

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, CONTABILIDADE
E GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS (FACE).
Programa de Pós-Graduação em Administração
Finanças e Métodos Quantitativos



UnB

MARIANA ROSA MONTENEGRO

**Gerenciamento de riqueza:
modelando a dependência não linear**

Brasília, DF
2016

MARIANA ROSA MONTENEGRO

**Gerenciamento de riqueza:
modelando a dependência não linear**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília para obtenção do Título de Mestre em Administração: Finanças e Métodos Quantitativos.

Brasília, DF
2016

MARIANA ROSA MONTENEGRO

**Gerenciamento de riqueza:
modelando a dependência não linear**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília para obtenção do Título de Mestre em Administração: Finanças e Métodos Quantitativos.

Área de concentração:
Finanças e Métodos Quantitativos

Orientador:
Prof. Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque

Brasília, DF
2016

FICHA

CATALOGRÁFICA

Montenegro, Mariana Rosa

Gerenciamento de riqueza: modelando a dependência não linear / . – Brasília, DF, 2016. 111 p.

Dissertação (Mestrado) — Departamento de Administração.

1. Formação de portfólio. 2. Matriz de variâncias e covariâncias. 3. Correlação Local Gaussiana. I. Montenegro, Mariana Rosa II. Universidade de Brasília.

Dissertação de Mestrado sob o título *Gerenciamento de riqueza: modelando a dependência não linear*, defendida por Mariana Rosa Montenegro e aprovada em de março de 2016, em Brasília, Distrito Federal, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque
Departamento de Administração - UnB
Orientador

Prof. Dr. Alan Ricardo da Silva
Departamento de Estatística - UnB

Prof. Dr. Herbert Kimura
Departamento de Administração - UnB

DEDICATÓRIA

À Deus que sempre ilumina minha caminhada. À querida família, aos amigos e a meu orientador, pelo incentivo, amizade e ensinamentos. Sem eles nada seria possível.

AGRADECIMENTOS

À Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas de incerteza e me suprir em todas as minhas necessidades.

Ao meu estimado orientador e amigo Prof. Doutor Pedro Henrique Melo Albuquerque por acreditar no meu potencial, estar sempre disponível a me ajudar e ser para mim um exemplo de profissional.

À minha amada família, meus pais Ivo Montenegro e Solange Rosa Montenegro, pelo amor incondicional, paciência e incentivo.

Ao meu querido irmão que, mesmo distante, caminhou ao meu lado, me ajudando a quebrar barreiras, a me desenvolver cada vez mais, meu maior exemplo, que nunca me deixou desistir de meus sonhos.

Ao meu padrinho José Wilson Corrêa Rosa, por seu apoio incondicional e por sempre acreditar em meu potencial.

RESUMO

O trabalho tem por objetivo estimar um portfólio *ótimo*, em conformidade com a teoria de portfólio proposta por Markowitz (1952) e utilizando o modelo de Correlação Local Gaussiana. Tjøstheim e Hufthammer (2013) esclarecem que tal ferramenta seria útil no problema de alocação de portfólio clássico. No entanto, por ser um modelo desenvolvido recentemente ainda não existe uma aplicação nesse sentido. Com tal propósito, desenvolve-se um novo modelo de seleção de portfólios, que incorpora a não-linearidade dos retornos e a observação empírica de que a relação entre os ativos é dinâmica no tempo. E a fim de testar a sua performance, o novo modelo foi aplicado aos dados simulados e aos ativos que compõem o S&P500 (*Standard & Poor's 500*). A simulação gerou evidência inicial de melhor desempenho e de maior veracidade do novo modelo de seleção de portfólio, quando comparado ao modelo clássico Markowitz (1952). Uma das principais inovações do novo modelo é a possibilidade de lidar com diversas relações de não-linearidade por meio do uso da correlação local Gaussiana. A melhor performance foi observada em razão de que maior média e menor desvio padrão foram obtidos para o portfólio criado com o novo modelo. A seguir, mediante a seleção de dez ações dentre as que compõem o S&P500 no banco de dados do *Yahoo Finance*, no recorte temporal de 1985 a 2015, a performance do modelo de Correlação Local Gaussiana também foi avaliada por meio da comparação com o modelo de seleção de portfólio clássico. A análise dos resultados mostrou que a seleção de portfólio utilizando o modelo de Correlação Local Gaussiana superou o modelo tradicional de Markowitz (1952) em 63% dos casos utilizando o *blockbootstrap* e em 71% dos casos utilizando o *bootstrap* tradicional. Por ter apresentado maior *Sharpe ratio*, o modelo gerou um retorno de risco ajustado mais atraente na maioria dos casos em estudo. Em suma, a medida de correlação local Gaussiana foi capaz de detectar em estruturas de dependência mudanças complexas ou não-lineares e obter um resultado promissor que pode beneficiar tanto administradores, financistas e empresas, possibilitando a realização de uma análise de investimento mais precisa. O modelo desenvolvido no trabalho pode ser utilizado para a elaboração de novas estratégias de investimento, com o objetivo de melhorar a performance no mercado financeiro.

Palavras-chave: Formação de portfólio. Matriz de variâncias e covariâncias. Correlação Local Gaussiana.

ABSTRACT

The goal of this work is to develop a new optimum portfolio selection method, based on the classic portfolio theory proposed by Markowitz (1952) using the local Gaussian correlation model. Tjøstheim e Hufthammer (2013) showed that this tool would be useful for the classical portfolio selection problem. However, since it is a newly developed approach, it has not been implemented yet. This work focuses on the development of a portfolio selection method that incorporates the non-linearity of returns and the empirical observation that the relationship between assets is dynamic in time. In order to evaluate its performance, the new model was applied to simulated data and to stocks that comprise S&P500. The initial simulations indicated a better performance of the new proposed model when compared to the classical model proposed by Markowitz (1952). One of the main new features of the new model is the possibility of dealing with non-linearity relations by using the local Gaussian correlation. The performance was evaluated by comparing the mean and standard deviation obtained from the results of the simulations. The portfolio created with the new model presented a higher average and lower standard deviation. Another way to evaluate the performance of the model was by randomly selecting 10 stocks from S&P500 in the data base of Yahoo Finance, during the period of 1985 to 2015, and comparing the performance of the new proposed portfolio selection method against the classical method proposed by Markowitz (1952). The analysis of the results showed that the portfolio selection using the local Gaussian correlation performed better than the traditional method in 63% of the cases when using block bootstrap and in 71% of the cases when using traditional bootstrap. Since the new method presented better Sharpe ratio, it generated a better risk adjusted return more attractive in most of the cases. In summary, the measurement of local Gaussian correlation was able to detect complex and non-linear changes in dependence structures, as well as a promising result that can benefit managers, financial markets and companies, allowing them to perform a more accurate investment analysis. The developed model can be used to build new investment strategies, with the objective of improving the performance in financial market.

Key words: Portfolio selection. Variance and covariance matrix. Local Gaussian Correlation.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Relação entre pares de ativos simulados com correlação igual a zero.	22
1.2	Ampliação da correlação entre o ativo 1 e o ativo 7.	23
1.3	Correlação Local Gaussiana	24
2.1	Portfólio de mínima variância	46
2.2	Fronteira Eficiente e ótimo portfólio	48
4.1	Simulação visual da Correlação Local Gaussiana de uma distribuição normal bi-variada com <i>bandwidth ótima</i> entre o par de retornos 1 e 3.	58
4.2	Simulação visual da Correlação Local Gaussiana de uma distribuição normal bi-variada com <i>bandwidth ótima</i> entre o par de retornos 1 e 3 - Segunda visão. . .	59
4.3	Simulação visual da Correlação Local Gaussiana com <i>bandwidth não ótima</i> entre o par de retornos 1 e 3.	60
4.4	Simulação visual da Correlação Local Gaussiana com <i>bandwidth não ótima</i> entre o par de retornos 1 e 3 - Segunda visão.	61
4.5	Metodologia elaborada a partir dos dados simulados.	62
5.1	Máximos valores da verossimilhança do par de retornos dos ativos Apple e Exxon Mobil no período de 1992.	64
5.2	Metodologia elaborada com os dados reais.	65
5.3	Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 1992 a 1997.	68
5.4	Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 1998 a 2003.	69
5.5	Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 2004 a 2009.	70
5.6	Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 2010 a 2015.	71

5.7	Resultado do uso da correlação local Gaussiana na formação de portfólio no ano de 1996	72
II.1	Conjunto de todas as combinações obtidas (E, V) . Fonte: Markowitz (1952) . . .	89
II.2	Combinações de X_1 e X_2 . Fonte: Markowitz (1952)	91
II.3	Caso em que \mathbf{X} se encontra dentro do conjunto atingível. Fonte: Markowitz (1952)	92
II.4	Caso em que \mathbf{X} se encontra fora do conjunto atingível. Fonte: Markowitz (1952) .	93
II.5	Conjunto de portfólios eficientes. Fonte: Markowitz (1952)	94
II.6	Combinações eficientes de E, V . Fonte: Markowitz (1952)	95
II.7	Modelo clássico de formação de Portfólios.	96

LISTA DE TABELAS

4.1	Resultados dos modelos utilizados na formação de portfólios com dados simulados	62
5.1	Resultados dos portfólios utilizando os dados do S&P500 de 1992 a 2001	66
5.2	Resultados dos portfólios utilizando os dados do S&P500 de 1992 a 2001	67

LISTA DE QUADROS

2.1	Principais modelos em estudo	26
5.1	Dez ações que constituíram o portfólio	63
6.1	Objetivos específicos propostos e resultados obtidos	75
III.1	Quadro comparativo entre Markowitz (1952) e Roy (1952)	98
IV.1	Variáveis e critérios (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002)	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Abreviatura	Significado
CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
CML	<i>Capital Market Line</i>
E-V	Regra da variância dos retornos
MVP	Portfólio de mínima variância
S&P500	<i>Standard & Poor's 500</i>
SVm	Semivariância calculada a partir do retorno médio ou da semivariância abaixo da média
SVt	Semivariância calculada a partir do retorno médio ou da semivariância abaixo do alvo

SUMÁRIO

1	Introdução	16
1.1	Objetivos	18
1.1.1	Objetivo Geral	18
1.1.2	Objetivos Específicos	18
1.2	Justificativa	19
2	Fundamentação Teórica	25
2.1	Relevância e impacto financeiro	27
2.1.1	Distribuição de Retornos Gaussiana	29
2.2	Medidas de Correlação e Dependência	29
2.2.1	Coeficiente de Correlação de Pearson	30
2.2.2	Correlação igual a zero e dependência	32
2.2.3	Coeficiente de correlação de Pearson e Distribuição Gaussiana	33
2.2.4	Correlação Condicional	34
2.2.5	Correlação Local Gaussiana	35
2.3	Gerenciamento de riquezas	38
2.3.1	Definições essenciais do Modelo de seleção de portfólio clássico	39
2.3.2	Portfólio de média-variância de Markowitz (1952)	44
2.3.3	Portfólio de mínima variância	44
2.3.4	Portfólio tangente de Markowitz (1952)	46
2.3.5	<i>Long only</i> portfólio	48
2.3.6	Mínimo <i>Regret</i> portfólio	49

3 Metodologia	50
3.1 Seleção de Portfólio	53
3.2 Modelo de Correlação Local Gaussiana	54
3.2.1 Propriedades	56
4 Simulação	57
5 Dados reais	63
6 Conclusão	73
Referências Bibliográficas	76
Apêndices	82
I Autores que inspiraram Markowitz (1952)	82
II Teoria de Portfólio de Markowitz (1952)	85
III Roy (1952) e o Princípio do <i>Safety First</i>	98
IV Avanços no gerenciamento de riquezas	102
IV.1 Markowitz, 1959	103
IV.2 O modelo de Índice Único de Sharpe (1963)	104
IV.3 Modelo de Precificação de Ativos Financeiros	106
IV.4 Modelo Multicritério	109

1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro é constituído por pessoas e organizações, que necessitam de dinheiro, ou o têm em excesso. Na economia cabe citar o exemplo do mercado de capitais, por meio do qual são realizadas operações financeiras de compra e venda de ações e de valores mobiliários.

No mercado de ações, subdivisão do mercado de capitais, são efetuadas as operações financeiras. Tais operações objetivam solucionar uma das questões chave na vida do indivíduo, a de alocar sua riqueza entre diversos ativos.

Mas o indivíduo deve ter cuidado ao operar no mercado financeiro, pois ele é instável e o expõe ao risco. O retorno do investimento não é garantido, e existe a possibilidade de perda do valor aplicado.

Ao aplicar seus recursos o investidor busca otimizar os investimentos, minimizando o risco. Uma maneira de atingir tal objetivo é a diversificação mediante a formação de uma carteira. E relacionado à diversificação e à otimização de investimentos surgiu o primeiro estudo de Markowitz (1952).

Markowitz (1952) propôs a realização do *trade-off* adequado entre risco e retorno a fim de alocar otimamente os recursos. A proposta foi revolucionária, pois permitiu ao investidor fazer uma avaliação quantitativa de risco e retorno conjuntamente ao considerar o retorno do portfólio e seus comovimentos. Nesse caso, merece destaque o princípio de diversificação do portfólio, baseado na ideia de que o grau de risco do portfólio depende da covariância de seus constituintes, não somente do risco médio de suas participações separadas (FABOZZI et al., 2007).

Ou seja, ao selecionar ativos em dado universo para construção de um portfólio, o investidor deve levar em consideração a estrutura de dependência entre eles. Assim, o conceito de correlação surge como forma de medir a relação entre variáveis aleatórias. É um conceito de suma importância em problemas financeiros e econômicos por ser utilizado para quantificar o grau de relação entre produtos financeiros e instituições financeiras.

Ao contrário do preço de ações ou taxa de juros, a correlação é uma medida não observada diretamente no mercado financeiro. Ela deve ser estimada utilizando outros dados financeiros observados, uma tarefa bastante delicada.

Ao analisar o mercado financeiro, alguns estudiosos, como Tjøstheim e Hufthammer (2013), argumentam que em períodos de crise há aumento na dependência entre variáveis econômicas. Entretanto, quando ocorre uma quebra no mercado a correlação encontra-se próxima a um. A forma de medir tais assimetrias, como interpretá-las quantitativamente e testá-las, ainda é um desafio.

Markowitz (1952) utilizou o coeficiente de correlação de Pearson para calcular a covariância entre os ativos pertencentes a um portfólio, por ser a medida mais utilizada em sua época. No entanto, como medida linear não é capaz de capturar estruturas de dependência não lineares em dados bivariados (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Patton (2004), Silvapulle e Granger (2001), Okimoto (2008), Ang e Chen (2002), Hong, Tu e Zhou (2007), Chollete, Heinen e Valdesogo (2009) e Garcia e Tsafack (2011) argumentaram que os fatores financeiros não possuíam necessariamente correlação constante e que existia assimetrias na distribuição de retornos financeiros.

Ao investigar a dependência em mercados de ações, Patton (2004) encontrou evidências de melhor descrição em modelos baseados em correlações não constantes entre índices do que em modelos em que a correlação é assumida constante.

Por isso, os métodos utilizados para analisar assimetrias na distribuição de retornos financeiros devem ser estudados com cautela. Berentsen e Tjøstheim (2014) consignaram que a correlação condicional era a medida mais utilizada para sanar referido fenômeno, pois realiza o cálculo da correlação produto-momento ordinal de Pearson para certas regiões de valores, o qual fornece uma estimativa local para o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias.

No entanto, para algumas variáveis, ao se calcular a correlação condicional como sendo alta ou baixa, obtém-se uma estimativa viesada da correlação incondicional, gerando empecilhos ao desenvolvimento de afirmações quantitativas (TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2013).

Por essas razões, Tjøstheim e Hufthammer (2013) propuseram o modelo de correlação local Gaussiana, capaz de evitar tal viés no caso de dados bivariados normais e de descrever as mudanças na dependência e no afastamento da globalidade normal, no caso de dados não normais (STØVE; TJØSTHEIM, 2013).

1.1 Objetivos

Esta seção é dedicada à apresentação dos objetivos de pesquisa propostos no trabalho. Primeiro, é apresentado o objetivo geral e, em seguida, os objetivos específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

Construção (estimação) de um modelo de portfólio *ótimo* de acordo com a teoria de portfólio proposta por Markowitz (1952), utilizando o modelo de correlação Local Gaussiana. O novo modelo de seleção de portfólio incorpora duas hipóteses: a não linearidade dos retornos e a observação empírica de que a relação entre os ativos é dinâmica. Para avaliar a performance do método, o modelo de Correlação Local Gaussiano será utilizado no grupo de ações que compõem o S&P500 de 1985 a 2015.

1.1.2 Objetivos Específicos

1) Simular retornos de diferentes ativos com diferentes relações de não linearidades que formarão um portfólio. Utilizar os retornos simulados para calcular as *bandwidths ótimas* para cada par de retorno, com 80% dos retornos disponíveis.

2) Calcular a média e o desvio padrão do portfólio por meio do modelo clássico de seleção de portfólio e do modelo de Correlação Local Gaussiana utilizando 20% dos retornos do conjunto de dados.

3) Encontrar as *bandwidths ótimas* para cada par de ações, a partir de 80% dos retornos estimados que compõem o portfólio construído a partir dos dados disponíveis no S&P500 de 1985 a 2015.

4) Construir (ou estimar) o portfólio ótimo segundo critérios de Markowitz (1952) por meio da Correlação Local Gaussiana, incorporando os pares de *bandwidths ótimas* com 20% dos retornos estimados.

5) Comparar o método proposto com o modelo clássico de seleção de portfólio desenvolvido por Markowitz (1952), mediante a utilização da Correlação Local Gaussiana (proposta no ano de 2013) no grupo de ações que compõem o S&P500- 1985 a 2015 por meio do índice de Sharpe.

1.2 Justificativa

Na teoria clássica de formação de portfólios proposta por Markowitz (1952), a necessidade de insumos para construção dos pesos dos ativos acabou por tornar o portfólio muito sensível. Segundo o autor, a construção dos pesos dependia da matriz de variância-covariância e do vetor de médias. Tomando por base a teoria de mercados eficientes, o vetor de médias terá um valor próximo a zero, o que resulta no menor impacto do vetor de médias na construção dos pesos. O grande impacto nessa construção surge a partir da matriz de variâncias e covariâncias. Uma pequena alteração nesta matriz pode alterar o portfólio, ou seja, os pesos são muito sensíveis à matriz de variâncias e covariâncias estimada. Ademais, essa matriz pode não ser estacionária e mudar ao longo do tempo em função das características macroeconômicas.

Por ser uma estimativa, a matriz de variâncias e covariâncias apresenta erro inerente. Várias propostas foram desenvolvidas e não há consenso sobre qual seria a mais adequada para a construção dessa matriz, em virtude de os dados financeiros não serem identicamente distribuídos e até mesmo independentes.

Diversos modelos utilizados na literatura de economia financeira se basearam na suposição de retornos com distribuição normal: os retornos do ativo são geralmente reconhecidos como homocedásticos, independentes e identicamente distribuídos (BACHELIER, 1900; WORKING, 1934; JONES, 1937 e KENDALL; HILL, 1953). Mandelbrot (1997) argumentava que séries de retornos de ações tendem a não ser independentes ao longo do tempo. Ele também observou que as distribuições dos retornos eram ainda leptocúrticas.

No modelo tradicional de seleção de portfólios proposto por Markowitz (1952), ao selecionar um portfólio é necessário levar em consideração a relação de um ativo com os demais que compõem a carteira em análise. A medida de correlação mais utilizada, que trabalhava com dados normais, em especial no momento em que o trabalho de Markowitz (1952) foi proposto era o índice de correlação de Pearson. No entanto, tal índice não era capaz de capturar dependência não lineares.

Ao trabalhar com construção de portfólios, Markowitz (1952) supôs que os retornos entre ativos são linearmente correlacionados. No entanto, na prática eles não são linearmente correlacionados. A correlação pode ser igual a zero e, mesmo assim, algum tipo de dependência pode existir.

Em outras palavras, as variáveis se afetam de tal maneira que a relação do retorno entre elas não é linear. Ao se afastarem da linearidade, as correlações observadas são iguais a zero. Mas não significa que elas sejam independentes.

Sabe-se que a dependência não linear não é capturada pelo índice de correlação de Pearson tradicional. Visando solucionar a falha, outras medidas escalares foram desenvolvidas. No entanto, não conseguiram distinguir entre dependência positiva e negativa e tipicamente a hipótese alternativa do teste de acompanhamento de independência é simplesmente dependência (BERENTSEN; TJØSTHEIM, 2014).

Modelos globais são utilizados para série temporal completa, apresentando melhores resultados para séries estacionárias. No entanto, a tarefa de identificar um modelo global que represente o conjunto total de dados é mais difícil no caso em que a série temporal é não estacionária. Por incorporar a complexidade e precisão na previsão, modelos locais solucionam o referido problema. Eles dividem o conjunto total de dados em conjuntos menores, modelando cada um com modelo local simples (HUANG; WU, 2010).

Os modelos que analisam a previsão de séries temporais podem ser globais ou locais. O global analisa a série como um todo e retorna melhores resultados em séries temporais estacionárias, pois se baseia em um único modelo de caracterização da série como um todo. Já o local divide o conjunto de dados em menores conjuntos a fim de realizar previsões mais complexas e precisas localmente (HUANG; WU, 2010).

As séries financeiras mudam suas dinâmicas em diferentes regiões, ou seja, modificam a estrutura entre os dados de *input* e os de *output*. Dessa forma, são normalmente caracterizadas como não estacionárias sendo, assim, difícil capturar essa relação dinâmica entre *input* e *output* por um modelo único ou global (HUANG; WU, 2010).

Huang, Victor e Chollete (2014) acrescentam que medidas de dependência globais não são capazes de capturar dependência em pequenas regiões, mas elas são importantes pois proporcionam um entendimento conceitual e prático da situação em estudo.

Ao diversificar um portfólio, grandes investidores buscarão entender os comovimentos entre mercados em crescimento e em queda de diferentes indústrias durante pequenos e cruciais períodos.

A fim de disponibilizar uma maneira de suprir tais limitações, uma nova estrutura de dependência local foi proposta por Tjøstheim e Hufthammer (2013). Com fundamento nessa estrutura, superfícies de dependência local seriam construídas a fim de medir a dependência que pode afetar a diversificação, em regiões que se diferenciam das estruturas de dependência globais.

Para Tjøstheim e Hufthammer (2013) essa ferramenta será útil no estudo do problema clássico de alocação de portfólio.

Berentsen et al. (2014) acrescentam que em uma distribuição normal multivariada, a matriz

de correlações ou covariância determina completamente a dependência. Mas, outras distribuições são passíveis de serem encontradas na prática. A correlação local Gaussiana seria utilizada para aproximar localmente a real densidade de uma amostra com distribuição Gaussiana em cada ponto.

Em outros termos, o modelo de correlação local Gaussiana, capaz de capturar a estrutura de dependência local em uma região particular, estipulava que uma medida de dependência local seria melhor descrita por meio de um portfólio de medidas locais de dependência calculado em diferentes regiões, do que uma medida de dependência de valor único (STØVE; TJØSTHEIM, 2013).

Além disso, Markowitz (1952) mostrou que, dado o número fixo de ativos e a correlação entre os ativos igual a zero, o investidor deveria diversificar entre os ativos de acordo com o seu interesse. No entanto, para Casella e Berger (2002) a correlação igual a zero não implica em independência. Dessa forma não seria justo assumir que não exista alguma relação entre ativos dada a correlação igual a zero.

A Figura 1.1 mostra a relação entre pares de ativos simulados com diferentes relações de não linearidades e dispersão entre retornos de 0.1. Foram gerados 1000 retornos aleatórios para dez ativos. Dentre estes, seis foram escolhidos aleatoriamente: ativo1, ativo2, ativo7, ativo8, ativo9, ativo10. Maiores detalhamentos estão expressos no Capítulo 4.

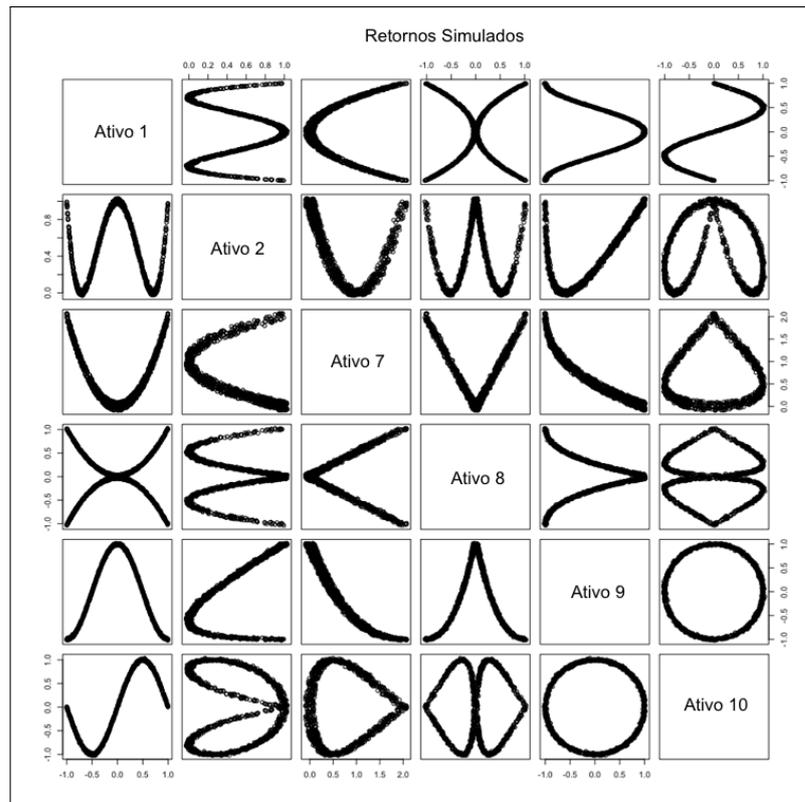


Figura 1.1: Relação entre pares de ativos simulados com correlação igual a zero.

A Figura 1.2 mostra o caso em que a correlação global entre dois ativos, especificamente o ativo1 e o ativo7, apresenta valor igual a zero, pois a fórmula funcional geradora dos dados garante este valor. Com a inserção de ruídos a correlação fica muito próxima a zero.

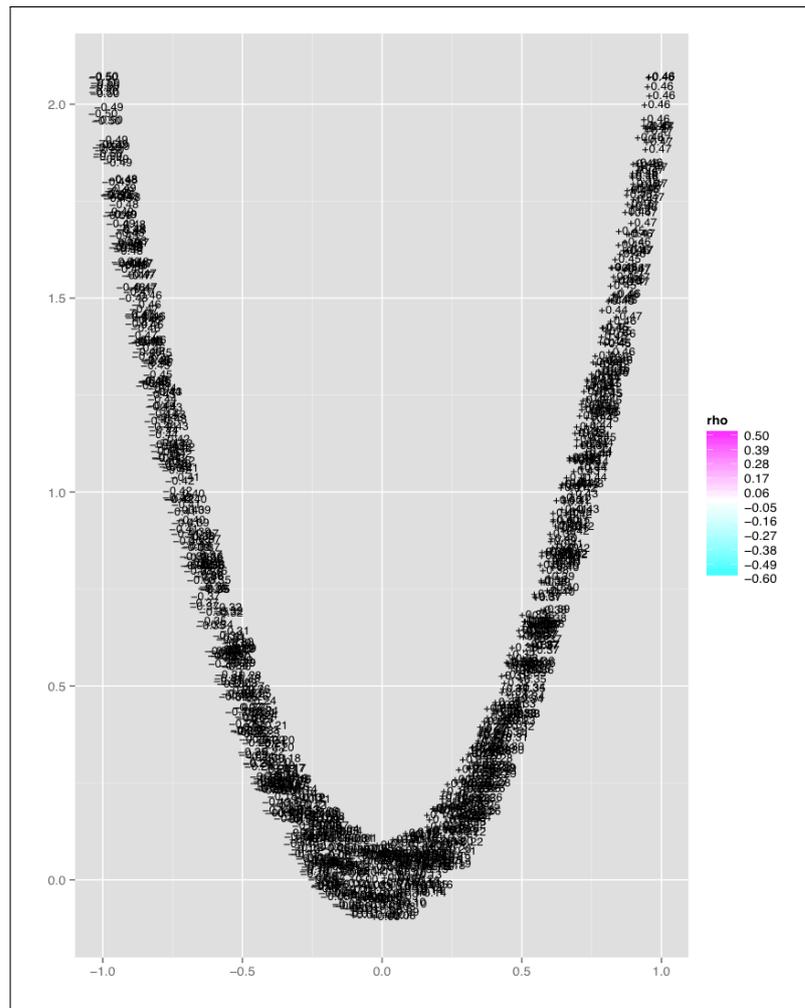


Figura 1.2: Ampliação da correlação entre o ativo 1 e o ativo 7.

