



**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**ESTUDO DA FRATURA DÚCTIL ATRAVÉS DE MODELOS  
DEPENDENTES DO TERCEIRO INVARIANTE DO TENSOR  
DESVIADOR**

**JOÃO VITOR SAHADI**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**ESTUDO DA FRATURA DÚCTIL ATRAVÉS DE MODELOS  
DEPENDENTES DO TERCEIRO INVARIANTE DO TENSOR  
DESVIADOR**

**JOÃO VITOR SAHADI**

**ORIENTADOR: LUCIVAL MALCHER**

**PUBLICAÇÃO: ENM.DM – 232/2015**

**BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2015**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS  
ESTUDO DA FRATURA DÚCTIL ATRAVÉS DE MODELOS  
DEPENDENTES DO TERCEIRO INVARIANTE DO TENSOR  
DESVIADOR

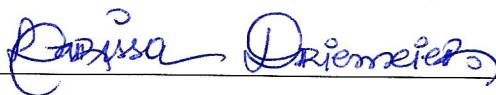
JOÃO VITOR SAHADI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Lucival Malcher, DSc. (ENM – FT – UnB) – Orientador



Profa. Larissa Driemeier, DSc. (POLI – USP) – Examinadora Externa



Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc. (ENM – FT – UnB) – Examinador Interno

Prof. José Alexander Araújo, DPhil. (ENM – FT – UnB) – Examinador Suplente

BRASÍLIA/DF, 07 DE AGOSTO DE 2015.

## FICHA CATALOGRÁFICA

SAHADI, JOÃO VITOR

ESTUDO DA FRATURA DÚCTIL ATRAVÉS DE MODELOS DEPENDENTES DO TERCEIRO INVARIANTE DO TENSOR DESVIADOR.

xxvii, 182p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2015)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- |                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| 1. Terceiro Invariante    | 2. Triaxialidade   |
| 3. Indicadores de Fratura | 4. Fratura Dúctil  |
| I. ENM/FT/UnB             | II. Título (série) |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SAHADI, J. V. (2015). Estudo da Fratura Dúctil Através de Modelos Dependentes do Terceiro Invariante do Tensor Desviador. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM – 232/2015, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 182p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**AUTOR:** João Vitor Sahadi.

**TÍTULO:** Estudo da Fratura Dúctil Através de Modelos Dependentes do Terceiro Invariante do Tensor Desviador.

**GRAU:** Mestre

**ANO:** 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

João Vitor Sahadi

[joao\\_sahadi@hotmail.com](mailto:joao_sahadi@hotmail.com)



Dedico esta dissertação aos meus queridos familiares e amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer primeiramente ao Prof. Dr. Lucival Malcher por todos esses anos de orientação e amizade em que recebi apoio total, e fui encorajado a ir mais longe. Muito obrigado por ter acreditado no meu potencial e ter feito tanto por mim.

Agradeço também ao Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya por toda paciência e atenção com a minha formação, e também por toda ajuda no meu caminhar para o doutorado.

Ao Prof. Dr. José Alexander Araújo pelo acolhimento no laboratório de ensaio mecânicos, pelos conhecimentos compartilhados, pelo voto de confiança e por todas as portas abertas que transformarão o meu futuro.

À Prof. Dr. Larissa Driemeier pela disponibilidade em participar da banca examinadora e prestigiar o meu trabalho.

A todos os demais professores, técnicos e colaboradores envolvidos na Pós Graduação em Ciências Mecânicas da Universidade de Brasília.

À minha família por todo carinho e apoio, e motivação. Vocês são parte fundamental de todas as minhas conquistas e realizações.

Obrigado por tudo, meu Deus.

## RESUMO

A descrição precisa e correta do comportamento mecânico de materiais dúcteis é uma questão que vem sendo abordada desde o século XIX por vários pesquisadores ao redor do mundo. Uma das formulações mais comumente utilizadas para descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis durante o regime elasto-plástico foi proposta por von Mises e se baseia na teoria do segundo invariante do tensor das tensões desviadores,  $J_2$ . Contudo para alguns grupos de materiais dúcteis, como ligas de alumínio, a formulação clássica de von Mises não é capaz de capturar efeitos importantes, como o efeito da tensão hidrostática/triaxialidade, do terceiro invariante/ângulo de Lode, dos pontos de calibração, e entre outros. Desta forma, este trabalho tem como contribuição o estudo de dois modelos elasto-plásticos que contemplam a influência do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) em suas formulações. O primeiro destes modelos selecionados foi proposto na década de 1970 por Hosford e inclui o efeito da magnitude de tensão ( $J_2$ ) e do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ); o segundo modelo, proposto por Gao et al., contempla a magnitude de tensão ( $J_2$ ), o terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) e a tensão hidrostática ( $p$ ). Como primeira etapa do trabalho, faz-se uma revisão dos conceitos da mecânica dos materiais e da modelação constitutiva. Posteriormente, uma análise dos modelos de Hosford e Gao et al. é feita, levando em consideração seus aspectos matemáticos e numéricos. Através de simulações numéricas preliminares, demonstra-se o ganho de precisão obtido pelos modelos, na descrição do comportamento elasto-plástico de materiais dúcteis, quando o efeito do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) é introduzido. Em seguida, sete indicadores de fratura dúctil (Freudenthal, Datsko, Cockcroft & Latham, Rice & Tracey, Brozzo et al., Vaz jr. e Xue) são adicionados à etapa de pós-processamento do algoritmo de retorno proposto para o modelo elasto-plástico de Gao et al., baseado na metodologia de decomposição do operador e implementado através de um método de integração implícita em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, juntamente com sua matriz tangente consistente. Por fim, através de uma comparação entre os resultados obtidos numericamente e dados experimentais disponíveis na literatura, avalia-se o desempenho destes indicadores de fratura dúctil quanto as suas capacidades preditivas para o local e instante esperado para a falha dúctil, com base em um campo de tensão e deformação realístico. Para tal, considera-se a liga de aço SAE1045 e uma liga de alumínio aeronáutico, e corpos de prova que simulam estados de tensão dentro das regiões de alta e baixa triaxialidade.

*Palavras-chaves:* Terceiro Invariante, Triaxialidade, Indicadores de Fratura, Fratura Dúctil.

## ABSTRACT

The precise and correct description of the mechanical behavior of ductile materials is an issue that has been addressed since the 19<sup>th</sup> century by several researchers around the world. One of the most widespread yield functions used to describe mechanical behavior of ductile materials was proposed by von Mises and it is based on the theory of the second invariant of the deviatoric stress tensor,  $J_2$ . However for some groups of ductile materials like aluminum alloys, the traditional  $J_2$  theory is not capable of capturing important effects that contribute to the description of the ductile behavior. In this sense, new approaches have been suggested coupled with the introduction of important effects, as the effects of hydrostatic stress/triaxiality, third invariant/Lode angle, multi calibration points and others. In this sense, this work presents a study of two elasto-plastic models which include the influence of the third invariant of the deviatoric stress tensor ( $J_3$ ) in their formulations. The first selected model was proposed in the 1970s by Hosford and includes the effects of stress intensity ( $J_2$ ) and third invariant of the deviatoric stress tensor ( $J_3$ ); the second model, proposed by Gao et al., contemplates the stress intensity ( $J_2$ ), the third invariant ( $J_3$ ) and the hydrostatic stress ( $p$ ) parameters. As the first stage of the work, a review of the concepts of Mechanics of Materials and Constitutive Modeling Theory is conducted. Subsequently, an analysis of Hosford's and Gao's models with isotropic hardening is done, taking into account its mathematical and numerical aspects. Through preliminary numerical simulations, the precision improvement obtained in the description of the mechanical behavior of ductile materials, when the third invariant ( $J_3$ ) is introduced, is demonstrated. Next, seven fracture criteria (Freudenthal, Datsko, Cockcroft & Latham, Rice & Tracey, Brozzo et al., Vaz jr. e Xue) are added to the post-processing step of the return map algorithm of Gao et al.'s elasto-plastic model, based on the operator splitting methodology and implemented through an implicit numerical integration method in an academic finite element environment, along with its consistent tangent matrix. Finally, through a comparison between the numerical results and experimental data available in the literature, an assessment of performance is carried out regarding the ability of these fracture indicators to point out the correct fracture onset, based on realistic stress and strain fields. For this, two types of materials, an aeronautics aluminum alloy and the SAE1045 steel alloy, and different specimens that simulate stress states within the high and low stress triaxiality regions are taken into account.

*Keywords:* Third Invariant, Stress Triaxiality, Fracture Indicators, Ductile Fracture.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Contextualização.....	1
1.2	Objetivo do Trabalho .....	7
1.3	Estrutura do Trabalho .....	7
<b>2</b>	<b>ASPECTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>9</b>
2.1	Estudo da Falha Dúctil.....	9
2.2	Definições da Mecânica dos Materiais .....	15
2.3	Endurecimento Isotrópico.....	18
<b>3</b>	<b>MODELOS BASEADOS NO TERCEIRO INVARIANTE .....</b>	<b>22</b>
3.1	Modelo Matemático .....	23
3.1.1.	Domínio Elástico e Definição da Função de Escoamento .....	23
3.1.2	Lei de Fluxo Plástico.....	26
3.1.3	Evolução da Deformação Plástica Acumulada .....	28
3.1.4	Regra de Complementariedade.....	28
3.2	Esquema Implícito de Integração .....	31
3.2.1	Algoritmo de Atualização das Tensões e Variáveis Internas .....	31
3.2.2	Atualização das Variáveis Internas – Hosford .....	34
3.2.3	Atualização da Variáveis Internas – Gao et al.....	35
3.2.4	Sistema de Equações Não Lineares .....	36
3.3	Método de Newton-Raphson .....	39
3.3.1	Sistema de Equações Residuais .....	39
3.4	Operador Tangente Consistente .....	41
3.5	Geometria, Discretização e Calibração .....	43
3.5.1	Liga de Aço <i>SAE1045</i> .....	43
3.5.2	Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	48
3.6	Resultados e Discussões .....	52
3.6.1	Análise de Convexidade.....	52
3.6.2	Análise das Curvas de Reação e Evolução da $\epsilon_p$ .....	56
3.7	Conclusões do Capítulo.....	67

<b>4</b>	<b>INDICADORES DE FRATURA DÚCTIL .....</b>	<b>69</b>
4.1	Formulação Matemática .....	71
4.1.1.	Micromecânica .....	72
4.1.2.	Modelos de Crescimento de Defeitos .....	73
4.1.3.	Modelos da Mecânica do Dano Contínuo .....	75
4.2	Efeito do Terceiro Invariante .....	78
4.3	Esquema Implícito de Integração .....	78
4.4	Geometria, Discretização e Calibração .....	81
4.4.1.	Liga de Aço <i>SAE1045</i> .....	81
4.4.2.	Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	89
4.5	Resultados e Discussões .....	99
4.5.1.	Liga de Aço <i>SAE1045</i> .....	99
4.5.2.	Liga de Alumínio Aeronáutico .....	116
4.6	Conclusões do Capítulo .....	139
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS.....</b>	<b>141</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>141</b>
	<b>ANEXO A – DERIVADAS.....</b>	<b>141</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos da aplicação de modelos constitutivos para a descrição do comportamento elasto-plásticos de estruturas e componentes mecânicos. Fonte: Bao (2004), Bai (2008), Dlubal Engineering Software (2013) e MSC Software Solutions (2013). .....	2
Figura 2 – Contribuição do efeito do terceiro invariante do tensor desviador e tensão hidrostática no comportamento mecânico de materiais dúcteis. Adaptado de Bai, 2008. ....	4
Figura 3 – Representação esquemática do crescimento de vazios alongados e esféricos. Adaptado de Engelen (2005). ....	10
Figura 4 – Representação esquemática do vetor tensão <b>OB</b> no plano das tensões principais e (b) definição do ângulo de Lode no plano- $\pi$ . Adaptado de Bai (2008). ....	16
Figura 6 - Endurecimento isotrópico. Teste uniaxial e representação no plano- $\pi$ . Modificado e adaptado de Souza Neto et al. (2008). ....	19
Figura 7 – Definição do Trabalho Plástico. Adaptado de Souza Neto et al. (2008). ....	20
Figura 7 – Vetor de Fluxo para o critério de von Mises, considerando plasticidade associativa. Adaptado de Souza Neto et al. (2008). ....	22
Figura 8 - Comparação das superfícies de escoamento, no plano das tensões principais, dos modelos de von Mises, Tresca e Hosford. ....	24
Figura 10 – Comparação das superfícies de escoamento no plano das tensões principais dos modelos de von Mises e Gao et al. ....	26
Figura 11 – Geometria do corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ”. Adaptado de Bai. (2008). ....	44
Figura 12 – Corpo de prova cilíndrico sem entalhe, utilizado para o processo de calibração. Adaptado de Bai. (2008). ....	45
Figura 13 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ”. Liga de aço <i>SAE1045</i> . ....	45
Figura 14 - Malha de elementos finitos para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe. Liga de aço <i>SAE1045</i> . ....	46
Figura 15 – Curva de Encruamento – Liga de aço <i>SAE1045</i> . ....	47
Figura 16 - Geometria do corpo de prova retangular sem entalhe. Liga de Alumínio Aeronáutico. .	48

Figura 17 – Geometria do corpo de prova para simulação de cisalhamento puro. Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	49
Figura 18 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular sem entalhe. Liga de Alumínio Aeronáutico.....	49
Figura 19 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o espécime de cisalhamento. Liga de Alumínio Aeronáutico.....	50
Figura 20 – Curva de Encruamento – Alumínio Aeronáutico. ....	51
Figura 20 – Análise de Convexidade da Superfície de Escoamento de Hosford (1972). ....	53
Figura 22 – Análise de Convexidade da Superfície de Escoamento de Gao et al. (2011). ....	54
Figura 23 – Análise comparativa entre as superfícies de escoamento de von Mises (1913), Tresca (1864), Hosford (1972) e Gao et al. (2011). ....	55
Figura 24 – Curva de reação para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe em liga de aço SAE1045. ....	57
Figura 25 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova cilíndrico sem entalhe em liga de aço SAE1045.....	57
Figura 26 – Curva de reação para o corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” em liga de aço SAE1045, avaliação do modelo de Hosford (1972) com $\mathbf{h} = \mathbf{12}$ .....	58
Figura 27 – Curva de reação para o corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” em liga de aço SAE1045, avaliação do modelo de Gao et al. (2011) com: 1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ e 2) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{80}$ . ....	60
Figura 28– Curva de reação para o corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” em liga de aço SAE1045, avaliação comparativa entre os modelo de Hosford (1972) com $\mathbf{h} = \mathbf{18}$ e Gao et al. (2011) com $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ .....	61
Figura 29 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” em liga de aço SAE1045. ....	61
Figura 30 – Curva de reação para o corpo de prova retangular sem entalhe em liga de alumínio aeronáutico.....	62
Figura 31 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova retangular sem entalhe em liga de alumínio aeronáutico.....	63
Figura 32 – Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação do modelo de Hosford (1972) com $\mathbf{h} = \mathbf{12}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{18}$ . ....	64



Figura 33 – Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação do modelo de Gao et al. (2011) com: 1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ e 2) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{80}$ .....	65
Figura 34– Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação comparativa entre os modelo de Hosford (1972) com $\mathbf{h} = \mathbf{18}$ e Gao et al. (2011) com $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ .....	66
Figura 35 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova “Borboleta” em liga de aço SAE1045. ....	66
Figura 36 – Espécime cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm}$ .....	82
Figura 37 - Malha de elementos finitos bidimensionais quadráticos – Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm}$ . Liga de aço SAE1045. ....	82
Figura 38 – Indicador de Fratura Brozzo et al, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.....	84
Figura 39 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045. ....	84
Figura 40 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.....	85
Figura 41 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.....	85
Figura 42 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045. ....	86
Figura 43 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.....	86

Figura 44 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – <i>SAE1045</i> . .....	87
Figura 45 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – <i>SAE1045</i> . .....	88
Figura 46 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – <i>SAE1045</i> . .....	88
Figura 47 – Geometria do corpo de prova retangular entalhado com $R = 10mm$ . Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	89
Figura 48 – Geometria do corpo de prova para ensaio de cisalhamento puro. Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	90
Figura 49 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular com entalhe $R = 10mm$ . Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	90
Figura 50 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular com entalhe $R = 50mm$ . Liga de Alumínio Aeronáutico. ....	91
Figura 51 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico. ....	92
Figura 52 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico. ....	93
Figura 53 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico. ....	93
Figura 54 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60}, \mathbf{75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico. ....	94

Figura 55 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.....	94
Figura 56 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.....	95
Figura 57 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises) e b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.....	95
Figura 58 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção X associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.....	97
Figura 59 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção Z associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.....	97
Figura 60 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção X associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.....	98
Figura 61 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção Z associados ao modelo de Gao et al. na configuração $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{60,75}$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.....	98
Figura 62 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm} - \mathbf{SAE1045}$ .....	100
Figura 63 – Indicador de Fratura Cockcroft et al., associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm} - \mathbf{SAE1045}$ .....	101
Figura 64 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm} - \mathbf{SAE1045}$ . ....	101
Figura 65 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm} - \mathbf{SAE1045}$ .....	102
Figura 66 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $\mathbf{R} = \mathbf{12mm} - \mathbf{SAE1045}$ . ....	102

Figura 67 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $R = 12mm$ – SAE1045.....	103
Figura 68 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova cilíndrico entalhado com $R = 12mm$ – SAE1045.....	103
Figura 69 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração $a = b = 0$ (von Mises). Corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045.....	107
Figura 70 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045.....	107
Figura 71 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	108
Figura 72 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	109
Figura 73 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	109
Figura 74 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	110
Figura 75 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	110
Figura 76 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	111
Figura 77 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	111
Figura 78 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo $X$ associados ao modelo de Gao et al. na configuração $a = b = 0$ (von Mises). Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	114
Figura 79 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo $Z$ associados ao modelo de Gao et al. na configuração $a = b = 0$ (von Mises). Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	114

Figura 80 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>X</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	115
Figura 81 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.....	115
Figura 82 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	116
Figura 83 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	117
Figura 84 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	117
Figura 85 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	118
Figura 86 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico.....	118
Figura 87 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	119
Figura 88 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico.....	119
Figura 89 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>X</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = b = 0</b> (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	122
Figura 90 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = b = 0</b> (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	123
Figura 91 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>X</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	123

Figura 92 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 10mm</b> – <i>Alumínio aeronáutico</i> . .....	124
Figura 93 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	125
Figura 94 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	125
Figura 95 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	126
Figura 96 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	126
Figura 97 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	127
Figura 98 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	127
Figura 99 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	128
Figura 100 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>X</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = b = 0</b> (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – <i>Alumínio aeronáutico</i> . ....	130
Figura 101 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = b = 0</b> (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	131
Figura 102 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>X</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	131
Figura 103 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova retangular entalhado <b>R = 50mm</b> – Alumínio aeronáutico. ....	132

Figura 104 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	133
Figura 105 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	133
Figura 106 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	134
Figura 107 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	134
Figura 108 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	135
Figura 109 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	135
Figura 110 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico. ....	136
Figura 111 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = b = 0</b> (von Mises). Corpo de prova de cisalhamento – Alumínio aeronáutico. ....	138
Figura 112 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo <b>Z</b> associados ao modelo de Gao et al. na configuração <b>a = 0</b> e <b>b = -60,75</b> . Corpo de prova de cisalhamento – Alumínio aeronáutico. ....	139

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros elasto-plásticos. ....	18
Tabela 2 - Parâmetros materiais para Liga de aço <i>SAE1045</i> . ....	47
Tabela 3 - Parâmetros materiais para a liga de Alumínio Aeronáutico. ....	51
Tabela 4 – Valores Críticos dos Indicadores de Fratura Dúctil para a Liga <i>SAE1045</i> . ....	83
Tabela 5 - Valores Críticos dos Indicadores de Fratura Dúctil para a Liga de Alumínio Aeronáutico. .....	92
Tabela 6 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova cilíndrico entalhado – <i>SAE1045</i> – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = 0$ . ....	105
Tabela 7 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova cilíndrico entalhado – <i>SAE1045</i> – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = -60,75$ . .....	105
Tabela 8 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” – <i>SAE1045</i> – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = 0$ . ....	112
Tabela 9 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova “ <i>Borboleta</i> ” – <i>SAE1045</i> – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = -60,75$ . ....	113
Tabela 10 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe $R = 10mm$ – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = 0$ . ....	121
Tabela 11 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe $R = 10mm$ – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = -60,75$ . ....	121
Tabela 12 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe $R = 50mm$ – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = 0$ . ....	129
Tabela 13 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe $R = 50mm$ – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração $a = 0$ e $b = -60,75$ . ....	129



Tabela 14 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova para cisalhamento – *Al. Aeronáutico* – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ . ..... 137

Tabela 15 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova para cisalhamento – *Al. Aeronáutico* – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . 137

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Modelo Matemático para Hosford (1972) e Gao et al. (2011). ..... 30

Quadro 2 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas. .... 37

Quadro 3 - Estratégia Numérica - Método de Newton-Raphson. .... 40

Quadro 4 – Esquema de Integração Numérica – Indicadores de Fratura. .... 79

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado.
$\theta$	Ângulo de Lode.
$\phi$	Ângulo elevador.
$h$	Coefficiente da formulação de Hosford (1972).
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\overline{\mathbf{O}\mathbf{A}}$	Componente desviadora do tensor tensão.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Componente elástica do tensor deformação.
$\overline{\mathbf{O}\mathbf{O}'}$	Componente hidrostática do tensor tensão.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Componente plástica do tensor deformação.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$	Componentes desviadoras do tensor das deformações elásticas tentativa.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}$	Componentes volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa.
$\alpha$	Conjunto de variáveis internas associadas ao endurecimento do material.
$G$	Constante de Lamé/Módulo de cisalhamento.
$K$	Constante de Lamé/Módulo volumétrico.
$a, b, e\ c$	Constantes materiais da formulação de Gao et al. (2011)
$\bar{\varepsilon}^{pf}$	Deformação plástica acumulada na fratura.
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$	Deformação plástica acumulada no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada.
$S_0$	Denominador de dano calibrado em uma condição de carregamento cisalhante puro.
$s$	Expoente de dano.

$m$	Expoente de endurecimento por deformação plástica
$A$	Força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico.
$\hat{\sigma}$	Função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões.
$\Phi$	Função de escoamento do material.
$\Phi_{n+1}$	Função de escoamento no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\Phi^{trial}$	Função de escoamento tentativa.
$F(\eta, \xi)$	Função de Xue & Wierzbicki (2008) para deformação plástica acumulada.
$\Delta \epsilon^p$	Incremento de deformação plástica.
$\Delta \epsilon$	Incremento de deformação.
$\Delta \gamma$	Incremento do multiplicador plástico.
$I_{\bar{\epsilon}^p_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil da deformação plástica acumulada no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{\bar{\epsilon}^p_n}$	Indicador de fratura dúctil da deformação plástica acumulada no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{\bar{\epsilon}^p}$	Indicador de fratura dúctil da deformação plástica acumulada.
$I_{Br_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil de Brozzo et al. (1972) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{Br_n}$	Indicador de fratura dúctil de Brozzo et al. (1972) no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{Br}$	Indicador de fratura dúctil de Brozzo et al. (1972).
$I_{CL_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil de Cockcroft & Latham (1968) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{CL_n}$	Indicador de fratura dúctil de Cockcroft & Latham (1968) no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{CL}$	Indicador de fratura dúctil de Cockcroft & Latham (1968).
$I_{Lemaitre}$	Indicador de fratura dúctil de Lemaitre (1986).
$I_{RT_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil de Rice & Tracey (1969) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{RT_n}$	Indicador de fratura dúctil de Rice & Tracey (1969) no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{RT}$	Indicador de fratura dúctil de Rice & Tracey (1969).

$I_{Vaz_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil de Vaz Jr. (1998) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{Vaz_n}$	Indicador de fratura dúctil de Vaz Jr. (1998) no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{vaz}$	Indicador de fratura dúctil de Vaz Jr. (1998).
$I_{XW_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil de Xue & Wierzbicki (2008) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{XW_n}$	Indicador de fratura dúctil de Xue & Wierzbicki (2008) no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{XW}$	Indicador de fratura dúctil de Xue & Wierzbicki (2008).
$I_{wp_{n+1}}$	Indicador de fratura dúctil do trabalho plástico total no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$I_{wp_n}$	Indicador de fratura dúctil do trabalho plástico total no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{wp}$	Indicador de fratura dúctil do trabalho plástico total.
$I_{\bar{U}_n}$	Indicador de fratura no pseudo-tempo $t_n$ .
$I_{\bar{U}_{n+1}}$	Indicador de fratura no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\sigma_y$	Lei de endurecimento plástico do material.
$\sigma_{y0}$	Límite de escoamento inicial.
$H$	Módulo de endurecimento isotrópico.
$E$	Módulo de Young/Elasticidade.
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico.
$\mathbb{D}^e$	Operador tangente consistente elástico.
$\mathbb{D}^{ep}$	Operador tangente consistente elasto-plástico.
$C_{1,2,3,4}$	Parâmetros materiais da formulação de Xue & Wierzbicki (2008).
$\Psi$	Potencial de fluxo plástico.
$I_1^{trial}$	Primeiro invariante do tensor tensão de Cauchy tentativa
$J_{1,2,3}$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão desviador
$I_{1,2,3}$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão.

$t$	Pseudo-tempo.
$R_c$	Raio crítico da esfera na formulação de Rice & Tracey (1969).
$R$	Raio da esfera na formulação de Rice & Tracey (1969).
$R_0$	Raio inicial da esfera na formulação de Rice & Tracey (1969).
$\eta_0$	Referência da razão de triaxialidade.
$I_{\mathcal{U}}$	Representação geral de um indicador de fratura.
$J_{2,3}^{trial}$	Segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões desviadoras tentativa.
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica acumulada.
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica.
$\dot{w}^p$	Taxa de evolução do trabalho plástico
$Y_c$	Taxa de liberação de energia com dano no momento da fratura.
$Y$	Taxa de liberação de energia elástica.
$\sigma_e^{H^{trial}}$	Tensão efetiva generalizada de Hosford (1972) tentativa.
$\sigma_e^H$	Tensão efetiva generalizada de Hosford (1972).
$\sigma_{eq}$	Tensão equivalente
$\sigma_{eq}^{G^{trial}}$	Tensão equivalente de Gao et al. (2011) tentativa.
$\sigma_{eq}^G$	Tensão equivalente de Gao et al. (2011).
$q$	Tensão equivalente de von Mises.
$\sigma_{eq}^{trial}$	Tensão equivalente tentativa.
$p_{n+1}$	Tensão Hidrostática no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$p$	Tensão hidrostática.
$\sigma_{1n+1}$	Tensão principal máxima do tensor de Cauchy no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\sigma_{1,2,3}^{trial}$	Tensões principais do estado de tensão tentativa.

$S_1, S_2$ e $S_3$	Tensões principais do tensor desviador.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais do tensor tensão de Cauchy.
$\mathbb{D}^e$	Tensor constitutivo elástico.
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$	Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo $t_n$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}}$	Tensor das deformações elásticas tentativa.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor das deformações elásticas.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor das deformações plásticas no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}}$	Tensor das deformações plásticas tentativa.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações plásticas.
$\boldsymbol{S}_{n+1}$	Tensor das tensões desviadoras no pseudo-tempo.
$\boldsymbol{S}_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor das tensões desviadoras tentativa.
$\boldsymbol{S}$	Tensor das tensões desviadoras.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação.
$\boldsymbol{D}^e$	Tensor elasticidade isotrópico.
$\mathbb{I}^4$	Tensor identidade de quarta ordem.
$\boldsymbol{I}$	Tensor identidade de segunda ordem.
$\mathbb{I}^d$	Tensor identidade desviador.
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão de Cauchy no pseudo-tempo.
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$	Tensor tensão de Cauchy tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor tensão de Cauchy tentativa no pseudo-tempo.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy.
$r$	Terceiro invariante alternativamente definido por Bai (2008).

$\xi_{n+1}$	Terceiro invariante normalizado no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\xi$	Terceiro invariante normalizado.
$W^e$	Trabalho elástico.
$W^p$	Trabalho plástico.
$W$	Trabalho total.
$\eta_{n+1}$	Triaxialidade no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\eta$	Triaxialidade.
$D$	Variável de dano
$\mathbf{N}_{n+1}^G$	Vetor de fluxo de Gao et al. (2011) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\mathbf{N}_{n+1}^H$	Vetor de fluxo de Hosford (1972) no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\mathbf{N}^G$	Vetor de fluxo para a formulação de Gao et al. (2011).
$\mathbf{N}^H$	Vetor de fluxo para a formulação de Hosford (1972).
$\mathbf{N}_{n+1}$	Vetor de Fluxo Plástico no pseudo-tempo $t_{n+1}$ .
$\mathbf{N}$	Vetor de fluxo plástico.
$\overline{\mathbf{OB}}$	Vetor tensão.

# 1 Introdução

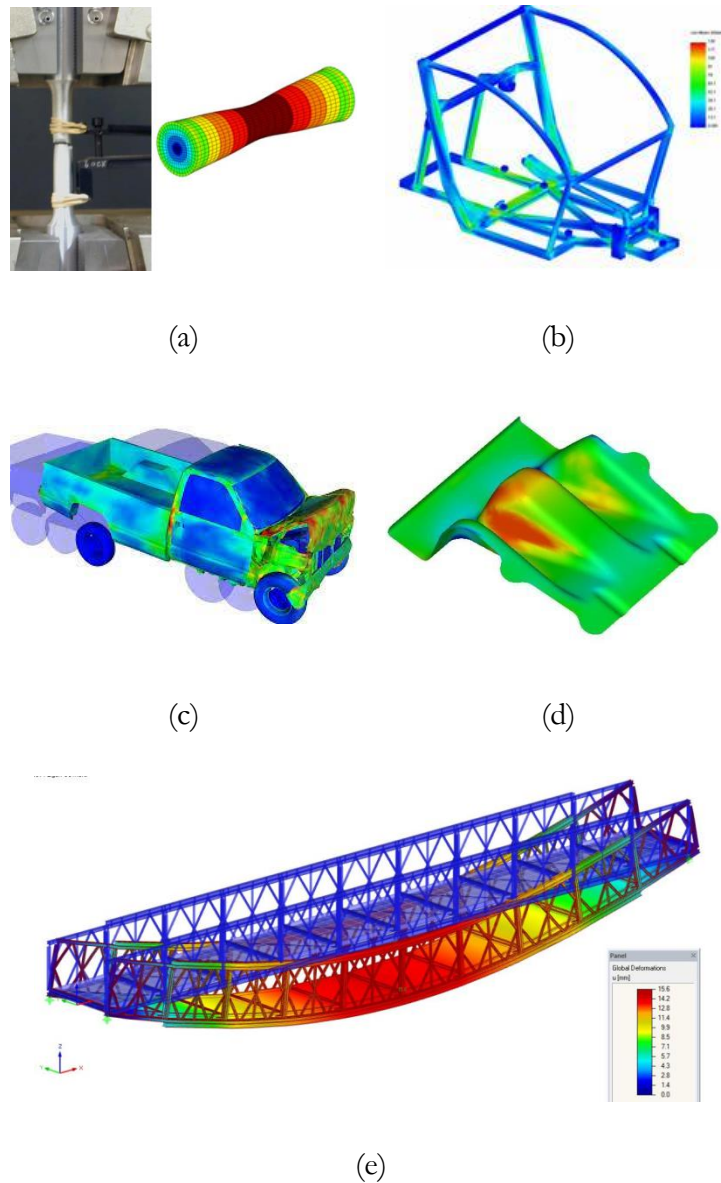
## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Formulações de modelos constitutivos para a descrição precisa e acurada do comportamento mecânico elasto-plástico de materiais metálicos dúcteis vêm sendo extensivamente estudadas há mais de um século. A necessidade de uma predição correta para o instante e o local de início da fratura dúctil é um enfoque de grande importância para os setores de alto desempenho da indústria e vem sendo pesquisado tanto no âmbito acadêmico quanto no industrial. Apesar de anos de pesquisas, muitas questões continuam abertas, propiciando desafios aos pesquisadores.

Visando desenvolver produtos com características aprimoradas quanto ao desempenho, durabilidade, custo de produção e competitividade, assim como otimizar os processos de fabricação envolvidos, setores competitivos das indústrias aeroespacial, automotiva, naval, bélica e entre outras, vêm empregando metodologias científicas cada vez mais avançadas. Com isso, obtém-se uma produção mais eficiente, garantindo a devida funcionalidade do produto a um custo menor. Como exemplo, Walp et al. (2006) aponta o expressivo empenho da indústria automotiva na busca pela redução de peso e quantidade de material empregada na fabricação de determinadas estruturas veiculares, como chassis e carrocerias, sem que haja redução de suas características mais importantes como rigidez, desempenho e competitividade no mercado. Para que tais aprimoramentos sejam possíveis, faz-se uso de critérios e modelos elasto-plásticos com capacidade de descrever com maior precisão o comportamento mecânico de materiais dúcteis, partindo do correto local e instante para o início de uma trinca que, eventualmente, pode evoluir para até a completa fratura do material.

A Figura 1 apresenta alguns exemplos da utilização de modelos elasto-plásticos na análise de tensões em estruturas e componentes mecânicos. São ilustradas, respectivamente, nas imagens da Figura 1: (a) caracterização de um material, (b) análise de uma estrutura automotiva ROPS, (c) colisão de um automóvel, (d) otimização de um processo de fabricação e (e) dimensionamento de pontes temporárias para uso público, industrial ou militar.





**Figura 1 – Exemplos da aplicação de modelos constitutivos para a descrição do comportamento elasto-plásticos de estruturas e componentes mecânicos. Fonte: Bao (2004), Bai (2008), Dlubal Engineering Software (2013) e MSC Software Solutions (2013).**

Uma das formulações mais comumente utilizadas na descrição do comportamento mecânico de materiais dúcteis durante o regime elasto-plástico é baseada na magnitude de tensão, isto é, a sua formulação é feita em função do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras,  $J_2$ . Esse modelo constitutivo, amplamente conhecido como modelo de von Mises (1913), propõe que o escoamento plástico do material se inicia quando o segundo invariante,  $J_2$ , atinge um valor crítico. Contudo, conforme observado experimentalmente, esta formulação clássica apresenta limitações quanto a descrição correta do comportamento mecânico de materiais dúcteis. Desta forma, a sua utilização não pode ser generalizada, uma vez que este modelo não apresenta a mesma precisão para

uma grande variedade de materiais, especialmente ligas materiais modernas (Bai, 2008; Driemeier, 2015).

No estudo da elasto-plasticidade, alguns parâmetros são comumente citados na definição do estado de tensão de um ponto material. Dentre os parâmetros e conceitos mais importantes pode-se destacar, juntamente com a magnitude de tensão ( $J_2$ ), a chamada tensão hidrostática ( $p$ ) e o chamado terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ).

A tensão hidrostática ( $p$ ) vem sendo amplamente estudada ao longo das últimas décadas devido à sua influência na ductilidade dos materiais metálicos. Bridgman (1952) conduziu experimentos com diferentes ligas de aço e apresentou como conclusão o impacto da tensão hidrostática na deformação para fratura destes materiais, no quais níveis mais elevados da tensão hidrostática resultam em maiores alongamentos até que ocorra a falha no material. Segundo Rice & Tracey (1969), este parâmetro atua como fator regulatório das taxas de nucleação de vazios. Nas solicitações compressivas, a tensão hidrostática contribui para o fechamento dos vazios no material, enquanto para solicitações trativas o seu efeito colabora com a nucleação e crescimento dos vazios. Além disso, segundo Hancock & Mackenzie (1976), a fratura dúctil se inicia nos locais onde os níveis da tensão hidrostática são máximos.

Na formulação matemática, a tensão hidrostática é comumente introduzida através de sua normalização com relação a uma tensão equivalente, a qual caracteriza por meio de um escalar o estado geral de tensão. Tal representação é denominada como razão de triaxialidade ( $\eta$ ). Como efeito no modelo constitutivo, este parâmetro controla o tamanho do domínio elástico/superfície de escoamento do material. Contudo, conforme apresentado por Barsoum & Faleskog (2007), a razão de triaxialidade não é um parâmetro suficiente para caracterizar a ductilidade do material, especialmente nas situações onde há predomínio dos carregamentos cisalhantes.

Neste contexto, para as condições nas quais a solicitação cisalhante é predominante, o parâmetro do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) atua de maneira mais significativa no dano e na falha dúctil. Como exemplo, a dependência desse parâmetro é responsável por determinadas características no processo da falha dúctil, como a evolução do formato dos vazios no material, formação de bandas de cisalhamento, diferenças de ductilidade entre tração e torção/cisalhamento e a transição entre modos de falha (Bao & Wierzbicki, 2004; Barsoum & Faleskog, 2007 e 2011; Brünig et al., 2013). Normalmente tais efeitos são introduzidos na formulação matemática do critério de escoamento através do chamado ângulo de Lode ( $\theta$ ), o qual é uma função do terceiro invariante do tensor desviador normalizado ( $\xi$ ). Desta forma, quando acrescentado à formulação matemática,

o terceiro invariante atua na alteração do formato da superfície de escoamento do material (Bardet, 1990; Bai, 2008).

A importância desses dois parâmetros, tensão hidrostática e terceiro invariante do tensor desviador, na descrição do comportamento mecânico de materiais dúcteis têm recebido uma grande atenção e estudos detalhados acerca da influência desses parâmetros na formulação constitutiva de modelos elasto-plásticos e da mecânica do dano foram propostos por diversos autores (Bai *et al.*, 2007; Bai, 2008; Driemeier *et al.*, 2010; Mirone *et al.*, 2010; Gao *et al.*, 2011; Khan, 2012; Brünig *et al.*, 2013; Malcher *et al.*, 2013 e 2014, Driemeier *et al.*, 2015). A Figura 2 ilustra o efeito de ambos os parâmetros elasto-plásticos no comportamento mecânico de materiais dúcteis (ver Bai, 2008). Segundo Bai (2008), o efeito do ângulo de Lode na descrição do comportamento elasto-plástico do material é mais severo que o efeito do nível de triaxialidade, quando há a presença de sollicitações cisalhantes.

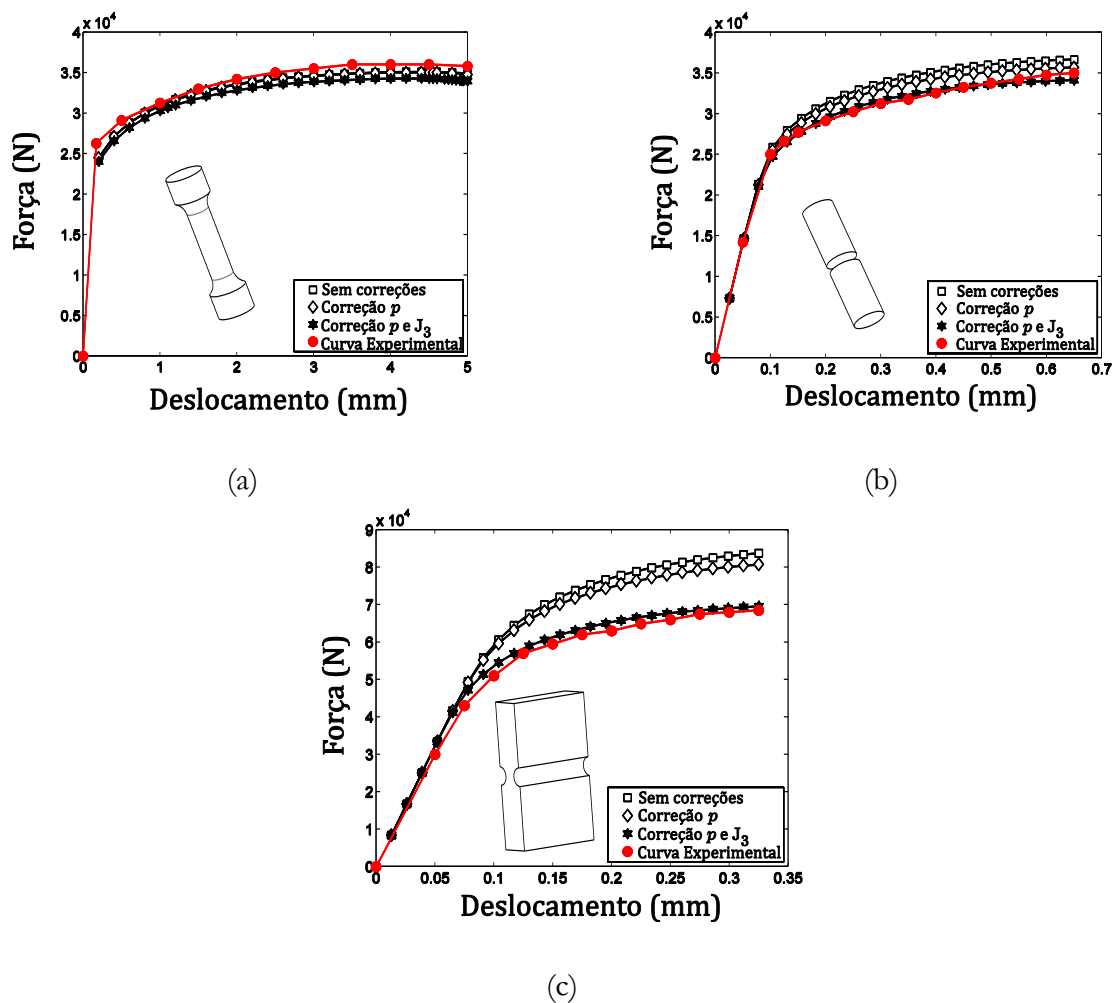


Figura 2 – Contribuição do efeito do terceiro invariante do tensor desviador e tensão hidrostática no comportamento mecânico de materiais dúcteis. Adaptado de Bai, 2008.

A Figura 2 apresenta uma comparação entre as curvas de reação força-deslocamento obtidas experimentalmente, para uma liga de alumínio Al2024-T351, e as curvas de reação obtidas pela simulação numérica do modelo constitutivo proposto por Bai & Wierzbicki (2007) em três configurações distintas: 1) sem correções, na qual o modelo se iguala a von Mises, 2) configuração contemplado apenas o efeito da tensão hidrostática ( $p$ ) e 3) configuração com os efeitos da tensão hidrostática ( $p$ ) e do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) introduzidos. Os resultados das simulações de três tipos diferentes de corpos de provas, que variam a dependência quanto à tensão hidrostática e ao ângulo de Lode, ilustram que há uma maior dependência do ângulo de Lode conforme há uma maior sollicitação cisalhante. Desta forma, a Fig. 2(c) ilustra o aprimoramento expressivo obtido na descrição do comportamento mecânico do material através da introdução do efeito do terceiro invariante (acrescentado ao modelo através do ângulo de Lode), o qual se mostra claramente mais expressivo que o ganho de precisão apresentado pela introdução da tensão hidrostática nesta condição de condição de carregamento.

Inúmeras outras análises experimentais foram realizadas por um grande número de pesquisadores com relação aos efeitos da tensão hidrostática e da triaxialidade na fratura dúctil. Como exemplo, Richmond & Spitzing (1980) foram os primeiros a estudar os efeitos da tensão hidrostática no escoamento de ligas de alumínio. Mais recentemente, Bao & Wierzbicki (2004) conduziram um extensivo programa experimental com a liga de alumínio Al2024-T351, utilizando onze espécimes distintos. Segundo estes autores, para diferentes níveis da razão de triaxialidade, a falha dúctil ocorre por mecanismos de falha distintos. Além disso, de acordo com Kim et al. (2007) e Gao & Kim (2006), diferentes estados de tensão com uma mesma razão de triaxialidade resultam em comportamentos distintos para o crescimento e coalescência de vazios.

Neste sentido, para que se faça a distinção entre estados de tensão que apresentem um mesmo nível de triaxialidade, é necessário a introdução do parâmetro do ângulo de Lode. Assim, o campo de tensão é determinado de maneira singular (Gao & Kim, 2006). Wilkins et al. (1980) foram os pioneiros a introduzir este parâmetro em um modelo de falha dúctil. Na década seguinte, Bardet (1990) propôs uma metodologia para descrever a dependência do ângulo de Lode em alguns modelos constitutivos. Wilson (2002) por sua vez, utilizou barras de alumínio 2024-T351 entalhadas sob condições de tração para conduzir seus estudos e verificar a importância desse efeito.

De acordo com Mirone *et al.* (2010), o fenômeno da fratura dúctil é influenciado pela relação com as variáveis de caracterização do estado de tensão-deformação e a predição da falha é melhor descrita pelos parâmetros de deformação plástica, ângulo de Lode e triaxialidade. Um programa experimental para se estudar a influência dos invariantes do tensor tensão em fratura dúcteis foi

apresentado por Driemeier *et al.* (2010). Esta metodologia representa uma ferramenta eficiente para a investigação dos efeitos da magnitude de carga, da triaxialidade e do ângulo de Lode. A hipótese acerca da dependência do envelope de fratura nos parâmetros do ângulo de Lode e da tensão hidrostática ainda é muito difícil de ser verificado experimentalmente (Khan, 2012). Contudo Brünig *et al.* (2013) relacionam um decréscimo da ductilidade do material a um aumento da razão de triaxialidade e apontam que além da magnitude de tensão, a razão de triaxialidade e o ângulo de Lode representam os fatores mais importantes que controlam o início e a evolução do dano e da fratura dúctil.

A fratura dúctil é um fenômeno local cujo estado de tensão e deformação no local esperado da falha deve ser determinado com grande precisão. O início da fratura é comumente precedido por uma deformações plásticas elevadas e por gradientes consideráveis de tensão e deformação ao redor do ponto de fratura. Nesses casos, a teoria baseada no segundo invariante, von Mises, não é precisa o suficiente para capturar os efeitos físicos do escoamento do material. Desta maneira, o desenvolvimento de modelos mais acurados para a aplicação em faixas maiores de condições de carregamento se tornou necessário (Bai & Wierzbicki, 2007).

Seguindo a tendência das últimas décadas, dois modelos constitutivos dependentes do terceiro invariante do tensor desviador são abordados neste trabalho, levando em consideração a contribuição deste parâmetro na lei de fluxo plástico de materiais dúcteis. Além disso, com o intuito de analisar indicadores de fratura dúcteis quanto ao instante da falha, um estudo com sete indicadores distintos e baseados em diferentes considerações é apresentado.

## 1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo e análise de dois modelos de plasticidade desenvolvidos com base na influência do terceiro invariante do tensor desviador, Hosford (1972) e Gao et al. (2011), quanto as suas capacidades em descrever o comportamento elasto-plástico de materiais dúcteis. Segundo Bardet (1990) e Bai (2008), o parâmetro do terceiro invariante é responsável pelo controle do formato da superfície de escoamento do material. Ao incorporar esse efeito na formulação do modelo constitutivo, aumenta-se a precisão do mesmo para descrição do comportamento mecânico de materiais dúcteis, mesmo quando são consideradas diferentes condições de carregamento e níveis da razão de triaxialidade.

Além disso, com o objetivo de se avaliar a capacidade preditiva do local e instante esperado para a falha dúctil, sete indicadores de fratura dúctil são implementados na etapa de pós-processamento da análise de elementos finitos. Com isso, espera-se obter modelos constitutivos não acoplados capazes de apresentar boa correlação com as análises experimentais sob condições diversas de carregamento e sob uma larga faixa de triaxialidade.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho apresenta quatro capítulos subdivididos em seções e tópicos objetivando a fluidez e clareza da exposição das teorias, resultados e análises no estudo da fratura de materiais dúcteis. No primeiro capítulo é feita uma breve contextualização sobre o assunto abordado, apontando a importância do estudo dos efeitos de parâmetros elasto-plásticos como o nível de triaxialidade e o terceiro invariante do tensor das tesões desviadoras.

No capítulo 2 são apresentados os aspectos teóricos fundamentais para o desenvolvimento das discussões dentro da teoria de plasticidade e mecânica do dano, através de definições da mecânica dos materiais como mecanismos de fratura dúctil, endurecimento do material e parâmetros elasto-plástico.

Propõem-se no terceiro capítulo, o estudo de modelos constitutivos baseados no terceiro invariante do tensor desviador, por meio da formulação dos modelos matemáticos e numéricos, assim como a análise do formato e convexidade de suas superfícies de escoamento e resultados numéricos obtidos para as curvas de reação Força *v/s* Deslocamento e evolução da deformação plástica acumulada.

Uma avaliação a respeito do contorno e distribuição de sete indicadores de fratura dúctil distintos é proposta no capítulo quatro. Neste capítulo apresenta-se a fundamentação teórica e

matemática para esses indicadores, as suas introduções na etapa de pós processamento do algoritmo de retorno e discussões sobre os resultados alcançados.

Por fim, no capítulo cinco, são apresentadas as conclusões desta dissertação de mestrado e as proposições para trabalhos futuros.

## 2 Aspectos Teóricos

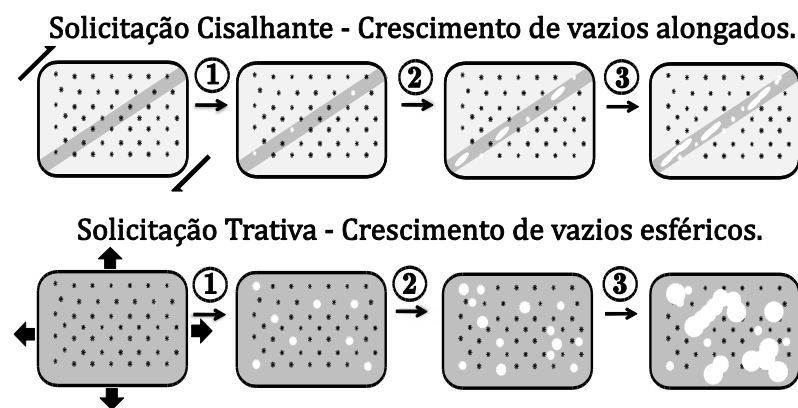
Nas últimas décadas, diversos autores propuseram a introdução de diferentes parâmetros elasto-plástico na lei de fluxo plástico do material com o intuito de melhor descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis. (Bao & Wierzbicki, 2004; Bai & Wierzbicki 2007; Brünig et al., 2008; Gao et al., 2011; Khan, 2012; Malcher et al., 2014a; Malcher et al., 2014b). Entretanto, três parâmetros ganharam um maior destaque e interesse por parte dos pesquisadores da área de plasticidade, são eles: a tensão hidrostática ( $p$ ), triaxialidade ( $\eta$ ), e o ângulo de Lode ( $\theta$ ). (Bao & Wierzbicki, 2004; Brünig *et al.*, 2008; Bai & Wierzbicki, 2007; Zadpoor *et al.*, 2009; Tvergaard, 2008; Nahshon *et al.*, 2008; Gao et al, 2011; Khan, 2012; Brünig et al., 2013, Malcher 2012 e Malcher et al., 2014a; Malcher et al., 2014b). Neste capítulo, tais parâmetros elasto-plástico serão matematicamente definidos e nos capítulos seguintes, a formulação matemática dos modelos constitutivos proposto por Hosford (1972) e Gao et al. (2011) são expostas juntamente com os indicadores de fratura dúctil que serão implementados na etapa de pós processamento do modelo de elementos finitos.

### 2.1 ESTUDO DA FALHA DÚCTIL

Para materiais dúcteis, a relação entre o campo de tensão e o campo de deformação apresenta um comportamento não linear, quando tal material é solicitado dentro de seu regime plástico. Diferentemente do seu comportamento elástico, onde a Lei de Hooke estabelece uma relação linear e explícita entre a tensão e a deformação, no seu regime plástico esta relação direta não se faz presente, tornando a tarefa de se mapear os campos de tensão e deformação mais árdua e possível somente através da adoção de modelos constitutivos. Visando determinar o local e instante corretos para a fratura, inúmeros pesquisadores propuseram teorias a respeito de como se dá tal relação. A primeira formulação matemática para descrição do início do comportamento inelástico do material é atribuída a Tresca (1864) e a sua teoria da máxima tensão cisalhante, a qual postula que o escoamento plástico do material se inicia quando a máxima tensão cisalhante atinge um valor crítico. Desde então, diferentes abordagens foram propostas, como a de von Mises que relaciona a magnitude do tensor das tensões desviadoras a um valor crítico para o escoamento obtido em um estado de tração simples uniaxial (von Mises, 1913). Uma das interpretações físicas desta formulação matemática foi apresentada por Hencky (1924), o qual tornou o modelo de von Mises conhecido como critério da máxima energia de distorção, pois o escoamento plástico somente se inicia quando a energia de deformação cisalhante elástica atinge um valor crítico. Nadai (1937) apresentou outra interpretação física para o critério clássico de von Mises, na qual o escoamento plástico se inicia quando a tensão cisalhante atinge um valor crítico nos planos octaédricos.



Evidências empíricas apontam que a falha dúctil em materiais metálicos se dá pela evolução de micro-defeitos, como micro-vazios e bandas de cisalhamento (McClintock, 1968; Rice & Tracey, 1969; Hancock & Mackenzie, 1976). O fenômeno da falha dúctil é normalmente induzido por inclusões primárias e partículas de segunda fase (Brown & Embury, 1973), aonde ocorre a nucleação de micro-defeitos por meio do descolamento de inclusões (ou partículas de segunda fase) da matriz metálica que a cerca (Puttick, 1960; Argon et al., 1975) ou por meio da fratura destas inclusões (Gurland, 1972). Gao & Kim (2003 e 2006) apresentam em seus trabalhos os passos desse processo de evolução dos micro-defeitos: (1) em um primeiro momento ocorre a nucleação de micro-defeitos pela fratura ou descolamento de inclusões de segunda fase, em seguida (2) ocorre o crescimento desses defeitos (vazios/bandas de cisalhamento) devido às deformações plásticas, (3) em um passo seguinte, ocorre a localização do fluxo plástico entre os defeitos aumentados (o qual causa uma redução do módulo elástico e um amolecimento do material), por fim, (4) ocorre o rompimento das ligações entre os defeitos aumentados e a fratura do material.



**Figura 3 – Representação esquemática do crescimento de vazios alongados e esféricos. Adaptado de Engelen (2005).**

Nota-se que no decorrer das últimas décadas, três parâmetros constitutivos passaram a atrair grande interesse da comunidade de pesquisadores da plasticidade e mecânica do dano, são eles: tensão hidrostática ( $p$ ), razão de triaxialidade ( $\eta$ ) e ângulo de Lode ( $\theta$ ). A tensão hidrostática ( $p$ ), que será matematicamente definida na próxima seção pode ser interpretada como uma função da componente volumétrica do tensor tensão de Cauchy, controla o tamanho da superfície de escoamento/envelope de falha do material e como efeito físico, influencia o comportamento do material à fratura, alterando a sua ductilidade (Bai & Wierzbicki, 2007). Brünig et al.(2008) justificam a importância da implementação do efeito da tensão hidrostática em modelos constitutivos pela sua atuação como fator regulatório da taxa de nucleação e crescimento isotrópico de vazios. Os primeiros critérios de escoamento dependentes da tensão hidrostática foram inicialmente propostos

dentro do contexto de materiais granulares e solos por Mohr-Coulomb e Drucker Prager (1952). McClintock (1968) e Rice & Tracey (1969) foram os pioneiros no estudo da influência deste efeito na fratura de metais dúcteis através da análise do crescimento de vazios cilíndricos e esféricos, respectivamente.

