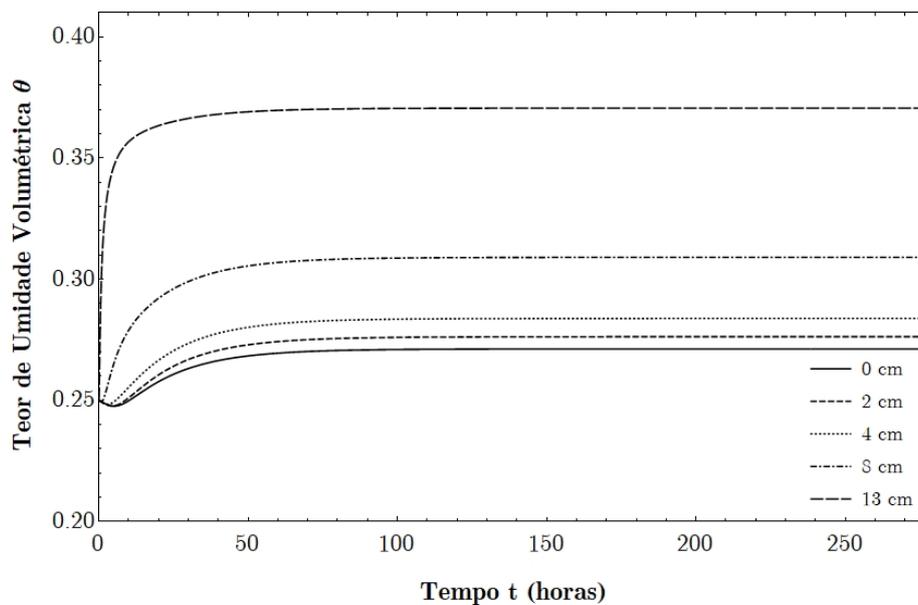


Figura 6.5 - Simulação do fenômeno com as condições de contorno reais para pontos distintos no solo para uma frequência de rotação  $f = 200 \text{ rpm}$

Pode-se perceber, nesse momento, as tendências esperadas para o aumento de frequência: o solo se distancia mais da saturação, devido à maior energia rotacional, e o tempo de convergência ao estado estacionário é mais rápido. Nesse caso, o tempo de convergência aproximado é de 60 horas.

Para uma melhor visualização de como a frequência de rotação pode alterar o comportamento da frente de umidade, o gráfico da Fig. 6.6 mostra como se configuraria um fenômeno em um ponto do solo a uma distância  $r$  de 10 *cm*. Percebe-se que a frequência de rotação diminui o tempo de convergência ao estado estacionário e também reduz a umidade do solo devido ao acréscimo de energia rotacional.

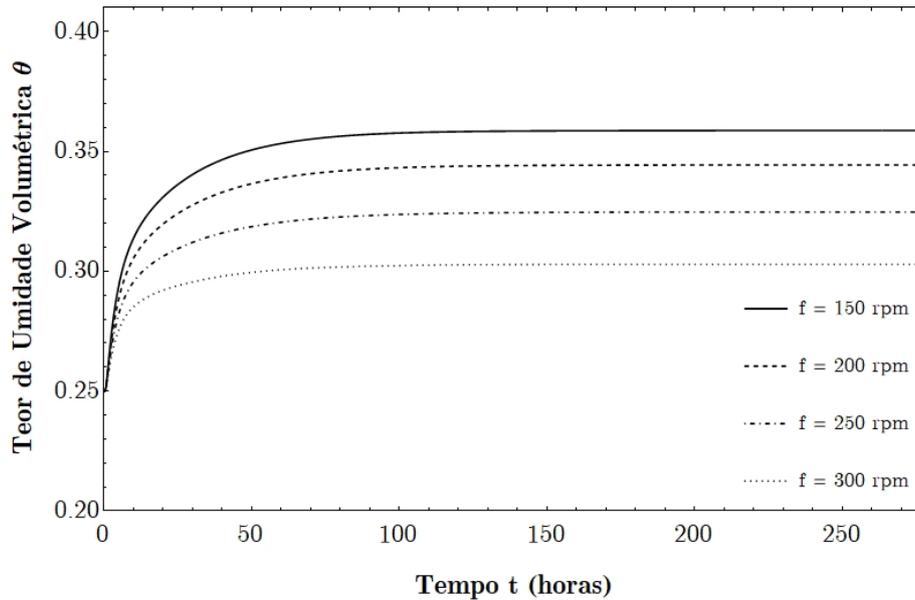


Figura 6.6 - Análise de sensibilidade à frequência para um sensor localizado em  $r = 10$  *cm*

Oteve-se sucesso, então, na simulação física do fenômeno e as tendências esperadas foram alcançadas. Essa simulação, entretanto, já considerou o parâmetro  $\delta$ , que é o parâmetro a ser obtido e para a construção das curvas característica e de condutividade hidráulica no modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a).

Em uma situação real, esse parâmetro  $\delta$  é o parâmetro que necessita ser obtido e o modelo aqui proposto fornece uma metodologia para obtenção desse parâmetro a partir de um único experimento no permeâmetro de centrífuga com um sensor de umidade (um TDR, por exemplo).

## 6.2 Validação do modelo para obtenção das propriedades hidráulicas

McCartney (2007) desenvolveu uma série de ensaios com um permeâmetro de centrífuga para a obtenção das propriedades hidráulicas do solo. Especificamente, em seu trabalho, o permeâmetro de centrífuga do tipo protótipo serviu para a validação do presente estudo.

As propriedades geométricas e de funcionamento do equipamento, bem como as propriedades hidráulicas preliminares necessárias para a modelagem, foram extraídas do trabalho e estão apresentadas na Tab. 4.2. Os dados necessários foram: o perfil de avanço da frente de umidade por meio dos sensores e uma curva característica para a comparação, com parâmetros hidráulicos semelhantes, para o mesmo tipo de solo. Esses dados estão apresentados nas Fig. 4.1 e Fig. 4.2.