A correlação local Gaussiana delinea localmente distribuições normais bivariadas a partir do conjunto de dados gerados anteriormente, como se observa na Figura 1.3. Ao analisar o ponto vermelho, tem-se que os pontos mais próximos apresentam maior influência do que os mais afastados, obtendo, assim, maior peso. Ou seja, cada ponto preto apresenta diferente peso na distribuição. A ponderação de tais pontos é realizada pela função *Kernel*, já a estrutura de ponderação adequada das observações é controlada pelas *bandwidths*, que especificam o formato da distribuição normal. É importante ressaltar que cada par de retorno possui uma *bandwidth* fixa para todos os pontos que compõem a distribuição.

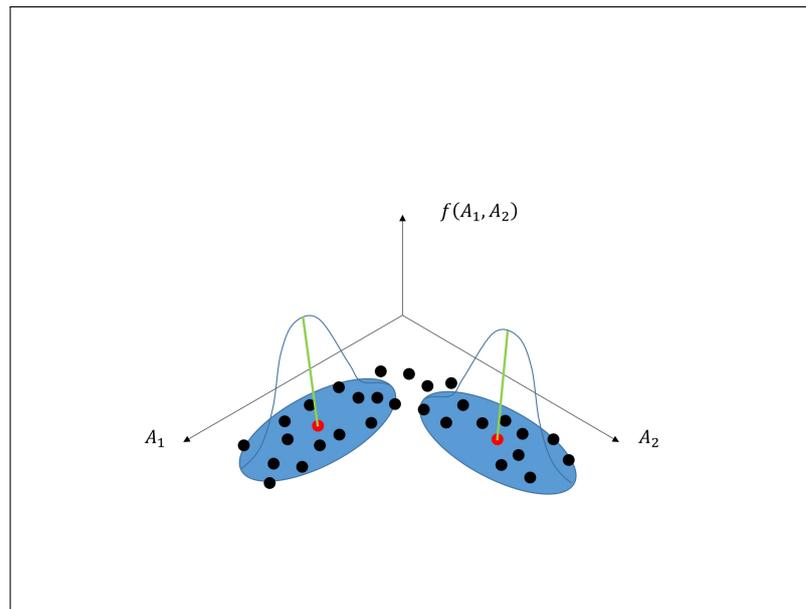


Figura 1.3: Correlação Local Gaussiana

Na Figura 1.2 pode ser observada a existência de dois padrões a partir dos dados. A parte da esquerda apresenta somente correlações com valores negativos, enquanto que a da direita valores positivos. Uma bandwidth muito grande permite obter uma correlação igual a zero, por considerar tanto os pontos com correlação positiva quanto os com correlação negativa.

Por essa razão, a medida de correlação local Gaussiana é utilizada por ser capaz de detectar, em estruturas de dependência, mudanças complexas ou não-lineares, que poderiam ser ocultadas anteriormente pela correlação global (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O referencial teórico foi subdividido nos seguintes macro tópicos: relevância e impacto financeiro, medidas de correlação e dependência e gerenciamento de riquezas.

O primeiro macro tópico, relevância e impacto financeiro, discorre acerca da importância do uso do conceito de correlação tanto em finanças, quanto em economia. Explica ainda como a distribuição do retorno influencia na escolha de um portfólio.

O segundo macro tópico, medidas de correlação e dependência, aborda alguns dos principais índices de correlação como: coeficiente de correlação de Pearson, correlação condicional e a correlação local Gaussiana, que é o foco deste estudo.

O último macrotópico, gerenciamento de riquezas, relata as definições essenciais do modelo clássico de seleção de portfólio, explica acerca da diversificação do portfólio e aponta críticas ao modelo. A seguir quatro abordagens acerca da formação de portfólio foram descritas. São elas: portfólio de mínima variância, portfólio tangente, portfólio *long-only* e mínimo *regret* portfólio. O Quadro 2.1 traz um resumo acerca dos principais autores abordados.

Ano	Autores	Resumo
1896	Pearson	Propôs o coeficiente de correlação produto-momento utilizado para demonstrar a dependência entre duas variáveis estocásticas
1935	Hicks	Cuidou de fatores de risco, mas não designou nenhuma medida de dispersão capaz de representar o risco na análise
1945	Leavens	Examinou os benefícios da diversificação. Compreendia intuitivamente que algum tipo de modelo de covariância existia, mas não o incorporou formalmente em sua análise.
1952	Markowitz	Desenvolveu o primeiro modelo de otimização de portfólio. Mostrou como se calcula para um portfólio com o máximo retorno esperado dado nível de risco, ou o menor risco para um dado nível de retorno esperado
1952	Roy	Objetivou desenvolver um método prático para o melhor <i>trade-off</i> entre risco e retorno
1959	Markowitz	Procurou estender e detalhar sua produção de 1952 dando acesso a leitores com modesto grau de conhecimento quantitativo. Também buscou encontrar uma maneira de conciliar o seu critério de média-variância com a maximização da utilidade esperada da riqueza após muitos períodos de reinvestimento
1963	Sharpe	Índice Único de Sharpe. Aplicou a técnica de Markowitz (1952) por meio de um programa computacional capaz de obter a maior vantagem de utilização desse modelo particular de relação entre ativos.
1964	Sharpe	Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM - <i>Capital Asset Pricing Model</i>).
1965	Lintner	Serviu como fundamento para gestores de portfólio medirem a performance
1966	Mossin	do risco ajustado
2000	Ogryczak	Modelo multicritério - Estudos recentes mostraram ser útil incorporar
2002	Bouri	critérios adicionais, à variância e retorno, em um modelo de seleção
2008	Hirschberger	de portfólio.
2013	Tjostheim	Modelo de Correlação Local Gaussiana - Nova medida de dependência local. Em certo sentido, estende a análise Gaussiana de um ambiente linear para um não linear.

Quadro 2.1: Principais modelos em estudo

2.1 Relevância e impacto financeiro

A noção de correlação é central na teoria financeira. Um uso comum da correlação é o de medir a dependência entre instrumentos financeiros. O CAPM e o APT (CAMPBELL et al., 1997) empregam uma elegante teoria, que é essencialmente encontrada nos pressupostos de retornos com distribuição normal multivariada a fim de obter um modelo de seleção de portfólio ótimo (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

Ao estudarem empiricamente o comovimento de índices internacionais do mercado de ações, Ball e Torous (2000) ressaltavam que a variação no tempo nas volatilidades e correlações eram fatores importantes na solução de modelos de seleção de portfólio. Os autores descobriram que as políticas econômicas, o nível de integração do mercado de capital e as condições relativas a ciclo de negócios influenciavam na mudança ao longo do tempo da estrutura de correlação estimada.

Buraschi, Porchia e Trojani (2010) inclusive apresentaram o comovimento dos mercados financeiros durante a crise de 2007-2008 como um exemplo de modelagem de correlações que mudam ao longo do tempo na escolha de portfólios ótimos. A partir dos dados e resultados obtidos, destacou-se que processos entre duas correlações não devem ser considerados independentes. Além disso, durante esse período observou-se o efeito de alavancagem da correlação: em fases de desaceleração do mercado a correlação dos retornos de ativos tende a ser maior. Esta é uma característica importante no processo de escolha de portfólio ótimo, visto que quando utilidades marginais são altas obtém-se os maiores níveis de correlações.

As anomalias na precificação de ativos cada vez mais são explicadas pelas correlações que variam ao longo do tempo (BURASCHI; PORCHIA; TROJANI, 2010).

Moskowitz (2003) também apontou o importante papel do comportamento das correlações. Ele acreditava que correlações estocásticas explicam algumas das anomalias de precificação, como o efeito do tamanho e *momentum*.

Buraschi, Porchia e Trojani (2010) levantaram duas interessantes questões acerca da escolha de portfólio intertemporal utilizando a correlação de necessidade de *hedge*.

A primeira diz respeito a relevância econômica, na escolha de portfólio intertemporal, do risco da covariância da variância estocástica. Os autores mostraram que a demanda total por *hedge* é, em grande parte, influenciada pela correlação de *hedge*. Sua importância tende a aumentar com o grau de impacto dos efeitos de alavancagem e a dimensão do conjunto de oportunidade de investimento. Além disso, Buraschi, Porchia e Trojani (2010) argumentaram

que modelos multivariados com dependência não linear e alavancagem são capazes de melhor descrever o conjunto de características de volatilidade e correlação dinâmica. Essas características também representam importante papel na escolha do portfólio *ótimo*.

A segunda questiona como a demanda de correlação de necessidade de *hedge* e o investimento *ótimo* em ativos de risco variam de acordo com o horizonte de investimento. De acordo com os autores há um aumento na demanda absoluta de correlação de necessidade de *hedge* com aumentos nos horizontes de investimento. Para o horizonte de investimento, uma demanda positiva de correlação de necessidade de *hedge* implica no aumento de investimento *ótimo* em ativos de risco no horizonte de investimento. Na mesma linha, uma correlação negativa geraria um decréscimo (BURASCHI; PORCHIA; TROJANI, 2010).

Já Campbell e Cochrane (1999) trouxeram a visão de que há uma lacuna teórica e de procedimentos financeiros acerca de como retornos esperados são influenciados por fontes fundamentais do risco.

Os autores mostravam que muitos dos enigmas nessa área estão relacionados ao hábito, quesito amplamente estudado no consumo. A formação de hábitos justifica a relação entre recentes mudança no consumo com o bem-estar relatado por consumidores, ao invés do nível absoluto do consumo (CAMPBELL; COCHRANE, 1999).

Campbell e Cochrane (1999) descrevem três principais características do hábito. Primeiro, para eles o nível de hábito de um indivíduo não depende do consumo passado do indivíduo, mas sim da história do consumo agregado. Dessa forma, a formação de hábito é considerada externa. Segundo, em resposta ao consumo o hábito se move lentamente, ao contrário de especificações empíricas que consideram que cada período do hábito é proporcional ao consumo do último período. Terceiro, para os autores, na história do consumo o hábito adapta-se de forma não linear.

Fama (1984) mostra que o padrão de movimentos de taxa de troca podem ser explicados por modelos de precificação de ativos existentes, somente permitindo grandes mudanças na aversão de risco agregado. Guiso, Sapienza e Zingales (2013) acrescentam que modelos de precificação de ativos, a fim de incorporar séries temporais de preços das ações agregadas dos EUA, requerem grandes flutuações na aversão ao risco agregado.

Guiso, Sapienza e Zingales (2013) relatam que mesmo que um investidor não seja afetado diretamente por uma quebra no mercado de ações eles podem ser impactados emocionalmente. Inferindo, assim, que a aversão ao risco aumenta mesmo para investidores que não sofreram qualquer perda.

Em um experimento realizado por Guiso, Sapienza e Zingales (2013) observou-se que, ao tomar uma decisão, o medo emocional aumenta a aversão ao risco.

O modelo tradicional de Merton propõe que investidores devem rebalancear seus portfólios através da compra de ativos mais arriscados ao lidarem com queda no preço do ativo. Já o modelo baseado no medo prediz que indivíduos irão rebalancear seus portfólios através da venda de ativos arriscados, ao serem influenciados pelo medo. Guiso, Sapienza e Zingales (2013) encontraram evidências que corroboram a última hipótese ao realizarem um experimento utilizando negócios reais de clientes de bancos.

Guiso, Sapienza e Zingales (2013) ainda mencionam que existem duas formas para testar se movimentos no preço de ativos são explicados por mudanças na aversão ao risco. Os autores apontam que seria necessário encontrar um meio de inferir que aversão ao risco é independente ao preço dos ativos. A primeira maneira está relacionada a necessidade de uma estratégia de preferência revelada. A segunda, nas escolhas em experimentos ou questões de pesquisa, analisa-se o desencadeamento direto de atitudes de risco.

2.1.1 Distribuição de Retornos Gaussiana

A distribuição de retorno mais utilizada é a Gaussiana, devido à simples estrutura, baixo número de parâmetros e sua relação com o teorema do limite central. A função de densidade univariada é definida como:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.1)$$

a média e a variância da distribuição Gaussiana são representadas respectivamente da seguinte forma

$$E[X] = \mu \quad (2.2)$$

$$Var[X] = \sigma^2 \quad (2.3)$$

2.2 Medidas de Correlação e Dependência

O conceito de correlação, apesar de ser muito utilizado em finanças, é um dos que mais gera confusões. Uma delas surge com o uso literário da palavra para cobrir qualquer noção de

dependência. No sentido de correlação matemática esta é apenas uma dentre várias medidas de dependência estocástica (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

A seguir serão apresentados métodos capazes de descrever e modelar dependência.

2.2.1 Coeficiente de Correlação de Pearson

O coeficiente de correlação produto-momento, também conhecido como coeficiente de correlação de Pearson, é o mais utilizado para demonstrar a dependência entre duas variáveis estocásticas. Proposto por Karl Pearson em 1896, o coeficiente calcula a correlação linear no intervalo de -1 a 1. Ele é capaz de medir tanto a robustez quanto a direção da dependência (linear) de variáveis com relação linear. Além disso, consegue caracterizar completamente a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias que possuem distribuição conjunta Gaussiana (BERENTSEN; TJØSTHEIM, 2014).

Casella e Berger (2002) trazem a representação matemática deste coeficiente. Ao assumir duas variáveis aleatórias (X e Y) e seus respectivos desvios padrão σ_x e σ_y , tem-se que a correlação populacional e a amostral de X e Y são, respectivamente:

$$\rho = \frac{E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.4)$$

onde $\sigma_x < \infty$ and $\sigma_y < \infty$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (2.5)$$

A dependência linear é medida por meio da correlação linear. No caso em que as variáveis são independentes, como $Cov(X, Y) = 0$, tem-se que $\rho(X, Y) = 0$. Quando ocorrer uma dependência linear perfeita, isto é, $Y = aX + b$ ou a probabilidade de $Y = aX + b$ ser igual a 1 para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, tem-se $\rho(X, Y) = \pm 1$ (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

Este coeficiente apresenta duas propriedades principais. Primeiro, a independência implica correlação igual a zero. Segundo, correlação igual a zero não implica em independência.

Lura (2013) relatou um exemplo em que duas variáveis aleatórias apresentam correlação igual a zero e são dependentes. Ele supôs que X possuía uma distribuição $N(0, 1)$ e, $Y = X^2$, ou seja, Y possuía uma distribuição $\chi^2(1)$. Dessa forma, a esperança de X e de Y são,

respectivamente:

$$\begin{aligned} E[X] = E[X^3] &= 0 \\ E[Y] &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ao calcular a correlação entre elas, tem-se que:

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[X(Y - 1)] = E[XY] = E[X^3] = 0 \quad (2.7)$$

Em razão disto, a independência não ocorre somente quando $\rho = 0$, mas, tem-se que as variáveis são dependentes quando $\rho \neq 0$.

Por ser possível criar situações em que o coeficiente de correlação é igual a 0, com uma dependência completa entre variáveis, Berentsen, Kleppe e Tjøstheim (2014) afirmam que essa medida de correlação nem sempre é adequada.

Além disso, Berentsen, Kleppe e Tjøstheim (2014) mostram que, em muitos casos, essa correlação não é capaz de capturar estruturas de dependência não lineares em dados bivariados.

Nesse contexto, foram propostas outras medidas escalares capazes de capturar dependência não linear. No entanto, não conseguem distinguir entre dependência positiva e negativa (BERENTSEN; TJØSTHEIM, 2014).

O uso disseminado da correlação linear ocorre em virtude de suas características positivas. Seu cálculo é normalmente realizado de forma direta. Apresenta simplicidade no cálculo do segundo momento (variâncias e covariâncias) de distribuições bivariadas e, portanto, na derivação do coeficiente de correlação (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

Além disto, em operações lineares é possível manipular facilmente a correlação e a covariância. Por exemplo, um caso bastante explorado na teoria de portfólios é que a variância de qualquer combinação linear é completamente determinada pelas covariâncias de cada par de componentes (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

É medida de dependência naturalmente utilizada em distribuições normais multivariadas e em distribuições multivariadas esféricas e elípticas (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

No entanto, na análise de duas variáveis X, Y , a correlação linear só é definida se as variâncias de X e Y forem finitas. Esse requisito não é ideal para o caso de medidas de dependência,

além de gerar problemas em distribuições de cauda-pesada. Outra particularidade é que a independência entre duas variáveis aleatórias implica em correlação linear igual a zero, mas correlação igual a zero não implica geralmente em independência. Por fim, sob transformações não lineares estritamente crescente $\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a correlação linear não é invariante (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002).

2.2.2 Correlação igual a zero e dependência

Mari e Kotz (2001) trazem dois conceitos fundamentais em estatística: independência e correlação.

Atualmente é bem disseminada uma limitação dos coeficientes de correlação como medida de dependência. Estes coeficientes medem o grau de relações lineares. Entretanto, existem situações em que as correlações são iguais a zero e, mesmo assim, entre variáveis há fortes relações não lineares, que são de fato altamente dependentes tanto no sentido probabilístico como no intuitivo (MARI; KOTZ, 2001).

Rietz (1919) estudou a relação entre duas variáveis quando o coeficiente de correlação é igual a zero, e observou que a generalização do coeficiente de correlação como medida de *correlação* possui limitações.

Mari e Kotz (2001) apresentaram uma discussão técnica acerca da relação entre correlação igual a zero e dependência que será tratada abaixo.

No caso em que duas variáveis aleatórias não degenerativas X e Y

$$cov(X, Y) = E[XY] - E(X)E(Y) \quad (2.8)$$

tenham covariância igual a zero, isto é:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (2.9)$$

elas são consideradas não correlacionadas.

Já na análise de duas variáveis independentes, tem-se

$$F_X(x)F_Y(y) = F_{X,Y}(x, y) \forall x, \forall y \quad (2.10)$$

equivalentemente no caso de derivação tem-se

$$f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)\forall x, \forall y \quad (2.11)$$

assim, eles também são não correlacionados. A independência implica, para o caso de variáveis aleatórias discretas:

$$P(X = a|Y = b) = P(X = a) \quad (2.12)$$

para todo o domínio de a e b .

No entanto é possível a ocorrência de não correlação no caso em que se tenham variáveis dependentes (não independentes). Este caso será exemplificado a seguir:

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= E(X), \forall y \\ E(Y|X = x) &= E(Y), \forall x \end{aligned} \quad (2.13)$$

A equação (2.9) necessita somente do simples produto-momento de X e Y e a igualdade de função de valores esperados. Já (2.10) e (2.11) requerem igualdade de funções para todos os x e y .

2.2.3 Coeficiente de correlação de Pearson e Distribuição Gaussiana

Rizzo (2007) apresentou duas definições para distribuições Gaussianas multivariadas. Uma cuidou do caso de distribuições bivariadas. Outra de distribuições Gaussianas multivariadas. Na distribuição Gaussiana bivariada, o coeficiente de correlação ρ é parte da equação, que pode ser vista a seguir:

$$\psi(x,y|\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.14)$$

onde θ é $[\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho]$.

A função densidade de uma distribuição multivariada Gaussiana é dada na forma matricial por:

$$\psi(x|\Sigma, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} \quad (2.15)$$

Cada distribuição marginal é distribuída de forma $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ neste caso. Uma distribuição bivariada Gaussiana equivale a duas distribuições marginais. Então, em uma distribuição Gaussiana multivariada, aplica-se a mesma relação apontada no caso bivariado a cada possível conexão marginal. Dessa forma, o coeficiente de correlação de Pearson é uma parte natural no caso de distribuição Gaussiana multivariada.

2.2.4 Correlação Condicional

A fim de trabalhar com variações em dependência local, alguns modelos foram propostos em finanças e em econometria. Os que se destacaram estão relacionados à medida de *contagion* (RODRIGUEZ, 2007) e (INCI; LI; MCCARTHY, 2011), à descrição de cauda de dependência (CAMPBELL et al., 2008) e à modelagem de portfólio (SILVAPULLE; GRANGER, 2001). Tjøstheim e Hufthammer (2013) argumentam que, nesses problemas, a solução mais utilizada é empregar o conceito de correlação condicional.

Ao analisar duas variáveis aleatórias X e Y , a correlação condicional é igual a:

$$\rho_A = \text{corr}[X, Y|A] \quad (2.16)$$

onde $A \supset [a \leq X \leq b]$ e $[c \leq Y \leq d]$. Essa correlação também é conhecida como correlação entre variáveis truncadas, ou seja, aquelas que estão em um intervalo que não abrange todo o suporte da distribuição (SILVAPULLE; GRANGER, 2001).

Tjøstheim e Hufthammer (2013) explicavam que a correlação produto-momento pode ser calculada utilizando a correlação condicional, no caso em que uma certa região de valores da diferença de *log* retornos é analisada. Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 com os valores observados $X_{1i}, X_{2i}, i = 1, \dots, n$, possuem, na região A , correlação condicional entre X_1 e X_2 calculada como:

$$\hat{\rho}_c(A) = \frac{\sum_{(X_{1i}, X_{2i}) \in A} (X_{1i}, \hat{\mu}_{X_{1,c}})(X_{2i}, \hat{\mu}_{X_{2,c}})}{(\sum_{(X_{1i}, X_{2i}) \in A} (X_{1i}, \hat{\mu}_{X_{1,c}})^2)^{1/2} (\sum_{(X_{1i}, X_{2i}) \in A} (X_{2i}, \hat{\mu}_{X_{2,c}})^2)^{1/2}} \quad (2.17)$$

onde

$$\hat{\mu}_{X_{1,c}} = \frac{1}{n_A} \sum_{(X_{1i}, X_{2i}) \in A} X_{1i} \quad e \quad \hat{\mu}_{X_{2,c}} = \frac{1}{n_A} \sum_{(X_{1i}, X_{2i}) \in A} X_{2i} \quad (2.18)$$

O número de pares com $(X_{1i}, X_{2i}) \in A$ é n_A . Quase certamente, n_A tende ao infinito e $\hat{\rho}_c(A)$

converge para $\rho_c(A) = \text{corr}(X_1, X_2 | (X_1, X_2) \in A)$ em uma série temporal estacionária (X_{1i}, X_{2i}) .

No entanto, o conceito de correlação condicional possui algumas desvantagens. Primeiro, o problema de viés da correlação condicional ocorre quando $\rho_c(A)$ deixa de ser igual a correlação global ρ para o par de variáveis conjuntas Gaussianas (X_1, X_2) em razão da introdução da função indicadora para definir as regiões locais. Segundo, definiu-se a correlação local para a região A e não para um ponto (x_1, x_2) , levantando o questionamento acerca de como A deve ser escolhido. Terceiro, questiona-se se é sensato, em situações não lineares e não Gaussianas, que a correlação condicional adote uma medida de dependência linear para regiões locais (TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2013).

Tjøstheim e Hufthammer (2013) acreditavam que a correlação local Gaussiana não possui as desvantagens descritas acima.

2.2.5 Correlação Local Gaussiana

Tjøstheim e Hufthammer (2013) apontaram a visão comum existente entre analistas financeiros e econométricos no sentido de que à medida da decadência do mercado, torna-se mais forte a correlação entre objetos financeiros. Além disso, a correlação adquire valor próximo a um com a quebra de mercado, resultando na destruição do benefício da diversificação. Tjøstheim e Hufthammer (2013) indicam a existência de dependência assimétrica entre retornos financeiros. A fim de estudar tal assimetria, os autores apresentam uma nova medida de dependência denominada correlação local gaussiana. De acordo com eles, a distribuição Gaussiana proporciona boa aproximação em cada ponto da distribuição do retorno. A correlação local em uma vizinhança é considerada como a correlação da distribuição aproximadamente Gaussiana.

Essa nova medida de modelagem carrega a perspectiva de ser capaz de fazer localmente, para uma densidade geral, o que pode ser feito globalmente para uma densidade Gaussiana. Em certo sentido, ela estende a análise Gaussiana de um ambiente linear para um não linear.

A correlação local Gaussiana busca utilizar uma família de distribuições Gaussiana bivariada para fazer uma aproximação de uma distribuição de retorno bivariada arbitrária. Por meio do uso da distribuição Gaussiana é possível obter boa aproximação em cada ponto da distribuição do retorno. A correlação local em uma vizinhança é considerada como a correlação de uma distribuição aproximadamente Gaussiana. O resultado é uma medida de dependência não linear, que é inerentemente local (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

2.2.5.1 Aplicações

Devido a sua contemporaneidade, o modelo de correlação local Gaussiana possui um modesto número de aplicações na literatura. Foi possível verificar a utilização do modelo em duas macro áreas de estudo: mercado financeiro e teoria de cópulas. Como o foco deste estudo é a seleção de portfólios, uma revisão acerca do mercado financeiro será realizada na sequência.

Tjøstheim e Hufthammer (2013), a fim de estudar a dependência entre retornos de ações de mercados internacionais, aplicaram a medida de correlação local Gaussiana, especialmente nos mercados Americano e do Reino Unido (utilizando dados mensais, com a presença do efeito de mercado *bear*), encontraram evidências acerca de estruturas de dependência assimétricas entre esses mercados.

Os autores também provaram que entre os mercados Americano e do Reino Unido existe um aumento tanto na correlação como na correlação local ao longo do tempo. No entanto, em termos da curva de correlação não é uniforme. Tjøstheim e Hufthammer (2013) questionam acerca de quais fatores econômicos poderiam gerar tal assimetria. Assinalaram ainda que existem significativas diferenças nas correlações locais Gaussianas para dados diários, e ressaltaram que somente entre os mercados Europeus foram encontradas assimetrias significativas.

É importante ressaltar que para Støve e Tjøstheim (2013) é possível estudar o problema clássico de alocação de portfólio e os efeitos de *contagion* a partir das ferramentas derivadas em seu trabalho e de suas extensões. Eles inclusive propuseram um futuro estudo acerca da seleção de portfólio de ações com características específicas como, por exemplo, correlação entre fatores de risco em mercados de crédito e dados de câmbio com dependência local. Os autores explicavam que é possível utilizar a covariância local Gaussiana em análises financeira e econométrica que dependam da matriz de covariância.

Berentsen, Kleppe e Tjøstheim (2014) desenvolveram um pacote para o programa *R*, conhecido como *localgauss*. Esse pacote assistiria a estimação e a visualização da correlação local Gaussiana. Além disso, permitiria acesso mais favorável à metodologia da correlação local Gaussiana, sem a necessidade da construção de sua rotina de otimização.

Os autores descreveram algumas das utilizações do pacote. Dentre elas: exploração da estrutura de dependência em conjunto de dados, que pode ser vista como um suplemento para informações brutas dadas por um *scatter-plot*. Este pacote também ilustra a função de visualização proporcionando uma função para testes de independência locais e uma função de estimação, que foram demonstradas mediante exemplos. Berentsen, Kleppe e Tjøstheim

(2014) demonstraram como tanto testes de independência globais quanto locais podem ser construídos a partir do uso da correlação local Gaussiana.

Støve, Tjøstheim e Hufthammer (2014) trabalharam com o efeito do *contagion*. O tema despertou o interesse dos autores devido à ocorrência de maior interligação entre mercados financeiros internacionais nas últimas décadas. Esse efeito, em particular, ocorre quando há a propagação de crises nesses mercados, ou seja, grandes quedas nos valores de ações de um país influenciava a rápida queda em outros países.

Por ter como principal objetivo aproximar uma distribuição de retorno bivariada arbitrária a uma família de distribuições Gaussiana bivariada, a correlação local Gaussiana foi utilizada neste estudo (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Støve, Tjøstheim e Hufthammer (2014) analisaram os resultados. Para eles a distribuição Gaussiana oferecia boa distribuição em cada ponto da distribuição do retorno. A correlação da distribuição Gaussiana aproximada foi considerada como a correlação local naquela vizinhança. Isso resultou em uma medida de dependência não linear que é inerentemente local.

Nesse sentido, Støve, Tjøstheim e Hufthammer (2014) analisaram os resultados da Correlação Local Gaussiana antes de um choque (em um período de estabilidade) e após o choque (em um período de crise). Ao utilizar o processo de *bootstrap*, os autores verificaram a existência ou não do efeito do *contagion*. Além disso, a correlação local Gaussiana foi comparada a outros métodos que estudam *contagion*.

A aplicação do estudo analisou a crise Mexicana de 1994, a crise Asiática de 1997 a 1998 e a crise financeira de 2007 a 2009. A estrutura de dependência não linear entre essas crises foi possível ser descrita a partir do procedimento desenvolvido pelos autores (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Com o intuito de construir localmente e globalmente testes de independência, Berentsen e Tjøstheim (2014) discutiram acerca da correlação local Gaussiana. Essa discussão abrangeu a explicação acerca da construção da correlação local Gaussiana, a escolha das *bandwidths* (a partir da validação cruzada da verossimilhança) e as propriedades dessa medida e as correspondentes estimativas assintóticas.

