



**Universidade de Brasília
Departamento de Economia**

Mestrado em Gestão Econômica de Negócios

**Efeito da correlação no requerimento de capital
para cobertura de risco operacional**

Solange Maria Guerra

Brasília
2006

**Universidade de Brasília
Departamento de Economia**

Mestrado em Gestão Econômica de Negócios

**Efeito da correlação no requerimento de capital
para cobertura de risco operacional**

Dissertação apresentada à Universidade
de Brasília, Departamento de Economia,
para obtenção do título de Mestre em
Gestão Econômica de Negócios

Solange Maria Guerra

Orientador: Alexandre Xavier Ywata de Carvalho

**Brasília
2006**

Solange Maria Guerra

Efeito da correlação no requerimento de capital para cobertura de risco operacional

Dissertação aprovada como requisito para a obtenção do título de **Mestre em Gestão Econômica de Negócios**, do Programa de Pós-Graduação em Economia – Departamento de Economia da Universidade de Brasília, por intermédio do Centro de Investigação em Economia e Finanças. Comissão Examinadora formada pelos professores:

Prof. Dr. Alexandre Xavier Ywata de Carvalho
Orientador

Prof. Dr. Paulo César Coutinho
Membro da Banca

Prof. Dr. Rodrigo Andrés de Souza Penaloza
Membro da Banca

Brasília, 4 de maio de 2006.

Ficha Catalográfica

GUERRA, Solange Maria

Efeito da Correlação no Requerimento de Capital para Cobertura de Risco Operacional. Brasília: UnB, Programa de Pós-Graduação em Economia, 2006. 76 p.

Dissertação de Mestrado em Gestão Econômica de Negócios (Área de Economia)

Orientador: Alexandre Xavier Ywata de Carvalho, PhD.

1. Bancos 2. Riscos 3. Basiléia

I - Universidade de Brasília

II - Título

Cessão de direitos:

Autor: Solange Maria Guerra

Título da dissertação de Mestrado profissional: Efeito da Correlação no Requerimento de Capital para Cobertura de Risco Operacional.

Grau/Ano: Programa de Pós-Graduação em Economia, 2006.

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado profissional e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos ou científicos. O autor reserva direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Para Bráulio, Bárbara e Eric.

Agradecimentos

Ao professor Alexandre Ywata, pela dedicação e eficiência na orientação desse trabalho.

A todos os professores do mestrado pelo constante incentivo para meu aprimoramento profissional e por ampliarem de forma significativa minha forma de ver o mundo.

Aos colegas de curso pela amizade e convivência.

Ao Banco Central do Brasil que, por meio de seu Programa de Pós-Graduação me forneceu ajuda financeira para cursar esse mestrado.

Aos meus familiares que sempre estiverem ao meu lado contribuindo e me incentivando a prosseguir na minha busca de um maior desenvolvimento pessoal.

Ao meu marido, à minha filha e ao meu filho pelo carinho e pela compreensão de minhas freqüentes ausências nos passeios da família.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é estudar o efeito das correlações entre os diversos tipos de risco operacional no cálculo do requerimento total de capital para cobertura de eventuais perdas decorrentes de risco operacional. O Novo Acordo de Basileia sugere a obtenção do requerimento de capital total por meio da soma dos requerimentos de capitais para cada tipo de risco operacional. Ao realizar tal cálculo está sendo considerada, implicitamente, a hipótese de que diferentes perdas operacionais são correlacionadas perfeitamente. Embora o Comitê de Basileia permita o uso de correlações não perfeitas, trata essa questão de maneira voluntariamente vaga.

Nessa dissertação estudaremos duas metodologias que consideram as correlações entre diferentes perdas operacionais menores que 1. A primeira metodologia é derivada da *Loss Distribution Approach* (LDA), com ajustes de forma a inserir o efeito diversificação no cálculo do requerimento total de capital. A segunda metodologia utiliza funções cópulas de forma a modelar as perdas operacionais conjuntamente. Os resultados empíricos dessas duas metodologias são comparados ao requerimento de capital obtido pela tradicional *Loss Distribution Approach*, na forma como é recomendada por Basileia II. Além dessas três metodologias, somente para efeito comparativo, também são realizados estudos com uma variação da metodologia LDA considerando-se que as correlações entre os tipos de perdas operacionais são iguais a zero. As performances dessas metodologias são avaliadas por meio de *back-tests*.

Palavras-chave: Risco operacional, correlação, cópula

Abstract

The aim of this dissertation is to study the effect of correlations between different operational aggregate losses to calculate the total regulatory capital requirement for operational risk. The New Accord suggests that the total capital charge can be obtained by the sum of the capital charges for each operational risk type. When the bank sum individual capital charges it is considering that the correlations between operational losses is perfect. Although Basel II permits the use of internally determined correlations, this question is mentioned voluntarily vague.

In this dissertation we will study two approaches in which the correlations between operational risks are considered not perfect. The first one is derived from Loss Distribution Approach (LDA), modified in a way that the total capital requirement is calculate considering the diversification effect. The second one uses the copulas function to fit the operational losses jointly. The empirical results of these two approaches are compared to the capital charge summation obtained from the traditional Loss Distribution Approach, as recommended by Basel II. Beside these three methodologies, the capital charge is calculated using a modified LDA approach, which considerer the correlations equal to zero. The performances of these approaches are assessed by back-tests.

Key-words: Operational risk, correlation, copula

Sumário

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	AGREGAÇÃO DE RISCO OPERACIONAL	6
2.1.	VISÃO DE BASILÉIA II.....	7
2.2.	MENSURAÇÃO DE RISCO OPERACIONAL	9
2.2.1.	<i>Loss Distribution Approach (LDA)</i>	10
2.2.2.	<i>LDA correlação não perfeita</i>	15
3.	CÓPULAS.....	19
3.1.	DEFINIÇÃO E TEOREMA DE SKLAR	20
3.2.	DEPENDÊNCIA PERFEITA.....	22
3.3.	CÓPULAS RELACIONADAS A DISTRIBUIÇÕES ELÍPTICAS	25
4.	ABORDAGENS METODOLÓGICAS	27
4.1.	LDA PADRÃO	29
4.2.	LDA COM CORRELAÇÃO NÃO-PERFEITA.....	30
4.3.	CÓPULAS	31
4.3.1.	<i>Algoritmos de simulação</i>	32
4.4.	LDA COM CORRELAÇÃO ZERO	34
4.5.	TESTANDO A CONSISTÊNCIA DOS MODELOS	35
5.	RESULTADOS EMPÍRICOS.....	36
5.1.	DADOS.....	36
5.1.1.	<i>Algoritmo de simulação dos dados</i>	38
5.2.	ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS DADOS	38
5.3.	MODELAGEM DAS DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIA E DE SEVERIDADE	40
5.4.	CÁLCULO DO VAR GLOBAL SOB A METODOLOGIA LDA PADRÃO (CORRELAÇÃO PERFEITA)	43
5.5.	CÁLCULO DO VAR GLOBAL SOB A METODOLOGIA LDA CORRELAÇÃO NÃO-PERFEITA	44
5.6.	CÁLCULO DO VAR GLOBAL SOB A METODOLOGIA LDA CORRELAÇÃO ZERO .	47
5.7.	CÁLCULO DO VAR GLOBAL USANDO CÓPULAS.....	47
5.7.1.	<i>Ajuste das distribuições agregadas correlacionadas para se determinar as marginais da cópula</i>	48
5.7.2.	<i>Cópulas</i>	50
5.8.	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	52
5.9.	<i>BACK-TESTS</i>	54
5.10.	EFEITO DIVERSIFICAÇÃO	58
6.	CONCLUSÃO.....	59
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62
	ANEXOS	65
	ANEXO A - DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS UTILIZADAS	65
	ANEXO B - HISTOGRAMAS DOS DADOS REAIS E AJUSTADOS.....	67

1. Introdução

O gerenciamento de risco tem se tornado cada vez mais importante nas instituições financeiras desde a última década, com os objetivos, entre outros, de atender aos requerimentos regulatórios e aumentar a transparência sobre o perfil de risco do banco por meio de uma avaliação quantitativa.

Inicialmente a indústria bancária estava focada em controlar potenciais perdas devido a riscos de crédito e de mercado. Entretanto, casos de perdas substanciais devido a risco operacional e o desenvolvimento das práticas bancárias evidenciaram que o Acordo de Basiléia (BIS, 1988) se mostrava menos eficaz em assegurar requerimento de capital adequado ao verdadeiro perfil de risco dos bancos.

Diante desse quadro, o Comitê de Basiléia para Supervisão Bancária (o Comitê) desencadeou, em junho de 1999, um extenso processo consultivo¹ para revisão do Acordo de Basiléia, culminando com o Novo Acordo de Basiléia ou Basiléia II (BIS-2004) em junho de 2004.

O Novo Acordo apresenta uma nova estrutura para o sistema de exigência de capital, a qual mantém o pilar constante em Basiléia I, requerimento de capital, e inclui mais dois pilares: supervisão bancária e disciplina de mercado. O foco desse trabalho está restrito ao primeiro pilar, requerimento de capital.

Sob o Acordo de 1988, o Comitê reconhece que a exigência de capital para cobertura de risco de crédito inclui, implicitamente, outros riscos entre os quais, risco operacional. No entanto, técnicas mais refinadas para mensuração

¹ Veja BIS (1999), BIS (2001a), BIS (2001b) e BIS (2003).

dos riscos de crédito e de mercado geram uma aproximação mais acurada do nível real de tais riscos, acarretando uma sobra menor de capital para cobertura de outros riscos. Por outro lado, a exposição dos bancos a risco operacional é substancial e crescente devido ao desenvolvimento de práticas bancárias. Assim, o Comitê reconhece a necessidade de se exigir, explicitamente, capital para cobertura de risco operacional.

Embora risco operacional não seja novo, há a percepção de que esse risco aumentou consideravelmente nos últimos dez anos devido às mudanças ocorridas na indústria bancária como, por exemplo, o uso de tecnologias de automação mais avançadas, aumento de terceirização e crescimento do e-comércio. Geiger (2000) argumenta que a principal causa de interesse nesse tópico se deve aos casos espetaculares nos quais bancos sofreram grandes perdas resultantes de risco operacional. O caso mais proeminente é o do Barings, cujas perdas levaram o banco à bancarrota em 1995. Brandts (2004) lista como os mais conhecidos incidentes devido a risco operacional a perda de \$ 9 bilhões do Banco National devido a fraude de crédito em 1995, a perda de \$ 2,6 bilhões de Sumimoto Corpotarion devido a transações não autorizadas em 1996, a perda de \$ 1,7 bilhão e conseqüente falência do Orange Country devido a transação não autorizada em 1998. Ele argumenta que o volume desses eventos e seus impactos sobre a comunidade financeira, bem como a crescente probabilidade de perdas operacionais devido ao aumento da complexidade dos produtos e processos, demonstram que a necessidade de monitorar e quantificar risco operacional também são crescentes.

Cruz (2002) argumenta que, quando se classifica as perdas sobre os resultados por área de impacto, risco operacional e outros riscos explicam 35% da volatilidade dos ganhos dos bancos, enquanto que riscos de mercado e de crédito explicam, respectivamente, 15% e 50%.

O Novo Acordo, assim, busca adequar o requerimento de capital a essa nova realidade. Para que os bancos tenham tempo hábil para se adequarem aos novos padrões de adequação de capital, Basiléia II propõe que esses padrões entrem em vigor em 2006/2007. No Brasil, o comunicado 12.746 (BACEN-2004) estabelece o cronograma para implementação de Basiléia II, prevendo a validação dos modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional em 2010/2011.

Antes de se estabelecer como quantificar risco operacional há de se defini-lo. Risco operacional é definido em BIS (2001a) como "o risco de perda resultante de processos internos inadequados ou falhos, pessoas e sistemas ou de eventos externos", incluindo risco legal, mas não o estratégico e de reputação.

Devido à complexidade de eventos que geram perdas operacionais e a heterogeneidade de suas causas, o Comitê propõe três metodologias para o cálculo da alocação de capital para cobertura de perdas decorrentes de risco operacional, crescentes em complexidade e decrescentes em requerimento de capital: a metodologia Básica, a Padrão e a Avançada.

De maneira superficial, temos que, pelas metodologias Básica e Padrão, os bancos obterão o valor do requerimento de capital para cobertura de perdas operacionais usando um percentual fixo da receita bruta. A diferença entre

essas duas metodologias é que, na metodologia Básica existe um único percentual, enquanto que na metodologia Padrão a receita bruta é separada por linhas de negócios, e para cada linha de negócio há um percentual diferente.

A metodologia Avançada, sob a qual está o foco desse trabalho, possibilita aos bancos o uso de modelos desenvolvidos internamente para mensurar sua exposição a risco operacional, sendo que essas metodologias devem ser validadas pelo órgão supervisor.

Uma das alternativas de metodologia avançada é a abordagem da distribuição de perdas agregadas, conhecida como LDA - *Loss Distribution Approach*. Trata-se de um modelo estatístico/atuarial para gerar a distribuição de perdas agregadas, empregando dois tipos de distribuição: a distribuição da frequência dos eventos e a distribuição das perdas ocorridas em cada evento (distribuição de severidade).

Devido à assunção de independência estatística entre as distribuições de frequência e severidade, a distribuição de perdas agregadas para um tipo de risco operacional pode ser obtida por meio de convolução das distribuições de frequência e de severidade. O Valor em Risco (VaR) operacional é calculado a partir da distribuição de perdas agregadas, de maneira semelhante ao cálculo do VaR de mercado. Ou seja, obtém-se um valor de perda que pode acontecer sob condições normais dentro de um horizonte específico², com um determinado nível de confiança α . O capital regulatório para cada tipo de risco individual será a perda não-esperada, ou seja, o Var operacional menos a

² Basileia II determina o horizonte de tempo de um ano e nível de confiança $\alpha = 99,9\%$.

perda esperada. Espera-se que perdas abaixo da perda esperada sejam cobertas por provisões.

De acordo com os anexos 6 e 7 do Novo Acordo, as perdas operacionais podem ser classificadas em diferentes tipos de perdas operacionais, de acordo com as linhas de negócio em que elas ocorreram e o tipo de evento e/ou causa que as geraram. Assim, o banco que pretende utilizar a metodologia proposta em Basiléia II, deverá obter o requerimento de capital para cada um desses tipos de perdas operacionais e, ao final, obter o requerimento total de capital do banco para perdas operacionais somando os requerimentos obtidos individualmente para cada tipo de perda operacional. Ao realizar tal cálculo, o banco estará considerando, implicitamente, a hipótese de que as correlações entre os diferentes tipos de perdas operacionais são perfeitas.

O Comitê de Basiléia, entendendo que essa hipótese não encontra fundamentos na realidade, permite o uso de correlações menores que 1 para o cálculo do requerimento total de capital para cobertura de risco operacional. Entretanto, o Novo Acordo é voluntariamente vago sobre essa questão das correlações na agregação dos diversos tipos de risco operacional.

O objetivo geral dessa dissertação é estudar o efeito das correlações entre os diversos tipos de risco operacional para o cálculo de capital regulatório. Espera-se que ao considerar a hipótese de que as correlações entre os tipos de risco operacional não são perfeitas proporcionará uma redução no requerimento total de capital. O objetivo específico do trabalho é a comparação da performance de duas abordagens que têm como hipótese a correlação não perfeita entre as classes de risco.

Para atingirmos os objetivos do trabalho, serão calculados os requerimentos total de capital utilizando-se 4 abordagens metodologias: LDA padrão, LDA correlação não perfeita, LDA correlação zero e cópulas. Como a hipótese de correlação zero entre os tipos de risco operacional não reflete a realidade, os resultados obtidos com essa abordagem terão efeitos meramente comparativos.

Como o objetivo de se quantificar risco não é a obtenção de menor capital regulatório, mas sim obter um capital regulatório adequado - suficiente para cobrir eventuais perdas decorrentes do risco que se está mensurando sem ser excessivamente conservador - as performances dessas abordagens serão avaliadas por meio de *back-test*.

