

**CÁLCULO DIRETO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

JAIRO HERNANDO CAICEDO BOLAÑOS

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**CÁLCULO DIRETO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

JAIRO HERNANDO CAICEDO BOLAÑOS

ORIENTADOR: ARTUR PORTELA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-010A/15
BRASÍLIA/DF: 30 de Abril de 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**CÁLCULO DIRETO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

JAIRO HERNANDO CAICEDO BOLAÑOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Artur Portela, Ph. D. (UnB)
(Orientador)

Prof. William Taylor, Ph. D. (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Éder Lima de Albuquerque. (UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 30 DE ABRIL DE 2015.

FICHA CATALOGRÁFICA

CAICEDO, JAIRO HERNANDO.

Cálculo Direto dos Fatores de Intensidade de Tensão pelo Método dos Elementos Finitos. [Distrito Federal] 2015.

xiii, 46 p., 297mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Elementos Finitos

2. Subtração da Singularidade

3. Fator de intensidade de Tensões

4. Expansão de Williams

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CAICEDO, J.; Cálculo Direto dos Fatores de Intensidade de Tensão pelo Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Publicação **E.DM-010A/15**, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, DF, 46p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Jairo Hernando Caicedo Bolaños

TÍTULO: Cálculo Direto dos Fatores de Intensidade de Tensão pelo Método dos Elementos Finitos.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Jairo Hernando Caicedo Bolaños

SQN 406 Bloco A. Apto 106.

70847010 Brasilia-DF-Brasil.

e-mail: jadoceb@hotmail.com

*Dedicado a Deus, a minha mãe, minhas irmãs e
à memória de meu pai.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar a força, por ser minha rocha para cada um dos meus passos, me guiar e me ajudar durante o desenvolvimento desta pesquisa e estar presente em minha vida sempre.

À minha Família, por seu amor e apoio incondicionais mesmo que as distancias sejam grandes.

Ao professor Artur Portela, quero agradecer enormemente por sua grande orientação, por estar disposto a me ajudar em todos os momentos partilhando a sua experiência, conhecimento, motivação, por suas sugestões, pela confiança depositada em mim, pela grande pessoa que ele é, por todo o seu tempo gasto no trabalho e por estar sempre disponível durante a orientação. Muito obrigado professor.

Ao programa PECC (Pos-graduação em Estruturas e Construção Civil) departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

CALCULO DIRETO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

RESUMO

Autor: Jairo Hernando Caicedo Bolaños

Orientador: Artur Portela

Programa de Pós - graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Abril de 2015.

Este trabalho apresenta o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão na análise da deformação em modo misto de placas homogêneas bidimensionais com trincas.

O cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão surge como uma consequência natural de um processo de regularização conhecido como técnica da subtração da singularidade. Esta técnica de regularização utiliza uma solução particular singular do problema da trinca para introduzir os fatores de intensidade de tensão como incógnitas primárias adicionais no método dos elementos finitos. A sua aplicação depende da disponibilidade de soluções singulares válidas para uma placa com múltiplas trincas no caso mais geral.

Neste trabalho, o termo singular da expansão em série de Williams, válido para um trinca lateral semi-infinita, é usado no processo de regularização.

Duas placas trincadas foram analisadas com esta técnica, a fim de avaliar a precisão e eficiência da formulação. Os resultados obtidos neste trabalho estão em perfeito acordo com os resultados obtidos com o método dos elementos de contorno dual e outros resultados publicados.

A precisão e eficiência da implementação aqui descrita permite concluir que esta é uma formulação confiável, ideal para o estudo de problemas de crescimento de trincas em modo misto de deformação, com o método dos elementos finitos.

Palavras chave: Metodo dos elementos finitos (MEF); fator de intensidade de tensões, subtração da singularidade; campo elástico na ponta da trinca; solução particular de Williams.

DIRECT COMPUTATION OF STRESS INTENSITY FACTORS IN FINITE ELEMENT METHOD.

ABSTRACT

Autor: Jairo Hernando Caicedo Bolaños

Orientador: Artur Portela

Programa de Pós - graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Abril de 2015.

This paper is concerned with the direct computation of stress intensity factors in the finite element analysis of the mixed-mode deformation of homogeneous cracked plates.

The direct computation of stress intensity factors is a consequence of a regularization procedure that uses a singular particular solution of the crack problem to introduce the stress intensity factors as additional in the primary unknowns problem. In this paper, the singular term of Williams' eigen expansion, derived for a semi-infinite crack, is used to regularize the elastic field of an edge-cracked finite plate.

Two cracked plates were analyzed with this technique, in order to assess the accuracy and efficiency of the formulation. The results obtained in this work are in perfect agreement with those obtained with the dual boundary element method and other published results. The accuracy and efficiency of the implementation described herein make this a reliable formulation, ideal for the study of crack-growth problems under mixed-mode conditions with the finite element method.

Keywords: Finite Element Method (FEM), stress intensity factor; singularity subtraction regularization; crack-tip elastic field; Williams' singular solution.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DO TEMA	3
1.2	OBJETIVOS	3
1.2.1	Objetivo Geral	3
1.2.2	Objetivo específico	3
1.3	METODOLOGIA	3
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	11
3.1	TEORIA DA ELASTICIDADE	11
3.1.1	Equações de Equilíbrio	12
3.1.2	Equações da Cinemática	14
3.1.3	Equações Constitutivas	14
3.2	MECÂNICA DA FRATURA	15
3.2.1	Trabalho de Griffith	16
3.2.2	Trabalho de Irwin	17
3.2.3	Fator de Intensidade de Tensões	19
3.2.4	Campo Elástico de Carga	20
3.2.5	Crítério de Fratura	21
3.2.6	Taxa de Liberação de Energia	21
4	TÉCNICA DA SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE	24
4.1	CAMPO ELÁSTICO ORIGINAL	24
4.2	REGULARIZAÇÃO DO CAMPO ELÁSTICO	26
4.3	SOLUÇÃO PARTICULAR DE WILLIAMS	27
5	ANÁLISE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	30

5.1	EQUAÇÕES DOS ELEMENTOS FINITOS	30
5.2	MONTAGEM DO ELEMENTO	32
5.3	RESTRICÇÕES ADICIONAIS	33
5.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO DO DESLOCAMENTO	35
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	38
6.1	PLACA COM FISSURA LATERAL SOB MODO DE CARGA DE ABER- TURA	38
6.2	PLACA COM FISSURA LATERAL SOB MODO DE CARGA DE DESLI- ZAMENTO	41
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	44
8	APÊNDICE A	50
9	APÊNDICE B	79

LISTA DE SIMBOLOS

ν	—	Coefficiente de Poisson.
Γ	—	Contorno do problema.
Γ_u	—	Contorno essencial.
Γ_t	—	Contorno natural.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	—	Deformações axiais.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	—	Deformações cisalhamento.
\mathbf{u}_r^R	—	Deslocamento do nó na ponta da trinca.
\mathbf{u}_s^R	—	Deslocamento do nó frente à ponta trinca.
u_i^R	—	Deslocamento regular.
u_i^S	—	Deslocamento solução particular.
$\delta \mathbf{u}^R$	—	Deslocamento virtual.
u_x, u_y, u_z	—	Deslocamentos.
$\sigma_{r,\theta}$	—	Distribuição de tensões em coordenadas polares.
Ω	—	Domínio do problema.
U_R	—	Energia consumida na propagação.
W_f	—	Energia de fratura.
γ_s	—	Energia superficial.
γ	—	Energia superficial específica.
K_{Ic}	—	Fator de intensidade critico.
K	—	Fator de intensidade de tensão.
C	—	Flexibilidade do corpo por unidade de espessura.
N	—	Função de forma.
δ	—	Função delta de Kronecker.
\mathbf{u}^e	—	Graus liberdade do elemento (deslocamentos nodais).
n_i	—	i-ésima componente da unidade externa normal ao contorno.
U_E	—	Incremento de energia elástica.
D	—	Matriz constante elástica.

\mathbf{L}	—	Matriz operador diferencial.
\mathbf{K}^e	—	Matriz rigidez do elemento.
\mathbf{K}, \mathbf{G} e \mathbf{P}	—	Matrizes globais para toda a malha de elementos finitos.
a	—	Metade do comprimento da fissura.
E	—	Modulo de elasticidade longitudinal.
μ	—	Modulo de elasticidade transversal.
γ^e	—	Montagem de elementos no contorno.
Ω^e	—	Montagem de elementos no domínio.
λ	—	Multiplicadores de Lagrange.
s	—	Nó à frente da ponta da trinca.
r	—	Nó da ponta da trinca.
R	—	Parte regular.
S	—	Parte singular.
(r, θ)	—	Sistema de referencia de coordenadas polares.
(η, ξ)	—	Sistema de referencia de coordenadas naturais.
G	—	Taxa de liberação de energia.
σ_{ij}^R	—	Tensão regular.
σ_{ij}^S	—	Tensão solução particular.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	—	Tensões axiais.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	—	Tensões cisalhamento.
ε	—	Tensor de deformações.
σ	—	Tensor de tensões.
γ_p	—	Trabalho plástico por unidade de área.
$\delta\lambda$	—	Variações arbitrárias dos multiplicadores de Lagrange.
\bar{u}	—	Valores prescritos do deslocamento.
\bar{t}	—	Valores prescritos da tração.
p	—	Vetor das forças de superfície.
\mathbf{P}^e	—	Vetor de carga.
\mathbf{Q}^e	—	Vetor de carga.
n	—	Vetor normal à superfície do elemento.

Lista de Figuras

1	Problema Elástico Tridimensional	12
2	Componentes do tensor de tensões	13
3	Modos de Falha	20
4	Problema Elástico em Duas Dimensões	24
5	Sistema de referencia para a solução particular de Williams	29
6	Placa quadrada com uma trinca simples na aresta sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).	39
7	Malha de elemetnos finitos e condições de contorno usado para o caso $a/w = 0.6$ sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).	40
8	Malhas iniciais e deformadas de elementos finitos para o caso $a/w = 0.6$ sob modo de carga de abertura	40
9	Placa quadrada com uma trinca simples na aresta sob modo de deslizamento ($w = 2h$).	42
10	Malha de elementos finitos e condições de contorno para o caso $a/w = 0.6$ sob modo-deslizamento de carregamento ($h/w = 0.5$).	43
11	Malhas iniciais e deformadas de elementos finitos para o caso $a/w = 0.6$ sob carga de modo de deslizamento	43

Lista de Tabelas

1	Incógnitas	11
2	Fator de intensidade de tensões para uma trinca simple na aresta numa placa quadrada sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).	39
3	Fatores de intensidade de tensão para uma placa quadrada com fissura simples na aresta sob modo-deslizamento de carregamento ($h/w = 0.5$).	42

1 INTRODUÇÃO

O interesse de as pessoas projetarem coisas que melhoram a sua qualidade de vida conduziu à concepção e à construção de ferramentas, com diferentes tipos de materiais, cada um com características particulares. Características que em primeira instância, são quase desconhecidas para as pessoas que fazem uso delas. Isso pode levar a uma situação de perigo devido à falta de conhecimento sobre o comportamento posterior dos materiais quando são submetidos a um estado que modifique seu estado natural. Quando isso acontece, podem-se apresentar falhas como as fissuras, as quais, quando aumentam e pela falta de tenacidade dos materiais, podem levar ao colapso da estrutura. Tal fato levou a ter grande interesse em estudar o comportamento das fissuras já que quase todos os materiais, a partir de sua fabricação, apresentam essas irregularidades. A integridade de uma estrutura depende de todos os materiais que a compõem, por isso o estudo do comportamento das fissuras pode ajudar a melhorar as condições dos elementos evitando a propagação das fissuras e assim evitar o colapso. As fissuras podem afetar o projeto de uma estrutura. Com a passagem do tempo e com o interesse de conhecer e melhorar componentes das estruturas foram desenvolvidas disciplinas totalmente focadas no estudo desses fenômenos, como é o caso da *mecânica da fratura*. Melhorou, portanto o desenvolvimento e a produção de produtos controlando a propagação de falhas que podem levar ao colapso. A *mecânica da fratura* foi crescendo na época da Segunda Guerra Mundial, sendo usada para explicar os colapsos de grandes navios de guerra, derivado à análise inadequada e insuficientes análises das estruturas, o que tornou-se muito propenso às fissuras. Esta etapa dá à mecânica da fratura o impulso no campo científico e posteriormente sua aplicação prática. A *mecânica da fratura* tem como base de análises o estudo de tensões e deformações próximas à ponta da fissura, analisando as características do material e sua capacidade de resistência à propagação das fissuras em diferentes geometrias.

Nos últimos séculos, métodos numéricos como os *elementos finitos (MEF)* e os *elementos de contorno (MEC)* podem ser utilizados em problemas em que se tem em conta as concentração de tensões e permitem simular de um jeito mais exato as singularidades na ponta da fissura onde se mostra um campo de tensões, o qual é assumido como infinito e, para dar uma solução ao problema, é empregada uma malha de características finas que representa o campo de tensões,

com o fim de dividir o campo de tensões em campos menores e assim obter uma solução. Estas análises são feitas com o fim de procurar processos adaptativos que facilitem e possibilitem aos analistas obter um resultado mais exato.

Neste documento trabalha-se com o cálculo direto do fator de intensidade tensões no método dos elementos finitos fazendo as análises das deformações no modo I e no modo II de uma chapa homogênea contendo uma trinca. O cálculo direto do fator de intensidade de tensões é uma consequência de um procedimento de regularização que usa uma solução particular do problema de trinca para introduzir o fator de intensidade de tensões como uma incógnita adicional ao problema inicial. Neste documento, na teoria de expansão em séries de Williams, o termo singular, deduzido para uma trinca semi-infinita é empregado para a regularização do campo elástico na ponta da trinca finita de uma chapa. Duas fissuras vão ser analisadas com esta técnica para avaliar a eficiência da formulação. Os resultados obtidos neste trabalho estão em perfeito acordo com os obtidos com o método dos elementos de contorno dual e outros resultados publicados. A precisão e eficiência descritas aqui fazem esta uma formulação confiável, ideal para o estudo de problemas de crescimento de trinca em condições de modo misto com o método dos elementos finitos. A presença da singularidade no modelo numérico aumenta consideravelmente as dificuldades numéricas em relação a representar simultaneamente o campo singular e as tensões finitas no modelo numérico. As aproximações mais importantes têm sido concebidas para superar aquela dificuldade como a teoria dos elementos finitos que vai ser empregada. Neste documento, trabalha-se com o cálculo direto do fator de intensidade de tensões pela técnica da subtração da singularidade nos elementos finitos para fornecer uma maneira eficiente e exata de analisar as deformações no modo misto de uma placa homogênea com fissura.

1.1 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DO TEMA

Devido aos grandes colapsos que se apresentam nas estruturas, o uso de métodos matemáticos para melhorar e garantir o desempenho destas estruturas, cada dia tem mais importância, levando os estudos à prática. Devido à grande quantidade de estruturas que falham, os países têm tido perdas significativas derivado à presença de fissuras mal controladas. Com o desenvolvimento computacional, a *mecânica da fratura* é abordada desde uma perspectiva dos métodos numéricos, obtendo-se, assim, análises mais exatas e confiáveis nos estudos das fissuras, sempre com a idéia de discretizar o comportamento das fissuras de uma forma mais simples e prática. Procura-se desenvolver um método mais eficiente com o qual pode-se analisar esse comportamento de uma forma mais precisa e tão simples quanto possível.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Analisar de uma maneira mais eficiente e exata a deformação de modo misto das fissuras de placas homogêneas gerais mediante o cálculo de fator de intensidade de tensões por meio da técnica de subtração da singularidade no método dos elementos finitos.

1.2.2 Objetivo específico

- Subtrair a singularidade na ponta da trinca por meio do uso das equações de Williams para assim levar ao cálculo direto dos fatores de intensidade de tensões.
- Usar uma malha regular para a análise do campo de tensões na ponta da trinca.

1.3 METODOLOGIA

A metodologia, a ser seguida nesta pesquisa científica, começará naturalmente por uma revisão bibliográfica da técnica da subtração da singularidade na ponta da trinca, no método dos elementos de contorno e no método dos elementos finitos. Será usado um programa de elementos finitos, para análise de equilíbrios planos, escrito no ambiente MAPLE que permite efetuar

computação simbólica, numérica e gráfica. A técnica da subtração da singularidade será implementada neste programa para uma trinca lateral. Serão analisados 2 casos relativos a uma chapa com trinca lateral carregada em modo I e em modo II. Os resultados numéricos serão comparados com os resultados publicados na literatura especializada, para validação do modelo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A organização deste documento é feita em sete capítulos. O primeiro capítulo refere-se à importância do tema, os objetivos e a metodologia empregados no trabalho.

No segundo capítulo são apresentados os trabalhos e pesquisas na área de estudo empregadas para o desenvolvimento desta dissertação.

O terceiro capítulo descreve os conceitos e fundamentos teóricos aplicados nesta pesquisa com relação aos aspectos, fatores e variáveis no estudo da teoria da elasticidade e mecânica da fratura.

O quarto capítulo apresenta o campo elástico original de uma placa com trinca, a regularização do campo elástico original com a técnica da subtração da singularidade e a solução particular do campo elástico usado no processo de regularização empregando o primeiro termo da expansão em série de Williams´.

O quinto capítulo, apresenta a técnica da subtração da singularidade para análises de elementos finitos bidimensionais de placas homogêneas fissuradas.

No sexto capítulo, os resultados numéricos são apresentados ilustrando a eficácia e solidez do atual processo de regularização que, por meio da técnica da subtração da singularidade, permite o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão no método dos elementos finitos.

O capítulo sete apresenta as principais conclusões deste trabalho e apresenta sugestões para futuras pesquisas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentro dos limites da análise linear elástica, o campo de tensões é ilimitado na ponta de uma fissura. Isso foi relatado por *Brahtz*[1] e depois por *Williams*[4] que depois de uma investigação da forma analítica dessas singularidades demonstrou que em todas as combinações possíveis de condições de contorno, a tensão se torna infinita na ponta da fissura. De um ponto de vista físico, os campos elásticos infinitos são sem sentido. No entanto, as deformações infinitas não podem ser ignoradas. A sua presença indica que um novo fenômeno (por exemplo, plasticidade, fratura, etc) pode ocorrer, levando a danos localizados em situações práticas. Neste documento, o termo *singularidade* é utilizado para denotar os casos em que o campo de tensões elásticas torna-se infinito. Se r é a distância medida a partir da ponta da trinca, o campo de tensões é da ordem $r^{-1/2}$ que se torna singular quando r tende a zero. O fator de intensidade de tensão (SIF) na ponta da trinca, é uma medida da intensidade dessa singularidade.

A primeira revisão das técnicas mais importantes empregadas no método dos elementos finitos foi apresentada por *Portela et al.*[10]. O desempenho de alguns de esses métodos foi mostrado por *Portela et al.*[11].

Um procedimento comum, usado nas aplicações iniciais da mecânica da fratura com o método dos elementos finitos é ignorar a presença da singularidade e intentar diminuir seus efeitos sobre a solução global usando um refinamento de malha na vizinhança da ponta da trinca. O valor numérico das componentes de tensão calculado na ponta da trinca será sempre finita, mas pode tornar-se tão grande como deseja, aumentando o refinamento da malha. Certamente este procedimento depende da malha e irá produzir uma relação de convergência lenta em todo o domínio do problema, como o mostra *Tong et al.*[14]. Isso é uma consequência da impossibilidade de representar simultaneamente a singularidade e as tensões finitas no modelo numérico, com apenas um procedimento de malha refinada. Nesta abordagem, o fator de intensidade de tensão é avaliado a partir de um procedimento de correlação, envolvendo uma comparação entre os resultados numéricos de deslocamentos ou campos de tensões e as respectivas soluções analíticas, representada sob a forma de uma série de expansão de valor próprio em torno da ponta da trinca. Tipicamente, o fator de intensidade de tensões obtido pela aplicação deste procedimento de correlação na face da fissura os pontos nodais são então extrapolados à ponta da trinca. Con-

seqüentemente, o fator de intensidade de tensões não pode ser calculado com precisão com o procedimento de refinamento de malha. Isso foi mostrado, por exemplo, no trabalho de *Portela et al.*[35], cujos valores dos fatores de intensidade de tensão, calculados por um procedimento de correlação de deslocamento, são comparados com valores obtidos com a técnica da integral **J**, para vários problemas de fissuras analisados pelo método dos elementos de contorno dual.

O uso do "quarter point", introduzido por *Hensell*[24] e *Barsoum*[25], sugere a aplicação do "quarter point" nos elementos de contorno na ponta da trinca, como uma alternativa ao procedimento do refinamento de malha. Porém, enquanto o "quarter point" nos elementos finitos representa o comportamento dos deslocamentos e introduz uma singularidade no campo de tensões, o uso do "quarter point" nos elementos de contorno, em que os deslocamentos e as tensões têm aproximações independentes, habilitam somente o comportamento dos deslocamentos para ser representados adequadamente. Essa característica foi mostrada por *Cruse et al.*[26], que introduziu a tensão singular no "quarter point" nos elementos de contorno para a representação da singularidade no campo de tensões. O fator de intensidade de tensões pode ser calculado a partir de elementos "quarter point" pelo procedimento de correlação de deslocamento. A aplicação deste procedimento sobre elementos "quarter point", apresentado pela primeira vez por *Blandford et al.*[27], foi chamado formula de dois pontos por *Smith*[28]. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão de tração singular nos elementos de contorno "quarter point" foi apresentado por *Martinez et al.*[29], que mostrou que a utilização dos valores nodais de tração na ponta da trinca do elemento singular é menos sensível para a discretização do que qualquer um dos procedimentos de correlação de deslocamento. Em geral, a precisão dos fatores de intensidade de tensão, calculado a partir de elementos de contorno de "quarter point" pelo procedimento de correlação de deslocamento, depende do tamanho destes elementos como foi apresentado por *Harrop*[30], que estudou o caso do "quarter point" nos elementos finitos e concluiu que não é possível recomendar um determinado tamanho para o elemento do "quarter point", adequado para todas as situações.

Uma aproximação alternativa desenvolvida por *Symm*[31] está baseada na subtração da singularidade do modelo numérico. Na aplicação da mecânica da fratura, a técnica da subtração da singularidade é um procedimento que emprega uma solução particular do problema da trinca para regularizar o campo de tensões e para inserir, simultaneamente, os fatores de intensidade

de tensões como uma incógnita adicional no problema. Esta aproximação foi aplicada pela vez primeira por *Xanthis et al.*[32] para problemas anti-planos e por *Aliabadi*[8] para solução de problemas de fissuras simétricas empregando o método dos elementos de contorno. A análise de problemas simétricos pela técnica da subtração da singularidade é simples, porque as trações singulares estão entre as incógnitas do problema, quando só a metade do problema é considerada com as condições de contorno adequadas ao longo da linha de simetria.

No caso de problemas não simétricos, as trações singulares não estão entre as incógnitas dos elementos de contorno e conseqüentemente, não têm singularidade no modelo numérico para ser subtraído. A aplicação das sub regiões no método dos elementos de contorno é uma forma de ultrapassar esta dificuldade, como foi apresentado por *Aliabadi*[33]. Porém, contornos artificiais introduzidos para este método não são estritamente necessários na análise do problema da trinca. Uma estratégia alternativa, desenvolvida por *Portela et al.*[10], introduz a equação da tensão de um ponto interno se aproximando à ponta da trinca, como uma primeira incógnita na formulação dos elementos de contorno. Assim, o campo de tensões, neste ponto singular interno, agora pode ser regularizado com a técnica de subtração da singularidade. A extensão da técnica da subtração da singularidade para modo de análise de abertura pura de entalhes foi relatada pela primeira vez por *Portela et al.*[34].

