

**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS COM APLICAÇÃO EM MATERIAIS COMPÓSITOS**

GELSON DE SOUSA ALVES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS COM APLICAÇÃO EM
MATERIAIS COMPÓSITOS**

GELSON DE SOUSA ALVES

ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-010A/14
BRASÍLIA/DF: SETEMBRO – 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS COM APLICAÇÃO EM
MATERIAIS COMPÓSITOS**

GELSON DE SOUSA ALVES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC/UnB)
(Orientador)

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC/UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc. (ENM/UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 29 DE SETEMBRO DE 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA

ALVES, GELSON DE SOUSA

Implementação do método dos elementos finitos generalizados com aplicação em materiais compósitos [Distrito Federal] 2014.

xvii, 85p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.MEF

2. MEFG

3.Materiais compósitos

4. Interface

5.Singularidade

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALVES, G. S. (2014). Implementação do método dos elementos finitos generalizados com aplicação em materiais compósitos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-010A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 85p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gelson de Sousa Alves.

TÍTULO: Implementação do método dos elementos finitos generalizados com aplicação em materiais compósitos.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Gelson de Sousa Alves

EQN 410/411 Bloco A Ed. Studio Center, Asa Norte.

70.865-405 Brasília – DF – Brasil.

gelsondsalves@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois sem ele não teria alcançado esta conquista.

Ao meu orientador Evangelista Junior pela orientação objetiva, segura e competente, e por sempre me incentivar pela busca do conhecimento para o desenvolvimento de pesquisas.

Ao professor Antônio Miranda pela ajuda no início desta pesquisa.

A minha mãe Deci, por todo amor e dedicação, ao meu pai Francisco, que de onde estiver olhara por mim. Aos meus irmãos Glébson, Gabriela, minha sobrinha afilhada Lunna e demais familiares pelo apoio que a mim foi dado.

Aos amigos Eduardo Fontes, Alejandra Zapata, Fabiano Macedo e Wanderley Gustavo pela força que me deram nesses anos de convivência.

Aos amigos Agno e Carlos Mariano pelo auxílio prestado no desenvolvimento desse trabalho, abdicando muito do seu tempo para me ajudar.

Aos amigos conquistados desde a graduação até agora no mestrado: Girleusa, Marcão, Cassius, Nelsão, Marizete, Rafael, Virlane, Americo, João Leite, Olivar, Tati, Marcus, Maria Claudia, Marília, Elaine, Henrique, Alejandro, Lorena, Ramon, Sebastião, Vitor, Carmen, Ronaldo, Uchôa, Eva, Carlinhos, Denise, Juan David, Nelson, Maria Paz, Almério, Walter, Wilson, Wallysson, José Victor, Juscelino, Ribamar.

Aos professores que tive ao longo da minha vida acadêmica, pelos conhecimentos e experiências repassadas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Dedico esta conquista a Deus e a minha
mãe Deci Alves da Silva, os responsáveis
por eu chegar nesse momento.

RESUMO

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM APLICAÇÃO EM MATERIAIS COMPOSITOS

Autor: Gelson de Sousa Alves

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Setembro de 2014

Esta pesquisa teve o objetivo de implementar formulações não convencionais do método dos elementos finitos (MEF) aplicado a análise estrutural em regime elástico linear. Especificamente, o método dos elementos finitos generalizados (MEFG) foi desenvolvido para simulações em domínios bidimensionais. Várias funções de enriquecimento, como as funções polinomiais, singulares e de interface, foram implementadas a fim de melhorar a aproximação dos problemas de valor de contorno com soluções suaves, singulares e descontínuas devido a diferentes interfaces de materiais. Uma técnica especial foi formulada e implementada levando em consideração a interface do material em compósitos sem a correspondência da malha de elementos finitos com o contorno dos diferentes materiais nos membros estruturais: vigas laminadas, placa com dois materiais e compósitos heterogêneos (matriz e inclusões). Assim, os resultados foram comparados com soluções analíticas e soluções pelo MEF. Os resultados mostram que melhores aproximações foram alcançadas usando o modelo proposto. A estratégia demonstrou potencial para resolver problemas com gradiente descontínuo causado pela interface material. Além disso, o método proposto atribuiu nós fictícios somente na interface, eliminando problemas comuns do MEFG convencional no momento da atribuição das condições de contorno e de mapeamento da continuidade de contorno dos elementos.

Palavras chave: MEF, MEFG, Materiais compósitos, Interface, Singularidade.

ABSTRACT

IMPLEMENTATION OF GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD WITH APPLICATION ON COMPOSITES MATERIALS

Author: Gelson de Sousa Alves
Supervisor: Francisco Evangelista Junior
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasilia, September 2014

This research aimed to implement non-conventional formulations of the finite element method (FEM) applied to structural analysis in linear elastic regime. Specifically, the framework of the generalized finite element method (GFEM) was developed for simulations in two-dimensional domains. Several enrichment functions such as polynomials, singular and interface functions were implemented in order to enhance the approximation of boundary values problems with smooth, singular, and discontinuous gradient solutions due interface of materials. A special technique was formulated and implemented to account the material interface in composite materials without matching the finite element mesh to the boundaries of different materials in structural members: layered beams, bi-material plates and heterogeneous composites (matrix and inclusions). Thereafter, the results were compared with analytical solutions or FEM solutions. As a result, more efficient approximations were achieved using the proposed framework. The strategy demonstrated potential for solving problems with discontinuous gradient caused by the material interface. Furthermore, the proposed method assigned only enrichment fictitious nodes at the interfaces which eliminate common issues in conventional GFEM when assigning boundary conditions and mapping boundary continuity through the elements.

Key-words: FEM, GFEM, Composite materials, Interface, Singularity.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2.	JUSTIFICATIVA	3
1.3.	OBJETIVOS	3
1.3.1.	Objeto Geral	3
1.3.2.	Objetos Específicos	4
1.4.	METODOLOGIA	4
1.4.1.	Modelagem de materiais homogêneos	5
1.4.2.	Modelagem de materiais compósitos	6
1.5.	ORGANIZAÇÃO	6
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FORMULAÇÃO DO MEFG	8
2.1.	APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	8
2.2.	APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	10
2.3.	FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DO MEFG	16
2.3.1.	Funções de enriquecimento polinomiais	16
2.3.2.	Funções de enriquecimento singulares	17
2.3.3.	Funções de enriquecimento descontínuas para interface de materiais	23
2.4.	FORMULAÇÃO DO MEFGI	25
2.4.1.	Conceitos básicos	25
2.4.2.	Funções de enriquecimento do MEFGI	28
3.	MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS HOMOGÊNEOS	31
3.1.	ENRIQUECIMENTOS POLINOMIAIS PARA PROBLEMAS DE SOLUÇÃO SUAVE	31
3.1.1.	Análise da convergência do refinamento de malha	32
3.1.2.	Análise da convergência da ordem polinomial do enriquecimento	39
3.2.	ENRIQUECIMENTOS SINGULARES EM PROBLEMAS DE MECÂNICA DA FRATURA	43
4.	MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS COMPÓSITOS	49
4.1.	APLICAÇÃO EM CHAPA DE DOIS MATERIAIS	49
4.2.	APLICAÇÃO EM VIGAS LAMINADAS	57

4.2.1.	Análise da convergência do refinamento de malha.....	62
4.2.2.	Análise da convergência da ordem polinomial do enriquecimento.....	67
4.3.	APLICAÇÃO EM COMPÓSITOS DE MATRIZ E INCLUSÕES	72
5.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	80
5.1.	CONCLUSÕES	80
5.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultado de parâmetros de desempenho analisado pelo MEF e MEFG (adaptada de Duarte <i>et al.</i> , 2000).....	20
Tabela 3.1 – Número de elementos e nós para cada malha triangular.	33
Tabela 3.2 – Número de elementos e nós para cada malha quadrilateral.....	37
Tabela 3.3 – Valor da Energia de deformação para as funções de enriquecimentos investigadas.	46
Tabela 3.4 – Valor da Energia de deformação utilizando funções de enriquecimentos singulares e polinomiais em conjunto.	47
Tabela 4.1 – Energia de deformação na chapa realizado pelo MEFGI e solução analítica para α e β iguais para as relações $E_1/E_2=2$ e $E_1/E_2=10$	53
Tabela 4.2 – Energia de deformação na chapa realizado pelo MEFGI e MEF para todos os valores de α e β para as relações $E_1/E_2=2$ e $E_1/E_2=10$	53
Tabela 4.3 – Valores dos E_{eq} analisado via MEF e MEFGI.	54
Tabela 4.4 – Número de elementos e nós para cada malha para o MEFG.....	61
Tabela 4.5 – Número de elementos e nós para cada malha para o MEFGI.....	61

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Modelo de material compósito.....	2
Figura 1.2 – Modelagem do material compósito aplicando o MEFG.	2
Figura 1.3 – Organização da metodologia e análises realizadas.	5
Figura 2.1 – Aproximação para o campo de deslocamentos (adaptada de Torres, 2003). 9	
Figura 2.2 – Propriedades das funções de forma para o MEF (Torres, 2003).....	9
Figura 2.3 – Nuvens de influência no Método das Nuvens <i>hp</i> (adaptada de Torres, 2003).....	10
Figura 2.4 – Nuvens de influência nodal do MEFG (adaptada de Torres, 2003).....	12
Figura 2.5 – Partição da unidade a partir dos elementos finitos em \mathbb{R}^2 (adaptada de Oden <i>et al.</i> , 1998).....	12
Figura 2.6 – Construção das funções de forma do MEFG, para enriquecimentos (a) contínuos; (b) alta ordem descontínuos (Evangalista Jr <i>et al.</i> , 2013).....	14
Figura 2.7 – Localização de um ponto com relação à ponta de trinca.	18
Figura 2.8 – Modelo complexo tridimensional (adaptada de Duarte <i>et al.</i> , 2000).....	19
Figura 2.9 – Os três passos da Estratégia Global-Local (adaptada de Duarte e Kim, 2008).....	22
Figura 2.10 – Possíveis escolhas para as funções de enriquecimento para interface de materiais (adaptada de Moës <i>et al.</i> , 2003).....	24
Figura 2.11 – Aproximações em um domínio com 2 materiais. (a) Interpolação convencional do MEF; (b) Interpolação com um elemento em não conformidade; (c) Interpolação do MEFGI (Soghrati <i>et al.</i> , 2012).....	26
Figura 2.12 – Avaliação das funções de enriquecimento no MEFGI (adaptada de Soghrati <i>et al.</i> , 2012).	29
Figura 3.1 – Geometria, carregamento e condições de contorno da viga.....	31
Figura 3.2 – Diferentes configurações de malha para a viga com elementos triangulares.	33
Figura 3.3 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada ordem polinomial de funções de enriquecimento sobre elementos triangulares; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.....	35
Figura 3.4 – Diferentes configurações de malha para a viga com elementos quadrilaterais.	36

Figura 3.5 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada ordem polinomial de funções de enriquecimento sobre elementos quadrilaterais; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	38
Figura 3.6 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha com elementos triangulares adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	40
Figura 3.7 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha com elementos quadrilaterais adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	42
Figura 3.8 – Geometria, carregamento e condições de contorno da chapa submetido a esforço de tração.	44
Figura 3.9 – Chapa com uma trinca discretizada por elementos quadrilaterais.	45
Figura 3.10 – Erro relativo, ϵ_r , da energia de deformação com relação ao NGL utilizando uma análise com enriquecimentos polinomiais e outra com enriquecimentos polinomiais juntamente com singulares.	47
Figura 4.1 – Geometria e carregamento da chapa uniaxial submetido a esforço de tração.	49
Figura 4.2 – Configurações dos materiais e malhas para a chapa analisada; (a) MEF; (b) MEFGL.	51
Figura 4.3 – Valores do E_{eq} analisado via MEFGL para diferentes valores de α e β ; (a) $E_1/E_2 = 2$; (b) $E_1/E_2 = 10$	55
Figura 4.4 – Deformadas para os cinco casos dos coeficientes α e β	56
Figura 4.5 – Geometria e carregamento da viga composta de dois materiais submetido à flexão simples.	57
Figura 4.6 – Diferentes configurações de malha para a viga com dois materiais para o MEFGL.	59
Figura 4.7 – Diferentes configurações de malha para a viga com dois materiais para o MEFGL.	60
Figura 4.8 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGL para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	63
Figura 4.9 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGL para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	64

Figura 4.10 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGI para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	65
Figura 4.11 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGI para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	66
Figura 4.12 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFG para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	68
Figura 4.13 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFG para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	69
Figura 4.14 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao Número de Graus de Liberdade para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFGI para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.	70
Figura 4.15 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFGI para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento;(b) Energia de Deformação.....	71
Figura 4.16 – Geometria, carregamento da chapa submetido a esforço de tração.	73
Figura 4.17 – Configurações de malhas para $V_1/V_2 = 0,16$	74
Figura 4.18 – Funções de enriquecimento no MEFGI 2D com criação dos elementos de integração para um elemento quadrilateral de quatro nós, cortado por uma interface feita por dois segmentos lineares interceptados (Adaptado de Soghrati <i>et al.</i> , 2012)	75
Figura 4.19 – Valores de E_{eq} para diferentes malhas e tipos de simulações com diferentes relações E_1/E_2	76
Figura 4.20 – Valor do E_{eq} para a malha II para relações de E_1/E_2 iguais a 0,0001; 0,01; 1; 100 e 10000 para três proporções entre volumes.	77
Figura 4.21 – Valor do E_{eq} para a malha II numa abordagem tridimensional.....	79

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

<i>MEFG</i>	Método dos Elementos Finitos Generalizados;
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos;
<i>MEFE</i>	Método dos Elementos Finitos Estendido;
<i>PU</i>	Partição de Unidade;
<i>NGL</i>	Numero de Graus de Liberdade;
<i>P0</i>	Sem função de enriquecimento;
<i>P1</i>	Função de enriquecimento polinomial de grau 1;
<i>P2</i>	Função de enriquecimento polinomial de grau 2;
<i>P3</i>	Função de enriquecimento polinomial de grau 3;
<i>P4</i>	Função de enriquecimento polinomial de grau 4;
<i>A</i>	Área da seção transversal;
C_0^s	Espaço de funções com derivadas continua até a ordem s ;
<i>E</i>	Módulo de Elasticidade Longitudinal;
E_1	Módulo de Elasticidade Longitudinal do material 1;
E_2	Módulo de Elasticidade Longitudinal do material 2;
E_{eq}	Módulo de Elasticidade Longitudinal Equivalente;
E_{tr}	Módulo de Elasticidade Longitudinal Transformada;
F^1	Função de enriquecimento descontinua;
F^2	Função de enriquecimento descontinua;
<i>I</i>	Inércia da seção transversal;
I_{tr}	Inércia da seção transversal transformada;
<i>L</i>	Comprimento;
L_{ji}	Funções de enriquecimento polinomiais ou singulares;
N_j	Funções de forma;
$N_i^{(j)}$	Funções de forma do nó i relativo ao elemento j ;
$N_i^{(p)}$	Funções de forma do nó i relativo ao elemento p ;
N_I	Funções PU do MEF tradicional;
<i>P</i>	Carregamento atuante;
\mathbb{R}^1	Domínio unidimensional;
\mathbb{R}^2	Domínio bidimensional;

U	Energia de Deformação;
U_{ref}	Energia de Deformação de Referência;
b_{ji}	Graus de Liberdade adicionais;
f_y	Força uniformemente distribuída sobre uma superfície;
r_j	Raio que define uma nuvem;
r	Distância dos Pontos de Gauss até o ponto nodal a enriquecer;
s	Fator de escala;
u_x	Valor do deslocamento na direção x ;
u_y	Valor do deslocamento na direção y ;
\mathbf{u}_i	Deslocamentos nos pontos nodais para o problema de interface;
\mathbf{u}_j	Graus de Liberdade da estrutura relacionados a cada ponto nodal;
$\tilde{\mathbf{u}}$	Aproximação para os deslocamentos no espaço vetorial;
\tilde{u}	Aproximação para os deslocamentos;
\mathbf{u}^{enr}	Aproximação enriquecida;
x, y	Coordenadas cartesianas;
\mathbf{x}	Vetor posição;
x_j, y_j	Coordenadas dos pontos nodais a enriquecer;
\mathbf{x}_j	Ponto nodal de coordenada (x_j, y_j) ;
x_{int}	Nó da interface que corta o elemento;
x_1, x_2	Nós da aresta do elemento pai;
ω_j	Nuvem de influência dos pontos nodais;
α	Proporções da quantidade de material em um lado da estrutura na direção longitudinal;
α_i	Graus de Liberdade Generalizados para cada nó i de interface;
β	Proporções da quantidade de material em um lado da estrutura na direção longitudinal;
ε	Relação entre o menor elemento criança e o pai;
ε_r	Erro Relativo;
ξ	Monômio correspondente ao enriquecimento polinomial;
η	Monômio correspondente ao enriquecimento polinomial;
\mathcal{J}_j	Conjunto de funções de enriquecimento;
ϕ_{ji}	Funções de Forma do MEFG;

θ	Ângulo entre o vetor r e o eixo local x' ;
ν	Coefficiente de Poisson;
ψ_I	Funções de enriquecimento de interface;
σ	Tensão atuante em uma estrutura;
Φ_I	Representação da função <i>level – set</i> .