Como bem pode ser observado na Fig. 4.1, os dados do sensor A5 não foram apresentados de forma discretizada, tornando sua análise não proveitosa. Como o modelo só precisa dos dados de um único sensor para a validação, os outros quatro sensores foram suficientes. Para considerar a posição do sensor com relação ao início da amostra, deve-se subtrair do comprimento da amostra o valor de  $z_m$ . As distâncias dos sensores A1, A2, A3 e A4 ao início da amostra serão, respectivamente,  $r = 0,055$ ,  $0,105$ ,  $0,155$  e  $0,205$ m.

### 6.2.1. Obtenção da curva característica

A curva característica para verificação de resultados escolhida foi a de porosidade  $n = 0,47$ , que é a que mais se aproxima da porosidade do solo estudado na centrífuga. Os dados foram extraídos dos gráficos e inseridos no *Mathematica* para a plotagem dos mesmos. O resultado da plotagem dos dados pode ser visualizado na Fig. 6.7. Optou-

se por não ligar os pontos de forma a fazer uma análise real e comparativa com o modelo proposto.

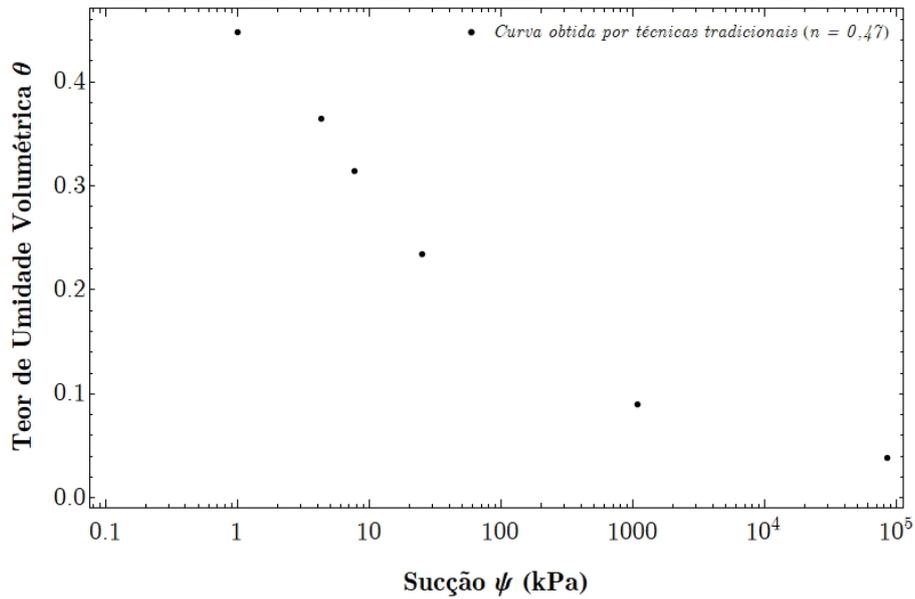


Figura 6.7 - Curva característica do solo estudado com porosidade  $n = 0,47$

A situação ideal seria a comparação entre o mesmo solo com a mesma porosidade, porém esperou-se que uma mudança de 3% na porosidade não representasse significativas mudanças na curva característica, sendo essa possível de ser utilizada para a verificação do modelo.

Com os dados da curva característica, pode-se aplicar o modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a), encontrando o  $\delta$  real do solo cujo valor é 0,046. O ajuste da curva pode ser visualizado na Fig. 6.8.

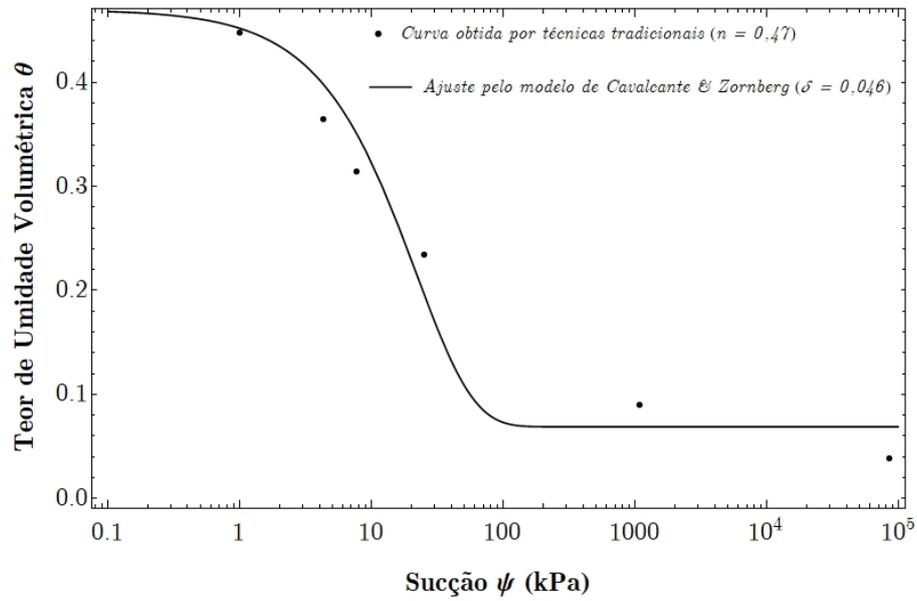


Figura 6.8 - Modelagem da curva característica do solo estudado utilizando o modelo de Cavalcante & Zornberg (2017a)

### 6.2.2. Validação do modelo para o sensor A1 ( $r = 0,055m$ )

Foram extraídos, inicialmente, os dados do Sensor A1. O resultado do ensaio pode ser visualizado na Fig. 6.9.

