Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Razão áurea: Uma proposta para o ensino

por

Paulo Luiz da Silva Ramos

Brasília

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ramos, Paulo Luiz da Silva
RR175r Razão áurea: Uma proposta para o ensino / Paulo Luiz da Silva Ramos; orientador Ricardo Ruviaro. -- Brasília, 2016.
99 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. Razão áurea. 2. Divina Proporção. 3. Matemática na arte. 4. Matemática na natureza. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Razão áurea: Uma proposta para o ensino

por

Paulo Luiz da Silva Ramos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 21 de março de 2016.

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro – MAT/UnB (Orientador)

Regina Pina

Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves – MAT/UnB (Membro)

Igor dos Santos Lima

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima – UFG (Membro)

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo"
Galileu Galilei

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me capacitado, dado saúde e condições para realizar esse mestrado.

À minha família. À minha esposa, Gisele, pela compreensão e motivação, sem as quais eu provavelmente não teria conseguido seguir neste mestrado, além da revisão deste texto; à minha filha, Luísa, que ainda sendo gerada já é fonte de inspiração para a produção e conclusão desse trabalho; aos meus pais Paulo e Shirley, por terem me dado condições e uma base para chegar nesse ponto onde estou hoje e aos meus irmãos Amanda e Edjekson por terem compreendido meu afastamento nessa fase tão corrida da minha vida.

Aos meus colegas e amigos de trabalho, pelo auxílio nos momentos de sobrecarga nas atividades do mestrado; à direção do colégio onde leciono por todo o apoio. Sem isso não teria sido possível realizar este trabalho.

Ao meu orientador Dr. Ricardo Ruviaro pela atenção, presteza e dedicação no acompanhamento de minha pesquisa. Este trabalho não teria tido a mesma qualidade se não fosse por seu auxílio e orientação. À Dra. Reginha Pina pelo auxílio e conselhos dados ao longo da elaboração deste trabalho.

Aos professores da UnB que me ajudaram a percorrer essa difícil trajetória em busca de conhecimento.

A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática da UnB.

A todos meus amigos da UnB pelo companheirismo, motivação e pelos momentos compartilhados nessa jornada.

Resumo

A Razão Áurea representa, segundo estudiosos, a mais "bela" proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Ela aparece muitas vezes na natureza, no corpo humano, em obras de arte e esculturas. Apesar de aparecer em várias construções antigas, a primeira descrição formal da Razão Áurea foi feita por Euclides em sua obra *Os elementos*, livro VI proposição 30, conhecida na época como divisão de um segmento na média extrema razão. A partir daí, muitos matemáticos fizeram grandes contribuições para o estudo dessa proporção, entre eles podemos destacar o matemático Lucca Pacioli, que escreveu três livros sobre esse assunto, um deles ilustrado por Leonardo da Vinci. Além de encantar matemáticos, a Razão Áurea também intrigou pessoas de outras áreas. O psicólogo alemão Gustav Fechner, por exemplo, realizou uma pesquisa sobre a opinião das pessoas pelo formato de retângulos, a qual mostrou a preferência de grande parte destas por um certo retângulo, cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da Razão Áurea.

Este projeto utiliza esse fascínio que a Razão Áurea gera nas pessoas para motivar os alunos a compreender conceitos básicos de geometria e desenho geométrico, levando-os a construírem figuras nessa proporção e a aplicá-las e enxergá-las em obras de arte, no corpo humano e na natureza. Proporcionando assim, por meio da contextualização e da prática, uma melhor absorção de conceitos.

Segue neste trabalho, além do projeto e suas demonstrações associadas, os resultados da aplicação deste em um grupo de 39 alunos da segunda série do Ensino Médio. Os alunos foram submetidos a uma avaliação diagnóstica; a três oficinas práticas; a uma avaliação final e a uma pesquisa de opinião. A partir da análise do desempenho dos participantes e do andamento destes ao longo da aplicação do projeto, foi constatado um expressivo desenvolvimento dos alunos tanto na parte de construções geométricas, quanto no interesse em aprender e enxergar a Matemática no dia a dia.

Palavras-Chaves: Razão áurea; divina proporção; Matemática na arte; Matemática na natureza.

Abstract

The golden ratio is, according to scholars, the most beautiful ratio between two segments or two measures. She appears often in nature, in the human body, in art and sculptures. Despite appearing in several ancient buildings, the golden ratio was first formally described by Euclid in his collection *Elements*, Book VI Proposition 30, known at the time as division of a segment on the extreme and mean ratio. From there, many mathematicians have made great contributions to the study of this proportion, among them we can highlight the mathematical Lucca Pacioli, who has written three books on the subject, one of which was illustrated by Leonardo da Vinci. Besides delight mathematicians, golden ratio also intrigued people from other areas, for example, the German psychologist Gustav Fechner, who conducted research on the preference for rectangles formats, the result of this research showed that most people prefer a certain rectangle whose ratio between its measures approaches the golden ratio.

This project seeks to use the fascination that the golden ratio generates in people to motivate students to understand basic concepts of geometry and geometric design, leading him to build figures related to the golden ratio and apply them on pieces of art and sees them in the human body and in nature. Furthermore, it intends that such knowledge can be absorbed in greater depth because of the context and practice of the same.

In these work follow, in addition to the project and its associated statements, the application of the results of this project in a group of 39 students of the second year of high school. The responses of these students and the growth of the same throughout the project were analyzed and were attached some images with examples of these buildings. Moreover, we have the results of an opinion survey of students that aims to improve the project for later editions and verify the student's view of the same.

Key-Words: golden ratio; divine proportion; the golden number; Mathematics in art , Mathematics in nature.

Sumário

Notações

Neste trabalho, fazemos uso das seguintes notações:

- Pontos serão denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino;
- Retas serão denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino;
- $\overleftrightarrow{AB}$ denota a reta determinada pelos pontos A e B;
- $\overrightarrow{AB}$ denota a semirreta de origem em A que passa por B;
- $\overline{AB}$ denota o segmento de reta de extremos A e B;
- AB denota a medida do segmento $\overline{AB}$;
- $\overset{\frown}{AB}$ denota o arco de circunferência de extremos em A e B;
- $A\hat{B}C$ denota o ângulo de vértice B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$;
- $med(A\hat{B}C)$ denota a medida do ângulo $A\hat{B}C$;
- $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ denota que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF;
- (a_n) denota a sequência de termos a_n, com $n \in \mathbb{N}$.

Introdução

Na maior parte do tempo o ensino de Matemática tem sido feito de maneira mecânica e exclusivamente expositiva. Isso faz com que os alunos percam o interesse e os afasta do que realmente é a matemática. Esses fatos me levaram a buscar uma nova maneira de ensinar a matemática. Ao me deparar com a Razão Áurea vi uma ótima oportunidade de contextualizar a Matemática e torna-lá mais atrativa. Pesquisando sobre o tema encontrei os artigos de Giorgio Wilbertaedt (ver [13]) e o de Rosania Queiroz (ver [10]) pude ver as relações da Razão áurea com a natureza e com outros elementos da matemática.

Ao ler o artigo *A importância do Desenho Geométrico no Ensino Básico e Técnico de nível Médio* [7] sobre a importância do Desenho Geométrico e como esse ensino ficou defasado decidi montar esse projeto para ensinar Desenho Geométrico com algo que torne isso ainda mais interessante e relevante para os alunos.

O projeto consiste em um conjunto de aulas focadas na participação mútua do aluno e do professor. Nessas aulas o aluno não será apenas exposto ao material, ele terá que interagir com o mesmo. Assim o resultado se torna mais efetivo, como pode ser visto no artigo sobre materiais didáticos manipuláveis ([11]). Assim é criado um ambiente em que o aluno tem um papel mais ativo e o professor um papel de mediador.

O primeiro capítulo é uma abordagem teórica sobre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci. Nele é apresentado um pouco da história desses tópicos, além das demonstrações e construções referentes às atividades propostas no projeto, apresentado no Capítulo 3. A partir disso, o leitor estará apto a compreender e desenvolver cada uma das atividades presentes no projeto.

A história do Ensino da Matemática no Brasil, por sua vez, aparece no Capítulo 2 com o intuito de contextualizar o leitor sobre a realidade do ensino dessa disciplina, ressaltando a ausência de conteúdos importantes como o Desenho Geométrico no currículo atual.

O projeto e as razões de suas atividades propostas são descritos no Capítulo 3.

Por fim, o Capítulo 4 analisa os resultados obtidos nas avaliações diagnóstica e final e nas atividades desenvolvidas, mostrando assim a evolução dos 39 alunos participantes do projeto, além dos resultados da pesquisa de opinião aplicada.

Capítulo 1

A Razão Áurea

Neste capítulo, trabalharemos a parte teórica de Razão Áurea, demonstrando as construções e proposições feitas aos alunos durante o projeto. Este capítulo teve como base o livro *Razão áurea: a história de fi, um número surpreendente* [5], sendo que a biografia de Pacioli foi adaptada de [15].

1.1 Histórico da Razão Áurea

A Razão Áurea, também conhecida como Média Extrema Razão, número de ouro e segmento áureo foi descrita formalmente por Euclides em sua obra Os elementos, livro VI proposição 30, e representa, segundo estudiosos, a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Ela pode ser encontrada na natureza, em obras de arte, construções, no corpo humano e em outros objetos do dia a dia. Um dos matemáticos com maior contribuição ao estudo da Razão Áurea foi o matemático Luca Pacioli, cuja biografia está resumida a seguir.

1.1.1 Biografia de Luca Pacioli

Luca Pacioli era um italiano, filho de Bartolomeo Pacioli, nascido em Sansepolcro, que fica a 60 km ao norte de Perugia, em 1445. Foi criado com a família Bofolci na sua cidade natal. Assim como o nascimento de Pacioli, a característica mais importante dessa pequena cidade era o fato de Piero della Francesca ter um estúdio e uma oficina, na qual ele passava um pouco de tempo frequentemente.

Apesar de poucas informações sobre sua juventude há evidências que parte da sua formação aconteceu no estúdio de della Francesca, principalmente pelo conhecimento que tinha dos trabalhos de Piero della Francesca e da influência desses trabalho de Luca.

Ainda jovem, Pacioli se mudou para Veneza a serviço do comerciante Antonio Rompiasi, cuja residência se situava numa área nobre da cidade. Assumindo que Pacioli tinha bons conhecimentos da Matemática básica, pelo seu estudo em Sansepolcro, Rompiasi contratou Pacioli como tutor de seus três filhos. Pacioli aproveitou a oportunidade para aprimorar e aprofundar seu conhecimento em Matemática em Veneza. Nesse período ele escreveu seu primeiro livro, um livro aritmético, que foi dedicado aos filhos de Rompiasi, que provavelmente morreu no mesmo ano do fim desse trabalho, 1470. Certamente nesse tempo vivido em Veneza Pacioli desenvolveu bons contatos que o levaram a deixar a cidade e ir para Roma, onde permaneceu por alguns meses na casa de Leone Battista Alberti. Por ser um bom estudioso e matemático, Alberti providenciou a Pacioli bons contatos religiosos. Nesse período, Luca estudou teologia e nos anos que se seguiram se tornou um frade da ordem Franciscana.

A partir de 1477, Pacioli começou a viajar passando tempo em várias universidades e lecionando Matemática, particularmente aritmética. De 1477 a 1480, permaneceu na universidade de Perugia, onde escreveu seu segundo trabalho em aritmética, seu terceiro trabalho foi escrito enquanto estava em Zara. Nenhum dos três textos foi publicado e o único que sobreviveu foi o feito para os alunos de Perugia. Fatores indicam que Luca foi tutor por algum tempo de Guidobaldo, filho de Frederico da Montefeltro duque de Urbino, que sucedeu seu pai. A corte de Urbino foi um notável centro de cultura e Pacioli deve ter tido um contato com ela durante muitos anos.

Em 1489, Pacioli voltou para sua cidade natal. Lá em 1491 ele foi proibido de lecionar e em 1493 por respeito aos seus conhecimentos e escolaridade ele foi convidado a pregar sermões emprestados. Foi nessa época que ele trabalhou em um de seus mais famosos livros o *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* que foi dedicado a Guidobaldo, o duque de Urbino. Pacioli viajou à Veneza para publicar esse livro em 1494. O livro é um resumo de todos os conhecimentos matemáticos da época e faltam ideias originais. Outro aspecto importante desse livro é que nele foi estudado jogos de possibilidade e o problema dos pontos, embora a solução deste último estava incorreta.

Em 1494, Ludovica Sforza se tornou duque de Milão e por volta de 1496 convidou Luca Pacioli para ensinar Matemática para a corte. Esse convite pode ter sido feito a pedido de Leonardo da Vinci que tinha um interesse entusiástico em Matemática. Em Milão, Pacioli e da Vinci se tornaram rapidamente amigos próximos. Eles discutiam frequentemente sobre Matemática e arte, o que ajudou os dois a crescerem muito. Nesse tempo, Pacioli começou a trabalhar no seu segundo livro famoso, *Divina Proporção*. As figuras desse livro foram feitas por da Vinci. O livro no qual Luca trabalhou em 1497 foi o primeiro dos três publicados em 1509 sobre o título de "Divina proporção". Leonardo da Vinci teve um claro interesse nesse trabalho tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista artístico o que influenciou o seu trabalho. O segundo livro, que tratava da Divina Proporção, trazia a importância que essa proporção tinha na arquitetura, já o terceiro era uma tradução para o italiano de um trabalho de della Francesca.

Quando Louis XII se tornou rei da França, reivindicou o direito a ser duque de Milão, pois era descendente direto do primeiro duque. E em 1499, o exército francês invadiu Milão para a captura de Ludovico Sforza que só foi capturado em uma tentativa de reaver a cidade. Três meses depois desse fato, Luca e Leonardo fugiram pra Mantua e, em 1500, seguiram para Veneza. De Veneza, voltaram para Florença onde dividiram uma casa.

Depois disso Pacioli ainda lecionou na Universidade de Pisa que tinha sido transferida para Florença, trabalhou com Scipione Del Ferro com quem discutia uma solução algébrica para equações cúbicas. No seu tempo em Florença foi eleito o superior da sua ordem em Romagna e depois, 1506, foi para o monastério de Santa Croce em Florença. Ao sair de Florença foi a Veneza e teve a autorização para publicar seus trabalhos sobre a divina proporção e uma tradução latina dos elementos de Euclides em 1509. Depois disso voltou a Perugia para lecionar e ainda lecionou em Roma. Voltou para Sansepolcro onde morreu em 1517, deixando um grande trabalho sem ser publicado *De Viribus Quantitatis*. Trabalho que fazia várias referências à da Vinci e várias partes estão nas anotações do mesmo.

Em 1550 Luca Pacioli foi acusado de plagiar Piero della Francesca por Giorgio Vasari, autor da biografia de della Francesca. Uma acusação injusta, pois Pacioli trabalhava muito baseado no trabalho dos outros, em particular nos de della Francesca, mas nunca disse que os trabalhos eram dele.

1.1.2 Figuras que envolvem a Razão Áurea

Dentre as construções que envolvem a Razão Áurea temos os retângulos áureos, que são os retângulos cuja razão das medidas dos lados distintos é a Razão Áurea. Esse retângulo é esteticamente agradável e por esse motivo é utilizado de diversas formas em objetos do nosso cotidiano, por exemplo, cartão de crédito, cartas de baralho, blocos de papel de carta e capas de caderno. Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas preferia um certo retângulo, cuja razão entre as suas medidas muito se aproximava da Razão Áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilma (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e em cada uma delas os resultados foram semelhantes.

Temos também o triângulo áureo, que aparece no pentagrama, polígono estrelado formado pelas diagonais de um pentágono regular. O pentagrama e o pentágono regular foram os principais motivos de interesse dos gregos em relação ao estudo da Razão Áurea, pois essas figuras só podem ser construídas com régua e compasso, se soubermos dividir um segmento na Média e Extrema razão. O interesse nessas figuras se deve ao fato de que os gregos utilizavam os poliedros de Platão para explicar o universo, entre eles o dodecaedro regular – poliedro regular com doze faces pentagonais.

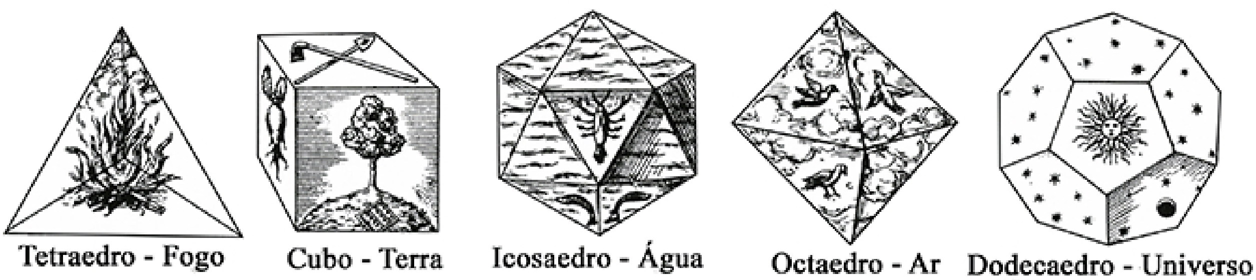


Figura 1.1: Os Cinco Sólidos de Platão ver [16]

Por meio do triângulo áureo, ou mesmo do retângulo áureo, pode-se construir a espiral áurea, uma espiral que aparece muitas vezes na natureza, seja em pequenas coisas como em conchas ou flores ou em grandes, como galáxias. Pode-se assim contemplar na natureza uma grande quantidade e variedade de elementos que apresentam a Razão Áurea. Isso também pode ser dito sobre o corpo humano, no qual essa razão aparece diversas vezes. A partir dessas figuras, muitos artistas criaram obras, utilizando-as de maneira sutil ou direta, entre eles temos Leonardo da Vinci, Salvador Dali e Rafael Sanzio.

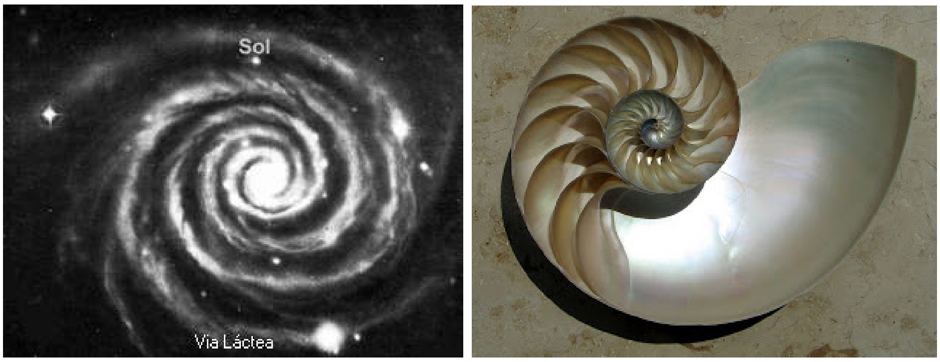


Figura 1.2: Foto Via Láctea ver [18] e da concha de um nautilus ver [17]

A espiral áurea dá um noção de movimento, enquanto o retângulo áureo dá o sentido de harmonia, uma vez que é uma forma geométrica agradável a vista. Por essa razão, vários autores utilizam a espiral em suas obras com o objetivo de enfatizar elementos para os quais a visão deve convergir, assim como colocam em retângulos áureos elementos que devem ser harmônicos. Estas técnicas são utilizadas tanto em obras de arte quanto em fotografias. Nas figuras a seguir, pode-se observar essas técnicas utilizadas em duas fotografias e no Parthenon.

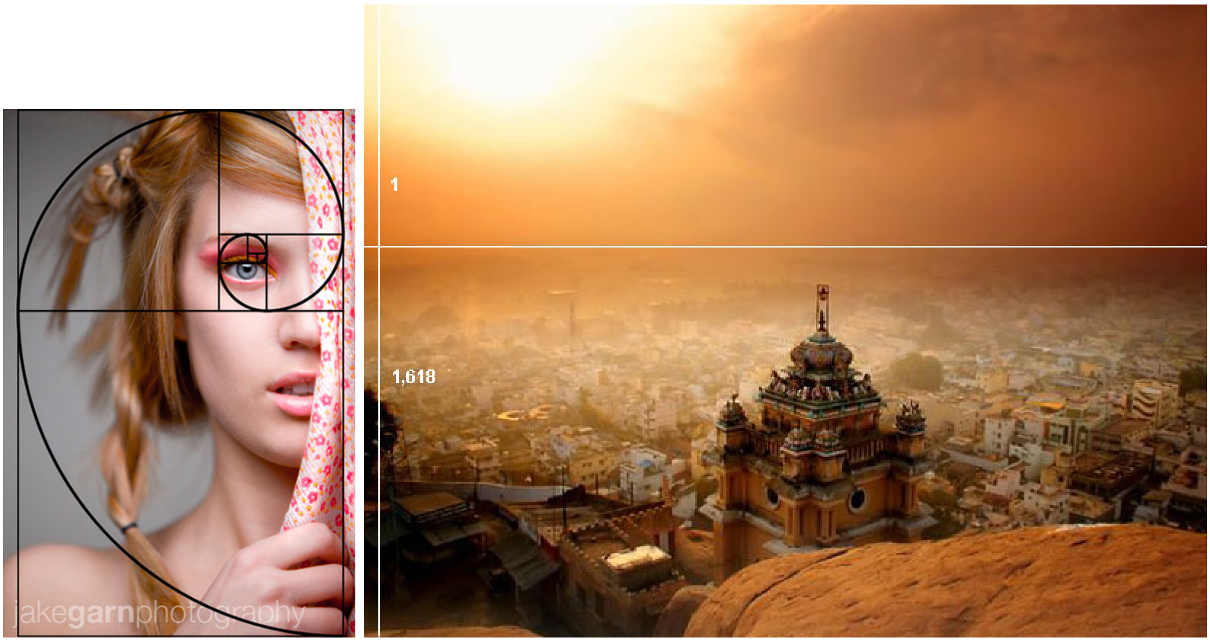


Figura 1.3: Fotos utilizando a Razão Áurea ver [19]

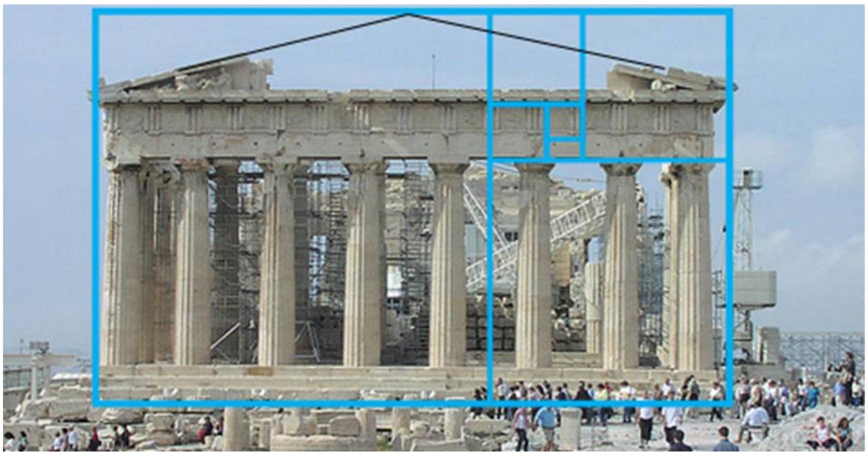


Figura 1.4: Parthenon ver [20]

1.2 Construções com a Razão Áurea

Nesta seção, vamos mostrar os passos de construção de algumas figuras áureas e outras que possuem alguma relação com a Razão Áurea. As construções foram feitas no Geogebra* e estão seguidas de suas respectivas demonstrações.

Definição 1.1. *Segmento áureo: um segmento $\overline{AB}$ é denominado áureo se for dividido por um ponto D tal que* $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{DB}$.

A partir da definição, é possível calcular o valor da Razão Áurea conforme segue.

Digamos que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{DB} = \Phi$, daí segue:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AD}{DB} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DB} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \qquad (1.1) \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi + 1 = \Phi^2 \qquad (1.2) \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \\
&\overset{\Phi \geq 0}{\Rightarrow} \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

*O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. No Brasil temos institutos no Rio de Janeiro, em São Paulo, em Minas Gerais e em Goias que pesquisam e reúnem interessados em compartilhar novas maneiras de utilização do Geogebra para o ensino. Site: www.geogebra.org

Denotamos nesse texto Φ (Lê-se: fi) como sendo a Razão Áurea maior e $\varphi = \dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ como a Razão Áurea menor. Esses dois símbolos se referem a mesma letra grega, a primeira sendo a notação maiúscula e a segunda a minúscula.

Construção 1.1. *Construção do segmento áureo*

i. *Trace um segmento* $\overline{AB}$*;*

ii. *Encontre o ponto médio* M *de* $\overline{AB}$*;*

iii. *Utilizando o compasso, trace uma reta* r *perpendicular a* $\overline{AB}$ *passando por* B*;*

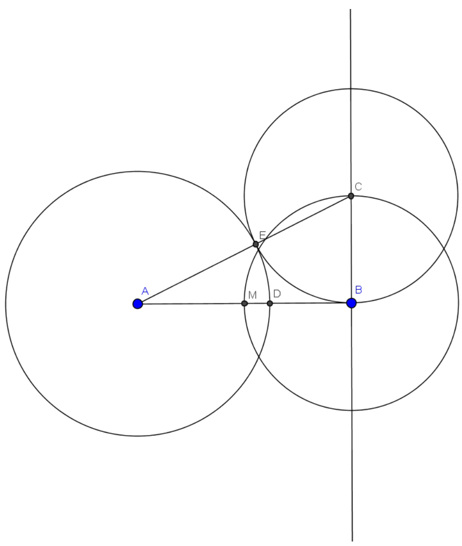
iv. *Trace um arco de circunferência de centro em* B *e raio* MB *de modo a encontrar a reta* r *no ponto* C*;*

v. *Trace o segmento formando* $\overline{AC}$ *formando um triângulo* ABC*;*

vi. *Trace um arco de circunferência, com centro em* C *e raio* CB *até encontrar o segmento* $\overline{AC}$ *no ponto* E*;*

vii. *Trace um arco de circunferência, com centro em* A *e raio* AE *até encontrar o segmento* $\overline{AB}$ *no ponto* D.

O ponto D *divide o segmento* $\overline{AB}$ *na média extrema razão.*



Demonstração. Seja $AM = x$, assim temos que $AB = 2x$, $BC = x$ e pelo teorema de pitágoras segue que $AC = x\sqrt{5}$. Visto que, por construção, $CE = x$, segue que $AD = AE = x(\sqrt{5}-1)$. Assim $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{2x}{x(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

□

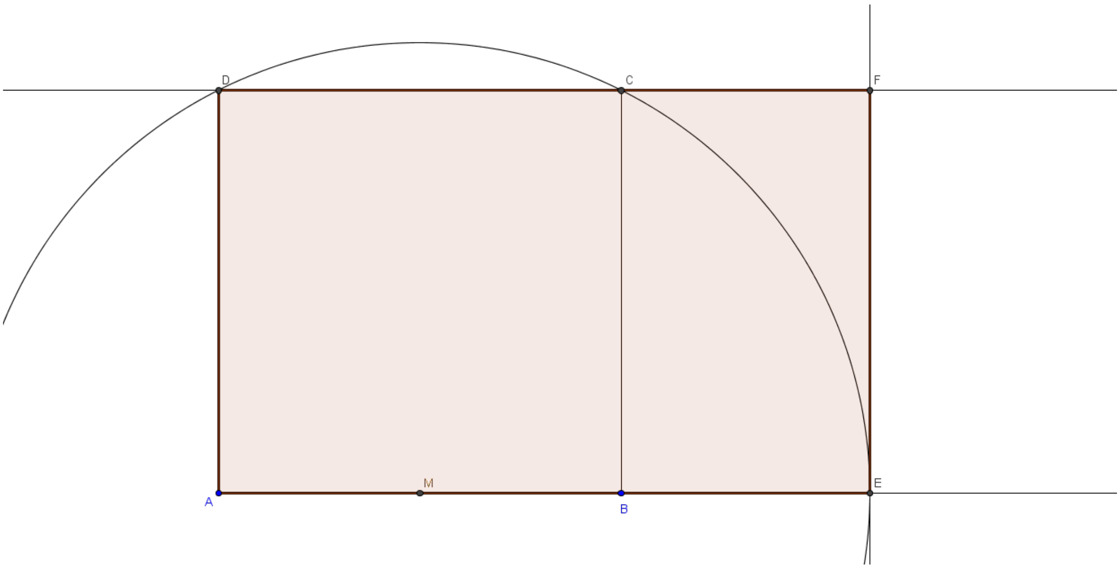
Definição 1.2. *Retângulo áureo: um retângulo* $ABCD$ *é denominado áureo se a razão entre as medidas dos seus lados distintos, da maior para a menor, for igual a* Φ.

