Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A Construção dos Números Reais

Murilo Morais Roriz

Brasília

10 de junho de 2014

Murilo Morais Roriz

A Construção dos Números Reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Nilton Moura Barroso Neto

Brasília

2014

"OBSERVAÇÃO: Página de aprovação do Trabalho, com as assinaturas dos Membros da Banca"

Murilo Morais Roriz graduou-se em Matemática pela Universidade de Brasília em 2003.

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família, meus amigos e minha namorada, em especial aos meus pais que abriram esse caminho por onde galgo meus passos.

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus pela minha vida, saúde e capacidade de concretizar esse trabalho. Agradeço aos meus familiares e minha namorada que sempre me deram todo o apoio e incentivo necessário para realizar com muita dedicação essa nova etapa dos meus estudos. Quero deixar aqui toda a minha gratidão ao meu orientador Nilton Moura Barroso Neto que com muita paciência, vontade e acima de tudo competência, dedicou vários dias de sua vida para a execução desse trabalho e comprovou que a Universidade de Brasília possui excelentes profissionais em sua equipe. Quero agradecer também a UnB por todo suporte dado para a realização desse curso e a CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de estudo.

Resumo

Nesse trabalho estudamos a evolução do conceito de número e os seguidos avanços dos conjuntos numéricos, evidenciando dois processos diferentes na construção dos números reais: os cortes de Dedekind e as expressões decimais. Em ambos, mostramos que o conjunto dos números reais possui as propriedades exigidas de um corpo ordenado completo. Posteriormente, realizamos uma pesquisa nas escolas publicas do DF, visando mostrar a carência no processo ensino-aprendizagem referente aos conjuntos numéricos, em especial ao conjunto dos números irracionais.

Palavras-chave: Números irracionais, Dedekind, Expressões decimais.

Abstract

In this work we study the evolution of the concept of numbers and the advances in the numerical sets that followed them, showing two different processes in the construction of the real numbers: the Dedekind's cuts and decimal expressions construction. In both ways, we show that the set of real numbers possess all the properties required for a complete ordered field. Subsequently, we made a survey in DF public schools, aiming to show the lack in the teaching-learning process related to numerical sets and, in particular, to the set of irrational numbers.

Keywords: Irrational numbers, Dedekind, Decimal expressions.

Sumário

Introdução

Ao longo de toda a história os números foram usados para contar, calcular e medir. Com o passar dos anos o homem começou a tentar entender melhor sobre suas propriedades.

Perto do ano 600 antes de Cristo, Pitágoras e seus discípulos começaram a estudar as propriedades dos números inteiros. Os pitagóricos acreditavam que tudo no universo estava relacionado com os números inteiros ou razões entre eles. Esta ideia foi profundamente abalada quando usaram o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. E assim surgiu um problema: as propriedades dos inteiros e das suas razões não bastavam para comparar a diagonal de um quadrado com seu lado.

Como eles apenas conheciam os números racionais foi com grande surpresa e choque que descobriram que havia segmentos de reta cuja medida não pode ser expressa por um número racional. As grandezas que não podiam ser representadas por números racionais foram chamadas de *alogon*, que quer dizer inexprimível. Os pitagóricos juravam nunca revelar a ninguém a descoberta destes números. Mas a notícia espalhou-se e a lenda diz que Pitágoras afogou o membro que divulgou ao mundo o segredo da existência dos estranhos números irracionais.

Desde o tempo dos pitagóricos até o século XIX, os matemáticos aceitavam a existência dos números irracionais, o seu conceito era percebido intuitivamente, mas a falta de uma estrutura mais precisa e rigorosa e a necessidade de recorrer a geometria para explicar conceitos relacionados aos números irracionais levaram vários matemáticos a pensarem numa maneira de elaborar uma teoria axiomática sobre estes números, com a preocupação de organizar os conceitos e dar mais clareza as propriedades dos números reais.

Podemos destacar, para a construção da definição dos números irracionais e consequentemente dos números reais, o caminho seguido por Dedekind, Weierstrass e Cantor que defenderam uma construção puramente aritmética dos números reais, baseado na noção de números naturais ou racionais, sem usar a geometria como guia. Eles mostraram que os números reais formam um corpo ordenado completo, permitindo as operações com estes números.

O principal objetivo deste trabalho é detalhar as ideias propostas por Dedekind, primeiro matemático a montar uma definição simples e clara para os números reais de onde decorrem todas as suas propriedades, e a construção dos números reais a partir de expressões decimais, na qual define-se um número irracional como um número cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Os alunos do ensino médio ou até mesmo do ensino superior possuem grande dificuldade de trabalhar e entender os números irracionais. A abordagem usada nas salas de aula é muito superficial e algumas vezes até errada. Para que o aluno consiga aprender e superar o bloqueio que está na passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais, o método usado pelo professor tem que ser mais completo e detalhado, procurando passar para seus alunos todas as particularidades destes números.

Nos livros didáticos a construção dos números reais é apresentada muito resumidamente, empobrecendo o processo de aprendizagem dos alunos. O professor do ensino médio precisa estar atento a este fato e procurar complementar a teoria e os exercícios trazidos pelos livros, para que seus alunos não percam explicações essenciais da construção dos números reais.

O método usado por Dedekind e a construção dos reais via expressões decimais são assuntos de fácil entendimento que podem e devem ser citados no ensino médio. A preocupação do professor em mostrar essas ideias deverá beneficiar muito no processo de aprendizagem dos seus alunos. Com o conhecimento, passo a passo, da criação dos números naturais até a estrutura dos números reais os alunos conseguem perceber melhor a natureza de todos os números.

Antes de iniciarmos gostaríamos de dar uma palavra ao leitor sobre a organização do presente trabalho.

No capítulo um mencionamos as principais características dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, bem como as propriedades de um corpo ordenado completo. A abordagem adotada em relação aos números, apesar de informal em alguns momentos, será feita do princípio; partimos dos axiomas de Peano acerca dos números naturas e seguimos até a incompletude dos números racionais.

No capítulo dois é abordado a construção dos números reais por Dedekind. A partir da ideia dos cortes de Dedekind construímos um corpo ordenado completo que será chamado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Todas as propriedades que conhecemos sobre esses números podem ser provadas a partir dessa teoria.

No terceiro capítulo apresentamos uma exposição abrangente da construção dos números reais via expressões decimais. Esse método tem a seu favor o fato de ser uma linguagem de fácil acesso ao aluno do ensino médio, fato que auxilia bastante o entendimento do assunto.

Finalmente, no último capítulo sugerimos um plano de aula para os alunos do ensino médio. A ideia é que o aluno tenha melhores condições de construir um conhecimento adequado sobre os números reais. Neste mesmo capítulo comentamos uma pesquisa de campo que foi realizada a fim de comprovar a eficácia desse método e exibimos uma comparação dos dados apresentados por alunos que não tiveram a aula sugerida. A pesquisa realizada faz uso de um questionário, com perguntas simples mas de muita relevância, que foi respondido pelos alunos, em sala de aula, antes e depois da execução deste plano de aula.

Informamos ainda que as equações deste trabalho estão numeradas de acordo com o capítulo, seção e posição que ocupam na sua seção. Assim, por exemplo, a equação de número (2.3.5) é uma equação do capítulo 2, da seção 3 e é a quinta equação apresentada nesta seção.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

Todos os números que conhecemos podem ser divididos em grupos segundo características comuns entre eles, isto é, os números estão agrupados em conjuntos – os conjuntos numéricos.

O primeiro desses conjunto que surgiu foi o conjunto dos números naturais. O advento dos números naturais foi, sem dúvida, uma das maiores invenções da história da humanidade. Primeiro conjunto utilizado, alguns historiadores afirmam que esses números surgiram pela necessidade do homem primitivo de fazer a contagem dos elementos da natureza. Daí o nome números naturais.

A definição intuitiva de contagem pode ser resumida com base no senso comum. No entanto, para a Matemática, é necessária uma rigorosa teoria axiomática dos números naturais porque isso nos permite organizar os conceitos e propriedades relevantes desses números numa estrutura lógica bem definida. Somente assim poderemos estudar mais profundamente as suas propriedades

Deve-se ao matemático italiano Giussepe Peano (1858-1932) a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os axiomas de Peano. Noutras palavras, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui quatro propriedades fundamentais, das quais resultam, como consequências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números.

1.1 Axiomas de Peano

A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ está na palavra sucessor. O termo primitivo sucessor não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades ficam regidos pelos axiomas de Peano, assim enumerados:

(P1) Todo número natural tem um único sucessor;

(P2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

(P3) Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

(P4) Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Os Axiomas de Peano são uma pequena coleção de fatos básicos e intuitivos sobre os números naturais. Apesar de sua simplicidade eles fundamentam uma teoria satisfatória dos números naturais porque podemos definir ou deduzir a partir deles todos os conceitos e demais propriedades que conhecemos acerca desses números, ou seja, tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas.