O nível de triaxialidade ( $\eta$ ) é definido como a razão entre a tensão hidrostática ( $p$ ) e uma tensão equivalente  $\sigma_{eq}$ , por exemplo, pode-se adotar a tensão equivalente de von Mises ( $q$ ). Juntamente com a magnitude de tensão ( $J_2$ ), a triaxialidade ( $\eta$ ) é o fator mais importante no controle do início da fratura dúctil, tal parâmetro é utilizado para caracterizar o efeito do estado triaxial de tensão na fratura dúctil (Bao & Wierzbicki, 2004; Gao & Kim, 2006; Brünig et al., 2008). Devido aos valores subestimados obtidos para o nível de triaxialidade segundo a formulação de Bridgman (1952), Bacha et al. (2007) propõem em seu trabalho uma metodologia para calcular de forma correta o nível de triaxialidade em chapas submetidas a tração, e desta forma, calcular a ductilidade verdadeira do material. Segundo Bacha et al. (2007), a taxa de crescimento dos vazios está diretamente associada à razão de triaxialidade ( $\eta$ ), o que representa um grande impacto na ductilidade do material (Mackenzie et al., 1977; Bao & Wierzbicki, 2004; Bonora et al. 2005; Børvik et al., 2005; Gao & Kim, 2006; A. Basha, 2007).

O local de início e a forma com que ocorre a falha dúctil são fortemente influenciados pela razão de triaxialidade ( $\eta$ ). Bao & Wierzbicki (2004), apontam que o nível de triaxialidade define os mecanismos de falha do material: para valores de triaxialidade negativos e positivos próximos a zero, a fratura ocorre devido aos mecanismos de cisalhamento; para valores positivos mais altos, o principal mecanismo de falha é o crescimento e coalescência de vazios; e para valores de triaxialidade entre esses regimes, a falha ocorre pela combinação dos mecanismos de cisalhamento e coalescência de vazios. (Bao & Wierzbicki, 2004)

O terceiro parâmetro cuja influência vem sendo amplamente estudada é o ângulo de Lode ( $\theta$ ), definido através do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ). Este parâmetro é responsável pelo controle do formato da superfície de escoamento do material e é tomado como parâmetro indispensável para a determinação completa e particular do estado de tensão triaxial imposto, uma vez que diferentes estados de tensão com distintas tensões principais podem apresentar um mesmo nível de triaxialidade. Assim sendo, cabe ao ângulo de Lode distinguir estes diferentes estados de tensão com características semelhantes. (Bao & Wierzbicki, 2004; Gao & Kim, 2006; Brünig et al., 2008; Malcher et al., 2014a; Malcher et al., 2014b)

Bardet (1990) propôs uma revisão analítica com a introdução do efeito e análise do ângulo de Lode ( $\theta$ ) em sete modelos constitutivos distintos e concluiu, por sua vez, que o modelo de Drucker-Prager é independente do ângulo de Lode e que os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb, por outro lado, são dependentes do ângulo de Lode ( $\theta$ ). Bai & Wierzbicki (2007) conduziram diversos ensaios experimentais e comprovaram que, para solitações predominantemente cisalhantes, o efeito do terceiro invariante é mais severo que o efeito do nível de triaxialidade, através da qual a tensão hidrostática é comumente introduzida no critério de escoamento de materiais. Devido aos efeitos físicos que o ângulo de Lode ( $\theta$ ) insere na descrição do fenômeno da falha dúctil, como: influência no processo de evolução de micro-defeitos, formação de bandas de cisalhamento, diferenças de ductilidade entre tração e torção/cisalhamento, deformações localizadas, e transição de modos de falha; este parâmetro deve ser introduzido na lei de fluxo plástico para que se tenha uma melhor previsão de falhas dúcteis. (Bao & Wierzbicki, 2004; Gao & Kim, 2006; Bai & Wierzbicki, 2007; Brünig, 2008; Barsoum & Faleskog, 2011; Brünig, 2013)

A razão de triaxialidade e o ângulo de Lode são utilizados para caracterizar o estado de tensão macroscópico no crescimento e coalescência de vazios. (Gao & Kim, 2006). Segundo Brünig (2013), além da magnitude de tensão, a razão de triaxialidade e o ângulo de Lode são os parâmetros mais importantes para o controle do início e evolução do dano e falha dúctil. Assim, o efeito desses três parâmetros (magnitude de tensão, razão de triaxialidade, e ângulo de Lode) no dano e falha dúctil devem ser levados em consideração em modelos constitutivos mais avançados e precisos, assim como em suas correspondentes simulações numéricas.

Brünig *et al.* (1999) propuseram um modelo constitutivo, contendo três invariantes, que pudesse ser aplicado à plasticidade e a fratura metálica. Hosford (1972), através de análises teóricas baseadas em modelos cristalográficos e análise de dados experimentais, estabeleceu uma tensão efetiva generalizada em função do segundo e terceiro invariantes e que atua como uma relação entre os raios na representação do círculo de Mohr. Bai & Wierzbicki, (2007) propuseram um modelo que contempla a introdução do terceiro invariante e da tensão hidrostática através da redefinição da lei de endurecimento do material dúctil que passa a ser uma função da deformação plástica acumulada, da triaxialidade e de uma função do ângulo de Lode. Gao *et al.* (2011) definiram um modelo elasto-plástico cuja formulação é apresentada em função da tensão hidrostática e também do segundo e terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras. Com o intuito de estabelecer um critério empírico universal, preciso e eficiente para fratura de metais dúcteis e aplicações de engenharia, Khan e Liu (2012) realizaram em seu trabalho uma série de ensaios experimentais com a liga Al 2024-T351 com o intuito de propor um modelo que correlaciona a magnitude do vetor tensão com a tensão hidrostática para, dessa forma, aumentar a precisão na previsão do comportamento do

material na fratura. Barsoum & Faleskog (2007), Nahshon & Hutchinson (2008) e Xue (2008) introduziram novos mecanismos de corte na lei de evolução do dano para o modelo de Gurson (1977), o qual é dependente do ângulo de Lode. Esses mecanismos visam aprimorar a evolução da porosidade obtida através da teoria de Gurson para baixos níveis de triaxialidade. Malcher et al. (2013) incluíram, por sua vez, o efeito do ângulo de Lode dentro do modelo micro-mecânico de Gurson. Malcher et al. (2014) também incluíram esse parâmetro em suas formulações. Contudo nesse caso, acrescentaram dentro do modelo de dano contínuo de Lemaitre (1985). Com isso, a previsão numérica tanto do instante quanto do local potencial para início da fratura se comportaram mais próximos das observações experimentais.

Fica claro ao se analisar diferentes observações experimentais que o comportamento mecânico real de materiais dúcteis se encontra entre as superfícies de escoamento de von Mises e Tresca, ou de maneira mais genérica, entre os envelopes de falha de Drucker-Prager e de Mohr-Coulomb (Hosford, 2013). Como consequência, algumas das formulações mais recentes, que visam obter tal comportamento intermediário, apresentam a capacidade recuperar estes modelos clássicos. Exemplos dessas formulações são os critérios de Hosford (1972), Bai & Wierzbicki (2007) e Gao et al. (2011). Estes autores introduziram o efeito do terceiro invariante/ângulo de Lode em suas formulações, justamente para se obter um formato de superfície de escoamento intermediária a esses dois modelos clássicos (Tresca, 1864 e von Mises, 1913).

Na teoria de modelos constitutivos, duas abordagens são utilizadas. A primeira é a proposição de modelos puramente elasto-plásticos também chamados de modelos não-acoplados, e a segunda é a proposição de modelos com uma variável interna de dano, denominados modelos acoplados. Os modelos acoplados são aqueles que apresentam uma variável de degradação do material associada ao modelo, os modelos desacoplados, por outro lado, não apresentam tal variável. Entre os modelos acoplados para materiais dúcteis, as formulações mais importantes foram propostas por Lemaitre (1985) e Gurson (1977) dentro da Mecânica do Dano Contínuo e da Micromecânica dos defeitos, respectivamente (Chaboche et al., 2006).

Devido a alta complexidade, implementação difícil, e elevado custo computacional dos modelos acoplados, a estratégia de utilizar modelos não-acoplados associados a indicadores de dano ganhou grande destaque por serem uma opção mais simples para previsão da fratura dúctil. O uso de indicadores de fratura para predição da falha em problemas inelásticos emergiu com a aparição do critério baseado no trabalho total plástico de Freudenthal (1950). Desde então, diversos outros indicadores foram propostos como o critério de Datsko (1966), o qual é baseado na deformação plástica acumulada, o critério de Rice & Tracey (1969), baseado na geometria dos defeitos, critério

de Cockcroft & Latham (1968) baseado no mecanismo de crescimento de vazios conduzidos pelas tensões principais. Brozzo et al. (1972) propuseram uma modificação para o critério Cockcroft & Latham (1968) onde a dependência da tensão hidrostática passa a ser explícita. Clift et al. (1990), por sua vez, propuseram uma modificação ao modelo de Cockcroft & Latham (1968) por meio da substituição das tensões principais pela tensão equivalente de von Mises. LeRoy et al. (1981) propuseram um indicador de fratura através da análise do crescimento de vazios e acumulo de dano durante ensaios de tração. Fundamentado na mecânica do dano contínuo, Lemaitre (1986) propôs um critério baseado na taxa de liberação de energia elástica. Seguindo as conclusões observadas por Lemaitre (1985 e 1985a) a respeito dos modelos de dano, Vaz jr. (1998) propôs um critério baseado no trabalho total do dano que é capaz de considerar trajetórias mais complexas de carregamento. Xue & Wierzbicki (2008) desenvolveram um critério de fratura em que a fratura se inicia quando a deformação plástica acumulada, modificada por uma função da razão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado, atinge o valor crítico de uma unidade. Bao & Wierzbicki (2004) propuseram a análise quantitativa de diversos indicadores de fratura, quanto a sua eficiência e precisão em uma grande variedade de parâmetros de processos. Em seu trabalho, Bao & Wierzbicki (2004b) discutem sobre a aplicação e desempenho de distintos indicadores de fratura presentes em ferramentas comerciais de elementos finitos.

Na seção seguinte deste capítulo, apresenta-se as definições matemáticas e conceituais da mecânica dos materiais necessárias para a formulação dos modelos constitutivos baseados no critério de escoamento proposto por Hosford (1972), o qual inclui o efeito da magnitude de tensão ( $J_2$ ) e do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ), e na proposição de Gao et al. (2011), que contempla a magnitude de tensão ( $J_2$ ), o terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) e a tensão hidrostática ( $p$ ). Em seguida, estas definições serão utilizadas na apresentação dos sete indicadores de fratura dúctil implementados na etapa de pós-processamento da análise de elementos finitos: Freudenthal (1950), Datsko (1966), Cockcroft and Latham (1968), Rice and Tracey (1969), Brozzo et al. (1972), Vaz jr. (1998) e Xue (2008).

## 2.2 DEFINIÇÕES DA MECÂNICA DOS MATERIAIS

Com o intuito de definir os parâmetros elasto-plásticos de interesse a este trabalho (tensão hidrostática, razão de triaxialidade e ângulo de Lode) e desenvolver modelos constitutivos, é conveniente realizar uma decomposição do tensor tensão de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , em uma componente desviadora e outra esférica/volumétrica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I}, \quad (1)$$

onde o termo  $p$  é um escalar que representa a tensão hidrostática, definida por:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (2)$$

onde  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  representa o traço do tensor tensão de Cauchy, ou seja, a soma da diagonal principal deste tensor, e  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as suas tensões principais. A componente  $\boldsymbol{S}$  representa o tensor desviador ou tensor das tensões desviadoras, cujo traço é nulo:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - p\boldsymbol{I} = \left[ \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \right] : \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{I}^d : \boldsymbol{\sigma}, \quad (3)$$

os termos  $\boldsymbol{I}$  e  $\mathbb{I}^4$  representam o tensor identidade de segunda ordem e o tensor identidade de quarta ordem, respectivamente e  $\mathbb{I}^d$  é o tensor identidade de quarta ordem desviador. A operação “:” representa a dupla contração entre tensores.

O tensor tensão esférico por sua vez, pode ser determinado de acordo com a seguinte operação:

$$p\boldsymbol{I} = \frac{1}{3} (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) : \boldsymbol{\sigma}. \quad (4)$$

Tanto o tensor tensão de Cauchy quanto o tensor das tensões desviadoras apresentam invariantes de tensão que são definidos como quantidades cujos valores não se alteram de acordo com o sistema de eixos adotado (ver Holzapfel, 2000). Normalmente, os invariantes do tensor tensão de Cauchy são representados pela letra “ $I$ ” enquanto os invariantes do tensor das tensões desviadoras são representados pela letra “ $J$ ”. Desta maneira, o primeiro, segundo e terceiro invariante destes tensores podem ser determinados de acordo com as Equações 5 e 6 na página seguinte.

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[tr(\boldsymbol{\sigma})^2 - tr(\boldsymbol{\sigma}^2)], \quad (5)$$

$$I_3 = det(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$J_1 = tr(\boldsymbol{S}) = 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}, \quad (6)$$

$$J_3 = det(\boldsymbol{S}),$$

Por definição, o tensor das tensões desviadoras ( $\boldsymbol{S}$ ) não apresenta contribuição hidrostática e, portanto, o seu traço é nulo, logo  $J_1 = 0$ .

Para a definição da razão de triaxialidade e do ângulo de Lode, considera-se a Figura 4 abaixo.

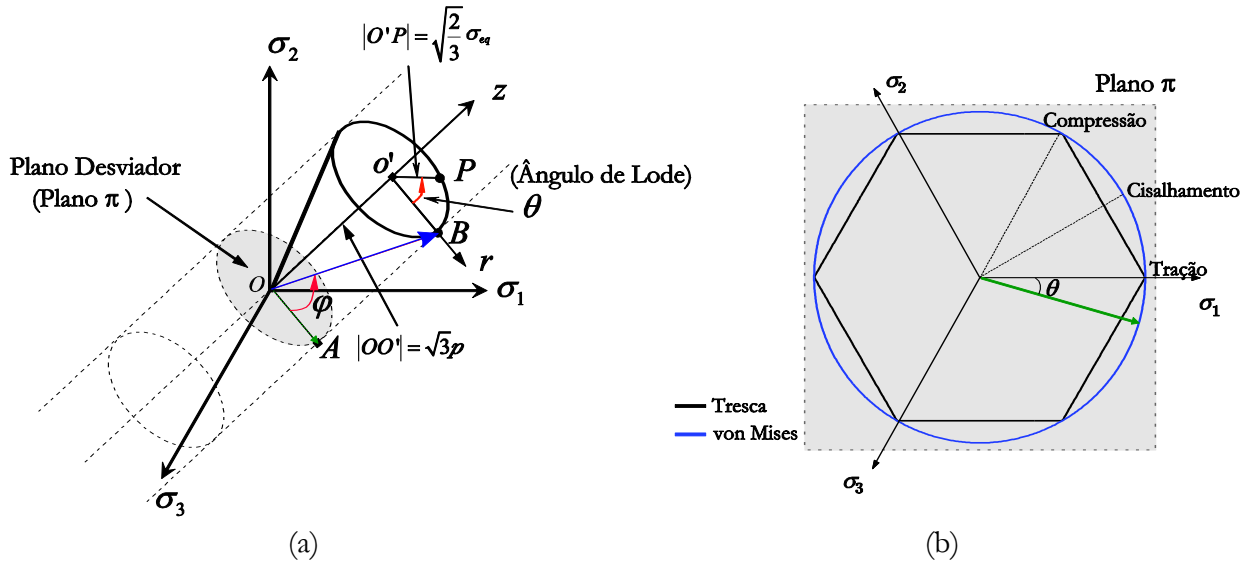


Figura 4 – Representação esquemática do vetor tensão  $\overline{OB}$  no plano das tensões principais e (b) definição do ângulo de Lode no plano- $\pi$ . Adaptado de Bai (2008).

O vetor tensão  $\overline{OB}$  representado na Figura 4 pode ser decomposto em duas partes, uma parcela desviadora  $\overline{OA}$  e outra hidrostática  $\overline{OO'}$ . A razão entre a parte hidrostática e a parte desviadora é, por definição, a triaxialidade, a qual é associada com o ângulo  $\varphi$ , que representa o ângulo obtido entre o vetor tensão  $\overline{OB}$  e o plano- $\pi$ . Tal ângulo, nomeado ângulo elevador, é responsável pelo tamanho do envelope de falha do material. O ângulo de Lode, por sua vez, é definido sobre o plano das tensões desviadoras principais (também conhecido como plano- $\pi$ ) conforme a Fig. (1b), e é o menor ângulo formado entre a projeção do vetor tensão no plano desviador e o eixo das tensões principais (Bai, 2008; Malcher et al., 2012).

Em posse das definições e conceitos já apresentados, pode-se definir matematicamente a razão de triaxialidade como:

$$\eta = \frac{p}{\sigma_{eq}}, \quad (7)$$

onde  $\sigma_{eq}$  representa uma tensão equivalente. Com o auxílio de uma tensão equivalente é possível comparar estados de tensão multiaxiais críticos em elementos estruturais ou componentes mecânicos com resultados provenientes basicamente de ensaios uniaxiais. Nesses ensaios uniaxiais, as propriedades materiais, como o limite de escoamento ( $\sigma_y$ ), ou a tensão última ( $\sigma_u$ ), são características que permitem definir, por exemplo, o início do escoamento plástico ou do amolecimento do material. Tais características podem ser obtidas através das curvas de reação *Tensão-Deformação*. No caso de estados de tensão multiaxiais, é preciso definir um critério de tensão equivalente, que descreva a partir de uma grandeza escalar o estado de tensão mais geral, para que se possa realizar as devidas comparação com as propriedades do material, as quais também são grandezas escalares (Lemaitre, 2001). Como exemplo clássico, têm-se a tensão equivalente de von Mises ( $q$ ), assim  $\sigma_{eq} = q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ .

O ângulo de Lode é, por sua vez, definido como uma função do chamado terceiro invariante normalizado do tensor das tensões desviadores, como apresentado a seguir:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos(\xi), \quad (8)$$

onde  $\xi$  representa o terceiro invariante normalizado, o qual pode ser matematicamente determinado por uma razão entre o terceiro invariante e a tensão equivalente de von Mises:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3. \quad (9)$$

O termo  $r$  representa o terceiro invariante alternativamente definido por Bai *et al.* (2007) e expresso como:

$$r = \left[\frac{27}{2} J_3\right]^{1/3} = \left[\frac{27}{2} \det(\mathbf{S})\right]^{1/3}. \quad (10)$$

O ângulo de Lode também pode ser normalizado ( $\bar{\theta}$ ) (Bai & Wierzbicki, 2007). Desta forma, o ângulo de Lode normalizado é dado por:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi}. \quad (11)$$



O intervalo no qual o ângulo de Lode normalizado,  $\bar{\theta}$ , se situa é dado por:  $-1 \leq \bar{\theta} \leq 1$ .

A Tabela 1 abaixo resume os valores dos parâmetros elasto-plásticos: razão de triaxialidade ( $\eta$ ), terceiro invariante do tensor desviador normalizado ( $\xi$ ), ângulo de Lode ( $\theta$ ) e ângulo de Lode normalizado ( $\bar{\theta}$ ).

**Tabela 1 – Parâmetros elasto-plásticos.**

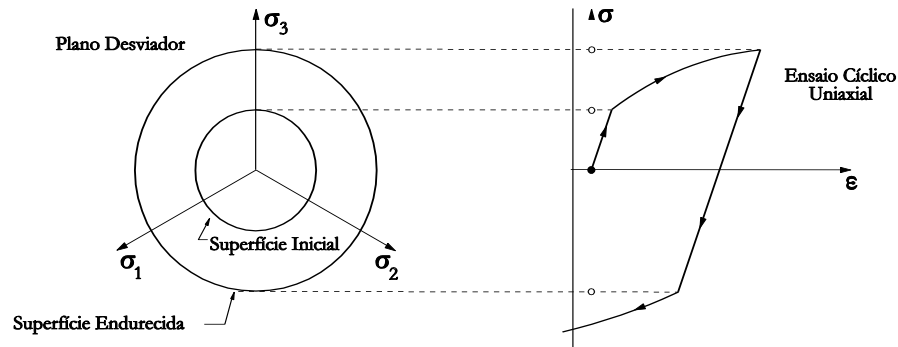
Estado de Tensão	Parâmetro elasto-plástico			
	$\eta$	$\xi$	$\theta$	$\bar{\theta}$
<b>Tração Uniaxial</b>	$\eta \geq \frac{1}{3}$	$\xi = 1$	$\theta = 0$	$\bar{\theta} = 1$
<b>Compressão Uniaxial</b>	$\eta \leq -\frac{1}{3}$	$\xi = -1$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\bar{\theta} = -1$
<b>Cisalhamento Puro</b>	$\eta = 0$	$\xi = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\bar{\theta} = 0$

### 2.3 ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

Materiais elasto-plásticos podem vir a apresentar um aumento do seu limite de escoamento após serem submetidos a um histórico de deformação plástica, ou seja, é necessário um aumento no nível de tensão para que se continue deformando plasticamente o material, tal fenômeno é conhecido como endurecimento do material. De acordo com o conceito apresentado por Souza Neto et al. (2008), para os casos multi-axiais, o endurecimento é representado por mudanças na força termodinâmica associada ao endurecimento,  $\mathbf{A}$ , durante o escoamento plástico. Tais mudanças podem, em geral, afetar o tamanho, formato e orientação da superfície de escoamento, definida por  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$ .

Um modelo de plasticidade apresenta endurecimento isotrópico quando a evolução de sua superfície de escoamento é tal que uma expansão uniforme (isotrópica) de sua superfície inicial é observada, independente do nível de endurecimento apresentado. Ao contrário do que ocorre com modelos que contemplam endurecimento cinemático, o endurecimento isotrópico não translada a superfície de escoamento, apenas a expande sem que haja mudança em seu formato.

Levando em consideração um modelo de plasticidade multiaxial cuja superfície de escoamento é obtida através da formulação clássica de von Mises, o efeito apresentado pelo endurecimento isotrópico corresponde a um aumento do raio do cilindro de escoamento de von Mises, representado a seguir (Figura 5) no plano das tensões principais (plano- $\pi$ ) ao lado de uma curva de reação do tipo tensão-deformação, ilustrando em detalhes a expansão da superfície de escoamento causada pelo endurecimento do material.



**Figura 5 - Endurecimento isotrópico. Teste uniaxial e representação no plano- $\pi$ . Modificado e adaptado de Souza Neto et al. (2008).**

No presente trabalho, a curva de endurecimento plástico é aproximada por uma função exponencial segundo o modelo proposto por Ramberg-Osgood (1943), dada pela seguinte expressão: (ver Dowling, 2007).

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H\bar{\epsilon}^p{}^m, \quad (12)$$

onde  $\sigma_{y0}$  é o limite de escoamento inicial do material,  $H$  é o módulo de endurecimento isotrópico, sendo  $\bar{\epsilon}^p$  a deformação plástica acumulada e, por fim,  $m$  representa o chamado expoente de endurecimento por deformação plástica. Com esta aproximação, o material endurece com uma taxa de endurecimento que decai conforme o material se deforma plasticamente. (Hosford, 2013).

Segundo Lemaitre (2001), a escolha de um conjunto adequado de variáveis internas associadas ao endurecimento (denotado por  $\alpha$ ) deve depender de uma série de características específicas do material considerado. Na plasticidade de metais, por exemplo, a variável interna associada ao endurecimento está intrinsecamente relacionada com a densidade de discordâncias na microestrutura cristalográfica que causam o crescimento isotrópico da resistência do material ao escoamento plástico. Tal conjunto  $\alpha$ , no caso do endurecimento isotrópico, apresenta normalmente uma única variável escalar que determina o tamanho da superfície de escoamento.

Neste trabalho, adota-se a deformação plástica acumulada,  $\bar{\epsilon}^p$ , como a variável associada ao endurecimento isotrópico do material. Desta forma, a taxa de evolução da deformação plástica acumulada é determinada considerando a equivalência do trabalho plástico.

Defini-se a deformação plástica acumulada como:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} . \quad (13)$$

A Figura 6 apresenta o trabalho total necessário para deformar um material até o ponto  $P$ , em um ensaio uniaxial de tração monotônico, como sendo a área total sob a curva de reação do tipo tensão-deformação.

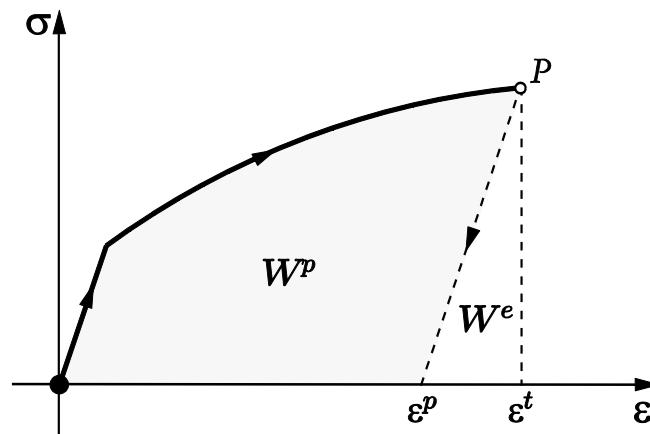


Figura 6 – Definição do Trabalho Plástico. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O trabalho total ( $W$ ) é definido como uma soma dos trabalhos elástico ( $W^e$ ) e plástico ( $W^p$ ).

$$W = W^p + W^e . \quad (14)$$

A parcela elástica, armazenada sob a forma de energia elástica, é totalmente recuperada quando ocorre o descarregamento da solitação, por outro lado, o trabalho plástico corresponde à energia perdida pelos mecanismos plásticos e que não pode ser recuperada.

A definição matemática do trabalho plástico é dada por:

$$W^p = \int_0^t \sigma : \dot{\epsilon}^p . \quad (15)$$

Partindo da Eq. (15), a evolução do trabalho plástico é dada por:

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (16)$$

De forma geral, um critério de escoamento plástico é formulado em função de uma tensão equivalente ( $\sigma_{eq}$ ), a qual descreve o estado de tensão multiaxial geral por meio de uma grandeza escalar. Considerando a Eq. (16) na situação de escoamento plástico, isto é, quando a tensão equivalente se iguala ao limite de escoamento do material,  $\sigma_{eq} = \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ , têm-se que :

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p, \quad (17)$$

ou em função da tensão equivalente:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma_{eq} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p. \quad (18)$$

Conforme apresentado por Souza Neto et al. (2008), há uma equivalência entre a descrição do endurecimento do material pela deformação plástica e a descrição pelo trabalho plástico para modelos de plasticidade associativa. Para estes modelos associativos, a chamada função de escoamento do material é então adotada como potencial de fluxo ou potencial de dissipação, assim:

$$\Psi = \Phi, \quad (19)$$

onde  $\Psi$  representa o potencial de fluxo e  $\Phi$  a função de escoamento do material.

Nestes casos, a associatividade implica em definir que o taxa de crescimento da deformação plástica é um tensor normal a superfície de escoamento, dentro do espaço das tensões principais (Figura 7). Assim, a equação de evolução para a deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  é obtida como se segue:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (20)$$

onde  $\dot{\gamma}$  representa o multiplicador plástico e  $\mathbf{N}$  é o vetor de fluxo plástico, dado por:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (21)$$

Portanto, substituindo a relação apresentada na Equação (20) na Equação (18) e manipulando matematicamente, obtém-se a expressão para a taxa de evolução da deformação plástica acumulada:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\sigma_{eq}} = \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}}{\sigma_{eq}}. \quad (22)$$

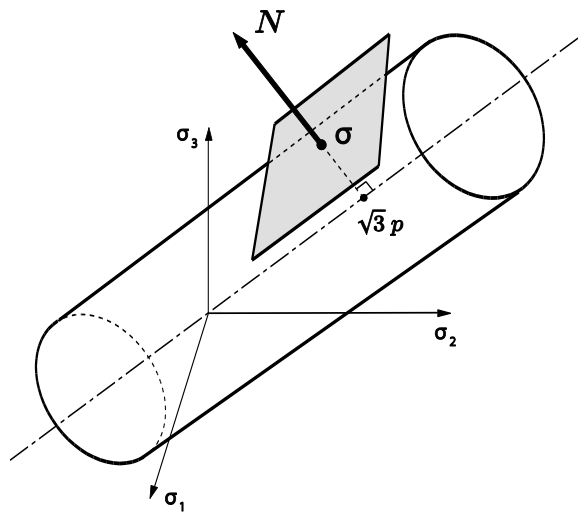


Figura 7 – Vetor de Fluxo para o critério de von Mises, considerando plasticidade associativa. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

### 3 MODELOS BASEADOS NO TERCEIRO INVARIANTE

Neste capítulo, utilizam-se os conceitos matemáticos apresentados no capítulo anterior para introduzir os modelos matemáticos dependentes do terceiro invariante do tensor desviador e elaborados tomando como ponto de partida os critérios de escoamento plástico de Hosford (1972) e Gao et al. (2011).

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO

##### 3.1.1. Domínio Elástico e Definição da Função de Escoamento

##### **Modelo de Hosford**

Proposto em 1972 por Hosford, a partir de observações experimentais e teóricas, como a formulação de uma superfície de escoamento intermediária aos critérios de Tresca (1864) e von Mises (1913). Este modelo é insensível à tensão hidrostática e dependente do terceiro invariante do tensor desviador, sendo a sua formulação uma relação entre os raios do círculo de Mohr e uma generalização do modelo de von Mises quando escrito em função das componentes das tensões principais. (Hosford, 1972; Hill, 1998; Hosford, 2013)

A expressão a seguir apresenta o critério de escoamento de Hosford em seu formato mais fundamental:

$$\Phi = \sigma_e^H(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) , \quad (23)$$

onde  $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$  é a lei de endurecimento plástico, conforme a Equação (12), e  $\sigma_e^H$  representa a “tensão efetiva generalizada”, função das tensões principais do Tensor de Cauchy  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , e definida como:

$$\sigma_e^H = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}} , \quad (24)$$

onde o coeficiente  $h$  é adotado como um inteiro,  $h = 1, 2, \dots$ . Desta maneira, a superfície de escoamento do material obtida depende do valor escolhido para  $h$ . Entretanto, para o caso do carregamento uniaxial, todas as superfícies de escoamento se coincidem.

Quando  $h = 2$ , o critério de escoamento de Hosford se reduz ao critério de von Mises representado em termos das tensões principais, isto é, para  $h = 2$ ,  $\sigma_e^H = q$ . Onde  $q$  é a tensão equivalente de von Mises.

$$\sigma_e^H = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]^{\frac{1}{2}} = q. \quad (25)$$

Por outro lado, quando  $h \rightarrow \infty$  a formulação de Hosford resgata o critério de escoamento de Tresca:

$$\sigma_e^H = (\sigma_1 - \sigma_3), \quad (26)$$

assumindo que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

A Figura 8 apresenta uma comparação entre a superfície de escoamento proposta para Hosford, no plano das tensões principais com  $\sigma_3 = 0$ , e as clássicas formulações de von Mises ( $h = 2$ ) e Tresca ( $h \rightarrow \infty$ ).

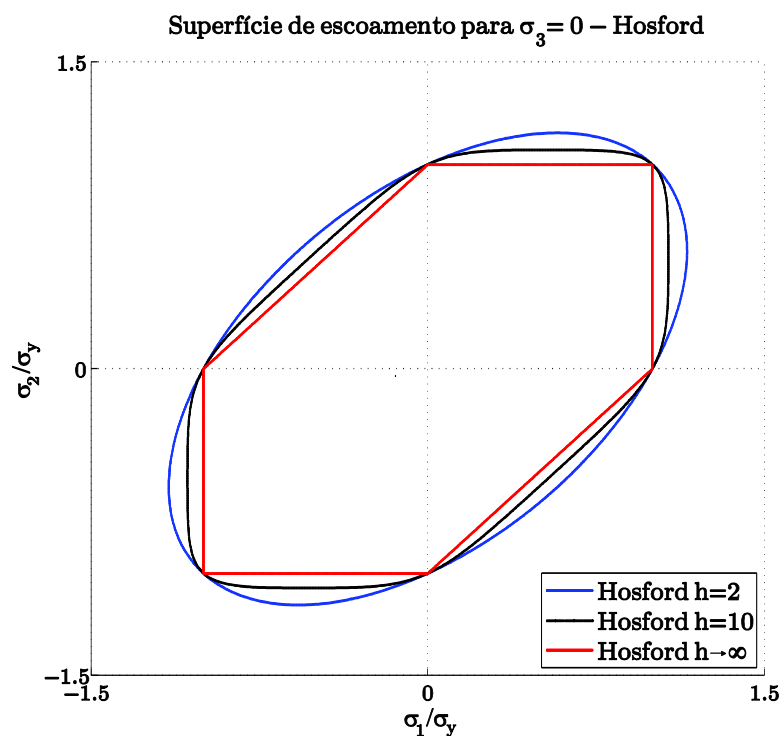


Figura 8 - Comparação das superfícies de escoamento, no plano das tensões principais, dos modelos de von Mises, Tresca e Hosford.

A função de escoamento segundo o critério de Hosford é dada por:

$$\Phi = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}} - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) , \quad (27)$$

onde a lei de endurecimento isotrópico é dada por  $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y0} + H(\bar{\epsilon}^p)\bar{\epsilon}^p$ .

### Modelo de Gao et al.

Gao et al. (2011) fizeram a proposição de um critério de escoamento para materiais isotrópicos baseado nos invariantes dos tensores de tensão:  $I_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ . A função de escoamento em sua forma mais geral é dada por:

$$\Phi = \sigma_{eq}^G - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) . \quad (28)$$

com  $\sigma_{eq}^G = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6}$ ,  $I_1$  representa o primeiro invariante do tensor tensão de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , e é igual ao traço deste tensor ( $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$ ).  $J_2$  e  $J_3$  são respectivamente o segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões desviadoras com  $J_2 = \frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}$  e  $J_3 = \det(\mathbf{S})$ .  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes materiais, sendo o valor de  $c = \left(a + \frac{4}{729}b + 1\right)^{-1/6}$ , encontrado através da análise desta função de escoamento para o caso uniaxial de tração. Quando  $a = b = 0$ , este modelo de plasticidade recupera a clássica formulação de von Mises, pois a tensão equivalente de Gao et al. ( $\sigma_{eq}^G$ ), definida acima, se iguala a tensão equivalente de von Mises,  $\sigma_{eq}^G = q = \sqrt{3J_2}$ . Por fim,  $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$  representa a lei de endurecimento do material, definida como função da deformação plástica acumulada, conforme apresentado na Equação (12) deste trabalho.

Para este critério em estudo, a função de escoamento é dada por:

$$\Phi = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6} - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) , \quad (29)$$

onde, novamente, a lei de endurecimento isotrópico é dada por  $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y0} + H(\bar{\epsilon}^p)\bar{\epsilon}^p$ .



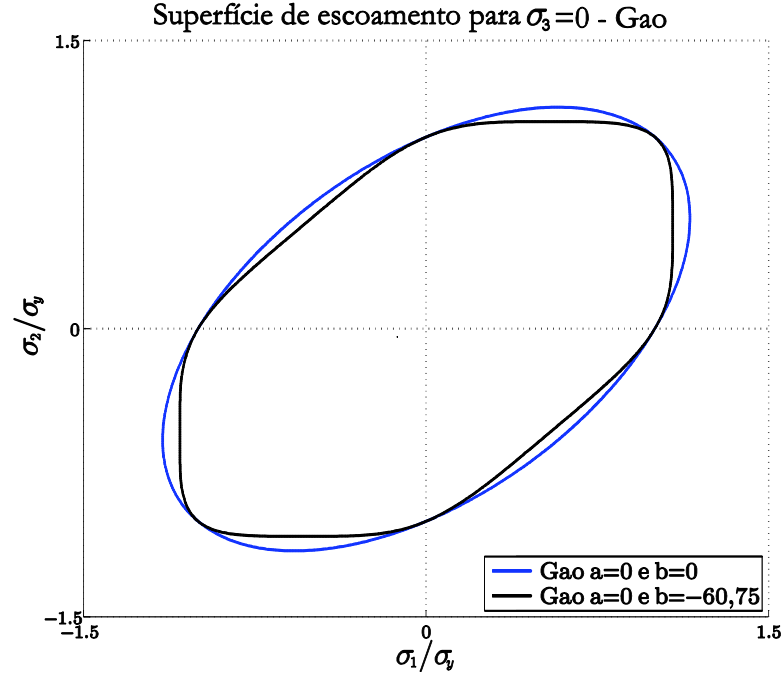


Figura 9 – Comparação das superfícies de escoamento no plano das tensões principais dos modelos de von Mises e Gao et al.

### 3.1.2 Lei de Fluxo Plástico

O passo seguinte para obtenção do modelo matemático utilizando estes dois critérios de escoamento é a determinação da Lei de fluxo plástico, para tal é preciso definir inicialmente os vetores de fluxo plástico,  $\mathbf{N}^H$  e  $\mathbf{N}^G$ , para os modelos de Hosford e Gao et al. respectivamente. Adotando a teoria da plasticidade associativa e de acordo com a Eq. (21), têm-se que:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (30)$$

uma vez que  $\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$  não depende do estado de tensão e conseqüentemente  $\frac{\partial \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0$ . Desta forma, o vetor de fluxo plástico para o modelo matemático de Hosford é dado por:

$$\mathbf{N}^H = \frac{\partial \sigma_e^H}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{1}{h(2)^{\frac{1}{h}}} \right] [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}-1} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3), \quad (31)$$

onde:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= h(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \kappa_2 &= h(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \kappa_3 &= h(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (32)$$

De forma análoga, o vetor de fluxo plástico para o modelo matemático de Gao et al. é dado por:

$$\mathbf{N}^G = \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}^G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{c}{6} (aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{-\frac{5}{6}} \left( a \frac{\partial I_1^6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + 27 \frac{\partial J_2^3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + b \frac{\partial J_3^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right), \quad (33)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 6I_1^5 \mathbf{I}, \\ \frac{\partial J_2^3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 3J_2^2 \mathbf{S}, \\ \frac{\partial J_3^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 2J_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \mathbb{I}^d. \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo as derivadas acima na Eq.(30), têm-se:

$$\mathbf{N}^G = \frac{c}{6} (aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{-\frac{5}{6}} [a6I_1^5 \mathbf{I} + 81J_2^2 \mathbf{S} + 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \mathbb{I}^d], \quad (35)$$

onde  $\mathbb{I}^d$  representa o tensor identidade de quarta ordem desviador, com  $\mathbb{I}^d = \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ . De forma reduzida, tem-se:

$$\mathbf{N}^G = \frac{c}{6} (\alpha)^{-\frac{5}{6}} (\beta), \quad (36)$$

com  $\alpha = aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2$  e  $\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = a6I_1^5 \mathbf{I} + 81J_2^2 \mathbf{S} + 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \mathbb{I}^d$ .

Uma vez determinado o vetor de fluxo, define-se a evolução da deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}. \quad (37)$$

Novamente, efetuando esse passo para o critério de Hosford, obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}^H = \dot{\gamma} \left( \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \right) \left\{ \frac{1}{h} [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}-1} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \right\}, \quad (38)$$

e para o modelo de Gao et al.:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}^G = \dot{\gamma} \left[ \frac{c}{6} (\alpha)^{-\frac{5}{6}} (\beta) \right], \quad (39)$$

onde, nos dois casos,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  é a taxa de evolução do tensor das deformações plásticas e  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico.

### 3.1.3 Evolução da Deformação Plástica Acumulada

Em seguida, determina-se a taxa de evolução da deformação plástica acumulada, considerando a equivalência de trabalho plástico, conforme apresentado anteriormente na Equação (22). Assim, para o critério de Hosford têm-se que a taxa de evolução da deformação plástica acumulada é dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\sigma : \mathbf{N}^H}{\sigma_e^H}, \quad (40)$$

com  $\mathbf{N}^H$  dado conforme as Equações (31) e (32).

De maneira similar, considerando o critério de escoamento proposto por Gao et al., a taxa de evolução da deformação plástica acumulada é dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\sigma : \mathbf{N}^G}{\sigma_{eq}^G}, \quad (41)$$

com  $\mathbf{N}^G$  dado conforme as Equações (33) e (34).

### 3.1.4 Regra de Complementaridade

Ressalta-se que em nenhum momento é permitido que o nível de tensão atuante, caracterizado pelas tensões equivalente  $\sigma_e^H$  e  $\sigma_{eq}^G$ , ultrapasse a tensão de escoamento atual do material, isto é, a tensão de escoamento apresentada pelo material no momento da solicitação, de acordo com o seu grau de encruamento. Tensões plasticamente admissíveis encontram-se dentro do domínio elástico ou em seu limite (limite de escoamento). Desta forma, qualquer tensão admissível deve satisfazer a seguinte restrição:

$$\Phi(\sigma_{eq}, \sigma_y) \leq 0. \quad (42)$$

Conforme introduzido pela Eq. (20), o multiplicador plástico ( $\dot{\gamma}$ ) é um escalar não negativo:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad (43)$$

isto é, dentro do domínio elástico  $\dot{\gamma} = 0$ , e por outro lado, quando há a presença do escoamento plástico  $\dot{\gamma} > 0$ , com isso a condição de complementariedade é satisfeita:

$$\Phi \dot{\gamma} = 0, \quad (44)$$

desta forma, a evolução da deformação plástica é nula dentro do domínio elástico, isto é:

$$\Phi < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0, \quad (45)$$

e o fluxo plástico ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq 0$ ) apenas pode ocorrer quando o nível de tensão coincide com o limite de escoamento do material.

$$\sigma_{eq} = \sigma_y \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \geq 0, \quad (46)$$

As Equações (42), (43) e (44) define a chamada condição de carregamento/descarregamento do modelo elasto-plástico, ou seja, as restrições:

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0, \quad (47)$$

definem quando o fluxo plástico deve ocorrer.

O modelo matemático para as duas funções de escoamento apresentadas neste capítulo é resumido no Quadro 1. Adicionalmente, a evolução das equações (38), (39) e (41) são complementadas pelas condições de carregamento/descarregamento definidas nesta seção.

Quadro 1 - Modelo Matemático para Hosford (1972) e Gao et al. (2011).

i) Decomposição aditiva do tensor de deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei de elástica

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de Escoamento

$$\Phi = \sigma_{eq} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p),$$

com:

- $\sigma_{eq} = \sigma_e^H = \left[ \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \right] [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}}$  [Hosford]
- $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^G = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6}$  [Gao]
- $\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$  a lei de endurecimento com:  $\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_{y0} + H(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$

iv) Lei de Fluxo Plástico e equação de evolução para  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\sigma_{eq}} = \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}}{\sigma_{eq}}$$

com  $\mathbf{N} = \mathbf{N}^H$  para Hosford e  $\mathbf{N} = \mathbf{N}^G$  para Gao:

$$\mathbf{N}^H = \left[ \frac{1}{h(2)^{\frac{1}{h}}} \right] \left\{ [(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{\frac{1}{h}-1} [h(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-1}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + h(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-1}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + h(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-1}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)] \right\}$$

$$\mathbf{N}^G = \frac{c}{6} (aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{-\frac{5}{6}} \cdot [a6I_1^5 \mathbf{I} + 81J_2^2 \mathbf{S} + 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \mathbb{I}^d]$$

v) Regra de complementaridade.

$$\dot{\gamma} \geq 0,$$

$$\Phi \leq 0,$$

$$\dot{\gamma} \Phi = 0.$$

## 3.2 ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO

Nesta seção, apresenta-se a estratégia de solução numérica adotada no presente trabalho para a realização das simulações numéricas. O uso de modelos constitutivos dependentes da trajetória, como é o caso dos modelos aqui apresentados, invariavelmente leva à necessidade de formular algoritmos para integração numérica das equações de evolução das variáveis de estado. O problema então consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, geralmente denominadas por  $\alpha_n$ , no instante de tempo  $t_n$ , para se obter as variáveis internas  $\alpha_{n+1}$  no tempo  $t_{n+1}$ , onde o incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  se assume conhecido.

Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  é aplicada aos modelos de Hosford (1972) e Gao et al. (2011), baseando-se no esquema de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998). Uma vez que o modelo é implementado em um programa acadêmico de elementos finitos para um carregamento quasiestático, é necessário também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

O procedimento de atualização das tensões, o qual é baseado na chamada metodologia da *decomposição do operador* (Simo e Hughes, 1998; Souza Neto et al., 2008), é especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e tem sido amplamente utilizado na plasticidade computacional. Esse método consiste em dividir o problema em duas partes: um preditor elástico, onde o problema é assumido como completamente elástico e um corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução é resolvido, tomando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema.

Caso a função de escoamento seja violada, o chamado corretor plástico é então inicializado e o método de Newton-Raphson é utilizado para se resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. O método de Newton-Raphson é escolhido para solucionar o problema devido à sua taxa quadrática de convergência para a solução, o que resulta em um algoritmo de atualização computacionalmente eficiente (ver Simo & Hughes, 1998; Souza Neto et al., 2008).

### 3.2.1 Algoritmo de Atualização das Tensões e Variáveis Internas

Na plasticidade computacional, o algoritmo de atualização é também comumente chamado de algoritmo de mapeamento de retorno e a sua construção requer os seguintes passos: conhecidos os valores da deformação elástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  e do conjunto das variáveis internas  $\alpha_n$ , no início do intervalo do

pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , e dado também o incremento de deformação prescrito,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , para este intervalo, o chamado estado tentativa elástico pode ser então construído, como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}, & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n, & \sigma_y &= \sigma_y(\alpha_n),\end{aligned}\tag{48}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  representa o tensor das tensões tentativa,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$  é o tensor das deformações plásticas tentativa,  $\alpha_{n+1}^{trial}$  é a variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa e  $\sigma_y$  é o limite de escoamento do material, que passa a ser uma função da variável interna associada ao endurecimento isotrópico,  $\sigma_y(\alpha_n)$ . No caso dos modelos de Hosford (1972) e de Gao et al. (2011), a chamada deformação plástica acumulada,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , é tomada como variável interna associada ao endurecimento isotrópico. Desta forma, o limite de escoamento do material será então uma função de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ .

O tensor das tensões tentativas pode ser então decomposto em uma parte desviadora e outra hidrostática:

$$\boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}, \quad p_{n+1}^{trial} = K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial},\tag{49}$$

onde  $\boldsymbol{S}_{n+1}^{trial}$  e  $p_{n+1}^{trial}$  representam, respectivamente as componentes desviadora e a hidrostática do tensor das tensões de Cauchy tentativas. As constantes  $G$  e  $K$  representam as constantes de Lamé e são denominadas de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente. Os termos  $\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}$  representam as componentes desviadoras e volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa.

O próximo passo consiste em verificar se o estado tentativa construído acima (Eq. 48) se encontra dentro ou fora do limite elástico do material. Para isso, a função de escoamento é determinada com base nos termos definidos neste trabalho. Para os modelos apresentados, a função de escoamento é então determinada como:

$$\Phi^{trial} = \sigma_{eq}^{trial} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p).\tag{50}$$

Considerando o modelo de Hosford, têm-se que:

$$\sigma_{eq}^{trial} = \sigma_e^{H^{trial}} = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \left[ (\sigma_2^{trial} - \sigma_3^{trial})^h + (\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial})^h + (\sigma_1^{trial} - \sigma_2^{trial})^h \right]^{\frac{1}{h}}, \quad (51)$$

onde  $\sigma_1^{trial}$ ,  $\sigma_2^{trial}$  e  $\sigma_3^{trial}$  são as tensões principais do estado de tensão tentativa.

Para o modelo de Gao et al., têm-se:

$$\sigma_{eq}^{trial} = \sigma_{eq}^{G^{trial}} = c \left( a I_1^{trial^6} + 27 J_2^{trial^3} + b J_3^{trial^2} \right)^{1/6}. \quad (52)$$

em que  $I_1^{trial}$  representa o primeiro invariante do tensor tensão de Cauchy tentativa,  $\boldsymbol{\sigma}^{trial}$ , e é igual ao traço deste tensor ( $I_1^{trial} = tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial})$ ).  $J_2^{trial}$  e  $J_3^{trial}$  são respectivamente o segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões desviadoras tentativa com  $J_2^{trial} = \frac{1}{2} \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial}$  e  $J_3^{trial} = \det(\boldsymbol{S}_{n+1}^{trial})$ . A lei de endurecimento do material é aqui representada pelo termo  $\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p)$  como uma função da variável de endurecimento isotrópico,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$ . A expressão que define a evolução do limite de escoamento do material em função de  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$  é escrita como:

$$\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p) = \sigma_{y0} + H(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p) \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p, \quad (53)$$

onde  $H$  representa o módulo de endurecimento isotrópico, o qual é uma propriedade material e  $\sigma_{y0}$  é o limite de escoamento inicial do material.

Caso  $\Phi^{trial}$  seja menor ou igual a zero, isso significa que o incremento de deformação prescrito inicialmente é realmente totalmente elástico e o estado tentativa construído passa então a ser considerado o estado real do material,  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$ . Porém, caso  $\Phi^{trial}$  seja maior que zero então é possível constatar que o material se encontra dentro do regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, que inicialmente foi considerado como totalmente elástico, possui na realidade uma parcela plástica. Desta forma, há a necessidade de se corrigir o estado tentativa construído, Eq. (48).

A correção do estado tentativa é feita a partir da remoção do incremento de deformação plástica de dentro da deformação elástica tentativa, que pode ser então expresso por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p. \quad (54)$$



Para os modelos utilizados neste trabalho, o incremento de deformação plástica é então definido através da Lei de Fluxo Plástico. Assim, substituindo essa expressão na Eq. (54) acima, têm-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} , \quad (55)$$

onde  $\Delta\gamma$  representa o multiplicador plástico.

### 3.2.2 Atualização das Variáveis Internas – Hosford

Para o modelo de Hosford, têm-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}^H , \quad (56)$$

onde :

$$\mathbf{N}_{n+1}^H = \left[ \frac{1}{h(2)^{\frac{1}{h}}} \right] \left\{ \left[ (\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1})^h \right]^{\frac{1}{h}-1} (\kappa_{1n+1} + \kappa_{2n+1} + \kappa_{3n+1}) \right\}, \quad (57)$$

com:

$$\begin{aligned} \kappa_{1n+1} &= h(\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \kappa_{2n+1} &= h(\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \kappa_{3n+1} &= h(\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (58)$$

A atualização das variáveis de estado, para o modelo de Hosford, pode ser obtida através das equações a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}^H , \quad (59)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}^H}{\sigma_{\varepsilon_{n+1}}^H} , \quad (60)$$

Por fim, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ , de acordo com a expressão:

$$\Phi_{n+1} = \left( \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \right) \left[ (\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1})^h \right]^{\frac{1}{h}} - \sigma_{y0} - H \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = 0 . \quad (61)$$

### 3.2.3 Atualização da Variáveis Internas – Gao et al.

Realizando agora, de forma equivalente, o procedimento apresentado acima para a proposição de Gao et al., têm-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \Delta\gamma \left[ \frac{c}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} \cdot (\beta_{n+1}) \right], \quad (62)$$

no qual  $\alpha_{n+1}$  e  $\beta_{n+1}$  são dados por:

$$\alpha_{n+1} = aI_{1n+1}^6 + 27J_{2n+1}^3 + bJ_{3n+1}^2, \quad (63)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = a6I_{1n+1}^5 \mathbf{I} + 81J_{2n+1}^2 \mathbf{S}_{n+1} + 2bJ_{3n+1} \det(\mathbf{S}_{n+1}) \mathbf{S}_{n+1}^{-t} : \mathbb{I}^d. \quad (64)$$

A atualização das variáveis de estado, para o modelo de Gao et al. pode ser obtida através das equações a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left[ \frac{c}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} \cdot (\beta_{n+1}) \right], \quad (65)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1} \mathcal{N}_{n+1}^G}{\sigma_{eq_{n+1}}^G}, \quad (66)$$

Por fim, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ , de acordo com a expressão:

$$\Phi_{n+1} = c(aI_{1n+1}^6 + 27J_{2n+1}^3 + bJ_{3n+1}^2)^{1/6} - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = 0. \quad (67)$$

### 3.2.4 Sistema de Equações Não Lineares

Verifica-se então, analisando as Eq. (56), (59) e (60) para o modelo de Hosford e Eq. (62), (65) e (66) para o modelo de Gao et al. que para se determinar o estado real do material, há a necessidade de se resolver um sistema não-linear de equações, onde se tem como variáveis  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  e  $\Delta\gamma$ .

O sistema não-linear formado por estas equações de seus respectivos modelos pode ser considerado, para um estado geral de tensão (problema tridimensional), como um sistema com oito variáveis e oito equações. Pode-se também reescrever a Eq. (55) em termos do campo de tensão, como se segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e: [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}] = \mathbb{D}^e: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1}, \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1}, \quad (69)$$

Desta forma, o sistema de equações não-lineares a ser resolvido tem como variáveis:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  e  $\Delta\gamma$ , e a sua representação é dada como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}: \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \\ \phi_{n+1} = \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \end{cases} . \quad (70)$$

Onde, para o modelo de Hosford:  $\sigma_{eq_{n+1}} = \sigma_{e_{n+1}}^H$  e  $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^H$ . De forma similar, para Gao et al.:  $\sigma_{eq_{n+1}} = \sigma_{eq_{n+1}}^G$  e  $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^G$ .

O Quadro 2, apresentado na página seguinte, mostra de forma resumida o modelo numérico desenvolvido para os modelo matemático de Hosford (1972) e Gao et al. (2011).

**Quadro 2 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.**

i) Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

ii) Verificar a admissibilidade Plástica:

$$\Phi^{trial} = \sigma_{eq}^{trial} - \sigma_{y0} - H(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

onde:

- $\sigma_e^{H\ trial} = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \left[ (\sigma_2^{trial} - \sigma_3^{trial})^h + (\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial})^h + (\sigma_1^{trial} - \sigma_2^{trial})^h \right]^{\frac{1}{h}}$  [Hosford]

- $\sigma_{eq}^{G\ trial} = c \left( a I_1^{trial\ 6} + 27 J_2^{trial\ 3} + b J_3^{trial\ 2} \right)^{1/6}$  [Gao]

Se  $\Phi^{trial} \leq 0$ , então, têm-se um passo elástico:  $(*)_{n+1} = (*_{n+1})^{trial}$ ;

Caso contrário, têm-se um passo plástico: Algoritmo de retorno:

iii) Algoritmo de retorno para o modelo de Hosford (1972): resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  e  $\Delta \gamma$ .

