



**FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM MALHA**

**VICENTE GERALDO DE OLIVEIRA JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM  
MALHA**

**VICENTE GERALDO DE OLIVEIRA JUNIOR**

**ORIENTADOR: ARTUR PORTELA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-024A/15**

**BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2015**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM MALHA

VICENTE GERALDO DE OLIVEIRA JUNIOR

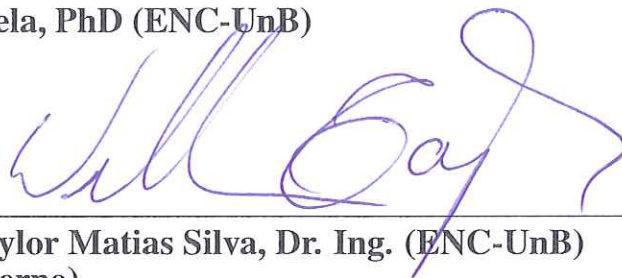
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



---

Prof. Artur Portela, PhD (ENC-UnB)  
(Orientador)



---

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)



---

Prof. Éder Lima de Albuquerque, DSc. (ENM-UnB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 10 DE DEZEMBRO DE 2015

## FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA JR, VICENTE GERALDO DE

Formulação Cinemática Local de Métodos sem Malha [Distrito Federal] 2015.  
xii, 74p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015).  
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Métodos Sem Malha

2.Teorema do Trabalho Local

I.ENC/FT/UnB

4.Mínimos Quadrados Móveis

3.Elasticidade Plana

II.Título (Mestre)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA JR., V. G. (2015). Formulação Cinemática Local de Métodos sem Malha. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-024A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 74p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Vicente Geraldo de Oliveira Junior.

TÍTULO: Formulação Cinemática Local de Métodos sem Malha.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



Vicente Geraldo de Oliveira Junior  
AOS 08 Bloco B Apartamento 512.  
70.660-082 Brasília – DF – Brasil.  
E-mail: vicente.geraldo@gmail.com

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Artur Portela pela orientação, solicitude, paciência e resiliência no desenvolvimento desta pesquisa.

Ao corpo docente, discente e servidores do PECC, por manter um ambiente de pesquisa aprazível e instigante.

À Universidade de Brasília, pela formação profissional e acadêmica de alta qualidade.

À meus pais, pelo apoio incondicional.

*Dedicado à minha família.*

## **RESUMO**

### **FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM MALHA**

**Autor: Vicente Geraldo de Oliveira Junior**

**Orientador: Artur Portela**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, junho de 2015**

Este trabalho trata sobre a formulação local de métodos sem malha aplicados a problemas da elasticidade plana. A base teórica para o desenvolvimento das formulações fundamenta-se em princípios energéticos variacionais largamente utilizados em teoria das estruturas. A equação dos resíduos ponderados é estabelecida para um subdomínio nodal compacto e arbitrário, podendo ser interpretada como uma forma local do conhecido teorema do trabalho. Este estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões estaticamente admissível e um campo de deformações cinematicamente admissível de forma independente, fato que possibilita a criação de diferentes formulações sem a necessidade de malha. Nesta dissertação, os métodos sem malha locais são estabelecidos pela especificação de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. Para a primeira formulação apresentada, define-se um campo de deslocamentos admissíveis associado a um movimento de corpo rígido translacional arbitrário, conseqüentemente anulando o termo do trabalho interno. Assim, a primeira formulação é função apenas de integrais regulares no contorno do subdomínio nodal, que revela-se como um dos axiomas do princípio de Euler e Cauchy. Já para a segunda formulação apresentada, estabelece-se um campo de deslocamentos admissíveis definido em termos de funções generalizadas, especificamente funções seccionalmente contínuas, cujo objetivo é eliminar a integração do processo de construção da matriz de rigidez. O método dos mínimos quadrados móveis (MMQM) é utilizado para construir a aproximação do campo elástico, em ambas as formulações, a partir dos nós da discretização do domínio. Dois problemas clássicos da teoria da elasticidade são analisados de forma a aferir a acurácia e eficiência das formulações implementadas. Os resultados obtidos neste trabalho apresentam ótima concordância com as soluções analíticas, atestando que a formulação cinemática local constitui uma base teórica confiável e robusta de métodos sem malha, no contexto da teoria das estruturas.

# **ABSTRACT**

## **LOCAL MESHFREE METHODS - KINEMATIC FORMULATIONS**

**Author: Vicente Geraldo de Oliveira Junior**

**Advisor: Artur Portela**

**Structures and Civil Construction Graduate Program**

**Brasília, December, 2015**

This dissertation is concerned with the formulation of local meshfree methods in elastostatics, for the solution of two-dimensional problems. The formulations are derived in the framework of the theory of structures, where the variational energetic principles have become the theoretical basis of numerical methods. Local meshfree methods are derived through a weighted residual formulation which leads to a local weak form that is the well known work theorem. In an arbitrary local region, the work theorem establishes an energy relationship between a statically-admissible stress field and an independent kinematically-admissible strain field. The independence of the two fields allows the generation of different meshless formulations. In this paper, two new formulations are derived in the set of kinematically-admissible strain fields. In the first formulation, the kinematically-admissible strain field is chosen as the one corresponding to an arbitrary rigid-body displacement; as a consequence, the domain term is canceled out, in the local form of the work theorem, leaving only regular boundary terms. On the other hand, the second formulation defines the kinematically-admissible strain field as a generalized function, generated by a piecewise continuous displacement field which leads to an integration-free formulation. The moving least squares (MLS) approximation of the elastic field is used in this paper to implement both local meshless formulations. Since local regions are independent from each other, the modeling strategy of local meshfree formulations has the possibility of using simultaneously different formulations, conveniently defined, in the same problem. Two problems were analyzed with these techniques, in order to assess the accuracy and efficiency of the formulations. The results obtained in this work are in perfect agreement with those of the analytical solutions. The accuracy and efficiency of the implementations described herein make this a reliable and robust formulation of local meshfree methods, in the framework of the theory of structures.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	1
1.2	MÉTODOS SEM MALHA . . . . .	2
1.2.1	Formulação Forte . . . . .	2
1.2.2	Formulação Fraca Global . . . . .	3
1.2.3	Formulação Fraca Local . . . . .	4
1.2.4	Formulação Mista . . . . .	4
1.3	APLICAÇÕES DOS MÉTODOS SEM MALHA LOCAIS . . . . .	4
1.4	OBJETIVOS . . . . .	5
1.4.1	Objetivos Gerais . . . . .	5
1.4.2	Objetivos Específicos . . . . .	5
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	5
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM MALHA</b>	<b>6</b>
2.1	MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS . . . . .	6
2.1.1	Funções de Ponderação . . . . .	6
2.1.2	Funções de Forma . . . . .	7
2.1.3	Campo Elástico Aproximado . . . . .	9
2.2	FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO . . . . .	10
2.3	ESTRATÉGIA DE MODELAGEM . . . . .	13
2.3.1	Deslocamento de Corpo Rígido (DCR) . . . . .	14
2.3.2	Campo de Deformação Generalizado (CDG) . . . . .	16
<b>3</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>21</b>
3.1	O <i>PATCH TEST</i> . . . . .	22
3.2	VIGA ENGASTADA-LIVRE . . . . .	23
3.3	PLACA TRACIONADA COM ORIFÍCIO CIRCULAR . . . . .	25
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>29</b>
4.1	PUBLICAÇÕES . . . . .	29
4.2	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	30
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>36</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>37</b>
<b>A</b>	<b>ARTIGO PARA PUBLICAÇÃO INTERNACIONAL</b>	<b>38</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Discretização do domínio $\Omega$ com fronteira $\Gamma$ em $N$ nós com a representação do suporte compacto destes. Os nós $\mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S$ participam da aproximação na coordenada $\mathbf{x}$ . $\Omega_{\mathbf{x}}$ é a interseção dos suportes compactos nodais.	7
Figura 2.2	Exemplo 1-D da aproximação pelo MMQM. Nota-se que $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$ .	8
Figura 2.3	(a) Função peso para um nó localizado em $\mathbf{x} = [1/2 \ 0]^T$ (b) Função de forma para o respectivo nó.	9
Figura 2.4	Representação do domínio global $\Omega$ , suas fronteiras natural $\Gamma_t$ e essencial $\Gamma_u$ e os subdomínios $\Omega_Q, \Omega_P$ e $\Omega_R$ associados aos nós $Q, P$ e $R$ , respectivamente.	11
Figura 2.5	Representação do campo de deslocamentos cinematicamente admissível $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ utilizado na formulação de deslocamento de corpo rígido.	14
Figura 2.6	Representação do campo de deslocamentos cinematicamente admissível $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ utilizado na formulação de campos elásticos generalizados.	17
Figura 3.1	O <i>patch test</i> : (a) distribuição nodal regular. (b) distribuição nodal genérica	22
Figura 3.2	Resultados do <i>patch test</i> : deslocamentos constantes nas bordas da placa e tensão constante unitária nos nós.	22
Figura 3.3	Viga em balanço - 2D	23
Figura 3.4	Distribuição nodal para a viga em balanço.	24
Figura 3.5	Resultados - deslocamentos normalizados.	24
Figura 3.6	Resultados - tensões normalizadas em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ , respectivamente.	24
Figura 3.7	Convergência da formulação CDG para ao problema da viga, em função do número de pontos de colocação.	25
Figura 3.8	Placa com orifício circular.	25
Figura 3.9	Discretização da placa com orifício circular.	26
Figura 3.10	Resultados - deslocamentos no contorno da seção modelada. Fator de escala $=1.7 \times 10^4$ .	27
Figura 3.11	Resultado - distribuição de tensões em $\theta = \frac{\pi}{2}$ .	27
Figura 3.12	Resultado - distribuição de tensões em $\theta = \frac{\pi}{4}$ .	28
Figura 3.13	Resultado - distribuição de tensões em $\theta = 0$ .	28

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

$(r, \theta)$	Coordenadas polares
$\alpha_q$	Fator de escala para a dimensão do subdomínio arbitrário nodal de integração
$\alpha_s$	Fator de escala para a dimensão do suporte compacto nodal
$\boldsymbol{\sigma}$	Campo de tensões $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Campo de deformações específicas $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12}]^T$
$\Delta$	Função delta de Kronecker generalizada
$\delta$	Função delta de Dirac
$\Gamma$	Contorno do domínio global
$\Gamma_Q$	Contorno do subdomínio arbitrário associado ao nó $Q$
$\Gamma_{Q_i}$	Contorno interno do subdomínio arbitrário associado ao nó $Q$
$\Gamma_{Qt}$	$\Gamma_t \cap \Gamma_Q$
$\Gamma_{Qu}$	$\Gamma_t \cap \Gamma_Q$
$\Gamma_t$	Fronteira estática, ou natural, do domínio global
$\Gamma_u$	Fronteira cinemática, ou essencial, do domínio global
$\hat{\mathbf{u}}$	Vetor de incógnitas nodais ou parâmetros nodais
$\ \boldsymbol{\varepsilon}\ $	Norma de energia
$\ \mathbf{u}\ $	Norma de deslocamento
$\Phi$	Matriz das funções de formas
$\mathbf{B}$	Matriz de derivadas das funções de forma.
$\mathbf{b}$	Forças de corpo
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva do material
$\mathbf{e}$	Base de vetores ortogonais do espaço euclidiano
$\mathbf{F}$	Vetor de Forças Global
$\mathbf{F}_Q$	Vetor de forças associado ao nó $Q$
$\mathbf{K}$	Matriz de Rigidez Global
$\mathbf{K}_Q$	Matriz de rigidez correspondente ao nó $Q$
$\mathbf{L}(\cdot)$	Operador de derivadas parciais que relaciona $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$
$\mathbf{n}$	Matriz do vetor normal unitário
$\mathbf{p}$	Base polinomial completa
$\mathbf{t}$	Vetor de tensões $\mathbf{t} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$
$\mathbf{u}^h$	Campo de deslocamentos aproximado pelo MMQM.
$\mathbf{W}_\Gamma$	Função peso arbitrária definida em $\Gamma$
$\mathbf{W}_\Omega$	Função peso arbitrária definida em $\Omega$
$\mathbf{x}_i$	Coordenada espacial $(x_1, x_2)$ do nó $i$
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\Omega$	Domínio global

$\Omega_x$	Domínio de definição da aproximação pelo MMQM na coordenada $x$
$\Omega_Q$	Subdomínio arbitrário associado ao nó $Q$
$\phi_i$	Função de forma do nó $i$
$a$	Raio do orifício da placa tracionada
$b$	Dimensão da porção modelada da placa tracionada com orifício circular
$c_i$	Distância entre o nó $i$ e um nó vizinho mais próximo.
$D$	Altura da viga em balanço
$d$	Função distância $\  \mathbf{x} - \mathbf{x}_Q \ $
$E$	Módulo de Elasticidade
$H$	<i>Heaviside step function</i>
$I$	Momento de inércia da seção transversal da viga em balanço
$L$	Comprimento da viga em balanço
$L_i$	Comprimento de $\Gamma_{Qi}$
$L_t$	Comprimento de $\Gamma_{Qt}$
$m$	Ordem da base polinomial
$N$	Número de nós da discretização
$n$	Número de nós que influem na aproximação pelo MMQM em certa ponto $x$
$n_\Omega$	Número de pontos de colocação em $\Omega_Q$
$n_i$	Número de pontos de colocação em $\Gamma_{Qi}$
$n_t$	Número de pontos de colocação em $\Gamma_{Qt}$
$P$	Carregamento na extremidade da viga em balanço
$r_\varepsilon$	Erro relativo da norma de energia
$r_u$	Erro relativo da norma de deslocamentos
$r_{\Omega_i}$	Dimensão do subdomínio nodal arbitrário.
$r_i$	Dimensão do suporte compacto do nó $i$
$S$	Área de $\Omega_Q$
$w_i$	Função peso associada ao nó $i$
<i>Mfree</i>	Métodos sem malha
CDG	Formulação referente ao campo de deformações generalizado
DCR	Formulação referente ao deslocamento de corpo rígido
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MMQM	Métodos dos Mínimos Quadrados Móveis
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>

# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 - MOTIVAÇÃO

A prática da engenharia envolve a investigação das propriedades e comportamento de sistemas físicos cuja complexidade leva à concepção de um sistema idealizado, descrito por um modelo matemático equivalente. As leis físicas que regem o fenômeno em estudo são quantificadas pela representação, em notação matemática, dos parâmetros relevantes para a análise do problema. O produto final do modelo matemático constitui-se em um conjunto de equações diferenciais ou integrais que, juntamente com condições de contorno e iniciais apropriadas, formam um problema de valor de contorno bem posto no sentido de Hadamard (Mandelbrojt e Schwartz, 1965).

Em geral, a solução analítica do modelo matemático pode ser determinada apenas para domínios geometricamente triviais e equações diferenciais simples. Assim, muitos problemas práticos de engenharia não tem solução formal definida, porém é possível calcular uma solução aproximada por meio dos métodos numéricos. No contexto da mecânica estrutural, o método dos elementos finitos (MEF) é o método numérico mais empregado, tanto na indústria quanto no ambiente acadêmico. Apesar de ser robusto, bem desenvolvido e versátil, o MEF ainda encontra deficiências em sua aplicação, principalmente devido à sensibilidade da solução em relação à qualidade da malha.

Andújar et al. (2011) apresentam algumas limitações inerentes ao MEF convencional, tais como: problemas geometricamente não lineares, com grandes deformações, podem gerar geometrias degeneradas e elementos distorcidos, impossibilitando a integração da matriz de rigidez; na análise de propagação de trincas, as trajetórias destas podem não coincidir com as bordas dos elementos; o processo de atualização da topologia da malha, comum em métodos iterativos, é automatizado satisfatoriamente apenas para problemas 2-D; como a formulação mais utilizada é baseada na mecânica dos meios contínuos, surgem dificuldades na representação problemas de fragmentação, explosões, impacto, etc.; e há considerável perda de acurácia na recuperação das tensões, pois as funções de forma apresentam, usualmente, continuidade  $C^0$  na interface entre elementos. Além disso, a elaboração de malhas é uma tarefa complexa que pode consumir mais recursos humanos e computacionais em comparação à construção e solução das equações algébricas do problema em estudo.

As limitações do MEF, também presente de maneira similar em outros métodos numéricos tradicionais como o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), estimularam o estudo de técnicas e formulações que possibilitem a redução do uso de malha. E, posteriormente, sua completa eliminação do procedimento numérico

associado a um modelo matemático.

Considerando o escopo deste trabalho, centrado nos métodos sem malha locais, percebe-se que, na literatura produzida até hoje, não há uma fundamentação teórica baseada nos princípios energéticos correntes na teoria das estruturas. Prevalece um enfoque matemático disperso no desenvolvimento das formulações e variações dos métodos existentes.

## **1.2 - MÉTODOS SEM MALHA**

Em sentido amplo, os métodos sem malha (*Mfree*) caracterizam-se por um modelo discreto representado apenas por um conjunto de nós distribuídos arbitrariamente tanto no domínio do problema quanto em suas fronteiras. Não é necessário definir uma conectividade global entre os nós, pois introduz-se funções de forma com suporte local compacto, ou seja, são definidas em um domínio local arbitrário que depende somente da posição dos nós e são computadas em tempo de processamento. O problema de atualização da topologia de malha reduz-se à remoção ou adição de nós do domínio ou de suas fronteiras. E as variáveis de campo podem ser facilmente aproximadas com funções de alta ordem de continuidade, preservando a precisão dos resultados no pós-processamento, o que é relevante em problemas envolvendo potenciais.

Neste trabalho, o tratamento dos métodos *Mfree* é introduzido sob a perspectiva do método dos resíduos ponderados (MRP), por sua generalidade no tratamento de problemas de valor de contorno. Assim, o conceito das formas fraca e forte do modelo matemático seguem as diretrizes do MRP e dos princípios variacionais (ver Finlayson, 2013; Portela e Charafi, 2002). Existe uma grande variedade de métodos numéricos que são classificados como *Mfree*, porém somente alguns são verdadeiramente independentes de malhas para a obtenção do sistema algébrico referente a discretização do modelo matemático (Liu, 2009). Essa característica é consequência da formulação adotada para o tratamento do problema. Nesse sentido, os métodos sem malha podem ser divididos nas categorias descritas a seguir.

### **1.2.1 - Formulação Forte**

A formulação forte pode ser considerada a forma inicial dos métodos *Mfree* e consiste, basicamente, no uso de técnicas de colocação em que a forma forte do problema é discretizada diretamente. Assim, essa classe de métodos *Mfree* é verdadeiramente sem malha. A formulação do *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), por Gingold e Monaghan (1977), pode ser considerada a idéia originária dos métodos sem malha atuais (Sladek et al., 2013). O SPH é um método de partículas, que utiliza uma formulação Lagrangeana, concebido inicialmente para o estudo de fenômenos astrofísicos que foi,

posteriormente, estendido para a solução de problemas de mecânica (ver Nguyen et al., 2008). O MDF aplicados a malhas irregulares (Jensen, 1972; Liszka e Orkisz, 1980), os métodos de colocação *Mfree* (Kansa, 1990; Zongmin, 1992; Zhang et al., 2000; Liu et al., 2002b; Lee e Yoon, 2004; Chen, 2003), o *finite point method* (FPM, por Onate et al., 1996), dentre outros, são exemplos típicos.

Os métodos de colocação destacam-se pela eficiência computacional e por algoritmos de fácil implementação. Porém, apresentam desvantagens significativas, principalmente em relação à estabilidade numérica referente ao arranjo nodal, gerando sistemas algébricos mal condicionados; e dificuldades em simular condições de contorno naturais, sendo necessário a criação de nós externos ao domínio estudado (Liu e Gu, 2005).

### 1.2.2 - Formulação Fraca Global

São métodos baseados na forma fraca clássica, a mesma utilizada na formulação usual do MEF, onde predomina a abordagem de Galerkin, ou seja, as funções de aproximação (ou interpolação) e as funções de ponderação pertencem ao mesmo espaço funcional. As funções de aproximação têm suporte compacto, mas, como a integral da forma fraca é global, requer-se uma malha de fundo (*background mesh*) meramente para realizar a integração numérica em todo o domínio. Essa malha não é usada para construir as funções de aproximação e seus vértices não precisam coincidir com os nós. Assim, os métodos *Mfree* formulados a partir da forma fraca global não considerados verdadeiramente sem malha, no sentido *stricto sensu* do termo.