O trabalho está dividido como segue. O Capítulo 2 apresenta como Basileia II trata o uso de correlações no cálculo do VaR operacional global e a revisão da literatura sobre mensuração de risco operacional e agregação de risco. O Capítulo 3 apresenta o conceito e algumas propriedades de cópulas, enquanto que o Capítulo 4 traz considerações de ordem prática das abordagens metodológicas utilizadas no trabalho. O Capítulo 5 apresenta os dados utilizados e os resultados empíricos obtidos, enquanto que o Capítulo 6 contém a conclusão do trabalho.

2. Agregação de risco operacional

Mensuração de risco operacional e agregação de riscos são temas novos e de grande interesse para instituições financeiras e órgãos reguladores. Pesquisas sobre metodologias para mensuração de risco operacional ou de

diversos tipos de riscos de forma agregada caracterizam-se pela necessidade de serem referendadas pelo crivo dos dados históricos. Especificamente para a agregação de diferentes tipos de risco operacional é necessária uma grande quantidade de dados. Entretanto, como a publicação do Novo Acordo é recente, ainda não houve tempo de os bancos constituírem tal base de dados. Por essas razões, a literatura sobre esses temas não é vasta. No caso de agregação de riscos operacionais, pode-se dizer que a literatura é escassa .

Nesse capítulo, apresentamos como Basiléia II trata a questão de agregação de riscos operacionais, apresentamos os aspectos teóricos da metodologia constante no Novo Acordo, a *Loss Distribution Approach* (LDA) , uma breve revisão de literatura sobre diversificação na mensuração de risco operacional.

2.1. Visão de Basiléia II

Basiléia II define 8 linhas de negócios e 7 tipos de riscos operacionais. Essa classificação, dita de nível 1, pode ser mais detalhada podendo atingir até 19 linhas de negócios (nível 2) e até 70 categorias de perdas operacionais (nível 3), conforme os Anexos 6 e 7 do Novo Acordo.

Os bancos que pretendem usar a metodologia Avançada proposta por Basiléia II para quantificar risco operacional, deverão calcular o capital exigido para cada célula tipo de risco x linhas de negócio, as quais chamaremos de classes de risco, seguindo a nomenclatura de Frachot et al. (2004). Assim, dependendo das operações dos bancos, se consideradas apenas as classificações de nível 1, serão necessárias até 56 estimativas de requerimento

de capital para se obter o total de capital exigido para a cobertura de risco operacional.

O requerimento total de capital para cobertura de risco operacional, para o banco todo, é obtido somando-se o requerimento de capital obtido para cada classe de risco. Alexander (2003) afirma que, se toda dependência entre as distribuições de perdas agregadas pudessem ser mensuradas pela correlação, ao somarmos a carga de capital para cobertura de risco operacional estaríamos supondo que as classes de risco são perfeitamente correlacionadas. Isso implica que todos os eventos extremos de perda operacional devem ocorrer ao mesmo tempo em todas as classes de risco, o que é uma hipótese irreal.

Frachot et al (2004) argumentam que os efeitos da diversificação na modelagem de risco operacional são cruciais, especialmente para o cálculo de requerimento de capital. Eles destacam que existe forte argumento em favor de baixos níveis de correlação entre as perdas agregadas, sugerindo que a soma da carga de capital é exageradamente conservadora. Destacam ainda, que quanto maior for o detalhamento do sistema de medida de risco do banco, maior será a carga de capital total. Essa poderá superar a carga de capital obtida com a metodologia Padrão. Portanto, pela metodologia de soma dos VaRs operacionais, os bancos não terão incentivos em aumentar a granularidade de seus tipos de risco e linhas de negócio.

Como um maior refinamento das classes de risco é desejável, pois pressupõe um maior conhecimento do banco com relação ao seu perfil de risco, Basiléia II prevê, ainda que de maneira tímida, que o cálculo de capital

requerido pode ser feito utilizando-se correlação menor que 1 entre as classes de risco, desde que o banco possa validar seus pressupostos, conforme podemos verificar no seguinte trecho do Novo Acordo:

"Risk measures for different operational risk estimates must be added for purposes of calculating the regulatory minimum capital requirement. However, the bank may be permitted to use internally determined correlations in operational risk losses across individual operational risk estimates, provided it can demonstrate to a high degree of confidence and to the satisfaction of the national supervisor that its systems for determining correlations are sound, implemented with integrity, and take into account the uncertainty surrounding any such correlation estimates (particularly in periods of stress). The bank must validate its correlation assumptions."(Parágrafo 669 (d) pág. 145 em BIS (2004))

2.2. Mensuração de risco operacional

A metodologia para mensuração de risco operacional mais freqüentemente encontrada na literatura é a *Loss Distribution Approach* (LDA). Frachot et al (2001) apresentam uma descrição detalhada e matematicamente formal da LDA. Questões sobre a implementação dessa metodologia podem ser elucidadas em Frachot et al (2003).

Nessa seção apresentaremos as características básicas da metodologia LDA.

2.2.1. Loss Distribution Approach (LDA)

LDA é uma metodologia estatística para se obter a distribuição das perdas agregadas muito popular em ciências atuariais.

Seguindo o Novo Acordo, vamos considerar:

- H classes de risco operacional (células da matriz linhas de negócios x tipos de risco).
- X_{h1}, X_{h2}, \dots variáveis aleatórias contínuas, cada uma delas representando o montante de um evento de perda para uma determinada classe $h \in \{1, \dots, H\}$. A distribuição dos valores dessas perdas X_{ih} , denominada distribuição de severidade da classe h , será denotada por F_h .
- O número de eventos de perdas entre os períodos t e $t + \tau$ é aleatório³ e, a variável aleatória discreta correspondente a esse número de perdas na classe h será denotada por N_h . A distribuição do número de eventos de perdas, denominada de distribuição de freqüência, será denotado por P_h .

Sob a abordagem LDA, a perda operacional ocorrida na classe h entre os períodos t e $t + \tau$, denominada de perda agregada e denotada por L_h , é dada

pela soma das perdas individuais, $L_h = \sum_{n=1}^{N_h} X_{nh}$, onde N_h é a freqüência dos

³ Basileia II considera τ igual a 1 ano. Nesse trabalho, consideraremos τ igual a 1 dia.

eventos (número de perdas) no período considerado e X_{nh} são as severidades dos eventos (valores das perdas).

Para a obtenção da distribuição de perdas agregadas utilizando-se a abordagem LDA, assumem-se os seguintes pressupostos:

- N_h e (X_{1h}, X_{2h}, \dots) são variáveis aleatórias independentes,
- X_{1h}, X_{2h}, \dots é um conjunto de variáveis aleatórias independentes,
- X_{1h}, X_{2h}, \dots seguem a mesma distribuição marginal.

O primeiro pressuposto indica que a freqüência e a severidade são duas fontes independentes de aleatoriedade. Os dois últimos pressupostos significam que duas perdas dentro de uma mesma classe são independentes e identicamente distribuídas.

Dada a independência das variáveis aleatórias de freqüência e de severidade, a distribuição das perdas agregadas de uma classe h , a qual denotaremos de G_h , pode ser obtida por meio de convolução das distribuições de freqüência e de severidade, respectivamente P_h e F_h .

Em geral, não há expressão analítica para a distribuição das perdas agregadas, requerendo, portanto, que a mesma seja obtida por algoritmos numéricos. O método mais utilizado é a simulação de Monte Carlo.

Pelo método de Monte Carlo, a distribuição G_h é "aproximada" por um conjunto $S\langle X_{ih} \rangle = \{X_{sh}, s = 1, \dots, S\}$ de valores simulados da variável aleatória L_h . Uma estimativa de G_h é então obtida pela distribuição empírica desses valores

simulados $S\langle X_{ih} \rangle$. Maiores detalhes sobre o método de Monte Carlo pode ser obtido em Fishman (1996).

Na prática esse processo é feito em dois passos. Primeiro ajustamos as distribuições de frequência e de severidade. Então, obtemos a distribuição de perdas agregadas compondo essas duas distribuições. A figura 1 ilustra esses dois passos da metodologia LDA.

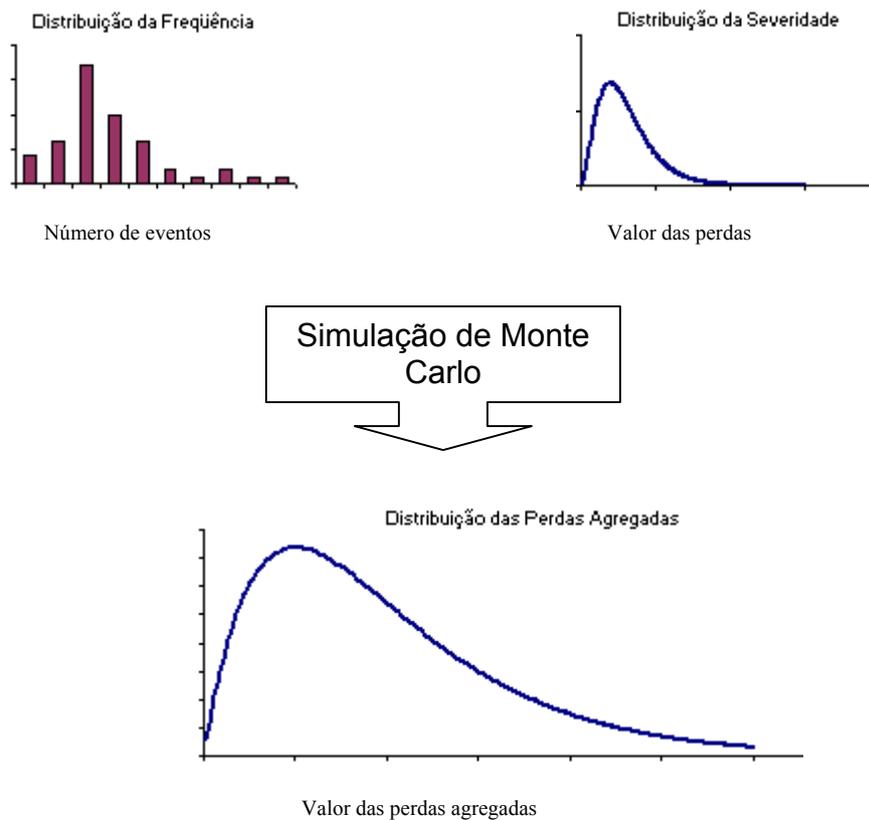


Figura 1 - Metodologia LDA

Com a distribuição de perdas agregadas G_h já determinada, o requerimento de capital regulatório para cobertura de eventuais perdas operacionais para a classe de risco h é obtido utilizando-se a medida Valor em Risco (VaR).

O VaR é o percentil⁴ α da distribuição de perdas agregadas G_h .

Denotando o VaR da classe de risco h por K_h , temos

$$K_h = G_h^{-1}(\alpha). \quad (1)$$

Antes de definirmos a carga de capital precisamos definir perda esperada e perda não esperada.

A perda esperada de uma classe de risco h , a qual denotaremos por EL_h , é simplesmente o valor esperado da variável aleatória L_h que segue a distribuição de perdas agregadas, ou seja,

$$EL_h = E(L_h) = \int_0^{\infty} x dG_h(x). \quad (2)$$

A perda não esperada de uma classe de risco h , a qual denotaremos por UL_h , é o percentil α da distribuição de perdas agregadas G_h menos o valor esperado de G_h , ou seja,

$$UL_h = G_h^{-1}(\alpha) - E(L_h) = K_h - EL_h. \quad (3)$$

Portanto, a perda não esperada UL_h é o VaR menos a perda esperada.

A figura abaixo ilustra essas definições.

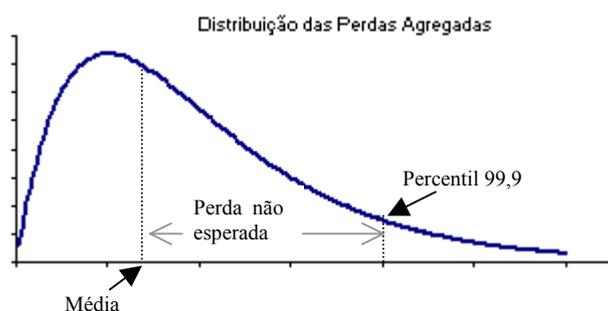


Figura 2: VaR (99,9%) e perda não esperada

⁴ Basileia II estabelece $\alpha = 99,9\%$.

Na literatura encontram-se duas definições de requerimento de capital. Uma que é o próprio VaR e outra que é a perda não esperada. Nesse trabalho, utilizaremos essa segunda definição, considerando que as perdas esperadas serão cobertas por provisões.

Assim, o requerimento de capital para uma classe de risco h , o qual denotaremos por RC_h , será

$$RC_h = K_h - EL_h, \quad (4)$$

onde K_h , é o VaR da distribuição de perdas agregadas da classe h , ou seja,

$K_h = G_h^{-1}(\alpha)$ e EL_h é a perda média da classe de risco h .

2.2.1.1. Capital regulatório total

Nessa seção, definiremos o requerimento total de capital, ou seja o requerimento de capital para cobrir todas as eventuais perdas operacionais a que o banco todo está sujeito, seguindo as recomendações de Basiléia II sem nos preocuparmos com as correlações entre as perdas operacionais. Conseqüentemente, estamos considerando as correlações entre as perdas agregadas são perfeitas.

Após determinadas as distribuições de perdas agregadas para cada uma das classes de risco h , $h = 1, \dots, H$, teremos:

- A perda total do banco (L), que é dado pela soma das perdas em

$$\text{cada classe de risco, ou seja, } L = \sum_{h=1}^H L_h ;$$

- O VaR operacional global do banco (K), que é dado pela soma dos VaRs em cada classe de risco. Portanto,

$$K = \sum_{h=1}^H K_h = \sum_{h=1}^H G_h^{-1}(\alpha). \quad (5)$$

O requerimento total de capital do banco (RC) para cobertura de perdas decorrentes de risco operacional, é a soma dos requerimentos de capital em cada classe de risco. Assim,

$$RC = K - EL = K - \sum_{h=1}^H EL_h. \quad (6)$$

2.2.2. LDA correlação não perfeita

Uma das características básicas da metodologia LDA é a assunção de que as perdas individuais são independentes dentro de uma específica classe de risco. Assumir que exista correlação entre as severidades das perdas de duas classes de risco, implicaria em assumir, simultaneamente, que há independência de severidades dentro de cada classe de risco (pressuposto do modelo LDA) e que há correlação entre severidades de duas classes de risco. Frachot et al (2004) argumentam que é conceitualmente difícil assumir essa hipótese. Além disso, ponderam que ao se considerar a correlação entre os valores das perdas, altera-se também os fundamentos básicos do modelo LDA padrão, exigindo-se assim, uma reformulação desses modelos. A reconstrução desses modelos para abarcar a hipótese de correlação entre as severidades além de matematicamente trabalhosa, exigiria muito mais dados, os quais ainda não se dispõe.

Por outro lado, adicionar a correlação entre freqüências dos eventos de classes de risco distintas não altera o modelo LDA. Em particular, não muda a forma como se calcula a carga de capital para cada classe. Além disso, a correlação entre as freqüências pode ser determinada calculando-se a correlação histórica entre as freqüências dos eventos, desde que se tenha dados suficientes.

Dessa forma, assumiremos as hipóteses de que as severidades entre as classes são independentes e as freqüências são correlacionadas. Conseqüentemente, temos que as perdas agregadas são correlacionadas, porém não perfeitamente, e essa correlação advém da correlação das freqüências.

De acordo com as hipóteses assumidas, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{cor}(N_1, N_2) \neq 0 \\ \text{cor}(X, Y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{corr}(L_1, L_2) \neq 0$$

Investigando como e em que extensão a correlação entre freqüências gera correlação entre as perdas agregadas, Frachot et al (2004) demonstram que mesmo quando existe uma forte correlação entre freqüências, a correlação entre as perdas agregadas pode ser baixa. Isso porque a independência das severidades domina a dependência das freqüências, principalmente no caso de eventos de alta severidade, isto é, quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas.

A correlação entre as perdas agregadas será mais próxima da correlação das freqüências quando a variância das perdas é pequena em

comparação com a média das perdas. Isso é o que acontece quando temos alta frequência e baixa severidade.

Vejam agora, a correlação das perdas agregadas com as hipóteses de severidades independentes e frequências correlacionadas, assumindo-se que as frequências seguem a distribuição de Poisson.