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq\ n+1}} \\ \Phi_{n+1} = \sigma_{eq\ n+1} - \sigma_{y0} - H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \end{cases}$$

onde:

- $\sigma_{eq\ n+1} = \sigma_{e\ n+1} = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} \left[ (\sigma_{2\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^h + (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^h + (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{2\ n+1})^h \right]^{\frac{1}{h}}$

- $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^H = \left[ \frac{1}{h(2)^{\frac{1}{h}}} \left[ (\sigma_{2\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^h + (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^h + (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{2\ n+1})^h \right]^{\frac{1}{h}-1} \left( h(\sigma_{2\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + h(\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + h(\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{2\ n+1})^{h-1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \right) \right]$

Continuação do Quadro 2 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

iv) Algoritmo de retorno para o modelo de Gao (2011): resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis:  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \\ \Phi_{n+1} = \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H \bar{\epsilon}_{n+1}^p \end{cases}$$

onde:

- $\sigma_{eq_{n+1}} = \sigma_{eq_{n+1}}^G = c \left( a I_{1_{n+1}}^6 + 27 J_{2_{n+1}}^3 + b J_{3_{n+1}}^2 \right)^{1/6}$
- $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^G = \frac{c}{6} (\alpha_{n+1})^{-5/6} (\boldsymbol{\beta}_{n+1})$ ,

Sendo:

$$\alpha_{n+1} = a I_{1_{n+1}}^6 + 27 J_{2_{n+1}}^3 + b J_{3_{n+1}}^2$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = a 6 I_{1_{n+1}}^5 \mathbf{I} + 81 J_{2_{n+1}}^2 \mathbf{S}_{n+1} + 2 b J_{3_{n+1}} \det(\mathbf{S}_{n+1}) \mathbf{S}_{n+1}^{-t} : \mathbb{1}^d$$

v) Atualizar outras variáveis internas:  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$  e  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$

vi) Fim.

### 3.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

#### 3.3.1 Sistema de Equações Residuais

Na resolução do sistemas não-linear descrito no Quadro 2, apresentado na seção anterior, o método de Newton-Raphson é adotado. Como ponto de partida, tal sistema necessita ser escrito na forma linearizada. Assim, o sistema anterior é inicialmente reescrito na forma de equações residuais, como se segue:

$$\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{cases} = \begin{cases} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \\ \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{cases}. \quad (71)$$

Para o modelo de Hosford,  $\sigma_{eq_{n+1}} = \sigma_{e_{n+1}}^H$  e  $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^H$ . Por outro lado, para o modelo de Gao et al.,  $\sigma_{eq_{n+1}} = \sigma_{eq_{n+1}}^G$  e  $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^G$ .

Em seguida, o sistema é reescrito na forma linearizada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k. \quad (72)$$

Assim, com o intuito de se resumir a aplicação do método de Newton-Raphson para resolução do sistema linear exposto acima, Eq. (72), o Quadro 3 na página seguinte é apresentado tomando o estado tentativa como parâmetro inicial do problema.

**Quadro 3 - Estratégia Numérica - Método de Newton-Raphson.**

i) Tomado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$$

ii) Resolver o sistema de equações para:  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(k)} + \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(k+1)}$$

iv) Verificar convergência:

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{[\sigma_{y0} + H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(k+1)}]} \leq tolerância$$

v) Fim.

### 3.4 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Nesta seção apresenta-se o procedimento adotado para a implementação implícita dos modelos descritos na seção anterior deste trabalho em um ambiente acadêmico de elementos finitos, no qual a construção da matriz de rigidez do material se faz necessária. Para tal, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração é requerido para a determinação da matriz de rigidez (Souza Neto et al., 2008; Malcher, 2011). Considerando um caso elástico, ou seja, quando o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no tempo  $t_{n+1}$  passa a ser simplesmente o operador elástico ou a matriz de elasticidade do material (Lemaitre & Chaboche, 1990), descrito por:

$$\hat{\mathbb{D}}^e = \mathbb{D}. \quad (73)$$

Por outro lado, em um caso elasto-plástico, ou seja, quando se assume a existência de fluxo plástico, o operador tangente, escrito por  $\hat{\mathbb{D}}^{ep}$  é definido como:

$$\hat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\hat{\sigma}}{d\epsilon_{n+1}}, \quad (74)$$

onde  $\hat{\sigma}$  representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pela algoritmo de retorno descrito na seção anterior, dependente de  $\sigma_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$  (Souza Neto et al., 2008). Para os modelo de Hosford e Gao et al., a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito a partir da Equação (71) escrita na forma inversa:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ d\bar{\epsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^e: d\epsilon_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (76)$$

Os termos  $\mathbb{C}_{22}$ ,  $\mathbb{C}_{23}$ ,  $\mathbb{C}_{32}$  e  $\mathbb{C}_{33}$  representam escalares.  $\mathbb{C}_{12}$ ,  $\mathbb{C}_{21}$ ,  $\mathbb{C}_{13}$  e  $\mathbb{C}_{31}$  representam tensores de segunda ordem e  $\mathbb{C}_{11}$  representa um tensor de quarta ordem. Assim, a partir da Equação (73), pode-se escrever que:



$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} = \mathbb{C}_{11} : \mathbb{D}^e , \quad (77)$$

onde a operação  $(\mathbb{C}_{11} : \mathbb{D})$  representa a composição entre o tensor de quarta ordem  $\mathbb{C}_{11}$  e o tensor de quarta ordem  $\mathbb{D}$ , dado pela matriz de elasticidade.

Esta seção encerra a primeira parcela desse capítulo, constituída das formulações matemáticas e numéricas dos modelos estudados neste trabalho. A partir dos algoritmos apresentados para cada um desses modelos elasto-plásticos, foram feitas simulações numéricas cujos procedimentos e resultados são abordadas a partir da próxima seção.

### 3.5 GEOMETRIA, DISCRETIZAÇÃO E CALIBRAÇÃO

Nesta seção apresenta-se a metodologia numérica utilizada para elaboração das simulações em um ambiente de elementos finitos acadêmico, Hyplas. Inicialmente são descritas as geometrias e dimensões dos copos de provas ensaiados, bem como as suas respectivas discretizações espaciais. Em seguida, a estratégia de calibração e os parâmetros materiais, para uma liga de aço *SAE1045* e uma liga de alumínio aeronáutico são apresentados, considerando os seguintes valores para os parâmetros do modelo de Gao et al. (2011):  $a = 0$ ,  $b = -60,75$  e  $c = \left(a + \frac{4}{729}b + 1\right)^{-1/6}$ , conforme recomendado pelos autores em seu estudo. Para a formulação de Hosford (1972), adotou-se  $h = 12$ , de maneira a aproximar a superfície de escoamento obtida por este critério à superfície da formulação de Gao et al. (2011).

A liga de alumínio aeronáutico estudada no presente trabalho foi caracterizada por Driemeier et al. (2010), através de ensaios experimentais motivados pela investigação dos efeitos combinados da magnitude de tensão, razão de triaxialidade e ângulo de Lode na resposta e no comportamento mecânico deste material, gerando dados que pudessem ser utilizados na validação de relações constitutivas e de critérios de falha para materiais dúcteis. Os parâmetros materiais da liga de aço *SAE1045* foram extraídos dos estudos conduzidos por Bai (2008) que utilizaram esta liga para verificar o efeito do parâmetro elasto-plástico ângulo de Lode no envelope de falha dúctil, e validar o critério de escoamento proposto em seu trabalho.

#### 3.5.1 Liga de Aço *SAE 1045*

Como já apresentado, o presente trabalho contou com duas baterias de simulações numéricas, uma com a liga de aço *SAE1045* (Bai, 2008) e outras com a liga de alumínio aeronáutico (Driemeier et al., 2010). Aborda-se inicialmente, as simulações realizados com a liga ferrosa, cujas geometrias dos espécimes e o processo de calibração são apresentados nos tópicos a seguir.

#### **Geometria dos corpos de prova**

Com o intuito de se verificar o desempenho e a diferença entre o comportamento preditivo de cada um dos dois modelos apresentados nas primeiras seções deste capítulo (Hosford, 1972 e Gao et al., 2011), foram propostas duas simulações numéricas sob diferentes condições de carregamento e níveis de triaxialidade para uma liga de aço *SAE1045*. Cada simulação foi realizada em um corpo de prova diferente para que os níveis desejados de triaxialidade fossem atingidos. A opção pelo chamado corpo de prova “*Borboleta*” proposto por Bai (2008), Figura 10, é feita para representar as

condições de simulação dentro de uma faixa de baixa triaxialidade ( $0 \leq \eta \leq 0,33$ ) e alta dependência do terceiro invariante do tensor desviador, com carregamentos do tipo cisalhante puro ( $0^\circ$ ). Por outro lado, para condições de alta triaxialidade ( $0,33 \leq \eta < 1$ ), optou-se pelo corpo de prova cilíndrico sem entalhe.

A geometria mais comumente utilizada em ensaios de tração uniaxial são as referentes aos espécimes cilíndricos sem entalhes, cujo nível de triaxialidade até o início da estricção do corpo é de  $\eta = 0.33$ . Devido à facilidade de se fabricar corpos de prova com esta geometria, assim como a realização de ensaios experimentais em máquinas servo-hidráulicas universais, esta geometria é utilizada neste trabalho para a calibração dos modelos numéricos considerando cada um dos critérios de escoamento abordados. No próximo tópico deste trabalho, a etapa de calibração dos modelos será apresentada em detalhes.

As Figuras 10 e 11 apresentam as geometrias e as dimensões dos espécimes “*Borboleta*” e cilíndrico sem entalhe.

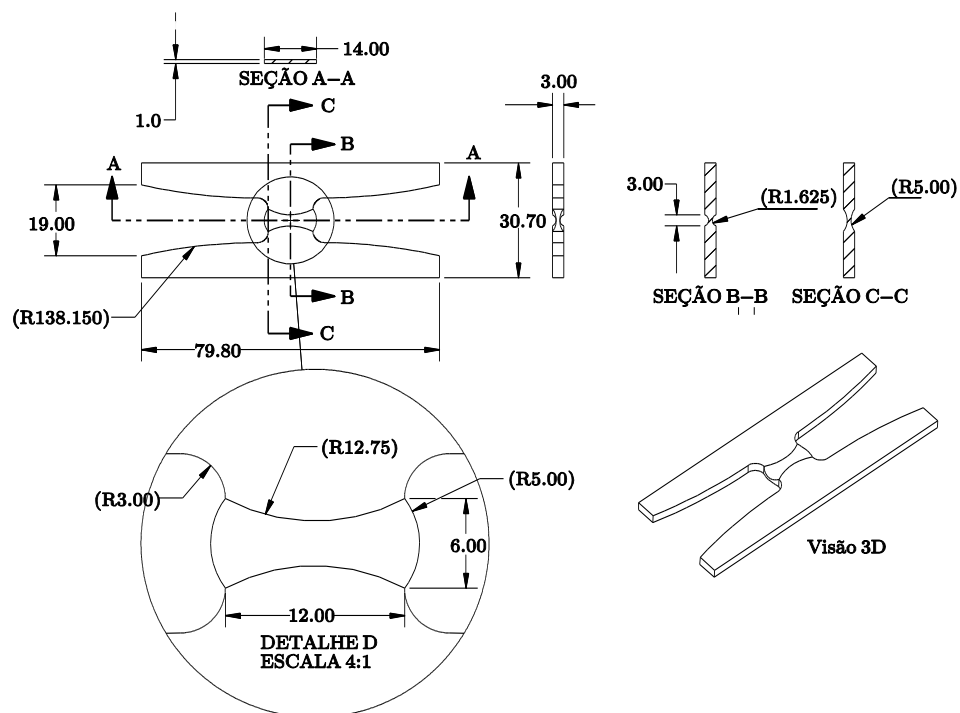
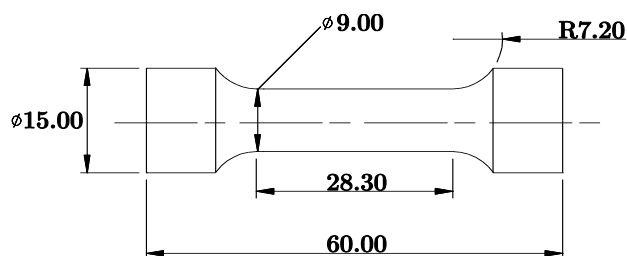


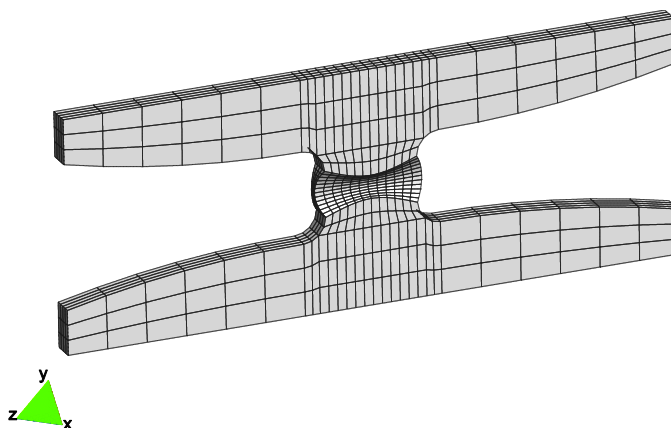
Figura 10 – Geometria do corpo de prova “*Borboleta*”. Adaptado de Bai. (2008).



**Figura 11 – Corpo de prova cilíndrico sem entalhe, utilizado para o processo de calibração. Adaptado de Bai. (2008).**

### **Discretização espacial dos corpos de provas.**

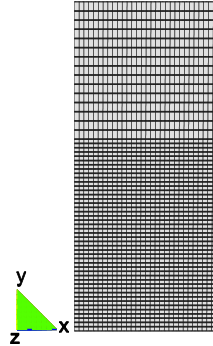
Ambos os corpos de provas selecionados foram simulados utilizando uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, Hyplas. Para a discretização do corpo de prova “*Borboleta*”, definiu-se uma malha com elementos finitos tridimensional quadrático hexaédrico com vinte nós cada, totalizando 1440 elementos e 7773 nós, conforme apresentado na Figura 12 abaixo. Para esse caso, a malha é definida em uma estratégia de integração reduzida com oito pontos de Gauss, e a região de interesse (parte central do corpo) apresenta um refinamento maior da malha para melhor análise dos efeitos dos parâmetros elasto-plásticos implementado. Nesta região, encontram-se 12 elementos finitos ao longo da direção *Z* e 4 elementos ao longo da direção *X*.



**Figura 12 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova “*Borboleta*”. Liga de aço SAE1045.**

Com relação ao corpo de prova cilíndrico sem entalhe, a sua malha foi criada utilizando elementos finitos bidimensionais quadráticos de oito nós cada em uma estratégia de integração reduzida com quatro pontos de Gauss. Desta forma há um total de 1800 elementos e 5581 nós para este espécime cilíndrico sem entalhe. Devido à axisimetria dos problemas, apenas  $\frac{1}{4}$  dos corpos de

provas com essa geometria foram simulados envolvendo condições bidimensionais. A Figura (13) ilustra a malha de elementos finitos para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe, com detalhe para o refinamento em sua região mais crítica, onde há 30 elementos ao longo da direção  $X$ .



**Figura 13 - Malha de elementos finitos para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe. Liga de aço *SAE1045*.**

### **Procedimento de calibração e parâmetros materiais**

As calibrações dos modelos numéricos aqui propostos foram feitas através de simulações do clássico corpo de prova cilíndrico sem entalhe submetido à uma condição de carregamento de tração uniaxial. Sob essa condição de calibração, a curva de endurecimento do material,  $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$ , é determinada.

O procedimento para a determinação dos parâmetros materiais do aço *SAE1045* utiliza uma abordagem de otimização inversa, na qual um teste experimental para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe sujeito à tração uniaxial é tomado como referência no início do processo. Em sequência, o método de otimização inversa é empregado até que a curva força-deslocamento obtida numericamente seja a mais próxima possível da curva de reação obtida experimentalmente. Uma vez completa a otimização, o conjunto dos parâmetros materiais obtidos ao final desse processo são utilizados como parâmetros de entrada para os modelos constitutivos a serem simulados e analisados.

A Tabela 2, na página seguinte, apresenta os valores dos parâmetros materiais para a liga de aço *SAE1045*. A Figura 14, por sua vez, ilustra a curva de endurecimento numérica obtida para essa liga após o processo de calibração e otimização ter sido realizado.

Tabela 2 - Parâmetros materiais para Liga de aço *SAE1045*.

Descrição	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	$E$	220 [MPa]
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,33
Tensão de escoamento inicial	$\sigma_{y0}$	830 [MPa]
Expoente de Endurecimento Isotrópico	$n$	0,1
Módulo de Endurecimento Isotrópico	$H$	1128,9 [MPa]
Curva de Endurecimento Isotrópico	$\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$	$830 + 1128,9\bar{\epsilon}^{p0,1}$
Parâmetro Hosford	$n$	10
Parâmetros Gao et al.	$a$	0
	$b$	-60,75

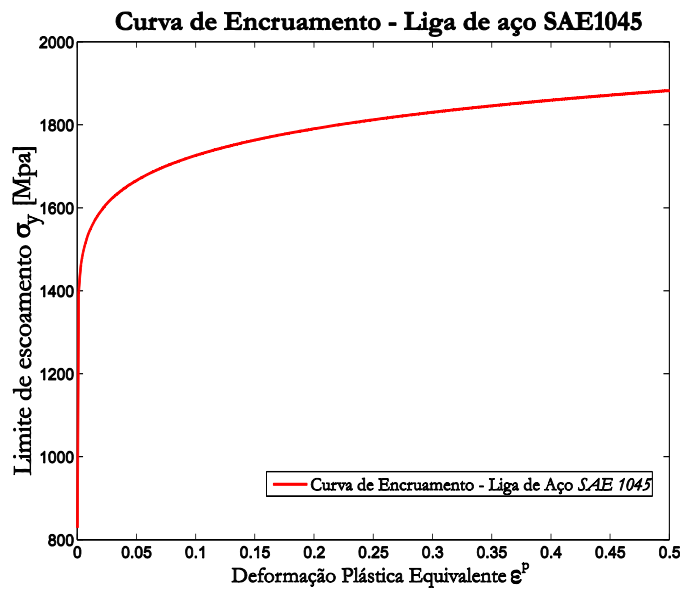


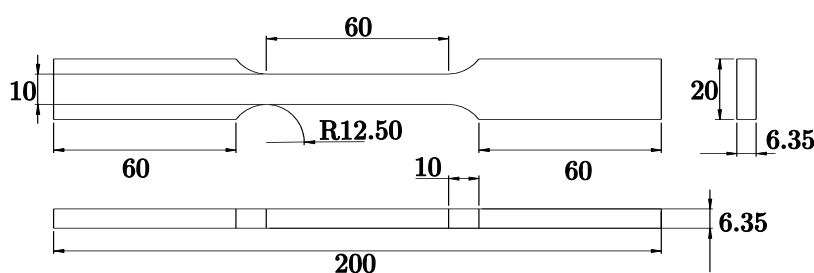
Figura 14 – Curva de Encruamento – Liga de aço *SAE1045*.

### 3.5.2 Liga de Alumínio Aeronáutico.

Para a segunda bateria de simulações numéricas, adotou-se a liga de alumínio aeronáutico, caracterizada no trabalho de Driemeier et al. (2010), como material constituinte dos corpos de prova. Assim como realizado na seção anterior para a liga de aço *SAE1045*, nos tópicos abaixo, apresenta-se de maneira análoga as geometrias e discretizações dos espécimes utilizados para essa liga de alumínio utilizado no setor aeroespacial, juntamente com o seu respectivo processo de calibração.

#### Geometria dos corpos de prova

Visando avaliar os modelos constitutivos de Hosford e de Gao et al. em uma larga faixa de triaxialidade, duas geometrias distintas para os corpos de provas simulados com a liga de alumínio aeronáutico foram definidas utilizando um perfil retangular com espessura de  $6,35\text{mm}$ . Para níveis médios e altos de triaxialidade, utilizou-se a geometria retangular lisa da Figura 15 em uma simulação sob condição de carregamento trativo uniaxial.



**Figura 15 - Geometria do corpo de prova retangular sem entalhe. Liga de Alumínio Aeronáutico.**

Para níveis mais baixos de triaxialidade, optou-se pelo corpo de prova apresentado na Figura 16. A geometria singular deste corpo de prova permite gerar um estado de tensão de cisalhamento puro em sua região de prova, quando submetido à tração uniaxial. Desta forma, é possível analisar a predição dos modelos estudados neste trabalho sob condições distintas de carregamentos e de materiais, uma vez que as formulações mais clássicas como von Mises (1913) e Tresca (1864) apresentam baixa precisão na previsão do comportamento mecânico de ligas materiais mais modernas.

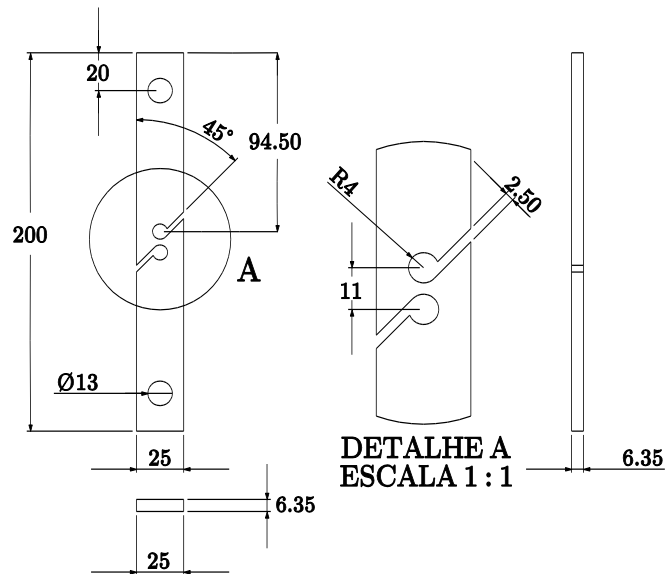


Figura 16 – Geometria do corpo de prova para simulação de cisalhamento puro. Liga de Alumínio Aeronáutico.

#### Discretização espacial dos corpos de provas.

Para a discretização do corpo de prova fabricado em liga de alumínio aeronáutico com geometria retangular lisa, definiu-se uma malha com elementos finitos tridimensionais lineares hexaédrico com oito nós cada sob integração reduzida com oito pontos de Gauss, totalizando 1840 elementos e 2376 nós, conforme apresentado na Figura 17 abaixo. Para o presente caso, devido à simetria do problema, apenas metade do corpo de prova é simulado, e uma discretização mais fina da malha é realizada na região esperada para a falha, com 10 elementos finitos ao longo da direção  $X$  e 8 ao longo de  $Z$ .

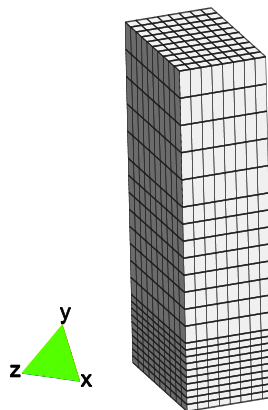
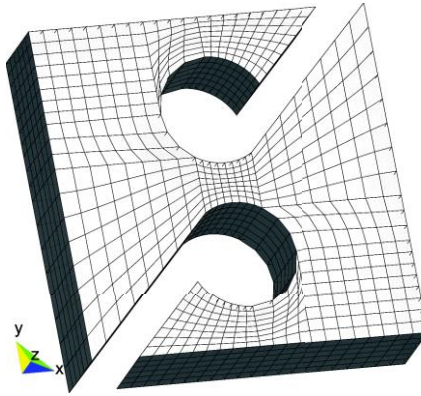


Figura 17 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular sem entalhe. Liga de Alumínio Aeronáutico.



Em seguida, para a geometria capaz de gerar um estado de tensão cisalhante puro em um ensaio de tração uniaxial, criou-se uma malha utilizando elementos finitos tridimensionais quadráticos hexaédrico com vinte nós cada, com um total de 3456 elementos e 17165 nós, também em uma estratégia de integração reduzida com oito pontos de Gauss. A Figura 18 apresenta tal discretização em detalhes, onde a zona potencial para a falha apresenta 8 elementos finitos ao longo da direção  $X$  e 6 elementos ao longo de  $Z$ .



**Figura 18 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o espécime de cisalhamento. Liga de Alumínio Aeronáutico.**

### **Procedimento de calibração e parâmetros materiais**

Considerando a Liga de alumínio aeronáutico, fez-se um procedimento de calibração correspondente ao realizado para a liga de aço *SAE1045* e apresentado na seção anterior. Ao final deste processo, foram obtidos os parâmetros materiais apresentados na Tabela 3 e a curva de encruamento apresentada nas Figura 19.

Tabela 3 - Parâmetros materiais para a liga de Alumínio Aeronáutico.

Descrição	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	$E$	65,00 [MPa]
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.3
Tensão de escoamento inicial	$\sigma_{y0}$	420 [MPa]
Expoente de Endurecimento Isotrópico	$n$	0,115
Módulo de Endurecimento Isotrópico	$H$	1383,58 [MPa]
Curva de Endurecimento Isotrópico	$\sigma_y(\varepsilon^p)$	$420 + 1383,58\varepsilon^p{}^{0,115}$
Parâmetro Hosford	$n$	10
Parâmetros Gao et al.	$a$	0
	$b$	-60,75

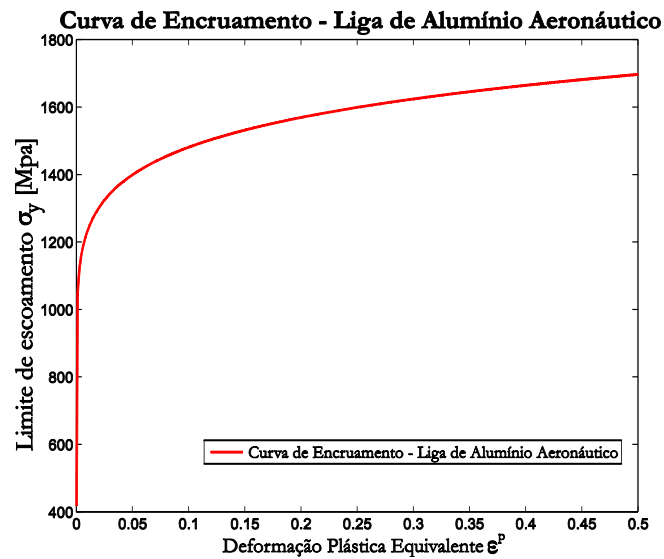


Figura 19 – Curva de Encruamento – Alumínio Aeronáutico.

## 3.6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresenta-se nesta seção do Capítulo 3 os resultados obtidos na análise do tamanho, formato e convexidade das superfícies de escoamento obtidas a partir dos critérios estudados neste trabalho, Hosford (1972) e Gao et al. (2011), considerando diferentes valores para os seus parâmetros  $h$  (Hosford) e  $a$  e  $b$  (Gao et al.). Em seguida, faz-se uma investigação desses modelos, em diferentes configurações, quanto as suas capacidades em descrever o comportamento elasto-plástico das ligas de aço *SAE1045* (Bai, 2008) e alumínio aeronáutico (Driemeier et al, 2010) sob condições de tração uniaxial e cisalhamento puro.

### 3.6.1 Análise de Convexidade

Para o estudo das superfícies de escoamento obtidas com os critérios propostos por Hosford (1972) e Gao et al. (2011), o modelo matemático apresentado no Quadro 1 foi implementado em uma rotina em *Matlab*. Com relação ao modelo de Hosford, adotou-se nesta análise valores para o seu parâmetro iguais a: *i)*  $h = 1$ , na qual este critério é capaz de recuperar a formulação matemática para descrição do início do escoamento plástico proposta em 1864 por Tresca, baseada na máxima tensão cisalhante; *ii)*  $h = 2$ , desta forma, a tensão efetiva generalizada de Hosford se resume à tensão equivalente de von Mises em termos das tensões principais, representado a magnitude to tensor das tensões desviadores, e que fisicamente representa a tensão cisalhante máxima nos planos octaédricos/máxima energia elástica de distorção (Nadai, 1937; Hencky 1924); *iii)*  $h = 12$ , na qual este critério apresenta um comportamento intermediário às proposições de von Mises (1913) e Tresca (1864); e *iv)*  $h = 100$ , conforme  $h$  tende a  $\infty$ , a formulação de Hosford se aproxima do critério de Tresca, contudo, na formulação de Hosford não há problemas com singularidades nos vértices da superfície hexagonal.

O modelo de Gao et al., por sua vez, foi analisando considerando três combinações distintas para os parâmetros de sua tensão equivalente: *i)*  $a = b = 0$ , nesta configuração particular, o proposição de Gao et al. depende apenas do efeito do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras ( $J_2$ ), e se resume a formulação de von Mises em termos desse invariante; *ii)*  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , os valores adotados nesta segunda configuração foram extraídos do trabalho de Gao et al. (2011). Para valores de  $b$  não nulos, há a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor desviador ( $J_3$ ) e com isso há uma alteração no formato da superfície de escoamento (ver Bai, 2008); *iii)* na última combinação, adotou-se  $a = 0$  e  $b = -110$  para analisar o impacto de uma dependência mais severa do  $J_3$ .

As Figuras 20, 21 e 22 apresentam as superfícies de escoamento obtidas pela projeção dos envelopes de falha no plano das tensões principais com  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  e  $\sigma_3 = 0$  e normalizadas em relação à tensão de escoamento do material. Desta forma, o envelope de falha de von Mises caracterizado por um volume cilíndrico, é representado como uma elipse de cor azul nas figuras subsequentes. O prisma hexagonal do critério de Tresca, por sua vez, se resume à uma superfície hexaédrica neste plano de análise (representado pela coloração verde).

A primeira das Figuras desta análise (Figura 20) apresenta o comparativo entre as diferentes configurações propostas para o modelo de Hosford. Ao se analisar a Figura 20, é possível observar que a adoção de  $h = 12$  gera uma superfície intermediária (em preto) às superfícies de von Mises ( $h = 2$ , em azul e mais otimista) e Tresca ( $h \rightarrow \infty$ , em verde e mais conservativa). Por outro lado,  $h = 100$  produz uma superfície muito próxima a de Tresca, assumindo desta forma um comportamento mais conservativo para o modelo. Ressalta-se ao fim da avaliação do modelo de Hosford que a sua superfície é sempre convexa, e desta forma, não apresenta problemas para a convergência dentro do algoritmo de retorno proposto para este modelo.

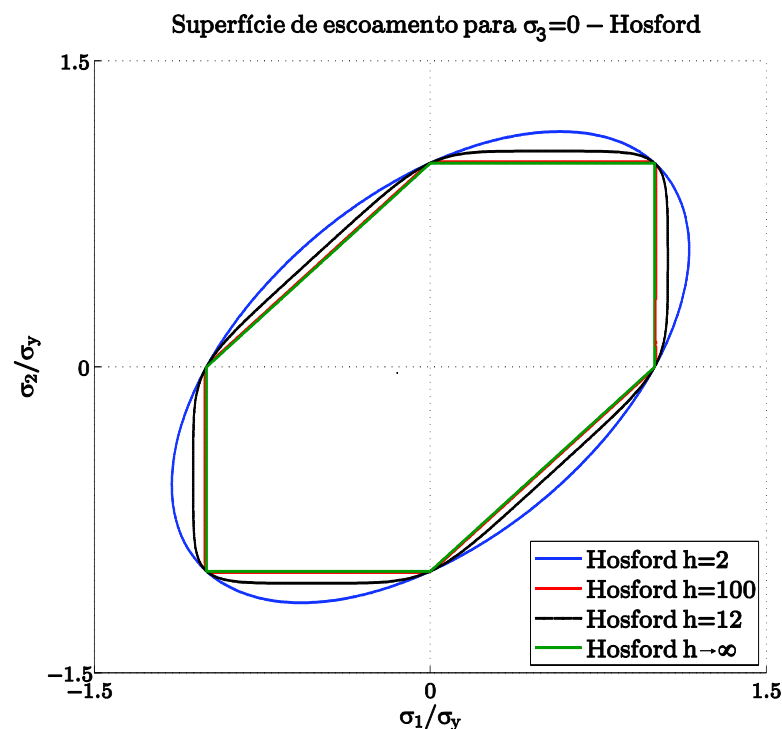


Figura 20 – Análise de Convexidade da Superfície de Escoamento de Hosford (1972).

Na Figura 21 são apresentadas as superfícies de escoamento obtidas nas três configurações distintas propostas para o critério de Gao et al.. Mais uma vez fica claro a capacidade desses modelos em recuperar a formulação clássica de von Mises, atingida pelo modelo de Gao et al. ao se adotar  $a = b = 0$  (ilustrado na figura pela curva em azul). A curva em preto na Figura 21 representa a segunda configuração realizada para o critério de Gao et al. com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , conforme a sua publicação de 2011. É possível observar que a introdução do  $J_3$  altera o formato da superfície de escoamento e a torna mais conservativa. Conforme a magnitude de  $b$  é aumentada, altera-se cada vez mais o formato da superfície de escoamento, tornando-a cada vez mais conservativa em condições em que há componentes de cisalhamento, aproximando, assim, o seu comportamento da formulação de Tresca. Contudo, as superfícies de escoamento sempre se igualam nas condições de tração pura. Com relação a convexidade das superfícies de escoamento, observa-se que para magnitudes mais elevadas de  $b$  a superfície passa a ser não convexa. A não-convexidade pode causar dissipação negativa de energia para os materiais dúcteis aqui estudados (Hill, 1998), uma consequência numérica da não-convexidade pode ser a não convergência do algoritmo de atualização implícito baseado no método do ponto mais próximo, utilizado neste trabalho e apresentado pelo Quadro 2 (Souza Neto et al., 2008). A superfície em vermelho, ilustrada na Figura 21 para a configuração de Gao et al. com  $b = -110$ , é não convexa.

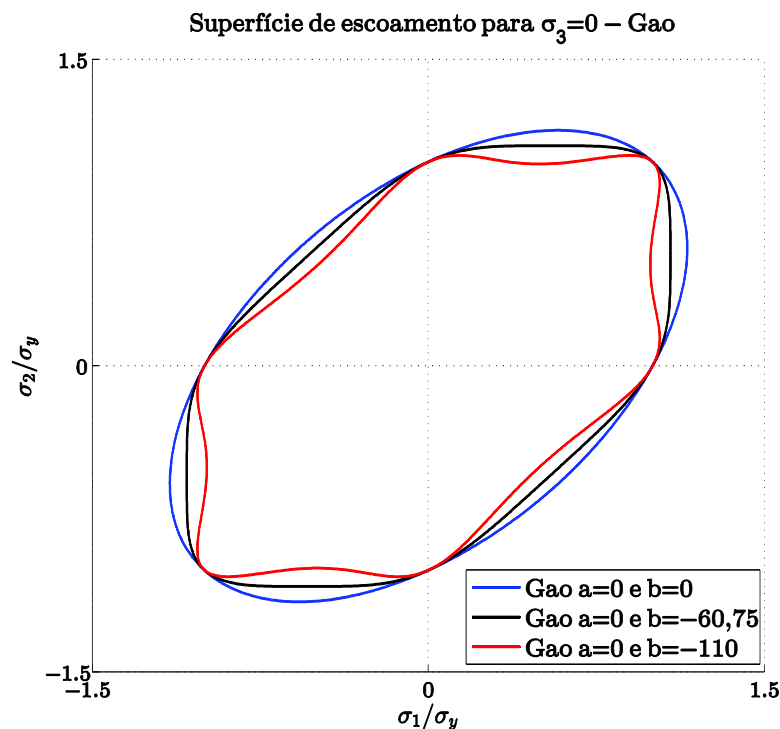
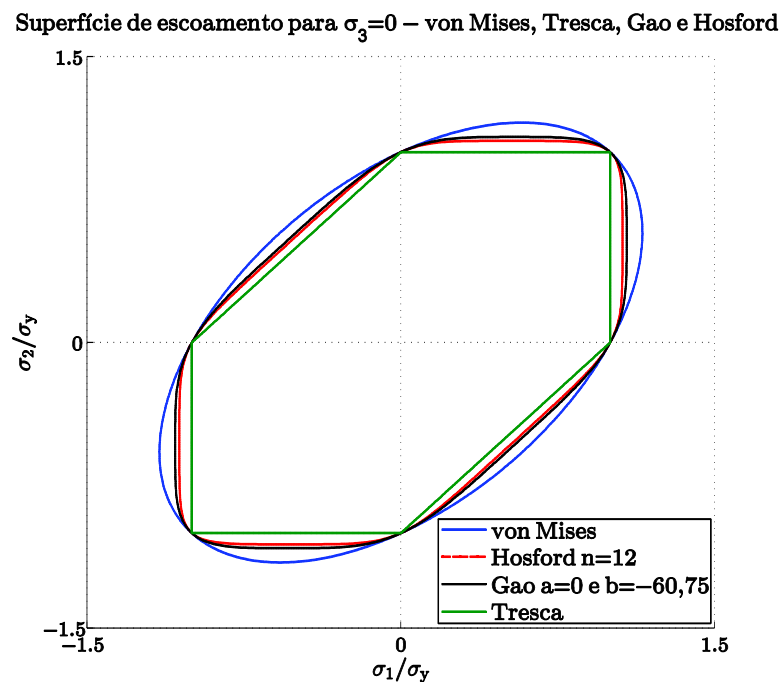


Figura 21 – Análise de Convexidade da Superfície de Escoamento de Gao et al. (2011).

Por fim, fez-se uma análise comparativa entre as superfícies de escoamento de von Mises (1913), Tresca (1864), Hosford (1972) para  $h = 12$  e Gao et al. (2011) com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , configuração na qual a sua superfície de escoamento é convexa. O resultado deste estudo é ilustrado na Figura 22, na qual a superfície de von Mises (em azul) é a mais otimista e a de Tresca (em verde) a mais conservativa. Observa-se que para  $h = 12$ ,  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , as superfícies dos modelos de Hosford (em vermelho) e Gao et al. (em preto) apresentam comportamentos muito próximos, encontrando-se entre as superfícies de von Mises e Tresca, com a superfície de Hosford ligeiramente mais conservativa.



**Figura 22 – Análise comparativa entre as superfícies de escoamento de von Mises (1913), Tresca (1864), Hosford (1972) e Gao et al. (2011).**

Conforme já apresentado na revisão teórica deste trabalho, as ligas materiais mais modernas tendem a apresentar um comportamento elasto-plástico que se encontra entre as descrições propostas por von Mises (1913) e por Tresca (1964). Desta forma, uma melhor descrição do comportamento mecânico dos materiais é esperado para as formulações de Hosford (1972) e Gao et al. (2011), a seção seguinte deste trabalho apresenta a avaliação das curvas de reação Força  $v/s$ . Deslocamento obtidas por esse modelos com relação às ligas de aço *SAE1045* e a liga de alumínio aeronáutico.

### 3.6.2 Análise das Curvas de Reação e Evolução da $\bar{\epsilon}^p$

Apresenta-se nesta seção as curvas de reação Força *vs.* Deslocamento e as curvas de evolução da deformação plástica acumulada como os resultados obtidos pela simulação dos modelos constitutivos de Hosford considerando  $h = 12$  e  $h = 18$ , e de Gao et al. para  $a = 0$ ,  $b = -60,75$  e  $b = -80$ . Como já apresentado anteriormente neste capítulo, para as baterias de ensaios com a liga de aço *SAE1045* (Bai, 2008), optou-se pelos corpos de prova cilíndrico sem entalhe e “*Borboleta*”. Para a liga de alumínio aeronáutico, as simulações foram realizadas considerando os espécimes retangular sem entalhe e a geometria particular para simulação de cisalhamento puro.

#### Liga de aço *SAE1045*

Inicialmente, as simulações numéricas foram realizadas utilizando a liga de ferrosa *SAE1045*. A Figura 23 ilustra a curva de reação Força *vs.* Deslocamento obtida pela simulação do corpo de prova cilíndrico sem entalhe. Nesta imagem, os pontos representados em preto se referem aos resultados obtidos experimentalmente, a curva azul com o marcador circular representa a curva obtida pelo modelo constitutivo de von Mises recuperado através da simulação do modelo de Gao et al. com  $a = b = 0$ . A curva tracejada em vermelho com o marcador losangular representa o modelo de Gao et al. na configuração adotada para as análises dos indicadores de fratura do Capítulo 4 com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Por último, a curva em cinza com marcadores em pentagrama ilustra o comportamento apresentado pelo modelo de Hosford com  $h = 12$ .

Por ser a condição na qual todos os modelos constitutivos foram calibrados, e a situação na qual há uma baixa dependência do terceiro invariante do tensor desviador, é facilmente observador na Figura 23 que os três modelos em questão (von Mises, Hosford e Gao et al.) apresentaram um comportamento elasto-plástico extremamente similar, com ótima correlação com os dados experimentais.

A Figura 24 da página seguinte, posicionada estrategicamente abaixo das curvas de reação obtidas pela simulação do corpo de prova cilíndrico sem entalhe em aço *SAE1045* (Figura 23), apresenta a evolução da deformação plástica acumulada obtida ao final desta mesma simulação. Diferentemente do observado nas curvas de reação da Figura 23, o efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadores têm a sua influência apresentada mais claramente na evolução da deformação plástica acumulada (faixa cinza na Figura 24), impondo uma maior taxa de crescimento da deformação plástica acumulada para as formulações de Hosford e Gao et al..

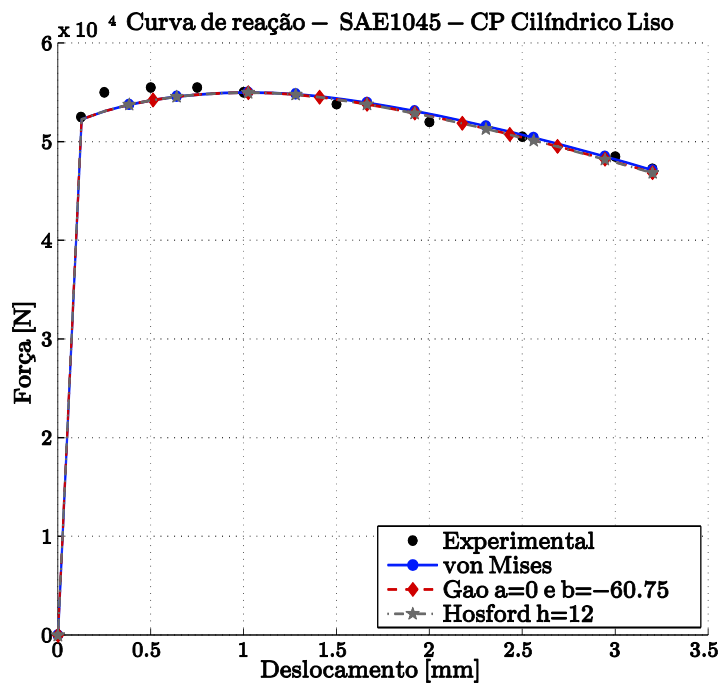


Figura 23 – Curva de reação para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe em liga de aço SAE1045.

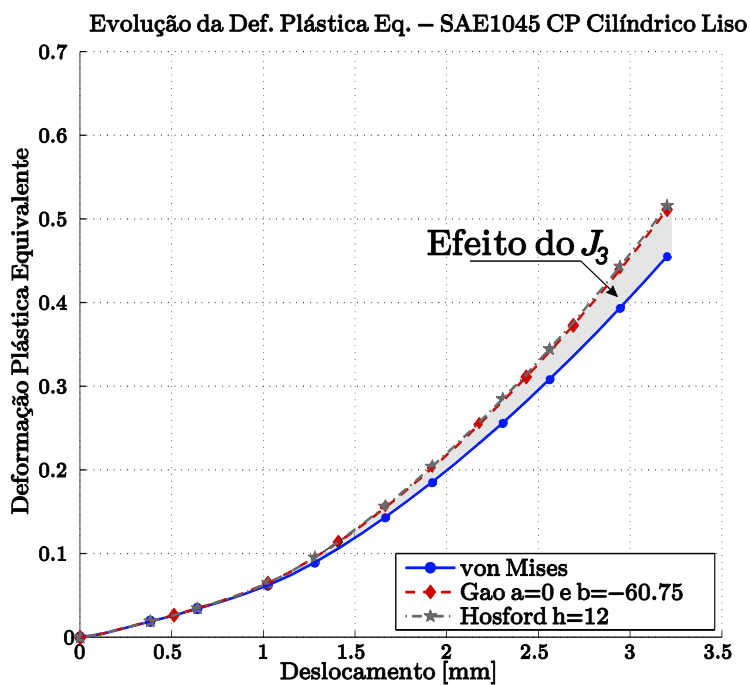


Figura 24 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova cilíndrico sem entalhe em liga de aço SAE1045.



Para a avaliação dos modelos constitutivos de Gao et al. e Hosford em uma solicitação de cisalhamento puro, simulações com o corpo de prova “*Borboleta*” em aço *SAE1045* foram realizadas. As curvas de reação obtidas são apresentadas nas Figuras 25, 26 e 27, de maneira análoga ao realizado para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe. A primeira dessas três imagens (Figura 25) ilustra o comportamento elasto-plástico apresentado pelo modelo de Hosford com  $h = 12$  (curva em vermelho com marcador losangular) em comparação com os resultados experimentais (pontos em preto) e a curva de reação obtida pelo modelo de von Mises (Gao et al. com  $a = b = 0$ ) para a solicitação cisalhante. Nesta situação há uma grande dependência do parâmetro elastoplástico  $J_3$  para a precisa descrição do comportamento mecânico do material, neste sentido, a formulação clássica de von Mises (insensível a tal efeito) apresenta um grande erro quando comparada à resposta experimental. Nesta mesma figura, o efeito do terceiro invariante do tensor desviador é realçado pela faixa cinza entre as curvas de von Mises e Hosford, a qual praticamente coincide com todos os pontos da resposta experimental.

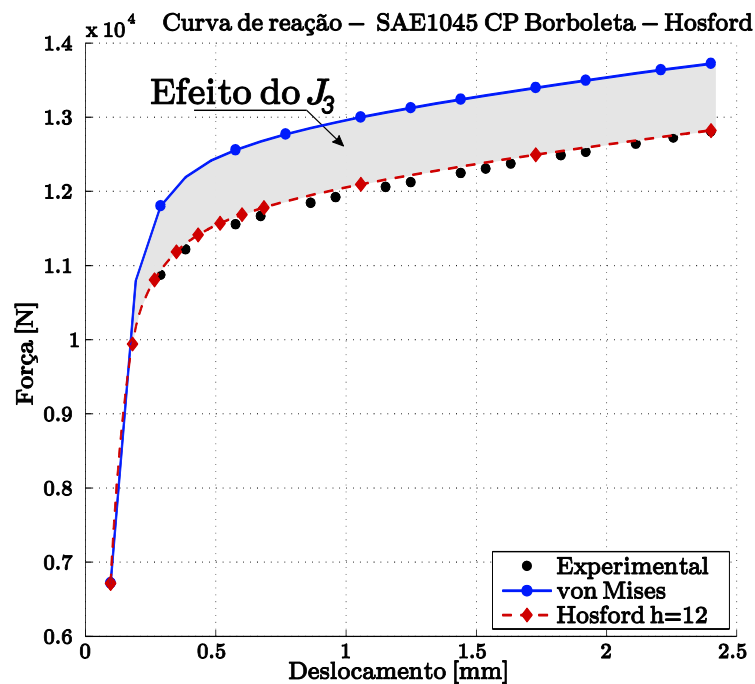


Figura 25 – Curva de reação para o corpo de prova “*Borboleta*” em liga de aço *SAE1045*, avaliação do modelo de Hosford (1972) com  $h = 12$ .

Em seguida, para a análise do comportamento elasto-plástico descrito pelo o modelo de Gao et al. nas configurações: *i*)  $a = b = 0$  (von Mises); *ii*)  $a = 0$  e  $b = -60,75$ ; e *iii*)  $a = 0$  e  $b = -80$ , foram obtidas as curvas de reação para a solitação cisalhante ilustradas na Figura 26 abaixo. Em todas as formulações desse modelo, como  $a$  é sempre nulo, não há a presença do efeito da tensão hidrostática. Contudo ao se utilizar  $b \neq 0$ , faz-se a introdução do efeito do  $J_3$  (proporcional a magnitude de  $b$ ), representado na Figura 26 pela faixa cinza entre as curvas de von Mises (em azul) e Gao et al. com  $a = 0$  e  $b = -60,75$  (em vermelho).

Como é possível constatar pela análise da Figura 26, há um aumento da dependência do  $J_3$ , e conseqüentemente, da precisão na descrição do comportamento do material, na medida em que o valor de  $b$  teve a sua magnitude aumentada. Porém, recapitulando o apresentado na seção anterior a respeito da análise da convexidade das superfícies de escoamento, para magnitudes muito elevadas de  $b$  a superfície de escoamento de Gao et al. passa a ser não convexa e, desta forma, apresenta problemas na convergência dentro do algoritmo de retorno para atualização das variáveis do problema. A curva em cinza com marcadores em pentagrama ilustra o comportamento obtido pelo modelo de Gao et al. na configuração com  $b = -80$ , na qual o comportamento prescrito pela formulação se aproxima em muito da resposta experimental, porém a sua superfície de escoamento passa a ser não convexa e simulação numérica do modelo constitutivo nesta configuração não atinge o deslocamento experimental crítico devido à problemas de convergência, conforme apontado na Figura 26.

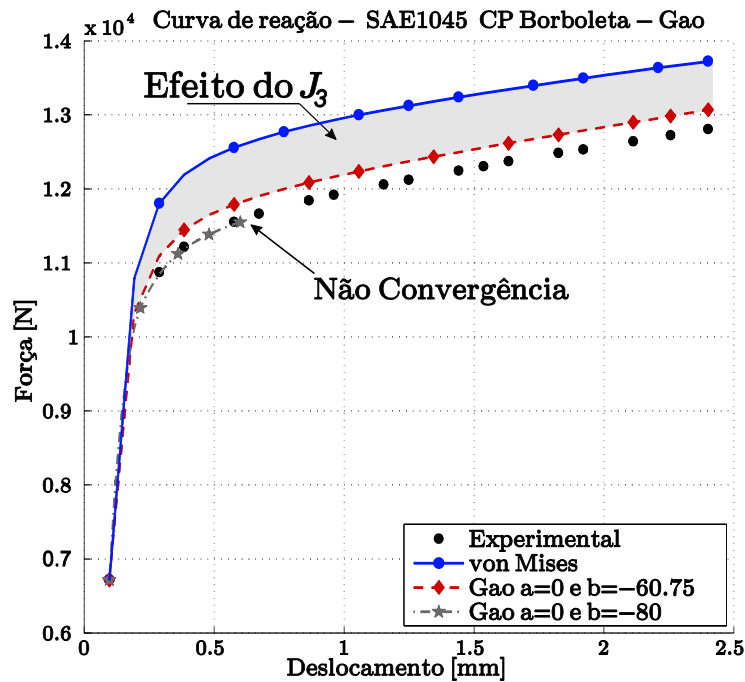


Figura 26 – Curva de reação para o corpo de prova “Borboleta” em liga de aço SAE1045, avaliação do modelo de Gao et al. (2011) com: 1)  $a = 0$  e  $b = -60,75$  e 2)  $a = 0$  e  $b = -80$ .

Por fim, as Figuras 27 e 28 apresentam, respectivamente, as curvas de reação Força *vs* Deslocamento e evolução da deformação plástica acumulada para a análise comparativa entre os modelos de von Mises (Gao et al. com  $a = b = 0$ ), Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , e Hosford adotando  $h = 18$ , ao se considerar a simulação numérica com o corpo de prova “Borboleta”.

Os preenchimentos em cinza claro e cinza mais escuro nas Figuras 27 e 28 procuram representar o ganho na precisão para a descrição do comportamento elasto-plástico do material obtido através da introdução do parâmetro  $J_3$  na formulação dos modelos constitutivos. A área em cinza mais escuro representa o efeito do  $J_3$  obtido na formulação de Gao et al. (curva em vermelho) ao se utilizar  $b = -60,75$ , por outro lado, o efeito introduzido pela adoção de  $h = 18$  na formulação de Hosford (curva em cinza) é dado pela área preenchida pelas duas tonalidades de cinza, quando comparados com a formulação de von Mises (curva em azul) que é independente de tal parâmetro elasto-plástico. De maneira análoga, o efeito do terceiro invariante do tensor desviador é apresentado na curvas de evolução da deformação plástica acumulada ilustradas na Figura 28, na qual, diferentemente do observado para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe, o efeito do terceiro invariante desacelera a evolução da deformação plástica acumulada.

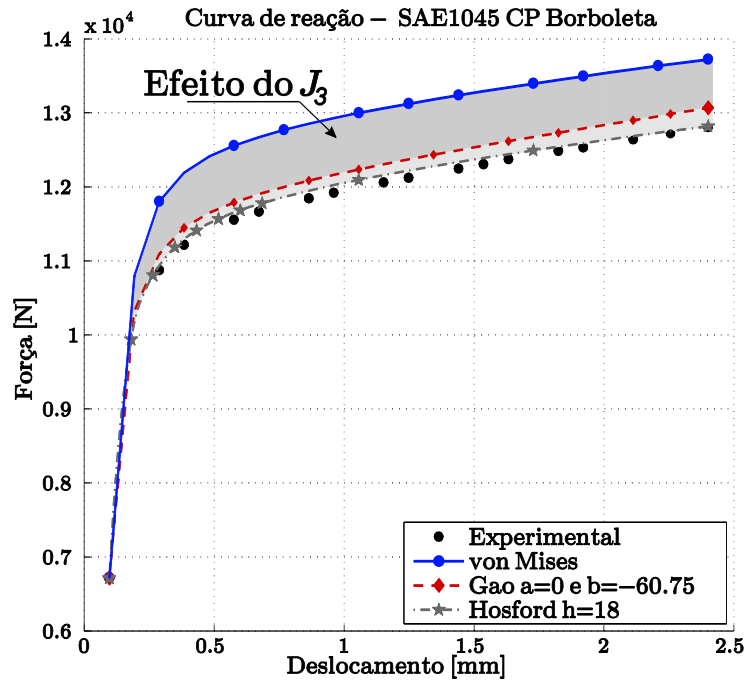


Figura 27– Curva de reação para o corpo de prova “Borboleta” em liga de aço SAE1045, avaliação comparativa entre os modelo de Hosford (1972) com  $h = 18$  e Gao et al. (2011) com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

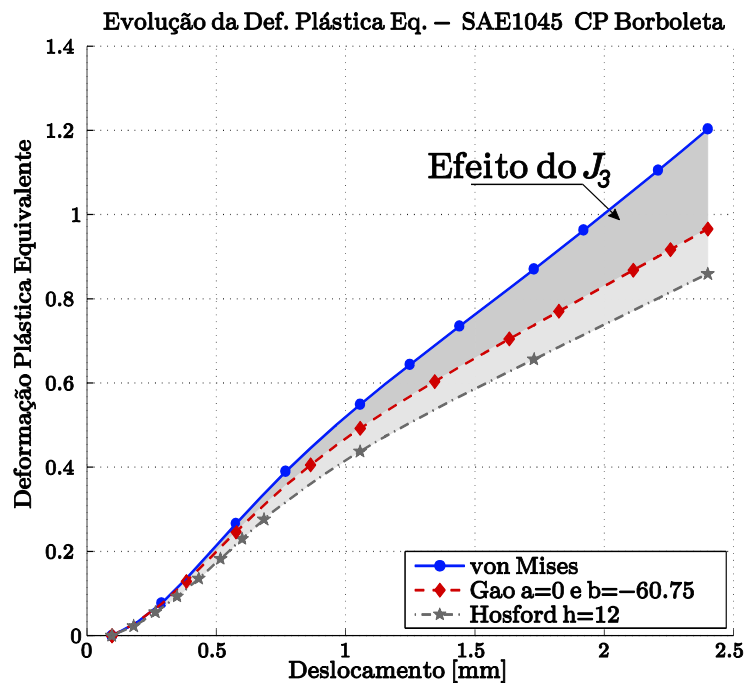


Figura 28 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova “Borboleta” em liga de aço SAE1045.