Lura (2013) investigou como descrever a mudança na relação entre ações e mercado com base no uso da correlação local Gaussiana e como ela pode estender a tradicional teoria financeira. Para tanto, foram analisados, durante 5 anos, 18 ações, preço do petróleo, taxas de câmbio e o principal índice da bolsa de valores de Oslo.

2.2.5.2 Vantagens do Modelo

O método de correlação condicional sofre com o problema de viés descrito anteriormente. Já a correlação local Gaussiana não possui tal desvantagem. Além disso, ao contrário da correlação global, a correlação local Gaussiana é capaz de melhor detectar mudanças complexas e não lineares em uma estrutura de dependência. Tornando, assim, possível uma melhor compreensão da dependência entre mercados (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

A medida de dependência baseada na família de distribuições Gaussiana oferece uma caracterização de dependência completa localmente. Além disso, propriedades que são verdadeiras para dependência global Gaussiana são mantidas localmente em uma vizinhança de (x, y) (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Ao contrário da correlação condicional e similarmente a medidas de dependência locais, no caso em que f é Gaussiana, $\rho(x, y) \equiv \rho$ em toda parte, onde ρ é a correlação ordinária de f . Assim, ρ não sofre do problema de viés da correlação condicional (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

A correlação local Gaussiana é capaz de detectar e quantificar estruturas de dependência não lineares e também de detectar dependências assimétricas entre ativos financeiros (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Além disso, esse método tem como base o conceito de correlação, mas ele é localizado e não linear. Em princípio ele proporciona uma descrição muito mais completa de relações de dependência.

2.3 Gerenciamento de riquezas

Este macro tópico é dividido em definições essenciais do modelo clássico de seleção de portfólio, diversificação do portfólio e críticas ao modelo. No que se refere à formação de portfólio, serão abordados: portfólio de mínima variância, portfólio tangente, portfólio *long-only* e mínimo *regret* portfólio.

Uma descrição mais detalhada acerca do tema encontra-se no Apêndice I, que se inicia com uma explicação a respeito da diversificação de um portfólio, tema tratado anteriormente ao trabalho de Markowitz (1952), mas realmente quantificado apenas no importante estudo de 1952.

Em seguida, são apresentados alguns dos autores que inspiraram Markowitz (1952), como

Hicks (1935) e Leavens (1945). O primeiro cuidou de fatores de risco, mas não designou nenhuma medida de dispersão capaz de representar o risco na análise. O segundo examinou os benefícios da diversificação. Leavens (1945) compreendia intuitivamente que algum tipo de modelo de covariância existia, mas não o incorporou formalmente em sua análise.

Também enfoca o modelo de seleção de portfólio de Markowitz (1952) e a teoria de Roy (1952), que assim como Markowitz (1952) se baseou para a tomada de decisão na média e variância de um portfólio. Como na proposta de Markowitz (1952), a fórmula de medida da variância de um portfólio de Roy (1952) incluía a covariância dos retornos entre os ativos.

O Apêndice III inclui o macro tópico avanços no gerenciamento de riquezas que apresenta os trabalhos que proporcionaram tais avanços, cujo início ocorreu com o novo estudo de Markowitz (1959), por meio do qual o autor buscou expandir, detalhar e explicar a sua teoria a leitores com modesto grau de conhecimento quantitativo.

Esse macro tópico trata do modelo de Índice Único de Sharpe (1963). Uma aproximação inicial do modelo de Markowitz (1952) foi aplicada utilizando poucos dados, ou seja, uma menor quantidade de parâmetros foi calibrada. O resultado obtido da aplicação foi satisfatório e demonstrou que o modelo é candidato atrativo de uma aplicação inicial prática da técnica de Markowitz (1952).

Ele também aborda o modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM), que pela primeira vez trata de como o preço do risco decorre da influencia básica das preferências do investidor e dos atributos físicos dos ativos de capital. Referida teoria formaliza a relação que deveria existir entre os retornos dos ativos e o risco, quando os investidores constroem e selecionam portfólios com base na análise de média-variância. Ao invés de descrever a forma por meio da qual um investidor deveria se comportar, conforme proposto pelo modelo clássico de Markowitz (1952), o CAPM levanta hipótese de como o investidor se comporta.

Por fim, cuida do modelo multicritério, que serve de base para a incorporação de novos critérios ao modelo de seleção de portfólio.

2.3.1 Definições essenciais do Modelo de seleção de portfólio clássico

Tendo ampla influência na gestão de portfólio e em sua forma mais simples, a Teoria Moderna de Portfólio tem sido capaz de proporcionar a estrutura necessária para a construção e seleção de portfólios com base na performance de investimento esperada e no risco do investidor. Comumente conhecida como análise de média-variância, ela introduziu nova terminologia que se tornou regra na gestão de investimento (MARKOWITZ, 2002).

Com o advento da Teoria Moderna de Portfólio, o modelo de média-variância passou a ser utilizado: na alocação de ativos para determinar a política básica de gestão de fundos, incluindo a construção de portfólios; no controle de risco; como medida de performance; na determinação da proporção do fundo que será alocado para uma gestão passiva e em outras gestões ativas (KONNO; WAKI; YUUKI, 2002).

Markowitz (1952) utilizou como medida de risco a variância da rentabilidade ponderada dos ativos. E, para selecionar carteiras acrescentou à referida variância as estimativas de retorno dos ativos. Dessa forma, a Teoria Moderna de Seleção de Portfólios foi estruturada com o objetivo de demonstrar como a diminuição dos riscos de um portfólio é influenciada pela diversificação (SILVA; LACERDA, 2014).

Ele também acreditava que o investidor deveria considerar simultaneamente o risco e o retorno e realizar o trade-off adequado entre eles para alocar otimamente os recursos. O modelo de Markowitz (1952) é um problema de otimização uniobjetiva não linear. Já os trabalhos anteriores, como o de Leroy-Beaulieu (1908) e Neymarck (1913), trataram risco e retorno somente de forma casual.

A ideia do *trade-off* entre risco e retorno foi revolucionária pelas razões a seguir apresentadas.

Primeira, o investidor poderia fazer uma avaliação quantitativa de risco e retorno conjuntamente ao considerar o retorno do portfólio e seus comovimentos. Nesse caso, merece destaque o princípio de diversificação do portfólio, baseado na ideia de que o grau de risco do portfólio depende da covariância de seus constituintes, não somente sobre o risco médio de suas participações separadas. Tal princípio era novo para alguns analistas financeiros, que aplicavam em um único investimento (FABOZZI et al., 2007).

Segunda, Markowitz (1952) formalizou o processo de tomada de decisão financeira como um problema de otimização. Particularmente, o princípio de média-variância sugeria que dentre o infinito número de portfólios que alcançam um objetivo particular, o investidor deveria escolher o portfólio com a menor variância. Todos os outros eram considerados ineficientes por possuírem maior variância e, conseqüentemente, maior risco (FABOZZI et al., 2007).

Markowitz (1952) também traz o conceito de fronteira eficiente. Esta é uma ferramenta da Teoria Moderna de Portfólio que, a partir do nível de volatilidade que um investidor é capaz de assumir, mostra a este investidor o melhor retorno esperado de seu portfólio. Em uma estrutura de risco-retorno, todos os portfólios eficientes são demonstrados pela curva da fronteira eficiente.

Para Markowitz (1952) um investidor buscará investir em um portfólio eficiente, que é aquele que, para dada quantidade de risco retorna o máximo retorno esperado ou é aquele que para dado retorno esperado minimiza o risco.

Portfólios não são considerados ótimos quando estão abaixo ou acima da fronteira eficiente. No primeiro caso eles não fornecem o melhor retorno para um dado nível de risco. Já no segundo eles apresentam alto nível de risco dado determinada taxa de retorno (MARKOWITZ, 1952).

Por ser uma curva, o portfólio eficiente que se encontra na fronteira eficiente tendem a ter um maior grau de diversificação.

2.3.1.1 Diversificação em um portfólio

O sábio ditado acerca de *não se colocar todos os ovos em única cesta* demonstra os benefícios da diversificação. E a Teoria Moderna de Portfolio quantificou o conceito de diversificação mediante a introdução da noção estatística de covariância ou de correlação. Em outras palavras, não é prudente investir todo o recurso em empreendimentos que possam falir simultaneamente, ou seja, altamente correlacionados, não importa quão pequena seja a chance de um único investimento ter uma performance ruim (MARKOWITZ, 2002).

Releva notar que a alta correlação com outros ativos pode gerar uma baixa performance do portfólio como um todo Fabozzi et al. (2007). Apesar disso, é importante ressaltar ser possível obter boa performance com retornos altamente correlacionados.

O conceito de diversificação continua sendo aplicado em diversas áreas de finanças por ser intuitivo e forte. Devido à vasta utilização desse conceito, várias inovações ocorreram e novos modelos foram introduzidos para a obtenção de melhores estimativas de variâncias e covariâncias, o que permitiu uma medida mais precisa de diversificação e, conseqüentemente, de risco (MARKOWITZ, 2002).

Markowitz (1952) também tratou dos benefícios e implicações da diversificação. Para ele, a hipótese da média-variância implica na diversificação, e na *forma correta* de diversificação a partir da *correta razão*. No seu entender, é mais provável que firmas de mesma indústria tenham performance inferior simultaneamente, do que firmas de diferentes indústrias. Assim, o investimento deve ser realizado em diferentes indústrias para minimizar o risco. Markowitz (1952) acrescentou que a importância da diversificação também se dá em razão da baixa covariância existente entre firmas de diferentes indústrias.

2.3.1.2 Críticas ao modelo clássico de Markowitz

Para Markowitz (1952), a seleção de portfólio era tratada como um problema de otimização uniobjetivo, com alguns critérios (que seriam as restrições do problema de programação matemática), que busca solucionar um *trade-off* entre taxa esperada de retorno e risco. No entanto, Bell e Raiffa (1988) afirmam que o modelo não é consistente com os modelos axiomáticos de preferência de escolha sob risco. Modelos consistentes com axiomas de preferência têm como base a relação de dominância estocástica ou a teoria de utilidade esperada (LEVY, 1992).

Os pressupostos assumidos por Markowitz (1952) foram os de que a função de utilidade, que apresenta as preferências do investidor e os retornos seguem uma distribuição normal. Tais pressupostos geraram muitas críticas ao modelo. A maioria dos testes empíricos no mercado de capital resultaram na assimetria e/ou na distribuição leptocúrtica (CLOQUETTE et al., 1995). Nessas distribuições, a variância não é uma medida de risco adequada. Em finanças, os dados não possuem uma distribuição normal e sim uma distribuição α -estável. Para distribuições α -estáveis o segundo momento, que incorpora a variância, pode ser infinito. Dessa forma, a variância não existiria e uma nova medida de risco seria necessária.

Após o reconhecimento das desvantagens da variância como medida de risco, novos modelos para a seleção do portfólio ótimo foram desenvolvidos (KONNO; WAKI; YUUKI, 2002 e ROCKAFELLAR; URYASEV, 2000).

Ademais, para o caso de n ativos, Markowitz (1952) não derivou os resultados analiticamente e assumiu crenças de probabilidade estática como independência e identidade distribucional. No entanto, os retornos não são independentes nem entre si, nem no tempo. Além disso, não são identicamente distribuídos, pois sua variância tende a mudar em função do tempo. Como possível solução à essa questão tem-se os estimadores robustos.

Bouri, Martel e Chabchoub (2002) acrescentam que vários trabalhos criticaram a fragilidade da hipótese básica de Markowitz (1952). Para obter o conjunto de portfólios eficientes no âmbito do modelo de média-variância, a hipótese deve verificar se uma distribuição normal do retorno dos ativos é utilizada. No entanto, em finanças, os dados não possuem uma distribuição normal e sim uma distribuição α -estável.

Em relação a um portfólio, considerando as restrições sobre o número de ações que devem ser mantidas, o custo de monitoramento e a reponderação; surge a questão de como escolher o melhor portfólio dadas as preferências particulares sobre risco/retorno e as restrições de cardinalidade. A restrição de cardinalidade é um recurso utilizado para limitar o número de ativos que uma pessoa pode investir como parte de um portfólio. A correlação entre o retorno das ações

influencia no número de ações necessário para se obter um ganho de diversificação particular. Quanto menor a correlação, mais ações são necessárias. Campbell et al. (2001) mostram que, apesar da volatilidade do mercado global não ter aumentado nos últimos anos, os retornos de ações individuais se tornaram menos linearmente correlacionados entre si (FIELDSEND; MATATKO; PENG, 2004).

Na prática, retornos pouco linearmente correlacionados, geram portfólio centrados em um único ativo ou espalhados em uma infinidade de ativos. Além do exposto, trabalhos contemporâneos argumentam que a incorporação de critérios adicionais à variância e retorno trarão benefícios ao processo de seleção de portfólio. Por essa razão, utiliza-se o problema de seleção de portfólio multicritério em virtude dos vetores de critérios possuírem três ou mais componentes.

No entanto, apesar do grande número de modelos multicritério propostos na literatura para seleção do portfólio *ótimo*, nenhum foi capaz de resolver adequadamente o problema de seleção de portfólio ótimo que contém ações de diferentes companhias de diferentes indústrias (MARASOVIĆ; BABIĆ, 2011).

Tal problema surge em razão de que a avaliação de ações de diferentes indústrias geralmente requer diferentes critérios. E mesmo utilizando idêntico critério não era necessário ter o mesmo peso para todos os critérios (MARASOVIĆ; BABIĆ, 2011). No caso de uma empresa de petróleo e um banco, os critérios aplicados a primeira podem não ser adequados à segunda.

Nessa linha, Marasović e Babić (2011) apresentaram novo modelo multicritério que, ao invés dos anteriores, permitia no processo de escolha do portfólio ótimo fossem incorporadas características específicas de indústrias (como características multianuais dos ciclos de transporte, sazonalidade no turismo, efeito do tempo na indústria alimentícia, entre outras.) e diferentes percepções de mercado sobre perspectivas de diferentes indústrias. Referidos fatores decorreram do desvio dos valores médios de alguns critérios em diferentes indústrias. Além disso, um critério muito importante para uma indústria pode ter um relativo baixo peso em outra, e existem alguns critérios que aparecem somente em uma certa indústria, enquanto em outras não será existente (isto é, o peso é zero).

Já Fabozzi et al. (2007) criticam o fato de que gestores de investimento não aplicam atualmente a otimização de risco-retorno quantitativa por ser incerta na prática. Para eles a otimização de risco-retorno é muito sensível a mudanças no *input* (no caso da otimização da média-variância, esses *inputs* incluem o retorno esperado de cada ativo e as covariâncias dos ativos). Apesar de ser difícil realizar estimativas precisas a respeito desses *inputs*, os erros de estimação nas previsões impactam significativamente o peso resultante do portfólio. Os autores acrescentam que, na prática, portfólios igualmente ponderados muitas vezes superam

o portfólio de média-variância. Já os portfólios de média-variância não são necessariamente bem diversificados, e a otimização de média-variância pode produzir pesos extremos e não intuitivos para alguns dos ativos no portfólio. Tais questões não são necessariamente um sinal de que a teoria de otimização de risco-retorno é falha, mas sim de que, na prática, o modelo tradicional deve ser modificado para atingir confiabilidade, estabilidade e robustez em relação ao modelo e aos erros de estimativa.

2.3.2 Portfólio de média-variância de Markowitz (1952)

Como descrito anteriormente, Markowitz (1952) acreditava que um investidor buscava maior retorno e repelia riscos.

No modelo o retorno esperado e a variância ponderados de um portfólio no período t são computados respectivamente:

$$\mu_{\omega} = E(R_t^{\omega}) = \sum_{i=1}^N \omega_i E(R_{i,t}) \quad (2.19)$$

$$\sigma_{\omega}^2 = Var(R_t^{\omega}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad (2.20)$$

onde a correlação e a covariância entre retornos dos ativos i e j são, respectivamente, ρ_{ij} e σ_{ij} e o desvio padrão de $R_{i,t}$ é σ_i .

Além disso, Markowitz (1952) tratou de dois casos extremos. O primeiro obteve menor risco ao trabalhar com um grande número de ativos não correlacionados, ou seja, pares de ativos que possuam correlação próxima a -1 . Já no segundo, há maior risco no caso em que a correlação entre os ativos é próxima a $+1$.

2.3.3 Portfólio de mínima variância

Na proposta, o investidor busca um portfólio com mínimo risco, deixando o retorno esperado em segundo plano. Por buscar um portfólio eficiente, o investidor escolherá dentre os portfólios pertencentes à fronteira eficiente, o que possui menor desvio padrão e mínima variância. Por isso, este portfólio é conhecido como o de mínima variância (MARKOWITZ, 1952).

O problema de seleção de portfólio foi descrito por Markowitz (1952) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \min \omega^T \hat{\Sigma} \omega \\ & \text{sujeito a:} \\ & \omega^T \hat{\mu} = r^* \\ & \sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\hat{\Sigma}$ é uma estimativa da covariância dos ativos. Busca-se minimizar $\bar{\sigma}^2 = \omega^T \hat{\Sigma} \omega$, o risco da variância-covariância. O portfólio com o menor σ é conhecido como o portfólio de mínima variância. Não há imposição acerca dos valores dos pesos, ou seja, é possível trabalhar com investimentos *long* e *short* (WÜRTZ et al., 2010).

Cada investimento individual é descrito por ω , que é sujeito ao investimento total do capital disponível (*budget constraint*), ou seja, $\omega^T \mathbf{1} = 1$. A condição $\omega^T \hat{\mu} = r^*$ refere-se ao retorno visado pelo investidor, onde a média esperada dos ativos é definida como $\hat{\mu}$, um vetor de p -dimensões. Mediante análise é possível solucionar a questão da venda a descoberto ilimitada do portfólio. No caso em que não é possível venda a descoberto devido à delimitação dos pesos a zeros, a otimização é realizada numericamente. Assim, o problema de portfólio padrão de Markowitz (1952) é definido como: (WÜRTZ et al., 2010).

$$\begin{aligned} & \min \omega^T \hat{\Sigma} \omega \\ & \text{sujeito a:} \\ & \mathbf{A}\omega \leq b \end{aligned} \quad (2.22)$$

Würtz et al. (2010) ressaltam que o problema de seleção de portfólio de Markowitz (1952) é de otimização convexo caso a matriz $\hat{\Sigma}$ seja positivamente definida.

A fim de calcular a fronteira eficiente juntamente com o portfólio de mínima variância, apura-se o sistema de Equação (2.21) para diferentes valores de r^* a fim de obter os pesos eficientes ω^* . A seguir, calcula-se tanto a mínima variância quanto o desvio padrão do padrão do portfólio (ARRATIA, 2014).

$$\sigma^* = std(R^{\omega^*}) = \sqrt{(\omega^*)^T \hat{\Sigma} \omega^*} \quad (2.23)$$

O ramo direito de uma hipérbole é o conjunto de pontos σ^*, r^* no plano $\sigma - \mu$ (ou plano de risco médio). Na Figura 2.1, o ponto MVP (*Portfólio de Mínima Variância*) é denominado

de portfólio de mínima variância. A fronteira de eficiência é definida como a parte da hipérbole acima do MVP, ou seja, é aquela que apresenta retorno maior que o retorno do portfólio de mínima variância ($r^* > r_{pmv}$) (ARRATIA, 2014). O conjunto de pontos que contém a mínima variância encontra-se abaixo do MVP.

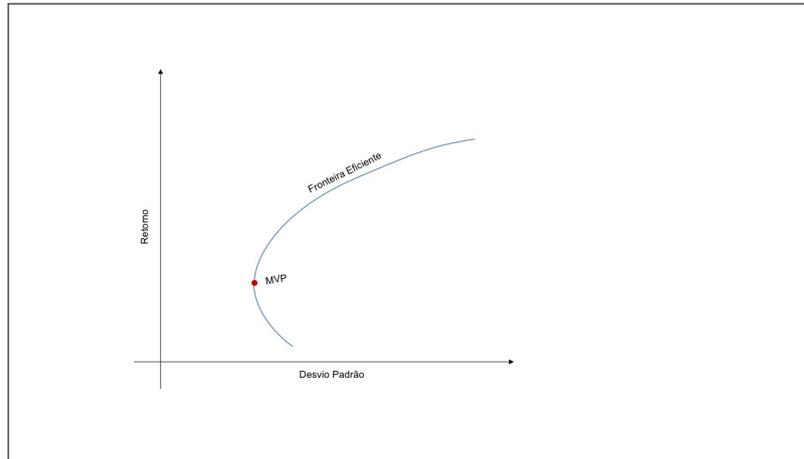


Figura 2.1: Portfólio de mínima variância

2.3.4 Portfólio tangente de Markowitz (1952)

Nesta etapa analisa-se o caso da inclusão de ativos livre de risco na formação do portfólio. Isso ocorre quando, a uma taxa de interesse r_0 com risco igual a zero, o investidor realiza um empréstimo ou empresta dinheiro. No primeiro caso o ativo livre de risco possui peso positivo. No segundo, peso negativo. Um portfólio composto apenas de ativos livre de risco apresenta variância igual a 0 e retorno igual a r_f , que é a própria taxa livre de risco (ARRATIA, 2014).

Ao analisar o ativo livre de risco juntamente com ativos arriscados, obtém-se a o retorno esperado e o desvio padrão do portfólio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mu_{\omega} &= w_f r_f + (1 - w_f) \mu_w \\ \sigma_{\omega} &= w_f r_f + (1 - w_f) \sigma_w\end{aligned}\tag{2.24}$$

Na situação, a riqueza foi composta pelo ativo livre de risco e por N ativos arriscados. O primeiro possui peso igual a w_f , desvio padrão igual a zero e média igual a r_f . O segundo, peso igual a $1 - w_f$, desvio padrão igual a σ_w e média igual a μ_w . A covariância é igual a zero para esse par e ativos arriscados e livre de risco (ARRATIA, 2014).

É possível a obtenção de diferentes portfólios alterando w_f já que este impacta linearmente

o desvio padrão e a média do portfólio ω . Dessa forma, é possível traçar uma linha reta do ponto $(0, r_f)$ até o plano $\sigma - \mu$ no ponto (σ_w, μ_w) que é a fronteira eficiente do portfólio composto de ativos arriscados e do ativo livre de risco. Essa linha reta que é tangente a fronteira eficiente é conhecida como a linha de mercado de capitais (CML - *Capital Market Line*) (ARRATIA, 2014).

O portfólio de mercado é aquele que apresenta a máxima razão entre retorno e risco. Ele se encontra no intercepto entre a reta que parte do ativo livre de risco e a fronteira eficiente dos ativos arriscados (ARRATIA, 2014).

O portfólio *ótimo* neste caso é aquele em que a CML toca a fronteira eficiente, conhecido como o portfólio tangente de média-variância. Esse portfólio é aquele que maximiza $\tan \theta$:

$$\begin{aligned} \max \tan \theta &= \frac{\hat{\mu}^T \omega - r_f}{\omega^T \hat{\Sigma} \omega} \\ \text{sujeito a:} & \\ \omega^T \hat{\mu} &= \bar{r} \\ \omega^T \mathbf{1} &= 1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

A medida de avaliação de portfólio mais utilizada é o *Sharpe ratio*. A recompensa do portfólio em relação a sua variabilidade é medida por essa razão. Em outras palavras, o portfólio mais *risco eficiente* é aquele que possui maior retorno esperado por unidade de risco, ou seja, aquele com maior *Sharpe ratio* (ANDRECUT, 2013). Essa razão é calculada da seguinte maneira:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\hat{\mu}^T \omega - r_f}{\omega^T \hat{\Sigma} \omega} \tag{2.26}$$

A Figura 2.2 a seguir mostra o portfólio tangente construído a partir dos dados de 10 ações disponíveis no S&P500 no ano de 1996.

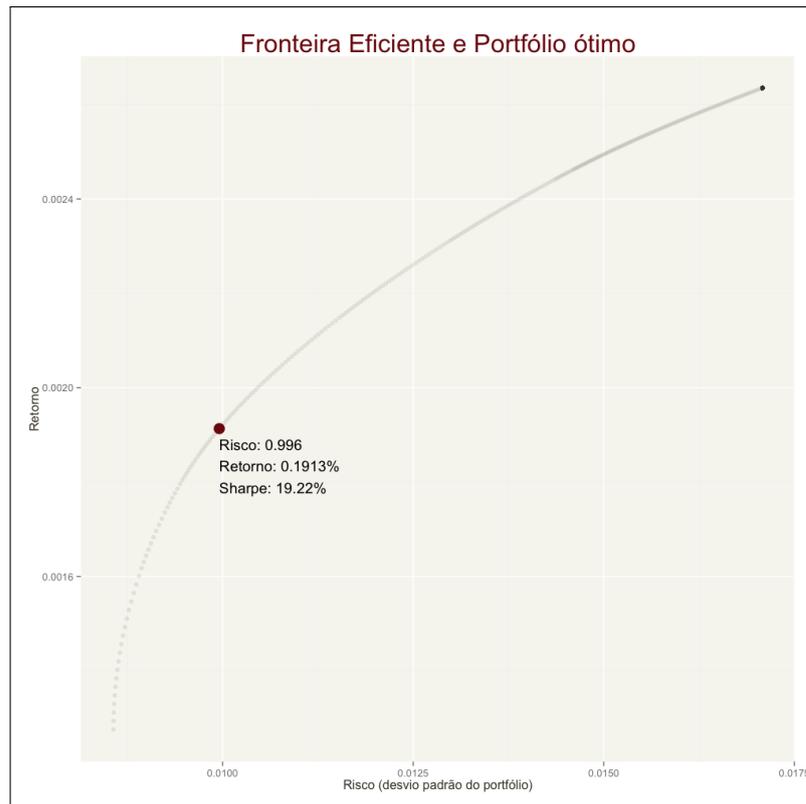


Figura 2.2: Fronteira Eficiente e ótimo portfólio

2.3.5 Long only portfólio

Esse portfólio trabalha com a ideia de investimentos longos, ou seja, ao comprar um título com uma ação, uma mercadoria ou moeda, um investidor espera que o valor de seu ativo aumente.

Guarasci (2010) tratou de algumas das vantagens e das desvantagens apresentadas pelos portfólios *long only* que serão descritas abaixo.

A avaliação do portfólio *long-only* é relativamente direta, em virtude do fácil entendimento e da fácil realização de *benchmark*. Ademais, possuem o benefício da liquidez, fundos de capital próprio típicos (*equity*) *long only* detém títulos de alta liquidez e devem permitir resgates e contribuições diárias. Além disso, a pronta elaboração e disponibilidade de relatórios sobre as participações subjacentes da maioria dos fundos para investidores concede o benefício da transparência. Por fim, há grande pressão em manter suas taxas baixas (GUARASCI, 2010).

No entanto, esses portfólios possuem alta volatilidade e, em alguns ambientes de mercado, como por exemplo durante crises, possuem elevada chances de grandes saques e, por prolongados períodos de tempo, baixo ou negativo retornos. Há necessidade de investir totalmente e

a todo tempo em fundos de investimento *long only*. Além disso, suas ferramentas para cobrir riscos e exposições são limitadas. Caso os ativos se tornem sobrevalorizados (no caso de bolhas de ativos), apesar do cenário de risco/retorno, os gestores são forçados a permanecer investindo totalmente. Por fim, as estruturas de tarifação normalmente não alinham os interesses dos gestores aos dos investidores, não havendo incentivo a melhor desempenho dos gestores (GUARASCI, 2010).

Brennan, Lo e Sloan (2015) acrescentaram que uma das restrições do *long only* portfólio é a não admissão de pesos negativos. Por isso que gestores desses portfólios sempre impõem restrições ao utilizar técnicas de otimização do portfólio de média-variância. Certamente sem essas restrições, o ótimo portfólio tangente terá pesos negativos.

Nessa linha, devido à restrição de que os ativos no *long only* portfólio não podem ter pesos negativos, os ativos mais voláteis possuem maiores pesos, resultando na possibilidade de maior peso a ativos com menores *Sharpe ratio*.

2.3.6 Mínimo *Regret* portfólio

Würtz et al. (2010) explicaram que, dado um conjunto de retornos, busca-se maximizar o mínimo retorno. O mínimo *regret* portfólio é encontrado solucionando a seguinte programação linear:

$$\begin{aligned}
 & \max R_{min} \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \omega^T \hat{\mu} = \bar{\mu} \\
 & \omega^T \mathbf{1} = 1 \\
 & \omega_i \geq 0 \\
 & \omega^T r_s - R_{min} \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para um conjunto de retornos de ativos e uma dada meta de retorno, realiza-se a construção da função de otimização do mínimo *regret* portfólio em cinco etapas. Primeiro, o vetor da função objetivo é definido. Segundo, os limites simples para configurar a matriz de restrições lineares são excluídos. Terceiro, os vetores de direções e os valores do lado direito são criados. Quarto, são definidos os valores para os limites inferiores e superiores. Quinto, é realizada a otimização (WÜRTZ et al., 2010).