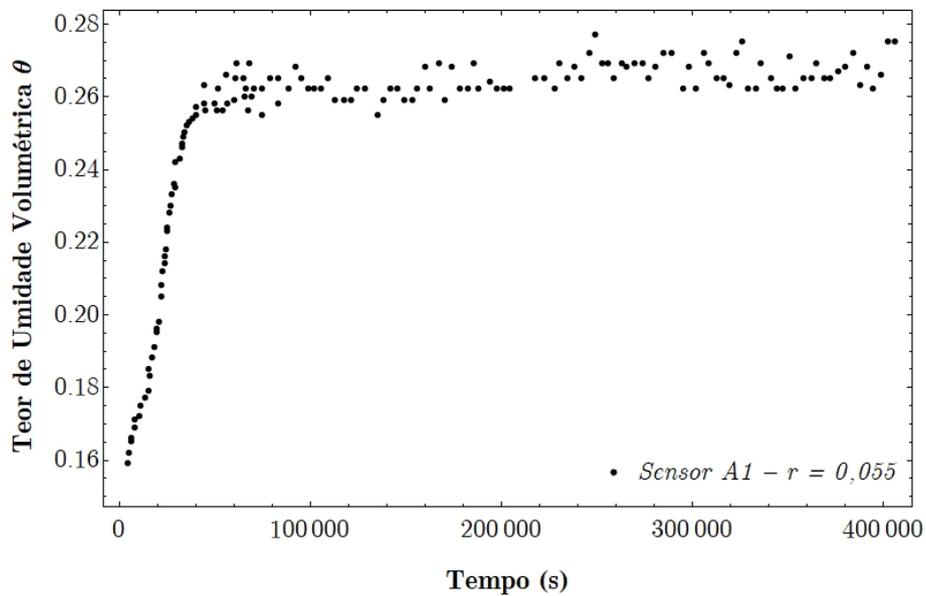


Figura 6.9 - Dados do sensor de umidade A1 no ensaio do permeâmetro de centrífuga

A porosidade desse solo é  $n = 0,44$  e esse é o teor de umidade volumétrica do solo quando saturado. Percebe-se, na Fig. 6.9, que o solo fica distante da saturação quando chega à região estacionária, estabilizando-se por volta de  $\theta = 0,27$ .

O ajuste numérico foi feito, então, por meio de um  $\delta$  que minimizasse o quadrado dos resíduos. Fez-se uma solução numérica paramétrica da Eq. (5.15), utilizando o método das linhas, com uma condição de contorno de infiltração constante em  $r = 0$  e, em  $r = L$ , considerou-se  $\theta = \theta_s$ . O gráfico do somatório dos resíduos para diferentes valores de  $\delta$  pode ser visualizado na Fig. 6.10. O método dos mínimos quadrados estabelece que o  $\delta$  que melhor se ajusta ao solo é aquele que minimiza o resíduo.

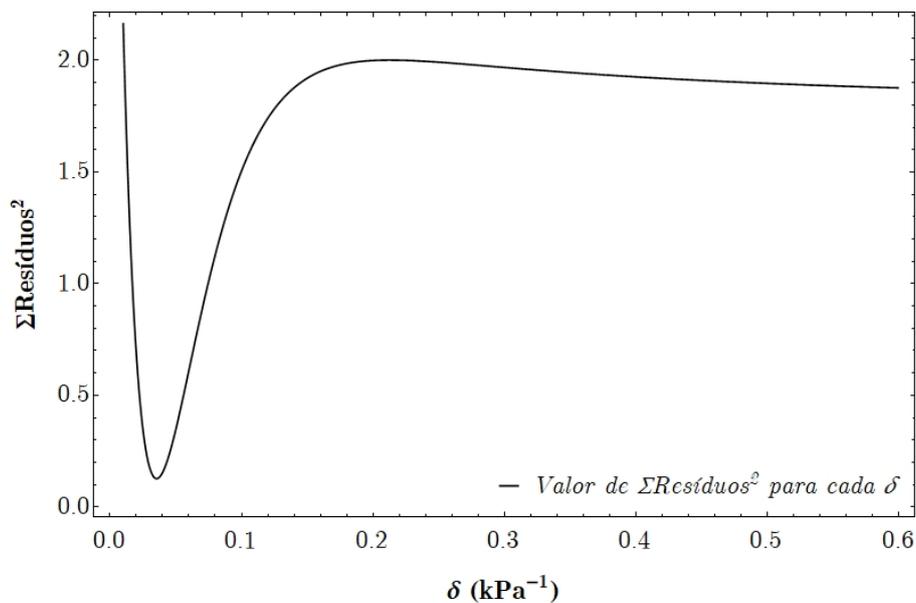


Figura 6.10 - Variação do valor dos resíduos quadráticos com  $\delta$

Como a plotagem foi discreta, necessitou-se uma manipulação manual dos valores de  $\delta$  de forma a verificar qual é exatamente o seu valor. O  $\delta$  que minimizou os resíduos quadráticos foi  $\delta = 0,035$ .

Basta agora, então, aplicar a função inversa da Eq. (3.9), que representa o modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a). Ela permite a construção da curva

característica do solo. De forma comparativa, plota-se a curva característica obtida a partir do modelo e também os valores reais obtidos por outras técnicas. O resultado encontra-se na Fig. 6.11.