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A formulação de abordagens mais flexíveis na modelagem de materiais e estruturas mais complexas é de grande importância para as indústrias do segmento automobilístico, aeronáutico, aeroespacial, da construção civil, do petróleo dentre outras. Essas indústrias exigem projetos mais audaciosos com grandes dimensões e elevado grau de complexidade nas novas estruturas e materiais desenvolvidos e empregados.

O desenvolvimento de formulações não convencionais necessárias para resolução de problemas complexos ainda é um tema central da mecânica computacional. Materiais compósitos, por exemplo, que são formados por duas ou mais fases com diferentes propriedades mecânicas demandam que a modelagem, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), adeque a discretização (malha) aos contornos das diversas fases do material. Isso pode aumentar demasiadamente os custos computacionais de modelagem e tornar proibitiva as análises micromecânicas e as técnicas multi-escalas. Por exemplo, técnicas de homogeneização fazem uso da solução de um elemento de volume representativo para homogeneizar e transferir o comportamento constitutivo para escalas maiores consideradas homogêneas. Isto demanda uma análise eficiente do problema de valor de contorno do volume representativo composto de vários materiais de modo a viabilizar a técnica em problemas mais realistas.

Nos últimos anos, diferentes métodos não convencionais vêm ganhando importância e sendo cada vez mais difundidos para resolução de problemas específicos de mecânica computacional. Dentre esses métodos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que oferece condições bastante favoráveis às limitações encontradas nos métodos convencionais, entre eles o MEF. O MEFG pode ser entendido como uma combinação dos conceitos dos métodos sem malha, quanto à utilização de funções enriquecedoras, combinado com as funções de aproximação tradicionais do MEF definidas nos nós (Babuška *et al.*, 1994). O MEFG trabalha com diversas famílias de funções de enriquecimento, citando-se: os enriquecimentos polinomiais, singulares, descontínuos e de interface que visam melhorar a qualidade da aproximação e também flexibilizar os aspectos de modelagem.

No caso de materiais compósitos, o MEFG pode possibilitar que a malha gerada não esteja em conformidade com a interface física entre materiais, como acontece no MEF, possibilitando a modelagem e simulação de problemas com geometrias complexas, multi-escala, de otimização, estocásticos e outros, com um menor custo computacional. Isso se deve ao fato de que o uso de funções de enriquecimento específicas pelo MEFG não requer a geração de sucessivas malhas conformes para se obter uma qualidade na aproximação. Um modelo de material compósito é visualizado na Figura 1.1 e uma possível modelagem desse material compósito aplicando o MEFG é mostrado na Figura 1.2.

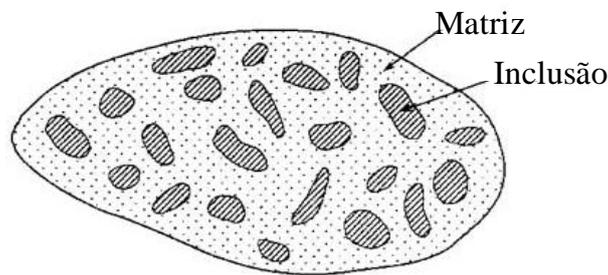


Figura 1.1 – Modelo de material compósito.

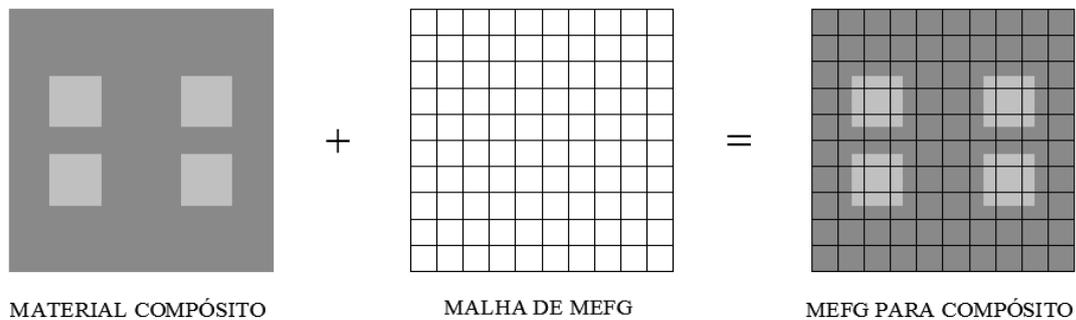


Figura 1.2 – Modelagem do material compósito aplicando o MEFG.

Apesar do avanço da capacidade dos processadores, é necessária uma modelagem computacional mais eficiente e sofisticada, na qual formulações não convencionais do MEF ganham em competitividade e flexibilidade.

1.2. JUSTIFICATIVA

O MEF é o método mais utilizado na análise de estruturas por possuir formulação teórica já bem consolidada na literatura, ampla experimentação e validação de resultados. No entanto, podem ser notadas limitações nesse método em algumas aplicações, como no campo dos materiais compósitos, em que para se modelar a heterogeneidade do material, a malha de elementos tem que se adequar ao contorno de cada material. Essa exigência aumenta muito o custo de modelagem, principalmente em problemas em que se necessite a alteração da geometria do problema nas análises, tais como: alteração da posição, quantidade e volume das inclusões na matriz do material compósito. Nessas análises, o uso de malhas em conformidade com as interfaces do material torna-se impraticável.

Outra limitação do MEF é no campo da mecânica da fratura, cuja qualidade das respostas aproximadas pode ser comprometida por limitação da capacidade de aproximação dos elementos em regiões críticas do modelo. Uma boa aproximação desse problema requer um custo computacional elevado devido a um maior refinamento da malha exigido na análise próxima às regiões com respostas singulares, como é o caso de regiões de ponta de trinca.

O MEFG, com sua capacidade de flexibilização da aproximação por meio da adição de funções de enriquecimento que se adaptam ao problema de valor de contorno desejado, apresenta condições bastante favoráveis para resolução de muitos problemas solucionados pelo MEF com certa dificuldade.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objeto Geral

A presente pesquisa tem como objetivo geral mostrar a formulação e implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizados adicionando funções de enriquecimento polinomiais, singulares e de interface para a análise de estruturas em regime elástico linear. O principal objetivo e contribuição do trabalho são a formulação, implementação e validação de uma técnica eficiente para a simulação de interface entre materiais, de modo a flexibilizar a geração de malhas para análises de materiais compósitos. Aqui é

implementada e validada uma técnica ainda inédita em aplicações de mecânica dos sólidos.

1.3.2. Objetos Específicos

Os objetivos específicos são:

- Adicionar diferentes funções de enriquecimento para cada problema de valor de contorno escolhido;
- Analisar o desempenho do MEFG comparando com soluções obtidas pelo MEF e analiticamente;
- Formular e implementar o método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento de interface para sólidos compósitos; e
- Analisar materiais compósitos, com as matrizes e inclusões possuindo diferentes propriedades mecânicas.

1.4. METODOLOGIA

A metodologia a ser seguida será a implementação, validação e estudo de convergência das simulações numéricas, utilizando o MEFG para estruturas com comportamento elástico linear. Para a simulação dos modelos foi utilizado o software MatLab da companhia Mathworks. São apresentados os modelos em que se empregam diferentes funções de enriquecimento sobre a partição de unidade (PU) para ampliação do espaço de aproximação em problemas envolvendo materiais homogêneos e compósitos. As funções de enriquecimento utilizadas são as polinomiais, as singulares e as de interface, como é descrito a seguir. O fluxograma da Figura 1.3 apresenta as diversas etapas de cada modelagem e as análises estabelecidas para cada aplicação estudada nessa pesquisa.

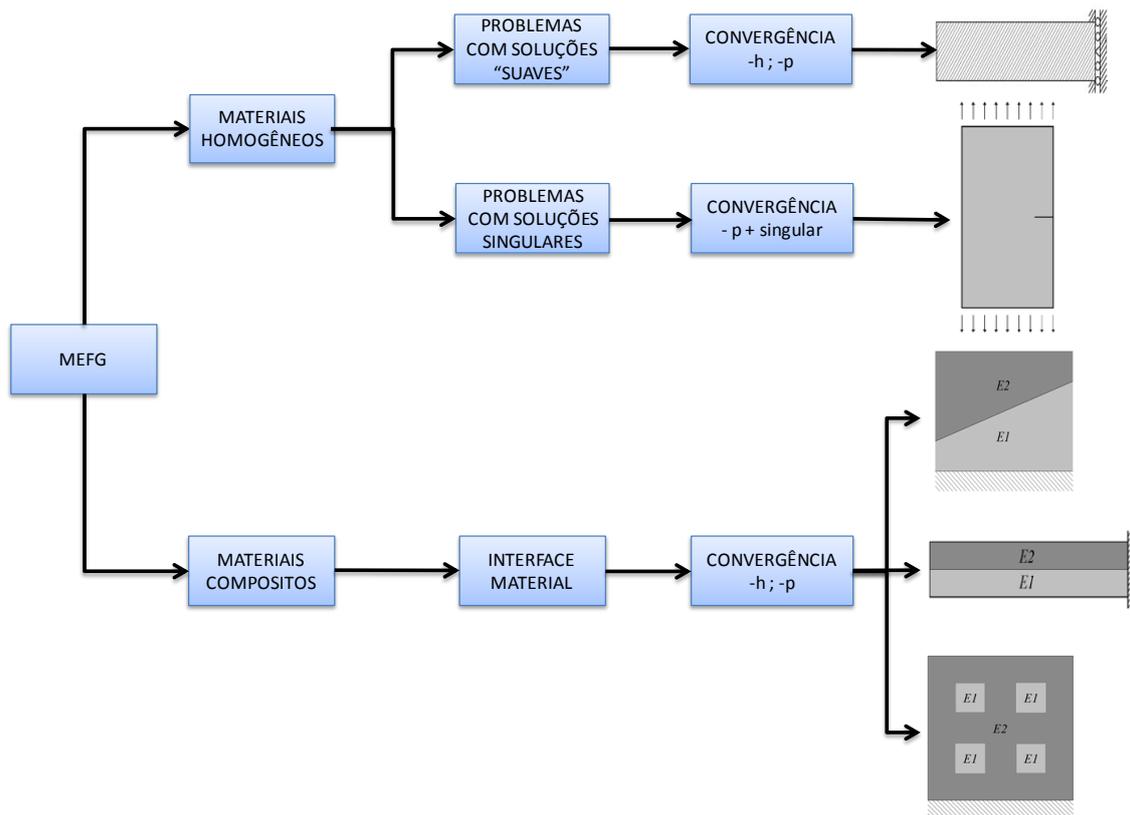


Figura 1.3 – Organização da metodologia e análises realizadas.

1.4.1. Modelagem de materiais homogêneos

Foi simulado um modelo de uma viga submetida à flexão simples com diferentes configurações de malhas, discretizadas por elementos triangulares e quadrilaterais. Para cada um desses elementos, foram adicionadas diferentes funções de enriquecimento polinomiais para análises de convergência com relação ao refinamento da malha, assim como, também, para cada malha analisou-se a convergência com relação às diferentes ordens de enriquecimento e as respostas foram comparadas com uma solução analítica.

Para o enriquecimento singular, simulou-se um modelo de uma chapa com uma trinca, submetido a esforços de tração, discretizado com elementos quadrilaterais. Foi adicionado à região da singularidade funções de enriquecimento que caracterizam a aproximação local. Posteriormente, foram comparados os resultados da energia de deformação encontrados, com simulações já realizadas em um *software* de elementos finitos. A mesma chapa também foi simulada, porém foram aplicadas funções de singularidade e de enriquecimento polinomiais em conjunto, para analisar sua convergência ao se adicionar ambas as funções.

1.4.2. Modelagem de materiais compósitos

Foram realizadas simulações numéricas para ilustrar a eficiência do MEFG para domínios com descontinuidade material para três modelos. Adicionaram funções de enriquecimento de interface para discretizar o comportamento da descontinuidade,

Foi simulado um modelo de uma chapa engastada e submetida a um esforço de tração, constituído por dois materiais distintos. Essa mesma chapa foi simulada com apenas um elemento quadrilateral para todo o domínio. A descontinuidade dessa chapa foi modelada adicionando-se as funções de enriquecimento de interface e as respostas foram comparadas com soluções analíticas e do MEF. Para o segundo modelo, foi analisado uma viga submetida à flexão simples composta por dois materiais distintos, discretizados por malhas de elementos quadrilaterais. Além disso, também foram adicionadas funções de enriquecimento polinomiais para funcionar em conjunto com as funções de enriquecimento de interface para ajudar na ampliação do espaço de aproximação, para se analisar a convergência com relação ao refinamento da malha e em relação a ordens polinomiais de enriquecimentos, comparando com soluções analíticas.

O terceiro modelo simulado foi um modelo de compósito constituído por uma chapa engastada submetida a um esforço de tração, cujo interior da chapa possui alguns materiais em regiões com diferentes propriedades mecânicas. Foi simulada para algumas configurações de malhas para se obter o módulo de elasticidade longitudinal equivalente da mesma.

1.5. ORGANIZAÇÃO

Essa dissertação está dividida em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresentou uma visão geral do MEFG no campo da mecânica computacional, a justificativa da sua escolha para a pesquisa, os objetivos a serem alcançados e a metodologia empregada na dissertação.

No Capítulo 2, é apresentada a revisão bibliográfica com conceitos e características do MEFG, como a partição da unidade, o enriquecimento local de uma aproximação e sua vantagem com relação aos métodos convencionais. Além disso, apresenta o desenvolvimento teórico da formulação geral do MEFG, das funções de enriquecimento

polinomiais, singulares e descontínuas, finalizando com a apresentação da formulação geral do MEFG com enriquecimentos de interface.

No Capítulo 3, são descritas as simulações numéricas implementadas no MEFG para um modelo de uma viga adicionando funções de enriquecimento contínuas polinomiais e um modelo de uma chapa com uma trinca utilizando funções que descrevem o comportamento da singularidade.

No Capítulo 4, são apresentadas simulações numéricas em que se implementa o MEFG com funções de enriquecimento de interface para um modelo com chapa composta por dois materiais discretizados por apenas um elemento. O segundo modelo foi uma viga laminada composta por dois materiais, submetida à flexão simples, na qual também se adicionou as funções de enriquecimento de interface juntamente com as funções de enriquecimento polinomiais. No último modelo, foi analisada uma chapa composta internamente por materiais de diferentes propriedades, em que se determinaram as respostas para o módulo de elasticidade equivalente para utilização dos materiais em conjunto.

O Capítulo 5 reúne as conclusões alcançadas pelos resultados obtidos nas simulações dos modelos e as sugestões para desenvolvimento de trabalhos futuros. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento dessa pesquisa.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FORMULAÇÃO DO MEEG

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEEG) utiliza a estrutura do Método dos Elementos Finitos (MEF) e os conceitos dos métodos sem malha. Este capítulo, faz-se uma breve abordagem do MEF tratando de algumas características importantes para o desenvolvimento do MEEG. Na sequência, o MEEG é descrito de maneira detalhada bem como as principais funções de enriquecimento.

2.1. APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF é o método mais utilizado na mecânica dos sólidos para análise de estruturas. O método consiste em dividir o domínio contínuo do problema em subdomínios que são pequenos elementos cujos vértices são denominados nós. Diante dessas características, pode-se construir aproximações dentro do domínio do elemento através da interpolação de valores nodais.

Para o campo unidimensional \mathbb{R}^1 , pode-se estabelecer a aproximação para o campo dos deslocamentos, como é mostrado na Equação 2.1.