A formulação do *Diffuse Element Method* (DEM) por Nayroles et al. (1992) constitui o marco inicial dessa categoria de métodos *Mfree*, impulsionando a pesquisa na área. Após a introdução do DEM, surgiram novos métodos como o *element-free galerkin* (EFG, por Belytschko et al., 1994) e o *reproducing kernel particle methods* (RKPM, por Liu et al., 1995), baseados na aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM); e métodos desenvolvidos por Wendland (1999) e Liu e Gu (2001b), dentre outros, baseados em funções de base radial para aproximação das variáveis principais. Outro avanço na área foi a concepção de métodos *Mfree* baseados no conceito da partição da unidade, fornecendo uma base matemática mais sólida para os métodos sem malha, presente inicialmente no trabalho de Duarte e Oden (1996) e no *partition of unity finite element method* (PUFEM, por Melenk e Babuška, 1996) que deram, respectivamente, origem ao *Generalized Finite Element Method* (GFEM, por Strouboulis et al., 2000) e ao *Extended Finite Element Method* (XFEM, por Dolbow e Belytschko, 1999).

### 1.2.3 - Formulação Fraca Local

A formulação fraca local é estabelecida pela integração de um subdomínio nodal arbitrário, adotando-se a abordagem de Petrov-Galerkin, ou seja, a função peso e de aproximação estão contidas em espaços funcionais distintos. Assim, essa formulação não necessita de uma malha global alguma para a solução do problema e pode ser considerado verdadeiramente sem malha. Essa abordagem foi inicialmente concebida por Atluri e Zhu (1998), denominada *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG), onde apresentam a forma fraca local simétrica para a solução da equação de Poisson e atestam sua convergência e boa acurácia. Outros métodos *Mfree* locais foram propostos por Zhu et al. (1998), Liu e Gu (2001a) e Liu et al. (2002a), dentre outros. Os métodos locais referidos neste trabalho pertencem a esta categoria de métodos *Mfree*.

### 1.2.4 - Formulação Mista

As abordagens descritas nos itens 1.2.1 a 1.2.3 podem ser combinadas de maneira a se selecionar as características mais vantajosas de cada uma, para determinado tipo de problema. Liu e Gu (2003) associaram a formulação forte, usando colocação nos nós cujo domínio de influência não intercepta uma fronteira natural, com a formulação fraca local, utilizada nos nós localizados na fronteira natural, onde as técnicas de colocação têm limitações. Outras formulações mistas foram propostas por Atluri et al. (2004), Atluri et al. (2006a) e Atluri et al. (2006b).

## 1.3 - APLICAÇÕES DOS MÉTODOS SEM MALHA LOCAIS

Os métodos *Mfree* locais vêm sendo aplicados, com sucesso, a uma gama variada de problemas da mecânica computacional, tais como: análise de vigas (Atluri et al., 1999; Cho e Atluri, 2001; Andraus et al., 2005), elasticidade 2-D (Atluri e Zhu, 2000a; Gu e Liu, 2001b; Hu et al., 2006; Xiao e McCarthy, 2003), elasticidade 3-D (Han e Atluri, 2004b; Han e Atluri, 2004a; Li et al., 2003), placas e cascas (Long e Atluri, 2002; Gu e Liu, 2001a; Li et al., 2005; Sladek et al., 2007), problemas de impacto com fragmentação (Han et al., 2006; Liu et al., 2006), mecânica da fratura (Ching e Batra, 2001; Gao et al., 2006; Hagihara et al., 2007; Batra e Ching, 2002), problemas com não-linearidade física e geométrica (Han et al., 2005; Heaney et al., 2010), entre outros, incluindo mecânica dos fluidos, otimização, análise termomecânica, materiais piezoelétricos, mecânica quântica, etc. Pode-se notar que a pesquisa em métodos *MFree* locais ainda é ativa e relevante na comunidade científica.



## 1.4 - OBJETIVOS

### 1.4.1 - Objetivos Gerais

O objetivo principal da pesquisa é estabelecer uma nova base teórica comum, fundamentada nos princípios de energia da mecânica dos sólidos deformáveis, para a concepção de formulações de métodos sem malha locais aplicados à solução de problemas da teoria da elasticidade. Assim, procura-se unificar o procedimento de formulação de métodos sem malha locais, introduzindo uma interpretação física inédita. Espera-se contribuir para a validação desta classe de métodos numéricos e estimular a criação de novas formulações com o procedimento estabelecido.

### 1.4.2 - Objetivos Específicos

- Apresentar a forma local do Teorema do Trabalho para problemas geometricamente lineares.
- Implementar computacionalmente as formulações propostas, através de rotinas codificadas em MATLAB.
- Simular o comportamento de sólidos elásticos em duas dimensões (estado plano de tensões).
- Verificar a eficiência e acurácia dos métodos numéricos implementados, avaliando os parâmetros que afetam seu desempenho.

## 1.5 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A dissertação é dividida em 4 capítulos. O capítulo 1 apresenta a motivação do trabalho e uma breve descrição dos métodos sem malha, classificando-os de acordo com sua formulação. Algumas aplicações recentes dos métodos sem malha locais são relatadas.

O capítulo 2 descreve os componentes fundamentais da formulação cinemática local de métodos *Mfree*. A aproximação pelo MMQM é desenvolvida para a aproximação do campo elástico. O Teorema do Trabalho local é definido e duas formulações *Mfree* são deduzidas a partir deste.

No capítulo 3 são apresentados os resultados e discussão referentes à aplicação das formulações estabelecidas em dois problemas da elasticidade linear. E, finalmente, no capítulo 5 são tecidas as conclusões e sugestões para pesquisa futura.

## 2 - FORMULAÇÃO CINEMÁTICA LOCAL DE MÉTODOS SEM MALHA

### 2.1 - MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

A aproximação pelo método dos mínimos quadrados móveis foi concebida por Lancaster e Salkauskas (1981) para a reconstrução de superfícies e ajuste de dados pontuais arbitrariamente dispersos. Nayroles et al. (1992) introduziu o uso do MMQM para a construção de funções de forma para a solução de problemas de mecânica dos sólidos deformáveis. A aproximação pelo MMQM é composta por: uma função peso de suporte compacto associada a cada nó da discretização, uma base polinomial completa e um conjunto de coeficientes que são função das variáveis independentes conforme apresentado por Atluri e Zhu (2000b).

#### 2.1.1 - Funções de Ponderação

Seja  $N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  um conjunto de nós que constitui uma discretização *Mfree* sobre o domínio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$ , representados na Figura 2.1. Para cada nó  $i$  é associado uma função peso  $w_i(\mathbf{x})$ , representada na Figura 2.3, que define o suporte compacto nodal, região do espaço em que  $w_i(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ . Neste trabalho, as funções peso tem suporte compacto retangular, pela sua eficiência computacional, definidas como

$$w_i(\mathbf{x}) = w_{i_x}(\mathbf{x}) w_{i_y}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

onde  $w_{i_x}$  e  $w_{i_y}$  são *splines* de quarta ordem unidimensionais definidas na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, dadas por

$$w_{i_x}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^2 + 8 \left( \frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^3 - 3 \left( \frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^4 & \text{for } 0 \leq d_{i_x} \leq r_{i_x} \\ 0 & \text{for } d_{i_x} > r_{i_x} \end{cases} \quad (2.2)$$

e

$$w_{i_y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^4 & \text{for } 0 \leq d_{i_y} \leq r_{i_y} \\ 0 & \text{for } d_{i_y} > r_{i_y}, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $d_{i_x} = \|x - x_i\|$  and  $d_{i_y} = \|y - y_i\|$ . Os parâmetros  $r_{i_x}$  and  $r_{i_y}$  representam o tamanho do suporte compacto do nó  $i$  na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os  $n$  nós que serão utilizados na aproximação das variáveis principais em um ponto  $\mathbf{x}$  são aqueles em que o suporte compacto contém  $\mathbf{x}$ . E o domínio de definição da aproximação pelo MMQM, representado por  $\Omega_{\mathbf{x}}$ , é a interseção dos suportes compactos dos  $n$  nós, ver figura 2.1.

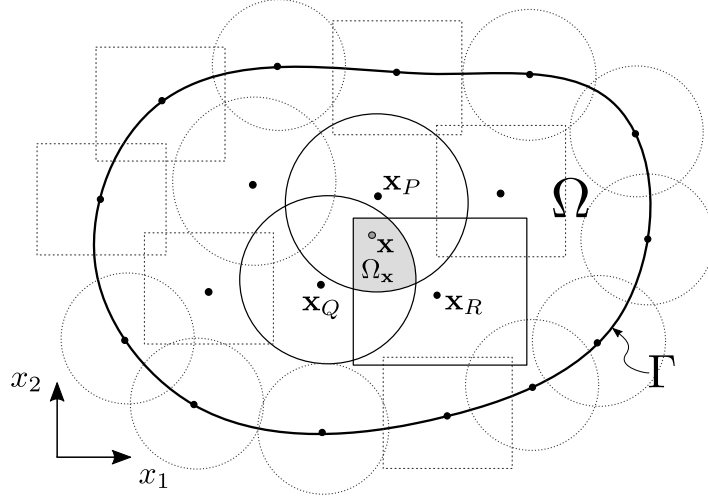


Figura 2.1: Discretização do domínio  $\Omega$  com fronteira  $\Gamma$  em  $N$  nós com a representação do suporte compacto destes. Os nós  $\mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S$  participam da aproximação na coordenada  $\mathbf{x}$ .  $\Omega_{\mathbf{x}}$  é a interseção dos suportes compactos nodais.

### 2.1.2 - Funções de Forma

Seja  $\Omega_{\mathbf{x}}$  o domínio de definição da aproximação por MMQM em uma região na vizinhança de uma coordenada  $\mathbf{x}$  (ver Figura 2.1). A aproximação de  $u(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$ , a partir dos nós  $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , é dada por

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

em que

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})], \quad (2.5)$$

é o vetor da base polinomial de ordem  $m$  e  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  é o vetor de coeficientes  $a_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, m$ , que são funções das coordenadas espaciais  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , em problemas 2-D. Seja  $J(\mathbf{x})$  uma norma ponderada discreta  $L_2$

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_i) - \hat{u}_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2 \quad (2.6)$$

onde  $w_i(\mathbf{x})$  é a função peso associada ao nó  $i$  e  $\hat{u}_i$  é o parâmetro nodal  $i$ . Os coeficientes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  são obtidos pela minimização de  $J(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

o que resulta no sistema linear de equações algébricas

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (2.10)$$

e

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]. \quad (2.11)$$

Resolvendo a equação (2.8) para  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , tem-se

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.12)$$

desde que  $n \geq m$ , para cada coordenada  $\mathbf{x}$ , pois é condição necessária para uma aproximação bem definida. Substituindo  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , obtido na equação (2.12), na equação (2.4) obtém-se a equação final da aproximação pelo MMQM

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (2.13)$$

onde

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (2.14)$$

é a função de forma da aproximação pelo MMQM correspondente ao nó  $\mathbf{x}_i$ , representada na Figura 2.3. É importante notar que as funções de forma do MMQM não apresentam a propriedade do delta de Kronecker, ou seja,  $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$ , pois  $n \geq m$  (ver Figura 2.2). Como  $\phi(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \notin \Omega_{\mathbf{x}}$ , o aspecto local da aproximação pelo MMQM é garantido. As propriedades das funções de forma do MMQM são descritas em Liu (2009).

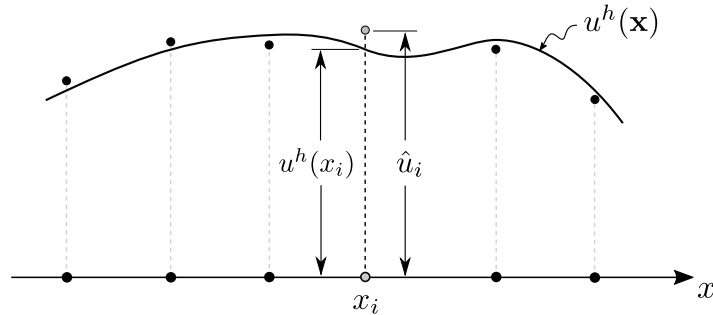


Figura 2.2: Exemplo 1-D da aproximação pelo MMQM. Nota-se que  $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$ .

As derivadas das funções de forma  $\phi_i(\mathbf{x})$  são dadas por

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^m [p_{j,k} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} + p_j (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,k} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji}] \quad (2.15)$$

onde  $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x_k$ .

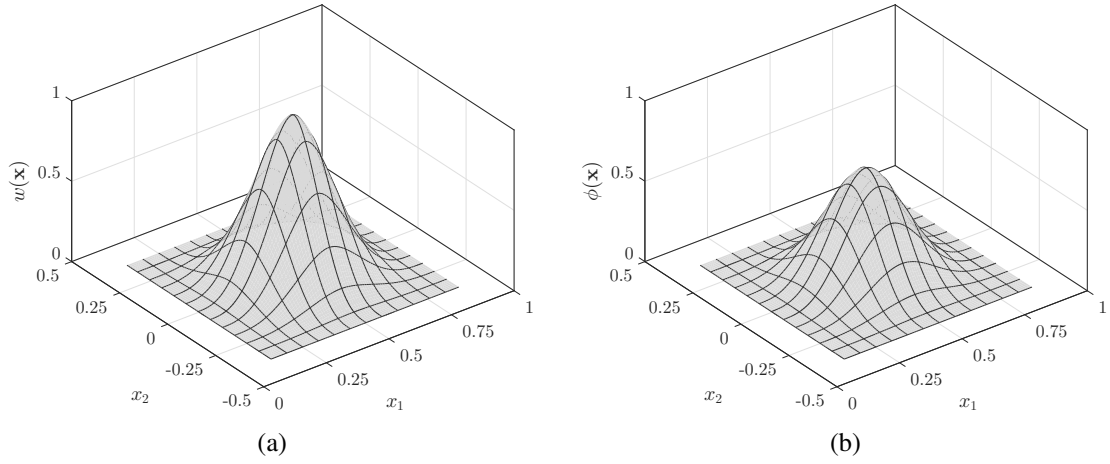


Figura 2.3: (a) Função peso para um nó localizado em  $\mathbf{x} = [1/2 \ 0]^T$  (b) Função de forma para o respectivo nó.

### 2.1.3 - Campo Elástico Aproximado

Define-se agora a aproximação do campo elástico em uma coordenada  $\mathbf{x} \in \Omega$ . A partir da equação (2.13) pode-se expressar uma aproximação pelo MMQM para o campo de deslocamentos

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1^h(\mathbf{x}) \\ u_2^h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \phi_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1_1} \\ \hat{u}_{2_1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{1_n} \\ \hat{u}_{1_n} \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.16)$$

e, conseqüentemente, o campo de deformações específicas é definido como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}^h = \mathbf{L} \Phi \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.17)$$

considerando uma análise geométrica linear, tem-se que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & \dots & \phi_{n,1} & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & \dots & 0 & \phi_{n,2} \\ \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{n,2} & \phi_{n,1} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Finalmente, o campo de tensões pode ser aproximado pela lei de Hooke generalizada

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.19)$$

assim como as componentes das forças de superfície

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa a matriz constitutiva do material, dada por

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Deformação}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Tensão}} \quad (2.21)$$

e  $\mathbf{n}$  é a matriz das componentes do vetor normal unitário, definida por

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

As equações (2.16) a (2.20) mostram que, para uma coordenada  $\mathbf{x}$ , as variáveis do campo elástico aproximado são definidas apenas em função das incógnitas nodais  $\hat{\mathbf{u}}$ .

## 2.2 - FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO

Seja  $\Omega$  um domínio bidimensional com contorno definido por  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , ilustrado na Figura 2.4, discretizado em  $N$  nós. O problema de valor de contorno bem posto associado à elasticidade linear, constituído pelas relações de equilíbrio, compatibilidade, constitutivas e condições de contorno, tem como objetivo determinar os campos tensoriais  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\mathbf{u}$  que descrevem, respectivamente, as tensões, deformações e deslocamentos ao longo de todo o domínio definido pelo corpo em estudo. As condições de contorno são formadas por deslocamentos restringidos  $\bar{\mathbf{u}}$  em  $\Gamma_u$  e por um sistema extrínseco de forças superficiais  $\bar{\mathbf{t}}$ , postas ao longo de  $\Gamma_t$ , e de volume  $\mathbf{b}$  distribuída em  $\Omega$ . A solução do modelo matemático da elasticidade plana constitui um campo elástico totalmente admissível, ou seja, que satisfaz, simultaneamente, as condições de admissibilidade estática (equações de equilíbrio) e cinemática (equações de compatibilidade). Se tal solução existe, demonstra-se que é única, desde que o material seja estável e linear (Fichera, 1965). Esse é o resultado do Teorema da Unicidade de Kirchhoff (Kirchhoff, 1859), que pode ser escrito como

*Dentre o conjunto de todos os campos elásticos cinematicamente admissíveis, apenas um destes é estaticamente admissível;*

ou

*Dentre o conjunto de todos os campos elásticos estaticamente admissíveis, apenas um destes é cinematicamente admissível;*

As hipóteses de unicidade, descritas acima, levam, respectivamente, ao teorema dos deslocamentos virtuais e ao teorema das forças virtuais, no contexto do cálculo variacional. Como esses teoremas consideram um campo elástico totalmente admissível, que é a solução do problema posto, são apenas um caso particular do Teorema do Trabalho.

O Teorema do Trabalho estabelece uma relação energética entre um campo de deformações cinematicamente admissível e um campo de tensões estaticamente admissível, independentes entre si, que podem ser definidos no corpo em estudo. Derivado a partir da equação de resíduos ponderados, o Teorema do Trabalho é a base teórica unificante dos métodos numéricos aplicados à mecânica dos meios contínuos (Brebbia, 1985).

Seja  $\sigma$  um campo de tensões estaticamente admissível, ou seja, que satisfaça as equações

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \sigma + \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{t} = \mathbf{n} \sigma &= \bar{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

no domínio  $\Omega$  e na fronteira natural  $\Gamma_t$ . O vetor  $\sigma$  representa as componentes de tensão,  $\mathbf{L}(\cdot)$  é o operador de derivadas matricial,  $\mathbf{t}$  representa o vetor de forças superficiais,  $\bar{\mathbf{t}}$  são valores das forças superficiais prescritas e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_t$ .

Seja  $Q$  um ponto do domínio  $\Omega$  contido em um subdomínio arbitrário  $\Omega_Q$  com fronteira constituída por  $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$ , onde  $\Gamma_{Qi}$  designa o contorno interno do subdomínio,  $\Gamma_{Qt} = \Gamma_t \cap \Gamma_Q$  e  $\Gamma_{Qu} = \Gamma_u \cap \Gamma_Q$ , como mostrado na Figura 2.4. Ressalta-se que os subdomínio locais associados aos nós da discretização podem sobrepor-se.

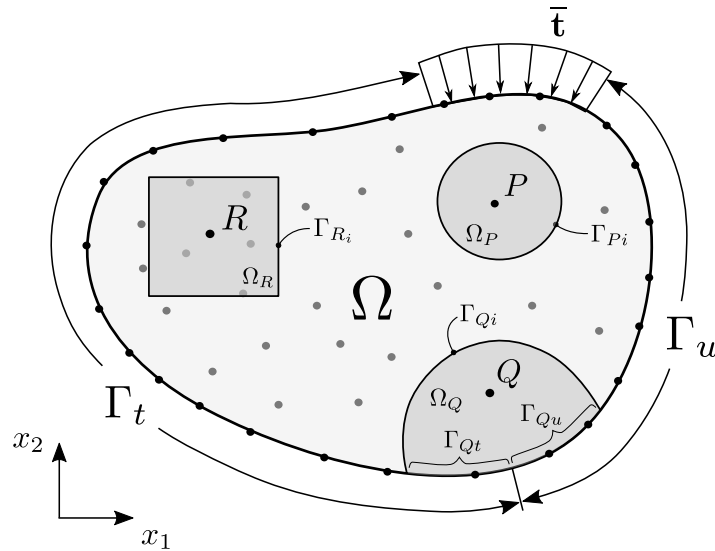


Figura 2.4: Representação do domínio global  $\Omega$ , suas fronteiras natural  $\Gamma_t$  e essencial  $\Gamma_u$  e os subdomínios  $\Omega_Q$ ,  $\Omega_P$  e  $\Omega_R$  associados aos nós  $Q$ ,  $P$  e  $R$ , respectivamente.