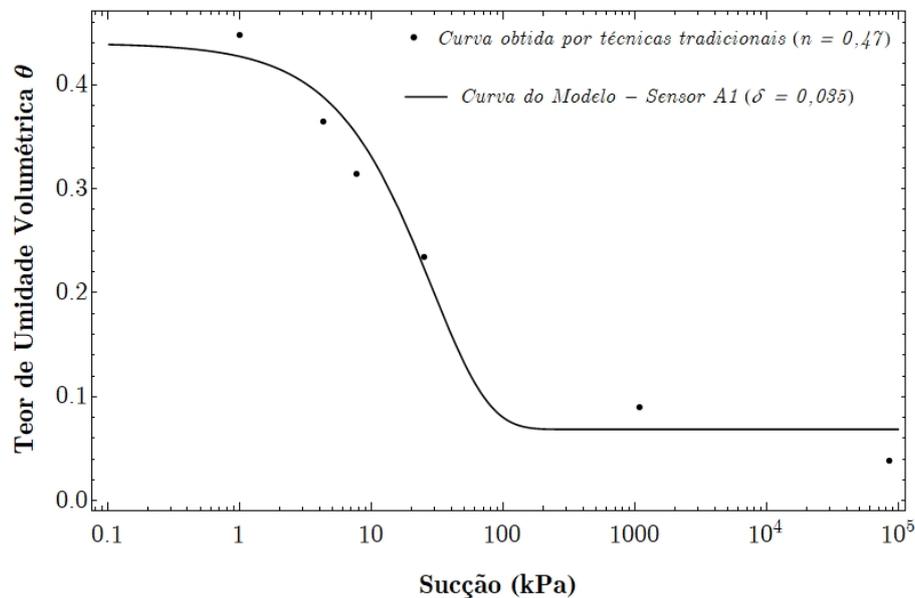


Figura 6.11 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A1

É de se esperar que os resultados mais precisos sejam aqueles nos quais os sensores estão mais distantes da fronteira em  $r = L$ , haja vista que essa fronteira apresenta uma condição de contorno difícil de ser simulada e a fronteira em  $r = 0$  está coerente com o desenvolvimento do fenômeno físico e do modelo constitutivo. O resultado do sensor A1 foi bastante favorável comprovando a eficácia do modelo proposto e em como ele foi capaz de representar a realidade do solo estudado.

Vale destacar, novamente, que os dados de curvas características para o solo estudado utilizando técnicas tradicionais podem demorar até 6 meses para serem obtidos e, com o dado de um único sensor no ensaio do permeâmetro de centrífuga, ela pôde ser obtida com um bom resultado.

A eficácia do resultado se deveu também ao solo ser considerado ideal para utilizar na centrífuga: ele apresenta baixas taxas de deformabilidade quando submetido às tensões advindas da energia rotacional da centrífuga. Isso favoreceu ao modelo que, pelo fato de não considerar um mecanismo hidromecânico acoplando fluxo e deformação, torna-se eficaz com baixas taxas de deformação do solo durante o ensaio.

Nesse quesito, um modelo matemático preciso, que utilize as regiões transiente e estacionária do fenômeno, abrange o horizonte de atuação do ensaio de centrífuga, devido a não serem necessários grandes tempos de ensaios nem altas taxas de frequência para a obtenção das propriedades hidráulicas, gerando um menor custo de aquisição, um menor gasto energético e menores quantidades de experimentos para um solo a ser estudado.

### *6.2.3. Validação do modelo para o sensor A2 ( $r = 0,105m$ )*

Os procedimentos para a obtenção das propriedades hidráulicas a partir dos dados dos sensores A2 em diante foram análogos ao do sensor A1. Os dados da umidade ao longo do tempo desse sensor foram extraídos e estão mostrados na Fig. 6.12.

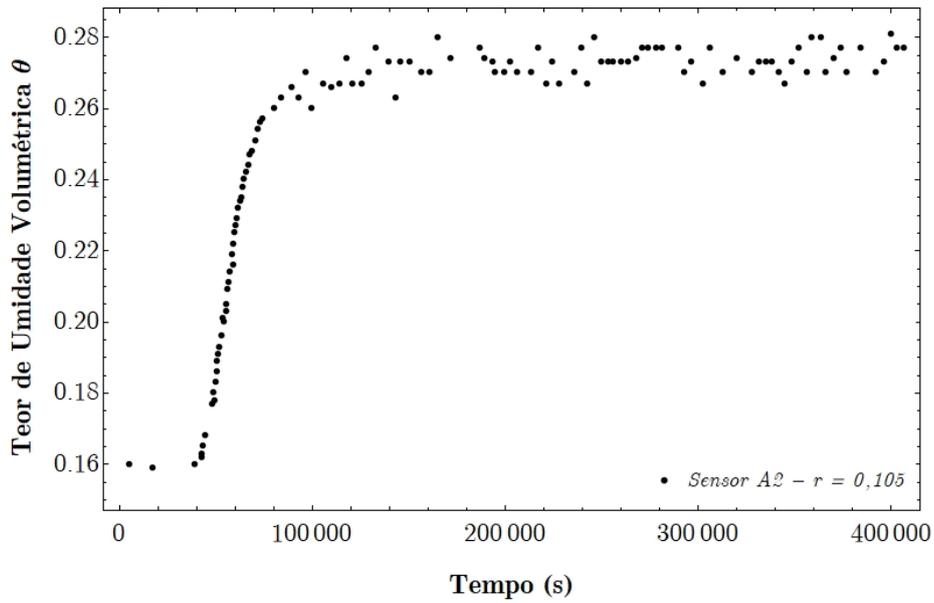


Figura 6.12 - Dados do sensor de umidade A2 no ensaio do permeâmetro de centrífuga

A solução do modelo foi, então, aplicada aos dados do sensor A2 obtendo-se um  $\delta$  ideal de ajuste para o solo que, com procedimentos análogos ao do sensor A1, encontrou-se  $\delta = 0,042$ . O resultado comparativo entre o modelo proposto e a curva característica real encontra-se na Fig. 6.13.