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(x) \cdot \alpha_j \quad (2.1)$$

No qual \mathcal{N}_j são as funções de forma do elemento finito e α_j são constantes.

As constantes α_j tem seus valores coincidentes com valores discretos da função $\tilde{u}(x)$ nos nós, isso é uma característica do MEF como se visualiza nas equações abaixo.

$$\alpha_j = \tilde{u}_j \quad (2.2)$$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(x) \cdot u_j \quad (2.3)$$

As funções de forma $N_j(x)$ têm que possuir valor unitário no nó x_j e zero nos demais nós e o somatório das funções de forma em cada elemento é igual à unidade estabelecendo a propriedade da Partição de Unidade (PU). A Figura 2.1 mostra a aproximação de deslocamentos descrita pela Equação 2.3 e a Figura 2.2 mostra as propriedades das funções de forma para o MEF.

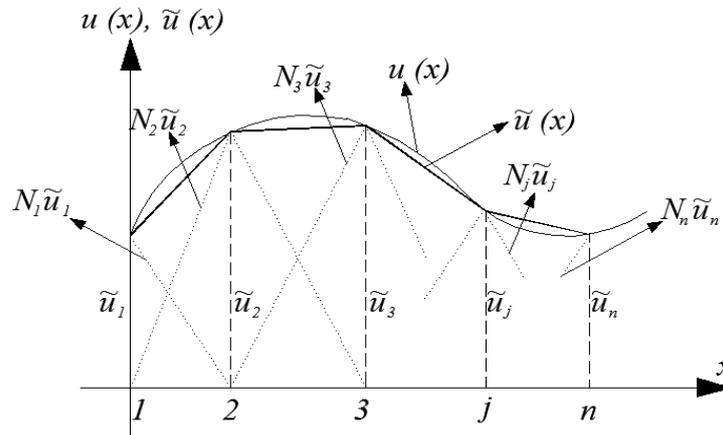


Figura 2.1 – Aproximação para o campo de deslocamentos (adaptada de Torres, 2003).

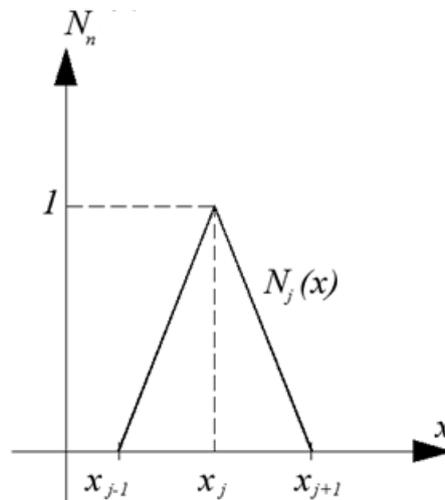


Figura 2.2 – Propriedades das funções de forma para o MEF (Torres, 2003).

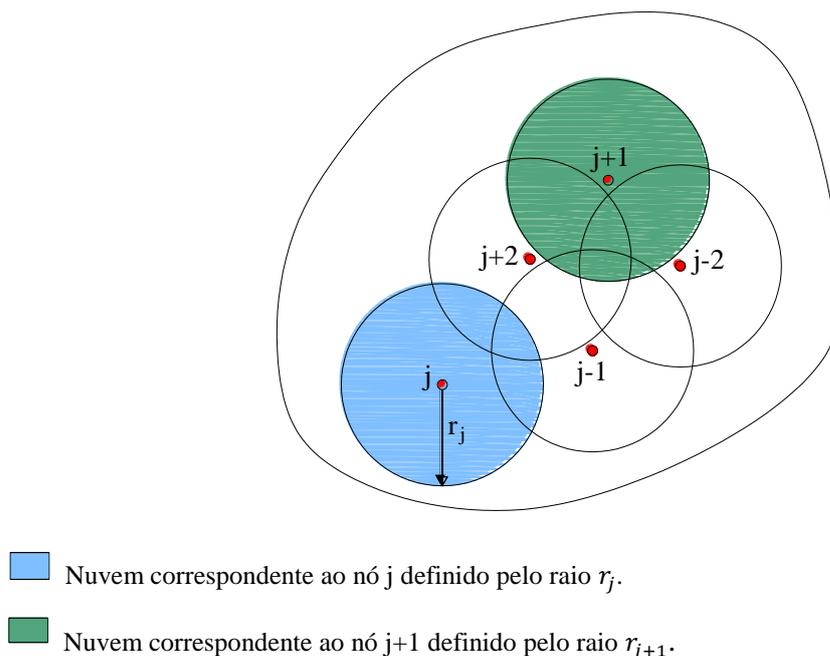
O MEF obtém soluções aproximadas de problemas de valor de contorno pelo Método dos Resíduos Ponderados ou pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Aplicando em problemas lineares, a função aproximadora gera um sistema de equações também linear obtendo como incógnitas os valores nodais. No sistema de equações, o vetor independente é o vetor de forças nodais e a matriz dos coeficientes desse sistema de equações é denominada matriz de rigidez.

Não está no escopo desta dissertação detalhar a formulação do MEF. Maiores detalhes são sugeridas as referências (Bathe, 1996; Zienkiewicz *et al.*, 2005; Reddy, 2006).

2.2. APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) foi proposto a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) com as denominações: Método dos Elementos Finitos Especiais; e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade. Uma estratégia similar foi também proposta por Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996) e Oden *et al.* (1998), com as denominações Nuvens *hp* e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp*.

Similarmente ao Método das Nuvens *hp* de Duarte e Oden (1996), o MEFG abrange o conceito de nuvens de influência (suporte) entre os elementos. No Método das Nuvens *hp*, as nuvens de influência são definidas por nós, no qual em cada nó se define um raio para a formação de cada nuvem, que são utilizadas para discretizar o domínio do problema em análise e podem ser distribuídas de forma aleatória sem vinculações entre si e, conseqüentemente, formam a base para o desenvolvimento da aproximação. Na Figura 2.3 são apresentadas as nuvens de influência para o Método das Nuvens *hp*, no caso bidimensional.



■ Nuvem correspondente ao nó j definido pelo raio r_j .

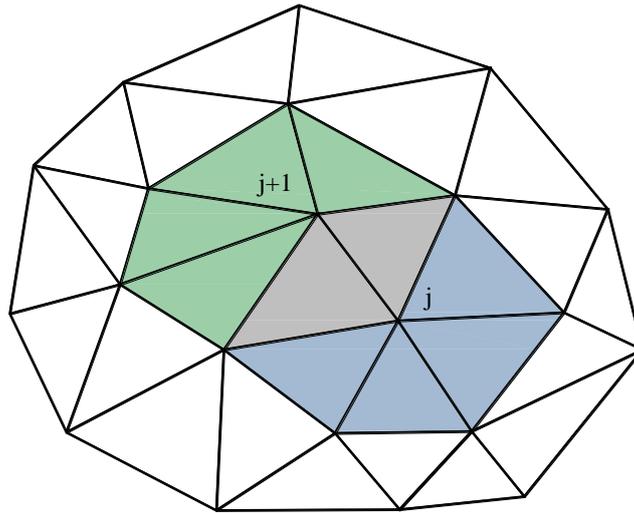
■ Nuvem correspondente ao nó $j+1$ definido pelo raio r_{j+1} .

Figura 2.3 – Nuvens de influência no Método das Nuvens *hp* (adaptada de Torres, 2003).

Melenk e Babuška (1996) propuseram o Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU), que emprega as funções de forma típicas do MEF como partição da unidade. Essa metodologia possui algumas características, entre elas a de apresentar boas condições de aproximação local e assegurar a conformidade da solução global por meio do uso da partição da unidade. Outra abordagem foi estabelecer um paralelo entre o MEFPU e o MEF no que diz respeito às versões h e p adaptativo, desde que o espaço das funções de aproximação local (funções de enriquecimento) sejam polinomiais. Se o espaço de aproximação local não for enriquecido e as nuvens das funções partição de unidade reduzirem o tamanho de sua área de influência, têm-se uma situação parecida com o refinamento h do MEF. Porém, se o espaço de aproximação local é enriquecido e as nuvens das funções partição de unidade permanecerem constantes no tamanho da sua área de influência, têm-se agora uma situação parecida com o refinamento p do MEF.

Strouboulis *et al.* (2000) analisaram o MEFG como uma combinação existente entre o MEF clássico e o MEFPU. Nesse estudo, os autores demonstraram a viabilidade de estender a aproximação do MEF tradicional, adicionando funções especiais chamadas de funções enriquecedoras, com a finalidade de melhorar a qualidade da aproximação. Essas funções foram selecionadas para tirar proveito das informações que já se sabe sobre o problema de valor de contorno. Ainda, os autores citados anteriormente, abordaram a possibilidade de se utilizar na implementação do MEFG códigos de implementação já existentes baseados no MEF, onde facilitaria e ganharia um certo tempo para escrever um programa. Também observaram a possibilidade das funções partição da unidade e das funções enriquecedoras serem linearmente dependentes ou quase linearmente dependentes, levando a formação de uma matriz de rigidez semidefinida positiva. Esse inconveniente foi solucionado em Babuška *et al.* (1997) que apresentou procedimentos iterativos para resolução do sistema de equações.

No MEFG, utiliza-se uma malha de elementos finitos para o posicionamento dos pontos nodais e as nuvens de influência são formadas pelo conjunto de elementos finitos que compartilham um ponto nodal x_j . Na Figura 2.4, é apresentada as nuvens de influência para MEFG e para um domínio bidimensional. Em cada nuvem para o MEFG, a partição de unidade fica determinada pelo conjunto das funções de forma dos elementos finitos que compõem a nuvem associada ao nó base.



- Nuvem correspondente ao nó j
- Nuvem correspondente ao nó $j+1$
- Zona de transição entre nuvens

Figura 2.4 – Nuvens de influência nodal do MEFG (adaptada de Torres, 2003).

Considerando um domínio bidimensional \mathbb{R}^2 , é ilustrado na Figura 2.5 um modelo utilizando funções de forma Lagrangeanas lineares, denotada por $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$. Cada função $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ possui uma nuvem de influência ω_j dada pelos elementos que compartilham o mesmo ponto nodal \mathbf{x}_j .

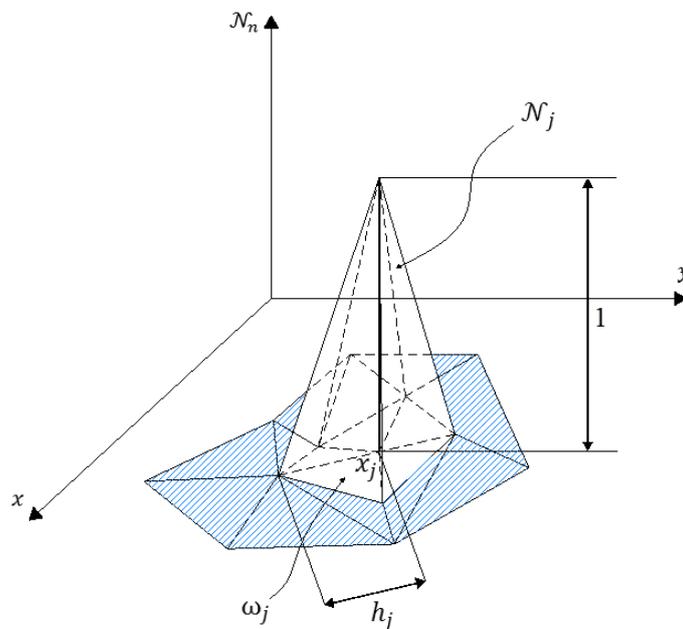


Figura 2.5 – Partição da unidade a partir dos elementos finitos em \mathbb{R}^2 (adaptada de Oden *et al.*, 1998).

Em que:

h_j - comprimento da maior aresta do elemento que compartilha o ponto nodal \mathbf{x}_j pertencente à nuvem ω_j .

A PU em qualquer ponto do domínio é definida respeitando-se as propriedades das Equações 2.4 e 2.5 a seguir.

$$\mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \in C_0^s(\omega_j), s \geq 0, 1 \leq j \leq n \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1 \text{ em qualquer } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.5)$$

Em que:

C_0^s - um espaço contínuo;

n - número de nós.

A Equação 2.4 indica que a função $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ é diferente de zero, apenas sobre a nuvem ω_j , sendo “ s ” vezes continuamente diferenciável. A Equação 2.5 estabelece que o somatório de todas as funções de forma pertencentes à nuvem ω_j é igual à unidade.

O enriquecimento da aproximação é realizado seguindo as técnicas e conceitos do método das nuvens hp , que permite a ampliação no espaço da aproximação para obter uma melhora na sua qualidade, obtido pela multiplicação das funções PU por funções linearmente independentes, definido na Equação 2.6 em cada nó \mathbf{x}_j da nuvem ω_j , conhecidas como funções de aproximação local ou funções de enriquecimento.

$$\mathcal{J}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} \text{ com } \{L_{j1}(\mathbf{x}) = 1\} \quad (2.6)$$

Em que:

L_{ji} - funções de enriquecimento linearmente independentes definido em cada nó \mathbf{x}_j da nuvem ω_j ;

q – número de funções de enriquecimento.

O produto da multiplicação da PU pelas funções da Equação 2.6 resulta na chamada função produto ou, mais conhecido, função de forma (ϕ_{ji}) do MEFG, representado na Equação 2.7.

$$\{\phi_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \cdot \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (2.7)$$

As funções de enriquecimento $L_{ji}(\mathbf{x})$ podem ser definidas a partir de um conhecimento *a priori* do comportamento da solução. Entre as funções especiais que têm sido utilizadas como enriquecimentos, destacam-se as funções contínuas polinomiais, as descontínuas e as singulares. Essas podem ser utilizadas para se modelar características locais como as trincas, vazios ou microestruturas (Babuška *et al.*, 1994).

Na Figura 2.6, compreende-se de uma melhor maneira as funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ comentadas anteriormente, para um domínio bidimensional. Na parte superior da Figura 2.6(a) e Figura 2.6(b) são representadas as funções PU de uma determinada nuvem de elementos conhecidas como função “chapéu”. Já que se trata de um modelo do MEF, essas funções são as funções de forma tradicionais do MEF. Na parte central, encontram-se as funções de enriquecimento para caracterização do problema local, na Figura 2.6(a) se mostra a função de enriquecimento polinomial e na Figura 2.6(b) uma função de enriquecimento descontínua (função Heaviside). Na parte inferior, mostra-se a função ϕ_{ji} , resultado do produto entre a PU e a função de enriquecimento.

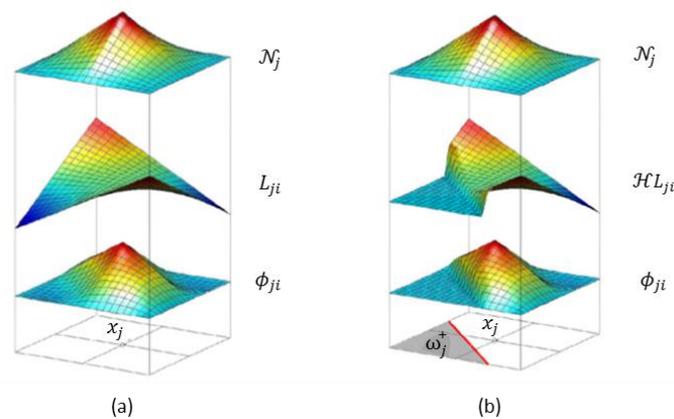


Figura 2.6 – Construção das funções de forma do MEFG, para enriquecimentos (a) contínuos; (b) alta ordem descontínuos (Evangelista Jr *et al.*, 2013).

As funções de forma do MEFG possuem certas propriedades locais representativas do problema estudado em decorrência da escolha das funções de enriquecimento com as características específicas. Além disso, as funções de forma herdam o suporte compacto da PU, ou seja, as funções de forma valem zero fora dos elementos que contém o seu nó associado, fazendo com que a aproximação global em um dado elemento, construída pela combinação das funções de forma do MEFG relativa a cada ponto nodal, seja obtida sem penalizar a continuidade entre os elementos da malha inicialmente adotada (Strouboulis *et al.*, 2000).

Pela combinação entre as funções PU e de enriquecimento estabelecidas na Figura 2.6, chega-se a uma aproximação $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, apresentada na Equação 2.8.