Construção 1.2. *Construção de um retângulo áureo*

i. *Construa um quadrado* $ABCD$ *com uma medida de sua escolha;*

ii. *Determine o ponto médio* M *de* $\overline{AB}$*;*

iii. *Trace um arco de circunferência de centro M e raio MC até encontrar a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E;*
iv. *Construa o retângulo $AEFD$.*
O retângulo $AEFD$ é um retângulo áureo.



Demonstração. Seja $AB = x$ assim temos que $MB = \dfrac{x}{2}$, $BC = x$ e pelo teorema de Pitágoras segue que $MC = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$. Visto que, por construção, $ME = MC$, segue que $AE = \dfrac{x(1+\sqrt{5})}{2}$. Assim,

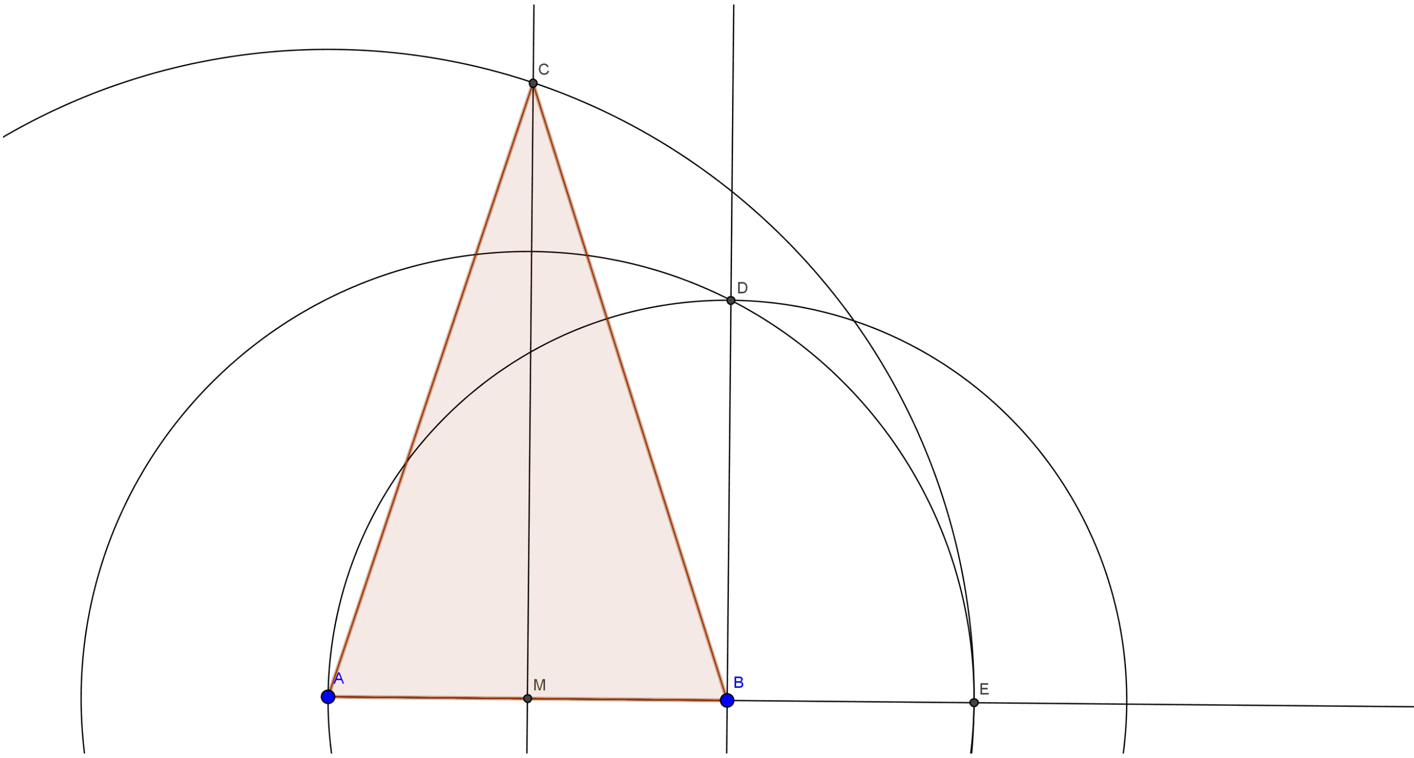
$$\frac{AE}{AD} = \frac{\frac{x(1+\sqrt{5})}{2}}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

Definição 1.3. *Triângulo áureo: Um triângulo isósceles ABC, com $AC = BC$, é denominado triângulo áureo se $\dfrac{AC}{AB} = \Phi$.*

Construção 1.3. *Construção de um triângulo áureo*
i. *Construa um segmento $\overline{AB}$, este segmento será o lado menor do triângulo;*
ii. *Construa um segmento $\overline{BD}$ perpendicular e congruente a $\overline{AB}$;*
iii. *Trace a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$ determinando seu ponto médio M;*
iv. *Trace um arco de circunferência de centro em M e raio MD, de modo a encontrar a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E;*
v. *Trace um arco de circunferência de centro A e raio AE até encontrar a reta r no ponto C;*
vi. *Construa o triângulo ABC.*
O triângulo ABC é um triângulo áureo.

Demonstração. Seja $AB = x$ assim temos que $MB = \frac{x}{2}$, $BD = x$ e pelo teorema de pitágoras segue que $MD = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Visto que, por construção, $ME = MD$, segue que $AC = AE = \dfrac{x(1+\sqrt{5})}{2}$. Assim



$$\frac{AC}{AD} = \frac{\frac{x(1+\sqrt{5})}{2}}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

□

Teorema 1.1. *Um triângulo isósceles acutângulo com um ângulo interno de medida* $36°$ *é um triângulo áureo.*

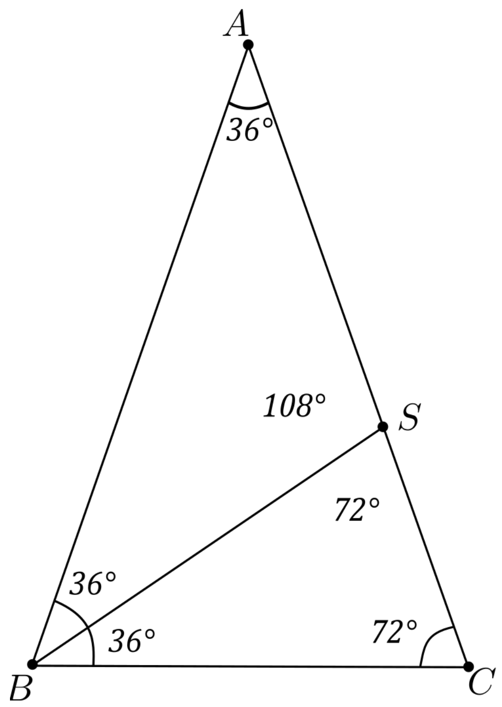
Demonstração. Considere o triângulo ABC, com $AB = AC$, $med(A\hat{B}C) = 36°$ e a bissetriz interna BS.

Observe que $\triangle ABC \sim \triangle BCS$ e que $\triangle ABS$ também é isósceles. Adotemos $BC = x$ e $CS = y$, daí, segue que $AS = BS = BC = x$ e $AC = x + y$. Logo, a razão de semelhança $k = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CS}$ pode ser calculada como segue.

$$\begin{aligned} k = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CS} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{k} = k \\ &\Leftrightarrow \quad k + 1 = k^2 \\ &\Leftrightarrow \quad k^2 - k - 1 = 0 \\ &\overset{k \geq 0}{\Rightarrow} \quad k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi. \end{aligned}$$

□

Observação 1.1. *Observe que na figura acima o triângulo ABS também é áureo, pois a razão da medida de um dos lados congruentes para o lado distinto é também a Razão Áurea (só que a menor). Assim*

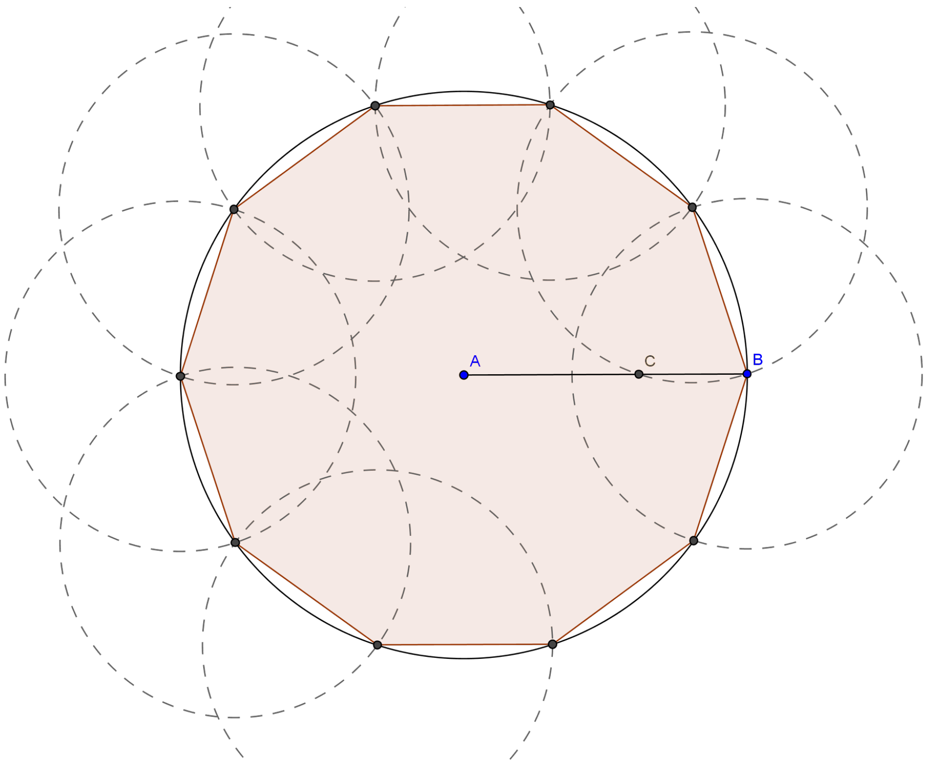


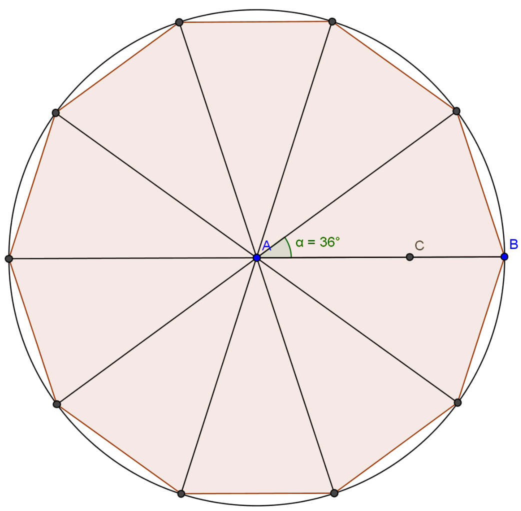
podemos generalizar o teorema afirmando que qualquer triângulo isósceles com pelo menos um ângulo interno de medida $36°$ *é um triângulo áureo. A demonstração desse novo teorema segue de modo parecido com a demonstração feita anteriormente, só que em vez de traçar a bissetriz basta completar com um triângulo acutângulo áureo para formar a figura utilizada para a demonstração. Os triângulos áureos obtusângulos podem ser chamados de Gnômons Áureos para diferenciar dos triângulos áureos acutângulos. Assim, na literatura [5] quando se fala em triângulos áureos se refere, de modo geral, ao triângulo isósceles acutângulo.*

Construção 1.4. *Construção de um decágono regular a partir do raio da circunferência circunscrita a ele.*
i. *Construa um segmento* $\overline{AB}$ *com a medida igual ao raio dado;*
ii. *Divida* $\overline{AB}$ *por um ponto* C *que o divide na média extrema razão, tal que* $AC > BC$*;*
iii. *Utilizando o compasso, trace uma circunferência de centro em* A *e raio* AB*;*
iv. *A partir do ponto* B *trace arcos de circunferência consecutivos com a abertura do compasso igual a* AC*;*
v. *Trace o decágono regular a partir dos extremos dos arcos obtidos no passo* ***iv****.*

Demonstração. A demonstração dessa construção é simples está baseada no fato de um decágono regular pode ser dividido em dez triângulos isósceles adjacentes a partir do seu centro. Visto que o ângulo central do decágono tem medida $36°$, esses triângulos são isósceles com um ângulo interno de medida $36°$, logo são todos áureos. Assim, a construção se baseia na construção desses dez triângulos formando o decágono. □

Observação 1.2. *Utilizando o geogebra é possível criar uma nova ferramenta. A partir daqui estou utilizando uma ferramenta que criei para determinar o ponto que divide um segmento na média extrema*

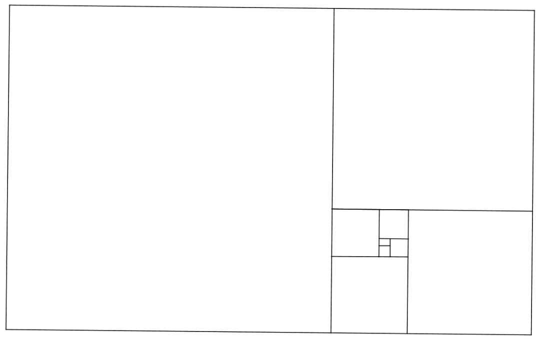




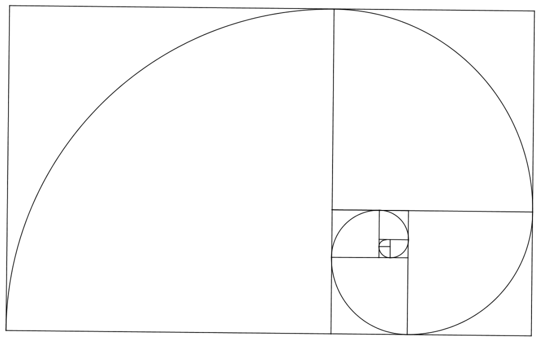
razão.

Observação 1.3. *Para construir um pentágono regular, basta seguir os mesmos passos com exceção do passo* ***v****, onde se ligaria cinco dos vértices de modo a não utilizar dois vértices adjacentes do decágono formado.*

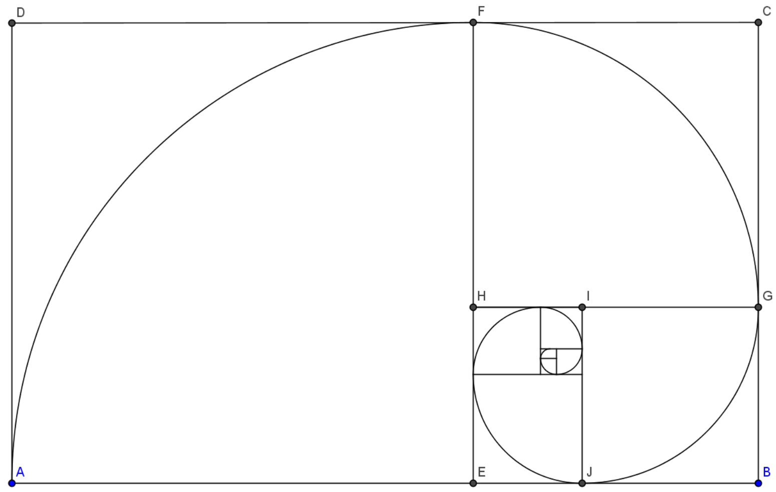
Considere, agora um retângulo áureo, se retirarmos um quadrado dele iremos obter um novo retângulo, semelhante ao primeiro, também áureo. Se fizermos esse processo indefinidamente geraremos a figura a seguir:



Definição 1.4. *Espiral áurea: também conhecida como espiral logarítmica é a espiral obtida pelos curvas que tangenciam os pontos obtidos ao traçarmos sucessivos quadrados em um retângulo áureo formando novos retângulos áureos, como pode ser observado na figura a seguir:*



Construção 1.5. ***i.*** *Construa um retângulo áureo $ABCD$, com $\overline{AB}$ sendo o lado inferior paralelo a base da folha e com A a esquerda de B;*
ii. *Construa o quadrado $AEFD$, criando o retângulo áureo $EFCB$;*
iii. *Construa o quadrado $FCGH$, criando o retângulo áureo $EBGH$;*
iv. *Construa o quadrado $BGIJ$, criando o retângulo áureo $EJIH$;*
v. *Continue o processo de construção de quadrados no sentido horário;*
vi. *Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{AF}$, com centro em E;*
vii. *Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{FG}$, com centro em H;*
viii. *Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{GJ}$, com centro em I;*
ix. *Continue o processo de construção desses arcos.*



1.3 Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

Leonardo Pisano, mais conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano, criado no norte da África por seu pai um funcionário de comércio e alfândega. Devido ao trabalho de seu pai, ele conheceu vários países e teve a oportunidade de entrar em contato com diferentes formas de trabalho com a matemática. Por essa razão, teve contato com os algarismos indo-arábicos e, fascinado com a facilidade que esses números traziam as contas, escreveu seu primeiro livro, *Liber abaci*, publicado em 1202. Dentre as coisas trabalhadas nesse livro, em sua terceira seção, tem-se a Sequência de Fibonacci, motivo pelo qual ele é mais lembrado nos dias de hoje. Ela foi enunciada da seguinte maneira.

> Um certo homem colocou um par de coelhos em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser obtidos a partir daquele par, ao final de um ano, se assumirmos que todo mês cada par gera um novo par, que se torna fértil a partir do segundo mês?[5]

O resultado desse problema é o décimo terceiro termo da sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$ na qual cada termo, a partir do terceiro é obtido como a soma dos seus termos antecessores. Em linguagem Matemática atual temos:

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3. \end{cases} \tag{1.4}$$

A sequência de Fibonacci aparece um grande número de vezes na natureza, seja nas quantidades de pétalas das mais diversas flores, na óptica dos raios de luz, na árvore genealógica de um zangão, na distribuição das folhas em um caule e muitos outros. Além disso, essa mesma sequência tem uma ligação direta com a Razão Áurea.

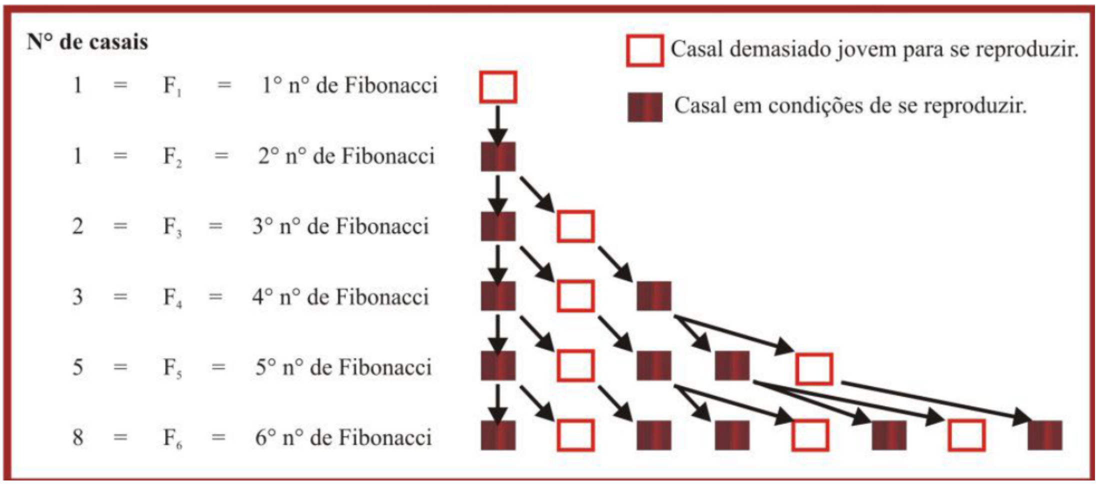


Figura 1.5: Procriação dos coelhos ver [13]

1.3.1 Termo geral da sequência de Fibonacci

Visto que a sequência de Fibonacci $(F_n), n \in \mathbb{N}$, com

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3. \end{cases}$$

é uma relação de recorrência de ordem 2, ela deve ter uma solução particular na forma $F_n = c_1 \cdot {\beta_1}^n + c_2 \cdot {\beta_2}^n$ em que β_1 e β_2 são as soluções da equação $\beta^2 - \beta - 1 = 0$. Da equação, segue:

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \beta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Daí, segue

$$\begin{cases} a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c_1 + c_1 \cdot \sqrt{5}}{2} + \dfrac{c_2 - c_2 \cdot \sqrt{5}}{2} = 1 \\ c_1 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_1\sqrt{5} + c_2 - c_2\sqrt{5} = 2 \\ 3c_1 + c_1\sqrt{5} + 3c_2 - c_2\sqrt{5} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

$$\Rightarrow \quad -c_2 - c_2\sqrt{5} + c_2 - c_2\sqrt{5} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Daí podemos afirmar que o termo geral da sequência de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.6}$$

Se analisarmos com calma essa expressão, perceberemos que a Razão Áurea aparece nela duas vezes, podendo ser reescrita assim

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\Phi)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n. \tag{1.7}$$

1.3.2 Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci

A seguir, temos um teorema que trata sobre a razão de termos consecutivos da Sequência de Fibonacci.

Teorema 1.2. *O quociente entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci $(F_n), n \in \mathbb{N}$, tende a Razão Áurea quanto maior for o valor de n. Ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi.$$

Demonstração. Utilizando a equação (1.7) segue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(\Phi)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(-\frac{1}{\Phi})^n}{\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(\Phi)^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(-\frac{1}{\Phi})^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\Phi)^n-\frac{(-1)^n}{(\Phi)^n}}{(\Phi)^{n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{(\Phi)^{n-1}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\Phi)^{n-1}\cdot(\Phi-(-1)^n\cdot\frac{1}{\Phi^{2n-1}})}{(\Phi)^{n-1}\cdot(1-(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\Phi^{2n-2}})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\Phi-(-1)^n\cdot\frac{1}{\Phi^{2n-1}}}{1-(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\Phi^{2n-2}}}.\\
&= \Phi
\end{aligned}$$

□

1.3.3 Espiral de Fibonacci

Construção 1.6. *Espiral de Fibonacci*

i. *Construa um quadrado ABCD, com* $AB = 1cm$*;*

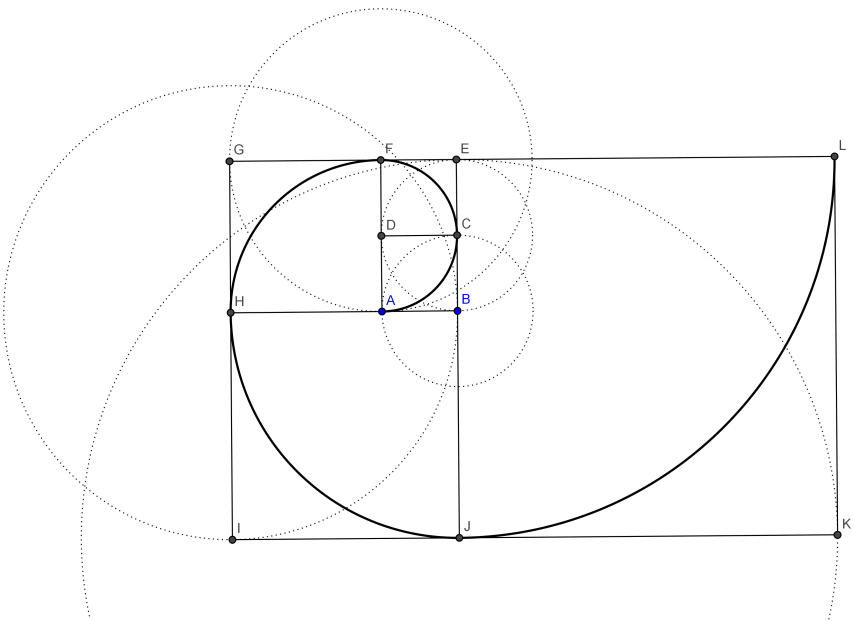
ii. *Construa o quadrado DCEF, com* $\overline{EF} \neq \overline{AB}$*;*

iii. *Construa o quadrado AFGH, com* $E \notin \overline{FG}$*;*

iv. *Construa o quadrado BHIJ, com* $G \notin \overline{HI}$*;*

v. *Continue o processo de construção de quadrados no sentido anti-horário;*

vi. *Construa com compasso uma série de arcos que levam a aproximação da espiral que passa pelos pontos* A, C, F, H*....*



Observação 1.4. *Observe que após a construção de cada quadrado surge um retângulo cujos lados têm como medidas termos consecutivos da sequência de Fibonacci, assim a cada nova interação, pelo teorema 1.2, o retângulo fica mais próximo de um retângulo áureo.*

1.3.4 Potências de Φ

Em relação as potências naturais de Φ, pode-se observar um padrão interessante, e este está descrito no teorema a seguir.

Teorema 1.3. *Uma potência natural de Φ, $\Phi^n, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, pode ser escrita na forma*

$$\Phi^n = F_n \cdot \Phi + F_{n-1}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar essa fórmula por indução.
Base da indução:

$$n = 2 \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1$$

O que pode ser verificado na equação (1.2)
Hipótese da indução:

$$\Phi^n = F_n \cdot \Phi + F_{n-1}$$

Tese da indução:

$$\Phi^{n+1} = F_{n+1} \cdot \Phi + F_n$$

Utilizando as equações (1.2), (1.4) e a hipótese de indução, podemos desenvolver Φ^{n+1} como segue:

$$\begin{aligned}
\Phi^{n+1} &= \Phi^n \cdot \Phi \\
&= (F_n \cdot \Phi + F_{n-1}) \cdot \Phi \\
&= F_n \cdot \Phi^2 + F_{n-1} \cdot \Phi \\
&= F_n \cdot \Phi + F_n + F_{n-1}\Phi \\
&= (F_n + F_{n-1}) \cdot \Phi + F_n \\
&= F_{n+1} \cdot \Phi + F_n.
\end{aligned}$$

□

1.4 Algumas propriedades algébricas de Φ

Além das propriedades geométricas que já trabalhamos, a Razão Áurea também tem um grande número de propriedades algébricas únicas, aparecendo muitas vezes em lugares inesperados, característica que lhe concede o status que tem hoje ver [5]. Entre elas podemos observar duas que foram citadas por Paul S. Bruckman, de Concord, Califórnia, em um poema publicado em 1977, no periódico *The Fibonacci Quarterly*. Referindo-se a Razão Áurea como a “Razão Média”, a primeira estrofe desse poema é:

A média áurea é algo absurdo,
Não é um número irracional comum.
Se você o inverte (isso é divertido!),
Você a obtém de novo, reduzida de um.
Mas se pela unidade for somado,
Acredite, isso dá seu quadrado.[5]

Essas propriedades são consequências diretas de equações que obtivemos ao determinar o valor da Razão Áurea no início desse capítulo, a saber, as equações $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ (1.1) e $\Phi^2 = \Phi + 1$ (1.2). Temos outras propriedades ainda, que vamos citar nos teoremas a seguir.

Teorema 1.4. *A Razão Áurea é a solução da equação* $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$.

Demonstração. Para demonstrar, vamos resolver a equação $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$, com $x > 0$.

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}} \quad &\Rightarrow \quad x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}} \\ &\Rightarrow \quad x^2 = 1 + x \\ &\Rightarrow \quad x = \Phi. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5. *A Razão Áurea é a solução da equação* $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$.

Demonstração. Para demonstrar vamos resolver a equação $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$. Observe que o denominador do segundo termo do lado direito da equação é igual a x, pois a fração contínua se estende indefinidamente. Assim, segue

$$\begin{aligned} x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} \quad &\Rightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \quad x^2 = x + 1 \\ &\overset{\Phi > 0}{\Rightarrow} \quad x = \Phi. \end{aligned}$$

□

Observação 1.5. *Como a fração contínua da Razão áurea é composta somente de uns, ela converge muito lentamente. A Razão Áurea é, nesse sentido, mais "difícil" de expressar como uma fração do que qualquer outro número irracional — é o "mais irracional" dos irracionais (ver [5]).*

No capítulo a seguir teremos uma noção sobre a história Educação Matemática para entendermos um pouco sobre a atual situação do ensino desta disciplina no Brasil.

Capítulo 2

Noções históricas da Educação Matemática

"Creio que não é possível compreender as Matemáticas de hoje se não tiver pelo menos uma ideia sumária de sua história."
Jean Dieudonné

Para podermos compreender como o ensino da Matemática acontece hoje é necessário entender como a Matemática moderna surgiu e como isso influência no ensino da mesma. Para melhor compreender como utilizar a Razão Áurea no ensino é necessário compreender como a Matemática é organizada e como isso foi desenvolvido até os dias de hoje. Este capítulo teve como referência o artigo [3] de Gomes, Maria.