A forma forte da equação dos resíduos ponderados pode ser escrita para o domínio local do ponto  $Q$  da forma

$$\int_{\Omega_Q} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^T \mathbf{W}_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma d\Gamma = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{W}_\Omega$  e  $\mathbf{W}_\Gamma$  são funções peso arbitrárias definidas em  $\Omega$  e  $\Gamma$ , respectivamente. Integrando o primeiro termo da equação (2.24) por partes (teorema da divergência), obtém-se a forma fraca local da equação dos resíduos ponderados

$$\int_{\Gamma_Q} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{W}_\Omega d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}\mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma d\Gamma = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Por conveniência, a função peso do contorno,  $\mathbf{W}_\Gamma$ , é avaliada como

$$\mathbf{W}_\Gamma = -\mathbf{W}_\Omega, \quad (2.26)$$

no contorno  $\Gamma_{Qt}$ . Assim, a equação (2.25) reduz-se a

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{W}_\Omega d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{W}_\Omega d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}\mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Percebe-se que  $\mathbf{W}_\Omega$  deve ter ordem de continuidade compatível com  $\mathbf{L}(\cdot)$ , pois é uma condição de admissibilidade para a integração. Seja  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  um campo de deformações cinematicamente admissível, associado a um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}^*$  com derivadas suficientemente pequenas para garantir-se a linearidade geométrica, dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{L} \mathbf{u}^*, \quad (2.28)$$

no domínio  $\Omega$ , com condições de contorno

$$\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}^*, \quad (2.29)$$

válidas em  $\Gamma_u$ . Considerando as funções peso arbitrárias  $\mathbf{W}_\Omega$  como

$$\mathbf{W}_\Omega = \mathbf{u}^*, \quad (2.30)$$

a equação dos resíduos ponderados (2.27) reduz-se a

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{u}}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}\mathbf{u}^* - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^*) d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.31)$$



que pode ser escrita de de forma compacta

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega. \quad (2.32)$$

Essa equação, que expressa a dualidade estático cinemática, é a forma local do conhecido Teorema do Trabalho, uma das identidades fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis, ver Sokolnikoff (1956). A equação (2.32) é o ponto de partida das formulações cinematicamente admissíveis dos métodos *Mfree* desenvolvidos neste trabalho. A independência dos campos relacionados na equação (2.32), consequência da arbitrariedade da função peso  $\mathbf{W}_\Omega$ , é a característica que permite a formulação de diversos métodos sem malha pela escolha de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. É importante notar que nenhuma relação constitutiva foi adotada na dedução da equação (2.32). Portanto, pode-se tratar tanto problemas da elasticidade quanto da plasticidade, desde que se garanta a linearidade geométrica.

### 2.3 - ESTRATÉGIA DE MODELAGEM

Formulações distintas de métodos sem malha locais podem ser criadas a partir da escolha de um campo de deformações cinematicamente admissível  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , definido localmente no Teorema do Trabalho Local, dado pela equação (2.32). Nas seções 2.3.1 e 2.3.2, a seguir, são apresentadas as formulações desenvolvidas neste trabalho.

Por outro lado, o campo estaticamente admissível  $\boldsymbol{\sigma}$  é considerado sempre o campo elástico de equilíbrio do corpo que, além de satisfazer a admissibilidade estática, equação (2.23), também satisfaz a admissibilidade cinemática, dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (2.33)$$

válida no domínio  $\Omega$ , com as condições de contorno

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.34)$$

na fronteira cinemática  $\Gamma_u$ . Considera-se que o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  tem derivadas suficientemente pequenas para que a hipótese de linearidade geométrica do campo de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  seja válida. Portanto, para se obter uma solução numérica única para o problema elástico linear bem posto, a equação (2.34) deve ser imposta no modelo discreto.

### 2.3.1 - Deslocamento de Corpo Rígido (DCR)

aplicação mais simples e óbvia do Teorema do Trabalho local é considerar um campo de deformações cinematicamente admissível resultante de um deslocamento de corpo rígido translacional arbitrário, representado na Figura 2.5, dado por

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{c}, \quad (2.35)$$

$\forall \mathbf{x} \in \Omega_Q \cup \Gamma_Q$ , onde  $\mathbf{c}$  é o vetor de deslocamento de corpo rígido.

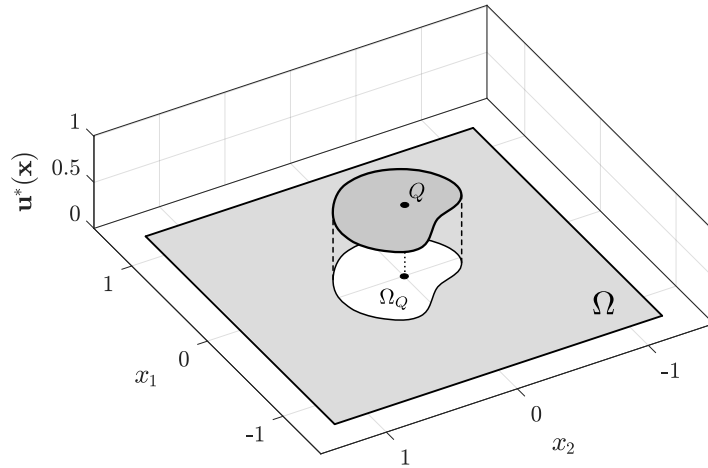


Figura 2.5: Representação do campo de deslocamentos cinematicamente admissível  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  utilizado na formulação de deslocamento de corpo rígido.

Essa definição, convenientemente, resulta em um campo de deformações nulas

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

E, conseqüentemente, o teorema do trabalho local, dado pela equação (2.32), fica igual a

$$\mathbf{c}^T \left( \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega \right) = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

como  $\mathbf{c}$  é totalmente arbitrário, obtém-se finalmente

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Pode-se inferir da equação (2.38) que, estando um corpo em equilíbrio estático, as forças de superfície e de corpo, em um subdomínio arbitrário, equilibram-se. Essa afirmação pode ser interpretada como um dos axiomas do princípio das tensões de Euler e Cauchy, um dos conceitos basilares da mecânica dos meios contínuos (Truesdell e Toupin, 1960). A

equação (2.38) representa a formulação de corpo rígido dos métodos sem malha locais que, na ausência de forças de corpo, não envolve integrais singulares nem de domínio.

Embora deduzida de outra maneira, a equação (2.38) foi apresentada inicialmente por Atluri e Shen (2002), onde foi denominada MLPG5 ganhando grande popularidade devido à sua eficiência computacional. A discretização da equação (2.38) é feita introduzindo-se a aproximação pelo MMQM, dada pelas equações (2.16) a (2.20), gerando um sistema linear de duas equações referentes ao nó  $Q \in \Omega_Q$  onde as incógnitas são os parâmetros nodais  $\hat{\mathbf{u}}$

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega \quad (2.39)$$

que pode ser representada como

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q, \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{K}_Q$ , denominada matriz de rigidez correspondente ao nó  $Q$ , é uma matriz  $2 \times 2n$  dada por

$$\mathbf{K}_Q = \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Gamma \quad (2.41)$$

e  $\mathbf{F}_Q$  é o vetor de forças associado ao nó  $Q$ , dado por

$$\mathbf{F}_Q = - \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega. \quad (2.42)$$

A equação (2.40) deve ser aplicada aos  $N$  da discretização do domínio, gerando um sistema global  $2N \times 2N$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (2.43)$$

O método de interpolação direta, introduzido por Liu e Yan (2000), é utilizado para a imposição das condições de contorno essenciais, ou seja, a equação (2.16) é avaliada para um nó  $\mathbf{x}_j$  onde o deslocamento é prescrito, da forma

$$u_k^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_j) \hat{u}_{k_i} = \bar{u}_{k_j}, \quad (2.44)$$

com  $k = 1, 2$ . Ou em notação matricial, como

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_j) = \Phi(\mathbf{x}_j) \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_j \quad (2.45)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}_j = [\bar{u}_{1_j} \ \bar{u}_{2_j}]^T$  é o deslocamento prescrito no nó  $\mathbf{x}_j$ . Finalmente, a equação (2.45) é introduzida no sistema global, equação (2.43), por substituição.

### 2.3.2 - Campo de Deformação Generalizado (CDG)

Com o objetivo de reduzir o esforço computacional, esta formulação visa eliminar a integração no processo de montagem da matriz do procedimento de solução numérica. Para tanto, é necessário abordar a descrição matemática dos campos elásticos sob uma nova perspectiva, que vai além das funções usuais. Assim, o campo de deformações  $\varepsilon^*$  é representado em termos de funções generalizadas, no sentido da teoria das distribuições (ver Gelfand e Shilov, 1964).

O campo de deslocamentos é descrito por uma função seccionalmente contínua definida em termos da *Heaviside step function* gerando, conseqüentemente, um campo de deformações definido pela função delta de Dirac. O tratamento das funções generalizadas em duas dimensões é feito pela introdução da função distância  $d$ , dada por

$$d = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_Q \| \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} d = 0 & \text{if } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ d > 0 & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (2.46)$$

que representa a distância, em valor absoluto, entre um ponto  $\mathbf{x}$  qualquer e um ponto de referência  $\mathbf{x}_Q$  contido no subdomínio local  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$  associado ao nó  $Q$ . Dessa maneira,  $d$  sempre assume valor positivo ou nulo, este quando  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_Q$  são pontos coincidentes. Considerando  $d$ , a *Heaviside step function* pode ser definida como

$$H(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{se } d > 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (2.47)$$

onde assume-se a descontinuidade em  $\mathbf{x}_Q$ . Por seguinte, define-se a função delta de Dirac com as seguintes propriedades

$$\delta(d) = H'(d) = \begin{cases} \infty & \text{se } d = 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{se } d > 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(d) dd = 1, \quad (2.48)$$

onde  $H'(d)$  representa a derivada de  $H(d)$ , no sentido da teoria de distribuições. Nota-se que a derivada de  $H(d)$ , a respeito da variável independente  $x_i$ , pode ser definida como

$$H(d)_{,i} = H'(d) d_{,i} = \delta(d) d_{,i} = \delta(d) n_i. \quad (2.49)$$

onde a constante arbitrária  $n_i$  será definida posteriormente. A função delta de Kronecker generalizada pode ser estabelecida em termos da *Heaviside step function*, equação (2.48), da

forma

$$\Delta(d) = H(d) + H(-d) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{se } d > 0 \text{ ou seja } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q \end{cases} \quad (2.50)$$

que tem derivada, no sentido da teoria de distribuições, sempre nula, já que

$$\Delta'(d) = \delta(d) - \delta(-d) = \delta(d) - \delta(d) = 0, \quad (2.51)$$

como uma consequência direta da simetria da função delta de Dirac. Seja  $d_l$ ,  $d_j$  e  $d_k$  a função distância  $d$ , dada pela equação (2.46), avaliada nos pontos de colocação  $\mathbf{x}_l$ ,  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{x}_k$ , respectivamente. Com isso, o campo de deslocamentos cinematicamente admissível pode ser definido como uma combinação linear da avaliação da função de Kronecker generalizada em pontos de colocação convenientemente distribuídos ao longo do subdomínio local  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$ , ou seja

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \Delta(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \Delta(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \Delta(d_k) \right] \mathbf{e}, \quad (2.52)$$

onde  $\mathbf{e}$  é a base ortogonal do espaço euclidiano;  $n_i$ ,  $n_t$  e  $n_\Omega$  representam o número de pontos de colocação, respectivamente, no contorno interior do subdomínio local  $\Gamma_{Q_i} = \Gamma_Q - \Gamma_{Q_t} - \Gamma_{Q_u}$  de comprimento length  $L_i$ , no contorno estático local  $\Gamma_{Q_t}$  com comprimento  $L_t$  e no subdomínio interno  $\Omega_Q$  de area  $S$ .

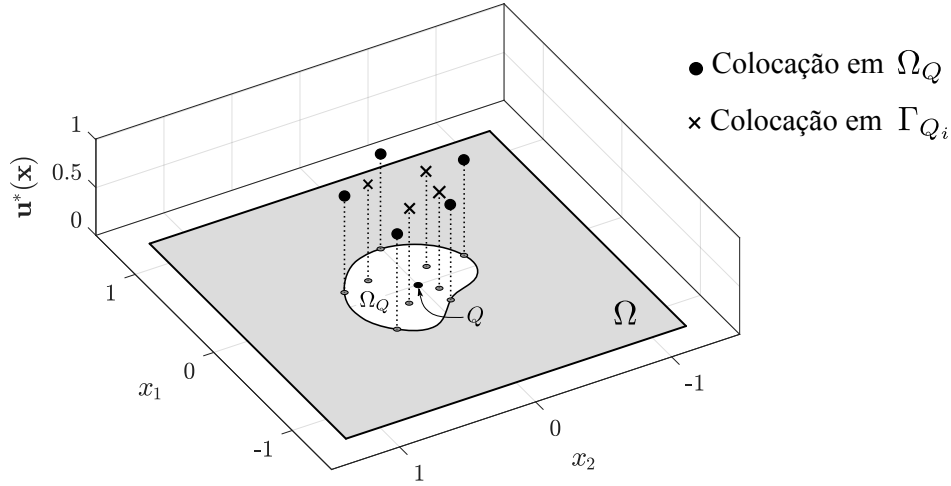


Figura 2.6: Representação do campo de deslocamentos cinematicamente admissível  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  utilizado na formulação de campos elásticos generalizados.

Essa escolha para o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  resulta em um campo de deformações generalizado nulo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

consequência direta da equação (2.51). O Teorema do Trabalho Local, equação (2.32), pode

ser escrito da forma

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega \quad (2.54)$$

que, considerando o campo de deslocamentos e deformações admissíveis, dados pelas equações (2.52) e (2.53), fica igual a

$$\begin{aligned} \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \Delta(d_l) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \Delta(d_j) \mathbf{e} d\Gamma + \\ + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \Delta(d_k) \mathbf{e} d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Considerando as propriedades da função de delta de Kronecker generalizada, dada pela equação (2.50), a equação (2.55) simplifica-se para

$$\mathbf{e}^T \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \right] = 0 \quad (2.56)$$

e, finalmente, para

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}. \quad (2.57)$$

A equação acima representa o equilíbrio discreto do vetor de tensões e forças de corpo atuantes no subdomínio nodal, ou seja, pode ser interpretado como uma versão pontual do princípio de Euler e Cauchy. A equação (2.57) é a forma final da formulação do campo elástico generalizado, onde não há integração envolvida. Como o Teorema do Trabalho é derivado do MRP, nota-se que a formulação CDG pode ser considerada um método de colocação na forma fraca, que tem potencial para superar os problemas de estabilidade e dificuldade em representar as condições de contorno naturais dos métodos de colocação da forma forte já estabelecidos.

A equação (2.57) pode ser deduzida considerando-se outro campo de deslocamentos admissíveis, a saber, um campo definido em termos da função *Heaviside step function*. Novamente, considera-se  $d_l$ ,  $d_j$  e  $d_k$  a função  $d$  avaliada nos respectivos pontos de colocação  $\mathbf{x}_l$ ,  $\mathbf{x}_j$  and  $\mathbf{x}_k$ . Assim, quando as equações (2.46) a (2.48) são levadas em conta, o campo de deslocamentos admissíveis pode ser definido como

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} H(d_k) \right] \mathbf{e}, \quad (2.58)$$

onde  $\mathbf{e}$  é a base ortogonal do espaço euclidiano;  $n_i$ ,  $n_t$  e  $n_\Omega$  representam o número de pontos de colocação, respectivamente, no contorno interior do subdomínio local  $\Gamma_{Qi} = \Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}$  de comprimento  $L_i$ , no contorno estático local  $\Gamma_{Qt}$  com comprimento  $L_t$  e no subdomínio interno  $\Omega_Q$  de área  $S$ . Portanto, levando em conta as propriedades descritas na equação (2.49), obtém-se o campo de deformações generalizado correspondente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{L} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{L} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{L} H(d_k) \right] \mathbf{e} = \\ &= \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \delta(d_l) \mathbf{n}^T + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \delta(d_j) \mathbf{n}^T + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \delta(d_k) \mathbf{n}^T \right] \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde  $\mathbf{n}$  é dado pela equação (2.22), com componentes arbitrárias  $n_i$ , definidas posteriormente. Considerando o campo de deslocamentos generalizados, equação (2.58), o Teorema do Trabalho local, equação (2.32), reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T H(d_l) \mathbf{e} \, d\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T H(d_j) \mathbf{e} \, d\Gamma + \\ + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T H(d_k) \mathbf{e} \, d\Omega = \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \delta(d_k) \mathbf{n}^T \mathbf{e} \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.60)$$

Considerando as propriedades da *Heaviside step function*, definidas na equação (2.47), a equação (2.60) reduz-se a

$$\mathbf{e}^T \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{n} \int_{\Omega_Q} \delta(d_k) \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

que, por sua vez, considerando a propriedade seletiva da função delta de Dirac, reduz-se a

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} - \frac{S}{n_\Omega} \mathbf{n} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}_k} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}. \quad (2.62)$$

Finalmente, quando a matriz  $\mathbf{n}$ , definida na equação (2.22), é arbitrariamente definida com componentes identicamente nulas  $n_i = 0$ , visto a equação (2.49), a equação (2.62) fica

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (2.63)$$

que é idêntica à equação (2.57). A discretização da equação (2.57), ou (2.63), é feita pela introdução da aproximação pelo MMQM, equações (2.16) a (2.20), para o subdomínio local

$\Omega_Q$ , em termos das incógnitas nodais  $\hat{\mathbf{u}}$  gerando o sistema de equações algébricas

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \hat{\mathbf{u}} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (2.64)$$

que pode ser escrito como

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q, \quad (2.65)$$

onde  $\mathbf{K}_Q$ , denominada matriz de rigidez correspondente ao nó  $Q$ , é uma matriz  $2 \times 2n$  dada por

$$\mathbf{K}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \quad (2.66)$$

e  $\mathbf{F}_Q$  é o vetor de forças associado ao nó  $Q$ , dado por

$$\mathbf{F}_Q = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (2.67)$$

A equação (2.65) dever ser aplicada aos  $N$  da discretização do domínio, gerando um sistema global  $2N \times 2N$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (2.68)$$

E, finalmente, as condições de contorno essenciais são impostas pelo método da interpolação direta, ou seja, substitui-se as linhas correspondentes ao graus de liberdades restringidos pelas equações (2.45), no sistema global.



### 3 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Alguns problemas clássicos da teoria da elasticidade plana são estudados para aferir a acurácia das formulações implementadas. As soluções numéricas são comparadas diretamente com as soluções analíticas disponíveis na literatura.

Para um nó  $i$  qualquer, o tamanho do suporte local nodal e do subdomínio local de integração são dados por, respectivamente,

$$r_i = \alpha_s c_i, \quad (3.1)$$

e

$$r_{\Omega_i} = \alpha_q c_i, \quad (3.2)$$

onde  $c_i$  representa a distância entre o nó  $i$  e o nó mais próximo deste. Nos problemas tratados neste trabalho, utilizou-se  $\alpha_s = 4.5$  e  $\alpha_q = 0.5 \sim 0.6$ . Os erros numéricos são aferidos a partir das normas de deslocamento e energia, definidas como, respectivamente,

$$\|\mathbf{u}\| = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

e

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \right]^{1/2}. \quad (3.4)$$

Como as normas definidas acima envolvem integrais globais, malhas com vértices coincidentes com os nós da discretização são utilizadas para computar os erros relativos de  $\|\mathbf{u}\|$  e  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ , respectivamente dados por

$$r_u = \frac{\|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}_{analtico}\|}{\|\mathbf{u}_{analtico}\|} \quad (3.5)$$

e

$$r_\varepsilon = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{num} - \boldsymbol{\varepsilon}_{analtico}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{analtico}\|} \quad (3.6)$$

### 3.1 - O PATCH TEST

O primeiro exemplo estudado é o *patch test*, usualmente utilizado no MEF para avaliar se as funções de forma têm capacidade de gerar um campo de tensões constante. Uma placa retangular, com dimensões  $1 \times 1$ , é submetida a uma tração constante unitária no bordo superior e os deslocamentos são restringidos na base, suficientes para eliminar os deslocamentos de corpo rígido (ver Figura 3.1). A placa encontra-se sob o estado plano de tensões com módulo de elasticidade  $E = 1.0$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . A placa é discretizada com 9 nós, dispostos em duas configurações nodais, conforme mostrado na Figura 3.1.