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^q L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (2.8)$$

Em que:

$\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$, graus de liberdade da estrutura atrelado ao nó \mathbf{x}_j da nuvem ω_j ;

b_{ji} , graus de liberdade adicionais, em correspondência a cada componente das funções enriquecidas;

$j = 1, \dots, n$, número de pontos nodais \mathbf{x}_j ;

$i = 1, \dots, q$, número de funções enriquecedoras.

Segundo Duarte *et al.* (2000), pela maneira como se realiza o enriquecimento, chega-se a uma aproximação sem “costura”, ou seja, sem a necessidade de estabelecer condições de restrição que garantam a continuidade dos diferentes campos aproximadores entre cada elemento. Além disso, o emprego das funções de forma do MEF como PU evita alguns inconvenientes encontrados em alguns métodos sem malha. Dentre os inconvenientes, cita-se a integração numérica, pois se utiliza uma malha com domínio definido e a imposição das condições de contorno, devido ao posicionamento dos nós.

No caso das funções de forma e de enriquecimento serem polinomiais, existe uma grande chance das funções de forma do MEFG serem linearmente dependentes. A consequência disso é que o sistema de equação linear torna-se um sistema com infinitas soluções. Esse problema pode ser resolvido utilizando estratégias numéricas que se

encontram em Strouboulis *et al.* (2000). Uma dessas estratégias é utilizar um algoritmo iterativo através de uma técnica de perturbação, desenvolvido por Babuška.

2.3. FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DO MEFG

As funções de enriquecimento $L_{ji}(\mathbf{x})$ podem ser polinomiais ou especiais, que representem *a priori* o conhecimento da solução do problema de estudo em um espaço local de aproximação. Diante disso, são apresentados de forma resumida três bases de funções de enriquecimento: as funções de enriquecimento polinomial, as de enriquecimento singulares e as de interface.

2.3.1. Funções de enriquecimento polinomiais

Segundo Duarte *et al.* (2006), as funções de enriquecimento polinomiais podem ser representadas de acordo com o domínio dimensional do problema. O enriquecimento é estabelecido de forma hierárquica, obedecendo ao triângulo ou pirâmide de Pascal. Para um domínio bidimensional, mostra-se nas Equações 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 as funções de enriquecimento de grau um até grau quatro de aproximação, respectivamente.

$$\mathcal{J}_j = \{1, \xi, \eta\} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{J}_j = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2\} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{J}_j = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3\} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{J}_j = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \xi^4, \xi^3\eta, \xi^2\eta^2, \xi\eta^3, \eta^4\} \quad (2.12)$$

As variáveis ξ e η são monômios utilizados para se enriquecer os pontos nodais do domínio e são representados pelas equações 2.13 e 2.14.

$$\xi = \frac{(x - x_j)}{h_j} \quad (2.13)$$

$$\eta = \frac{(y - y_j)}{h_j} \quad (2.14)$$

Em que:

x e y - as coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento;

x_j e y_j - as coordenadas dos pontos nodais a enriquecer.

O h_j funciona como uma normalização para que não introduzam ao enriquecimento informações associadas aos elementos, tais como o seu comprimento e sua posição na malha, minimizando os erros de arredondamento durante o procedimento computacional. A implementação do enriquecimento é feita diretamente nas coordenadas físicas do problema (Duarte *et al.*, 2000).

À medida que se aumenta a ordem polinomial do enriquecimento das Equações 2,9 à 2.12, melhora-se a qualidade da solução e, conseqüentemente, aumenta-se também o número de graus de liberdade, pois cada monômio representado nessas equações equivale a dois graus de liberdade relativos a cada direção x e y .

2.3.2. Funções de enriquecimento singulares

Para uma classe de problemas que constituem pontos de singularidade quanto à concentração de tensões, as aproximações locais próximas a esses pontos apresentam uma qualidade muito pobre na solução quando se utilizam as funções de enriquecimento polinomiais, como acontece no MEF para uma malha não muito refinada (Duarte *et al.*, 2000).

A literatura aponta que as funções de enriquecimento singulares descrevem de maneira muito satisfatória o campo de deslocamentos na vizinhança dos pontos singulares, situados em uma região concentradora de tensão e sua localização é dada por r e θ , como pode ser visualizado na Figura 2.7.

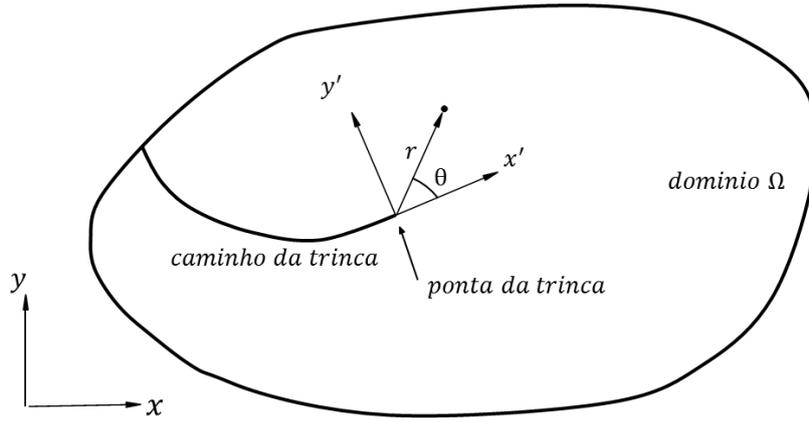


Figura 2.7 – Localização de um ponto com relação à ponta de trinca.

Um exemplo de funções de enriquecimento singulares é mostrado na Equação 2.15.

$$\mathcal{I}_j = \left[1, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (2.15)$$

Em que (r, θ) são dados em coordenadas polares locais na trinca, como mostrado na Figura 2.7 acima e podem ser determinadas pela Equação 2.16 e 2.17 em função das coordenadas cartesianas.

$$r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (2.16)$$

$$\theta = \arctan \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)} \quad (2.17)$$

Em que:

x e y – coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento;

x_j e y_j – coordenadas dos pontos nodais a enriquecer;

r – distancia entre as coordenadas do ponto de Gauss e o ponto nodal a enriquecer;

θ – ângulo entre o vetor r e o eixo local x' .

Assim como no enriquecimento polinomial, cada função de enriquecimento singular (Equação 2.15) produz dois graus de liberdade.

Belytschko e Black (1999) apresentaram para o MEF um procedimento para se estabelecer uma quantidade mínima possível de geração de malhas adaptativas para problemas de propagação de trincas, onde adicionaram funções de enriquecimento descontínuas para a aproximação do elemento finito, levando em conta a presença da trinca. O método permitiu com que a trinca estivesse alinhada dentro da malha, aplicando uma remalhagem necessária para trincas curvas. Posteriormente, esse método foi melhorado por Mões *et al.* (1999), onde se permitiu a representação geométrica de qualquer tipo de trinca independente da malha de elementos empregada similar ao que ilustra a Figura 2.6(b). A metodologia é baseada na construção da aproximação enriquecida a partir da interação da geometria da trinca com a malha e passou a ser conhecido como Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) ou mais conhecido do inglês *extended finite element method* (XFEM).

Duarte *et al.* (2000) descreveram as ideias por trás da formulação do MEFG e abordaram algumas das vantagens desse método sobre o MEF, para resolução de problemas complexos de mecânica estrutural no domínio tridimensional. Entre as vantagens observadas, destacam-se a estrutura da matriz de rigidez e sua performance em comparação com o MEF, utilizando um modelo elástico tridimensional que possui cantos reentrantes e que consistem num ponto de singularidade, ou seja, uma região concentradora de tensões. O modelo pode ser observado na Figura 2.8.

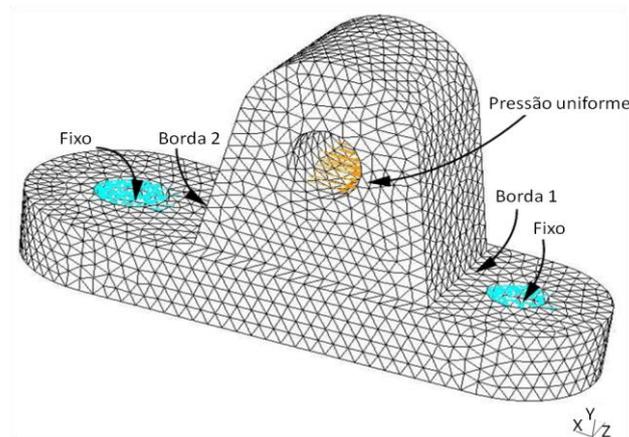


Figura 2.8 – Modelo complexo tridimensional (adaptada de Duarte *et al.*, 2000).

No modelo da Figura 2.8, utilizou-se uma malha com 15527 elementos tetraédricos e 3849 pontos nodais, com condições de contorno e uma pressão uniforme na direção negativa de x. Os resultados de alguns parâmetros de desempenho pelos dois métodos

são visualizados na Tabela 2.1. Todos os tempos representados nessa tabela são dados em segundos.

Tabela 2.1 – Resultado de parâmetros de desempenho analisado pelo MEF e MEFG (adaptada de Duarte *et al.*, 2000).

Método	MEF	MEF	MEFG	MEFG
	p = 1	p = 2	p = 2	p = 2 + singulares
Tempo de Processamento	271,30	2729,71	366,1	936,32
Número de Equações	11547	76797	46188	46584
Fatoração Numérica	36,21	2737,83	2062,13	2156,57
Núm. de Oper. com Pts. Flut.	9,42E+08	7,86E+10	5,99E+10	6,26E+10
Energia de Deformação	2,37533	2,69913	2,67491	2,71109
Erro na norma de Energia	0,36308	0,11611	0,14944	0,09545

Na Tabela 2.1, apresentam-se resultados para o MEF realizados com aproximação linear ($p = 1$) e quadrática ($p = 2$). Na metodologia do MEFG, a aproximação quadrática é construída por meio da combinação da PU linear com funções de enriquecimento também lineares e por último, o MEFG com aproximação quadrática acrescentando funções de enriquecimento singulares a partir do conhecimento *a priori* da solução na vizinhança dos cantos reentrantes. Observou-se na Tabela 2.1 que utilizando o MEFG com aproximação quadrática, o erro relativo aumentou para 14,9%, porém em compensação, o custo computacional dos parâmetros reduziu bastante com relação ao MEF de aproximação quadrática. Para melhor qualidade da aproximação, utilizaram o MEFG com aproximação quadrática, adicionando funções de enriquecimento singulares. Como resultado, o erro relativo na norma de energia reduziu para 9,5%, aumentando em apenas 396 o número de graus de liberdade com relação ao MEFG com aproximação quadrática.

Duarte *et al.* (2006) investigaram novos métodos para resolução mais eficiente de problemas de valor de contorno utilizando o MEFG. O MEFG reduz os requisitos de qualidade para a malha, fazendo com que o analista tenha uma atenção na solução como um todo, ou seja, na qualidade da solução encontrada. Os autores descreveram também o processo de formulação e implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Agrupados por meio de modelos que trabalham com malhas não correspondentes, malhas não refinadas e, especialmente, elementos de qualidade pobre.

Pereira *et al.* (2009) utilizaram o MEFG para resolução de problemas de mecânica da fratura tridimensional no qual apresentaram funções de enriquecimento singulares para simular problemas com trincas curvas, para o cálculo do fator de intensidade de tensão, utilizando uma aproximação linear e uma quadrática.

Pereira *et al.* (2009) propuseram para o MEFG em uma versão *hp* a representação de superfícies de trincas, no qual aplicaram funções de enriquecimento descontínuas para modelagem da trincas não planar em domínios tridimensionais. Pereira (2010) também propôs uma versão *hp* para o MEFG para resolução de problemas complexos de mecânica da fratura, realizando, especificamente, simulações que abordam o crescimento de trincas em domínios tridimensionais.

Duarte e Kim (2008) utilizaram o Método dos Elementos Finitos Generalizados em uma estratégia global-local para a resolução de diferentes problemas estruturais. Essa estratégia permite, inicialmente, a resolução de um problema global com uma discretização grosseira do domínio, sem descrever qualquer fenômeno que gere algum gradiente localizado. Em seguida, resolvem-se os problemas locais onde existem esses gradientes localizados, aproveitando como condições de contorno a solução do problema global. A discretização nesse passo ocorre com uma grande quantidade de elementos e se introduz funções de enriquecimento, que descreve o comportamento desse gradiente, resultando em uma aproximação mais precisa. Por último, resolve-se, novamente, o problema global adicionando novas condições de contorno oriundas da resposta do problema local e, por fim, colhem-se os resultados. Os mesmos autores abordaram algumas vantagens, destacando um menor custo computacional exigido na análise, pois apenas ocorre refinamento no problema local em somente uma região do domínio da análise. Na Figura 2.9, são ilustrados os passos comentados anteriormente.

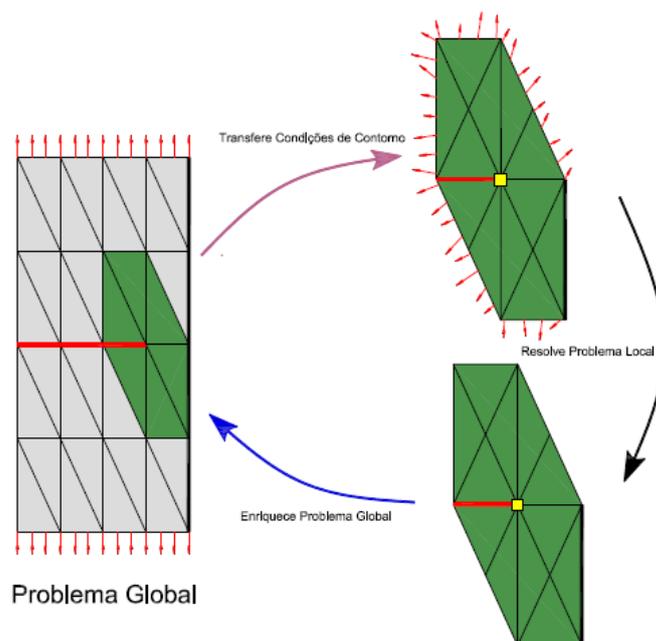


Figura 2.9 – Os três passos da Estratégia Global-Local (adaptada de Duarte e Kim, 2008).

Kim *et al.* (2009), Gupta *et al.* (2012) e Garzon *et al.* (2013) utilizaram o MEFG com funções de enriquecimento global-local para problemas de mecânica da fratura, dando enfoque ao efeito que provoca a utilização de algumas condições de contorno locais na performance do método. Os mesmos autores também abordaram performances computacionais tanto em termos do tamanho do problema quanto no tempo do processamento. Plews *et al.* (2012) também utilizaram a estratégia global-local porém aplicaram para problemas de gradiente térmico.

Recentemente, as pesquisas de Kim *et al.* (2011) e Evangelista *et al.* (2012; 2013) estenderam o método multiescala para problemas de valor de contorno realistas, envolvendo milhões de graus de liberdade e múltiplas fissuras modeladas simultaneamente em domínios locais distintos.

No Brasil, Barros (2002) desenvolveu e aplicou a formulação MEFG em campo bidimensional tanto para análises lineares quanto para análises não lineares por meio das estruturas de concreto sob o efeito de dano e também desenvolveu um estimador de erro aplicável ao MEFG. Posteriormente, Torres (2003) desenvolveu e aplicou a formulação do MEFG para a análise de dano e plasticidade em campo não linear de sólidos tridimensionais, utilizando os elementos tetraedro e hexaedro para a discretização do domínio.

2.3.3. Funções de enriquecimento descontínuas para interface de materiais

Para o campo de problemas envolvendo descontinuidade, como no caso das interfaces materiais, a literatura disponibiliza funções de enriquecimentos especiais, de forma que a malha de elementos finitos utilizados não precise estar em conformidade com a superfície material, como ocorre nas simulações do MEF.

Mões *et al.* (2003) implementaram para problemas de interface material funções de enriquecimento sobre as funções PU, de forma que a malha de elementos finitos utilizada não precise estar em conformidade com a superfície material.

As funções de enriquecimento são descontínuas na primeira derivada, no qual descreve o comportamento do salto existente na interface. Uma função de enriquecimento descontínua pode ser descrita na Equação 2.18.

$$F^1(\mathbf{x}) = \left| \sum_I \Phi_I N_I(\mathbf{x}) \right| \quad (2.18)$$

Em que:

F^1 - função de enriquecimento descontínua;

Φ_I – representação da função *level – set*;

N_I – Funções PU do MEF tradicional.