Ao longo da História, a Matemática foi, muitas vezes, desenvolvida de forma empírica. Na Grécia, provavelmente alguns anos antes do século IV a.C., se desenvolve uma nova maneira de se tratar a Matemática. Essa maneira reflete a realidade grega de argumentação sobre os acontecimentos e a valorização do raciocínio lógico dedutivo, provavelmente esse tipo de raciocínio levou a necessidade da "prova" em Matemática, que até então não aparecia com muito valor ao longo da história. Com isso, os gregos começam a traçar uma nova maneira de ensinar Matemática. Para aceitar um novo fato, com exceção dos axiomas, se torna necessário a "prova" ou demonstração, ou seja, é necessário criar um caminho lógico entre o que já foi provado e o que se deseja provar. Esse raciocínio fica claro com a publicação dos Elementos de Euclides que formam um resumo organizado dos conhecimentos gregos sobre a Matemática até o século III a.C. Este livro se torna uma referência para o estudo da Matemática e do raciocínio lógico dedutivo, se tornando o segundo livro mais publicado na história e influenciando diretamente a maneira de ensinar a Matemática atualmente. Nesse livro aparece, pela primeira vez, um registro sobre a divisão de um segmento na média extrema razão, ou como conhecemos hoje na Razão Áurea.

Apesar das bases da Matemática moderna terem sido lançadas há mais de dois mil anos, encontramos ainda hoje muitos desafios com relação ao ensino da Matemática. Aqui no Brasil, podemos ver esses desafios ao longo da nossa história e ainda hoje os reflexos disso nos resultados do Brasil nos exames como o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), no qual o Brasil ocupa a posição 58, de 65 países avaliados. Não podemos olhar apenas para a posição, segundo o resultado do PISA 2012 87,5% dos estudantes Brasileiros apresentam domínio insuficiente de Matemática (ver [21]). Analisando nossa formação histórica vemos que o Brasil teve uma valorização tardia para a educação, em especial, para a Educação Matemática. No Brasil Colônia (1500-1822) a educação ficou a maior parte do tempo sobre o domínio dos jesuítas e a preocupação central era catequizar e não necessariamente ensinar os conteúdos para os indígenas, os principais alunos da época. Ainda assim, existiam vários livros sobre Matemática nas bibliotecas das escolas elementares Jesuítas, como diz Gomes 2012 (em [3]) a seguir.

> Nas escolas elementares, no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, contemplava-se o ensino da escrita dos números no sistema de numeração decimal e o estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Nos colégios, o ensino ministrado era de nível secundário, e privilegiava uma formação em que o lugar principal era destinado às humanidades clássicas. Havia pouco espaço para os conhecimentos matemáticos e grande destaque para o aprendizado do latim. Sobre o ensino desses conhecimentos, conhece-se pouco: por exemplo, sabe-se que a biblioteca do colégio dos jesuítas no Rio de Janeiro possuía muitos livros de Matemática. No entanto, estudos realizados por muitos pesquisadores conduzem à ideia geral de que os estudos matemáticos eram realmente pouco desenvolvidos no ambiente jesuíta.

No Brasil império (1822-1889) no ensino das "primeira letras" a Matemática se fazia presente, pois a essência desse ensino era "ler, escrever e contar". Nessa época, o ensino era dividido entre meninos e meninas e, para os meninos, tinha-se um estudo matemático mais extenso, pois viam além das operações básica, os estudos das frações, proporções e noções de geometria. Apesar de o predomínio e da priorização do latim, do grego, da retórica, da poética, da filosofia e das línguas modernas, algumas áreas da Matemática eram abordadas como aritmética, álgebra, geometria e, posteriormente, a trigonometria.

Após a proclamação da república (1889), surgiram vários movimentos preocupados com a qualidade da educação e que buscavam reformá-la, já que até então 85% dos Brasileiros eram analfabetos. Entre esses reformadores estava Benjamin Constant (1836-1891), que buscava romper com a tradição humanista e literária do ensino secundário e privilegiar as disciplinas científicas e Matemáticas. Nesta época, a frequência ao ensino secundário era optativa e como seu objetivo principal era a preparação para a educação superior muitos estudantes, sem realizar o curso regular, faziam os chamados exames preparatórios para o ingresso nos cursos superiores. Nesses cursos figuravam aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

Outro movimento que surgiu nesse período foi a "Escola Nova", movimento do qual pode-se destacar duas ideias fundamentais e comuns às diversas correntes escolanovistas, segundo Maria Ângela Miorim (em [8]), o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola situações da vida real". Esses princípios trouxeram muitas mudanças no ensino com reflexos para a abordagem da Matemática. Segundo ela, essas mudanças não alcançaram de imediato a educação secundária. Esta continuava "num ensino livresco, sem relação com a vida do aluno, baseado na memorização e na assimilação passiva dos conteúdos" (1998, p. 90).

No quarto congresso internacional de Matemática, realizado em 1908 em Roma, foi criada uma comissão internacional para tratar questões do ensino. Esta comissão estabeleceu como meta proceder um estudo sobre o ensino secundário da Matemática em vários países, entre eles o Brasil. Suas principais propostas eram: unificar os conteúdos abordados na escola em uma única Matemática, enfatizar as aplicações práticas da Matemática e introduzir o ensino do cálculo diferencial e integral no nível secundário. O maior adepto das ideias modernizadoras foi o professor Euclides Roxo (1890 - 1950), que propôs uma mudança radical nos programas de ensino do Colégio Pedro II, mudanças que foram aprovadas em 1928. A característica mais evidente foi a unificação das disciplinas Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria em uma nova disciplina chamada Matemática.

Em 1931, uma série de decretos propuseram organizar a Educação no Brasil e ficaram conhecidos como a Reforma de Francisco Campos, na época Ministro da Educação e da Saúde. Apenas com esses decretos as ideias modernizadoras se estenderam de maneira ampla nas escolas secundárias brasileiras. A proposta curricular da nova disciplina Matemática foi bastante detalhada e o início do seu texto traz uma exposição da finalidade do ensino da Matemática e pode ser lido no trecho a seguir.

> O ensino da Matemática tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa.
> Além disso para atender ao interesse imediato da sua utilidade e ao valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe o desenvolvimento da capacidade de compreensão e de análise das relações quantitativas e espaciais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo.
> (Novíssimo Programa do Ensino Secundário (nos termos do art.10, do decreto n. 19.890 de 18 de abril de 1931). Rio de Janeiro, 1931.)

A proposta enfatizava que o aluno deveria ser um descobridor, por exemplo, em geometria se desencorajava fazer as demonstrações formais sem antes ter feito o aluno experimentar e construir as ideias por trás do teorema. Também trazia as descrições sobre o conteúdo que deveriam ser abordados em cada série, além de colocar o ensino secundário sobre outra visão, já que até então muitos o viam apenas como uma simples preparação para o nível superior e agora propunha a necessidade de desenvolver "as faculdades de apreciação, de juízo e de critério, essenciais a todos os ramos da atividade humana, e, particularmente, no treino da inteligência em colocar os problemas nos seus termos exatos e procurar as soluções mais adequadas." (Novíssimo Programa do Ensino Secundário).

A reforma teve vários críticos opositores e várias dificuldades em sua implementação, como a falta de livros didáticos que estivessem de acordo com as novas diretrizes. Vários professores de Matemática achavam que a ideia de levar a disciplina a um patamar mais intuitivo, rebaixaria o ensino da mesma.

A partir da Lei Orgânica do Ensino Secundário, de 1942, o ensino secundário foi organizado em dois ciclos: o ginasial, de quatro anos, e o colegial, de três anos, dividido em clássico e científico. Criou-se ainda o ramo secundário técnico-profissional além do normal, para formação de professores para a escola primária. Essas reformas visavam a separação do ensino secundário para às elites e do profissional para o povo, já que somente quem cursasse o ensino secundário tradicional poderia acessar os cursos superiores.

A partir de 1950, transformações econômicas, sociais e culturais no Brasil desencadearam uma mudança, que alterou o ensino de várias disciplinas escolares, entre elas a Matemática. Essas transformações permitiram o acesso de alunos de camadas populares, democratizando a escola e aumentando assim, expressivamente, o número de alunos no ensino primário e secundário. Isso contribuiu para o aumento da demanda de professores e, ao mesmo tempo, diminuiu a exigência na admissão destes, levando a uma mudança significativa das condições escolares. Essas novas condições levaram a desvalorização do professor, reduzindo salários e piorando as condições de trabalho. Uma das maneiras de os docentes suavizarem suas atribuições foi transferir aos livros didáticos a tarefa de preparar as aulas e exercícios aumentando a importância do material didático no ensino.

Nesta década surgem os congressos de ensino de Matemática no Brasil e uma movimento internacional conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Esse movimento visava ao realce na precisão da linguagem Matemática, uma nova abordagem utilizando as linguagem dos conjuntos e a sequenciação dos conteúdos de acordo com a moderna construção lógica da Matemática.

As ideias do Movimento de Matemática Moderna tiveram grande aceitação no Brasil. Já em 1959, no 3º congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, onde estavam 500 professores de 18 estados, se verificaram as primeiras manifestações deste movimento em nosso país, surgindo vários grupos de estudo do Ensino de Matemática. Em 1966, o 5º Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática teve como foco principal a implantação desse modelo no Brasil. Um dos principais objetivos desse movimento era integrar os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria no ensino, utilizando elementos unificadores como, a linguagem dos conjuntos. Buscava ainda a necessidade de mostrar mais a importância dos aspectos lógicos ao invés da memorização sem justificativa de regras e procedimentos. Na Geometria, eles buscavam mudar o enfoque da abordagem clássica inspirada nos Elementos de Euclides para transformações geométricas, estudando vetores, espaço vetorial e transformação linear.

Muitos autores tiveram dificuldade de adaptar seus livros didáticos com os ideais modernistas, principalmente em geometria, não conseguindo realizar grandes mudanças no que já existiam em livros anteriores. Um dos efeitos da disseminação das ideias do Movimento da Matemática Moderna foi a diminuição dos conteúdos geométricos nas escolas, tanto pela valorização da álgebra quanto pela falta de subsídios para os professores.

Com a ampliação das escolas públicas, o governo criou cursos de natureza aligeirada para formar professores, nesses cursos não se investiam o suficiente na preparação para o ensino da geometria e isso aliado ao ideário modernista levou ao "abandono do ensino da geometria". Assim, nas décadas de 1970 e 1980, com a formação de baixa qualidade de muitos professores e a supervalorização da álgebra, o ensino da geometria nas escolas públicas se torna praticamente ausente.

No Brasil, no final da década de 1970 e no início dos anos 1980, começa uma renovação dos ideais educacionais deixando os ideais modernistas que estavam sobre forte crítica naquela época. Nessa perspectiva, destacam-se a valorização de uma abordagem histórica dos temas, a acentuação na importância da geometria e a diminuição do destaque conferido a conjuntos e ao rigor na linguagem Matemática.

Mesmo a Geometria voltando a ganhar importância, alguns conteúdos não retomaram o valor que tinham anteriormente. O Desenho Geométrico, que é um conjunto de técnicas e processos para construções de formas geométricas, era uma disciplina obrigatória, mas perde sua força com o Movimento da Matemática Moderna. Essa disciplina perde a obrigatoriedade a partir de 1961, pois passa a não compor a grade de todas as modalidades de currículos existentes. A partir da lei 5692/71, o ensino do Desenho Geométrico vai se perdendo dentro de algumas escolas. Em algumas não aparecia mais no currículo e, em outras, mesmo presente o programa não era cumprido. Essa situação se agrava no início dos anos 1970, momento em que esta disciplina deixa de ser exigida nos exames vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharias, como afirma Elenice Zuin (em [14]) na citação a seguir.

> Com a exclusão do Desenho Geométrico dos vestibulares, as escolas se viram desobrigadas de manter esta disciplina no segundo grau, sendo, posteriormente, também excluído, por várias escolas brasileiras, do primeiro grau – hoje denominado, Ensino Fundamental. Esta reforma propôs a inclusão da Educação Artística, nas grades curriculares, tendo por fim integrar as áreas de expressão corporal, expressão musical e plástica – aqui estando imbuída a linguagem do Desenho.

Assim, alguns defendiam que o Desenho geométrico, por ser uma forma de expressão deveria ser ensinada dentro da Educação Artística, enquanto outros defendiam que ele deveria vir dentro da Matemática, visto que o ensino do Desenho Geométrico está intimamente ligado à geometria. Apesar dessas visões, o Desenho geométrico foi praticamente abandonado no ensino. Sobre a situação atual Zuin comenta:

> Em nosso país, o Desenho Geométrico constitui uma disciplina independente. Existem umas poucas escolas que ainda ministram o Desenho Geométrico, algumas delas o fazem apenas em um ou dois anos do Ensino Fundamental. Poucas escolas em Minas Gerais ainda mantêm o Desenho Geométrico em todo o Ensino Fundamental. No restante do Brasil, temos situações variadas, escolas de algumas cidades de alguns Estados conservam o Desenho, mas várias já cogitavam retirar esta disciplina, há alguns anos.

Complementando podemos dizer que também no Distrito Federal são poucas as escolas que ainda mantêm o desenho geométrico como disciplina curricular. No artigo *A importância do Desenho Geométrico no Ensino Básico e Técnico de nível Médio* (em [7]) são citadas quatro vantagens do ensino de Desenho geométrico, são elas:

- O Desenho permite concretizar os conhecimentos teóricos da geometria confirmando graficamente as propriedades das figuras geométricas;

- Ao estudar as demais matérias, os alunos aprendem as linguagens verbal e simbólica. Ao estudar Desenho, aprende a linguagem gráfica, precisa e concisa, a mais antiga das linguagens. A criatividade técnico-científica, que é a capacidade de pesquisar e encontrar soluções consegue-se com uma teoria mínima, curta e inesquecível do Desenho. É como se estivéssemos desemaranhando um fio. Numa ponta do fio: o que se sabe. Na outra ponta: o que se quer;

- Nada melhor que o desenho geométrico para resolver capacidades importantes como: organização, autodisciplina, iniciativa, serenidade e capricho;

- Com exercícios de Desenho apropriados para estimular a conexão de neurônicos cerebrais, desenvolve-se a visão espacial.

Por isso, o desenho geométrico deve voltar a fazer parte da grade curricular e isso está bem perto de se realizar, pois a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz em sua proposta de currículo comum de Matemática o Desenho Geométrico ensinado juntamente com a geometria, como deve ser feito.

Em 1988 foi fundada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), o que pode ser tratado como um marco para a educação brasileira. A descrição dessa sociedade segue abaixo.

> Fundada em 27 de janeiro de 1988, a SBEM é uma sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos e sem qualquer vínculo político, partidário ou religioso. Tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação Matemática e de áreas afins. A SBEM tem em seus quadros pesquisadores, professores e alunos que atuam nos diferentes níveis do sistema educacional brasileiro, da educação básica à educação superior. Ela possui também sócios institucionais e sócios de outros países.
> Disponível em www.sbem.org.br

A fundação dessa sociedade consolida e fortalece o diálogo sobre educação matemática no Brasil. Hoje existem vários polos de discussão sobre o assunto em diversos estados. E através dessas discussões que se consolida a melhora da educação, como diz Diva (em [2]).

> É na busca por mudanças no ensino da Matemática que surgem práticas inovadores e que destacam como tendências em Educação Matemática. A pesquisa na Educação Matemática ao longo de sua história apontou caminhos que podem ser seguidos quando se pretende alcançar mudanças efetivas no processo ensino-aprendizagem. Estes caminhos passam a se consolidar como uma tendência, a partir do momento em que sua prática produz resultados positivos em sala de aula.

Assim, as tendências do ensino da Matemática podem ser vistas como diferentes abordagens nesse ensino. Existe uma categorização de tendências de acordo com a história do ensino da matemática. Essa categorização está o livro de Diva (em [2]) e se encontra a seguir.

- Empírico-ativista: focada nos valores utilitários da Matemática, suas aplicações no cotidiano e em experimentos.

- Formalista-moderna: ênfase no uso da linguagem rigorosa da matemática e nas justificativas.

- Tendência-tecnicista: apresentação dos conteúdos como uma instrução programada, tornado os recursos e técnicas de ensino como o centro do processo ensino-aprendizagem.

- Tendência construtivista: considera o conhecimento matemático resultante da ação interativa-reflexiva do indivíduo com o meio ambiente.

- Tendência histórico-crítica: busca uma aprendizagem significativa, que ocorre quando o aluno consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas.

- Tendência socioetnocultural: traz uma visão antropológica, social e política da Matemática, partindo de problemas da realidade, inseridos em diversos grupos culturais.

Em seu livro ([2]) Diva, cita vários autores e gostaria de destacar a visão de Lopes e Borba* sobre a Educação Matemática.

> Para Lopes e Borba uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. A partir do momento que é usada por muitos professores ou, mesmo que pouco utilizada, resulte em experiências bem sucedidas, estamos diante de uma verdadeira tendência. Colocam, ainda, que a Educação matemática crítica, a etnomatemática, a modelagem matemática, o uso de computadores e a escrita na Matemática são verdadeiras tendências

Assim sempre que um professor busca aprimorar sua aula com novas atividades, na medida que ele consegue experiências bem sucedidas, ele esta desenvolvendo uma nova tendência em Educação matemática. Em geral, ao se implementar uma atividade não se usa apenas uma tendência, mas uma união de várias delas.

Existem vários temas que foram estudados ao longo da história da Matemática que podem ser utilizados para a aplicação da Matemática. Um destes é a Razão Áurea que foi trabalhada no capítulo anterior e já foi pesquisada por várias pessoas diferentes. Ao buscar informações sobre este tema para a preparação desta dissertação, encontrei diversos artigos sobre o tema. Entre eles, a dissertação de Alexandre Ramon de Souza, intitulada *Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental* ([12]) , que trabalhou a Razão Áurea em um projeto com os alunos do 9º ano com o intuito de contextualizar proporção. Encontrei também os artigos de Giorgio Wilberstaedt (ver [13]) e o de Rosania Maria Queiroz (ver [10]) que trabalharam a Razão Áurea e suas relações com outros elementos da Matemática, da natureza e das artes. Isso mostra que, caso o professor queira pesquisar e inovar na explicação de algum conteúdo, existe uma infinidade de fontes confiáveis que ele pode contar para aplicar suas ideias.

*Lopes, Anemari Roesler Luersen Vieria; Borba,Marcelo de Carvalho. Tendências em educação matemática. Revista Roteiro, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez. 1994.

Capítulo 3

O projeto

3.1 O porquê do projeto

O ensino de Matemática muitas vezes é feito de maneira mecânica e apenas expositiva. Um método que traz sobre o professor a responsabilidade de expor todo o conteúdo e para o aluno a responsabilidade de memorizar e praticar, muitas vezes sem entender o motivo, o que foi exposto pelo professor. Esse método foi eficiente no passado e pode ser necessário em alguns momentos no ensino da Matemática, mas não pode ser o único método utilizado. Podemos utilizar as experiências do aluno, ou criar oportunidades para os alunos passarem por experiências novas que lhes auxiliem no processo de aprendizagem. Fredy Rodrigues (em [11]), baseado em Larrosa (em [4]), escreve:

> O saber que se adquire através da experiência é um saber diferente do saber científico e do saber da informação. É um saber que, segundo o autor, advém da relação entre conhecimento e vida humana, ou seja, é um saber que nasce a partir daquilo que nos toca e acaba por aproximar o conhecimento da vida humana. É um saber pessoal, subjetivo, que surge ao passo que algo venha a nos acontecer.

Pensando em mudar um pouco suas aulas, muitos professores buscam um novo material didático manipulável e depositam nele a esperança de resolverem os problemas de aprendizado do aluno. Porém, o material por si só não é suficiente, por melhor que seja o material didático, este "[...] nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno e, como tal, o material manipulável não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor."[6]. Complementando esse pensamento temos o que foi escrito por Passos (em [9]).

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas pergunta, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam.

Assim, o papel do professor de Matemática deve ser em muitas das situações de um mediador, dando auxílio para o aluno se desenvolver e fazendo uma ponte entre o que o aluno pode perceber e como isso é representado com linguagem Matemática. O professor deve procurar instigar seus alunos a querer aprender algo e conhecer algo novo, como explica Alessandra Daher (em [1])

> A aprendizagem acontece quando existe a necessidade de conseguir algo, e conseguindo-o, torna-se importante apropriar-se dos mecanismos utilizados nessa ação. Sendo assim, o ensino não deve ser posto como precursor da aprendizagem, visto que o sujeito aprende por conta de sua própria prática e não por meio do que se ensina.

Dessa forma, podemos dizer que os dois agentes ativos no processo de aprendizagem são o aluno, que é o responsável final do processo de atribuir significado aos conteúdos, e o professor, que deve possibilitar uma orientação adequada ao processo de construção do conhecimento(ver [1]). Pensando nisso, desenvolvi este projeto, que tem o objetivo de motivar o aluno com um tema que mesmo sem saber, faz parte de seu cotidiano. Mostrando as aplicações e utilizando isso para motivar os alunos a adquirir os conhecimentos necessários para compreensão e reprodução da Razão Áurea, bem como para busca-lá ou reproduzí-la em situações novas.

O projeto consiste em um conjunto de aulas focadas na participação mútua do aluno e do professor, nas quais o aluno tenha um papel participativo e ativo e não meramente expositivo por parte do professor. Fica a cargo do professor, além da preparação prévia, a intermediação entre os alunos, a escrita Matemática, as construções geométricas e as aplicações da Razão Áurea.

3.2 Metodologia do projeto

O projeto foi idealizado para alunos da segunda série do Ensino Médio de uma das unidades de uma escola particular de Brasília. A maioria dos alunos já havia estudado desenho geométrico no Ensino Fundamental por esse motivo não foi colocado uma oficina inicial ensinando algumas construções. No entanto, apesar de saberem desenhar certas construções muitos não entendiam os significados das mesmas e não sabiam utilizar de maneira indireta, caso necessário.

O projeto foi composto de cinco encontros, de duas horas cada, realizados no contraturno escolar. Os alunos não tiveram nenhuma promessa de pontos extras ou de quaisquer benefícios, além do conhecimento a ser adquirido. Os alunos interessados e com disponibilidade para os dias propostos deveriam se inscrever e aguardar o resultado do sorteio que selecionaria 50 participantes para o projeto. Como a procura foi grande, mais de 120 inscritos, foram montadas duas turmas de 50 alunos cada, em horários diferentes.

As oficinas foram ministradas no laboratório de Física da escola, por dispor de bancadas que facilitam a interação entre os alunos e fornecem um espaço maior para fazer as construções geométricas com régua e compasso. A interação entre os alunos era estimulada, assim quando eles tinham dúvida perguntavam a um colega e caso este não conseguisse respondê-la, chamavam um professor. Cada aluno era responsável por trazer o próprio material de desenho e nós levamos alguns caso precisasse. Em cada oficina o aluno recebia uma apostila com as atividades para a aula, ao final o aluno devolvia a apostila e a recebia de volta no início da próxima oficina. Ao final do projeto, cada aluno ficou com sua apostila com suas atividades resolvidas.

Devido à grande quantidade de alunos, fui auxiliado por dois colegas professores na condução dos trabalhos. Os encontros serão descritos a seguir.

3.2.1 Primeiro encontro: Avaliação diagnóstica e teoria

Na primeira hora deste encontro foi proposta uma Avaliação Diagnóstica, ver Apêndice B, para verificar o nível de conhecimento dos alunos sobre as construções geométricas utilizadas no conteúdo de Razão Áurea. Dependendo do resultado dessa avaliação seria realizada uma oficina introdutória de desenho geométrico ensinando a utilizar régua e compasso, construir mediatriz, bissetriz e transferência de ângulos.

No segundo momento desse encontro, ministrei uma aula sobre Razão Áurea, abordando a parte teórica e mostrando uma série de exemplos, que seriam trabalhados nas oficinas das semanas seguintes, com o intuito de motivá-los e instigá-los a pesquisar previamente sobre o assunto. Essa aula foi expositiva e utilizei o site prezi.com* para elaboração da mesma. Dentro dela tem todo o conteúdo abordado no capítulo 1 "A Razão Áurea" sem as demonstrações, pois não considero necessário demonstrar todas essas coisas para os alunos e algumas eles não tem conhecimento suficiente para acompanhar o processo de demonstração.

3.2.2 Segundo encontro: Oficina I

No início dessa oficina separamos um tempo para relembrar algumas construções como mediatriz, bissetriz e transferência de ângulos. Depois foi entregue aos alunos a parte Oficina I do projeto, Apêndice A. Esta oficina foi dividida em três partes, sendo a primeira é um resumo histórico sobre a Razão Áurea, o retângulo áureo e sobre a utilização da Razão Áurea em proporções do corpo humano.

Na segunda parte, foram abordados os passos das construções do segmento áureo e do retângulo áureo, a partir do seu lado menor. Essas construções estão demonstradas no Capítulo 1. Ainda nessa parte, sugerimos aos alunos criar os passos para construir um retângulo áureo, a partir do seu lado maior. Isso foi feito com a intenção de verificar se os alunos estão entendendo o que estão fazendo ou apenas seguindo os comandos sem compreendê-los.

As razões do corpo humano que se aproximam da Razão Áurea foram abordados na terceira parte dessa oficina. Para isso, disponibilizamos fitas métricas para que os alunos, em duplas, pudessem medir um ao outro e fazer as razões pedidas. Estas razões se encontram na tabela a seguir.

---

*prezi.com é um site no qual é possível fazer apresentações interativas que facilitam o desenvolvimento da apresentação.

Razão Áurea no corpo humano

Aluno:

	Medidas (cm)	Razões
Altura (h)		$\frac{h}{u} =$
Distância do umbigo ao chão (u)		
Tamanho do rosto (r)		$\frac{r}{l} =$
Distância entre o topo do nariz e o queixo (l)		
Distância do quadril ao chão (q)		$\frac{q}{j} =$
Distância do joelho ao chão (j)		
Distância do ombro a ponta do dedo (o)		$\frac{o}{c} =$
Distância do cotovelo a ponta do dedo (c)		

3.2.3 Terceiro encontro: Oficina II

Nesta oficina começamos com a história de construções que envolvem a Razão Áurea, como a do dodecaedro, e como isso fascinou os gregos. Também falamos da espiral áurea e do uso das figuras que envolvem a Razão Áurea para trazer harmonia em fotos, construções e obras de arte.

Depois são propostas as construções, passo a passo, do triângulo áureo, da espiral áurea e do decágono regular, estas construções estão no Capítulo 1, devidamente demonstradas .

Em seguida fornecemos algumas obras de arte e pedimos que os alunos fizessem essas construções e analisem as figuras com os traços feitos para enxergar as mesmas de um modo diferente. As construções nas obras de arte estão feitas a seguir, aparecendo primeiro o comando com a figura original e logo abaixo a construção já feita.

A Anunciação, Leonardo da Vinci

Problema: Observar algumas aparições da Razão Áurea no quadro "A Anunciação"

Para facilitar as construções, nomeie os vértices do quadro $ABCD$ começando do canto esquerdo inferior e seguindo no sentido anti-horário.

i. Divida o segmento $\overline{AD}$ na Razão Áurea com o ponto E de modo que $AE > ED$;

ii. Trace a reta r perpendicular a $\overline{AD}$ no ponto E;

iii. Construa um retângulo $ADFG$ com $AG = AE$ e $G \in \overline{AB}$;

iv. Construa um quadrado $FGHI$ com $H \in \overline{GB}$;

v. Escreva abaixo da figura o que essas construções te levaram a perceber.

Figura 3.1: A Anunciação, Leonardo da Vinci

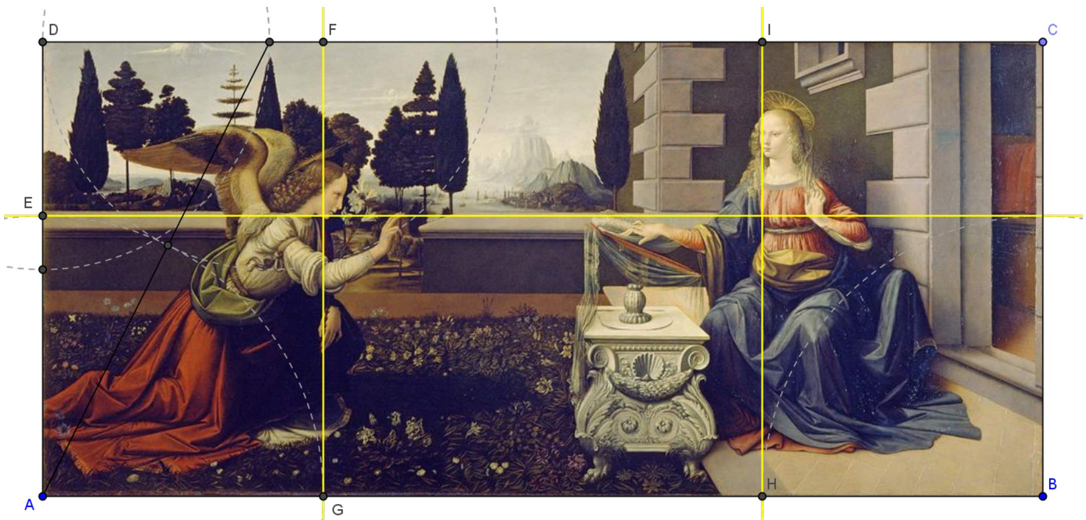


Figura 3.2: A Anunciação após as construções

A Última Ceia, Salvador Dali

Problema: Observar algumas aparições da Razão Áurea no quadra "A Última Ceia"

i. Com uma régua, meça as dimensões do quadro e faça sua razão, verificando que esta se aproxima de *phi*;

ii. Construa uma espiral áurea no sentido anti-horário;

iii. Construa uma espiral áurea no sentido horário;

iv. Escreva abaixo da figura o que essas construções te levaram a perceber.