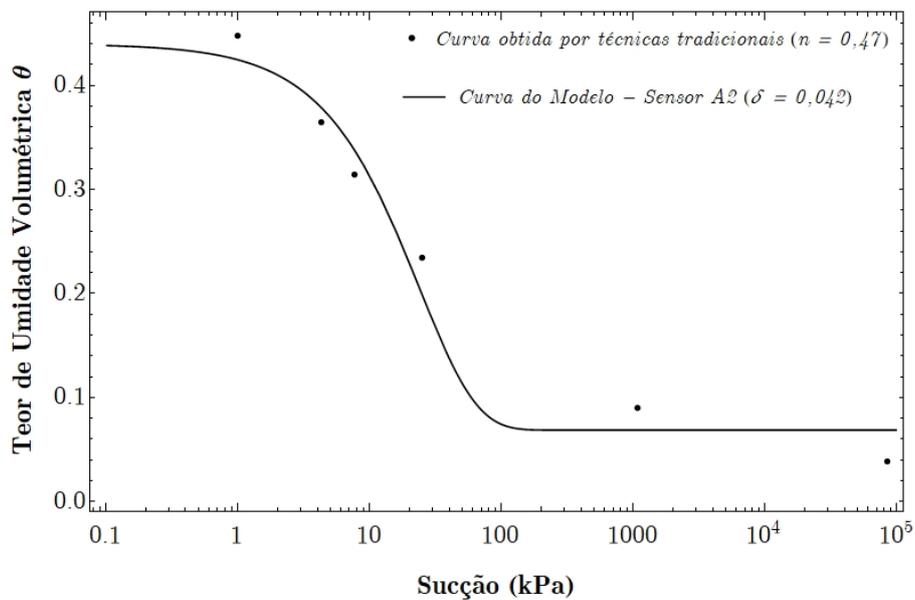


Figura 6.13 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A2

O  $\delta$  encontrado no sensor A2 foi bastante próximo ao  $\delta$  original do solo, sendo esta pequena diferença podendo ser explicada devido à pequena diferença de porosidade entre os solos testados. Este sensor apresentou um excelente resultado quanto à curva característica, mostrando a potencialidade da utilização do modelo para a obtenção dessa propriedade hidráulica. As mesmas conclusões de eficácia do sensor A1 podem ser tomadas para o sensor A2.

#### 6.2.4. Validação do modelo para o sensor A3 ( $r = 0,155m$ )

Os dados do sensor A3 foram extraídos e estão apresentados na Fig. 6.14.

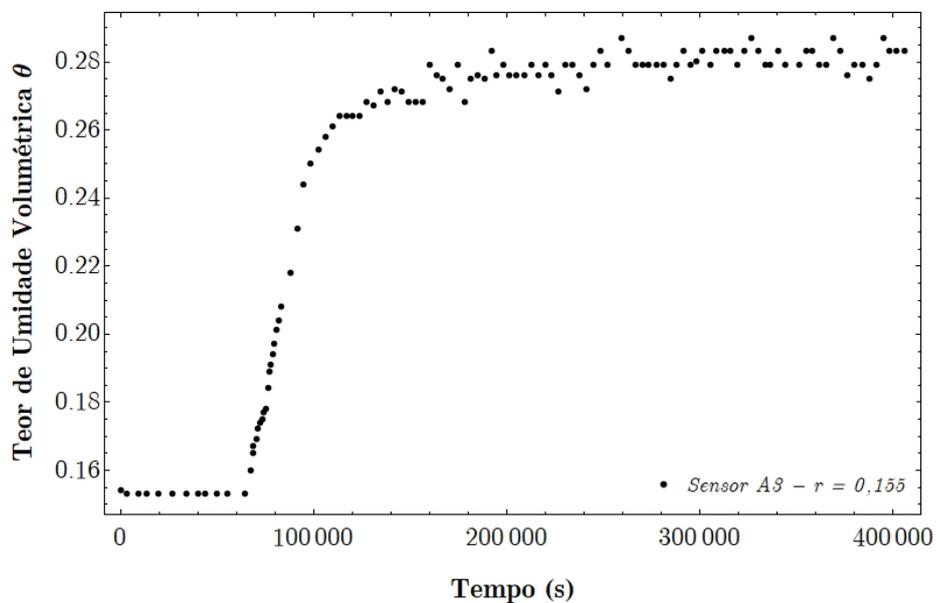


Figura 6.14 - Dados do sensor de umidade A3 no ensaio do permeâmetro de centrífuga

O ajuste pela solução da equação proposta, com as mesmas condições de contorno, foi feito e o  $\delta$  encontrado foi de 0,052. A comparação entre o modelo proposto com os dados do sensor A3 e a curva característica original pode ser visualizada na Fig. 6.15.

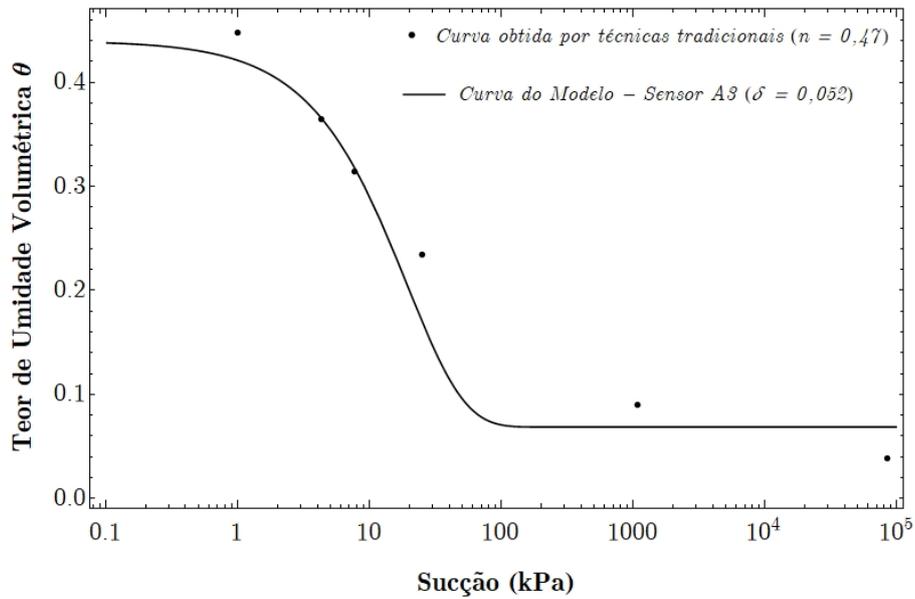


Figura 6.15 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A3

A curva obtida pelo sensor A3 obteve um ajuste satisfatório, chegando a cruzar com exatidão dois pontos da curva característica original. O  $\delta$  encontrado foi bastante próximo ao da curva característica original, porém um pouco maior. Esse sensor foi instalado aproximadamente no meio da amostra, livrando-o parcialmente dos efeitos negativos de estar perto das fronteiras, cujas condições matemáticas são difíceis de simular e manter experimentalmente. Com isso, seu resultado foi satisfatório e com boa proximidade na curva característica original.

#### 6.2.5. Validação do modelo para o sensor A4 ( $r = 0,205m$ )

Os dados do sensor A4 foram extraídos e estão mostrados na Fig. 6.16.