Pode-se definir a função de enriquecimento acima de outra forma:

$$\mathbf{u}^{enr} = \sum_J a_J N_J(\mathbf{x}) (F^1(\mathbf{x}) - F^1(\mathbf{x}_J)) \quad (2.19)$$

Em que \mathbf{u}^{enr} é o espaço de aproximação enriquecida.

Os dois enriquecimentos acima possuem o mesmo espaço de aproximação, porém diferentes números de matrizes condicionantes.

Outra possível escolha para função de enriquecimento é descrita pela Equação 2.20.

$$F^2(\mathbf{x}) = \sum_I |\Phi_I| N_I(\mathbf{x}) - \left| \sum_I \Phi_I N_I(\mathbf{x}) \right| \quad (2.20)$$

Todos os enriquecimentos mencionados são ilustrados na Figura 2.10, como possíveis escolhas em um modelo unidimensional.

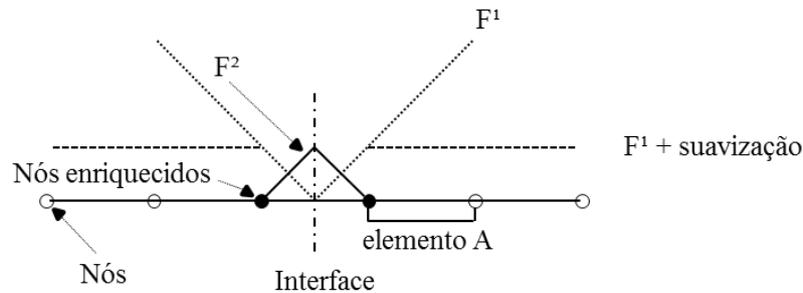


Figura 2.10 – Possíveis escolhas para as funções de enriquecimento para interface de materiais (adaptada de Moës *et al.*, 2003).

É importante mencionar que o método acima se baseia na descrição implícita da localização do plano de interface que corta o elemento finito. Essa descrição é feita pela função Φ_I , denominada *level-set*, que é uma função distância que mapeia e interpola a localização da interface. Isso pode ser visto como uma desvantagem já que a localização da interface depende da qualidade de aproximação dessa função e também do nível de discretização da malha. Além disso, como em todos os enriquecimentos do MEF_G, a aplicação das condições de contorno essenciais necessita de um tratamento especial nos nós enriquecidos.

Simone *et al.* (2006) formularam o MEF_G para utilização em análises envolvendo policristais com contorno de grãos. Contorno de grãos é entendido como locais de possíveis descontinuidades de deslocamentos. O MEF_G é inserido em elementos finitos, explorando a propriedade PU das funções de forma dos elementos finitos e adicionando enriquecimentos sobre essas funções. Como resultado, a malha de elementos finitos não precisa estar em conformidade com o contorno dos materiais. Simone *et al.* (2006) desenvolveram a formulação e implementação do MEF_G utilizando funções de enriquecimento descontínuo. Apesar dos autores terem realçado a simplicidade da implementação computacional do método e sua eficiência, a abordagem utiliza funções descontínuas no campo dos deslocamentos para simular a interface e não funções de

gradiente descontínuo que é a característica da interface. Além disso, o método exige um elaborado mapeamento dos elementos cortados pelos planos das interfaces que pode se tornar desvantagem em problemas com elevado número de graus de liberdade. Nesse método também, como em todos os enriquecimentos do MEF_G, a aplicação das condições de contorno essenciais necessita de um tratamento especial nos nós enriquecidos.

Recentemente, no trabalho de Soghrati *et al.* (2012), foi apresentado um método para resolver problemas com campos de gradiente descontínuo, envolvendo problemas de transferência de calor para análise em domínios bidimensionais. O método foi chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEFGI). As funções de enriquecimento, que são associadas com graus de liberdade generalizados, são criadas a partir de nós na intersecção da interface de fase com as arestas do elemento. Estas funções foram construídas a partir da combinação linear das funções de forma Lagrangeanas no elemento de integração. Os autores citados abordaram várias vantagens desse método em comparação com o Método dos Elementos Finitos Generalizados, utilizando outra estratégia de enriquecimento. Entre essas vantagens, podem-se citar: o menor custo computacional, a fácil implementação e o manuseio simples das condições de contorno de Dirichlet.

Em outro trabalho realizado por Soghrati e Geubelle (2012), a implementação foi estendida para o domínio tridimensional. Entretanto, ambos os trabalhos implementam o MEFGI para problemas escalares de campo, especificamente transferência de calor. Essa limitação será abordada nesta dissertação onde o método será implementado para problemas vetoriais de forma a analisar compósitos sólidos. A seção seguinte apresenta a formulação clássica do MEFGI.

2.4. FORMULAÇÃO DO MEFGI

2.4.1. Conceitos básicos

O Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimentos de Interface (MEFGI) utiliza uma estratégia parecida com a do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). A principal diferença é a utilização das funções de forma do próprio domínio como funções de enriquecimento.

Para uma melhor compreensão, visualiza-se a Figura 2.11, em que se mostra um domínio com dois materiais.

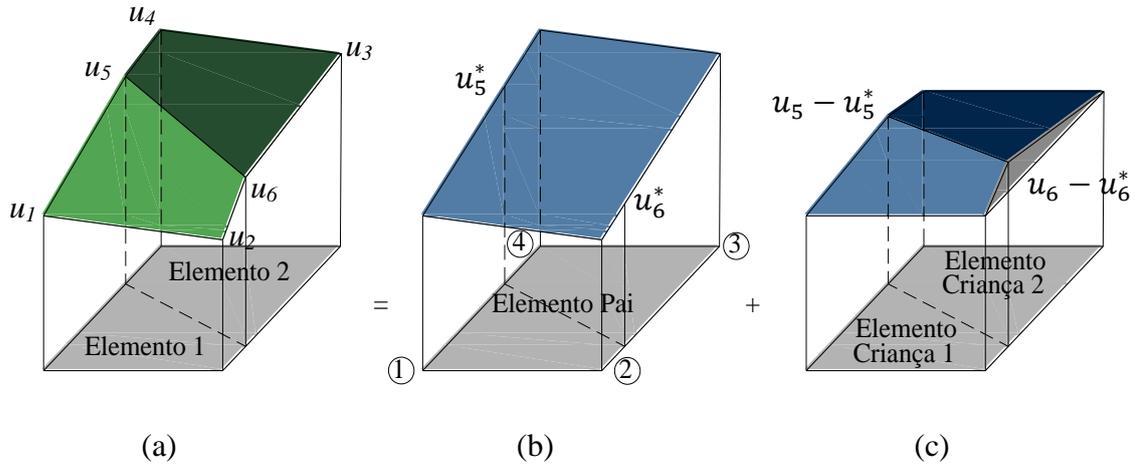


Figura 2.11 – Aproximações em um domínio com 2 materiais. (a) Interpolação convencional do MEF; (b) Interpolação com um elemento em não conformidade; (c) Interpolação do MEEGI (Soghrati *et al.*, 2012).

Na Figura 2.11(a), o domínio com dois materiais é discretizado por dois elementos, cada um em conformidade com cada material, onde é realizada uma interpolação pelo MEF, utilizando funções de forma Lagrangeanas como funções de interpolação. A aproximação \tilde{u} pelo MEF é mostrada na Equação 2.21.

$$\tilde{u} = N_1^{(1)} \mathbf{u}_1 + N_2^{(1)} \mathbf{u}_2 + N_3^{(2)} \mathbf{u}_3 + N_4^{(2)} \mathbf{u}_4 + (N_4^{(1)} + N_1^{(2)}) \mathbf{u}_5 + (N_3^{(1)} + N_2^{(2)}) \mathbf{u}_6 \quad (2.21)$$

Em que:

$N_i^{(j)}$ - funções de forma Lagrangeanas do nó i associada ao elemento j ;

\mathbf{u}_i - deslocamentos em cada ponto nodal i ;

\tilde{u} - aproximação pelo MEF.

No entanto, se os dois elementos da Figura 2.11(a) forem agrupados e transformados em apenas um elemento em não conformidade, ter-se-á um domínio com dois materiais pertencente ao mesmo elemento, como é visto na Figura 2.11(b). A aproximação por elementos finitos não é capaz de reconstruir o gradiente de descontinuidade na região da interface do material que possui valores \mathbf{u}_5^* e \mathbf{u}_6^* diferentes dos valores obtidos em \mathbf{u}_5 e \mathbf{u}_6 (Soghrati *et al.*, 2012).

A parte que falta na interpolação do campo de deslocamento pode ser recuperada, conforme observado na Figura 2.11(c), por meio da utilização da estratégia do MEFGL. A estratégia consiste em utilizar em um domínio com dois materiais, apenas um elemento, no qual se extraí as funções de forma Lagrangeanas $N_i^{(p)}$ no elemento chamado de pai em cada nó i , ou seja, o elemento que abriga a região da interface. Na intersecção da aresta do elemento com a interface, criam-se nós e , conseqüentemente, aumenta-se o número de graus de liberdade, porém esses nós não são pertencentes à malha original (Soghrati *et al.*, 2012).

Com os nós inseridos na intersecção da interface com a aresta do elemento, criam-se novos elementos, chamados elementos criança, como se observa na Figura 2.11(c), em que cada elemento criança pertence a cada material, possuindo funções de forma Lagrangeanas associadas a cada ponto nodal dos mesmos e que são responsáveis pelo calculo da integração em cada material separadamente. Ao final, junta-se cada elemento criança ao elemento pai, para a montagem da matriz de rigidez do elemento. A aproximação $\tilde{\mathbf{u}}$ pelo MEFGL é apresentada na Equação 2.22.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} = & N_1^{(p)}\mathbf{u}_1 + N_2^{(p)}\mathbf{u}_2 + N_3^{(p)}\mathbf{u}_3 + N_4^{(p)}\mathbf{u}_4 \\ & + \left(N_4^{(1)} + N_1^{(2)}\right) \cdot (\mathbf{u}_5 - \mathbf{u}_5^*) + \left(N_3^{(1)} + N_2^{(2)}\right) \cdot (\mathbf{u}_6 - \mathbf{u}_6^*) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Essa aproximação pode ser reescrita pela Equação 2.23.

$$\tilde{\mathbf{u}} = N_1^{(p)}\mathbf{u}_1 + N_2^{(p)}\mathbf{u}_2 + N_3^{(p)}\mathbf{u}_3 + N_4^{(p)}\mathbf{u}_4 + \psi_1\alpha_1 + \psi_2\alpha_2 \quad (2.23)$$

Em que:

$N_i^{(p)}$ - funções de forma Lagrangeanas do elemento pai em cada nó i ;

\mathbf{u}_i - deslocamentos em cada ponto nodal i do elemento pai;

ψ_i - funções de enriquecimento de interface para cada nó i de interface;

α_i - graus de liberdade generalizados para cada nó i de interface;

$\tilde{\mathbf{u}}$ - aproximação dos deslocamentos pelo MEFGL.

As funções de enriquecimento $\psi_1 = N_4^{(1)} + N_1^{(2)}$ e $\psi_2 = N_3^{(1)} + N_2^{(2)}$ são obtidas, pela combinação das funções de forma Lagrangeanas dos elementos criança nos pontos nodais que foram inseridos na intersecção da interface com a aresta do elemento. Na Figura 2.11(c), como foram inseridos dois nós, duas funções de enriquecimento são criadas. Pode-se estender para uma aproximação genérica $\tilde{u}(\mathbf{x})$ do MEFGI na Equação 2.24.

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{nen} s \psi_i(\mathbf{x}) \alpha_i \quad (2.24)$$

Em que:

$N_i(\mathbf{x})$ - funções de forma Lagrangeanas do elemento no nó i ;

s - fator de escala relacionado à relação de aspecto entre o elemento criança e o pai;

n - número de nós;

nen - número de nós de interface;

$\tilde{u}(\mathbf{x})$ - aproximação genérica do MEFGI.

2.4.2. Funções de enriquecimento do MEFGI

As funções de enriquecimento de interface são construídas a partir da soma entre as funções de forma Lagrangeanas nos elementos em conformidade, como foi visto na Figura 2.11. Essas funções são utilizadas em cada elemento de integração, usando suas combinações lineares como enriquecimentos (Soghrati e Geubelle, 2012).

Para avaliar as funções de enriquecimento, divide-se o elemento pai em um número mínimo de elementos de integração para obter uma quadratura precisa. Para cada elemento criança, retira-se as funções de forma relativa a cada nó que intercepta a interface e no final são somados os valores de todas as funções de forma correspondentes a cada nó dessa interface (Soghrati *et al.*, 2012).

Na Figura 2.12, apresenta-se o elemento pai quadrilátero interceptado pela interface e dividido em dois elementos de integração também quadriláteros. As funções de

enriquecimento correspondentes a cada nó da interface da Figura 2.12, são descritas pelas Equações 2.25 e 2.26.

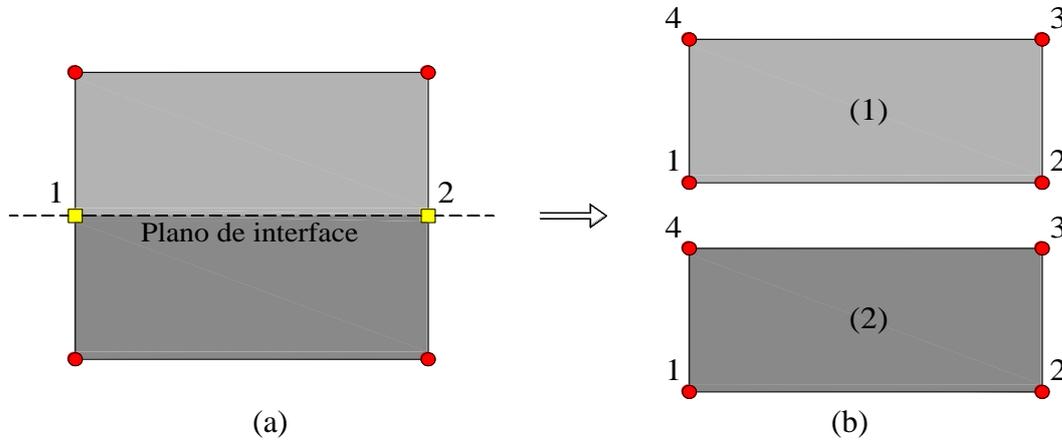


Figura 2.12 – Avaliação das funções de enriquecimento no MEFGI (adaptada de Soghrati *et al.*, 2012).

$$\psi_1 = N_4^{(2)} + N_1^{(1)} \quad (2.25)$$

$$\psi_2 = N_3^{(2)} + N_2^{(1)} \quad (2.26)$$

Segundo Soghrati e Geubelle (2012), os subelementos quadrilaterais são criados apenas para se avaliar as funções de enriquecimento. As funções de forma são selecionadas do elemento como um todo, equivalente à primeira parte da Equação 2.24, ou seja, do elemento pai.

No caso dos elementos de integração, quando esses possuírem altas relações de aspecto, resultará em altos valores no gradiente das funções de enriquecimento, o que pode levar a formação de uma matriz de rigidez mal condicionada. Para evitar esse problema, implementa-se um fator de escala s , que é definido pela Equações 2.27 e 2.28.

$$\varepsilon = \frac{\min(\|x_1 - x_{int}\| \|x_2 - x_{int}\|)}{\|x_2 - x_1\|} \quad (2.27)$$

$$s = 4\varepsilon^2 \quad (2.28)$$

Em que:

x_{int} - nós na interface cortando o elemento;

x_1 e x_2 - nós da aresta do elemento pai que define um nó na interface x_{int} ;

ε – relação entre a distância da interface para o ponto nodal do elemento pai sobre a distância entre os dois pontos nodais que determinam o nó da interface.

O fator de escala aparece na segunda parte da Equação 2.24. Ele pode ser implementado para qualquer valor de ε ou apenas quando estiver abaixo de um valor específico ($\varepsilon < 0,01$) (Soghrati *et al.*, 2012).

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS HOMOGENEOS

Neste capítulo, são apresentados resultados das simulações numéricas que foram implementadas, de acordo com estudo apresentado nas seções precedentes em relação ao MEFG, tendo como meta a validação do MEFG para estruturas com comportamento elástico linear. Serão apresentados dois modelos; no primeiro analisa-se uma viga submetida à flexão simples discretizada por elementos triangulares e quadrilaterais, às quais foram adicionadas funções de enriquecimento polinomiais para a aproximação local. Este problema é considerado de solução suave, pois a solução tem continuidade até a terceira ordem da derivada. O segundo modelo tratará de uma chapa com uma trinca, submetida a esforços de tração, sendo discretizada com elementos quadrilaterais adicionado, à região da singularidade, funções de enriquecimento que caracterizam essa aproximação local.