A covariância entre as perdas agregadas é dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(L_1, L_2) &= E[L_1 L_2] - E[L_1]E[L_2] = \\
 &= E\left[\sum_{n=1}^{N_1} X_n \sum_{m=1}^{N_2} Y_m\right] - E\left[\sum_{n=1}^{N_1} X_n\right]E\left[\sum_{m=1}^{N_2} Y_m\right] = \\
 &= (E[N_1 N_2] - \lambda_1 \lambda_2)E[X]E[Y], \tag{7}
 \end{aligned}$$

onde $\lambda_j = E[N_j] = \sigma^2[N_j]$, para $j = 1, 2$.

Assim, a correlação entre as perdas é:

$$\begin{aligned}
 \text{cor}(L_1, L_2) &= \frac{(E[N_1 N_2] - \lambda_1 \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \cdot \frac{E[X]E[Y]}{\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}} = \\
 &= \text{cor}(N_1, N_2) \cdot \eta(X) \cdot \eta(Y), \tag{8}
 \end{aligned}$$

onde, η denota a função $\eta(X) = \frac{E[X]}{\sqrt{E[X^2]}}$.

Com alguns cálculos, mostra-se que:

$$\eta(x) = \frac{E[X]}{\sqrt{\sigma^2[X] + E^2[X]}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2(X)}} \leq 1,$$

onde $c^2(X) = \frac{\sigma^2[X]}{E^2[X]}$, desde que X é uma variável aleatória positiva.

Portanto,

$$0 \leq \text{cor}(L_1, L_2) \leq \text{cor}(N_1, N_2) \leq 1,$$

ou seja, a correlação das perdas agregadas é mais baixa que a correlação entre as freqüências, especialmente quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas.

Assim, o VaR operacional global para o caso onde as freqüências são correlacionas e as severidades são independentes, é dado por:

$$K = EL + \sqrt{\sum_{i,j=1}^H \rho_{i,j} (K_i - EL_i) \cdot (K_j - EL_j)}, \quad (9)$$

onde EL_h e K_h são, respectivamente, a perda média e o VaR operacional da classe h , e $\rho_{i,j}$ é a correlação entre as distribuições agregadas das classes i e j , calculadas conforme a equação (8)

3. Cópulas

A função cópula tem sido reconhecida como uma ferramenta poderosa para modelar dependência entre variáveis aleatórias. Recentemente, cópulas têm recebido muita atenção em finanças, com aplicações em riscos de crédito e de mercado, incluindo precificação de opções e modelos de default de portfólio. Cherubini et al. (2004), os quais apresentam aspectos teóricos das funções cópulas e de aplicações em finanças, argumentam que essas funções têm ganhado cada vez mais popularidade entre acadêmicos e praticantes na área de finanças principalmente devido ao intenso aumento da volatilidade e do comportamento errático dos mercados financeiros.

O conceito de cópulas não é novo. De acordo com Nelsen (1999), essas funções precedem o uso do termo cópula, aparecendo em trabalhos de Fréchet, Dall'Áglio, Féron e outros estudos de distribuições multivariadas com distribuições marginais univariadas fixas. Muitos resultados básicos de cópulas têm suas origens em trabalhos de Hoeffding (1940, 1941). A palavra cópula foi empregada pela primeira vez no sentido matemático/estatístico por Sklar (1959) no teorema descrevendo as funções que "ligam/conectam" as distribuições univariadas à distribuição multivariada.

Não nos aprofundaremos no estudo de cópulas. Apresentaremos apenas uma introdução necessária para o desenvolvimento da dissertação. Um detalhamento teórico mais minucioso sobre cópulas, bem como aplicações em gestão de risco podem ser encontrados em Nelsen (1999), Embrechts et al (2001), Lindskog (2001) e Bouyé et al (2000).

Alguns exemplos do uso de cópulas para risco de crédito e de mercado, para o Brasil, são: Lucas (2003), Andrade (2004), Mendes e Souza (2004). Alexander (2004) apresenta exemplos do uso de cópulas para risco operacional, porém somente com parâmetros tomados aleatoriamente. Rosenberg e Schuermann (2006) constroem uma metodologia para agregar os riscos de mercado, de crédito e operacional utilizando cópulas. Boyé et al (2000) sugerem que cópulas podem ser utilizadas para quantificar risco operacional. No entanto, não apresentam nenhum caso empírico.

A idéia essencial de cópulas é que a distribuição conjunta pode ser fatorada em distribuições marginais e função de dependência, a qual é chamada de cópula. O termo cópula é baseado na noção de ligação: a cópula liga as distribuições marginais a uma distribuição conjunta. A relação de dependência é inteiramente determinada pela função cópula, enquanto que localização, escala e forma (isto é, média, desvio padrão, assimetria e curtose) são inteiramente determinadas pelas marginais.

3.1. Definição e Teorema de Sklar

Definição: Uma cópula n-dimensional é uma função C com domínio $[0,1]^n$ tal que:

- i. Para todo (u_1, \dots, u_n) em $[0,1]^n$, $C(u_1, \dots, u_n) = 0$, se pelo menos uma coordenada de (u_1, \dots, u_n) é zero;
- ii. C é n-crescente⁵, ou seja, é crescente em cada componente;

⁵ C é N-crescente se para todo (a_1, \dots, a_n) e $(b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$, com $a_i \leq b_i$ tem-se que:

- iii. C tem marginais C_k , $k = 1, \dots, n$ tais que $C_k(u) = C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $u_i \in [0, 1]$.

Da definição anterior segue que uma cópula C é uma função de distribuição sobre $[0, 1]^n$, com imagem $\text{Im}(C) = [0, 1]$, e com marginais uniformemente distribuídas sobre $[0, 1]$.

Além disso, se $u_i = F_i(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$, onde F_1, \dots, F_n são funções de distribuição univariadas (marginais) das variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n , respectivamente, então $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ é uma função de distribuição multivariada das variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n . Dessa forma, vemos que funções cópula são ferramentas para construir distribuições multivariadas. Esse resultado é dado formalmente pelo Teorema de Sklar.

Teorema de Sklar - Seja D uma função de distribuição n -dimensional com marginais F_1, \dots, F_n . Então existe uma n -cópula C tal que para todo \mathbf{x} em $\overline{\mathfrak{R}}^n$, onde $\overline{\mathfrak{R}}^n = \mathfrak{R} \cup \{\pm\infty\}$, $D(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.

Se F_1, \dots, F_n são todas contínuas, então C é única. Por outro lado, se C é uma n -cópula com marginais F_1, \dots, F_n contínuas, então a função D é uma função de distribuição n -dimensional com marginais F_1, \dots, F_n .

O teorema de Sklar é, talvez, o resultado mais importante sobre cópulas. Ele separa a função de distribuição multivariada contínua D em uma parte que

$$\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_n}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0, \text{ onde } u_{j1} = a_j \text{ e } u_{j2} = b_j \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\}.$$

descreve a estrutura de dependência multivariada (representada pela cópula C) e as partes que descrevem apenas os comportamentos marginais univariados (por meio das marginais F_1, \dots, F_n).

Em muitas aplicações em finanças o Teorema de Sklar é utilizado para encontrar a distribuição multivariada a partir das marginais, que devem reproduzir os fatos estilizados e a estrutura de dependência entre as variáveis. Assim, o problema de modelagem pode ser dividido em dois passos:

- i. Identificação e estimação das marginais;
- ii. E, escolha da cópula apropriada de maneira a representar bem a estrutura de dependência das variáveis.

Frees e Valdez (1997) ressaltam que nem sempre é simples identificar a cópula adequada. Bouyé et al. (2000) afirmam que os aspectos computacionais são um dos principais tópicos do ponto de vista da indústria financeira. Com relação a cópulas, se os problemas de estimação dos parâmetros e simulação não puderem ser resolvidos facilmente para dimensões altas, a cópula é considerada não tratável para o cálculo do VaR. Sob esse aspecto, as cópulas gaussianas e de Student são consideradas boas candidatas para nosso problema.

3.2. Dependência perfeita

Sendo a distribuição conjunta estabelecida por meio das distribuições marginais e da estrutura de dependência, é fundamental o conhecimento da dependência. A clássica medida correlação linear é adequada apenas para

distribuições elípticas. Como trabalharemos com as cópulas gaussianas e de Student, que são elípticas, usaremos a correlação, denotada por ρ , como medida de frequência.

Um conceito extremamente interessante para o desenvolvimento desse trabalho é o conceito de dependência perfeita entre duas variáveis. Por meio dele é possível provar a relação entre cópulas e o cálculo do VaR operacional global considerando-se correlação perfeita, conforme descrito na seção 2.2.1.

Para chegarmos ao conceito de dependência perfeita necessitamos especificar quando uma cópula é considerada menor que outra.

Definição (ordem de concordância): A cópula C_1 é dita menor que a cópula C_2 (notação $C_1 \prec C_2$) se para todo $(u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$, $C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n)$.

Considere as funções M^n , Π^n e W^n definidas sobre $[0,1]^n$:

$$C^+ = M^n(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n),$$

$$C^\perp = \Pi^n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n,$$

$$C^- = W^n(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0).$$

As funções M^n e Π^n são n -cópulas para todo $n \geq 2$, enquanto que a função W^n não é cópula para $n \geq 3$. A cópula Π^n é a cópula produto, e corresponde ao caso em que as variáveis aleatórias são independentes: a

distribuição conjunta é o produto das marginais. A cópula C^- corresponde à dependência anti-monotônica⁶, enquanto que C^+ corresponde à dependência co-monotônica.

As funções C^- e C^+ são chamadas, respectivamente, de limitantes inferior e superior de Fréchet-Hoeffding (ou simplesmente de Fréchet). Isso se deve ao fato de que qualquer cópula C está entre essas duas funções, isto é,

$$C^- \prec C \prec C^+.$$

Para o caso $n = 2$, temos que C^- é a função de distribuição do vetor aleatório $(U, 1-U)$ e C^+ a função de distribuição do vetor (U, U) , onde $U \sim U(0,1)$.

A distribuição de $(U, 1-U)$ tem toda a sua massa sobre a diagonal entre $(0,1)$ e $(1,0)$, enquanto que a distribuição de (U, U) tem toda a sua massa sobre a diagonal entre $(0,0)$ e $(1,1)$. Dessa maneira, pode-se dizer que C^+ e C^- descrevem dependência perfeita positiva e dependência perfeita negativa, respectivamente.

Ainda com $n = 2$, a cópula normal corresponde às cópulas C^- , C^\perp e C^+ quando o parâmetro ρ assume os valores -1 , 0 e 1 , respectivamente. Dessa forma, cópulas são extensões da noção de dependência linear existente na estrutura Gaussiana. Assim, por analogia à correlação linear, uma função

⁶ Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são anti-monotônicas se existe uma variável aleatória X tal que X_1 é uma transformação decrescente de X e X_2 é uma transformação crescente de X . Se ambas transformações forem crescentes (ou decrescentes), então X_1 e X_2 são ditas co-monotônicas.

cópula C possui uma estrutura de dependência negativa se $C^- \prec C \prec C^\perp$ e positiva se $C^\perp \prec C \prec C^+$.

Sob esse arcabouço de dependência perfeita, Jouanin et al. (2002) demonstram, utilizando um banco com dois tipos de risco operacional, que considerar o cálculo do VaR operacional global como a simples soma dos VaRs operacionais para cada classe de risco operacional corresponde ao caso da agregação dos riscos operacionais utilizando a cópula limitante superior de Fréchet.

3.3. Cópulas relacionadas a distribuições elípticas

As distribuições elípticas, assim chamadas por seus contornos serem elipsóides, desempenham um papel importante em finanças. Pode-se verificar que a cópula gaussiana com duas marginais gaussianas corresponde à distribuição gaussiana bivariada. Dessa forma, a construção de distribuições multivariadas com cópulas se torna muito fácil. Entretanto, dependendo da cópula e das marginais escolhidas, a forma analítica dessas distribuições nem sempre é facilmente determinada.

Abaixo apresentamos a definição duas cópulas relacionadas a distribuições elípticas: a cópula gaussiana e a de Student. Essas serão as cópulas utilizadas para a construção de distribuição multivariada das perdas para o cálculo do VaR operacional. Entretanto, as marginais utilizadas serão aquelas determinadas pelas distribuições que melhor ajustarem as distribuições de perdas agregadas empíricas.

Definição (Cópula Gaussiana multivariada). Sejam ρ uma matriz simétrica, positiva definida com elementos da diagonal iguais a 1 e Φ_ρ a distribuição normal multivariada padronizada com matriz de correlação ρ . A cópula gaussiana multivariada é então definida como segue:

$$C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n), \dots, \Phi^{-1}(u_N))$$

com Φ^{-1} a inversa da distribuição gaussiana univariada.

Definição (Cópula de Student multivariada). Sejam ρ uma matriz simétrica, positiva definida com elementos da diagonal iguais a 1 e $T_{\rho, \nu}$ a distribuição de Student multivariada padronizada com ν graus de liberdade e matriz de correlação ρ . A cópula de Student multivariada é então definida como segue:

$$C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N; \rho, \nu) = T_{\rho, \nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n), \dots, t_\nu^{-1}(u_N))$$

com t_ν^{-1} a inversa da distribuição de Student univariada.

4. Abordagens Metodológicas

Nesse capítulo serão especificados os procedimentos práticos para a implementação das abordagens metodológicas utilizadas para comparação dos requerimentos de capital para cobertura de risco operacional. Os aspectos teóricos dessas metodologias foram descritos nos capítulos 2 e 3.

Conforme dito anteriormente, serão utilizadas 4 abordagens da metodologia LDA para se analisar os efeitos da correlação no cálculo do VaR operacional. Uma abordagem LDA que considera as classes de risco perfeitamente correlacionadas, a qual chamaremos de LDA padrão, uma abordagem LDA considerando que exista correlação entre as perdas agregadas, porém essa correlação não é perfeita, apresentada em Frachot et al (2004), a qual chamaremos de LDA correlação não-perfeita. A terceira abordagem utilizará funções cópulas. Além dessas 3 abordagens, calcularemos também, somente para efeitos comparativos, o requerimento de capital utilizando a metodologia LDA com correlação zero. As performances dessas metodologias serão avaliadas por meio de *back-test*.

As abordagens LDA padrão, correlação não-perfeita e correlação zero apresentam passos comuns em suas implementações. Para dar uma visão mais ampla de como a implementação dessas abordagens se inter-relacionam e em que se diferenciam da implementação das cópulas, apresentamos na Figura 3 um esquema de implementação dos modelos.