Usando a notação $s(n)$ para o sucessor do número natural n, teremos então $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, etc. Assim, por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1. Neste caso, a sequência dos números naturais pode ser indicada assim:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow s(n) \longrightarrow \cdots$$

As flechas ligam cada número ao seu sucessor.

Nenhuma flecha aponta para 1, pois este número não é sucessor de nenhum outro.

O último axioma de Peano é conhecido como **Princípio da Indução**. Vamos provar que o Princípio da indução é equivalente ao seginte resultado

***Teorema* 1.1** (Princípio da Indução)**.** *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e se, do fato de um número natural n gozar de P puder-se concluir que $s(n)$ goza da propriedade P, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.*

Intuitivamente, o teorema acima afirma que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando o seu sucessor $s(1)$, a seguir o sucessor desse e assim por diante. Assim, se uma propriedade P vale para o número 1 e pelo fato de valer para esse número, pode-se verificar que também vale para o número 2, seguindo esse mesmo raciocínio, podemos concluir que essa propriedade valerá para todos os números naturais.

Demonstração (Princípio da Indução)**.** Seja

$$X = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ goza da propriedade } P\}.$$

e $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Por hipótese

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(s(n))$, onde $s(n)$ é o sucessor de n.

Assim, $1 \in X$ em virtude de i) e $n \in X$ implica que $s(n) \in X$ em virtude de ii). Logo, pelo axioma de Peano P4, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

□

Usando o Princípio da Indução, podemos definir no conjunto dos números naturais duas operações fundamentais: a adição, que associa a cada par de números (m, n) sua soma $m + n$, e a multiplicação, que faz corresponder ao par (m, n) seu produto $m.n$.

A soma $m + n$ é o número natural que se obtém a partir de m aplicando-se n repetições seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, o sucessor de um número natural m é designado por $m + 1$, $m + 2$ é o sucessor do sucessor de m e assim por diante.

Quanto ao produto, põe-se $m.1 = m$ por definição e, quando n é diferente de 1, $m.n$ é a soma de n parcelas iguais a m.

Usando o axioma da indução, pode-se mostrar facilmente que a soma e a multiplicação estão definidas para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Além de ser usado para definir as operações de soma e produto em $\mathbb{N}$, o Princípio da Indução pode ser utilizado como técnica de demonstração de propriedades envolvendo esses números. Esse princípio está presente em vários casos em que dizemos "e assim por diante", "e assim sucessivamente" ou "etc.".

Vamos ver um exemplo de demonstração usando o Princípio da Indução.

Exemplo. Considere o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2\}$, ou seja $A \subset \mathbb{N}$ é o conjunto de todos os números naturais tais que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \tag{1.1.1}$$

Observe que $1 \in A$, pois $1 = 1^2$. Agora, suponha que $n \in \mathbb{N}$ pertence ao conjunto. Vamos provar que $n+1 \in A$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} 1+3+5+...+(2n-1)+[2(n+1)-1] &= \overbrace{1+3+5+...+(2n-1)}^{n^2}+2n+2-1 \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

Isto significa que se $n \in A$, então $n+1 \in A$. Pelo Princípio da Indução temos que $A = \mathbb{N}$, ou seja, a propriedade vale para todos os números naturais.

Além das duas operações fundamentais mencionadas, podemos definir uma **relação de ordem** em $\mathbb{N}$ da seguinte maneira: dados dois números naturais m e n escreve-se $m < n$ quando existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + l$. Diz-se então que m é menor do que n. Dados m, $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, vale uma, e somente uma das três alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $m > n$.

Uma importante propriedade dos números naturais é o chamado **Princípio da Boa Ordenação**, abaixo enunciado.

***Teorema* 1.2** (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ chamaremos de I_n o conjunto dos números naturais $\leq n$. Se $1 \in A$ então 1 será o menor elemento de A. Se, porém, 1 não pertence a A, então consideremos o conjunto X dos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Com $I_1 = 1 \subset \mathbb{N} - A$, vemos que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, concluímos que $X \neq \mathbb{N}$. Logo deve existir $n \in X$ tal que $n+1$ não pertence a X. Então $I_n = \{1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N} - A$ mas $n_0 = n + 1 \in A$. Portanto n_0 é o menor elemento de A.
$\square$

Pode-se provar que o Princípio da Boa Ordenação é equivalente ao Princípio da Indução. A Boa Ordenação pode, muitas vezes, substituir com vantagens a indução como método de provas de resultados referentes a números naturais.

Vejamos um exemplo de demonstração usando o Princípio da Boa Ordenação.

Exemplo. Lembremos que um número natural p chama-se primo quando não se pode ser expresso como produto $p = m.n$ de dois números naturais, a menos que um deles seja igual a 1 (e o outro igual a p); isto equivale a dizer que os fatores m, n não podem ser ambos menores que p. Um resultado fundamental da Aritmética diz que todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos. Provaremos isto a partir do Princípio da Boa Ordenação. Usaremos a linguagem de conjunto.

Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto $m.n$ pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Queremos provar que Y é um conjunto vazio. Isto será feito por redução o absurdo. Com efeito, se Y não fosse vazio, haveria um menor elemento $a \in Y$. Então todos os números menores do que a pertenceriam a X. Como a não é primo, temos $a = m.n$, com $m < a$ e $n < a$, logo $m \in X$ e $n \in X$. Sendo assim, $m.n \in X$. Mas $m.n = a$, o que daria $a \in X$, uma contradição. Segue–se que Y é um conjunto vazio.

1.2 Corpo Ordenado Completo

***Definição* 1.1.** *Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas do corpo. Os axiomas do corpo são os seguintes:*

Axiomas da adição:

(1) Associatividade – quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$

(2) Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.

(3) Elemento neutro – existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento 0 chama-se zero.

(4) Simétrico – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$

Axiomas da multiplicação:

(5) Associatividade – dados quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$

(6) Comutatividade – sejam quais forem $x, y \in K$, vale $x.y = y.x$

(7) *Elemento neutro – existe* $1 \in K$ *tal que* $1 \neq 0$ *e* $x.1 = x$*, qualquer que seja* $x \in K$*. O elemento* 1 *chama-se um.*

(8) *Inverso multiplicativo – todo* $x \neq 0 \in K$ *possui inverso* x^{-1}*, tal que* $x.x^{-1} = 1$

Axioma da distributividade:

(9) *Dados* x*,* y*,* z *quaisquer em* K*, tem-se* $x.(y + z) = x.y + x.z$

Existem varias propriedades usuais dos números reais que são provadas a partir das propriedades (1)-(9). Por exemplo

Exemplo (As regras dos sinais)**.** $x.(-y) = (-x).y = -(x.y)$ e $(-x).(-y) = x.y$. Com efeito, $x.(-y) + x.y = x.(-y + y) = x.0 = 0$. Somando $-(x.y)$ a ambos os membros da igualdade $x.(-y) + x.y = 0$ vem $x.(-y) = -(x.y)$. Analogamente, $(-x).y = -(x.y)$. Logo $(-x).(-y) = -[x.(-y)] = -[-(x.y)] = x.y$.

***Definição* 1.2.** *Um corpo ordenado é um corpo* K*, no qual existe um subconjunto* $P \subset K$*, chamado o conjunto dos elementos positivos de* K*, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja,* $x, y \in P$ *implica que* $x + y \in P$ *e* $x.y \in P$*;*

(2) *Dado* $x \in K$*, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou* $x = 0$*, ou* $x \in P$ *ou* $-x \in P$*.*

Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se negativos.

Num corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a.a \in P$. No segundo caso $a^2 = (-a).(-a) \in P$. Em particular, num corpo ordenado $1 = 1.1$ é sempre positivo. Segue-se que $-1 \in -P$. Em particular, num corpo ordenado, -1 não é quadrado de elemento algum.

Dizemos que $x < y$ se $y - x \in P$. Dizemos ainda que $x > y$ se $y < x$. A relação de ordem $x < y$ num corpo ordenado K goza das propriedades seguintes:

(1) *Transitividade* – se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

(2) *Tricotomia* – dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas seguintes: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;

(3) *Monotonicidade da adição* – se $x < y$ então, para todo $z \in K$, tem-se $x+z < y+z$;

(4) *Monotonicidade da multiplicação* – se $x < y$ então, para todo z >0, tem-se $xz < yz$. Se, porém, for $z < 0$, então $x < y$ implica $xz > yz$.

Com as definições de corpo e corpo ordenado pode-se verificar importantes características dos conjuntos numéricos nos corpos ordenados.

Num corpo ordenado K, como $1 > 0$, temos $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 <$ ... e o subconjunto de K formado por estes elementos é, portanto infinito. Mais precisamente, $1 < 2 < 3 <$ ..., podemos considerar o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, naturalmente imerso em K.