3.1. ENRIQUECIMENTOS POLINOMIAIS PARA PROBLEMAS DE SOLUÇÃO SUAVE

Neste modelo é analisada uma viga engastada e livre submetida à flexão simples com carregamento distribuído na aresta livre, conforme pode ser visualizado na Figura 3.1.

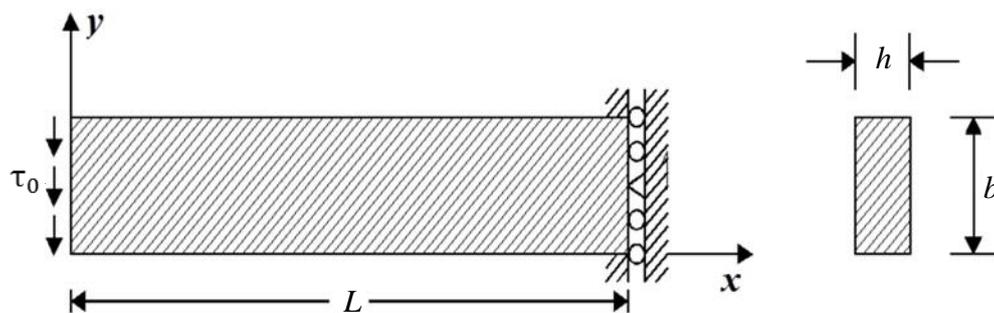


Figura 3.1 – Geometria, carregamento e condições de contorno da viga.

As dimensões, o carregamento, as condições de contorno e as propriedades mecânicas para a resolução do problema são dados a seguir (em unidades consistentes):

$$L = 10;$$

$$b = 2;$$

$h = 1$;

Modulo de Elasticidade, $E = 30 \text{ E}+06$;

Coefficiente de Poisson, $\nu = 0,25$;

Condições de contorno de deslocamentos, $u_x(10, y) = 0, u_y(10,1) = 0$;

Para qualquer valor de y em $x = 0$, tem-se uma tensão $\tau_0 = 150$, como uma força uniformemente distribuída de $f_y = -300$.

Para essa viga, o objetivo é analisar a convergência para os valores de deslocamentos e energia de deformação, utilizando a combinação da PU dos elementos, com enriquecimentos de diferentes ordens polinomiais.

A solução analítica para deslocamento, u_y e energia de deformação, U são dadas, respectivamente por:

$$u_y(0,1) = -\left(\frac{f_y L^3}{3EI}\right) [1 + 3(1 + \nu)/L^2] \quad (3.1)$$

$$U = \frac{f_y^2 L^3}{6EI} [1 + 3(1 + \nu)/L^2] \quad (3.2)$$

em que:

I - Inércia da seção transversal.

O valor de referência calculado para o deslocamento no ponto determinado é $u_y(0,1) = 0,5188 \text{ E}-02$ e para a energia de deformação da viga $U = 0,7781$.

3.1.1. Análise da convergência do refinamento de malha

Elementos triangulares

Utilizando-se elementos triangulares foram realizadas seis discretizações diferentes da estrutura com relação à malha. As discretizações das malhas são mostradas na Figura 3.2.

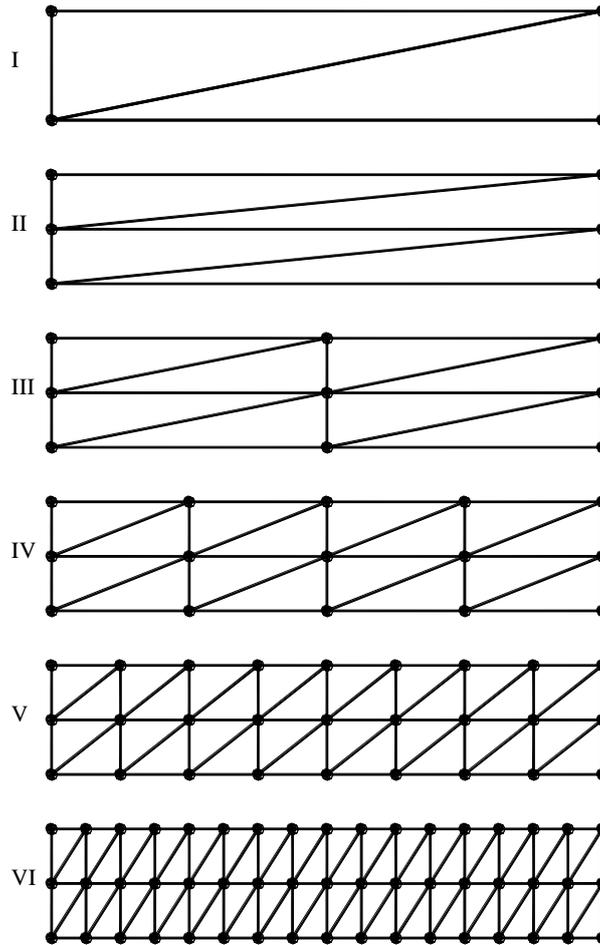


Figura 3.2 – Diferentes configurações de malha para a viga com elementos triangulares.

Na Tabela 3.1 são apresentados o número de elementos e de nós para cada malha visualizada na Figura 3.2.

Tabela 3.1 – Número de elementos e nós para cada malha triangular.

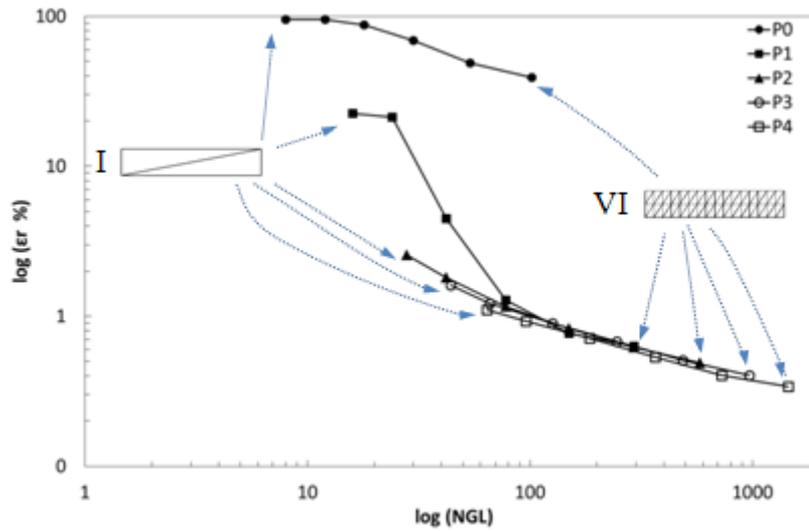
MALHAS	nº elementos	nº nós
I	2	4
II	4	6
III	8	9
IV	16	15
V	32	27
VI	64	51

Na análise realizada foi obtida uma aproximação do campo dos deslocamentos considerando o refinamento da malha, iniciando da malha I (mais grosseira) até a malha VI (mais refinada) sem qualquer combinação de função de enriquecimento sobre a PU

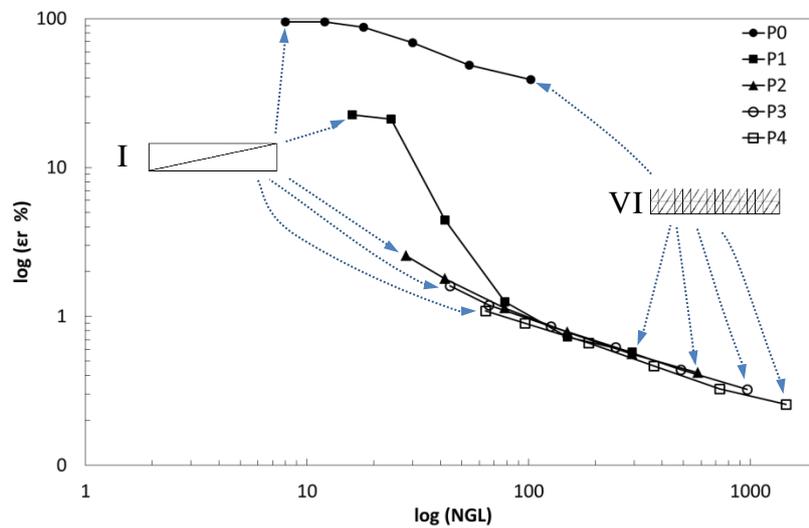
linear das funções de aproximação do MEF, isso resultou em uma aproximação final de ordem P0. Repetiu-se o mesmo refinamento de malha anterior, porém adicionou-se à PU linear das funções de aproximação do MEF, funções de enriquecimento polinomiais com aproximação local de ordem um, dois, três e quatro, resultando em aproximações finais P1, P2, P3 e P4, respectivamente, no qual essas aproximações finais P_i são com relação ao grau i da função de enriquecimento polinomial utilizada.

Os nós situados na aresta engastada não tiveram seus deslocamentos enriquecidos em nenhuma dessas aproximações, para que se respeitasse as condições de contorno do problema. Para as análises do MEEG utilizando malhas com elementos triangulares para formar o domínio e adicionando enriquecimentos polinomiais, a integração numérica desse domínio foi realizada pela regra de integração de Gauss-Legendre mínima, exceto para a aproximação P4, em que foi utilizada uma estratégia de integração por meio da subdivisão de subdomínios em vários outros subdomínios, processo esse descrito em Woo e Withcomb (1993).

Na Figura 3.3, apresentam-se gráficos correspondentes ao Erro Relativo (ϵ_r) com relação ao Número de Graus de Liberdade (NGL), por meio do refinamento da malha para cada ordem de aproximação enriquecida separadamente, analisados para os deslocamentos (Figura 3.3(a)) e energia de deformação (Figura 3.3(b)). O aumento do NGL é devido ao aumento do número de elementos em cada ordem da aproximação.



(a)



(b)

Figura 3.3 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada ordem polinomial de funções de enriquecimento sobre elementos triangulares; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Da Figura 3.3, analisa-se uma redução no ϵ_r à medida que se refina a malha, porém a qualidade da solução só se potencializa quando se utiliza o enriquecimento polinomial na aproximação. Visualiza-se que a aproximação sem enriquecimento, P0, reduz o ϵ_r , mas não alcança uma convergência aceitável. Essa aproximação é a realizada pelo MEF. Pode-se observar na Figura 3.3, que para todas as ordens polinomiais de enriquecimento P1 a P4, a convergência da solução é garantida à medida que ocorre o refinamento da malha, chegando-se a $\epsilon_r < 1\%$. Verifica-se também que, a partir da aproximação final P2, o ϵ_r é aceitável desde a primeira malha simulada (Malha I), deve-se ao fato da aproximação resultante ser de ordem cúbica (produto da PU linear com funções de enriquecimento quadráticas), sendo capaz de representar satisfatoriamente as soluções

analíticas do problema dos deslocamentos e energias de deformação, uma vez que a solução de ambas é de ordem cúbica.

Não é objetivo fazer uma comparação do MEF (sem enriquecimento) com as soluções do MEEG, o objetivo é fazer a simulação e alcançar a resposta analítica com a utilização de um número mínimo de elementos como é mostrado nesta seção.

Elementos quadrilaterais

Para o modelo da viga foi implementado também elementos quadrilaterais, sendo realizadas análises similares às descritas para elementos triangulares. As discretizações das malhas com elementos quadrilaterais são mostradas na Figura 3.4.

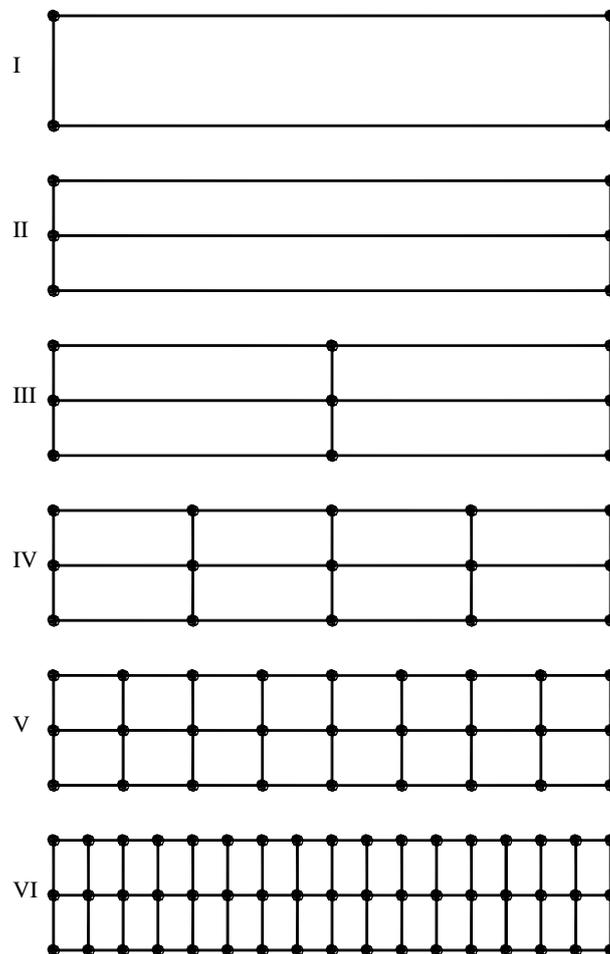


Figura 3.4 – Diferentes configurações de malha para a viga com elementos quadrilaterais.

Na Tabela 3.2 são apresentados o número de elementos e de nós para cada malha visualizada na Figura 3.4.

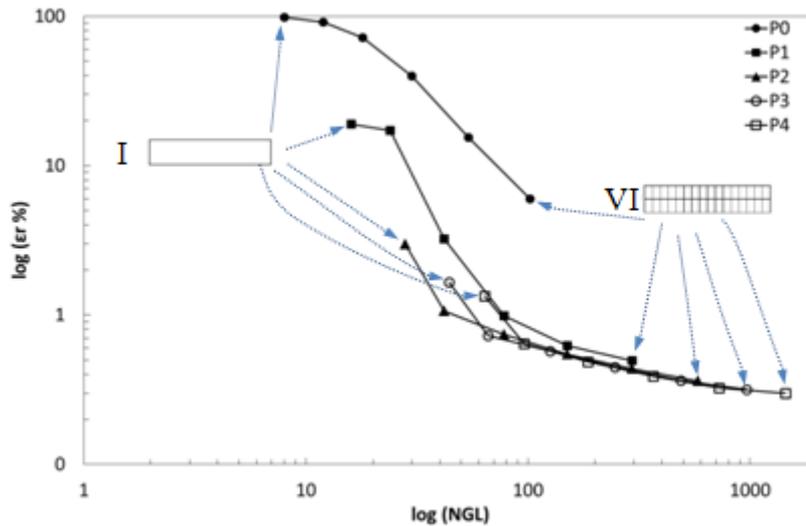
Tabela 3.2 – Número de elementos e nós para cada malha quadrilateral.

MALHAS	n° elementos	n° nós
I	1	4
II	2	6
III	4	9
IV	8	15
V	16	27
VI	32	51

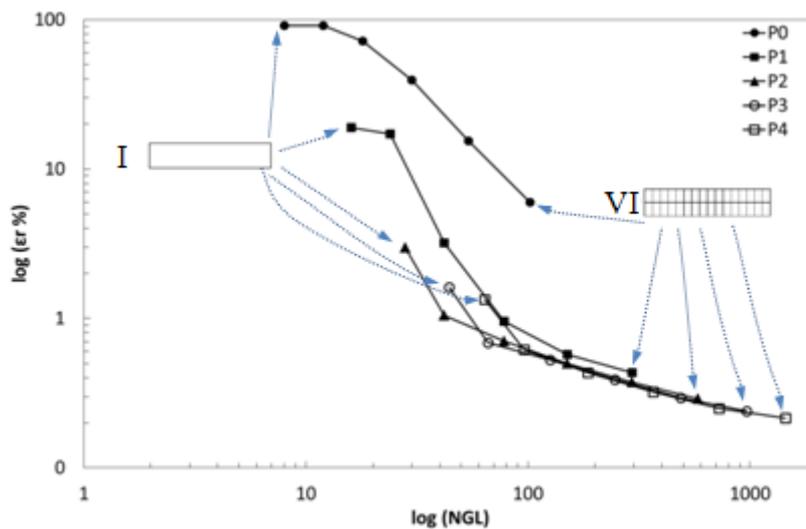
Para as configurações da malha da Figura 3.4, foi realizada uma análise semelhante a anterior. Empregou-se um refinamento, iniciando-se pela malha I (mais grosseira) até a malha VI (mais refinada) e foram implementadas funções de enriquecimento polinomiais até quarta ordem sobre a PU, resultando em aproximações finais P0, P1, P2, P3 e P4.