3 METODOLOGIA

O método utilizado no trabalho é a pesquisa documental, por ser desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Segundo Lakatos e Marconi (2010), nessa forma de pesquisa a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias, que podem ser constituídas no momento em que o fato ou fenômeno ocorre, ou depois.

Desse modo, o trabalho utiliza fontes escritas, secundárias e contemporâneas, quais sejam, pesquisas estatísticas.

Na pesquisa foram utilizados dados secundários, os coletados por pessoas ou agências para outros propósitos que não a resolução do problema específico apresentado no trabalho Aaker et al. (2004). Esses dados foram obtidos no *Yahoo Finance* no período de 1985 a 2015.

A pesquisa é de cunho explicativo, pois o intuito principal do trabalho é identificar fatores determinantes ou contributivos para a formação de portfólios que gerem maior retorno sobre investimentos com menor risco.

O escopo do trabalho é estatístico. Segundo Lakatos e Marconi (2010), por meio de processos estatísticos obtém-se representações simples a partir de conjuntos complexos, sendo possível verificar se tais constatações simplificadas têm relações entre si. Para o autor, o método estatístico reduz fenômenos sociológicos, políticos, econômicos, dentre outros, a termos quantitativos e à manipulação estatística, permitindo comprovar as relações dos fenômenos entre si, e obter generalizações sobre sua natureza, ocorrência ou significado.

O papel do método estatístico é o de realizar uma descrição racional, provando o objetivo do trabalho por meio da experimentação (LAKATOS; MARCONI, 2010).

Também é uma pesquisa quantitativa, por transformar índices de preferência e indiferença (que são subjetivos) em medidas quantitativas de tomada de decisão, tornando o processo de formação de carteiras o mais objetivo possível.

Para Collins e Hussey (2005) e Roesch et al. (2005), o estudo longitudinal ocorre ao longo

do tempo. Nesse sentido, o presente trabalho busca pesquisar a dinâmica do grupo de ações, investigando-as continuamente durante o período de 1992 a 2015. Sampieri, Collado e Lucio (1996) acrescentam que no corte longitudinal os dados são coletados ao longo do tempo visando compreender as modificações, a evolução ou as relações das variáveis de interesse.

O delineamento do trabalho é correlacional, por permitir estabelecer e quantificar relações entre variáveis, simultaneamente, do grupo de ações que compõem o S&P500 de 1985 a 2015.

Após a teoria de média-variância de Markowitz (1952) vários trabalhos, como os de Steuer, Qi e Hirschberger (2007) e Steuer, Qi e Hirschberger (2008), foram publicados estendendo ou modificando o modelo básico em três direções: a primeira ocorre por meio da simplificação do tipo e quantidade do dado de entrada; a segunda refere-se à introdução de medidas alternativas de risco e a terceira trata da incorporação de critérios adicionais e/ou restrições (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2010). O estudo busca incorporar informações no cálculo da matriz de variâncias e covariâncias.

Por ter como base dados históricos e de covariáveis, o trabalho se enquadra em uma abordagem mista, pois segundo Marasović e Babić (2011) serão utilizados critérios estatísticos e de mercado para a seleção do portfólio *ótimo*. Esses critérios serão incluídos no cálculo da correlação como instrumento para a estimação da matriz de variâncias e covariâncias e, posteriormente, os pesos.

Para avaliar o poder e veracidade da correlação local Gaussiana na seleção de portfólios realizou-se a simulação do retorno de seis ativos, criando, assim um portfólio com diversas relações de não linearidade. A seguir, implementou-se o método no portfólio com 10 ações que compõem o conjunto de ações do S&P500. Nesta simulação e no cálculo do portfólio com dados do S&P500 implementou-se a técnica de validação-cruzada e o *Block Bootstrap*.

A primeira técnica busca estimar o desempenho do modelo em um novo conjunto de dados, em outras palavras, avalia-se a precisão deste. Para isso, é necessário dividir o conjunto de dados em subconjuntos mutuamente exclusivos. Em seguida alguns desses subconjuntos são utilizados para estimar os parâmetros do modelo (dados de estimação) e o restante para validá-lo (dados de validação). No presente estudo utilizou-se 80% dos dados para estimação e 20% para validação.

A segunda técnica é capaz de estimar praticamente qualquer estatística, por ser uma técnica estatística mais ampla de reamostragem.

A estatística inferencial possui como um de seus objetivos determinar o valor de um parâmetro de uma população. Essa é uma tarefa muito custosa e difícil de ser medida diretamente.

Uma possível solução é a amostragem estatística, em que se realiza a amostragem da população, a medida da estatística dessa amostra e, por fim, informações acerca do parâmetro correspondente dessa população são dadas a partir dessa estatística.

Utilizado inicialmente por Efron (1979), a técnica de *Bootstrapping* busca provar uma estimativa por meio do uso de medidas de precisão (como viés, variância, intervalos de confiança, erro de previsão). Mediante o uso de métodos de reamostragem aleatórios, o *bootstrap* é capaz de estimar a distribuição amostral de uma estatística (EFRON; TIBSHIRANI, 1993; EFRON *et al.*, 2003; e VARIAN, 2005).

Em situações em que se trabalha com dados complexos, é necessário uma maior reflexão acerca de como gerar as amostras *bootstrap*. Por exemplo, neste estudo utilizamos dados de série temporal. Neste caso não é possível simplesmente amostrar as observações com reposição.

Os dados não são independentes, de fato eles apresentam uma dependência oriunda de alguma relação não linear. Essas relações são frutos de diversas relações entre os retornos dos ativos que são influenciadas por políticas econômicas, nível de integração do mercado de capital ou de condições relativas ao ciclo de negócios que influenciava a mudança ao longo do tempo da estrutura de correlação estimada (BALL; TOROUS, 2000). Espera-se que o preço da ação de um dia seja relacionado ao preço da ação no dia anterior.

Para tanto ao trabalhar com séries temporais utiliza-se o *Block Bootstrap*. O *Block Bootstrap* de janela móvel parte da escolha de um bloco de largura l , grande o suficiente, de forma que unidades distantes, aquelas acima de l unidades, sejam praticamente independentes. Ao amostrar os blocos de largura l , retém-se a dependência presente nas observações com menos de l unidades de distância (EFRON; TIBSHIRANI, 1993).

Neste trabalho, a largura do bloco utilizada foi de 3 unidades devido ao fato de séries temporais de mercado apresentarem alta volatilidade. Após três dias, a correlação entre dados diários torna-se muito pequena.

Em suma, este estudo busca estimar o portfólio *ótimo* de acordo com a teoria proposta por Markowitz (1952) e a utilização do modelo de correlação local Gaussiana. Com isso, os investidores escolhem carteiras *ótimas* que minimizem a variância do retorno da carteira e maximizem o retorno esperado, ou seja, retornem a maior *Sharpe ratio*.

3.1 Seleção de Portfólio

Foi analisada inicialmente uma série temporal de preços dos ativos que compõem o S&P500 no período de 1985 a 2015, com foco na utilização dos retornos neste estudo. Campbell et al. (1997) tinham preferência pelo uso do retorno ao invés do preço devido ao fato de que os preços não são afetados pelo tamanho do investimento em razão da quase perfeita competição entre os mercados financeiros. Além disso, os preços carecem de propriedades estatísticas gerenciáveis como, por exemplo, a estacionariedade.

Desta forma, a fim de analisar o comportamento dos ativos no período de 1985 a 2015, foi realizada a transformação dos preços das ações disponibilizados no *Yahoo Finance* para retornos simples como demonstrado pela Equação (3.1).

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (3.1)$$

onde P_t é o preço do ativo no tempo t , $P(t-1)$ o preço do ativo no período anterior ($t-1$) e $R_t(\tau)$ o retorno simples no tempo t .

Hudson e Gregoriou (2015) mostraram que não existe uma relação *um-para-um* entre média calculada utilizando retorno simples e logaritmo, já que elas geram diferentes valores de média a partir de um conjunto de retornos.

Meucci (2010) afirmaram ser muito empregado o retorno para medir risco e prêmio porque ele pode ser utilizado na comparação entre títulos e classes de ativos já que eles proporcionam uma normalizada. Além disso, podem ser invariantes em mercados de retornos notáveis. Em outras palavras, podem se comportar de forma independente e idêntica ao longo do tempo.

Ademais, Meucci (2010) expôs que retornos lineares agregam em títulos e, dada essa propriedade, é considerada a medida a ser utilizada em problemas de otimização de portfólio, foco do presente estudo. No entanto, a propriedade dos retornos compostos é que ele agrega ao longo do tempo.

O modelo de seleção de portfólio de Markowitz (1952) utilizado busca maximizar o *Sharpe*

ratio.

$$\begin{aligned} \max h(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}^T \boldsymbol{\omega} - r_f}{\boldsymbol{\omega}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\omega}} \\ \text{sujeito a:} & \\ \boldsymbol{\omega}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{r} \\ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} &= 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

O risco da variância-covariância é $\sigma^2 = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$. A estimativa da covariância entre os ativos é observada na matriz $\boldsymbol{\Sigma}$.

3.2 Modelo de Correlação Local Gaussiana

Ao analisar o modelo de correlação local Gaussiana, proposto por Tjøstheim e Hufthammer (2013), assumamos que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ é uma variável aleatória com densidade bivariada geral f .

A densidade Gaussiana bivariada é utilizada na vizinhança de cada ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de forma que:

$$\psi(v, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2\pi\sigma_1(\mathbf{x})\sigma_2(\mathbf{x})\sqrt{1-\rho^2(\mathbf{x})}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2(\mathbf{x})} \left(\frac{v_1 - \mu_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} \right)^2 - 2\rho(\mathbf{x}) \frac{(v_1 - \mu_1(\mathbf{x}))(v_2 - \mu_2(\mathbf{x}))}{\sigma_1(\mathbf{x})\sigma_2(\mathbf{x})} + \left(\frac{v_2 - \mu_2(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

Na distribuição Gaussiana $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ é a variável em execução. Além disso,

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = [\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x}), \sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x})] \quad (3.4)$$

com média local $\mu_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, desvios padrão locais $\sigma_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ e correlação local no ponto (\mathbf{x}) , $\rho(\mathbf{x})$. Ou seja, estima-se uma normal bivariada para cada ponto. Em seguida, minimiza-se a função de penalidade local a fim de encontrar os valores populacionais dos parâmetros locais $\boldsymbol{\theta}_b(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$. Para tanto bonifica-se com a função de máxima verossimilhança, e em seguida, busca-se a *bandwidth* que gerou o máximo valor da verossimilhança. O modelo faz uma análise das observações adjacentes. Não necessariamente esses valores são congruentes no tempo. Em outras palavras, é possível que um dado obtido hoje e outro obtido dez anos atrás sejam semelhantes e por isso recebam pesos similares na distribuição.

$$q = \int \mathbf{K}_b(v - \mathbf{x}) ([\psi(v, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})) - \log \psi(v, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}))]) f(v) dv \quad (3.5)$$

onde o produto de *Kernels*, $\mathbf{K}_b(\mathbf{v} - \mathbf{x}) = (b_1 b_2)^{-1} K(b_1^{-1}(v_1 - x_1)) K(b_2^{-1}(v_2 - x_2))$ possui *bandwidth* (b_1, b_2) . O último elemento do vetor $\theta(\mathbf{x})$ é a correlação local Gaussiana ($\rho_b(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$).

A função *kernel* é utilizada para ponderar a função de otimização penalizando pontos distantes da observação local e bonificando pontos mais próximos desse. Os pontos mais próximos de um determinado \mathbf{x} possuem maior peso do que os mais distantes. Nesse sentido, as *bandwidths* são utilizadas para determinar a estrutura de ponderação adequada das observações, controlando, assim, o formato da distribuição normal em análise.

Ademais, ao realizar uma análise de outro ponto, por exemplo \mathbf{x}' , obtém-se uma nova densidade de aproximação Gaussiana $\psi(\mathbf{v}, \theta(\mathbf{x}'))$, ou $\psi(\mathbf{v}, \mu(\mathbf{x}'), \sigma_{ij}(\mathbf{x}'))$. Isso aproxima f na vizinhança de \mathbf{x}' . À medida que \mathbf{x} varia, e em cada vizinhança específica de \mathbf{x} , uma família de densidades Gaussianas bivariada pode ser utilizada para representar f . Já $\rho(\mathbf{x})$ é utilizada para descrever as propriedades de dependência locais. Nesse sentido, a dependência (local) pode ser positiva se $\rho(\mathbf{x}) > 0$ e negativa se $\rho(\mathbf{x}) < 0$.

Em outras palavras, uma família de densidades Gaussiana bivariada representa f . Em cada vizinhança de um ponto \mathbf{x} , uma das funções da matriz de covariância/correlação é descrever as propriedades de dependência local. É possível encontrar uma caracterização completa da relação de dependência naquela vizinhança devido a ψ ser Gaussiano. Essas definições ocorrem devido a utilização da representação local Gaussiana e em qual grau ela é única.

A função de penalização q pode ser utilizada para efeitos de estimação de densidade (HJORT; JONES, 1996) e também para o desenvolvimento da correlação local Gaussiana (TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2013). Localmente, qualquer função paramétrica pode ser encaixada em f devido a q . Hjort e Jones (1996) argumentaram que a distância entre $f(\cdot)$ e a distribuição paramétrica escolhida pode ser medida utilizando q como um critério Kullback-Leibler (que maximiza a informação) de ponderação local no caso $\psi(\cdot, \theta(\mathbf{x})) \equiv 0$.

Maximizando a função de log-verossimilhança é possível obter as estimativas $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ a partir das observações $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}), i = 1, \dots, n$ que são inerentes de f (HJORT; JONES, 1996).

$$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, \theta(\mathbf{x})) = n^{-1} \sum_i \mathbf{K}_b(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}) \log \psi(\mathbf{X}_i, \theta(\mathbf{x})) - \int \mathbf{K}_b(\mathbf{v} - \mathbf{x}) |\psi(\mathbf{v}, \theta(\mathbf{x}))| d\mathbf{v} \quad (3.6)$$

3.2.1 Propriedades

Berentsen e Tjøstheim (2014) ressaltaram algumas das propriedades da correlação local Gaussiana, são elas: extensão, independência e dependência funcional, que serão apresentadas respectivamente a seguir:

- (i) O fator $\sqrt{1 - \rho^2(\mathbf{x})}$ e a estimativa $\rho_{n,b}(\mathbf{x})$, que satisfaz $-1 \leq \rho_{n,b}(x) \leq 1$ são obtidos quando um algoritmo de estimação é formulado em termos de $\rho(\mathbf{x})$. Tem-se que $-1 \leq \rho(x) \leq 1$ já que $\rho_{n,b}(\mathbf{x})$ converge para $\rho(\mathbf{x})$. Baseado na mesma explicação tem-se que $-1 \leq \rho_b(\mathbf{x}) \leq 1$.
- (ii) Tem-se que $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ em razão de X_1 e X_2 serem independentes. E, a partir da Equação (3.4) é possível obter $\rho(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Caso uma representação local Gaussiana seja $\rho(x_1, x_2) \equiv 0$, tem-se

$$f(x_1, x_2) = \Psi(x_1, \mu_1(x_1, x_2), \sigma_{11}(x_1, x_2))\Psi(x_2, \mu_2(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2)).$$

Analisando independência, tem-se $\rho(x_1, x_2) \equiv 0$, $\mu_i(x_1, x_2) \equiv \mu_i(x_i)$ e $\sigma_{ii}(x_1, x_2) \equiv \sigma_{ii}(x_i)$ para $i = 1, 2$ como condição necessária e suficiente e, concebivelmente, é possível aumentar o poder de testes de independência ao basear-se no fato que independência implica que $\mu(\mathbf{x})$ e $\sigma^2(\mathbf{x})$ são funções de uma única coordenada.

- (iii) Em um caso específico onde $X_2 = g(X_1)$ (ou vice-versa), se $g'(\mathbf{x}) > 0$, $\rho(\mathbf{x}) = +1$; se $g'(\mathbf{x}) < 0$, $\rho(\mathbf{x}) = -1$.

4 SIMULAÇÃO

A fim de avaliar o poder e a veracidade do modelo proposto, foi realizada a simulação do retorno de dez ativos. Destes, seis foram escolhidos aleatoriamente e constituíram um portfólio com diferentes relações de não linearidades.

A seguir, realizou-se a implementação do método de validação cruzada. Neste método o conjunto de dados em estudo é dividido a fim de avaliar a capacidade de generalização do modelo. Ou seja, busca-se estimar o desempenho do modelo em um novo conjunto de dados. Em outras palavras, avalia-se a precisão deste. Para isso, é necessário dividir o conjunto de dados em subconjuntos mutualmente exclusivos. A seguir, alguns desses subconjuntos são utilizados para estimar os parâmetros do modelo (dados de estimação) e o restante para validá-lo (dados de validação).

O conjunto de dados foi dividido em duas etapas. Na primeira, foi realizado o treinamento dos dados (a partir de 80% dos dados), a seguir ocorrerá a validação dos dados (com 20% destes). A escolha da *bandwidth ótima* ocorrerá no conjunto de treinamento. O conjunto da validação será utilizado para verificar o desempenho do modelo de seleção de portfólio clássico comparado ao modelo de Correlação Local Gaussiana.

O próximo passo consistiu na utilização dos dados de estimação para calcular as *bandwidths ótimas* para cada par de retorno. E para reconhecê-las, duas técnicas foram utilizadas: técnica de escalonamento e técnica visual. A primeira consiste na exploração e identificação de dimensões não reconhecidas que afetariam o comportamento de diferentes *bandwidths*. Essa técnica é utilizada para obtenção de avaliações comparativas de objetos quando as bases específicas de comparação são desconhecidas ou não identificadas. No entanto, essa técnica não foi efetiva pois a medida que os valores das *bandwidths* eram alterados, os resultados eram semelhantes, demonstrando uma ponderação não adequada.

Dessa forma, a segunda técnica foi a escolhida. Esta consiste na observação de possíveis padrões visualmente. Essa técnica obteve melhores resultados que a primeira devido à melhor identificação das *bandwidths*. Alguns exemplos serão apresentados a seguir.

Como ilustração, foi feita uma simulação de 1000 retornos com diferentes relações de não linearidade para dois ativos com nível de dispersão igual a 0.1. As Figuras 4.1 e 4.2 representam duas maneiras de visualização dos valores de ρ para cada par de ativos. No caso estão sendo avaliados o ativo 1 e o ativo 3, com os valores da *bandwidth1* e *bandwidth2* iguais a 1.

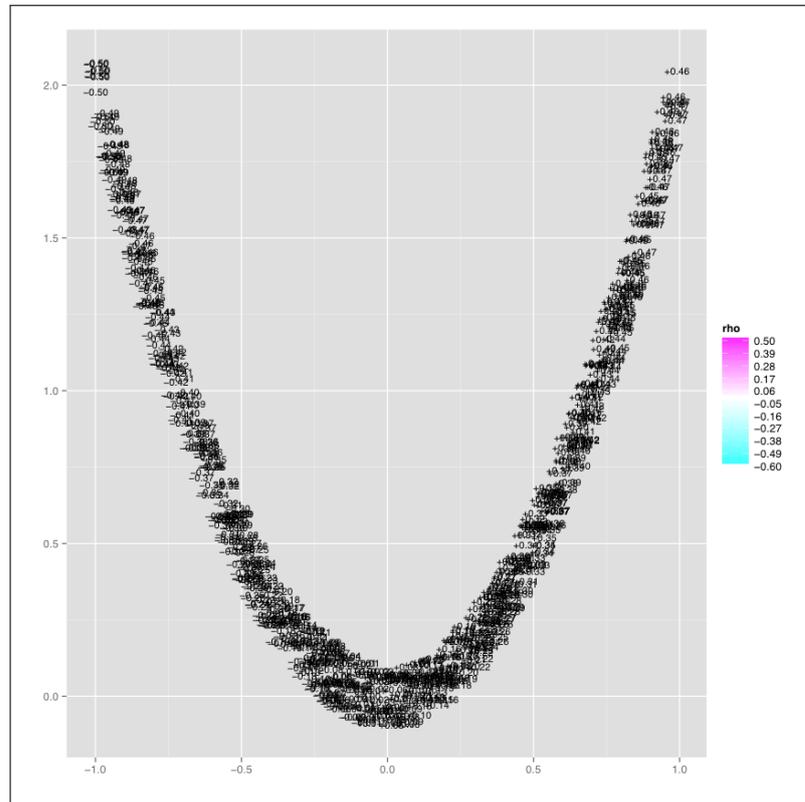


Figura 4.1: Simulação visual da Correlação Local Gaussiana de uma distribuição normal bivariada com *bandwidth* ótima entre o par de retornos 1 e 3.

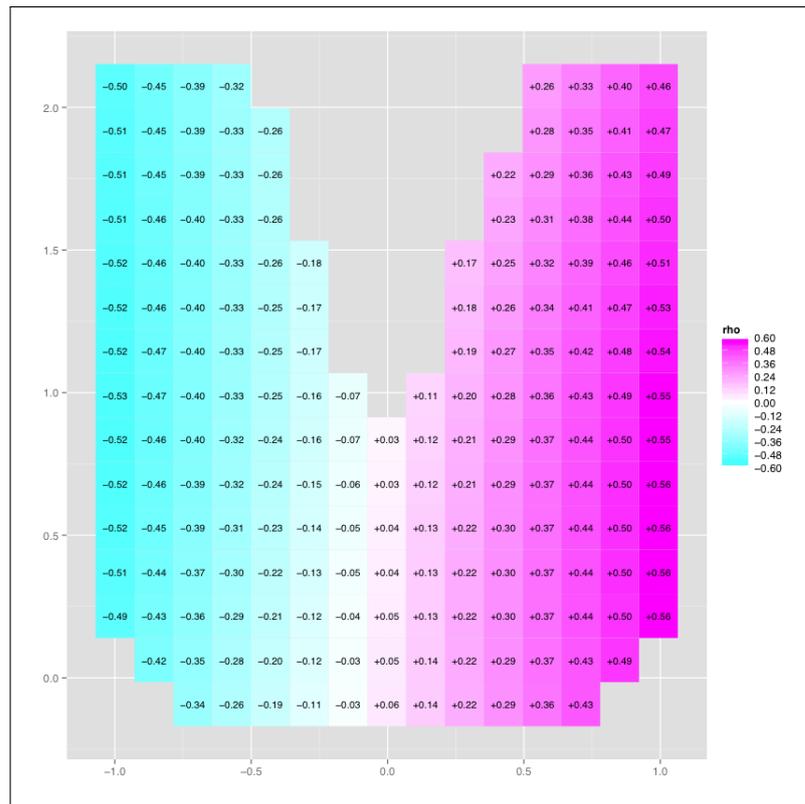


Figura 4.2: Simulação visual da Correlação Local Gaussiana de uma distribuição normal bivariada com *bandwidth* ótima entre o par de retornos 1 e 3 - Segunda visão.

Já as Figuras 4.3 e 4.4 representam duas maneiras de visualização dos valores de ρ para cada par de ativos, 1 e 3. Essas figuras utilizam os valores da *bandwidth1* igual a 1 e da *bandwidth2* igual a 0.15. Visualmente é possível observar que a Figura 4.1 e a Figura 4.2 apresentam uma separação *ótima* do conjunto de dados. Já a Figura 4.3 e a Figura 4.4 não apresentam uma separação uniforme entre os dados apresentados.

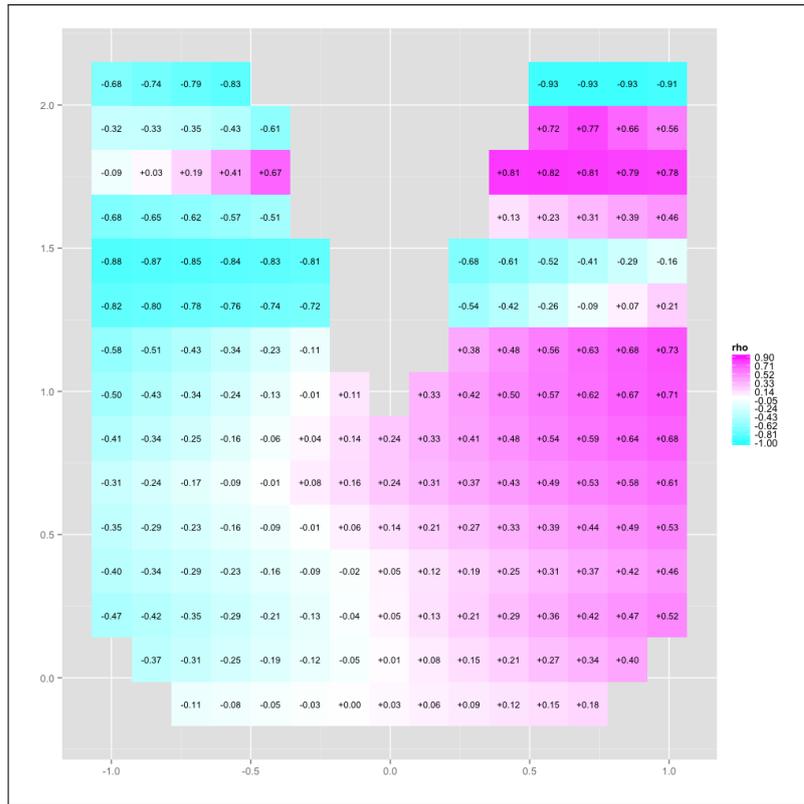


Figura 4.3: Simulação visual da Correlação Local Gaussiana com *bandwidth* não ótima entre o par de retornos 1 e 3.

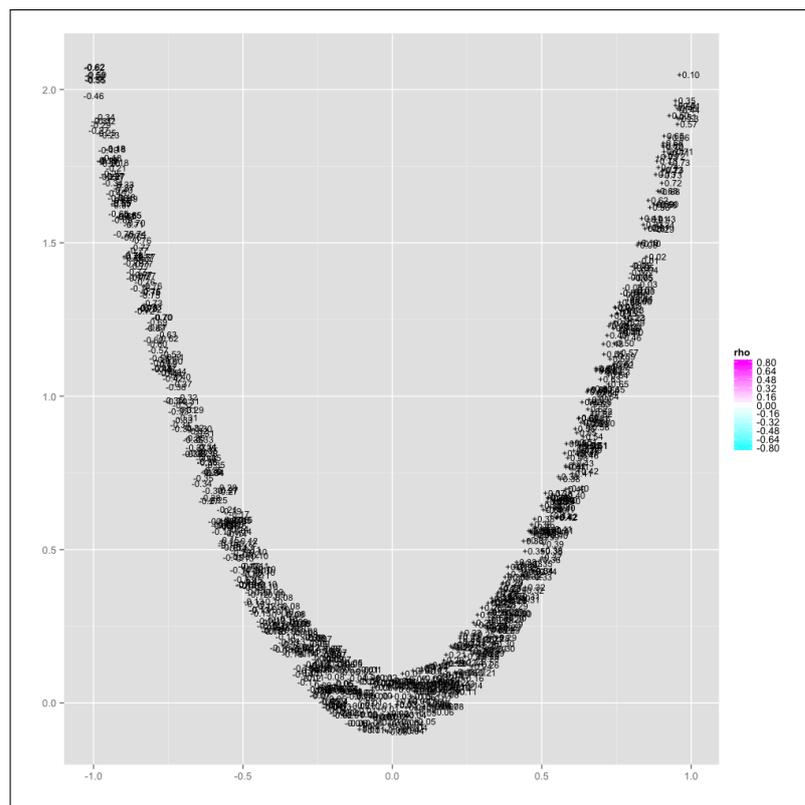


Figura 4.4: Simulação visual da Correlação Local Gaussiana com *bandwidth* não ótima entre o par de retornos 1 e 3 - Segunda visão.

No entanto, surge um questionamento acerca de quão confiável é a amostra selecionada com relação a população, algo que certamente depende da estrutura da população. Uma forma de responder a esse questionamento seria amostrar a população diversas vezes e analisar como tendem a ser as variações acerca da confiabilidade nessas amostras. Esta é uma tarefa complexa. Duas possíveis soluções seriam realizar suposições acerca do formato da população, ou utilizar a informação disponível acerca de uma amostra e aprender sobre ela.

Neste estudo utilizou-se a técnica de reamostragem proposta por Efron (1979), o *bootstrapping*. Através do uso de métodos de reamostragem aleatórios, o *bootstrap* é capaz de estimar a distribuição amostral de uma estatística (EFRON; TIBISHIRANI, 1993; EFRON *et al.*, 2003 e VARIAN, 2005).