A avaliação dos fatores de intensidade de tensão pode ser baseada em integrais de contorno. A integral **J** tem sido utilizada de forma eficaz no método dos elementos de contorno dual, como uma técnica de pós-processamento, para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão por *Portela et al.*[35]. Um procedimento simples, baseado na decomposição do campo elástico em seus respectivos componentes de modo simétrico ou anti-simétricos, é usado para separar o fator de intensidade de tensão de um problema de modo misto. Embora esta técnica não realize uma regularização do campo elástico com a subtração da singularidade da ponta da trinca, é muito preciso. O cálculo do campo elástico nos pontos internos é uma operação de alta precisão no método dos elementos de contorno devido às soluções fundamentais. Apesar de sua precisão, a técnica da integral **J** tende a tornar-se cara quando um elevado número de pontos internos é considerado na integral **J**.

Como uma alternativa na técnica do pós procedimento da integral **J**, o cálculo direto do fator de intensidade de tensões, como uma incógnita adicional no método dos elementos de contorno,

foi apresentado pela vez primeira por *Portela et al.*[2]. Com o fim de evitar dificuldades que surtem da presença da singularidade no modelo numérico, é conveniente subtrair a singularidade do problema original, antes de ser resolvido pelo método numérico. Esta regularização considera a solução particular do problema e obriga ao campo elástico original ser idêntico a essa solução particular, no ponto singular. Em virtude da estrutura analítica da solução particular que representa o campo elástico da ponta da trinca, o problema modificado inclui os fatores de intensidade de tensões como uma incógnita adicional primária. Finalmente, o método numérico pode ser facilmente aplicável para resolver o problema modificado cuja função é agora regular e conseqüentemente levar a soluções altamente exatas.

No método dos elementos finitos, o *hibrid crack-tip element* (HCE) *Tong et al*[15], é um método muito preciso para o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão e os coeficientes de termos de ordem superior da expansão de Williams, como foi mostrado por *Karihaloo et al.* [16] e *Xiao et al.* [17]. O HCE representa a fissura como um super elemento o qual se encontra ligado com o elemento finito envolvente. Isto é muito eficiente na análises de corpos com muitas fissuras, como é reportado por *Zeng et al.* [18]. O HCE é formulado a partir de uma simplificação da função variacional usando deslocamentos assintóticos truncados da ponta da trinca, tensão de expansão e contornos interelementais do deslocamento compatível com o entorno dos elementos finitos regulares. Nesta implementação, a malha geral dos elementos finitos é empregada para a formação do HCE a partir dos elementos que envolvem a ponta da trinca. Conseqüentemente o HCE pode ser facilmente incluído no pacote comercial. Apesar da exatidão, o emprego do HCE apresenta algumas dificuldades. Efetivamente a exclusão dos modos de corpo rígido nos deslocamentos truncados assintóticos geram pulos entre os deslocamentos e os deslocamentos dos elementos de contorno. Se o HCE é só empregado, a parte interior da fissura do HCE não precisa conformar a malha dos elementos finitos. Porém, as faces da fissura afastadas da ponta da trinca, no exterior da região do HCE, devem ser conformados para a malha dos elementos finitos. Isto é uma grande desvantagem dos HCE. É importante ressaltar que a formulação dos HCE não tem similaridade com a formulação apresentada neste documento. De fato, enquanto o HCE tem feito o modelagem numérico do campo elástico incluindo a singularidade na ponta da trinca, a formulação apresentada neste trabalho tira a singularidade antes de empregar a análise com elementos finitos para a regularização do campo elástico.

Os **Meshless** ou *meshfree* methods, ver *Belytschko et al.* [19], recentemente tem recebido muita atenção, já que eles eliminam a necessidade da discretização da malha e assim eles pareciam demonstrar um potencial significativo para o problema do contorno em movimento inerente ao crescimento da fissura. Uma vez que estes métodos usam apenas um conjunto de pontos nodais espalhadas no domínio sem conectividade do elemento, o refinamento da malha exigida pelo MEF é evitado o que simplifica dramaticamente o processo de modelagem. O tratamento de descontinuidades da fissura, a principal questão do método *meshfree*, foram as modelagens de formas diferentes, *Carpinteri et al.* [20], emprega uma extensão virtual da trinca na direção da tangente à ponta da trinca. Enquanto *Wen et al.* [21] considera funções de base enriquecidas no movimento de interpolação dos mínimos quadrados. Porém a principal dificuldade deste procedimento é que o enriquecimento da área é limitada quando múltiplas fissuras são distribuídas ou quando a ponta da fissura esta perto do contorno que é uma desvantagem do método *meshfree*. O método dos elementos finitos XFEM, desenvolvido por *Belytschko et al.*[22] é uma ferramenta moderna de modelagem numérico que oferece grande flexibilidade na análise dos processos de fratura. Os XFEM supera a necessidade de usar malhas de elementos finitos conformando a descontinuidade, bem como uma adaptação do refinamento da malha ao crescimento da fissura, como é o caso dos elementos finitos tradicionais. O XFEM facilita consideravelmente o trabalho com a malha na solução de estruturas complexas, no sentido de que ele não requer a malha de elementos finitos para estar em conformidade com as faces da trinca, mostrado por *Hedayati et al.*[23], no entanto, ele não elimina completamente a necessidade de uma malha adequada na vizinhança da fenda. Há duas principais razões para essas características do método. Em primeiro lugar e tal como acontece com os elementos finitos clássicos, a precisão da solução incrementa com a discretização do tamanho dos elementos finitos. Em segundo lugar, a malha dos elementos finitos não só serve para a discretização, além disso é empregada para definir a geometria da fissura de uma maneira implícita. O tamanho do elemento deve ser suficientemente pequeno para capturar corretamente as características geometrias da trinca. Isso significa que os XFEM ainda precisa de uma malha que é suficientemente fina na vizinhança da fenda em relação as características do comprimentos dessas fissuras.

A formulação do XFEM depende da expansão de Williams a qual é dedicada a trincas retas. Em casos gerais com fissuras não retas a zona singular deve ser definida numa escala na qual a

trinca pode ser considerada reta. Logo a malha dos elementos finitos deve ser suficientemente fina para caber nesta escala. Além dessa dificuldade de refinamento local, a malha resultante levará a um sistema maior de equações, cuja resolução pode tornar-se de custo proibitivo para alguns problemas complexos.

Portanto, enquanto o XFEM faz a aproximação numérica do campo elástico incluindo a singularidade na ponta da trinca, a formulação apresentada neste documento considera uma abordagem radicalmente diferente, que remove completamente a singularidade da ponta da trinca antes de fazer a análise pelos elementos finitos do campo elástico regularizado, convenientemente conduzindo a nenhuma dificuldade de convergência com soluções suaves e altamente precisas.

Em contraste com o método dos elementos de contorno, a regularização do campo elástico da ponta da trinca, para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão no método dos elementos finitos (MEF), não tem recebido muita atenção, pelo o conhecimento do autor. De fato, os diferentes métodos desenvolvidos no MEF possuem uma característica em comum que diz respeito às dificuldades de convergência que surgem na modelagem numérica de campos elásticos com singularidades. Assim há uma clara necessidade de investigação neste campo, a fim de desenvolver novos e eficientes métodos numéricos para o análises dos elementos finitos destes problemas.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

A capacidade dos materiais de se deformar elasticamente faz que eles tenham a capacidade de resistir ou transmitir esforços. A teoria da elasticidade descreve como os sólidos se deformam como resposta as forças externas Figura(1). O objetivo da *teoria da elasticidade linear* é estudar os campos de tensões, deformações e deslocamentos em sólidos deformáveis. Para analisar os modelos dos sólidos deformáveis sujeitos às forças externas, a teoria baseia-se em três tipos de equações: as equações de equilíbrio, cinemáticas e as constitutivas, todas representadas como 15 incógnitas (tabela(1))

Tabela 1: Incógnitas

Deformações	Tensões	Deslocamentos
ϵ_x	σ_x	u_x
ϵ_y	σ_y	u_y
ϵ_z	σ_z	u_z
γ_{xy}	τ_{xy}	
γ_{yz}	τ_{yz}	
γ_{zx}	τ_{zx}	

Como o número de incógnitas é 15, tem que ter 15 funções disponíveis que garantem que as relações sejam cumpridas para descrever completamente o estado de um corpo. Neste capítulo, apresentar-se os princípios e conceitos fundamentais da teoria da elasticidade que suportam a análise elástica linear de problemas da fenda. Sem pretensão de completude, são feitas. As equações de campo da teoria da elasticidade e os princípios da energia que fornecem a base essencial para o trabalho em mecânica da fratura elástica linear são primeiramente revistos a partir dos trabalhos de Love [40] e Sokolnikoff [41]. Os trabalhos de Kannien and Popelar [42] e Broek [43] constituem o recurso principal de referência usado para compilar material de mecânica da fratura pertinente que é apresentado.

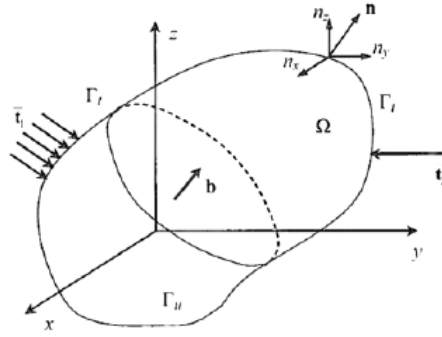


Figura 1: Problema Elástico Tridimensional

3.1.1 Equações de Equilíbrio

Em um elemento infinitesimal atuam forças de volume e forças de superfície que correspondem as forças gravitacionais e as forças determinadas por unidade da área na qual atuam. Considere-se o corpo de volume infinitesimal, com forma de um paralelepípedo de lados d_{x_1} , d_{x_2} e d_{x_3} e em equilíbrio (Figura(2)).

Os índices das tensões indicam a direção da normal ao plano em que atua a tensão e o eixo segundo o qual a tensão se exerce respectivamente. Nos planos também atuam duas componentes de tensão de corte (τ_{ij}) além da tensão normal (σ_{ij}) estes últimos são positivos ou negativos se produzem tração ou compressão respectivamente. O estado de tensão no ponto A pode ser obtido por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

denominado de tensor de tensões. Tendo em conta o plano x, y, z o tensor de tensos ficaria assim

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

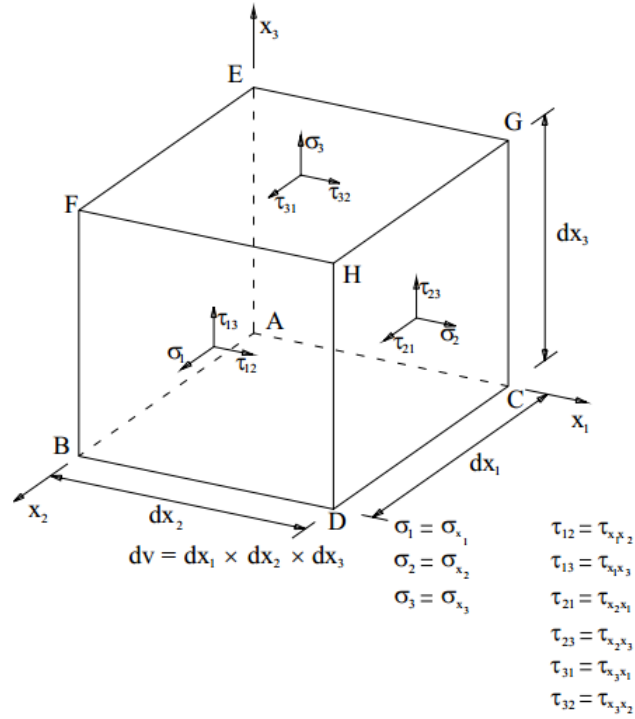


Figura 2: Componentes do tensor de tensões

Na ausência de forças de volume, para que o sólido esteja em equilíbrio em qualquer ponto deste sólido, as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

Tem-se em conta que a propriedade de simetria é válida, resultando em:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.5)$$

As relações (3.2), (3.3), (3.4) denominam-se equações de equilíbrio no corpo, também conhecidas por equações de Cauchy, sendo conhecidas as componentes de σ_{ij} em um ponto qualquer do interior do corpo. Estas equações resumem-se na seguinte

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.6)$$

No contorno, conhecidos todos os componentes é possível obter a relação entre as componentes do vetor das forças de superfície p e as componentes de tensão

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.7)$$

onde n_j são os cossenos diretores do vetor \mathbf{n} normal à superfície do elemento infinitesimal.

3.1.2 Equações da Cinemática

Quando um corpo está submetido a ações externas, sofre alterações em suas dimensões e sua forma. O vetor de deslocamento é dado por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Para garantir que exista uma relação linear entre os deslocamentos e a deformação, considere-se que as deformações são pequenas. Desta forma, mediante o tensor de deformação infinitesimal, podem-se representar adequadamente as condições de deformação. O tensor das deformações é dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Onde a relação simétrica $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ é válida. As componentes do tensor de deformação do problema elástico linear estão relacionadas linearmente com os deslocamentos mediante a relação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.9)$$

3.1.3 Equações Constitutivas

Estas só dependem das características internas dos materiais, as quais relacionam o campo de tensões com a deformação. Se o material for elástico linear isotrópico e homogêneo, as equações

constitutivas são também chamadas a lei de Hooke. Estas equações são expressas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_u + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.10)$$

onde $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ e $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ conhecidas como constantes de Lamé, onde:

E : Módulo de Elasticidade Longitudinal

ν : Coeficiente de Poisson

μ : Módulo de Elasticidade Transversal

δ : Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3.2 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura é um ramo da mecânica dos sólidos deformáveis, que estuda o comportamento dos sólidos e seus defeitos, como a formação e propagação de trincas com o fim de analisar as condições de tensões concentradas devido a efeitos externos que afetam os mesmos T,L, Anderson [3]. O objetivo da mecânica de fratura é relacionar as condições de carga aplicada em um corpo fissurado e as resistências do material ao crescimento da fissura e fratura. A falha ocorre quando a resistência do material à fratura com uma fenda é menor que as condições tensão-deformação impostas pelas condições de carga e geometria.

Os três parâmetros importantes que estudam a mecânica da fratura são:

1. A tensão global aplicada no componente ou estrutura.
2. As propriedades de resistência à fratura, características do material.
3. O tamanho de qualquer defeito semelhante a uma fissura.

As pessoas que começaram com estudo da mecânica da fratura, foram o engenheiro aeronáutico inglês, *Alan Arnold Griffith* que estudou a falha de materiais frágeis com base em dois fatos: a tensão necessária para a fratura do vidro e a tensão teórica para romper os enlaces atômicos do vidro. Em 1957, um grupo de pessoas com a orientação de *George Rankine Irwin* descobriu que a plasticidade tem um papel importante na fratura de matérias dúcteis ”*tendo em conta que*

nos extremos de toda fissura se desenvolve uma zona de plastificação, levando a dizer que para fazer crescer uma fissura em um material dúcteis é necessário mais energia que a requerida em materiais frágeis”. Irwin desenvolve a teoria de taxa de liberação de energia que é mais aplicável aos problemas de engenharia. Irwin fez uma aproximação mostrando que as tensões na ponta da fissura podem-se representar por meio de uma constante chamada *fator de intensidade de tensões*. A publicação do integral J de Rice [44], usada no tratamento de problemas de não linearidade, define um outro ponto de demarcação da história da mecânica da fratura.

3.2.1 Trabalho de Griffith

O ponto de partida do estudo de *Griffith* é baseado nas análises do comportamento do vidro, cabos de aço e placas em que se apresenta uma diferença aproximada de segunda ordem entre a *resistência teórica* e a *resistência máxima do sólido*. Em seus estudos, fazem observações com base em várias formas de defeitos, falhas e imperfeições as quais são responsáveis pelas discrepâncias. Seu enfoque tem como base o cálculo dos esforços máximos apresentados nestas imperfeições e comparadas com as resistências máximas dos materiais. Para realizar a análises, *Griffith* simulou os defeitos com uma falha elíptica, obtendo um resultado que mostra que o cálculo máximo das tensões é independente do tamanho da magnitude da falha e unicamente depende da relação dos eixos da elipse. Esses resultados são baseados em estudos de materiais frágeis, o que leva concluir que a teoria da tensão máxima de *Griffith* não é um critério de resistência adequada e é preciso de uma teoria alternativa.

O novo enfoque de *Griffith* [6] ressalta que os sólidos como os líquidos tem uma energia de superfície necessária para propagação da fissura, a correspondente energia de superfície deve ser compensada através da energia externa acrescentada ou liberada internamente. A teoria é baseada em energia ao invés de concentração de tensões.

Para um sólido com características lineares elásticas, a energia interna necessária, para prolongar a fissura, pode ser calculada como a solução dos correspondentes problemas de fissuras. Aplicando a solução de *Inglis* para uma placa uniformemente carregada com uma falha elíptica, *Griffith* calcula o incremento da energia de deformação e a partir do balanço de energia obtém-se a tensão correspondente à fratura da seguinte maneira:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} * \sqrt{\frac{E^* \gamma_s}{a}} \quad (3.11)$$

Onde $E^* = E$ para tensões planas e $E^* = E/(1 - \nu^2)$ para condições de deformações planas, γ é a energia superficial específica e a é a metade do comprimento da fissura. Assim, a maior contribuição de *Griffith*, com respeito à falha em relação à fratura de sólidos frágeis, foi a capacidade de resolver o problema das tensões infinitas identificadas antes por *Wiegardt* e mostrou que a tensão de fratura é dependente ao tamanho da falha mediante a expressão $\sigma = m/\sqrt{a}$ onde m é a constante do material. Esta expressão foi verificada por meio de alguns experimentos em desenhados em tubos de vidro sob pressão e bulbos esféricas que contêm rachaduras de vários tamanhos.

3.2.2 Trabalho de Irwin

A teoria de *Griffith* foi ignorada no campo da engenharia devido a que, nos materiais estruturais atuais, o nível de energia necessário para ocasionar a falha é de magnitude maior que a correspondente superfície da energia, além de, nos materiais estruturais, sempre há alguma deformação plástica na frente da fissura que faz a suposição de um meio linear elástico com tensões infinitas na ponta da fissura seja pouco realista já que não tem materiais capazes de suportar tensões infinitas.

Irwin [7] introduz um avanço importante na teoria da mecânica da fratura e apresenta uma análise em termos de tensões, considerando que a quantidade de dissipação da energia (zona plástica) em torno da ponta da fissura é menor comparada ao tamanho da fissura. Assim, assume que o fluxo da energia, nas zonas da ponta da fissura, é da massa do sólido e, portanto não será dependente dos estados de tensões próximos à ponta da fissura a qual não foi feito devido ao que os estudos prévios mostram que as tensões na ponta da fissura tendem ao infinito, independente da magnitude da carga aplicada. *Irwin* estabelece um critério diferente para as análises de tensões de fissura, sugerindo que o processo da fratura não pode se concentrar em um só ponto como se havia deduzido nas análises elásticas, mas, em uma zona pequena que é denominada "zona plástica" cujas tensões não são infinitas porque parte da energia elástica é consumida na deformação plástica do material próximo à ponta da fissura. *Irwin* modificou o modelo de *Griffith* incluindo o comportamento plástico e a expressão fica assim:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (3.12)$$

Onde γ_p é o trabalho plástico por unidade de área, γ_s é a energia superficial (energia por unidade de superfície constante característica de um sólido), esta expressão pode ser generalizada, tendo em conta todo tipo de dissipação de energia:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2EW_f}{\pi a}} \quad (3.13)$$

Onde W_f é a energia de fratura que pode incluir os efeitos plásticos, viscoelásticos ou viscoplásticos, dependendo do material. A taxa de liberação de energia G é a medida da energia disponível para que a fissura seja propagada em um incremento da . Este incremento da fissura é conhecido como uma tensão constante em que o trabalho empregado no sistema é transformado em um incremento de energia elástica U_E e em energia consumida na propagação U_R . O trabalho subministrado ao sistema é:

$$dU = P.d\delta \quad (3.14)$$

A parte transformada em energia elástica:

$$dU_E = \frac{1}{2}P.d\delta \quad (3.15)$$

Assim a energia consumida na propagação é:

$$dU_R = dU - dU_E \quad (3.16a)$$

$$dU_R = P.d\delta - \frac{1}{2}P.d\delta = \frac{1}{2}P.d\delta \quad (3.16b)$$

Então:

$$dU_R = dU_E = d \left[\frac{\sigma^2}{2E} B(WL_0 + 2\pi a^2) \right] = 2 \frac{\pi \sigma^2 a}{E} B da \quad (3.17)$$

Tendo em conta que a placa passa a ter uma espessura B e a energia consumida em a propagação é relacionada com a γ_s de *Griffith, Irwin* estabelece a resistência a fratura do material (R) que

vai ser a energia superficial pelo área da fenda nova aparecida por propagação da da fissura

$$G = \frac{dU_R}{dA} = \frac{1}{2B} \frac{dU_R}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.18)$$

Taxa de de energia:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.19)$$

Resistência de fratura do material:

$$R = 2\gamma_s \quad (3.20)$$

Finalmente o critério de equilíbrio do sistema será $R = G$ dali

$$G = R$$

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma_s \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{\frac{sE\gamma_s}{\pi a}} \quad (3.21)$$

3.2.3 Fator de Intensidade de Tensões

O fator de intensidade de tensões é empregado no estudo de tensões perto da ponta da fissura, ou seja, a intensidade de tensão na ponta da fenda causada pela ação de uma força externa ou uma ação da carga residual Anderson, T.L[9]. Quando esta tensão é crítica a fissurase propaga e o material falha. A intensidade de tensões K é um parâmetro que mede a magnitude das tensões aplicadas tendo em conta que essa magnitude depende do tipo de geometria, do tamanho e da localização da fissura e da distribuição das cargas no material. Para um melhor análise se empregam coordenadas polares (r, θ) e é definida σ_{ij} como o tensor de tensões. A teoria elástica linear prediz que a distribuição das tensões (σ_{ij}) próximas à ponta da fissura em coordenadas polares com origem na ponta da fissura tem a forma:

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (3.22)$$

Onde K é o fator de intensidade de tensões e f_{ij} é uma quantidade dimensional que depende da carga e da geometria. Essa relação é valida muito perto na ponta da trinca porque como r

aproxima 0, as tensões σ_{ij} tendem ao infinito. Na análise da mecânica da fratura são empregados três tipos de modos de falha (Figura3):

Modo1 A tensão normal é perpendicular ao plano da fenda.

Modo2 Os deslocamentos da superfície da fenda são perpendiculares ao plano da fenda e os esforços cortantes são paralelos ao plano da fenda.