Os simétricos $-n$ dos elementos $n \in N$ e o zero $(0 \in K)$ são identificados com o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset K$

Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, existe o inverso $n^{-1} \in K$. Podemos, portanto, nos referir ao conjunto formado por todos os elementos $m.n^{-1} = \frac{m}{n} \in K$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Este conjunto é um subcorpo de K (isto é, as operações de K, quando aplicadas a elementos deste conjunto são elementos desse conjunto). Trata-se do menor subcorpo de K. Com efeito, todo subcorpo deve conter pelo menos 0 e 1; por adições sucessivas de 1, todo subcorpo de K deve conter $\mathbb{N}$; por tomadas de simétricos, deve conter $\mathbb{Z}$ e, por divisões em $\mathbb{Z}$, deve conter este conjunto das frações $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Evidentemente, este menor subcorpo de K identifica-se ao corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Concluímos assim que, dado um corpo ordenado K; podemos considerar, de modo natural, as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$. Para mais informações, o leitor interessado pode consultar [2]

Para compreendermos a noção de corpo ordenado completo precisamos de mais algumas definições.

***Definição* 1.3.** *Seja S um subconjunto de um conjunto K.*

(i) Um elemento $m \in K$ é dito cota superior de S se $x \leq m$, para todo $x \in S$;

(ii) Um elemento $n \in K$ é dito cota inferior de S se: $n \leq x$, para todo $x \in S$;

(iii) Um elemento $s \in K$ é dito supremo de S se for a menor das cotas superiores, ou seja, $x \leq s$, para todo $x \in S$ e $x \leqslant s'$, para todo $x \in S$ implica que $s \leq s'$.

(iv) Um elemento $i \in K$ é dito ínfimo de S se for a maior das cotas inferiores, ou seja $i \leq x$, para todo $x \in S$ e $i' \leq x$, para todo $x \in S$ implica que $i' \leq i$.

***Definição* 1.4.** *Um corpo ordenado K chama-se completo quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.*

É fácil ver que se vale a propriedade acima, então todo conjunto limitado inferiormente possui ínfimo. De fato, suponha que vale a propriedade acima e seja $n \in K$ uma cota inferior de $S \subset \mathbb{Q}$. Neste caso $-n$ é uma cota superior do subconjunto $-S = \{-x : x \in S\}$. Isto significa que $-S$ é limitado superiormente, logo possui supremo $s \in K$. É imediato verificar que $-s$ é o ínfimo de S.

Sabemos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. Veremos a seguir que esse corpo não é completo, ou seja, existem subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que são limitados superiormente mas não possuem supremo.

***Lema* 1.3.** *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que se tenha $(\frac{m}{n})^2 = 2$, ou seja $m^2 = 2n^2$, com m e n inteiros. O fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição de m^2 e de n^2 em fatores primos. Logo m^2 contém um número par de fatores iguais a 2 enquanto $2n^2$contém um número ímpar desses fatores. Assim sendo, não se pode ter $m^2 = 2n^2$. $\square$

***Teorema* 1.4.** *Em $\mathbb{Q}$ existem subconjuntos limitados superiormente que não possuem supremo e conjuntos limitados inferiormente que não possuem ínfimo.*

Demonstração. Considere os conjuntos

$$X = \left\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 < 2\right\},$$

$$Y = \left\{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \quad \text{e} \quad y^2 > 2\right\}.$$

Como $x > 2$ implica que $x^2 > 4$ e x não pertence a X, concluímos que $X \subset [0, 2]$, logo X é um conjunto limitado de números racionais. Mostraremos agora que não existe $\sup X$ e nem $\inf Y$ em $\mathbb{Q}$. É claro que $\inf X = 0$, pois 0 é o menor elemento de X. Vamos mostrar que o conjunto X não possui elemento máximo. Com efeito, dado $x \in X$, tomamos um número racional $r < 1$ tal que $0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1}$. Afirmamos que $x + r$ ainda pertence a X. Com efeito, de $r < 1$ segue–se $r^2 < r$. Da outra desigualdade que r satisfaz segue–se $r(2x + 1) < 2 - x^2$. Por conseguinte, $(x + r)^2 =$

$x^2+2rx+r^2 < x^2+2rx+r = x^2+r(2x+1) < x^2+2-x^2 = 2$. Assim, dado qualquer $x \in X$, existe um número maior $x+r \in X$. Agora vamos mostrar que o conjunto Y não possui elemento mínimo. De fato, dado qualquer $y \in Y$, temos $y > 0$ e $y^2 > 2$. Logo podemos obter um número racional r tal que $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$. Então $2ry < y^2-2$ e daí $(y-r)^2 = y^2-2ry+r^2 > y^2-2ry > 2$. Note–se também que $r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}$, donde $r < y$, isto é $y-r$ é positivo. Assim, dado $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $y-r \in Y, y-r < y$. $\square$

O resultado acima prova que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado mas não é completo. Apesar disso, os matemáticos sabiam que a propriedade de completeza de um corpo ordenado é fundamental para análise matemática. Mesmo fatos inteiramente simples e intuitivos ficariam sem uma demonstração formal se prescindíssemos desse conceito.

Por exemplo, sabemos que um dos axiomas da geometria plana diz que uma reta divide o plano em duas regiões disjuntas. Dada uma curva nesse plano com extremidades em regiões distintas, parece claro que a curva deverá tocar a reta em pelo menos um ponto. Não podemos demonstrar rigorosamente esse fato sem o conceito de corpo ordenado completo. Fazia-se necessário, então, provar que existe um corpo ordenado completo. O alemão Richard Dedekind foi o primeiro matemático a lograr êxito nessa tarefa.

Capítulo 2

Construção dos Números Reais via Cortes de Dedekind

O objetivo desse capítulo é construir, a partir do conjunto dos números racionais, um corpo ordenado completo que será chamado de conjunto dos números reais. O alemão Richard Dedekind foi o primeiro matemático a realizar uma construção sistemática e precisa dos números reais. O método utilizado por ele é hoje conhecido como cortes de Dedekind.

2.1 Passos seguidos por Dedekind

Dedekind, nasceu em Braunschweing, Alemanha, no ano de 1831. Desde 1858, quando dava aula de cálculo, Dedekind concentrava suas ideias no problema dos números irracionais. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Ele se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais.

Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta – a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado. Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só, ponto que realiza essa divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes. Foi a partir dessa ideia e com a introdução do importante conceito de corte que Dedekind conseguiu resolver essa questão.

Ele observou que os teoremas fundamentais sobre limites podem ser provados rigorosamente sem apelo à geometria. Foi a geometria que iniciou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas no fim foi excluída da definição aritmética formal. A noção de corte de Dedekind, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

De acordo com Dedekind, os novos conjuntos surgem a partir das necessidades de suprir as exigências do ser humano. A partir da observação das imperfeições ou limitações existentes nas operações de subtração e divisão dos números inteiros positivos, surgiu a necessidade de criar os números negativos e os fracionários. No mesmo sentido Dedekind pretende construir os números irracionais, como uma extensão dos racionais.

O objetivo da teoria dos números reais é justamente completar o conjunto dos números racionais criando um sistema contínuo de números.

A comparação dos números racionais com os pontos de uma reta é uma relação fundamental para a teoria dos números irracionais de Dedekind. É notado que todo número racional corresponde a um único ponto da reta, mas nem todo ponto da reta possui um número correspondente no conjunto dos racionais. A esse fato referia-se Dedekind quando afirma que "a reta é infinitamente mais rica em elementos do que o domínio $\mathbb{Q}$ dos números racionais" [4], pág. 9.

Observando que os números racionais não completam todos os fenômenos da linha reta, Dedekind considera absolutamente necessária a criação de novos números. Dedekind então estabeleceu algumas propriedades dos números racionais.

(1) Se $a > b$, e $b > c$ então $a > c$. Sempre que a e c são dois números diferentes (ou desiguais), e o número b seja maior do que um deles e menor do que o outro, podemos dizer então que b está entre os dois números a e c;

(2) Se a e c forem diferentes, então existem infinitos números racionais entre a e c. De fato, basta escolher $m = \frac{c+a}{2}$, em seguida $m' = \frac{m+a}{2}$ e assim sucessivamente.

(3) Se a é um número qualquer, então todos os números do conjunto $\mathbb{Q}$ caem em duas classes, A_1 e A_2, cada uma delas contendo infinitos elementos; a primeira classe

A_1 compreende todos os números a_1 que são menores que a, a segunda classe A_2 compreende todos os números a_2 que são maiores que a; o próprio número a poderá pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo respectivamente o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda. Em qualquer um dos casos a separação do conjunto $\mathbb{Q}$ nas duas classes A_1 e A_2 é tal que todo o número da primeira classe A_1 é menor do que todo o número da segunda classe A_2.

Como vimos, essas propriedades refletem-se no fato, já mencionado, de que o conjunto $\mathbb{Q}$ forma um corpo ordenado.