Após a definição das *bandwidths* ótimas para cada par de retorno, calculou-se com os dados de validação os valores da média e do desvio padrão do portfólio por meio do modelo tradicional de seleção de portfólio de Markowitz (1952) e por meio do modelo de Correlação Local Gaussiana. Nestes dois cálculos utilizou-se o procedimento do *bootstrap*.

A Figura 4.5 mostra as principais etapas do processo de simulação dos dados.

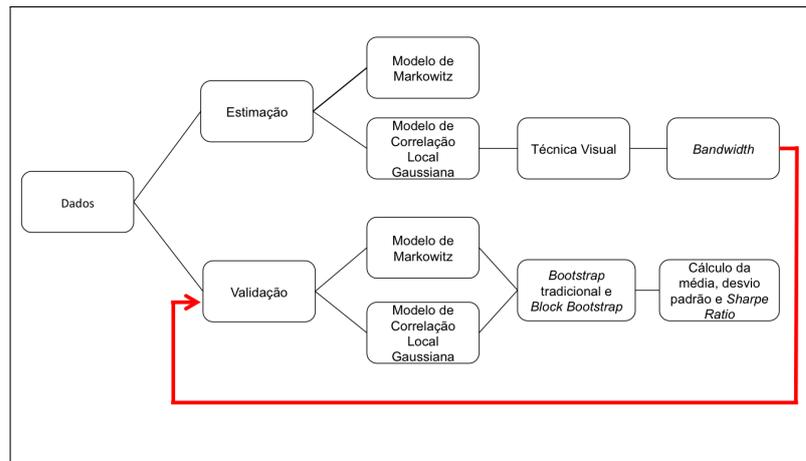


Figura 4.5: Metodologia elaborada a partir dos dados simulados.

O modelo de correlação Local Gaussiana superou o modelo de seleção de portfólio tradicional por apresentar maior média e menor desvio padrão como demonstrado na Tabela 4.1. Obteve-se, assim, evidência inicial de melhor performance e veracidade do modelo de seleção de portfólio através do uso da correlação local Gaussiana, criando um portfólio com diversas relações de não linearidade. Ou seja, ele conseguiu modelar corretamente a não linearidade.

Tabela 4.1: Resultados dos modelos utilizados na formação de portfólios com dados simulados

	Média	Desvio Padrão
Markowitz	0.2636236	0.001708426
Correlação Local Gaussiana	0.4881183	$< 10^{-8}$

5 DADOS REAIS

A modelagem dos dados financeiros iniciou com o cálculo do retorno simples de dez ações escolhidas aleatoriamente, que compõem o S&P500. Ao realizar a combinação dos dados disponíveis entre as ações, utilizou-se somente dados entre o período de 1992 a 2015, apesar da amostra inicial dispor de dados do S&P500 de 1985 a 2015. As dez ações selecionadas aleatoriamente constam no Quadro 5.1.

Símbolo	Nome	Setor
AAPL	Apple	Tecnologia da informação
XOM	Exxon Mobil	Energia
IBM	International Bus. Machines	Tecnologia da informação
MSFT	Microsoft Corp	Tecnologia da informação
GE	General Electric	Indústria
JNJ	Johnson & Johnson	Assistência médica
WMT	Wal-Mart Stores	Bens de consumo básico
CVX	Chevron Corp	Energia
PG	Procter & Gamble	Bens de consumo básico
WFC	Wells Fargo & Company	Apoio Financeiro

Quadro 5.1: Dez ações que constituíram o portfólio

Statman (1987) propôs que o número ideal de ações para formação de um portfólio seria 30. No entanto, posteriores trabalhos criticaram esse valor e propuseram o uso de até 50 ações. Por não haver um consenso na literatura acerca do número ideal de ações que devem compor um portfólio e por esse estudo partir das 500 ações do S&P500, definiu-se o uso de 10 ativos.

Essa amostra foi dividida em 80% para estimação e 20% para validação. Os dados de estimação foram utilizados para encontrar as *bandwidths ótimas* para cada par de retornos. Para

tanto, utilizou-se o método de máxima verossimilhança juntamente com o algoritmo genético, pois os modelos de escalonamento e visual não apresentaram resultados positivos.

O algoritmo genético foi escolhido por ser uma técnica capaz de avaliar os componentes pertencente a um espaço de busca, composto por todas as possíveis soluções de um problema. Por operar em paralelo, esse algoritmo consegue realizar uma busca adequada em diversas regiões, procurando a solução ótima em níveis globais. No presente estudo a técnica foi utilizada com objetivo de encontrar o argumento máximo da *bandwidth* que maximiza a verossimilhança.

A título de ilustração, a Figura 5.1 apresenta os máximos valores da verossimilhança do par de retornos dos ativos Apple e Exxon Mobil no período de 1992.

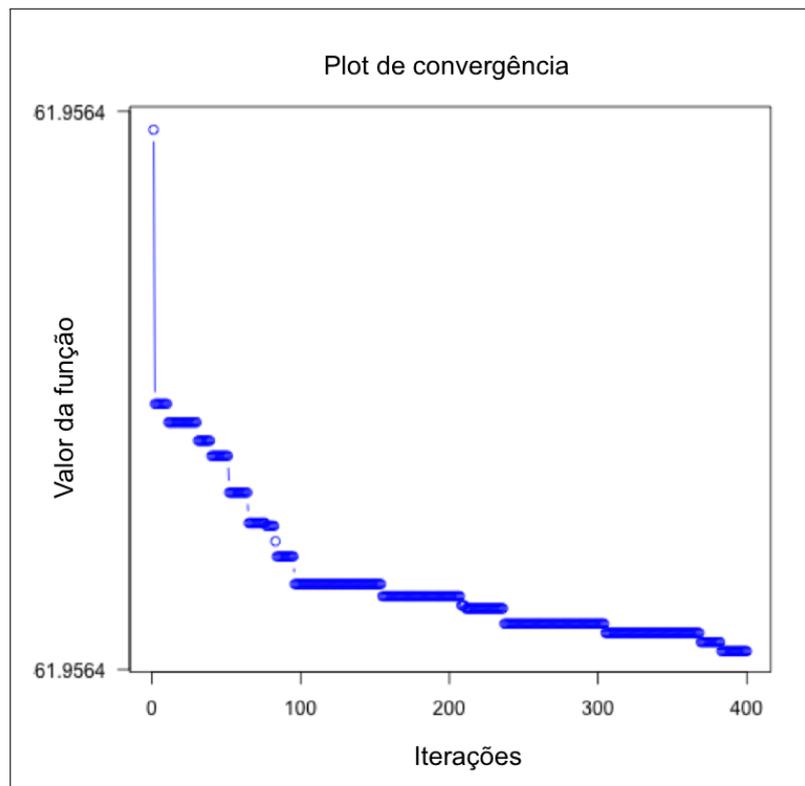


Figura 5.1: Máximos valores da verossimilhança do par de retornos dos ativos Apple e Exxon Mobil no período de 1992.

O resultado das *bandwidths ótimas*, que apresentaram máxima verossimilhança de cada par de ativo para cada ano, encontrado pelo algoritmo genético juntamente com a máxima verossimilhança, foi incorporado ao modelo de correlação local Gaussiana que, posteriormente, foi comparado ao modelo clássico de seleção de portfólio, utilizando os dados de validação.

Além do uso do *bootstrap* tradicional para medir a confiabilidade do método, também foi utilizado o *block bootstrap*. Há um fato estilizado em finanças de que o retorno é não correlacionado linearmente, ou seja, existe uma dependência mas ela não é linear. O *block bootstrap*

é utilizado para tentar reproduzir a dependência não linear dos dados no tempo, porque eles são não linearmente correlacionados. A análise é feita mediante a escolha de blocos na série que se modificam no decorrer do tempo. Por manter a não linearidade nos blocos, o modelo é considerado mais conservador.

A Figura 5.2 trata de forma resumida do processo da metodologia desenvolvida com os dados reais.

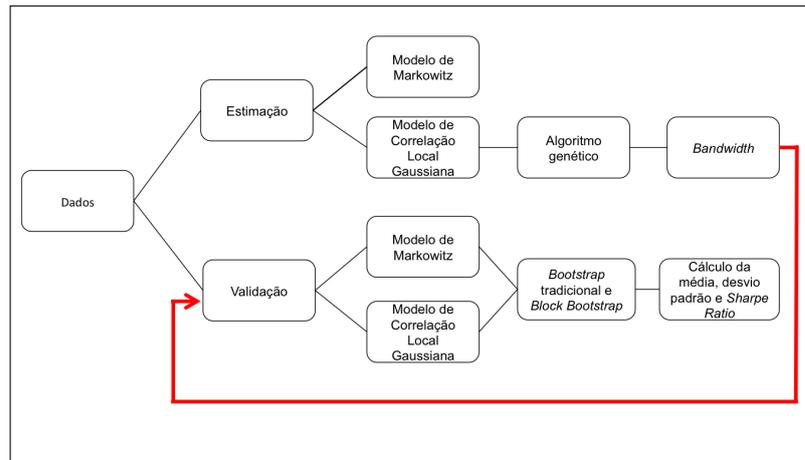


Figura 5.2: Metodologia elaborada com os dados reais.

As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram os resultados obtidos com a aplicação do retorno simples em dez ações que compõem o S&P500 de 1992 a 2015. A primeira coluna relata cada um dos anos em análise, a segunda nomeia três medidas: média, desvio padrão e *Sharpe ratio*. A terceira e a quarta apresentam os resultados encontrados utilizando o *bootstrap* tradicional no modelo de Markowitz (1952) e no modelo de correlação local Gaussiana, respectivamente. A quinta e a sexta, os resultados obtidos utilizando o *block bootstrap* no modelo de Markowitz (1952) e no modelo de correlação local Gaussiana, respectivamente. O melhor resultado para cada ano está destacado em negrito.

Tabela 5.1: Resultados dos portfólios utilizando os dados do S&P500 de 1992 a 2001

Ano	Medida	Markowitz Bootstrap	LocalGauss Bootstrap	Markowitz Block Bootstrap	LocalGauss Block Bootstrap
1992	Mean Ret	0.000907498	0.000867490	0.001098455	0.000961374
	SD Ret	0.000768712	0.000386867	0.000772754	0.000374888
	Sharpe Ratio	1.180544000	2.242349000	1.421481000	2.564428000
1993	Mean Ret	0.000483288	0.000485035	0.000656159	0.000545533
	SD Ret	0.000868827	0.000334130	0.000862361	0.000862361
	Sharpe Ratio	0.556252900	1.451634000	0.760887600	1.625596000
1994	Mean Ret	0.000587121	0.000539430	0.000678201	0.000539073
	SD Ret	0.000794694	0.000352459	0.000775731	0.000426149
	Sharpe Ratio	0.738801400	1.530475000	0.874273600	1.264988000
1995	Mean Ret	0.000805062	0.000773845	0.000798852	0.000719457
	SD Ret	0.001017196	0.000265638	0.001083079	0.000278881
	Sharpe Ratio	0.791452700	2.913156000	0.737574700	2.579802000
1996	Mean Ret	0.001368302	0.001593074	0.001592398	0.001681531
	SD Ret	0.001025633	0.000832247	0.001110508	0.000830326
	Sharpe Ratio	1.334104000	1.914185000	1.433937000	2.025147000
1997	Mean Ret	-0.000746826	-0.000915370	-0.001112484	-0.000950488
	SD Ret	0.002517309	0.004331611	0.002659241	0.001196402
	Sharpe Ratio	-0.296676400	-0.211323200	-0.418346200	-0.794455600
1998	Mean Ret	0.001792596	0.001948921	0.002008226	0.001976340
	SD Ret	0.001643771	0.000963158	0.001591930	0.000541408
	Sharpe Ratio	1.090539000	2.023468000	1.261504000	3.650372000
1999	Mean Ret	0.001481015	0.001672394	0.001625389	0.001677523
	SD Ret	0.001255629	0.001103669	0.001224229	0.000538308
	Sharpe Ratio	1.179500000	1.515304000	1.327684000	3.116286000
2000	Mean Ret	0.001273851	0.001112645	0.001474324	0.001063230
	SD Ret	0.001092762	0.000452578	0.000993363	0.000460111
	Sharpe Ratio	1.165716000	2.458459000	1.484175000	2.310814000
2001	Mean Ret	0.001503677	0.001580944	0.001470318	0.001552154
	SD Ret	0.000933669	0.000312569	0.000842366	0.000420527
	Sharpe Ratio	1.610504000	5.057899000	1.745461000	3.690972000
2002	Mean Ret	-0.000174157	0.000020600	-0.000238686	-0.000473128
	SD Ret	0.001362568	0.012126490	0.001235970	0.013420570
	Sharpe Ratio	-0.127815200	0.001697566	-0.193116000	-0.035253960
2003	Mean Ret	0.001392043	0.001410962	0.001607427	0.001411491
	SD Ret	0.000680723	0.002453542	0.000615699	0.001293138
	Sharpe Ratio	2.044950000	0.575071200	2.610736000	1.091524000

Tabela 5.2: Resultados dos portfólios utilizando os dados do S&P500 de 1992 a 2001

Year	Measure	Markowitz Bootstrap	LocalGauss Bootstrap	Markowitz Block Bootstrap	LocalGauss Block Bootstrap
2004	Mean Ret	0.000907498	0.000867490	0.001098455	0.000961374
	SD Ret	0.000996846	0.005390304	0.000944235	0.001378610
	Sharpe Ratio	1.716124000	0.325224900	2.051440000	1.215426000
2005	Mean Ret	0.000385029	0.000634287	0.000349291	0.000715468
	SD Ret	0.000884376	0.000516759	0.000974078	0.002578946
	Sharpe Ratio	0.435367800	1.227433000	0.358585900	0.277426600
2006	Mean Ret	0.000799830	0.000858219	0.000746066	0.000853902
	SD Ret	0.000648078	0.000738692	0.000664446	0.001448301
	Sharpe Ratio	1.234157000	1.161808000	1.122839000	0.589588700
2007	Mean Ret	0.000588115	0.001103106	0.000852402	0.000982502
	SD Ret	0.001246380	0.023168440	0.001409581	0.011268490
	Sharpe Ratio	0.471858000	0.047612460	0.604720200	0.087190200
2008	Mean Ret	-0.001700935	-0.001253349	-0.002525875	-0.001580496
	SD Ret	0.002954486	0.001392113	0.002666296	0.001208705
	Sharpe Ratio	-0.575712700	-0.900321200	-0.947334800	-1.307595000
2009	Mean Ret	0.001819424	0.001779199	0.001746469	0.001800669
	SD Ret	0.000869332	0.000646836	0.000851325	0.001823733
	Sharpe Ratio	2.092898000	2.750619000	2.051471000	0.987353100
2010	Mean Ret	-0.000420159	-0.000429189	-0.000638842	-0.000580791
	SD Ret	0.000887148	0.000677458	0.000916735	0.000735569
	Sharpe Ratio	-0.473606900	-0.633528200	-0.696866600	-0.789580500
2011	Mean Ret	0.000451417	0.000574402	0.000572898	0.000530555
	SD Ret	0.001038925	0.000767308	0.001076404	0.000324051
	Sharpe Ratio	0.434503800	0.748593500	0.532233000	1.637257000
2012	Mean Ret	0.000659294	0.000782940	0.000365771	0.000653001
	SD Ret	0.000872726	0.002691390	0.000785249	0.000333392
	Sharpe Ratio	0.755442000	0.290905200	0.465802900	1.958660000
2013	Mean Ret	0.000753104	0.000802345	0.000885313	0.000894582
	SD Ret	0.000914671	0.000463277	0.000826455	0.000548510
	Sharpe Ratio	0.823360100	1.731891000	1.071218000	1.630932000
2014	Mean Ret	0.001825718	0.001368265	0.002019571	0.001377945
	SD Ret	0.001029947	0.000104310	0.001095247	0.000099383
	Sharpe Ratio	1.772633000	13.117250000	1.843941000	13.865040000
2015	Mean Ret	-0.001938431	-0.002800644	-0.001539306	-0.002344922
	SD Ret	0.002796300	0.033507100	0.002865240	0.038364460
	Sharpe Ratio	-0.693213000	-0.083583620	-0.537234400	-0.061122260

Outra forma de visualização dos resultados está apresentada nas Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6. Nelas é possível obter uma análise das médias e dos desvios padrão dos diferentes métodos por ano.

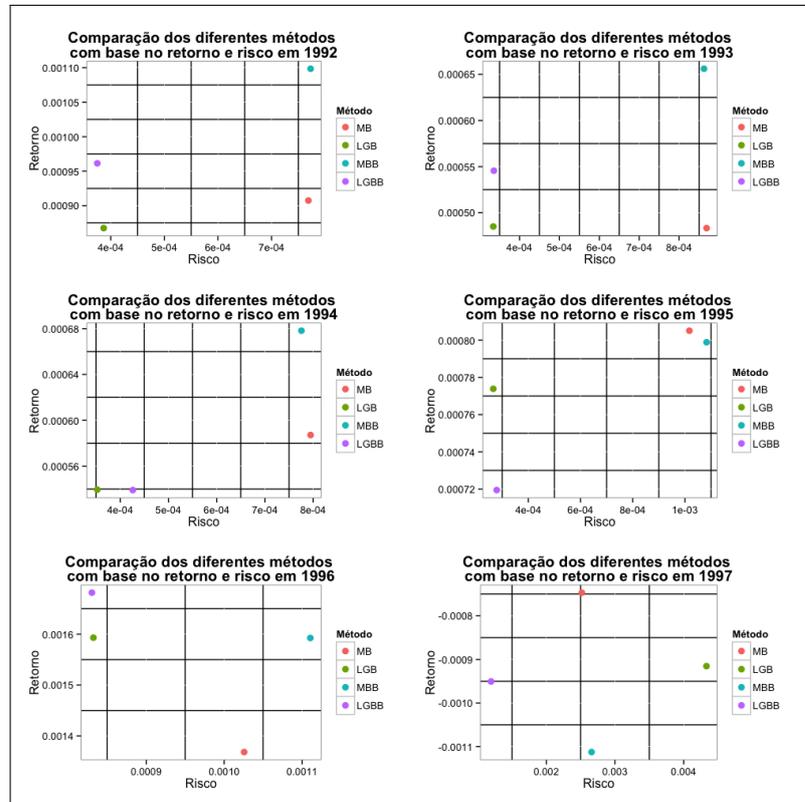


Figura 5.3: Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 1992 a 1997.

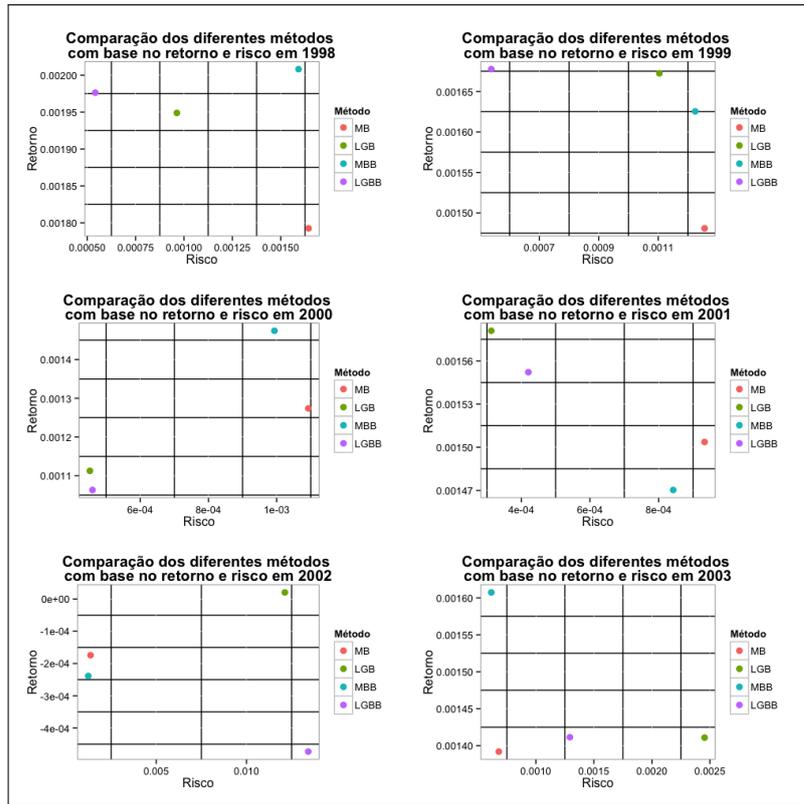


Figura 5.4: Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 1998 a 2003.

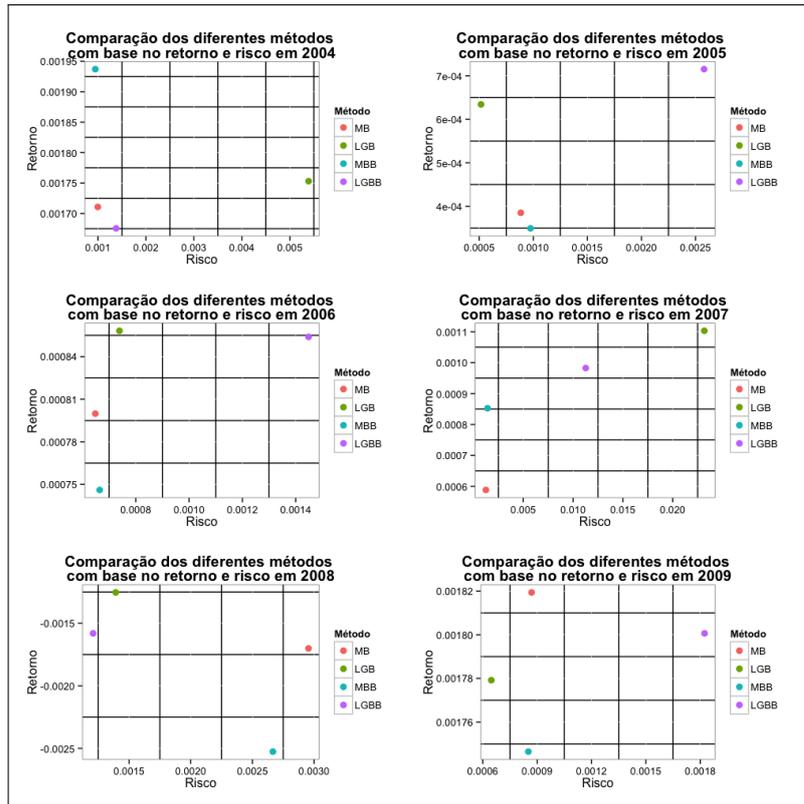


Figura 5.5: Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 2004 a 2009.

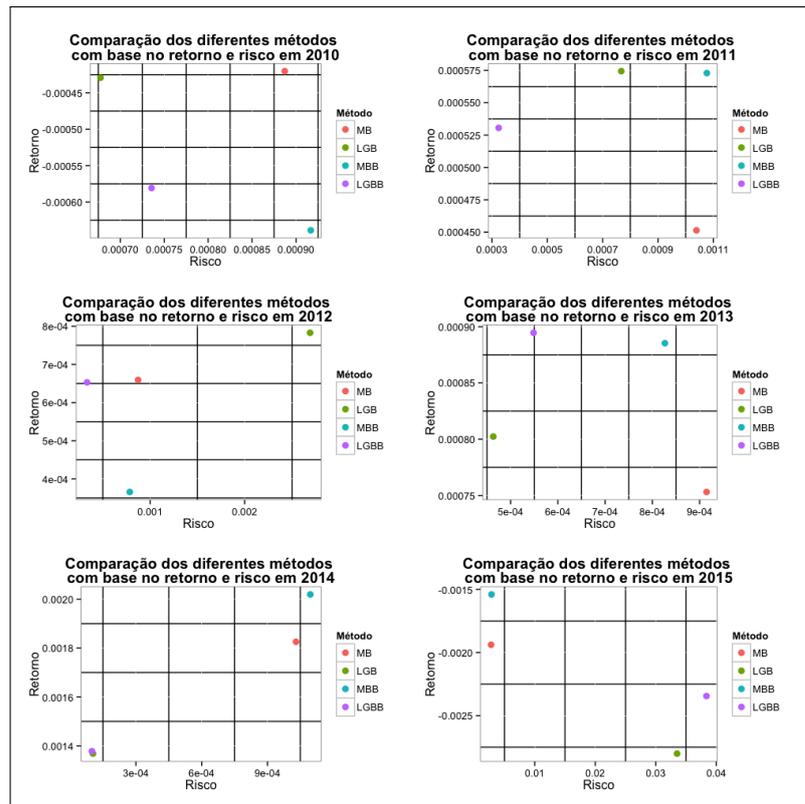


Figura 5.6: Comparação dos diferentes métodos com base no retorno e no risco de 2010 a 2015.

A análise dos resultados acima mostra que o método de correlação local Gaussiana obteve resultado positivo na seleção do portfólio *ótimo*: em 63% dos casos utilizando o *block bootstrap* e em 71% dos casos com o uso do *bootstrap* tradicional. Por ter apresentado maior *Sharpe ratio* o modelo gerou um retorno de risco ajustado mais atraente.

Em outras palavras, obtém-se um maior retorno do portfólio comparado a sua variância a medida que o índice de Sharpe aumenta. No entanto, ao combinar um alto retorno com um baixo índice de Sharpe implicaria que os retornos foram alcançados com alto risco, o que poderia indicar volatilidade dos retornos no futuro. Deve-se ressaltar que performances passadas não são capazes de garantir o que ocorrerá no futuro assim como que as correlações entre ativos podem sofrer rápidas mudanças.

No entanto, o modelo que utiliza a correlação local Gaussiana possivelmente não superou o de Markowitz (1952) em 1997 devido à crise financeira Asiática, no período de 2003 a 2010 devido à crise imobiliária e ao *Flash Crash* em 2010. Os dados foram divididos em 80% para estimação e 20% para validação. Como essas crises ocasionaram uma queda no mercado, especialmente no final do ano, a *Sharpe ratio* da correlação local Gaussiana foi menor. No mercado financeiro é comum a ocorrência de volatilidade, no entanto, volatilidade extrema é

algo indesejável.

A Figura 5.7 apresenta o resultado encontrado na formação de portfólio utilizando a correlação local Gaussiana no ano de 1996.

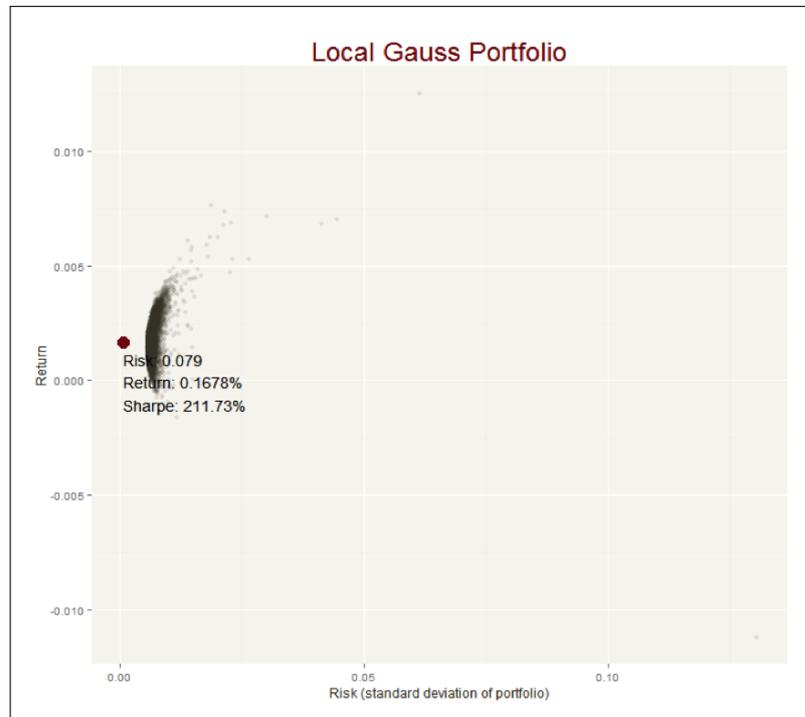


Figura 5.7: Resultado do uso da correlação local Gaussiana na formação de portfólio no ano de 1996

6 CONCLUSÃO

Markowitz (1952) sugeriu em seu artigo que, dado o número fixo de ativos e a correlação entre os ativos igual a zero, o investidor deveria diversificar entre os ativos de acordo com o seu interesse. No entanto, Casella e Berger (2002) mostraram que correlação igual a zero não implica necessariamente em independência. Assim, não seria justo assumir a inexistência de relação entre esses ativos dada a correlação igual a zero.