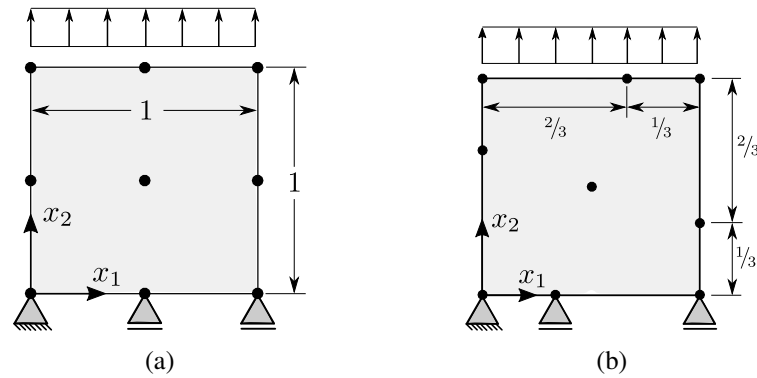


Figura 3.1: O *patch test*: (a) distribuição nodal regular. (b) distribuição nodal genérica

Os resultados obtidos na análise, resumidos na Figura 3.2, mostram deslocamentos constantes ao longo dos bordos da placa e tensão principal de tração constante em todos os nós. Portanto, as formulações implementadas passam no *patch test* sem problemas.

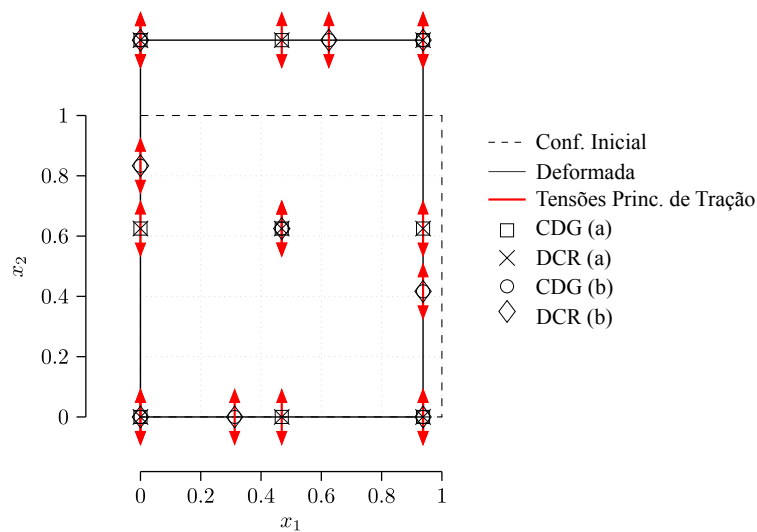


Figura 3.2: Resultados do *patch test*: deslocamentos constantes nas bordas da placa e tensão constante unitária nos nós.

### 3.2 - VIGA ENGASTADA-LIVRE

Considere uma viga em balanço, com dimensões  $L \times D$  e espessura unitária, submetida a uma tensão de cisalhamento parabólica na extremidade livre conforme a Figura 3.3. Nota-se que a viga está sob um estado plano de tensões.

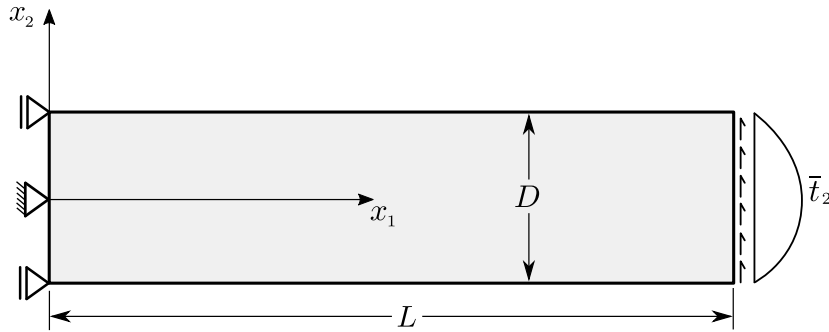


Figura 3.3: Viga em balanço - 2D

A tensão de cisalhamento imposta na extremidade livre é dada por

$$\bar{t}_2(x_2) = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right), \quad (3.7)$$

onde  $I = D^3/12$  é o momento de inércia da seção transversal da viga. A solução analítica para os deslocamentos é dada por

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{Px_2}{6EI} \left[ (6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu) \left( x_2^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right], \quad (3.8)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu x_2^2(L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right], \quad (3.9)$$

e o campo de tensões analítico é dado por

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{P(L - x_1)x_2}{I}, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right), \quad (3.10)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = 0.$$

A viga é constituída por um material com módulo de elasticidade  $E = 3.0 \times 10^7$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Os parâmetros adotados na análise são  $D = 12$ ,  $L = 48$  e  $P = 1000$ . A discretização do problema é formada por uma distribuição nodal regular, mostrada na Figura 3.4, com  $13 \times 5 = 65$  nós. Os subdomínios locais utilizados são retangulares, centrados nos nós. Para a integração numérica da formulação DCR, utilizou-se 8 pontos de Gauss, por lado do subdomínio. E, para a formulação CDG, utilizou-se 8 pontos de colocação igualmente espaçados em cada lado do subdomínio local. Utilizou-se uma base polinomial linear  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ x_2]^T$ .

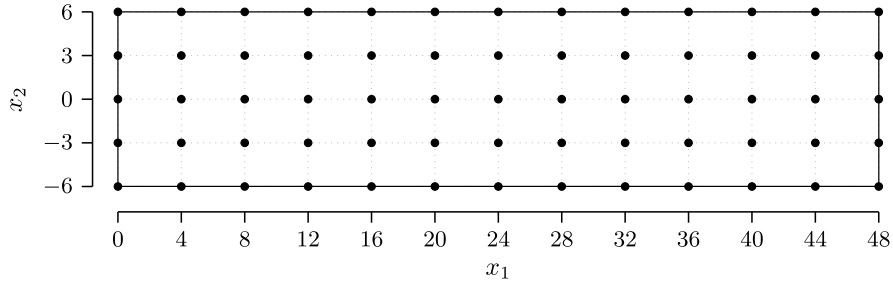


Figura 3.4: Distribuição nodal para a viga em balanço.

Os resultados obtidos para os deslocamentos são ilustrados na Figura 3.5 e observa-se que concordam com a solução analítica satisfatoriamente. Os erro relativos obtidos são  $r_u = 1.98 \times 10^{-5}$  e  $r_\varepsilon = 1.06 \times 10^{-4}$  para essa configuração nodal. As tensões numéricas, calculadas no pós-processamento, também apresentam boa concordância com a solução analítica como pode ser observado na Figura 3.6, em  $x_1 = L/2$  e  $x_2 \in [-D/2, D/2]$ .

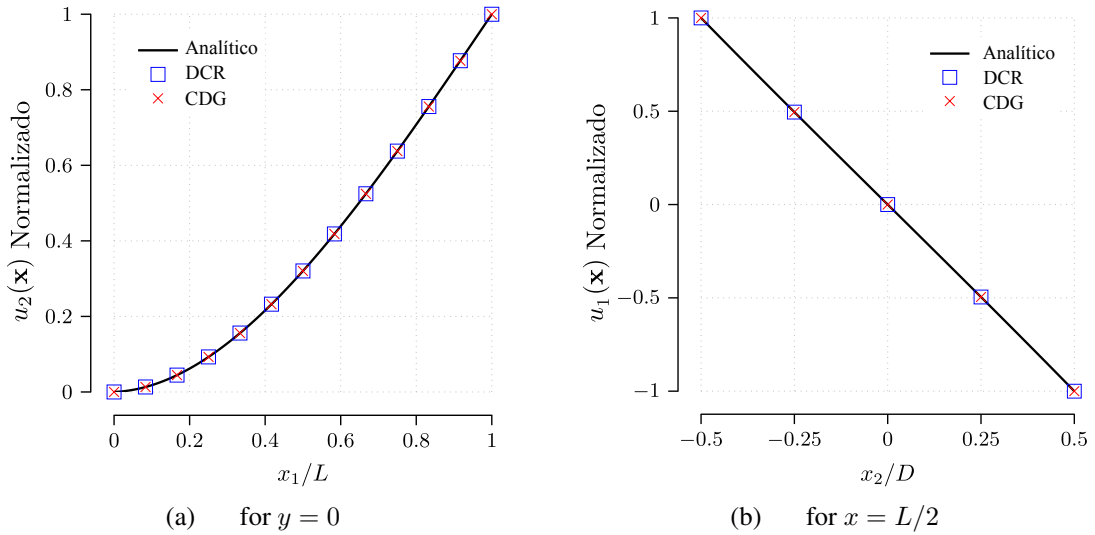


Figura 3.5: Resultados - deslocamentos normalizados.

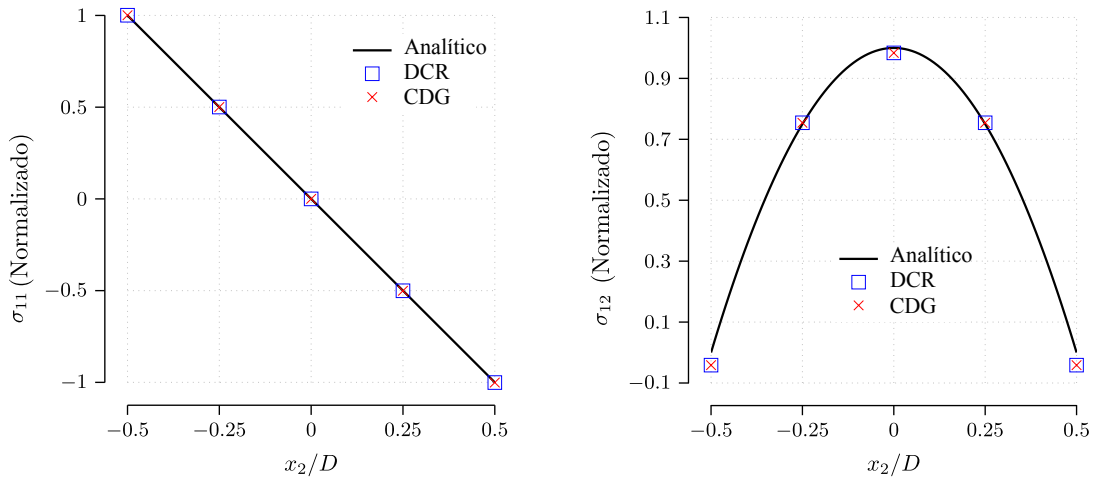


Figura 3.6: Resultados - tensões normalizadas em  $x_1 = L/2$  e  $x_2 \in [-D/2, D/2]$ , respectivamente.

A Figura 3.7 mostra a convergência da formulação CDG em relação aos erros relativos da formulação DCR, usados como referência. Conclui-se que a formulação CDG converge para a DCR quando se utiliza um número considerável de pontos de colocação. Isso mostra que as formulações, apesar de terem fundamentação distintas, representam o mesmo princípio físico.

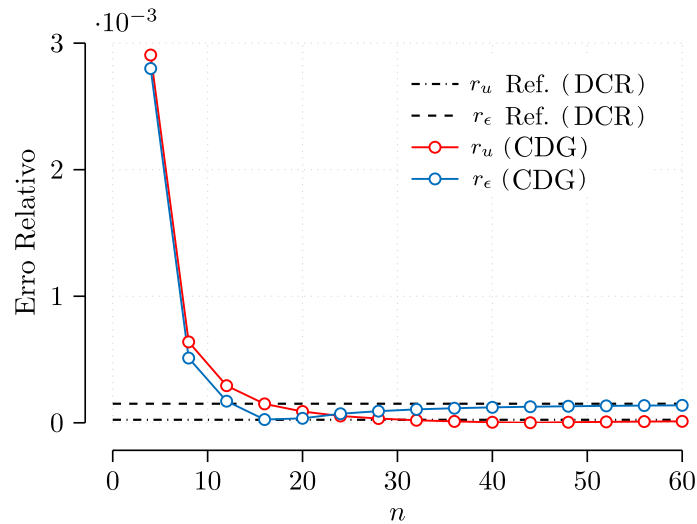


Figura 3.7: Convergência da formulação CDG para ao problema da viga, em função do número de pontos de colocação.

### 3.3 - PLACA TRACIONADA COM ORIFÍCIO CIRCULAR

Considere uma placa com um orifício circular submetida a uma tração unitária uniforme na direção  $x_1$  conforme mostrado na Figura 3.8. Devido à simetria do problema, apenas uma porção de um quarto da placa é simulada. A seção modelada é destacada na Figura 3.8 e tem dimensões  $a = 1$  e  $b = 5a$ .

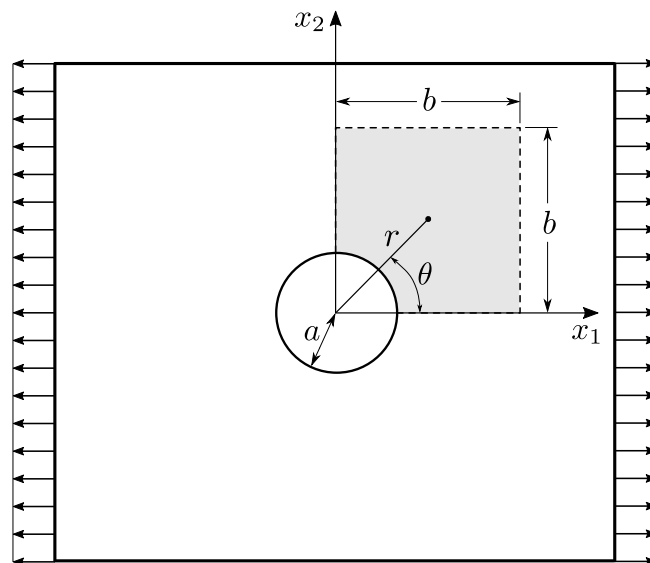


Figura 3.8: Placa com orifício circular.

O campo de tensões analítico é dado por

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(r, \theta) &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta,\end{aligned}\tag{3.11}$$

onde  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares usuais com origem no cento do orifício. Considerando que a placa é submetida a um estado plano de tensões, o campo de deslocamentos analítico é dado por

$$\begin{aligned}u_1(r, \theta) &= -\frac{\cos \theta}{2r^3 E} [4a^4 \cos^2 \theta (1 + \nu) (1 - r^2) - 3a^4(1 + \nu) + (ar)^2(1 - 3\nu) - 2r^4] \\ u_2(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{2r^3 E} [4a^4 \cos^2 \theta (1 + \nu) (1 - r^2) - a^4(1 + \nu) + (ar)^2(\nu - 3) + 2r^4\nu]\end{aligned}\tag{3.12}$$

Os deslocamentos são prescritos nos bordos inferior,  $\bar{u}_2(x_1, x_2 = 0) = 0$ , e lateral esquerdo,  $\bar{u}_1(x_1 = 0, x_2) = 0$ . As fronteiras superior e lateral direita são modeladas como contorno estático com tensões prescritas  $\bar{t}_j = \sigma_{ij}n_i$  de acordo com a solução analítica da equação (3.11), onde  $n_i$  é a componente do vetor unitário normal à fronteira estática. As propriedades utilizadas para o material da placa são  $E = 1.0 \times 10^5$  e  $\nu = 0.25$ .

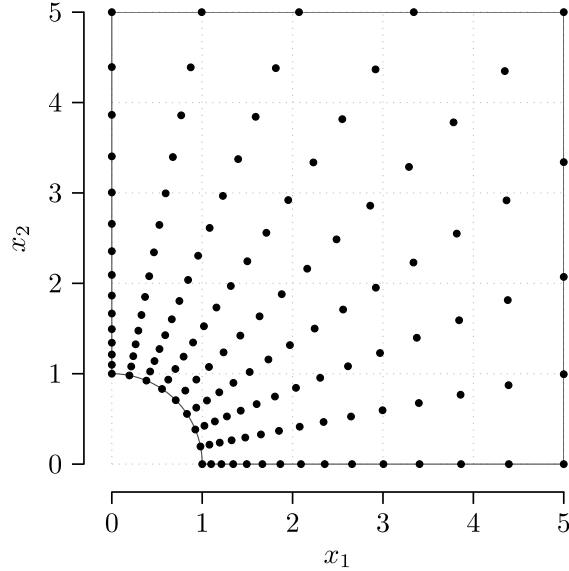


Figura 3.9: Discretização da placa com orifício circular.

A discretização constitui-se de 9 nós na direção tangencial e 15 nós na direção radial, conforme mostra a Figura 3.9. Os subdomínios locais de integração têm geometria circular. Foram utilizados 8 pontos de gauss por quadrante para a formulação DCR e 8 pontos de

colocação por quadrante para a formulação CDG. Como o gradiente do campo de tensões é alto perto do orifício, devido à concentração de tensões, foi necessário implementar uma base polinomial de segunda ordem  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ x_2 \ x_1x_2 \ x_1^2 \ x_2^2]^T$ . O campo de deslocamentos numéricos é mostrado na Figura 3.10, apenas para o contorno do domínio estudado. Como pode ser observado, os resultados numéricos concordam com os analíticos.

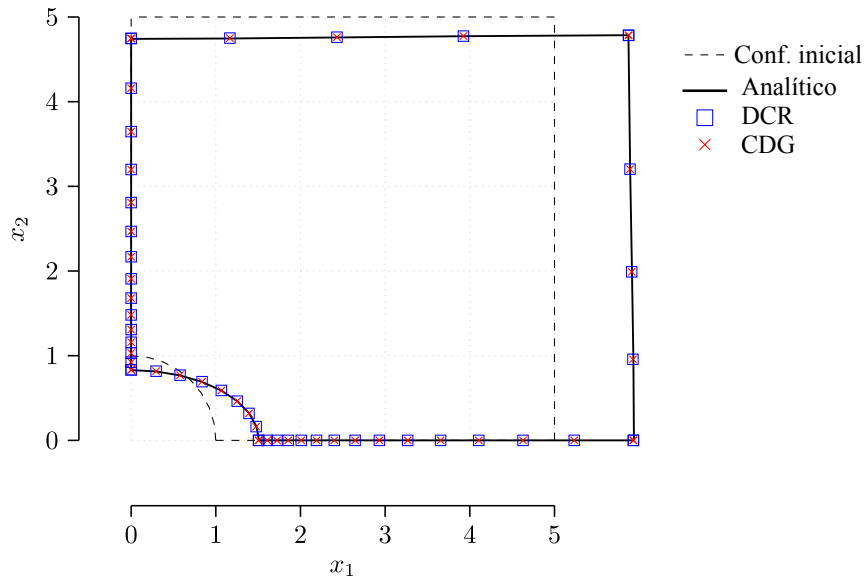


Figura 3.10: Resultados - deslocamentos no contorno da seção modelada. Fator de escala  $= 1.7 \times 10^4$ .

O campo de tensões, calculados nos nós no pós-processamento, também apresentam ótimos resultados numéricos, mostrados na Figuras 3.11, 3.12 e 3.13. O erros relativos calculados foram  $r_u = 9.2 \times 10^{-3}$  e  $r_\epsilon = 4.1 \times 10^{-3}$ , o que atesta a acurácia das formulações implementadas.