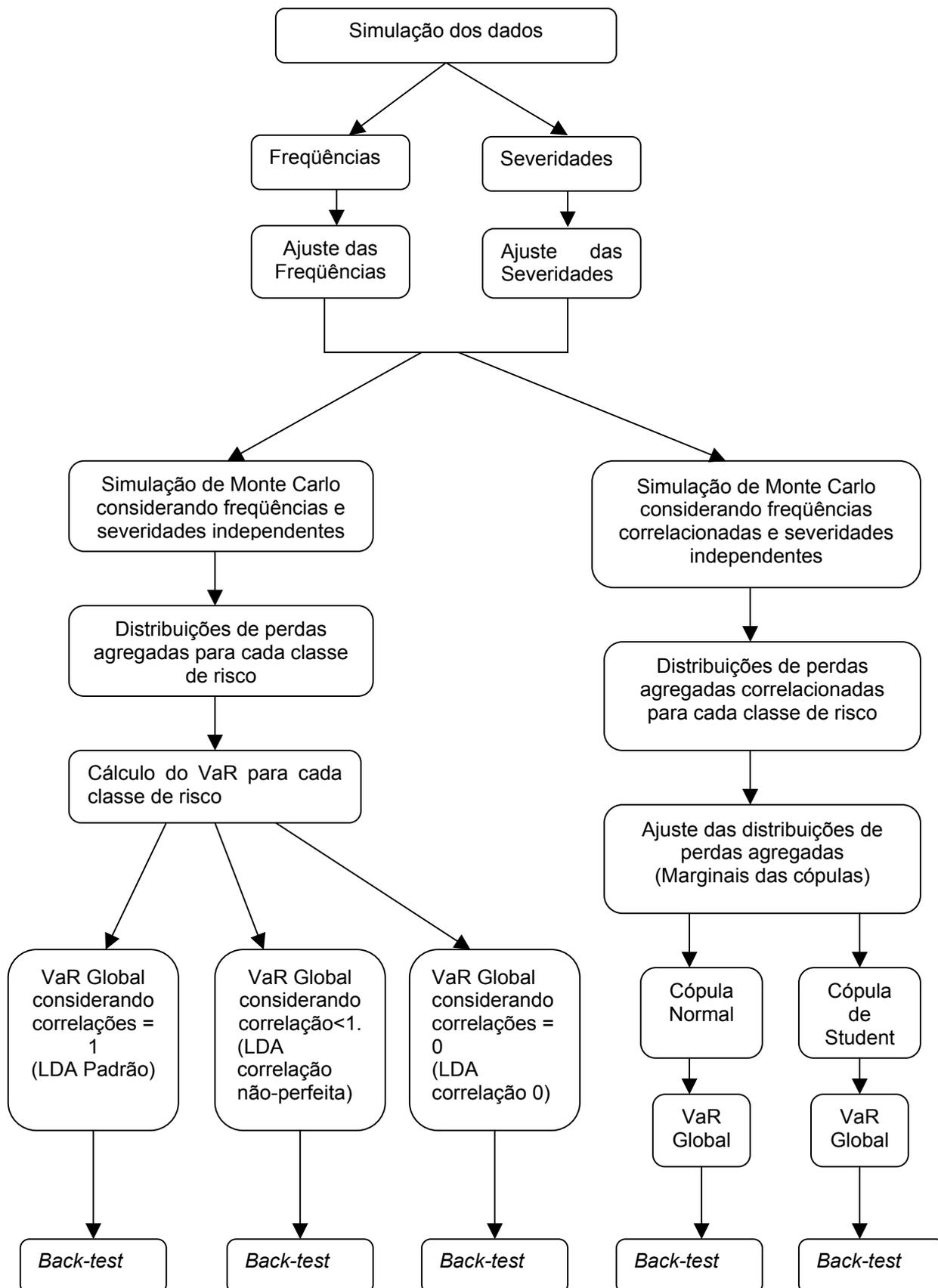


Figura 3: Esquema de execução dos modelos

4.1. LDA padrão

Sob a metodologia LDA padrão, estimamos, para cada célula linha de negócio/tipo de risco (classe de risco), as funções de distribuição de probabilidade da frequência e da severidade dos eventos, para o próximo período, usando seus dados internos. A partir dessas distribuições, obtém-se a função de distribuição das perdas agregadas, via simulação de Monte Carlo, conforme ilustrado na Figura 1 na seção 2.2.1. Cruz (2002) apresenta detalhadamente os procedimentos necessários para se obter a distribuição agregada.

O primeiro passo é encontrar as distribuições teóricas que melhor ajustam os dados empíricos de frequência e severidade. Kuhn e Neu (2003) afirmam que as escolhas mais populares para a distribuição de severidade das perdas são a log-normal, gamma, beta, Weibull, enquanto que para a distribuição de frequência são Poisson e binomial negativa. Nesse trabalho testaremos se as severidades seguem as distribuições exponencial, Weibull, gamma, Rayleigh e log-normal, e se as frequências seguem as distribuições binomial negativa, geométrica e Poisson. As formas analíticas dessas distribuições se encontram no anexo A.

A escolha das distribuições teóricas para severidade e para frequência será feita utilizando-se os critérios de informação *Akaike Information Criterion* (AIC) e *Bayesian Information Criterion* (BIC).

Com o conhecimento das distribuições teóricas que melhor ajustam frequências e severidades, obtêm-se as distribuições de perdas agregadas para cada classe de risco, por meio de simulação de Monte Carlo. A partir

dessas distribuições, calcula-se o VaR operacional para cada classe de risco conforme a fórmula (1). Nesse trabalho, utilizares 4 valores para o nível de confiança α , 90%, 95%, 99% e 99,9%, com o intuito de compararmos os resultados para diferentes níveis de confiança. O VaR operacional global para a cobertura de todos os tipos de riscos operacionais, será a soma dos VaRs de cada classe de risco, de acordo com a fórmula (5).

O requerimento de capital para cada classe de risco é o VaR da classe de risco menos a perda média dessa classe risco, conforme descrito na seção 2.2.1, fórmula 4. O requerimento total de capital é a soma do requerimento de cada classe de risco, de acordo com a discussão apresentada na seção 2.2.1.1, ou seja, considerando correlação perfeita entre as classes de risco.

4.2. LDA com correlação não-perfeita

Essa abordagem utiliza os resultados dos VaRs de cada classe de risco já obtidos na metodologia LDA padrão. Entretanto, o cálculo do VaR operacional global é obtido por meio da fórmula (9), apresentada na seção 2.2.2. Lembremos que nesse caso as correlações entre as classes de risco não assumem um valor fixo qualquer que seja o conjunto de dados analisados, como no caso da metodologia LDA padrão. Aqui, as correlações entre as perdas agregadas de cada classe de risco são calculadas utilizando-se a fórmula (8) e, conforme demonstrado na seção 2.2.2, no caso de as distribuições de frequências seguirem a distribuição de Poisson, essas correlações entre as perdas agregadas são menores que 1.

4.3. Cópulas

A modelagem usando cópulas é feita em 2 passos. Os riscos marginais são inicialmente estimados separadamente e então, podem ser combinados numa distribuição conjunta de risco que preserva as características originais das marginais.

As distribuições das perdas agregadas empíricas de cada classe de risco, as quais representam os riscos marginais, são ajustadas por uma distribuição teórica. Para fazer esse ajuste consideraremos as mesmas distribuições utilizadas no ajuste das distribuições de severidades: a exponencial, Weibull, gamma, Rayleigh e log-normal. A escolha da distribuição mais adequada para modelar as perdas agregadas também será feita utilizando-se os critérios de informação *Akaike Information Criterion* (AIC) e *Bayesian Information Criterion* (BIC).

Depois de determinadas as marginas conforme descrito no parágrafo anterior, gera-se a distribuição multivariada utilizando-se funções cópulas. Serão utilizadas as cópulas normal e de Student, por serem freqüentemente citadas na literatura de gestão de risco e por serem consideradas mais tratáveis. Como resultado, teremos a distribuição das perdas totais, a partir da qual calcula-se o VaR operacional global. A distribuição das perdas totais não é obtida de forma analítica, mas sim por meio de simulação de Monte Carlo.

Com o objetivo de verificar se alguma cópula de Student gera resultados significativamente melhores, testaremos cópulas de Student com grau de dependência variando de 1 a 10.

Ressaltamos que como as marginais não são as distribuições univariadas normal nem de Student, não temos nesse caso a distribuição multivariada Gaussiana ou de Student.

Abaixo são apresentados os algoritmos para a simulação das cópulas normal e gaussiana.

4.3.1. Algoritmos de simulação

Para realizar a simulação é utilizado o algoritmo citado por Romano (2001). Para gerar w observações aleatórias em n dimensões de acordo com a cópula normal o procedimento é:

1. Dada a matriz de correlações lineares R , encontrar a decomposição de Cholesky (Gentle, 1998) A , onde $AA^T = R$;

2. Simular n variáveis aleatórias normais independentes representadas por

$$Z = (z_1, \dots, z_n)^T;$$

3. Obter $X = AZ$;

4. Determinar as componentes $u_i = \Phi(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, formando o vetor

$$U = (u_1, \dots, u_n);$$

5. Repetir w vezes o algoritmo a partir do passo 2, gerando a matriz $w \times n$ $(U_1, \dots, U_w)^T$ que é o resultado da simulação de w observações de uma distribuição multivariada de acordo com a cópula normal e com marginais uniformes $(0, 1)$.

Uma variação desse algoritmo é utilizada para a cópula Student:

1. Dada a matriz de correlações lineares R , encontrar a decomposição de Cholesky A , onde $AA^T = R$;
2. Simular n variáveis aleatórias normais independentes representadas por $Z = (z_1, \dots, z_n)^T$;
3. Simular uma variável aleatória, s , de acordo com a distribuição quiquadrado com ν graus de liberdade;
4. Obter $Y = AZ$;
5. Obter $X = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}} Y$;
6. Determinar as componentes $u_i = t_\nu(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, formando o vetor $U = (u_1, \dots, u_n)$;

7. Repetir w vezes o algoritmo a partir do passo 2, gerando a matriz $w \times n$ $(U_1, \dots, U_w)^T$ que é o resultado da simulação de w observações de uma distribuição multivariada de acordo com a cópula Student com ν graus de liberdade e com marginais uniformes $(0,1)$.

A partir das marginais uniformes, pode-se aplicar qualquer outra distribuição marginal utilizando a transformação $F^{-1}(U(0,1))$, onde F é a distribuição marginal desejada e $U(0,1)$ é o valor da variável de distribuição uniforme entre 0 e 1. Em nossa aplicação, F são as distribuições estatísticas escolhidas para ajustar as perdas agregadas de cada classe de risco.

A partir da distribuição conjunta, calcula-se o VaR operacional global. O requerimento de capital total será o VaR operacional menos a média das perdas totais.

4.4. LDA com correlação zero

Considerando que as perdas agregadas de duas classes de risco distintas está entre a correlação perfeita e independência, calcularemos o requerimento de capital do banco como um todo considerando que a correlação entre as perdas de classes de risco distintas são nulas, somente para efeitos de comparação com os resultados obtidos com as outras metodologias.

Seguindo os argumentos já desenvolvidos na seção 2.2.2, sobre a abordagem metodológica LDA correlação não perfeita, temos que o VaR

operacional global do banco quando considerada a correlação zero entre perdas operacionais de diferentes classes de risco é obtido por:

$$K = EL + \sqrt{\sum_{i=1}^H (K_i - EL_i)^2} \quad (10)$$

onde K_h e EL_h são, respectivamente, o VaR operacional e a perda média da classe h , já calculados na implementação da metodologia LDA padrão.

4.5. Testando a consistência dos modelos

Back-testing um modelo que gera um VaR é simplesmente verificar se as perdas efetivamente ocorridas são consistentes com as perdas produzidas pelo VaR, dado um nível de confiança. Por exemplo, se considerarmos o nível de confiança α igual a 90%, o modelo será válido se ao compararmos o valor das perdas ocorridas ao VaR, essas perdas serão maiores que o VaR 1 vez a cada 100 dias, em média. Dizendo de outra forma, espera-se ter perda superior ao VaR somente uma vez a cada cem dias.

E se ocorrer perda superior ao VaR 2 vezes num determinado intervalo de cem dias, o modelo ainda pode ser considerado válido? Para responder a essa pergunta, Kupiec (1995) propôs um teste baseado na proporção de falhas.

Considere que em T dias, as perdas ocorridas tenham superado o VaR um número de dias igual a N . Desejamos saber se essa frequência é estatisticamente diferente do nível de significância do modelo $1 - c$, onde c é o nível de confiança assumido no modelo. A probabilidade de ocorrer N

falhas num período de T dias segue um processo binomial e é dada por $p^N (1-p)^{(T-N)}$, onde p denota a probabilidade real de falha.

A hipótese nula do teste é que $p = 1 - c$, ou seja, que a probabilidade de falha real é igual à probabilidade de falha teórica.

O teste é dado pela razão de verossimilhança

$$LR = -2 \ln [c^{T-N} (1-c)^N] + 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right] \quad (11)$$

o qual segue a distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

5. Resultados Empíricos

Nesse capítulo são apresentados os dados utilizados no trabalho e os resultados obtidos com a aplicação das metodologias descritas no capítulo anterior.

5.1. Dados

No Brasil, não existe uma de uma base de dados pública de perdas decorrentes de risco operacional. Além disso, os bancos que estão desenvolvendo suas metodologias para mensurar esse tipo de risco tratam a questão de maneira cautelosa no que se refere a divulgar suas bases de dados e, também, não dispõem dados suficientes para diversas classes de risco por um período suficientemente longo para aplicarmos as metodologias aqui descritas. Assim, utilizaremos dados simulados.

Frachot et al (2003) consideram uma boa idéia assumir que a distribuição de frequência é uma distribuição de Poisson pelas seguintes características. Em primeiro lugar, essa distribuição é usada largamente na indústria de seguros para modelar problemas similares a riscos operacionais; em segundo lugar, necessita de apenas um parâmetro para ser inteiramente descrita e, em terceiro lugar, o valor da máxima verossimilhança desse parâmetro é simplesmente a média amostral.

Assim, para simular os dados de frequência utilizaremos a distribuição de Poisson. Os valores dos parâmetros das distribuições de frequência foram escolhidos de forma a refletir a existência de classes de risco com baixa frequência e com alta frequência, levando se em conta também o esforço computacional que seria necessário para a aplicação das metodologias pretendidas.

As severidades foram geradas considerando-se uma mistura de funções de distribuição gamma. Tentou-se usar a distribuição log-normal, que aparece com bastante frequência na literatura teórica sobre risco operacional. Entretanto, essa última produzia alguns valores excessivamente elevados, da ordem de quatrilhões, que distorciam completamente qualquer análise, além de não serem compatíveis com a realidade do sistema financeiro brasileiro.

Os valores dos parâmetros das distribuições gamma foram baseados, em parte, no trabalho de Castro (2005). Naturalmente, por desejarmos estudar os efeitos da correlação no cálculo do VaR operacional e a literatura informar que existe correlação entre esses dados de perdas, os dados foram gerados

considerando-se que as freqüências eram correlacionadas e as severidades independentes.

5.1.1. Algoritmo de simulação dos dados

1. Gerar a matriz C de correlações lineares de freqüências de ordem $t =$ número de segmentos, baseada na distribuição uniforme(0,8 ; 0,9);
2. A partir de C, utilizando o algoritmo de simulação da cópula normal , obter as t séries de dados das freqüências com marginais uniformes.
3. A partir das marginais uniformes, aplicar a transformação $F^{-1}(U(0,1))$, onde F é a distribuição de Poisson.
4. Dadas as freqüências, obter as severidades independentes correspondentes por meio de uma mistura randômica de 3 séries de dados gerados aleatoriamente pela distribuição gamma.

5.2. Análise estatística dos dados

Com o objetivo de equacionar a quantidade de dados necessária para o estudo aqui proposto e o esforço computacional exigido para a realização do trabalho, escolheu-se o tamanho da amostra como sendo 5 classes de risco, cada uma delas com 10.000 observações. Vale lembrar que Basiléia II recomenda período mínimo de 5 anos de dados históricos reais para o

desenvolvimento de metodologias para cálculo de VaR operacional. Portanto, sob o ponto de vista das recomendações de Basiléia II, o número de observações gerado é adequado.

As freqüências correspondem ao número de eventos de perdas operacionais diários. Podemos observar na Tabela 1, que apresenta as estatísticas descritivas das séries de freqüências, que essas possuem características distintas quanto à média e ao máximo de ocorrências. Isso é desejável, uma vez que algumas classes de risco apresentam alta freqüência e outras, baixa freqüência, conforme afirma Alexander (2003).

Tabela 1: Estatísticas descritivas das séries de freqüências

Freqüências	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
Classe 1	5,965	2,453	0	17	0,416	3,134
Classe 2	0,496	0,704	0	5	1,379	4,737
Classe 3	3,977	1,986	0	15	0,497	3,276
Classe 4	0,995	0,995	0	7	0,984	3,965
Classe 5	1,978	1,416	0	10	0,750	3,698

A tabela 2 apresenta as estatísticas descritivas das séries de severidades.

As severidades representam o valor de um evento de perda. Apesar de terem sido geradas com uma mistura de distribuições as severidades apresentam estatísticas descritivas semelhantes. A exceção é o número de eventos, os quais levam a séries de perdas diárias por classe de risco bem distintas, como podemos ver na tabela 3.