Podemos relacionar os números racionais aos pontos de uma reta l, onde se distinguem por direita e esquerda as duas posições opostas de qualquer ponto de l. Para isso tomamos um ponto O da reta que será chamado de origem e um segmento que servirá como unidade de comprimento. Associamos ao ponto P dessa reta o número inteiro n ou $-n$, conforme o comprimento do segmento OP seja n vezes o comprimento da unidade e P esteja à direita ou à esquerda de O, respectivamente. Se for necessário, dividimos nossa unidade em subunidades para medir o comprimento de OP. Se nossa unidade for dividida em m subunidades e o segmento OP em n dessas subunidades, então associamos ao ponto P o número racional $\frac{n}{m}$. Dessa forma, para qualquer número racional x poderá ser construído o correspondente comprimento na reta, com os seus extremos na origem O e num determinado ponto P da reta, o qual será denominado de ponto correspondente ao número racional x.

A dois números racionais x e y, correspondem, respectivamente, dois pontos P e M na reta e se $x > y$, então P está situado à direita de M. Com isso, as propriedades enunciadas para os números racionais traduzem-se em propriedades dos pontos de uma reta.

Dedekind enuncia, neste sentido, as mesmas propriedades citadas anteriormente para os números racionais, referindo-se agora aos pontos dessa reta.

(1) Se P está situado à direita de Q, e Q à direita de R, então P está à direita de R; e dizemos que Q está situado entre os pontos P e R;

(2) Se P e R são dois pontos distintos, então existe uma infinidade de pontos situados entre P e R;

(3) Se P é um ponto qualquer de l, então todos os pontos de l pertencem a duas classes, P_1 e P_2 cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe P_1

contém todos os pontos p_1, que estão à esquerda de P, e a segunda classe P_2 contém todos os pontos p_2, à direita de P; o próprio ponto P poderá pertencer à primeira ou à segunda classe. Em qualquer um dos casos a separação da reta l nas duas classes ou porções P_1 e P_2 é tal que todo o ponto da primeira classe P_1 está á esquerda de todo o ponto da segunda classe P_2.

2.2 Incompletude dos Números Racionais

Vimos na seção anterior que podemos representar os números racionais geometricamente como os pontos de uma reta. Pelo teorema de Pitágoras sabemos que a diagonal de um quadrado de lado unitário é igual a $\sqrt{2}$. Usando um compasso (um dos axiomas da geometria plana), podemos marcar nessa reta um ponto cujo comprimento igual ao dessa diagonal. Isso significa que podemos definir um ponto P sobre a reta dada que não representa um número racional (veja o lema 1.3).

A comparação acima descrita do conjunto $\mathbb{Q}$ com os pontos de uma reta, levou-nos a reconhecer a existência de uma certa incompletude de $\mathbb{Q}$. No entanto, estamos a pressupor a continuidade da reta que é explicada por Dedekind, da seguinte forma:

"...nós atribuímos à recta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? Tudo deve depender da resposta a esta questão, e somente através dela obteremos uma base científica para a investigação de todos os domínios contínuos..."

Dedekind verificou que todo ponto da reta reparte a mesma em duas semi-retas, sendo que todos os ponto de uma delas está à esquerda de todos os pontos da outra.

"Se todos os pontos da linha recta pertencerem a duas classes tal que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda classe, então existe um e um só ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, separando a linha recta em duas porções", conforme [4], pág. 11

É importante lembrar que Dedekind assumiu este princípio como um axioma, o axioma que confere à reta a sua continuidade. Ele não notou, ou pelo menos não comentou, que se pode demonstrar a unicidade do ponto determinado pelo princípio. Esta demonstração é feita por redução ao absurdo, com base nas propriedades (ii) e (iii), citadas anteriormente.

De fato, suponhamos que P e Q são dois pontos distintos que produzem a divisão da reta em duas classes L_1 e L_2, de modo que todo o ponto de L_1 está à esquerda de todo o ponto de L_2, e consideremos, sem perda de generalidade, que P está à esquerda de Q. Pela propriedade (ii), existem infinitos pontos R compreendidos entre P e Q, e como cada um destes pontos R está situado à direita de P e á esquerda de Q, podemos afirmar, usando a propriedade (iii), que R é, respectivamente, um ponto de L_2 e de L_1. Desta forma, obtemos um absurdo já que, pelo princípio da continuidade da reta, a construção das classes L_1 e L_2 é feita supondo que todo o ponto de L_1 se situa à esquerda de todo o ponto de L_2.

2.3 Cortes de Dedekind

Após verificar a incompletude dos números racionais e explicar a continuidade de uma linha reta, Dedeking pretende completar o domínio dos racionais. Será a ideia de corte que resolverá essa questão.

***Definição* 2.1.** *Um corte de Dedekind é uma separação qualquer do conjunto dos números racionais em duas classes não-vazias A_1 e A_2, tal que todo o número de A_1 é menor do que todo o número de A_2 e A_1 não possui um maior elemento. Um corte desse tipo, será representado por (A_1, A_2).*

Dizemos que um corte é gerado por um número racional se existe um número racional que é o menor elemento da classe A_2.

***Teorema* 2.1.** *Existem cortes que não são produzidos por um número racional.*

Demonstração. Seja x um inteiro positivo, diferente de um quadrado perfeito. Neste caso, existe um inteiro positivo k tal que

$$k^2 < x < (k+1)^2 \tag{2.3.1}$$

Se considerarmos a classe A_2 constituída por todos os números racionais positivos cujo quadrado é maior do que x e a classe A_1, constituída por todos os outros números racionais, obtemos o corte (A_1, A_2). Isto significa que todo o número $a_1 \in A_1$ é menor do que todo o número $a_2 \in A_2$.

De fato, se $a_1 = 0$ ou é negativo, então é obvio que a_1 é o menor do que todo o número $a_2 \in A_2$, pois, por definição, este último é positivo. Por outro lado, se a_1 é positivo e $a_1^2 \leq x$ então temos que a_1 é menor do que qualquer número positivo $a_2 \in A_2$, cujo quadrado é maior do que x.

Resta mostrar que (A_1, A_2) não é gerado por nenhum número racional. Inicialmente, mostremos que não existe um número racional cujo quadrado é igual a x.

Suponhamos, momentaneamente, que exista um número racional positivo $q = \frac{t}{u}$ tal que $q^2 = x$. Neste caso temos que $t^2 - xu^2 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que u é o menor número inteiro positivo que possui a propriedade que o seu quadrado multiplicado por x é o quadrado de um outro inteiro. Por (2.3.1) temos que $k^2u^2 < xu^2 < (k+1)^2u^2$, de onde obtemos que

$$ku < t < (k+1)u$$

ou seja, o número $u' = t - ku$ é um inteiro positivo menor do que u.

Se considerarmos $t' = xu - kt$, t' também é um número inteiro positivo e temos que

$$t'^2 - xu'^2 = (k^2 - x)(t^2 - xu^2) = 0, \tag{2.3.2}$$

o que é uma contradição à suposição feita a u

Obtivemos então, números t' e u', com $u' < u$ tais que $x = (\frac{t}{u})^2$, o que é um absurdo, pois o quadrado de qualquer número racional é menor do que x, ou maior do que x, mas nunca igual a x.

Vamos verificar que não existe máximo na classe A_1 e não existe mínimo na classe A_2. Para isso, considere o número

$$y = \frac{z(z^2 + 3x)}{3z^2 + x}, \tag{2.3.3}$$

onde $z \in \mathbb{Q}$ é tomado arbitrariamente. Temos que

$$y - z = \frac{2z(x - z^2)}{3z^2 + x}, \tag{2.3.4}$$

$$y^2 - x = \frac{(z^2 - x)^3}{(3z^2 + x)^2}. \tag{2.3.5}$$

Supondo z um elemento positivo de A_1, então $z^2 < x$ e daqui $y > z$ e $y^2 < x$. Portanto, y pertence a classe A_1, logo A_1 não admite máximo. Se supomos que z é um elemento da classe A_2, então $z^2 > x$, donde $y < z, y > 0$ e $y^2 > x$. Logo y pertence a A_2. Desta forma, concluímos que A_2 não admite elemento mínimo.

Isso significa que esse corte não é produzido por um número racional. $\square$

Definição 2.2. *O conjunto de todos os cortes de Dedekind é chamado de conjunto dos números reais e denotado por* $\mathbb{R}$.

Sempre que um corte (A_1, A_2) for tal que A_2 não possui elemento mínimo diremos que esse corte é um número irracional. Por exemplo, o número real $\alpha = (A_1, A_2)$, onde

$$A_1 = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \quad \text{ou} \quad x^2 < 2\right\} \quad \text{e} \quad A_2 = \mathbb{Q} - A_1,$$

é tal que A_2 não possui um menor elemento (veja a demonstração do teorema 1.4). Ele será, no final de tudo, o número $\sqrt{2}$.

2.4 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Como os números reais foram definidos a partir da ideia dos cortes de Dedekind, basta estudar a relação entre dois cortes quaisquer e verificar a relação de ordem entre eles para mostrar que $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado.