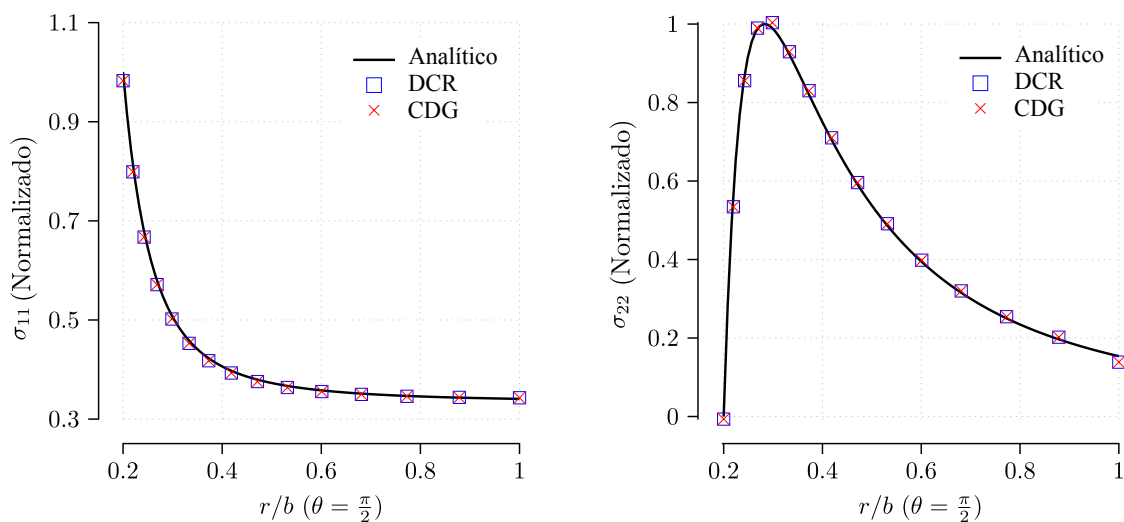


Figura 3.11: Resultado - distribuição de tensões em  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

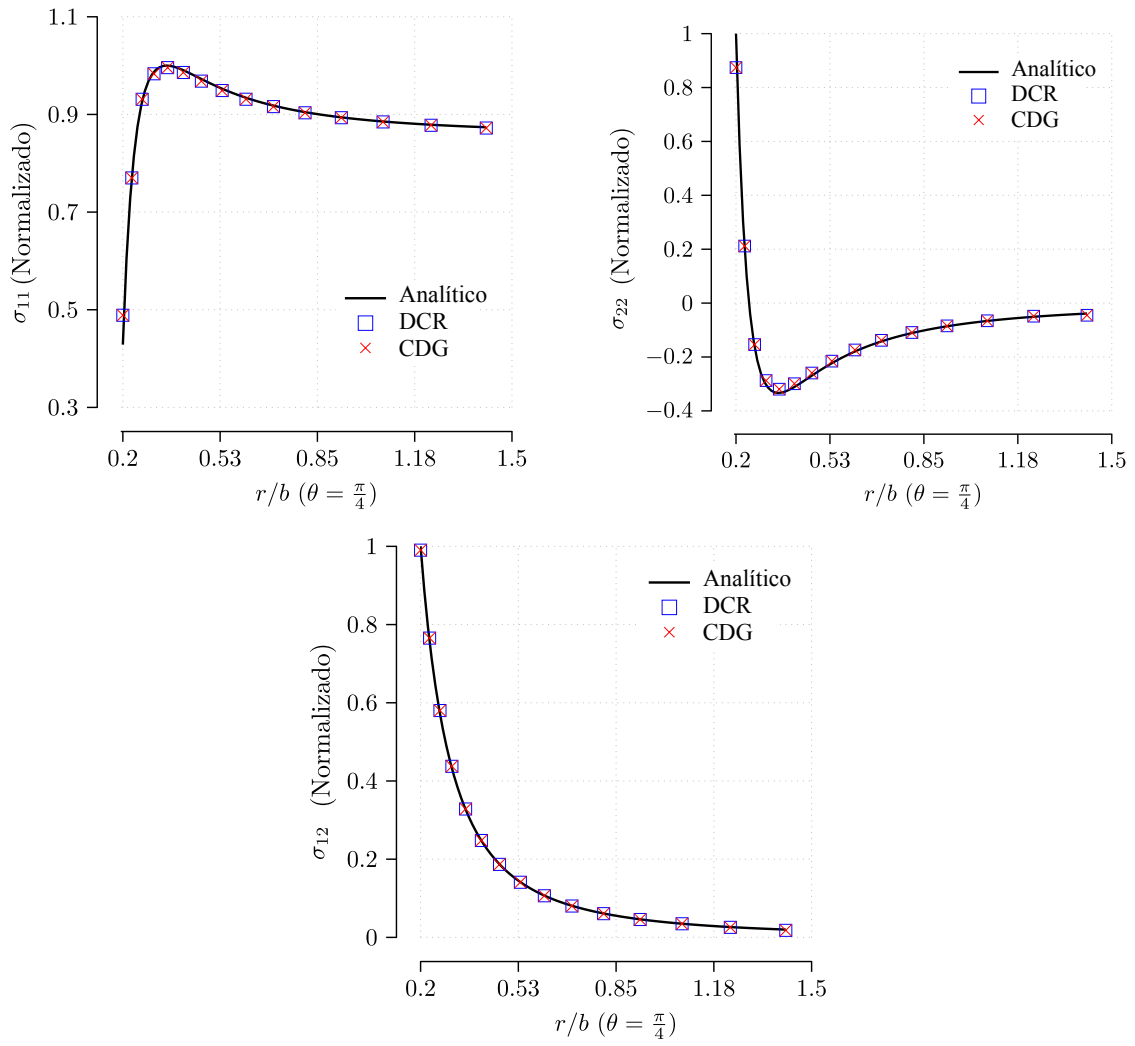


Figura 3.12: Resultado - distribuição de tensões em  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

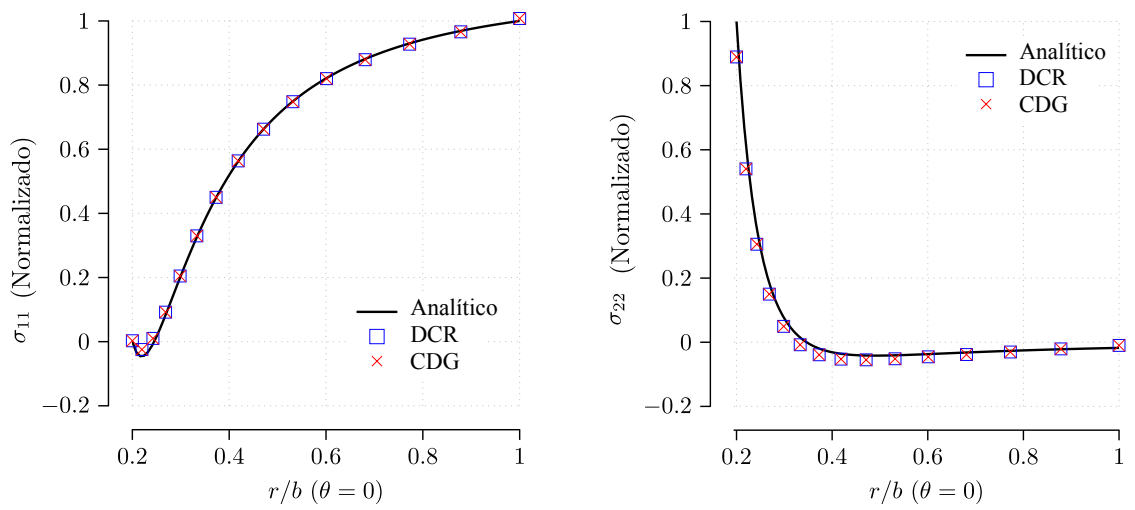


Figura 3.13: Resultado - distribuição de tensões em  $\theta = 0$ .



## 4 - CONCLUSÕES

Novas formulações de métodos sem malha locais foram apresentadas nesta dissertação. A equação de resíduos ponderados, estabelecida em um subdomínio nodal arbitrário, gera a forma local do Teorema do Trabalho. Este relaciona um campo de tensões estaticamente admissível a um campo de deformações cinematicamente admissível, independentemente. Essa característica básica possibilita a formulação de diferentes métodos *Mfree*. As formulações são concebidas por meio da especificação de um campo de deformações cinematicamente admissível.

Na formulação DCR, o campo de deformações cinematicamente admissível corresponde a um deslocamento de corpo rígido translacional arbitrário. A equação final da formulação apresenta somente integrais de linha definidas ao longo do contorno do subdomínio local, o que resulta em um ganho de eficiência computacional significativo.

Já a formulação CDG define um campo de deformações cinematicamente admissível em termos de funções generalizadas discretas formadas a partir de um campo de deslocamentos seccionalmente contínuo. A equação final da formulação não envolve integral alguma. Isso contribui para a eficiência computacional dos métodos *Mfree* e, principalmente, flexibiliza o uso destes, pois não envolve o uso de técnicas de integração numérica.

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis é utilizado para a aproximação do campo elástico e é implementado para as duas formulações implementadas. O suporte compacto nodal tem geometria retangular e a função peso é a função *spline* de quarta ordem.

Como os subdomínios nodais locais são independentes entre si, existe a possibilidade de se combinar as formulações para o mesmo problema, maximizando a eficiência computacional, de acordo com a conveniência do analista.

Dois problemas foram analisados à luz das formulações desenvolvidas e implementadas neste trabalho para avaliar sua eficiência e acurácia. Os resultados obtidos apresentam ótima concordância com as soluções analíticas. A acurácia e estabilidade das soluções numéricas indicam que a formulação cinemática local forma uma base teórica robusta e confiável de métodos sem malha.

### 4.1 - PUBLICAÇÕES

Este trabalho deu origem ao artigo intitulado *Local Meshfree Methods - Kinematic Formulations* submetido ao *International Journal for Numerical Methods in Engineering* em

26/11/2015 aguardando o aceite de publicação (ver Apêndice A).

## 4.2 - TRABALHOS FUTUROS

Para pesquisa futuras em métodos *Mfree* locais baseados no arcabouço desenvolvido neste trabalho, sugere-se:

- Propor novos campos de deformações cinematicamente admissíveis, gerando novos métodos *Mfree*. Algumas sugestões:
  - Variacional:  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{u}$ , onde  $\delta \mathbf{u}$  é uma variação arbitrária do próprio campo de deslocamentos. Essa formulação é análoga à forma fraca de galerkin, em versão local, que pode gerar matrizes simétricas.
  - Solução fundamental:  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q)\mathbf{e}$ , onde  $\mathbf{U}^*$  é uma solução fundamental de Kelvin para elasticidade. Essa abordagem visa gerar uma forma local do método dos elementos de contorno indireto e melhorar a acurácia dos métodos *Mfree*.
- Criar formulações pela especificação de um campo de tensões estaticamente admissível, visto o Teorema da Unicidade de Kirchhoff.
- Estender a formulação cinemática local para problemas com não linearidade física e geométrica.
- Enriquecer as funções de forma do MMQM para lidar com problemas da mecânica da fratura.
- Estender as formulações para lidar com descontinuidades fortes (fratura) e fracas (material heterogêneo), assim como problemas anisotrópicos.
- Desenvolver um método de parametrização para descrever a geometria, de modo a automatizar a distribuição dos nós e os parâmetros da discretização pelos métodos *Mfree* para um problema de engenharia qualquer.
- Estudar o efeito da disposição e quantidade dos pontos de colocação, na formulação CDG, na acurácia da solução numérica.
- Utilizar técnicas de otimização para determinar valores ótimos dos parâmetros  $\alpha_s$  e  $\alpha_q$ .
- Estender as formulações CGD e DCG para tratar outros problema da mecânica estrutural.
- Implementar a versão tridimensional das formulações desenvolvidas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andreas, U, RC Batra e M Porfiri (2005). “Vibrations of cracked Euler-Bernoulli beams using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* 9.2, pp. 111–131.
- Andújar, Rabindranath, Jaume Roset e Vojko Kilar (2011). “Beyond FEM: overview on physics simulation tools for structural engineers”. Em: *Technics Technologies Education Management* 6.3, pp. 555–571.
- Atluri, S. N. e T. Zhu (1998). “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”. Em: *Computational Mechanics* 22.2, pp. 117–127. ISSN: 0178-7675.
- Atluri, Satya N e Shengping Shen (2002). “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* 3.1, pp. 11–52.
- Atluri, SN e T-L Zhu (2000a). “The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics”. Em: *Computational Mechanics* 25.2-3, pp. 169–179.
- Atluri, SN e Tulong Zhu (2000b). “New concepts in meshless methods”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.1-3, pp. 537–556.
- Atluri, SN, JY Cho e H-G Kim (1999). “Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations”. Em: *Computational Mechanics* 24.5, pp. 334–347.
- Atluri, SN, ZD Han e AM Rajendran (2004). “A new implementation of the meshless finite volume method, through the MLPG “mixed” approach”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* 6.6, pp. 491–513.
- Atluri, SN, HT Liu e ZD Han (2006a). “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed collocation method for elasticity problems”. Em: *CMC-TECH SCIENCE PRESS-* 4.3, p. 141.
- Atluri, S.N., HT Liu e ZD Han (2006b). “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed finite difference method for solid mechanics”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 15.1, p. 1.

- Batra, RC e HK Ching (2002). “Analysis of elastodynamic deformations near a crack/notch tip by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method”. Em: *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences* 3.6, pp. 717–730.
- Belytschko, T., Y. Y. Lu e L. Gu (1994). “Element-free Galerkin methods”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2, pp. 229–256. ISSN: 1097-0207.
- Brebbia, CA (1985). “Variational basis of approximate models in continuum mechanics”. Em: *Variational methods in engineering*, pp. 1–23.
- Chen, Wen (2003). “New RBF collocation methods and kernel RBF with applications”. Em: *Meshfree methods for partial differential equations*. Springer, pp. 75–86.
- Ching, HK e RC Batra (2001). “Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method”. Em: *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences* 2.2, pp. 273–289.
- Cho, JY e SN Atluri (2001). “Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, based on a locking-free formulation”. Em: *Engineering Computations* 18.1/2, pp. 215–240.
- Dolbow, JOHN e T Belytschko (1999). “A finite element method for crack growth without remeshing”. Em: *Int. J. Numer. Meth. Eng* 46.1, pp. 131–150.
- Duarte, C Armando e J Tinsley Oden (1996). “Hp clouds-an hp meshless method”. Em: *Numerical methods for partial differential equations* 12.6, pp. 673–706.
- Fichera, Gaetano (1965). *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*. 8. Springer.
- Finlayson, B.A. (2013). *The method of weighted residuals and variational principles*. Vol. 73. SIAM.
- Gao, L, K Liu e Y Liu (2006). “Applications of MLPG method in dynamic fracture problems”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* 12.3, pp. 181–196.
- Gelfand, I.M. e G.E. Shilov (1964). *Generalized Functions, Vol. I: Properties and Operations*.
- Gingold, Robert A e Joseph J Monaghan (1977). “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”. Em: *Monthly notices of the royal astronomical society* 181.3, pp. 375–389.

- Gu, YT e GR Liu (2001a). “A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for static and free vibration analyses of thin plates”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 2.4, pp. 463–476.
- Gu, YuanTong e Gui-Rong Liu (2001b). “A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids”. Em: *Computational Mechanics* 27.3, pp. 188–198.
- Hagihara, S et al. (2007). “Application of meshfree method to elastic-plastic fracture mechanics parameter analysis”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 17.2, p. 63.
- Han, ZD e SN Atluri (2004a). “A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for 3-dimensional elasto-dynamics”. Em: *CMC: Computers, Materials & Continua* 1.2, pp. 129–140.
- Han, Z.D. e S.N. Atluri (2004b). “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving 3D problems in elasto-statics”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 6, pp. 169–188.
- Han, ZD, AM Rajendran e SN Atluri (2005). “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving nonlinear problems with large deformations and rotations”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 10.1, p. 1.
- Han, ZD et al. (2006). “The applications of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in high-speed impact, penetration and perforation problems”. Em: *CMC-TECH SCIENCE PRESS*- 4.2, p. 119.
- Heaney, CE, CE Augarde e AJ Deeks (2010). “Modelling elasto-plasticity using the hybrid MLPG method.” Em: *Computer modeling in engineering & sciences*. 56.2, pp. 153–178.
- Hu, DA et al. (2006). “A modified meshless local Petrov–Galerkin method to elasticity problems in computer modeling and simulation”. Em: *Engineering analysis with boundary elements* 30.5, pp. 399–404.
- Jensen, Paul S (1972). “Finite difference techniques for variable grids”. Em: *Computers & Structures* 2.1, pp. 17–29.
- Kansa, Edward J (1990). “Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations”. Em: *Computers & mathematics with applications* 19.8, pp. 147–161.

- Kirchhoff, Gustav (1859). “Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.” Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 56, pp. 285–313.
- Lancaster, Peter e Kes Salkauskas (1981). “Surfaces generated by moving least squares methods”. Em: *Mathematics of computation* 37.155, pp. 141–158.
- Lee, Sang-Ho e Young-Cheol Yoon (2004). “Meshfree point collocation method for elasticity and crack problems”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61.1, pp. 22–48.
- Li, Q et al. (2003). “Application of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) to problems with singularities, and material discontinuities, in 3-D elasticity”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 4.5, pp. 571–586.
- Li, Quizhan et al. (2005). “A locking-free meshless local Petrov–Galerkin formulation for thick and thin plates”. Em: *Journal of Computational Physics* 208.1, pp. 116–133.
- Liszka, T. e J. Orkisz (1980). “The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics”. Em: *Computers & Structures* 11.1–2. Special Issue-Computational Methods in Nonlinear Mechanics, pp. 83 –95. ISSN: 0045-7949.
- Liu, G. R. e Y. T. Gu (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media.
- Liu, G.R. (2009). *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC press.
- Liu, GR e YT Gu (2001a). “A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids”. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 11.2, pp. 221–236.
- Liu, G.R. e Y.T. Gu (2001b). “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids”. Em: *Journal of Sound and vibration* 246.1, pp. 29–46.
- Liu, GR e YT Gu (2003). “A meshfree method: meshfree weak–strong (MWS) form method, for 2-D solids”. Em: *Computational Mechanics* 33.1, pp. 2–14.
- Liu, G.R. e L. Yan (2000). “A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics”. Em: *Adv. Comput. Eng. Sci* 39, pp. 1374–1379.
- Liu, GR et al. (2002a). “Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions”. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 14.6, pp. 713–732.
- Liu, HT et al. (2006). “Computational modeling of impact response with the RG damage model and the meshless local Petrov-galerkin (MLPG) approaches”. Em: *CMC-TECH SCIENCE PRESS*- 4.1, p. 43.

- Liu, Wing Kam, Sukky Jun, Yi Fei Zhang et al. (1995). “Reproducing kernel particle methods”. Em: *International journal for numerical methods in fluids* 20.8-9, pp. 1081–1106.
- Liu, Xin et al. (2002b). “Radial basis point interpolation collocation method for 2-d solid problem”. Em: *Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods*. Vol. 16. World Scientific, p. 18.
- Long, Shuyao e SN Atluri (2002). “A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 3.1, pp. 53–64.
- Mandelbrojt, S. e L. Schwartz (1965). “Jacques Hadamard (1865 - 1963)”. Em: *Bull. Amer. Math. Soc.* 71.1, pp. 107–129. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183526393>.
- Melenk, J.M. e I. Babuška (1996). “The partition of unity finite element method: basic theory and applications”. Em: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 139.1, pp. 289–314.
- Nayroles, B., G. Touzot e P. Villon (1992). “Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements”. Em: *Computational Mechanics* 10.5, pp. 307–318. ISSN: 0178-7675.
- Nguyen, Vinh Phu et al. (2008). “Meshless methods: a review and computer implementation aspects”. Em: *Mathematics and computers in simulation* 79.3, pp. 763–813.
- Oñate, E et al. (1996). “A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow”. Em: *International journal for numerical methods in engineering* 39.22, pp. 3839–3866.
- Portela, A. e A. Charafi (2002). *Finite elements using Maple: a symbolic programming approach*. Springer Science & Business Media.
- Sladek, J et al. (2007). “Analysis of thick functionally graded plates by local integral equation method”. Em: *Communications in numerical methods in engineering* 23.8, pp. 733–754.
- Sladek, J et al. (2013). “Applications of the MLPG method in engineering & sciences: a review”. Em: *Comput. Model. Eng. Sci* 92, pp. 423–475.
- Sokolnikoff, I. S. (1956). *Mathematical theory of elasticity*. Vol. 83. McGraw-Hill New York.