Tabela 2: Estatísticas descritivas das séries de severidades

Severidades	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose	No. de eventos
Classe 1	23.515	58.642	0	891.139	4,21	27,54	59.651
Classe 2	24.982	63.129	0	660.287	4,39	28,78	4.957
Classe 3	23.415	57.336	0	735.825	4,02	24,81	39.766
Classe 4	23.960	56.947	0	640.498	3,88	23,00	9.947
Classe 5	23.872	58.322	0	685.674	3,92	23,03	19.783

Tabela 3: Estatísticas descritivas das séries de perdas

Perdas	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
Classe 1	140.276	154.530	0	1.310.798	1,781	7,389
Classe 2	12.384	47.403	0	682.927	6,343	56,318
Classe 3	93.110	123.698	0	1.216.051	2,122	8,986
Classe 4	23.833	62.270	0	888.003	4,262	27,949
Classe 5	47.225	89.488	0	831.559	2,923	13,737

Podemos ver que, embora as severidades apresentem cauda pesada e com valores da curtose semelhantes, as distribuições de perdas mantêm as características de caudas pesadas, mas com grande variação nos valores da curtose, devido à grande diferença entre os números de eventos de perdas das classes de risco.

5.3. Modelagem das distribuições de frequência e de severidade

Seguindo a metodologia LDA utilizando VaR paramétrico, inicialmente devemos ajustar as distribuições empíricas das frequências e das severidades por distribuições teóricas. O leque de opções de distribuições teóricas para o ajuste das frequências e das severidades foi obtido a partir das distribuições consideradas mais populares na modelagem de risco operacional, segundo

Cruz (2002) e Kühn e Neu (2003). Para as freqüências foram utilizadas as distribuições binomial negativa, Poisson e geométrica, enquanto que para as severidades foram testadas as distribuições exponencial negativa, Weibull, Gamma, Rayleigh e log-normal. O ajuste tanto das freqüências como das severidades foi feito usando-se o método da máxima verossimilhança.

A Tabela 4 apresenta os parâmetros das distribuições de freqüências, enquanto a Tabela 5 traz os parâmetros das severidades.

As freqüências das classes de risco 3 e 4 não puderam ser ajustadas pela distribuição binomial negativa, pois apresentam média maior que a variância.

Tabela 4: Parâmetros das distribuições de freqüências

Freqüências	Binomial Negativa		Poisson	Geométrica
	Parâmetro 1	Parâmetro 2		
Classe 1	681,289	0,991	5,965	0,144
Classe 2	494,457	0,999	0,496	0,669
Classe 3	-	-	3,977	0,201
Classe 4	-	-	0,995	0,501
Classe 5	142,700	0,986	1,978	0,336

Nota: As freqüências 3 e 4 não podem ser modeladas pela distribuição binomial negativa por ter a média maior que a variância.

Tabela 5: Parâmetros das distribuições de severidades

Severidades	Exponencial	Weibull		Gamma		Rayleigh	Log-normal	
		Par. 1	Par. 2	Par. 1	Par. 2		Média	D.padrão
Classe 1	23.515	609	0,141	0,093	253.440	44.675	1,231	15,155
Classe 2	24.982	776	0,149	0,098	255.886	48.003	1,783	14,179
Classe 3	23.415	626	0,141	0,093	250.704	43.792	1,292	14,975
Classe 4	23.960	727	0,144	0,096	250.863	43.685	1,532	14,830
Classe 5	23.872	665	0,143	0,095	252.593	44.559	1,427	14,704

A escolha das distribuições teóricas que melhor ajustam os dados empíricos foi feita por meio dos critérios de informação Akaike Information Criterion (AIC) e Bayesian Information Criterion (BIC).

As Tabelas 6 e 7 apresentam os critérios de informação para as freqüências e para as severidades, respectivamente.

Tabela 6. Critérios de informação para as distribuições de freqüências

Freqüências	Critérios de Informação	de Binomial Negativa	Poisson	Geométrica
Classe 1	AIC	45.997	45.995	57.311
	BIC	46.011	46.002	57.319
Classe 2	AIC	18.486	18.484	19.003
	BIC	18.500	18.491	19.010
Classe 3	AIC	-	41.596	49.938
	BIC	-	41.603	49.945
Classe 4	AIC	-	26.029	27.654
	BIC	-	26.037	27.661
Classe 5	AIC	34.061	34.060	38.016
	BIC	34.075	34.067	38.023

Podemos ver na Tabela 6 que, de acordo com os dois critérios de informação, a distribuição de Poisson é mais adequada para ajustar as freqüências de todas as classes de risco.

De acordo com os dois critérios de informação AIC e BIC, apresentados na Tabela 7, a distribuição teórica mais adequada para ajustar as severidades é a gamma.

Uma inspeção visual nos histogramas das freqüências e das severidades reais, bem como nos histogramas das freqüências e das severidades geradas pelas distribuições teóricas utilizadas confirmam a escolha feita utilizando-se os critérios de informação, conforme podemos verificar pelos gráficos apresentados no anexo B.

Tabela 7. Critérios de informação para as distribuições de severidades

Severidades	Critérios de Informação	Exponencial	Weibull	Gamma	Rayleigh	Log Normal
Classe 1	AIC	1.320.192	587.129	560.118	2.527.355	640.468
	BIC	1.320.201	587.147	560.136	2.527.364	640.486
Classe 2	AIC	110.304	53.663	51.553	205.970	58.033
	BIC	110.311	53.676	51.566	205.976	58.046
Classe 3	AIC	879.715	395.731	377.728	1.676.761	430.824
	BIC	879.723	395.748	377.745	1.676.770	430.841
Classe 4	AIC	220.510	103.421	98.866	414.538	112.362
	BIC	220.517	103.435	98.880	414.545	112.376
Classe 5	AIC	438.411	201.652	192.826	830.200	218.944
	BIC	438.419	201.667	192.841	830.208	218.960

Após a modelagem das distribuições empíricas das frequências e das severidades de todas as classes de risco, passamos agora para o cálculo do VaR operacional utilizando as metodologias descritas nos capítulos anteriores.

Para todas as metodologias, calcularemos o VaR de um dia. Com relação ao nível confiança, utilizaremos os níveis 90%, 95%, 99% e 99,9%.

5.4. Cálculo do Var Global sob a metodologia LDA padrão (correlação perfeita)

Sob a metodologia LDA padrão, depois do ajuste das distribuições de frequências e severidades, temos que determinar a distribuição agregada para cada classe de risco.

Na Tabela 8, a qual apresenta as estatísticas descritivas das distribuições agregadas, vê-se que essas possuem curtose elevada, indicando cauda pesada.

Tabela 8: Estatísticas descritivas das distribuições agregadas

Distribuições Agregadas	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
Classe 1	137.603	194.121	0	2.085.656	2,689	13,756
Classe 2	12.587	59.948	0	1.441.236	8,917	114,028
Classe 3	94.951	160.192	0	2.152.793	3,060	16,392
Classe 4	23.396	77.558	0	1.628.548	6,307	62,437
Classe 5	47.462	112.800	0	1.516.024	4,242	27,648

Determinadas as distribuições agregadas de todas as 5 classes de riscos, obtêm-se os VaRs individuais e, conseqüentemente o VaR operacional global, por meio da simples soma dos VaRs obtidos para cada uma das classes de risco. Esses resultados estão apresentados na Tabela 9.

Tabela 9: Var Operacional de um dia
Abordagem LDA padrão (correlação perfeita)

VaR	90%	95%	99%	99,9%
Classe 1	382.458	529.228	893.279	1.434.614
Classe 2	14.583	64.877	289.566	737.078
Classe 3	285.547	422.565	754.453	1.197.523
Classe 4	61.367	143.509	399.072	822.022
Classe 5	148.515	266.936	551.978	973.498
VaR Global	892.469	1.427.115	2.888.349	5.164.736

5.5. Cálculo do Var Global sob a metodologia LDA correlação não-perfeita

Sob a metodologia correlação não perfeita, utilizam-se os VaRs de cada classe de risco obtido por meio da metodologia LDA padrão e, o efeito da diversificação é inserido no cálculo do VaR global por meio das correlações

menores que 1 das distribuições agregadas. Essas correlações são calculadas de acordo com a equação (8).

De acordo com demonstrações apresentadas na seção 2.2.2 as correlações entre as distribuições agregadas devem ser significativamente menor que 1, mesmo se as correlações entre as frequências são altas.

As correlações das distribuições agregadas só seriam próximas às correlações das frequências se as variâncias das severidades fossem pequenas em comparação com as médias das severidades. Isso acontece quando temos eventos de alta frequência e baixa severidade.

Esse não é o caso dos dados aqui utilizados. Observando as matrizes das correlações das frequências e das distribuições agregadas, apresentadas nas tabelas 10 e 11, respectivamente, podemos verificar que embora as correlações entre as frequências sejam altas - entre 70% e 80% - as correlações entre as distribuições agregadas são baixas - entre 1% e 9%. Isso ocorre por que a independência das severidades domina a dependência das frequências. Esse efeito vai de encontro com os resultados apresentados por Frachot et al (2004).

Tabela 10: Matriz das correlações da frequência

	Freq. 1	Freq. 2	Freq. 3	Freq. 4	Freq. 5
Freq. 1	1	0,7319	0,8023	0,7829	0,8086
Freq. 2	0,7319	1	0,7497	0,7166	0,6968
Freq. 3	0,8023	0,7497	1	0,7704	0,8087
Freq. 4	0,7829	0,7166	0,7704	1	0,7949
Freq. 5	0,8086	0,6968	0,8087	0,7949	1

Tabela 11: Matriz das correlações das distribuições agregadas

	Distr.Agr. 1	Distr.Agr. 2	Distr.Agr. 3	Distr.Agr. 4	Distr.Agr. 5
Distr.Agr. 1	1	0,0289	0,0922	0,0461	0,0657
Distr.Agr. 2	0,0289	1	0,0245	0,0120	0,0161
Distr.Agr. 3	0,0922	0,0245	1	0,0377	0,0545
Distr.Agr. 4	0,0461	0,0120	0,0377	1	0,0275
Distr.Agr. 5	0,0657	0,0161	0,0545	0,0275	1

Nota: Correlações calculadas conforme fórmula (8).

De posse dos VaRs da metodologia LDA padrão e das correlações das distribuições agregadas, obtemos o VaR global de um dia sob a metodologia LDA correlação não perfeita por meio da fórmula (9).

Comparando o VaR global obtido pela metodologia LDA correlação não-perfeita, apresentado na Tabela 12, ao VaR global obtido pela metodologia LDA padrão, apresentado na Tabela 9, vemos que a metodologia LDA Padrão gera um VaR global significativamente maior que o VaR da metodologia LDA correlação não-perfeita. Além disso, quanto maior o nível de confiança do VaR, maior é a diferença entre os VaRs das duas metodologias, chegando ao caso de o VaR global da metodologia LDA padrão ser quase o dobro do VaR global da metodologia LDA correlação não-perfeita, quando o nível de confiança é de 99,9%.

Tabela 12: Var Operacional de um dia
Abordagem LDA correlação não-perfeita

VaR	90%	95%	99%	99,9%
VaR Global	657.493	915.165	1.632.676	2.842.399

5.6. Cálculo do VaR Global sob a metodologia LDA correlação zero

O VaR global considerando zero a correlação entre as classes de risco não reflete a realidade e, é obtido somente com o objetivo de comparar os resultados gerados pelas diferentes abordagens metodológicas utilizadas nesse trabalho.

Os VaRs globais obtidos por meio da metodologia LDA correlação não-perfeita, apresenta valores relativamente próximos aos VaRs globais obtidos com a metodologia correlação zero, os quais são apresentados na Tabela 12. Esse resultado era esperado com os dados aqui utilizados, uma vez que as correlações das distribuições agregadas são baixas.

Tabela 13: Var Operacional de um dia
Abordagem LDA correlação zero

VaR	90%	95%	99%	99,9%
VaR Global	635.403	871.422	1.530.016	2.648.764

5.7. Cálculo do Var Global usando cópulas

Nas metodologias anteriores, as distribuições agregadas eram geradas por meio da simulação de Monte Carlo, considerando a independência tanto das frequências quanto das severidades. Entretanto, ao utilizarmos as funções cópulas estamos supondo que exista uma estrutura de dependência entre as séries de distribuições agregadas. Portanto, vamos gerá-las, também com simulação de Monte Carlo mas, considerando que exista dependência entre as

freqüências e independência entre as severidades. Consideraremos a existência de dependência somente entre as freqüências para mantermos as mesmas hipóteses da metodologia LDA correlação não-perfeita, e assim, podemos fazer comparações entre os resultados obtidos.

Tabela14: Estatísticas descritivas das distribuições agregadas correlacionadas

Distr. Agreg.	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
Classe 1	150.560	218.354	0	2.124.569	2,463	11,130
Classe 2	9.150	47.449	0	1.118.005	9,329	119,935
Classe 3	90.579	152.819	0	1.809.173	3,255	18,328
Classe 4	21.450	77.393	0	1.467.253	7,024	72,998
Classe 5	43.506	105.892	0	1.617.130	4,829	37,350

As estatísticas descritivas das distribuições agregadas correlacionadas considerando freqüências correlacionadas e severidades independentes são apresentadas na Tabela 14. Podemos ver que essas distribuições mantêm as mesmas características das distribuições agregadas geradas considerando freqüência e severidades independentes, cujas estatísticas estão apresentadas na Tabela 8.

As marginais das cópulas serão obtidas a partir das distribuições agregadas correlacionadas. Assim, temos que encontrar as distribuições teóricas que melhor as ajustam. Isso é feito na próxima subseção.

5.7.1. Ajuste das distribuições agregadas correlacionadas para se determinar as marginais da cópula

As distribuições teóricas escolhidas para ajustar as distribuições agregadas correlacionadas foram as mesmas utilizadas para o ajuste das

severidades, ou seja, a exponencial, a Weibull, a gamma, a Rayleigh e a log-normal. Os parâmetros obtidos para essas distribuições encontram-se na Tabela 15.

Tabela 15: Parâmetros das distribuições agregadas correlacionadas

Distr. Agreg.	Exponencial	Weibull		Gamma		Rayleigh	Log Média	Normal D.P.
		Par. 1	Par. 2	Par. 1	Par. 2			
Classe 1	150.560	59.674	0,323	0,227	664.582	187.540	8,737	6,099
Classe 2	9.150	0,54	0,119	0,062	147.231	34.168	-4,67	7,370
Classe 3	90.579	43.420	0,439	0,313	289.715	125.610	9,223	3,584
Classe 4	21.450	66,02	0,137	0,084	255.981	56.786	0,072	8,256
Classe 5	43.506	4.865	0,240	0,157	276.581	80.947	5,828	6,099

A escolha das distribuições teóricas que melhor ajustam as distribuições agregadas correlacionadas foi feita utilizando-se os critérios de informação AIC e BIC. Conforme os resultados apresentados na Tabela 16, com exceção da distribuição agregada da classe 4, todas as outras distribuições empíricas são mais bem ajustadas pela distribuição gamma. Apesar de os critérios de informação indicarem que a distribuição agregada da classe 4 é mais bem ajustada pela distribuição log-normal, na prática esta gerou valores irreais, distorcendo o cálculo dos VaRs. Por essa razão decidimos pela distribuição gamma para todas as classes de risco. Portanto, todas as marginais das cópulas serão distribuições gammas.

Tabela16: Critérios de Informação para as distribuições agregadas correlacionadas

Distrib. Agregadas	Critérios de Informação	Exponencial	Weibull	Gamma	Rayleigh	Log Normal
Classe 1	AIC	258.444	231.948	228.277	330.933	239.283
	BIC	258.452	231.962	228.292	330.940	239.297
Classe 2	AIC	202.432	21.181	16.654	530.970	25.077
	BIC	202.440	21.166	16.640	530.978	25.063
Classe 3	AIC	248.282	233.712	232.739	305.175	238.374
	BIC	248.289	233.726	232.754	305.182	238.388
Classe 4	AIC	219.472	72.475	72.599	456.445	72.039
	BIC	219.479	72.489	72.613	456.452	72.054
Classe 5	AIC	233.615	177.910	176.357	355.496	181.113
	BIC	233.622	177.924	176.372	355.503	181.128

5.7.2. Cópulas

Foram geradas distribuições agregadas de perdas total utilizando as cópulas normal e de Student, com graus de liberdade de 1 a 10.

As distribuições agregadas obtidas com as cópulas representam a soma das distribuições agregadas de todas as classes de risco. A Tabela 17 mostra as estatísticas descritivas dessas distribuições. De maneira geral, vemos uma redução da assimetria e da curtose em comparação com as distribuições agregadas obtidas com independência entre freqüências e severidades.