***Definição* 2.3.** *Dizemos que os cortes $\alpha = (A_1, A_2)$ e $\beta = (B_1, B_2)$ são iguais se $A_1 = B_1$. Caso contrário, dizemos que os cortes são diferentes. Dizemos ainda que $\alpha < \beta$, se $A_1 \subsetneq B_1$ e que $\alpha > \beta$ se $\beta < \alpha$.*

As seguintes propriedades são imediatas da definição:

(i) Se $\alpha > \beta$, e $\beta > \gamma$, então temos $\alpha > \gamma$. Diremos que o número β está entre α e γ;

(ii) Se α e γ são dois números distintos, então existem infinitos números distintos β que estão entre α e γ;

(iii) Dados os números reais α e β temos que $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$ ou $\alpha < \beta$. Portanto, se α é um número qualquer então todos os elementos de $\mathbb{R}$ pertencem a duas classes U_1 e U_2 cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe U_1 compreende todos os números α_1, menores que α, a segunda U_2 compreende todos os números α_2 maiores ou iguais do que α. Todo o número da primeira classe U_1 é menor que todo número da segunda classe U_2 e dizemos que esta separação é produzida pelo número α.

Para a construção dos números reais ficar completa precisamos enunciar e provar a característica que diferencia o conjunto dos números reais dos outros conjuntos numéricos que é o fato de que $\mathbb{R}$ é completo.

***Teorema* 2.2.** *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e limitado superiormente. Então A possui supremo.*

Demonstração. Um elemento típico de A será denotado por $\alpha = (A_1^\alpha, A_2^\alpha)$. Defina

$$B_1 = \{x \in A_1^\alpha : \alpha \in A\} = \bigcup_{\alpha \in A} A_1^\alpha \quad \text{e} \quad B_2 = \mathbb{Q} - B_1.$$

É claro que B_1 e B_2 são subconjuntos de números racionais. Além disso, como A é limitado superiormente, existe um número real $\gamma = (C_1, C_2)$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$ para todo $\alpha \in A$. Isto significa que $A_1^\alpha \subset C_1$ para todo $\alpha \in A$, ou seja,

$$B_1 = \bigcup_{\alpha \in A} A_1^\alpha \subset C_1.$$

Concluímos que $B_2 \neq \emptyset$. Além disso, se $x \in B_1$, então $x \in A_1^\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Como A_1^α não tem um maior elemento, existe $y \in A_1^\alpha$ tal que $y > x$, mas $y \in B_1$, logo B_1 não possui um maior elemento. Isso significa que $\beta = (B_1, B_2)$ é um corte de Dedekind. Vejamos que esse corte é o supremo do conjunto A.

É claro que β é uma cota superior, pois $A_1^\alpha \subset B_1$, isto é, $\alpha \leqslant \beta$ para todo $\alpha \in A$. Agora suponha que $\gamma = (C_1, C_2)$ é uma cota superior de A. Vimos que $B_1 \subset C_1$, o que implica $\beta \leqslant \gamma$. □

O resultado a seguir é consequência imediata do teorema acima.

***Proposição* 2.1** (Continuidade dos números reais)**.** *Se o conjunto dos números reais se dividir em duas classes U_1 e U_2 de tal modo que todo o número α_1 da classe U_1 é menor do que todo o número α_2 da classe U_2, então existe um e um só número α através do qual esta divisão é produzida.*

Demonstração. As hipóteses acima implicam que U_1 e U_2 são subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ limitados superiormente e inferiormente, nessa ordem. Sejam $\alpha = \sup U_1$ e $\beta = \inf U_2$. Temos necessariamente que $\alpha = \beta$. De fato, se $\alpha \neq \beta$, então existiriam infinitos números racionais entre eles, que não pertenceriam a nenhuma classe. É imediato que número α produz a separação $\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$. □

Geometricamente, a proposição 2.1 implica que a reta real não tem "buracos".

As operações com os números reais também podem ser definidas a partir da ideia dos cortes de Dedekind. Assim, dados dois números reais $\alpha = (A_1, A_2)$ e $\beta = (B_1, B_2)$ devemos definir, a partir desses cortes, o corte $\gamma = (C_1, C_2)$ resultado dessa operação.

Para a adição de números reais estabelecemos a seguinte definição

Definição 2.4. *Se c_1 é um número racional qualquer, colocamo-lo na classe C_1, se existem dois números $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$ tal que a sua soma $c_1 \leqslant a_1 + b_1$; todos os outros números racionais devem ser colocados na classe C_2. O corte $\gamma = (C_1, C_2)$ assim obtido é chamado de soma de α e β. Escrevemos $\gamma = \alpha + \beta$*

Definimos a seguir o elemento neutro da adição e o inverso aditivo de um número real.

Definição 2.5. *O corte $0 = (O_1, O_2)$, em que $O_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ e $O_2 = \mathbb{Q} - O_1$, é chamado de zero.*

Definição 2.6. *Seja $\alpha = (A_1, A_2)$ um número real. Definimos $-\alpha = (-A_1, -A_2)$, em que*

$$-A_1 = \{x \in \mathbb{Q} : -x \in A_1, \textit{ mas} - x \textit{ não é o menor elemento de } \mathbb{Q} - A_1\}$$

e $-A_2 = \mathbb{Q} - (-A_1)$.

Para que as definições acima façam sentido, precisamos verificar que os cortes acima satisfazem as propriedades de adição de um corpo (observe que, até esse ponto, não está claro nem mesmo que $-\alpha$ é um corte de Dedekind). A verificação dessas propriedades pode ser encontrada em [5]. Abaixo limitamo-nos a provar que essas propriedades são válidas para cortes racionais.

Proposição 2.2. *Se $\alpha = (A_1, A_2)$ e $\beta = (B_1, B_2)$ são cortes racionais, sejam q e q' os números racionais que os geram. Então o corte $\gamma = \alpha + \beta$ é gerado pelo número racional $q + q'$. Esses cortes satisfazem as propriedades (1), (2), (3) e (4) da definição 1.1.*

Demonstração. De fato, todo número $c_1 \in C_1$ é menor do que $q+q'$, pois $c_1 \leqslant a_1+b_1$ e $a_1 < q$, $b_1 < q'$. Além disso, como C_2 é o complementar de C_1 em $\mathbb{Q}$, temos que todo elemento $q + q' \in C_2$. Agora observe que se o corte α é gerado pelo número racional q, então $-\alpha$ é gerado por $-q$. Como $\mathbb{Q}$ é um corpo o resultado segue. □

Antes de seguirmos para a multiplicação definimos os números reais positivos e provamos uma propriedades fundamental.

Definição 2.7. *$P = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$ é o conjunto dos números reais positivos.*

Note que se $\alpha \in P$ e $\beta \in P$, então $\alpha + \beta \in P$.

Proposição 2.3. *Se $\alpha = (A_1, A_2)$ é um número real, então exatamente uma das possibilidades deve ocorrer: $\alpha = 0$ ou $\alpha \in P$ ou $-\alpha \in P$.*

Demonstração. Se A_1 contém algum número racional positivo, então ele deve conter todos os números racionais negativos. Portanto, A_1 contém 0 e $\alpha \neq 0$, logo, por definição, $\alpha > 0$. Se A_1 não possui nenhum número racional positivo então ou A_1 contém todos os números negativos, caso em que $\alpha = 0$ ou existe pelo menos um número negativo que não está contido em A_1. Nesse último caso podemos assumir que x não é o menor elemento de A_2, pois poderíamos trocá-lo por $\frac{x}{2} > x$. Assim $-x \in -A_1$, logo $-\alpha >$, isto é, $-\alpha \in P$. $\square$

Definimos agora o produto. Inicialmente consideramos apenas o caso em que os números são positivos

Definição 2.8. *Sejam $\alpha = (A_1, A_2)$ e $\beta = (B_1, B_2)$ dois números reais tais que $\alpha, \beta >$. O produto de α e β é a separação $\alpha \cdot \beta = (P_1, P_2)$ em que*

$$P_1 = \{z \in \mathbb{Q} : z < 0 \text{ ou } z = xy \text{ com } x \in A_1 \text{ e } y \in A_2 \text{ com } x, y > 0\}, \ P_2 = \mathbb{Q} - P_1$$

O valor absoluto de um número real α é definido como

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}.$$

A partir do valor absoluto podemos definir o produto de dois números reais

Definição 2.9. *Se α e β são números reais, então*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \\ |\alpha||\beta|, & \alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ ou } \alpha < 0,\ \beta < 0 \\ -|\alpha||\beta|, & \alpha < 0,\ \beta > 0 \text{ ou } \alpha > 0,\ \beta < 0 \end{cases}.$$

A seguir definimos (o que virá a ser) o elemento neutro da multiplicação e o inverso multiplicativo de um número real diferente de zero.