## Liga de Alumínio Aeronáutico

O presente tópico apresenta os resultados obtidos através da simulação dos corpos de prova retangular sem entalhe e espécime para cisalhamento puro considerando a liga de alumínio aeronáutico (Driemeier et al., 2010), de maneira semelhante ao realizado no tópico anterior para a liga ferrosa.

A Figura 29 abaixo apresenta a curva de reação Força  $\times$  Deslocamento obtida pela simulação numérica do corpo de prova retangular sem entalhe, segundo os modelos constitutivos de Gao et al. nas configurações  $a = b = 0$  (von Mises) e  $a = 0$  e  $b = -60,75$  e de Hosford com  $h = 12$ . Por essa ser a condição de calibração dos modelos na liga aeronáutica, todos os modelos apresentaram uma excelente correlação com os resultados experimentais representados por meio de pontos em preto na Figura 29, semelhante ao observado na Figura 23 para esse modelos com a liga de aço *SAE1045*.

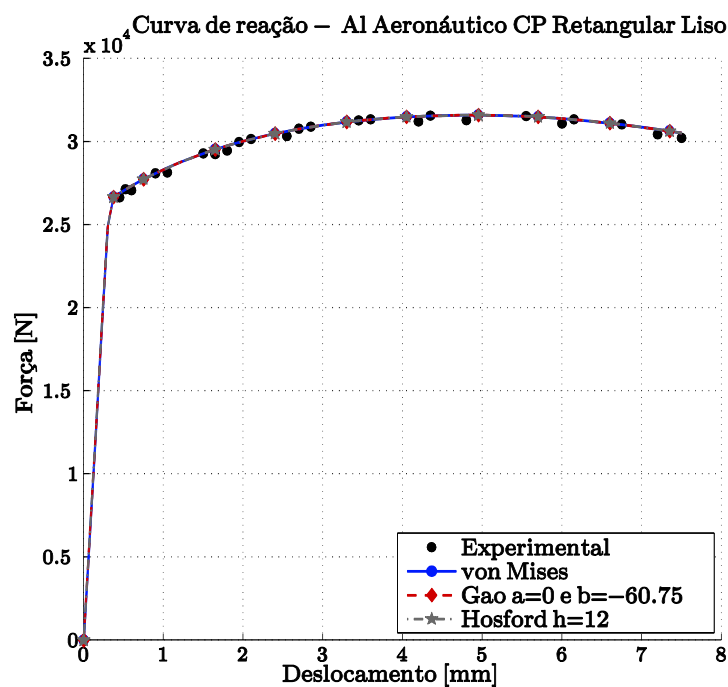
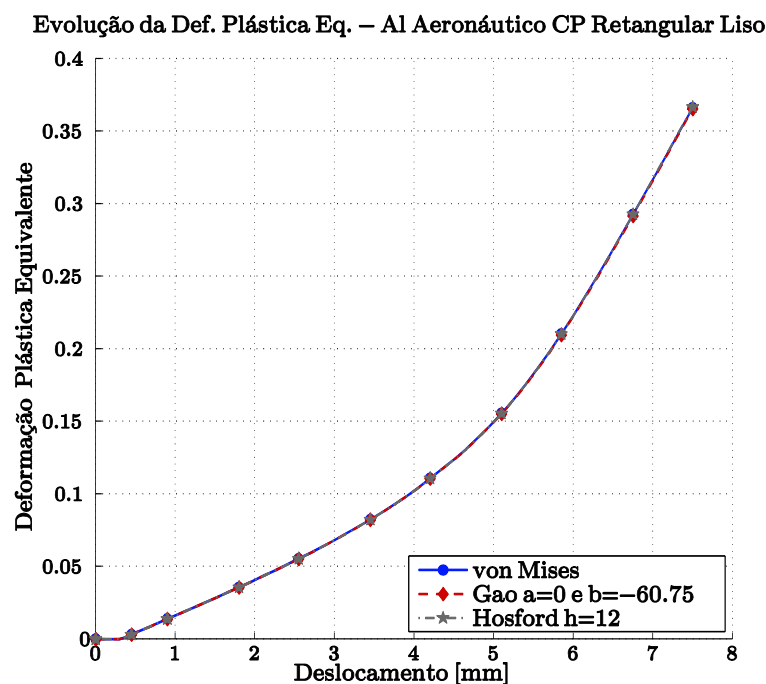


Figura 29 – Curva de reação para o corpo de prova retangular sem entalhe em liga de alumínio aeronáutico.

Em posse dos resultados extraídos da simulação do corpo de prova retangular sem entalhe, fez-se a análise da evolução da deformação plástica acumulada, considerando cada um dos três modelos: von Mises, Gao et al. ( $a = 0$  e  $b = -60,75$ ) e Hosford ( $h = 12$ ) e o resultado obtido foi idêntico para as três considerações, conforme aponta a Figura 30.



**Figura 30 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova retangular sem entalhe em liga de alumínio aeronáutico.**

Em seguida, partiu-se para a análise de cada um dos modelos, Hosford e Gao et al., de maneira isolada. A Figura 31 apresenta o comportamento do modelo de Hosford em duas configurações distintas, com  $h = 12$  e  $h = 18$ . Quanto maior a magnitude de  $h$ , maior é a modificação do formato da superfície de escoamento de Hosford devido ao efeito do  $J_3$ , a qual passa a se aproximar mais do comportamento conservativo apresentado pela superfície de Tresca. Tal fenômeno ocorre pois conforme  $h \rightarrow \infty$ , a formulação de Hosford é capaz de resgatar a superfície de escoamento de Tresca que apresenta uma melhor descrição do comportamento elasto-plástico em condições de cisalhamento puro, quando comparada à formulação de von Mises que é extremamente otimista nestas condições.

A área em cinza escuro na Figura 31 representa o efeito do  $J_3$  na formulação de Hosford com  $h = 12$  (curva em vermelho) e o ganho na precisão obtido com relação à formulação de von Mises. Por outro lado, para  $h = 18$ , o efeito do terceiro invariante é dado pela área preenchida em cinza escuro e também pela área em tonalidade de cinza mais claro. Ao se optar por um valor mais alto para o parâmetro  $h$ , houve uma melhor correlação com os dados experimentais, de maneira que a curva de Hosford em cinza com pentagramas ( $h = 18$ ) praticamente em coincidiu com todos os pontos da resposta experimental.

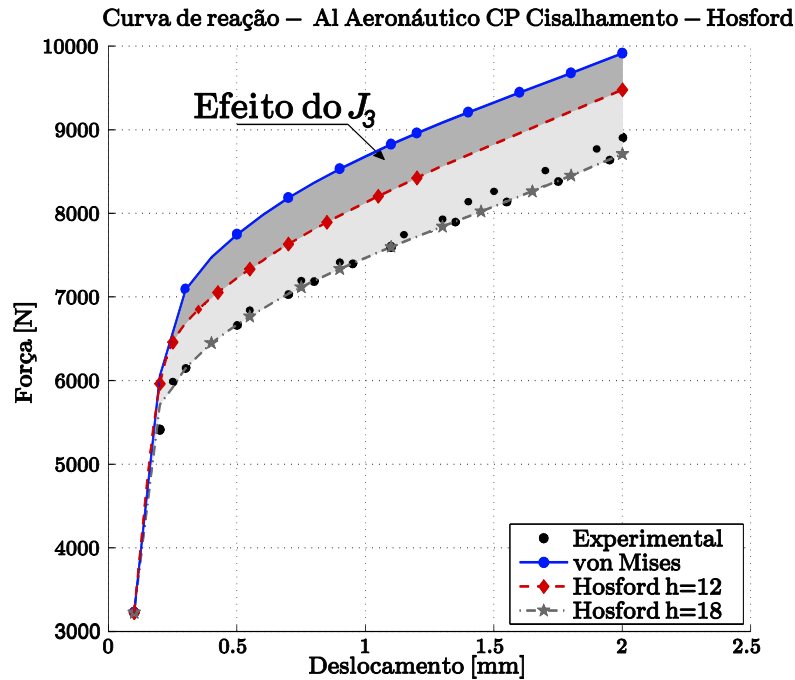


Figura 31 – Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação do modelo de Hosford (1972) com  $h = 12$  e  $h = 18$ .

A análise ilustrada na Figura 32 se refere aos resultados obtidos pela simulação do corpo de prova de cisalhamento através do modelo constitutivo de Gao et al., onde mais uma vez se optou pelas configurações com: 1)  $a = 0$  e  $b = -60,75$  (curva em vermelho) e 2)  $a = 0$  e  $b = -80$  (curva em cinza). O mesmo efeito observado na análise do corpo de prova para solicitação cisalhante com a liga de aço *SAE1045* (Figura 26) se apresenta na análise análoga com a liga de alumínio aeronáutico, na qual também houve um ganho na precisão da descrição do comportamento elasto-plástico do material com a adoção de  $b = -60,75$ . Contudo, ao se adotar novamente  $b = -80$ , a não convexidade da superfície de Gao et al. obtida nessa configuração não permitiu a convergência do algoritmo de retorno, e assim, a simulação numérica não pôde atingir o deslocamento experimental prescrito, encerrando os seus cálculos antes do instante esperado para a fratura do espécime em questão.

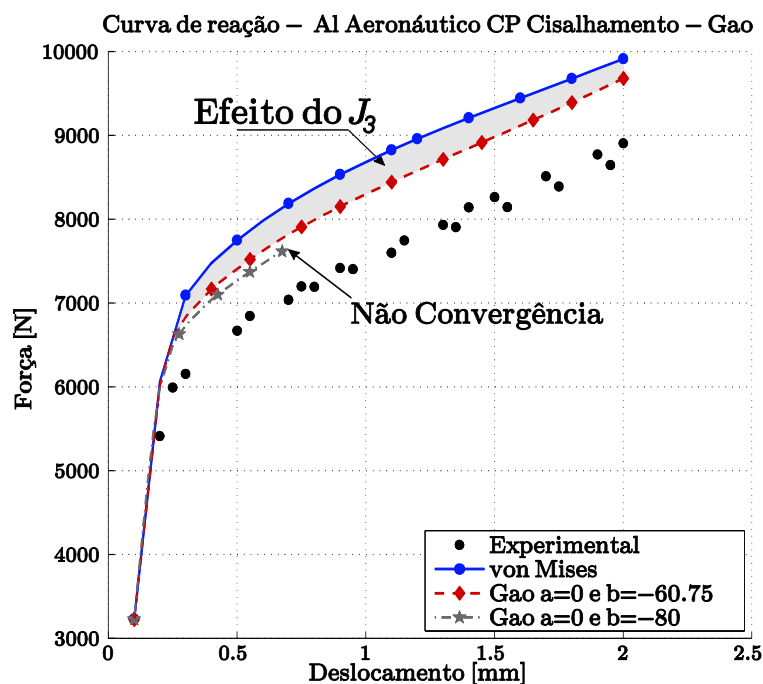


Figura 32 – Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação do modelo de Gao et al. (2011) com: 1)  $a = 0$  e  $b = -60,75$  e 2)  $a = 0$  e  $b = -80$ .

Encerrando este tópico de análise da liga aeronáutica, apresenta-se as Figuras 33 e 34 com as curvas de reação e evolução da deformação plástica acumulada, respectivamente, conforme os resultados obtidos pelos modelos de von Mises, Gao et al. na configuração com  $a = 0$  e  $b = -60,75$  e Hosford considerando  $h = 18$ . Embora o modelo de Gao et al. com  $b = -60,75$  (curva em vermelho) tenha conseguido corrigir em parte o comportamento otimista apresentado pelo modelo de von Mises em solicitações cisalhantes, a sua resposta, ainda assim, apresentou um erro considerável em relação ao resultado experimental. O comportamento apresentado pelo modelo de Hosford com  $h = 18$ , por sua vez, foi o que apresentou a melhor correlação com os dados experimentais, como pode ser observado pela sua curva de reação em cinza coincidindo com os pontos obtidos no ensaio experimental desse corpo de prova na Figura 33.

Por fim, considerando a evolução da deformação plástica acumulada apresentada na Figura 34, o modelo de Hosford ( $h = 18$ ) apresentou a maior taxa de evolução enquanto o modelo de von Mises (curva em azul) foi o que apresentou a menor taxa. Esse comportamento é antagônico ao observado no ensaio de cisalhamento para a liga de aço *SAE1045*, no qual o modelo de von Mises apresentou as maiores taxas e a formulação de Hosford as menores.



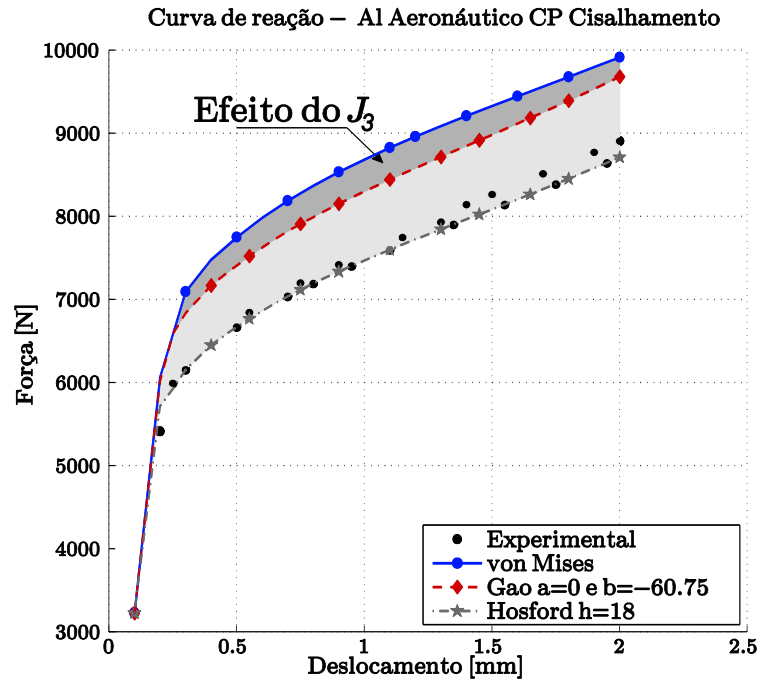


Figura 33– Curva de reação para o corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico, avaliação comparativa entre os modelo de Hosford (1972) com  $h = 18$  e Gao et al. (2011) com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

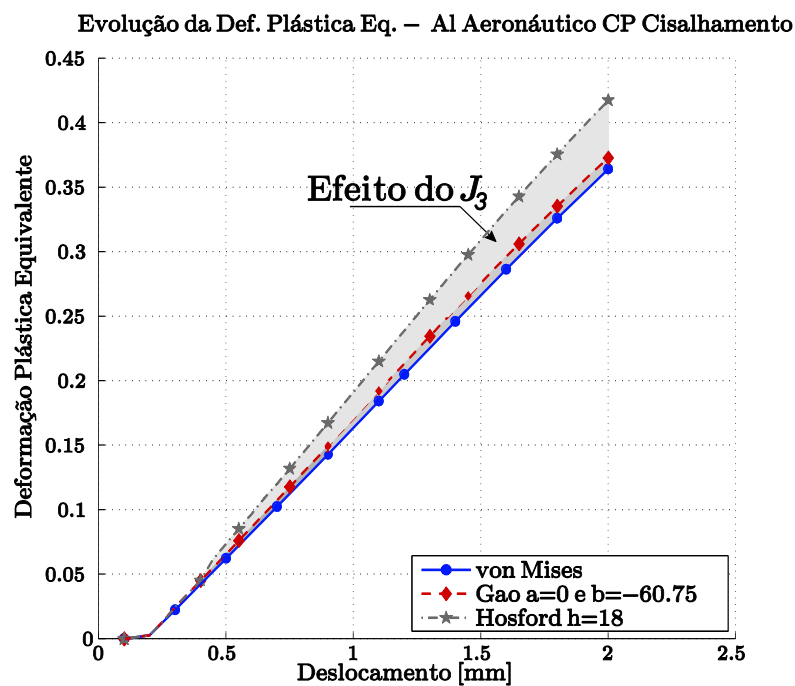


Figura 34 – Evolução da deformação plástica acumulada, corpo de prova de cisalhamento puro em liga de alumínio aeronáutico.

### 3.7 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentadas as formulações matemáticas de Hosford e Gao et al., que têm como base a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras na lei de fluxo plástico do material. Além disso, propôs-se a implementação numérica dos modelos elasto-plástico, com base na metodologia de decomposição do operador. Para cada um desses modelos foi deduzido um sistema linear de oito equações para um problema em três dimensões e seis equações para duas dimensões, tendo como variáveis o tensor tensão ( $\sigma_{n+1}$ ), a deformação plástica acumulada ( $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ ) e o multiplicador plástico ( $\Delta\gamma$ ).

Analisou-se inicialmente o formato das superfícies de escoamento dos modelos em estudo, onde para o modelo de Tresca, observou-se uma superfície hexagonal com singularidades nos vértices e mais conservativa em relação à de von Mises, representada por uma elipse. Para o modelo de Hosford, observou-se que quando  $n = 2$ , o modelo resgata a superfície de von Mises e para  $h \rightarrow \infty$ , o modelo se reduz à superfície de Tresca, contudo pode-se ajustar o critério de escoamento através dos valores de  $h$  a fim de se obter uma superfície de escoamento intermediária a esses outros dois modelos (Tresca e von Mises).

O modelo de Gao et al., por sua vez, também torna possível o resgate do modelo de von Mises, contudo quando seus parâmetros materiais são ajustados, introduz-se o efeito do terceiro invariante e se obtém uma superfície de escoamento mais conservativa e similar à de Tresca, porém não há a presença das singularidades nos vértices apresentadas por esta última formulação. Contudo, observa-se que dependendo da magnitude adotada para  $b$ , a superfície de escoamento de Gao et al. pode se tornar não convexa e apresentar sérios problemas de convergência dentro do algoritmo de retorno para atualização das variáveis do problema.

A análise das curvas de reação Força vs Deslocamento mostraram mais uma vez que o modelo constitutivo de von Mises é o mais otimista entre os estudados, apresentado grande disparidade entre os resultados obtidos pela sua simulação numérica e os resultados experimentais. Por outro lado, o modelo que apresentou os melhores resultados e curvas de reação mais próximas às experimentais foi a formulação de Hosford, mesmo com uma superfície de escoamento muito próxima à apresentada pelo modelo de Gao et al., a predição do comportamento mecânico realizada pelo modelo de Hosford chegou a apresentar erros menores do que o apresentado pelo modelo de Gao et al. para as simulações sob carregamento cisalhante. Contudo é importante mencionar que a resposta desses modelos podem ser melhoradas através da otimização de seus parâmetros.

Com relação à análise da deformação plástica acumulada, o modelo de von Mises apresentou a maior taxa de crescimento na condição de análise sob cisalhamento do corpo de prova “*Borboleta*” da liga de aço *SAE1045*. Nas simulações dos corpos de prova cilíndrico sem entalhe em aço *SAE1045* e espécime para solicitação cisalhante na liga aeronáutica, o modelo de Hosford apresentou as taxas de crescimento mais aceleradas para a deformação plástica acumulada. Por fim, para avaliação do corpo de prova retangular sem entalhe na liga de alumínio, todos os três modelos (von Mises, Gao et al. e Hosford) apresentaram a mesma taxa de evolução da deformação plástica acumulada.

Pode-se concluir ao fim deste capítulo que os parâmetros elasto-plásticos do terceiro invariante, normalmente introduzido na formulação através do ângulo de Lode,  $\theta$ , e da pressão hidrostática, inserida através da triaxialidade,  $\eta$ , não devem ser ignorados e sim levados em conta na lei de fluxo plástico de modelos que tenham o objetivo de melhor descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis.

Conclui-se ao final deste capítulo a respeito do estudo de modelos constitutivos baseados na dependência do terceiro invariante do tensor desviador que este parâmetro elasto-plástico não deve ser negligenciado na lei de fluxo plástico de modelos que tenham o objetivo de melhor descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis. Uma vez que a alteração no formato da superfície de escoamento causada pela introdução do seu efeito aumenta de maneira drástica a precisão na descrição do comportamento elasto-plástico do material.

## 4 Indicadores de Fratura Dúctil

No capítulo referente aos aspectos teóricos abordados neste trabalho (Capítulo 2), modelos puramente elasto-plástico foram apresentados como modelos não-acoplados, isto é, aqueles cujas formulações não apresentam uma variável interna associada ao dano dúctil e à degradação do material. No capítulo seguinte (Capítulo 3), dois modelos elasto-plásticos não convencionais e dependentes do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras foram matematicamente definidos e analisados tomando como base resultados experimentais e numéricos. O presente capítulo aborda a associação do modelo constitutivo de Gao et al. (2011), apresentado no Capítulo 3, à sete indicadores de fratura dúctil implementados na etapa de pós-processamento do algoritmo de atualização das variáveis internas deste modelo não-acoplado. Motiva-se esta escolha por este ser o modelo mais recente, entre os dois estudados, e atualmente discutido na comunidade de plasticidade. Para tal, faz-se uso do critério de escoamento de Gao et al., Eq. (28), em duas configurações distintas, com: 1)  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , o qual recupera a formulação clássica de von Mises (1913) e 2)  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{b} = -60.75$ . Nestas duas configurações, o modelo de Gao et al. negligencia o efeito da tensão hidrostática. Contudo, na configuração com  $\mathbf{b}$  não nulo, este critério contempla o efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras, e conseqüentemente, uma melhora na previsão do local e instante para a falha dúctil é esperada através introdução deste efeito.

Segundo Andrade Pires (2001), para que uma análise numérica de problemas que envolvam fratura dúctil seja realizada com sucesso, além de algoritmos de atualização das variáveis internas robustos e eficientes, é necessário uma escolha adequada de um modelo de fratura dúctil. A utilização de indicadores para a previsão da falha dúctil em problemas inelásticos foi inicialmente sugerida no final dos anos 1940 por Freudenthal através do seu critério baseado no trabalho plástico total (Freudenthal, 1950). O interesse na pesquisa da fratura dúctil propiciou a proposição de diversos outros indicadores, como o critério baseado na deformação plástica acumulada de Datsko (1966); critérios fundamentados nas geometrias de defeitos como McClintock (1968) e Rice & Tracey (1969); formulações baseadas nos mecanismos de crescimento dos defeito foram propostas por Cockcroft & Latham (1968), Brozzo et al. (1972), Norris et al (1978), Cockcroft-Latham-Oh (1979), Atkins (1981) e Clift et al (1990) e Xue & Wierzbicki (2008). Na década de 1950, Kachanov (1958) propôs o que hoje é conhecido como mecânica do dano contínuo, dentro dessa categoria destacam-se os indicadores propostos por Lemaître (1986), Tai & Yang (1987) e Vaz Jr. (1998).

A evolução do processo de deformação plástica provoca um aumento do dano no material que pode se prolongar até um eventual colapso deste material. Neste sentido, é proposto no presente capítulo uma análise de sete indicadores de fratura dúctil, utilizados na descrição do estado de degradação do material, quanto às suas capacidades em quantificar e prever o local e instante da fratura. Nas seções seguintes, são expostas as formulações matemáticas de cada um dos indicadores de fratura dúctil adotados, assim como a estratégia numérica utilizada para as suas implementações na etapa de pós processamento do algoritmo de retorno. Além disso, apresenta-se os espécimes selecionados para as simulações numéricas, juntamente com as suas geometrias, discretizações espaciais e processo de calibração. A parte final deste capítulo aborda os resultados obtidos para cada um dos indicadores de fratura dúctil considerando as ligas de aço *SAE1045* (Bai, 2008) e de alumínio aeronáutico (Driemeier et al., 2010) já apresentados no Capítulo 3 deste trabalho.

#### 4.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Um indicador de fratura é uma função escalar de certos parâmetros materiais, como tensão, deformação, nível de triaxialidade, e entre outros. Muitos autores apontam que para um critério de fratura dúctil descrever de maneira satisfatória a degradação do material, estes devem apresentar certas características como: 1) dependência do histórico de carregamento, uma vez que a deformação atual pode não conter informações suficientes para a descrição do início da trinca e a sua respectiva propagação no material (Cockcroft & Latham, 1968; Norris et al., 1978; Atkins & Mai, 1985; Andrade Pires, 2001); 2) dependência da tensão hidrostática, como apresentado anteriormente, este parâmetro possui grande impacto na ductilidade do material (Hancock & Mackenzie, 1976; Mackenzie et al., 1977; Norris et al., 1978; Oyane et al., 1978; Lemaître, 1985; Mudry, 1985; Tai & Yang, 1987; Bao & Wierzbicki, 2004; Bonora et al. 2005; Børvik et al., 2005; Gao & Kim, 2006; Bacha et al., 2007; Bai & Wierzbicki, 2007; Brünig et al. 2013); e 3) um quociente de tensão, como a triaxialidade que representa uma medida paramétrica do estado de tensão (Hancock & Mackenzie, 1976; Mudry, 1985; Bao & Wierzbicki, 2004; Gao and Kim, 2006; Brünig et al., 2008; Mirone *et al.*, 2010; Brünig et al. 2013). (Andrade Pires, 2001).

Em geral, um critério de fratura dúctil dependente do histórico de carregamento pode ser expresso como:

$$I_U = \int_0^{\bar{\epsilon}^p} \{U(p, \sigma_{eq}, \dots)\} d\bar{\epsilon}^p, \quad (69)$$

onde  $\bar{\epsilon}^p$  representa a deformação plástica acumulada,  $I_U$  representa, de forma geral, um indicador de fratura e  $U(p, \sigma_{eq}, \dots)$  denota um critério de fratura específico dependente da tensão hidrostática ( $p$ ), de uma tensão equivalente ( $\sigma_{eq}$ ), e demais parâmetros elasto-plástico. No presente trabalho, adota-se como  $\sigma_{eq}$  a tensão equivalente definida por Gao et al. (2011) e apresentada no Capítulo 3 como  $\sigma_{eq}^G = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6}$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  parâmetros materiais.

Os critérios de fratura dúctil podem ser divididos em dois grupos, aqueles pertencentes à *micromecânica* e aqueles pertencentes aos *modelos de crescimento de defeitos* (Andrade Pires, 2001). Estão agrupados no primeiro grupo os critérios de Freudenthal (1950) e Gillemont (1976) baseados no trabalho plástico total, e o critério de Datsko (1966) baseado na deformação plástica acumulada. No segundo grupo, dos *modelos de crescimento de defeitos*, estão os modelos de McClintock (1968) baseado em micro-defeitos cilíndricos, Rice & Tracey (1969) formulado sobre a geometria esférica de micro-defeitos, os modelos baseados nos mecanismos de crescimento de defeitos como Cockcroft &

Latham (1968), Brozzo et al. (1972), Norris et al. (1978), Cockcroft-Latham-Oh (1979), Atkins (1981), Clift et al. (1990) e Xue & Wierzbicki (2008), juntamente com os modelos baseados em dano apresentados por Lemaître (1985) e Tai & Yang (1987) e Vaz Jr. (1998).

#### 4.1.1. *Micromecânica*

Dentro do grupo da *micromecânica*, os indicadores propostos por: Freudenthal (1950), Gillemont (1976), e Dratsko (1966) foram escolhidos para a análise realizada neste trabalho.

#### **Critério do Trabalho Plástico Total**

O vanguardista indicador de fratura proposto por Freudenthal (1950) e Gillemont (1976), se baseia no trabalho plástico total, e postula que a trinca em um material metálico dúctil se inicia e se propaga quando a energia plástica absorvida atinge um valor crítico, ou seja, quando o trabalho plástico atinge um valor crítico.

Anteriormente neste trabalho, o trabalho plástico foi definido segundo a Eq. (15), na qual considera uma dupla contração entre o tensor tensão de Cauchy e a taxa de evolução do tensor das deformações plástica. Diferentemente dessa formulação apresentada no Capítulo 2 deste trabalho, Freudenthal (1950) e Gillemont (1976) consideraram uma tensão equivalente, capaz de caracterizar o estado de tensão geral, e uma deformação plástica acumulada para formular a sua proposição de indicador de fratura. Tal formulação é dada por:

$$I_{wp} = W_p = \int_0^{\bar{\epsilon}^{pf}} \sigma_{eq}^G d\bar{\epsilon}^p, \quad (70)$$

em que  $W_p$  é o trabalho total por unidade de volume,  $\bar{\epsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada,  $\bar{\epsilon}^{pf}$  é a deformação plástica acumulada na fratura e  $\sigma_{eq}^G$  é a tensão equivalente proposta por Gao et al., sendo  $\sigma_{eq}^G = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6}$ . Desta forma, para  $a = b = 0$ , esta tensão equivalente se reduz à tensão equivalente de von Mises, ou seja,  $\sigma_{eq}^G = q = \sqrt{3J_2}$ .

### **Critério da Deformação Plástica Acumulada**

Proposto originalmente por Dratsko em 1966, este indicador de fratura considera que a fratura dúctil se inicia quando a deformação plástica acumulada assume um valor crítico, tal que:

$$I_{\bar{\epsilon}^p} = \int_0^{\bar{\epsilon}^{pf}} d\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon}^{pf}, \quad (71)$$

onde  $\bar{\epsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada e  $\bar{\epsilon}^{pf}$  representa a deformação plástica acumulada na fratura.

#### *4.1.2. Modelos de Crescimento de Defeitos*

Conforme já apresentado e extensivamente aceito dentro da comunidade de plasticidade e mecânica do dano, o mecanismo de nucleação, crescimento e coalescência de micro-defeitos é o que melhor descreve a fratura de materiais dúcteis. (McClintock, 1968; Rice and Tracey, 1969; Hancock & Mackenzie, 1976; Andrade Pires, 2001; Kim & Gao, 2003; Gao & Kim, 2006; Bacha et al., 2007; Khan, 2012; Malcher, 2012; Brunig, 2013; Malcher, 2014 GTN). Em materiais dúcteis solicitados por um carregamento crescente, a extremidade da trinca que é inicialmente afiada começa a se arredondar para acomodar as elevadas deformações plásticas, e em um determinado instante, pequenos vazios começam a nuclear devido às inclusões, acumulação de deslocamentos ou outros micro-defeitos. Com isso, a trinca inicial cresce e se propaga pelo material (Andrade Pires, 2001).

Os indicadores selecionados dentro do grupo dos *modelos de crescimento de defeitos* são formulados segundo diversos pressupostos físicos como a geometria dos defeitos, e os mecanismos de crescimento (efeitos das tensões principais e tensão hidrostática). Dentre eles foram selecionados os modelos de: Rice & Tracey (1969), Brozzo et al. (1972), Cockcroft & Lathan (1968), e Xue & Wierzbicki (2008).

### **Critério de Rice & Tracey**

Rice & Tracey (1969) introduziram uma função da razão de triaxialidade para descrever o crescimento de vazios esféricos em um campo geral remoto, analisando assim, o crescimento de defeitos esféricos num campo de tensões triaxiais. Este modelo pode ser expresso sob a forma de uma integral, onde a fratura ocorre quando um valor adimensional do tamanho do vazio atinge um valor crítico (Andrade Pires, 2001; Bao & Wierzbicki, 2004), sendo:



$$I_{RT} = \int_{R_0}^{R_c} \frac{dR}{R} = \int_0^{\bar{\varepsilon}^{pf}} 0.283 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\right) d\bar{\varepsilon}^p, \quad (72)$$

onde o primeiro termo da integral representa a evolução do crescimento do vazio e  $R$  indica o raio da esfera, sendo que este pode variar entre dois valores limites, raio inicial,  $R_0$ , e raio crítico da esfera,  $R_c$ . Na expressão mais à direita,  $\eta$  é a razão de triaxialidade, definida como  $\eta = \frac{p}{\sigma_{eq}^G}$ , conforme a Equação (7).  $\bar{\varepsilon}^p$  e  $\bar{\varepsilon}^{pf}$  denotam a deformação plástica acumulada e a deformação plástica acumulada na fratura, respectivamente.

### **Critério de Cockcroft & Latham**

Proposto inicialmente por Cockcroft & Latham (1968) para aplicações no regime entre baixas e negativas razões de triaxialidade, este critério é definido em termos do trabalho plástico de tração associado com a tensão principal sobre a trajetória de deformação plástica acumulada. Tal critério postula que a fratura ocorre quando a deformação plástica acumulada modificada pela tensão principal máxima atinge um valor crítico (Andrade Pires, 2001; Bao & Wierzbicki, 2004b):

$$I_{CL} = \int_0^{\bar{\varepsilon}^{pf}} \sigma_1 d\bar{\varepsilon}^p, \quad (73)$$

onde  $\sigma_1$  representa a tensão principal máxima,  $\bar{\varepsilon}^p$  a deformação plástica acumulada e  $\bar{\varepsilon}^{pf}$  a deformação plástica acumulada na fratura.

### **Critério de Brozzo, de Luca & Redina**

Brozzo et al. (1972) propuseram uma alteração empírica para o critério de Cockcroft & Latham através da introdução de uma dependência explícita da tensão hidrostática em sua formulação (Andrade Pires, 2001; Bao & Wierzbicki, 2004):

$$I_{Br} = \int_0^{\bar{\varepsilon}^{pf}} \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - p)} d\bar{\varepsilon}^p, \quad (74)$$

onde  $p$  é a tensão hidrostática,  $\sigma_1$  a tensão principal máxima e  $\bar{\varepsilon}^p$  e  $\bar{\varepsilon}^{pf}$  representam, respectivamente, a deformação plástica acumulada e a deformação plástica acumulada na fratura.

### Critério de Xue & Wierzbicki

Entre os indicadores selecionados neste trabalho, o critério proposto por Xue & Wierzbicki é o mais recente, tendo sido publicado em 2008. Segundo esta formulação, a fratura se inicia quando a deformação plástica acumulada, modificada por uma função da razão de triaxialidade,  $\eta$ , e do terceiro invariante normalizado do tensor desviador,  $\xi$ , atinge um valor limite.

$$I_{XW} = \int_0^{\bar{\varepsilon}^{pf}} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{F(\eta, \xi)}, \quad (75)$$

onde  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada e  $\bar{\varepsilon}^{pf}$  representa a deformação plástica acumulada na fratura. Segundo Xue (2008), o material apresenta a sua maior ductilidade e sua condição mais favorável à fratura em um estado de tensão axisimétrico, onde  $\xi = 1$ . Por outro lado, a condição menos favorável à fratura se dá em um estado plano de deformação, com  $\xi = 0$ . Xue & Wierzbicki (2008) utilizaram estas duas condições como limites para definir a forma de sua função  $F(\eta, \xi)$ , de maneira a descrever a variação da ductilidade dependendo do estado de tensão ao qual o material está sendo submetido. Assim:

$$\bar{\varepsilon}^{pf} = F(\eta, \xi) = C_1 e^{-C_2 \eta} - (C_1 e^{-C_2 \eta} - C_3 e^{-C_4 \eta})(1 - \xi^2), \quad (76)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , e  $C_4$  são parâmetros materiais a serem calibrados. No presente trabalho, adota-se:  $C_1 = 0,928$ ,  $C_2 = 2,338$ ,  $C_3 = 0,491$  e  $C_4 = 2,24$ , extraído de Xue (2008).

#### 4.1.3. Modelos da Mecânica do Dano Contínuo

Segundo Andrade Pires (2001) os modelos baseados na mecânica do dano contínuo não servem apenas para descrever o comportamento do material, mas também permitem uma abordagem sistemática à análise da fratura, desde a iniciação da fenda, propagação e ruptura final. Nesses modelos há uma variável que contempla o acúmulo de dano do material até a sua completa ruptura, dentro dos trabalhos realizados nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Lemaitre (1984, 1985, 1986 e 1996), François (1985), Benallal et al (1989), Murakami (1990), Malcher (2014) entre outros.

### Critério de Lemaitre

Lemaitre propôs em 1986 um critério baseado na taxa de liberação da energia elástica,  $Y$ , capaz de caracterizar a iniciação da macro-fenda no material. Este critério é representado como se segue:

$$I_{Lemaitre} = -Y_c = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\eta)^2 \right], \quad (77)$$

onde  $Y_c$  é a taxa de liberação de energia com dano no momento da fratura,  $E$  representa o módulo de Young,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $D$  é a variável de dano e  $\eta$  denota a razão de triaxialidade.

### Critério de Vaz Jr.

Baseado nas conclusões obtidas por Lemaitre (1986) em seus trabalhos sobre a adequabilidade de medidas de energia como critérios de fratura dúctil, Vaz Jr. propôs em 1998 um indicador de fratura baseado no trabalho total do dano que pode ser aproximado pela seguinte expressão:

$$I_{Vaz} = \int_0^{\bar{\epsilon}^{pf}} \left\{ \frac{\sigma_{eq}^G{}^2}{2ES_0} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\eta)^2 \right] \right\}^s d\bar{\epsilon}^p. \quad (78)$$

Esta equação retém algumas das qualidades exibidas pelo trabalho total do dano, como a dependência da triaxialidade, sendo válida para qualquer histórico de carregamento e endurecimento material não linear (Andrade Pires 2001). Na equação,  $\sigma_{eq}^G$  representa a tensão equivalente proposta por Gao et al.,  $S_0$  denota o denominador de dano calibrado em uma condição de carregamento cisalhante puro e  $s$  é o expoente de dano, por fim,  $\bar{\epsilon}^p$  e  $\bar{\epsilon}^{pf}$  se referem, respectivamente, a deformação plástica acumulada e a deformação plástica acumulada na fratura.

## 4.2 EFEITO DO TERCEIRO INVARIANTE

Como já exposto no Capítulo 3 deste trabalho, a introdução do efeito do terceiro invariante ( $J_3$ ) no modelo constitutivo de Gao et al. altera a evolução da deformação plástica acumulada, definida conforme a Eq. (41). Com isso, todos os indicadores de fratura dúctil apresentados no presente capítulo passam a depender indiretamente do  $J_3$ , visto que as suas formulações estão em função da deformação plástica acumulada.

Os indicadores propostos por Freudenthal (1950) e Gillemont (1976), Rice & Tracey (1969) e Vaz Jr. (1998) contam com a tensão equivalente de Gao et al. ( $\sigma_{eq}^G$ ) em suas formulações. Desta forma, além da dependência indireta do  $J_3$  por meio da deformação plástica acumulada ( $\bar{\epsilon}^p$ ), estes indicadores apresentam também uma dependência direta deste efeito quando  $b \neq 0$  é adotado na tensão equivalente de Gao et al.. O mesmo é válido para o indicador proposto por Xue & Wierzbicki, o qual apresenta o terceiro invariante normalizado ( $\xi$ ) e a tensão equivalente de Gao et al. ( $\sigma_{eq}^G$ ) em sua formulação.

As proposições de Cockcroft & Latham (1968) e Brozzo et al. (1972) dependem indiretamente do terceiro invariante do tensor desviador tanto pela deformação plástica acumulada ( $\bar{\epsilon}^p$ ) quanto pela tensão principal máxima ( $\sigma_1$ ) presente em suas formulações. Uma vez que a introdução do  $J_3$  impacta na descrição do comportamento mecânico do material e conseqüentemente afeta a determinação dos estados de tensão e as suas respectivas tensões principais.

Por fim, o indicador de fratura dúctil proposto por Dratsko (1966), o qual é baseado exclusivamente na deformação plástica acumulada ( $\bar{\epsilon}^p$ ), também depende de maneira indireta do terceiro invariante do tensor desviador. Desta forma, quando  $b \neq 0$ , o efeito do terceiro invariante é acionado tanto no modelo elasto-plástico de Gao et al. quanto nos indicadores de fratura apresentados neste capítulo.

### 4.3 ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO

Os sete indicadores de fratura dúctil adotados neste trabalho: Trabalho Plástico Total (Freudental, 1950 e Gillemont, 1976), Deformação Plástica Acumulada (Dratsko, 1966), Rice & Tracey (1969), Cockcroft & Latham (1968), Brozzo et al. (1972), Vaz Jr. (1998) e Xue & Wierzbicki (2008), são acrescentados à etapa de pós-processamento do algoritmo numérico apresentado no Capítulo 3 para o modelo constitutivo elasto-plástico de Gao et al. (2011). Desta forma, toma-se o estágio final do esquema de integração apresentado no Quadro 2, atualização das variáveis internas, como etapa inicial do cálculo de cada um desses indicadores, os quais são discretizados de forma geral como:

$$I_{\mathcal{U}_{n+1}} = I_{\mathcal{U}_n} + \mathcal{U}(p_{n+1}, \sigma_{eq_{n+1}}^G, \dots) \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \quad (79)$$

onde  $I_{\mathcal{U}_{n+1}}$  e  $I_{\mathcal{U}_n}$  representam os indicadores de fratura nos instantes do pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $t_n$  respectivamente, e  $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  denota o incremento de deformação plástica acumulada, definido como  $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p$ .

O Quadro 4 apresenta o algoritmo de retorno com os indicadores de fratura implementados.

**Quadro 4 – Esquema de Integração Numérica – Indicadores de Fratura.**

i) **Determinar o estado tentativa: Dado um incremento deformação,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ .**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

ii) **Verificar a admissibilidade Plástica:**

$$\Phi^{trial} = \sigma_{eq}^{G\ trial} - \sigma_{y0} - H(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

Onde:

- $\sigma_{eq}^{G\ trial} = c \left( aI_1^{trial\ 6} + 27J_2^{trial\ 3} + bJ_3^{trial\ 2} \right)^{1/6}$

Se  $\Phi^{trial} \leq 0$ , então, têm-se um passo elástico:  $(*)_{n+1} = (*_{n+1})^{trial}$ ;

Caso contrário, têm-se um passo plástico: Algoritmo de retorno:

iii) **Algoritmo de retorno para o modelo de Gao (2011): resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  e  $\Delta\gamma$ .**

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1}^G \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}: \mathbf{N}_{n+1}^G}{\sigma_{eq\ n+1}^G} \\ \phi_{n+1} = \sigma_{eq\ n+1}^G - \sigma_{y0} - H\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \end{cases}$$

Onde:

- $\sigma_{eq\ n+1}^G = c \left( aI_{1\ n+1}^6 + 27J_{2\ n+1}^3 + bJ_{3\ n+1}^2 \right)^{1/6}$

- $\mathbf{N}_{n+1}^G = \frac{c}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} (\boldsymbol{\beta}_{n+1})$ ,

Sendo:

$$\alpha_{n+1} = aI_{1\ n+1}^6 + 27J_{2\ n+1}^3 + bJ_{3\ n+1}^2$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = a6I_{1\ n+1}^5 \mathbf{I} + 81J_{2\ n+1}^2 \mathbf{S}_{n+1} + 2bJ_{3\ n+1} \det(\mathbf{S}_{n+1}) \mathbf{S}_{n+1}^{-t}: \mathbb{I}^d$$

iv) **Atualizar as demais variáveis internas.**

Continuação do Quadro 4 - Esquema de Integração Numérica – Indicadores de Fratura.

v) Etapa de Pós- processamento. Indicadores de Fratura.

a. Trabalho Plástico Total

$$I_{wp_{n+1}} = I_{wp_n} + \left( \sigma_{eq_{n+1}}^G \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \right)$$

b. Deformação Plástica Acumulada

$$I_{\bar{\varepsilon}^p_{n+1}} = I_{\bar{\varepsilon}^p_n} + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$$

c. Rice & Tracey

$$I_{RT_{n+1}} = I_{RT_n} + \left[ 0,283 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \eta_{n+1}\right) \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \right]$$

d. Cockcroft-Latham

$$I_{CL_{n+1}} = I_{CL_n} + \left( \sigma_{1_{n+1}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \right)$$

e. Brozzo et al.

$$I_{Br_{n+1}} = I_{Br_n} + \left[ \frac{2\sigma_{1_{n+1}}}{3(2\sigma_{1_{n+1}} - p_{n+1})} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \right]$$

f. Xue & Wierzbicki

$$I_{XW_{n+1}} = I_{XW_n} + \left[ \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{C_1 e^{-C_2 \eta_{n+1}} (C_1 e^{-C_2 \eta_{n+1}} - C_3 e^{-C_4 \eta_{n+1}}) \left(1 - \xi_{n+1}^{\frac{1}{r}}\right)^r} \right]$$

g. Vaz Jr.

$$I_{Vaz_{n+1}} = I_{Vaz_n} + \left\{ \frac{\sigma_{eq_{n+1}}^G{}^2}{2ES_0} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 + \nu)(\eta_{n+1})^2 \right] \right\}^{S_0} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$$

vi) Fim.

## 4.4 GEOMETRIA, DISCRETIZAÇÃO E CALIBRAÇÃO

Esta seção se assemelha à seção homônima presente no Capítulo 3. Desta forma, apresenta-se aqui as geometrias e dimensões dos copos de provas utilizados, bem como as suas respectivas discretizações espaciais elaboradas para as simulações numéricas no ambiente de elementos finitos acadêmico Hyplas. Para a análise dos indicadores de fratura dúctil, foram realizadas três baterias de simulações numéricas com a liga de aço *SAE1045* (Bai, 2008) e quatro com a liga de alumínio aeronáutico (Driemeier et al., 2010), cujas propriedades materiais estão presentes nas Tabelas 2 e 3 respectivamente.

### 4.4.1. Liga de Aço *SAE 1045*

Como já apresentado, o presente trabalho contou com três baterias de simulações para a análise dos indicadores de fratura com a liga de aço *SAE1045*, caracterizada no trabalho de Bai (2008) para a validação de seu critério de escoamento plástico dependente da razão de triaxialidade e do ângulo de Lode. A primeira bateria é realizada com o intuito de calibrar os indicadores e avaliar previamente as suas capacidades em prever o local correto da fratura, as demais baterias são desempenhadas para investigar o comportamento desses indicadores fora do ponto de calibração, com relação a predição do local e instante para a falha dúctil.

As geometrias dos espécimes utilizados, a discretização das malhas de elementos finitos e o processo de calibração para esta liga ferrosa são expostos nos tópicos a seguir.

#### **Geometria dos corpos de prova**

A calibração dos indicadores de fratura dúctil examinados neste capítulo utiliza mais uma vez o corpo de prova cilíndrico sem entalhe descrito anteriormente no Capítulo 3, e cuja geometria é apresentada na Figura 11. Além do espécime cilíndrico utilizado para a calibração, um outro corpo de prova cilíndrico entalhado foi utilizado para a simulação numérica em condições de níveis mais altos de triaxialidade, com  $0.33 \leq \eta < 1$  (Figura 35). Por fim, para a simulação numérica de um carregamento cisalhante puro, optou-se mais uma vez pelo corpo de prova “*Borboleta*” apresentado na Figura 10 deste trabalho.



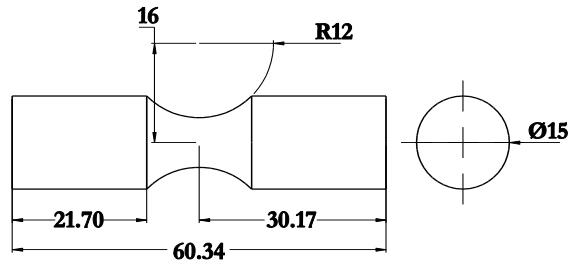


Figura 35 – Espécime cilíndrico entalhado com  $R = 12\text{mm}$ .

### Discretização espacial dos corpos de provas.

As mesmas discretizações espaciais realizadas para o corpo de prova cilíndrico sem entalhe e “Borboleta” empregadas na avaliação dos modelos constitutivos de Hosford (1972) e Gao et al. (2011) no Capítulo 3, Figuras 12 e 13, foram utilizadas para a análise dos indicadores de fratura apresentados neste capítulo. Assim, para a o corpo de prova “Borboleta”, manteve-se a malha com elementos finitos tridimensional quadrático hexaédrico com vinte nós cada, em um total de 1440 elementos e 7773 nós, e para o espécime cilíndrico sem entalhe, a sua discretização já mencionada foi estabelecida utilizando elementos finitos bidimensionais quadráticos de oito nós cada, totalizando 1800 elementos e 5581 nós.

O corpo de prova cilíndrico entalhado foi ensaiado numericamente utilizando uma malha de elementos finitos bidimensionais quadrilaterais quadráticos de oito nós cada, em um total de 2400 elementos e 7421 nós, em uma estratégia de integração reduzida com quatro pontos de Gauss. Sua discretização é ilustrada na Figura 36, com um maior refinamento na região mais crítica do corpo de prova, onde há 30 elementos finitos ao longo da direção  $X$ .

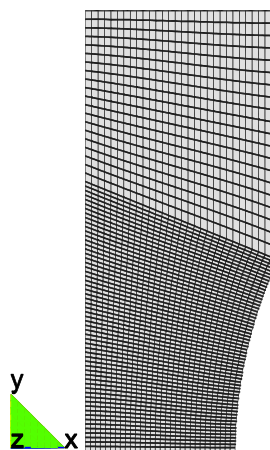


Figura 36 - Malha de elementos finitos bidimensionais quadráticos – Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12\text{mm}$ . Liga de aço *SAE1045*.

### Procedimento de calibração

Com o intuito de se determinar os valores críticos de cada um dos sete indicadores propostos neste trabalho, uma bateria de simulação numérica foi conduzida considerando o modelo de Gao et al. em duas configurações distintas, com  $a = b = 0$ , na qual o modelo é capaz de resgatar a formulação clássica de von Mises, e com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Na segunda configuração adotada, o modelo constitutivo de Gao et al. se torna dependente do efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadores, alterando assim o formato do seu envelope de falha. Neste sentido, para a calibração dos indicadores de fratura dúctil com relação à liga de aço *SAE1045*, o corpo de prova cilíndrico sem entalhe apresentado na Figura 11 e discretizado conforme a Figura 12 foi simulado numericamente considerando uma solitação trativa uniaxial e um deslocamento experimental crítico até a fratura de  $u_{exp} = 1,6mm$ .

Após simular o espécime cilíndrico sem entalhe nas duas configurações do modelo de Gao et al., os valores críticos para cada indicador foi encontrado. A Tabela 4 abaixo apresenta os resultados obtidos para a liga *SAE1045*, em seguida as Figuras 37 a 43 ilustram o contorno de cada um dos indicadores avaliados.

**Tabela 4 – Valores Críticos dos Indicadores de Fratura Dúctil para a Liga *SAE1045*.**

Indicadores de Fratura	<i>SAE 1045</i>	
	Configuração do Modelo Elasto-Plástico de Gao et al.	
	$a = b = 0$ (von Mises)	$a = 0$ e $b = -60,75$
Brozzo et al.	0,3041	0,3411
Cockcroft & Latham	1,554E+16	1,798E+16
Deformação Plástica Acumulada	0,4562	0,5116
Rice & Tracey	0,174	0,1908
Trabalho Plástico Total	669,5	792,3
Vaz Jr.	0,3902	0,4777
Xue & Wierzbiki	1,939	2,085

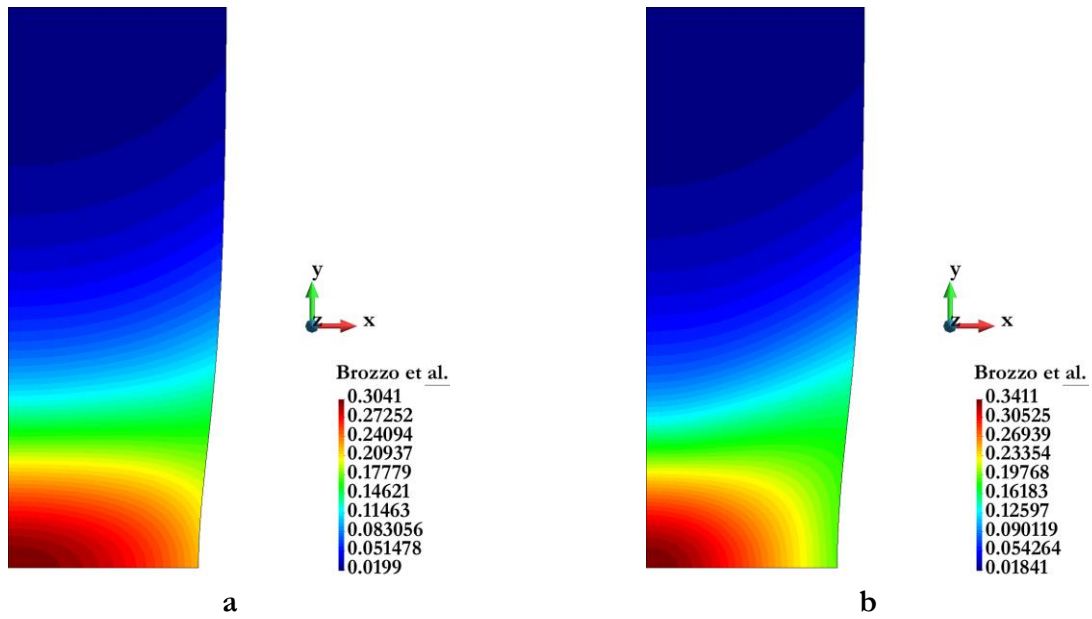


Figura 37 – Indicador de Fratura Brozzo et al, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – *SAE1045*.

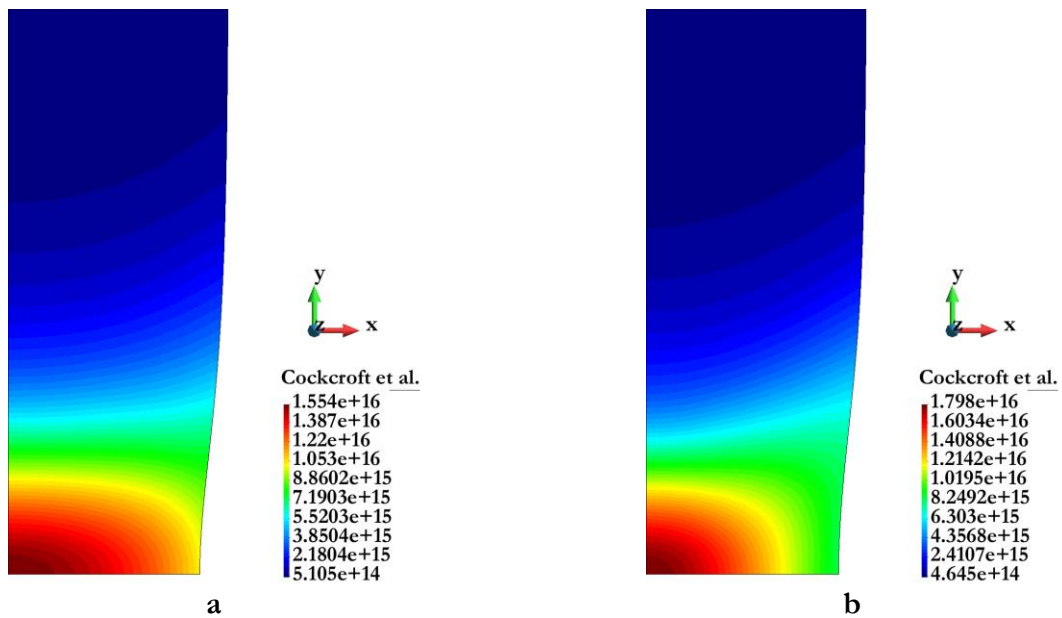


Figura 38 – Indicador de Fratura Cockcroft et al., associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – *SAE1045*.