Figura 3.3: A Última Ceia, Salvador Dali

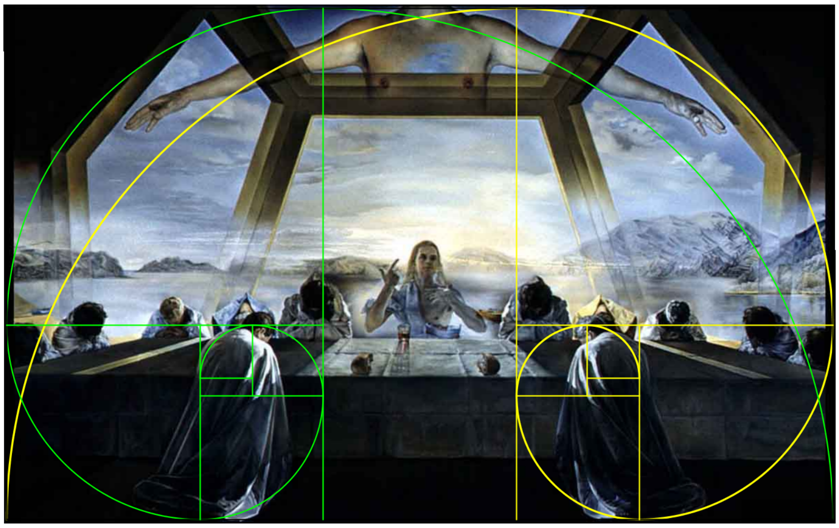


Figura 3.4: A Última Ceia com construções

Mond Crucifixion, Rafael Sanzio

Problema: Observar algumas aparições da Razão Áurea no quadra "Mond Crucifixion"

i. Trace uma circunferência com um diâmetro com extremos nos pontos vermelhos inseridos no quadro;
ii. Trace um decágono inscrito nessa circunferência com dois dos vértices nos pontos vermelhos;
iii. Construa um pentagrama, inscrito na circunferência, com um dos vértices no rosto de Cristo;
iv. Trace um triângulo áureo com um vértice no ponto sobre o rosto de Cristo e com um lado contendo a base da cruz;
v. Escreva no verso da página o que essas construções te levaram a perceber na figura.

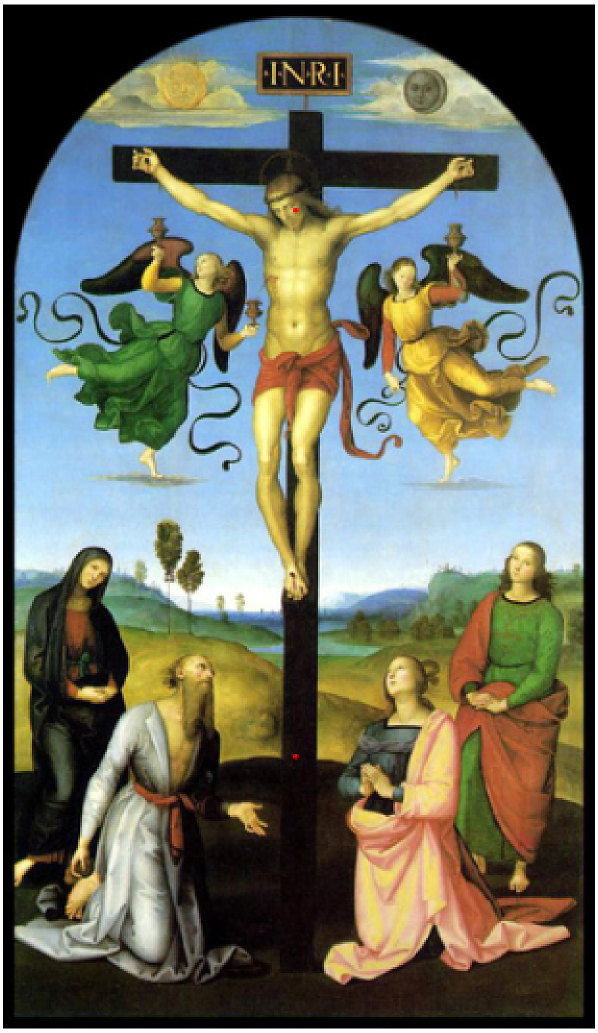


Figura 3.5: Mond Crussifixion, Rafael Sanzio

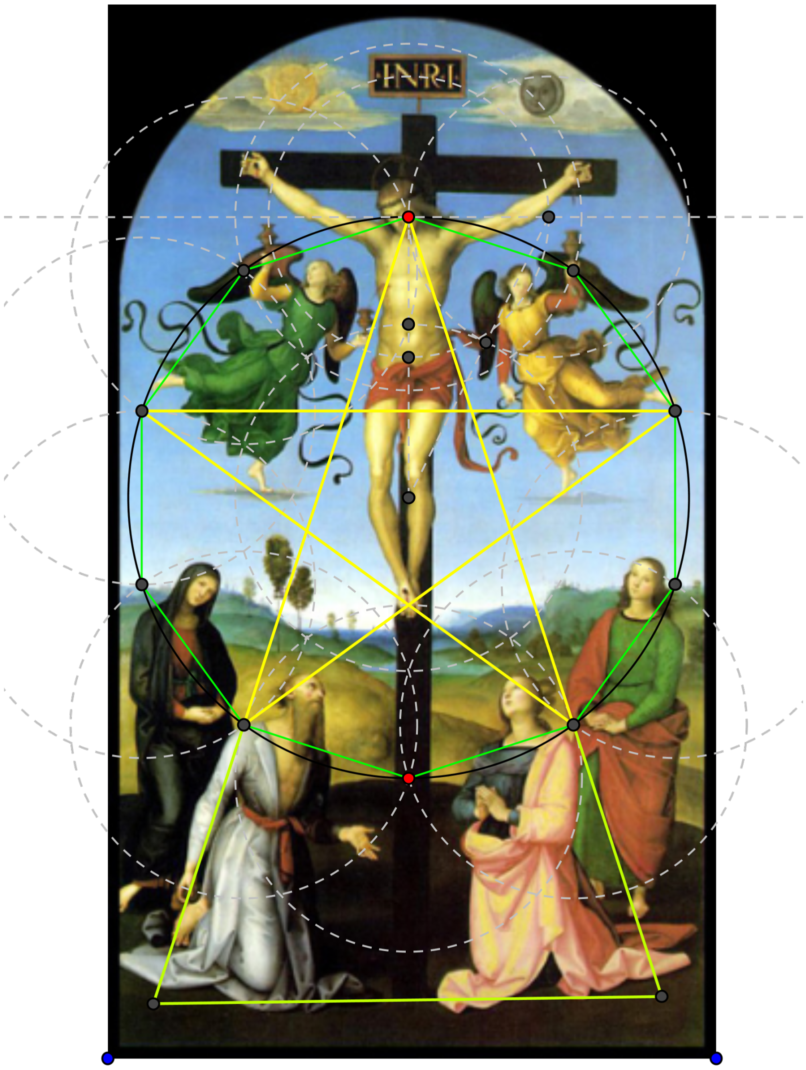


Figura 3.6: Mond Crussifixion com construções

3.2.4 Quarto encontro: Oficina III

Nesse encontro foi proposto trabalhar a relação entre a sequência de Fibonacci, a natureza e a Razão Áurea. Primeiramente, foi trabalhada a história de Fibonacci, a enunciação da sequência de Fibonacci e sua formalização. Em seguida, exemplos de aparições na natureza dessa sequência.

Na segunda parte, foi proposto ao aluno escrever os vinte primeiros termos de Fibonacci e fazer as razões dos termos consecutivos para verificar que as mesmas se aproximam rapidamente da Razão Áurea, para isso pedi para determinarem onde aparece o erro de aproximação da razão $\frac{a_20}{a_19}$, em que a_n é o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Nessa parte ainda foi proposto a construção da espiral de Fibonacci que pode ser construída a partir da construção de sucessivos quadrados com lados de medidas seguindo a sequência de Fibonacci. E também a escolha de alguns retângulos em uma composição de retângulos de Piet Mondrian e verificação se esses retângulos estão próximos do retângulo áureo. Foi proposto ainda que os alunos analisassem as potências naturais de Φ e dessem um termo geral para as mesmas, além de contarem quantidades de pétalas em flores e de espirais em um girassol e em uma pinha.

3.2.5 Quinto encontro: Avalição final

No início deste encontro foi dado tempo para que os alunos terminassem as pendências de outras oficinas e depois aplicamos individualmente uma avaliação para verificar o quanto eles tinham assimilado do conteúdo. Aplicamos também uma avaliação sobre o projeto, na qual eles podiam dar suas opiniões, sugestões e dizer se indicariam o projeto para algum colega fazer.

Capítulo 4

Análise de resultados

Dos 100 alunos sorteados para participar do projeto, apenas 71 participaram da primeira oficina. Nas oficinas seguintes nós tivemos algumas faltas, umas justificadas e outras não e, ao final do projeto, apenas 39 alunos fizeram a avaliação final. Por meio de conversas informais com os alunos descobri que muitos deles não priorizaram o projeto por chocar os horários com outras atividades, uma vez que o projeto não acrescentaria nenhuma nota ou vantagem imediata. Por esse motivo trabalharemos nas seções seguintes com os dados dos 39 alunos que fizeram as avaliações inicial e final, mesmo não tendo feita toda a apostila por motivo de falta a alguma oficina.

4.1 Antes do projeto

Para verificar o quanto cada um deles sabia, foi aplicada a avaliação diagnóstica, Apêndice B. Esse tipo de avaliação não é comumente utilizada, o que é um grande erro, pois muitas vezes chegamos em sala de aula e imaginamos que a maior parte dos alunos está em um mesmo ponto do conteúdo. Creio que esse tipo de avaliação se faz sempre necessária antes de um projeto, pois dependendo da diferença de nível entre os alunos deve ser feita uma intervenção para deixá-los o mais próximo possível de um nível mínimo necessário para assimilar o que se pretende no projeto.

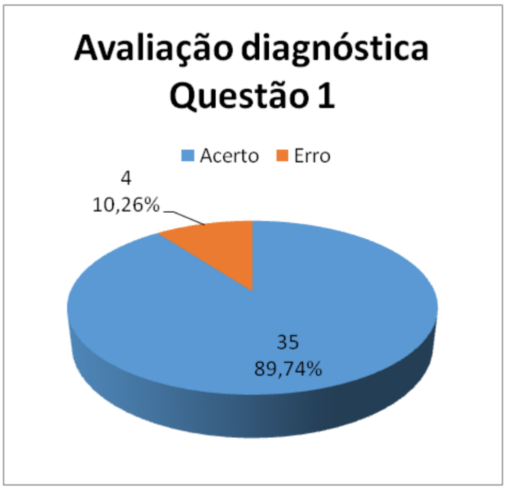
Esse tipo de avaliação também pode ser feita em sala de aula, mas como o conteúdo das séries é extenso não temos tempo para trabalhar com os alunos com mais dificuldade no horário regular. Por isso, deveríamos utilizar o horário do contraturno para orientar e auxiliar os alunos com atrasos significativos, oferecendo assim a oportunidade de que todos os alunos obtenham um bom resultado ao final dos trabalhos.

Nessa avaliação obtive os seguintes resultados.

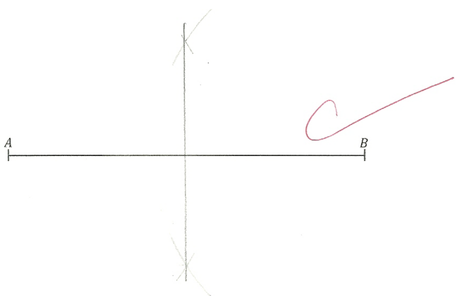
4.1.1 Questão 1

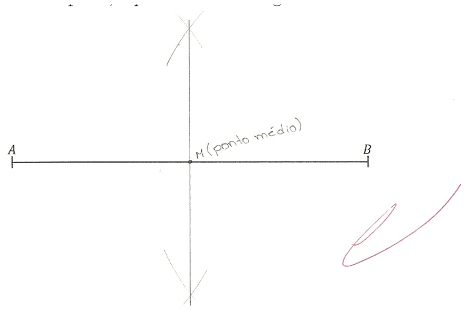
Nessa questão pedimos que os alunos determinassem o ponto médio de um segmento utilizando régua e compasso. O objetivo era verificar se o aluno sabia desenhar a mediatriz de um segmento e por meio

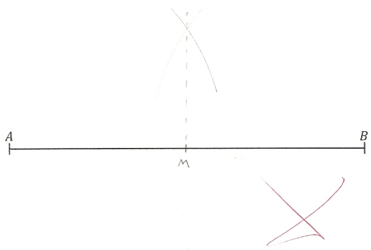
dela determinar o ponto médio dele. Por se tratar de uma construção básica e muito útil, decidimos inseri-la na avaliação, pois ela seria muito utilizada ao longo das oficinas e era necessário identificar quais alunos não conseguiriam construí-la.
Essa questão teve um índice de acerto de 89,74%, mostrando que a maioria dos alunos dominavam essa construção. No gráfico a seguir temos uma análise quantitativa e percentual do desempenho dos alunos nessa questão.



Nas imagens a seguir, temos algumas digitalizações da resolução da Questão 1 feita por alguns dos alunos. Na primeira podemos ver que o aluno achou o ponto, mas não destacou o mesmo como resposta, já na segunda além de determinar o ponto ele destacou o mesmo. Na terceira temos um caso de um aluno que errou a questão, pois não criou elementos suficientes para determinação do ponto.

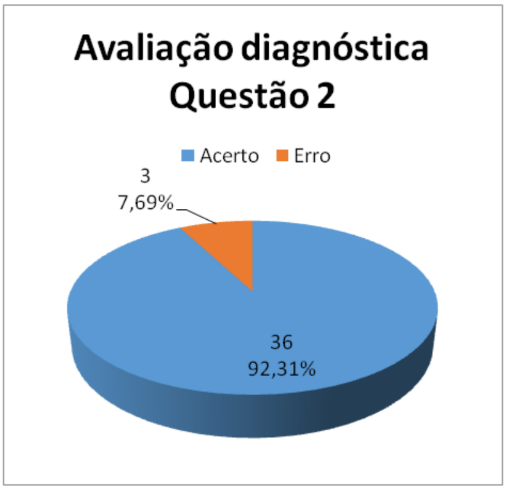




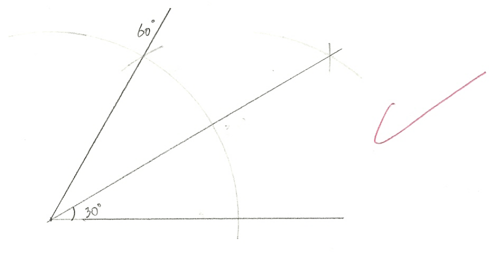


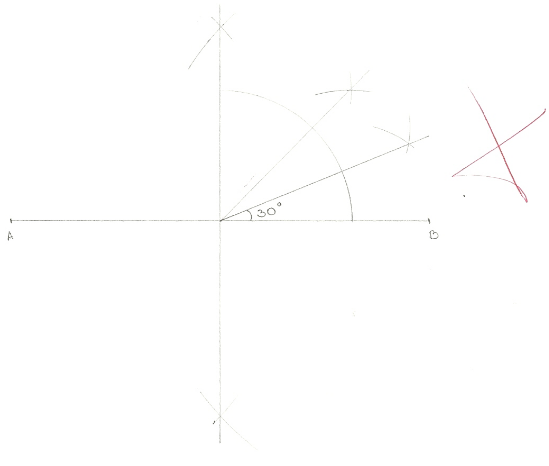
4.1.2 Questão 2

Nesse problema foi pedido ao aluno que construísse, com régua e compasso, um ângulo de medida 30°. Por meio da construção de um ângulo com essa medida esperava ver se o aluno tinha domínio sobre a construção de um ângulo de medida 60° e de como construir a bissetriz de um ângulo. Construir ângulos com certas medidas é muito importante para os alunos primeiramente terem uma noção de qual a "abertura" de um ângulo de certa medida e também para fazer construções de várias figuras geométricas. Essa questão teve um índice de acerto de 92,31%, mostrando que uma quantidade ainda maior já estava familiarizada com o tipo de construção solicitada. No gráfico a seguir temos uma análise quantitativa e percentual do desempenho dos alunos nessa questão.



Nas figuras a seguir temos um caso de um aluno que acertou e um caso de um aluno que errou essa questão. Perceba que no primeiro caso o aluno deixou claro os passos utilizados e, no segundo caso, o aluno determinou um ângulo de medida $22,5°$.

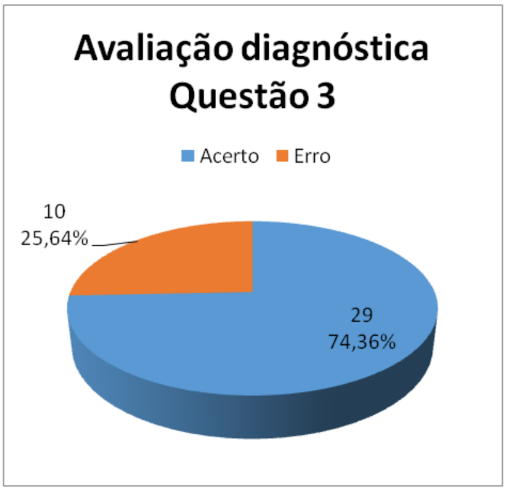




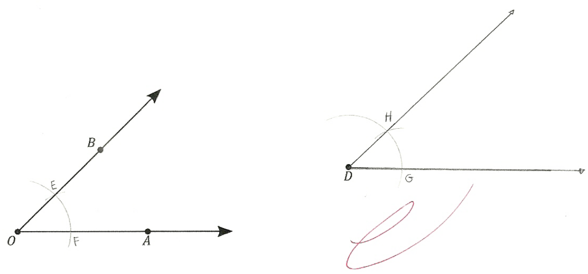
4.1.3 Questão 3

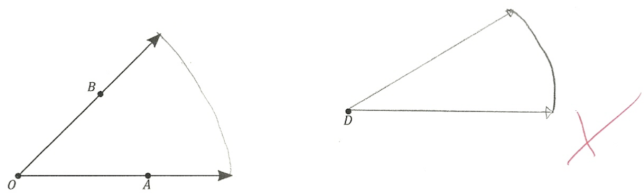
Aqui foi pedido para o aluno construir um ângulo congruente a um ângulo dado, ou seja, fazer a transferência de um ângulo para um ponto dado. Os conceitos envolvidos nessa questão são extremamente importantes, pois trabalham a transferência de uma medida a fim de se manter uma mesma distância entre dois pontos, mantendo assim a mesma "abertura" do ângulo. Tal processo é utilizado na construção de polígonos regulares como o decágono regular e o pentágono regular.

Nessa questão o índice de acerto foi de 74,36%. Isso mostra que os conceitos aqui exigidos não foram considerados tão simples quanto os das questões anteriores. No gráfico a seguir temos uma análise quantitativa e percentual do desempenho dos alunos nessa questão.



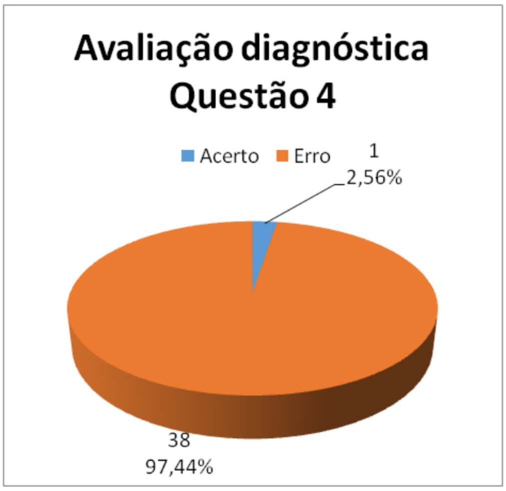
Nas figuras a seguir temos um caso de um aluno que acertou e um caso de um aluno que errou essa questão. Perceba que no primeiro caso o aluno fez primeiro um arco inicial de mesma medida nos dois ângulos e depois transferiu a “abertura” do primeiro para o segundo. Já no segundo caso, o aluno tentou determinar um ângulo congruente ao primeiro “no olho”, ou seja, sem nenhuma construção com régua e compasso.



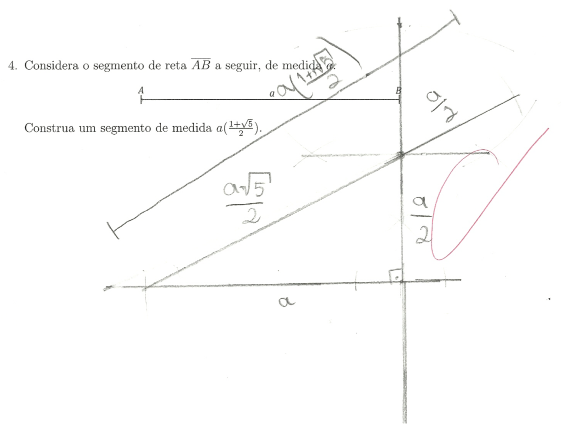


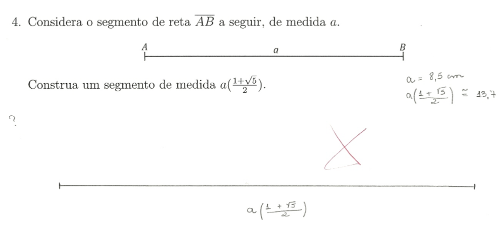
4.1.4 Questão 4

Nesta questão fornecemos um segmento de medida a e pedimos para o aluno construir um segmento de medida $a \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ com a intenção de verificar se os mesmos já tinham conhecimento suficiente para construir um segmento áureo. Nesse exercício, os alunos teriam que utilizar os conceitos e construções básicos adquiridos para criar um segmento novo, que envolve a multiplicação do segmento original pela $\sqrt{5}$. Nessa questão, apenas um aluno conseguiu determinar o segmento pedido, mostrando que a maioria dos alunos não sabiam utilizar os conhecimentos prévios de Razão Áurea para fazer a construção solicitada. No gráfico a seguir temos uma análise quantitativa e percentual do desempenho dos alunos nessa questão.



Nas figuras a seguir temos o único caso de um aluno que acertou e um caso de um aluno que errou essa questão. Perceba que, no caso do aluno que errou, ele buscou uma alternativa que foi medir o segmento e calcular o valor aproximado do segmento que seria a resposta ao problema, assim ele achou algo próximo da resposta, mas não a resposta que foi pedida.





4.2 Durante o projeto

4.2.1 Aula introdutória

Nessa aula abordamos uma introdução teórica rápida, trabalhamos com o cálculo do valor da Razão Áurea, seus principais elementos e sua relação com a sequência de Fibonacci. Esta aula foi ministrada logo após as avaliações diagnósticas e foi por meio dela que buscamos motivar os alunos. Como este tema é abordado no primeiro ano, pois faz parte da matéria do Programa de Avaliação Seriada (PAS) da Universidade de Brasília (UnB), para a maioria dos alunos foi uma revisão dos conceitos básicos, mas para alguns deles foi o primeiro contato com a “divina proporção”.

Ao final dessa aula, os alunos se demonstraram bem ansiosos para as aulas seguintes, nas quais eles fariam as construções apresentadas na aula introdutória.

4.2.2 Oficina 1

Nessa oficina explicamos aos alunos como seria o procedimento, que em cada aula eles receberiam o material daquela oficina e fariam as atividades propostas e, em caso de dúvida, poderiam chamar um dos professores ou pedir auxilio para um dos colegas. Foi interessante ver os alunos que tinham mais facilidade se prontificarem a auxiliar os outros alunos, pois isso lhes deu confiança e valorizou o conhecimento deles. Como era a primeira vez que eles estavam fazendo esse tipo de trabalho, nessa oficina fomos chamados mais vezes que nas outras, pois eles ainda estavam ganhando confiança no trabalho individual e ficavam querendo saber se estavam fazendo da maneira correta. Nas descrições usei a linguagem Matemática, conforme consta nas notações no início deste trabalho, pois essa é a linguagem que os alunos já utilizavam em sala de aula. Creio que por esse motivo eles não tiveram dificuldade em entender a notação descrita.

Essa primeira oficina foi mal dimensionada, imaginamos que os alunos gastariam duas horas para aprender a fazer o segmento áureo, o retângulo áureo a partir do lado menor e as medições no corpo humano, mas eles fizeram isso em uma hora. Por esse motivo, dentro da oficina fizemos a proposta da questão 3, que já está na versão definitiva, na qual pedimos para os alunos construírem e descreverem os passos da construção. No início eles se assustaram um pouco com o comando, mas depois alguns alunos já perceberam o que tinham que fazer. Com o tempo a maioria deles conseguiu fazer o solicitado. A seguir, temos dois exemplos retirados dos trabalhos dos alunos de cada uma das questões.

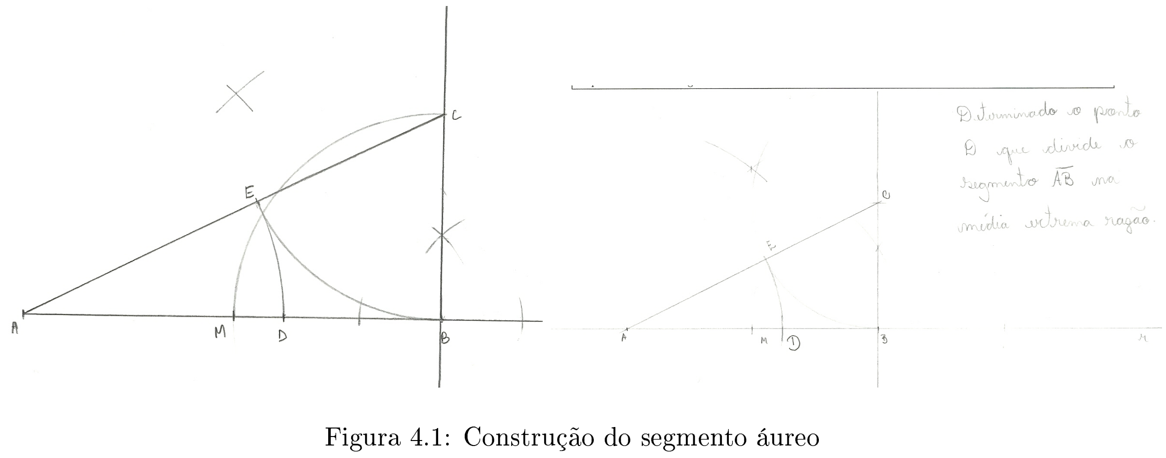


Figura 4.1: Construção do segmento áureo

Depois das construções, foram feitas as medições das partes do corpo. Esse momento foi bem interessante e descontraído. Muitos alunos tiveram dificuldades em medir o que foi pedido, achando valores muito distantes da Razão Áurea. Em muitos casos fomos chamados para refazer as medidas, até que alguns alunos conseguiram entender o que tinha que medir e começaram a ajudar os outros. Eles acharam interessante buscar a Razão Áurea no corpo e verificar que mesmo eles sendo de tamanhos diferentes as proporções do corpo se mantinham e eram próximas da Razão Áurea.