- Strouboulis, T, K Copps e I Babuska (2000). “The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.8, pp. 1401–1417.
- Truesdell, C. e R.A. Toupin (1960). “Principles of classical mechanics and field theory”. Em: *Handbuch der Physik* 3.1.
- Wendland, Holger (1999). “Meshless Galerkin methods using radial basis functions”. Em: *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society* 68.228, pp. 1521–1531.
- Xiao, JR e MA McCarthy (2003). “A local Heaviside weighted meshless method for two-dimensional solids using radial basis functions”. Em: *Computational Mechanics* 31.3-4, pp. 301–315.
- Zhang, Xiong et al. (2000). “Meshless methods based on collocation with radial basis functions”. Em: *Computational mechanics* 26.4, pp. 333–343.
- Zhu, Tulong, J-D Zhang e SN Atluri (1998). “A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach”. Em: *Computational mechanics* 21.3, pp. 223–235.
- Zongmin, Wu (1992). “Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions”. Em: *Approximation Theory and its Applications* 8.2, pp. 1–10.



## **APÊNDICES**

# A - ARTIGO PARA PUBLICAÇÃO INTERNACIONAL

International Journal for Numerical Methods in Engineering



## Local Meshfree Methods - Kinematic Formulations

Journal:	<i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>
Manuscript ID	Draft
Wiley - Manuscript type:	Research Article
Date Submitted by the Author:	n/a
Complete List of Authors:	Oliveira, Vicente Portela, Artur; University of Brasília, Civil Engineering
Keywords:	Meshfree methods, Structures, Elasticity

SCHOLARONE™  
Manuscripts

View Only

<http://mc.manuscriptcentral.com/nme>

INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING  
*Int. J. Numer. Meth. Engng* 2016; 00:1–40      Prepared using *nmeauth.cls* [Version: 2002/09/18 v2.02]

## Local Meshfree Methods - Kinematic Formulations

V. Oliveira, A. Portela\*

*University of Brasília, Faculty of Technology, Department of Civil Engineering  
Brasília-DF, 70910-900, Brazil  
Tel.: +55 (61) 8154-7262*

### SUMMARY

This paper is concerned with the formulation of local meshfree methods in elastostatics, for the solution of two-dimensional problems. The formulations are derived in the framework of the theory of structures, where the variational energetic principles have become the theoretical basis of numerical methods.

Local meshfree methods are derived through a weighted residual formulation which leads to a local weak form that is the well known work theorem. In an arbitrary local region, the work theorem establishes an energy relationship between a statically-admissible stress field and an independent kinematically-admissible strain field. The independence of the two fields allows the generation of different meshless formulations. In this paper, two new formulations are derived in the set of kinematically-admissible strain fields.

In the first formulation, the kinematically-admissible strain field is chosen as the one corresponding to an arbitrary rigid-body displacement; as a consequence, the domain term is canceled out, in the local form of the work theorem, leaving only regular boundary terms. On the other hand, the second formulation defines the kinematically-admissible strain field as a generalized function, generated by a piecewise continuous displacement field which leads to an integration-free formulation. The moving least squares (MLS) approximation of the elastic field is used in this paper to implement both local meshless formulations.

Since local regions are independent from each other, the modeling strategy of local meshfree formulations has the possibility of using simultaneously different formulations, conveniently defined, in the same problem. Two problems were analyzed with these techniques, in order to assess the accuracy and efficiency of the formulations. The results obtained in this work are in perfect agreement with those of the analytical solutions. The accuracy and efficiency of the implementations described herein make this a reliable and robust formulation of local meshfree methods, in the framework of the theory of structures. Copyright © 2016 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: Meshless; Meshfree; Local form; Work theorem; Rigid-body displacement; Fundamental solution

---

\*Correspondence to: [aportela@umb.br](mailto:aportela@umb.br) (Artur Portela)

Contract/grant sponsor: PECC – Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, University of Brasília

## 1. INTRODUCTION

Meshfree, or meshless, methods achieved remarkable progress over the past few years. The essential feature of all these methods is that they perform the discretization of the problem domain and boundaries with a set of scattered field nodes that do not require any mesh for the approximation of the field variables. In general, their formulation is based in the weighted-residual method, see Fernalyson [1].

Smoothed particle hydrodynamics (SPH), presented by Lucy [2] and Gingold *et al.* [3] is one of the earliest meshfree methods applied to solve problems in astrophysics. Libersky *et al.* [4] were the first to apply SPH in solid mechanics. The main drawbacks of SPH are inaccurate results near boundaries and tension instability that was first investigated by Swegle [5]. SPH is based on a strong-form formulation of the weighted-residual method, with a Lagrangean description.

The collocation method is also based in the weighted-residual strong-form formulation. Typical meshfree collocation methods were published by Kansa [6], Wu [7], Zhang *et al.* [12], Liu *et al.* [8], Onate *et al.* [9], Lee *et al.* [11] and Jamil *et al.* [10]. Collocation methods have some attractive advantages over other meshless methods, as they implement a simple algorithm with computational efficiency which is truly a meshfree method. Despite these advantages, collocation methods tend to be inaccurate, not robust and worse of all unstable due to the ill-conditioned system equations formed by enforcing the balance of momentum and traction boundary conditions at nodes. Onate *et al.* [13] presented a stabilization technique by introducing new terms in both the governing equations and the traction boundary conditions. Although these artificial terms overcome the stabilization difficulties, they are suitable only for some particular problems.

Other meshless methods are based on a weighted-residual weak-form formulation. After discretization, the weak form is the key feature of the formulation used to derive a system of algebraic equations through a process of numerical integration using sets of background cells, globally or locally constructed in the domain of the problem. Research on meshfree methods, based on a weighted-residual weak-form formulation, significantly increased after the publication of the diffuse element method (DEM), introduced by Nayroles *et al.* [15]. The reproducing kernel particle method (RKPM), presented by Liu *et al.* [14], and the element-free Galerkin (EFG) method, presented by Belytschko *et al.* [16], were the first weak-form meshless methods applied in solid mechanics. In contrast to EFG and RKPM methods, that use a so-called intrinsic basis, other methods were developed that use an extrinsic basis and the partition of unity concept. This extrinsic basis was used in the hp-cloud method, presented by Duarte *et al.* [17]. Melenk *et al.* [18] pointed out similarities of meshless and finite element methods and presented the partition of unity finite element method (PUFEM) which is similar to the hp-cloud method; while PUFEM shape functions are based on Lagrange polynomials, the general form of the hp-cloud method also includes the MLS-approximation. Strouboulis *et al.* [19] presented the generalized finite element method (GFEM) and pointed out that different partition of unities can be used for the usual approximation and the enrichment.

All these weak-form meshless methods require the use of a background mesh for the purpose of the integration of the weighted-residual weak form over the global problem domain, in the process of the generation of the system of algebraic equations and therefore, they are not truly meshless methods.

In order to overcome the use of a global integration background mesh, a class of

meshfree methods based on local weighted-residual weak forms, such as the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method presented by Atluri *et al.* [20] to [22], the meshless local boundary integral equation (MLBIE) method presented by Zhu *et al.* [23], the local point interpolation method (LPIM) presented by Liu *et al.* [24] and the local radial point interpolation method (LRPIM) presented by Liu *et al.* [25], have been developed. The most popular of these methods is the MLPG, based on a moving least-squares (MLS) approximation. The main difference of the MLPG method to other global meshless methods, such as EFG or RKPM, is that local weak forms are used, for integration on overlapping regular-shaped local subdomains, rather than global weak forms and consequently the method does not require the use of a background global mesh, but only a background local grid which in general has a simple shape.

The concern of this paper is the formulation of local meshfree methods in elastostatics, for the solution of two-dimensional problems, derived in the framework of the theory of structures, where the variational energetic principles have become the theoretical basis of numerical methods. All formulations presented in this paper are derived in the set of kinematically-admissible local strain fields. On the other hand, it is also possible to derive formulations in the set of statically-admissible local stress fields which is a source ever explored.

Two new formulations are presented. While the first formulation leads to a regular local boundary integral equation which enforces an important reduction of the computational effort, the second one follows that trend of reduction of the computational effort, getting rid of the whole integration process.

The paper is organized as follows. Section 2 gives a description of the MLS approximation. The local form of the work theorem is presented in Section 3 and the modeling strategy in Section 4. Section 5 presents the rigid-body displacement meshless formulation, while the generalized-strain meshless formulation is presented in Section 6. Section 7 presents some numerical results, illustrating the accuracy, efficiency and robustness of the strategies adopted in the analysis. Finally, Section 8 presents the concluding remarks and future developments.

## 2. MLS APPROXIMATION

The MLS approximation, schematically represented in Figure 1 for one-dimensional approximation, is based on three components: a weight function of compact support associated with each node, a complete set of polynomial basis functions and a set of coefficients that are function of the space coordinates, as presented by Atluri and Zhu [20]. In the following, this paper uses the basic MLS-Meshless terminology presented by Atluri and Zhu [21]

Let  $\Omega$  be the domain of a body with boundary  $\Gamma$  and let  $N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \Omega$  be a set of scattered nodal points that represents a meshless discretization, in which some of them are located on the boundary  $\Gamma$ , as represented in Figure 2. In a neighbourhood of each nodal point  $\mathbf{x}$ , the domain of definition of the MLS approximation is the subdomain  $\Omega_{\mathbf{x}} \in \Omega$ , with a local boundary  $\Gamma_{\mathbf{x}}$ . Circular or rectangular nodal supports, centered at  $\mathbf{x}$ , can be used for all the nodal points.

4

V. OLIVEIRA, A. PORTELA

### 2.1. Shape Functions

Let  $\Omega_{\mathbf{x}}$  be the domain of definition of the MLS approximation, in a neighbourhood of a sampling point  $\mathbf{x}$ . To approximate the displacement  $u(\mathbf{x}) \in \Omega_{\mathbf{x}}$ , over a number of scattered nodes  $\mathbf{x}_i \in \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , where the nodal parameters  $\hat{u}_i$  are defined, the MLS approximation is given by

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

for  $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$ , in which

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})], \quad (2)$$

is a vector of the complete monomial basis of order  $m$  and  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  is the vector of unknown coefficients  $a_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  that are functions of the space coordinates  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , for 2-D problems.

The coefficient vector  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  is determined by minimizing the weighted discrete  $L_2$  norm

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_i) - \hat{u}_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2, \quad (3)$$

with respect to each term of  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , in which  $w_i(\mathbf{x})$  is the weight function associated with the node  $i$ , with compact support that is  $w_i(\mathbf{x}) > 0$ , for all  $\mathbf{x}$  in the support of  $w_i(\mathbf{x})$ . Figure 2 represents schematically the compact supports of the MLS weight functions associated with a few nodes which are the influence domains of those nodes. Finding the extremum of  $J(\mathbf{x})$  with respect to each term of  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , leads to

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

in which

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (6)$$

and

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]. \quad (7)$$

Solving equation (4) for  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  yields

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (8)$$

provided  $n \geq m$ , for each sampling point  $\mathbf{x}$ , as a necessary condition for a well-defined MLS approximation. Finally, substituting for  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  into equation (1) leads to the MLS approximation

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})\hat{u}_i, \quad (9)$$

in which

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (10)$$

is the shape function of the MLS approximation corresponding to the node  $\mathbf{x}_i$ , schematically represented in Figure 3. The MLS shape functions are not nodal interpolants that is  $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq$

$\delta_{ij}$ . Since  $\phi_i(\mathbf{x})$  vanishes for  $\mathbf{x}$  not in the local domain of the node  $\mathbf{x}_i$ , the local character of the MLS approximation is preserved. The nodal shape function is complete up to the order of the basis. The smoothness of the nodal shape function is determined by the smoothness of the basis and of the weight function. The spatial derivatives of the shape function  $\phi_i(\mathbf{x})$  are given by

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^m [p_{j,k}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji} + p_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji}], \quad (11)$$

in which  $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x_k$ .

### 2.2. Weight Functions

Weight functions  $w_i(\mathbf{x})$ , introduced in equation (3) for each node  $\mathbf{x}_i$ , have a compact support which defines the nodes that influence the local approximation at a sampling point  $\mathbf{x}$ , as schematically represented in Figure 3. For the sake of simplicity, this paper considers rectangular compact supports with weight functions defined as

$$w_i(\mathbf{x}) = w_{i_x}(\mathbf{x}) w_{i_y}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

with the weight function given by the quartic spline function

$$w_{i_x}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}}\right)^4 & \text{for } 0 \leq d_{i_x} \leq r_{i_x} \\ 0 & \text{for } d_{i_x} > r_{i_x} \end{cases} \quad (13)$$

and

$$w_{i_y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}}\right)^4 & \text{for } 0 \leq d_{i_y} \leq r_{i_y} \\ 0 & \text{for } d_{i_y} > r_{i_y}, \end{cases} \quad (14)$$

in which  $d_{i_x} = \|x - x_i\|$  and  $d_{i_y} = \|y - y_i\|$ . The parameters  $r_{i_x}$  and  $r_{i_y}$  represent the size of the support for the node  $i$ , respectively in the  $x$  and  $y$  directions.

### 2.3. Elastic Field

The elastic field is now approximated at a sampling point  $\mathbf{x}$ . Considering equation (9), displacement and strain components are respectively approximated as

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^h(\mathbf{x}) \\ v^h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \phi_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{u}} \quad (15)$$

and

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (16)$$

in which geometrical linearity is assumed in the differential operator  $\mathbf{L}$  and thus,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & \dots & \phi_{n,1} & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & \dots & 0 & \phi_{n,2} \\ \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{n,2} & \phi_{n,1} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

6

V. OLIVEIRA, A. PORTELA

Stress and traction components are respectively approximated as

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (18)$$

and

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (19)$$

in which  $\mathbf{D}$  is the matrix of the elastic constants and  $\mathbf{n}$  is the matrix of the components of the unit outward normal, defined as

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Equations (15) to (19) show that, at a sampling point  $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$ , the variables of the elastic field are defined in terms of the nodal unknowns  $\hat{\mathbf{u}}$ .

### 3. LOCAL FORM OF THE WORK THEOREM

Let  $\Omega$  be the domain of a body and  $\Gamma$  its boundary subdivided in  $\Gamma_u$  and  $\Gamma_t$  that is  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , as represented in Figure 4. The mixed fundamental boundary value problem of linear elastostatics aims to determine the distribution of stresses  $\boldsymbol{\sigma}$ , strains  $\boldsymbol{\varepsilon}$  and displacements  $\mathbf{u}$  throughout the body, when it has constrained displacements  $\bar{\mathbf{u}}$  defined on  $\Gamma_u$  and is loaded by an external system of distributed surface and body forces with densities denoted by  $\bar{\mathbf{t}}$  on  $\Gamma_t$  and  $\mathbf{b}$  in  $\Omega$ , respectively.

The solution of the posed problem is a totally admissible elastic field that simultaneously satisfies kinematic and static admissibility. If this solution exists, see Fredholm [26] and Fichera [27], it can be shown that it is unique, provided linearity and stability of the material are admitted. Such is the uniqueness theorem of Kirchhoff [28] which may be stated either as

*In the set of all the kinematically-admissible elastic fields, there is only one that satisfies static admissibility;*

or

*In the set of all the statically-admissible elastic fields, there is only one that satisfies kinematic admissibility;*

In the framework of the variational calculus, these statements of the solution uniqueness lead, respectively to the theorem of virtual displacements and the theorem of virtual stresses. Since these theorems consider the totally admissible elastic field that is the actual solution of the posed problem, they are only particular cases of the general work theorem.

The general work theorem establishes an energy relationship between any of the statically-admissible stress fields and any of the kinematically-admissible strain fields that can be defined in the body. Derived as a weighted residual statement, the work theorem serves as a unifying basis for the formulation of numerical models in Continuum Mechanics, as reported by Brebbia [29].

In the domain of the body, consider a statically-admissible stress field that is

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (21)$$



in the domain  $\Omega$ , with boundary conditions

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad (22)$$

on the static boundary  $\Gamma_t$ , in which the vector  $\boldsymbol{\sigma}$  represents the stress components;  $\mathbf{L}$  is a matrix differential operator; the vector  $\mathbf{t}$  represent the traction components;  $\bar{\mathbf{t}}$  represent prescribed values of tractions and  $\mathbf{n}$  represents the outward unit normal components to the boundary.

In the global domain  $\Omega$  consider a point  $Q$  and its arbitrary local domain  $\Omega_Q$  with boundary  $\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_t} \cup \Gamma_{Q_u}$ , in which  $\Gamma_{Q_i}$  is the interior local boundary, while  $\Gamma_{Q_t}$  and  $\Gamma_{Q_u}$  are local boundaries that respectively share a global boundary, as represented in Figure 4. Due to its arbitrariness, this local domain can be overlapping with other similar subdomains. For the local domain  $\Omega_Q$ , the strong form of the wheighted residual equation is written as

$$\int_{\Omega_Q} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Omega + \int_{\Gamma_{Q_t}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma \, d\Gamma = \mathbf{0}, \quad (23)$$

in which  $\mathbf{W}_\Omega$  and  $\mathbf{W}_\Gamma$  are arbitrary weighting functions defined, respectively in  $\Omega$  and on  $\Gamma$ . When the domain term of equation (23) is integrated by parts, the following local weak form of the weighted residual equation is obtained

$$\int_{\Gamma_Q} (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) \, d\Omega + \int_{\Gamma_{Q_t}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma \, d\Gamma = \mathbf{0} \quad (24)$$

which now requires continuity of  $\mathbf{W}_\Omega$ , as an admissibility condition for integrability.

For the sake of convenience, the arbitrary weighting function  $\mathbf{W}_\Gamma$  is chosen as

$$\mathbf{W}_\Gamma = -\mathbf{W}_\Omega, \quad (25)$$

on the boundary  $\Gamma_{Q_t}$ . Thus, equation (24) leads to

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t}^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) \, d\Omega = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Consider further an arbitrary kinematically-admissible strain field  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , with continuous displacements  $\mathbf{u}^*$  and small derivatives, in order to assume geometrical linearity, defined in the global domain that is

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{L} \mathbf{u}^*, \quad (27)$$

in the domain  $\Omega$ , with boundary conditions

$$\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}^*, \quad (28)$$

on the kinematic boundary  $\Gamma_u$ .

When the continuous arbitrary weighting function  $\mathbf{W}_\Omega$ , is defined as

$$\mathbf{W}_\Omega = \mathbf{u}^*, \quad (29)$$

the weak form (26), of the weighted residual equation, becomes

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t} - \Gamma_{Q_u}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_u}} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{u}}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u}^* - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^*) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (30)$$

which can be written in a compact form as

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega. \quad (31)$$

This equation which expresses the static-kinematic duality, is the local form of the well-known work theorem, the fundamental identity of solid mechanics, see Sokolnikoff [30]. Equation (31) is the starting point of the kinematically-admissible formulations of the local meshfree methods presented in this paper. It is important to remark the independence of the two fields present in equation (31) which is a consequence of the arbitrariness of the weighting function  $\mathbf{W}_Q$ . It is this independence that allows the generation of different meshfree methods, when the kinematically-admissible field is defined locally through different options. Another important remark that is worth of mentioning is that since no constitutive relationships were used in the derivation of equation (31), it can be used under the only assumption of geometrical linearity.

#### 4. MODELING STRATEGY

Different formulations of local meshfree methods can be derived when the arbitrary kinematically-admissible field  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , is locally defined in the work theorem, equation (31). In the following sections, simple kinematically-admissible local fields will be used to derive the meshless formulations presented in this paper.

On the other hand, the statically-admissible local field  $\boldsymbol{\sigma}$ , will be always assumed as the elastic field that actually settles in the body. Besides satisfying static admissibility, through equations (21) and (22), this elastic field also satisfies kinematic admissibility defined as

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (32)$$

in the domain  $\Omega$ , with boundary conditions

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad (33)$$

on the kinematic boundary  $\Gamma_u$ , in which the displacements  $\mathbf{u}$ , are assumed continuous with small derivatives, in order to allow for geometrical linearity of the strain field  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Therefore, equations (33) must be enforced in the numerical model, in order to provide a unique solution of the posed problem.