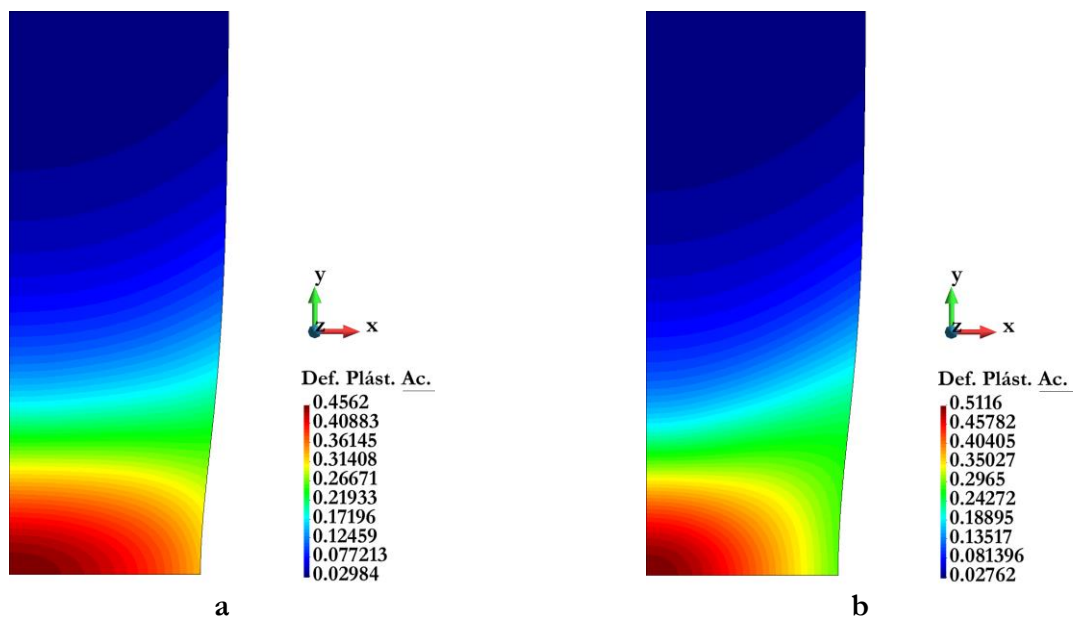


Figura 39 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – *SAE1045*.

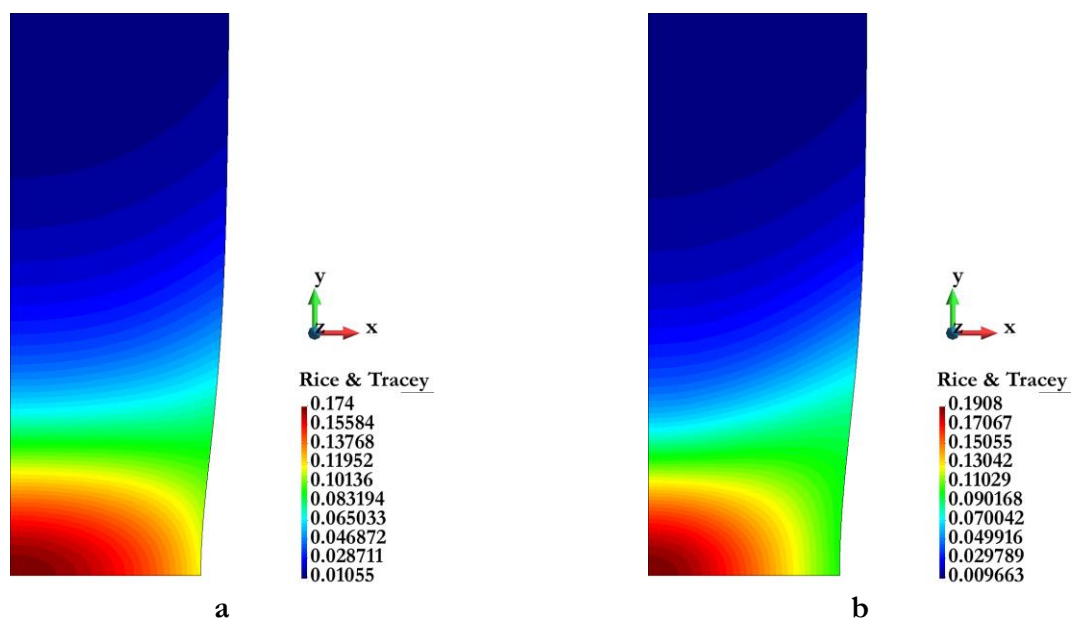


Figura 40 – Indicador de Fratura Rice & Tracey, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – *SAE1045*.

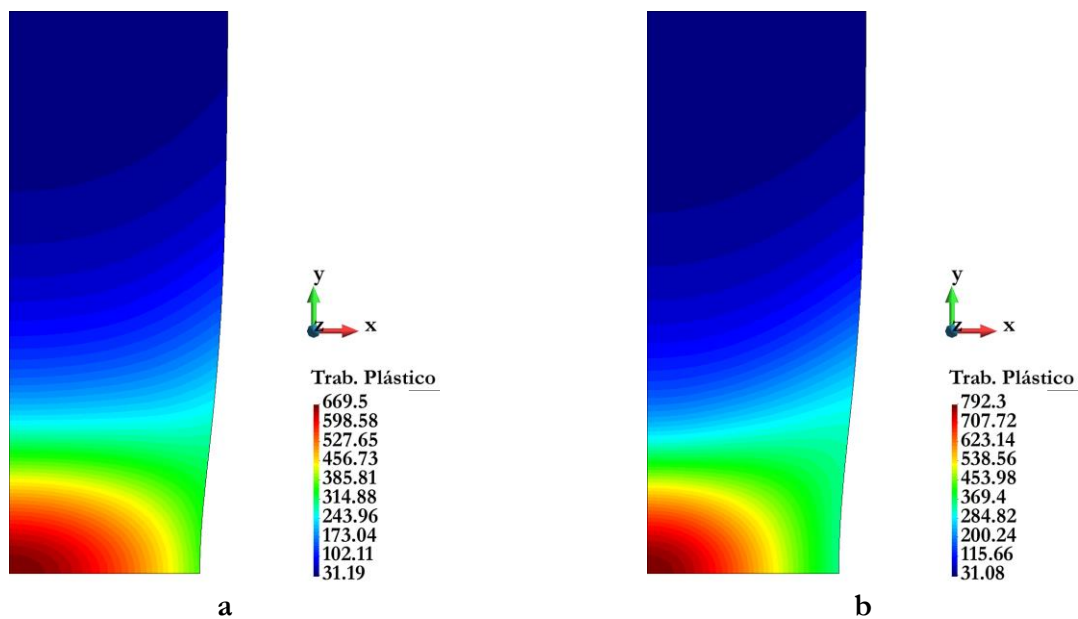


Figura 41 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.

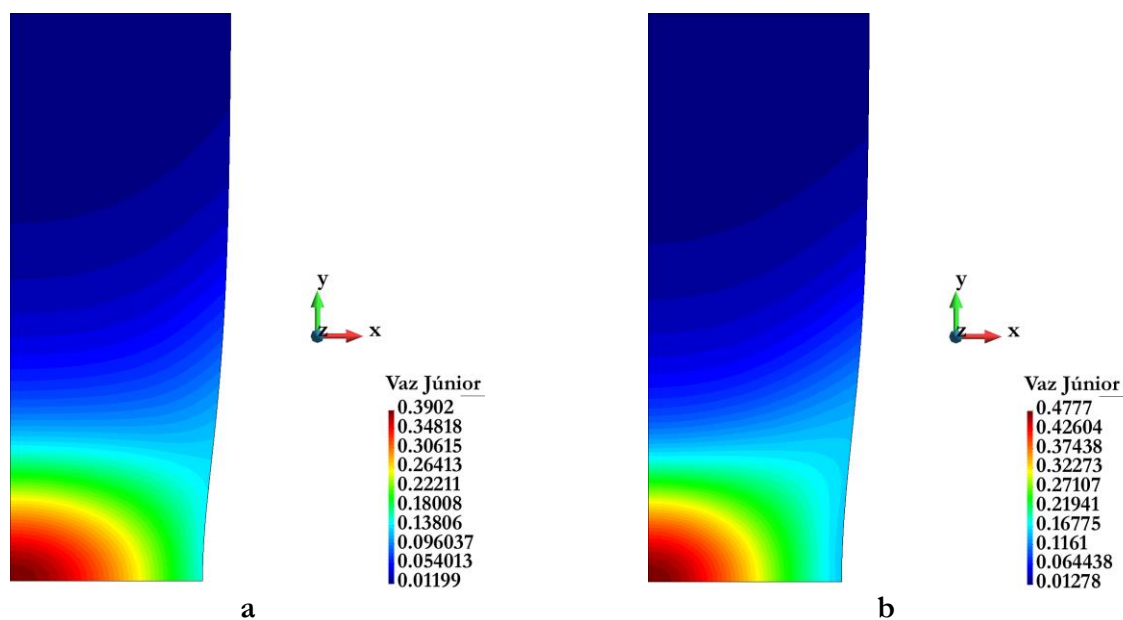


Figura 42 – Indicador de Fratura Vaz Jr., associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.

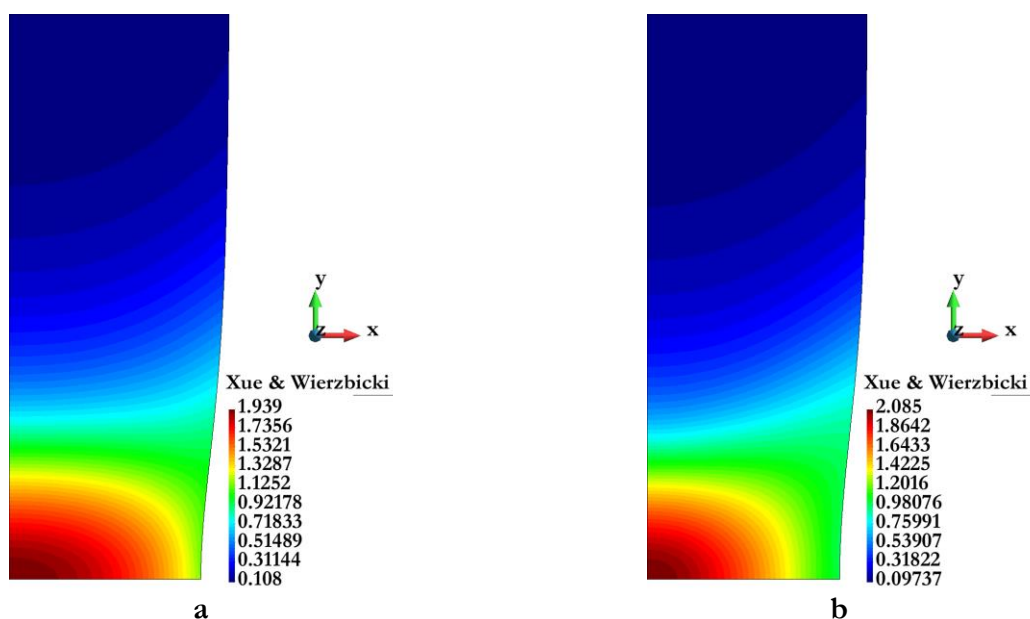


Figura 43 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki, associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.

Como é possível observar nas Figuras 37 a 43, a introdução do efeito do parâmetro elasto-plástico  $J_3$  faz com que a previsão do local esperado para a falha seja mais preciso, isto é, os valores críticos para cada um dos indicadores de fratura dúctil se concentram mais na região central do corpo de prova, com isso, os resultados numéricos se aproximam mais das observações experimentais.

As curvas das Figuras 44 e 45 apresentam a distribuição dos contornos dos indicadores ao longo da zona crítica para as duas configurações do modelo de Gao et al. estudadas, e reafirmam a observação feita a respeito dos contornos dos indicadores apresentados nas Figuras 37 a 43, a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras faz com que os valores críticos dos indicadores de fratura dúctil se localizem mais na região central do corpo de prova e a sua distribuição passa a ser mais suave e homogênea, sem a presença de patamares definidos.

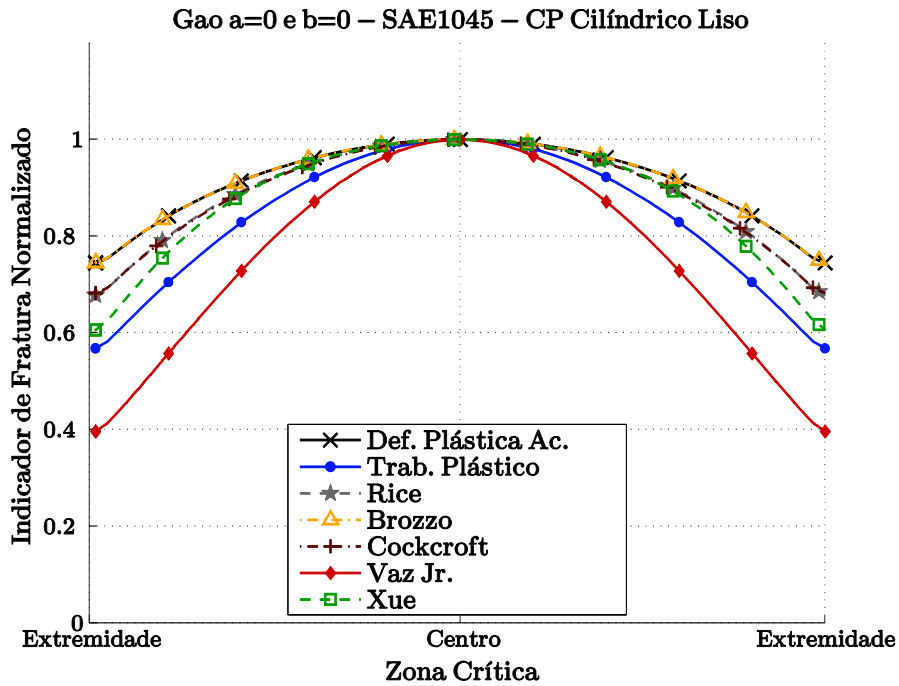


Figura 44 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.

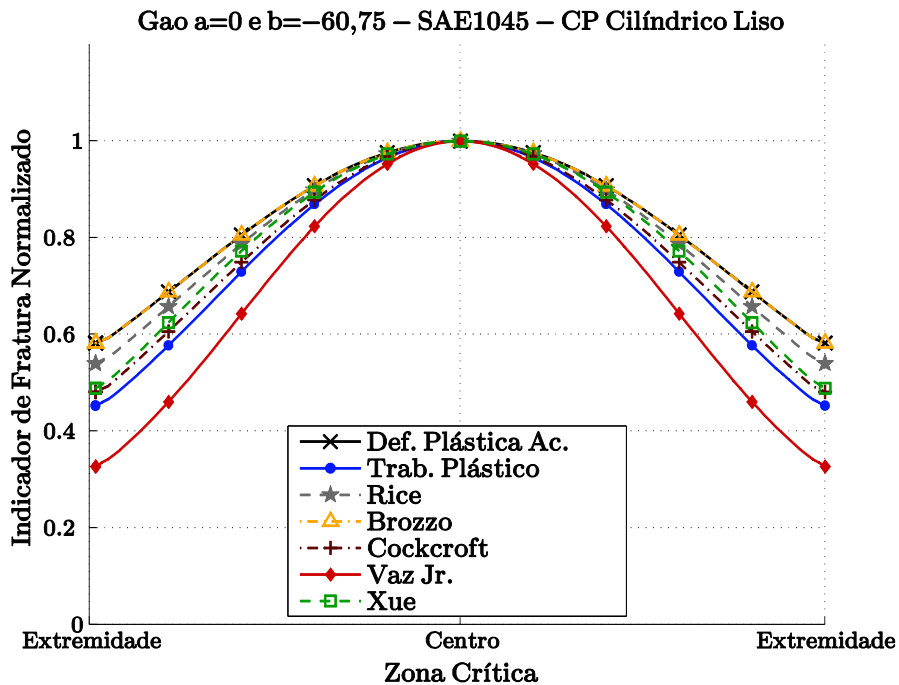


Figura 45 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – SAE1045.

#### 4.4.2. Liga de Alumínio Aeronáutico.

Com relação às quatro baterias de simulações numéricas com a liga de alumínio aeronáutico, caracterizada no trabalho de Driemeier et al. (2010) para avaliação de modelos constitutivos e critérios de falha dúctil, quatro espécimes diferentes foram considerados. As geometrias e discretizações espaciais dos corpos de provas, assim como o processo de identificação dos valores críticos para cada um dos sete indicadores em estudo, agora para a liga de alumínio aeronáutico, são apresentadas nos tópicos que se seguem.

#### Geometria dos corpos de prova

Das quatro geometrias consideradas para as simulações numéricas utilizando a liga de alumínio aeronáutico, duas já foram previamente descritas neste trabalho, são elas: espécime retangular sem entalhe com espessura de  $6.35mm$  (Figura 15) e o corpo de prova especial que devido a sua geometria particular é capaz de gerar uma sollicitação cisalhante pura em sua seção de prova (Figura 16). Os dois corpos de prova particulares ao estudo dos indicadores de fratura são versões entalhadas do espécime retangular de espessura  $6.35mm$ , com raios de  $10$  e  $50mm$ , conforme apresentam as Figuras 46 e 47. A adição dessas duas outras geometrias permite ao presente trabalho avaliar os indicadores de fratura em uma larga faixa de níveis de triaxialidade.

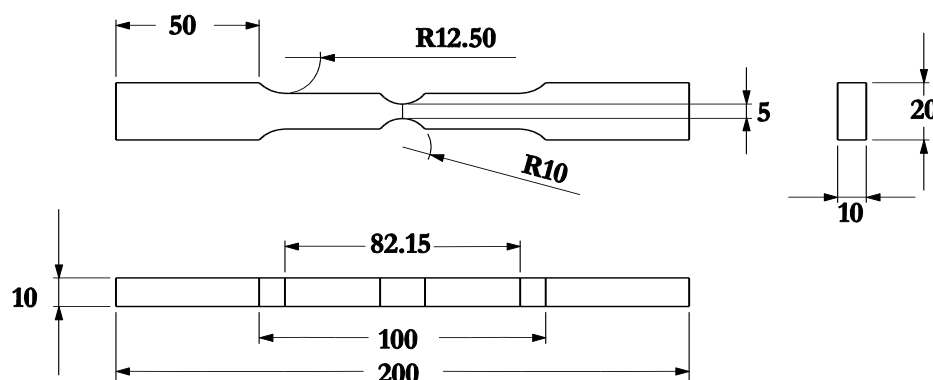


Figura 46 – Geometria do corpo de prova retangular entalhado com  $R = 10mm$ . Liga de Alumínio Aeronáutico.



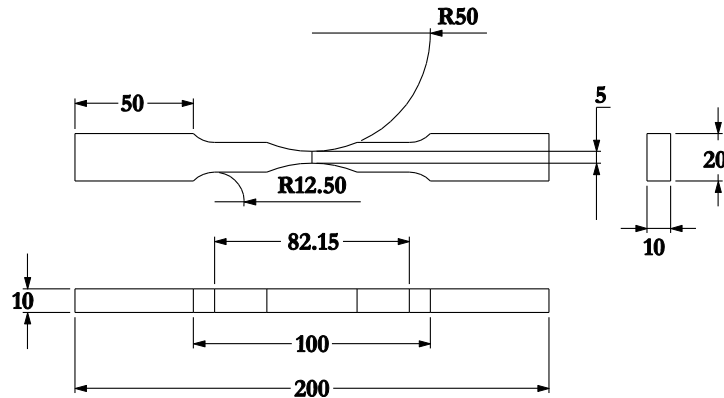


Figura 47 – Geometria do corpo de prova para ensaio de cisalhamento puro. Liga de Alumínio Aeronáutico.

### Discretização espacial dos corpos de provas.

Para os dois corpos de prova já simulados nas análises do Capítulo 3, espécime retangular sem entalhe e espécime para cisalhamento puro, as mesmas discretizações espaciais foram adotadas com uma malha de elementos finitos tridimensionais lineares hexaédrico com oito nós cada em um total de 1840 elementos e 2376 nós para a geometria retangular lisa (Figura 17), e uma malha utilizando elementos finitos tridimensionais quadráticos hexaédrico com vinte nós cada, com um total de 3456 elementos e 17165 nós para o espécime de geometria especial para cisalhamento (Figura 18).

Considerando agora os espécimes retangulares entalhados, com raios de 10 e 50mm, as suas discretizações espaciais são apresentadas nas Figuras 48 e 49 respectivamente. Para o espécime com entalhe mais agudo ( $R = 10mm$ ), uma malha de elementos finitos tridimensionais lineares hexaédricos com oitos nós cada, em um total de 3200 elementos e 4059 nós em uma estratégia de integração reduzida com 8 pontos de Gauss foi criada. Uma discretização mais fina da malha é realizada na região esperada para a falha, com 10 elementos finitos ao longo da direção  $X$  e 8 ao longo de  $Z$ .

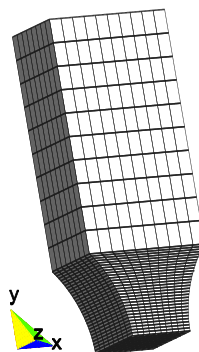
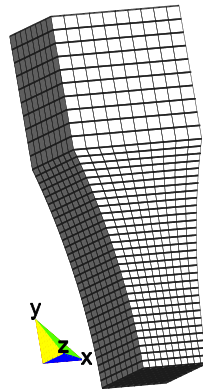


Figura 48 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular com entalhe  $R = 10mm$ . Liga de Alumínio Aeronáutico.

Uma malha de elementos finitos com as mesmas características daquela definida para corpo de prova com entalhe de  $10\text{mm}$  foi definida ao corpo de prova entalhado com  $R = 50\text{mm}$ , totalizando 3200 elementos e 4059 nós. Assim, na região esperada para a falha faz-se novamente um refinamento com 10 elementos finitos ao longo da direção  $X$  e 8 ao longo de  $Z$ .



**Figura 49 - Malha de elementos finitos hexaédricos para o corpo de prova retangular com entalhe  $R = 50\text{mm}$ . Liga de Alumínio Aeronáutico.**

### **Procedimento de calibração**

Similar ao processo de determinação dos valores críticos dos indicadores de fratura realizado para a liga de aço *SAE1045* descrito na seção anterior, realizou-se uma bateria de simulações numéricas considerando a liga de alumínio aeronáutico e o modelo de Gao et al. nas duas configurações descritas,  $a = b = 0$  e  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . O corpo de prova retangular sem entalhe (Figura 15, discretizado conforme a Figura 17) foi escolhido para a calibração e consequente obtenção dos valores críticos para cada um dos indicadores em estudo com relação à liga aeronáutica. O valor do deslocamento experimental crítico à fratura considerado foi de  $u_{exp} = 3.75\text{mm}$  e os resultados da calibração são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Valores Críticos dos Indicadores de Fratura Dúctil para a Liga de Alumínio Aeronáutico.

Indicadores de Fratura	Alumínio Aeronáutico	
	Configuração do Modelo Elasto-Plástico de Gao et al.	
	$a = b = 0$ (von Mises)	$a = 0$ e $b = -60,75$
Brozzo et al.	0,4073	0,411
Cockcroft & Latham	7.161E+14	7,197E+14
Deformação Plástica Acumulada	0,6109	0,6165
Rice & Tracey	0,2241	0,2221
Trabalho Plástico Total	575,2	596,4
Vaz Jr.	1,271	1,293
Xue & Wierzbiki	2,607	2,499

As Figuras 50 a 56 ilustram o contorno dos indicadores de fratura dúctil considerando a Liga de alumínio aeronáutico e o modelo constitutivo de Gao et al. na configuração com  $a = b = 0$  (von Mises) e  $a = 0$  e  $b = -60,75$  (efeito do terceiro invariante do tensor desviador).

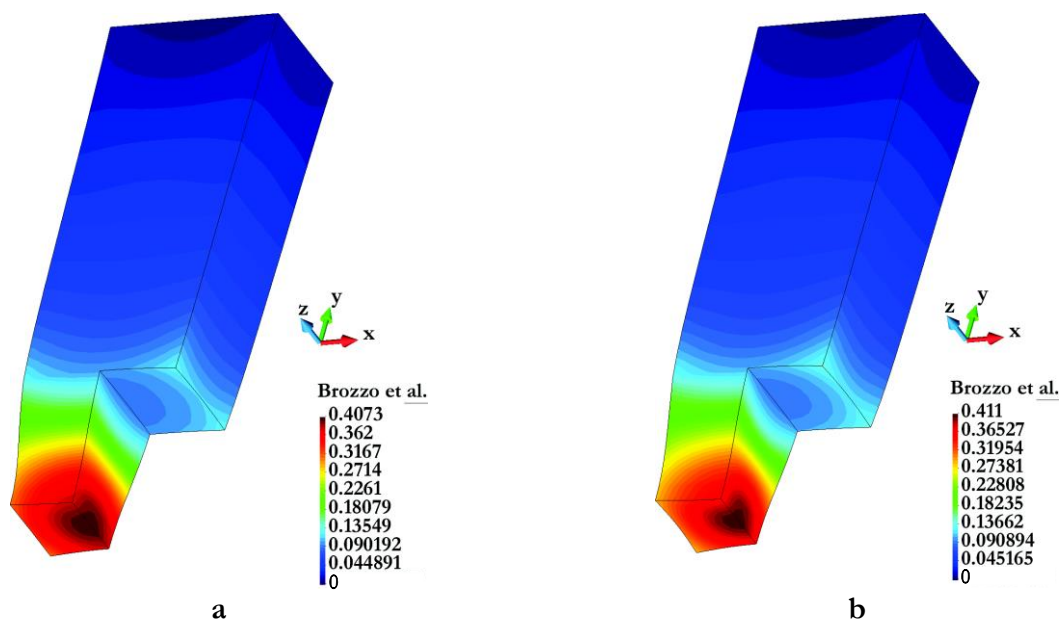


Figura 50 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

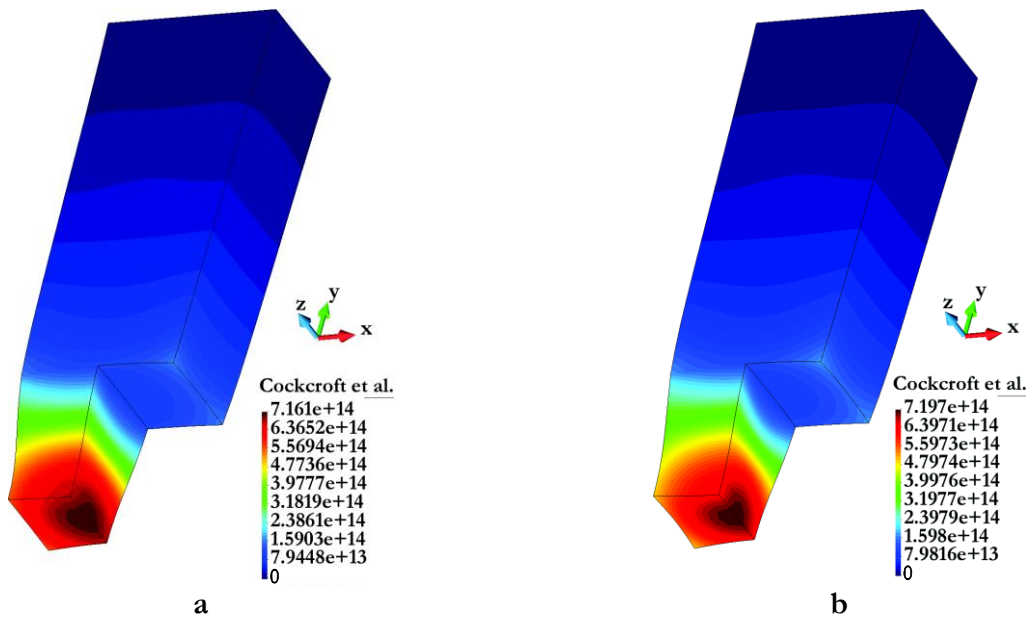


Figura 51 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

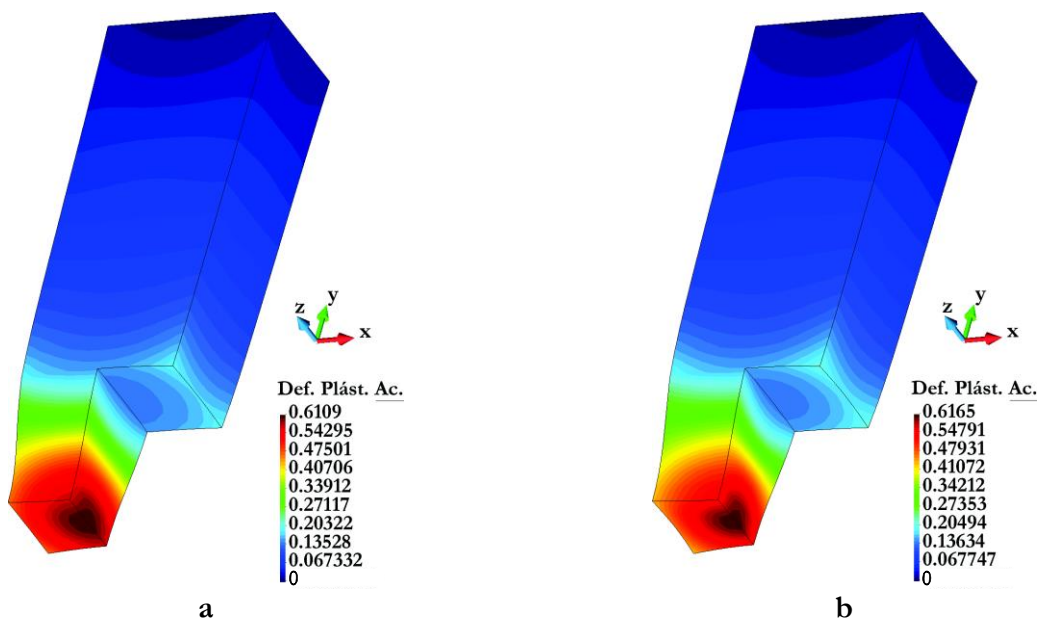


Figura 52 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

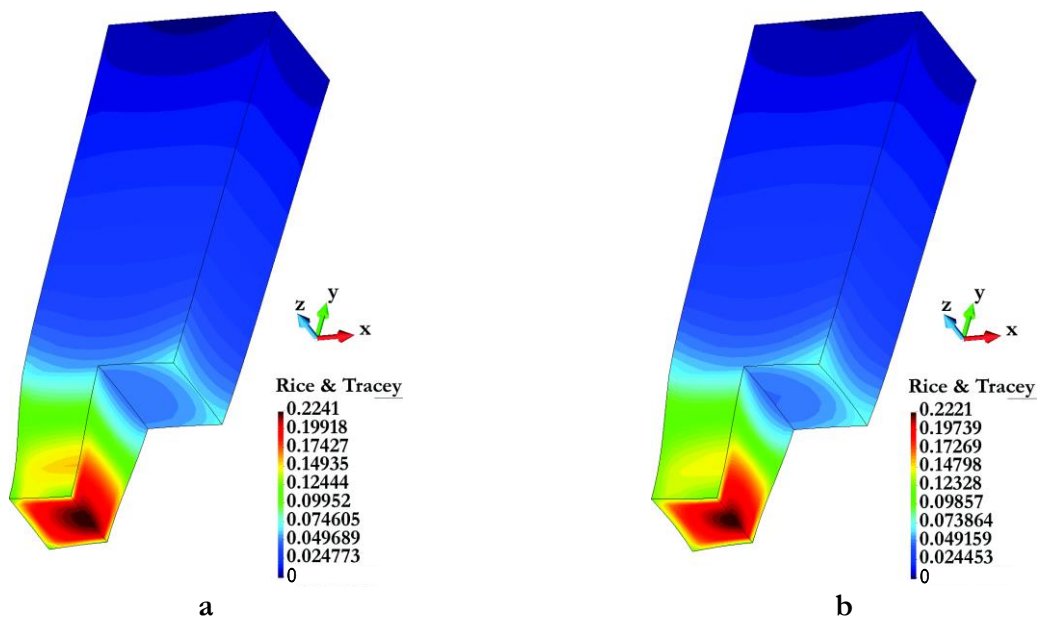


Figura 53 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

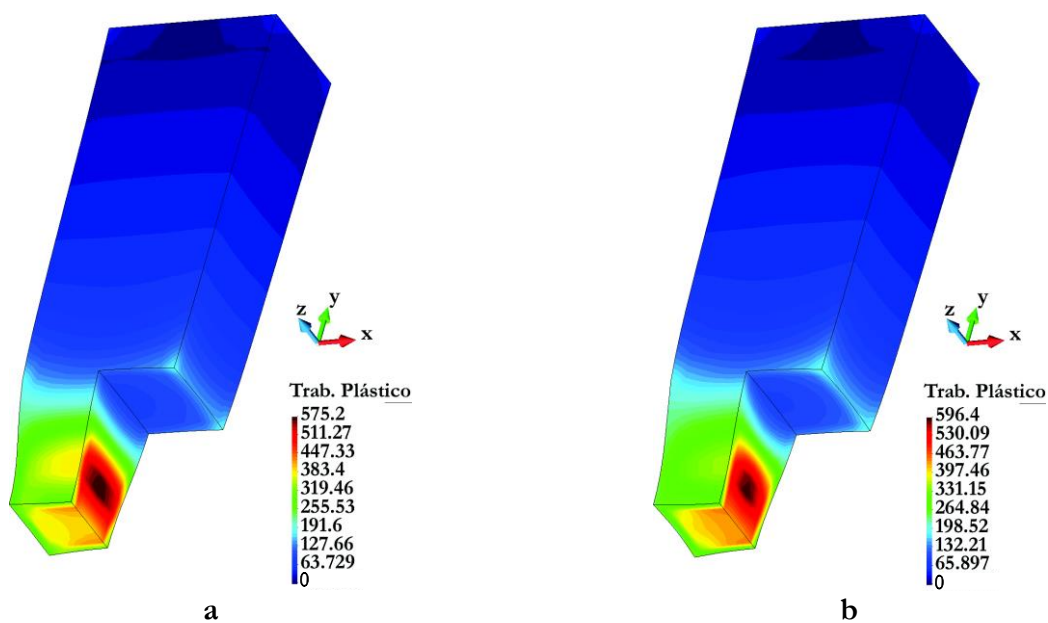


Figura 54 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

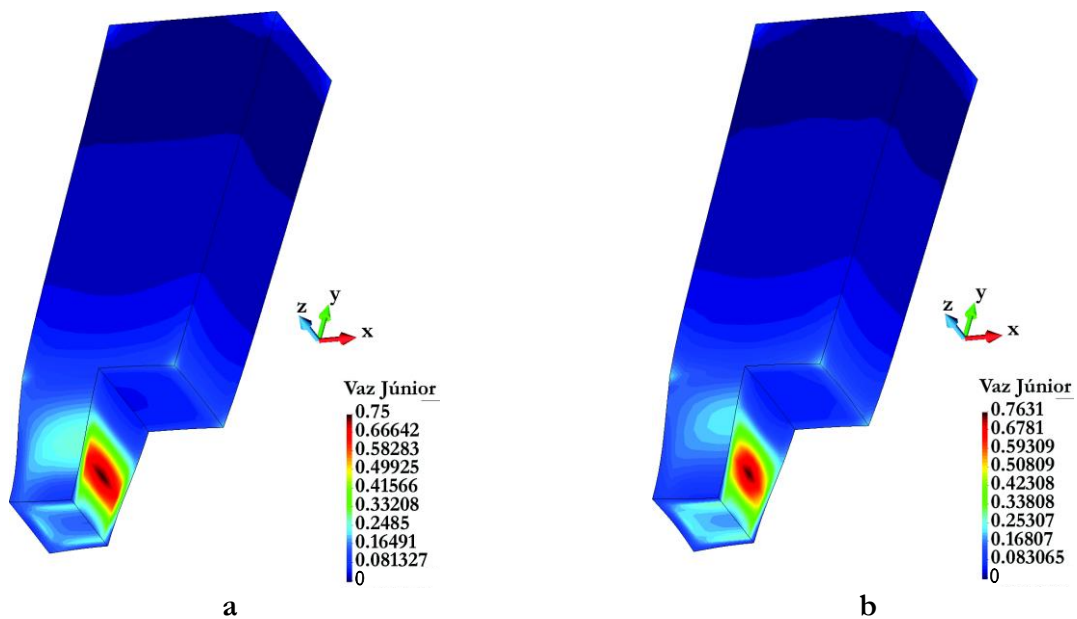


Figura 55 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

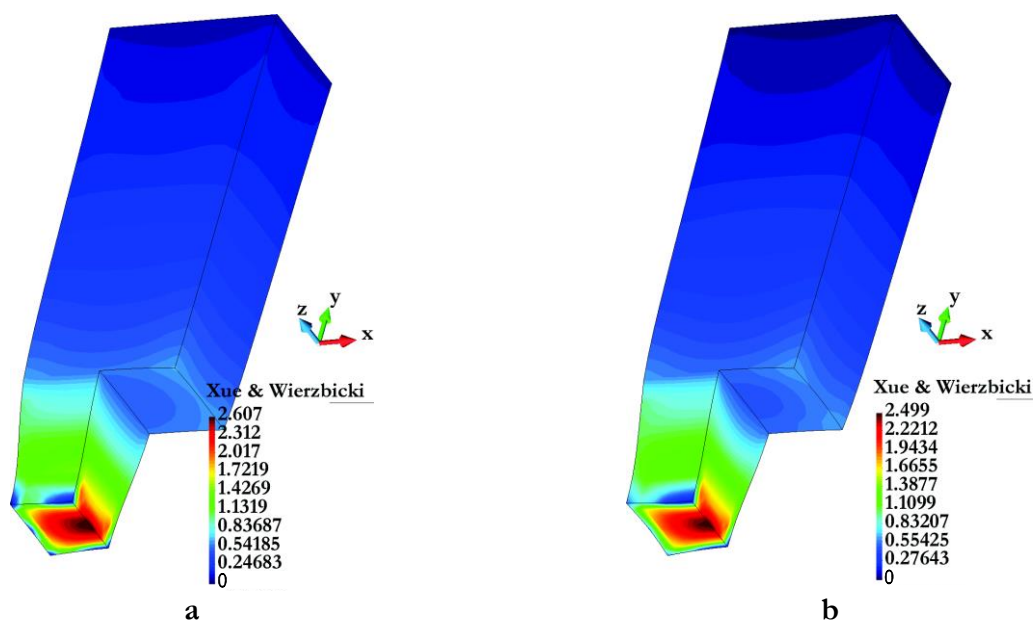


Figura 56 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de Gao et al. na configuração: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ . Corpo de prova retangular sem entalhe – Alumínio aeronáutico.

Mais uma vez, fica evidente o efeito da introdução do terceiro invariante do tensor desviador na predição do local esperado para a falha dúctil, a qual acaba se localizando mais ao centro do espécime. Os indicadores de Brozzo et al. (1972), Cockcroft & Latham (1968), Deformação plástica acumulada/Dratsko (1966), Rice & Tracey (1969) e Xue & Wierzbicki (2008) indicam que o fratura no espécime de geometria retangular lisa em alumínio aeronáutico se iniciará no meio do corpo de prova, mais precisamente, em sua região central equatorial. Por outro lado, os critérios baseados no trabalho plástico total de Freudenthal (1950) e Gillemont (1976), e trabalho total do dano de Vaz Jr. (1998) apontam que a falha dúctil também ocorrerá no centro do corpo de prova, porém em um plano ligeiramente acima da região equatorial.

Devido à adoção de um problema tridimensional para a determinação dos valores críticos dos indicadores de fratura para a liga aeronáutica, a coleta dos resultados para a análise da distribuição dos indicadores nas regiões críticas foi realizada ao longo das direções  $X$  e  $Z$ , conforme orientação ao lado dos espécimes nas Figuras 50 a 56. As curvas das Figuras 57 e 58 apresentam, respectivamente, a distribuição dos contornos dos indicadores na zona crítica ao longo das direções  $X$  e  $Z$  para a configuração do modelo de Gao et al. com  $a = b = 0$  (von Mises), e as curvas Figuras 59 e 60 ilustram a distribuição dos indicadores para a consideração de  $b = -60,75$ .

Observa-se novamente que a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor desviador na lei de fluxo plástico do modelo constitutivo de Gao et al. (Figura 59 e Figura 60) torna a distribuição dos indicadores de fratura dúctil mais homogênea, suavizando os patamares definidos nas Figuras 57 e 58. Desta forma, a localização do local esperado para a fratura se torna mais refinado e preciso, visto que a presença de patamares dificulta a determinação inequívoca deste local, o qual a se apresenta como uma extensa região para  $b = 0$ , ao invés de um local pontual como ocorre para  $b = -60,75$ .

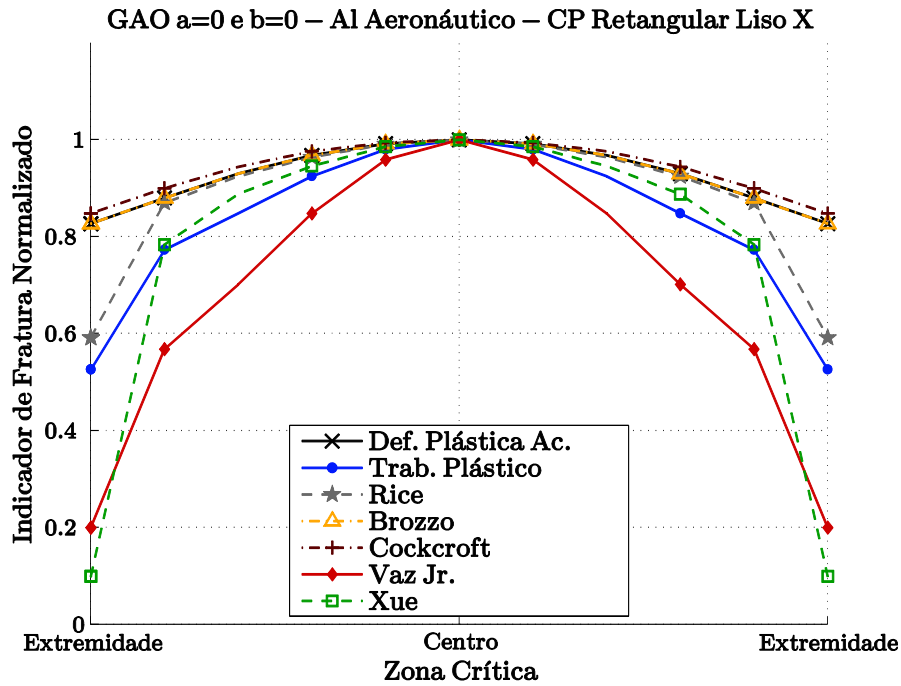


Figura 57 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção X associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.

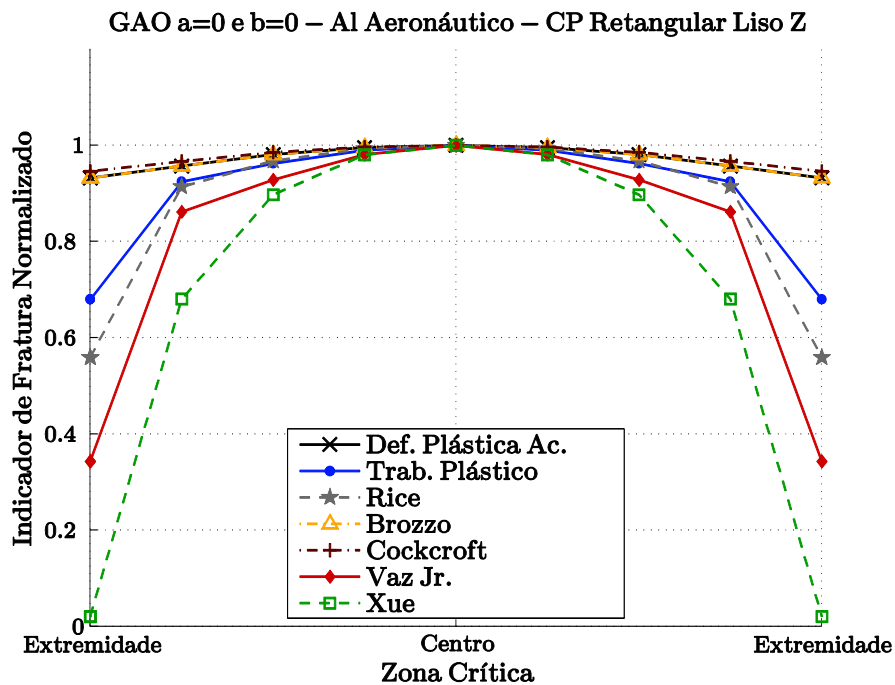


Figura 58 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção Z associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.



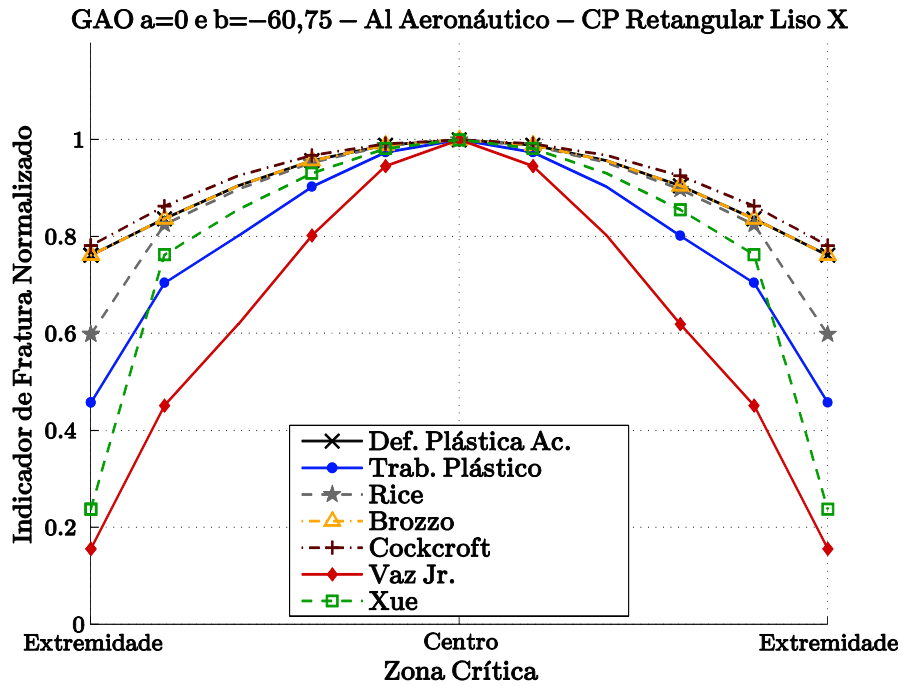


Figura 59 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção X associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.

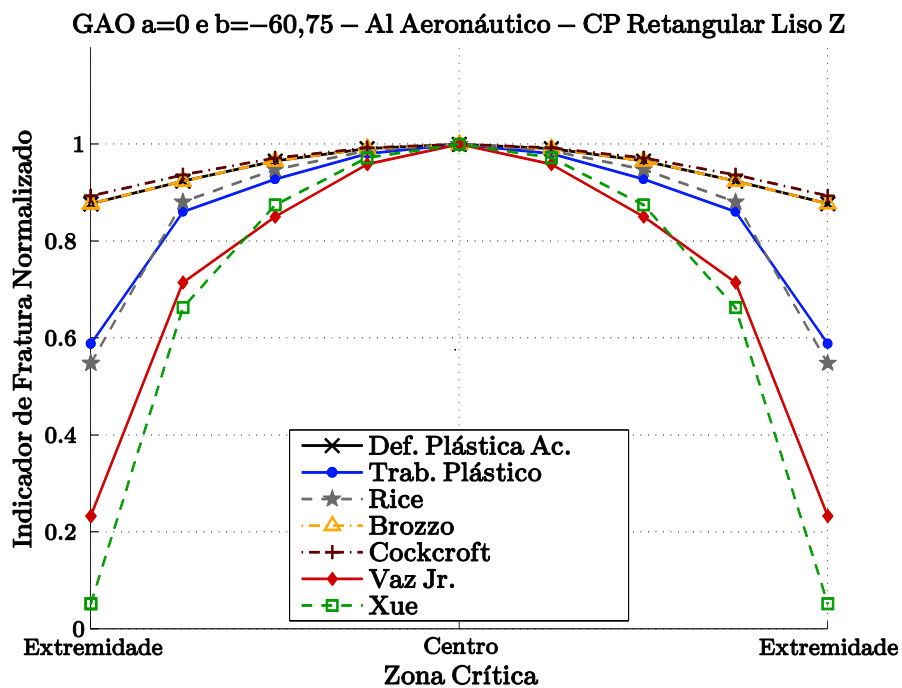


Figura 60 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longa da zona crítica na direção Z associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova cilíndrico sem entalhe – Liga de alumínio aeronáutico.

## 4.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como já apresentado anteriormente, este trabalho partiu de simulações numéricas para comparar sete diferentes indicadores de fratura dúctil associados ao modelo elasto-plástico não convencional de Gao et al. (2011) em duas configurações distintas, uma capaz de recuperar a formulação clássica de von Mises através da adoção de  $a = b = 0$ , e outra com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ , a qual introduz o efeito do terceiro invariante do tensor desviador na lei de fluxo plástico do modelo constitutivo.

Na presente seção, expõe-se os resultados obtidos na simulação de cinco corpos de prova diferentes nas ligas materiais adotadas neste trabalho. Para a liga de aço *SAE1045*, cujas propriedades foram apresentadas em detalhes no Capítulo 3 – Tabela 2, um espécime cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  e um “*Borboleta*” foram selecionados. Por sua vez, a avaliação dos indicadores de fratura considerando a liga aeronáutica (Capítulo 3 – Tabela 3) contou com dois corpos retangulares com entalhes de  $R = 10$  e  $R = 50mm$  e um espécime particular capaz de gerar um estado de tensão cisalhante puro em sua seção de prova.

A princípio, divide-se esta seção em duas com relação aos resultados para cada uma das ligas em estudo. Dentro destas subdivisões são apresentadas as imagens dos contornos de cada um dos indicadores nas duas configurações adotadas para o modelo constitutivo de Gao et al., as tabelas com os valores críticos das simulações numéricas e as distribuições dos indicadores com relação a cada um dos corpos de prova em questão.

### 4.5.1. LIGA DE AÇO *SAE1045*

A primeira liga a ser analisada foi a *SAE1045*, caracterizada no trabalho de Bai (2008). Nos tópicos abaixo são apresentados os resultados obtidos para o corpo de prova cilíndrico entalhado, cuja a geometria e discretização espacial são apresentadas nas Figuras 35 e 36, e para o espécime “*Borboleta*” já ilustrado nas Figuras 10 e 12.

#### **Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado**

Optou-se pelo corpo de prova cilíndrico entalhado apresentado nas Figuras 35 e 36 para a avaliação dos indicadores de fratura em uma faixa da razão de triaxialidade mais elevada que a adotada durante a calibração. A tração uniaxial do corpo de prova cilíndrico sem entalhe gera um nível de triaxialidade no início do ensaio de **0,33**, enquanto o espécime entalhado com  $R = 12mm$  escolhido atinge uma razão de **0,47** nos instantes iniciais da sollicitação. Desta forma, a avaliação dos indicadores é feita em uma faixa mais ampla das razões de triaxialidade.

Para a análise da estimativa do instante e do local esperado para a falha dúctil, foram realizadas simulações numéricas nas quais o corpo de prova cilíndrico entalhado é tracionado até um deslocamento numérico crítico que representa o deslocamento necessário para se atingir os valores críticos dos indicadores, os quais foram previamente definidos através do processo de calibração exposto na seção anterior. Desta forma, o deslocamento numérico crítico representa o instante em que a falha dúctil ocorre segundo um determinado indicador. Além disso, a localização do valor máximo e do contorno do indicador no corpo de prova indicam o local esperado para a falha.

As Figuras 61 a 67 apresentam em seqüência o contorno dos indicadores de: Brozzo et al. (1972), Cockcroft & Latham (1968), deformação plástica acumulada/Dratsko (1966), Rice & Tracey (1969), trabalho plástico total/ Freudenthal (1950) e Gillemont (1976), Vaz Jr. (1998) e Xue & Wierzbicki (2008). Cada uma dessas figuras apresenta duas imagens, representando o contorno do indicador através de sua associação ao modelo constitutivo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (legenda a) e na configuração com  $a = 0$  e  $b = -60,75$  (legenda b).

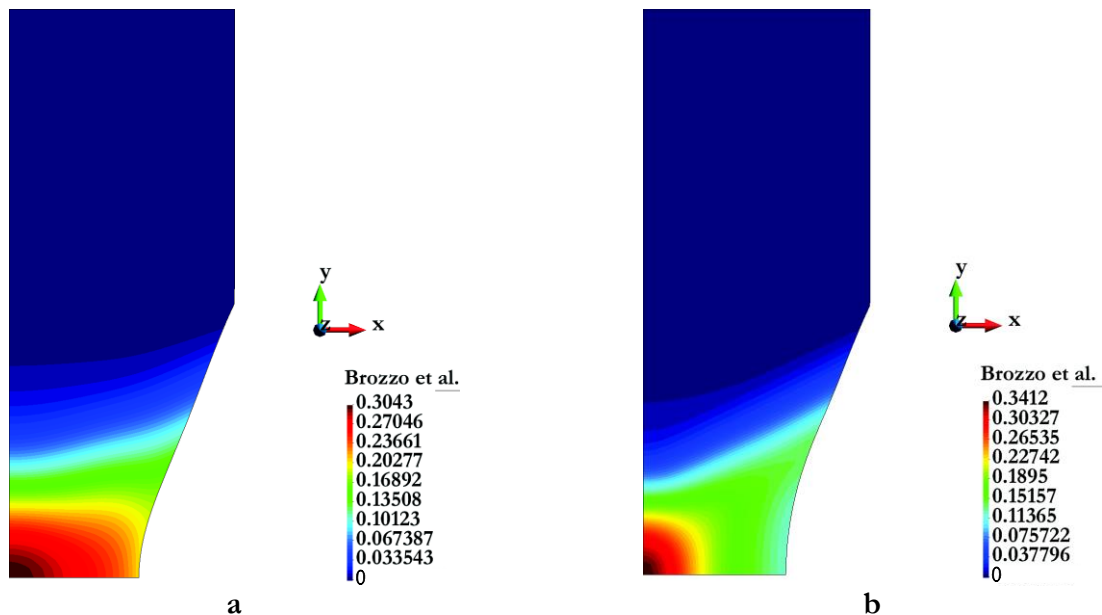


Figura 61 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  – SAE1045.