Modo3 Os esforços cortantes são paralelos ao plano da fenda e os deslocamentos das superfícies da fenda são paralelos à borda principal da fenda

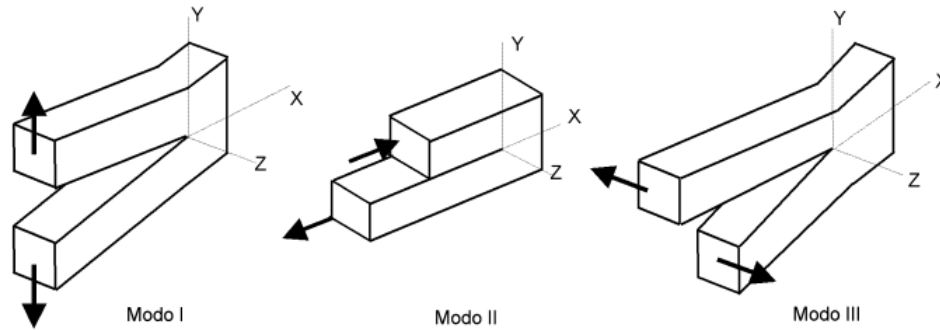


Figura 3: Modos de Falha

Para o estudo do fator de intensidade de tensões nos três métodos, pode-se representar assim:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (3.23a)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yx} \quad (3.23b)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz} \quad (3.23c)$$

3.2.4 Campo Elástico de Carga

Dentro dos limites da elasticidade linear, o campo de tensões é ilimitada na ponta de uma trinca. Isso foi relatado na literatura da engenharia a partir de 1933 por Brahtz [1], sobre o caso geral de cantos entrantes. A forma analítica desta singularidade geométrica foi investigada por Williams [4], que deriva o campo linear elástico fazendo uso do método do valor próprio de expansão sobre a ponta da trinca.

3.2.5 Critério de Fratura

Baseado no postulado fundamental da mecânica da fratura linear elástica, o fator de intensidade de tensões pode ser

$$K_{Ieq} = K_{Ic} \quad (3.24)$$

Onde K_{Ieq} representam o fator de intensidade de tensões do módulo **I**, definido num modo-misto e K_{Ic} representa a deformação plana a qual é um valor crítico do fator de intensidade, tomada como uma propriedade do material. Quando a condição de instabilidade (3.24) é conseguida, a fissura começa a crescer de um modo incontrolável, através de um processo de fratura. Assim a estrutura pode ser projetada de maneira segura garantindo que

$$K_{Ieq} < K_{Ic} \quad (3.25)$$

3.2.6 Taxa de Liberação de Energia

A fratura foi estudado pela primeira vez de forma sistemática por Griffith, que postula que, durante um incremento da extensão de fissura, há conservação da energia total do corpo, composta da soma da energia total potencial, T é um termo adicional, S o qual representa o trabalho gastado em fraturar o material sobre a extensão da fissura. Assim, a conservação da energia do corpo durante a extensão da fissura da pode-se escrever assim:

$$d(T + S) = 0 \quad (3.26)$$

Onde os dois termos da energia são definidos por unidade de espessura do corpo. Quando o trabalho é despendido na fratura o material é expresso como

$$dS = G da \quad (3.27)$$

A equação (3.26) fica assim

$$G = -\frac{dT}{da} \quad (3.28)$$

Onde G é conhecida como taxa de liberação de energia. Dado que G é derivável duma função potencial T , é muitas vezes chamado força motriz de fissura. Para um material ideal frágil, todo

o trabalho despendido na fratura é transformada em energia de superfície, como mostra Griffith [6]. Assim, para os dois acréscimos de superfícies de fratura formada durante um aumento da fissura, a equação (3.27) leva

$$\frac{dS}{da} = G = 2\gamma \quad (3.29)$$

Onde γ indica a densidade de superfície de energia por unidade de área que é uma característica do material. Nesta equação do lado direito representa a resistência à fratura que deve ser superada pela força motriz da fenda, em ordem para produzir um aumento de uma unidade da fenda. A equação (3.29) expressa o critério de equilíbrio de energia de fratura de materiais idealmente frágeis. Para materiais dúcteis, a direita da equação (3.29) deve ser atualizada por um termo adicional que representa a deformação permanente na ponta da trinca. Depois, o trabalho de Irwin [45] e Orowan [46] reconhece-se que a parte mais significativa do trabalho despendido em fraturar o material não é transformada em energia de superfície, mas é dissipado no fluxo de plástico em torno da ponta da fissura e para a criação de uma nova zona plástica a medida que a ponta da fissura se estende. Seja F uma força generalizada por unidade de espessura e Δ o correspondente deslocamento do ponto de carga. Supondo que o corpo esta em equilíbrio e tendo em conta uma extensão da fenda, para condições de cargas fixas prescritas por F , a energia potencial da força externa é dada por

$$P = -F\Delta \quad (3.30)$$

Por o teorema de Clapeyron, a energia de tensão é

$$U = \frac{1}{2}F\Delta \quad (3.31)$$

Conseqüentemente, a energia potencial total na equação $T = U + P$ onde U é a energia potencial interna e P é a energia potencial de forças externas, avalia-se assim:

$$T = U + P = -\frac{1}{2}F\Delta \quad (3.32)$$

e portanto, a equação (3.28) leva

$$G = \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_F \quad (3.33)$$

Para condições de aderência fixas, ou seja, prescritas Δ , a energia potencial de forças externas é nula e a energia de tensão é dada por

$$U = \frac{1}{2}F\Delta \quad (3.34)$$

Conseqüentemente, a energia potencial total é avaliada assim

$$T = \frac{1}{2}F\Delta \quad (3.35)$$

e portanto, a equação 3.28 leva

$$G = -\frac{1}{2}\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_{\Delta} \quad (3.36)$$

Em virtude da elasticidade linear assumida, resulta que

$$\Delta = CF \quad (3.37)$$

Onde C é a flexibilidade do corpo por unidade de espessura, também chamado conformidade.

Quando a equação (3.37) é combinada com as equações (3.33) ou (3.36), é obtido o resultado

$$G = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{C^2} \frac{dC}{da} \quad (3.38)$$

Isto leva à conclusão de que a taxa de liberação de energia é independente do tipo de carga. A relação entre a taxa de liberação de energia e o fator de intensidade de tensão pode ser estabelecida da equação (3.28), por meio do teorema da energia e a forma assintótica do campo elástico na ponta da trinca, para um corpo com fissuras onde o comprimento da fissura é aumentado de a até $a + da$, é dado por

$$G = -\frac{dT}{da} = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.39)$$

Onde $E' = E$ para tensões planas e $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ para deformações planas.

4 TÉCNICA DA SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE

4.1 CAMPO ELÁSTICO ORIGINAL

Tendo em conta uma chapa com fissura em duas dimensões Figura (4) com domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Na ausência de forças de volume, a equação que satisfaz o campo de elasticidade é:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.3)$$

No domínio Ω , com condições de contorno

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ no contorno } \Gamma_u \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \text{ no contorno } \Gamma_t, \quad (4.5)$$

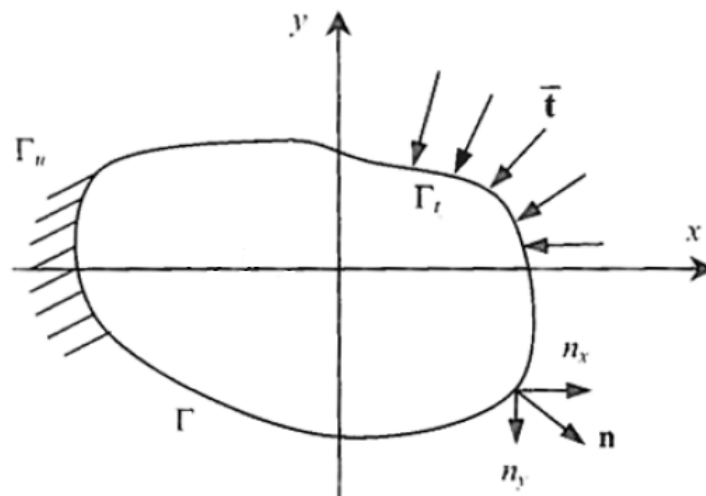


Figura 4: Problema Elástico em Duas Dimensões

Onde o vetor σ representa as componentes de tensão:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

ε representa as componentes de deformação:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

\mathbf{D} é a matriz de constantes elásticas:

Para deformação plana

$$\mathbf{D} = \frac{E}{2((1+\nu)(1-2\nu))} \begin{bmatrix} 2(1-\nu) & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e para tensão plana:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

\mathbf{L} é a matriz do operador diferencial

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

O vetor \mathbf{u} e \mathbf{t} representam as componentes de deslocamento e tração; $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ representam valores prescritos do deslocamento e da tração respectivamente

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \bar{\mathbf{u}}_y \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_x \\ \bar{\mathbf{t}}_y \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

E \mathbf{n} representa os componentes da normal unitária no contorno, dirigida para o exterior.

$$\mathbf{n}_{[2*3]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_x & 0 & \mathbf{n}_y \\ 0 & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

4.2 REGULARIZAÇÃO DO CAMPO ELÁSTICO

Por causa das dificuldades de convergência que surgem na modelagem numérica de problemas elasto-estáticos com o campo singular, uma técnica alternativa envolvendo a subtração da singularidade pode ser usada. Antes de apresentar esta técnica, que introduz os fatores de intensidade de tensão como incógnitas adicionais no problema, algumas definições de fundamentos serão apresentadas, relativas aos campos elásticos singulares. Um campo singular é definido como aquele com tensões ilimitadas em um ponto no domínio do problema, mas com deslocamento limitado em todos os lugares. Em contraste, um campo elástico regular tem tanto as tensões e os campos de deslocamentos limitado em todos os pontos no domínio do problema. É bem sabido que o campo de tensões é singular na vizinhança da ponta de uma fenda. A fim de evitar dificuldades numéricas, resultantes da presença de uma singularidade no campo de tensões, é conveniente modificar o problema original antes de ser resolvido pelo método dos elementos finitos. Sob a hipótese de comportamento linear, onde o princípio da superposição é válido, o campo elástico pode ser decomposto em um parte regular (R) e uma singular (S) assim:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S) + \sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^S \quad (4.14)$$

e

$$u_i = (u_i - u_i^S) + u_i^S = u_i^R + u_i^S, \quad (4.15)$$

Onde $\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S$ e $u_i^R = u_i - u_i^S$ são componentes regulares, respectivamente dos campos de tensão e deslocamento do problema inicial; σ_{ij}^S e u_i^S são respectivamente componentes de tensão e deslocamento de uma solução particular do problema inicial, representando o campo elástico singular. Se as funções apropriadas foram escolhidas para este campo singular particular, então a equação (4.14) e (4.15) regulariza completamente o problema inicial, no sentido em que os componentes de tensão σ agora são não singulares. Como consequência dessa regularização, a análise do problema elástico pode agora ser levada a cabo só no campo regular, representado pelos componentes σ_{ij}^R e u_i^R ; os componentes σ_{ij}^S e u_i^S do campo singular satisfazem automaticamente as equações de campo porque elas são definidas como uma solução particular do problema inicial. Assim, as equações de elasticidade (4.1) até (4.3) agora podem ser escritas como:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{L} \mathbf{u}^R \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (4.18)$$

no domínio Ω , com condições de contorno

$$\mathbf{u}^R = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^S \quad \text{no contorno } \Gamma_u \quad (4.19)$$

$$\mathbf{t}^R = \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S \quad \text{no contorno } \Gamma_t. \quad (4.20)$$

Note que este campo elástico regularizado é regido pelas mesmas equações do campo original, exceto para as condições de contorno (4.19) e (4.20) cujos termos adicionais, respectivamente \mathbf{u}^S e \mathbf{t}^S foram agora incluídos.

4.3 SOLUÇÃO PARTICULAR DE WILLIAMS

A solução particular que foi usada na equação (4.14) and (4.15), denotado por componentes σ_{ij}^S and u_i^S , representa o campo singular elástico na vizinhança da ponta da trinca. Pode ser considerada através do primeiro termo da serie de expansão derivada por *Williams*[4]. *Caicedo et al.*[5] (ANEXO B), demonstraram que apesar que a expansão em serie de Williams ter sido desenvolvida para uma trinca lateral semi infinita, seu termo singular pode ser usado para representar o

campo elástico singular numa vizinhança ponta da trinca para qualquer tipo de trinca, interna ou lateral sob deformação em modo misto. Considerando o primeiro termo da expansão em séries de Williams. As componentes de tensão são:

$$\sigma_{11}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (4.21)$$

$$\sigma_{22}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (4.22)$$

$$\sigma_{12}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \quad (4.23)$$

e os deslocamentos associados são dados por

$$u_1^S = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.24)$$

$$u_2^S = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right]. \quad (4.25)$$

Onde K_I e K_{II} são os respectivos fatores de intensidade de tensão em modo I e modo II, respectivamente; a constante $\kappa = 3 - 4\nu$ é definida para deformação plana e $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para tensão plana, onde ν é a razão de Poisson; a constante μ é o módulo de distorção. O sistema de referência de coordenadas polares (r, θ) é centrado na ponta da trinca, de tal maneira $\theta = 0$ é o eixo da fissura, em frente da ponta da trinca, como se representa na Figura (5). Note que o campo de tensão é do ordem $r^{-1/2}$ que se torna singular quando r tende a zero. Observe também que o campo de deslocamento não inclui termos de corpo rígido, portanto, levando a componentes nulas na ponta da trinca.

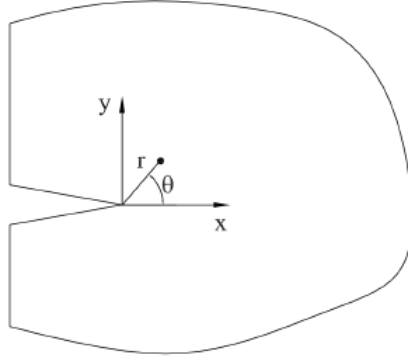


Figura 5: Sistema de referencia para a solução particular de Williams

O campo de tensões, as equações (4.21) até (4.23), são usadas para definir as componentes de tração no ponto de contorno como

$$\mathbf{t}^S = \begin{bmatrix} t_1^S \\ t_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^S & \sigma_{21}^S \\ \sigma_{11}^S & \sigma_{21}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

Onde n_i denota a i -ésima componente da normal unitária ao contorno, dirigida para o exterior e as funções $g_{ij} = g_{ij}(r^{-1/2}, \theta)$ foram introduzidas para uma notação abreviada mais conveniente da equação (4.21) ate (4.23). Similarmente, o campo de deslocamentos, as equações (4.24) e (4.25) são definidas em um vetor dado por

$$\mathbf{u}^S = \begin{bmatrix} u_1^S \\ u_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

Onde os termos $f_{ij} = f_{ij}(r^{1/2}, \theta)$ são notações abreviadas da equação (4.24) e (4.25).

5 ANÁLISE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Uma vez que uma solução formal do campo campo elástico regularizado, definido pelas equações de campo (4.16) até (4.18), com condições de contorno (4.19) e (4.20), não é geralmente conhecida para problemas práticos, a discretização deve ser usado com o fim de obter uma solução numérica aproximada. O método dos elementos finitos é possivelmente o modelo disponível de discretização mais popular em engenharia, Zienkiewicz [12]. Quando o método é baseado na formulação de resíduos ponderados, o ponto de partida é a forma fraca

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{RT} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^R d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S)^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma, \quad (5.1)$$

Em que o deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}^R$ representa funções de ponderação arbitrárias da aproximação de Galerkin. Os detalhes desta derivação da forma fraca podem ser vistos em Portela *et al.* [13]. O cálculo da forma fraca (5.1) é baseada na discretização do domínio e do contorno com uma malha de elementos finitos, onde o domínio contínuo Ω é substituído por uma malha de elementos finitos Ω^e e as condições de contorno Γ são substituídas pela montagem dos elementos finitos Γ^e . Através deste processo de discretização, o método dos elementos finitos reduz o número de infinitos graus de liberdade do problema contínuo para um número finito de incógnitas definidas nos nós dos elementos.

5.1 EQUAÇÕES DOS ELEMENTOS FINITOS

Considere a discretização do domínio Ω em elementos finitos Ω^e o que implica na discretização do contorno Γ em elemento finitos Γ^e . Este processo de discretização é normalmente representado por

$$\Omega = \sum_e \Omega^e \quad \text{e} \quad \Gamma = \sum_e \Gamma^e.$$

Em cada elemento finito Ω^e uma aproximação local direta é definida assim

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{N} \mathbf{u}^e, \quad (5.2)$$

Onde \mathbf{u}^e denota os graus de liberdade do elemento que são os deslocamentos nodais e \mathbf{N} denota as funções de forma atribuídos aos graus de liberdade do elemento. A aproximação de deslocamento assumida, que implica a conseqüente aproximação das deformações e tensões, é também definida em termos dos deslocamentos nodais, respectivamente assim

$$\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{L}\mathbf{u}^R = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e. \quad (5.4)$$

O deslocamento virtual e as tensões virtuais são definidas em termos do deslocamento nodal virtual $\delta\mathbf{u}^e$, respectivamente assim

$$\delta\mathbf{u}^R = \mathbf{N}\delta\mathbf{u}^e \quad (5.5)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}^R = \mathbf{L}\mathbf{N}\delta\mathbf{u}^e = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}^e. \quad (5.6)$$

Quando esta aproximação é introduzida na forma fraca (5.1), obtém-se a seguinte equação

$$\delta\mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{u}^e - \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{N}^T (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) d\Gamma \right\} = 0. \quad (5.7)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta\mathbf{u}^e$ são arbitrários, a equação

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{Q}^e \quad (5.8)$$

é satisfeita por cada um dos elementos finitos, onde

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (5.9)$$

é a matriz de rigidez do elemento e os vetores

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (5.10)$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^S d\Gamma \quad (5.11)$$

definem o elemento vetor de carga do elemento que da origem às forças nodais equivalentes. Quando as trações singulares, definidas na equação (4.26,) são inseridas no vetor de carga \mathbf{Q}^e , a equação (5.11) pode ser escrita

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} d\Gamma = \mathbf{G}^e \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^e \mathbf{k}, \quad (5.12)$$

na qual a matriz \mathbf{G}^e tem 2 colunas e tantas linhas como o vetor \mathbf{u}^e das incógnitas, e o vetor \mathbf{k} denota os fatores de intensidade de tensões K_I e K_{II} . Como os fatores de intensidade de tensões são desconhecidos nesta fase do problema geral, eles vão ser as primeiras incógnitas adicionais. Assim, a equação de elementos (5.8) pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{G}^e \mathbf{k} \quad (5.13)$$

e reorganizados como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{G}^e \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

com o fim de agrupar as incógnitas no lado esquerdo das equações.

5.2 MONTAGEM DO ELEMENTO

A montagem das matrizes dos elementos \mathbf{K}^e , \mathbf{G}^e and \mathbf{P}^e , processada de acordo com as respectivas incidências dos elementos, gera as correspondentes matrizes globais \mathbf{K} , \mathbf{G} e \mathbf{P} para toda a malha de elementos finitos. Esta operação, suportada pela condição de compatibilidade reduzida, é geralmente representada, respectivamente por

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{G} = \sum_e \mathbf{G}^e \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \sum_e \mathbf{P}^e.$$

Através do processo de montagem, as equações de elementos (5.14) levam as equações de malha de elementos finitos globais representados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Note que estas equações globais introduzem duas incógnitas adicionais, o fator de intensidade de tensões K_I e K_{II} representado no vetor \mathbf{k} . Conseqüentemente, a fim de obter uma solução única para o problema regularizado, é necessário especificar duas restrições adicionais, ou seja, uma para cada modo de deformação incluídos no análise. Estas restrições adicionais serão especificadas na última linha da equação (5.15).

5.3 RESTRIÇÕES ADICIONAIS

As restrições adicionais podem ser especificadas de várias maneiras diferentes. No entanto, elas devem ser tais que forcem o cancelamento da singularidade no campo regularizado, introduzida por meio das equações (4.14) e (4.15). As condições mais óbvias que refletem essa consideração é que o campo de deslocamento regular ou o campo de tensão regular seja anulado na ponta da trinca, isto é

$$u_i^R = 0 \Rightarrow u_i = u_i^S, \quad (5.16)$$

ou

$$\sigma_{ij}^R = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^S \quad (5.17)$$

o que garantirá que o campo elástico original fica singular na ponta da trinca. Uma vez que o problema é formulado em termos de deslocamentos nodais regularizados u_i^R , as restrições adicionais devem ser definidas em termos dos componentes incluídos em \mathbf{u}^R , com o fim de ser eficaz. Daí, para satisfazer este requisito, as condições (5.16) podem ser utilizadas como restrições adicionais. No entanto, uma vez que os componentes de deslocamento do campo elástico singular, equações (4.24) e (4.25), não incluem termos de corpo rígido, o uso da condição (5.16) leva a componentes nulos do deslocamento do problema original na ponta da trinca que podem sobre restringir o problema original. Portanto, a utilização da condição (5.16) como restrições adicionais a serem especificadas nas equações (5.17) é descartada.

Por outro lado, as condições (5.17) não são definidas em termos dos componentes nodais do deslocamento regularizado u_i^R incluído em \mathbf{u}^R ; portanto, eles não podem ser usados simplesmente na forma em que estão, com o fim de definir de forma eficaz as restrições adicionais

exigidos pela equação (5.15). Para superar esta dificuldade, as condições (5.17) são reescritas primeiro em termos dos respectivos componentes de tração definida na ponta da trinca, como

$$t_j^R = \sigma_{ij}^R n_i = 0 \Rightarrow t_j = t_j^S, \quad (5.18)$$

onde n_i representam os componentes da normal unitária na fissura, dirigida para o exterior. Consideremos agora o conjunto de elementos finitos que compartilham o nó da ponta da trinca. Quando estes elementos são submetidos a um deslocamento de corpo rígido arbitrário, as condições de (5.18) são exatamente satisfeitas. Este deslocamento de corpo rígido pode ser facilmente implementado por meio de um conjunto de condições multi restrição, especificando deslocamentos idênticos para o nó da ponta da trinca e cada nó do conjunto referido de elementos finitos. Embora este procedimento seja eficaz, porque as condições de multi restrição são definidos em termos dos componentes dos deslocamentos nodais u_i^R incluído em \mathbf{u}^R , isto pode afetar a exatidão da solução. É um inconveniente que pode ser facilmente ultrapassado através de um refinamento da malha em torno da ponta da trinca.

Por uma questão de simplicidade, a estratégia adotada neste trabalho, para definir as restrições adicionais exigidas na equação (5.15), considera deslocamentos idênticos apenas para o nó da ponta da trinca e seu nó vizinho logo à frente da ponta da trinca, o que minimiza a desvantagem a que se refere a condição de corpo rígido aplicado a todos os nós dos elementos que compartilham a ponta da trinca. Assim, as limitações adicionais que devem ser especificadas na equação (5.15) são definidas como

$$\mathbf{u}_r^R = \mathbf{u}_s^R, \quad (5.19)$$

onde r representa o nó da ponta da trinca e s representa o nó à frente da ponta da trinca; \mathbf{u}_r^R representa a componente do deslocamento do nó da ponta da trinca, enquanto \mathbf{u}_s^R representa a componente do deslocamento do nó frente à ponta da trinca. A implementação desta estratégia é bastante simples. Considere, por exemplo, que a numeração do nó na ponta da trinca é r o que leva à atribuição de graus de liberdade $2r - 1$ e $2r$ para o nó. Considere-se também que a numeração do nó vizinho à frente da ponta da trinca é s , que agora leva à atribuição de graus de liberdade $2s - 1$ e $2s$ para este nó. De acordo com esta hipótese, as restrições adicionais (5.19) podem ser incluídas na análise por meio de uma simple modificação da última linha do sistema global da equação (5.15) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

onde a matriz \mathbf{C} é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

onde, para a hipótese de numeração considerado, os termos unitários estão nas colunas $2r - 1$ e $2r$, para ser multiplicado pelos termos correspondentes de \mathbf{u}_r^R e os termos -1 estão nas colunas $2s - 1$ e $2s$, para ser multiplicado pelos termos correspondentes de \mathbf{u}_s^R .