Tjøstheim e Hufthammer (2013) mostraram a visão comum existente entre analistas financeiros e econométricos no sentido de que a correlação entre objetos financeiros torna-se mais forte à medida da decadência do mercado. Além disso, tal correlação adquire valor próximo a um com a quebra de mercado, resultando na destruição do benefício da diversificação. Assim, observaram a existência de dependência assimétrica entre retornos financeiros.

A fim de estudar tal assimetria e superar tais limitações, o modelo de correlação local Gaussiana proposto por Tjøstheim e Hufthammer (2013) apresenta nova medida de dependência local. De acordo com os autores, a distribuição Gaussiana proporciona boa aproximação em cada ponto da distribuição do retorno. Em outras palavras, dado uma distribuição arbitrária a correlação local Gaussiana buscará encontrar a correlação através do ajuste de uma distribuição normal no local. A correlação local em uma vizinhança é considerada como a correlação da distribuição aproximadamente Gaussiana.

Ademais, a aplicação do método da correlação local Gaussiana apresenta as seguintes vantagens: não possui o problema de viés da correlação condicional e é capaz de detectar, em estruturas de dependência, mudanças complexas ou não lineares, que poderiam ser ocultadas anteriormente pela correlação global. Nesse sentido, o método proporciona melhor entendimento acerca da dependência de mercados (STØVE; TJØSTHEIM; HUFTHAMMER, 2014).

Tjøstheim e Hufthammer (2013) apontam que tal ferramenta seria útil no problema de alocação de portfólio clássico. No entanto, por ser um modelo desenvolvido recentemente não existe ainda uma aplicação neste sentido.

Como inovação, o presente trabalho trouxe ao modelo de seleção de portfólio a incorpora-

ção da não linearidade dos retornos e da dinamicidade encontrada na relação do retorno dos ativos no tempo por meio do uso da técnica da correlação local Gaussiana.

A estimação do portfólio *ótimo* utilizando o modelo proposto por Markowitz (1952) e a correlação local Gaussiana no grupo de ações que compõem o S&P500 de 1992 a 2015 possibilitou a obtenção de uma performance superior em 63% dos casos utilizando o *block bootstrap* e em 71% dos casos utilizando o *bootstrap* tradicional.

Tal performance possibilita a administradores, financistas e empresas realizarem análise de investimento mais precisa. Mais informações relacionadas ao detalhamento da matriz de variância e covariâncias e do princípio da diversificação foram incorporadas ao processo decisório, possibilitando, assim, nova maneira de formação do portfólio *ótimo* de cada investidor.

Além do mais, empresas podem utilizar o modelo para analisar sua performance de forma mais detalhada e, inclusive, desenvolver estratégias para incrementar suas performances no mercado financeiro.

Ou seja, o investidor pode tomar melhores decisões, negociar contratos justos, criar estimativas e, em consequência, planos mais realistas, permitindo que os projetos atendam às previsões da melhor maneira possível.

O modelo também permitirá balancear o risco e o retorno do portfólio e gerenciá-los. Ou seja, o risco pode ser compartilhado e balanceado como forma de atenuá-lo, permitindo aos gestores adotar decisões estratégicas mais adequadas. Uma gestão de portfólio eficiente alinha os objetivos estratégicos aos investimentos da organização.

No caso do presente estudo, foram utilizados 80% dos dados de um ano para estimação e os 20% restantes para validação. No entanto, o mercado sofre diversas alterações nos últimos meses do ano, como o fechamento do balanço de diversas empresas e o incremento na volatilidade dos ativos. Assim, é recomendada a aplicação de todos os dados de um ano para estimação e os primeiros três meses do próximo ano para validação.

Ao invés de estimar a matriz de variâncias e covariâncias somente com dados passados, sugere-se também a incorporação de outros mecanismos e variáveis que, de alguma forma, a afetam ao longo do tempo. A matriz é influenciada pelo contexto macroeconômico, pelo período de tempo, e por outras diversas relações ocultas. Capaz de modelar essas relações e prever a melhor matriz de variâncias e covariâncias no futuro, as Máquinas de Suporte Vetorial poderiam ser utilizadas na formação de portfólios em vistas a obtenção de retorno superior ao do benchmark do mercado.

Concluindo o trabalho de forma sintética, o Quadro 6.1 traz uma correlação entre os objeti-

vos específicos propostos no início e os resultados obtidos na pesquisa desenvolvida.

Objetivos Específicos	Resultados
<p>Simular retornos de diferentes ativos com diferentes relações de não linearidades que formarão um portfólio. Utilizar os retornos simulados para calcular as <i>bandwidths ótimas</i> para cada par de retorno, com 80% dos retornos disponíveis.</p>	<p>Foram simulados dez retornos, dos quais seis compuseram o portfólio. O cálculo das <i>bandwidths ótimas</i> para cada par de retorno, com 80% dos retornos disponíveis foi feito por meio da técnica visual.</p>
<p>Calcular a média e o desvio padrão do portfólio por meio do modelo clássico de seleção de portfólio e do modelo de Correlação Local Gaussiana utilizando 20% dos retornos do conjunto de dados.</p>	<p>O modelo clássico de seleção de portfólio obteve média igual a 0.2636236 e desvio padrão igual a 0.001708426. Já o modelo de Correlação Local Gaussiana obteve média igual a 0.4881183 e desvio padrão $< 10^{-8}$.</p>
<p>Encontrar as <i>bandwidths ótimas</i> para cada par de ações, a partir de 80% dos retornos estimados que compõem o portfólio construído a partir dos dados disponíveis no S&P500 de 1985 a 2015.</p>	<p>As <i>bandwidths ótimas</i> para cada par de ações a partir de 80% dos retornos estimados foram encontradas utilizando o método de máxima verossimilhança juntamente com o algoritmo genético.</p>
<p>Construir (ou estimar) o portfólio <i>ótimo</i> segundo critérios de Markowitz (1952) por meio da Correlação Local Gaussiana, incorporando os pares de <i>bandwidths ótimas</i> com 20% dos retornos estimados.</p>	<p>Os portfólios foram estimados utilizando o programa estatístico <i>R</i>.</p>
<p>Comparar o método proposto com o modelo clássico de seleção de portfólio desenvolvido por Markowitz (1952), mediante a utilização da Correlação Local Gaussiana (2013) no grupo de ações que compõem o S&P500 - 1985 a 2015 por meio do índice de Sharpe.</p>	<p>O método de correlação local Gaussiana obteve melhor performance na seleção do portfólio <i>ótimo</i>: em 63% dos casos utilizando o <i>block bootstrap</i> e em 71% dos casos com o uso do <i>bootstrap</i> tradicional.</p>

Quadro 6.1: Objetivos específicos propostos e resultados obtidos

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AAKER, D. A.; KUMAR, V.; DAY, G. S.; MARCONDES, R. C. *Pesquisa de marketing*. [S.l.]: Atlas, 2004.
- AMIRI, M.; EKHTIARI, M.; YAZDANI, M. Nadir compromise programming: A model for optimization of multi-objective portfolio problem. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 6, p. 7222–7226, 2011.
- ANAGNOSTOPOULOS, K.; MAMANIS, G. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 7, p. 1285–1297, 2010.
- ANDRECUT, M. Portfolio optimization in r. 07 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1307.0450>>.
- ANG, A.; CHEN, J. Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 63, n. 3, p. 443–494, 2002.
- ARRATIA, A. *Computational Finance*. [S.l.]: Springer, 2014.
- BALL, C. A.; TOROUS, W. N. Stochastic correlation across international stock markets. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 373–388, 2000.
- BELL, D. E.; RAIFFA, H. *Decision making: Descriptive, normative, and prescriptive interactions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988.
- BERENTSEN, G. D.; KLEPPE, T. S.; TJØSTHEIM, D. Introducing localgauss, an r package for estimating and visualizing local gaussian correlation. *Journal of Statistical Software*, v. 56, n. 12, p. 1–18, 2014.
- BERENTSEN, G. D.; STØVE, B.; TJØSTHEIM, D.; NORDBØ, T. Recognizing and visualizing copulas: an approach using local gaussian approximation. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 57, p. 90–103, 2014.
- BERENTSEN, G. D.; TJØSTHEIM, D. Recognizing and visualizing departures from independence in bivariate data using local gaussian correlation. *Statistics and Computing*, Springer, v. 24, n. 5, p. 785–801, 2014.
- BOURI, A.; MARTEL, J.-M.; CHABCHOUB, H. A multi-criterion approach for selecting attractive portfolio. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 11, n. 4-5, p. 269–277, 2002.
- BRENNAN, T. J.; LO, A. W.; SLOAN, M. Reply to “(im) possible frontiers: A comment”. *Critical Finance Review*, Now Publishers, Inc., v. 4, n. 1, p. 157–171, 2015.

- BURASCHI, A.; PORCHIA, P.; TROJANI, F. Correlation risk and optimal portfolio choice. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 65, n. 1, p. 393–420, 2010.
- CAMPBELL, J. Y.; COCHRANE, J. H. By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *The Journal of Political Economy*, v. 107, n. 2, p. 205–251, 1999.
- CAMPBELL, J. Y.; LETTAU, M.; MALKIEL, B. G.; XU, Y. Have individual stocks become more volatile? an empirical exploration of idiosyncratic risk. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 56, n. 1, p. 1–43, 2001.
- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.-C.; MACKINLAY, A. C. et al. *The econometrics of financial markets*. [S.l.]: princeton University press Princeton, NJ, 1997.
- CAMPBELL, R. A.; FORBES, C. S.; KOEDIJK, K. G.; KOFMAN, P. Increasing correlations or just fat tails? *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 15, n. 2, p. 287–309, 2008.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002.
- CHANG, T.-J.; MEADE, N.; BEASLEY, J. E.; SHARAIHA, Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 27, n. 13, p. 1271–1302, 2000.
- CHOLLETE, L.; HEINEN, A.; VALDESOGO, A. Modeling international financial returns with a multivariate regime-switching copula. *Journal of financial econometrics*, Oxford Univ Press, p. nbp014, 2009.
- CLOQUETTE, J.; GÉRARD, M.; HADHRI, M. et al. An empirical analysis of belgian daily returns using garch models. *Cahiers économiques de Bruxelles*, v. 418, p. 513–535, 1995.
- COLLINS, J.; HUSSEY, R. *Pesquisa em Administração*. [S.l.]: São Paulo, 2005.
- EFRON, B. *Bootstrap methods: another look at the jackknife the annals of statistics*. [S.l.]: The Annals of Statistics, 1979.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. An introduction to the bootstrap, monographs on statistics and applied probability, vol. 57. *New York and London: Chapman and Hall/CRC*, 1993.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Modern portfolio theory, 1950 to date. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 21, n. 11, p. 1743–1759, 1997.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. *Modern portfolio theory and investment analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, p. 176–223, 2002.
- FABOZZI, F. J.; KOLM, P. N.; PACHAMANOVA, D.; FOCARDI, S. M. *Robust portfolio optimization and management*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- FAMA, E. F. Forward and spot exchange rates. *Journal of monetary economics*, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 319–338, 1984.

- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. O modelo de precificação de ativos de capital: teoria e evidências. *Revista de Administração de Empresas, SciELO Brasil*, v. 47, n. 2, p. 103–118, 2007.
- FIELDSEND, J. E.; MATATKO, J.; PENG, M. Cardinality constrained portfolio optimisation. In: *Intelligent Data Engineering and Automated Learning–IDEAL 2004*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 788–793.
- GARCIA, R.; TSAFACK, G. Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets. *Journal of Banking & Finance, Elsevier*, v. 35, n. 8, p. 1954–1970, 2011.
- GUARASCI, D. *Traditional Long-Only vs. Alternative Investments*. [S.l.]: Sherpa Asset Management, 2010.
- GUIISO, L.; SAPIENZA, P.; ZINGALES, L. *Time varying risk aversion*. [S.l.], 2013.
- HAO, C.; WANG, J.; XU, W.; XIAO, Y. Prediction-based portfolio selection model using support vector machines. **Business Intelligence and Financial Engineering (BIFE), 2013 Sixth International Conference on**. [S.l.], 2013. p. 567–571.
- HICKS, J. R. A suggestion for simplifying the theory of money. *Economica*, v. 2, n. 5, p. 1–19, 1935.
- HJORT, N. L.; JONES, M. Locally parametric nonparametric density estimation. *The Annals of Statistics*, p. 1619–1647, 1996.
- HONG, Y.; TU, J.; ZHOU, G. Asymmetries in stock returns: statistical tests and economic evaluation. *Review of Financial Studies, Soc Financial Studies*, v. 20, n. 5, p. 1547–1581, 2007.
- HUANG, S.-C.; WU, T.-K. Integrating recurrent som with wavelet-based kernel partial least square regressions for financial forecasting. *Expert Systems with Applications, Elsevier*, v. 37, n. 8, p. 5698–5705, 2010.
- HUDSON, R. S.; GREGORIOU, A. Calculating and comparing security returns is harder than you think: A comparison between logarithmic and simple returns. *International Review of Financial Analysis, Elsevier*, v. 38, p. 151–162, 2015.
- INCI, A. C.; LI, H.-C.; MCCARTHY, J. Financial contagion: A local correlation analysis. *Research in International Business and Finance, Elsevier*, v. 25, n. 1, p. 11–25, 2011.
- KHOURY, N.; MARTEL, J.-M.; VEILLEUX, M. Méthode multicritère de sélection de portefeuilles indiciels internationaux. *L'Actualité économique, HEC Montréal*, v. 69, n. 1, p. 171–190, 1993.
- KONNO, H.; WAKI, H.; YUUKI, A. Portfolio optimization under lower partial risk measures. *Asia-Pacific Financial Markets, Springer*, v. 9, n. 2, p. 127–140, 2002.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. Fundamentos da metodologia científica. In: *Fundamentos da metodologia científica*. [S.l.]: Atlas, 2010.
- LEAVENS, D. H. Diversification of investments. *Trusts and Estates*, v. 80, n. 5, p. 469–473, 1945.
- LEROY-BEAULIEU, P. *L'art de placer et gérer sa fortune*. [S.l.]: Ch. Delagrave, 1908.

- LEVY, H. Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis. *Management Science*, INFORMS, v. 38, n. 4, p. 555–593, 1992.
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, p. 13–37, 1965.
- LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. *A non-random walk down Wall Street*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002.
- LURA, A. The norwegian stock market:-a local gaussian perspective. The University of Bergen, 2013.
- MANDELBROT, B. B. *The variation of certain speculative prices*. [S.l.]: Springer, 1997.
- MARASOVIĆ, B.; BABIĆ, Z. Two-step multi-criteria model for selecting optimal portfolio. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 134, n. 1, p. 58–66, 2011.
- MARI, D. D.; KOTZ, S. *Correlation and dependence*. [S.l.]: World Scientific, 2001.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. [S.l.]: J. Wiley, 1959.
- MARKOWITZ, H. M. The early history of portfolio theory: 1600-1960. *Financial Analysts Journal*, CFA Institute, v. 55, n. 4, p. 5–16, 1999.
- MARKOWITZ, H. M. Efficient portfolios, sparse matrices, and entities: a retrospective. *Operations Research*, INFORMS, v. 50, n. 1, p. 154–160, 2002.
- MEUCCI, A. Quant nugget 2: Linear vs. compounded returns—common pitfalls in portfolio management. *GARP Risk Professional*, p. 49–51, 2010.
- MITRA, G.; KYRIAKIS, T.; LUCAS, C.; PIRBHAI, M. A review of portfolio planning: Models and systems. The Centre for the Analysis of Risk and Optimisation Modelling Applications (CARISMA), Brunel University, 2003.
- MOSKOWITZ, T. J. An analysis of covariance risk and pricing anomalies. *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, v. 16, n. 2, p. 417–457, 2003.
- MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the econometric society*, p. 768–783, 1966.
- NAWROCKI, D. N. A brief history of downside risk measures. *The Journal of Investing*, Institutional Investor Journals, v. 8, n. 3, p. 9–25, 1999.
- NEYMARCK, A. *Que doit-on faire de son argent?* [S.l.]: Marchal et Godde, 1913.
- OGRYCZAK, W. Multiple criteria linear programming model for portfolio selection. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 97, n. 1-4, p. 143–162, 2000.

- OKIMOTO, T. New evidence of asymmetric dependence structures in international equity markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge Univ Press, v. 43, n. 03, p. 787–815, 2008.
- PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, Oxford Univ Press, v. 2, n. 1, p. 130–168, 2004.
- RIETZ, H. On functional relations for which the coefficient of correlation is zero. *Quarterly publications of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 16, n. 127, p. 472–476, 1919.
- RIZZO, M. L. *Statistical computing with R*. [S.l.]: CRC Press, 2007.
- RODRIGUEZ, J. C. Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 401–423, 2007.
- ROESCH, S. M. A. et al. Projetos de estágio e de pesquisa em administração. *São Paulo: Atlas*, v. 3, 2005.
- ROY, A. D. Safety first and the holding of assets. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 431–449, 1952.
- RUBINSTEIN, M. Markowitz's "portfolio selection": A fifty-year retrospective. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002.
- SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. Metodología de la investigación. *Mc graw Hill*, v. 3, 1996.
- SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, INFORMS, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- SILVA, A. H. C.; LACERDA, W. S. Intelligent system for portfolio selection. *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, IEEE, v. 12, n. 8, p. 1545–1552, 2014.
- SILVAPULLE, P.; GRANGER, C. W. Large returns, conditional correlation and portfolio diversification: a value-at-risk approach. Taylor & Francis, 2001.
- SPRONK, J.; HALLERBACH, W. Financial modelling: Where to go? with an illustration for portfolio management. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 113–125, 1997.
- STATMAN, M. How many stocks make a diversified portfolio? *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge Univ Press, v. 22, n. 03, p. 353–363, 1987.
- STEUER, R. E.; QI, Y.; HIRSCHBERGER, M. Suitable-portfolio investors, nondominated frontier sensitivity, and the effect of multiple objectives on standard portfolio selection. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 152, n. 1, p. 297–317, 2007.
- STEUER, R. E.; QI, Y.; HIRSCHBERGER, M. Portfolio selection in the presence of multiple criteria. In: *Handbook of financial engineering*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 3–24.

STØVE, B.; TJØSTHEIM, D. Measuring asymmetries in financial returns: An empirical investigation using local gaussian correlation. SNF, 2013.

STØVE, B.; TJØSTHEIM, D.; HUFTHAMMER, K. O. Using local gaussian correlation in a nonlinear re-examination of financial contagion. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 25, p. 62–82, 2014.

TJØSTHEIM, D.; HUFTHAMMER, K. O. Local gaussian correlation: a new measure of dependence. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 172, n. 1, p. 33–48, 2013.

WÜRTZ, D.; CHALABI, Y.; CHEN, W.; ELLIS, A. *Portfolio optimization with R/Rmetrics*. [S.l.]: Rmetrics, 2010.

Apêndice I – AUTORES QUE INSPIRARAM MARKOWITZ (1952)

Neste Capítulo, serão abordados alguns dos principais autores mencionados por Markowitz (1999), como inspirações para a criação de seu artigo em 1952. Dentre eles estão Hicks (1935) e Leavens (1945).

Hicks (1935) mostrou que o fator de risco surgia no problema afetando o investimento, quanto ao período esperado ou quanto ao rendimento líquido esperado.

Em outras palavras, o dinheiro possui maior probabilidade de ganho ou perda quando for introduzida uma incerteza acerca da disponibilidade ou não do dinheiro. À medida que aumentar essa incerteza, o investimento será desestimulado. Tendo por princípio que a decisão de manter recursos ocorre sempre em específico período de tempo, a conexão entre renda e demanda por dinheiro deve ser sempre indireta.

Em razão disso, Hicks (1935) tratou de formas de reduzir o dinheiro mantido, gastando-o, emprestando-o ou realizando pagamento de dívida. Esclareceu também ser possível manter o dinheiro por meio da venda de produto ou serviço, de empréstimo e do reembolso de dinheiro.

Para ele, manter o dinheiro é uma forma de obter satisfação futura. Entretanto, há uma questão essencial acerca da preferência de manter dinheiro ao invés de bens de capital. Tendo em vista que bens de capital geram uma taxa de retorno positiva ao contrário do dinheiro, a decisão por manter dinheiro ao invés de emprestá-lo ou pagar antigas dívidas parece ser não rentável quando a taxa de interesse é positiva. Para Hicks (1935), eis o problema principal da Teoria Pura do Dinheiro.

No seu entender, a quantidade de dinheiro que uma pessoa deseja manter depende dos fatores: data em que espera realizar pagamentos no futuro, o custo de investimento e a taxa esperada de retorno do investimento. Para ele tais fatores se relacionam da seguinte forma: quanto mais a frente forem os futuros pagamentos, menor será a taxa de investimento e maior a taxa de retorno esperado no capital investido, sendo menor a demanda por dinheiro.

Em relação aos fatores que influenciam a demanda por dinheiro, Hicks (1935) relaciona: taxa de juros esperada, custo de investimento e período de investimento esperado. Como outros fatores impactantes tem-se que as expectativas das pessoas são sempre cercadas de incertezas.

Já o fator risco é considerado no investimento em razão de como afeta o período esperado ou o rendimento líquido esperado. O problema peculiar do risco foca na consequência de mudança de dispersão. O aumento da incerteza é ocasionado pelo aumento da dispersão.

O efeito do risco, de maneira simples, ocorre quando um aumento no risco de investimento atua como uma queda na taxa esperada do rendimento líquido. Assim, um aumento da incerteza de futuros pagamentos internacionais (*outpayments*) atuará como encurtamento do tempo em que é esperado transcorrer antes de tais pagamentos, e tenderá a aumentar a demanda por dinheiro.

Releva notar que na maioria dos casos, o risco de ter diversos investimentos de alto risco é menor do que o risco de investir a mesma quantidade de capital em única direção. Assim, um indivíduo é mais capaz de ajustar sua situação de risco total da forma que prefere do que investir em um único ativo.

Já pessoas com grande quantidade de capital são capazes de disseminar seus riscos mediante a diversificação. Por investirem muito dinheiro, acabam passando a ideia de menos risco, pois não iriam aplicar tanto dinheiro num investimento ruim.

Resumindo, Hicks (1935) definiu diversificação e considerou um método de média-variância para escolher um portfólio. No entanto, não desenvolveu as implicações da correlação e não considerou o desvio-padrão ou nenhuma outra medida de dispersão como representante do risco na análise, não diferenciou portfólio eficiente de ineficiente, não delineou fronteira eficiente e nem formalizou teorema acerca do efeito de que todos os portfólios eficientes que incluem dinheiro têm a mesma proporção entre ativos arriscados.

Já Leavens (1945) focou seu trabalho nas crenças de diversificação dada a suposição que os riscos são independentes. Markowitz (1999) acredita que Leavens (1945) já havia compreendido intuitivamente a importância do modelo de covariância para o processo de investimento.

Leavens (1945) mencionou a existência do desejo pela diversificação em alguns dos cinquenta livros e artigos sobre investimento que surgiram nos últimos 25 anos. No entanto, não há uma clara explicação das razões desse desejo. A diversificação é tratada de forma geral.

A ideia dessa literatura abarca a diminuição do risco por meio da diversificação. Tendo como base pressupostos gerais, o risco médio não é passível de diminuição. No entanto, é possível

reduzir largamente a disseminação de possíveis perdas e a possibilidade de eliminar totalmente grandes perdas.

No caso em que houver uma ampla gama de opções de investimento com a mesma perspectiva de performance, a melhor solução seria investir em diferentes opções do que em uma única.

O investidor é conhecido como propenso ao risco quando for suscetível a uma grande possibilidade de ganho ou de perda. Ele estará inclinado à investir completamente em uma emissão (*issue*) promissora ou mesmo em uma aleatória.

Ao contrário, um investidor avesso ao risco busca a diversificação com o intuito de se proteger contra grandes perdas e, dessa forma, reduzir simultaneamente a possibilidade de grandes ganhos.

O autor ressalva que não é possível salvaguardar contra fatores não favoráveis no caso de diversificação em companhias de mesma indústria. Nem mesmo indústrias de setores diferentes são capazes de se proteger contra fatores cíclicos, que no caso afetariam todas as indústrias simultaneamente. É necessário que o investidor continue utilizando toda a informação disponível e seja capaz de escolher, através de seu julgamento, quando adquirir ou vender um determinado ativo.

Apêndice II – TEORIA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ (1952)

No artigo que publicou em 1952, Markowitz tratou da existência de duas etapas no processo de seleção de portfólio. A primeira teve início com a observação e a experimentação, e prosseguiu com a crença no desempenho futuro de ativos disponíveis. Já a segunda começou com crenças relevantes sobre performances futuras, e continuou com a escolha de portfólio.

Markowitz (1952) focou o seu trabalho na segunda etapa. Para tanto, avaliou primeiramente a regra em que um investidor maximiza, ou deveria maximizar, retornos com desconto antecipado ou esperado. Todavia, no decorrer do artigo ele rejeitou essa regra tanto como hipótese quanto máxima a guiar o comportamento de um investimento.

Ele examinou também a regra em que o investidor deveria considerar o retorno esperado como algo desejável e a variância como indesejável.

Em relação ao comportamento dos investidores, Nawrocki (1999) apontou a seguinte explicação: os mais ousados tendem a aplicar seus investimentos, principalmente a curto prazo, em ativos com maior taxa de retorno. Já os cautelosos procuram aplicar seus investimentos em ativos que apresentem riscos menores e acumulem um retorno positivo considerável a longo prazo. Nessa linha de pensar, o investidor deveria fazer um *trade-off* entre risco e retorno. E a sua sensibilidade na mudança da riqueza e do risco ficou conhecida como função utilidade.

O tema foi ilustrado por Markowitz (1952) mediante relações geométricas entre crenças e a escolha de portfólios de acordo com a regra dos retornos esperados e da variância dos retornos.

E o modelo que mede o desempenho da carteira por meio do retorno esperado estimado e o risco recorrendo à variância ficou conhecido como média-variância. Nesse modelo os investimentos são diversificados com o intuito de minimizar os riscos assumidos pelo investidor e maximizar os retornos esperados (SILVA; LACERDA, 2014).

Essa regra é utilizada como uma hipótese acerca do comportamento atual e como um máximo para um comportamento recomendado (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2010).

Para desenvolver sua explicação sobre o assunto, Markowitz (1952) tomou por base um modelo estacionário. Ele considerou o fluxo de retornos (r_i) do i -ésimo ativo. Dessa forma, o fluxo de retornos do portfólio como um todo é $R = \sum X_i r_i$, sendo X_i a quantia relativa investida no ativo i .

Existe uma regra na qual o investidor deve diversificar e simultaneamente maximizar o retorno esperado, ou seja, o investidor deve diversificar seus fundos entre todos os ativos que proporcionem máximo retorno esperado. Nessa linha a lei dos grandes números surge como uma forma para garantir que o verdadeiro rendimento do portfólio seja praticamente o mesmo que o rendimento esperado.

No entanto, a aplicação da lei dos grandes números em um portfólio de ativos apresenta algum erro, pois os retornos dos ativos são muito correlacionados de tal forma que a diversificação não é capaz de eliminar toda a variância.

Além disso, o portfólio com mínima variância não é necessariamente o que possui o máximo retorno esperado. Existe uma taxa em que o investidor ganha em retorno esperado assumindo variância, ou reduzindo a variância abre mão do retorno esperado.

O conjunto de combinações eficientes de média-variância pode ser derivada e apresentada ao investidor para decisão sobre a combinação desejada de risco-retorno a partir das estimativas de média, variância e covariâncias de um ativo (MARKOWITZ, 1999).

Em seguida, Markowitz (1952) cuidou da regra da variância dos retornos $E - V$. Por não utilizar demonstrações e provas matemáticas complexas, há menor rigor e problemas de generalização. As principais limitações são: apresenta resultados geometricamente somente para o caso de 3 e 4 ativos, ao invés de derivá-los analiticamente para o caso de n ativos; assume *crenças* da probabilidade estacionária. Há de ser reconhecido, em uma apresentação geral, que a distribuição de probabilidade do rendimento de vários ativos é função do tempo.

Por meio dessa análise geométrica, Markowitz (1952) ilustrou as propriedades do conjunto eficiente, assumindo investimentos não negativos e sujeitos a restrição orçamentária. Segundo ele, o conjunto de portfólios eficientes é uma interpolação linear (*piecewise linear*), e o de combinações eficientes de média-variância é uma interpolação parabólica (*piecewise parabolic*) (MARKOWITZ, 1999).

Com vistas a um melhor entendimento, conceitos e resultados da matemática estatística Markowitz (1952) tratou de alguns conceitos e resultados da matemática estatística, que serão apresentados a seguir.