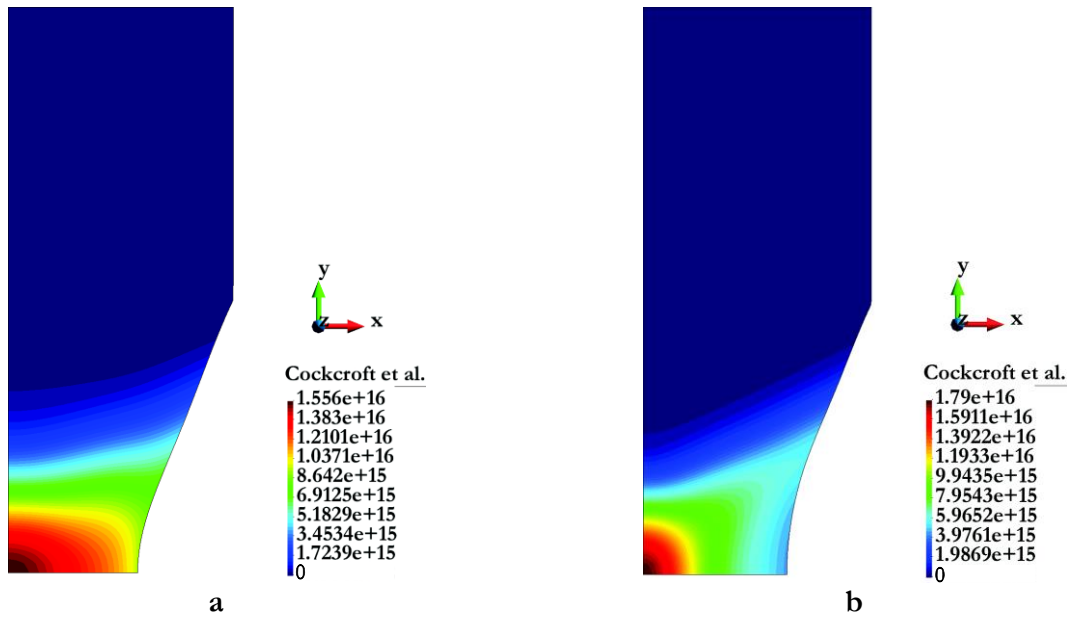


Figura 62 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  – SAE1045.

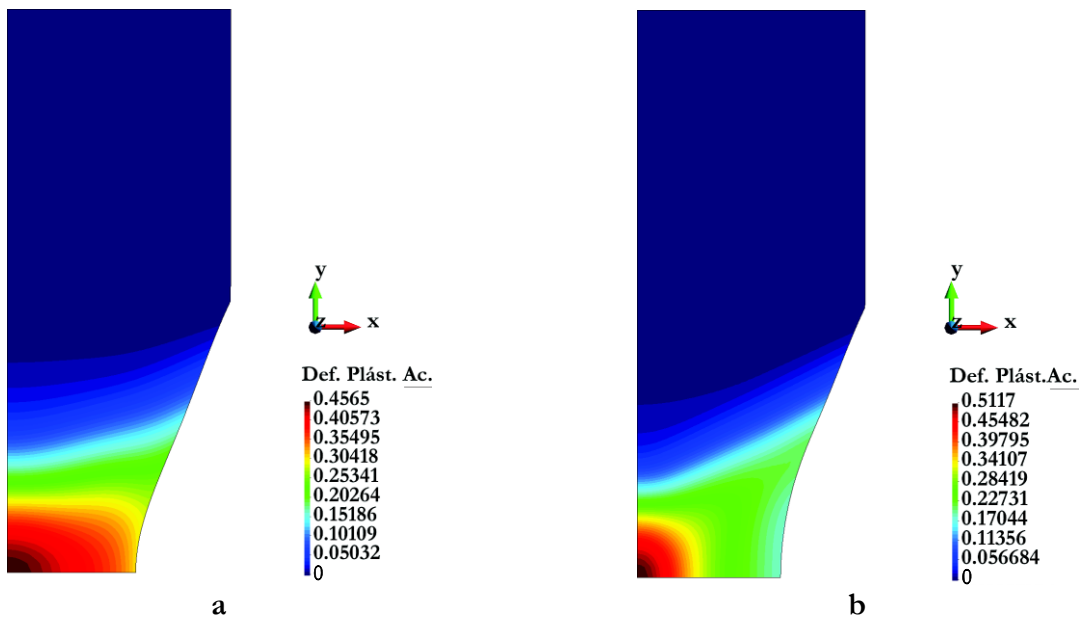


Figura 63 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  – SAE1045.

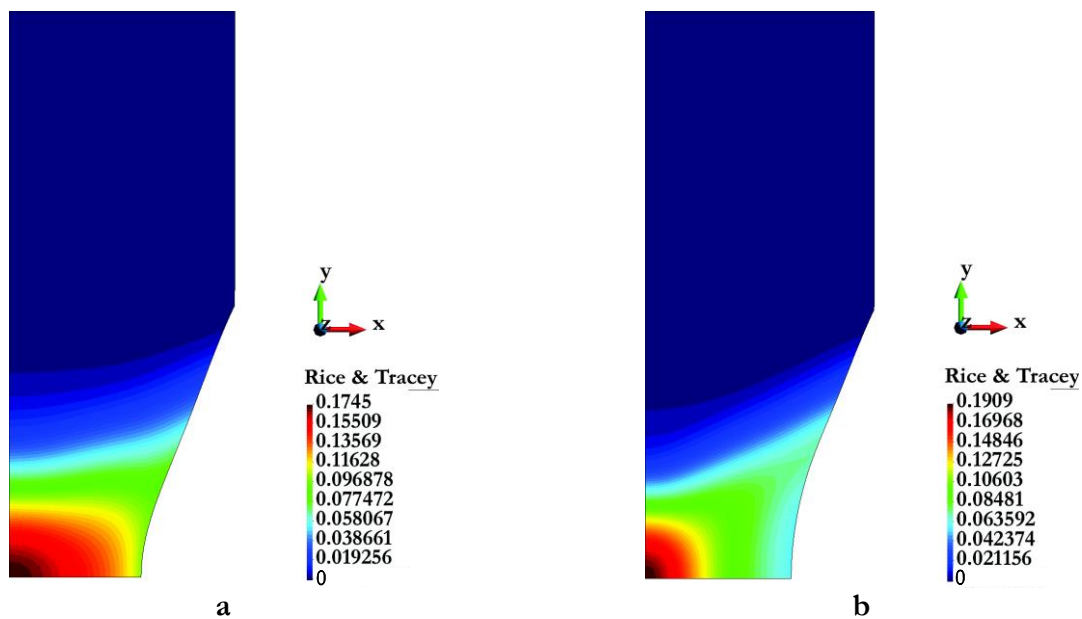


Figura 64 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  – SAE1045.

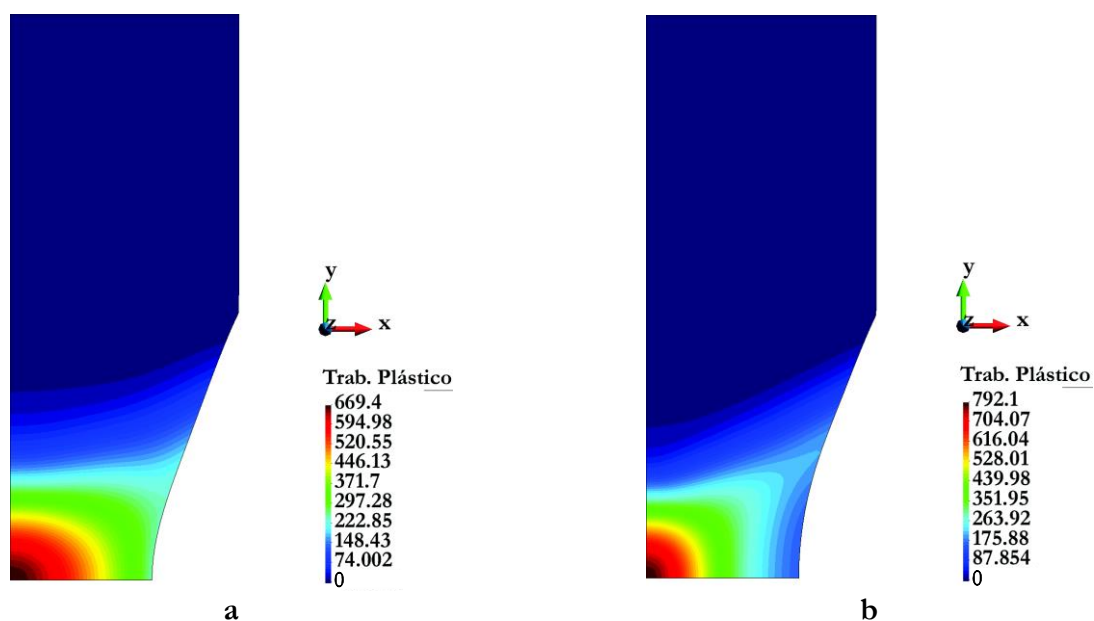


Figura 65 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12mm$  – SAE1045.

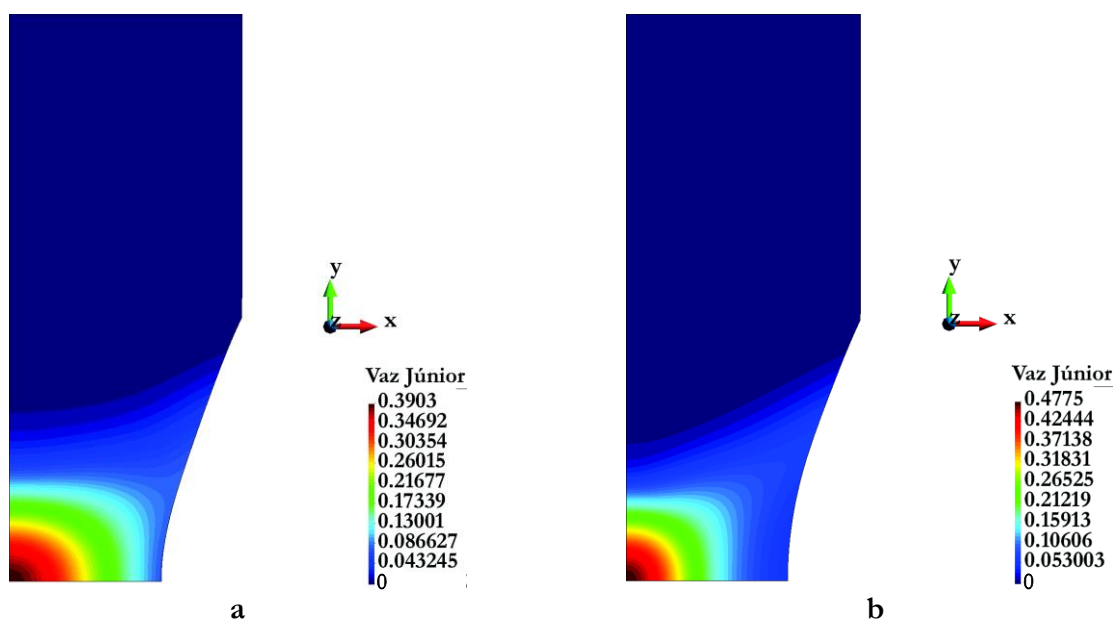


Figura 66 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12\text{mm}$  – SAE1045.

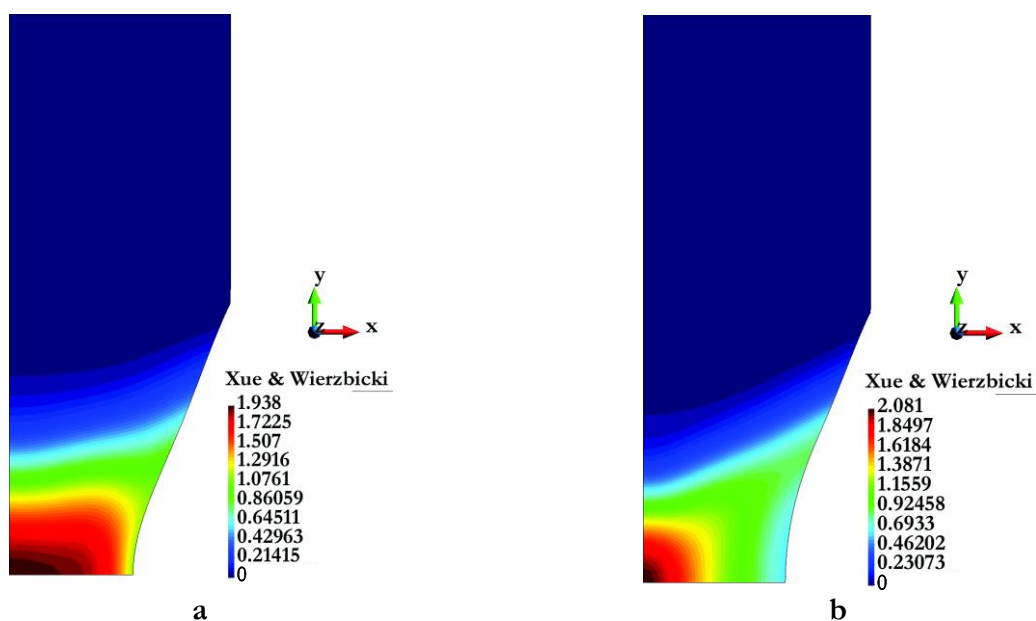


Figura 67 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova cilíndrico entalhado com  $R = 12\text{mm}$  – SAE1045.

Semelhante ao já observado na seção referente a calibração dos indicadores de fratura para a liga de aço *SAE1045*, a introdução do efeito do parâmetro elasto-plástico  $J_3$  na lei de fluxo plástico do modelo constitutivo impacta diretamente na distribuição dos indicadores, tornando a localização dos valores críticos mais concentrada na região onde a falha do material é observada experimentalmente. Neste sentido, para o corpo de prova cilíndrico entalhado, os valores críticos dos indicadores se localizaram mais ao centro do espécime após a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor desviador na formulação constitutiva, assim, a descrição do local esperado para a falha dúctil se apresentou de maneira mais precisa e acurada.

As Tabelas 6 e 7 apresentam, respectivamente, os resultados numéricos obtidos ao final das simulações de cada um dos indicadores de fratura dúctil associados ao modelo de Gao et al. na configuração capaz de recuperar a formulação de von Mises e ao modelo de Gao et al. com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

A primeira coluna das tabelas de resultados apresenta os valores críticos obtidos ao final da calibração dos indicadores realizada com o corpo de prova cilíndrico sem entalhe em aço *SAE1045*. A segunda coluna apresenta o deslocamento experimental crítico extraído de Bai (2008) que conduziu ensaios de tração no espécime cilíndrico entalhado em seus trabalhos. O valor do deslocamento experimental é utilizado como referência para o cálculo do erro na previsão numérica para a falha, isto é, compara-se o deslocamento numérico com o experimental para verificar a capacidade preditiva dos indicadores com relação ao instante esperado para a fratura dúctil.

Os resultados numéricos são apresentados nas colunas três, deslocamento numéricos crítico, e quatro, valor obtido para o indicador quando o deslocamento numérico crítico é atingido. Por último, a quinta coluna apresenta o erro percentual associado a diferença entre o deslocamento numérico crítico e o deslocamento experimental crítico.

Tabela 6 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045 – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ .

*Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado – SAE 1045 – Gao et al.  $a = b = 0$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.3041	0.35	0.6710	0.3043	91.71
Cockcroft & Latham	1.554E + 16	0.35	0.6710	1.556E + 16	91.71
Deformação Plástica Acumulada	0.4562	0.35	0.6710	0.4565	91.71
Rice & Tracey	0.1740	0.35	0.6430	0.1745	83.71
Trabalho Plástico Total	669.5000	0.35	0.5390	669.4000	54.00
Vaz Jr.	0.3902	0.35	0.4420	0.3903	26.29
Xue & Wierzbicki	1.9390	0.35	0.7150	1.9380	104.29

Tabela 7 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045 – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

*Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado – SAE 1045 – Gao et al.  $a = 0$  e  $b = -60,75$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.3411	0.35	0.5870	0.3412	67.71
Cockcroft & Latham	1.798E + 16	0.35	0.5850	1.790E + 16	67.14
Deformação Plástica Acumulada	0.5116	0.35	0.5870	0.5117	67.71
Rice & Tracey	0.1908	0.35	0.5580	0.1909	59.43
Trabalho Plástico Total	792.3000	0.35	0.4650	792.1000	32.86
Vaz Jr.	0.4777	0.35	0.3730	0.4775	6.57
Xue & Wierzbicki	2.0850	0.35	0.6020	2.0810	72.00



Por meio da análise das Tabelas 6 e 7, é possível constatar que a introdução do efeito do terceiro invariante ( $J_3$ ) aperfeiçoou tanto a capacidade preditiva dos indicadores para o local esperado para a fratura, quanto para o instante esperado. Nas duas configurações adotadas para o modelo de Gao et al., o indicador de fratura dúctil de Vaz Jr. (1998) e o indicador associado ao trabalho plástico total foram os que apresentaram as melhores previsões com os menores erros associados. Contudo, é importante observar a redução considerável do erro para todos os indicadores após a introdução do efeito do  $J_3$ , como exemplo, o indicador de Xue & Wierzbicki (2008) obteve uma redução de aproximadamente 30% no erro do deslocamento numérico.

Quanto ao comportamento dos indicadores, observa-se otimismo na previsão do instante para a falha por todas as sete formulações analisadas, com um deslocamento numérico crítico muito superior ao obtido experimentalmente. Com a introdução do  $J_3$ , o comportamento do modelo constitutivo de Gao et al. para a descrição do comportamento elasto-plástico da liga de aço *SAE1045* fora da condição de calibração se apresentou menos otimista e mais próximo das observações experimentais, quando comparado com os resultados obtidos pelo critério de von Mises (Figura 26). Como consequência, a introdução desse efeito também tornou o comportamento dos indicadores de fratura mais próximos da resposta experimental, tornando-os menos conservativos em relação às suas configurações associadas ao modelo de von Mises.

Ilustra-se as distribuições dos indicadores de fratura dúctil e o efeito do terceiro invariante  $J_3$  nestas distribuições por meio das Figuras 68 e 69, onde mais uma vez fica claro a redução dos patamares nas distribuições e concentração mais pontual do local esperado para a fratura, fenômeno já observado na etapa de calibração dos indicadores.

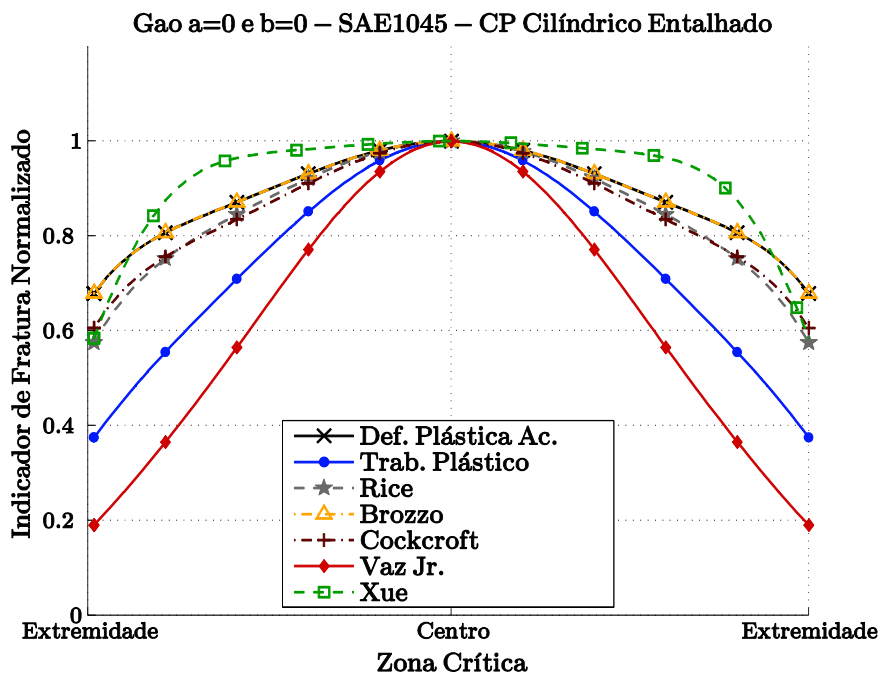


Figura 68 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045.

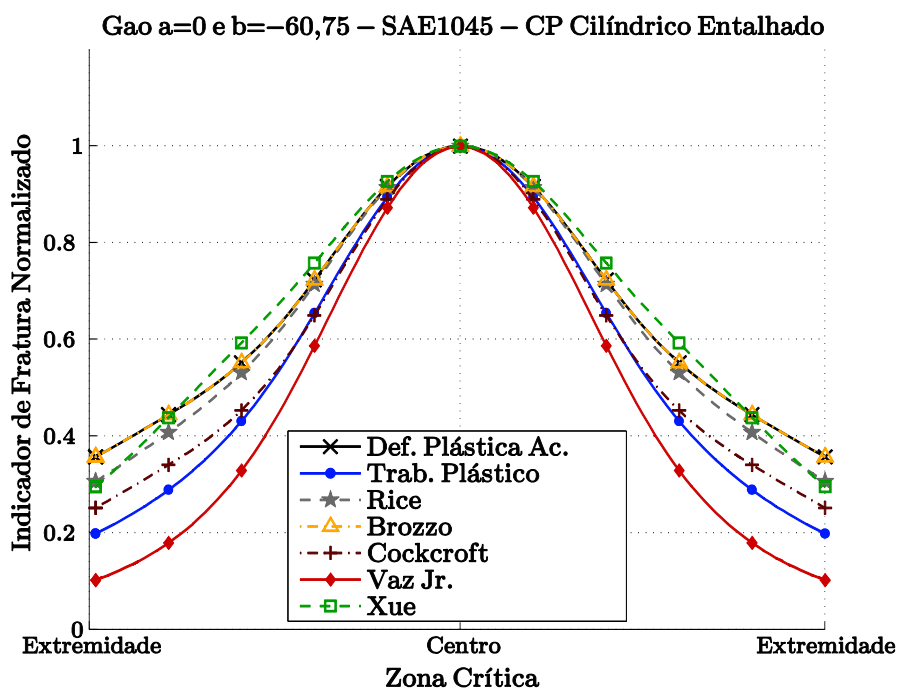


Figura 69 – Distribuição dos indicadores de fratura ao longo da zona crítica associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova cilíndrico entalhado – SAE1045.

### Corpo de prova “Borboleta”

Uma análise similar à apresentada para o corpo de prova cilíndrico entalhado foi conduzida para o corpo de prova “Borboleta” em liga de aço *SAE1045*, cuja geometria foi previamente apresentada na Figura 10 e a sua discretização na Figura 12, com o intuito de avaliar o comportamento dos indicadores sob um nível inicial de triaxialidade nulo. Da mesma forma, o objetivo desta análise consiste na determinação numérica do local e instante esperado para a falha para a consequente comparação com os resultados experimentais apresentados por Bai (2008).

Nas Figuras 70 a 76 são apresentados os contornos dos sete indicadores de fratura em estudo neste trabalho: Brozzo et al. (1972), Cockcroft & Latham (1968), deformação plástica acumulada, Rice & Tracey (1969), trabalho plástico total, Vaz Jr. (1998) e Xue & Wierzbicki (2008) associados ao modelo de Gao et al. na configuração com  $a = b = 0$ , e com  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

Experimentalmente, observa-se que a fratura dúctil no corpo de prova “Borboleta” sujeito à cisalhamento puro se inicia de fora para dentro na seção de prova, isto é, das paredes para o centro do espécime (Bai, 2008). Neste sentido, pode-se constatar pelos resultados dos contornos apresentados nas Figuras 70 a 76 que todos os indicadores abordados neste trabalho obtiveram êxito na determinação do local esperado para a fratura.

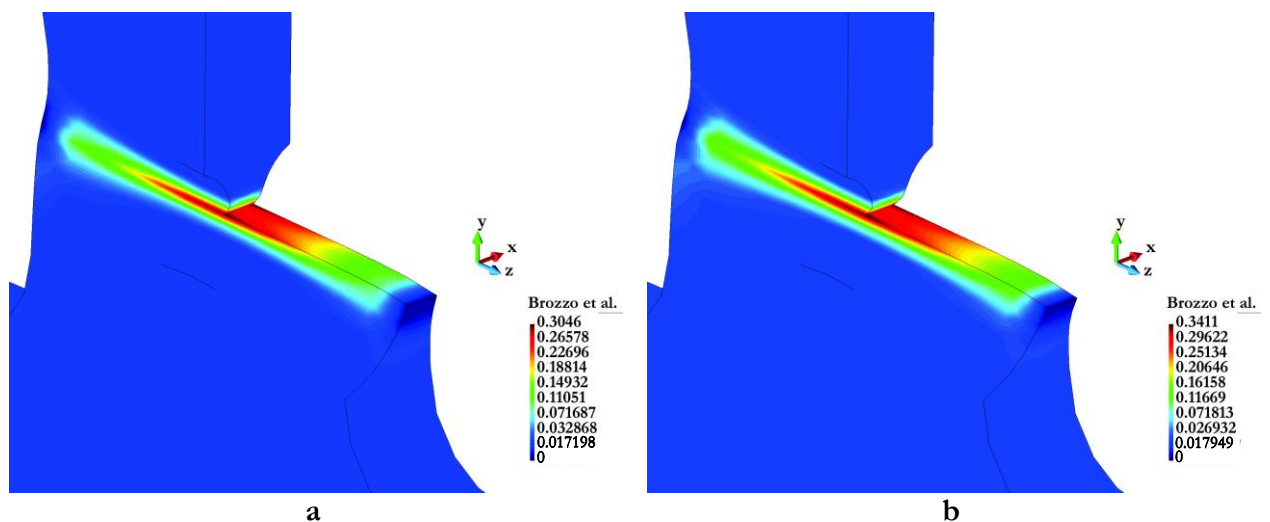


Figura 70 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “Borboleta” – *SAE1045*.

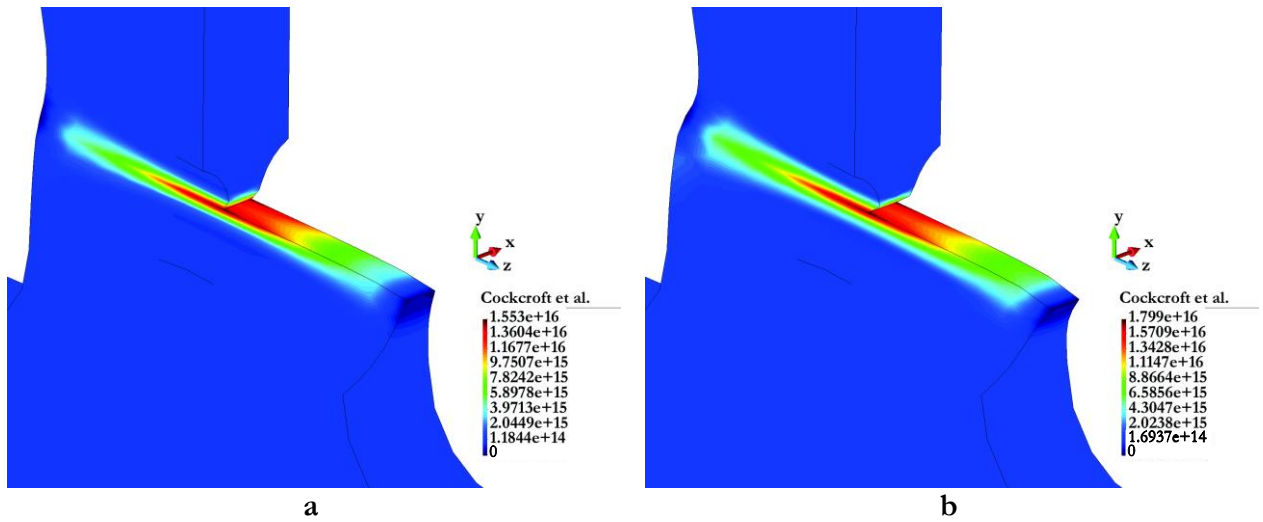


Figura 71 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

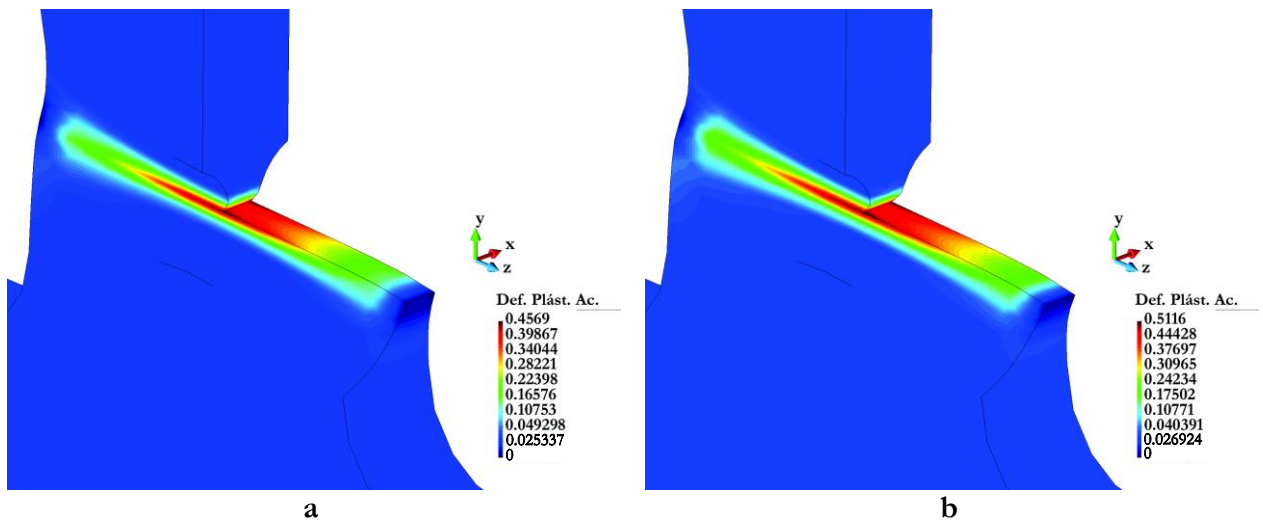


Figura 72 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

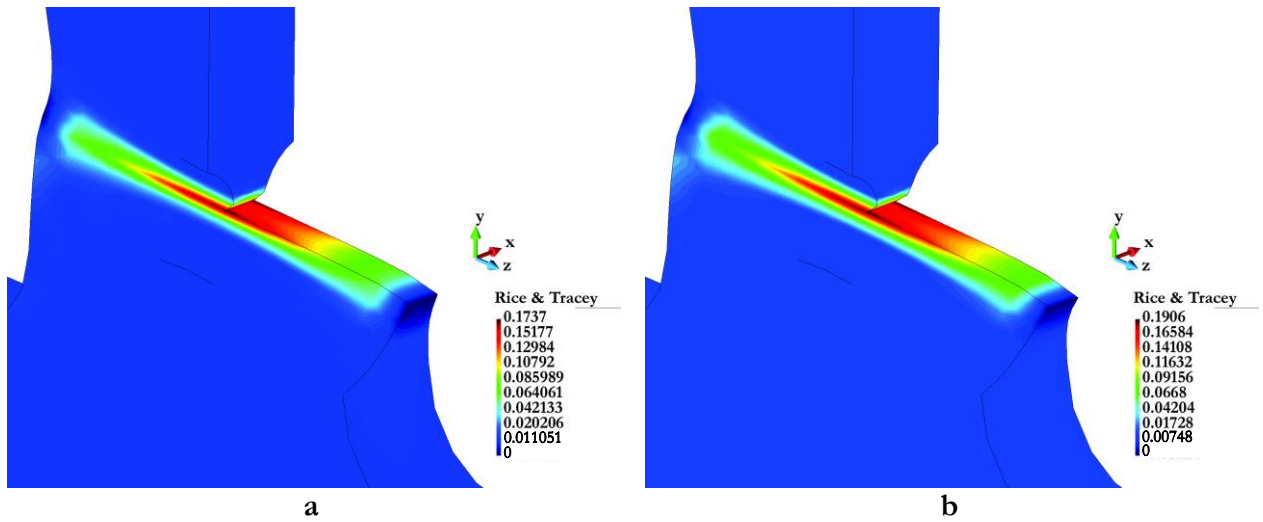


Figura 73 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “*Borboleta*” – SAE1045.

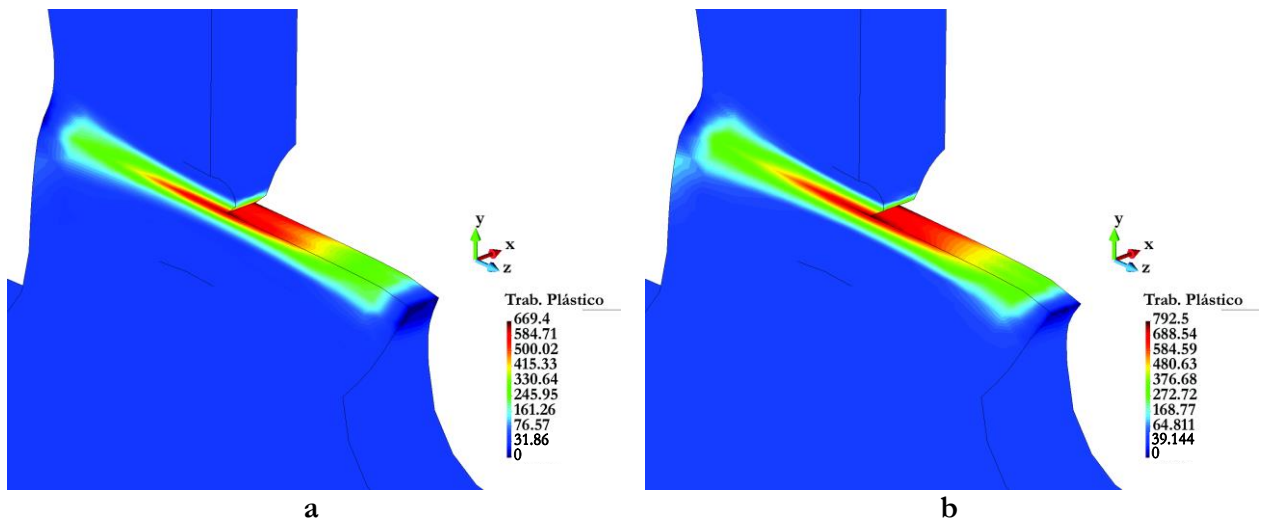


Figura 74 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “*Borboleta*” – SAE1045.

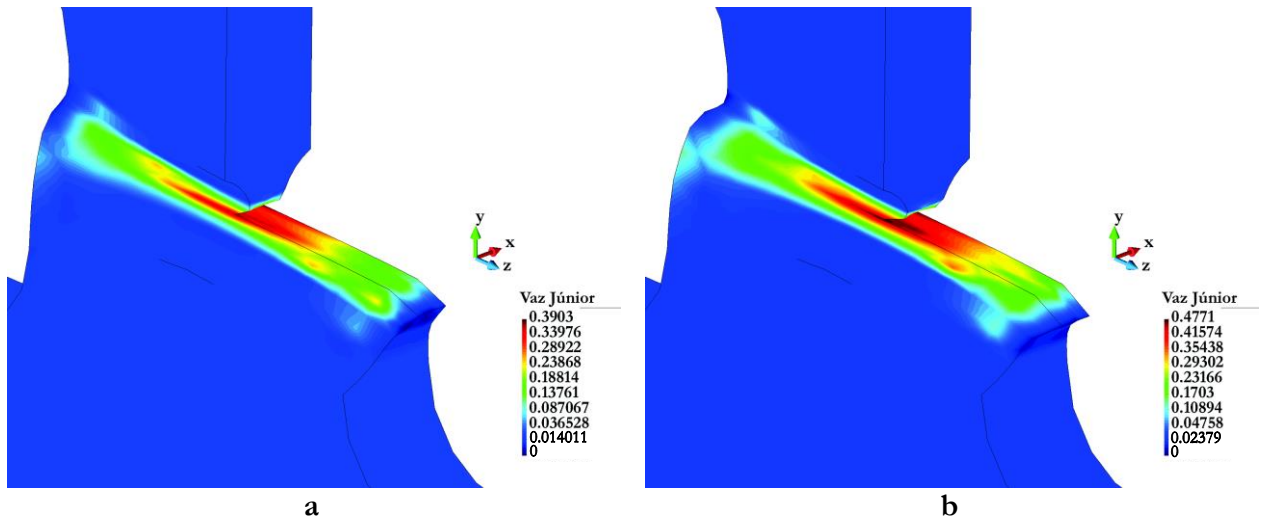


Figura 75 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

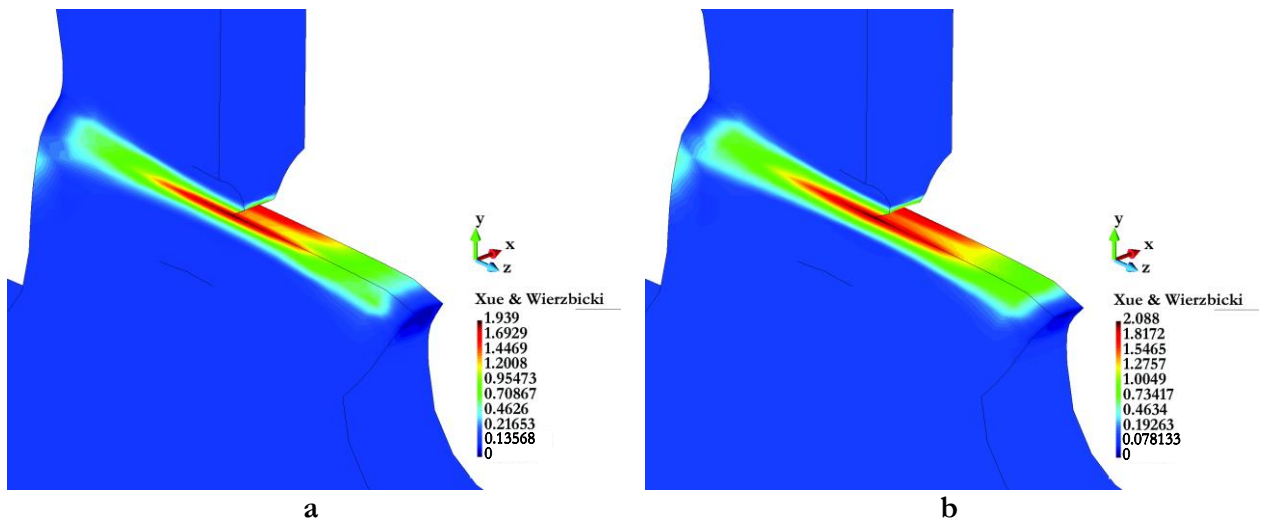


Figura 76 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

As Tabelas 8 e 9 apresentam de forma quantificada os resultados obtidos nas simulações numéricas com o corpo de prova “*Borboleta*” nas duas configurações do modelo constitutivo de Gao et al., conforme a organização já apresentada anteriormente com relação às Tabelas 6 e 7 referentes ao corpo de prova cilíndrico entalhado.

Na configuração com  $a = b = 0$  (Tabela 8), o indicador de fratura proposto por Vaz Jr. (1998) apresentou mais uma vez o menor erro na previsão do instante para a fratura dúctil. Por outro lado, os indicadores de Brozzo et al. (1972), Cockcroft & Latham (1968) e da deformação plástica foram os que apresentaram os maiores erros na predição do deslocamento para a fratura. Contudo, ao se adotar  $b = -60,75$  e introduzir o efeito do  $J_3$  (Tabela 9), os indicadores de fratura passaram a apresentar um comportamento menos distante das observações experimentais e menos conservativos. Dessa forma, foi o indicador de Xue & Wierzbicki (2008) que apresentou o melhor resultado. Nesta configuração dependente deste parâmetro elasto-plástico, o critério de Vaz Jr. (1998) não mais apresentou uma boa resposta, com erros superiores a 50%, porém o critério de Brozzo et al. (1972) que havia apresentado um dos piores resultados na configuração que recupera von Mises, reduziu de maneira significativa o seu erro associado a predição do deslocamento para a fratura do espécime “*Borboleta*”.

**Tabela 8 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova “*Borboleta*” – SAE1045 – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ .**

*Corpo de Prova “Borboleta” – SAE 1045 – Gao et al.  $a = b = 0$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.3041	1.00	0.4440	0.3046	-55.60
Cockcroft & Latham	1.554E + 16	1.00	0.4550	1.553E + 16	-54.50
Deformação Plástica Acumulada	0.4562	1.00	0.4440	0.4569	-55.60
Rice & Tracey	0.1740	1.00	0.5870	0.1737	-41.30
Trabalho Plástico Total	669.5000	1.00	0.6460	669.4000	-35.40
Vaz Jr.	0.3902	1.00	1.0250	0.3903	2.50
Xue & Wierzbicki	1.9390	1.00	0.8680	1.9390	-13.20

**Tabela 9 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova “Borboleta” – SAE1045 – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .**

*Corpo de Prova “Borboleta” – SAE 1045 – Gao et al.  $a = 0$  e  $b = -60,75$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.3411	1.00	0.5510	0.3411	-44.90
Cockcroft & Latham	1.798E + 16	1.00	0.8000	1.799E + 16	-20.00
Deformação Plástica Acumulada	0.5116	1.00	0.5510	0.5116	-44.90
Rice & Tracey	0.1908	1.00	0.7380	0.1906	-26.20
Trabalho Plástico Total	792.3000	1.00	0.9120	792.5000	-8.80
Vaz Jr.	0.4777	1.00	1.5430	0.4771	54.30
Xue & Wierzbicki	2.0850	1.00	1.0860	2.0880	8.60

Encerra-se a análise dos indicadores de fratura para a solitação cisalhante do corpo de prova “Borboleta” através da inspeção de suas curvas de distribuição, conforme apresentam as Figuras 77 a 80. Devido à adoção de um problema tridimensional para a simulação do espécime “Borboleta”, a análise da distribuição dos indicadores é realizada de maneira similar ao apresentado para o corpo de prova retangular sem entalhe na seção de calibração da liga de alumínio aeronáutico, isto é, analisa-se a distribuição dos indicadores ao longo das direções  $X$  e  $Z$  na zona crítica obtida numericamente (conforme orientação ao lado das imagens de contorno).

Ao se analisar a Figura 77 (von Mises) e Figura 79 (Gao et al. com  $b = -60,75$ ) com as distribuições dos indicadores de fratura ao longo da direção  $X$ , confirma-se que a falha dúctil no espécime “Borboleta” se inicia nas paredes de sua seção de prova, conforme já observado na imagens dos contornos dos indicadores ilustrados nas Figuras 70 a 76. A análise ao longo da direção  $Z$  (Figura 78 e Figura 80), por sua vez, aponta que o local esperado para a fratura dúctil no espécime “Borboleta” se dá em sua região central. Juntando as conclusões obtidas sobre a análise na direção  $X$  e  $Z$ , têm-se que o local de início da falha neste espécime será na região central das paredes da seção de prova, o que é comprovado experimentalmente (ver Bai, 2008).



Tanto nas distribuições ao longo da direção  $X$ , quanto ao longo de  $Z$ , a introdução do  $J_3$  tornou as distribuições mais suaves, com reduções de patamares e localização mais exata do local esperado para a fratura.

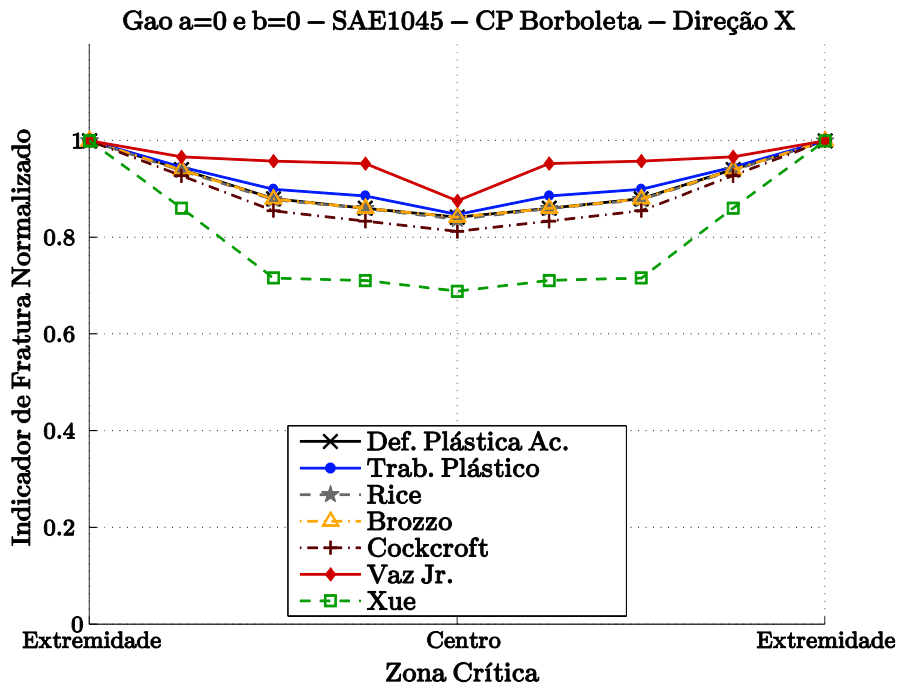


Figura 77 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

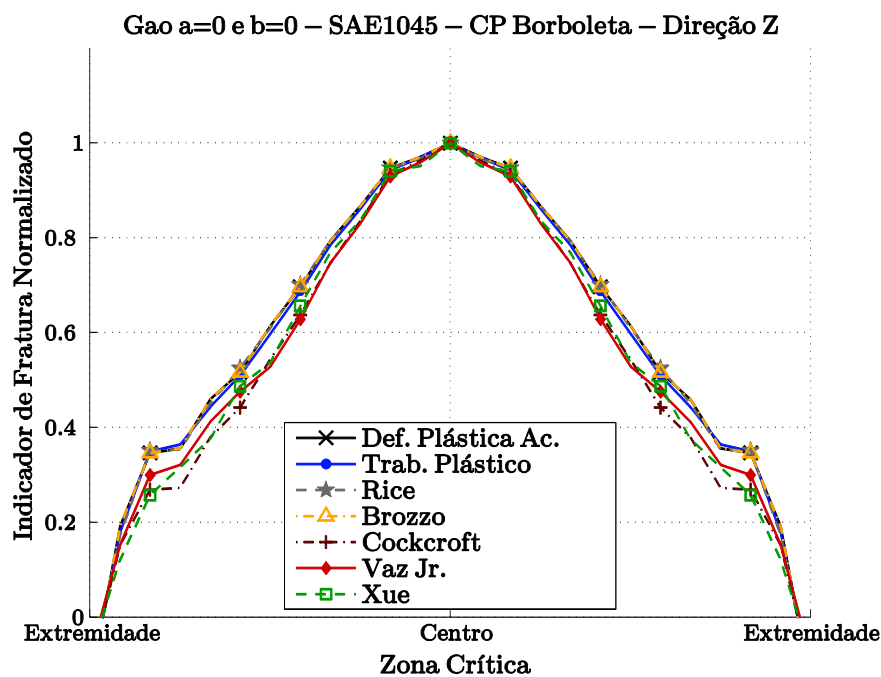


Figura 78 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

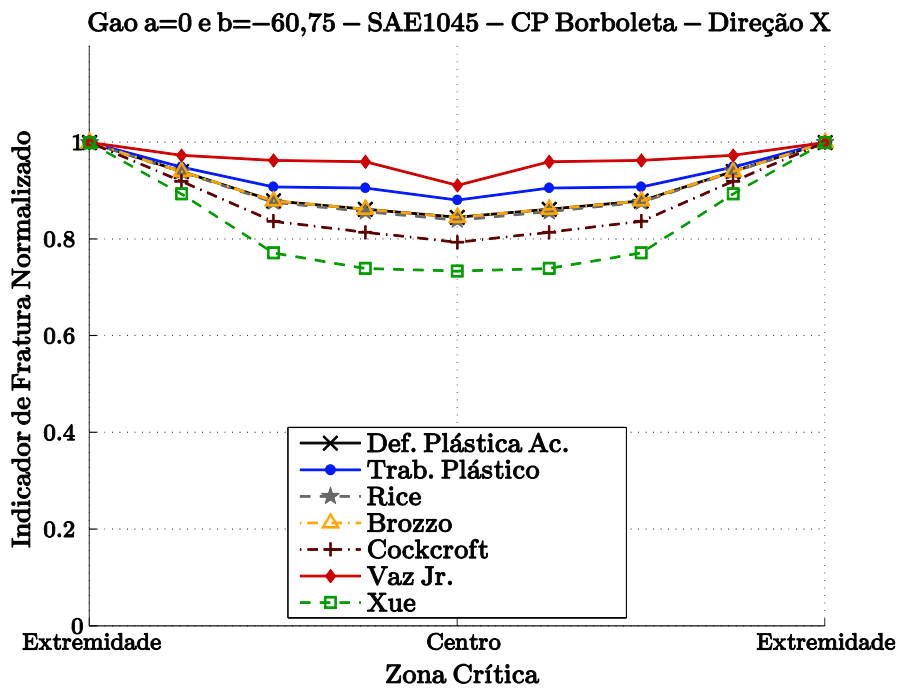


Figura 79 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

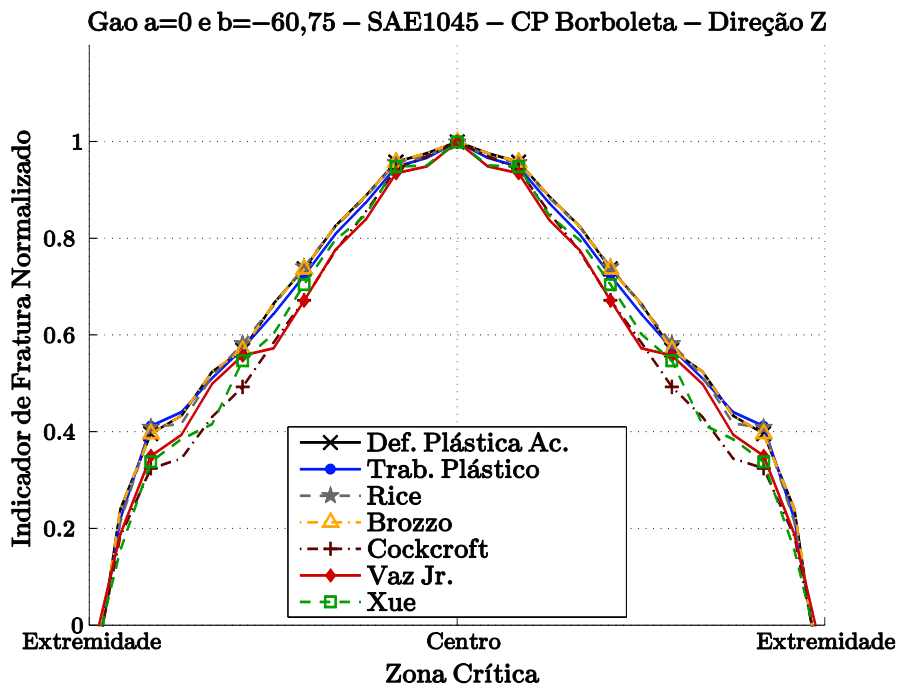


Figura 80 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova “Borboleta” – SAE1045.

#### 4.5.2. Liga de Alumínio Aeronáutico

Terminada a análise dos indicadores de fratura fora da condição de calibração para a liga de aço *SAE1045*, iniciou-se uma investigação similar para a liga de alumínio aeronáutico com o intuito de avaliar a capacidade preditiva dos indicadores com relação ao instante e local esperado para a falha dúctil em condições de baixo nível de triaxialidade (Corpo de prova para cisalhamento – Figuras 16 e 18) e de níveis mais elevados para a razão de triaxialidade (Espécimes entalhados com raios de 10 e 50mm – Figuras 46 a 48), sendo que entalhes mais agudos apresentam níveis de triaxialidades iniciais mais elevados.

A organização desta seção segue o mesmo padrão apresentado para a análise dos espécimes em aço *SAE1045*. Desta maneira, analisa-se primeiramente os corpos de provas entalhados e em seguida o espécime para ensaio cisalhante com a liga de alumínio aeronáutico.

#### Corpo de Prova Retangular Entalhado com $R = 10mm$

Os primeiros resultados obtidos para a avaliação de desempenho dos indicadores de fratura com relação ao corpo de prova retangular com entalhe de 10mm foram os contornos dos indicadores nas duas configurações do modelo de Gao et al. adotadas neste trabalho: a)  $a = b = 0$  (von Mises) e b)  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . As imagens referentes a esses resultados são apresentados da Figura 81 até a Figura 87.

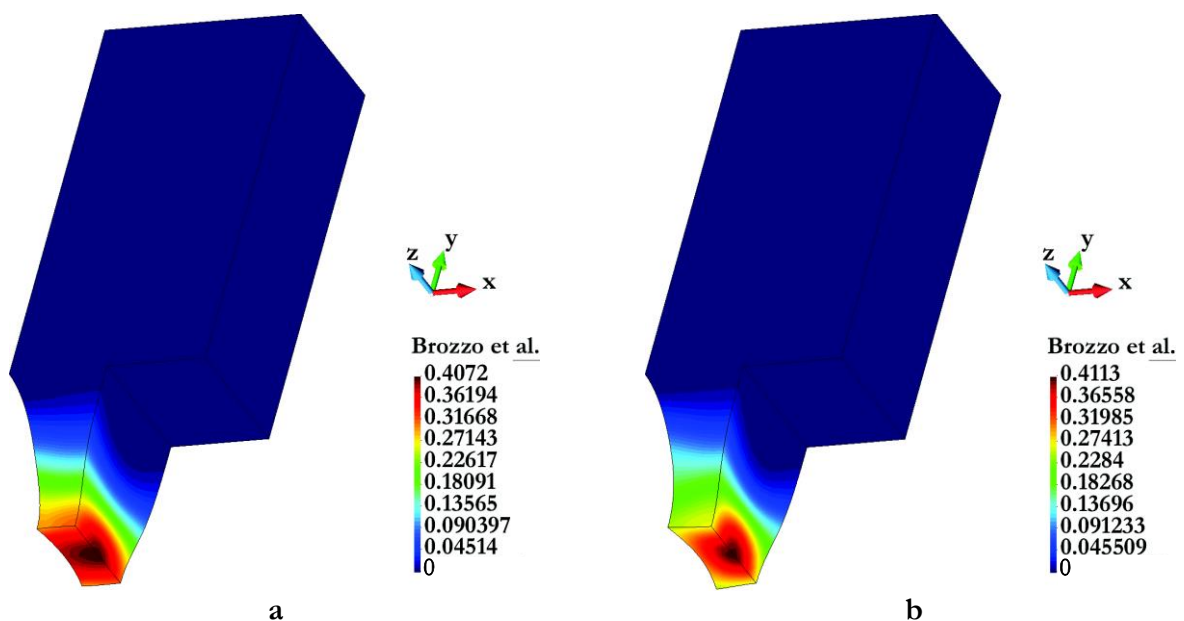


Figura 81 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10mm$  – Alumínio aeronáutico.