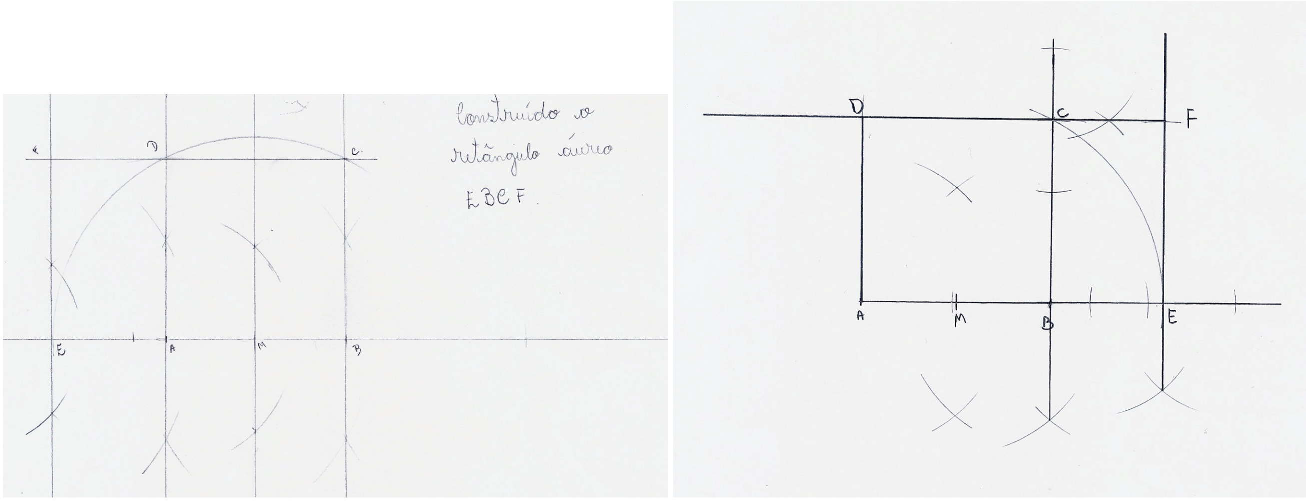


Figura 4.2: Construção do retângulo áureo

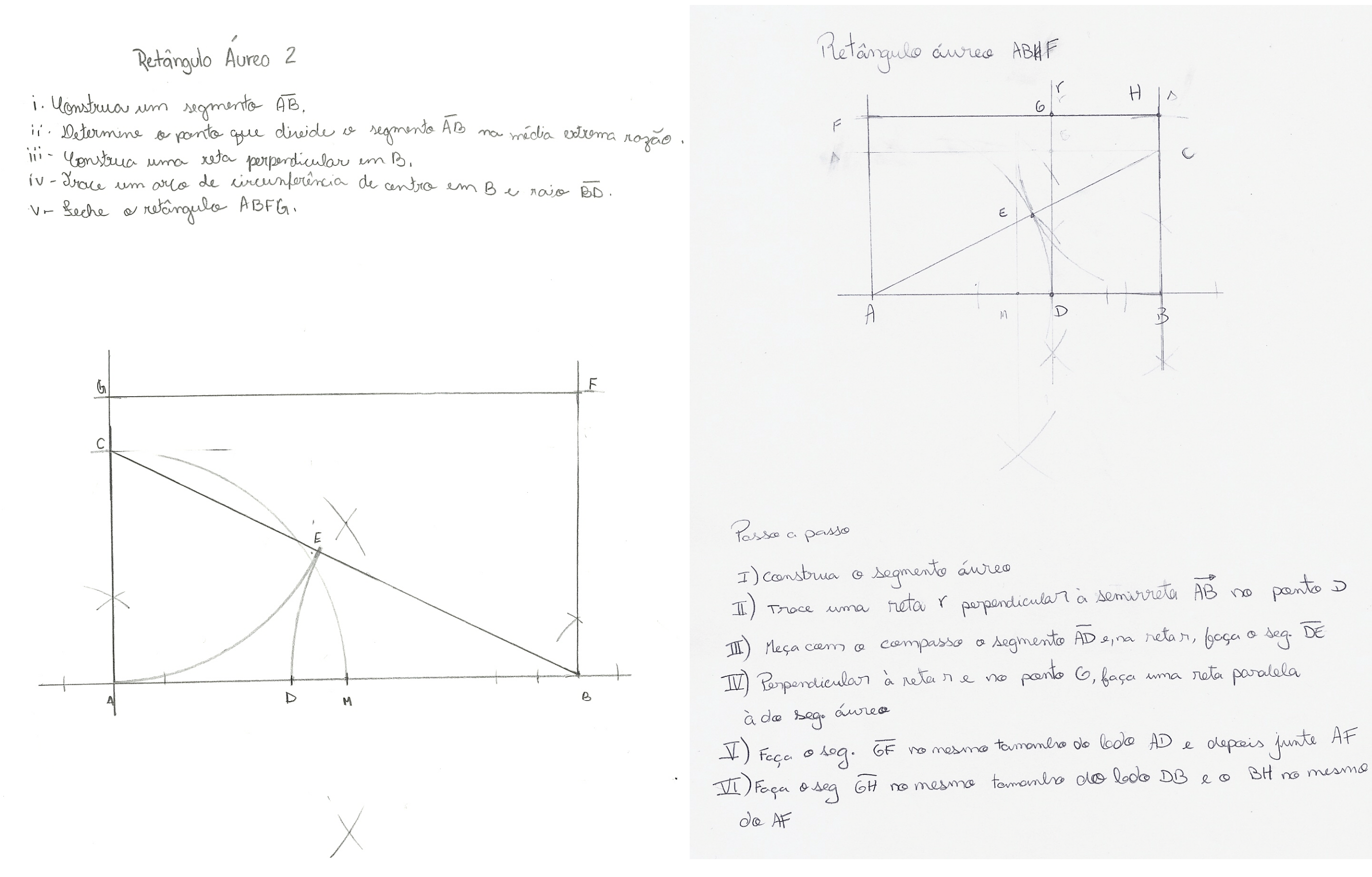


Figura 4.3: Construção do retângulo descrevendo os passos

4.2.3 Oficina 2

Nessa oficina os alunos já sabiam como era o procedimento e ao receberem as apostilas já começaram a fazer os trabalhos. Como na primeira oficina eles acabaram cedo, colocamos mais construções nesta oficina, além de pedir a demonstração do porquê a construção do triângulo áureo funciona. Na primeira oficina foi solicitado que verificassem, utilizando a régua para medir, que a construção do segmento áureo estava certa. Aqui pedimos a demonstração algébrica dando um passo importante na diferenciação dos dois. Os alunos demonstraram ainda dificuldade ao escrever uma demonstração, mesmo já tendo visto várias delas em sala de aula. Vale a pena observar que não mostramos, durante as oficinas, como seria a demonstração, pois sabia que eles já haviam visto isso durante as aulas regulares. Caso os alunos não conhecessem a estrutura de uma demonstração, acho que seria importante esse trabalho prévio, na verdade quando for aplicar novamente esse projeto pretendo abordar esse assunto com eles para melhorar sua escrita.

Nas figuras a seguir, temos algumas construções do triângulo áureo e as demonstrações pedidas. Observe que no último caso o aluno não demonstrou, ele fez as medidas e verificou que se aproximava da Razão Áurea, a razão pedida.

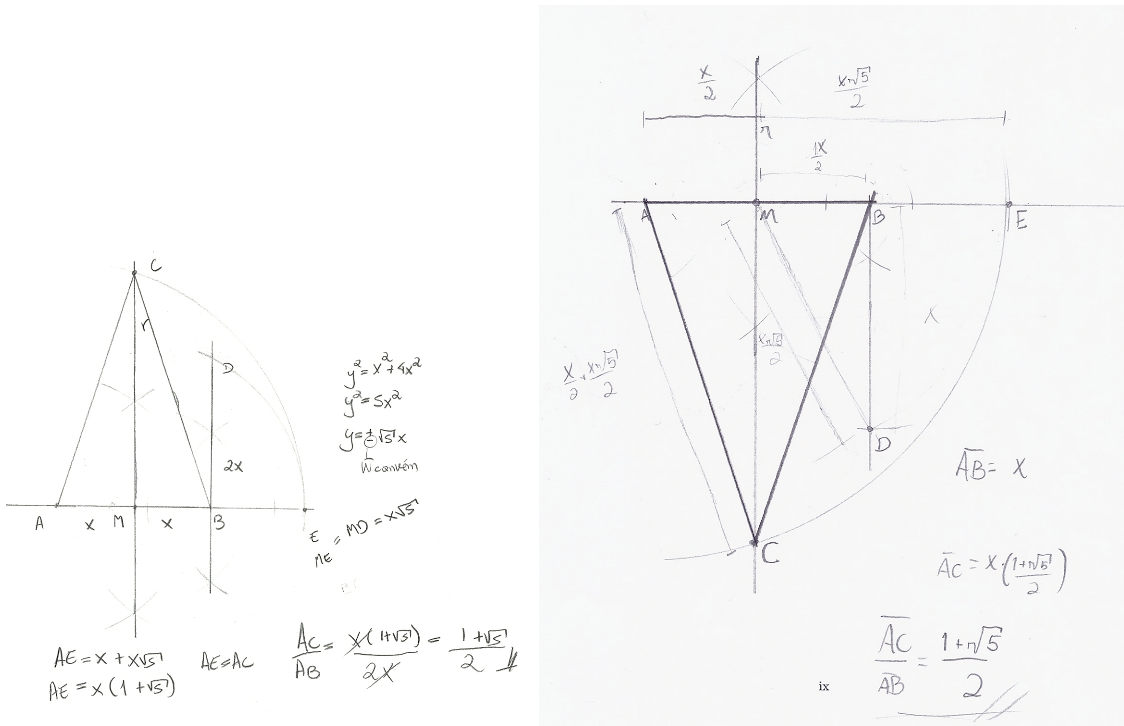


Figura 4.4: Construção do triângulo áureo

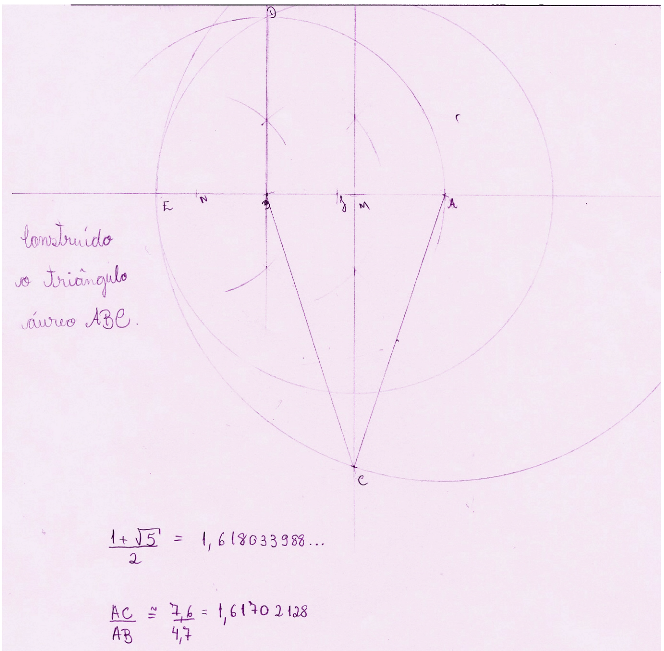


Figura 4.5: Verificação ao invés de demonstração

A seguir temos as construções da espiral áurea de dois alunos. Na primeira, o aluno seguiu com a construção e, na segunda, o aluno parou a construção antes, o que não facilitou a visualização da espiral.

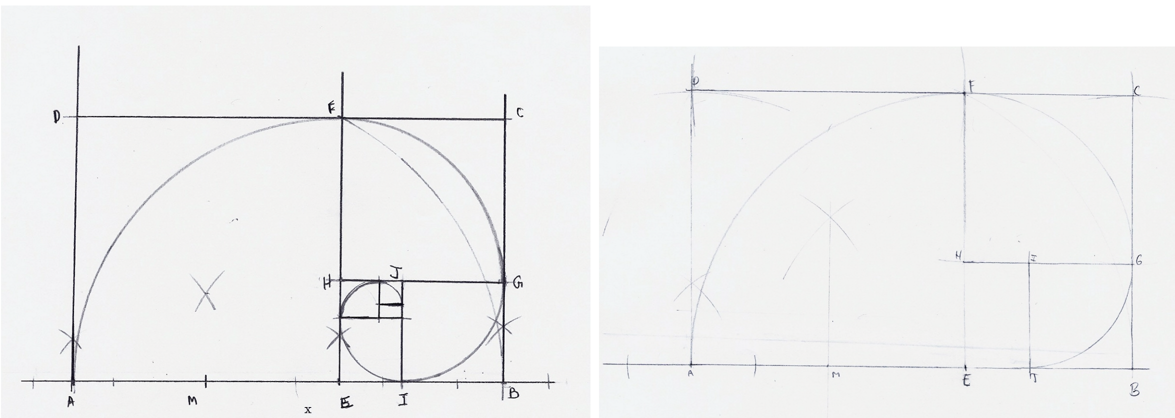


Figura 4.6: Construção da espiral áurea

Abaixo seguem algumas construções do decágono regular, essas construções são baseadas na divisão do decágono regular em dez triângulos áureos, conforme explicado no Capítulo 1. Nos dois primeiros casos temos construções corretas e, no terceiro, temos uma construção errada que levou a um hexadecágono.

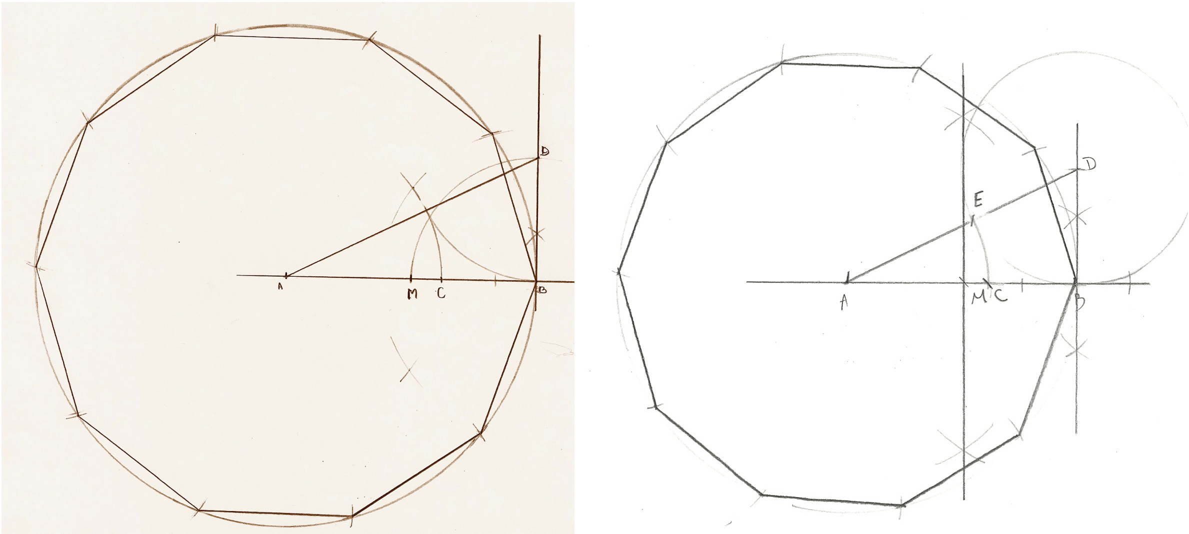


Figura 4.7: Construção do decágono regular

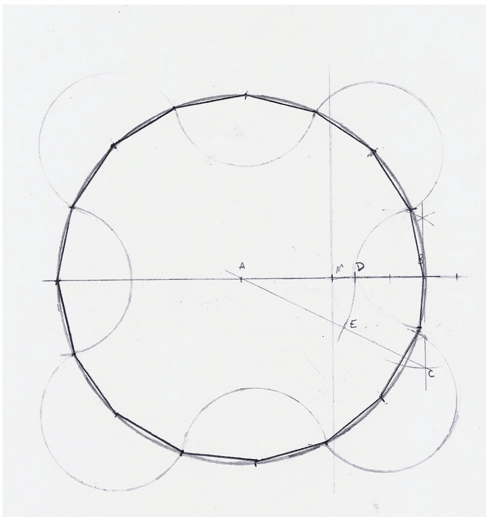


Figura 4.8: Construção incorreta do decágono regular

Nessa oficina ainda tivemos as análises de algumas obras de arte que envolvem a Razão Áurea. Foi um dos momentos que os alunos mais tiveram dificuldade, pois além de colocar o que aprenderam em prática tinham que analisar as obras. O processo de análise não é mecânico e, por isso, muitos dos alunos tiveram dificuldade, pois estão acostumados a identificar o que fazer e reproduzir de maneira mecânica. Ao solicitar a análise posterior às construções, era nossa intenção fazê-los perceber o que estava por trás das obras, mas muitos deles não percebiam de imediato. Como professores, devemos motivar nossos alunos a perceberem esses elementos em seu cotidiano e a aprenderem a utilizar a Matemática fora de sala de aula. Sei que isso nem sempre é possível, pois existem partes da Matemática criadas para facilitar a própria Matemática. Muitas vezes ensinamos os conceitos e esperamos que os alunos façam a transposição para o mundo real sozinhos. Isso não é nada simples e temos que fazer atividades como essa que auxiliam essa transposição.

A seguir temos algumas construções feitas pelos alunos sobre as obras *A Anunciação* de Leonardo da Vinci, *A Última Ceia* de Salvador Dali, *Mond crucifixion* de Rafael Sanzio e também os comentários destes sobre as obras.

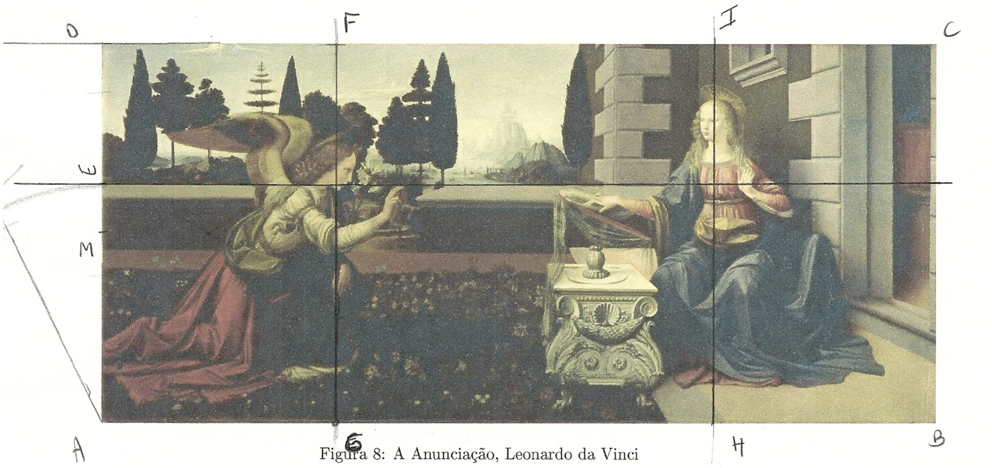


Figura 8: A Anunciação, Leonardo da Vinci

Leva a perceber que os principais fatos - o dedo do anjo, seu rosto, o olho de Maria - estão na linha da razão áurea. O muro também está na altura do muro

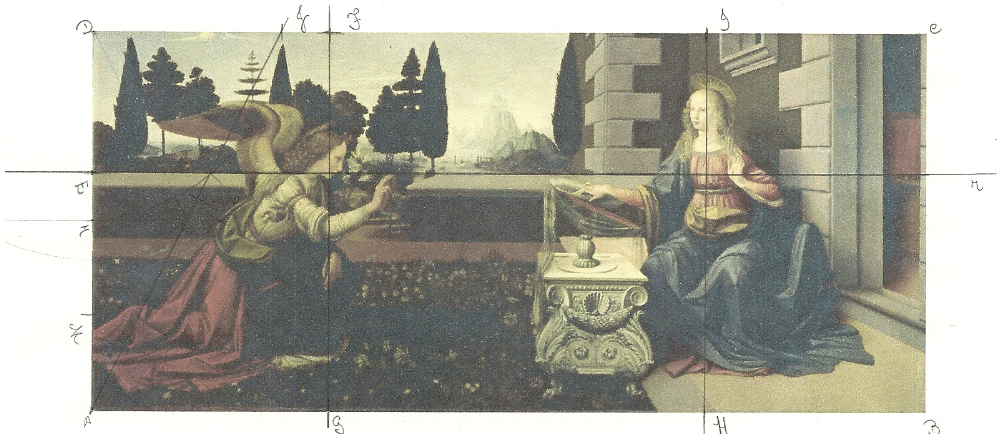


Figura 8: A Anunciação, Leonardo da Vinci

É possível perceber o cuidado de Leonardo da Vinci em relação, principalmente, às posições ocupadas pelo anjo Gabriel e por Maria, de forma que seus corpos estejam dentro dos retângulos AGFD e BCHI e que suas faces estejam paralelas, ambas em lados paralelos do quadrado GHIF.

Figura 4.9: Construções sobre *A anunciação*

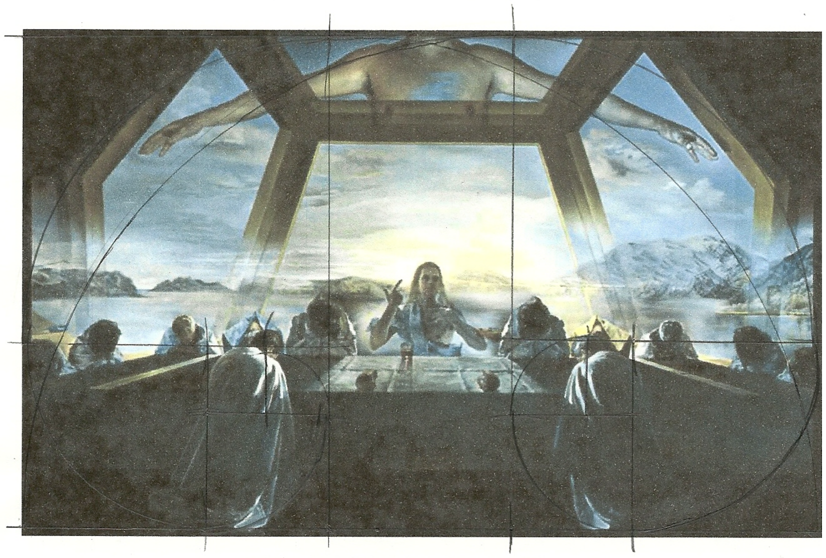


Figura 9: A Última Ceia, Salvador Dali

Dois focos da imagem convergem com a localização da espiral áurea, o chamado olho de Deus.

$$\frac{16,3}{10,1} = 1,61$$

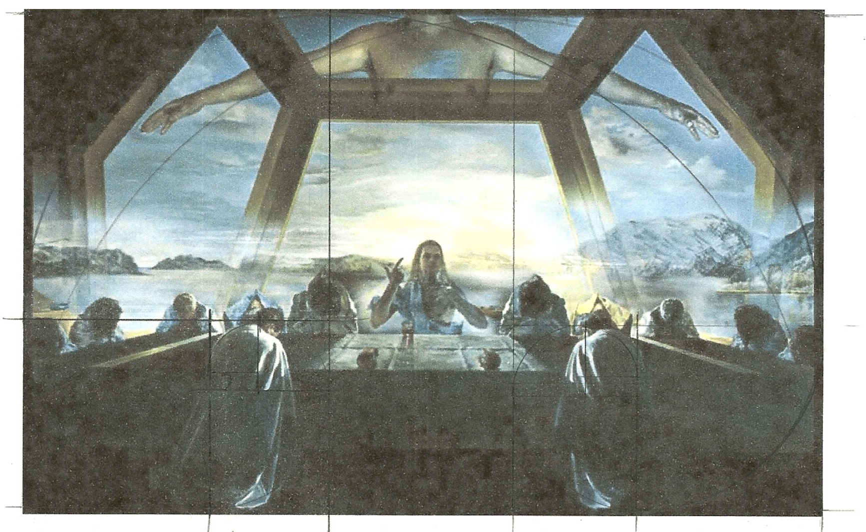


Figura 9: A Última Ceia, Salvador Dali

pessoa 1

pessoa 2

É possível perceber a simetria existente na figura, o local ocupado por Jesus, centralizado, sendo assim um local de destaque, além disso é possível ver que as espirais áureas convergem para duas pessoas (pessoa 1 e pessoa 2), fazendo, assim, com que a imagem seja dividida em três retângulos, 2 áureos e 1 central.

Figura 4.10: Construções sobre *A Última Ceia*

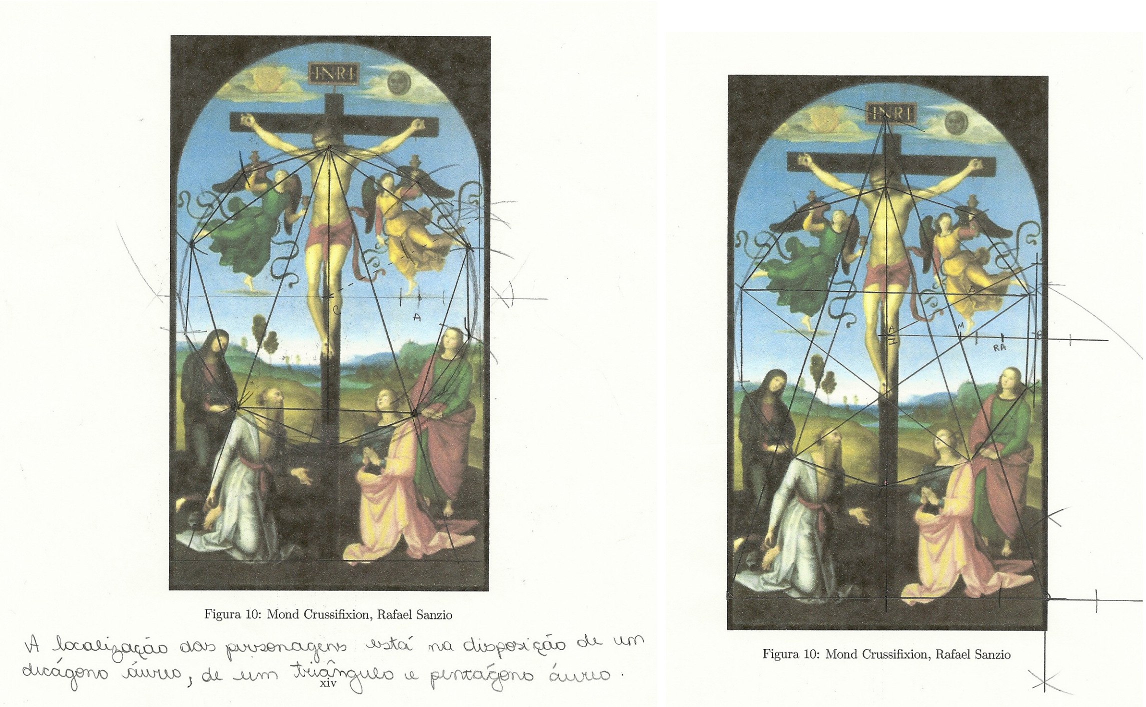


Figura 4.11: Construções sobre *Mond crucifixion*

4.2.4 Oficina 3

Na última oficina tivemos menos construções e mais observações. Trouxemos um pouco da história de Fibonacci, de sua sequência e das inúmeras aplicações da mesma. A ideia dos problemas era que os alunos observassem as relações entre a sequência de Fibonacci, a Razão Áurea e a natureza. Ao pedir para escreverem os vinte primeiros termos da sequência de Fibonacci e para calcular as razões entre cada termo e seu antecessor, tivemos a intenção de que percebessem quão rápido essa razão converge para Φ. E foi exatamente o que ocorreu durante a aula, muitos deles ficaram com preguiça de fazer todas as razões, por terem percebido rapidamente o objetivo. Teve um caso também de um aluno que entendeu o enunciado errado e fez as razões invertidas se aproximando da Razão Áurea menor. A seguir temos esses dois casos exemplificados e um caso de um aluno que fez conforme o enunciado.