#### 5. RIGID-BODY DISPLACEMENT FORMULATION

The simplest and obvious application of the local work theorem is to consider a kinematically-admissible strain field generated by an arbitrary rigid-body translational displacement represented as

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{c}, \quad (34)$$

for  $\mathbf{x}$  in the local domain  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$  assigned to the field node  $Q$ , where  $\mathbf{c}$  is the rigid-body displacement vector, schematically represented in Figure 5 which conveniently leads to null strains that is

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{0}. \quad (35)$$

In this case, the local work theorem, equation (31), simply leads to the equation

$$\mathbf{c}^T \left( \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega \right) = \mathbf{0} \quad (36)$$

and, due to the arbitrariness of  $\mathbf{c}$ , leads to the final equation

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (37)$$

which states that when a local domain is in mechanical equilibrium, the body forces and tractions balance each other; obviously this is nothing else than the basic Euler–Cauchy stress principle which is sometimes referred to as the defining principle of continuum mechanics, see Truesdell and Toupin [31]. This is the equation used in the rigid–body displacement meshfree formulation which, in the absence of body forces, involves only non–singular boundary integrals.

Although derived in a completely different way, equation (37) was presented by Atluri and Shen [22], who named it as MLPG5 that became a very popular meshless formulation due to its effectiveness.

Since equation (37) enforces the local equilibrium, in the local domain  $\Omega_Q$ , it is independent of the equilibrium equations of the other local domains. This independence is a key feature of local meshless formulations which allows the use of conveniently defined local domains, simultaneously modelled with different formulations.

Discretization of equation (37) is carried out with the MLS approximation, equations (15) to (19), at the field node  $Q \in \Omega_Q$ , in terms of the nodal unknowns  $\hat{\mathbf{u}}$ , thus leading to the system of two linear equations

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega \quad (38)$$

that can be written as

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q, \quad (39)$$

in which  $\mathbf{K}_Q$ , the nodal stiffness matrix associated with the field node  $Q$ , is a  $2 \times 2n$  matrix given by

$$\mathbf{K}_Q = \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Gamma \quad (40)$$

and  $\mathbf{F}_Q$ , is the force vector associated with the field node  $Q$ , given by

$$\mathbf{F}_Q = - \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, d\Omega. \quad (41)$$

Consider that the problem has a total of  $N$  field nodes  $Q$ , each one associated with the respective local region  $\Omega_Q$ . Assembling equations (39) for all  $M$  interior and static–boundary field nodes leads to the global system of  $2M \times 2N$  equations

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (42)$$

10

V. OLIVEIRA, A. PORTELA

Finally, the remaining equations are obtained from the  $N - M$  boundary field nodes on the kinematic boundary. For a field node on the kinematic boundary, a direct interpolation method presented by Liu and Yan [32], is used to impose the boundary condition as

$$u_k^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_j) \hat{u}_{ik} = \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (43)$$

or, in matrix form as

$$\mathbf{u}_k = \Phi_k \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (44)$$

with  $k = 1, 2$ , where  $\bar{\mathbf{u}}_k$  is the specified nodal displacement component. Equations (44) are directly assembled into the global system of equations (42).

## 6. GENERALIZED-STRAIN FORMULATION

In the absence of body forces, the rigid-body formulation leads to a regular boundary integral equation which enforces an important reduction of the computational effort. The generalized-strain formulation follows that trend of reduction of the computational effort, getting rid of the whole integration process. Hence, this new formulation aims generating an integration-free stiffness matrix of the local domain. Performing this objective requires a strategy that departs from using regular functions in the kinematically-admissible strain field.

In the local form of the work theorem, equation (31), the kinematically-admissible displacement field  $\mathbf{u}^*$ , was assumed as a continuous function leading to a regular integrable function that is the kinematically-admissible strain field  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ . However, this continuity assumption on  $\mathbf{u}^*$ , enforced in the local form of the work theorem, is not absolutely required but can be relaxed by convenience, provided  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  can be useful as a generalized function, in the sense of the theory of distributions, see Gelfand and Shilov [33]. Hence, this formulation considers that the kinematically-admissible displacement field is a piecewise continuous function, defined in terms of the Heaviside step function and therefore the corresponding kinematically-admissible strain field is a generalized function, defined in terms of the Dirac delta function.

For the sake of the simplicity, in dealing with Heaviside and Dirac functions in a two-dimensional coordinate space, consider a scalar function  $d$ , defined as

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q\| \quad \text{that is} \quad \begin{cases} d = 0 & \text{if } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ d > 0 & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (45)$$

which represents the absolute-value function of the distance between a field point  $\mathbf{x}$  and a particular reference point  $\mathbf{x}_Q$ , in the local domain  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$  assigned to the field node  $Q$ . Therefore, this definition always assumes  $d$  as a positive or null value, in this case whenever  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{x}_Q$  are coincident points. It is important to remark that, in equation (45), neither the field point  $\mathbf{x}$  nor the reference point  $\mathbf{x}_Q$  is necessarily a nodal point of the local domain.

For the scalar function  $d$ , the Heaviside step function can be defined as

$$H(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 0 \text{ that is } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{if } d > 0 \text{ that is } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (46)$$

in which the discontinuity is assumed at  $\mathbf{x}_Q$  and consequently, the Dirac delta function is defined with the following properties

$$\delta(d) = H'(d) = \begin{cases} \infty & \text{if } d = 0 \text{ that is } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{if } d > 0 \text{ that is } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q \end{cases} \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(d) dd = 1, \quad (47)$$

in which  $H'(d)$  represents the distributional derivative of  $H(d)$ . Note that the derivative of  $H(d)$ , with respect to the coordinate  $x_i$ , can be defined as

$$H(d)_{,i} = H'(d) d_{,i} = \delta(d) d_{,i} = \delta(d) n_i. \quad (48)$$

Since the result of this equation is not affected by any particular value of the constant  $n_i$ , this constant will be conveniently redefined later on.

Kronecker delta function can be defined through Heaviside step function as

$$\Delta(d) = H(d) + H(-d) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 0 \text{ that is } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ 0 & \text{if } d > 0 \text{ that is } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q \end{cases} \quad (49)$$

which has the distributional derivative always null that is

$$\Delta'(d) = \delta(d) - \delta(-d) = \delta(d) - \delta(d) = 0, \quad (50)$$

as a consequence of the symmetry of Dirac delta function.

Now consider that  $d_l$ ,  $d_j$  and  $d_k$  represent the distance function  $d$ , defined in equation (45), for corresponding collocation points  $\mathbf{x}_l$ ,  $\mathbf{x}_j$  and  $\mathbf{x}_k$ . Then, the kinematically-admissible displacement field can be defined as a linear combination of Kronecker delta function evaluations at an arbitrary number of collocation points, conveniently arranged in the local domain  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$  of the field node  $Q$ , that is

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \Delta(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \Delta(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \Delta(d_k) \right] \mathbf{e}, \quad (51)$$

in which  $\mathbf{e}$  represents the metric of the orthogonal directions;  $n_i$ ,  $n_t$  and  $n_\Omega$  represent the number of collocation points, respectively on the local interior boundary  $\Gamma_{Q_i} = \Gamma_Q - \Gamma_{Q_t} - \Gamma_{Q_u}$  with length  $L_i$ , on the local static boundary  $\Gamma_{Q_t}$  with length  $L_t$  and in the local domain  $\Omega_Q$  with area  $S$ . This assumed displacement field  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ , schematically represented in Figure 6, conveniently leads to a null generalized strain field that is

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (52)$$

as a consequence of equation (50).

The local work theorem, equation (31), can be written as

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega \quad (53)$$

which, after considering the assumed displacement and the strain components of the kinematically-admissible field, respectively equations (51) and (52), leads to

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t}^T \Delta(d_l) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T \Delta(d_j) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \Delta(d_k) d\Omega = 0. \quad (54)$$

Now considering the properties of Kronecker delta function, defined in equation (49), equation (54) simply leads to

$$\mathbf{e}^T \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \right] = 0 \quad (55)$$

and finally to

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}. \quad (56)$$

Equation (56) states the pointwise equilibrium of tractions and body forces which obviously is the pointwise version of the Euler-Cauchy stress principle. This is the equation used in the generalized-strain meshfree formulation which is integration free. Since the work theorem is a weighted-residual weak form, it can be easily seen that this integration-free formulation is nothing else other than a weighted-residual weak-form collocation. The weighted-residual weak-form collocation readily overcomes the well-known difficulties posed by the weighted-residual strong-form collocation, regarding accuracy and stability of the solution, which makes this a reliable and robust formulation.

Equations (56), of the generalized strain formulation, can be derived from another kinematically-admissible displacement field, directly defined in terms of Heaviside step function that is presented in the following. Consider that  $d_l$ ,  $d_j$  and  $d_k$  represent the distance function  $d$ , defined in equation (45), for corresponding collocation points  $\mathbf{x}_l$ ,  $\mathbf{x}_j$  and  $\mathbf{x}_k$ . Then, when equations (45) to (47) are considered, the kinematically-admissible displacement field can be conveniently defined as

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} H(d_k) \right] \mathbf{e}, \quad (57)$$

in which  $\mathbf{e}$  represents the metric of the orthogonal directions and  $n_i$ ,  $n_t$  and  $n_\Omega$  represent the number of collocation points, respectively on the local interior boundary  $\Gamma_{Q_i} = \Gamma_Q - \Gamma_{Q_t} - \Gamma_{Q_u}$  with length  $L_i$ , on the local static boundary  $\Gamma_{Q_t}$  with length  $L_t$  and in the local domain  $\Omega_Q$  with area  $S$ . Therefore, when equations (48) are taken into account, the kinematically-admissible generalized strain field is given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{L} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{L} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{L} H(d_k) \right] \mathbf{e} = \\ &= \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \delta(d_l) \mathbf{n}^T + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \delta(d_j) \mathbf{n}^T + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \delta(d_k) \mathbf{n}^T \right] \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (58)$$

in which  $\mathbf{n}$  is given by equation (20), with arbitrary components  $n_i$  that will be defined later on.

Having defined the displacement and the strain components of the kinematically-admissible field, respectively with equations (57) and (58), the local work theorem, equation (31), can be written as

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_t}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega \quad (59)$$

that is

$$\begin{aligned} \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q_l}} \mathbf{t}^T H(d_l) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Q_t}} \bar{\mathbf{t}}^T H(d_j) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T H(d_k) \mathbf{e} d\Omega = \\ = \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \delta(d_k) \mathbf{n}^T \mathbf{e} d\Omega. \end{aligned} \quad (60)$$

Taking into account the properties of Heaviside step function, defined in equation (46), equation (60) simply leads to

$$\mathbf{e}^T \left[ \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{n} \int_{\Omega_Q} \delta(d_k) \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (61)$$

which, after considering the selective properties of Dirac delta function, leads to

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} - \frac{S}{n_\Omega} \mathbf{n} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}_k} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}. \quad (62)$$

Finally, when the variable  $\mathbf{n}$ , given by equation (20), is arbitrarily defined with identically null components  $n_i = 0$  as allowed by equation (48), equation (62) leads to

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (63)$$

that is absolutely identical to the equation (56).

Discretization of equation (56), or (63), is carried out with the MLS approximation, equations (15) to (19), for the local domain  $\Omega_Q$ , in terms of the nodal unknowns  $\hat{\mathbf{u}}$ , thus leading to the system of two linear algebraic equations

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \hat{\mathbf{u}} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (64)$$

that can be written as

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q, \quad (65)$$

in which  $\mathbf{K}_Q$ , the nodal stiffness matrix associated with the local domain  $\Omega_Q$ , is a  $2 \times 2n$  matrix given by

$$\mathbf{K}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \quad (66)$$

and  $\mathbf{F}_Q$  is the respective force vector given by

$$\mathbf{F}_Q = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (67)$$

Assembling equations (65), for all local domains, leads to the global system of equations

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (68)$$

Finally, at a node on the kinematic boundary, a direct interpolation method is used to impose the kinematic boundary condition as

$$\mathbf{u}_k = \Phi_k \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (69)$$

with  $k = 1, 2$ , where  $\bar{\mathbf{u}}_k$  is the specified nodal displacement component. Equations (69) are directly assembled into the global system of equations (68).

## 7. NUMERICAL RESULTS

This section presents some numerical results to illustrate the accuracy of present meshless kinematic formulations.

For a generic node  $i$ , the size of the local support and the local domain of integration are, respectively given by

$$r_i = \alpha_s c_i, \quad (70)$$

and

$$r_{\Omega_i} = \alpha_q c_i, \quad (71)$$

in which  $c_i$  represents the distance of the node  $i$ , to the nearest neighboring node and, for the applications presented in this paper,  $\alpha_s = 4.5$  and  $\alpha_q = 0.5 \sim 0.6$  were used.

Displacement and energy norms can be used for error estimation. These norms can be computed, respectively as

$$\|\mathbf{u}\| = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Omega \right]^{1/2} \quad (72)$$

and

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right]^{1/2}. \quad (73)$$

The relative error for  $\|\mathbf{u}\|$  and  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$  is given, respectively by

$$r_u = \frac{\|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}_{exact}\|}{\|\mathbf{u}_{exact}\|} \quad (74)$$

and

$$r_\varepsilon = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{num} - \boldsymbol{\varepsilon}_{exact}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{exact}\|} \quad (75)$$

### 7.1. The Patch Test

As a first example consider the standard patch test that is a rectangular plate loaded by a uniform normal traction applied on the top edge, with proper displacement constraints on the bottom edge, as represented in Figure 7. The plate is assumed in a plane stress condition and the material parameters are Young's modulus  $E = 1.0$  and the Poisson's ratio  $\nu = 0.25$ . The plate is discretized with 9 nodes, arranged in two nodal configurations; one is regular and another is irregular, as shown in Figure 7.



The results obtained in the analysis, represented in Figure 8, are a linear displacement on lateral edges and a constant displacement on the top edge; the normal stress in the loading direction is constant and there is no shear stress in the plate.

### 7.2. Cantilever Beam

Consider a beam of dimensions  $L \times D$  and of unit depth, subjected to a parabolic traction at the free end as shown in Figure 9. The beam in plane stress state.

The parabolic traction is given by

$$\bar{t}_2(x_2) = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right), \quad (76)$$

where  $I = D^3/12$  is the moment of inertia. The exact displacement solution for this problem is given by

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{Px_2}{6EI} \left[ (6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu) \left( x_2^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right], \quad (77)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu x_2^2(L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right], \quad (78)$$

and the exact stresses are given by

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{P(L - x_1)x_2}{I}, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right) \quad \text{and} \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (79)$$

Material properties are taken as Young's modulus  $E = 3.0 \times 10^7$  and the Poisson's ratio  $\nu = 0.3$  and the beam dimensions are  $D = 12$  and  $L = 48$ . The shear force is  $P = 1000$ . A regular nodal distribution, represented in Figure 10, was considered to solve this problem with  $13 \times 5 = 65$  nodes. Rectangular local domains were considered, in which 8 collocation points are uniformly disposed on each side for the generalized-strain formulation. MLS approximation was considered with the first order polynomial basis.

The displacements obtained with the present formulations, represented in Figure 11, show very good agreement with the results of the exact solution. Relative errors  $r_u = 1.98 \times 10^{-5}$  and  $r_\epsilon = 1.06 \times 10^{-4}$  are obtained for this relatively coarse nodal configuration. The stresses, computed at the center of the beam that is  $x = L/2$  and  $y \in [-D/2, D/2]$ , also present very good agreement with the results of the exact solution, as shown in Figure 12. Figure 13 shows the convergence of the generalized strain formulation as a function of the number of collocation points, considered only on local boundaries. Convergence is achieved with only a couple of points.

### 7.3. Plate with a Circular Hole

Consider an infinite plate with a centered circular hole under unidirectional unit tension along the  $x_1$  direction, as represented in Figure 14. Due to the symmetry of the problem about the horizontal and the vertical axes, only a portion of the upper right quadrant of the plate is considered. The modeled section of the plate has dimensions  $b \times b$  and the center circle has a radius  $a = 1$ , with  $b = 5a$ .

The exact stress distribution in the plate is given by

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(r, \theta) &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta,\end{aligned}\quad (80)$$

where  $r$  and  $\theta$  are the usual polar coordinates, centered at the center of the hole. A plane-stress state is considered which leads to the following displacements

$$\begin{aligned}u_1(r, \theta) &= -\frac{\cos \theta}{2r^3 E} [4a^4 \cos^2 \theta (1 + \nu) (1 - r^2) - 3a^4 (1 + \nu) + (ar)^2 (1 - 3\nu) - 2r^4] \\ u_2(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{2r^3 E} [4a^4 \cos^2 \theta (1 + \nu) (1 - r^2) - a^4 (1 + \nu) + (ar)^2 (\nu - 3) + 2r^4 \nu].\end{aligned}\quad (81)$$

The bottom and left edges of the plate are assumed as kinematic boundaries, with displacements specified on the bottom  $u_2(x_1, x_2 = 0)$  and left edges ( $u_1(x_1 = 0, x_1 = L, x_2) = 0$ ). The right and top edges are assumed as static boundaries, loaded by tractions computed from the stresses of the exact solution (80) as  $t_j = \sigma_{ij} n_i$ , in which  $n_i$  represents the components of the unit outward normal to the edge of the plate.

The material properties of the plate are considered as Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^5$  and the Poisson's ratio  $\nu = 0.25$ .

To solve this problem, the plate was discretized with 9 nodes in the tangential direction and 15 nodes in the radial direction, distributed as shown in Figure 15. The generalized-strain formulation considered circular local integration domains with 8 collocation points per quadrant. MLS approximation was considered with the second order polynomial basis.

The computed displacements are shown in Figure 16, where it can be seen a very good agreement with the results of the exact solution. The stresses, computed at nodes, also agree very well with the results of the exact solution, as shown in Figure 17. With this simple discretization of 135 nodes, relative errors  $r_u = 9.2 \times 10^{-3}$  and  $r_\epsilon = 4.1 \times 10^{-3}$  are obtained which show the high accuracy of the present formulations.

## 8. CONCLUSIONS

New formulations of local meshfree methods, in two-dimensional elastostatics, are presented in this paper. The formulations are derived through a local weighted-residual formulation which leads to a local weak form that is the work theorem. In an arbitrary local region, the work theorem establishes an energy relationship between a statically-admissible stress field and an independent kinematically-admissible strain field. The independence of the two fields is the key feature that allows the generation of different meshless formulations. In this paper, two new formulations are derived in the set of kinematically-admissible strain fields.

In the first formulation, the kinematically-admissible strain field is defined as the one corresponding to an arbitrary rigid-body displacement. The consequence of making such choice in choosing this field is that the domain term of the work theorem is canceled out, leaving

only regular boundary terms which enforces a very important reduction of the computational effort.

On the other hand, the second formulation defines the kinematically-admissible strain field as a discrete generalized function, generated by a piecewise continuous displacement field which leads to an integration-free formulation and thus ultimates the reduction of the computational effort.

The moving least squares (MLS) approximation of the elastic field is used in this paper to implement both formulations, with rectangular influence domains and quartic-spline weight functions.

Since local regions are independent from each other, the modeling strategy allows the possibility of using simultaneously different formulations, conveniently defined, in the same problem.

Two problems were analyzed with these techniques, in order to assess the accuracy and efficiency of both formulations. The results obtained show that the use of the first order monomials basis in MLS approximation is adequate. When the support size is kept small, more accurate and less sensitive results are obtained. The combination of first order MLS, and a small support size, requires only a few neighboring nodes which leads to very fast computations. The generalized strain formulation led to remarkably-accurate results and fast computations. This formulation substantially reduces the computation effort to construct the stiffness matrix and hence is computationally efficient compared to the rigid-body displacement formulation. The results obtained in the analysis are in perfect agreement with analytical solutions. Hence, the accuracy and stability of the implementations described herein make this a reliable and robust formulation of local kinematic meshfree methods.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

As a Master student, the first author acknowledges the program *PECC – Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, University of Brasília.