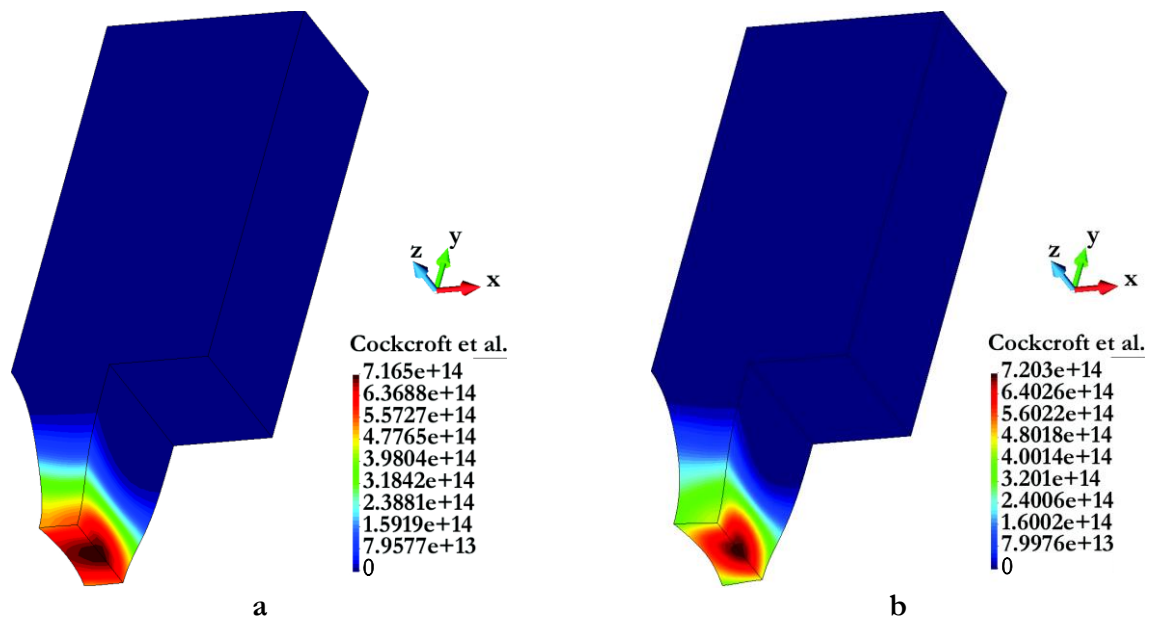


Figura 82 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

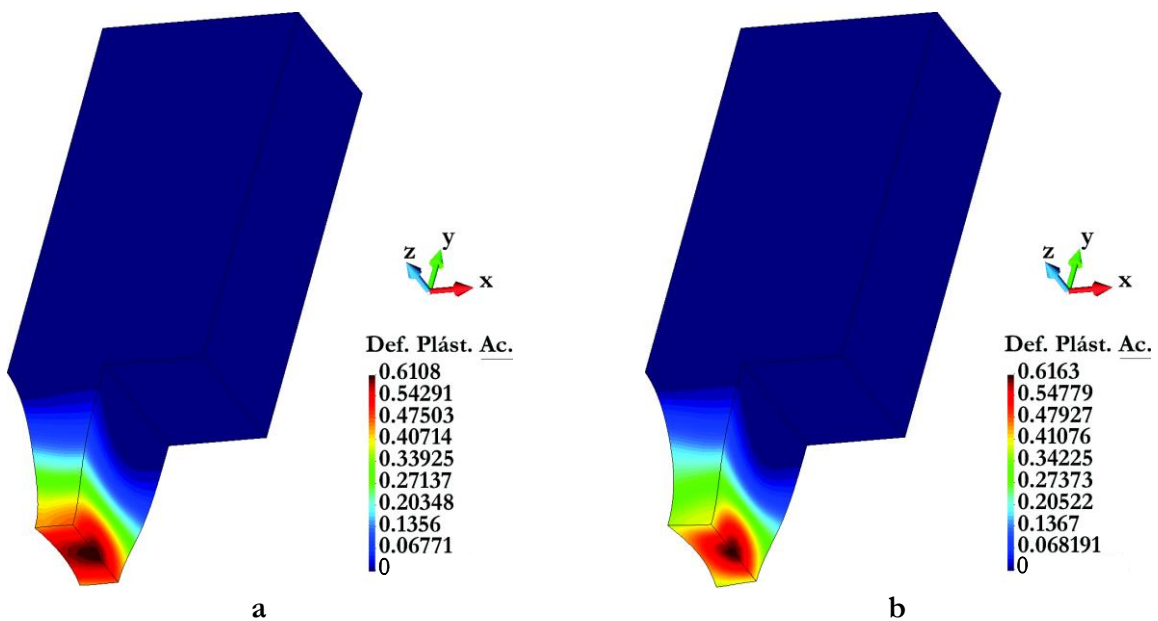


Figura 83 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

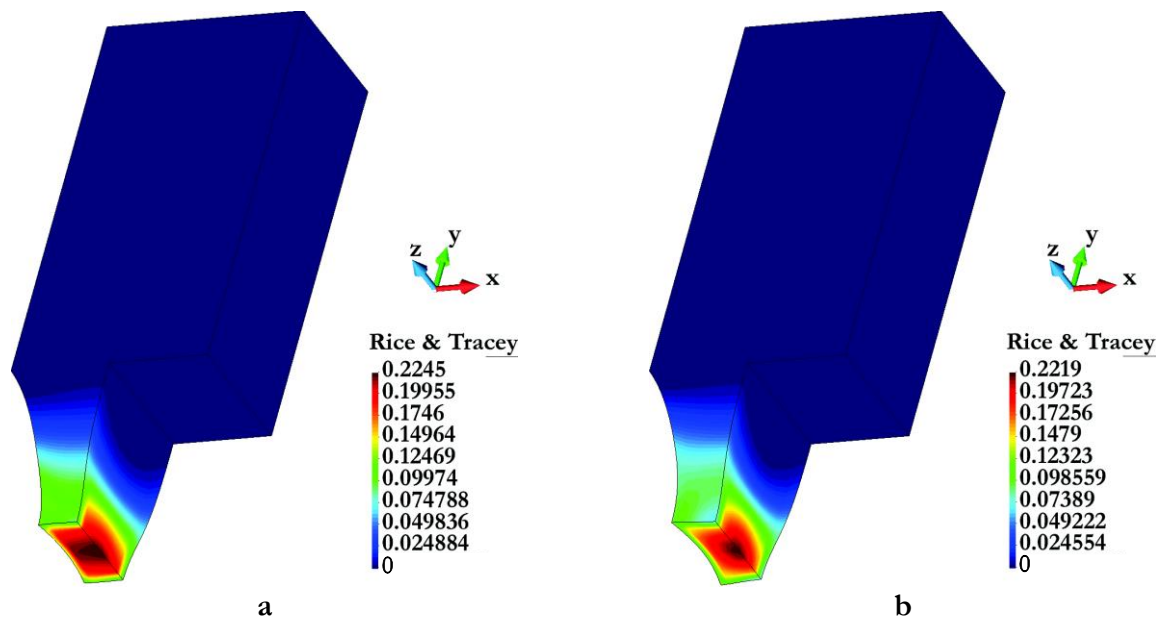


Figura 84 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

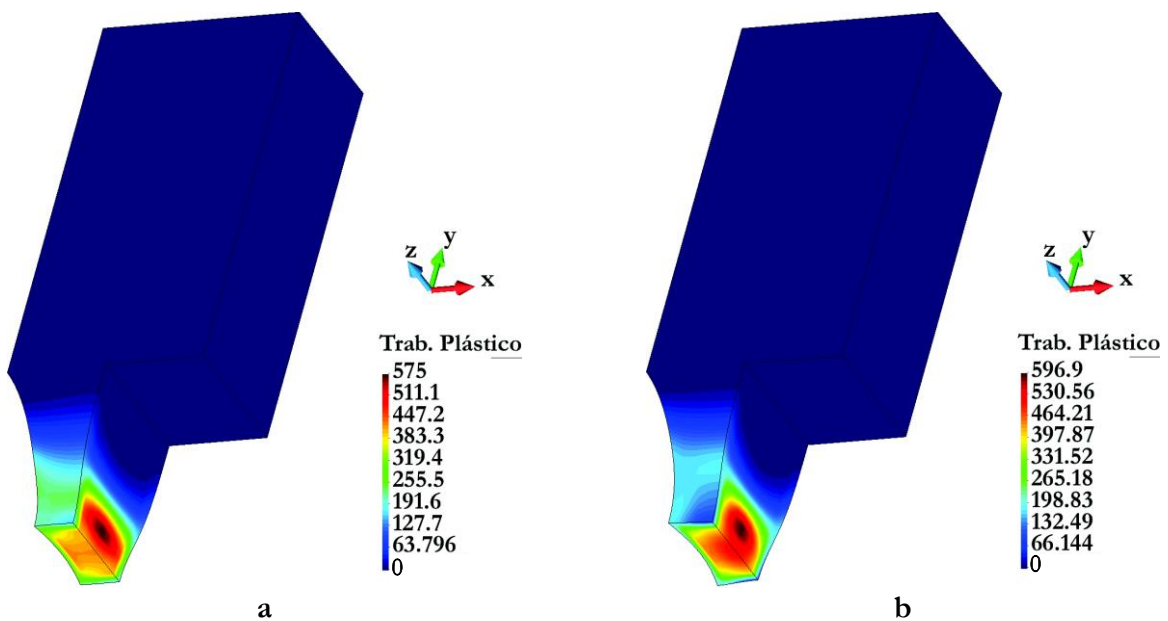


Figura 85 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

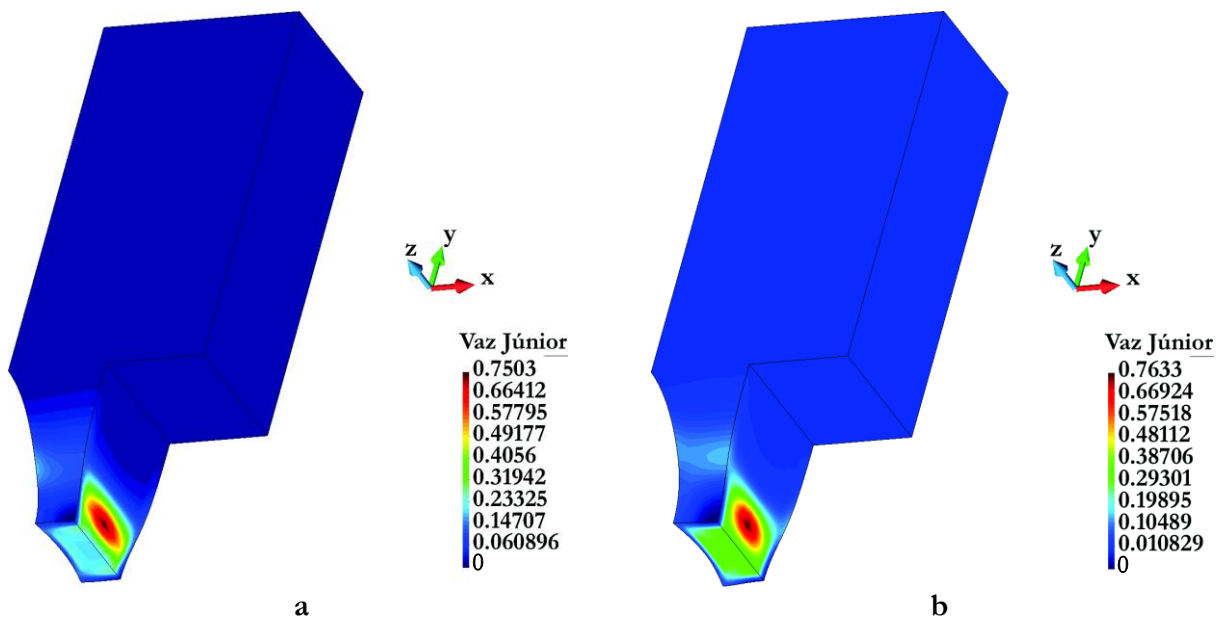


Figura 86 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

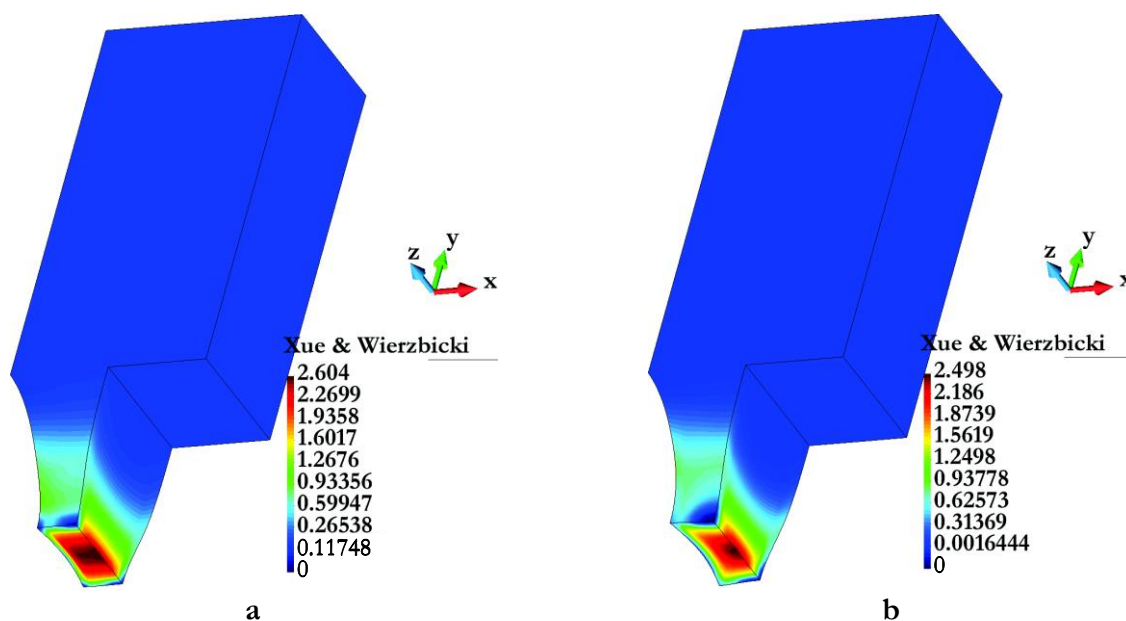


Figura 87 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

Conforme já observado na análise da liga *SAE1045*, no procedimento de calibração dos indicadores com a liga de alumínio aeronáutico, e agora para o corpo de prova entalhado, a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras faz com que o local esperado para a falha dúctil se torne mais concentrado, isto é, têm-se uma zona crítica melhor definida, com concentração mais localizada dos valores críticos dos indicadores de fratura.

Para a avaliação do instante esperado para a falha, o espécime retangular entalhado com  $R = 10mm$  foi simulado em uma condição de tração uniaxial considerando um deslocamento numérico capaz de atingir os valores críticos de cada um dos indicadores, os quais foram obtidos previamente na etapa de calibração da liga de alumínio. Tal deslocamento é considerado como o deslocamento numérico crítico, e este é utilizado na avaliação da capacidade de um dado indicador em prever o correto instante para a falha através de sua comparação com o deslocamento experimental crítico.

As Tabelas 10 e 11 apresentam de maneira quantificada os resultados obtidos para cada um dos indicadores considerando as formulações de von Mises e de Gao et al. com  $b = -60,75$ . As duas primeiras colunas das tabelas apresentam os resultados de referência: valor crítico do indicador na condição de calibração e deslocamento experimental crítico para a falha do espécime retangular entalhado com  $R = 10mm$ . Em seguida, as colunas três e quatro apresentam os resultados obtidos pela simulação numérica com o deslocamento numérico crítico e o valor do indicador ao se atingir o deslocamento numérico crítico. A última coluna da tabela quantifica o erro entre os deslocamentos experimental e numérico crítico, onde o sinal negativo representa um comportamento conservativo do indicador, e por outro lado, para um erro positivo, têm-se um comportamento otimista.

Conclui-se ao se analisar as tabelas de resultados que os sete indicadores de fratura dúctil apresentaram bons resultados, e que nenhum indicador apresentou erros superiores a 5%. Porém entre todos os indicadores avaliados, a proposição de Cockcroft & Latham (1968) foi a que apresentou a maior consistência nos resultados, com os menores erros ( $< 2\%$ ) tanto na configuração sem o efeito do  $J_3$  quanto na configuração com o parâmetro elasto-plástico introduzido.

Com relação ao comportamento dos indicadores, os indicadores de Brozzo et al., Cockcroft & Latham e deformação plástica acumulada se mostraram mais otimistas, enquanto os critérios de Rice & Tracey, trabalho plástico, Vaz Jr. e Xue & Wierzbicki se apresentaram mais conservativos.

**Tabela 10 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe  $R = 10mm$  – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ .**

*Corpo de Prova Retangular com Entalhe  $R = 10mm$  – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = b = 0$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experm. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4073	1.15	1.1750	0.4072	2.17
Cockcroft & Latham	$7.161 E + 14$	1.15	1.1700	$7.165E + 14$	1.74
Deformação Plástica Acumulada	0.6109	1.15	1.1750	0.6108	2.17
Rice & Tracey	0.2241	1.15	1.1460	0.2245	-0.35
Trabalho Plástico Total	575.2000	1.15	1.1250	575.0000	-2.17
Vaz Jr.	0.7500	1.15	1.1124	0.7503	-3.27
Xue & Wierzbicki	2.6070	1.15	1.1130	2.6040	-3.22

**Tabela 11 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe  $R = 10mm$  – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ .**

*Corpo de Prova Retangular com Entalhe  $R = 10mm$  – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = 0$  e  $b = -60, 75$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experm. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4110	1.15	1.1750	0.4113	2.17
Cockcroft & Latham	$7.197E + 14$	1.15	1.1680	$7.203E + 14$	1.57
Deformação Plástica Acumulada	0.6165	1.15	1.1740	0.6163	2.09
Rice & Tracey	0.2221	1.15	1.1260	0.2219	-2.09
Trabalho Plástico Total	596.4000	1.15	1.1151	596.9000	-3.03
Vaz Jr.	0.7631	1.15	1.0940	0.7633	-4.87
Xue & Wierzbicki	2.4990	1.15	1.0958	2.4980	-4.71



Como passo final na análise para o corpo de prova retangular com entalhe mais agudo, avaliou-se as distribuições dos indicadores de fratura em duas direções distintas, ao longo de  $X$  (sentido da largura do espécime) e  $Z$  (no sentido da espessura do corpo de prova). Fica evidente o efeito do terceiro invariante no comportamento dos indicadores ao se analisar de maneira comparativa as Figuras 88 e 90, as quais representam as distribuições ao longo da direção  $X$  na zona crítica do espécime (região na qual se encontra o valor crítico). A distribuição passa a ser mais suave, com localização mais pontual/menos esparsa dos valores críticos. Observa-se a mesma modificação no comportamento dos indicadores ao longo da direção  $Z$  (Figura 89 e Figura 91), porém de maneira menos drástica.

Conclui-se ao final desta análise que todos os sete indicadores apresentaram um bom desempenho na predição do local e instante para a falha dúctil no espécime retangular entalhado ( $R = 10mm$ ) da liga de alumínio aeronáutico, e que o local previsto numericamente para a falha equivale ao observado experimentalmente, com início da fratura no interior do espécime e propagação em direção às extremidades/paredes da seção de prova.

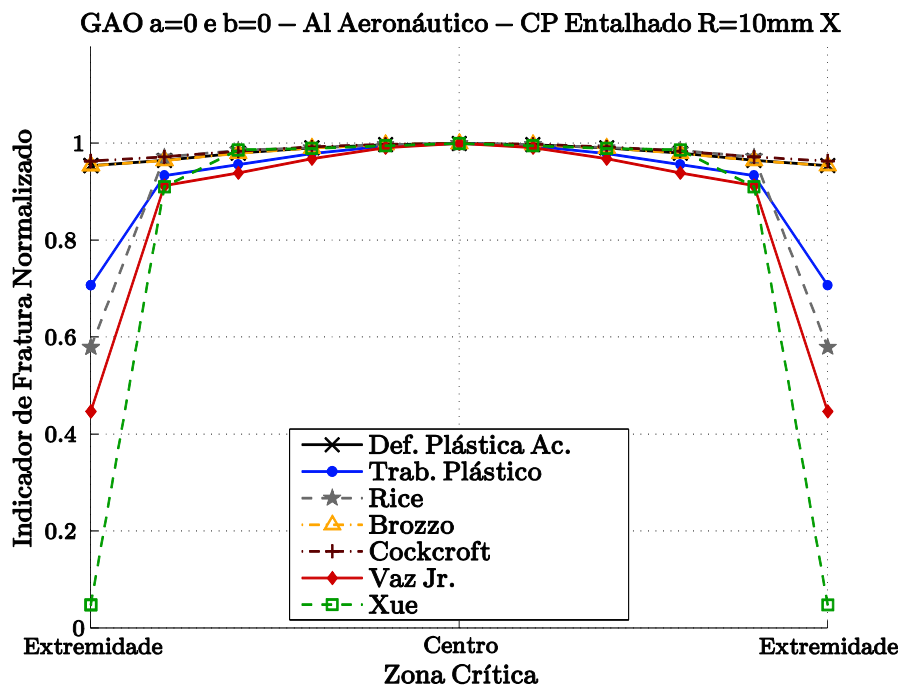


Figura 88 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10mm$  – Alumínio aeronáutico.

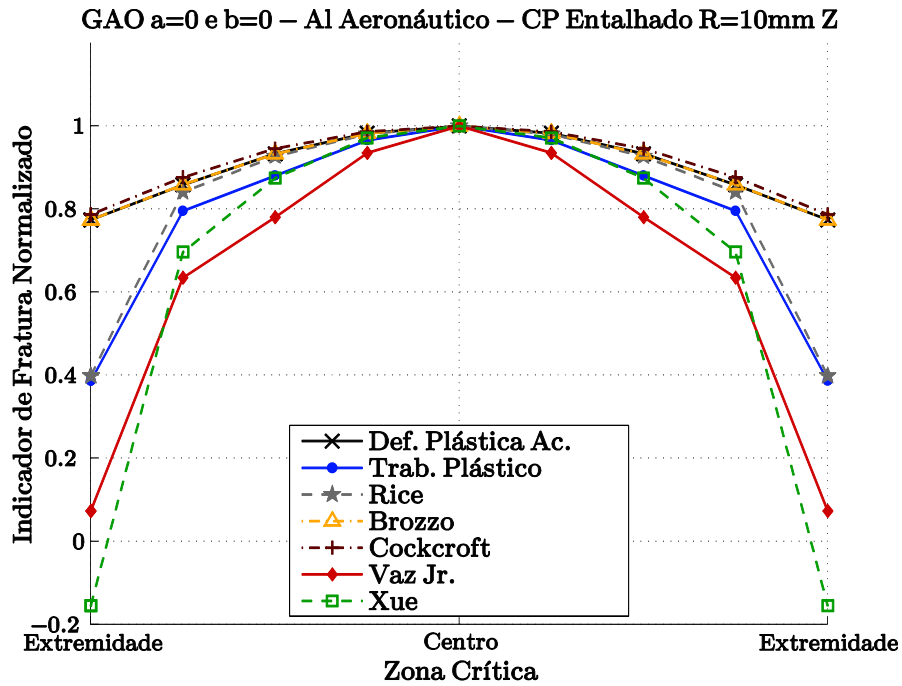


Figura 89 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

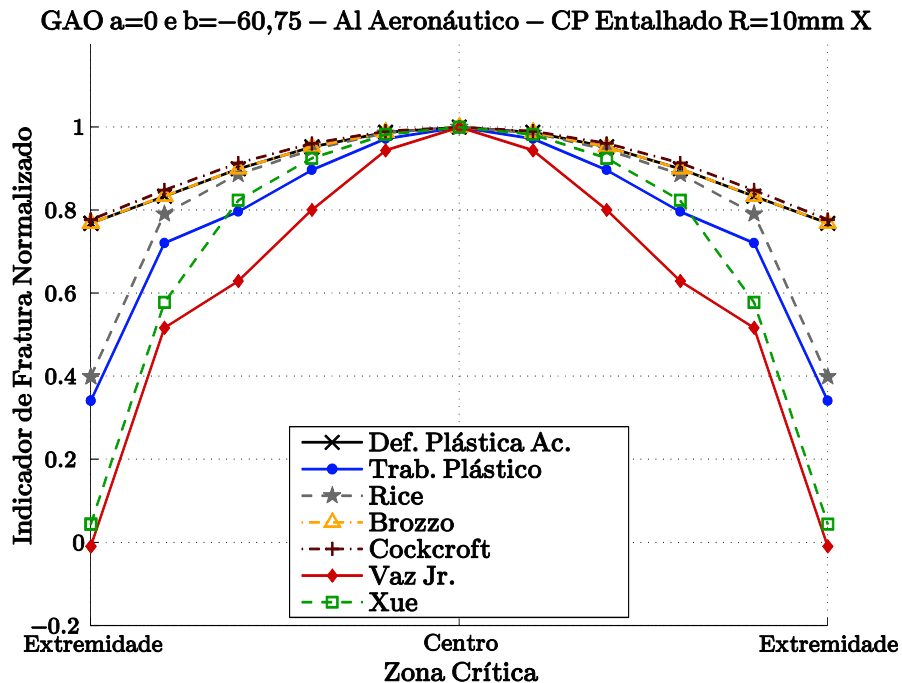


Figura 90 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

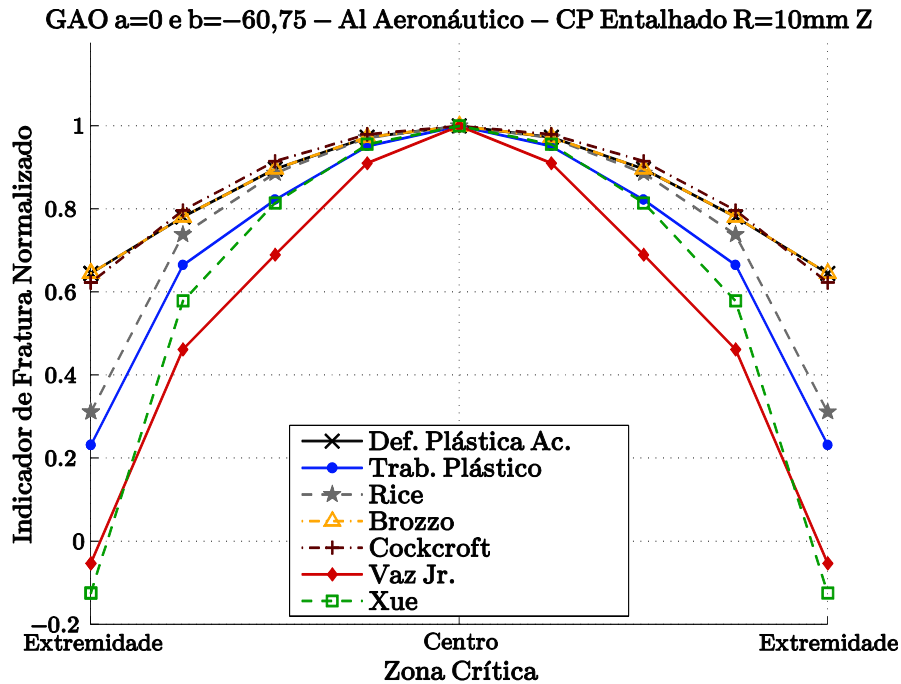


Figura 91 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova retangular entalhado  $R = 10mm$  – Alumínio aeronáutico.

### Corpo de Prova Retangular Entalhado com $R = 50mm$

Para a segunda bateria de simulações numéricas para a avaliação de desempenho dos indicadores de fratura dúctil com a liga de alumínio aeronáutico, optou-se pelo corpo de prova retangular com raio de entalhe de  $50mm$ , cujo nível da razão de triaxialidade no início da simulação se encontra abaixo do nível apresentado pela geometria com entalhe de  $R = 10mm$  e acima do nível para o espécime retangular sem entalhes, utilizado na calibração dos indicadores com a liga de alumínio.

Como primeiro procedimento desta avaliação, procura-se determinar o local esperado para o início da falha dúctil. Neste sentido, apresenta-se entre a Figura 92 e a Figura 98 os contornos dos indicadores de fratura obtidos a partir da simulação deste espécime com entalhe mais suave até os deslocamentos numéricos com os quais os valores críticos dos indicadores são atingidos. Nestas figuras, as imagens com legenda interna “a” representam os resultados obtidos nas simulações numéricas pela associação dos indicadores de fratura à formulação clássica de von Mises, e para as legendas “b” têm-se o modelo de Gao et al. para  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

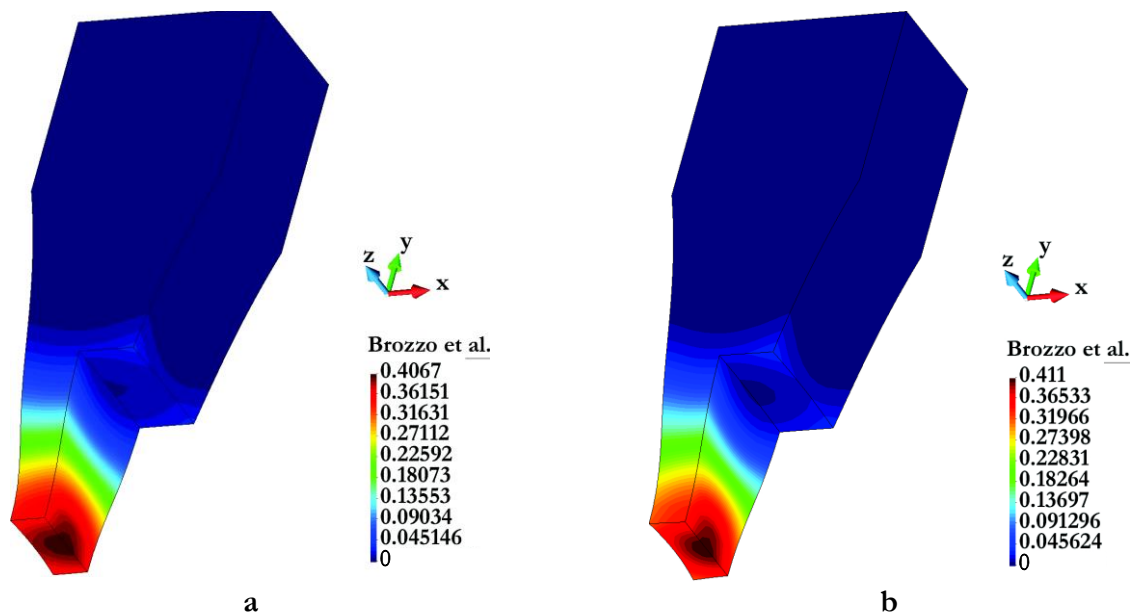


Figura 92 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

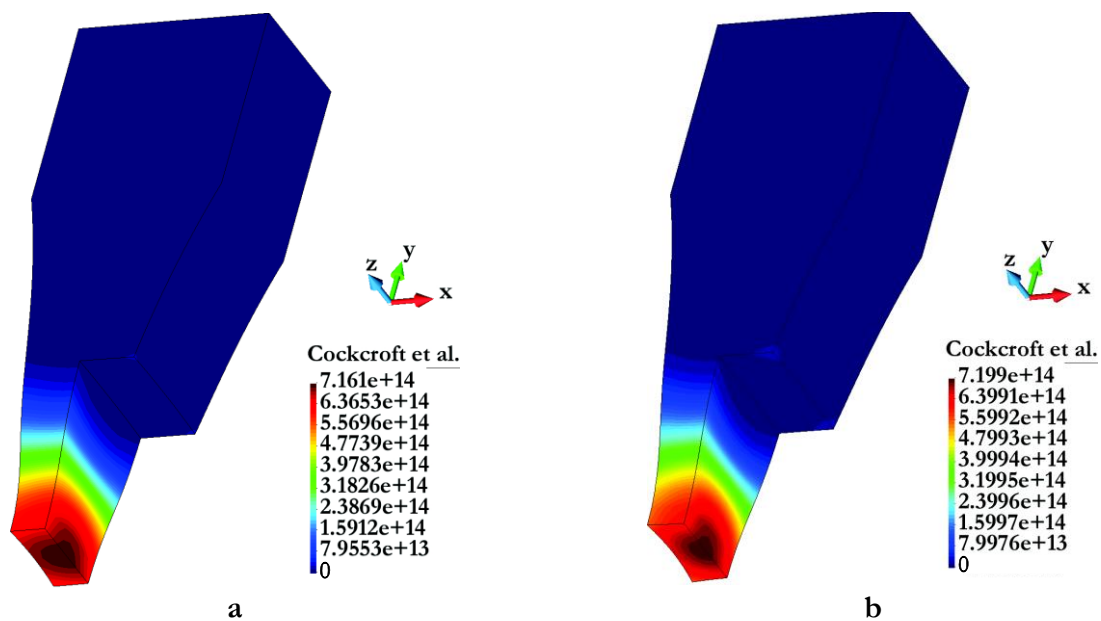


Figura 93 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

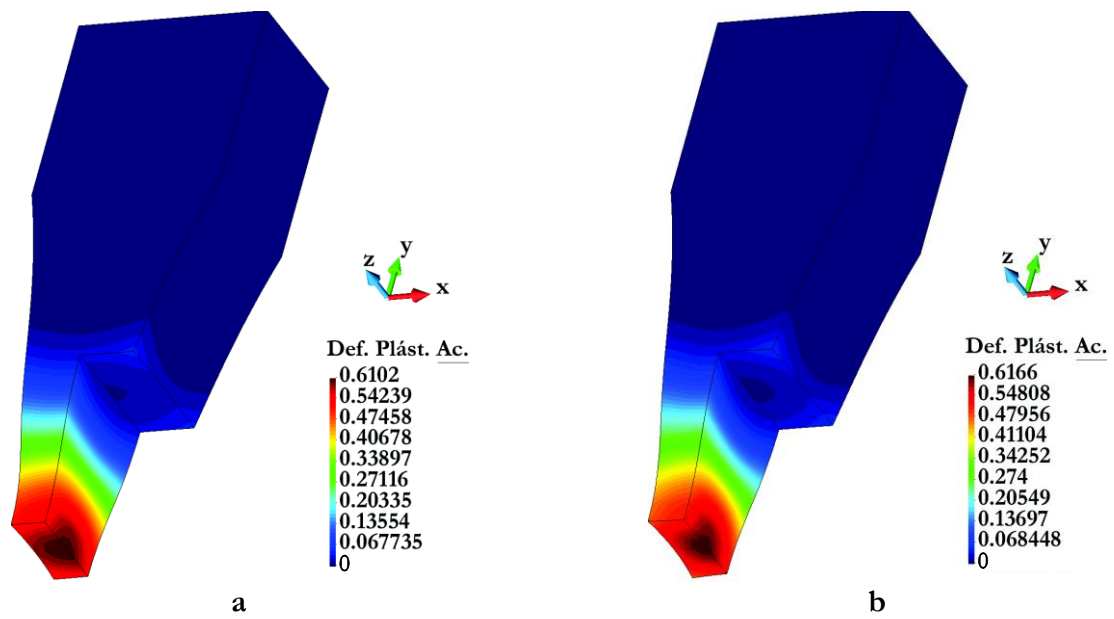


Figura 94 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

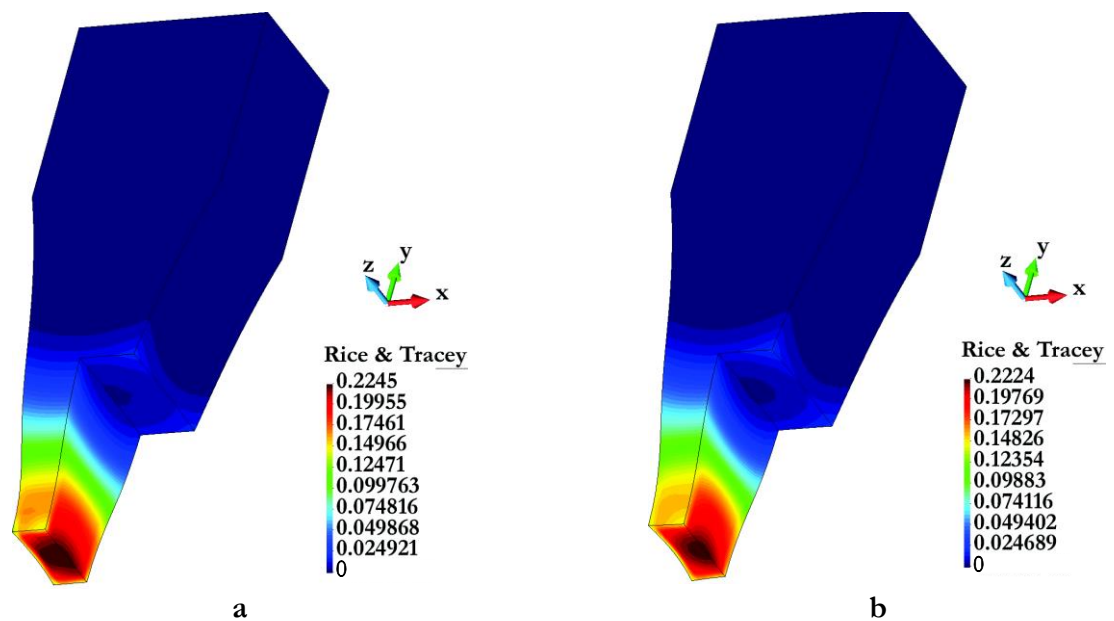


Figura 95 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

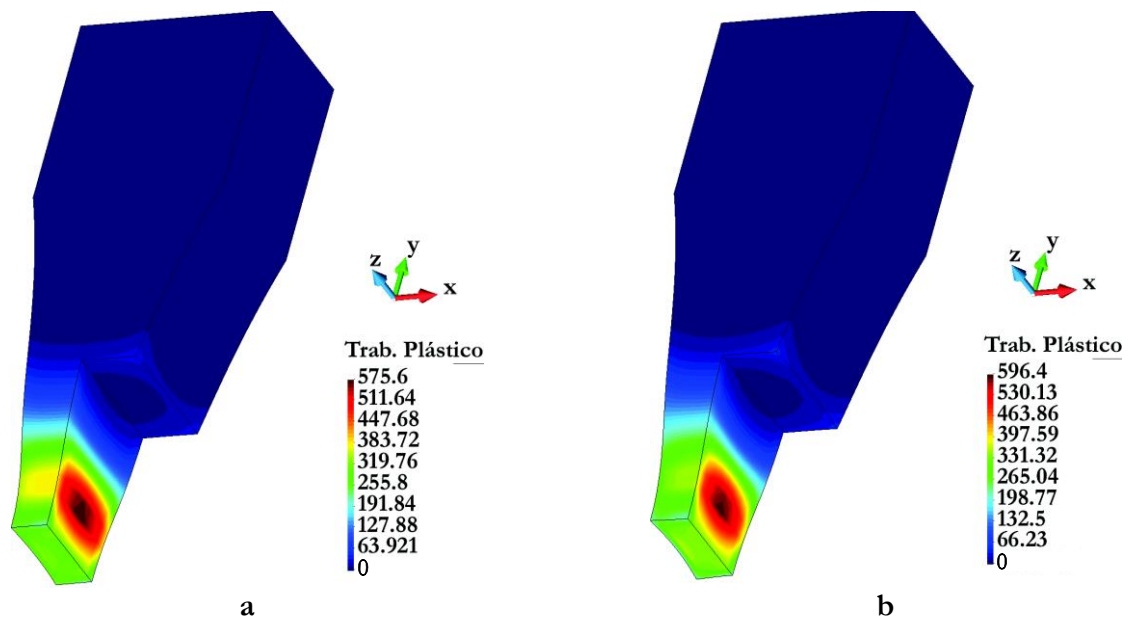


Figura 96 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

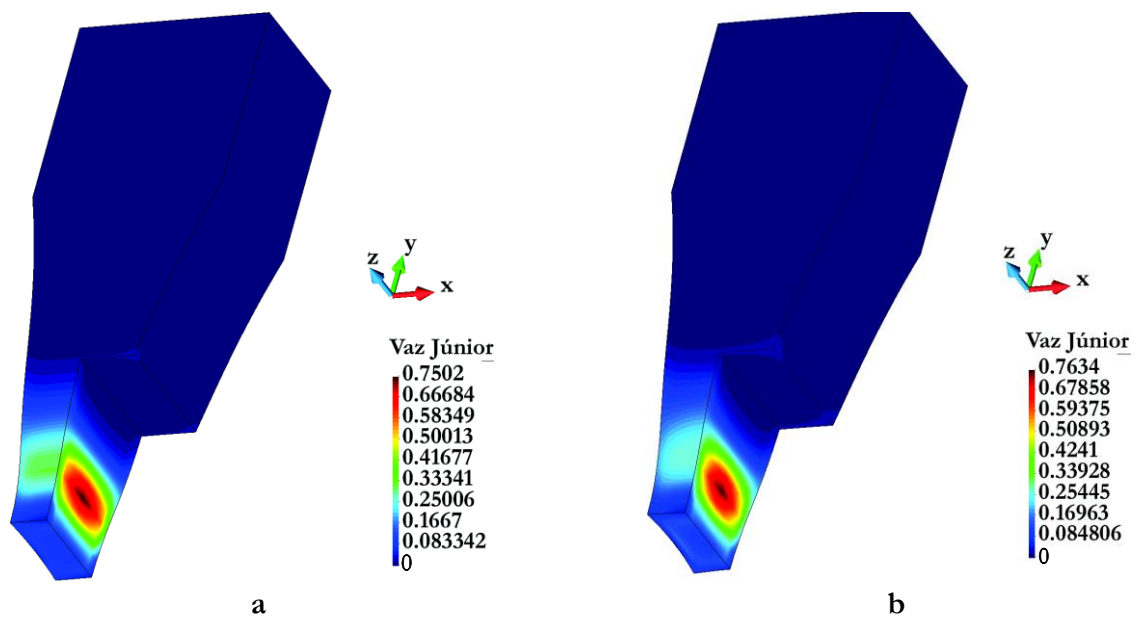


Figura 97 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

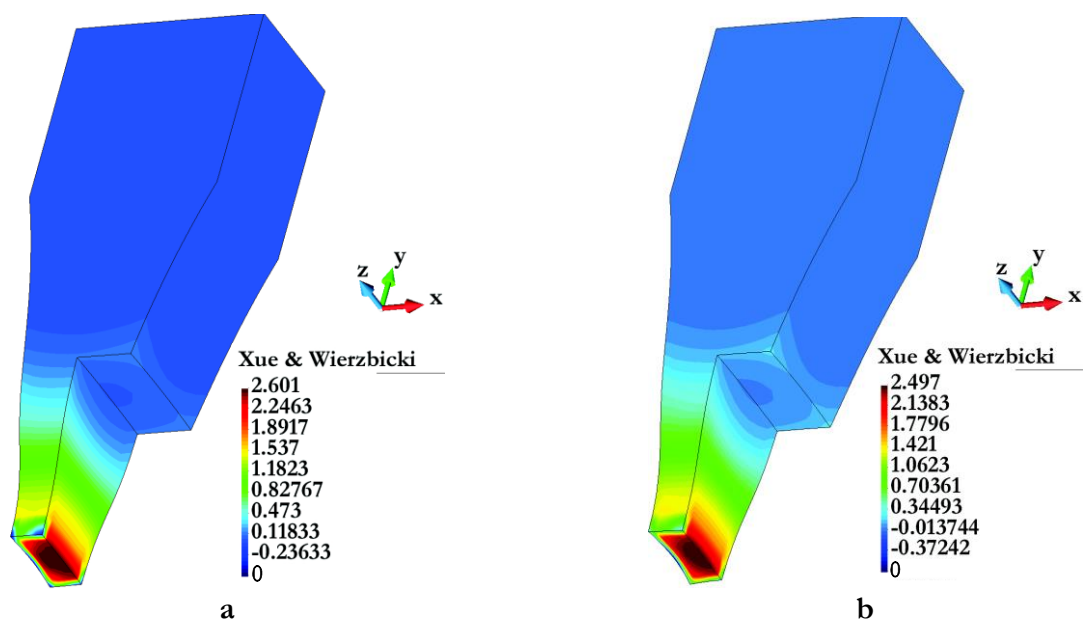


Figura 98 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

Diferentemente do observado nas simulações anteriores, em que a associação dos indicadores de fratura ao modelo constitutivo de Gao et al. com  $b = -60,75$  resultou em uma determinação mais acurada para o local de início da fratura dúctil, para os resultados das simulações do corpo de prova retangular com entalhe  $R = 50mm$  não houveram modificações expressivas e que pudessem ser observadas com clareza pelas imagens dos contornos das Figuras 92 a 98.

As Tabelas 12 e 13 seguem o mesmo padrão das tabelas de resultados das análises anteriores, onde as duas primeiras colunas apresentam os resultados tomados como referência para quantificação do desempenho dos indicadores quanto a precisão em prever o instante para a falha dúctil. A terceira e quarta coluna apresentam os resultados obtidos nas simulações e a quinta o erro calculado a partir da diferença entre o deslocamento experimental crítico e o deslocamento numérico crítico, para o qual o valor crítico do indicador é atingido na simulação com o corpo de prova com entalhe de  $R = 50mm$ .

Da mesma forma que não houve uma variação expressiva no contorno dos indicadores com a introdução do efeito do  $J_3$ , as Tabelas 12 e 13 também mostram que o comportamento desses indicadores também não foi modificado, praticamente mantendo as magnitudes dos erros apresentados para a configuração com o modelo constitutivo de von Mises.

Tabela 12 – Resultados para deslocamento numérico crítico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe  $R = 50\text{mm}$  – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ .

*Corpo de Prova Retangular com Entalhe  $R = 50\text{mm}$  – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = b = 0$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4073	2.00	2.0680	0.4067	3.40
Cockcroft & Latham	$7.161 E + 14$	2.00	2.0570	$7.161E + 14$	2.85
Deformação Plástica Acumulada	0.6109	2.00	2.0685	0.6102	3.42
Rice & Tracey	0.2241	2.00	2.2150	0.2245	10.75
Trabalho Plástico Total	575.2000	2.00	1.9021	575.6000	-4.90
Vaz Jr.	0.7500	2.00	1.8250	0.7502	-8.75
Xue & Wierzbicki	2.6070	2.00	2.4520	2.6010	22.60

Tabela 13 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova retangular com entalhe  $R = 50\text{mm}$  – Al. Aeronáutico – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60, 75$ .

*Corpo de Prova Retangular com Entalhe  $R = 50\text{mm}$  – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = 0$  e  $b = -60, 75$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4110	2.00	2.0680	0.4110	3.40
Cockcroft & Latham	$7.197E + 14$	2.00	2.0520	$7.199E + 14$	2.60
Deformação Plástica Acumulada	0.6165	2.00	2.0680	0.6166	3.40
Rice & Tracey	0.2221	2.00	2.2050	0.2224	10.25
Trabalho Plástico Total	596.4000	2.00	1.8980	596.4000	-5.10
Vaz Jr.	0.7631	2.00	1.8190	0.7634	-9.05
Xue & Wierzbicki	2.4990	2.00	2.4300	2.4970	21.50



Entre os indicadores que apresentaram os menores erros para a estimativa do instante para a falha estão: Brozzo et al, deformação plástica acumulada, trabalho total plástico, e Cockcroft & Latham. Novamente, este último indicador foi o que apresentou a maior consistência nos resultados, com os menores erros percentuais tanto na simulação com o modelo de von Mises quanto com a formulação de Gao et al. com  $b = -60,75$ . Por outro lado, o indicador de Xue & Wierzbicki apresentou os piores resultados, com erros que ultrapassaram os 20%.

Nas Figuras 99 e 101 são apresentadas as distribuições dos indicadores de fratura dúctil ao longo da direção  $X$  (direção da largura) para as duas configurações do modelo de Gao et al. com  $b = 0$  e  $b = -60,75$ . As curvas das distribuições apresentam de maneira mais clara o que já foi constatado nas imagens dos contornos dos indicadores, para o corpo de prova com entalhe mais suave não houve uma grande influência do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras, contudo ainda assim é possível observar que o seu efeito nos indicadores é suavizar as suas distribuições e concentrar de maneira mais precisa os valores críticos na região onde a fratura irá se iniciar. De maneira análoga, pode-se extrair as mesmas conclusões das distribuições dos indicadores ao longo da direção  $Z$  apresentadas pelas Figuras 100 e 102.

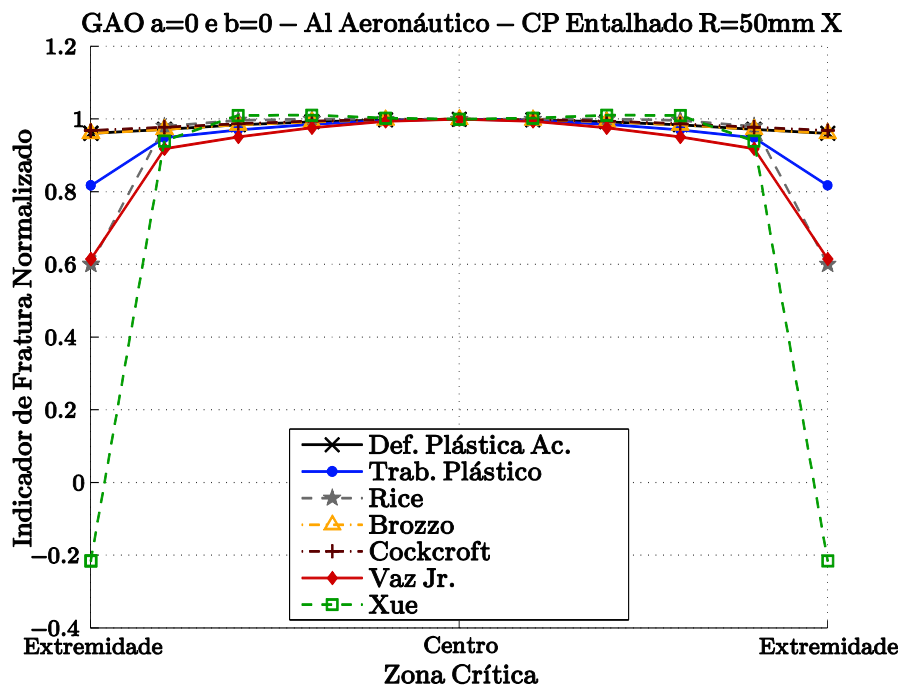


Figura 99 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

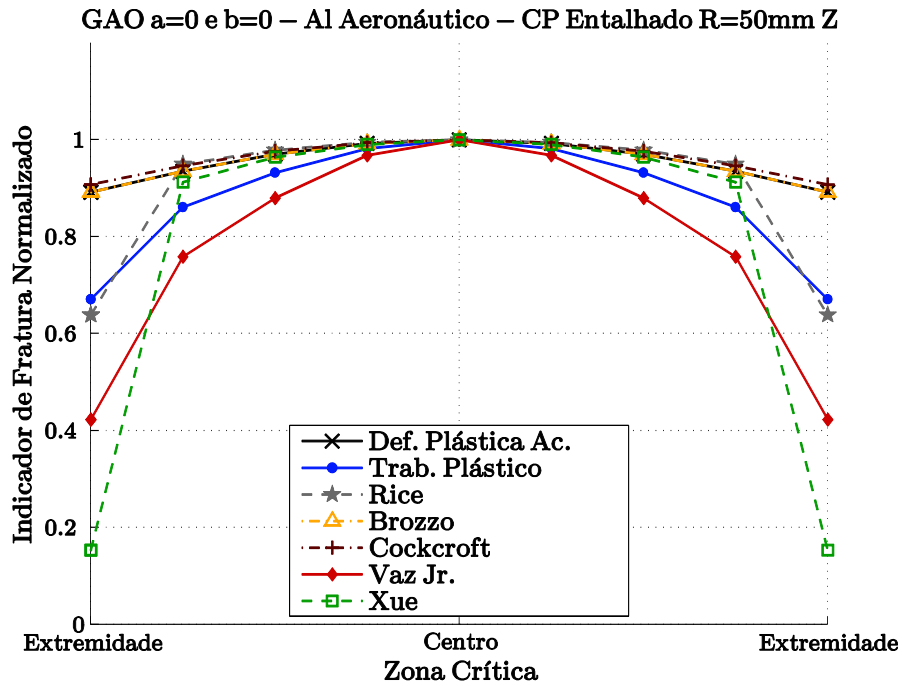


Figura 100 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

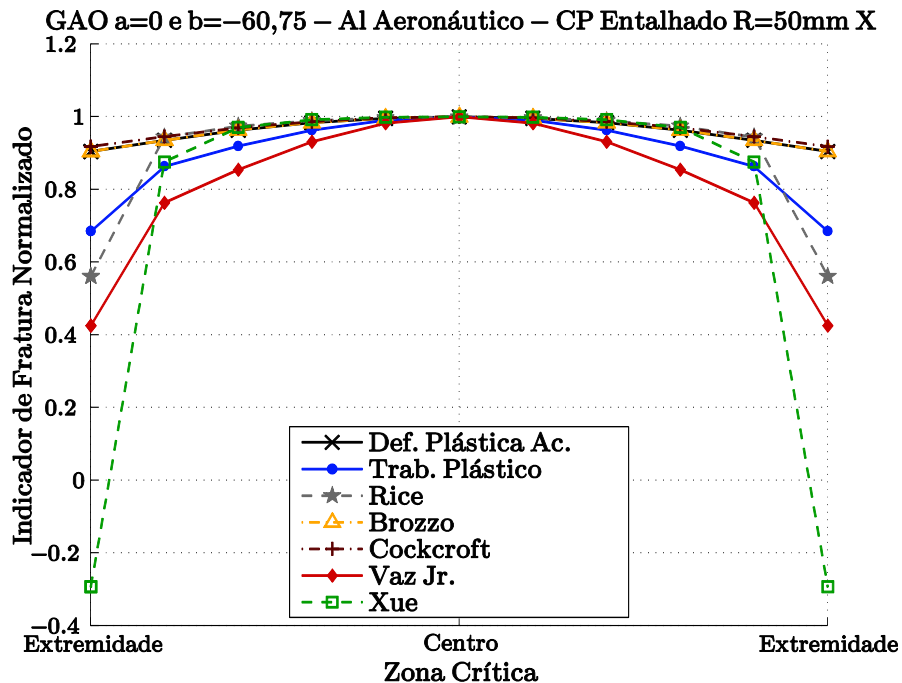


Figura 101 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $X$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50\text{mm}$  – Alumínio aeronáutico.