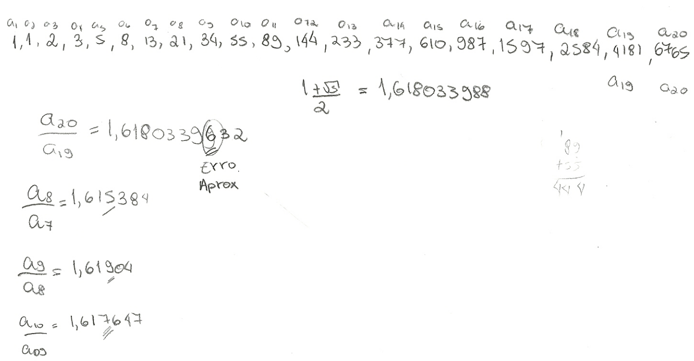


Figura 4.12: Exemplo 1 das razões de termos consecutivos da sequência de Fibonacci

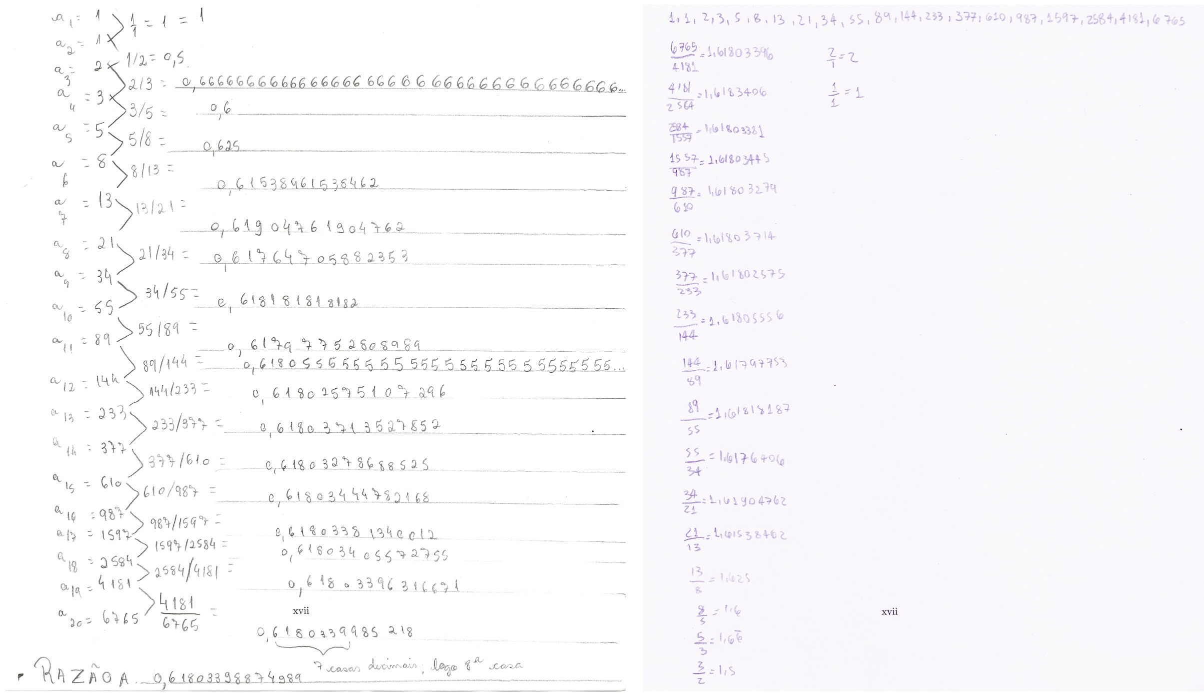


Figura 4.13: Exemplos 2 e 3 das razões de termos consecutivos da sequência de Fibonacci

Na questão que pedimos a aproximação da espiral de Fibonacci, os alunos construíram tranquilamente com exceção de alguns que confundiram o comando pois o mesmo estava dúbio. Estas dúvidas foram tiradas durante a oficina, os alunos conseguiram fazer a construção e o enunciado foi alterado para inclusão nesse trabalho. Segue abaixo algumas imagens dos trabalhos deles nessa questão.

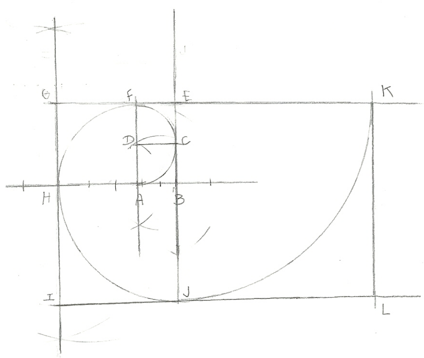


Figura 4.14: Exemplo 1 da espiral de Fibonacci

Nessa aula também pedi que os alunos fizessem potências naturais de Φ e buscassem um padrão. Não pedi demonstração, pois era algo que eles não teriam domínio de conteúdo suficiente para fazer. Seguem alguns exemplos do que fizeram.

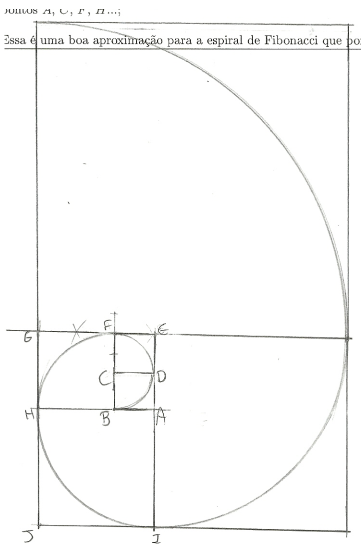


Figura 4.15: Exemplo 2 da espiral de Fibonacci

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
$$'' = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$$
$$'' = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$
$$'' = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4}$$
$$'' = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$'' = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2}$$
$$= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad = \varphi$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = (\varphi+1)\varphi \qquad \varphi^3 = \varphi^2+\varphi \qquad \varphi^3 = \varphi+1+\varphi \qquad \varphi^3 = 2\varphi+1$$

$$\varphi^4 = (2\varphi+1)\varphi \qquad \varphi^4 = 2\varphi^2+\varphi \qquad \varphi^4 = 2(\varphi+1)+\varphi \qquad \varphi^4 = 2\varphi+2+\varphi \qquad \varphi^4 = 3\varphi+2$$

$$\varphi^5 = (3\varphi+2)\varphi \qquad \varphi^5 = 3\varphi^2+\varphi.2 \qquad \varphi^5 = 3(\varphi+1)+2\varphi \qquad \varphi^5 = 3\varphi+3+2\varphi \qquad \varphi^5 = 5\varphi+3$$

a e b crescem na sequência de Fibonacci, com $a > b$, com $m \geq 2$

$$\varphi^m = a_m \cdot \varphi + a_{m-1}$$

Figura 4.16: Exemplo 1 das potências naturais de Φ

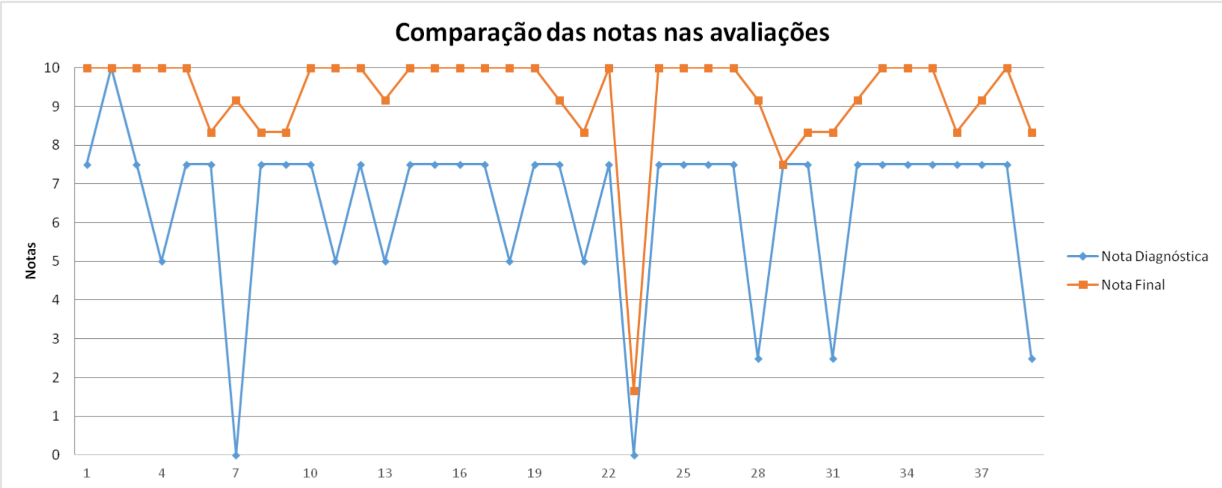
$$\Phi^n = a \cdot \Phi + b$$
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \Rightarrow \Phi^3 = \Phi + 1 + \Phi \Rightarrow \Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 \Rightarrow \Phi^4 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 \Rightarrow \Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 \Rightarrow \Phi^5 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 \Rightarrow \Phi^5 = 5\Phi + 3$$
$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 \Rightarrow \Phi^6 = 5\Phi + 3 + 3\Phi + 2 \Rightarrow \Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^n = a_n \cdot \Phi + a_{(n-1)}$$

Figura 4.17: Exemplo 2 das potências naturais de Φ

4.3 Após o projeto

Ao final do projeto, percebemos uma grande satisfação dos alunos que foi confirmada ao ver os resultados da pesquisa de opinião, que serão mostrados a frente. Além disso, percebemos também um grande desenvolvimento na maioria dos alunos. Comparando as duas avaliações, a diagnóstica teve uma média de 6,47 e um desvio padrão de 2,2, enquanto na avaliação final a média foi de 9,25 e o desvio padrão de 1,45, mostrando que a turma ficou mais homogênea e com uma média maior, ou seja, houve um nivelamento por cima. Esse crescimento pode ser percebido através do gráfico abaixo.

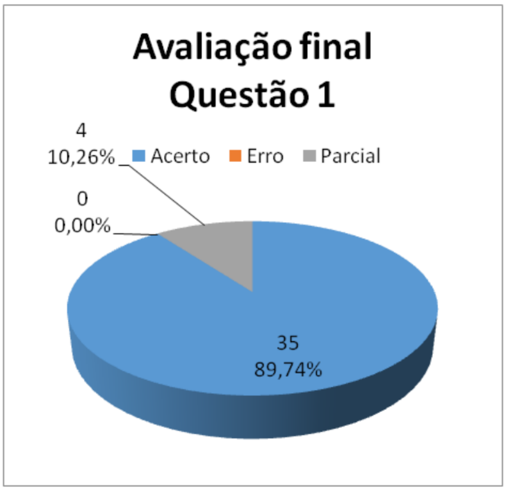


Consideramos esse resultado muito bom, visto que nosso objetivo é elevar o nível de conhecimento de nossos alunos sem deixar os que estão com dificuldade para trás. O que é muito difícil em ambientes com grande disparidade de conhecimento, pois se diminuímos o nível da aula, em relação a conteúdos, ocorre uma diminuição do interesse por parte dos alunos com maior rendimento. E se subirmos muito o nível da aula para agradar os alunos com maior rendimento, teremos uma desistência dos alunos com dificuldade.

Segue a análise individual das questões. Observando que na avaliação final tivemos seis questões das quais as quatro primeiras cobram conceitos similares as questões da avaliação diagnóstica para verificar o crescimento dos alunos que tinham dificuldade nesses conceitos. Vale observar que a avaliação final foi aplicada três semanas após a última oficina, nesse meio tempo os alunos não levaram a apostila para casa, ou seja, não tinham material para estudar. Além disso essas semanas intermediárias foram as semanas de provas da escola o que os levou a estudar para as provas e não se preocupar com o projeto.

4.3.1 Questão 1

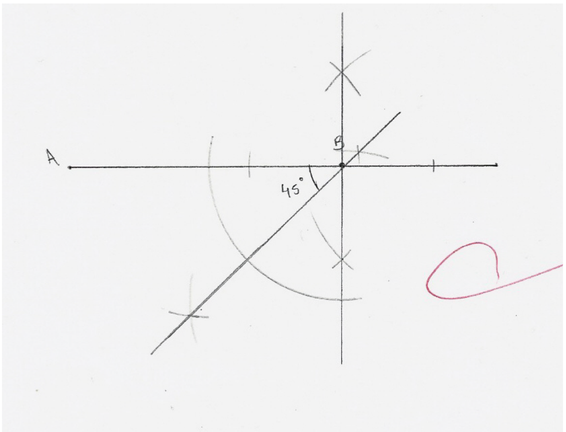
Nessa questão foi solicitado que construíssem a mediatriz de um segmento de reta. Todos os alunos apresentaram uma resolução pelo menos, parcialmente correta, alguns deles determinaram o ponto médio, mas não traçaram a mediatriz, ou seja, fizeram os passos de construção da mesma e não traçaram a reta. Isso pode ter duas explicações: a primeira, o aluno não sabe o que é mediatriz e a confundiu com ponto médio, a segunda, o aluno não leu o enunciado da maneira correta e achou que era para determinar o ponto médio, como foi pedido na diagnóstica. Segue abaixo um gráfico com o percentual de acerto, erro e acerto parcial nessa questão.

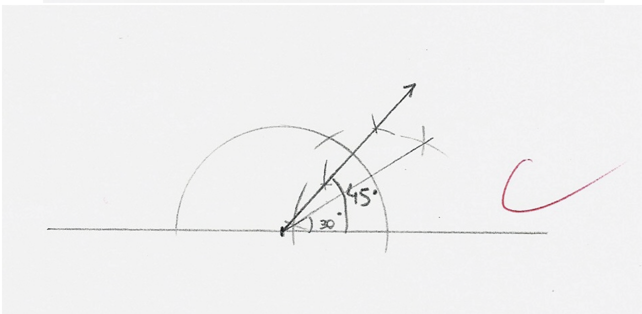


Nessa questão o processo de construção foi o mesmo da Questão 1 da avaliação diagnóstica, por isso não irei colocar exemplos aqui.

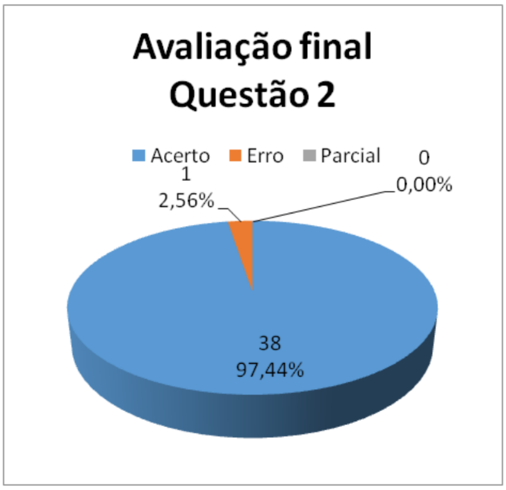
4.3.2 Questão 2

Para diferenciar da questão 2 da avaliação diagnóstica pedimos a construção de um ângulo de medida 45° e esperava que eles construíssem um ângulo reto e fizessem a bissetriz do mesmo. Nem todos os alunos fizeram assim, alguns alunos construíram um ângulo de medida 60° e depois fizeram duas bissetrizes como pode ser observado na primeira figura a seguir. Na segunda figura temos uma construção seguindo o esperado.



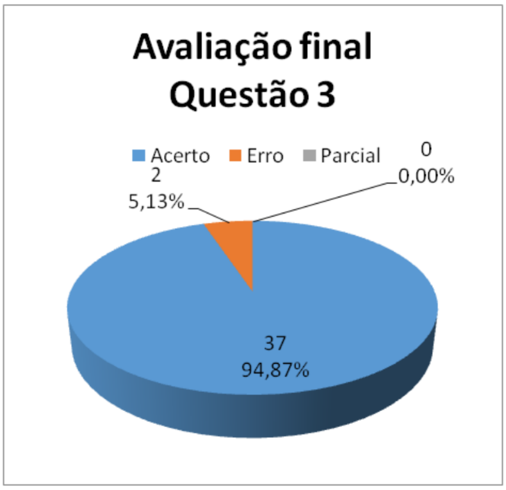


A seguir temos o gráfico com o percentual de acerto, erro e acerto parcial.



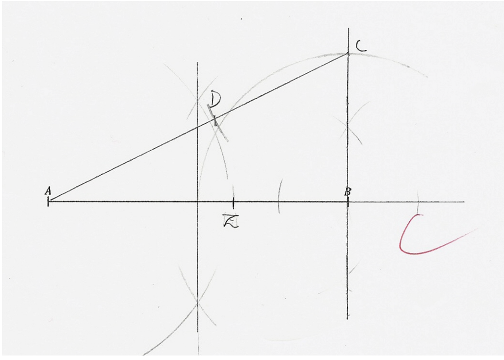
4.3.3 Questão 3

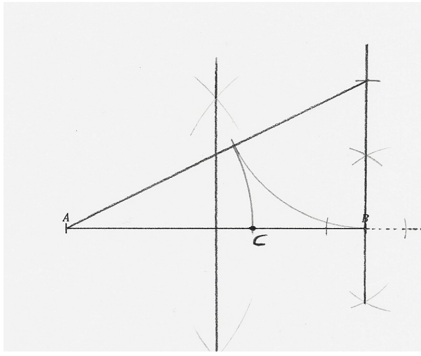
Na questão 3 solicitamos novamente para os alunos fazerem a transferência de um ângulo como foi feito na questão 3 da avaliação diagnóstica. Mesmo essa questão não tendo sido trabalhada diretamente no projeto, o percentual de acerto aumentou bastante. Isso mostra que o conteúdo foi assimilado de maneira indireta, ou seja, como os alunos tiveram que usar esse tipo de raciocínio várias vezes nas construções, eles se tornaram aptos a essa construção mesmo sem perceber. No gráfico a seguir temos o percentual de acerto, erro e acerto parcial nessa questão.



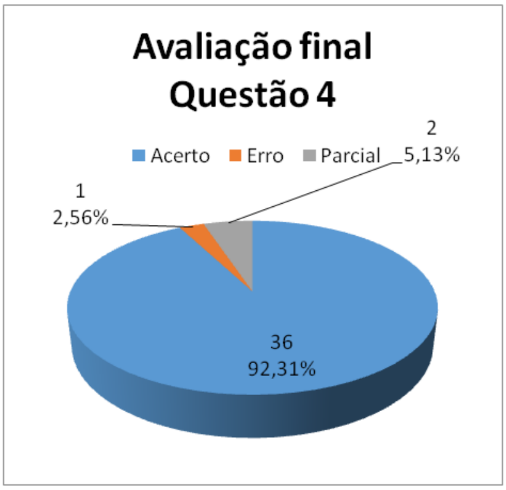
4.3.4 Questão 4

Nessa questão pedimos para dividirem um segmento na média extrema razão. A dificuldade dessa questão é a mesma da questão 4 da avaliação diagnóstica, mas nesse caso tivemos um grande número de acertos. Cremos que, por ter sido a primeira construção trabalhada nos projetos e muito utilizada nas construções seguintes, o acerto foi bem alto em comparação com o acerto da questão correspondente na avaliação diagnóstica. Nas figuras a seguir temos dois exemplos das construções corretas feitas pelos alunos nessa questão.



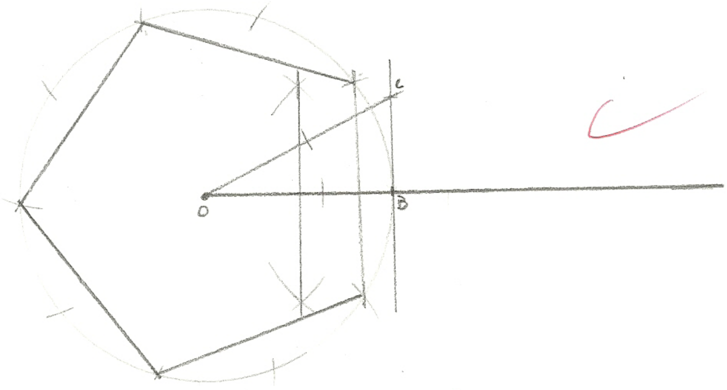


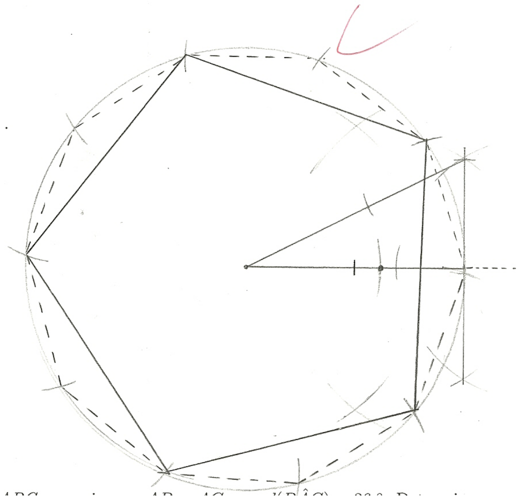
Essa questão é a base do estudo da Razão Áurea, por esse motivo decidimos colocá-la nessa avaliação, pois caso eles ainda não conseguissem fazer essa construção sem o passo a passo a absorção deles teria sido muito baixa. O resultado, apresentado a seguir, mostra que eles realmente absorveram a ideia dessa construção.

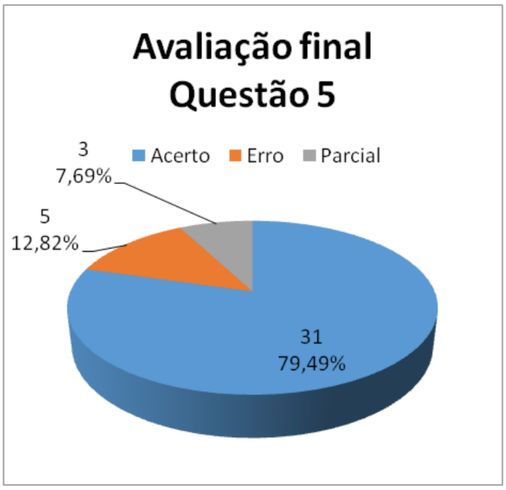


4.3.5 Questão 5

Nesta questão pedimos algo que não foi trabalhado nas oficinas, para verificar se eles conseguiriam transpor o que aprenderam para a construção do pentágono regular. Nas oficinas construímos o decágono regular, assim esperava que eles fizessem a construção do mesmo e ligassem os vértices de maneira conveniente para obter o pentágono regular. Esta construção nós consideramos como difícil e mesmo assim o resultado dela foi muito bom, próximo de 80%. Se notarmos que os alunos não sabiam nenhuma construção envolvendo Razão Áurea e terminaram o curso construindo até um pentágono regular pode-se dizer que a assimilação do conteúdo por eles foi significativa. A seguir temos dois exemplos dessa construção e após isso o gráfico com o resultado dos alunos nessa questão.





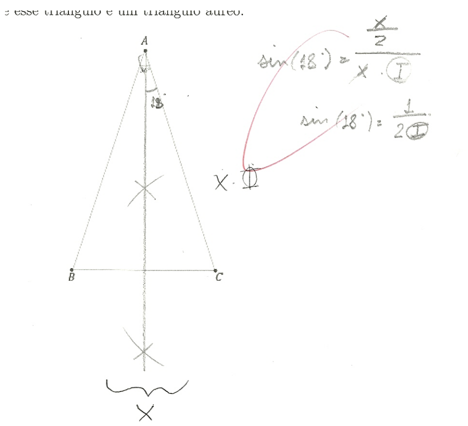


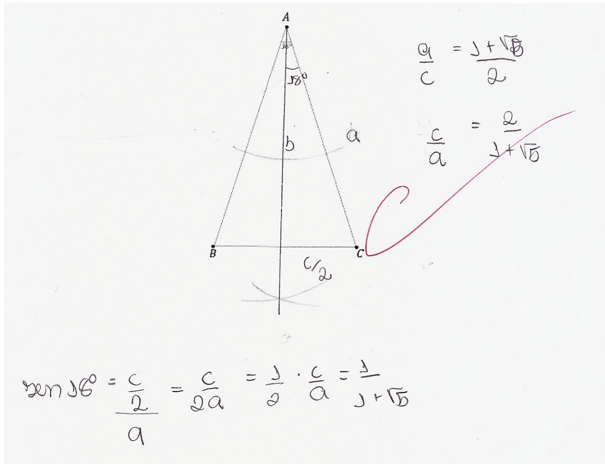
4.3.6 Questão 6

Nessa última questão decidimos não colocar uma construção e sim desenvolver nos alunos a percepção que eles podem utilizar os conhecimentos deles para descobrir novas coisas. Ao citar o triângulo áureo e pedir o $\sin 18°$, gostaria que eles percebessem que é possível descobrir as razões trigonométricas das medidas de outros ângulos, além das mais utilizadas na escola, a saber $30°$, $45°$ e $60°$. A partir do $\sin 18°$

é possível, mas não foi pedido, que os alunos obtenham $\cos 18°$, $\cos 36°$, $\sin 36°$, entre outros. E para isso, bastaria utilizar as matérias estudadas por eles neste ano como ciclo trigonométrico e adição de arcos.

As figuras a seguir mostram dois exemplos da descoberta dessa relação pelos alunos.





4.3.7 Casos especiais

Nesse projeto, pudemos perceber dois casos especiais que me chamaram bastante a atenção. Foram os casos dos alunos 7 e 23. Primeiramente vou falar um pouco sobre o caso do aluno 7.

Esse primeiro aluno não conhecia nada de desenho geométrico, tanto que tirou zero na avaliação diagnóstica. Nas primeira oficinas ele demonstrou grande dificuldade nos exercícios e um dos alunos com facilidade decidiu auxiliá-lo. Mesmo assim ele chegou pra mim em uma das oficinas e falou que iria desistir do projeto, pois não dava conta de fazer nada e estava muito desestimulado. Nesse momento, pedi para ele ter calma e me sentei ao lado dele e fui orientando-o nas construções. Após entender os princípios e conseguir dividir um segmento na média extrema razão as coisas começaram a fluir melhor e ele foi tomando gosto pelo projeto. O resultado final dele mostra esse grande crescimento, pois ele saiu da nota zero para 9,17. Esse caso mostra como um aluno interessado em aprender e com o estímulo certo tem totais condições de seguir com o assunto, basta que o professor saiba como abordar o caso.

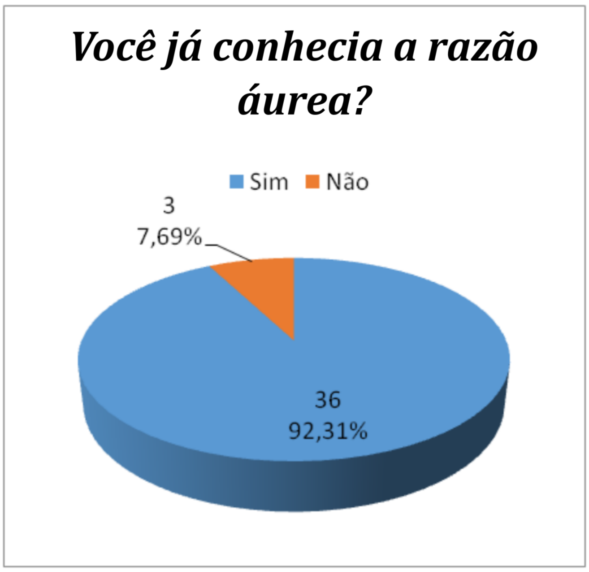
Muitas vezes porém não conseguimos fazer essa abordagem, seja pelo excesso de alunos em sala ou pelo fato de que alguns não demonstrarem dúvidas, mesmo quando as têm. Esse é o caso do aluno 23. Ele também tirou zero na avaliação diagnóstica, mas durante as oficinas não me procurou para tirar dúvidas, então achei que ele estava conseguindo fazer as construções. Como não corrigi as oficinas nos intervalos entre elas, não consegui identificar que ele estava com dificuldades e como ele não me informou acabou passando despercebido. Fui notar que ele não assimilou o conteúdo apenas ao corrigir a avaliação final, na qual o aluno apresentou novamente baixo rendimento.

Muitas vezes temos esses dois casos em nossa sala de aula, o primeiro conseguimos identificar rapidamente, pois geralmente esse tipo de aluno é mais desinibido e nos fala abertamente suas dúvidas. O problema maior se encontra em como atingir os alunos tímidos que não falam que estão com problemas e só conseguimos diagnosticar no final do processo. Sei que se nós tivéssemos corrigido cada apostila entre duas oficinas teria descoberto essa dificuldade dele e teria conseguido auxiliá-lo, mas o tempo e a quantidade de alunos não me permitiram fazer esta análise.

4.3.8 Pesquisa de opinião

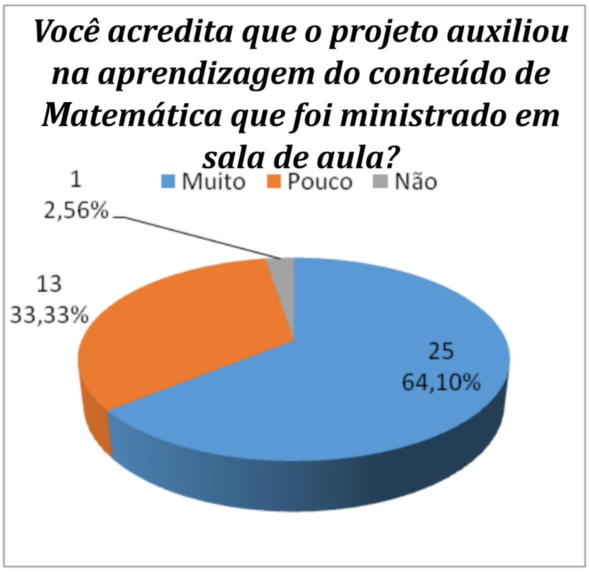
Ao final do projeto foi realizada uma pesquisa de opinião com o intuito de verificar a satisfação dos alunos em relação a sua participação. As perguntas vão desde se o aluno já conhecia a Razão Áurea até sobre quais foram os tópicos que eles encontraram dificuldades. As perguntas encontram-se no Apêndice D.