5.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO DESLOCAMENTO

Como um método de domínio, o modelo de elementos finitos satisfaz exatamente algumas das condições de contorno, que portanto, gera resíduos nulos que não foram incluídos na equação dos resíduos ponderados. Este é o caso das condições de contorno essenciais (4.19) que não foram incluídas na equação de resíduos ponderados (5.1) o que levou ao sistema de equações algébricas (5.20). Conseqüentemente, este sistema de equações deve ser modificada a fim de que a sua solução satisfaça exatamente as condições de contorno essenciais.

Existem vários processos de introdução das condições de contorno essenciais no sistema de equações, ver Bath *et al.* [36]. Para introduzir o mais simples desses métodos, consideram que o número do nó i com graus de liberdade atribuído $2i - 1$ and $2i$, tem deslocamentos restritos dados pelas condições de contorno essenciais (4.19) como:

$$\mathbf{u}^R = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^S \quad (5.22)$$

que é

$$\begin{bmatrix} u_{2i-1}^R \\ u_{2i}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{2i-1} \\ \bar{u}_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

O método mais simples é feito em três passos. No primeiro passo, os valores nodais conhecidos da condição de contorno, respectivamente \bar{u}_{2i-1} and \bar{u}_{2i} , são multiplicados pelas respectivas

colunas $2i - 1$ e $2i$ da matriz \mathbf{K} , ver equação (5.20) e o resultado é adicionado ao lado direito de \mathbf{P} . No segundo passo, as filas $2i - 1$ e $2i$, bem como as colunas $2i - 1$ e $2i$ da matriz \mathbf{K} são preenchidas com zeros, enquanto os respectivos termos diagonais são substituídos pela unidade. No terceiro passo, as linhas correspondentes do lado direito, respectivamente P_{2i-1} e P_{2i} são substituídas pelos valores nodais conhecidos, respectivamente \bar{u}_{2i-1} e \bar{u}_{2i} . Finalmente, as linhas $2i - 1$ e $2i$ da matriz \mathbf{G} são substituídas, respectivamente por $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$. Agora, as linhas $2i - 1$ e $2i$ do sistema de equações são dadas por

$$\begin{bmatrix} u_{2i-1}^R \\ u_{2i}^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{2i-1} \\ \bar{u}_{2i} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Alternativamente, o método dos multiplicadores de Lagrange, ver Felippa [37], pode ser utilizado para introduzir as condições de contorno essenciais do sistema de equações. Neste caso, a forma fraca dos resíduos ponderados (5.1) é expandida para incluir as condições de contorno essenciais (4.19) através de multiplicadores de Lagrange λ , como

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{RT} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^R d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S)^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u}^R - \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^S)^T \delta \lambda d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma, \quad (5.25)$$

No qual $\delta \lambda$ representa variações arbitrárias dos multiplicadores de Lagrange. Esta forma fraca estendida gera as equações de elementos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{G}^e & \mathbf{A}^{eT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^e & \mathbf{F}^e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{k} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^e \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

na qual

$$\mathbf{A}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T d\Gamma, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{V}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (5.28)$$

e, usando a equação (4.27)

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} d\Gamma. \quad (5.29)$$

Após a montagem das equações de elementos e com a introdução das restrições adicionais (5.19), a forma fraca estendida (5.25), eventualmente, leva para o sistema global de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Que pode ser resolvida por Gauss.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta dissertação apresenta o cálculo direto do fator de intensidade de tensões no método dos elementos finitos, através da subtração da singularidade na ponta da trinca, para fornecer uma maneira mais eficiente de analisar a deformação de chapas homogêneas com fissuras.

Um programa de computador, que implementa esta nova formulação com elementos finitos triangulares lineares, foi desenvolvido e usado para resolver alguns exemplos numéricos os quais incluem dois diferentes casos de chapas com fissura lateral finita, respectivamente sob o modo de carga de abertura e de deslizamento. Os resultados demonstram claramente a fiabilidade desta formulação.

Os problemas englobam casos cujas soluções se encontram nos manuais da fratura. O estudo dos problemas de mecânica da fratura tem como intuitivo a avaliação da capacidade da técnica de subtração da singularidade na ponta da trinca no método dos elementos finitos. O uso da técnica é para determinação de K_I e K_{II} comparados com soluções conhecidas na literatura para testar a precisão dos resultados obtidos no programa feito no Maple.

6.1 PLACA COM FISSURA LATERAL SOB MODO DE CARGA DE ABERTURA

Considere uma placa quadrada, com única trinca normal a uma aresta, como esta mostrada na Figura 6. O comprimento da trinca é denotado por a , a largura da placa é denotada por w e a altura por $h = w/2$. A posição da trinca é definida por coordenadas cartesianas por $0 \leq x \leq a$ e $y = 0$. A placa está sujeita à ação de uma tração uniforme $\bar{\mathbf{t}} = \sigma$, atuando numa direção perpendicular à trinca e aplicado simetricamente nas extremidades, o que corresponde a um modo de abertura de carregamento. Os resultados foram obtidos para os casos em que $h/w = 0.5$ de modo a ser comparados com os publicados por Civelek *et al.* [38]. Cinco casos foram considerados, com $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ e 0.6 , respectivamente. Um estudo da convergência foi realizado com três malhas diferentes; a convergência foi alcançada, para todos os cinco casos de comprimento de trinca considerados, com uma malha de 576 elementos finitos, em que a discretização foi refinada em torno da ponta da trinca. Os resultados obtidos com esta malha de elementos finitos são apresentados na Tabela 2 e apresentam um elevado nível de precisão

quando são comparados como aqueles de Civelek *et al.* [38]. É importante notar que os fatores de intensidade de tensão do modo de deslizamento são sempre abaixo de 10^{-7} como é esperado, uma vez que o problema é principalmente um modo de deformação de abertura. A Figura 7 mostra a malha de elementos finitos e as condições de contorno para o caso $a/w = 0.6$. A Figura (8) mostra as malhas de elementos finitos iniciais e deformadas tanto do problema original como do campo elástico regularizado, para o caso $a/w = 0.6$. Note-se a diferença das superfícies de abertura da trinca nos casos do campo original e o campo elástico regularizado. Observe também a influência das condições de contorno (5.22) no campo de deslocamento regularizado.

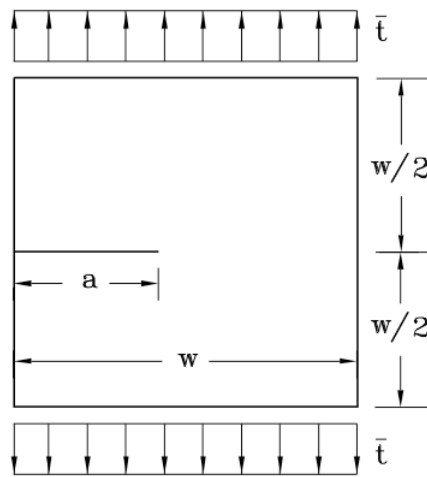


Figura 6: Placa quadrada com uma trinca simples na aresta sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).

a/w	$K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$	
	MEF	Referencia [38]
0.2	1.454	1.488
0.3	1.825	1.848
0.4	2.311	2.324
0.5	3.014	3.010
0.6	4.147	4.152

Tabela 2: Fator de intensidade de tensões para uma trinca simple na aresta numa placa quadrada sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).

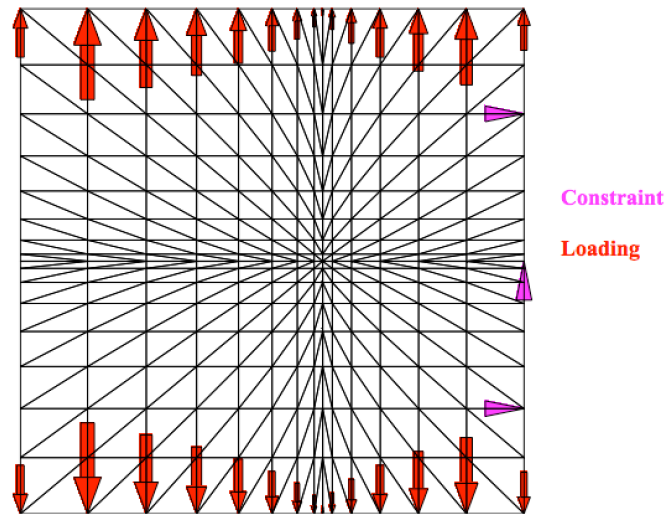


Figura 7: Malha de elementos finitos e condições de contorno usado para o caso $a/w = 0.6$ sob modo de abertura ($h/w = 0.5$).

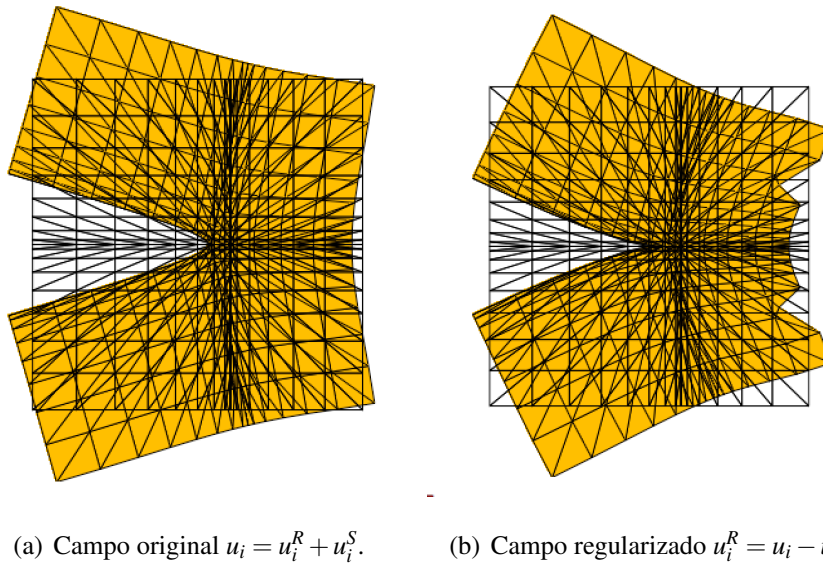


Figura 8: Malhas iniciais e deformadas de elementos finitos para o caso $a/w = 0.6$ sob modo de carga de abertura

6.2 PLACA COM FISSURA LATERAL SOB MODO DE CARGA DE DESLIZAMENTO

Considere uma placa quadrada, com uma única trinca normal a uma aresta, como é representada na Figura (9). O comprimento da trinca é indicado por a e a relação entre a altura e a largura da placa é dada por $h/w = 0.5$. A placa é carregada com uma tração uniforme $\bar{t} = \sigma$, atuando agora numa direção paralela à fenda e aplicada anti-simetricamente nos lados, o que corresponde a uma carga de modo deslizante. Este é um caso muito difícil, para o qual não há referência de resultados publicados. Por conseguinte, os resultados obtidos com esta formulação foram comparados com os obtidos pelo método dos elementos de contorno dual e a técnica da integral **J**, usando o software [39]. Esta combinação do método dos elementos de contorno dual com a técnica da integral **J** é uma ferramenta extremadamente precisa, porque ele usa o campo elástico calculado em pontos internos que é uma operação de alta precisão no método dos elementos de contorno devido às soluções fundamentais. Cinco casos foram considerados, com $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ e 0.6 , respectivamente. O estudo da convergência foi realizado com três malhas diferentes; a convergência foi alcançada, para todos os cinco casos de comprimento de trinca considerados, com uma malha de 512 elementos finitos, onde a discretização foi refinada em torno da ponta da trinca. Os resultado obtidos com esta malha de elementos finitos, apresentados na Tabela (3) são muito exatos; os resultados apresentados correspondem aos obtidos com o método dos elementos de contorno dual e com a técnica da integral **J** em duas casas decimais. É importante notar que os fatores de intensidade de tensão do modo de abertura-deformação são sempre abaixo de 10^{-3} , visto que este é principalmente um problema de abertura-deformação. A Figura (10) mostra a malha de elementos finitos e as condições de contorno utilizado para o caso $a/w = 0.6$. As malhas de elementos finitos iniciais e deformados dos campos elásticos originais e regularizados, para o caso $a/w = 0.6$ são mostrados na Figura (11) onde a influencia das condições de contorno (5.22) no campo de deslocamento regularizado pode ser visto.

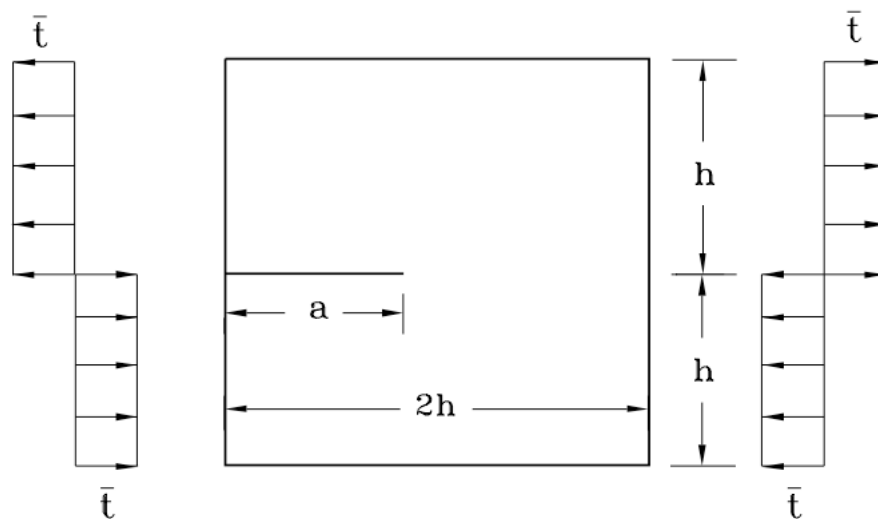


Figura 9: Placa quadrada com uma trinca simples na aresta sob modo de deslizamento ($w = 2h$).

a/w	$K_{II}/(\bar{\tau}\sqrt{\pi a})$	
	MEF	Referencia [39]
0.2	0.437	0.435
0.3	0.356	0.358
0.4	0.303	0.304
0.5	0.263	0.262
0.6	0.223	0.223

Tabela 3: Fatores de intensidade de tensão para uma placa quadrada com fissura simples na aresta sob modo-deslizamento de carregamento ($h/w = 0.5$).

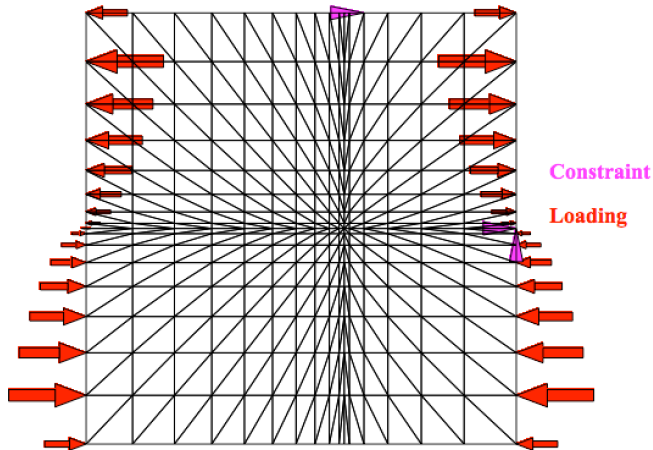
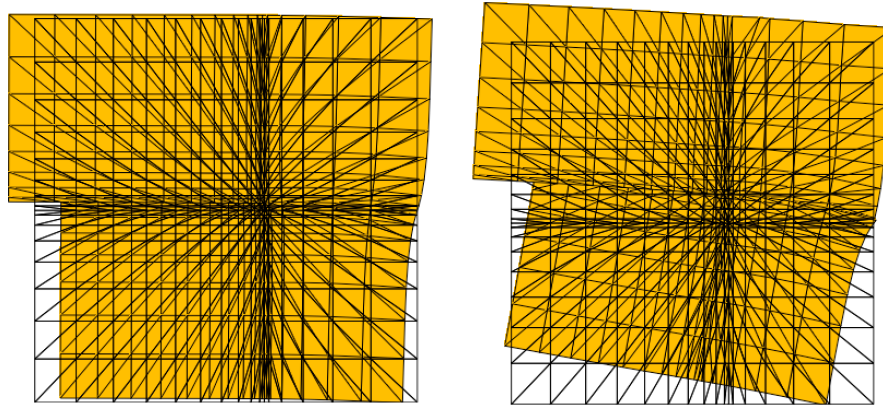


Figura 10: Malha de elementos finitos e condições de contorno para o caso $a/w = 0.6$ sob modo-deslizamento de carregamento ($h/w = 0.5$).



(a) Campo original $u_i = u_i^R + u_i^S$.

(b) Campo regularizado $u_i^R = u_i - u_i^S$.

Figura 11: Malhas iniciais e deformadas de elementos finitos para o caso $a/w = 0.6$ sob carga de modo de deslizamento

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho apresenta o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão, para fornecer uma maneira eficiente e rigorosa de analisar a deformação das placas fissuradas com o método dos elementos finitos. Esta característica que é o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão na análise de elementos finitos é uma consequência natural de um processo de regularização que utiliza uma solução particular singular do problema da trinca, para apresentar os fatores de intensidade de tensão como incógnitas primárias adicionais na análise dos elementos finitos. Neste trabalho, o termo singular da expansão em série de Williams é a solução particular usado no processo de regularização de qualquer problema de trinca.

A confiabilidade desta estratégia de modelagem, que regulariza o problema elástico através da subtração da singularidade na ponta da trinca, antes de sua solução com o método dos elementos finitos, foi avaliada fazendo a análise da placa com trinca lateral sob modo-abertura e modo-deslizamento; os resultados obtidos demonstram claramente a excelente precisão desta nova formulação do método dos elementos finitos.

Apesar dos resultados altamente precisos obtidos no presente trabalho, é necessário continuar a pesquisa, a fim de melhorar a eficiência da estratégia de modelagem subtração da singularidade. Com efeito, uma vez que a análise dos elementos finitos é feita em um problema elástico regularizado, que por tanto não requer o uso de malhas refinadas em torno da ponta da fissura. No entanto, considerando-se as restrições adicionais (5.19), utilizadas para satisfazer as condições adicionais no processo de regularização, elas requerem malhas refinadas ao redor da ponta da trinca, a fim de obter resultados precisos. Portanto, com vista à mesma precisão dos resultados obtidos com a análise dos elementos finitos feitos em malhas regulares, em vez dos refinados, é necessário considerar as restrições adicionais alternativas (5.16) que, em geral, não é possível, sem incluir no primeiro termo da expansão em série de Williams, termos adicionais para dar conta da possibilidade de descrever os deslocamentos de corpo rígido. Essa é uma questão para os futuros trabalhos de pesquisa que eventualmente levará a resultados precisos, com uma estratégia eficiente de modelagem subtração-singularidade no método dos elementos finitos.

Os trabalhos desenvolvidos no âmbito desta pesquisa estão apresentados nos Anexos A e B. O trabalho do Anexo A aguarda decisão dos referees e o Anexo B já está publicado .

Referências

- [1] Brahtz, J.H.A *Stress Distribution in a Reentrant Corner* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 55:31-37 (1933).
- [2] Portela, A., Aliabadi, M.H, Rooke,D.P *Dual Boundary Element analysis of Cracked Plates: Singularity Substraction Technique* International Journal of Fracture, 55:1728(1992).
- [3] T,L. Anderson *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* CRC Press (1995).
- [4] Williams, M.L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Applied Mechanics*, 526–528, (1952).
- [5] Caicedo, J., Portela, A., Cracked Plate Analysis with the Dual Boundary Element Method and Williams’ eigenexpansion, *J. of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 52: 16?-23 (2015).
- [6] Griffith, A.A *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids* Philosophical Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol 5, pp.219-241 (1913).
- [7] Irwin, G.R *Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys* Sagamore Research Congerence Proceeding, Vol 2, pag 289-305 (1956).
- [8] Aliabadi, M.H, Rooke, D.P, Cartwright, D.J *An Improved Boundary Element Formula-tion for Calculating Stress Intensity Factors: Application to Aerospace Structures* J. Strain Analysis, 22 (4), 1-5 (1987).
- [9] Anderson, T.L *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications* CRC.Press Second Edition (2005).
- [10] Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32: 445?470, (1991).
- [11] Portela, A., Aliabadi, M.H., On the Accuracy of Boundary and Finite Element Techni-ques for Crack Problems in Fracture Mechanics, in C.A. Brebbia (Editor), Proc. Eleventh Int. Conf. on Boundary Element Methods, Cambridge, U.S.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., (1989).

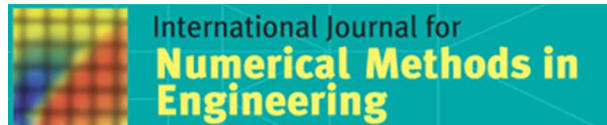
- [12] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill, New York, (1977).
- [13] Portela, A., Charafi, A., *Finite Elements Using Maple – A Symbolic Programming Approach*, Springer, Berlin, (2002).
- [14] Tong, P., Pian, T.H.H., The Convergence of the Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems, *Int. J. of Solids and Structures*, 3:865-879, (1967).
- [15] Tong, P., Pian, T.H.H., Larsy, S.J., A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 7:297-308, (1973).
- [16] Karihaloo, B.L., Xiao, Q.Z., Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity, *Engng. Frac. Mech.* 68:1609-30,(2001).
- [17] xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Liu, X.Y., Direct determination of SIF and higher order terms of mixed-mode cracks by a hybrid crack element, *Int. J. Fract.* 125:207-25,(2004).
- [18] Zeng, D., Katsube, N., Zhang J.M., Soboyejo, W., Hibrid crack-tip element and its applications, *Finite Elem. Anal. Des.*, 38:319-35,(2002).
- [19] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Meshless methods: an overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139,14:347,(1996).
- [20] Carpinteri, A., Ferro, G., Ventura, G., The partition of unity quadrature in element-free crack modelling, *Computers and Structures*, 81:1783-1794,(2003).
- [21] Wen, P.H., Aliabadi, M.H., Applications of meshless method to fracture mechanics with enriched radial basis functions, *Durability of Structures and Health Monitoring*, 3:1017-119,(2007).
- [22] Belytschko, T., Black, Y., Organ, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 45:601-620,(1999).
- [23] Hedayati E., Vahedi M., Y., Using extended finite element method for computation of the stress intensity factor, crack growth simulation and predicting fatigue crack growth in a slant-cracked plate of 6061-T651 aluminum, *World Journal of Mechanics*, 4:24-30,(2014).

- [24] Henshell, R.D. and Shaw, K.G., Crack Tip Elements are Unnecessary, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 9:495-509, (1975).
- [25] Barsoum, R. S., On the Use of Isoparametric finite elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 10, 1, 25-37, (1976).
- [26] Cruse, T.A., Wilson, R.B., Boundary Integral Equation Method for Elastic Fracture Mechanics Analysis, AFOSR-TR-780355, Pratt and Whitney Aircraft Group, (1977).
- [27] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., Liggett, J.A., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:387-404, (1981).
- [28] Smith, R.N.L., Mason, J.C., A Boundary Element Method for Curved Crack Problems in Two-Dimensions, in Proc. Fourth Int. Seminar on BEM, C.A. Brebbia (Editor), Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [29] Martinez, J., Dominguez, J., On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 20:1941-1950, (1984).
- [30] Harrop, L.P., The Optimum Size of Quarter-Point Crack Tip Elements, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 18:1101-1103, (1982).
- [31] Symm, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory, II. Proceedings of Royal Society, A275, 33-46, (1963).
- [32] Xanthis, L.S., Bernal, M.J.M, Atkinson, C., The Treatment of the Singularities in the Calculation of Stress Intensity Factors Using the Integral Equation Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 26:285-304, (1981).
- [33] Aliabadi, M.H., An Enhanced Boundary Element Method for Determining Fracture Parameters, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, San Antonio, Texas, Pineridge Press, 27-39, (1987).