Tabela 17: Estatísticas descritivas das distribuições agregadas obtidas com as cópulas

Cópulas	Grau	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
Normal	-	292.609	375.440	0,0077	5.311.231	2,9528	17,6927
Student	1	299.150	465.698	0,0033	5.954.758	3,8033	23,2909
Student	2	290.640	379.256	4,5714	4.518.713	3,0084	17,1451
Student	3	289.810	412.266	0,0000	8.696.085	4,0756	36,6346
Student	4	291.732	406.054	0,0007	4.521.607	3,5373	22,2697
Student	5	302.665	424.269	0,2078	6.153.853	3,6101	24,3384
Student	6	297.685	411.610	0,0250	6.717.844	3,6068	26,0201
Student	7	292.707	397.996	0,0035	4.660.998	3,4215	21,4318
Student	8	304.162	420.252	0,0951	4.914.004	3,4429	21,8177
Student	9	304.288	410.867	0,0106	4.595.161	3,0923	17,4552
Student	10	290.510	389.990	0,3301	4.785.334	3,1400	18,6694

A Tabela 18 apresenta os VaRs globais obtidos com as diferentes cópulas. A comparação dos resultados da cópula de Student para os diversos graus de liberdade não evidenciou o fato de que um determinado grau produziria resultados significativamente melhores, como podemos ver nas Tabelas 17 e 18. Entretanto, pelo fato de a cópula de Student com grau de liberdade $\nu = 2$, ter gerado o VaR global menor ao nível de confiança de 99,9%, esta será a cópula de Student escolhida para a comparação dos resultados quando da realização do *back-test*.

Tabela 18: Var Operacional Global de um dia
Abordagem metodológica - Cópulas

Cópulas	Grau	90%	95%	99%	99,9%
Normal	-	733.132	1.015.403	1.748.516	3.080.180
Student	1	734.913	1.131.475	2.408.959	3.894.643
Student	2	726.528	1.008.990	1.836.966	3.109.770
Student	3	716.681	1.034.797	2.040.358	3.461.089
Student	4	720.271	1.037.998	1.957.693	3.600.006
Student	5	766.898	1.078.095	2.034.267	3.819.434
Student	6	748.646	1.078.645	1.891.162	3.708.466
Student	7	737.485	1.019.169	1.940.750	3.679.352
Student	8	758.683	1.087.551	2.033.497	3.718.407
Student	9	765.598	1.105.955	1.927.247	3.562.331
Student	10	726.889	1.048.734	1.829.979	3.284.828

5.8. Comparação dos resultados obtidos

A Tabela 19 agrega todos os VaRs globais obtidos com as diferentes abordagens metodológicas estudadas nessa dissertação, enquanto que a Tabela 20 apresenta os valores de alocação de capital para a cobertura de eventuais perdas devido a risco operacional. A alocação de capital em todas as metodologias é obtida subtraindo-se a média das perdas agregadas do VaR global.

Tabela19: Comparação do VaR operacional global

Metodologia	Grau	90%	95%	99%	99,9%
Correlação = 0	-	635.403	871.422	1.530.016	2.648.764
Correlação <1	-	657.493	915.165	1.632.676	2.842.399
Normal	-	733.132	1.015.403	1.748.516	3.080.180
Student	1	734.913	1.131.475	2.408.959	3.894.643
Student	2	726.528	1.008.990	1.836.966	3.109.770
Student	3	716.681	1.034.797	2.040.358	3.461.089
Student	4	720.271	1.037.998	1.957.693	3.600.006
Student	5	766.898	1.078.095	2.034.267	3.819.434
Student	6	748.646	1.078.645	1.891.162	3.708.466
Student	7	737.485	1.019.169	1.940.750	3.679.352
Student	8	758.683	1.087.551	2.033.497	3.718.407
Student	9	765.598	1.105.955	1.927.247	3.562.331
Student	10	726.889	1.048.734	1.829.979	3.284.828
Correlação = 1	-	892.469	1.427.115	2.888.349	5.164.736

Tabela 20: Comparação da Alocação de Capital

Metodologia	Grau	90%	95%	99%	99,9%
Correlação = 0	-	319.446	555.465	1.214.059	2.332.807
Correlação <1	-	341.536	599.208	1.316.719	2.526.442
Normal	-	440.523	722.793	1.455.906	2.787.571
Student	1	435.763	832.325	2.109.809	3.595.493
Student	2	435.888	718.351	1.546.326	2.819.130
Student	3	426.871	744.988	1.750.549	3.171.280
Student	4	428.539	746.266	1.665.961	3.308.274
Student	5	464.233	775.430	1.731.602	3.516.769
Student	6	450.961	780.960	1.593.477	3.410.781
Student	7	444.778	726.462	1.648.044	3.386.645
Student	8	454.521	783.388	1.729.334	3.414.244
Student	9	461.310	801.667	1.622.960	3.258.043
Student	10	436.379	758.224	1.539.469	2.994.318
Correlação = 1	-	576.512	1.111.158	2.572.392	4.848.779

Tanto os resultados dos VaRs globais quanto das alocações de capital evidenciam que a metodologia LDA padrão gera um requerimento de capital bastante alto em comparação com as outras metodologias, qualquer que seja o nível de confiança utilizado.

As cópulas normal e de Student com 2 graus de liberdade apresentam resultados semelhantes, com uma pequena diferença em favor da cópula Normal. No entanto, para os dados utilizados, a abordagem LDA correlação não-perfeita apresentou o menor requerimento de capital.

Portanto, considerando somente o valor do VaR, sem avaliar a performance das metodologias ao longo do tempo, podemos estabelecer a seguinte ordem do menor requerimento de capital gerado:

LDA correlação 0 < LDA correlação não-perfeita < Cópula normal < Cópula de Student < LDA padrão.

Passamos então para a avaliação da performance das abordagens metodológicas por meio do *back-test*.

5.9. *Back-tests*

Para podermos concluir que o efeito da diversificação é crucial no cálculo de VaR operacional global, temos que checar se as perdas efetivamente ocorridas são consistentes com os correspondentes VaRs produzidos pelas metodologias que consideram correlação não-perfeita, a um determinado nível de confiança.

Em todos os *back-tests*, a amostra de 10.000 observações foi dividida de forma a termos 5.001 observações para a comparação dos resultados dos modelos (abordagens metodológicas) com as perdas ocorridas. Assim, considerando os níveis de confiança de 90%, 95%, 99% e 99,9%, para que o modelo seja considerado adequado, espera-se que ocorra falhas em no máximo 500, 250, 50 e 5 dias respectivamente. Para determinar se a

proporção de falhas do VaR ocorrida no período de teste se mostrou coerente com o nível de confiança escolhido utilizou-se o teste de Kupiec.

A Tabela 21 apresenta os resultados do *back-tests* para cada classe de risco, bem como a avaliação dos mesmos pelo teste de Kupiec, considerando os VaRs das classes de risco calculados sob a metodologia LDA padrão.

Tabela 21: *Back-tests* para o VaR de cada classe de risco
Abordagem LDA padrão

Classes	α	No. falhas	% falhas	Kupiec	P-valor
Classe 1	99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
	99	9	0,18 %	51,4888	0,0000
	95	137	2,74 %	63,9087	0,0000
	90	395	7,90 %	26,2567	0,0000
Classe 2	99,9	3	0,06 %	0,9366	0,3331
	99	41	0,82 %	1,7470	0,1863
	95	322	6,44 %	20,0568	0,0000
	90	594	11,88 %	18,5934	0,0000
Classe 3	99,9	1	0,02 %	4,7859	0,0287
	99	15	0,30 %	34,1418	0,0000
	95	178	3,56 %	24,1908	0,0000
	90	471	9,42 %	1,9149	0,1664
Classe 4	99,9	1	0,02 %	4,7859	0,0287
	99	15	0,30 %	34,1418	0,0000
	95	269	5,38 %	1,4768	0,2243
	90	643	12,86 %	42,0047	0,0000
Classe 5	99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
	99	13	0,26 %	39,2669	0,0000
	95	230	4,60 %	1,7370	0,1875
	90	579	11,58 %	13,2318	0,0003

Observamos que, para a classe de risco 2, o teste de Kupiec não rejeita a hipótese nula de que o percentual de falhas ocorrido seja estatisticamente igual ao percentual de falhas esperado, tanto para o nível de confiança de 99,9% quanto para 99%, indicando que esse modelo é adequado para a classe 2. Para as outras classes, para esses mesmos nível de confiança, de acordo

com o teste de Kupiec, o modelo superestimou as perdas, fazendo com que houvesse rejeição da hipótese nula.

Somente ocorreu rejeição por subestimar as perdas para o nível de confiança de 90%, para as classes 2, 4 e 5.

Entretanto, se considerarmos o VaR global obtido pela metodologia LDA padrão, que é simplesmente a soma dos VaRs de cada classe de risco, o requerimento de capital obtido é superestimado para todos os níveis de confiança, como podemos ver na Tabela 22.

Esse fato é a primeira evidência de que o cálculo do VaR operacional global considerando correlação perfeita entre as classes de risco pode levar a um requerimento de capital excessivamente conservador.

Tabela 22: *Back-tests* para o VaR global
Abordagem LDA padrão (correlação perfeita)

α	No. falhas	% falhas	Kupiec	P-valor
99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
99	0	0 %	100,5235	0,0000
95	21	0,42 %	364,9297	0,0000
90	224	4,48 %	208,9842	0,0000

As Tabelas 23, 24, e 25 apresentam os resultados dos *back-tests* e do teste de Kupiec para as abordagens LDA correlação não-perfeita, cópula Normal e cópula de Student com 2 graus de liberdade, respectivamente.

Podemos verificar que para os níveis de confiança 99,9%, 99% e 95% o teste de Kupiec rejeita a hipótese de que o número de falhas é coerente com o nível de confiança do VaR, devido a superestimação das perdas. Somente para o nível de confiança de 90%, sob a metodologia LDA correlação não-perfeita

temos que o número de falhas é coerente com o quantil do VaR, se considerarmos o nível de significância de 10%.

Portanto, podemos dizer que esses modelos superestimam as perdas, mostrando-se ainda conservador, mesmo tendo gerado VaRs globais menores que a metodologia LDA padrão.

Tabela 23: *Back-tests* para o VaR global
Abordagem LDA correlação não-perfeita

α	No. falhas	% falhas	Kupiec	P-valor
99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
99	2	0,04 %	83,6078	0,0000
95	141	2,82 %	59,0260	0,0000
90	539	10,78 %	3,2875	0,0698

Tabela 24: *Back-tests* para o VaR global
Cópula Normal

α	No. falhas	% falhas	Kupiec	P-valor
99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
99	2	0,04 %	83,6078	0,0000
95	83	1,66 %	156,8379	0,0000
90	342	6,84 %	61,7714	0,0000

Tabela 25: *Back-tests* para o VaR global
Cópula Student com 2 graus de liberdade

α	No. falhas	% falhas	Kupiec	P-valor
99,9	0	0 %	10,0070	0,0016
99	0	0 %	100,5235	0,0000
95	64	1,28 %	204,8570	0,0000
90	361	7,22 %	47,1337	0,0000

Dado que todas as abordagens tiveram resultados semelhantes nos *back-tests*, mantemos a ordem comparativa dos modelos apresentada ao final da subseção anterior.

5.10. Efeito Diversificação

Espera-se que o efeito diversificação seja aumentado na medida em que mais classes de risco sejam consideradas. Para verificar essa hipótese, calculamos o VaR operacional considerando 10 classes de risco. Os resultados, apresentados na Tabela 26, mostram que nesse caso, com exceção da cópula Student com 2 graus de liberdade, as outras metodologias geraram um VaR global ainda menor que o VaR global gerado pela metodologia LDA padrão. Por exemplo, a cópula Normal gerou, considerando 10 classes de risco, VaR global correspondente a aproximadamente 30% do VaR global gerado pela metodologia LDA padrão, enquanto que considerando 5 classes de risco, gerou VaR global correspondente a 60% do VaR global da metodologia LDA padrão. Para a metodologia LDA correlação não-perfeita o percentual de correspondência do VaR global em relação ao VaR da LDA padrão caiu de 55%, para 5 classes de risco, para 44%, quando consideradas 10 classes de risco.

Tabela 26 : Comparação do VaR operacional global
10 classes de risco

Metodologia	Grau	90%	95%	99%	99,9%
Correlação <1	-	1.106.222	1.586.505	2.904.090	4.909.249
Normal	-	1.187.848	1.498.880	2.315.604	3.574.723
Student	2	1.317.704	1.894.351	3.746.566	7.590.559
Student	3	1.282.740	1.796.424	3.441.380	6.061.733
Correlação = 1	-	1.778.352	2.952.850	6.198.138	11.108.552

Isso mostra que o efeito diversificação é extremamente importante para a mensuração de risco operacional e que metodologias que o incorporem no

cálculo de requerimento total de capital devem ser consideradas pela indústria bancária.

6. Conclusão

O objetivo desse trabalho foi estudar o efeito das correlações entre as classes de risco no cálculo do requerimento total de capital para cobertura de perdas operacionais. O Novo Acordo de Basileia menciona o uso de correlações para o cálculo do VaR global, entretanto, não recomenda nenhuma metodologia para tal fim. A única recomendação explícita sobre o cálculo do VaR operacional global é a soma dos VaRs de cada classe de risco, assumindo implicitamente correlação perfeita entre as mesmas.

A literatura sobre esse assunto ainda é escassa, destacando-se a metodologia correlação não-perfeita proposta por Frachot et al (2004), a qual considera que as freqüências são correlacionadas e as severidades são independentes e a metodologia que utiliza funções cópulas para modelar a dependência entre as distribuições agregadas.

Os resultados obtidos utilizando a metodologia LDA padrão mostraram que esta gera um requerimento total de capital excessivamente conservador, por não considerar os efeitos da diversificação nos tipos de perdas operacionais e linhas de negócio. Além disso, evidenciam o fato que ao analisarmos cada classe de risco separadamente corremos o risco de aumentarmos ainda mais a já excessiva alocação total de capital.

A metodologia correlação não-perfeita gerou VaR operacional global bem próximo ao VaR operacional calculado considerando-se as correlações

entre as classes de risco como sendo zero. Esse resultado pode ser justificado pelo fato de as distribuições de severidade apresentarem cauda pesada. Entretanto, não podemos afirmar que o mesmo ocorrerá se utilizarmos dados com alta frequência e severidades baixas, pois nesse caso, as correlações das distribuições agregadas serão mais altas e, conseqüentemente o VaR global será maior.

Quando consideradas 5 classes de risco, as cópulas normais e de Student não apresentaram resultados significativamente diferentes.

Tanto a metodologia LDA correlação não-perfeita quanto todas as cópulas consideradas, apesar de gerarem requerimento de capital bem menor que a metodologia LDA padrão, ainda assim se mostraram bastante conservadoras, havendo rejeição do teste de Kupiec no sentido de superestimar as perdas.

A metodologia LDA correlação não-perfeita não apresentou resultados muito distintos das cópulas quando consideradas 5 classes de risco. Entretanto, ao aumentar o número de classes de risco para 10, a cópula normal apresentou melhor resultado, com VaR global menor.

O aumento do número de classes de risco evidencia ainda mais o efeito diversificação, levando as metodologias que consideram as correlações entre as perdas a gerar um VaR menor em comparação com a metodologia LDA padrão. Quanto maior o número de classes de risco, maior a redução de requerimento de capital em relação a simples soma dos VaRs.

As distribuições aqui utilizadas, ainda que padrão no meio bancário, não se caracterizam por serem genuinamente de cauda pesada. Mesmo assim, demonstraram capturar bem esse fenômeno.

Um problema não tratado nesse trabalho, mas que surgiu no processamento das metodologias é o tempo computacional necessário para a execução das rotinas, principalmente nos *back-tests*. Sob esse aspecto as funções cópulas apresentam vantagens sobre as outras metodologias, uma vez que apenas uma distribuição agregada é gerada.

Em suma, o efeito diversificação é crucial para a mensuração de risco operacional. Portanto, metodologias que incorporem o efeito diversificação no cálculo de requerimento total de capital, especialmente cópulas, devem ser consideradas pela indústria bancária.

7. Referências Bibliográficas

Alexander, C., 2003. *Operational risk: regulation, analysis and management*. Prentice Hall.