Aqui também os nós situados na aresta engastada não tiveram seus deslocamentos enriquecidos devido às suas condições de contorno. Para a integração numérica do domínio, foi realizada a regra de integração de Gauss-Legendre mínima para todas as ordens de aproximação.

Na Figura 3.5, são apresentados os gráficos correspondentes ao ε_r com relação ao NGL, por meio do refinamento da malha para cada ordem de aproximação enriquecida separadamente, analisados para os deslocamentos (Figura 3.5(a)) e energias de deformação (Figura 3.5(b)). O aumento do NGL é devido ao aumento do número de elementos em cada ordem da aproximação.



(a)



(b)

Figura 3.5 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada ordem polinomial de funções de enriquecimento sobre elementos quadrilaterais; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Pela Figura 3.5, deduz-se a mesma análise feita para o elemento triangular, em que se analisa uma redução no ϵ_r à medida que se refina a malha, porém a qualidade da solução só se potencializa quando se utiliza o enriquecimento polinomial na aproximação. Verifica-se que a aproximação sem enriquecimento, P0, reduz esse erro, mas não alcança uma convergência aceitável. Essa aproximação é a realizada pelo MEF. Pode-se também observar na Figura 3.5 que para todas as ordens polinomiais de enriquecimento P1 à P4, a convergência da solução é garantida à medida que ocorre o refinamento da malha, chegando-se a $\epsilon_r < 1\%$. Verifica-se também que, a partir da aproximação final P2, o ϵ_r é aceitável desde a primeira malha simulada (Malha I), devido ao fato da aproximação resultante ser de ordem cúbica (produto da PU linear com

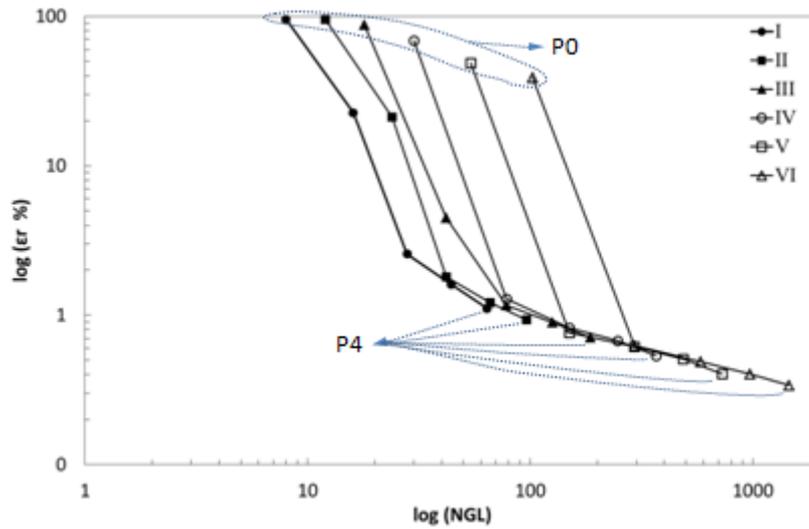
funções de enriquecimento quadráticas), sendo capaz de representar as soluções analíticas do problema dos deslocamentos e energias de deformação, uma vez que a solução de ambas é da mesma ordem.

3.1.2. Análise da convergência da ordem polinomial do enriquecimento

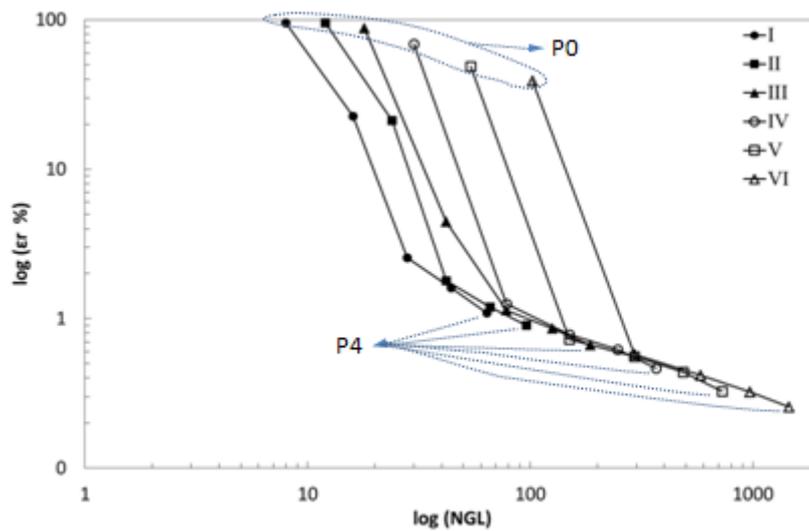
Elementos triangulares

Outra análise estabelecida para a viga foi à utilização para cada malha da Figura 3.2, cinco casos de aproximação do campo de deslocamentos. O primeiro caso é a aproximação linear da PU sem adicionar enriquecimento, levando a uma aproximação final P0, os demais casos foram às aproximações lineares da PU, adicionando funções de enriquecimento polinomiais de ordem variando de um até quatro, o que resultou em aproximações finais P1, P2, P3 e P4 respectivamente.

Na Figura 3.6, são apresentados os gráficos correspondentes ao ε_r com relação ao NGL para cada caso de malha mostrado anteriormente, adicionando a cada uma dessas malhas as funções de enriquecimento de ordem zero até quatro, analisadas para os deslocamentos (Figura 3.6(a)) e energias de deformação (Figura 3.6(b)). O aumento do NGL nessa análise é devido ao aumento da ordem polinomial de aproximação para cada malha.



(a)



(b)

Figura 3.6 – Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para cada malha com elementos triangulares adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Dos resultados da Figura 3.6, pode-se visualizar que, para todas as configurações de malhas utilizadas, os ε_r reduziram à medida que se adicionam ordens polinomiais de enriquecimentos sobre as mesmas. Outro ponto a se destacar nos gráficos foi na malha I, em que se utilizou apenas dois elementos triangulares e quatro nós para a discretização da viga, alcançando resultados na aproximação P4, melhores do que muitos resultados simulados com outras configurações de malhas possuindo mais elementos e nós. Além disso, a utilização da malha I consegue obter no final do processo um ganho no custo computacional muito grande, pois a integração numérica do domínio acontece somente em dois elementos e se enriquece apenas quatro nós.

A malha I da Figura 3.6(a) representa de forma aproximada o valor para os deslocamentos, pois o ponto em que se compara com a solução analítica é o ponto com coordenada localizada no centro da aresta, porém a malha não possui nó nessa coordenada. Por isso, utilizou-se, para solução do deslocamento, o nó de coordenada situada na parte inferior da aresta livre. O mesmo procedimento ocorre com as condições de contorno em que não foi imposta na parte central do engaste, apenas nos pontos extremos.

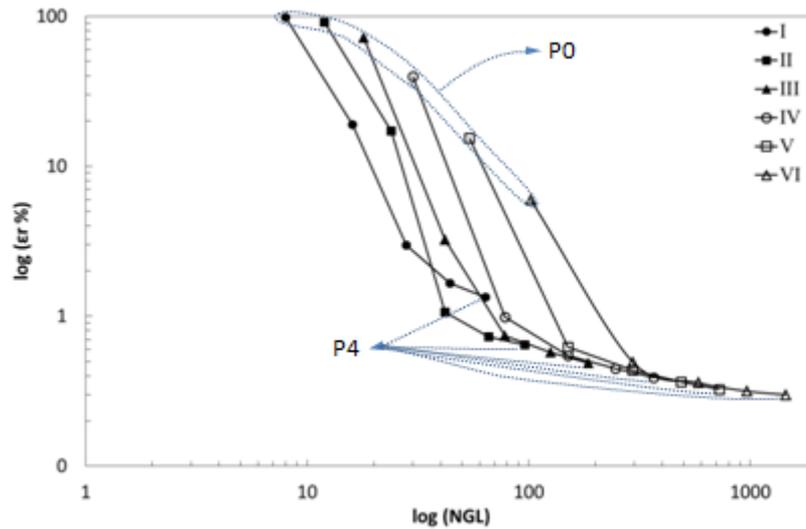
Os ε_r dos deslocamentos com a utilização da malha I, quase não são observados, pois, como se visualiza na Figura 3.6(a), esses possuem ε_r muito parecidos com o da malha II. As duas curvas da Figura 3.6(a) possuem comportamentos semelhantes, no entanto a malha II possui um ε_r um pouco menor, porém com um maior NGL e, conseqüentemente, um maior custo computacional por possuir mais elementos e pontos nodais para discretização do domínio da viga, levando-se então em conta a utilização da malha I.

Pode-se observar na Figura 3.6, que suas curvas possuem uma maior inclinação do que às curvas da Figura 3.3, isso mostra a maior convergência dos resultados quando se utiliza uma aproximação com enriquecimentos polinomiais sobre cada malha, do que com o refinamento da mesma.

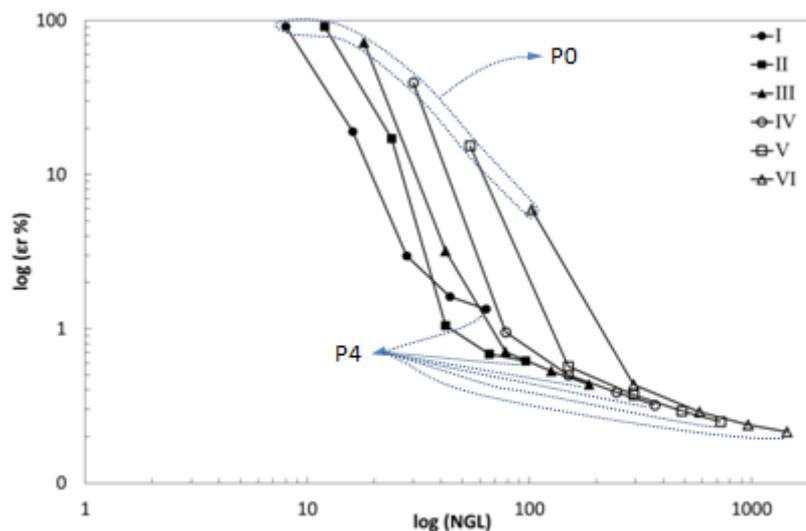
Elementos quadrilaterais

A mesma análise anterior é realizada com elementos quadrilaterais em que foi também estabelecer para cada malha da Figura 3.4, para os campos de deslocamentos cinco casos de aproximação: a PU com aproximação linear sem adicionar enriquecimentos e adicionando enriquecimentos polinomiais até a quarta ordem, em que chegou-se a uma aproximação final P0, P1, P2, P3 e P4, respectivamente.

Na Figura 3.7, apresentam-se os gráficos correspondentes ao ε_r com relação ao NGL para cada caso de malha ilustrada anteriormente, adicionando a cada uma dessas malhas funções de enriquecimento de ordem zero até quatro, analisadas para os deslocamentos (Figura 3.7(a)) e energias de deformação (Figura 3.7(b)). O aumento do NGL nessa análise é devido ao aumento da ordem de aproximação para cada malha.



(a)



(b)

Figura 3.7 – Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para cada malha com elementos quadrilaterais adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Dos resultados da Figura 3.7, pode-se verificar que, para todas as configurações de malhas utilizadas, os ε_r também reduziram à medida que se adicionaram ordens polinomiais de enriquecimento sobre as mesmas. Outro ponto a se destacar nos gráficos foi em relação à malha I, em que se utilizou apenas um elemento quadrilateral e quatro nós para a discretização da viga, alcançando resultados na aproximação P4 na ordem de 1%. No entanto, apesar de alcançar resultados satisfatórios, melhores do que muitos resultados simulados com outras configurações de malhas com mais elementos e pontos nodais, essas não possuíam tantas configurações em comparação à utilização com elementos triangulares. Mas, foi observada no final a convergência das respostas dos deslocamentos e energias de deformação, em que todas as malhas conseguiram alcançar

respostas satisfatórias. Além disso, com a simulação da malha I, consegue-se obter no final do processo um ganho no custo computacional muito grande, pois a integração numérica do domínio acontece somente em um elemento e se enriquece apenas quatro nós.

A malha I da Figura 3.7(a) também representa de forma aproximada o valor para os deslocamentos. Como visto anteriormente, para a malha I com elementos triangulares, em que se empregou para solução do deslocamento, o nó de coordenada situada na parte inferior da aresta livre. O mesmo caso acontece com as condições de contorno onde não foi imposta na parte central do engaste, apenas nos nós extremos.

Os ε_r dos deslocamentos com a utilização da malha I são aceitáveis, pois, como se observa na Figura 3.7(a), possuem ε_r muito semelhantes com o da malha II. Os dois gráficos possuem o mesmo comportamento, no entanto a malha II possui um ε_r um pouco menor, porém um maior NGL. Consequentemente, um maior custo computacional por possuir mais elementos e nós para discretização do domínio da viga, levando-se mais em conta a utilização da malha I com apenas um elemento.

Pode-se observar na Figura 3.7, que suas curvas possuem uma maior inclinação do que às curvas da Figura 3.5, isso mostra a maior convergência dos resultados quando se utiliza uma aproximação com enriquecimentos polinomiais sobre cada malha, do que com o refinamento da mesma.

3.2. ENRIQUECIMENTOS SINGULARES EM PROBLEMAS DE MECÂNICA DA FRATURA

Nesta seção é realizada uma simulação numérica para ilustrar a eficiência do Método dos Elementos Finitos Generalizados com a utilização de poucos elementos em domínios com regiões singulares. Utiliza-se como aproximações locais para esse domínio funções de enriquecimento singulares que caracterizam o campo do deslocamento nessa região.

Uma chapa com uma trinca, tracionada nas extremidades, é analisada. A representação desse modelo é ilustrada na Figura 3.8.

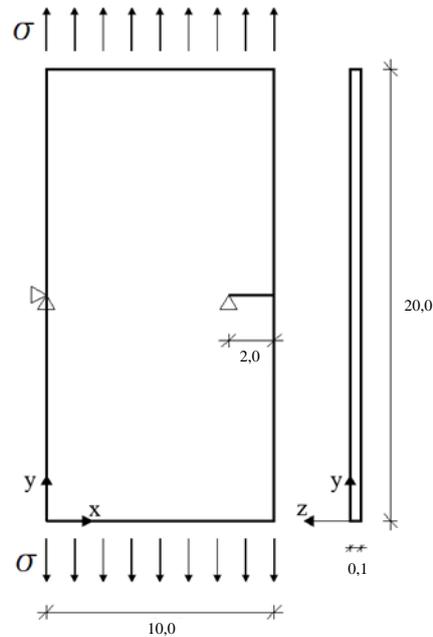


Figura 3.8 – Geometria, carregamento e condições de contorno da chapa submetido a esforço de tração.

O carregamento, as condições de contorno e as propriedades mecânicas para a resolução do problema são dados a seguir (em unidades consistentes):

Modulo de Elasticidade, $E = 1,0$;

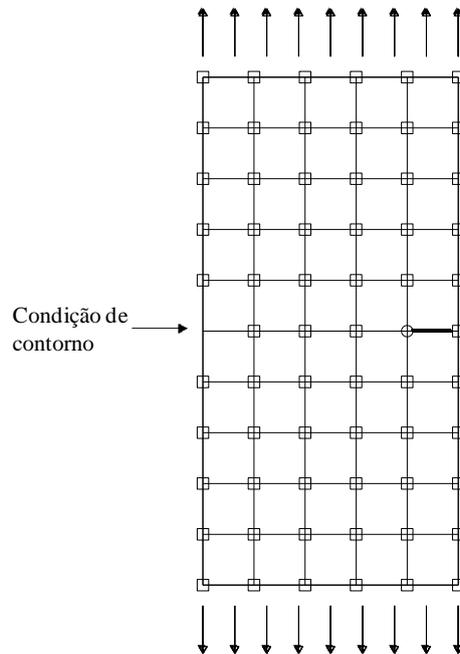
Coefficiente de Poisson, $\nu = 0,30$;

Tensão $\sigma = 1,0$ como uma força uniformemente distribuída de $f_y = 0,1$ na parte superior e $f_y = -0,1$ na parte inferior;

Condições de contorno de deslocamentos, $u_x(0,10) = 0$, $u_y(0,10) = 0$, $u_y(8,10) = 0$.