- [34] Portela, A., Aliabadi, M.H, Rooke,D.P *Boundary Element Analysis of V-Notched Plates* Proc. of the Fourth International Conference on Boundary Element Technology, Windsor, Canada, edited by C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK (1989).
- [35] Portela, A., Aliabadi, M.H, Rooke,D.P *The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for crack problems* Int. J. For Numerical Method in Engineering 33:126987 (1992).
- [36] Bath, K.J., Wilson, E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, (1976).
- [37] Felippa, C.A. *Introduction to finite element methods*, University of Colorado, Boulder, <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/> (2013).
- [38] Civelek, M.B., Erdogan, F., *International Journal of Fracture*, 19:139-159, (1982).
- [39] Portela, A., Aliabadi, M.H., *Crack Growth Analysis Using Boundary Elements – Software*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK and Boston, USA, (1993). Press (1987).
- [40] Love, A.E.H *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* Dover, New York (1956).
- [41] Sokolnikoff, I.S *Mathematical Theory of Elasticity* Mc Graw-Hill, New York (1956).
- [42] Kanninen, M.F, Popelar, C.H, *Advanced Fracture Mechanics* Oxford University Press, New York (1985).
- [43] Brock, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1986).
- [44] Rice, J.R, Tracey, D.M. *Computational Fracture Mechanics, in Numerical Computer Methods in Strutural Mechanics* Academia Press, New York (1973).
- [45] Irwin, G.R *Fracturing of Metals* Poceedings of ASM Symposium, Chicago1947, 147-166, Cleveland, Ohio, American Society of Metals (1948).

- [46] Orowan, E. *Fundamentals of Brittle Behavior of Metals*, in *Fatigue and Fracture of Metals* W.M. Murray (Editor), 139-167, Wiley, New York, (1952).

8 APÊNDICE A



Direct Computation of Stress Intensity Factors in Finite Element Method

Journal:	<i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>
Manuscript ID:	Draft
Wiley - Manuscript type:	Research Article
Date Submitted by the Author:	n/a
Complete List of Authors:	Portela, Artur; University of Brasília, Civil Engineering
Keywords:	Finite element methods, Fracture, Elasticity

SCHOLARONE™
Manuscripts

View Only

INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING

Int. J. Numer. Meth. Engng 2014; 00:1–40

Prepared using nmeauth.cls [Version: 2002/09/18 v2.02]

Direct Computation of Stress Intensity Factors in Finite Element Method

J. Caicedo, A. Portela*

University of Brasília, Faculty of Technology, Department of Civil Engineering
Brasília-DF, 70910-900, Brazil
Tel.: +55 (61) 8154-7262

SUMMARY

This paper is concerned with the direct computation of stress intensity factors in the finite element analysis of the mixed-mode deformation of homogeneous cracked plates.

The direct computation of stress intensity factors is a natural consequence of a regularization procedure, introduced before the finite element analysis takes place that uses a singular particular solution of the crack problem to introduce the stress intensity factors as additional problem primary unknowns. In this paper, the singular term of Williams' eigenexpansion, derived for a semi-infinite crack, is used to regularize the elastic field of an edge-cracked finite plate.

Two cracked plates were analyzed with this technique, in order to assess the accuracy and efficiency of the formulation. The results obtained in this work are in perfect agreement with those obtained with the dual boundary element method and other published results. The accuracy and efficiency of the implementation described herein make this a reliable and robust formulation, ideal for the study of crack-growth problems under mixed-mode conditions with the finite element method. Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: FEM; Stress intensity factor; Singularity subtraction regularization; crack-tip elastic field; Williams' singular solution

1. INTRODUCTION

Within the limits of linear elastic analysis, the stress field is unbounded at the tip of a crack. This was early reported by Brahtz [1] and later by Williams [2] who, after an investigation of the analytical form of these singularities demonstrated that under all possible combinations of boundary conditions, the stress becomes infinite at the tip of a crack. From a physical point of view, unbounded elastic fields are meaningless. Nevertheless, unbounded stresses cannot be ignored as their presence indicates that new phenomena (e.g. plasticity, fracture, etc.) may occur, leading to localized damage in practical situations. In this paper, the term *singularity*

*Correspondence to: aportela@unb.br (Artur Portela)

Contract/grant sponsor: CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

is used to denote the cases in which the elastic stress field becomes unbounded. If r denotes the distance measured from the crack tip, the stress field is of the order $r^{-1/2}$ which becomes singular as r tends to zero. The stress intensity factor (SIF), defined at the crack tip, is a measure of the strength of this singularity.

A first review of the most important techniques used in the finite element method, for the evaluation of stress intensity factors, was presented by Portela *et al.* [5]. The performance of some of these techniques was also reported by Portela *et al.* [6].

The presence of the stress singularity in the numerical model raises considerable numerical difficulties by virtue of the need of simultaneously representing both the singular and the finite stresses in the numerical model. The most important approaches that have been devised to overcome this difficulty, in the finite element method, both the standard formulation (FEM) and the extended one (XFEM), in the boundary element method (BEM) and in meshfree or meshless methods, are briefly reviewed in the following.

A common procedure, used in the very early fracture-mechanics applications of the finite element method, is to ignore the presence of the singularity and to attempt to diminish its effect on the overall solution by using mesh refinement in the neighbourhood of the crack tip. The numerical value of the calculated stress components at the crack tip will always be finite, but it can be made as large as one desires by increasing refinement of the mesh. Obviously, this procedure is mesh dependent and, if it converges, will produce a slow-convergence ratio in the entire domain of the problem, as shown by Tong *et al.* [9]. This is obviously a consequence of the impossibility of representing simultaneously both the singular and the finite stresses in the numerical model, simply with a mesh refinement procedure. In this approach, the stress intensity factors are evaluated from a correlation procedure, involving a comparison between the numerical results of either the displacement or the stress fields and the respective analytical solutions, represented in the form of an eigenfunction expansion series around the crack tip. Typically, the stress intensity factors obtained by application of this correlation procedure at crack-face nodal points are then extrapolated to the crack tip. Consequently, stress intensity factors can not be computed accurately only with the mesh refinement procedure. This was shown, for instance, in the work of Portela *et al.* [8], where values of the stress intensity factors, computed by a displacement correlation procedure, are compared with those values obtained with the J-integral technique, for several crack problems analyzed by the dual boundary element method.

The use of quarter-point isoparametric finite elements, introduced by Henshell [34] and Barsoum [35], suggested the application of quarter-point boundary elements at the crack tip, as an alternative to the mesh refinement procedure. However, while quarter-point finite elements both represent the $r^{1/2}$ displacement behaviour and introduce a $r^{-1/2}$ singularity in the stress field, the use of quarter-point elements in the boundary element method, in which displacements and tractions are approximated independently, enables only the displacement behaviour to be properly represented. This feature was early noticed by Cruse *et al.* [36] who introduced traction-singular quarter-point boundary elements for the correct representation of the singularity in the stress field. Stress intensity factors can be computed from quarter-point elements by the displacement correlation procedure. The application of this procedure over quarter-point elements, first presented by Blandford *et al.* [37], was called a two-point formula by Smith [38]. The computation of stress intensity factors from traction-singular quarter-point boundary elements was presented by Martinez *et al.* [39] who have shown that the use of the crack-tip traction nodal values of the singular element is less sensitive to the discretization than

any of the displacement correlation procedures. In general, the accuracy of stress intensity factors, computed from quarter-point boundary elements by the displacement correlation procedure, depends on the size of these elements, as reported by Harrop [40] who studied the case of quarter-point finite elements and concluded that it is impossible to recommend a particular size for the quarter-point element, suitable for all situations.

While the above methods represent the stress singularity in the numerical model, an alternative approach, developed by Symm [41] in potential theory, is based on the subtraction of this singularity from the numerical model. In fracture mechanics applications, the singularity subtraction technique is a procedure that uses a singular particular solution of the crack problem to regularize the stress field and to introduce, simultaneously, the stress intensity factors as additional primary unknowns in the problem. This approach was first applied by Xanthis *et al.* [42] for anti-plane problems and by Aliabadi *et al.* [4] to solve symmetrical crack problems using the boundary element method. Analysis of symmetrical problems with the singularity subtraction technique is straightforward, because the singular tractions are among the problem unknowns, when only half of the problem is considered with the proper boundary conditions along the symmetry line.

In the case of non-symmetrical problems, the singular tractions are not among the boundary element unknowns and consequently, there is no singularity in the numerical model to be subtracted. The application of the sub-regions boundary element method is an obvious way to circumvent this difficulty, as shown by Aliabadi [43]. However, artificial boundaries introduced by this method are not strictly necessary in the analysis of a crack problem. An alternative strategy, developed by Portela *et al.* [5], first introduces the stress equations of an internal point, approaching the crack tip, as primary unknowns in the boundary element formulation. Then, the stress field, singular at this internal point, can now be regularized with the singularity subtraction technique. The extension of this singularity subtraction technique to pure opening mode analysis of sharp notches was first reported by Portela *et al.* [7].

Alternatively, the evaluation of stress intensity factors can be based on contour integrals which are path-independent. The J-integral has been used quite effectively in the dual boundary element method, as a post-processing technique, for the evaluation of stress intensity factors by Portela *et al.* [8]. A simple procedure, based on the decomposition of the elastic field into its respective symmetric and anti-symmetric mode components, is used to decouple the stress intensity factors of a mixed-mode problem. Although this technique does not perform a regularization of the elastic field with the crack-tip singularity subtraction, it is very accurate because it uses the elastic field computed at internal points which is a highly accurate operation in the boundary element method due to the fundamental solutions. Despite its paramount accuracy, the J-integral technique tends to become very expensive when a high number of internal points are considered in the path of the J-integral.

As an alternative to the J-integral post-processing technique, the direct computation of the stress intensity factors, as additional primary unknowns in the dual boundary element method, was first presented by Portela *et al.* [44]. In order to avoid numerical difficulties that arise from the presence of a singularity in the numerical model, it is convenient to subtract this singularity from the original problem, before it is solved by the numerical method. This regularization considers a singular particular solution of the problem and forces the original elastic field to be identical to this particular solution, at the singular point. By virtue of the analytical structure of the singular particular solution that represents the crack-tip elastic field, the modified problem includes the stress intensity factors as additional primary unknowns.

Finally, the numerical method can be easily applied to solve the modified problem which is now regular and consequently can lead to highly accurate solutions simply with coarse meshes.

In the standard finite element method, the hybrid crack-tip element (HCE), see Tong *et al.* [9], is a very accurate method for the direct computation of stress intensity factors and coefficients of the higher order terms of the Williams expansion, as reported by Karihaloo *et al.* [10] and Xiao *et al.* [11]. The HCE represents a crack by only one super-element which is connected compatible with the surrounding finite elements. It is very efficient in the analysis of bodies with many cracks, as reported by Zeng *et al.* [12]. The HCE is formulated from a simplified variational functional using truncated asymptotic crack-tip displacement and stress expansions and interelement boundary displacements compatible with the surrounding regular finite elements. In its implementation, a general finite-element mesh is used by forming the HCE from the elements surrounding the crack tip. Consequently, the HCE can be easily included in any commercial package. Despite its accuracy, the use of the HCE presents some difficulties. Effectively, the exclusion of the rigid body modes in the truncated asymptotic displacements creates jumps between these displacements and element boundary displacements. If the HCE only is used, the part of the crack inside the HCE need not conform to the finite-element mesh. However, crack faces away from the crack tip, outside the HCE region, must conform to the finite-element mesh. This is a further disadvantage of the HCE. It is important to stress that the HCE formulation has no similitude at all with the formulation presented in this paper. Indeed, while the HCE makes the numerical modelling of the elastic field with the crack-tip singularity included, the formulation presented in this paper completely removes the singularity before the finite-element analysis of the regularized elastic field with no convergence difficulties and highly accurate results.

Meshless or meshfree methods, see Belytschko *et al.* [28], have received much attention recently, since they eliminate the need for a discretization mesh and hence, they appear to demonstrate significant potential to the moving boundary problem inherent in crack-growth processes. Since these methods use only a set of nodal points scattered in the domain with no element connectivity, the remeshing required by the standard FEM is avoided which dramatically simplifies the modeling process. Comprehensive reviews of meshfree methods can be found in Li *et al.* [29] and Liu *et al.* [30]. In these methods, the moving least squares approximation is possibly the most used method to interpolate discrete data with a good accuracy. The order of continuity of the approximation can be set to a desired value, as reported by Sladek *et al.* [25]. The treatment of crack discontinuities, the main issue of modern meshfree methods, has been modeled in different ways; Carpinteri *et al.* [26] used a virtual extension of the crack in the direction of the tangent at the crack tip, while Wen *et al.* [27] considered enriched basis functions in the moving least squares interpolation. Enriched weight/basis functions, by incorporating *a priori* knowledge of the solution that is a jump function along the discontinuity and the asymptotic crack-tip displacement field, have been successfully applied to fracture problems, as reported by Fleming *et al.* [31], Lu *et al.* [32] and Gu *et al.* [33]. However, the main difficulty of this strategy is that the enrichment area must be limited, when multiple cracks are densely distributed or when crack tips are close to the boundaries which is a drawback of this new generation meshfree methods.

The extended finite element method (XFEM), developed by Belytschko *et al.* [21], is a modern numerical modelling tool that offers great flexibility in the analysis of the fracture process. The XFEM enriches the local standard finite-element approximation space to incorporate *a priori* knowledge of the solution, with a displacement discontinuity function

across the crack and the asymptotic solution at nodes surrounding the crack tips, with the use of the partition of unity method (PUM), see Melenk *et al.* [13]. As a result, the numerical model consists of three types of finite elements: non-enriched elements, fully enriched elements and partially enriched elements, the so-called *blending* elements. In a blending element, some of the nodes only are enriched which adds to the approximation parasitic terms. The error caused by these parasitic terms which is partly responsible for the degradation of the convergence rate and limits the accuracy of the method, was identified by Chessa *et al.* [22]. By virtue of the enrichment process, the XFEM overcomes the need of using finite-element meshes conforming with the crack discontinuity, as well as the adaptive remeshing as the crack grows, as is the case with the standard finite element method. The XFEM considerably facilitates the meshing operations in the solution of complex structures, in the sense that it does not require the finite element mesh to conform to the crack faces, see Hedayati *et al.* [23]. Nevertheless, it does not completely eliminate the need for suitable mesh refinement in the vicinity of the crack. There are two main reasons behind that feature of the method. Firstly, and just as with the classical finite element method, the accuracy of the solution increases with decreasing finite-element sizes. Secondly, the finite-element mesh not only serves the purpose of discretizing the solution but it is also used to define the geometry of the crack in an implicit way. The element sizes must therefore be small enough to properly capture the features of the crack geometry. This means that XFEM still needs a mesh that is fine enough in the vicinity of the cracks with respect to the characteristic lengths of these cracks. The solution accuracy of the local fields around crack tips is a direct consequence of the choice carried out for the enrichment functions which define *a priori* knowledge of the solution. Effectively, the classical enrichment fields are not able to provide reliable estimates of the stress intensity factors directly, as shown by Chahine *et al.* [14]. The closer these enrichment functions are to the exact asymptotic fields, the better is the solution accuracy. Since the exact asymptotic fields are known only for very simple crack geometries and loadings, this direct dependence of the solution accuracy on the enrichment process is a serious drawback of the XFEM. Alternative crack-tip enrichment techniques have been devised to simulate failure and yet allow for direct estimation of the stress intensity factors. In this regard, Liu *et al.* [15] introduced a method which is still relying on the PUM, but with specific enrichment functions that are the Williams series. The area in which the nodes are enriched by the singular functions can be different from the area used to extract the stress intensity factors that is the area where the degrees of freedom associated with the same singular enrichment function are constrained to be equal. The underlying partition of the unity is inactivated by simply setting the regular degrees of freedom to zero in the extraction zone of the stress intensity factors. Xiao *et al.* [16] have shown that these approaches do not predict accurately the coefficients of the higher order terms in the elastic crack-tip asymptotic fields. Modern formulations of the XFEM rely on truncated Williams expansion which is dedicated to straight cracks only. In the general case of non-straight cracks, the singular enrichment zone must be defined on the scale on which the crack can be considered straight. Therefore the finite-element mesh must be fine enough to fit with this scale. In addition to this difficulty of local refinement, the resulting mesh will lead to a larger system of equations, whose resolution cost can become prohibitive for some complex problems. Strategies have been developed to handle these very different scales that are required to simulate cracked bodies. These strategies can use energy coupling methods, as presented by Ben Dhia *et al.* [17], domain decomposition methods, as presented by Guidault *et al.* [18], homogenization, as presented by Belytschko *et al.* [19] or generalized FEM, as reported by Kim *et al.* [20].

An evaluation of the performances of BEM-based methods and their comparison with XFEM, in modeling cracked structures undergoing fatigue crack-growth, was carried out by Dong and Atluri [24]. After a thorough examination of a large set of numerical examples of varying degrees of complexity these researchers concluded that the BEM-based methods: a) are far more accurate than XFEM for computing stress intensity factors and thus the fatigue-crack-growth-rates; b) require significantly coarser meshes than in XFEM and thus result in significant savings of computational costs and much importantly, in considerable savings of the human-labor costs of generating meshes; c) require minimal effort for modeling the non-collinear propagation of cracks under fatigue, without using the Level Set or Fast Marching methods to track the crack surface; d) can easily perform fracture and fatigue analysis of complex structures, such as repaired cracked structures with composite patches and damage in heterogeneous materials.

The XFEM key feature resides in its great flexibility in the numerical analysis of the fracture process, achieved by the enrichment process implemented in the local standard finite element approximation space. The accuracy of the XFEM is thus totally dependent on the choice of the enrichment functions used in the formulation, in order to approximate the crack-tip singular elastic field. Therefore, while the XFEM makes the numerical approximation of the elastic field with the crack-tip singularity included, the formulation presented in this paper considers a radical different approach which completely removes the crack-tip singularity before the finite element analysis of the regularized elastic field, leading conveniently to no convergence difficulties with smooth and highly accurate solutions. It is mandatory to stress the fact that the strategy adopted in the formulation of this paper, the finite element analysis with the stress intensity factors included in the primary unknowns of a regularized elastic field by the crack-tip singularity subtraction, is the root of the high accuracy, robustness and reliability of the formulation which are not shared by other methods.

In contrast with the dual BEM, the regularization of the crack-tip elastic field, to compute the stress intensity factors in the finite element method, has not received much attention, to the author's knowledge. Indeed, the different methods that have been developed in FEM, XFEM and meshfree methods share a common feature that regards the well known difficulties that arise in the numerical modelling of elastic fields with singularities. Hence, there is a clear need of research in the field of this paper, in order to develop new robust and efficient numerical methods for the finite element analysis of these problems.

This paper is concerned with the direct computation of stress intensity factors through the singularity subtraction technique in the finite element method, to provide an efficient and accurate way of analyzing the mixed-mode deformation of homogeneous cracked plates. The organization of the paper is as follows. In Section 2, the original elastic field of a cracked plate is presented. The regularization of the original elastic field, with the singularity subtraction technique is presented in Section 3. Section 4 presents the singular particular solution of the elastic field used in the regularization process which is the first term of Williams' eigenexpansion. The singularity subtraction technique is presented for the two-dimensional finite element analysis of homogeneous elastic cracked plates, in Section 5. In section 6, some numerical results are presented illustrating the effectiveness and robustness of the present regularization process that, through the singularity subtraction technique, allows to the direct computation of the stress intensity factors in the finite element method. Finally, concluding remarks are presented in Section 7.

2. ORIGINAL ELASTIC FIELD

Consider a two-dimensional cracked plate with domain Ω and boundary $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. In the absence of body forces, the elastic field satisfies the equations

$$\mathbf{L}^T \sigma = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (3)$$

in domain Ω , with boundary conditions

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on boundary } \Gamma_u \quad (4)$$

and

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \sigma = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on boundary } \Gamma_t, \quad (5)$$

in which the vectors σ and ε represent respectively the stress and the strain components; \mathbf{D} is the matrix of the elastic constants; \mathbf{L} is a matrix differential operator; the vectors \mathbf{u} and \mathbf{t} represent respectively the displacement and the traction components; $\bar{\mathbf{u}}$ and $\bar{\mathbf{t}}$ represent prescribed values respectively of the displacements and tractions and \mathbf{n} represents the outward unit normal components to the boundary.

3. REGULARIZED ELASTIC FIELD

Because of convergence difficulties that arise in numerical modelling of elastostatic problems with singular fields, an alternative technique involving the subtraction of the singularity can be used. Before presenting this technique which introduces the stress intensity factors as additional primary unknowns in the problem, some basic definitions will be presented, concerning singular elastic fields.

In this paper, a singular elastic field is defined as one with unbounded stresses at one point in the problem domain, but with displacements bounded everywhere. In contrast, a regular elastic field has both the stress and the displacement fields bounded at every point in the problem domain.

It is well known that the stress field is singular in the neighborhood of a crack tip. Hence, in order to avoid numerical difficulties arising from the presence of a singularity in the stress field, it is convenient to modify the original problem before it is solved by the finite element method. Under the assumption of linear behaviour, where the principle of superposition is valid, the elastic field can be decomposed into a regular (R) and a singular (S) part as follows

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S) + \sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^S \quad (6)$$

and

$$u_i = (u_i - u_i^S) + u_i^S = u_i^R + u_i^S, \quad (7)$$

where $\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S$ and $u_i^R = u_i - u_i^S$ are the regular components, respectively of the stress and displacement fields of the original problem; σ_{ij}^S and u_i^S are respectively the stress and displacement components of a particular solution of the original problem, representing the singular elastic field. If appropriate functions are chosen for this particular singular field, then

equations (6) and (7) completely regularize the original problem, in the sense that the stress components σ are now non-singular.

As a consequence of this regularization, the analysis of the elastic problem can now be carried out on the regular elastic field only, represented by components σ_{ij}^R and u_i^R ; the components σ_{ij}^S and u_i^S of the singular field automatically satisfy identically the field equations, because they are defined as a particular solution of the original problem. Hence, the elasticity equations (1) to (3) can now be written as

$$\mathbf{L}^T \sigma^R = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\varepsilon^R = \mathbf{L} \mathbf{u}^R \quad (9)$$

$$\sigma^R = \mathbf{D} \varepsilon^R \quad (10)$$

in domain Ω , with boundary conditions

$$\mathbf{u}^R = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^S \quad \text{on boundary } \Gamma_u \quad (11)$$

and

$$\mathbf{t}^R = \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S \quad \text{on boundary } \Gamma_t. \quad (12)$$

Notice that this regularized elastic field is governed by the same equations of the original field, except for the boundary conditions (11) and (12) where additional terms, respectively \mathbf{u}^S and \mathbf{t}^S are now included.

4. WILLIAM'S SINGULAR PARTICULAR SOLUTION

The particular solution used in equations (6) and (7), denoted by components σ_{ij}^S and u_i^S , represents the singular elastic field in the neighborhood of the crack tip. It can be considered through the first term of the eigenexpansion derived by Williams [2]. Caicedo *et al.* [3] have demonstrated that although William's eigenexpansion was derived for a semi-infinite edge crack, its singular term can be used to represent the singular elastic field in the crack-tip neighborhood of general edge and internal piecewise-flat multi-cracked finite plates under mixed-mode deformation.