Andrade, F.W.M., 2004. *Desenvolvimento de modelo de risco de portfólio para carteiras de crédito a pessoas físicas*. Tese de doutorado. FVG/EAESP.

BACEN, 2004. Comunicado 12.746 do Banco Central do Brasil.

BIS, 1988. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

BIS, 1999. *A New Capital Adequacy Framework* Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

BIS, 2001a. *Operational Risk - Consultative Document*. Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

BIS, 2001b. *Working paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk* Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

BIS, 2003. *Sound Practices for the Management and Supervision of Operational Risk*. Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

BIS, 2004. *International Coverage of Capital Measurement and Capital Standards* Comitê de Basileia para Supervisão Bancária.

Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. e Roncalli, T., 2000. *Copulas for finance: a reading guide and some applications*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Brandts, S., 2004. *Operational risk and insurance: quantitative and qualitative aspects*, mimeo.

Castro, R.C.F., 2005. *Modelagem causal em risco operacional via modelos lineares generalizados*, Dissertação de Mestrado. Departamento de Economia, Universidade de Brasília.

Cherubini, U., Luciano, E. e Vecchiato, W., 2004. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons.

Cruz, M.G., 2002. *Modeling, measuring and hedging operational risk* - Wiley Finance

Embrechts, P., Lindskog, F. e McNeil, A., 2001. *Modelling dependence with copulas and applications to Risk management*. Mimeo. Departamento de Matemática. Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

Fishman, G.S., 1996. *Monte Carlo: Concepts, algorithms and applications*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York.

Frachot, A., Georges, P. e Roncalli, T., 2001. *Loss distribution approach for operational risk*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Frachot, A., Moudoulaud, O. e Roncalli, T., 2003. *Loss distribution approach in practice*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Frachot, A., Roncalli, T. e Salomon, E., 2004. *The correlation Problem in Operational Risk*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Frees, E. e Valdez, E., 1998. *Understanding relationships using copulas*, North American Actuarial Journal, 2, 1-25.

Geiger, H., 2000, *Regulating and supervising operational risk for banks*, mimeo.

Hoeffding, W. 1940. *Scale-invariant correlation theory*, in The collected works of Wassily Hoeffding, N.I. Fisher e P.K. Sen, Springer-Verlag, Nova York, 57-107.

Hoeffding, W. 1941. *Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions*, in The collected works of Wassily Hoeffding, N.I. Fisher e P.K. Sen, Springer-Verlag, Nova York, 109-133.

Jouanin, J.F., Riboulet, G. e Roncalli, T., 2002. *Financial Applications of Copula Functions*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Kühn, R. e Neu, P. (2003) *Functional correlation approach to operational risk in banking organizations* - Physica A - 650-666.

Kupiec, P., 1995. *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*. Journal of Derivatives 3, 73-84.

Lindskog, F., 2001. *Modelling dependence with copulas*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

Lucas, E.C., 2003. *Cálculo do VaR utilizando acoplamentos e teoria de valores extremos*. Dissertação de mestrado. Unicamp.

Mendes, B.V.M., 2004. *Introdução à Análise de Eventos Extremos*, E-papers - Rio de Janeiro.

Mendes, B.V.M. e Souza, R.M., 2004. *Measuring financial risks with copulas*. International Review of Financial Analysis, 13, 27-45.

Nelsen, R.B., 1999. *An introduction to copulas*. Lectures Notes in Statistics, 139, Springer Verlag, New York.

Rosenberg, V. e Schuermann, T., 2006. *A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks*. Journal of Financial Economics, 79, 569-614.

Romano, C., 2001. *Applying copula function to risk management*. Mimeo.

Sklar, A., 1959. *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231.

Anexos

Anexo A - Distribuições estatísticas utilizadas

Distribuições estatísticas testadas para as frequências

Binomial Negativa

$$f(x | r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x, \quad \text{onde } p = 1 - q.$$

Domínio: $x = 0, 1, 2, \dots$

Poisson

$$f(x | \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Domínio: $x = 0, 1, 2, \dots$

Geométrica

$$f(x | p) = pq^x, \quad \text{onde } p = 1 - q.$$

Domínio: $x = 0, 1, 2, \dots$

Distribuições estatísticas testadas para as severidades

Exponencial

$$f(x | \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

Domínio: $x \in \mathfrak{R}$

Weibull

$$f(x | a, b) = b a^{-b} x^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

Domínio: $x \geq 0$

Gamma

$$f(x | a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}},$$

onde Γ é a função gamma.

Domínio: $x \in \mathfrak{R}$

Rayleigh

$$f(x | b) = \frac{x}{b^2} e^{-\left(\frac{x^2}{2b^2}\right)}$$

Domínio: $x \in \mathfrak{R}$

Log-normal

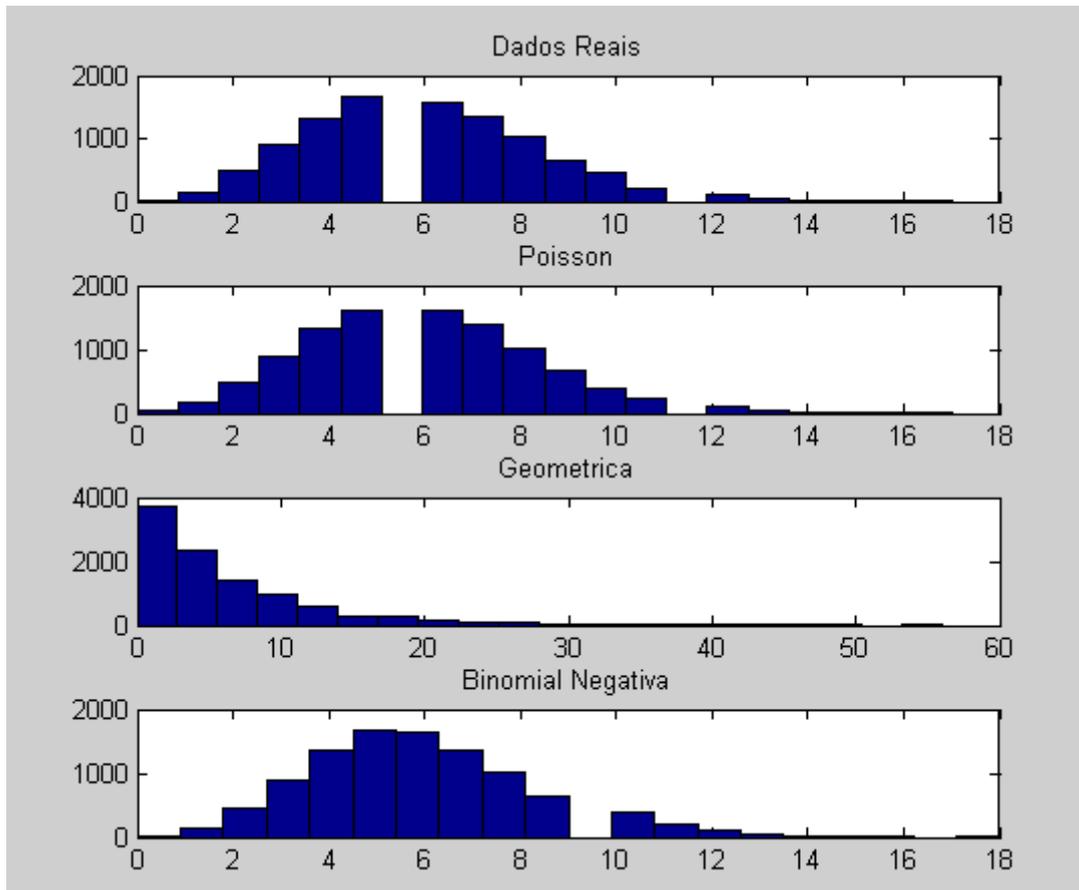
$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Domínio: $x > 0$

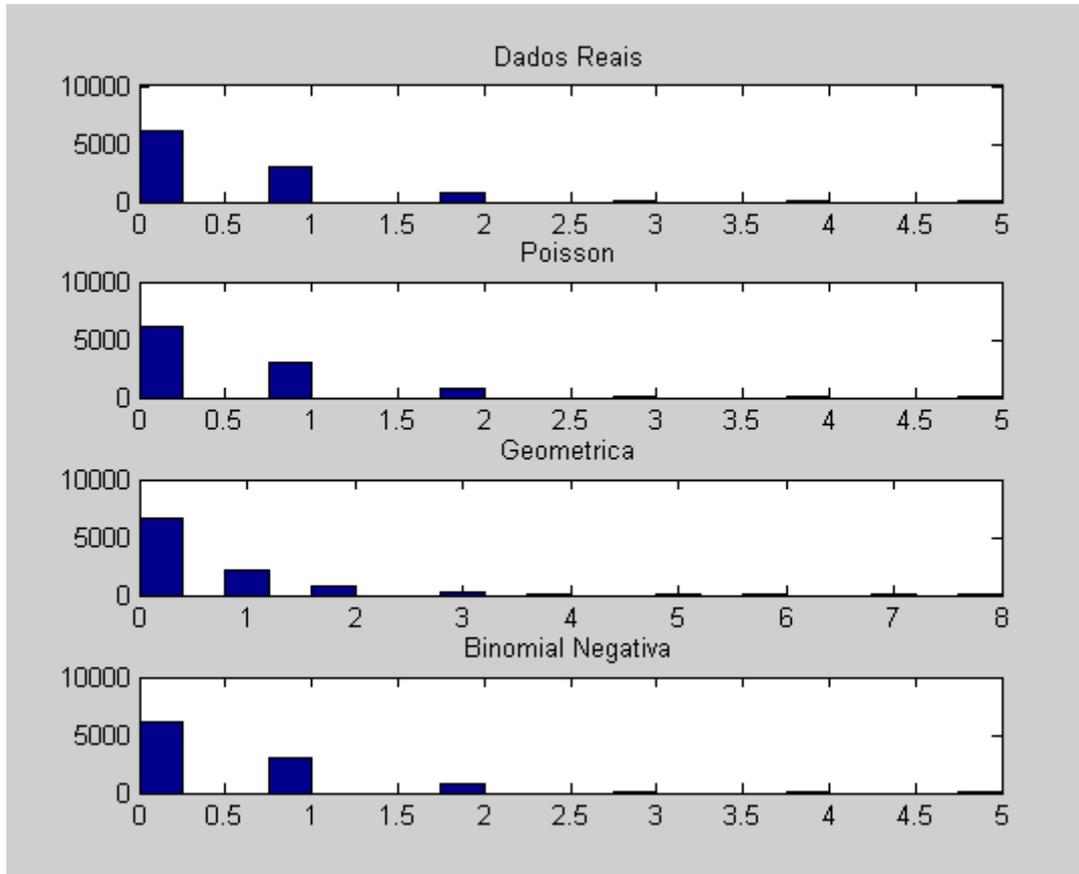
Anexo B - Histogramas dos dados reais e ajustados