Inicialmente, tem-se Y como variável aleatória. Para simplificação, considerou-se Y como

tendo um número finito de valores, y_1, y_2, \dots, y_n . A probabilidade de $Y = y_1$ é p_1 , e assim sucessivamente. O valor esperado e a variância de Y são respectivamente:

$$E = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n \quad (\text{II.1})$$

$$V = p_1 (y_1 - E)^2 + p_2 (y_2 - E)^2 + \dots + p_n (y_n - E)^2 \quad (\text{II.2})$$

Dado um número de variáveis aleatórias: R_1, \dots, R_n . Se R é uma soma ponderada de R_i , temos:

$$R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n \quad (\text{II.3})$$

Então R também é uma variável aleatória.

É de substancial importância saber como a uma distribuição de probabilidade de R_1, \dots, R_n é relacionada ao valor esperado e à variância de uma soma ponderada (R).

Para isso, tem-se que o valor esperado de uma soma ponderada é a soma ponderada dos valores esperados, ou seja, $E(R) = a_1 E(R_1) + a_2 E(R_2) + \dots + a_n E(R_n)$.

Define-se a covariância entre R_1 e R_2 como:

$$\sigma_{12} = E\{[R_1 - E(R_1)][R_2 - E(R_2)]\} \quad (\text{II.4})$$

Ou seja, é o valor esperado do desvio de R_1 de sua média multiplicado pelo desvio de R_2 de sua média. A fórmula geral é:

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\} \quad (\text{II.5})$$

O coeficiente de correlação (ρ_{ij}) pode expressar σ_{ij} . A correlação entre R_i e R_j multiplicada pelo desvio padrão de R_i e o desvio padrão de R_j expressa a covariância entre R_i e R_j .

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (\text{II.6})$$

Assim, chega-se à seguinte fórmula:

$$V(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij} \quad (II.7)$$

Define-se as variáveis a seguir como, R_i sendo o retorno do i -ésimo ativo, μ_i o valor esperado de R_i , σ_{ij} a covariância entre R_i e R_j , σ_{ii} a variância de R_i , X_i a porcentagem de bens do investidor que são alocados no i -ésimo ativo. Por fim, o rendimento R do portfólio como um todo é:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i X_i \quad (II.8)$$

Por X_i serem valores em porcentagem, a soma de X_i é igual a 1. Outra restrição utilizada pelo autor é que não foram incluídos valores negativos na análise, ou seja, $X_i \geq 0$ para todos os ativos i .

A soma ponderada de variáveis aleatórias (onde o investidor pode escolher os pesos) resulta no retorno do portfólio como um todo. Tem-se o retorno esperado e a variância do portfólio, respectivamente, como:

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i \quad (II.9)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j \quad (II.10)$$

Para (μ_i, σ_{ij}) fixos, dependendo da escolha de portfólio X_1, X_2, \dots, X_N do investidor, ele pode escolher dentre diferentes combinações de E e V . A Figura II.1 demonstra o conjunto de todas as combinações obtidas (E, V) .

Segundo a regra do E, V , um investidor deveria selecionar o portfólio que aumente a combinação do E, V indicado na Figura II.1 como eficiente. Em outras palavras, aquele com mínimo V para um dado E ou máximo E para um dado V .

Existem técnicas capazes de calcular o conjunto de portfólios eficientes e as combinações (E, V) eficientes associadas a um dado μ_i e σ_{ij} . Tais técnicas não foram apresentadas por Markowitz (1952), mas sim uma ilustração geométrica da natureza da fronteira eficiente para casos em que N (número de ativos disponíveis) é pequeno.

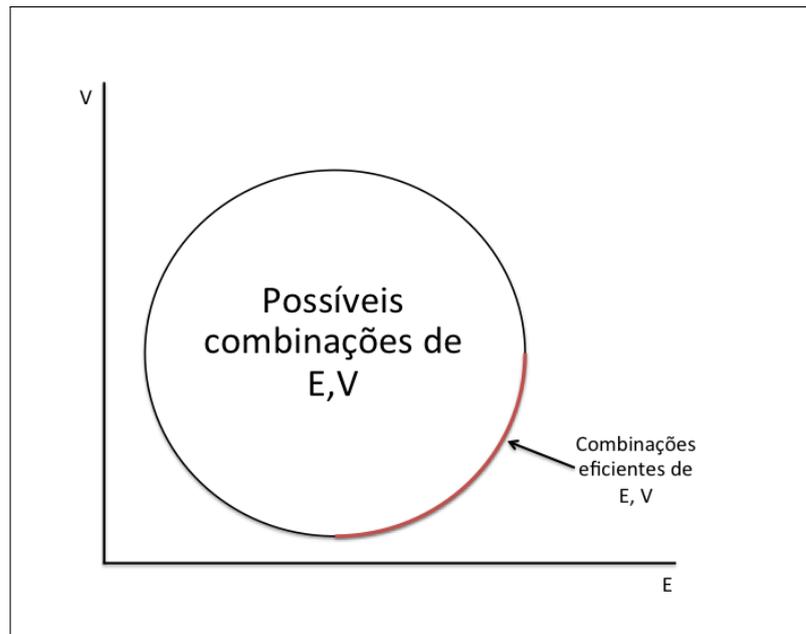


Figura II.1: Conjunto de todas as combinações obtidas (E, V).
Fonte: Markowitz (1952)

A partir da fronteira eficiente o investidor irá escolher o portfólio de sua predileção dependendo das preferências individuais de risco e retorno (ELTON; GRUBER, 1997).

As carteiras presentes na fronteira eficiente possuem, dado um certo nível de risco, o maior retorno ao ser comparada a outras carteiras. O investidor deve escolher o portfólio que, dentre os pertencentes à fronteira eficiente, atenda ao seu perfil. Silva e Lacerda (2014) acrescentam que o retorno esperado e o risco são fortemente relacionados, ou seja, à medida que o risco assumido aumenta, maior será o retorno esperado. Da mesma forma, menor o risco, menor o retorno esperado.

Markowitz (1952) afirma ser necessário satisfazer no mínimo duas condições antes da fronteira eficiente ser algo prático. A primeira é que a máxima do E, V deve ser foco dos investidores. A segunda é que estimativas razoáveis para μ_i e σ_{ij} possam ser encontradas.

Ao trabalhar com três ativos, o modelo de Markowitz (1952) foi reduzido a:

$$E = \sum_{i=1}^3 X_i \sigma_i \quad (\text{II.11})$$

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} X_i X_j \quad (\text{II.12})$$

E as restrições a:

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1 \quad (\text{II.13})$$

$$X_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.14})$$

Ao desenvolver a Equação (II.13), tem-se:

$$X_3 = 1 - X_1 - X_2 \quad (\text{II.15})$$

Em seguida, obtém-se E e V como funções de X_1 e X_2 , ao substituir a Equação (II.15) nas Equações (II.11) e (II.12). Markowitz (1952) argumentou que as fórmulas exatas não seriam apresentadas. Ele simplesmente expôs:

$$E = E(X_1, X_2) \quad (\text{II.16})$$

$$V = V(X_1, X_2) \quad (\text{II.17})$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad 1 - X_1 - X_2 \geq 0 \quad (\text{II.18})$$

Assim, é possível trabalhar com geometria bidimensional ao relacionar as Equações (II.16), (II.17) e (II.18). Ao satisfazer as Equações (II.15) e (II.18), encontram-se os conjuntos de possíveis portfólios. O triângulo \bar{abc} da Figura II.2 apresenta as possíveis combinações de X_1 e X_2 . Por violar a condição $X_1 \geq 0$ nenhum ponto a esquerda do eixo X_2 é considerado. Da mesma forma, ao violar a condição $X_3 = 1 - X_1 - X_2 \geq 0$, pontos acima da linha $1 - X_1 - X_2 = 0$ não são considerados.

Dado um retorno esperado, delimita-se a linha *isomean* a partir do conjunto de pontos (portfólios). Dada variância do retorno, conceitua-se a curva *isovariance* dado conjunto de pontos (portfólios).

É possível encontrar a forma das curvas *isomean* e *isovariance* através do exame da fórmula do E e V . Elas tipicamente são um sistema de linhas paralelas retas e um sistema de elipses concêntricas, respectivamente.

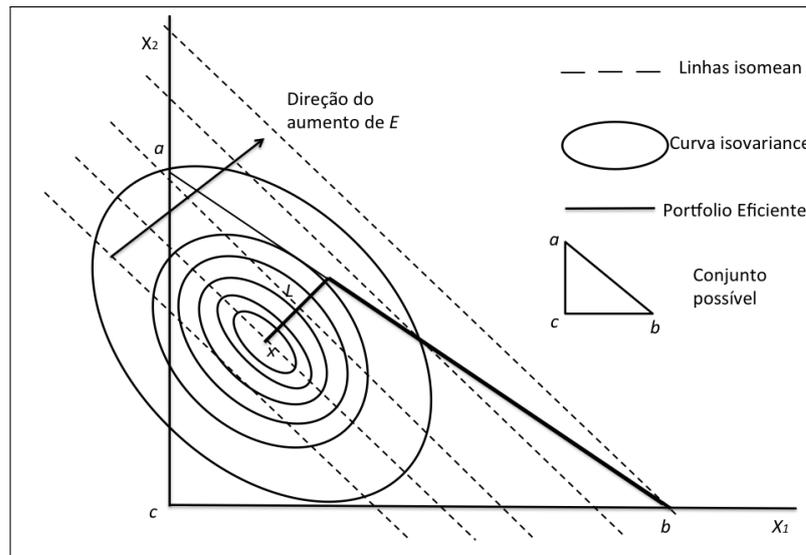


Figura II.2: Combinações de X_1 e X_2 .

Fonte: Markowitz (1952)

O ponto que minimiza V , que será chamado de \mathbf{X} , é definido como o centro do sistema. \mathbf{E} e \mathbf{V} serão respectivamente o retorno e variância esperados. À medida que se afasta de \mathbf{X} , a variância aumenta. Precisamente, C_1 possui menor variância que C_2 à proporção que a curva *isovariance* C_1 ficar mais próxima de \mathbf{X} que C_2 .

Já o centro do sistema de elipses *isovariance* é definido por Markowitz (1952) como sendo \mathbf{X} , podendo estar dentro ou fora do conjunto possível. O primeiro caso é demonstrado na Figura II.3. Nessa situação, por nenhum outro portfólio possuir um V tão baixo como \mathbf{X} , \mathbf{X} é eficiente. Não há ponto (portfólio) eficientes quando o retorno esperado E menor que \mathbf{E} . Tem-se que $\mathbf{E} > E$ e $\mathbf{V} > V$.

Em seguida Markowitz (1952) analisou todos os pontos na linha *isomean* associada a E , ou seja, todos os pontos com um dado retorno. O ponto em que a linha *isomean* é tangente a uma curva *isovariance* é o ponto em que V tem seu menor valor na linha *isomean*. A partir desse ponto, conhecido como $\hat{X}(E)$ traça-se uma curva quando E varia.

Considerações algébricas, omitidas por Markowitz (1952), demonstram que essa curva é uma linha reta, chamada de linha crítica I . A linha crítica passa por \mathbf{X} no ponto que minimiza V para todos os pontos com $E(X_1, X_2) = E$. V aumenta à medida que se anda por I em qualquer direção de \mathbf{X} . Faz parte do conjunto eficiente o segmento da linha crítica de \mathbf{X} até o ponto que a linha crítica corta o limite do conjunto atingível. O segmento da linha $\bar{a}b$ de d até b compreende o restante do conjunto eficiente. O ponto atingível de máximo E é definido como b .

A Figura II.4 mostra o caso em que \mathbf{X} encontra-se fora da área admitida e a linha crítica

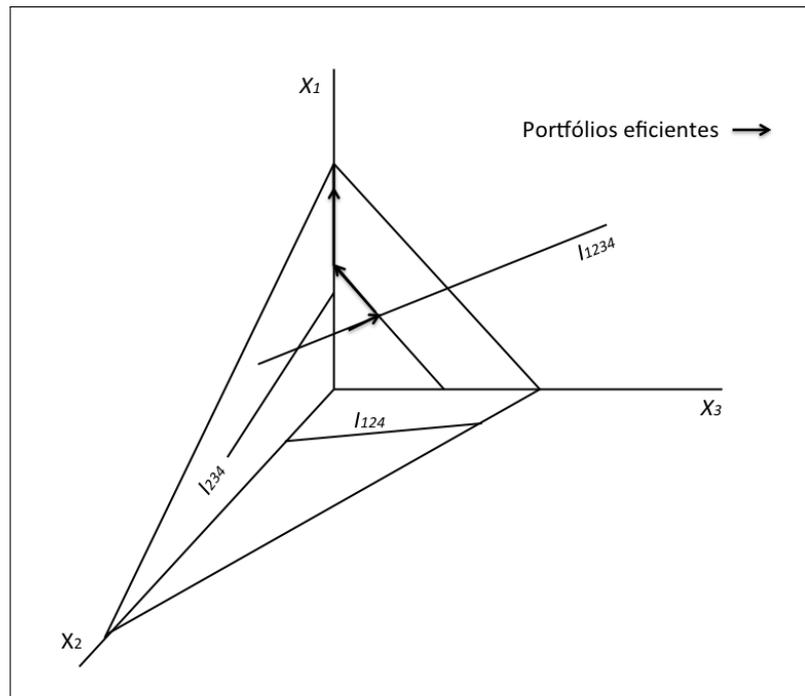


Figura II.3: Caso em que \mathbf{X} se encontra dentro do conjunto atingível.
 Fonte: Markowitz (1952)

corta a linha admitida. O ponto admitido com mínima variância (nesse caso a linha $\bar{a}b$) demarca o início da linha eficiente. Essa linha move em direção a b até sua interseção com a linha crítica. Logo após, move ao longo da linha crítica até sua interseção com a fronteira e finalmente, move ao longo da fronteira até b .

Posteriormente, três casos foram construídos e examinados. Primeiro, a linha crítica não corta o conjunto possível e \mathbf{X} encontra-se fora do conjunto possível. Nessa situação, existe um ativo que não se enquadra em nenhum portfólio eficiente. Segundo, o mesmo μ_i é detido por dois ativos. À vista disso, as linhas *isomean* são paralelas à linha de fronteira. É possível que um portfólio diversificado seja o portfólio eficiente com máximo \mathbf{E} . Terceiro, somente um portfólio é eficiente.

Uma série de segmentos de linhas conectadas é considerada como o conjunto eficiente no caso de quatro, assim como no de três e no de n ativos. Existem dois pontos finais no conjunto eficiente. Em um está o ponto de mínima variância, no outro o de máximo retorno esperado.

Markowitz (1952) expôs que a partir do momento em que a natureza do conjunto de portfólios eficientes for apresentada, torna-se simples a visualização da natureza do conjunto das combinações eficientes de E, V . No caso de três ativos tem-se que E é um plano e V uma

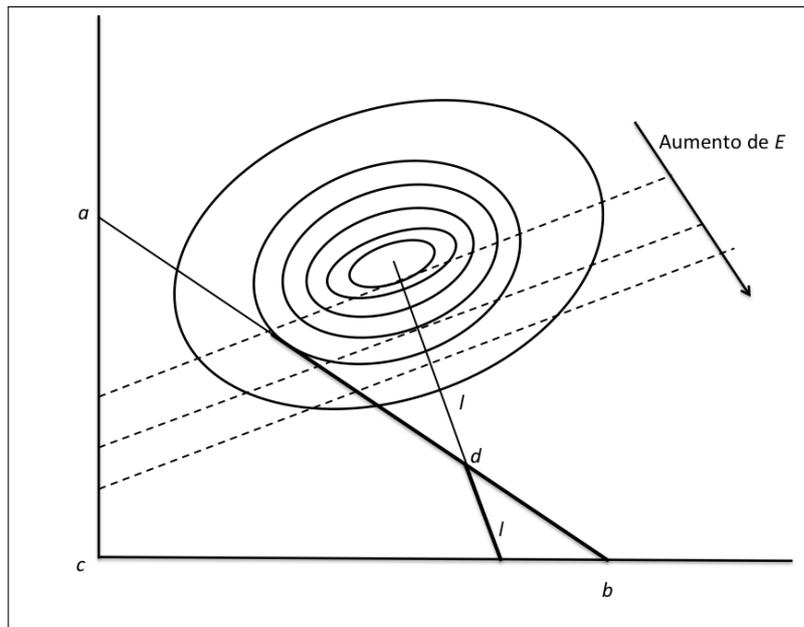


Figura II.4: Caso em que X se encontra fora do conjunto atingível.
Fonte: Markowitz (1952)

parábola, como representado na Figura II.5.

$$E = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 \quad (\text{II.19})$$

$$V = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 \quad (\text{II.20})$$

Uma série de segmentos de linhas conectadas define a seção do E -plano sobre o conjunto de portfólio eficiente.

Já uma série de segmentos de parábolas conectadas caracteriza a seção da V -parábola no conjunto de portfólio eficiente. A Figura II.6 apresenta a situação em que se obtém uma série de segmentos de parábolas conectados ao plotar V sobre E para portfólios eficientes. Encontra-se o mesmo resultado para qualquer número de ativos.

O uso do retorno-variância esperado da regra do retorno é recomendando tanto como um máximo para guiar a ação de uma pessoa e como uma hipótese para explicar um comportamento de investimento bem estabelecido.

Markowitz (1952) acrescentou que a *melhor maneira* de diversificação para a *razão certa* decorre da hipótese do $E - V$.

De acordo com o princípio da diversificação é mais provável que firmas de indústrias dife-

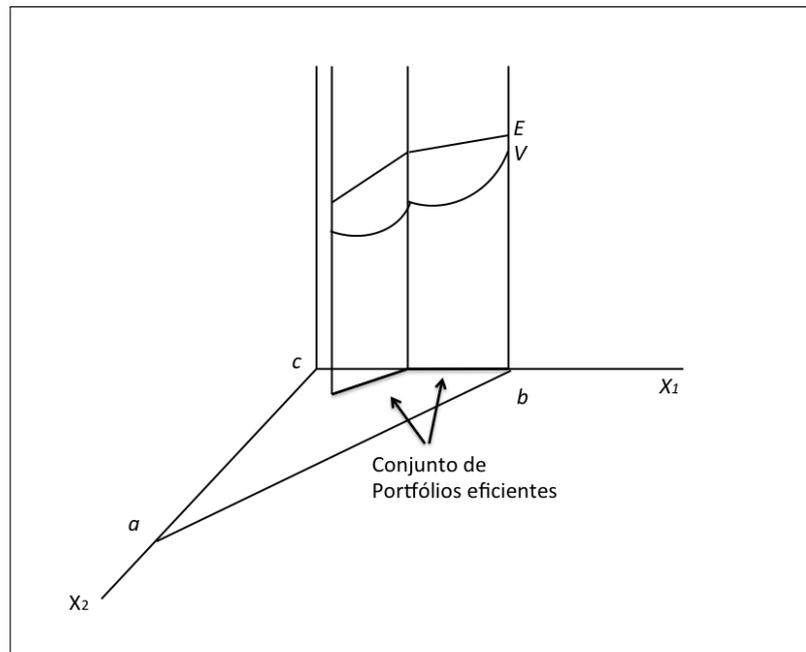


Figura II.5: Conjunto de portfólios eficientes.
Fonte: Markowitz (1952)

rentes obtenham melhor performance que firmas de mesma indústria.

Do mesmo modo, não é suficiente investir em vários ativos para dirimir a variância. Markowitz (1952) sugeria que os investidores evitassem aplicar em ativos com alta covariância entre eles. Acrescentava ser importante diversificar entre indústrias, em razão de obterem menores covariâncias do que firmas da mesma indústria.

Markowitz (1952) continuou o artigo explicando os termos *rendimento* e *risco*, frequentemente utilizados na escrita financeira. Ele entendia haver pouca mudança de significação caso o termo *rendimento* fosse substituído por *rendimento esperado* ou *retorno esperado* e *risco* por *variância do retorno*.

Já a utilização da regra do $E - V$ na seleção de ativos exige procedimentos para encontrar μ_i e σ_{ij} razoáveis. Tais procedimentos devem combinar técnicas estatísticas. Markowitz (1952) acreditava que um conjunto de μ_i e σ_{ij} seria encontrado por meio de estatística computacional. Visto que alguns fatores ou nuances não são captados na computação formal, seria necessária a realização de um julgamento indicando o aumento ou diminuição de alguns desses parâmetros.

Assim, o conjunto eficiente das combinações de $E - V$ pode ser calculado utilizando esse conjunto revisado de μ_i e σ_{ij} . Dessa forma, o investidor poderá escolher a combinação de sua preferência, além de ser possível encontrar o portfólio que originou essa combinação de $E - V$.

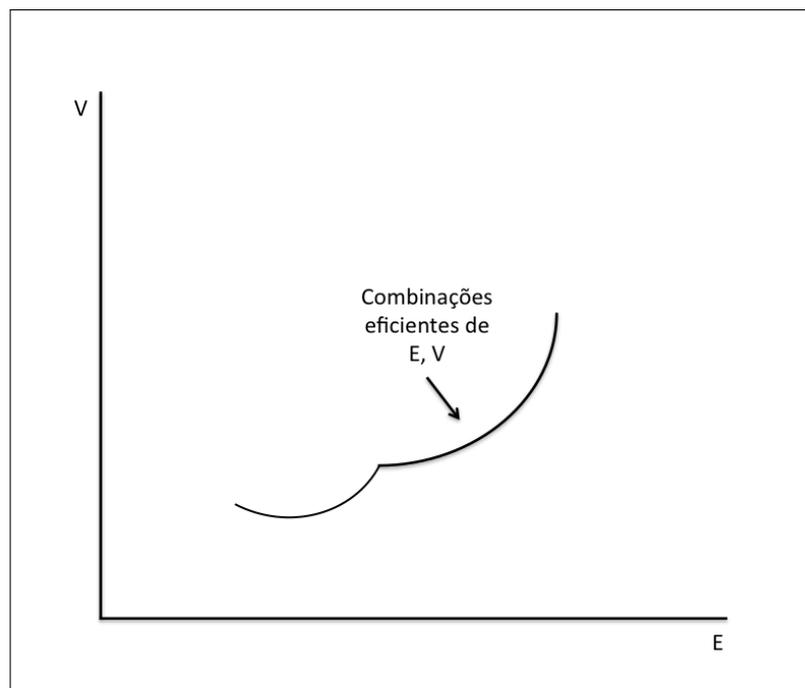


Figura II.6: Combinações eficientes de E, V .
Fonte: Markowitz (1952)

Markowitz (1952) sugeria utilizar o μ_i e σ_{ij} observado no período passado para encontrar μ_i e σ_{ij} . Ele acreditava que seria possível encontrar melhores métodos, que levem em conta mais informações. Além disso, acreditava ser necessária uma reformulação *probabilística* da análise de ativos.

A respeito do valioso trabalho de Markowitz (1952) cabe ainda aduzir o que segue.

Ao tratar da história inicial da Teoria de Portfólio em 1999, ele registrou que a diversificação de investimentos foi bem estabelecida antes de sua publicação em 1952. No entanto, anteriormente à referida publicação não havia uma teoria de investimento adequada que: abrangesse os efeitos da diversificação no caso de riscos correlacionados; distinguisse portfólios eficientes de ineficientes e analisasse o *trade-off* entre risco e retorno no portfólio como um todo (MARKOWITZ, 1999). No seu entender a diversificação não era capaz de eliminar o risco, apesar reduzi-lo.

Markowitz (1952) foi o primeiro a realizar uma formalização matemática da ideia de diversificação de investimento e, com o intuito de fornecer uma solução para o problema de seleção de portfólio, introduziu o modelo de média-variância (RUBINSTEIN, 2002).

Ele também desenvolveu o primeiro modelo de otimização de portfólio, com o qual fundou a Teoria Moderna de Portfólio. Tal modelo se fundamentou em dois critérios: retorno e risco, sendo o risco medido por meio da variância das distribuições dos retornos. Outra inovação foi a

de mostrar como se calcula um portfólio com o máximo retorno esperado para um dado nível de risco, ou o menor risco para um dado nível de retorno esperado (o chamado portfólio eficiente) (MARASOVIĆ; BABIĆ, 2011).

Ocorre que o problema de portfólio considerado tinha por base um modelo de investimento de período único. No começo do período, o investidor deveria alocar capital entre vários ativos, atribuindo um peso não negativo a cada ativo. Durante o período, cada ativo geraria uma taxa aleatória de retorno para que ao final do período o capital mude pela média ponderada dos retornos. Ao selecionar o peso dos ativos, o investidor lida com um conjunto de restrições lineares, uma delas é que os pesos devem somar um (OGRYCZAK, 2000).

Ademais, o modelo de carteira fornecia uma condição algébrica dos pesos dos ativos em carteiras eficientes em média-variância. Ele transformava a declaração algébrica em uma previsão testável da relação entre risco e retorno esperado, identificando uma carteira que deveria ser eficiente para que os preços dos ativos *fechem* em todos os mercados (FAMA; FRENCH, 2007).

A metodologia de média-variância de Markowitz (1952) para o problema de seleção de portfólio tem sido central para atividades de pesquisa e serviu como base para o desenvolvimento da Teoria Moderna de Portfólio (AMIRI; EKHTIARI; YAZDANI, 2011).

Elton et al. (2009) acrescentaram que esse *trade-off* forma um conjunto especial de particular interesse na Teoria de Portfólio, conhecido como conjunto de portfólios eficientes e cuja imagem no espaço de média-variância é a fronteira eficiente.

Muitos leitores estão familiarizados com modelos de alocação de ativos. A Figura II.7 apresenta um resumo do processo de investimento da Teoria Moderna de Portfólio (MARKOWITZ, 2002).

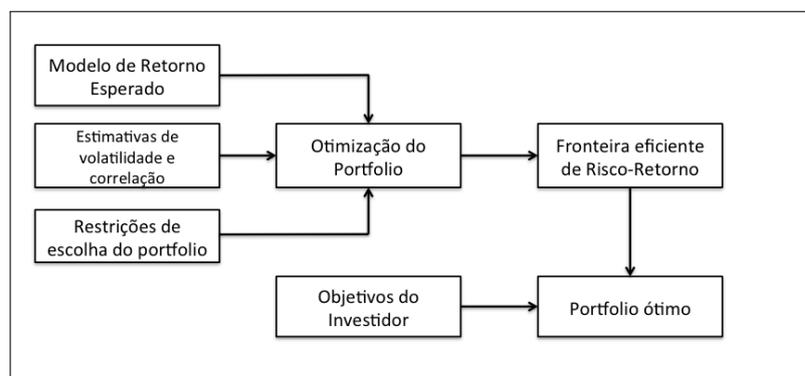


Figura II.7: Modelo clássico de formação de Portfólios.

Mesmo a teoria de seleção de portfólio sendo simples, a sua implementação pode ser

muito complexa. A teoria explana que dado estimativas de retorno, volatilidades e correlações de um conjunto de investimentos e restrições nas escolhas de investimento, é possível realizar uma otimização que resulta no risco/retorno ou média-variância da fronteira eficiente. Essa fronteira é eficiente porque subjacente a cada ponto dela há um portfólio que resulta no maior retorno esperado para aquele nível de risco ou resulta no menor risco possível para aquele retorno esperado. O portfólio que estiver nessa fronteira está no conjunto de portfólios eficientes (MARKOWITZ, 2002).

O destaque dessa teoria é que ativos não podem ser selecionados somente por características únicas do ativo. Pelo contrário, um investidor deveria considerar como cada ativo é cointegrado com os outros ativos. Além disso, ao levar esses comovimentos em consideração, será possível construir um portfólio com o mesmo retorno esperado e menor risco que o portfólio construído sem a análise das interações entre ativos (ELTON; GRUBER, 1997).

O aspecto mais importante do trabalho de Markowitz (1952) foi o de mostrar que não é o próprio risco do ativo que deve importar ao investidor, mas sim a contribuição do ativo para a variância do portfólio como um todo e que isso foi a questão principal da sua covariância com todos os outros ativos no portfólio (RUBINSTEIN, 2002).

O modelo de seleção de portfólio permanece sendo importante tópico de pesquisa em finanças. Desde a teoria proposta por Markowitz (1952), o modelo de média-variância foi amplamente aceito por teóricos e investidores. Logo após, um número de modelos de seleção de portfólio foi apresentado para sanar alguns problemas da teoria tradicional, ou melhorar sua performance (HAO et al., 2013).

As razões para a popularidade do modelo abrangem a sua consistência com o princípio de maximização da utilidade esperada se a taxa de retorno do ativo segue uma distribuição normal multivariada, que é usualmente considerada como sendo uma suposição válida para ações ordinárias. Além disso, problemas de programação quadrática podem ser resolvidos através do estado da arte de metodologias de programação matemática (KONNO; WAKI; YUUKI, 2002).

No entanto, o ambiente de investimento sofreu mudanças recentemente. Estudos, como o de Lo e MacKinlay (2002), revelam que nem todas as ações seguem uma distribuição normal. Essas observações afirmam que não se pode depender unicamente do modelo de média-variância (KONNO; WAKI; YUUKI, 2002).