Definição 2.10. $1 = (U_1, U_2)$, *em que $U_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$ e $U_2 = \mathbb{Q} - U_1$.*

***Definição* 2.11.** *Se $\alpha = (A_1, A_2)$ é um número real positivo definimos o corte $\alpha^{-1} = (A_1^{-1}, A_2^{-1})$ em que*

$$A_1^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ ou } x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} \notin A_1 \text{ mas } \frac{1}{x} \text{ não é o menor elemento de } \mathbb{Q} - A_1\}$$

e $A_2^{-1} = \mathbb{Q} - A_1^{-1}$. Além disso, se $\alpha < 0$, definimos que $\alpha^{-1} = -(|\alpha|)^{-1}$.

A verificação que a partir das definições acima o produto de números reais satisfaz as propriedades (5), (6), (7), (8) e (9) da definição 1.1 é bastante fastidiosa. Neste caso devemos analisar separadamente cada caso dado em 2.9. O leitor interessado em levar esses cálculos a cabo pode consultar [5] .

Finalizamos esse capítulo informando que, bem como no caso da soma, o produto de números reais tem a seguinte propriedade: se $\alpha \in P$ e $\beta \in P$, então $\alpha \cdot \beta \in P$. Todas essas informações juntas implicam que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

Capítulo 3

A Contrução de $\mathbb{R}$ da Escola

Vimos que um número racional pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e n é diferente de zero. Usando as regras da divisão que aprendemos na escola podemos associar para todo número racional uma *expressão decimal*. Por exemplo,

$$\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \hline \underline{12} & 3,75 \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

Neste caso escrevemos $\frac{15}{4} = 3,75$. Outros exemplos de expressões decimais são $3,67$, $68,193$ e $9,4$. Observe que todos esses decimais podem ser representados na forma de fração. Os números acima são o mesmo que $\frac{367}{100}$, $\frac{68193}{1000}$ e $\frac{94}{10}$, respectivamente.

Até mesmo expressões decimais que possuem infinitos algarismos diferentes de zero após a vírgula podem ser escritos na forma de uma fração. Por exemplo, as expressões $0,666...$, $14,1515...$, $0,1222...$ e $20,458989...$ podem ser escritas como as frações $0,666... = \frac{6}{9}$, $14,1515... = \frac{1401}{99}$, $0,1222... = \frac{11}{90}$ e $20,458989... = \frac{202544}{9900}$. Observe que todas essas expressões decimais têm uma característica comum: elas possuem um número ou conjunto de números que repete-se regularmente. Por esse motivo dizemos que essas expressões são periódicas e o número ou conjunto de números que se repete é chamado de período. No caso de $20,458989\ldots$ o período é 89.

Em suma, expressões decimais exatas ou periódicas representam números racionais. Mas e as expressões decimas não exatas e não periódicas? Será que estes "números"podem ser expressos na forma de fração? A secão 3.2 responderá essas perguntas.

3.1 Expressões Decimais

Uma expressão decimal é um símbolo da forma

$$x = a_0.a_1a_2...a_n...,$$

onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n, ...$ são números inteiros tais que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ (as casas decimais). O número a_0 é chamado de parte inteira de x e $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ são chamados de dígitos de x.

Geometricamente, podemos interpretar as expressões decimais como os pontos de uma reta. De fato, dados os pontos 0 e 1, podemos representar os números inteiros nessa reta considerando pontos igualmente espaçados em relação a esses. Em seguida dividimos cada segmento entre os inteiros a_0 e a_0+1 em dez partes iguais. Cada um dos pontos assim determinados são denotados por $a_0.1, a_0.2, \ldots, a_0.9$. Subdividindo cada um dos segmentos entre $a_0.a_1$ e $a_0.(a_1+1)$ obtemos os pontos $a_1.a_11, a_1.a_12, \ldots, a_1.a_19$. Prosseguindo dessa forma podemos representar qualquer expressão decimal como um ponto dessa reta.

Veremos a partir de agora como construir o conjunto dos número reais e como representar os elementos desse conjunto a partir de expansões decimais apropriadas, tais como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0.3333333333333333333333333333333333333333333333...\\
\frac{14}{11} &= 1.2727272727272727272727272727272727272727272727...\\
\sqrt{2} &= 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769...\\
e &= 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999...
\end{aligned}$$

***Definição* 3.1.** *Um número real é um par $(a_0, \{a_n\})$, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $\{a_n\}$ é uma sequência tal que $a_1, a_2 \cdots \in \{1, \ldots, 9\}$. Além disso, assumimos que não existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 9$ para todo $n > n_0$. O conjunto dos número reais será denotado por $\mathbb{R}$.*

Desse momento para diante assumimos que o leitor tem familiaridade com as principais propriedades relacionadas à soma e ao produto de números reais. Como ficará evidente, esse conhecimento decorre da experiência com cálculos envolvendo expressões decimais adquirida durante os primeiros anos da escola. Acreditamos que essa abordagem dará mais fluência ao trabalho, evitando níveis excessivos de tecnicismo e rigor matemático. Ao fim dessa secção serão enunciadas as definições precisas das operações de soma e multiplicação, a partir das quais, o leitor diligente poderá deduzir facilmente as suas propriedades.

Dado o número real $(a_0, \{a_n\})$, representá-lo-emos pela expressão decimal $a_0.a_1a_2\ldots$ A condição sobre a sequência $\{a_n\}$ garante que a representação decimal de um número real não termina em uma sequência infinita de noves. Isso evita que um mesmo número real seja representado por dois símbolos diferentes. Por exemplo, se $x = 0,999999\ldots$, então temos que

$$10x - x = 9.99999\cdots - 0.99999\cdots = 9,$$

ou seja, $x = 1$.

Sabemos que, a partir das regras de divisão que aprendemos na escola, podemos associar a todo número racional um expressão decimal. Nesse sentido, é natural pensar no conjunto dos números racionais como um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Uma questão importante que se impõe neste momento é a seguinte: será que toda expressão decimal pode ser representada por um número racional? Ou seja, gostaríamos de saber se, dada a expressão decimal $a_0.a_1a_2\ldots$, podemos encontrar $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tais que

$$\frac{m}{n} = a_0.a_1a_2\ldots$$

Em alguns casos isto é possível. Como vimos, a expressão decimal $0.99999\ldots$ representa o número inteiro 1 e 1.2727272727 representa o número racional $\frac{14}{11}$. Um exemplo mais interessante é o seguinte:

Exemplo. Determinar o número racional correspondente ao decimal $20,45898989\ldots$

Seja $x = 20,458989\ldots$. Multiplicando os dois lados da igualdade por 100 temos

$$\begin{aligned} 100x &= 2045,898989\ldots \\ &= 2045 + 0,898989... \\ &= 2045 + \frac{89}{100} + \frac{89}{10000} + \frac{89}{1000000} + \cdots \end{aligned}$$

Como $\frac{89}{100} + \frac{89}{10000} + \frac{89}{1000000} + ...$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{100}$. Temos que a soma desses termos é dada por $\frac{89:100}{1-\frac{1}{100}} = \frac{89}{99}$. Logo

$$100x = 2045 + \frac{89}{99} = \frac{2045.99 + 89}{99} = \frac{202544}{99},$$

ou seja

$$x = \frac{202544}{9900}.$$

Dizemos que uma expressão decimal é uma dízima periódica se existem inteiros k e d tais que temos que $a_{i+d} = a_i$ para todo $i > k$. Neste caso a expressão decimal é escrita como

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \overbrace{a_{k+1} \ldots a_{k+d}} \underbrace{a_{k+1} \ldots a_{k+d}} \ldots$$

Observe que no exemplo anterior tratamos um caso como esse. O teorema a seguir dá uma condição necessária e suficiente para que uma expressão decimal seja representada por um número racional.

Teorema 3.1. *Uma expressão decimal pode ser representada por um número racional se, e somente se, for uma dízima periódica.*

Demonstração. Suponha que

$$x = a_0.a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+d} a_{k+1} \ldots a_{k+d} \ldots.$$

Então temos que

$$10^{k+d}x - 10^k x = a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+d} - a_0 a_1 \ldots a_k,$$

de onde obtemos

$$x = \frac{a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+d} - a_0 a_1 \ldots a_k}{10^k(10^d - 1)}.$$

Reciprocamente, vamos verificar que qualquer número da forma $\frac{m}{n}$ pode ser representado por uma dízima periódica. Primeiramente notemos que sempre podemos encontrar inteiros k e $k + d > k$ tais que 10^k e 10^{k+d} deixam o mesmo resto na divisão por n. Para verificar esse fato, basta notar que o resto r da divisão de qualquer inteiro por n é tal que $1 \leq r < n$.

Essa é uma aplicação direta do **princípio das casas dos pombos**, o qual pode ser enunciado da seguinte forma: se existem n casas disponíveis e $n + 1$ pombos, então se todos os pombos estiverem em alguma casa, pelo menos uma delas conterá dois pombos.