Consider the first term of William's eigenexpansion. The stress components are given by

$$\sigma_{11}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (13)$$

$$\sigma_{22}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (14)$$

and

$$\sigma_{12}^S = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (15)$$

and the associated displacements are given by

$$u_1^S = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (16)$$

and

$$u_2^S = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right], \quad (17)$$

where K_I and K_{II} are the stress intensity factors respectively of the opening and sliding modes; the constant $\kappa = 3 - 4\nu$ is defined for plain strain and $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ for plain stress, where ν is Poisson's ratio; the constant μ is the shear modulus. The polar coordinate reference system (r, θ) is centered at the crack tip, such that $\theta = 0$ is the crack axis, ahead of the crack tip, as represented in Figure 1. Notice that the stress field is of the order $r^{-1/2}$ which becomes singular as r tends to zero. Notice also that the displacement field does not include rigid-body terms, hence leading to null components at the crack tip.

The stress field, equations (13) to (15), is used to define the traction components at a boundary point as

$$\mathbf{t}^S = \begin{bmatrix} t_1^S \\ t_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^S & \sigma_{21}^S \\ \sigma_{12}^S & \sigma_{22}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

where n_i denotes the i -th component of the unit outward normal to the boundary and the functions $g_{ij} = g_{ij}(r^{-1/2}, \theta)$ have been introduced for a convenient short handed notation of equations (13) to (15).

Similarly, the displacement field, equations (16) and (17), can be defined in a vector form as

$$\mathbf{u}^S = \begin{bmatrix} u_1^S \\ u_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

where the functions $f_{ij} = f_{ij}(r^{1/2}, \theta)$ are a short handed notation of equations (16) to (17).

5. FINITE ELEMENT ANALYSIS

Since a formal solution of the regularized elastic model, defined by the field equations (8) to (10), with boundary conditions (11) and (12), is generally not available for practical problems, discretization must be used in order to obtain an approximate numerical solution.

The finite element method is possibly the most popular discretization model available in engineering, see Zienkiewicz [45]. When the method is based on weighted residuals, the starting point of its formulation is the weak form

$$\int_{\Omega} \sigma^{R^T} \delta \varepsilon^R d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S)^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma, \quad (20)$$

in which the virtual displacements $\delta \mathbf{u}^R$, represent arbitrary weighting functions of Galerkin's approximation. The details of this weak-form derivation can be seen in Portela *et al.* [46].

Computation of the weak form (20) is based on the domain and boundary discretization with a finite element mesh, where the continuous domain Ω is replaced by the assembled finite elements Ω^e and the continuous boundary Γ is replaced by the assembled finite elements Γ^e . Through this process of discretization, the finite element method ultimately reduces the infinite number of degrees of freedom of the continuum problem to a finite number of unknowns defined at element nodes.

5.1. ELEMENT EQUATIONS

Consider the discretization of the domain Ω into finite elements Ω^e which leads to the discretization of the boundary Γ into finite elements Γ^e . This discretization process is usually represented by

$$\Omega = \sum_e \Omega^e \quad \text{and} \quad \Gamma = \sum_e \Gamma^e.$$

In each finite element Ω^e a local direct approximation is define as

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{N} \mathbf{u}^e, \quad (21)$$

where \mathbf{u}^e denotes the element degrees of freedom which are the nodal displacements and \mathbf{N} denotes the element shape functions assigned to the degrees of freedom of the element. The assumed displacement approximation implies that the consequent approximation of strains and stresses is defined also in terms of the nodal displacements, respectively as

$$\varepsilon^R = \mathbf{L} \mathbf{u}^R = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (22)$$

and

$$\sigma^R = \mathbf{D} \varepsilon^R = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e. \quad (23)$$

Virtual displacements and virtual strains are defined in terms of the nodal virtual displacements $\delta \mathbf{u}^e$, respectively as

$$\delta \mathbf{u}^R = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e \quad (24)$$

and

$$\delta \varepsilon^R = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^R = \mathbf{L} \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e. \quad (25)$$

When these approximations are introduced in the weak form (20), the following equation is obtained

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \, \mathbf{u}^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \, d\Gamma \right\} = 0. \quad (26)$$

Since virtual displacements $\delta \mathbf{u}^e$ are arbitrary, the equation

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{Q}^e \quad (27)$$

holds for each finite element, where

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (28)$$

is the element stiffness matrix and the vectors

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (29)$$

and

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^S \, d\Gamma \quad (30)$$

define the element load vector which leads to equivalent nodal forces. When the singular tractions, defined in equations (18), are introduced in the element load vector \mathbf{Q}^e , equations (30) can be written as

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} d\Gamma = \mathbf{G}^e \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^e \mathbf{k}, \quad (31)$$

in which the matrix \mathbf{G}^e has 2 columns and as many rows as the vector \mathbf{u}^e of the element unknowns, while the vector \mathbf{k} denotes the stress intensity factors K_I and K_{II} . As the stress intensity factors are not known at this stage of a general problem, they become additional primary unknowns. Hence, the element equations (21) can be rewritten as

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{G}^e \mathbf{k} \quad (32)$$

and rearranged as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{G}^e \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

in order to collect the unknowns in the left hand side of the equations.

5.2. ELEMENT ASSEMBLY

The assembly of the element matrices \mathbf{K}^e , \mathbf{G}^e and \mathbf{P}^e , processed in accordance with the respective element incidences, generates the corresponding global matrices \mathbf{K} , \mathbf{G} and \mathbf{P} for the whole finite element mesh. This operation, supported by the reduced compatibility condition, is usually represented, respectively as

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{G} = \sum_e \mathbf{G}^e \quad \text{and} \quad \mathbf{P} = \sum_e \mathbf{P}^e.$$

Through the assembly process, the element equations (33) lead to the global finite element mesh equations represented by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Note that these global equations introduce two additional unknowns, the stress intensity factors K_I and K_{II} , represented in vector \mathbf{k} . Consequently, in order to have a well-posed problem with a unique solution, it is necessary to specify two additional constraints that is one for each deformation mode included in the analysis. These additional constraints will be specified in the last row of equations (34).

5.3. ADDITIONAL CONSTRAINTS

Additional constraints can be specified in several different ways. However, they should enforce the cancellation of the singularity, in the regularized field, introduced through equations (6) and (7). The most obvious conditions that do reflect this consideration are that either the regular displacement field or the regular stress field is cancelled out at the crack tip, that is

$$u_i^R = 0 \Rightarrow u_i = u_i^S, \quad (35)$$

or

$$\sigma_{ij}^R = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^S \quad (36)$$

which ensure that the original elastic field is singular at the crack tip.

Since the problem is formulated in terms of the regularized displacements u_i^R , the additional constraints must be defined in terms of the nodal components included in \mathbf{u}^R , in order to be effective. Hence, to fulfill this requirement, conditions (35) can be used as additional constraints. However, since the displacement components of the singular elastic field, equations (16) and (17), do not include rigid-body terms, the use of conditions (35) leads to null displacement components of the original problem at the crack tip which can overconstrain the original problem. Therefore, the use of conditions (35) as the additional constraints to be specified in equations (34) is ruled out.

On the other hand, conditions (36) are not defined in terms of the nodal components of the regularized displacements u_i^R included in \mathbf{u}^R and therefore they can not be used simply as they are, in order to effectively define the additional constraints required by equations (34). To overcome this difficulty, conditions (36) are first rewritten in terms of the respective traction components, defined at the crack tip, as

$$t_j^R = \sigma_{ij}^R n_i = 0 \Rightarrow t_j = t_j^S, \quad (37)$$

where n_i represent the outward unit normal components to the crack faces. Now consider the patch of finite elements that share the crack-tip node. When these elements are submitted to an arbitrary rigid-body displacement, conditions (37) are exactly satisfied. This rigid-body displacement can be easily implemented through a set of multi-constraint conditions, specifying identical displacements for the crack-tip node and each node of the referred patch of finite elements. Although this procedure is effective, because the multi-constraint conditions are defined in terms of the nodal components of the regularized displacements u_i^R included in \mathbf{u}^R , it can affect the solution accuracy. This is a drawback that can easily be overcome through a mesh refinement around the crack tip.

For the sake of simplicity, the strategy adopted in this paper, to define the additional constraints required in equations (34), considers identical displacements only for the crack-tip node and its neighbour node just ahead of the crack-tip, which minimises the referred drawback of the rigid-body condition applied to all the nodes of the finite elements that share the crack tip node. Thus, the additional constraints that must be specified in equations (34) are defined as

$$\mathbf{u}_r^R = \mathbf{u}_s^R, \quad (38)$$

in which r represents the crack-tip node and s represents the node ahead of the crack tip; \mathbf{u}_r^R represents the displacement components of the crack-tip node, while \mathbf{u}_s^R represents the displacement components of the node ahead of the crack tip.

The implementation of this strategy is quite simple. Consider, for instance, that the crack-tip node numbering is r which leads to the assignment of the degrees of freedom $2r - 1$ and $2r$ to the node. Consider also that the numbering of the neighbour node ahead of the crack tip is s , which now leads to the assignment of the degrees of freedom $2s - 1$ and $2s$ to this node. Under this assumption, the additional constraints (38) can be included in the analysis through a simple modification of the last row of the global system of equations (34) as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

in which matrix \mathbf{C} is given by

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

where, for the numberig assumption considered, the identity terms are in columns $2r - 1$ and $2r$, to be multiplied by the corresponding terms of \mathbf{u}_r^R and the -1 terms are in columns $2s - 1$ and $2s$, to be multiplied by the corresponding terms of \mathbf{u}_s^R .

5.4. DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS

As a domain method, the finite element model satisfies exactly some of the boundary conditions which therefore generate trivial residuals that are not included in the weighted residual equation. This is the case of the essential boundary conditions (11) that were not included in the weighted residual equation (20) which led to the system of algebraic equations (39). Consequently, this system of equations must be modified in order that its solution satisfies the essential boundary conditions.

There are several procedures of introducing the essential boundary conditions in the system of equations, see Bath *et al.* [47]. To introduce the simplest of these methods, consider that the node number i , with assigned degrees of freedom $2i - 1$ and $2i$, has constrained displacements given by the essential boundary conditions (11) as

$$\mathbf{u}^R = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^S \quad (41)$$

that is

$$\begin{bmatrix} u_{2i-1}^R \\ u_{2i}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{2i-1} \\ \bar{u}_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

The simplest method is carried out in three steps. In the first step, the known nodal values of the boundary condition, respectively \bar{u}_{2i-1} and \bar{u}_{2i} , are multiplied by the respective columns $2i - 1$ and $2i$ of the matrix \mathbf{K} and the result is added to the right hand side \mathbf{P} , in equation (39). In the second step, the rows $2i - 1$ and $2i$ as well as the columns $2i - 1$ and $2i$ of the matrix \mathbf{K} are filled in with zeros, while the respective diagonal terms are replaced by the unit. In the third step, the corresponding rows of the right hand side, respectively P_{2i-1} and P_{2i} are replaced by the known nodal values, respectively \bar{u}_{2i-1} and \bar{u}_{2i} . Eventually, the rows $2i - 1$ and $2i$ of the matrix \mathbf{G} are replaced, respectively by $[f_{11} \ f_{12}]$ and $[f_{21} \ f_{22}]$. Now, the rows $2i - 1$ and $2i$ of the system of equations are given by

$$\begin{bmatrix} u_{2i-1}^R \\ u_{2i}^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{2i-1} \\ \bar{u}_{2i} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Alternatively, the method of Lagrange multipliers, see Felippa [48], can be used to introduce the essential boundary conditions in the system of equations. In this case, the weighted-residual weak form (20) is expanded to include the essential boundary conditions (11) through Lagrange multipliers λ , as

$$\int_{\Omega} \sigma^{RT} \delta \varepsilon^R d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S)^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u}^R - \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^S)^T \delta \lambda d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda^T \delta \mathbf{u}^R d\Gamma, \quad (44)$$

in which $\delta\lambda$ represent arbitrary variations of Lagrange multipliers. This extended weak form generates the element equations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{G}^e & \mathbf{A}^{eT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^e & \mathbf{F}^e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{k} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^e \end{bmatrix}, \quad (45)$$

in which

$$\mathbf{A}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T d\Gamma, \quad (46)$$

$$\mathbf{V}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (47)$$

and, using equations (19)

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} d\Gamma. \quad (48)$$

After the assembly of the element equations and the introduction of the additional constraints (38), the extended weak form (44) eventually leads to the global system of equations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ \mathbf{k} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (49)$$

that can be solved.

6. NUMERICAL RESULTS

This paper is concerned with the direct computation of stress intensity factors in the finite element method, through the crack-tip singularity subtraction, to provide an efficient and accurate way of analyzing the deformation of homogeneous cracked plates.

A computer code that implements this new formulation, with constant-strain triangular finite elements, was developed and used to solve some numerical examples which include two different cases of edge-cracked finite plates, respectively under opening mode and sliding-mode loading. The results obtained clearly demonstrate the accuracy and reliability of this formulation.

6.1. Edge-cracked plate under opening-mode loading

Consider a square plate, with a single crack normal to one edge, as represented in Figure 2. The crack length is denoted by a , the width of the plate is denoted by w and the height by $h = w/2$. The crack position is defined in Cartesian coordinates by $0 \leq x \leq a$ and $y = 0$. The plate is subjected to the action of a uniform traction $\bar{\mathbf{t}} = \sigma$, acting in a direction perpendicular to the crack and applied symmetrically at the ends which corresponds to an opening-mode loading. Results have been obtained for the cases in which $h/w = 0.5$, in order to be compared with those published by Civelek *et al.* [51]. Five cases were considered, with $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ and 0.6 , respectively. A convergence study was carried out with three different meshes; convergence was achieved, for all the five cases of crack-length considered,

with a mesh of 576 finite elements, in which the discretization was refined around the tip. The results obtained with this finite element mesh are presented in Table I and show a high level of accuracy when compared with those of Civelek *et al.* [51]. It is important to note that the stress-intensity factors of the sliding-deformation mode are always below 10^{-7} as expected, since this is mainly an opening-deformation mode crack problem. Figure 3 shows the finite element mesh and the boundary conditions for the case $a/w = 0.6$. Figure 4 shows the initial and deformed finite element meshes of both the original and regularized elastic fields, for the case $a/w = 0.6$. Notice the difference of the opened crack surfaces in both cases of the original and regularized elastic fields. Notice also the influence of the boundary conditions (41) in the regularized displacement field.

6.2. Edge-cracked plate under sliding-mode loading

Consider a square plate, with a single crack normal to one edge, as represented in Figure 5. The crack length is denoted by a and the ratio between the height and the width of the plate is given by $h/w = 0.5$. The plate is loaded with a uniform traction $\bar{\mathbf{t}} = \sigma$, acting now in a direction parallel to the crack and applied anti-symmetrically at the sides which corresponds to a sliding-mode loading. This is a very difficult case, for which there are no published benchmark results, as far as the authors knowledge is concerned. Therefore, results have been obtained with the present formulation, in order to be compared with those obtained by the dual boundary element method and the J-integral technique, using the software [49]. This combination of the dual boundary element method with the J-integral technique is an extremely-accurate tool because it uses the elastic field computed at internal points which is a highly accurate operation in the boundary element method due to the fundamental solutions. Five cases were considered, with $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ and 0.6 , respectively. A convergence study was carried out with three different meshes; convergence was achieved, for all the five cases of crack-length considered, with a mesh of 512 finite elements, in which the discretization was refined around the tip. The results obtained with this finite element mesh, presented in Table II are remarkably accurate; the present results match those obtained with the dual boundary element method and the J-integral technique within two decimal places. It is important to note that the stress-intensity factors of the opening-deformation mode are always below 10^{-3} , since this is mainly a sliding-deformation mode crack problem. Figure 6 shows the finite element mesh and the boundary conditions used for the case $a/w = 0.6$. The initial and deformed finite element meshes of both the original and regularized elastic fields, for the case $a/w = 0.6$, are shown in Figure 7, where the influence of the boundary conditions (41) in the regularized displacement field can be seen.

7. CONCLUSIONS

This paper is concerned with the direct computation of stress intensity factors, to provide an efficient and accurate way of analysing the deformation of cracked plates with the finite element method. This feature that is the direct computation of stress intensity factors in the finite element analysis, is a natural consequence of a regularization procedure that uses a singular particular solution of the crack problem, to introduce the stress intensity factors as additional primary unknowns in the finite element analysis. In this paper, the singular term of Williams' eigenexpansion is the particular solution used in the regularization process of any

crack problem.

After a thorough review of the most important approaches that have been devised to overcome the well known difficulties that arise in the numerical modelling of elastic fields with singularities, in the standard FEM as well as in the XFEM, in the dual BEM and in meshfree or meshless methods, it was concluded that there is room for a radically different approach, of the ones adopted by these methods, which completely removes the crack-tip singularity before the finite element analysis of the regularized elastic field is carried out, leading conveniently to no convergence difficulties with smooth and highly accurate solutions.

The reliability of this robust modelling strategy, that regularizes the elastic problem through the crack-tip singularity subtraction, before its solution with the finite element method, was assessed with the analysis of the edge-crack plate under opening-mode and sliding-mode loading; the results obtained clearly demonstrate the excellent accuracy of this new formulation of the finite element method.

Despite the highly accurate results obtained in this paper, it is necessary to carry out further research, in order to improve the efficiency of the singularity-subtraction modelling strategy. Effectively, since the finite element analysis is carried out on a regularized elastic problem, it does not require the use of refined meshes around the crack tip. However, considering the additional constraints (38), used to fulfill the conditions of a well-posed problem with a unique solution in the regularization process, they require refined meshes around the crack tip, in order to obtain accurate results. Therefore, aiming the same accuracy of the results, obtained with a finite element analysis carried out on regular meshes, instead of refined ones, it is necessary to consider the alternative additional constraints (35) which in general is not possible, without including, in the first term of Williams' eigenexpansion, additional terms to account for the possibility of describing rigid-body displacements. This is a matter for further research work that eventually will lead to highly accurate results, with an even more efficient singularity-subtraction modelling strategy in the finite element method.

ACKNOWLEDGEMENTS

The first author acknowledges the program *PECC – Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, University of Brasília. He also acknowledges *CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* for his Master scholarship.

REFERENCES

1. Brahtz, J.H.A., Stress Distribution in a Reentrant Corner, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 55:31–37 (1933).
2. Williams, M.L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Applied Mechanics*, 526–528, (1952).
3. Caicedo, J., Portela, A., Cracked Plate Analysis with the Dual Boundary Element Method and Williams' eigenexpansion, *J. of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 52: 16-23 (2015).
4. Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Cartwright, D.J., An Improved Boundary Element Formulation for Calculating Stress Intensity Factors: Application to Aerospace Structures, *J. Strain Analysis*, 22 (4), 1–5 (1987).
5. Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32: 445470, (1991).
6. Portela, A., Aliabadi, M.H., On the Accuracy of Boundary and Finite Element Techniques for Crack Problems in Fracture Mechanics, in C.A. Brebbia (Editor), Proc. Eleventh Int. Conf. on Boundary Element Methods, Cambridge, U.S.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., (1989).
7. Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Boundary Element Analysis of V-Notched Plates, Proc. of the fourth International Conference on Boundary Element Technology, Windsor, Canada, edited by C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK (1989).
8. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 33:126987, (1992).
9. Tong, P., Pian, T.H.H., Lasry, S.J., A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 7:297-308, (1973).
10. Karihaloo, B.L., Xiao, Q.Z., Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity, *Engng. Fract. Mech.* 68:1609-30, (2001).
11. Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Liu, X.Y., Direct determination of SIF and higher order terms of mixed-mode cracks by a hybrid crack element, *Int. J. Fract.* 125:207-25, (2004).
12. Zeng, D., Katsube, N., Zhang, J.M., Soboyejo, W., Hybrid crack-tip element and its applications, *Finite Elem. Anal. Des.*, 38:319-35, (2002).
13. Melenk, J.M., Babuska, I., The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289314, (1996).
14. Chahine, E., Laborde, P., Renard, Y., Crack-tip enrichment in the XFEM method using a cutt-off function. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 75(6):629646, (2008).
15. Liu, X.Y., Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Xfem for direct evaluation of mixed mode stress intensity factors in homogeneous and bi-materials. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 59:11031118, (2004).
16. Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25:719729, (2003).
17. Ben Dhia, H., Rateau, G., The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 62:14421462, (2005).
18. Guidault, P.A., Allix, O., Champaney, L., Cornuault, C., A multiscale extended finite element method for crack propagation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381399, (2008).
19. Belytschko, T., Song, J.H., Coarse-graining of multiscale crack propagation, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 81(5):537563, (2009).
20. Kim, D.J., Pereira, J.P., Duarte, C.A., Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 81:335365, (2010).
21. Belytschko, T., Black, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 45:601620, (1999).
22. Chessa J., Wang H.W., Belytschko T., On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 57:1015-1038, (2003).
23. Hedayati E., Vahedi M., Using extended finite element method for computation of the stress intensity factor, crack growth simulation and predicting fatigue crack growth in a slant-cracked plate of 6061-T651 aluminum, *World Journal of Mechanics*, 4:24-30, (2014).
24. Dong, L., Atluri, S.N., Fracture and fatigue analyses: SGBEM-FEM or XFEM? Part 1: 2D structures, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 90, 2:91-146, (2013).
25. Sladek, J., Sladek, V., Wunsche, M., Zhang, C., Interface crack problems in anisotropic solids analyzed by the MLPG, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 54:223252, (2009).
26. Carpinteri, A., Ferro, G., Ventura, G., The partition of unity quadrature in element-free crack modeling, *Computers and Structures*, 81:17831794, (2003).
27. Wen, P.H., Aliabadi, M.H., Applications of meshless method to fracture mechanics with enriched radial basis functions, *Durability of Structures and Health Monitoring*, 3:107119, (2007).

28. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Meshless methods: an overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 14:347, (1996).
29. Li, S., Liu, W.K., Meshfree and particle methods and their applications, *Applied Mechanics Reviews*, 54:134, (2002).
30. Liu, G.R., Gu, Y.T., An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Press, Berlin, (2005).
31. Fleming, M., Chu, Y., Moran, B., Belytschko, T., Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 40:1483504, (1997).
32. Lu, Y.Y., Belytschko, T., Tabbara, M., Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, *Computer Methods in Appl Mech Engng*, 126:13153, (1995).
33. Gu, Y.T., Zhang, L.C., Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields, *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5):9861004, (2008).
34. Henshell, R.D. and Shaw, K.G., Crack Tip Elements are Unnecessary, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 9:495509, (1975).
35. Barsoum, R. S., On the Use of Isoparametric finite elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 10, 1, 2537, (1976).
36. Cruse, T.A., Wilson, R.B., Boundary Integral Equation Method for Elastic Fracture Mechanics Analysis, AFOSR-TR-780355, Pratt and Whitney Aircraft Group, (1977).
37. Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., Liggett, J.A., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:387404, (1981).
38. Smith, R.N.L., Mason, J.C., A Boundary Element Method for Curved Crack Problems in Two-Dimensions, in Proc. Fourth Int. Seminar on BEM, C.A. Brebbia (Editor), Springer-Verlag, Berlin, (1987).
39. Martinez, J., Dominguez, J., On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 20:19411950, (1984).
40. Harrop, L.P., The Optimum Size of Quarter-Point Crack Tip Elements, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 18:11011103, (1982).
41. Symm, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory, II. Proceedings of Royal Society, A275, 3346, (1963).
42. Xanthis, L.S., Bernal, M.J.M., Atkinson, C., The Treatment of the Singularities in the Calculation of Stress Intensity Factors Using the Integral Equation Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 26:285304, (1981).
43. Aliabadi, M.H., An Enhanced Boundary Element Method for Determining Fracture Parameters, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, San Antonio, Texas, Pineridge Press, 2739, (1987).
44. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique, *International Journal of Fracture*, 55:1728 (1992).
45. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill, New York, (1977).
46. Portela, A., Charafi, A., *Finite Elements Using Maple – A Symbolic Programming Approach*, Springer, Berlin, (2002).
47. Bath, K.J., Wilson, E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, (1976).
48. Felippa, C.A. *Introduction to finite element methods*, University of Colorado, Boulder, <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/> (2013).
49. Portela, A., Aliabadi, M.H., *Crack Growth Analysis Using Boundary Elements – Software*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK and Boston, USA, (1993). Press (1987).
50. Murakami, Y., Editor, *Stress intensity factors handbook*, 1st edition, vol 2. Pergamon Press (1987).
51. Civelek, M.B., Erdogan, F., *International Journal of Fracture*, 19:139-159, (1982).

a/w	$K_I/(\bar{\sigma}\sqrt{\pi a})$	
	FEM	Reference [51]
0.2	1.454	1.488
0.3	1.825	1.848
0.4	2.311	2.324
0.5	3.014	3.010
0.6	4.147	4.152

Table I: Stress intensity factors for a single edge crack in a square plate under opening-mode loading ($h/w = 0.5$).

a/w	$K_{II}/(\bar{\tau}\sqrt{\pi a})$	
	FEM	Reference [49]
0.2	0.437	0.435
0.3	0.356	0.358
0.4	0.303	0.304
0.5	0.263	0.262
0.6	0.223	0.223

Table II: Stress intensity factors for a single edge crack in a square plate under sliding-mode loading ($h/w = 0.5$).