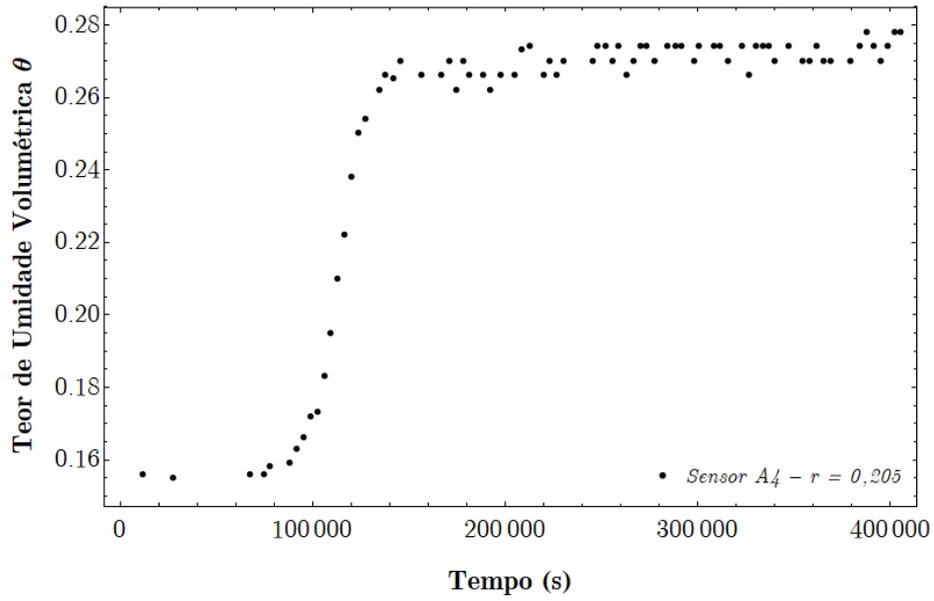


Figura 6.16 - Dados do sensor de umidade A4 no ensaio do permeâmetro de centrífuga

Por último, foi aplicado o ajuste no sensor A4 obtendo-se um  $\delta$  de 0,072. O resultado comparativo do modelo com a curva original pode ser visualizado na Fig. 6.17.

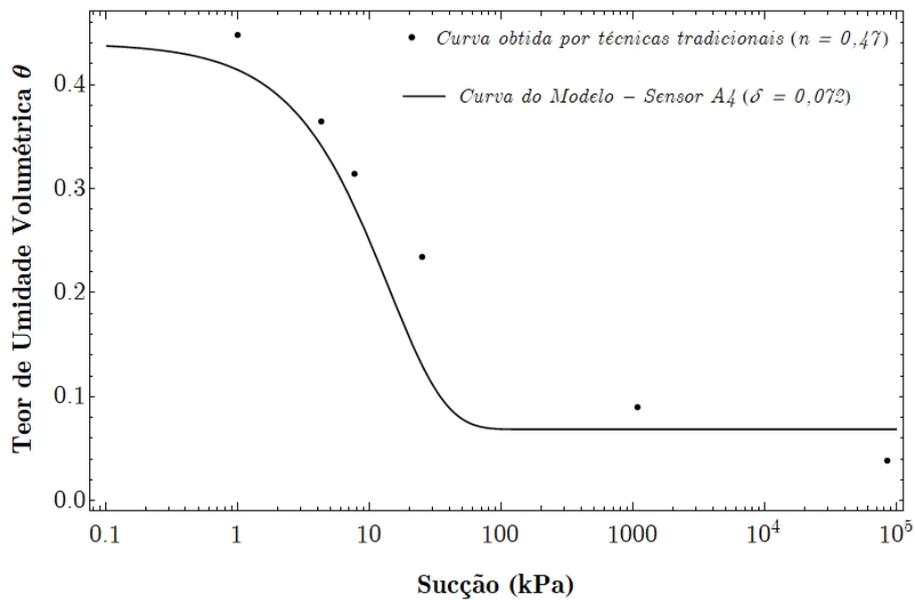


Figura 6.17 - Comparação entre curva experimental obtida por técnicas tradicionais e a curva obtida pelo modelo proposto para o Sensor A4

O resultado obtido para o sensor A4 não foi tão satisfatório como para os sensores anteriores. Isso se deveu ao fato de que ele está mais à direita, próximo à fronteira em  $r = L$ , que apresenta uma condição de contorno difícil de ser simulada. Os sensores A1 e A2 apresentaram resultados satisfatórios devido à condição de fronteira em  $r = L$  ser melhor definida para o experimento estudado e o sensor A3 estava localizado, aproximadamente, no meio da amostra, ficando distante das duas condições de fronteira, atenuando seus efeitos.

Entende-se que as posições A2 e A3 foram as que obtiveram os melhores resultados, tornando essas posições mais favoráveis à colocação dos sensores de umidade.

#### *6.2.6. Resumo dos resultados encontrados para os sensores A1, A2, A3 e A4*

Os resultados encontrados foram considerados bastante satisfatórios, principalmente para os sensores A2 e A3. Estes sensores caracterizaram-se por estarem o mais longe possível das fronteiras e, no caso do sensor A2, estava mais próximo da fronteira em que a condição de contorno foi matematicamente melhor desenvolvida e ajustada ao fenômeno.

Os resultados dos  $\delta$  encontrados pode ser visualizado na Tab. 6.1. Percebe-se que, se for feita a média aritmética dos  $\delta$  encontrados nos sensores A2 e A3, obtém-se um  $\delta$  de 0,047, que é quase exatamente o  $\delta$  original do solo.

Percebe-se, por essa análise, que a posição ideal de instalação, para o presente caso em estudo, se encontra entre a posição do sensor A2 e A3.