Como 10^k e 10^{k+d} têm o mesmo resto na divisão por n sabemos que existe um número inteiro ℓ tal que $10^k(10^d - 1) = 10^{k+d} - 10^k = \ell n$. Daí,

$$\frac{m}{n} = \frac{m\ell}{10^k(10^d - 1)}. \tag{3.1.1}$$

Pelo Algoritmo da Divisão existem números inteiros a e b tais que $m\ell = a(10^d - 1) + b$, onde $0 \le b < 10^d - 1$. Se escrevemos b como $b_1 b_2 \ldots b_d$, mesmo que precisemos acrescentar alguns zeros à esquerda, a equação (3.1.1) se escreve como

$$\frac{m}{n} = 10^{-k}\left(a + \frac{b}{10^d - 1}\right) = 10^{-k}\left(a + \frac{0.b_1 b_2 \ldots b_d}{1 - 10^{-d}}\right). \tag{3.1.2}$$

Observe que o segundo termo entre os parênteses é a soma de uma progressão geométrica com primeiro termo igual a $0.b_1 b_2 \ldots b_d$ e razão 10^{-d}, ou seja

$$10^k \frac{m}{n} = a + 0.b_1 b_2 \ldots b_d b_1 b_2 \ldots b_d \ldots,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

O teorema acima mostra que existem expressões decimais que não podem ser representadas por números racionais. Por exemplo, $0,1234567891011121314\ldots$ não é uma dízima periódica, logo não pode ser representada na forma $\frac{m}{n}$. Os números com esse tipo de representação decimal serão chamados de números irracionais.

Na próxima seção mostraremos que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

3.2 A Propriedade de Completeza

Definimos uma relação de ordem no conjunto dos números reais da seguinte forma:

***Definição* 3.2.** *Dizemos que $x = a_0.a_1 a_2 \ldots$ é maior que $y = b_0.b_1 b_2 \ldots$ se $a_0 > b_0$ ou $a_n > b_n$ e $a_i = b_i$ para todo $i < n$. Neste caso escrevemos $x > y$. Se todos os dígitos são iguais dizemos que x e y são iguais e escrevemos $x = y$.*

A definição acima implica que para determinarmos a relação de ordem entre os números reais x e y comparamos o primeiro dígito das suas representações decimais, se esses dígitos forem iguais comparamos os dígitos seguintes e assim sucessivamente. Por exemplo, se

$$x = 2.5632156329748569536587 5\ldots,$$

$$y = 2.5632156329748569536586 5\ldots,$$

então temos $x > y$, pois o penúltimo dígito de x é maior que o penúltimo dígito de y e todos os dígitos anteriores são iguais. Muitas vezes essa relação de ordem é chamada de ordem lexicográfica, pois as palavras do dicionário são organizadas segundo esse princípio

Podemos verificar facilmente que se forem dados dois números reais x e y, então exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: ou $x > y$ ou $y > x$ ou $x = y$.

Teorema 3.2. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio, limitado inferiormente tem ínfimo. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio, limitado superiormente tem supremo.*

Demonstração. Seja $S \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente e seja $m = m_0.m_1\ldots$ uma cota inferior de S. Como $m_0 \leq m$ temos que m_0 também é uma cota inferior de S. Dado um elemento $s = s_0.s_1s_2\cdots \in S$, temos que $s_0 + 1$ não é uma cota inferior de S. Há apenas um número finito de elementos entre m_0 e $s_0 + 1$. Seja a_0 o maior desses elementos que ainda é uma cota inferior de S.

Em seguida, escolha um número inteiro a_1 tal que $a_0.a_1 = a_0 + a_1\,10^{-1}$ é uma cota inferior de S. Certamente $a_1 \in \{1,\ldots 9\}$ pois a_0 é uma cota inferior e $a_0 + 1$ não. Prosseguindo dessa forma, obtemos o número $a = a_0.a_1a_2\ldots$ Afirmamos que a é o ínfimo do conjunto S.

Vejamos primeiramente que a é uma cota inferior de S. Isto é claro se $a = a_0, a_1a_2\ldots a_k$. Caso contrário, temos que $a > a_0, a_1\ldots a_k$ para todo k. Dado $s = s_0.s_2s_2\cdots \in S$ temos que $a_0.a_1\ldots a_k < s$, para todo k. Pela definição de ordem temos que

(i) $s_i = a_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ ou

(ii) existe algum número inteiro $1 \leq j \leq k$ tal que $s_i = a_i$ para $1 \leq i < j$ e $s_j > a_j$.

Se (i) ocorre pra algum k temos que $s > a$. Se (ii) ocorre para todo k, então $s = a$. Em qualquer caso a é uma cota inferior de S.

Para ver que a é a maior cota inferior suponha que $b = b_0.b_1\cdots > L$. Novamente, pela definição de ordem, temos que existe um menor inteiro tal que $b_k > a_k$ e $a_i = b_i$

para todo $1 \leq i < k$. Assim

$$M \geq a_0.a_1a_2\ldots b_k \geq a_0.a_1a_2\ldots(a_k+1).$$

Mas sabemos que $a_0.a_1a_2\ldots(a_k+1)$ não é uma cota inferior de S. Dessa forma existe $s \in S$ tal que $s < a_0.a_1a_2\ldots(a_k+1) \leq M$. Isto significa que b não é cota inferior de S. $\square$

Com a definição proposta neste capítulo os números reais são objetos bem concretos, entretanto as dificuldades envolvidas na definição de soma e na multiplicação são enormes. Como somar dois números com infinitos dígitos após a vírgula? Usando o resultado acima podemos dar uma definição simples para essas operações.

Dado $x = (a_0, \{a_n\})$ defina

$$x_k = a_0.a_1a_2\ldots a_k = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n 10^{-n}.$$

Intuitivamente, x_k é o número racional que obtemos trocando todos os dígitos após a_k para 0. Reciprocamente, dado o número racional $a_0.a_1a_2\ldots a_k$ definimos o número real $(b_0, \{b_n\})$, onde $b_0 = a_0$ e a sequência $\{a_n\}$ é tal que $b_n = a_n$ para todo $1 \leq n \leq k$ e $b_n = 0$ para todo $n > k$. Por exemplo, se $x = 2.71654789454563...$, vamos ter $x_1 = 2.700000000...$, $x_2 = 2.71000000000...$, $x_3 = 2.71600000000...$, etc.

Agora, se $x = (a_0, \{a_n\})$ e $y = (b_0, \{b_n\})$, definimos

$$x + y = \sup\{(x_k + y_k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Analogamente, se x e y são números reais positivos definimos o seu produto como

$$x.y = \sup\{x_k.y_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Mais uma vez, no caso geral definimos o produto por 2.9. Usando as propriedades acima pode-se verificar facilmente que todas as propriedades algébricas de um corpo são verificadas. Além disso, a relação de ordem definida acima é compatível com as operações de corpo, isto é, as preserva. Isso mostra que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

3.3 Unicidade do Conjunto dos Números Reais

Como vimos, existem várias maneiras de construir o conjunto dos números reais. Nesta seção vamos investigar se diferentes maneiras de construir esses números poderiam gerar conjuntos com propriedades distintas.

Veremos a seguir, que dois corpos ordenados completos, são iguais, a menos de um isomorfismo. Em termos mais simples, isto significa que se tivermos duas dessas estruturas, então eles distinguem-se apenas pela natureza dos seus elementos, todas a demais propriedades algébricas sendo preservadas. Portanto, não importa se definimos o conjunto dos números reais como expressões decimais ou como conjuntos de números racionais, as propriedades algébricas desses números serão sempre as mesmas.

Para sermos rigorosos precisamos distinguir as estruturas algébricas dos corpos F e K. No que segue usaremos símbolos em negrito para destacar as os objetos e operações do corpo K. Assim $\boldsymbol{<}$, $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{\cdot}$ são as relação de ordem, soma e produto de K. Analogamente $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$ serão os elementos neutros do produto e da soma desse corpo.

***Definição* 3.3.** *Sejam F e K dois corpos ordenados. Dizemos que $\phi : F \to K$ é um isomorfismo entre corpos ordenados se:*

1) $\phi(a + b) = \phi(a) \boldsymbol{+} \phi(b)$, para todo $a, b \in F$;

2) $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \boldsymbol{\cdot} \phi(b)$, para todo $a, b \in F$;

3) Para todo $a, b \in F$, com $a < b$ temos que $\phi(a) \boldsymbol{<} \phi(b)$;

4) $\phi(a) = \phi(b)$ implica que $a = b$, isto é, ϕ é injetiva;

5) Para todo $y \in K$, existe $x \in F$ tal que $y = \phi(x)$, ou seja ϕ é sobrejetiva.

As propriedades 4) e 5) da definição acima mostram que que K e F têm o mesmo "número de elementos". As propriedades $1), 2)$ e 3) afirmam que as operações de soma e produto e a relação de ordem do corpo ordenado F são preservadas pela aplicação ϕ.