## REFERENCES

1. Finalyson, B.A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, (1972).
2. Lucy, L.B., A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis, *Astronomical Journal*, 82(12), 1013-1024, (1977).
3. Gingold, R.A., Monaghan, J.J., Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 375-389, (1977).
4. Libersky, L.D., Petscheck, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R., Allahdadi, F.A., High Strain Lagrangian Hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, 109, 67-75, (1993).
5. Swegle, J.W., Hicks, D.L., Attaway, S.W., Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis, *Journal of Computational Physics*, 116(1), 123-134, (1995).
6. Kansa, E.J., Multiquadrics: A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics, *Computers Math. Applic.*, 19(8-9), 127-145, (1990).
7. Wu, Z., Hermite-Birkhoff Interpolation of Scattered Data by Radial Basis Functions, *Approx. Theory Appl.*, 8, 1-10, (1992).
8. Liu, X., Liu, G.R., Kang, T., Lam, K.Y., Radial Basis Point Interpolation Collocation Method For 2D Solid Problem, Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods, Edited by G. R. Liu, World Scientific, 35-40, (2002).
9. Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.Z., Taylor, R.L., A finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 3839-3867, (1996).
10. Jamil, M., Ng, E.Y.K., Evaluation of Meshless Radial Basis Collocation Method (RBCM) for Heterogeneous Conduction and Simulation of Temperature Inside the Biological Tissues, *International Journal of Thermal Sciences*, 68, 42-52, (2013).
11. Lee, S.H., Yoon, Y.C., Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, 22-48, (2004).
12. Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z., Lu, M.W., Least-Squares Collocation Meshless Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(9), 1089-1100, (2001).
13. Onate, E., Perazzo, F., Miquel, J., A Finite Point Method for Elasticity Problems, *Computers and Structures*, 79, 2151-2163, (2001).
14. Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F., Reproducing Kernel Particle Methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20, 1081-1106, (1995).
15. Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements, *Computational Mechanics*, 10, 307-318, (1992).
16. Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Element-free Galerkin Methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37, 229-256, (1994).
17. Duarte, C.A., Oden, J.T., Hp Cloudsan Hp Meshless Method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12, 673-705, (1996).
18. Melenk, J.M., Babuska, I., The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139, 289-314, (1996).
19. Strouboulis, T., Copps, K., Babuska, I., The Generalized Finite Element Method: an Example of its Implementation and Illustration of its Performance, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47(8), 1401-1417, (2000).
20. Atluri, S.N., Zhu, T., A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, 22(2), 117-127, (1998).
21. Atluri, S.N., Zhu, T., New Concepts in Meshless Methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47, 537-556, (2000).
22. Atluri, S.N., Shen, S., The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 3(1), 11-51, (2002).
23. Zhu, T., Zhang, J., Atluri, S.N., A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach, *Computational Mechanics*, 21, 223-235, (1998).
24. Liu, G.R., Gu, Y.T., A Local Point Interpolation Method for Stress Analysis of Two-Dimensional Solids, *Structural Engineering and Mechanics*, 11(2), 221-236, (2001).
25. Liu, G.R., Yan, L., Wang, J.G., Gu, Y.T., Point Interpolation Method Based on Local Residual Formulation Using Radial Basis Functions, *Structural Engineering and Mechanics*, 14, 713-732, (2002).
26. Fredholm, I., Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité, *Ark. Mat., Astr. Fysik*, 2, 1-8, (1906).
27. Fichera, G., Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems, Lecture Notes in Mathematics No. 8, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, (1965).

28. Kirchhoff, G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen elastischen Stabes, *J. Reine Angew. Math.*, 56, 285–313, (1859).
29. Brebbia, C.A., Variational Basis of Approximate Models in Continuum Mechanics, Proc. of the II International Conference on Variational Methods in Engineering, C.A. Brebbia and H. Tottenham (Editors), Southampton, 1985, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer Verlag, Berlin, (1985).
30. Sokolnikoff, I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, (1956).
31. Truesdell, C., Toupin, R., *Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Encyclopedia of Physics*, Volume 2, Springer, Berlin, (1960).
32. Liu, G.R., Yan, L., A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solid Mechanics, Proceedings of the conference Advances in Computational Engineering and Sciences, Los Angeles, August, 1374–1379, (2000).
33. Gelfand, I.M., Shilov, G.E., *Generalized Functions*, Volume I, Academic Press, New York, (1964).
34. Park, K.H., A BEM Formulation for Axisymmetric Elasticity with Arbitrary Body Force using Particular Integrals, *Computers and Structures*, 80, 2507–2514, (2002).

20

V. OLIVEIRA, A. PORTELA

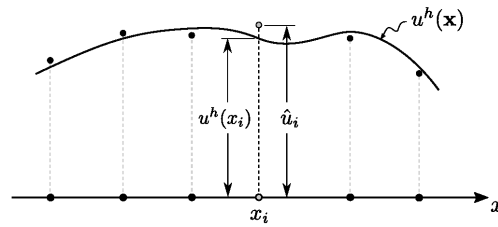


Figure 1: Schematic representation of the MLS approximation in one dimension.

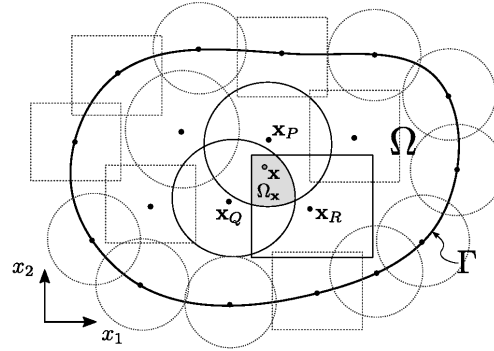


Figure 2: Representation of a meshless discretization of the global domain  $\Omega$ , with boundary  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , with a distribution of nodes and their respective local support;  $\Omega_x$  is the definition domain for the MLS approximation in a neighbourhood of a sampling point  $\mathbf{x}$ .

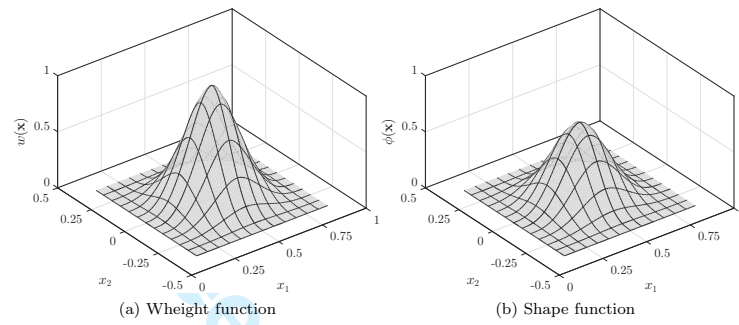


Figure 3: Typical weight function and shape function of the MLS approximation for a node at  $\mathbf{x} = [1/2 \ 0]^T$ .



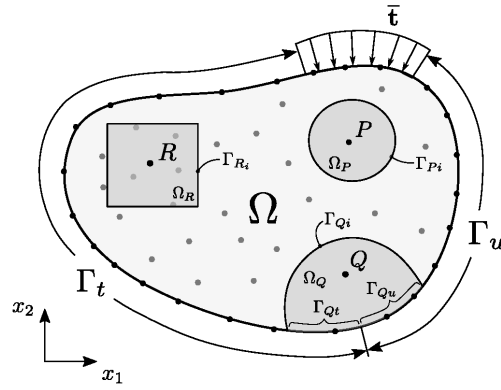


Figure 4: Meshless discretization of the global domain  $\Omega$ , with boundary  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ . Nodal points  $P$ ,  $Q$  and  $R$  have corresponding local domains  $\Omega_P$ ,  $\Omega_Q$  and  $\Omega_R$ ; the node  $Q$  has a local domain  $\Omega_Q$  that is the integration domain associated with the node  $Q$ , with boundary  $\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_t} \cup \Gamma_{Q_u}$ , in which  $\Gamma_{Q_i}$  is the interior local boundary.

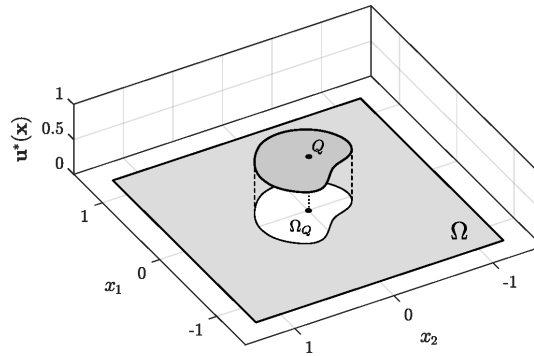


Figure 5: Schematic representation of the kinematically-admissible displacement field of the rigid-body displacement formulation (RBDF), for an arbitrary local domain associated with a field node  $Q$ .

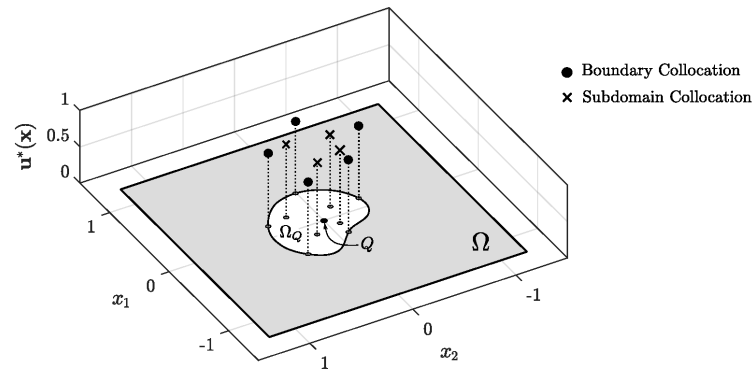


Figure 6: Schematic representation of the kinematically-admissible displacement field of the generalized strain formulation (GSF), for an arbitrary local subdomain associated with a field node  $Q$ .

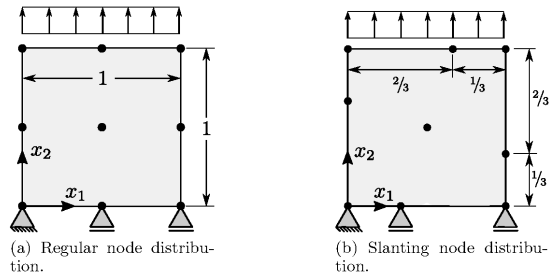


Figure 7: The patch test: a rectangular plate under a uniform normal traction discretized with two nodal configurations.

LOCAL MESHFREE METHODS

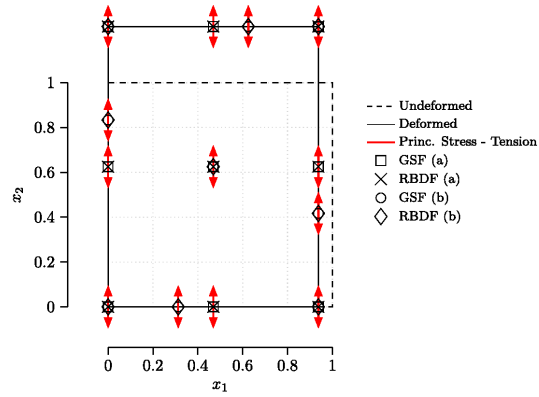


Figure 8: Results of the patch test: linear displacement on lateral edges and constant displacement on the top edge; constant normal stress, in the loading direction and no shear stress.

28

V. OLIVEIRA, A. PORTELA

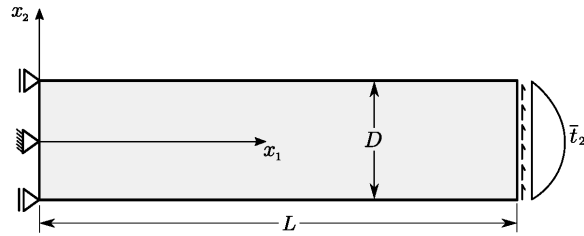


Figure 9: Timoshenko cantilever beam.

LOCAL MESHFREE METHODS

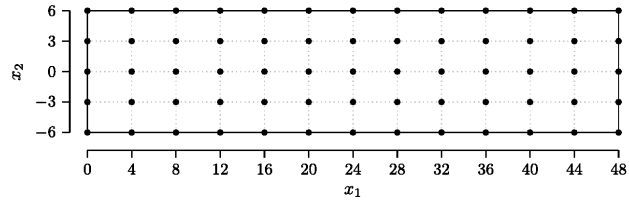


Figure 10: The nodal distribution of the cantilever beam.

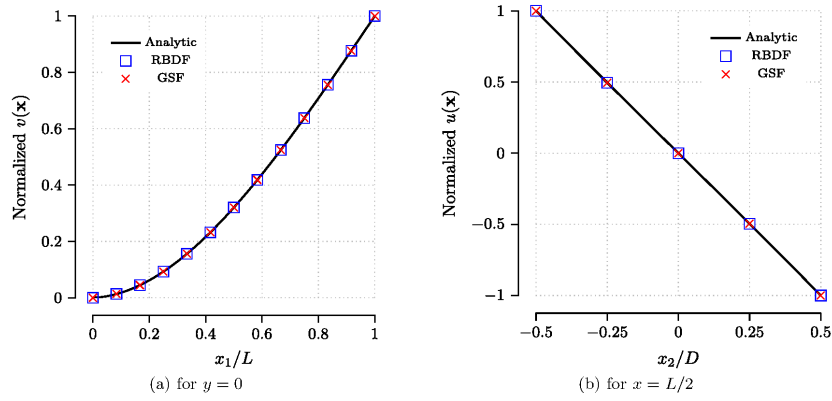


Figure 11: Normalized vertical displacement and horizontal displacement.



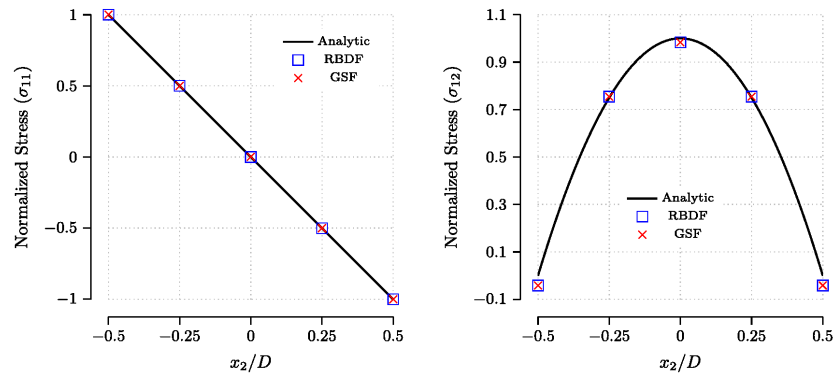


Figure 12: Stress distribution of the cantilever beam for  $x = L/2$  and  $y \in [-D/2, D/2]$ .

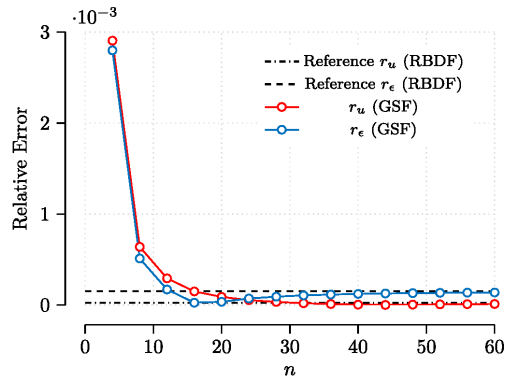


Figure 13: Convergence of the GSF for the cantilever beam, as a function of the number of collocation points.

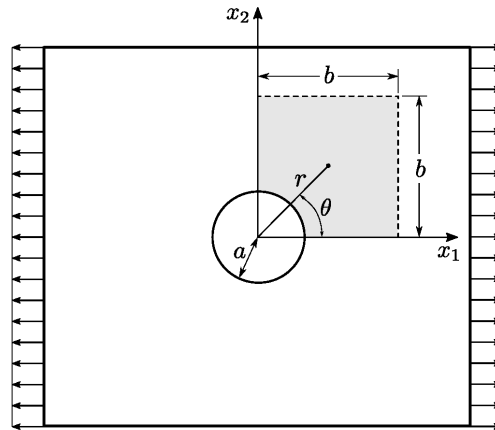


Figure 14: Plate with a hole.

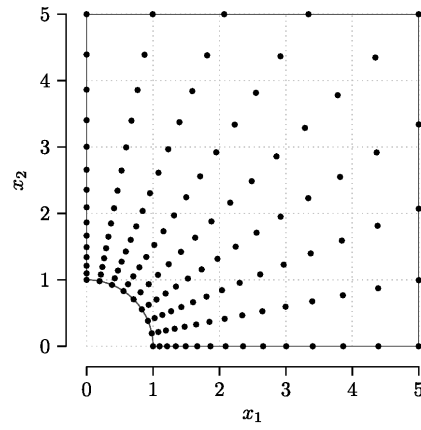


Figure 15: Discretization of the plate with a hole.

LOCAL MESHFREE METHODS

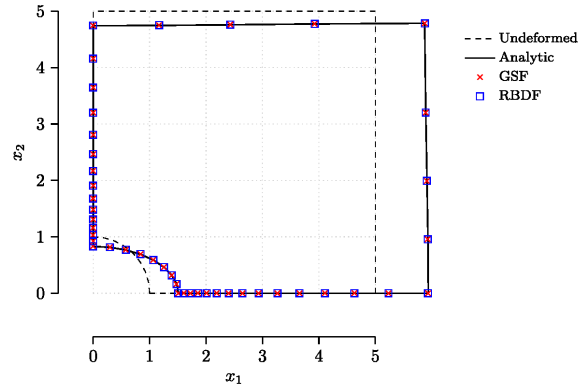


Figure 16: Boundary displacements of the plate with a hole; scaling factor =  $1.7 \times 10^4$ .

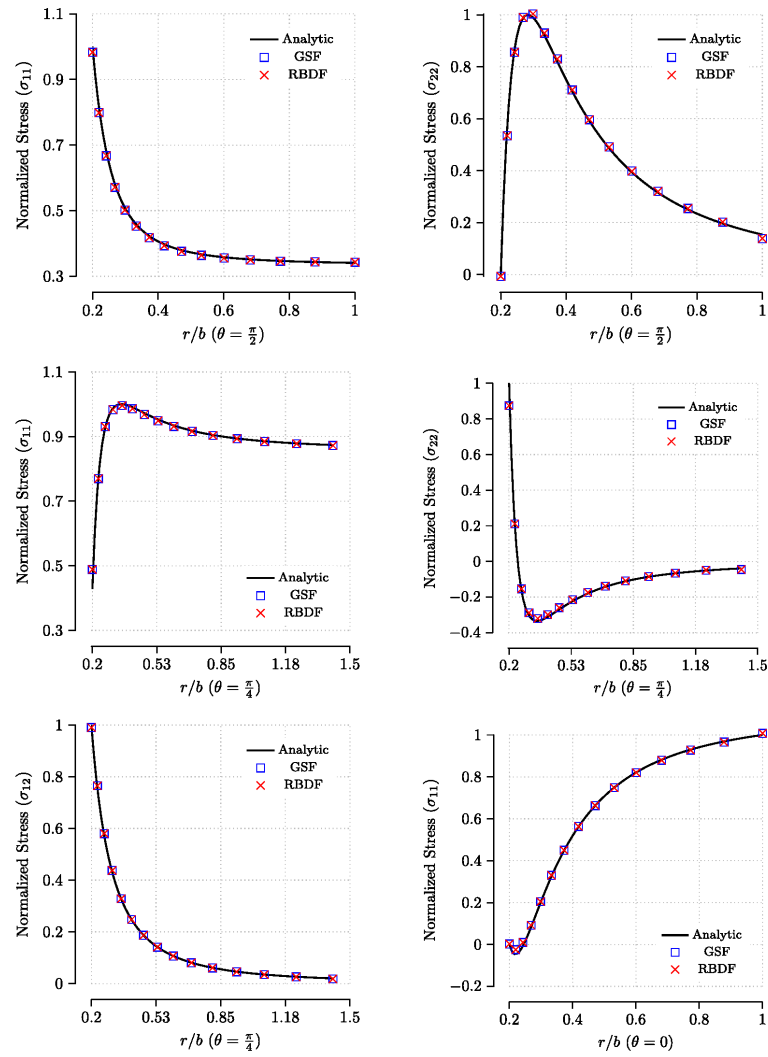


Figure 17: Stress distribution of the plate with circular hole for  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$