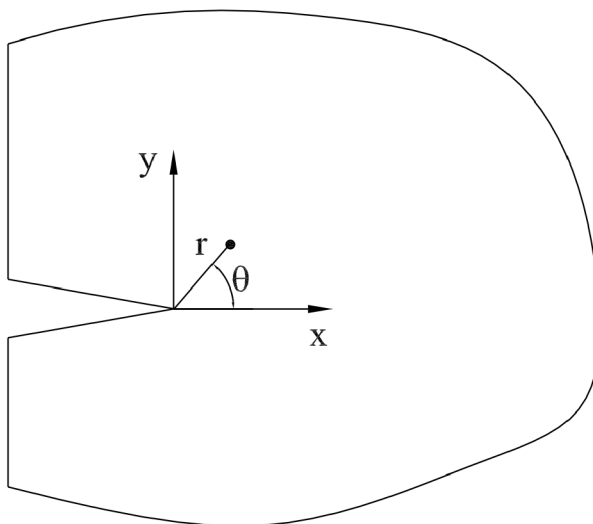


Figure 1: Reference system for Williams' singular particular solution.

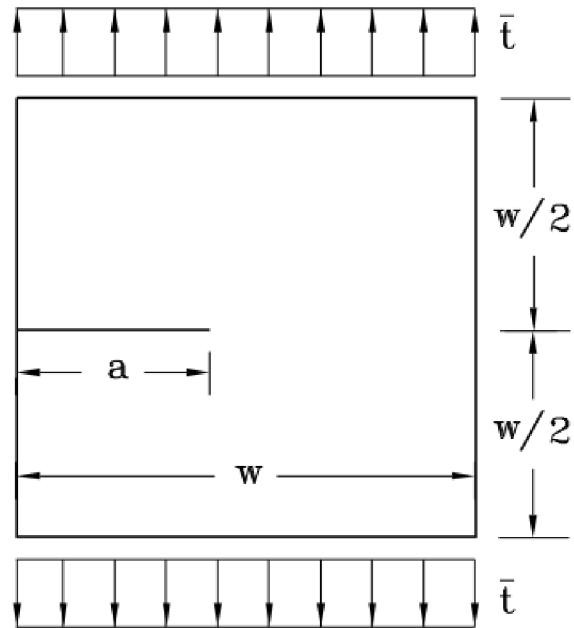


Figure 2: Square plate with a single edge crack under opening-mode loading ($h/w = 0.5$).

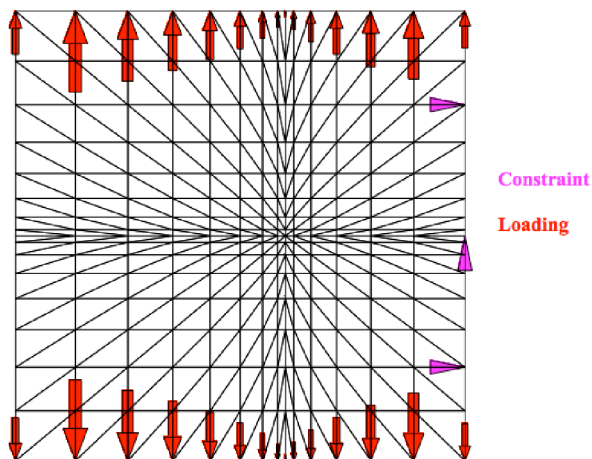


Figure 3: Finite element mesh and the boundary conditions used for the case $a/w = 0.6$ under opening-mode loading ($h/w = 0.5$).

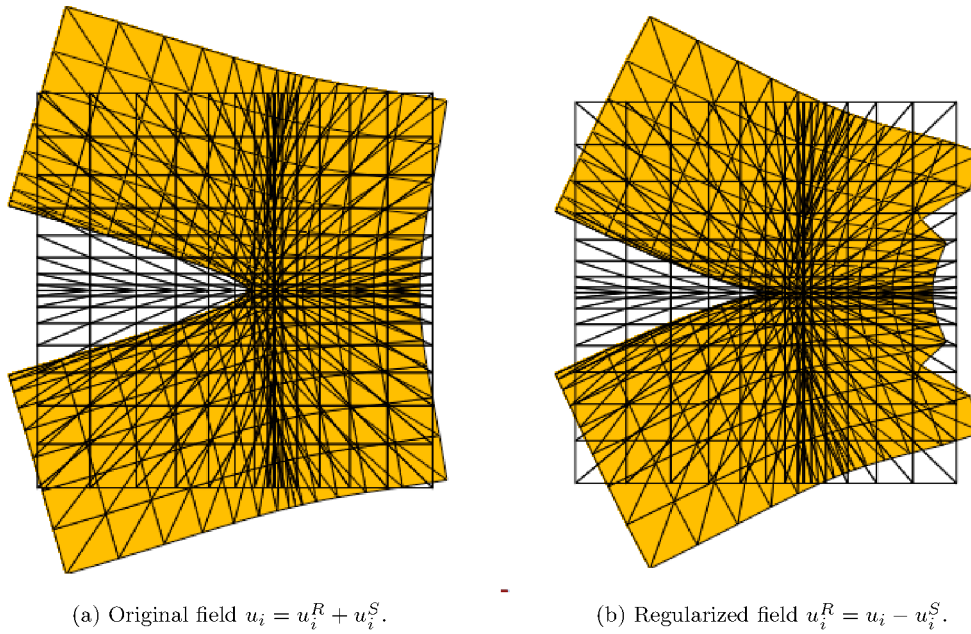


Figure 4: Initial and deformed finite element meshes for the case $a/w = 0.6$ under opening-mode loading.

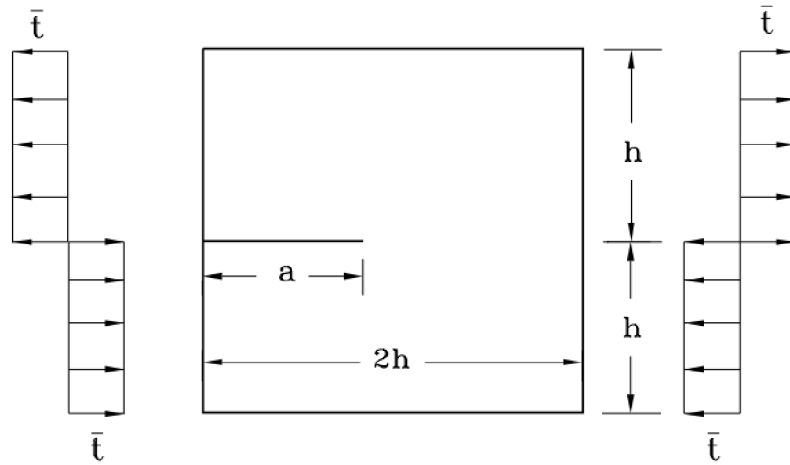


Figure 5: Square plate with a single edge crack under sliding-mode loading ($w = 2h$).

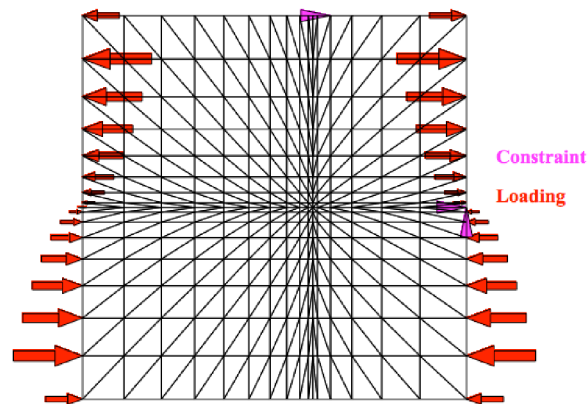


Figure 6: Finite element mesh and the boundary conditions used for the case $a/w = 0.6$ under sliding-mode loading ($h/w = 0.5$).

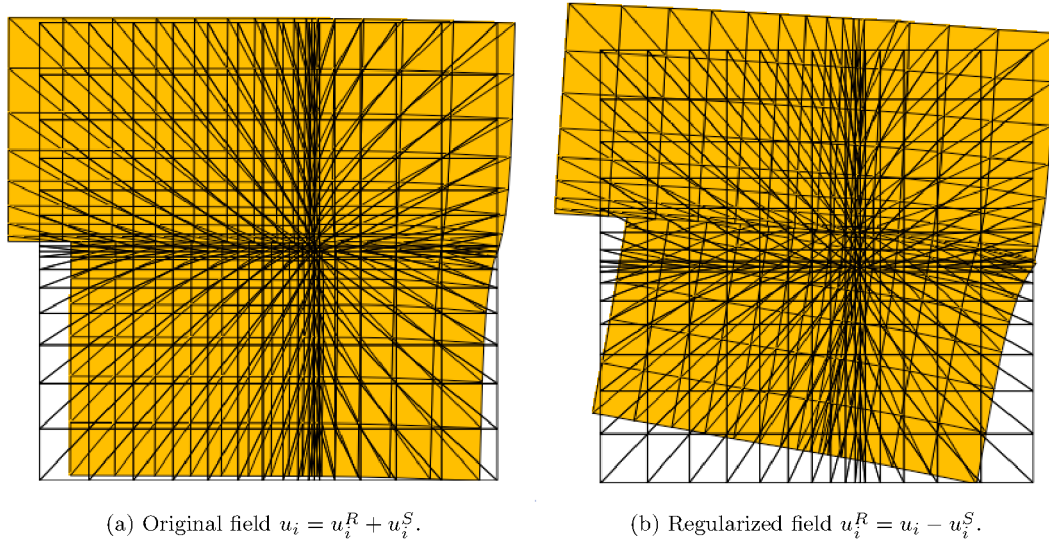


Figure 7: Initial and deformed finite element meshes for the case $a/w = 0.6$ under sliding-mode loading.

9 APÊNDICE B



Cracked plate analysis with the dual boundary element method and Williams' eigenexpansion



J. Caicedo, A. Portela*

Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, University of Brasília, Brasília-DF 70910-900, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 21 June 2014

Received in revised form

13 October 2014

Accepted 19 November 2014

Keywords:

Cracked plates

Williams' eigenexpansion

Singularity subtraction technique

Dual boundary element method

J-integral

Stress intensity factors

ABSTRACT

This paper provides a numerical verification that the singular term of Williams' series eigenexpansion can be used as a singular solution, valid in the neighborhood of each crack tip, in a single-region dual boundary element analysis of two-dimensional piece-wise flat multi-cracked plates, either with edge or internal cracks, in mixed-mode deformation, as an intermediate and necessary research step towards the implementation of the singularity subtraction technique.

The dual equations are the displacement and traction boundary integral equations which allow the solution of general mixed-mode crack problems in a single-region boundary-element analysis.

The singularity subtraction technique is a regularization procedure that uses a singular particular solution of the crack problem to introduce the stress intensity factors as additional primary unknowns in the dual boundary element method. Its implementation depends on the availability of closed-form singular solutions relative to a single-region of a general multi-cracked plate.

In this paper, Williams' series eigenexpansion, which is valid for a semi-infinite edge crack, is used to compute the stress intensity factors, for both cases of edge and internal cracks, for each deformation mode. The singular term of the expansion is used as a singular particular solution in the neighborhood of each edge and internal crack tip. Collocation of this term, at a single internal point near the crack tip, is carried out to compute the stress intensity factors in post-processing.

Several cracked plates were analyzed with this technique in order to assess the validity of using the singular term of Williams' series eigenexpansion for the regularization of the elastic field in a single-region dual boundary element analysis of a general piece-wise multi-cracked plate. The results obtained in this work are in perfect agreement with those obtained with the dual boundary element method, through the J-integral technique, and other published results for both cases of the edge and internal piecewise-flat cracks. Hence, it can be concluded that, in the singularity subtraction technique of the dual boundary element analysis of general edge and internal piecewise-flat multi-cracked plates under mixed-mode deformation, the singular term of Williams' series can be used as a closed-form particular solution, valid in the neighborhood of each crack tip.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The boundary element method is a well-established numerical technique in the engineering community, see Brebbia [1] and Brebbia et al. [2]. The boundary element method has been successfully applied to linear elastic problems in domains containing no degenerated geometries. These degeneracies, either internal or edge surfaces which include no area or volume and across which the problem field is discontinuous, are defined as mathematical cracks. For symmetric crack problems only one side of the crack needs to be modelled and a

single-region boundary element analysis may be used. However, in a single-region analysis, the solution of general crack problems cannot be achieved with the direct application of the boundary element method, because the coincidence of the crack boundaries causes an ill-posed problem. Effectively, for a pair of coincident source points on crack boundaries, the algebraic equations relative to one of the points are identical with those equations relative to the opposite point, since the same boundary integral equation is applied at both coincident source points, with the same integration path, around the whole boundary of the problem. Among the techniques devised to overcome this difficulty, the most general are the sub-regions method, presented by Blandford et al. [7] and the dual boundary-element method (DBEM), first presented by Portela et al. [8] in elasticity. The main drawback of the method of subregions is that the introduction of

* Corresponding author. Tel.: +55 61 8154 7262.

E-mail address: aportela@unb.br (A. Portela).

artificial boundaries, which connect the cracks to the boundary so that the domain is partitioned into subregions without cracks, is not unique and thus it cannot be easily implemented into an automatic procedure.

On the other hand, the DBEM is the most efficient technique devised to overcome this difficulty. It introduces two independent equations, the displacement and traction boundary integral equations, with the displacement equation applied on one of the crack surfaces and the traction equation on the other. As a consequence, general mixed-mode crack problems can be solved in a single-region boundary element formulation, with both crack surfaces discretized with boundary elements. The use of dual integral equations was first reported by Bueckner [3], in crack problems, and by Watson [4], in the boundary element method. The theoretical bases of the DBEM were presented by Hong and Chen [5]. A thorough review article of dual boundary element methods was presented by Chen and Hong [5].

Within the limits of linear elastic analysis, the stress field is unbounded at a crack tip. This was early reported by Brahtz [11] and later by Williams [12] who after an investigation of the analytical form of these singularities demonstrated that under all possible combinations of boundary conditions, the stress becomes infinite at the tip of a crack. From a physical point of view, unbounded elastic fields are meaningless. Nevertheless, unbounded stresses cannot be ignored as their presence indicates that new phenomena (e.g. plasticity and fracture) may occur leading to localized damage in practical situations. In this paper, the term singularity is used to denote the cases in which the elastic stress field becomes unbounded. If r denotes the distance measured from the crack tip, the stress field is of the order $r^{-1/2}$ which becomes singular as r tends to zero. The stress intensity factor, defined at the crack tip, is a measure of the strength of this singularity.

In the DBEM, the computation of the stress intensity factors was first carried out in post-processing using the J-integral technique, as reported by Portela et al. [8]. Although this technique does not perform a regularization of the elastic field, it is very accurate because it uses the elastic field computed at internal points which is a highly accurate operation in the boundary element method since the exact variation of the interior elastic field is built into the fundamental solutions. Despite its high accuracy, the J-integral technique tends to become very expensive when a high number of internal points are considered in the path of the J-integral.

The singularity subtraction technique was presented by Portela et al. [9], as an alternative to the J-integral technique. The singularity subtraction technique is a regularization procedure that uses a singular particular solution of the crack problem to introduce the stress intensity factors as additional primary unknowns in the DBEM. This technique is extremely accurate since the crack-tip singularities are not present in the DBEM analysis of the regularized elastic field. Despite its high accuracy, a possible drawback of the singularity subtraction technique is the lack of available closed-form singular solutions valid in a single-region boundary element analysis. Effectively, in many practical problems the path of a crack, although curved, is usually modelled as piece-wise flat. For an arbitrary piece-wise flat crack there is not a closed-form particular solution of the problem, valid in the global domain, for use in the regularization of the singularity subtraction technique of the problem.

Hence, in order to overcome the referred difficulties, there is a clear need of research in this field to make the singularity subtraction technique a robust and efficient numerical method for the boundary element analysis of general multi-cracked plates.

In this paper, the first term of Williams' [13] series eigenexpansion, which represents the singular elastic field around the crack tip of a semi-infinite crack, is used in the neighborhood of each crack tip, for both cases of edge-crack and internal-crack problems, as well as for the case of piece-wise flat crack problems. This is a

key point of this research, since it is well known that, for a finite flat internal crack, the singular particular solution representing the elastic field around the two crack tips can be defined in terms of Westergaard [14] stress functions which are valid for a finite flat crack in an infinite plate and, for an arbitrary piece-wise flat crack, there is not a closed-form particular solution of the problem.

Collocation of the singular term of Williams' series eigenexpansion, at an internal point approaching each crack tip, implemented in post-processing, seems to be the simplest way of assessing the validity of the procedure of computing the stress intensity factors in the singularity subtraction technique of a general piece-wise flat multi-crack problem. This internal-point procedure extends, to the analysis of cracked plates, a similar approach implemented by Portela et al. [15], in the analysis of notched plates.

Therefore the main focus of this paper is simply to provide a numerical verification that the singular term of Williams' series eigenexpansion can be used as a singular solution, valid in the neighborhood of each crack tip, in a single-region dual boundary element analysis of two-dimensional piece-wise flat multi-cracked plates, either with edge or internal cracks, in mixed-mode deformation. Rather than presenting a new technique to compute stress intensity factors, this approach is thus regarded only as a simple and necessary intermediate research step for the future implementation of the singularity subtraction technique.

The organization of the paper is as follows. After the introduction, the dual boundary integral equations are summarized in Section 2. The computation of the stress intensity factors is presented in Section 3, where the Williams' field is introduced, the normal and shearing stress components at an internal point are presented and the analysis methodology is defined. In Section 4, some numerical results are presented illustrating the effectiveness of the present analysis procedure. Finally, the concluding remarks and future developments are presented.

2. The dual boundary element method

The DBEM performs the analysis of general crack problems in a single-region boundary element formulation, as represented in Fig. 1. The equations on which the DBEM is based are the displacement and the traction Somiglianas boundary integral equations, as presented by Portela et al. [8]. In the absence of body forces and assuming continuity of the displacements at a boundary point P , the boundary integral representation of the displacement components u_i is given by

$$c_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} f_r T_{ij}(P, Q)u_j(Q) dS(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q)t_j(Q) dS(Q), \quad (1)$$

where i and j denote Cartesian components; $T_{ij}(P, Q)$ and $U_{ij}(P, Q)$ represent, respectively, the traction and displacement Kelvin fundamental solutions, at a boundary point Q ; the symbol f_r stands for Cauchy principal-value integral, and the coefficient $c_{ij}(P)$ is given by $\frac{1}{2}\delta_{ij}$ for a smooth boundary at the point P in which δ_{ij} is the

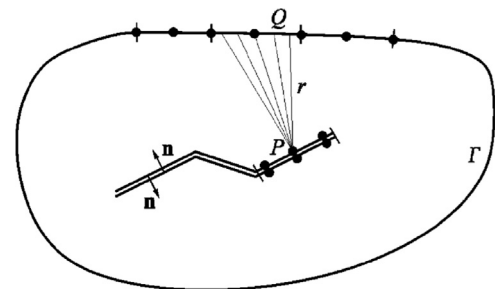


Fig. 1. Single-region analysis of DBEM.

Kronecker delta. In the absence of body forces and assuming continuity of both strains and tractions at P on a smooth boundary, the traction components t_j are given by

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_j(P) + n_i(P) \oint_{\Gamma} S_{ijk}(P, Q)u_k(Q) d\Gamma(Q) \\ = n_i(P) \oint_{\Gamma} D_{ijk}(P, Q)t_k(Q) d\Gamma(Q), \end{aligned} \quad (2)$$

in which $S_{ijk}(P, Q)$ and $D_{ijk}(P, Q)$ contain derivatives respectively of $T_{ij}(P, Q)$ and $U_{ij}(P, Q)$; the symbol \oint_{Γ} stands for the Hadamard principal value and n_i denotes the i th component of the unit outward normal to the boundary at the point P . Eqs. (1) and (2) are the basis of the DBEM, as presented by Portela et al. [15].

On a traction-free crack Γ_c , Eqs. (1) and (2) are simplified; the displacement and the traction equations are given respectively by

$$c_{ij}(P)u_j(P) + \oint_{\Gamma_c} T_{ij}(P, Q)u_j(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad (3)$$

and

$$n_i(P) \oint_{\Gamma_c} S_{ijk}(P, Q)u_k(Q) d\Gamma(Q) = 0. \quad (4)$$

The DBEM transforms the boundary integral equations (1)–(4), accordingly, into a system of linear algebraic equations, by means of nodal collocation and integration over the boundary elements. The unknown boundary tractions and displacements can then be obtained by solving this system of equations which includes the boundary conditions.

3. Computation of stress intensity factors

3.1. J-Integral technique

Consider a cartesian reference system defined at the tip of a traction-free crack, as shown in Fig. 2. The J-integral is defined as

$$J = \int_S (Wn_1 - t_j u_{j,1}) dS, \quad (5)$$

where S is an arbitrary contour surrounding the crack tip, W is the strain energy density, t_j are the traction components and n_1 is the x -component of the unit outward normal to the contour path. The relationship between the J-integral and the stress intensity factors is given by

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'}, \quad (6)$$

where E' is the elasticity modulus E for plane stress conditions and $E' = E/(1 - \nu^2)$ for plane strain conditions.

To decouple the stress intensity factors in Eq. (6), the integral J is represented by the sum of two integrals as $J = J^I + J^{II}$, where the superscripts indicate the pertinent deformation mode. For this

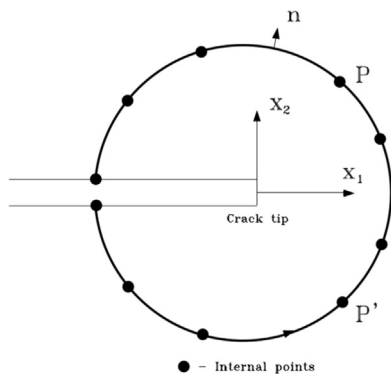


Fig. 2. Coordinate reference system and contour path for J-integral.

representation to be possible, it is sufficient to consider a contour that is symmetrical about the crack axis, as shown in Fig. 2, and decompose the displacement and stress fields into their symmetric and anti-symmetric components. Following this procedure the J-integral components can be expressed as

$$J^m = \int_S (W^m n_1 - t_j^m u_{j,1}^m) dS, \quad (7)$$

for $m=I$ or $m=II$. The relationship between the J-integral components and the stress intensity factors is now given by

$$J^I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (8)$$

The implementation of this procedure into the dual boundary element method is straightforward, as reported by Portela et al. [8]. A circular contour path around the crack tip is automatically defined with a set of internal points at symmetrical positions about the crack axis, as shown in Fig. 2. The integration along the contour path is performed by the trapezoidal rule. For the sake of simplicity only circular paths centered at the crack tip and containing a pair of crack-nodes were considered, as shown in Fig. 2.