Tabela 6.1 - Relação dos  $\delta$  encontrados e comparação com o  $\delta$  real

Sensor	$r$ (m)	$\delta$ encontrado ( $kPa^{-1}$ )	$\delta$ real ( $kPa^{-1}$ )	$\delta$ encontrado - $\delta$ real ( $kPa^{-1}$ )
A1	0,055	0,035	0,046	-0,011
A2	0,105	0,042	0,046	-0,004
A3	0,155	0,052	0,046	0,006
A4	0,205	0,072	0,046	0,026

### 6.2.7. Curva de condutividade hidráulica não saturada ( $k$ -function) do solo

Devido aos resultados mais favoráveis, para a simulação da curva de condutividade hidráulica não saturada do solo, escolheu-se um  $\delta = 0,042$ , que corresponde aos dados do sensor A2. A curva de condutividade hidráulica pode ser devidamente simulada também por meio da equação do modelo constitutivo de Cavalcante & Zornberg (2017a). A Fig. 6.18 mostra essa curva.

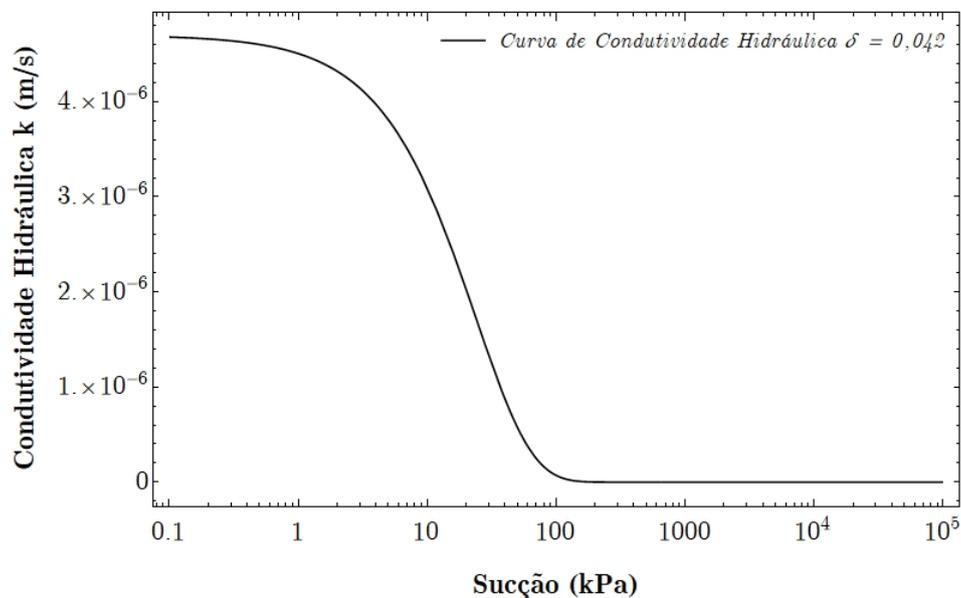


Figura 6.18 - Curva de condutividade hidráulica obtida por meio do delta advindo do modelo proposto

É elevada tanto a importância quanto a dificuldade de obtenção dessa curva e, por meio do modelo e da solução desenvolvidas, ela pôde ser obtida por meio dos dados de um único sensor de umidade no ensaio de centrífuga.

## 7. CONCLUSÕES

A modelagem numérico-analítica tem o intuito de fornecer ferramentas de forma a otimizar a experimentação, seja reduzindo o número de experimentos, facilitando a sua execução, ou fornecendo uma melhor interpretação de dados. A otimização do procedimento para obtenção das propriedades hidráulicas do solo por meio do ensaio do permeâmetro de centrífuga foi conseguida com sucesso no presente trabalho. Essas propriedades hidráulicas são essenciais ao desenvolvimento de uma precisa e correta utilização do conceito de fluxo não saturado na engenharia geotécnica em geral, permitindo uma maior precisão e otimização dos projetos a serem desenvolvidos.

Foi proposta uma EDP para o fenômeno de fluxo não saturado, transiente, sob ação de centrifugação e considerando uma aceleração centrífuga variável ao longo do solo, como também foi feito o desenvolvimento matemático das condições de contorno. A EDP contempla diversos parâmetros do solo que podem ser obtidos por meio de outros ensaios mais simples e ela foi desenvolvida a partir de modelos constitutivos típicos do fenômeno com a relação entre variáveis do fluxo não saturado obedecendo às equações de Cavalcante & Zornberg (2017a).

O modelo foi desenvolvido e solucionado numericamente, contando também com uma importante contribuição para o desenvolvimento de uma solução analítica, contudo, novos estudos são requeridos para a finalização da solução. Para isso, desenvolvimentos em cálculo fracionário podem ser necessários de forma a encontrar uma solução analítica fechada, sendo esta capaz de prover uma maior flexibilidade de parâmetros e uma maior eficiência computacional. Pretende-se que isto seja feito com base no desenvolvimento analítico realizado no presente trabalho.

O método das diferenças finitas foi utilizado na solução numérica com as condições de consistência, estabilidade e convergência atendidas, confirmando que ele converge para a solução analítica original. Devido a ter uma maior eficiência computacional, o método das linhas foi validado pelo MDF e utilizado nas análises paramétricas e na validação do modelo.

Obteve-se êxito na análise paramétrica para a simulação do fenômeno de ensaio. Os gradientes de energia esperados puderam ser visualizados com a consideração da aceleração centrífuga variável e o avanço da frente de umidade por meio da infiltração no início da amostra. Os gráficos observados foram semelhantes aos gráficos esperados por meio da visualização de ensaios anteriores.

Uma metodologia de interpretação de dados que utiliza as regiões transiente e estacionária visualizadas no ensaio foi obtida com sucesso. Essa metodologia foi capaz de, com os dados de um único sensor de umidade, obter a curva característica e a curva de condutividade hidráulica do solo. Os resultados de curva característica foram comparados com a curva característica do solo original, obtida por meio das técnicas de papel filtro e placa de pressão, fornecendo resultados precisos e condizentes com o ensaio buscado.