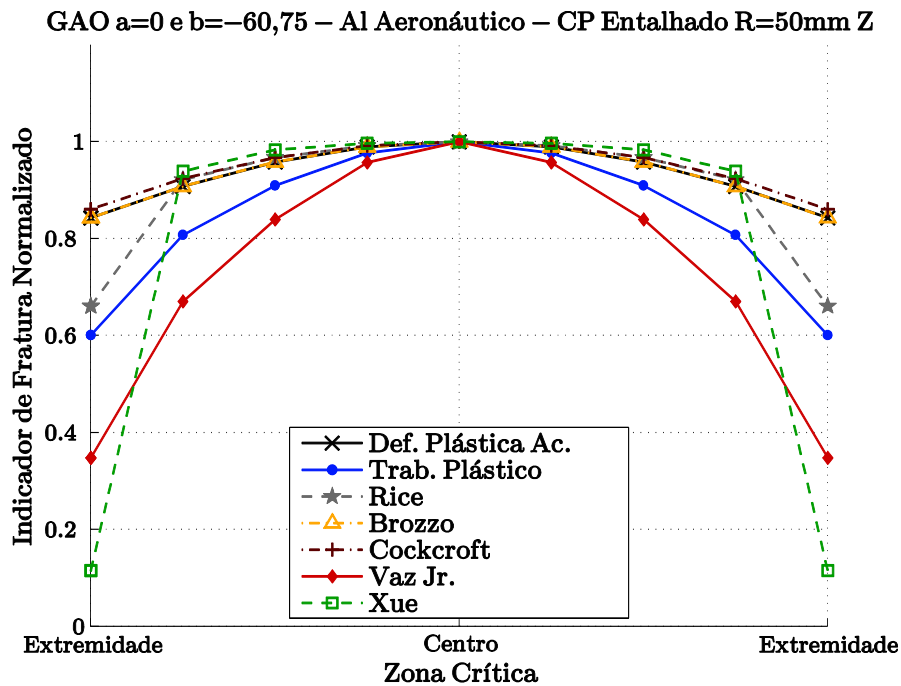


Figura 102 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova retangular entalhado  $R = 50mm$  – Alumínio aeronáutico.

### Corpo de Prova para Solicitação Cisalhante

Por fim para a análise dos indicadores de fratura em um nível de triaxialidade próximo a zero, adotou-se a geometria do corpo de prova particular capaz de gerar uma solicitação cisalhante em sua seção de prova para carregamentos trativos uniaxiais. Esta geometria foi previamente apresentada no Capítulo 3 pela Figura 16, e a sua discretização conforme a Figura 18, na qual apenas a seção de prova é considerada.

De maneira análoga às demais análises efetuadas neste capítulo, inicia-se a avaliação dos indicadores de fratura para o corpo de prova para cisalhamento por meio da correlação entre o resultado obtido ao final da simulação numérica para o local esperado para a falha do espécime e as observações experimentais apresentadas na literatura.

Neste sentido, as Figuras 103 a 109 apresentam os contornos dos indicadores de fratura sob a consideração do corpo de prova para cisalhamento e a liga de alumínio aeronáutico. A análise desses resultados resulta em um indicativo do local esperado para o início da fratura dúctil.

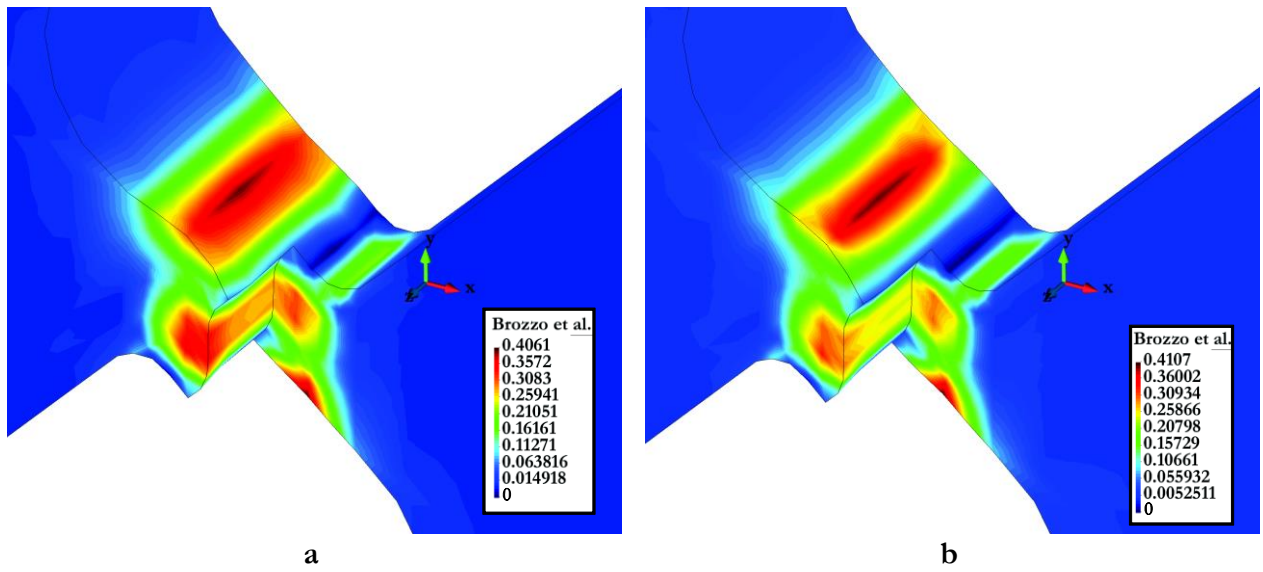


Figura 103 – Indicador de Fratura Brozzo et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.

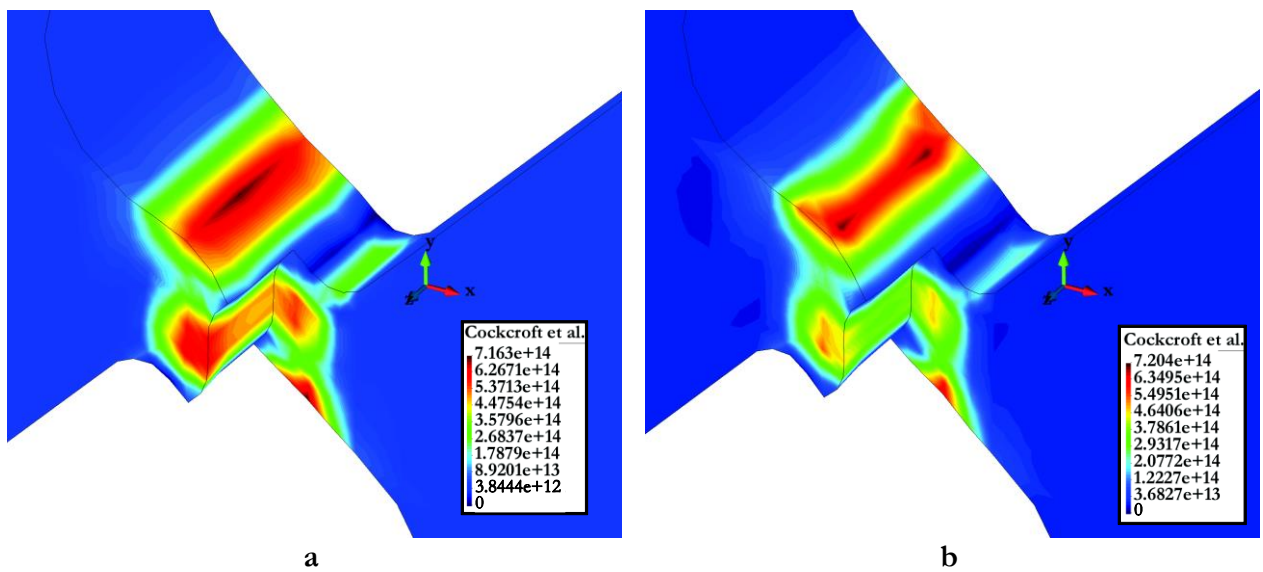


Figura 104 – Indicador de Fratura Cockcroft et al. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.

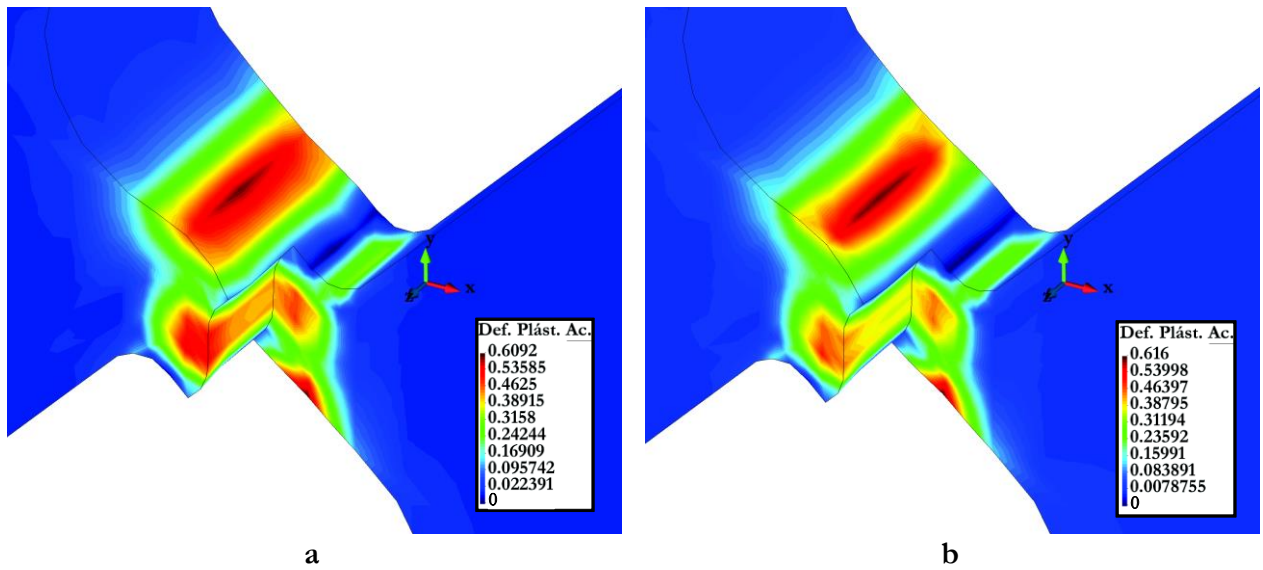


Figura 105 – Indicador de Fratura Deformação Plástica Acumulada associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.

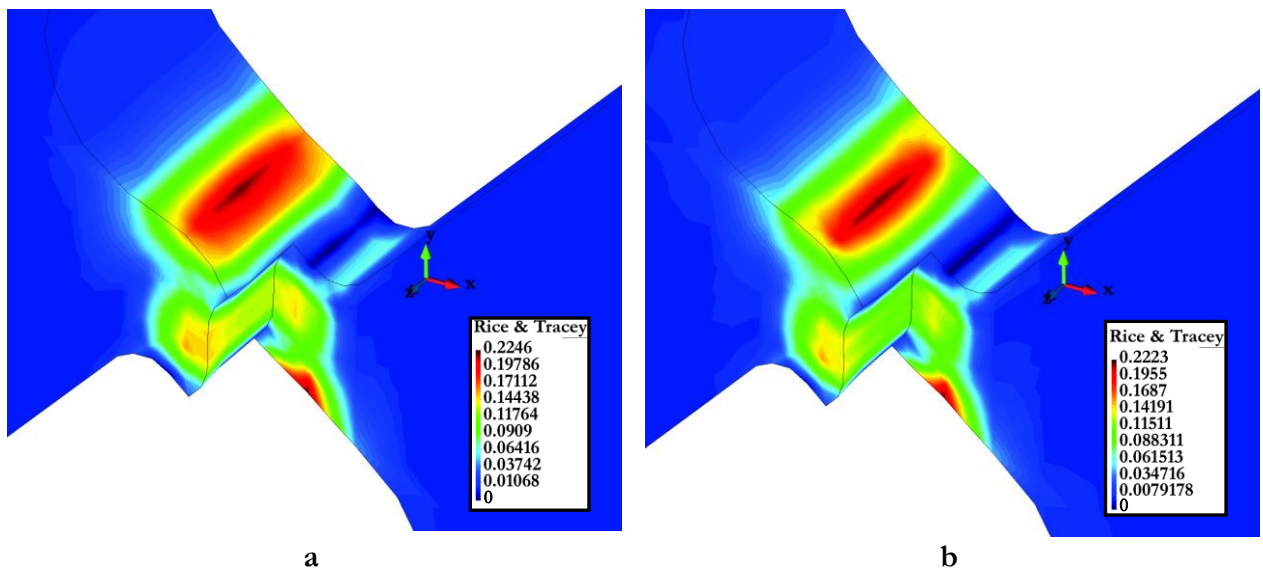


Figura 106 – Indicador de Fratura Rice & Tracey associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.

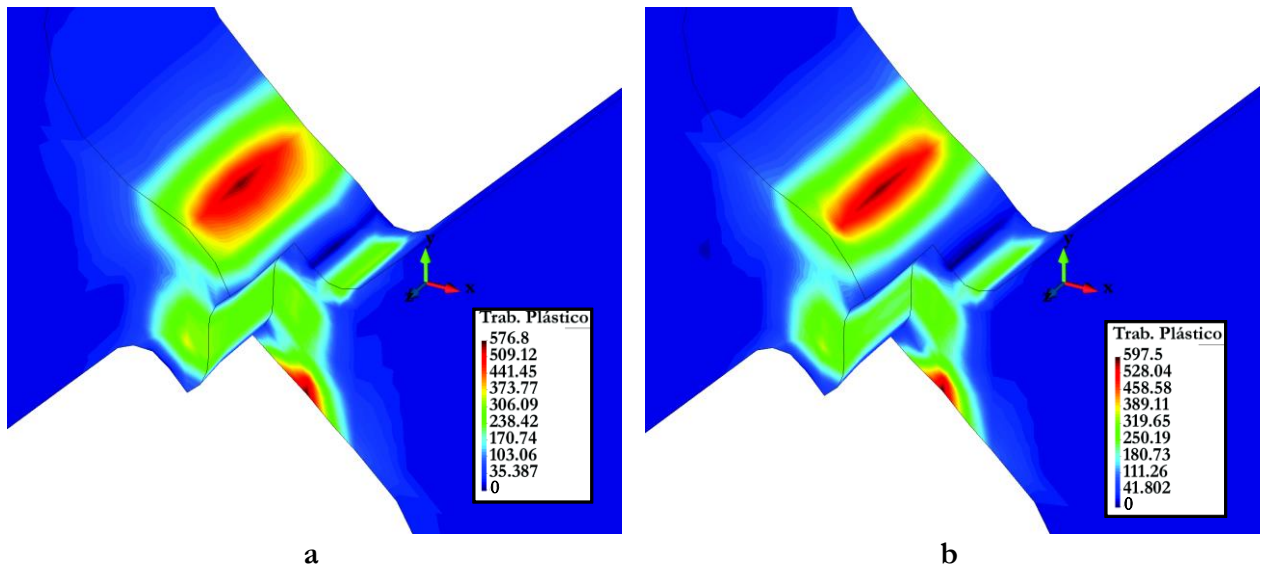


Figura 107 – Indicador de Fratura Trabalho Plástico associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.

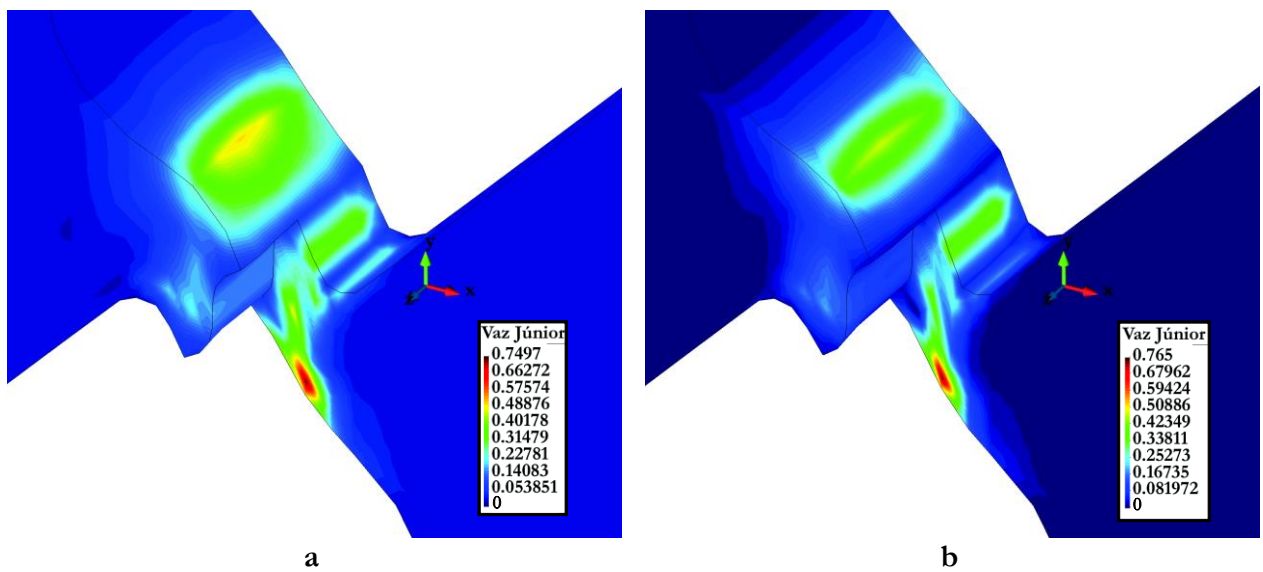
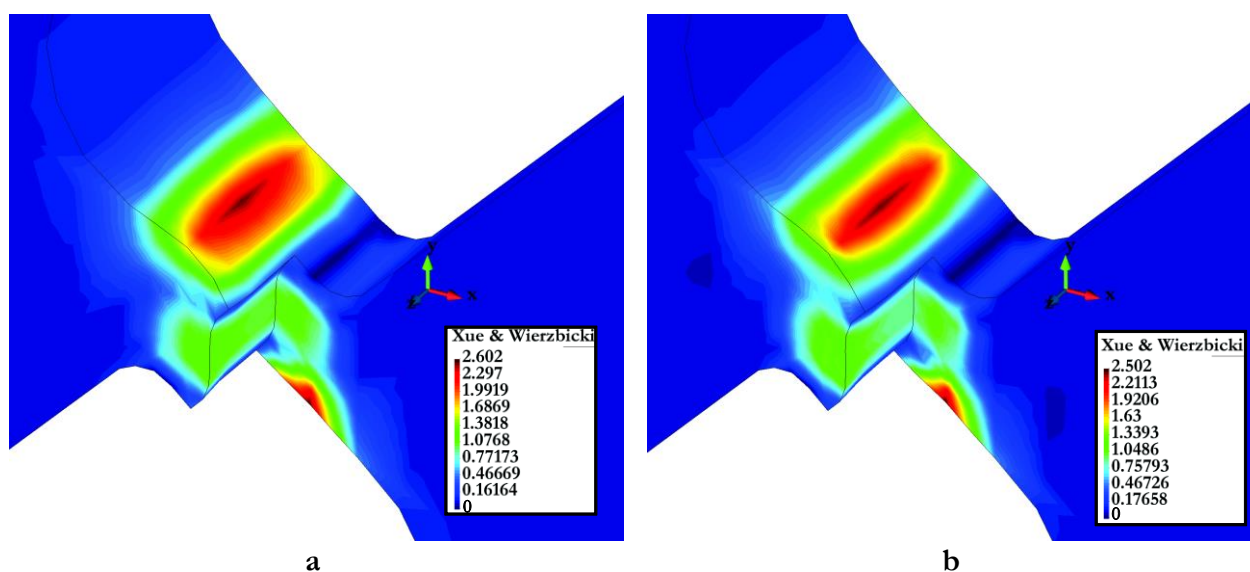


Figura 108 – Indicador de Fratura Vaz Jr. associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.





**Figura 109 – Indicador de Fratura Xue & Wierzbicki associado ao modelo de: a) von Mises e b) Gao et al.. Corpo de prova para cisalhamento puro – Alumínio aeronáutico.**

Fica evidente em todas as imagens dos contornos dos indicadores de fratura a formação de uma banda de cisalhamento, com os valores críticos localizados nas extremidades desta banda (zonas críticas), isto é, na parte superior esquerda e parte inferior direita da seção de prova. Além disso, para todos os indicadores, o valor crítico é atingido na parte central das zonas críticas.

Nas Tabelas 14 e 15, os resultados obtidos ao final das simulações do corpo de prova para cisalhamento puro utilizando a formulação de von Mises e a de Gao et al., com  $b = -60,75$ , são quantificados e comparados com os resultados de referência, a fim de se obter uma estimativa de cada indicador para o instante em que a falha dúctil irá ocorrer.

Assim como observado nas tabelas de resultados para os dois corpos de prova entalhados, o efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras pouco afetou o comportamento dos indicadores de fratura que praticamente não tiveram as magnitudes dos seus erros percentuais modificadas. Porém, diferentemente dos bons resultados e erros inferiores a 5% obtidos por alguns indicadores nas análises dos espécimes entalhados, para a análise de baixa triaxialidade não foi possível observar bons resultados por parte de nenhum indicador. Para a presente análise os menores erros obtidos ficaram na faixa dos 26%.

Tabela 14 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova para cisalhamento – *Al. Aeronáutico* – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = 0$ .

*Corpo de Prova de Cisalhamento – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = b = 0$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4073	2.00	2.7000	0.4061	35.00
Cockcroft & Latham	$7.161 E + 14$	2.00	2.6500	$7.163E + 14$	32.50
Deformação Plástica Acumulada	0.6109	2.00	2.7000	0.6092	35.00
Rice & Tracey	0.2241	2.00	2.6100	0.2246	30.50
Trabalho Plástico Total	575.2000	2.00	2.8700	576.8000	43.50
Vaz Jr.	0.7500	2.00	3.9200	0.7497	96.00
Xue & Wierzbicki	2.6070	2.00	2.5800	2.6020	29.00

Tabela 15 – Resultados para deslocamento crítico numérico pela simulação do corpo de prova para cisalhamento – *Al. Aeronáutico* – Modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ .

*Corpo de Prova de Cisalhamento – Al. Aeronáutico – Gao et al.  $a = 0$  e  $b = -60,75$*

Indicadores de Fratura	Resultados de Referência		Resultados da Simulação Numérica		
	Valor Crítico Calibração	Desl. Experim. Crítico	Desl. Numérico Crítico	Valor do Indicador	% Erro (deslocamento)
Brozzo et al.	0.4110	2.00	2.5750	0.4107	28.75
Cockcroft & Latham	$7.197E + 14$	2.00	2.8500	$7.204E + 14$	42.50
Deformação Plástica Acumulada	0.6165	2.00	2.5750	0.6160	28.75
Rice & Tracey	0.2221	2.00	2.5200	0.2223	26.00
Trabalho Plástico Total	596.4000	2.00	2.8070	597.500	40.35
Vaz Jr.	0.7631	2.00	3.607	0.7650	95.00
Xue & Wierzbicki	2.4990	2.00	2.5320	2.5020	26.60



Todos os sete indicadores de fratura dúctil apresentaram grandes magnitudes de erros na comparação entre o deslocamento numérico crítico e o deslocamento experimental crítico. Desta forma, não foi possível obter uma boa estimativa do instante para o início da fratura dúctil com a utilização desses indicadores para o corpo de prova de cisalhamento com a liga de alumínio aeronáutico. Porém justifica-se tal comportamento otimista dos indicadores pelo erro já inserido pelo modelo constitutivo de Gao et al., que como já apresentado no Capítulo 3 deste trabalho, para  $b = -60,75$  o critério de Gao et al. não apresenta boa correlação com os dados experimentais da curva de reação para o corpo de prova para cisalhamento na liga de alumínio aeronáutico (ver Figura 32).

Por fim as Figuras 110 e 111 apresentam as distribuições dos indicadores de fratura ao longo da direção  $Z$ , direção da espessura do espécime, para as duas configurações adotadas para o modelo constitutivo de Gao et al.. Apesar do problema ter sido abordado de maneira tridimensional, devido a formação da banda de cisalhamento e à geometria particular do corpo de prova, não foi possível analisar a distribuição dos indicadores também ao longo da direção  $X$ .

Ressalta-se na Figura 111 o comportamento diferenciado obtido com o critério de Cockcroft & Latham, o qual identificou dois pontos onde o valor crítico é atingido ao longo da zona crítica na extremidade da banda de cisalhamento.

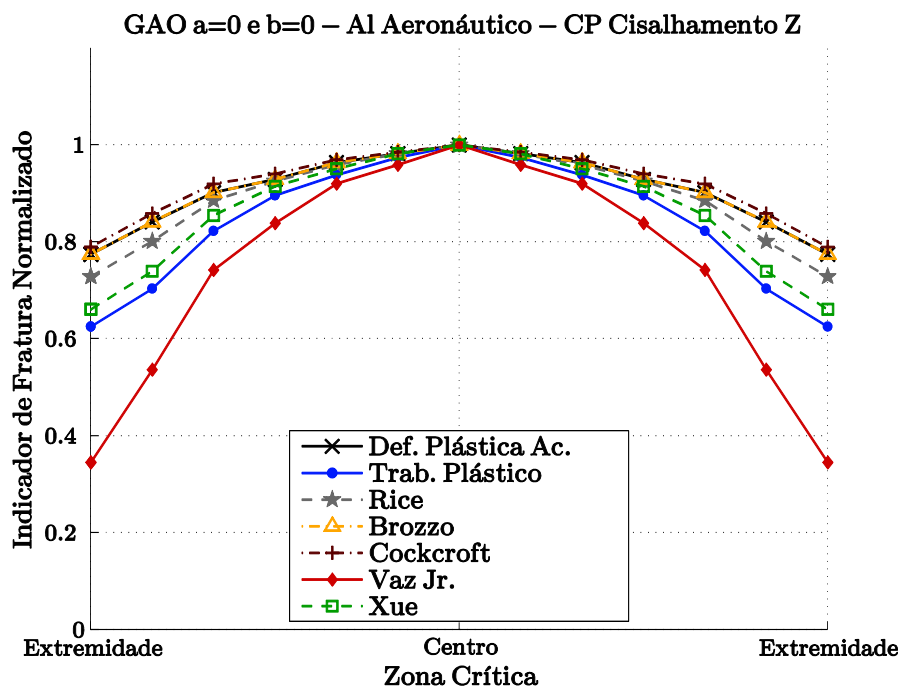


Figura 110 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = b = 0$  (von Mises). Corpo de prova de cisalhamento – Alumínio aeronáutico.

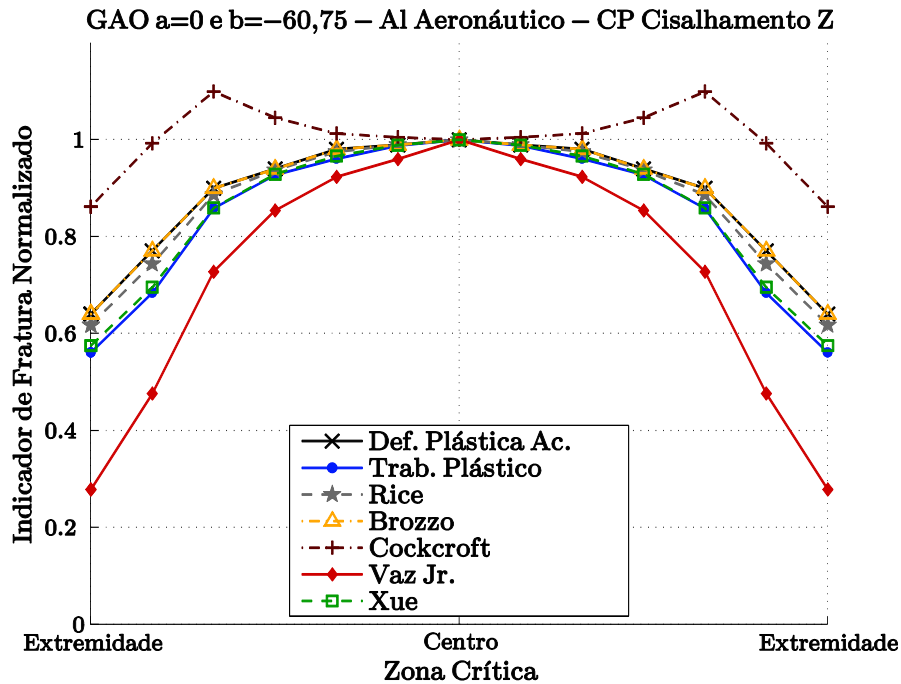


Figura 111 – Distribuição dos indicadores de fratura na zona crítica ao longo do eixo  $Z$  associados ao modelo de Gao et al. na configuração  $a = 0$  e  $b = -60,75$ . Corpo de prova de cisalhamento – Alumínio aeronáutico.

#### 4.6 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo analisou-se o desempenho de sete indicadores de fratura dúctil associados a duas ligas materiais, liga de aço *SAE1045* e liga de alumínio aeronáutico, quanto as suas capacidades preditivas para o correto local e instante de início da falha de cinco espécimes distintos. Optou-se por corpos de prova entalhados e de cisalhamento para uma avaliação em uma extensa faixa de níveis de triaxialidade.

Ao final das simulações numéricas com a liga ferrosa, concluiu-se que todos os sete indicadores foram capazes de prever corretamente o local de início da falha, conforme observado experimentalmente para todos os espécimes analisados (corpo de prova cilíndrico sem entalhe, cilíndrico entalhado e “*Borboleta*”). Por outro lado, nenhum dos indicadores avaliados apresentou consistência na previsão do instante para a falha dos corpos de prova. Para a simulação da geometria cilíndrica entalhada utilizando o modelo constitutivo de Gao et al. com  $b = 0$  (von Mises), todos os indicadores apresentaram um comportamento extremamente otimista, na qual o menor erro foi apresentado pela formulação de Vaz Jr. (1998), com 26,29% de discrepância em relação ao deslocamento experimental crítico. Com a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor

desviador houve uma redução considerável do erro para a previsão do instante para a falha por todos os indicadores, porém apenas a formulação de Vaz Jr. obteve valores aceitáveis, com um erro de 6,57%.

Com relação ao corpo de prova “*Borboleta*”, observou-se, em geral, um comportamento mais conservativo de todos os indicadores nas duas configurações adotadas para o modelo constitutivo de Gao et al. Nesse caso, o indicador que apresentou os melhores resultados foi o critério de Xue & Wierzbicki, devido a sua maior consistência nos resultados. O indicador de Vaz Jr. obteve o menor índice de erro na simulação adotando von Mises. Porém, quando o efeito do  $J_3$  foi introduzido, o erro obtido por este critério saiu de 2,50% (von Mises) e ultrapassou os 54%.

Conclui-se de forma geral que para a liga de aço *SAE1045* a introdução do terceiro invariante do tensor desviador aproximou o comportamento dos indicadores de fratura dúctil das observações experimentais. Entretanto, como o modelo constitutivo de Gao et al., na configuração com  $b = -60,75$ , não foi capaz de descrever suficientemente bem o comportamento elasto-plástico da liga ferrosa sob solitação cisalhante, a resposta dos indicadores foi comprometida em tal situação.

Por fim, para as análises realizadas com a liga de alumínio aeronáutico, o desempenho dos indicadores de fratura pouco foi afetado pela introdução do parâmetro elasto-plástico  $J_3$ , de tal forma que não foi observado um aumento significativo na acurácia dos indicadores para a determinação do local e instante para a fratura após a adoção deste parâmetro. Nas simulações com os corpos de prova retangulares entalhados, o indicador de fratura dúctil proposto por Cockcroft & Latham apresentou grande consistência nos resultados, sem ultrapassar 3% de erro nas duas configurações do modelo constitutivo adotado. Porém, para estas mesmas geometrias entalhadas, observou-se que os critérios baseados no trabalho plástico total de Freudenthal (1950) e Gillemont (1976), e trabalho total do dano de Vaz Jr. (1998), apesar de apresentarem erros máximos para a predição do instante potencial da falha por volta de 10%, apontaram um local esperado para a falha dúctil ligeiramente acima da região equatorial, inconsistente com as observações experimentais. Ao se analisar a geometria para cisalhamento da liga de alumínio, constatou-se mais uma vez que a incapacidade do modelo constitutivo de Gao et al. com  $a = 0$  e  $b = -60,75$  em descrever corretamente o comportamento elasto-plástico do material impacta diretamente no desempenho dos indicadores de fratura.

## 5 Conclusões e Recomendações Futuras

Neste trabalho, buscou-se estudar duas formulações constitutivas, baseadas no efeito do terceiro invariante do tensor desviador, para descrição do comportamento elasto-plástico de materiais dúcteis, considerando largas faixas de triaxialidade. Para isto, adotou-se os modelos de Hosford e de Gao et al., com endurecimento isotrópico. Inicialmente, foi realizada uma análise das superfícies de escoamento dessas formulações para verificação da convexidade e do efeito do terceiro invariante na modificação do formato dos envelopes de falha. Observou-se que as superfícies obtidas pela formulação de Hosford são sempre convexas e sem singularidades nos vértices, independente da magnitude adotada para  $h$ . Porém, o mesmo não foi observado para as superfícies de escoamento geradas pela formulação de Gao et al.. Ao se adotar magnitudes mais elevadas de  $b$ , é possível obter superfícies de escoamento não convexas, as quais podem causar dissipação negativa de energia para os materiais dúcteis aqui estudados e como consequência numérica pode ocorrer uma não convergência do algoritmo de atualização implícito baseado no método do ponto mais próximo, implementado neste trabalho e apresentado no Capítulo 3.

Em seguida, através da análise de curvas de reação do tipo Força *vs* Deslocamento, mostrou-se que a capacidade preditiva dos modelos é otimizada através da introdução do efeito do terceiro invariante em suas formulações. Demonstrou-se também, através de comparações entre resultados numéricos e experimentais, que ao resgatar a formulação de von Mises, obtém-se um modelo constitutivo com comportamento otimista. Por outro lado, a introdução do efeito do terceiro invariante aproxima as curvas obtidas numericamente dos resultados experimentais. Contudo, para magnitudes mais elevadas de  $b$ , para as quais a formulação de Gao et al. apresentou melhores correlações com os resultados experimentais para cisalhamento, ocorre a não convergência do algoritmo de retorno proposto. Neste sentido, o modelo proposto para a formulação de Hosford apresentou melhores correlações com dados experimentais. Mesmo com uma superfície de escoamento muito próxima à apresentada pela formulação de Gao et al., a predição do comportamento mecânico realizada pelo modelo constitutivo de Hosford apresentou erros significativamente menores do que os apresentados pelo modelo de Gao et al..

As conclusões obtidas no estudo dos modelos constitutivos apresentados no Capítulo 3 deste trabalho foram reforçadas no Capítulo 4 na análise de indicadores de fratura, evidenciando a necessidade da introdução do terceiro invariante do tensor desviador na lei de fluxo plástico dos modelos constitutivos e em indicadores de fratura para uma descrição mais fiel do comportamento elasto-plástico das ligas materiais.

Observou-se nas análises realizadas com a liga de aço SAE1045 que a associação dos indicadores de fratura dúctil ao modelo de Gao et al. com  $b = -60,75$  tornou mais precisa a determinação do local esperado para a fratura e também reduziu o erro na previsão do instante para a falha dúctil. Para tal, utilizou-se para representar os testes numéricos na região de alta triaxialidade, corpos de prova cilíndricos com e sem entalhes. Já para a região de baixa triaxialidade, adotou-se o chamado corpo de prova “*Borboleta*”, sujeito a cisalhamento puro. Os testes numéricos foram realizados até a condição em que algum ponto dentro do corpo de prova estudado atingisse o valor crítico dos indicadores, calibrados previamente. Contudo, como não foi possível obter uma boa correlação entre os resultados obtidos pela formulação de Gao et al. e os resultados experimentais para as curvas de reação sob solicitação cisalhante, nenhum dos indicadores abordados nesse trabalho conseguiu bons resultados em tal condição.

Por fim, conclui-se que para os espécimes adotados em liga de alumínio aeronáutico, corpos de prova retangular com e sem entalhe para altos níveis de triaxialidade e corpo de prova para solicitação cisalhante para baixa triaxialidade, a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor desviador pouco influenciou no comportamento dos indicadores de fratura estudados. Mais uma vez, justifica-se a baixa correlação entre os resultados numéricos obtidos pelos indicadores de fratura e os resultados experimentais disponíveis na literatura pela incapacidade apresentada pelo modelo constitutivo de Gao et al., quando  $b = -60,75$ , de se aproximar do comportamento elasto-plástico realístico da liga de alumínio aeronáutico. Desta forma, a determinação inacurada do estado de tensão ao longo da simulação numérica gerou um erro que foi carregado até a etapa de pós-processamento, no qual os indicadores de fratura foram implementados. Contudo estima-se que a associação dos indicadores de fratura dúctil a um modelo constitutivo que apresente melhor correlação com as observações experimentais possa gerar resultados mais acurados.

Como recomendação de trabalhos futuros, sugere-se a associação de indicadores de fratura à um outro modelo constitutivo puramente elasto-plástico para previsões de local e instante esperados para a fratura dúctil mais precisas. Desta forma, sugere-se, para uma análise futura, a adoção do modelo de Hosford, devido aos bons resultados apresentados por esta formulação nas análises do Capítulo 3 deste trabalho, no qual este modelo apresentou as melhores correlações com as observações experimentais. Além disso, sugere-se a avaliação da associação de modelos puramente elasto-plásticos e indicadores de fratura com espécimes semelhantes para os diferentes materiais adotados. Desta forma, é possível verificar os efeitos introduzidos pelas geometrias e também pelos materiais, uma vez que geometrias distintas em materiais também distintos dificultam as conclusões acerca dos resultados.

## Referências

- Andrade Pires, F., M., (2001). Modelação por Elementos Finitos da Iniciação da Fratura Dúctil nos Processos de Enformação Plástica em Massa. Dissertação de Mestrado. Universidade do Porto. Portugal.
- Argon, A. S., Im, J., Safoglu, R. (1975). Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transactions A-Physical Metallurgy and Materials Science*, v.4, p.825–837.
- Atkins, A. G., (1981). Possible explanation for unexpected departures in hydrostatic tension–fracture strain relations. *Metal Sci.* v.15, p.81-83.
- Atkins, A. G., Mai, Y. W., (1985). Elastic and plastic Fracture. *Ellis Horwood Ltd.* Chichester.
- Bai, Y. (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.
- Bao, Y. (2003). Prediction of Ductile Crack Formation in Uncracked Bodies. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Bao, Y., Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*. 46 (81):81-98.
- Bao, Y., Wierzbicki, T., (2004b). Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences*. v.47, p. 719-743.
- Bao, Y., Wierzbicki, T., (2005). On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*. v.72, p. 1049-1069.
- Bardet, J. P. (1990). Lode Dependence for Isotropic Pressure-Sensitive Elastoplastic materials. *Journal of Applied Mechanics*, v.57, p. 498-506.
- Barsoum, I., Faleskog, J., (2007a). Rupture in combined tension and shear: experiments. *International Journal of Solids and Structures*, v.44, p. 1768–1786.
- Barsoum, I., Faleskog, J., (2007b). Rupture in combined tension and shear: micromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, v.44, p. 5481–5498.
- Barsoum, I., Faleskog, J., (2011). Micromechanical analysis on the influence of the lode parameter on void growth and coalescence. *Int. J. Solids Struct.* 48 (6), p. 925-938.

- Bacha, A., Daniel, D., Klocker, H., (2007). On the determination of true stress triaxiality in sheet metal. *Journal of Materials Processing Technology*, v.184, p.272-287.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I., (1989). Numerical aspects of the damage and failure analysis of engineering structures. D.R.J. Owen, E. Hinton, & E. Oñate (eds.), *Computational Plasticity: Models Software and Applications*, v.1, p.297-309. Swansea, Pineridge Press.
- Bonora, N., Gentile, D., Pironi, A., (2005). Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments. *International Journal of Plasticity*. v.21, p.981-1007.
- Børvik, T., Hopperstad, O.S., Dey, S., Pizzinato, E.V., Langseth, M., Albertini, C., (2005). Strength and ductility of Weldox 460E steel at high strain rates, elevated temperatures and various stress triaxialities. *Eng. Fract. Mech.* v.72, p.1071–1087.
- Bridgman, P., 1952. *Studies in Large Plastic and Fracture*. McGraw-Hill Book Company, London.
- Brown, L. M., Embury, J. D. (1973). The initiation and growth of voids at second-phase particles. In *Proceedings of the Third International Conference on Microstructure and Design of Alloys*, p. 164–169. Institute of Metals and Iron and Steel, London.
- Brozzo, P., Deluca, B., Redina, R. A., (1972). A new method for the prediction of the formability limits of metals sheets. *Proc. 7<sup>th</sup> Biennial Conf. Int. Deep Drawing Research Group*.
- Brüning, M., (1999). Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. *International Journal of Plasticity* 15, 1237-1264. 294
- Brüning, M., Berger, S., Obrecht, H. (2000). Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42:2147-2166.
- Brüning, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L., Alves, M. (2008). A ductile damage criterion at various stress triaxialities, *International Journal of Plasticity*, 24: 1731–1755.
- Brüning, M., Gerke, S., Hagenbrock, V., (2013). Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage. *International Journal of Plasticity*, vol.50, 49–65
- Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K., 2006. A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility. *International Journal of Fracture* v.137, p.51–75.
- Clift, S. E., Hartley, P., Sturgess, C. E. N., Rowe, G. W., (1990). Fracture prediction in plastic deformation process. *Inst. J. Mech. Sci.*, v.32, p.1-17.
- Cockcroft, M. G., Latham, D. J., (1968). Ductility and workability of metals. *J. Inst. Metals*, v.96, p.33-39.

- Datsko, J., (1966). Material Properties and Manufacturing Process. *John Wiley & Sons*. New York.
- Dowling, N. E., (2007). Mechanical Behavior of Materials – Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue. *Preason Prentice Hall*. United States.
- Driemeier, L., Brüning, M., Micheli, G., Alves, M., (2010), Experiments on stress triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys, *Mechanics of Materials*, vol.42, 2:207-217.
- Driemeier, L., Moura, R. T., Machado, I. F., Alves, M., (2015), A bifailure specimen for accessing failure criteria performance, *International Journal of Plasticity*, vol.71, 62-86.
- Drucker, D.C., Prager, W., (1952). Soil Mechanics and Plasticity Analysis of Limit Design. *Quarterly Journal Applied Mathematics*, v.10, p.157–162.
- Engelen, R. A.B., (2005) . Plasticity-induced Damage in Metals/Nonlocal Modelling at Finite Strains. Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.
- François, D., (1985). Fracture and Damage. *Elasto-Plastic Fracture Mechanics*, L. H. Larsson (eds.), D. Reidel Publishing Co., Brussels, p.1-11.
- Freudenthal, A. M., (1950). The inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures. *John Wiley & Sons*, New York.
- Gao, X., Kim, J., (2006). Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence. *Int. J. Solids Struct.* 43, 6277–6293.
- Gao, X., Wang, T., Kim, J., (2005). On ductile fracture initiation toughness: effects of void volume fraction void shape and void distribution. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5097–5117.
- Gao, X., Zhang, G., Roe, C., (2009). A study on the effect of the stress state on ductile fracture. *Int. J. Damage Mech.*, 19, 75–94.
- Gao, X., Zhang, T., Zhou, J., Graham, S.M., Hayden, M., Roe, C. (2011), On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule, *International Journal of Plasticity*, vol. 27, 2:217-231.
- Gillemont, L. F., (1976). Criterion of crack initiation and spreading. *Engng. Frac. Mech.*, v.8, p.239-253.
- Gurland, J. (1972). Observations on the fracture of cementite particles in a spheroidized 1.05% C steel, deformed at room temperature. *Acta Metallurgica*, v.20(5), p. 735-741.
- Gurson, A.L. (1977). Continuum Theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 99:2-15.



- Gurtin, M.E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press.
- Hancock, J. W., Mackenzie, A. C., (1976). On the mechanisms of ductile fracture in high-strength steels subjected to multiaxial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.24, p.147-169.
- Hencky, H., (1924). *Zeits. Ang. Math. Mech. Proco. Int. Cong. App. Mech.*, v.4, p.323. Delft.
- Hill, R., (1998). *The Mathematical Theory of Plasticity*, *Oxford University Press*.
- Holzappel, G.A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. London: John Wiley & Sons.
- Hosford, W. F., (1972). *Journal of Applied Mechanics. (Trans. ASME ser E.)* v. 39E.
- Hosford, W. F., (2013). *Fundamentals of Engineering Plasticity. Cambridge University Press*.
- Kachanov, L. M., (1958). Time to the rupture process under the creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otdel. Techn. Nauk.*, v.8, p.26-37.
- Karr, D.G., Law, F.P., Fatt, M.H., (1989). Asymptotic and quadratic failure criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, vol. 5, 303–336.
- Khan, A.S., Liu, H., (2012). A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *International Journal of Plasticity*, vol. 35, 1–12.
- Kim, J., Gao, X., Srivatsan, T.S., 2003. Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.40, p.7357–7374.
- Kim, J., Zhang, G., Gao, X., 2007. Modeling of ductile fracture: application of the mechanism-based concepts. *International Journal of Solids and Structures*, v.44, p.1844-1862.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., (1990). *Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press*.
- Lemaitre, J., (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Engng. Mat. Tech., Trans. ASME*, v.107, p.83-89.
- Lemaitre, J., (1985a). Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Comp. Meth. Applied Mech. Engng.*, v.51, p;31-49.
- Lemaitre, J., (1986). Local approach of fracture. *Engng. Frac. Mech.*, v.25, p.523-537.
- Lemaitre, J., (1996). *A Course on Damage Mechanics. 2 ed. Springer*.
- Lemaitre, J., (2001). *Handbook of Materials Behavior Models*, edited by Jean Lemaitre, Academic Press, Burlington.

- Le Roy, G., Embury, J.D., Edward, G., Ashby, M.F., (1981). A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Acta Metall.* v.29, p.1509–1522.
- Mackenzie, A. C., Hancock, J. W., Brown, D. K., (1977). On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels. *Engng. Frac. Mech.*, v.9, p.167-188.
- Malcher, L. (2011). Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília. Brasil.
- Malcher, L. Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A.; Andrade, F.X.C. (2009). Numerical integration algorithm of a new model for metal plasticity and fracture including pressure and Lode angle dependence. *International Journal of Material Forming - Springer*, 2:443-446.
- Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2012), An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. *International Journal of Plasticity*.
- Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2013a), Evaluation of shear mechanisms and influence of the calibration point on the numerical results of the GTN model. *International Journal of Plasticity*.
- Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2014b), An extended GTN model for ductile fracture under high and low stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*.
- Malcher, L.; Mamiya, E. N., (2014), An Improved Damage Evolution Law Based on Continuum Damage Mechanics and its Dependence on Both Stress Triaxiality and the Third Invariant. *International Journal of Plasticity*.
- McClintock, F. A., (1968). A criterion for ductile fracture by growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*. v.35, p.363-371.
- Meuwissen, M.H. H., Yield Criteria for Anisotropic Elasto-plastic Metals. Internal Report. Universiteit Eindhoven, Eindhoven.
- Mirone, G., Corallo, D., (2010), A local viewpoint for evaluating the influence of stress triaxiality and Lode angle on ductile failure and hardening, *International Journal of Plasticity*, vol. 26, 3:348-371.
- Mudry, F., (1985). Methodology and application of local criteria for prediction of ductile tearing. *Elasto-Plastic Fracture Mechanics*, L. H. Larsson (eds.), D. Reidel Publishing Co., Brussels, p.1-11.
- Murakami, S., (1990). Role of continuum damage mechanics in fracture analysis. M. Kleiber, & J. A. König, (eds.), *Inelastic Solids and Structures*, p.67-80. Swansea, Pineridge Press.

- Nadai, A., (1937) *Journal of Applied Physics*. v.8.
- Nahshon, K., Hutchinson, J. (2008). Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27:1–17.
- Norris, D. M., Reaugh, J. E., Moran, B., Quiñones, D. F., (1978). A plastic-strain, mean-stress criterion for ductile fracture. *J. Engng. Mat. Tech., Trans. ASME*, v.100, p.279-286.
- Oh, S., Chen, C. C., and Kobayashi, S., (1979). Ductile Failure in Axisymmetric Extrusion and Drawing, Part 2, Workability in Extrusion and Drawing. *J. Eng. Ind.*, v.101, p. 36–44.
- Oyane, M., Shima, S., Tabata, T., (1978). Considerations of basic equations, and their application in the forming of metal powders and pourous metals. *J. Mech. Tech.*, v.1, p.325-341.
- Puttick, D. E. (1960). Ductile fracture in metals. *Philosophical Magazine*, v.4, p. 964–969
- Ramberg, W. and Osgood, W. R., (1943). Description of Stress-Strain-Curves by Three Parameters. Technical Report, Technical Note No. 902, NACA.
- Rice, J. R., Tracey, D. M., (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields?. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.17, p.201-217.
- Richmond, O. and Spitzig, W. A., (1980). Pressure dependence and dilatancy of plastic flow. In Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics., pages 377–386, Toronto, Ont, Can, 1980. North-Holland Publ Co, Amsterdam, Neth.
- Runesson, K., Steinmann, P., Ekh, M., Menzel, A., (2006). Constitutive Modeling of Engineering Materials: Theory and Computation. Volume I General Concepts and Inelasticity.
- Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998). Computational Inelasticity. New York: Springer- Verlag.
- Souza Neto, E.A., Peric, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.
- Tai, W., Yang, B. X., (1987). A new damage mechanics criterion for ductile fracture. *Engng. Frac. Mech.*, v.27, p.371-378.
- Tresca, H., (1868). Memoire sur l'écoulement des corps solides. *Mém. pres. par div. sav.*, v.18, p.733–799.
- Tvergaard, V. (2008). Shear deformation of voids with contact modeled by internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50:1459–1465.

- Vaz Jr., M., (1998). Computational approaches to simulation of metal cutting process. Tese de doutorado. University College of Swansea, Wales, U.K.
- von Mises, R., (1913). *Göttinger Nachrichten Math-Phys. Klasse*.
- Walp, M. S., Wurm, A., Siekirk, J. F. I., Desai, A. K. (2006). Shear fracture in advanced high strength steels. SAE technical papers 2006-01-1433, 2006.
- Wilson, C., D., (2002), A critical re-examination of classical metal plasticity. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 69(1):63–68, ISSN 0021-8936.
- Xue, L. (2007). Ductile Fracture Modeling – Theory, Experimental Investigation and Numerical Verification, Ph.D Thesis, *Massachusetts Inst. of Technology*. 300
- Xue, L. (2008). Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75: 3343–3366.
- Zadpoor, A. A., Sinke, J., Benedictus, R. (2009). Formability prediction of high strength aluminum sheets, *International Journal of Plasticity*, 25:2269–2297.

# Anexo A – Derivadas

## Derivadas das Equações Residuais

Os resultados das derivadas para a composição do sistemas de equações residuais dos modelos aqui exposto são apresentados a seguir.

### *Modelo de Gao et al. (2011)*

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I}^4 + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^G}{\partial \sigma_{n+1}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1}^G, \quad (3)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\frac{\Delta\gamma}{\sigma_{eq_{n+1}}^G} \left( \mathbf{N}_{n+1}^G + \sigma_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^G}{\partial \sigma_{n+1}} \right) - \mathbf{N}_{n+1}^G (\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}^G) \quad (4)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}^G}{\sigma_{eq_{n+1}}^G}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{N}_{n+1}^G, \quad (7)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H, \quad (8)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

## Derivadas Complementares

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (10)$$

Cálculo da derivada do vetor de fluxo:

$$\frac{\partial N_{n+1}^G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{\partial \left[ \frac{c}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} \beta_{n+1} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}^G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{c}{6} \left[ -\frac{5}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{11}{6}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes \beta_{n+1} + (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} \frac{\partial \beta_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}^G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{c}{6} \left[ -\frac{5}{6} (\alpha_{n+1})^{-\frac{11}{6}} \beta_{n+1} \otimes \beta_{n+1} + (\alpha_{n+1})^{-\frac{5}{6}} \frac{\partial \beta_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right], \quad (13)$$

onde:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \left[ a6I_1^5 \mathbb{I} + 81J_2^2 \mathbf{S} + 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right) \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial (a6I_1^5 \mathbb{I})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial (81J_2^2 \mathbf{S})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \left[ 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right) \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (15)$$

sendo:

$$\frac{\partial (a6I_1^5 \mathbb{I})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 30aI_1^4 \mathbf{I} \quad (16)$$

$$\frac{\partial (81J_2^2 \mathbf{S})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 81 \left( \frac{\partial J_2^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{S} + J_2^2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = 81 \left[ 2J_2 \mathbf{S} : \mathbf{S} + J_2^2 \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right] \quad (17)$$

Considerando agora:

$$\frac{\partial J_3^2}{\partial \sigma} = 2J_3\chi, \quad \text{com } \chi = \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \left[ 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right]}{\partial \sigma} = 2b \frac{\partial (J_3\chi)}{\partial \sigma} = 2b \left( \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \chi + J_3 \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (20)$$

logo  $\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \chi$ . Então:

$$\frac{\partial \left[ 2bJ_3 \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right]}{\partial \sigma} = 2b \left( \chi \chi + J_3 \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left[ \det(\mathbf{S}) \mathbf{S}^{-t} : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right]}{\partial \sigma}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial \det(\mathbf{S})}{\partial \sigma} \mathbf{S}^{-t} + \det(\mathbf{S}) \frac{\partial \mathbf{S}^{-t}}{\partial \sigma} \right] : \left[ \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}^{-t}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{S}^{-t}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} = (-\mathbf{S}^{-t} \otimes \mathbf{S}^{-t}) : \left( \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (24)$$

*Modelo de Hosford (1972)*

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I}^4 + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^H}{\partial \sigma_{n+1}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1}^H, \quad (27)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\frac{\Delta\gamma}{\sigma_e^H} \frac{1}{2} \left( \mathbf{N}_{n+1}^H + \sigma_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^H}{\partial \sigma_{n+1}} \right) - \mathbf{N}_{n+1}^H (\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}^H), \quad (28)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1, \quad (29)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}^H}{\sigma_e^H}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{N}_{n+1}^H, \quad (31)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H, \quad (32)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbf{0}. \quad (33)$$



### Derivadas Complementares

$$\frac{\partial \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (34)$$

Calculo da derivada do vetor de fluxo:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial \left[ \frac{1}{(2)^{\frac{1}{h}}} [(\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1})^h + (\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1})^h]^{\frac{1}{h}} (h(\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1})^{h-1} \lambda_{23} + h(\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1})^{h-1} \lambda_{13} + h(\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1})^{h-1} \lambda_{12}) \right]}{\partial \sigma_{n+1}}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{1}{h} (N_1^H + N_2^H - N_3^H \oplus N_4^H), \quad (36)$$

com:

$$N_1^H = \frac{N}{[(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]} \otimes [h(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{23} + h(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{13} + h(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-1} \lambda_{12}], \quad (37)$$

$$N_2^H = \frac{\sigma_{eq}}{[(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]} [h(h-1)(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-2} \Lambda_{23} + h(h-1)(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-2} \Lambda_{13} + h(h-1)(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-2} \Lambda_{12}], \quad (38)$$

$$N_3^H = \frac{\sigma_{eq}}{[(\sigma_2 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_3)^h + (\sigma_1 - \sigma_2)^h]^{-2}} [h(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{23} + h(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{13} + h(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-1} \lambda_{12}], \quad (39)$$

$$N_4^H = [h(\sigma_2 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{23} + h(\sigma_1 - \sigma_3)^{h-1} \lambda_{13} + h(\sigma_1 - \sigma_2)^{h-1} \lambda_{12}], \quad (40)$$

onde:

$$\lambda_{23} = (e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3), \quad (41)$$

$$\lambda_{13} = (e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3), \quad (42)$$

$$\lambda_{12} = (e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2), \quad (43)$$

$$\Lambda_{23} = (e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3) \otimes (e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3), \quad (44)$$

$$\Lambda_{13} = (e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3) \otimes (e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3), \quad (45)$$

$$\Lambda_{12} = (e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \otimes (e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2), \quad (46)$$