Histogramas para as frequências

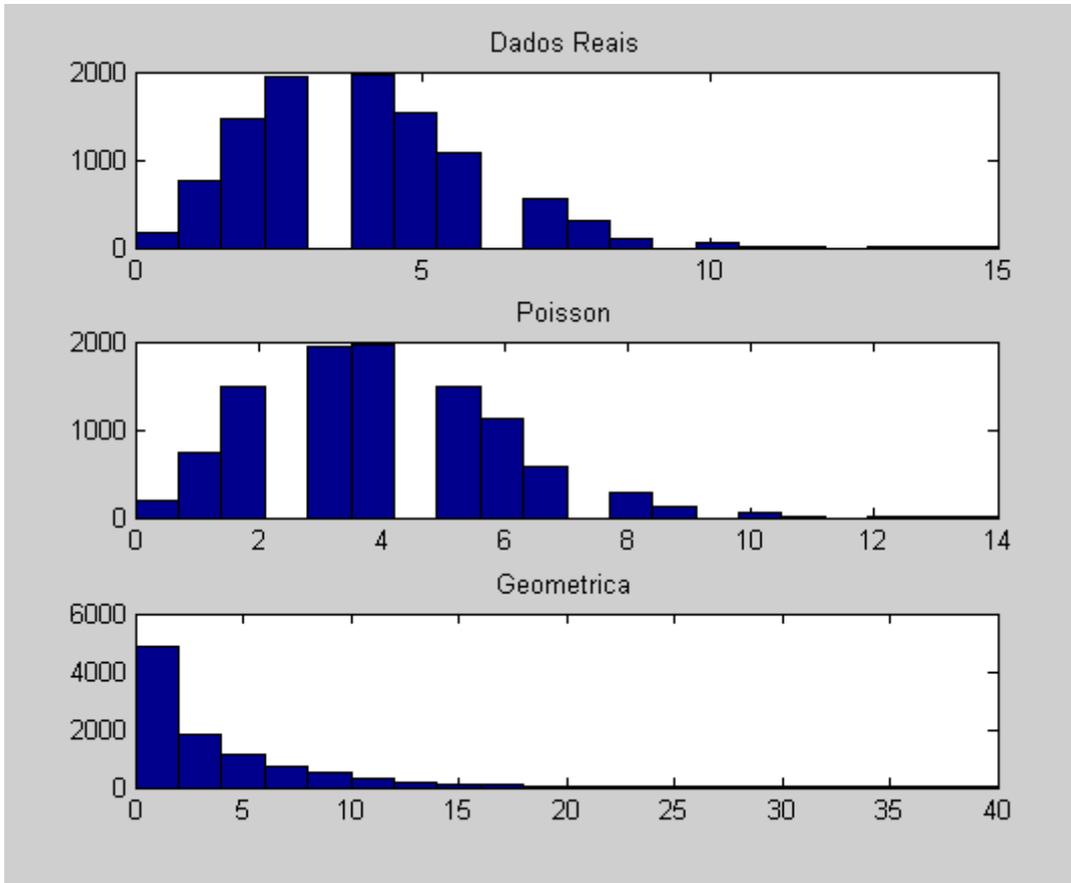
Classe 1



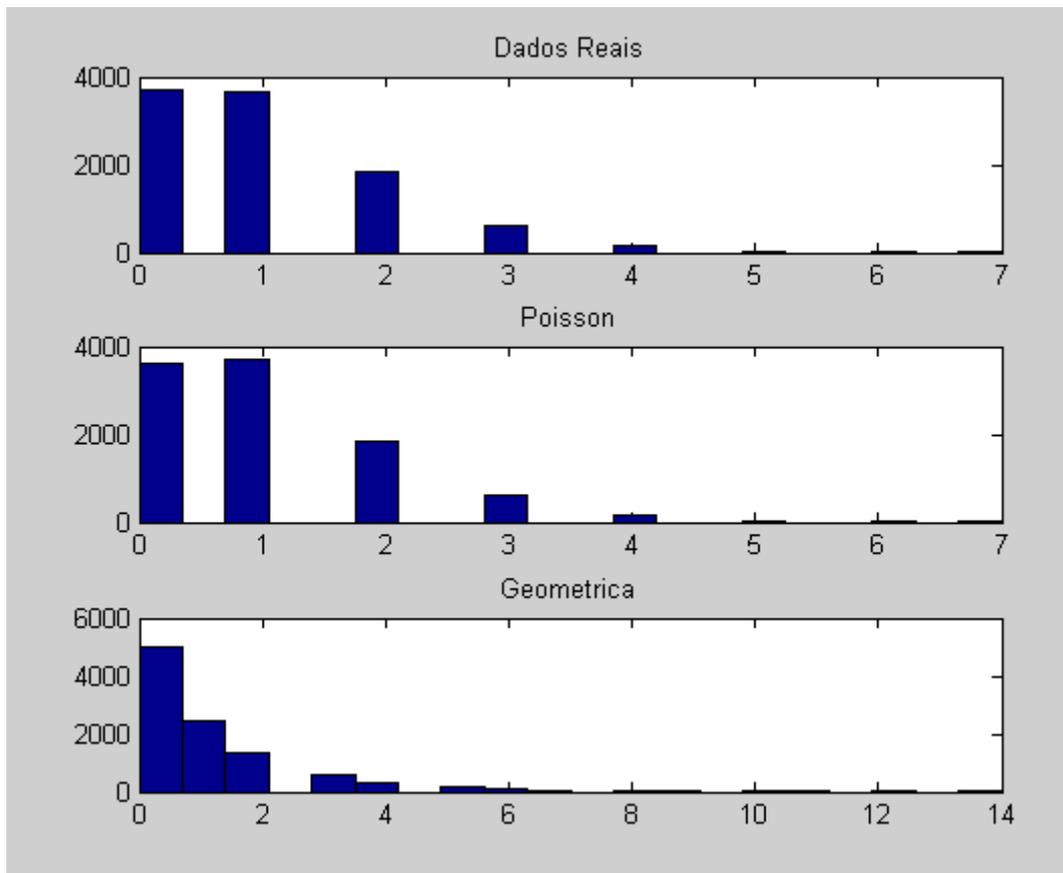
Classe 2



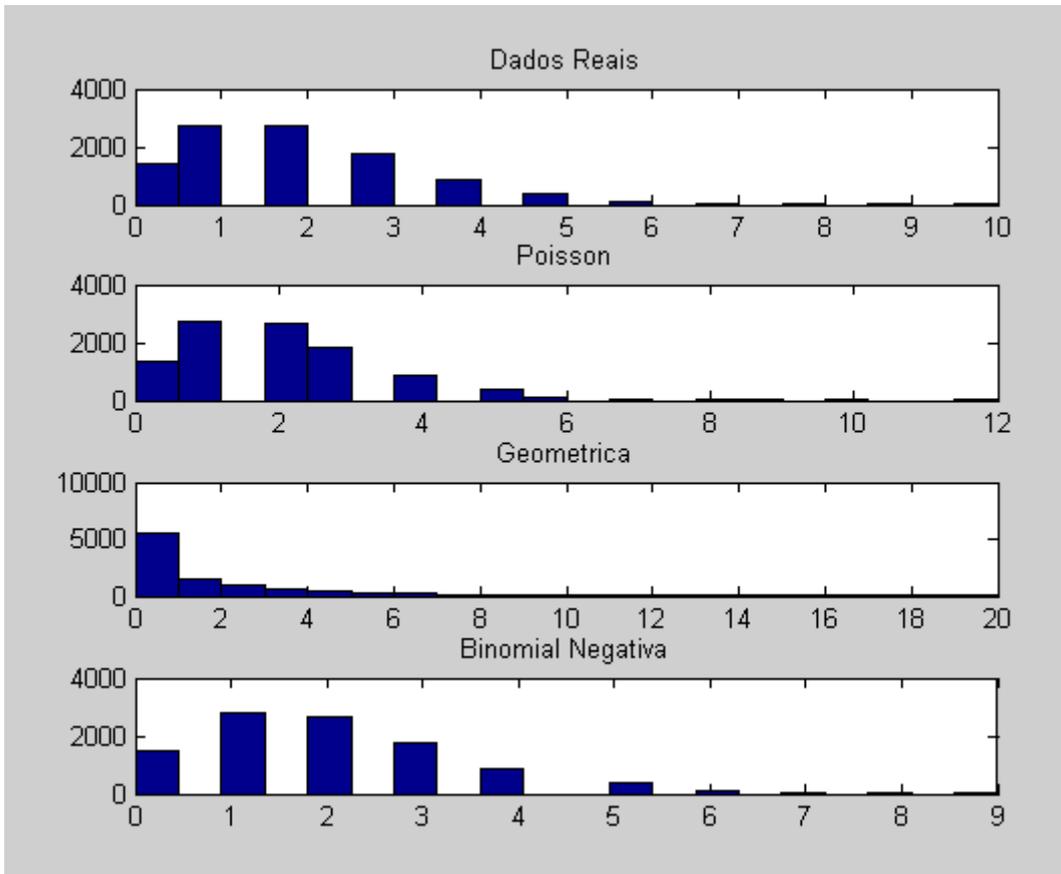
Classe 3



Classe 4

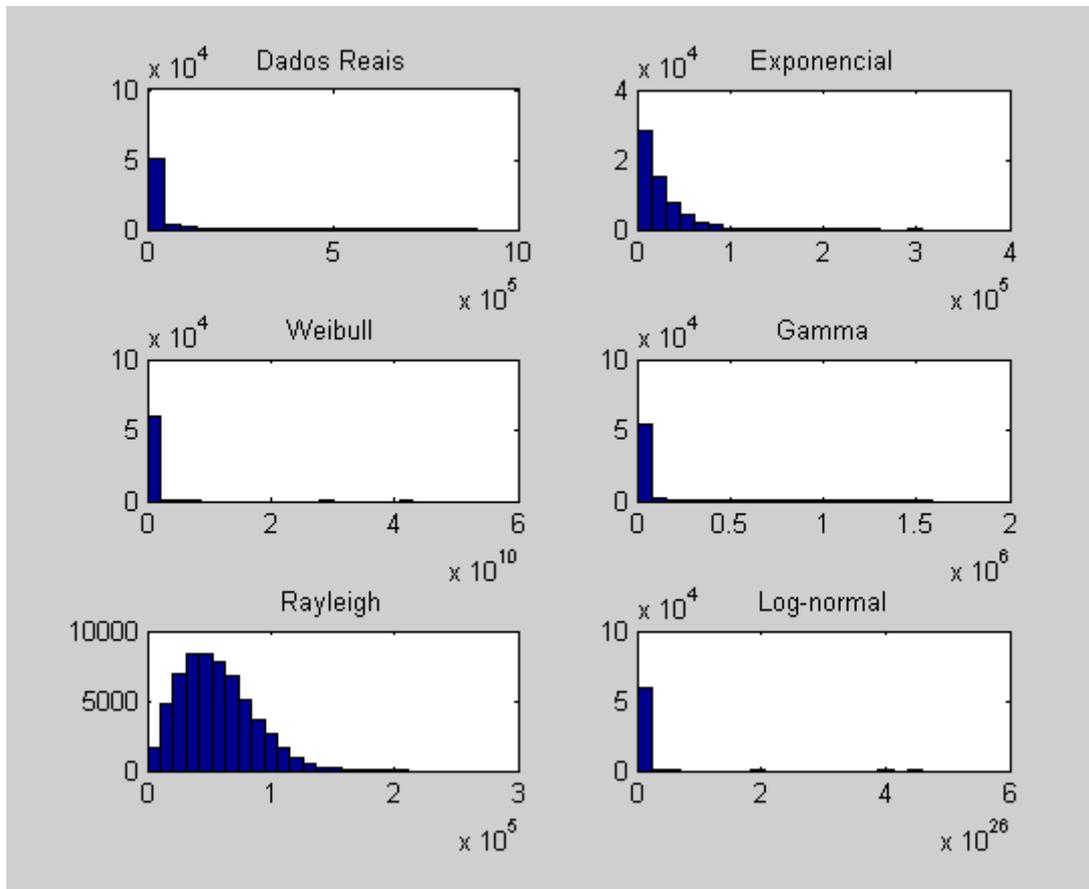


Classe 5

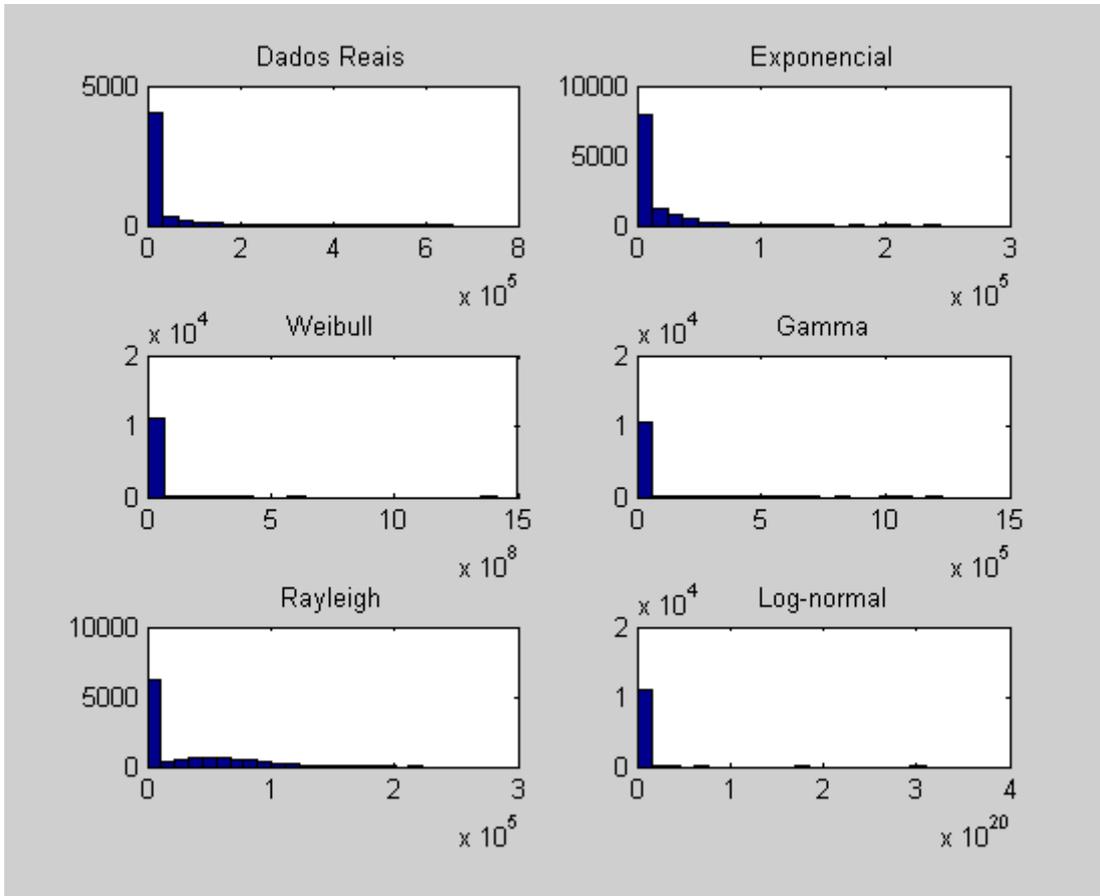


Histogramas para as severidades

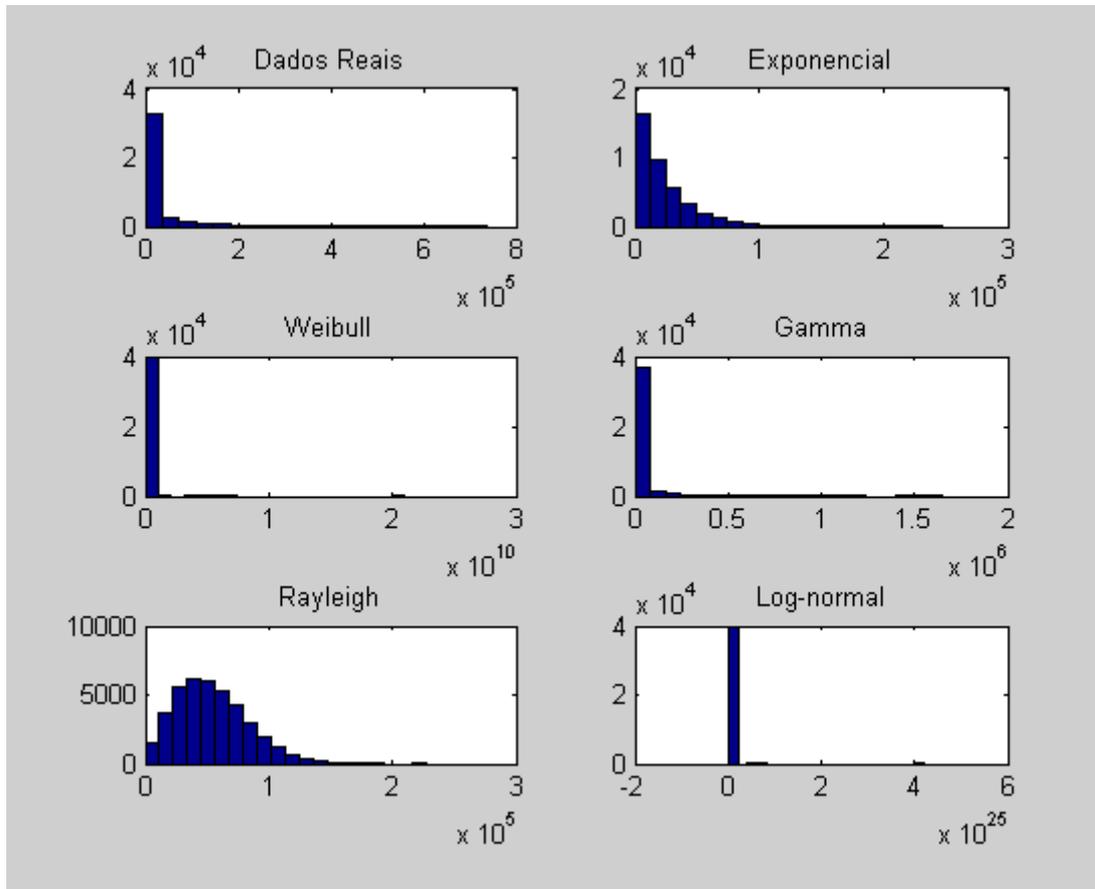
Classe 1



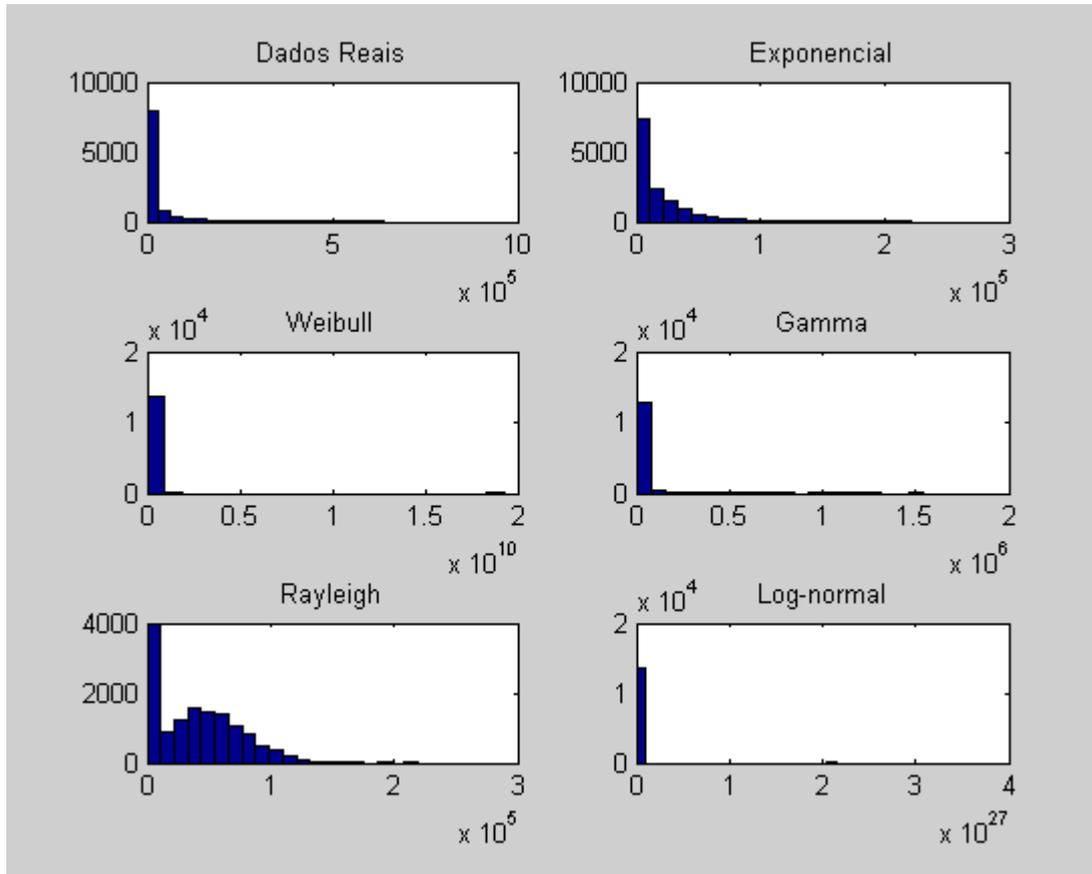
Classe 2



Classe 3



Classe 4



Classe 5