Devido à condição de contorno no início da amostra ser condizente, deduzida matematicamente e compatível com o fenômeno físico da condição de infiltração, os dados dos sensores A2 e A3, que estiveram mais próximos ao início da amostra, porém ainda longe da fronteira, forneceram um melhor resultado de curva característica. Adicionalmente, além da análise gráfica visual comparativa realizada comprovar a eficácia do modelo com os dados coletados destes sensores, o  $\delta$  calculado a partir dos

sensores A2 e A3 se aproximou bastante do  $\delta$  original do solo, sendo o erro considerado desprezível. Assim, a média aritmética de ambos os valores atingiu, com quase exatidão, o valor real.

Propôs-se, então, que, se o modelo do presente trabalho for utilizado para a obtenção das propriedades hidráulicas não saturadas do solo, os sensores devem ser instalados mais próximos à fronteira inicial, para uma maior precisão de resultados, em uma posição relativa entre os sensores A2 e A3.

### **7.1 Sugestões para pesquisas futuras**

Faz-se as seguintes sugestões para aprimoramento da pesquisa já desenvolvida:

- ✓ Elaborar uma solução analítica explícita da equação proposta com as condições de contorno utilizadas no modelo numérico para uma melhor otimização computacional e facilitação no ajuste do valor de  $\delta$ .
- ✓ Fazer um estudo experimental aprofundado sobre a condição de contorno em  $r = L$  de forma a se obter uma expressão matemática que represente melhor sua realidade. Dessa forma, espera-se que os resultados de sensores mais próximos a essa fronteira sejam mais condizentes com os resultados reais de curva característica.
- ✓ Elaborar um modelo que contemple os fenômenos de tensão, deformação e fluxo de forma a contemplar, para análise, solos com alto índice de expansão ou compressibilidade, expandindo o horizonte de atuação do ensaio do permeâmetro de centrífuga.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alemi, M. H., Nielsen, D. R., & Biggar, J. W. (1976). Determining the Hydraulic Conductivity of Soil Cores by Centrifugation1. *Soil Science Society of America Journal*, 40, 212.
- Borges, L. P. de F. (2016). *Método discreto Iota-Delta: Uma nova abordagem numérica para o problema de fluxo não saturado em meios porosos e fraturados*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF, 132 p.
- Buckingham, E. (1907). Studies on the Movement of Soil Moisture. *Bureau of Soils - Bulletin No. 38*, 61.
- Camapum de Carvalho, J., Gitirana, G. de F. N., Machado, S. L., Mascarenha, M. M. dos A., & Chagas, F. da S. (2015). *Solos não saturados no contexto geotécnico*. ABMS, São Paulo, SP, 759p.
- Cavalcante, A. L. B., & Zornberg, J. G. (2017a). Efficient Approach to Solving Transient Unsaturated Flow Problems. I: Analytical Solutions. *International Journal of Geomechanics*, ASCE, ISSN: 1532-3641.
- Cavalcante, A. L. B., & Zornberg, J. G. (2017b). Analytical solutions of centrifuge Richards' equation to simulate transient unsaturated flow problems (In Press). *International Journal of Geomechanics*.
- Cheng, A. H. D., & Cheng, D. T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268–302.
- Cuminato, J. A., & Meneguette Junior, M. (2013). *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnica de Diferenças Finitas*. SBM, Rio de Janeiro, RJ, 379p.
- Das, B., & Sobhan, K. (2013). *Principles of geotechnical engineering*. CL, 8th English edition, Stamford, CT, USA, 752p.
- Dell'Avanzi, E., Zornberg, J., & Cabral, A. (2004). Suction profiles and scale factors for unsaturated flow under increased gravitational field. *Soils and Foundations*, 44(3), 79-89.
- Farlow, S. J. (1993). *Partial differential equations for scientists and engineers*. Dover Publications, New York, 448p.
- Fletcher, C. A. J. (1991). *Computational Techniques For Fluid Dynamics 1*. Springer, Berlin, Heidelberg, 401p.
- Fortuna, A. de O. (2012). *Técnicas Computacionais Para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo, SP, 552p.

- Fredlund, D. G., & Rahardjo, H. (1993). *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. John Wiley & Sons, 544p.
- Fredlund, D. G., & Xing, A. (1994). Equations for the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31(4), 521–532.
- Fredlund, D. G., Xing, A., & Huang, S. (1994). Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31(4), 533–546.
- Harr, M. E. (1991). *Groundwater and Seepage*. Dover Publications, New York, 339p.
- Lu, N., & Likos, W. . (2004). *Unsaturated Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 584p.
- Mccartney, J. S. (2007). *Determination of the Hydraulic Characteristics of Unsaturated Soils Using a Centrifuge Permeameter*. Tese de Doutorado, Universidade do Texas em Austin, Austin, TX, 363p.
- McCartney, J. S., & Zornberg, J. G. (2010). Centrifuge Permeameter for Unsaturated Soils. II: Measurement of the Hydraulic Characteristics of an Unsaturated Clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(8), 1064–1076.
- Nimmo, J. R. (1990). Experimental testing of transient unsaturated flow theory at low water content in a centrifugal field. *Water Resources Research*, 26(9), 1951–1960.
- Nimmo, J. R., Rubin, J., & Hammermeister, D. P. (1987). Unsaturated flow in a centrifugal field: Measurement of hydraulic conductivity and testing of Darcy's Law. *Water Resources Research*, 23(1), 124–134.
- Noye, J. (1984). *Computational techniques for differential equations*. Elsevier, New York, NY, 678p.
- Oliveira, E. C. de, & Tygel, M. (2010). *Métodos Matemáticos Para Engenharia*. SBM, Rio de Janeiro, RJ, 387p.
- Schiesser, W. E., & Griffiths, G. W. (2009). *A Compendium of Partial Differential Equation Models*. Cambridge University Press, New York, NY, 490p.
- Triola, M. F. (2015). *Essentials of statistics*. Pearson, Boston, MA, 700p.
- van Genuchten, M. T. (1980). A Closed-form Equation for Predicting Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898.
- Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2013). *Fundamentals of Physics Extended*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1448p.
- Zornberg, J. G., & McCartney, J. S. (2010). Centrifuge permeameter for unsaturated

soils. I: Theoretical basis and experimental developments. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(8), 1051–1063.