The J-integral is an effective method for the determination of stress intensity factors, because the interior elastic field can be accurately determined along the contour path in the boundary element method, since the exact variation of the interior elastic field is built into the fundamental solution.

3.2. Williams' series eigenexpansion

The analysis of the problem uses a particular solution that represents the singular field around the crack tip of a semi-infinite crack. Such singular field can be defined with the first term of Williams' series eigenexpansion [13], for which the stress components σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{xy} are given by

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (10)$$

and

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (11)$$

where K_I and K_{II} are the stress intensity factors, respectively, of the opening and sliding deformation modes. The polar coordinate reference system (r, θ) , is centered at the crack tip, such that $\theta=0^\circ$ is the crack axis which is coincident with the Cartesian x -axis, as

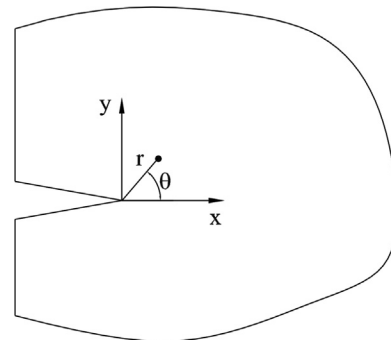


Fig. 3. Point (r, θ) close to the crack tip and the axes of the coordinate reference system.

represented in Fig. 3. Figs. 4–6 represent the stress components of Williams' field for a horizontal crack with $K_I=1$ and $K_{II}=0$.

3.3. Stress components at a point

When the stress components σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{xy} are known at any point of the plate, either in a plane stress or plane strain condition, the stress components acting on any plane perpendicular to the plate, defined through this point and inclined to the x and y axes, as represented in Fig. 7, can be calculated from the usual equations of statics. Let α denote the angle between the normal N and the x reference axis, as represented in Fig. 7. Then, the normal and shearing stress components on the plane BC are given respectively by

$$\sigma = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

and

$$\tau = \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (13)$$

3.4. Analysis methodology

The collocation of Williams' equations (9)–(11) is carried out in post-processing. One internal point is considered, ahead of the crack tip, as represented in Fig. 8. At this point, placed at a distance ϵ , as close as possible to the crack tip, the stress components are

computed with the DBEM, in order to evaluate the normal and tangential stress components, represented in Fig. 9, respectively by $t_I = \sigma$ and $t_{II} = \tau$, by means of Eqs. (12) and (13).

Finally, the stress intensity factors K_I and K_{II} are computed by

$$K_I = t_I \sqrt{2\pi r} \quad \text{and} \quad K_{II} = t_{II} \sqrt{2\pi r}. \quad (14)$$

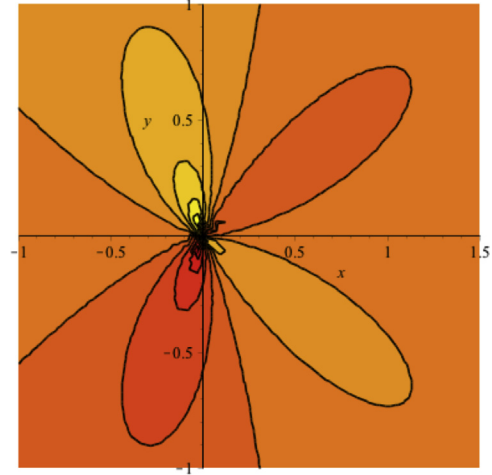


Fig. 6. σ_{xy} for a horizontal crack with $K_I=1$ and $K_{II}=0$.

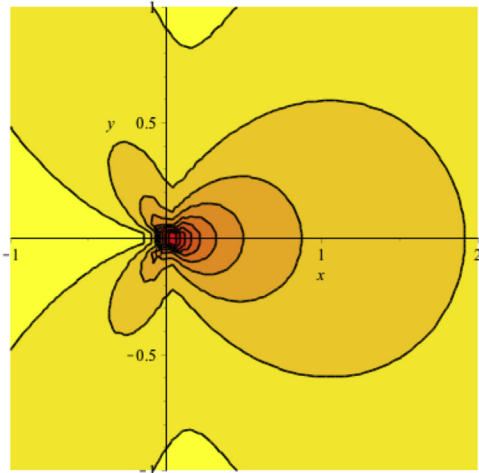


Fig. 4. σ_{xx} for a horizontal crack with $K_I=1$ and $K_{II}=0$.

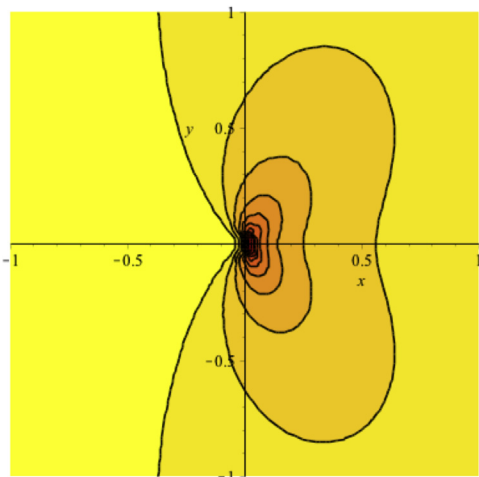


Fig. 5. σ_{yy} for a horizontal crack with $K_I=1$ and $K_{II}=0$.

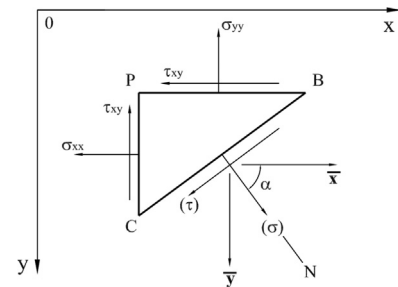


Fig. 7. Stress components at a point.

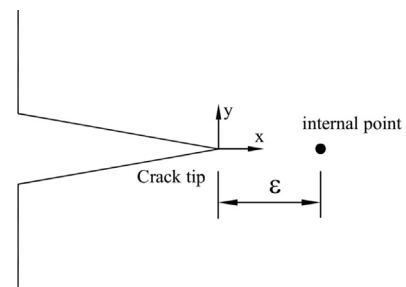


Fig. 8. Point ahead of the crack tip, where the numerical approximation of the stress components is carried out with the DBEM.

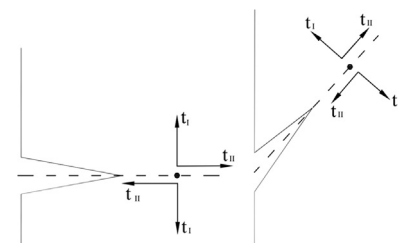


Fig. 9. Tractions at a point ahead of the crack tip.

The distance r , used to compute the stress intensity factors in Eq. (14), must be defined in such a way that the corresponding stress should exist. The calibration of this distance r was carried out taking into account several reference cases with known values of the stress intensity factors reported in the literature [17,18].

Notice that ε and r can have independent values, since they represent different approximations; while ε is related to the point where the stress components are calculated with the DBEM, r is related to the computation of the stress intensity factors in Eq. (14).

This analysis procedure was implemented and a detailed study of the influence of the values of ε and r on the results obtained for the stress intensity factors was carried out. Eventually, the values which give good results, for the large variety of cases tested, were adopted as $\varepsilon = 0.0075l$ and $r = 0.0011l$, where l is the length of the boundary element closest to the crack tip.

4. Numerical results

In this paper, results were obtained with three different cases of cracked plates with a central crack, an edge crack and an internal kinked crack. In all these cases, the results obtained for the stress intensity factors are compared with the corresponding values computed from the J-integral with the DBEM through Eq. (8). Results are presented in terms of the percentage difference, defined as

$$\% \text{ Difference} = (RV - TP)/RV * 100, \quad (15)$$

where RV represents a reference value and TP represents a value obtained in this paper.

As presented by Portela et al. [8], the DBEM modelling strategy considers piecewise-straight cracks which are discretized with straight discontinuous quadratic boundary elements. Continuous quadratic boundary elements are used along the remaining boundaries of the problem, except at the intersection between a crack and an edge, where semi-discontinuous boundary elements are used on the edge. Self-point discontinuous boundary elements are integrated analytically, while Gaussian quadrature, with sub-element integration, is carried out for the remaining integrations, see Liu et al. [10].

Collocation of the singular term of Williams' series was implemented for both cases of edge and internal cracks, at an internal point approaching each crack tip, to compute the stress intensity factors in post-processing. Although very simple to implement, this technique required a calibration of the distance ε , where the stress state is calculated with the DBEM, and a further calibration for r which represents the crack-tip distance in the first term of Williams' series. Therefore, this technique is not recommended as an efficient way of computing the stress intensity factors and it was implemented only to provide a simple and quick way to carry out the post-

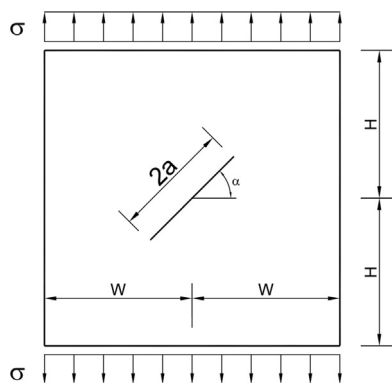


Fig. 10. Rectangular plate with a central slant crack, with $H/W = 2$ and remote stress σ .

processing collocation of the singular term of Williams' series. This collocation procedure of the first term of Williams' series was tested and a detailed study of the influence of the independent values of ε and r on the results obtained for the stress intensity factors was carried out. Eventually, the values which give good results, for several reference cases with known values of the stress intensity factors reported in the literature [17,18], were adopted as $\varepsilon = 0.0075l$ and $r = 0.0011l$, where l is the length of the boundary element closest to the crack tip.

4.1. Plate with a central crack

Consider a plate with a central slant crack, as represented in Fig. 10, in mixed-mode deformation due to a remote stress σ .

A mesh of 36 quadratic boundary elements was set up, in which 6 discontinuous elements were used on each side of the crack, graded towards the tips with ratios 0.25, 0.15 and 0.1. Tables 1 and 2 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and

Table 1

Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – central slant crack ($\alpha = 15^\circ$).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.946	0.963	0.958	1.259	-0.555
0.4	1.028	1.048	1.040	1.170	-0.717
0.6	1.206	1.231	1.218	1.007	-1.065

Table 2

Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – central slant crack ($\alpha = 15^\circ$).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.253	0.252	0.251	-0.655	-0.385
0.4	0.258	0.257	0.256	-0.686	-0.359
0.6	0.276	0.274	0.273	-1.235	-0.577

Table 3

Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – central slant crack ($\alpha = 45^\circ$).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.521	0.521	0.518	-0.656	-0.565
0.4	0.575	0.576	0.572	-0.475	-0.656
0.6	0.663	0.667	0.661	-0.350	-0.873

Table 4

Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – central slant crack ($\alpha = 45^\circ$).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.511	0.509	0.507	-0.709	-0.420
0.4	0.533	0.531	0.529	-0.674	-0.365
0.6	0.571	0.569	0.567	-0.729	-0.363

$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$, as well as the difference relative to the appropriate values of the reference [17], as a function of a/W , for $\alpha=15^\circ$. Tables 3 and 4 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ as well as the difference relative to the appropriate values of the reference [17], as a function of a/W , for $\alpha=45^\circ$.

Figs. 11–13 represent the stress components of Williams' field for $\alpha=45^\circ$ with $a/W=0.6$.

The results obtained here are in perfect agreement with those obtained with the J-integral as well as with those published in references [17,18].

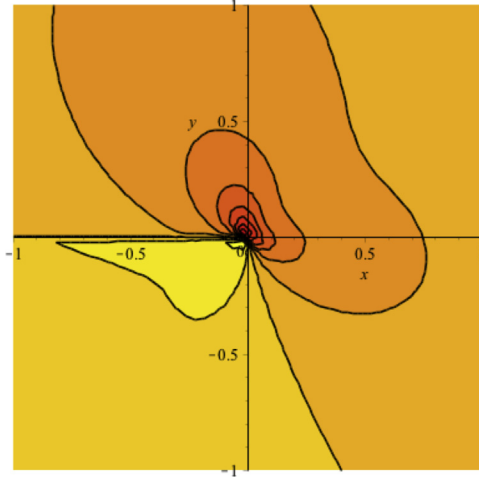


Fig. 11. σ_{xx} for $\alpha=45^\circ$ with $a/W=0.6$.

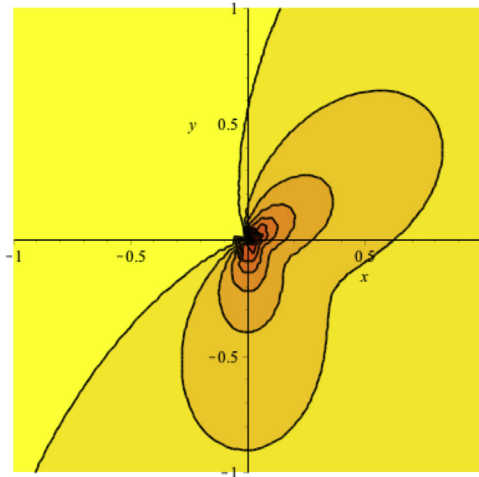


Fig. 12. σ_{yy} for $\alpha=45^\circ$ with $a/W=0.6$.

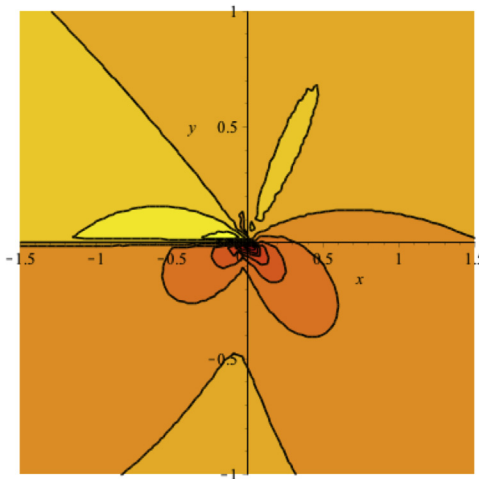


Fig. 13. σ_{xy} for $\alpha=45^\circ$ with $a/W=0.6$.

4.2. Plate with an edge crack

Consider now a plate with an edge slant crack, as represented in Fig. 14, in mixed-mode deformation due to a remote stress σ .

A mesh of 32 quadratic boundary elements was set up, in which 4 discontinuous elements were used on each side of the crack, graded towards the tips with ratios 0.4, 0.3, 0.2 and 0.1. Tables 5 and 6 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$, as well as the difference relative to the appropriate values of the reference [17], as a function of a/W , for $\alpha=30^\circ$. Tables 7 and 8 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ as well as the difference relative to reference [17], as a function of a/W , for $\alpha=60^\circ$.

The results obtained for this case are in perfect agreement with those obtained with the J-integral as well as with those published in references [17,18].

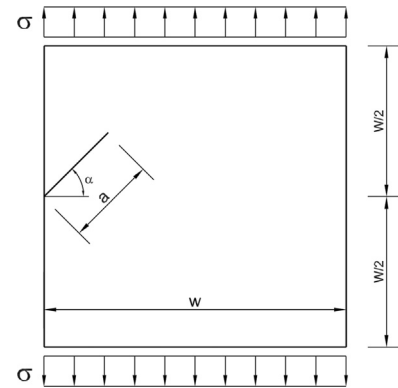


Fig. 14. Square plate with an edge slant crack with remote stress σ .

Table 5

Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – edge slant crack ($\alpha=30^\circ$).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	1.085	1.082	1.100	1.382	1.611
0.4	1.549	1.545	1.550	0.044	0.317
0.6	2.581	2.572	2.550	1.199	-0.859

Table 6

Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – edge slant crack ($\alpha=30^\circ$).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.353	0.351	0.350	-0.839	-0.239
0.4	0.476	0.474	0.470	-1.367	-0.890
0.6	0.701	0.700	0.700	-0.127	0.051

4.3. Plate with a kinked crack

Consider now a plate with an internal kinked crack, as represented in Fig. 15, in mixed-mode deformation, due to a remote stress σ .

A mesh of 48 quadratic boundary elements was set up, in which the horizontal and the inclined crack segments were discretized with 5 and 4 discontinuous elements on each crack face, respectively. Tables 9 and 10 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$, as well as the difference relative to the appropriate values of the reference [17], as a function of b/a , for crack tip A. Tables 11 and 12 present, respectively, the values of $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ as well as the difference relative to reference [17], as a function of b/a , for crack tip B.

Table 7
Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – edge slant crack ($\alpha=60^\circ$).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.507	0.495	0.500	-1.435	0.903
0.4	0.605	0.592	0.600	-0.867	1.308
0.6	0.868	0.853	0.860	-0.938	0.769

Table 8
Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ and difference relative to [17] – edge slant crack ($\alpha=60^\circ$).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.358	0.356	0.360	0.498	1.062
0.4	0.415	0.413	0.420	1.134	1.658
0.6	0.494	0.493	0.490	-0.903	-0.547

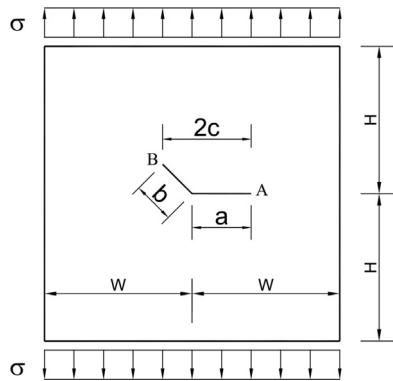


Fig. 15. Rectangular plate with an internal kinked crack ($H/W = 2$, $a/W = 0.1$) and remote stress σ .

Table 9
Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and difference relative to [17] – internal kinked crack, crack tip A.

b/a	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.605	0.604	0.598	-1.161	-1.039
0.4	0.578	0.577	0.574	-0.610	-0.438
0.6	0.570	0.571	0.568	-0.428	-0.472

Table 10
Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and difference relative to [17] – internal kinked crack, crack tip A.

b/a	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	-0.563	-0.563	-0.557	-1.078	-1.159
0.4	-0.612	-0.611	-0.607	-0.830	-0.591
0.6	-0.632	-0.632	-0.627	-0.848	-0.743

Table 11
Stress intensity factor $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and difference relative to [17] – internal kinked crack, crack tip B.

b/a	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.987	1.000	0.995	0.778	-0.472
0.4	0.983	0.994	0.990	0.718	-0.427
0.6	0.981	0.991	0.986	0.533	-0.515

Table 12
Stress intensity factor $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ and difference relative to [17] – internal kinked crack, crack tip B.

b/a	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$			% Difference	
	TP	J-integral	Ref. [17]	TP	J-integral
0.2	0.028	0.028	0.028	-0.114	-1.613
0.4	0.033	0.034	0.033	-0.846	-2.008
0.6	0.030	0.031	0.030	-0.473	-1.704

The results obtained for this case show a good accuracy with those obtained with the J-integral as well as with those published in reference [17].

5. Conclusions

The main focus of this paper is simply to provide a numerical verification that the singular term of Williams series eigenexpansion can be used as a singular solution valid in the neighborhood of each crack tip, in a single-region dual boundary element analysis of two-dimensional piece-wise flat multi-cracked plates, either with edge or internal cracks, in mixed-mode deformation. This approach is thus regarded as a necessary intermediate research step, for the future implementation of the singularity subtraction technique.

This simple numerical verification is carried out through the collocation of the singular term of Williams' series eigenexpansion, in the dual boundary element analysis of piece-wise flat multi-cracked plates, to compute the stress intensity factors. The technique is implemented for both cases of edge and internal cracks, under mixed-mode deformation. Collocation of this singular term, at an internal point approaching each crack tip, is implemented in post-processing to compute the stress intensity factors. Although very simple to implement, this technique required a calibration of the distance ϵ , where the stress state is calculated with the DBEM and a further calibration for r which represents the crack-tip distance in the first term of Williams' series. Therefore, this technique is not recommended as an efficient way of computing the stress intensity factors and it was implemented only to provide a simple and quick way to carry out the collocation of the singular term of Williams' series.

The numerical results obtained with this collocation technique are compared with those obtained by using the J-integral technique, as well as other results available in the literature. Since the results obtained in this work are in perfect agreement with those obtained with the J-integral technique, through the dual boundary element method, and other published results for both cases of the edge and internal piecewise-flat cracks, a final conclusion can be drawn: the first term of Williams' series can be used as a closed-form singular particular solution to implement the singularity subtraction technique in the single-region dual boundary element analysis of general edge and internal piecewise-flat multi-cracked plates under mixed-mode deformation.

Therefore, the singularity subtraction technique will be implemented in the DBEM, as a near-future development, using the singular term of Williams' series eigenexpansion as a closed-form singular solution valid in a neighborhood of each crack tip, in a single-region dual boundary element analysis of two-dimensional piece-wise flat multi-cracked plates, with either edge or internal cracks, in mixed-mode deformation.

Acknowledgements

The first author acknowledges the program *PECC – Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, University of Brasília. He also acknowledges *CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* for his Master scholarship.

References

- [1] Brebbia CA. The boundary element method for engineers. London: Pentech Press; 1978.
- [2] Brebbia CA, Telles JC, Wrobel LC. Boundary element techniques. Berlin: Springer; 1984.
- [3] Bueckner HF. Field singularities and related integral representations. In: Sih GC, editor. Mechanics of fracture, vol. 1. Leyden, The Netherlands: Noordhoff; 1973.
- [4] Watson JO. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. In: Banerjee, Watson, editors. Developments in boundary element methods, vol. 4. Barking, UK: Elsevier; 1986.
- [5] Hong H-K, Chen JT. Derivation of integral equations in elasticity. J Eng Mech 1988;114(6):1028–44.
- [7] Blandorf GE, Ingraffea AR, Liggett JA. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. Int J Numer Methods Eng 1981;17:387–404.
- [8] Portela A, Aliabadi MH, Rooke DP. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. Int J Numer Methods Eng 1991;36(5):765–81.
- [9] Portela A, Aliabadi MH, Rooke DP. Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique. Int J Fracture 1992;55:17–28.
- [10] Liu J, Beer G, Meek JL. Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$ and $1/r^3$ using Gauss quadrature. Eng Anal 1985;2(3):118–23.
- [11] Brahtz JHA. Stress distribution in a reentrant corner. Trans Am Soc Mech Eng 1933;55:31–7.
- [12] Williams ML. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J Appl Mech 1952;526–8.
- [13] Williams ML. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J Appl Mech 1957;24:109–14.
- [14] Westergaard HM. Bearing pressures and cracks. J Appl Mech 1939;66:A49–53.
- [15] Portela A, Aliabadi MH, Rooke DP. Efficient boundary element analysis of sharp notched plates. Int J Numer Methods Eng 1991;32:445–70.
- [17] Murakami Y, editor. Stress intensity factors handbook, 1st ed., vol 2. Pergamon Press, Oxford; 1987.
- [18] Tada H. The stress analysis of cracks handbook. New York: ASME Press; 2000.