Apêndice III – ROY (1952) E O PRINCÍPIO DO *SAFETY FIRST*

Tido como o pai da Teoria Moderna de Portfólio, Markowitz (1952) reconheceu a grande contribuição de Roy (1952), que não se destacou tanto por ter o seu trabalho publicado meses após ao de Markowitz (1952). Apesar disso, Roy (1952) desenvolveu importante ferramenta da recompensa pela razão da variabilidade, calculada com a utilização do retorno de nível de desastre (NAWROCKI, 1999). As principais diferenças entre os trabalhos de Markowitz (1952) e Roy (1952) estão apresentadas no Quadro III.1.

Markowitz	Roy
Requer investimento não negativo.	Permite que o montante investido em qualquer ativo seja positivo ou negativo.
Permite que o investidor escolha o portfólio desejado da fronteira eficiente.	Recomenda a escolha de um portfólio específico.

Quadro III.1: Quadro comparativo entre Markowitz (1952) e Roy (1952)

Com o objetivo de desenvolver um método prático para o melhor *trade-off* entre risco e retorno, Roy (1952) publicou seu segundo artigo acerca da Teoria de Portfólio. Ele não acreditava que uma função de utilidade matemática fosse capaz de ser derivada para um investidor, pois não era prático para o investidor maximizar sua utilidade esperada (NAWROCKI, 1999).

Para Roy (1952), a preferência do investidor estaria no *safety of principal first* e na definição de algum retorno mínimo aceitável, que conservasse o principal investido. Vale notar que o *safety first* foi a técnica resultante da definição do nível de desastre como o retorno mínimo aceitável.

Em outras palavras, Roy (1952) entendia que o investidor iria preferir a menor probabilidade de ir abaixo do nível de desastre ou do retorno visado. Portanto, ao maximizar a recompensa pela razão de variabilidade $\frac{(r-d)}{s}$, o investidor escolheria o portfólio com mínima probabilidade de estar abaixo do nível de desastre (d), dado um retorno médio esperado (r) e o desvio padrão (s).

Anteriormente a Roy (1952), o problema do comportamento do investidor em razão de incertezas era tratado com base em pressupostos razoáveis para um indivíduo maximizar ganhos ou lucros esperados em termos reais ou monetários.

A minimização da chance de *desastres* pode, assim, ser interpretada como a maximização da utilidade esperada se a função utilidade assumir somente dois valores, ou seja, Entretanto, existiam duas objeções à proposta de Roy (1952): a primeira refere-se ao fato de que o homem comum deve considerar os possíveis resultados dado um curso de ação em uma ocasião única e o resultado médio (ou esperado). Se a conduta se repetir em um grande período de tempo a condições similares, será irrelevante; já a segunda considera que o princípio de maximização do retorno esperado não explica o conhecido fenômeno da diversificação de recursos dentre diversos ativos.

No âmbito do mundo econômico, a opinião de Roy (1952) era no sentido de que os *desastres* poderiam ocorrer no caso em que um indivíduo tivesse uma perda líquida como resultado de determinada atividade, ou se seus recursos fossem erodidos pelo processo de inflação, ou se seu rendimento fosse menor do que ele certamente obteria em outra ocupação.

A minimização da chance de *desastres* pode, assim, ser interpretada como a maximização da utilidade esperada se a função utilidade assumir somente dois valores, ou seja, 1 se o desastre não ocorrer e 0 se ocorrer. Ao ser aplicada a função utilidade, surge uma generalidade ao custo de perda de significância prática e de aplicabilidade aos resultados.

No *Safety First*, o nível de desastre do resultado é considerado como uma constante. A preocupação reside no fato de que a rentabilidade bruta não ser menor do que uma quantidade d .

No caso do problema de como distribuir os recursos entre diferentes ativos dadas certas expectativas sobre o futuro, ele procurou garantir que ao final de um período a quantidade k de recursos medida em termos reais não estivesse abaixo do valor de d , também em termos reais.

Em relação ao conceito de preço crítico, explicou que o desastre ocorreria se ao colocar todos os recursos em único ativo o preço ao final do período estiver abaixo de $\frac{d}{k}$.

A seguir, analisou cada ativo individualmente com o objetivo de decidir qual manter e a

respectiva quantidade. Nessa análise, se o preço estimado for menor que o preço crítico o ativo deve ser rejeitado, ou contratada outra obrigação caso possível.

No seu entender, normalmente é desejável manter grande quantidade de recursos em diferentes formas de ativos, pois apesar de diminuir a chance de ampliar o ganho também reduz a probabilidade de resultados catastróficos reais. No caso de ativos com rendimentos, o foco foi dado nos rendimentos separadamente. Já em relação aos preços dos ativos, não houve interesse imediato.

Para Roy (1952), o dinheiro continuará sendo um ativo como qualquer outro, com incertezas sobre seu valor futuro. Nos momentos de alta no preço devem ser contratados débitos em termos de dinheiro e usados procedimentos de manter diferentes quantidades de todos os outros ativos que aparecerem aceitáveis com base no critério estabelecido. Similarmente na queda de preços deve ser mantida uma proporção substancial dos recursos em forma de dinheiro e as obrigações comprometidas em termos de pertences.

Em ambas as situações haverá uma estabilidade no sentido de que a quantidade de dinheiro a ser emprestada ou mantida será limitada pela incerteza sobre o real valor do dinheiro.

Em seu trabalho, Roy (1952) mostrou a importância de o dono da propriedade distribuir sabiamente tanto seus ativos quanto suas obrigações, princípio sempre aceito na prática mas raramente explicado de modo satisfatório com base em pressupostos teóricos relativamente simples.

Ele também salientou que uma pequena mudança nas expectativas sobre preço, considerado o nível futuro de segurança de previsões existentes, pode, em algumas circunstâncias, produzir grandes mudanças na demanda individual de alguns ativos e algumas obrigações.

Roy (1952) não esperava que os princípios propostos em seu artigo fossem aplicáveis a especuladores irresponsáveis que nunca consideraram a possibilidade de ocorrência de um desastre, mas sim por pessoas com um mínimo de cautela. Tais princípios podem ser utilizados por pessoas que se interessam por ganho especulativo ou por aquelas que buscam um rendimento modesto por um longo período de tempo.

Diferentes tipos de pessoas usam distintos métodos para estimar tanto preços futuros quanto a confiabilidade de tais estimativas. Como exemplo, algumas pessoas não julgam importante a possibilidade de perdas reais de 10% de grandeza, pois isso não afeta significativamente seu patrimônio. Em outras situações, os mesmos indivíduos podem estabelecer que o ganho especulativo seja superior a 5%. Entretanto, em todas as situações as regras propostas pelos autores são válidas e relevantes.

A hipótese de que empreendedores devem maximizar seus lucros e consumidores sua utilidade, não implica que um homem racional deva conhecer sobre cálculo diferencial. A teoria de Roy (1952) é uma racionalização de procedimentos já conhecidos. Nela há benefícios para o dono da propriedade ao distribuir sabiamente tanto seus ativos quanto suas obrigações. Esse princípio é amplamente aceito na prática, mas raramente explicado satisfatoriamente em suposições teóricas relativamente simples.

Roy (1952) também mostrou que mudanças pequenas nas estimativas de preços futuros ou na confiabilidade das mesmas pode causar mudanças significativas na inclinação de um investidor em colocar dinheiro ou não em determinada aplicação. Além disso, ele evidenciou como mudanças nas expectativas podem afetar a confiança de um indivíduo ou de um grupo de indivíduos com esperanças e medos similares.

No entanto, a validade da teoria deve ser testada estatisticamente. Antes deste teste deve-se aplicar os princípios propostos em um grupo grande de pessoas.

Em suma, Roy (1952) explicou como mudanças nas estimativas de preços futuros e na confiabilidade dessas estimativas podem afetar o comportamento de um investidor. Em outras palavras, expôs como mudanças em expectativas podem afetar a confiança de um indivíduo ou um grupo de indivíduos com esperanças e medos similares.

Apêndice IV – AVANÇOS NO GERENCIAMENTO DE RIQUEZAS

Neste Capítulo, novas modificações ao modelo inicialmente proposto por Markowitz (1952) serão apresentadas.

Vários trabalhos, como os de Steuer, Qi e Hirschberger (2007) e Steuer, Qi e Hirschberger (2008), foram publicados estendendo ou modificando o modelo básico de Markowitz (1952) em três direções. Através da simplificação do tipo e quantidade do dado de entrada, a introdução de medidas alternativas de risco e a incorporação de critérios adicionais e/ou restrições (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2010).

Com o passar dos anos o modelo de Markowitz (1952) foi expandido com a adição de restrições do mundo real como a restrição de cardinalidade que impõe um limite no número de ativos no portfólio e a quantidade de restrições que restringem a proporção de cada ativo no portfólio que caem entre os limites superior e inferior (CHANG et al., 2000) e (MITRA et al., 2003).

A Teoria Moderna de Portfolio não se destacou muito quando foi lançada. Entretanto, 50 anos depois, modelos financeiros baseados em seus princípios têm sido constantemente reinventados com o intuito de incorporar novas descobertas. Vários pesquisadores desenvolveram algoritmos com o intuito de produzir soluções com base no modelo e operacionalizações por meio de hipóteses simplificadoras que serão apresentadas a seguir.

Além disso, recentes trabalhos, financeiramente mais sofisticados e com maior quantidade de ferramentas e de conceitos, possibilitam aos investidores monitorarem e avaliarem a performance de seus investimentos. E aos profissionais de investimento, permitem lidar melhor com a necessidade de seus clientes (MARKOWITZ, 2002).

IV.1 Markowitz, 1959

No livro que publicou em 1959, Markowitz (1959) procurou estender e detalhar sua produção de 1952 com o intuito de dar acesso a leitores com modesto grau de conhecimento quantitativo. Também buscou encontrar uma maneira de conciliar o seu critério de média-variância com a maximização da utilidade esperada da riqueza após muitos períodos de reinvestimento (RUBINSTEIN, 2002).

Já a proposta de Roy (1952), no sentido de que um investidor prefere primeiramente a segurança do capital ao lidar com risco, é tida como instrumental no desenvolvimento de medidas de risco de queda. Ou seja, a recompensa pela razão de variabilidade permite que o investidor minimize a probabilidade de queda do portfólio abaixo do nível de desastre, ou a taxa alvo de retorno (NAWROCKI, 1999).

Markowitz (1959) reconheceu a importância dessa ideia. Ele percebeu que os investidores estavam preocupados com a minimização do risco de queda, por duas razões: somente o risco de queda ou o princípio de primeiro a segurança *safety first* é relevante para o investidor, ou a distribuição dos ativos pode não ter uma distribuição normal. Dessa forma, a medida de queda de risco não ajuda investidores a tomar a decisão adequada ao lidarem com distribuição não normal dos retornos dos ativos. Markowitz (1959) demonstrou que tanto a medida do risco de queda como a variância proporcionavam a resposta correta no caso em que há uma distribuição normal.

Ele forneceu duas sugestões para medir o risco de queda: semivariância calculada a partir do retorno médio ou da semivariância abaixo da média (SVm) e a semivariância calculada a partir do retorno médio ou da semivariância abaixo do alvo (SVt). As duas medidas calculam a variância utilizando somente retornos abaixo do retorno médio (SVm) ou abaixo do retorno alvo (SVt) (NAWROCKI, 1999).

Após propor a medida de semivariância, Markowitz (1959) decidiu trabalhar com a medida de variância por ser computacionalmente mais simples (NAWROCKI, 1999).

Ele consignou que na análise de um grande portfólio existem muitas variáveis e há dificuldade em analisar cada uma individualmente, mas é possível estimar os parâmetros de um modelo baseado na covariância. Essa questão foi como índice único ou modelo de um fator (linear). Discutiu também a respeito da possibilidade de um modelo mais complexo, que incluía múltiplos fatores, relações não lineares ou distribuições que variam ao longo do tempo.

Mostrou, ainda, o que ocorre com a variância de um portfólio sendo igualmente ponderada a

medida que o número de investimentos aumenta. A existência de retornos correlacionados tem grande implicação na eficácia da diversificação. Com retornos não correlacionados, o risco do portfólio se aproxima de zero à medida que a diversificação aumenta. E com retornos correlacionados, mesmo com diversificação ilimitada, o risco permanece substancial. Especificamente, a medida que o número de ações cresce, a variância de um portfólio igualmente ponderado se aproxima da *covariância média*.

IV.2 O modelo de Índice Único de Sharpe (1963)

Sharpe (1963) aplicou a técnica de Markowitz (1952) por meio de um programa computacional capaz de obter a maior vantagem de utilização desse modelo particular de relação entre ativos.

Ao realizar uma análise de baixo custo, o modelo de Sharpe (1963) apresentou as qualidades da aplicação da técnica de Markowitz (1952). Uma aproximação inicial do modelo de Markowitz (1952) foi aplicada utilizando poucos dados, ou seja, uma menor quantidade de parâmetros foi calibrada. O resultado obtido com a aplicação foi satisfatório e demonstrou que o modelo é candidato atrativo de uma aplicação inicial prática da técnica de Markowitz (1952).

Sharpe também expôs as três etapas do modelo desenvolvido por Markowitz (1952). Primeiramente, foram realizadas estimativas probabilísticas da performance futura de ativos. A seguir, tais estimativas foram analisadas com o intuito de determinar o conjunto de portfólios eficientes. Por fim, levando em consideração as preferências do investidor, o portfólio mais adequado foi selecionado.

Seu objetivo era trabalhar com a segunda etapa do processo de Markowitz (1952), que abrange a análise de portfólio.

Para ele, portfólio eficiente é aquele que possui, em relação a outros, o maior retorno esperado dada uma mesma variância do retorno, ou aquele que obtém a menor variância dado o mesmo retorno esperado.

O problema de análise de portfólio, descrito na segunda seção do artigo, foi definido como a maximização de uma função quadrática, sujeita a restrições lineares, com variáveis restritas a valores não negativos. Uma das formas de solucionar o problema de programação quadrática é por meio da utilização do método da linha crítica desenvolvido por Markowitz (1952).

A seguir, Sharpe (1963) explica que soluções sistemáticas do problema de análise de portfólio podem ser encontradas de forma relativamente direta em razão de duas importantes ca-

racterísticas do conjunto de portfólios que serão apresentadas a seguir.

Com relação a primeira característica, qualquer conjunto de portfólios eficientes pode ser descrito em termos de pequenos conjuntos de portfólios de canto. Qualquer ponto na curva E, V pode ser obtido através de um portfólio construído através da divisão do número total de investimentos entre dois portfólios de canto adjacentes.

Já a segunda característica detalha que dois portfólios de canto, que são adjacentes na curva E, V, são relacionados de forma que um portfólio terá todos os ativos que existem no outro mais um ativo adicional, ou terá todos menos um dos ativos que aparecerá no outro portfólio.

Segundo o autor, a quantidade de cálculos necessários para completar a análise do portfólio utilizando o método de linha crítica está relacionada aos seguintes fatores: o número de ativos analisados, o número de portfólios de canto, além da complexidade da matriz de variâncias e covariâncias.

Já o modelo diagonal apresentado por Sharpe (1963) é um dos pressupostos pertencentes a um conjunto de pressupostos capazes de reduzir a tarefa computacional envolvida no grande número de comparações existentes na análise de portfólio.

Como vantagens do modelo tem-se a simplicidade, que proporciona a construção sem supor a existência de inter-relações entre ativos, e evidências consideráveis, capazes de capturar grande parte dessas inter-relações.

Ao se obter os valores requeridos no modelo diagonal, é possível realizar a análise de portfólio, calculando a partir desses valores o conjunto completo de dados requeridos na análise do problema de portfólio padrão e, posteriormente, realizar a análise com os valores derivados. Caso o problema de análise do portfólio seja reafirmado diretamente em termos dos parâmetros do modelo diagonal, vantagens adicionais podem ser obtidas.

Em seguida, Sharpe explicou que o tempo de cálculo e o espaço de memória requeridos para a solução podem ser amplamente reduzidos, caso o problema de análise de portfólio seja expresso em termos dos parâmetros básicos do modelo diagonal.

Ele propôs um código de máquina que capte a maior quantidade de vantagens das características do modelo diagonal por meio do uso do método da linha crítica. O novo método proposto possui um tempo computacional menor que o requerido por códigos de programação quadrática padrão. Além disso, o reduzido armazenamento requerido permite que mais ativos sejam analisados. No entanto, o custo da maior análise está longe de ser insignificante.

Por fim, o autor reafirmou que a simplicidade do modelo linear possibilita ao investigador

analisar o portfólio a um custo muito baixo. No entanto, é inteiramente possível que essa simplificação restrinja a análise dos ativos ao realizar previsões de que o valor resultante da análise do portfólio também seja muito pequeno.

Em resumo, a fim de estimar a habilidade de resumir informações do modelo diagonal, de acordo com a performance dos ativos, um simples teste foi realizado. Os resultados obtidos demonstraram que o modelo diagonal poderia ser capaz de representar relativamente bem a relação entre ativos, e que o valor da análise do portfólio baseada no modelo deveria exceder o custo nominal. Por tais razões, parece ser excelente escolha de aplicação inicial da técnica de Markowitz (1952).

Sharpe (1963) também buscou simplificar os cálculos do modelo proposto por Markowitz (1952) para tornar seu uso mais prático. Segundo evidências, Sharpe expõe que a utilização de relativamente poucos parâmetros pode levar a resultados semelhantes que os obtidos na utilização de conjuntos muito grandes de relações entre os valores. O autor acreditava que seu modelo permitiu a análise a baixo custo e, portanto, foi uma aplicação prática inicial da técnica de Markowitz (1952)

IV.3 Modelo de Precificação de Ativos Financeiros

O modelo de precificação de ativos de capital (CAPM) introduzido por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) teve como base o modelo de Markowitz (1952). O CAPM serviu como fundamento para gestores de portfólio medirem a performance do risco ajustado (FABOZZI et al., 2007).

É importante ressaltar que existem dois tipos de teorias, a normativa e a positiva. A Teoria de Seleção de Portfólio se enquadra no primeiro tipo, pois descreve um padrão ou norma acerca do comportamento que o investidor deve seguir na construção de um portfólio. Já a Teoria de Precificação de Ativos, como o CAPM, se enquadra no segundo tipo por postular a forma como o investidor deve se comportar. Se os investidores construírem e selecionarem o portfólio a partir da análise de média-variância, O CAPM formaliza a relação que deve existir entre retorno do ativo e o risco. Esse modelo é classificado como Teoria Positiva, por derivar de implicações de comportamentos hipotéticos de investidores. Ela postula sobre o comportamento do investidor. Baseado nessa hipótese, um modelo que proporciona o retorno esperado é derivado e conhecido como modelo de precificação de ativo (MARKOWITZ, 2002).

A Teoria Moderna de Portfólio e a Teoria de Precificação de Ativos objetivaram desenvolver estruturas para medir e especificar o risco de investimento além de desenvolver a relação entre

retorno e o risco esperado do ativo. É importante ressaltar que essas teorias são independentes. A validade da Teoria Moderna de Portfólio não depende da validade da Teoria de Precificação de Ativos que, segundo Markowitz (2002), ainda é um ponto não compreendido pelos críticos da Teoria Moderna de Portfólio.

Com o intuito de suprir o *gap* da literatura acerca de uma Teoria Microeconômica Positiva que trabalhe com a condição do risco, Sharpe propôs seu modelo em 1964. Até o momento da publicação, nenhuma teoria havia abordado acerca da forma como o preço do risco decorre da influência básica das preferências do investidor, dos atributos físico dos ativos de capital, entre outros.

Caso um investidor siga processos racionais, os preços dos ativos de capitais, no equilíbrio, se ajustarão para que ele seja capaz de atingir qualquer ponto desejado ao longo da linha de mercado de capital.

O investidor, ao incluir somente riscos adicionais, será capaz de obter *holdings* com maior taxa de retorno. Como efeito, o mercado lhe apresenta dois preços, o preço do tempo e o preço do risco. O primeiro se refere a taxa pura de interesse. Já o segundo, ao retorno esperado adicional por unidade de risco assumido.

O *gap* anteriormente mencionado gera dificuldades ao definir a real relação entre o preço de um único ativo e o seu risco.

Por meio da utilização da diversificação seria possível evitar algum risco próprio ao ativo, de tal forma que o risco total não apresentasse uma influência relevante no preço. No entanto, o componente particular do risco que é considerado relevante foi pouco mencionado na literatura.

Modelos normativos que lidam com a escolha do ativo sob condições de risco foram propostos por vários economistas. Markowitz (1952) baseado no máximo da utilidade esperada desenvolveu uma análise e propôs uma solução geral para o problema de portfólio.

Apesar de contribuições anteriores, Sharpe (1964) explicou que nenhum autor conseguiu desenvolver uma teoria de equilíbrio de mercado de preço de ativos sobre a condição de risco. Sharpe (1964) possibilitou uma nova visão acerca da relação entre preço de um ativo e vários componentes de seu risco global.

O CAPM é um modelo que busca descrever a relação entre risco e retorno esperado que é utilizada na precificação de ativos arriscados. Tem-se:

$$r_a = r_f + \beta_a(r_m - r_f) \quad (\text{IV.1})$$

onde r_f é a taxa livre de risco, β_a é o parâmetro referente ao ativo e r_m o retorno esperado do mercado.

O CAPM parte da ideia de que o investidor deve ser compensado de duas formas: com relação ao valor no tempo do dinheiro e do risco. O valor do dinheiro no tempo é representado pela taxa livre de risco (r_f), que compensa o investidor por alocar dinheiro em qualquer investimento ao longo do tempo. A segunda parte da fórmula representa o risco e calcula a quantidade de compensação que o investidor necessita ao tomar um risco adicional. Isso é calculado utilizando uma medida de risco (β_a) que compara o retorno do ativo ao do mercado durante um período de tempo e o prêmio do mercado ($r_m - r_f$).

O CAPM mostra que o retorno esperado de um ativo ou de um portfólio é igual a taxa livre de risco do ativo mais o risco prêmio. Se o retorno esperado não atender ou superar o retorno desejado, então o investimento não deveria ser realizado.

Sharpe argumenta que, no equilíbrio, combinações eficientes de ativos arriscados terão uma simples relação linear entre retorno esperado e desvio padrão do retorno. Em seu modelo, Sharpe assume que o investidor pode emprestar ou pegar empréstimo a uma mesma taxa. Seu modelo é aplicado em todos os ativos, ativos de capital.

A partir de suas premissas Sharpe conclui que, no equilíbrio do CAPM, o retorno esperado de cada ativo é linearmente relacionado somente ao seu parâmetro.

É importante ressaltar que Sharpe (1964) e Lintner (1965) acrescentaram duas premissas ao modelo de Markowitz (1952) para identificar se uma carteira é eficiente com relação à média-variância. A primeira premissa é a plena concordância. Nela os investidores concordam a respeito da distribuição conjunta dos rendimentos dos ativos de $t - 1$ a t , dados os preços dos ativos em que o mercado encerra suas atividades em $t - 1$. A segunda premissa assume que a tomada e concessão de empréstimos à taxa livre de risco é a mesma para todos os investidores e independe do montante tomado ou concedido (FAMA; FRENCH, 2007).

Ao considerar o trabalho de Sharpe (1964) e outros recentes estudos, é comum utilizar o coeficiente β como uma medida de critério do risco. O uso desse coeficiente facilita o processo de gerenciamento do portfólio financeiro.

Em suma, Sharpe (1964) formalizou o modelo de precificação de ativos de capital (CAPM). O CAPM expõe que o excesso de retorno de um ativo é proporcional ao excesso de retorno do mercado, onde a constante de proporcionalidade é a covariância entre o retorno do ativo e o retorno do mercado dividido pela variância do retorno de mercado (FABOZZI et al., 2007).

Sharpe (1964) trabalhou com o fornecimento de um modelo de comportamento de um in-

vestidor individual nas condições de risco. Ele acredita que o risco total é dividido em dois: o risco controlável (risco não sistemático) e o risco incontrollável (risco sistemático). Em seguida, considerou as condições de equilíbrio para o mercado de capitais e derivou a linha de mercado de capitais. Por fim, descreveu as implicações da relação entre preços de bens de capital individuais e os vários componentes do risco.

IV.4 Modelo Multicritério

Estudos recentes mostraram ser útil incorporar critérios adicionais, à variância e retorno, em um modelo de seleção de portfólio (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2010). Após Sharpe (1964), várias tentativas de linearização do problema de seleção de portfólio foram realizadas. Por exemplo, Ogryczak (2000) desenvolveu um modelo multicritério de programação linear do problema clássico de seleção de portfólio, no qual é considerado um conjunto finito de ativos, e para cada ativo o retorno esperado é definido como uma distribuição discreta finita. Tal modelo é baseado em axiomas de preferência para escolha sobre risco.

Um problema de seleção de portfólio em que seus vetores de critérios possuem três ou mais componentes é definido como multicritério. No caso de ser efetuada uma seleção de portfólio convencional, com vetores de critério de tamanho dois, o conjunto não dominante é tipicamente uma linha curva em um espaço de duas dimensões, que ao ser representado graficamente possui geralmente um valor esperado do retorno do portfólio como sendo variáveis aleatórias no eixo vertical e variâncias da mesma variável aleatória no eixo horizontal. No entanto, o conjunto não dominado é melhor pensado como uma superfície no espaço de dimensão superior, quando os vetores de critério possuem tamanho de três ou mais (STEUER; QI; HIRSCHBERGER, 2008).

A teoria convencional sugere que o problema de seleção de portfólio deve ser solucionado por meio da otimização de uma função econômica. Esse método tem o mérito de levar a problemas matemáticos bem estabelecidos, mas nem sempre representativos da realidade, pois, a comparação de diferentes possíveis ações raramente é feita de acordo com um único critério. Além disso, em muitos casos a preferência por um critério é raramente modelada por uma função, e no caso em que existam vários objetivos é impossível alcançar todos simultaneamente. Uma maneira seria mediante a maximização da exposição de um portfólio a um objetivo sujeito a restrições sobre os outros escores objetivos. O problema com essa especificação é que ela é intrinsecamente unidimensional: somente um objetivo é otimizado, enquanto os outros servem apenas como restrições (SPRONK; HALLERBACH, 1997). (KHOURY; MARTEL; VEILLEUX, 1993) acreditavam que o uso do modelo de otimização sob restrições muda a natureza do problema de

seleção de portfólio, porque a restrição não desempenha o mesmo papel que critérios em todos os problemas de decisão.

Quem lida com um problema de decisão procura encontrar a solução que o permita chegar o mais próximo de seus objetivos. A maneira de operar a solução geralmente ocorre da seguinte forma: definição do conjunto de ações, construção do conjunto de critérios de avaliação, avaliação das ações de acordo com os critérios mantidos. Por fim, aplicação do processo multicritério de agregação nessas avaliações que representa as preferências do decisor (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002).

De acordo com a Teoria Tradicional de Finanças, um investidor deve buscar maximizar seu retorno com mínimo risco. No entanto, testes realizados em mercados financeiros revelaram a existência de outras variáveis. Além disso, os aspectos comportamentais, como a atitude do investidor à solvência e liquidez, não são levados em consideração. Dessa forma, o problema de seleção de um portfólio atrativo é um problema multicritério que deve ser abordado utilizando as técnicas apropriadas (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002).

Nos testes efetuados na maioria dos mercados financeiros (AMEX, NYSE, TSE, Paris Stock Exchange, entre outros) as outras variáveis, chamadas de anomalias, podem ser divididas em duas categorias de critérios: os contábeis e os baseados no valor de mercado que estão apresentados no Quadro IV.1 (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002).

O primeiro critério se refere às razões utilizadas pelos analistas para dar uma ideia clara e sintetizada acerca da situação financeira da organização. As atitudes e objetivos do gestor definem o uso de um ou outro critério. Esse critério é obtido por meio da análise de relatórios de auditoria, demonstração de resultados, balanços trimestrais, registros de dividendos, registros de vendas, etc. Eles são utilizados por analistas ou gestores para dar uma ideia sintetizada e clara acerca da situação financeira da firma (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002).

O segundo critério contém todas as informações utilizadas pelos analistas de ações para apreciar a performance da ação. Os critérios utilizados nesse caso são o retorno médio, o risco total (variância), o risco sistemático, o tamanho medido pela capitalização da ação, o PER e a liquidez da ação (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002).

Critérios contábeis	índices de rentabilidade índices de solvência e liquidez índices de estrutura financeira
Critérios de mercado	retorno médio risco total (variância) risco sistemático (beta) medida do tamanho por capitalização de ações PER Liquidez da ação

Quadro IV.1: Variáveis e critérios (BOURI; MARTEL; CHABCHOUB, 2002)