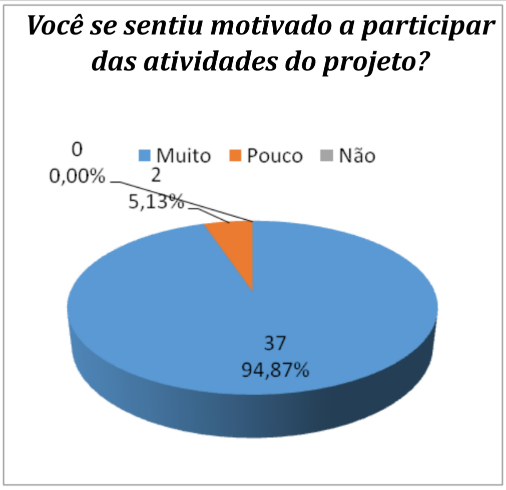
Pelos resultados pude observar que a maioria deles já tinha ouvido falar sobre a Razão Áurea, o que já era esperado, pois no final da primeira série eles participaram de uma palestra que falava desde a definição até as principais construções envolvendo a Razão Áurea. Porém, essa maioria nunca tinha feito construções envolvendo este tema. Aliando essas informações com a avaliação diagnóstica, pude observar que o conhecimento de Razão Áurea e até a visualização das construções envolvendo a mesma não foram suficientes para eles assimilarem o conteúdo e resolverem a questão 4 da diagnóstica que pedia a construção de um segmento de medida $a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ a partir de um segmento de medida a. Mostrando que a prática desenvolvida teve um significado muito maior do que apenas a aula ministrada, pois na avaliação final os resultados foram muito bons. Seguem os gráficos de setores relacionados as duas primeiras perguntas da pesquisa de opinião.

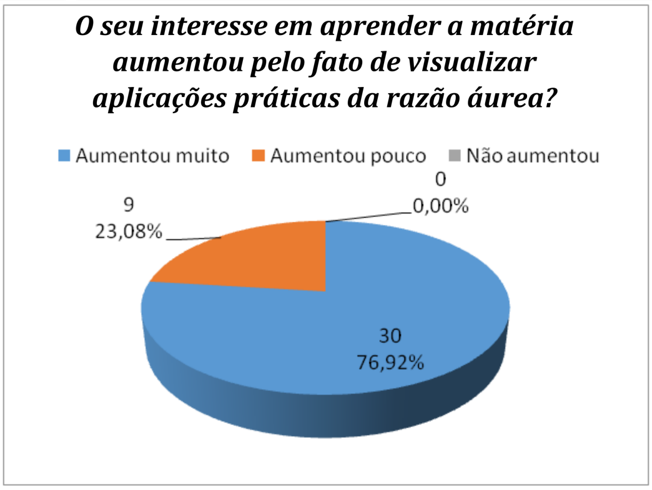


Em relação ao ambiente de trabalho pode ser observado uma grande satisfação dos alunos, afinal 100% dos alunos disseram que acharam interessante trabalhar com Matemática em um ambiente fora de sala de aula. Isso refletiu na motivação dos alunos, no interesse deles no conteúdo e na aprendizagem deles do conteúdo ministrado em sala de aula. Pode-se observar que mesmo sem ter uma ligação direta com o conteúdo da segunda série do Ensino Médio, vários alunos apontaram que este estudo os auxiliou na aprendizagem dos conteúdos ministrados em sala de aula. Creio que isso deve-se ao fato de que os alunos desenham muitas vezes figuras como o ciclo trigonométrico e o desenho geométrico os auxilia nessa tarefa.

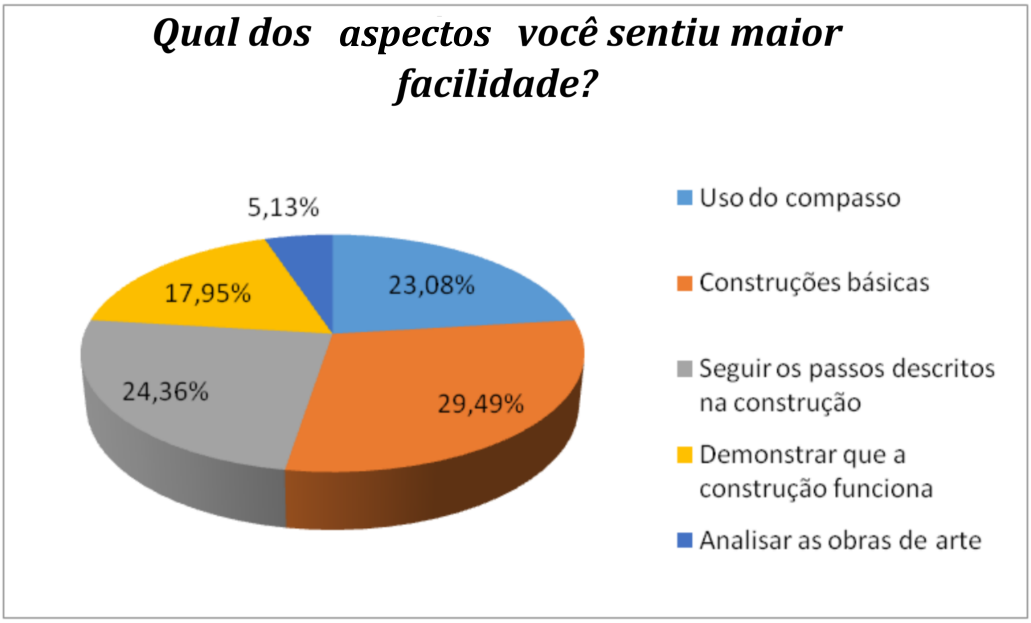
O Desenho Geométrico também os auxilia na visualização de qual é a "abertura" de ângulos de várias medidas, além de poder utilizar os novos conhecimentos para a descoberta das relações trigonométricas das medidas de alguns ângulos não notáveis, como feito na questão 6 da avaliação final. A seguir temos os gráficos de setores de mais algumas perguntas feitas aos alunos.

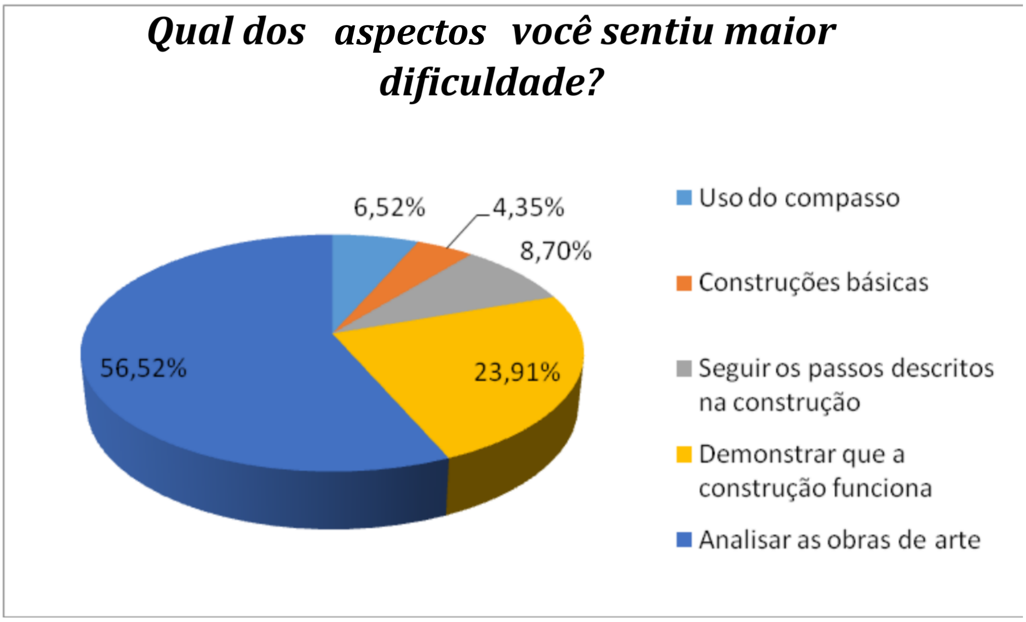




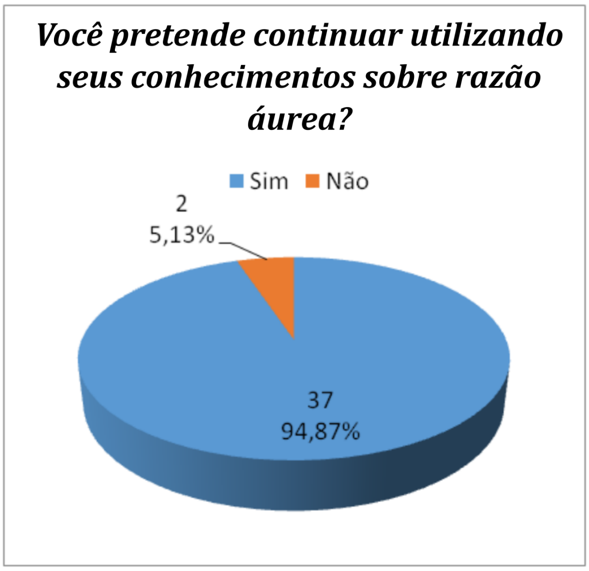


Em relação às dificuldades ou facilidades que os alunos demonstraram nas oficinas, a pesquisa de opinião revela que as maiores dificuldades foram nas análises das obras e nas demonstrações, o que já era esperado, pois esses passos são os que necessitam de maior abstração dos alunos, uma vez que não consiste apenas em seguir regras e passos pré-estabelecidos. Vários alunos também apresentaram dificuldade em manipular o compasso, pois muitas vezes os compassos escolares não permanecem com a medida fixa, dificultando as construções. Esse problema poderia ter sido minimizado se em parte das oficinas tivéssemos utilizado o Geogebra. Assim, as construções teriam sido mais precisas como as que foram apresentadas nesse trabalho. Não creio que seria proveitoso todo o projeto ser feito com o Geogebra, pois tiraria do aluno o aprendizado das construções de forma manual, o que auxilia no processo de aprendizagem, mas seria bom que o aluno também aprendesse a manipular essa ferramenta digital. Em uma próxima oportunidade pretendo utilizar as duas ferramentas concomitantemente. A seguir temos os gráficos com os percentuais de dificuldade e facilidade nas áreas envolvidas no projeto.





A satisfação dos alunos com o projeto foi notória pelas perguntas finais da avaliação. Os alunos demonstraram que pretendem continuar utilizando os conhecimentos adquiridos no projeto de Razão Áurea e todos indicariam o projeto para outros colegas. Os resultados podem ser observados nos gráficos a seguir. Além disso, a nota média atribuída ao projeto pelos alunos, na escala de 0 a 10, foi de 9,56.


Você pretende continuar utilizando seus conhecimentos sobre razão áurea?
Sim
Não
2
5,13%
37
94,87%


Você indicaria o projeto para outros colegas?
Sim
Não
0
0,00%
39
100,00%

Capítulo 5

Considerações finais

O ensino da Matemática é um grande desafio, pois vivemos em uma sociedade que não valoriza esta matéria e muitos não a compreendem e criam paradigmas que são passados aos seus filhos. Assim, o professor tem o desafio de mostrar que é possível, interessante e necessário aprender Matemática. Por isso, é necessário que o professor busque novas maneiras de ensinar o conteúdo, de forma a motivar e prender a atenção de seus alunos. Não basta para isso apenas o uso de materiais didáticos, é necessário uma mediação do professor ligando o aluno ao mundo por meio da Matemática, utilizando os materiais necessários.

Ao implementar esse projeto com os alunos pude perceber uma grande motivação deles e como isso influenciou na preparação dos mesmo em receber os novos conteúdos e as novas construções. O material adotado foi simples, mas exigiu muito da minha parte em pesquisa, desenvolvimento e prontidão em auxiliá-los, e também exigiu muito da parte dos alunos em perseverança para buscar fazer as construções mesmo com erros que ocorrem muitas vezes com o uso do compasso. O resultado foi muito satisfatório e gratificante, pois quando você vê seus alunos buscando utilizar aqueles conhecimentos desenvolvidos em sala de aula no cotidiano, vê-se uma pessoa que descobriu uma nova forma de pensar. Percebi também que muitos alunos gostaram desta nova dinâmica de sala de aula, uma dinâmica que o estimula a participar e buscar soluções distintas para problemas cotidianos.

Este projeto poderia ter sido aplicado em qualquer série a partir do nono ano do Ensino Fundamental com focos diferentes, por exemplo, poderia utilizá-lo para ensinar desenho geométrico a um grupo que ainda não estudou isso. Primeiro o professor começaria motivando os alunos com o tema e suas aplicações, em seguida ensinaria as construções e depois as aplicaria nos exemplos dados no início. Assim, os alunos entenderiam melhor e recordariam por mais tempo do que apenas decorando quais são os lugares geométricos e suas construções sem entender o porquê e enxergar aplicações para os mesmos.

Essa ideia também pode ser estendida utilizando outros conteúdos de Matemática, sempre colocando o professor como mediador do processo e diminuindo aulas exclusivamente expositivas. Assim o aluno toma seu posto na busca pelo conhecimento como agente ativo no processo de aprendizagem. Para que isso funcione de maneira plena, o professor deve, portanto, trabalhar com turmas menores ou com alguém para auxiliar esse processo, como um monitor. Caso contrário, o mesmo ficará sobrecarregado e acabará desistindo deste tipo de inovação.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Projeto Razão Áurea

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Projeto Razão Áurea

por

Paulo Luiz da Silva Ramos

Brasília

2016

Oficina I

ABORDAGEM HISTÓRICA

A razão áurea - também conhecida como extrema razão, número de ouro e segmento áureo foi descrita formalmente por Euclides em sua obra Os elementos, livro VI proposição 30, e representa segundo estudiosos a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Ela pode ser encontrada na natureza, em obras de arte, construções, corpo humano e em outros objetos do dia a dia. Essa proporção também foi estudada por Luca Pacioli que foi descrita em três livros publicados em 1509.

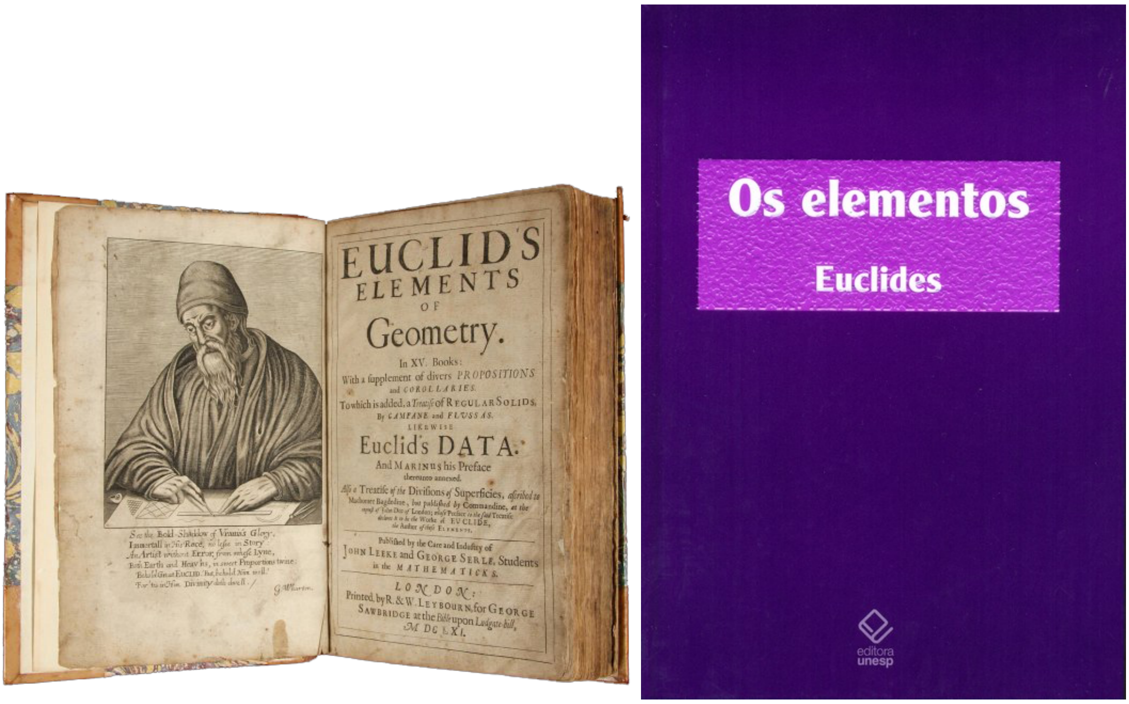


Figura 1: Versões de "Os elementos"

Quando construímos um retângulo de modo que a razão entre as medidas do seu lado é a razão áurea dizemos que este retângulo é um retângulo áureo. Este retângulo é esteticamente agradável e por esse motivo é utilizado em muitas coisas do cotidiano, como por exemplo, cartão de crédito, cartas de baralho, blocos de papel de carta, capas de caderno. Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um certo retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da razão áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e em cada uma destas pesquisas os resultados foram semelhantes.

Figura 2: Selo sobre Pacioli

Ao analisarmos o corpo humano podemos perceber uma série de razões que se aproximam da razão áurea, quanto mais próximas dessa razão mais bela a pessoa é considerada. Le Corbusier, pintor e arquiteto francês foi um dos primeiros a propor um sistema de medidas que iria satisfazer as exigências de beleza derivadas da proporção áurea em seus projetos arquitetônicos, por isso esse sistema recebeu o nome de Modulor (módulo de ouro), o qual era baseado na proporção do ser humano. A estatura escolhida pelo arquiteto como padrão foi de 1,75m e depois passou para 1,85. O objetivo era conseguir uma escala humana universal para ser aplicada na arquitetura e na mecânica. Um arquiteto brasileiro a orientar-se por Le Corbusier foi Oscar Niemeyer, o qual projetou a sede do Ministério da Educação e Saúde, hoje palácio Gustavo Capanema, no Rio de Janeiro.

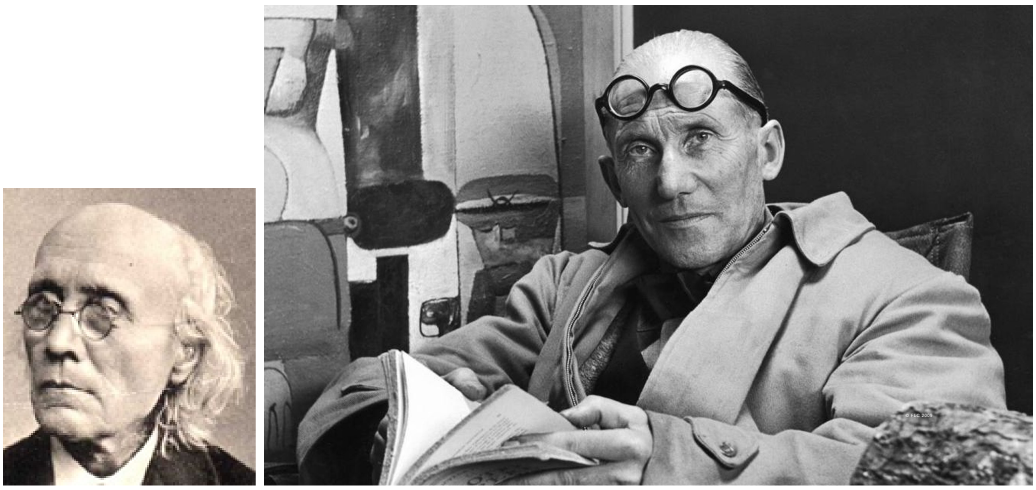


Figura 3: Da esquerda para direita temos Fechner e Corbusier

Segmento Áureo

Problema: Determinar o ponto que divide um segmento qualquer na média extrema razão.

i. Trace um segmento $\overline{AB}$;
ii. Encontre o ponto médio M de $\overline{AB}$;
iii. Utilizando o compasso, trace uma reta r perpendicular a $\overline{AB}$ passando por B;
iv. Trace um arco de circunferência de centro em B e raio MB de modo a encontrar a reta r no ponto C;
v. Trace o segmento formando $\overline{AC}$ formando um triângulo ABC;
vi. Trace um arco de circunferência, com centro em C e raio CB até encontrar o segmento $\overline{AC}$ no ponto E;
vii. Trace um arco de circunferência, com centro em A e raio AE até encontrar o segmento $\overline{AB}$ no ponto D.

O ponto D divide o segmento $\overline{AB}$ na média extrema razão.

Retângulo Áureo

Problema: Construir um retângulo áureo sendo dado a medida de seu lado menor.

i. Construa um quadrado $ABCD$ com uma medida de sua escolha;
ii. Determine o ponto médio M de $\overline{AB}$;
iii. Trace um arco de circunferência de centro M e raio MC até encontrar a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E;
iv. Construa o retângulo $AEFD$;

O retângulo $AEFD$ é um retângulo áureo.

Retângulo Áureo

Problema: Construa e descreva os passos de construção de um retângulo áureo sendo dado a medida de seu lado maior.

Razão Áurea no corpo humano

Aluno:

	Medidas (cm)	Razões
Altura (h)		$\frac{h}{u} =$
Distância do umbigo ao chão (u)		
Tamanho do rosto (r)		$\frac{r}{l} =$
Distância entre o topo do nariz e o queixo (l)		
Distância do quadril ao chão (q)		$\frac{q}{j} =$
Distância do joelho ao chão (j)		
Distância do ombro a ponta do dedo (o)		$\frac{o}{c} =$
Distância do cotovelo a ponta do dedo (c)		

Oficina II

ABORDAGEM HISTÓRICA

Dentre as construções que envolvem a razão áurea temos o triângulo áureo que aparece também no pentagrama - polígono estrelado formado pelas diagonais de um pentágono regular. O pentagrama e o pentágono foram os principais motivos do interesse dos gregos em relação ao estudo da razão áurea, pois essas figuras só podem ser construídas com régua e com régua e compasso se soubermos dividir um segmento na média extrema razão. Isto se deve ao fato que os gregos utilizavam os poliedros de Platão para explicar o universo e entre eles está o dodecaedro regular - poliedro regular com doze faces pentagonais.

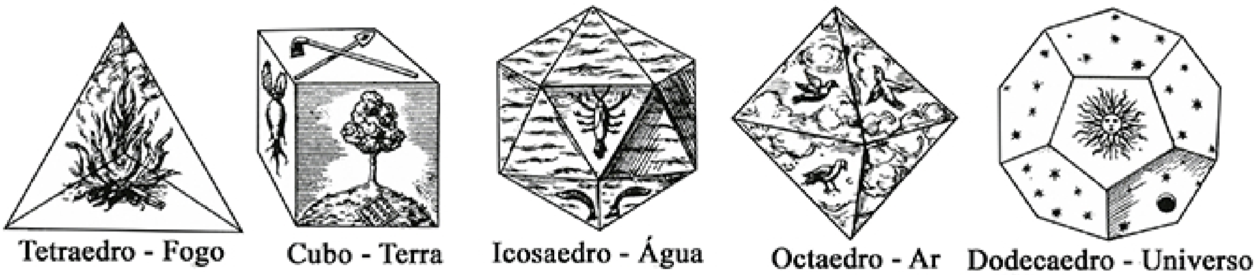


Figura 4: Os Cinco Sólidos de Platão [3]

Através do triângulo áureo, ou mesmo do retângulo áureo, pode-se construir a espiral áurea, uma espiral que aparece muitas vezes na natureza seja em pequenas coisas como em conchas e flores ou em grandes como as galáxias. Pode-se assim contemplar na natureza uma grande quantidade e variedade de elementos que apresentam a razão áurea.

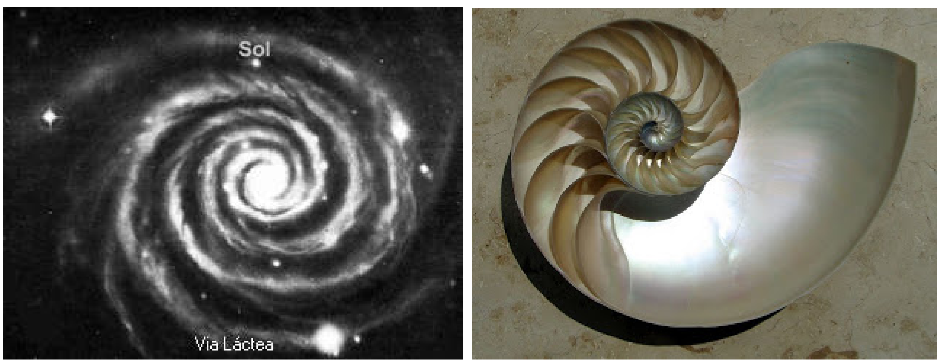


Figura 5: Foto via lactea [6] e da concha de um nautilus [4]

A partir dessas figuras muitos artistas criaram obras utilizando-as de maneira sutil ou de maneira direta, entre eles temos Leonardo da Vinci, Salvador Dali e Rafael Sanzio. A espiral áurea dá um noção de movimento, enquanto o retângulo áureo dá o sentido de harmonia uma vez que é uma forma geométrica agradável a vista. Assim vários autores utilizam a espiral em suas obras para enfatizar elementos para os quais a visão deveria convergir, enquanto colocam em retângulos áureos elementos que devem ser harmônicos. Estas técnicas são utilizadas tanto em obras de arte quanto em fotografias.

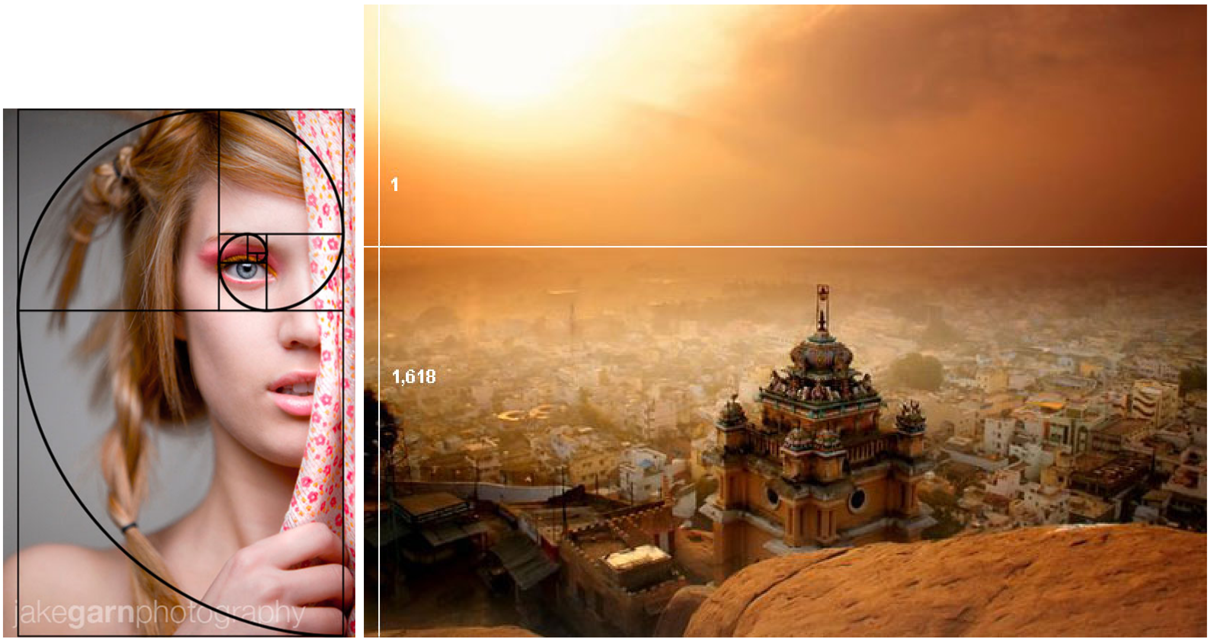


Figura 6: Fotos utilizando a razão áurea [5]

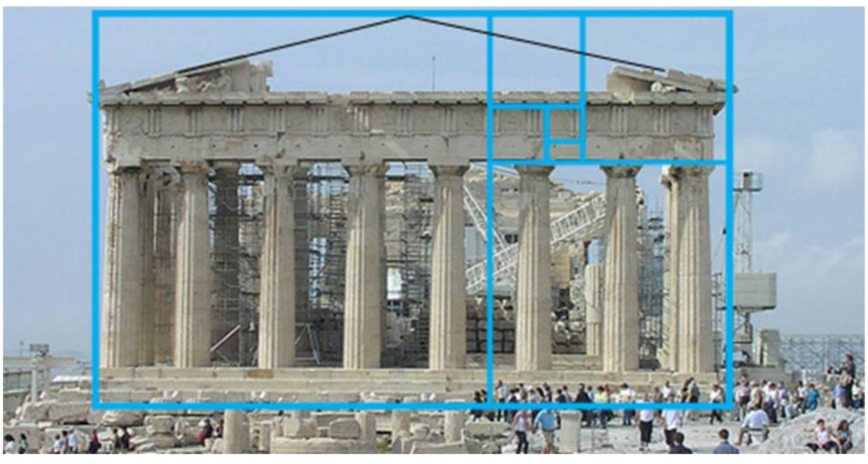


Figura 7: Parthenon [7]

Triângulo Áureo

Problema: Construir um triângulo áureo acutângulo a partir do seu lado menor.

i. Construa um segmento $\overline{AB}$, este segmento será o lado menor do triângulo;
ii. Construa um segmento $\overline{BD}$ perpendicular e congruente a $\overline{AB}$;
iii. Trace a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$ determinando seu ponto médio M;
iv. Trace um arco de circunferência de centro em M e raio MD de modo a encontrar a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E;
v. Trace um arco de circunferência de centro A e raio AE até encontrar a reta r no ponto C;
vi. Construa o triângulo ABC;
O triângulo ABC é um triângulo áureo. Demonstre isso mostrando que $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Espiral áurea

Problema: Construir uma aproximação da espiral áurea a partir de retângulos áureos.

i. Construa um retângulo áureo $ABCD$, com $\overline{AB}$ sendo o lado inferior paralelo a base da folha e com A a esquerda de B;
ii. Construa o quadrado $AEFD$, criando o retângulo áureo $EFCB$;
iii. Construa o quadrado $FCGH$, criando o retângulo áureo $EBGH$;
iv. Construa o quadrado $BGIJ$, criando o retângulo áureo $EJIH$;
v. Continue o processo de construção de quadrados no sentido horário;
vi. Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{AF}$, com centro em E;
vii. Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{FG}$, com centro em H.
viii. Trace um arco de circunferência $\overset{\frown}{GJ}$, com centro em I.
ix. Continue o processo de construção desses arcos.