Sobre os isomorfismos entre corpos ordenados completos temos o seguinte resultado fundamental

***Teorema* 3.3.** *Se F e K são corpos ordenados completos, então existe um isomorfismo entre eles.*

Demonstração. A maneira mais simples de provar que existe um isomorfismo entre os corpos F e K é construir uma função ϕ que satisfaz as condições da definição 3.3.1. Daremos apenas uma ideia de como essa construção pode ser feita.

Começamos definindo essa função no conjunto dos números inteiros.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \mathbf{0}, \\
f(n) &= \underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{\text{n vezes}} \quad \text{se } n > 0, \\
f(n) &= -\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{\text{n vezes}} \quad \text{se } n < 0,.
\end{aligned}
$$

Com essas definições é fácil verificar que

$$
\begin{aligned}
f(n+m) &= f(n)+f(m) \\
f(n\cdot m) &= f(n)\cdot f(m)
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Agora podemos estender nossa definição para os números racionais definindo

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = n \cdot m^{-1}.$$

É fácil ver que se q_1 e q_2 são dois números racionais vales as relações (3.3.1) e, além disso, se $q_1 < q_2$ temos que $f(q_1) < f(q_2)$.

Agora vamos definir nossa função para os demais elementos de F. Começamos definindo, para cada $a \in F$ o conjunto $X_a = \{f(r) : \text{ se } r \text{ é um racional menor do que } x\}$. Esse conjunto é certamente não-vazio e é limitado superiormente, pois se q_0 número racional tal que $q_0 > a$, então $f(q_0) > f(q)$ para todo $f(q) \in X_a$. Definimos

$$f(x) = \sup X_a.$$

Usando essa definição pode-se provar que a relação $f : F \to K$ é uma função bijetora que preserva a soma, o produto e a relação de ordem do corpo ordenado F. Assim sendo, ϕ é um isomorfismo entre os corpos ordenados F e K. □

Usando o teorema acima podemos concluir que todo corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, a menos de um isomorfismo, são iguais. Portanto, não importa a maneira pela qual definimos o conjunto dos números reais, sempre obteremos estruturas algébricas indistinguíveis entre si, exceto pela natureza dos seus elementos.

Capítulo 4

A Aplicação nas Escolas

Sugerimos aos professores do ensino fundamental e médio que tenham bastante cuidado ao ministrar suas aulas referente aos conjuntos numéricos, em especial ao conjunto dos números irracionais. Sabemos que esse conteúdo é de extrema importância para uma formação adequada dos alunos e merece uma atenção especial por se tratar de um tema comum em vários cursos do ensino superior.

Entendemos que uma das funções desse trabalho é colocar em discussão a maneira que está sendo tratado um assunto de tanta relevância da matemática em sala de aula e fazer com que todos nós sempre busquemos qualificar ao máximo a aprendizagem dos nossos alunos para que estes possam ter melhores chances e oportunidades ao longo de suas vidas.

A seguir montamos um roteiro simples como sugestão para uma aula mais detalhada sobre o assunto.

Plano de aula sobre conjuntos numéricos	
Público-alvo	**Alunos do 1º ano do ensino médio.**
Recursos necessários	**Lousa e giz**
Período	**5 aulas ou 250 minutos**

1ª aula) História da criação dos números; o conjunto dos números naturais; representação simbólica; sucessor e antecessor; o conjunto dos números inteiros; a necessidade da criação dos números negativos; representação simbólica de $\mathbb{Z}$; operações com números inteiros.

2ª aula) O conjunto dos números racionais; a necessidades da criação dos números fracionários; a forma de fração para representar qualquer número racional; os decimais exatos; as dízimas periódicas; representação simbólica de $\mathbb{Q}$; operações com $\mathbb{Q}$.

3ª aula) Ênfase para a incompletude dos números racionais; mostrar que a reta real é mais rica em pontos do que o conjunto dos números racionais em elementos; segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

4ª aula) A criação dos números irracionais (comentar sobre o corte de Dedekind e o método das expressões decimais abordados nos capítulos 2 e 3); decimais não exatos e não periódicos; o conjunto dos números reais; subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$.

5ª aula) Aula de exercícios sobre os assuntos.

Os conjuntos numéricos são conteúdos ensinados para alunos do 8º ano do ensino fundamental e revisado no 1º ano do ensino médio. Então, é esperado que alunos do 3º ano do ensino médio tenham uma noção já bem definida sobre o assunto.

Com a finalidade de avaliar o aprendizado e a compreensão dos conjuntos numéricos, fizemos uma experiência com algumas turmas do 3º ano do ensino médio, pedindo que eles respondessem um questionário sobre os conjuntos numéricos. Em algumas turmas o questionário foi proposto sem a execução de uma aula detalhada e específica sobre o assunto e em outras turmas o mesmo questionário foi respondido após a realização de apenas uma aula teórica.

Os exercícios utilizados no questionário foram os seguintes:

1. Julgue os itens em certo (C) ou errado (E).

   ( ) $3 \in \mathbb{Z}$;
   ( ) $2,5 \in \mathbb{Z}$;
   ( ) $8 \in \mathbb{Q}$;
   ( ) $1,25 \in \mathbb{N}$;
   ( ) $0,444... \in \mathbb{Z}$;
   ( ) $0,1333... \in \mathbb{Q}$;
   ( ) $\pi \in \mathbb{Q}$;

( ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$;
( ) $\sqrt{16} \in \mathbb{Z}$;
( ) $\frac{7}{15} \in \mathbb{Q}$.

2. Determine a fração que gerou as dízimas:

   a) $0,333...$

   b) $1,666...$

   c) $0,2555...$

3. Qualquer operação de adição, subtração, multiplicação ou divisão envolvendo somente números naturais possui soluções em $\mathbb{N}$? Justifique.

4. Calcule a diagonal de um quadrado de lado igual a 2. A diagonal desse quadrado é um número que pode ser colocado na forma de fração $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$? Justifique.

5. Sabemos que a todo número racional corresponde a um único ponto da reta real. A todo ponto da reta real corresponde a um número racional? Justifique.

6. Existe algum número racional entre os números $2,2$ e $2,3$? Se existir, quantos são? Existe algum número irracional entre $2,2$ e $2,3$? Se existir, quantos são?

Participaram da experiência um total de 210 alunos, divididos em seis turmas do 3º ano. Três dessas turmas responderam ao questionário sem a exposição da aula teórica sugerida e as outras três após a aula teórica.

A tabela abaixo mostra a porcentagem de acerto de cada questão proposta nas turmas avaliadas. No caso da primeira questão a porcentagem representa o número de alunos que acertaram pelo menos 5 itens.

Questão		Turmas sem aula teórica	Turmas com a aula sugerida
1		$\frac{22}{106} \approx 20\%$	$\frac{81}{104} \approx 78\%$
2	a	$\frac{11}{106} \approx 10\%$	$\frac{94}{104} \approx 90\%$
	b	$\frac{4}{106} \approx 4\%$	$\frac{65}{104} \approx 62\%$
	c	$\frac{1}{106} = 1\%$	$\frac{42}{104} \approx 40\%$
3		$\frac{15}{106} \approx 14\%$	$\frac{91}{104} \approx 88\%$
4		$\frac{6}{106} \approx 6\%$	$\frac{73}{104} \approx 70\%$
5		$\frac{10}{106} \approx 9\%$	$\frac{75}{104} \approx 72\%$
6		$\frac{4}{106} \approx 4\%$	$\frac{62}{104} \approx 60\%$

Como era esperado, percebemos uma melhora significativa no índice de acertos e na facilidade com que as perguntas foram respondidas pelos alunos que participaram da aula teórica sugerida. Entretanto, o que deve ser destacado é o índice de erro dos alunos que não assistiram à aula. Esse fato comprova que uma grande parte dos alunos do 3º ano não possuem os conhecimentos esperados sobre os conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Esse problema somente poderá ser resolvido com maior dedicação por parte dos professores na preparação de suas aulas, mais esforço por parte dos alunos, procurando sempre aumentar seus conhecimentos e mais cuidado por parte dos autores na elaboração de uma teoria completa e detalhada referente ao conjuntos dos números racionais e irracionais trazidas nos livros didáticos.

Esperamos que o presente trabalho sirva como uma ferramenta para o aprendizado sobre os conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números reais, e contribua para diminuir a defasagem de conhecimento observada nos alunos do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L., *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, Volume 1, Rio de Janeiro: IMPA, 10ª edição, 1997;

[2] LIMA E. L., *Curso de Análise*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, Volume 1, 1976;

[3] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. E MORGADO, A. C., *A Matemática da Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática, Volume 1, SBM, 9ª edição, 2006;

[4] DEDEKIND, R., *Continuity and irrational numbers*, Dover, 1963;

[5] SPIVAK, M., *Calculus*, Publish or Perish, 3ª edição;

[6] JACY MONTEIRO, L. H., *Álgebra Moderna*. São Paulo: L.P.M., volume 2, 1964;