Essa é uma boa aproximação para a espiral áurea.

Decágono regular

Problema: Construir um decágono regular a partir do raio da circunferência circunscrita a ele.

i. Construa um segmento $\overline{AB}$ com a medida igual ao raio dado;
ii. Divida $\overline{AB}$ por um ponto C que o divide na média extrema razão, tal que $AC > BC$;
iii. Utilizando o compasso, trace uma circunferência de centro em A e raio AB;
iv. A partir do ponto B trace arcos de circunferência consecutivos com a abertura do compasso igual a AC ;
v. Trace o decágono regular a partir dos extremos dos arcos obtidos no passo **iv.**.

Razão Áurea na arte

A Anunciação, Leonardo da Vinci

Problema: Observar algumas aparições da razão áurea no quadra "A Anunciação"

Para facilitar as construções nomeie os vértices do quadro $ABCD$ começando do canto esquerdo inferior e seguindo no sentido anti-horário.

i. Divida o segmento $\overline{AD}$ na razão áurea com o ponto E de modo que $AE > ED$;
ii. Trace a reta r perpendicular a $\overline{AD}$ no ponto E;
iii. Construa um retângulo $ADFG$ com $AG = AE$ e $G \in \overline{AB}$;
iv. Construa um quadrado $FGHI$ com $H \in \overline{GB}$;
v. Escreva abaixo da figura o que essas construções te levaram a perceber na figura.

Figura 8: A Anunciação, Leonardo da Vinci

A Última Ceia, Salvador Dali

Problema: Observar algumas aparições da razão áurea no quadra "A Última Ceia"

i. Com uma régua meça as dimensões do quadro e faça sua razão, verificando que esta se aproxima de *phi*;
ii. Construa uma espiral áurea no sentido anti-horário;
iii. Construa uma espiral áurea no sentido horário;
iv. Escreva abaixo da figura o que essas construções te levaram a perceber na figura.

Figura 9: A Última Ceia, Salvador Dali

Mond Crucifixion, Rafael Sanzio

Problema: Observar algumas aparições da razão áurea no quadra "Mond Crucifixion"

i. Trace uma circunferência com um diâmetro com extremos nos pontos vermelhos inseridos no quadro;
ii. Trace um decágono inscrito nessa circunferência com dois dos vértices nos pontos vermelhos;
iii. Construa um pentagrama, inscrito na circunferência, com um dos vértices no rosto de Cristo;
iv. Trace um triângulo áureo com um vértice no ponto sobre o rosto de Cristo e com um lado contendo a base da cruz;
v. Escreva no verso da página o que essas construções te levaram a perceber na figura.

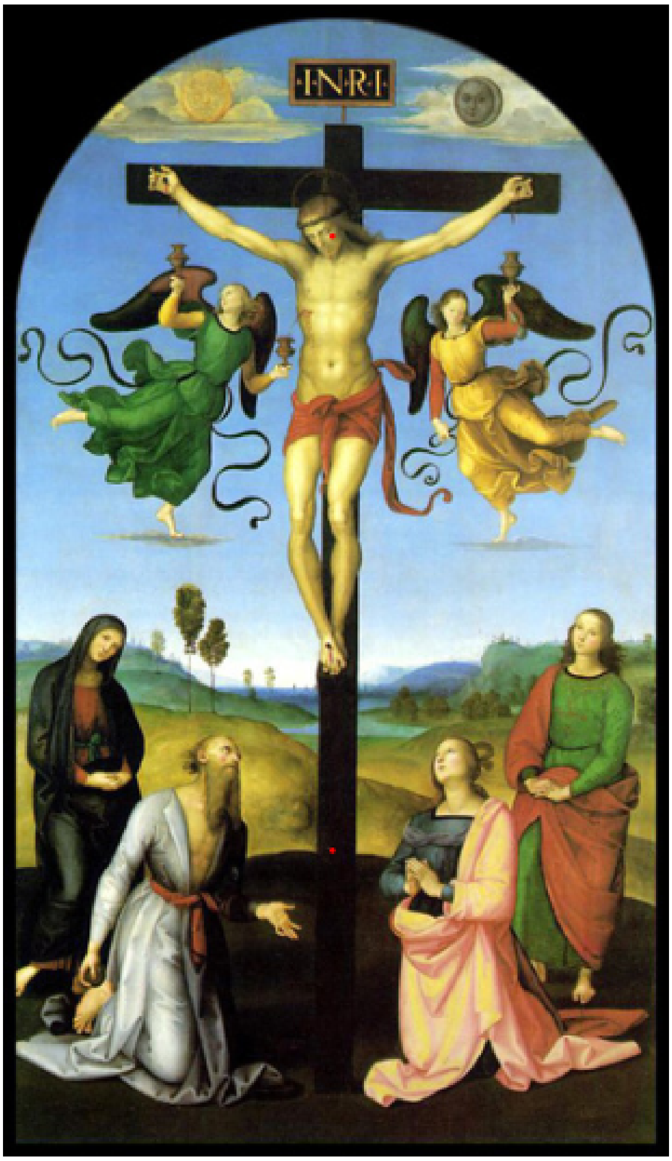


Figura 10: Mond Crussifixion, Rafael Sanzio

Oficina III

ABORDAGEM HISTÓRICA

Leonardo Pisano, mais conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano, que foi criado no norte da África por causa de seu pai que era um funcionário de comércio e alfândega. Devido ao trabalho do seu pai ele conheceu vários países e teve a oportunidade de conhecer como cada um deles trabalhava com matemática, assim ele teve contato com os algarismos indo-arábicos e fascinado com a facilidade que esses números traziam as contas escreveu seu primeiro livro *Liber abaci* publicado em 1202. Dentre as coisas trabalhadas nesse livro, em sua terceira seção tem-se a sequência de Fibonacci, motivo pelo qual ele é mais lembrado nos dias de hoje. Ela foi enunciada da seguinte maneira.

> Um certo homem colocou um par de coelhos em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser obtidos a partir daquele par ao final de um ano se assumirmos que todo mês cada par gera um novo par que se torna fértil a partir do segundo mês?

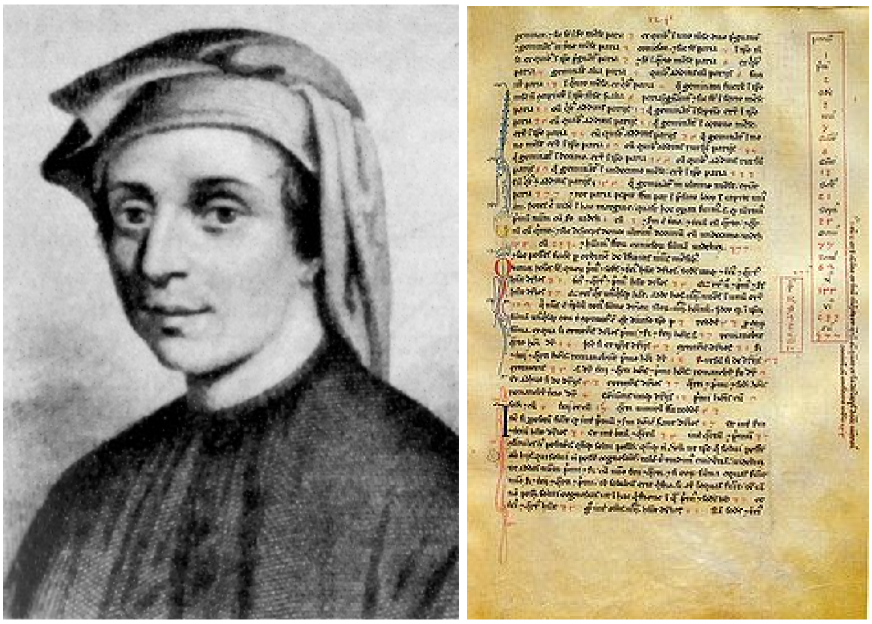


Figura 11: Fibonacci e uma página do Liber Abaci [8]

O resultado desse problema é a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$ na qual cada termo, a partir do terceiro é obtido como a soma dos seus termos antecessores. Em linguagem matemática atual temos

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

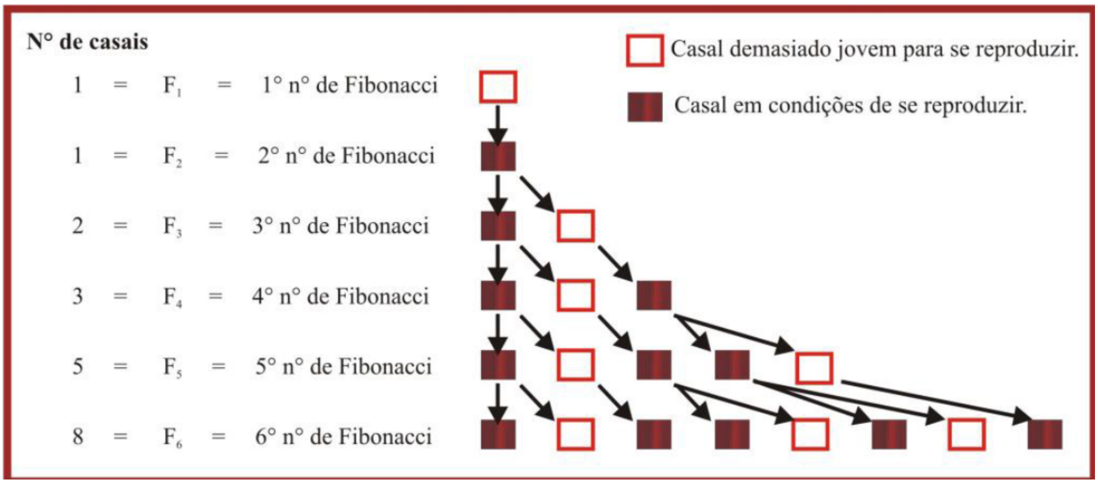


Figura 12: Procriação dos coelhos [9]

A sequência de Fibonacci aparece um grande número de vezes na natureza, seja nas quantidades de pétalas das mais diversas flores, na óptica dos raios de luz, árvore genealógica de um zangão, distribuição das folhas em um caule e muitos outros. Além disso essa mesma sequência tem uma ligação direta com a razão áurea.

Figura 13: Sequência de Fibonacci nas folhas de uma planta e nos ossos da mão

Sequência de Fibonacci

Problema: Escreva os vinte primeiros termos da sequência de Fibonacci (a_n) e calcule as razões de cada termo pelo seu antecessor. De qual valor essas razões vão se aproximando cada vez mais rapidamente? Verifique em qual casa surgirá o erro de aproximação na razão de $\dfrac{a_{20}}{a_{19}}$.

Simetria nos retângulos

Problema: Na composição de retângulos de Piet Mondrian na figura a seguir selecione os três retângulos que te remetem a uma maior harmonia e calcule as razões entre suas dimensões. De que valor essas razões são próximas?

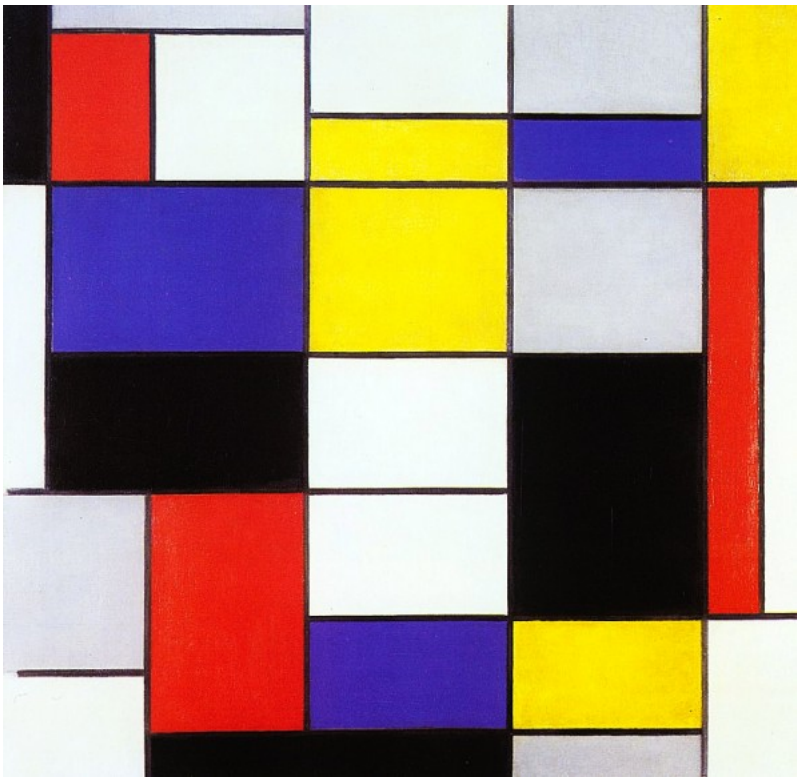


Figura 14: Composição de retângulos Piet Mondrian

Espiral de Fibonacci

Problema: Construir uma aproximação da espiral de Fibonacci a partir de retângulos áureos.

i. Construa um quadrado $ABCD$, com $AB = 1cm$;
ii. Construa o quadrado $DCEF$, com $\overline{EF} \neq \overline{AB}$;
iii. Construa o quadrado $AFGH$, com $E \notin \overline{FG}$;
iv. Construa o quadrado $BHIJ$, com $G \notin \overline{HI}$;
v. Continue o processo de construção de quadrados no sentido anti-horário;
vi. Construa com compasso uma série de arcos que levam a aproximação da espiral que passa pelos pontos A, C, F, H...;

Essa é uma boa aproximação para a espiral de Fibonacci que por sua vez se aproxima bastante da espiral áurea.

Potências de Φ

Problema: Escreva as potências de Φ na forma $\Phi^n = a \cdot \Phi + b$ com $n \in \mathbb{N}^*$.O que pode-se dizer sobre a e b em cada caso? Escreva uma forma geral para Φ^n na forma pedida.

Razão Áurea e Fibonacci na natureza

Pétalas de flores

Problema: Nas flores a seguir conte a quantidade de pétalas de cada uma delas.

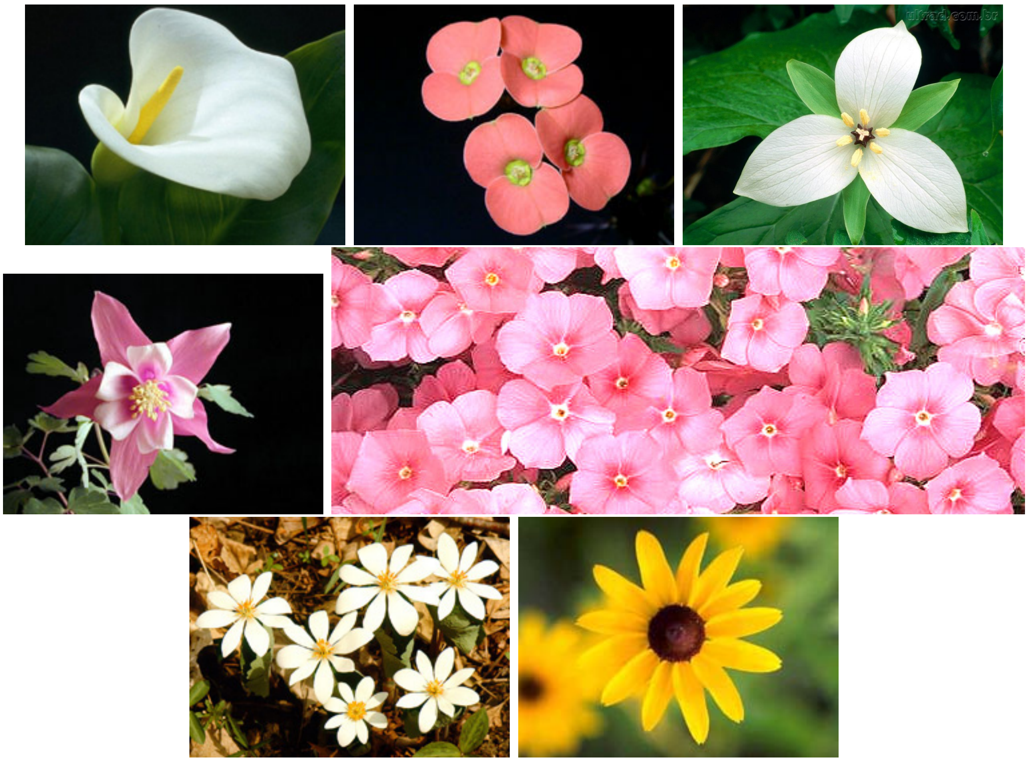


Figura 15: flores

Quantidade de pétalas	Flores
1	Jarros
3	Lírios, íris e açucenas
5	Columbinas, rainúnclos amarelos e esporas
8	Delfinios
13	Crisântemos e margaridas azuis
21	Asteráceas, margaridas inglesas, olhado preto e chicória
34	Dálias e malmequeres
55	Margaridas africanas e malmequeres

Espirais

Problema: Nas figuras a seguir conte a quantidade de espirais presentes em cada sentido

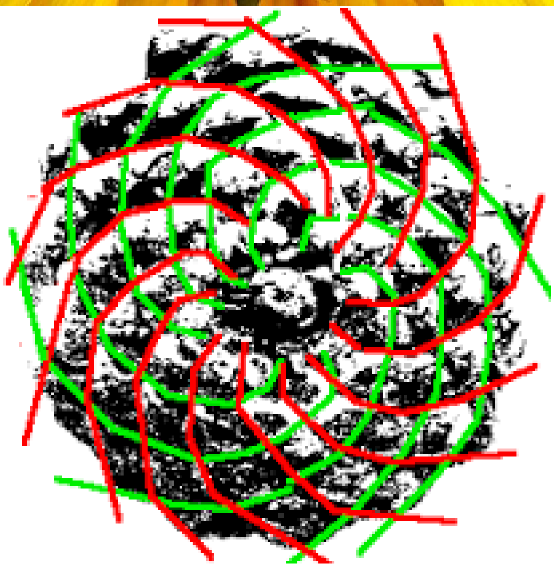


Figura 16: Girassol e pinha

Referências Bibliográficas

[1] Livio, Mario, *Razão áurea: a história de fi, um número surpreendente*, Record (2006).

[2] Queiroz, Rosania Maria, *Razão áurea*, (2007).

[3] http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo.php?id=131 acessado 14/9/2015

[4] http://engenhariacivildauesc.blogspot.com.br/2010/11/vitruvio-e-seu-legado-para-aquitetura-e.html acessado 16/9/2015

[5] http://www.entreculturas.com.br/2011/03/curso-de-fotografia-aula-4/ acessado 16/9/2015

[6] http://www.ciencia-cultura.com/astronomia/avan%C3%A7ado.html acessado 18/9/2015

[7] http://www.montfort.org.br/a-beleza-no-mundo-no-homem-e-em-deus-a-filosofia-da-arte-a-sabedoria-de-deus-na-criacao-e-a-vida-espiritual-parte-7/ acessado 18/9/2015

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci acessado em 22/9/2015

[9] WILBERSTAEDT, GIORGIO *AS FORMAS E OS NÚMEROS DA NATUREZA* Florianópolis (SC), 2004

Apêndice

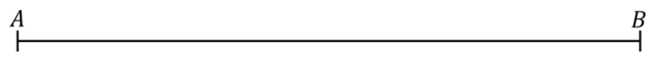
$\mathcal{B}$

Avaliação diagnóstica

Avaliação Diagnóstica

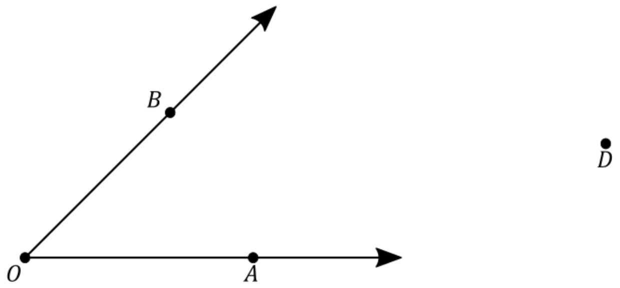
Nome: Turma:

1. Determine, com régua e compasso, o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

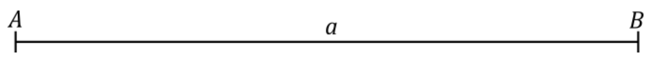


2. Construa, com régua e compasso, um ângulo de medida $30\,^{\circ}$.

3. Construa um ângulo congruente ao ângulo $A\hat{O}B$, dado a seguir, com o vértice no ponto D.



4. Considera o segmento de reta $\overline{AB}$ a seguir, de medida a.



Construa um segmento de medida $a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

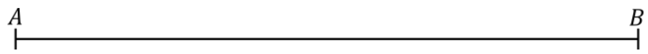
Apêndice C

Avaliação final

Avaliação final

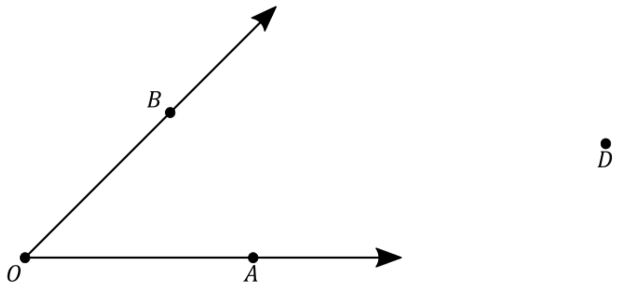
Nome: Turma:

1. Determine, com régua e compasso, a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.

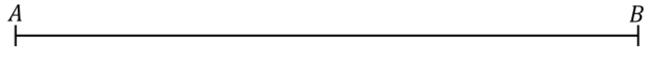


2. Construa, com régua e compasso, um ângulo de medida 45°.

3. Construa um ângulo congruente ao ângulo $A\hat{O}B$, dado a seguir, com o vértice no ponto D.

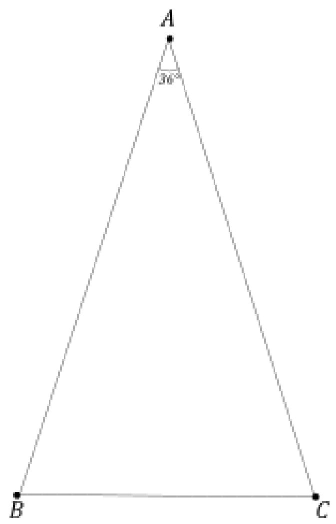


4. Divida, com régua e compasso, o segmento de reta $\overline{AB}$ a seguir, na média extrema razão.



5. Construa um pentágono regular.

6. Considere o triângulo isósceles ABC a seguir com $AB = AC$ e $med(B\hat{A}C) = 36,^\circ$. Determine $\sin(18^\circ)$ lembrando que esse triângulo é um triângulo áureo.



Apêndice $\mathcal{D}$

Pesquisa de opinião

Pesquisa de opinião

Nome:___________________________________ Data:__________

1. Você já conhecia a razão áurea?

( ) Sim ( ) Não

2. Você já havia feito construções que envolvessem a razão áurea?

( ) Sim ( ) Não

3. Você julgou interessante trabalhar com a matemática em um ambiente fora de sala de aula, com atividades práticas?

( ) Sim ( ) Não

4. Você acredita que o projeto auxiliou na aprendizagem do conteúdo de matemática que foi ministrado em sala de aula?

( ) Auxiliou muito ( ) Auxiliou pouco ( ) Não auxiliou

5. Você se sentiu motivado para participar das atividades do projeto?

( ) Muito motivado ( ) Pouco motivado ( ) Não

6. O seu interesse em aprender a matéria aumentou pelo fato de visualizar aplicações práticas da razão áurea?

( ) Aumentou muito ( ) Aumentou pouco ( ) Não aumentou

7. Qual dos conteúdos você sentiu maior facilidade?

( ) Uso do compasso

( ) Construções básicas

( ) Seguir os passos descritos na construção

( ) Demonstrar que a construção funciona

( ) Analisar as obras de arte

8. Qual dos conteúdos você sentiu maior dificuldade?

( ) Uso do compasso

( ) Construções básicas

( ) Seguir os passos descritos na construção

( ) Demonstrar que a construção funciona

( ) Analisar as obras de arte

9. Você pretende continuar utilizando seus conhecimentos sobre razão áurea?

( ) Sim ( ) Não

10. Você indicaria o projeto para outros colegas?

( ) Sim ( ) Não

11. Dê uma nota de 0 a 10 para o projeto:

( ) 0,0 ( ) 1,0 ( ) 2,0 ( ) 3,0 ( ) 4,0 ( ) 5,0

( ) 6,0 ( ) 7,0 ( ) 8,0 ( ) 9,0 ( ) 10,0

12. O que o projeto representou para você?

13. Espaço para sugestões/ observações:

Obrigado pela sua participação!

Referências Bibliográficas

[1] Daher, A. F. B., *Aluno e professor: protagonistas do processo de aprendizagem.*

[2] Flemming, D. M.; Luz, E. F.; Mello, A. C. C.;*Tendências em Educação Matemática*, UnisulVirtual 2005.

[3] Gomes, Maria L. M., *História do ensino de Matemática: uma introdução.*

[4] Larrosa, Jorge. *Notas sobre a experiência e o saber da experiência.*, Revista Brasileira de Educação. São Paulo: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n.19, J./abr, p. 20-28, 2002.

[5] Livio, Mario, *Razão áurea: a história de fi, um número surpreendente*, Record (2006).

[6] Lorenzato, S. *Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis.*, In: Lorenzato, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2006. pg 3-38.

[7] Marinho, J.; Viana, J.; Barbosa, K. F.; Reis, M.; Lima, M. B.*A importância do desenho geométrico no ensino básico e técnico de nível médio*, 1ª Jornada de iniciação científica e extensão do IFTO, 2010.

[8] Miorim, M. A., *Introdução à história da Educação Matemática*, São Paulo: Atual (1998).

[9] Passos, C. L. B. *Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de Matemática*, In: Lorenzato, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2006. pg 39-56.

[10] Queiroz, Rosania Maria, *Razão áurea*, (2007).

[11] Rodrigues, F. C. e Gazire, E.S., *Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão*, (2012).

[12] Souza, Alexandre Ramon de, *Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental*, (2013).

[13] Wilberstaedt, Giorgio *AS FORMAS E OS NÚMEROS DA NATUREZA* Florianópolis (SC), 2004

[14] Zuin, Elenice S. L. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*, Belo Horizonte (MG), 2001

[15] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Pacioli.html acessado 18/2/16

[16] http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo.php?id=131 acessado 14/9/2015

[17] http://engenhariacivildauesc.blogspot.com.br/2010/11/vitruvio-e-seu-legado-para-aquitetura-e.html acessado 16/9/2015

[18] http://www.ciencia-cultura.com/astronomia/avan%C3%A7ado.html acessado 18/9/2015

[19] http://www.entreculturas.com.br/2011/03/curso-de-fotografia-aula-4/ acessado 16/9/2015

[20] http://www.montfort.org.br/a-beleza-no-mundo-no-homem-e-em-deus-a-filosofia-da-arte-a-sabedoria-de-deus-na-criacao-e-a-vida-espiritual-parte-7/ acessado 18/9/2015

[21] https://www.revistaensinosuperior.gr.unicamp.br/artigos/resultado-atual-e-evolucao-do-brasil-no-pisa-sao-muito-ruins-e-afetarao-a-qualidade-da-forca-de-trabalho-ate-meados-deste-seculo acessado em 18/2/2016