As condições de contorno de deslocamentos foram adicionadas para evitar algum movimento de corpo rígido que possa aparecer. O valor da solução de referência para a energia de deformação da chapa foi retirado de Alves (2012), em que foi utilizado o *software* de elementos finitos ANSYS. Foi utilizada uma malha com 12087 p-elementos quadrilaterais, considerando a simetria do problema e a partir da extrapolação para aproximações polinomiais de grau $p = 1, 2$ e 3 . O resultado encontrado para a energia de deformação para todo o domínio da chapa foi de $U_{ref} = 10,98326746$.

Para a chapa, foi realizada uma simulação com apenas uma configuração de malha, utilizando 50 elementos finitos quadrilaterais com quatro nós, ou seja, uma quantidade bem menor que a utilizada na solução referência, como se pode visualizar na Figura 3.9. A posição da trinca foi determinada em função da geometria da malha, coincidindo com a aresta de dois elementos. Além disso, utilizou-se dois nós com a mesma coordenada para descrever a descontinuidade.



- Funções de enriquecimento polinomial
- Funções de enriquecimento singular

Figura 3.9 – Chapa com uma trinca discretizada por elementos quadrilaterais.

A chapa foi simulada, inicialmente, com o MEFQ, a partir de funções polinomiais apresentadas nas Equações 2.9 à 2.12. Todos os nós foram enriquecidos, exceto os nós que se situam nas condições de contorno, de forma a respeitar as mesmas. No entanto, podem-se enriquecer todos os nós, pois as condições de contorno de deslocamento aplicadas são apenas para evitar movimento de corpo rígido. Como as forças que atuam na chapa provocam abertura da trinca apenas em uma direção (Modo I de abertura), escolhem-se os monômios em que a ordem do polinômio na direção dominante seja maior do que a da outra direção, para formar as funções polinomiais. Assim, foram realizadas simulações que resultaram em aproximações finais P0 (não enriquecido), P1, P2 e P3. Para as funções polinomiais, o número de pontos de integração utilizados para

a resolução deste problema segue a regra de integração mínima de Gauss-Legendre para todos os elementos.

Outra simulação realizada foi utilizar as funções de enriquecimento singulares para descrever a singularidade, descritas na Equação 2.15, em que se enriqueceu apenas o nó da ponta com essas funções, como foi visualizado na Figura 3.9. Para os elementos que compõem a nuvem de influência que abriga o nó da ponta da trinca, utilizou-se 12 x 12 pontos de Gauss-Legendre e os demais elementos seguiram a regra de integração mínima de Gauss-Legendre.

Na Tabela 3.3 é mostrada a relação entre o NGL, Energia de Deformação e o seu Erro Relativo para as análises realizadas com as funções de enriquecimentos polinomiais e de enriquecimento singulares.

Tabela 3.3 – Valor da Energia de deformação para as funções de enriquecimentos investigadas.

ANÁLISE REALIZADA	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	NGL	ε_r (%)
Valor de Referência	10,9833	-	-
Sem Enr. Polinomial (P0)	10,5647	134	3,8113
Enr. Polinomial Linear (P1)	10,6643	264	2,9041
Enr. Polinomial Quadrático (P2)	10,7092	524	2,4950
Enr. Polinomial Cúbico (P3)	10,7119	784	2,4709
Enriquecimento Singular 1 nó (P0)	10,8668	142	1,0603

Da análise dos resultados mostrados na Tabela 3.3, pode-se verificar que a aproximação local construída com funções polinomiais reduz o ε_r da energia de deformação à medida que aumenta o grau da aproximação polinomial e, conseqüentemente, aumenta-se o NGL. No entanto, essas aproximações são inferiores à aproximação local construída por funções singulares, enriquecidas em apenas um nó, ou seja, com apenas um nó enriquecido com funções de enriquecimento singulares consegue obter um resultado para a energia de deformação melhor do que todas as aproximações locais construídas com funções de enriquecimento polinomiais com um acréscimo de apenas 8 graus de liberdade ao problema inicial.

Para se melhorar ainda mais a qualidade dessa solução, utilizou-se ambos os enriquecimentos anteriores de forma conjunta, em que se enriqueceu apenas um nó, correspondente a nuvem de influência da ponta da trinca com funções de enriquecimento singulares e os demais nós enriqueceram-se com funções de

enriquecimento polinomiais de ordem P1, P2 e P3. Os resultados dessas simulações são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Valor da Energia de deformação utilizando funções de enriquecimentos singulares e polinomiais em conjunto.

ANÁLISE REALIZADA	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	NGL	ϵ_r
Valor de Referência	10,9833	-	-
Enriq. Sing. s/ Enr. Pol.	10,8668	142	1,0603
Enriq. Sing. c/ Enr. Pol. Linear	10,9109	272	0,6589
Enriq. Sing. c/ Enr. Pol. Quadrático	10,9418	532	0,3776
Enriq. Sing. c/ Enr. Pol. Cúbico	10,9438	792	0,3591

Da Tabela 3.4, pode-se analisar que o ϵ_r da energia de deformação, quando se utiliza apenas enriquecimento singular e sem enriquecimento polinomial, é uma aproximação significativa, como visto anteriormente. Porém, na Tabela 3.4 observa-se que a qualidade da solução melhora ainda mais quando se introduz o enriquecimento polinomial em conjunto com o enriquecimento singular, reduzindo o ϵ_r à medida que aumenta a ordem polinomial de enriquecimento, obtendo-se valores menores que 1%.

Na Figura 3.10 é apresentado o gráfico do ϵ_r com relação ao NGL para o resultado da energia de deformação, realizadas nas duas análises discutidas anteriormente. À primeira análise, foi adicionado apenas enriquecimentos polinomiais e para a segunda, além dos enriquecimentos polinomiais, foram adicionadas as funções de enriquecimento singulares na nuvem do nó correspondente à ponta da trinca.

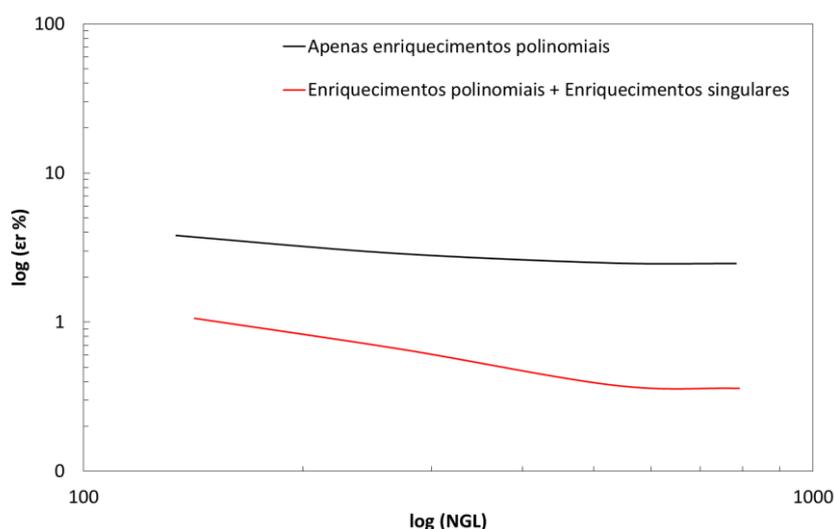


Figura 3.10 – Erro relativo, ϵ_r , da energia de deformação com relação ao NGL utilizando uma análise com enriquecimentos polinomiais e outra com enriquecimentos polinomiais juntamente com singulares.

Na Figura 3.10, o comportamento pode ser mais bem compreendido, pois a melhor aproximação obtida com as funções de enriquecimento polinomial (NGL = 784) não alcança o valor da menor aproximação pelas funções de enriquecimento singulares (NGL = 142), mostrando a capacidade em se utilizar no MEEG as funções de aproximação local, a partir do conhecimento *a priori* do problema de valor de contorno.

O enriquecimento polinomial não alcança uma aproximação pretendida em campos singulares, pois, não apresentam soluções “suaves”, como na viga apresentada na seção 3.1.

4. MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS COMPÓSITOS

São apresentados neste capítulo os resultados das simulações numéricas, usando todo o estudo apresentado nas seções precedentes em relação ao MEFGI com o objeto de validação do MEFGI para estruturas com comportamento elástico linear, em um domínio de análise composto por dois materiais. Como modelos de validação, tem-se uma chapa engastada e submetida a um esforço de tração, consistindo de dois materiais distintos, simulando numericamente a chapa com apenas um elemento quadrilateral para todo o domínio. Um segundo modelo analisa uma viga submetida à flexão simples composta por dois materiais distintos, discretizadas por elementos quadrilaterais. O terceiro modelo é um material compósito constituído por uma chapa engastada submetida a um esforço de tração, em que no interior da chapa possui alguns materiais em regiões localizadas com diferentes propriedades mecânicas, também discretizadas por elementos quadrilaterais.

4.1. APLICAÇÃO EM CHAPA DE DOIS MATERIAIS

Neste modelo, é analisada uma chapa tracionada em uma das extremidades e engastada na outra extremidade, como apresentado na Figura 4.1.

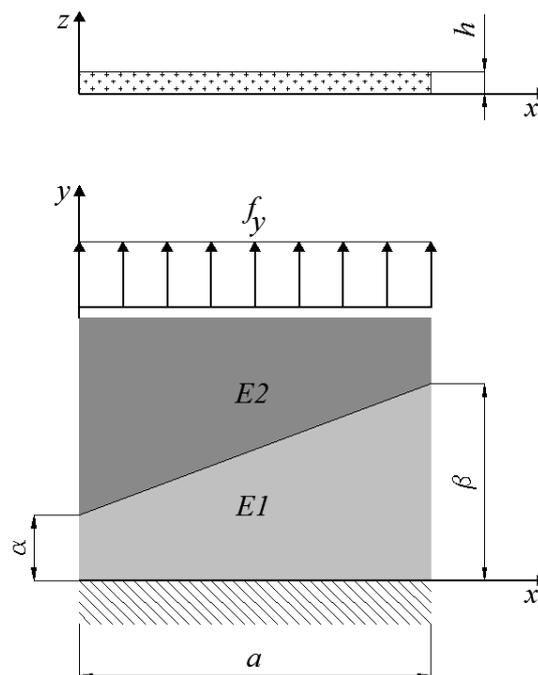


Figura 4.1 – Geometria e carregamento da chapa uniaxial submetido a esforço de tração.

As dimensões, o carregamento, as propriedades mecânicas para a resolução do problema são dados abaixo (em unidades consistentes):

$$a = 160;$$

$$b = 120;$$

$$h = 0.036;$$

Modulo de Elasticidade de Referência, $E_R = 30E+06$;

$$\nu = 0;$$

Força uniformemente distribuída na extremidade livre de $f_y = 10$.

Os coeficientes α e β são medidas das proporções para cada material em cada lado na direção longitudinal da chapa.

Para análise desse problema, foi, intencionalmente, adotado para ν um valor nulo, com o propósito de comparar os resultados obtidos nas simulações, com soluções analíticas conhecidas atuantes apenas em uma direção uniaxial. O Módulo de Elasticidade de Referência, E_R , é o valor de referência para análise, pois como são dois materiais diferentes na composição da peça, cada material possui valores diferentes para o módulo. Desse modo, foi utilizado para cada material um valor de módulo de elasticidade em função do valor de Referência. Nessa chapa, o objetivo foi analisar a convergência para os valores da energia de deformação e as respostas dos deslocamentos para a construção de um Módulo de Elasticidade Longitudinal Equivalente (E_{eq}) à medida que se muda a proporção de cada material na chapa.

A chapa da Figura 4.1 foi simulada para cinco configurações diferentes, em que cada configuração possui diferentes proporções de materiais na composição da mesma. Essa mudança fez-se alterando os valores dos coeficientes α e β , anteriormente mencionados. São realizadas cinco diferentes configurações dos materiais para a chapa com os respectivos valores dos coeficientes α e β e também são colocadas às malhas (em tracejado) para a simulação pelo MEF (Figura 4.2(a)) e pelo MEFGI (Figura 4.2(b)) de cada configuração.

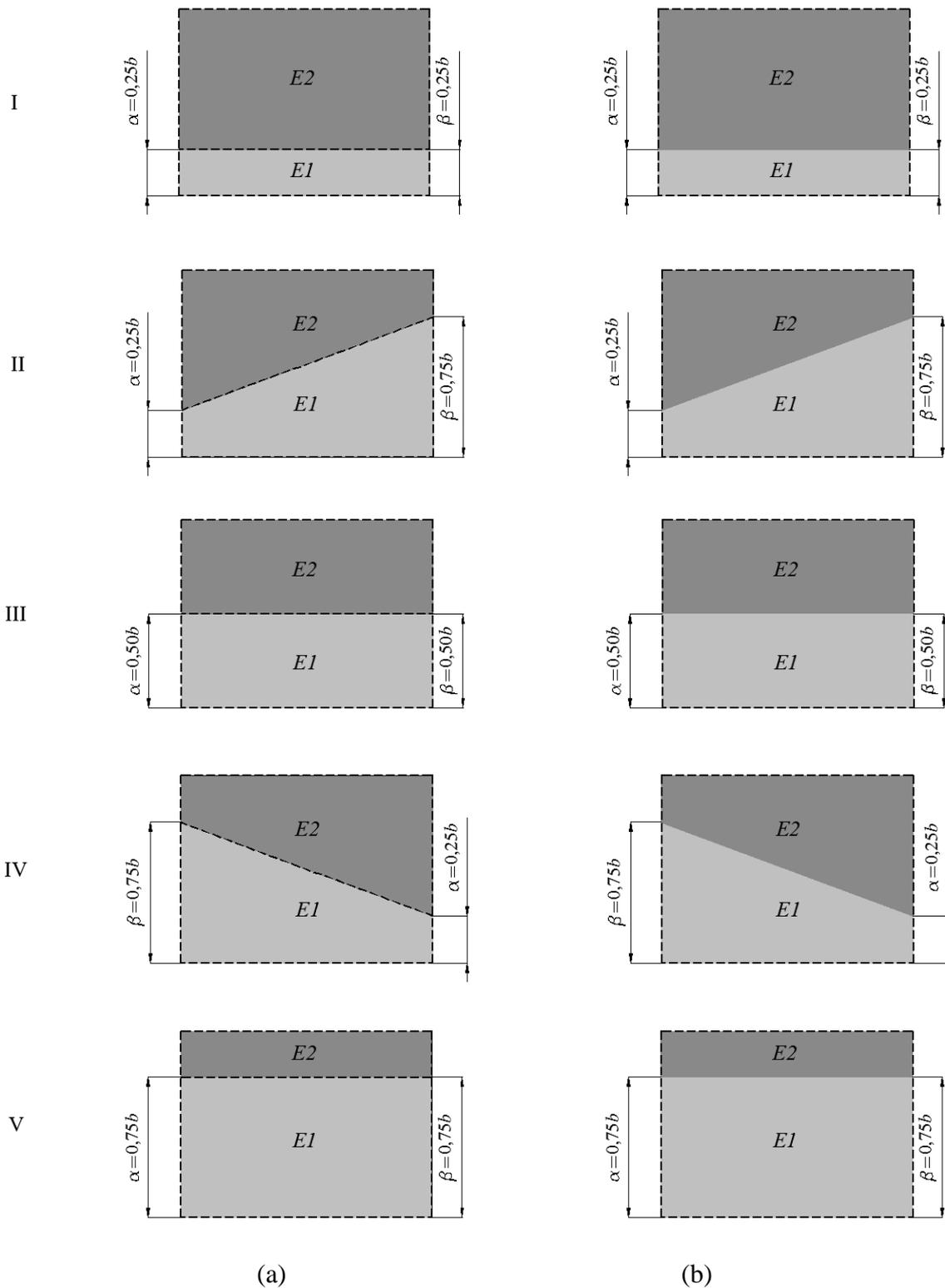


Figura 4.2 – Configurações dos materiais e malhas para a chapa analisada; (a) MEF; (b) MEFGL.

A solução analítica para o cálculo dos deslocamentos longitudinais, u_x , energias de deformação, U e E_{eq} submetido a um carregamento axial sobre área de seção transversal constante para uma chapa, são obtidos, respectivamente por:

$$u_x = \sum_{i=1}^n \frac{P_i l_i}{E_i A_i} \quad (4.1)$$

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2 l_i}{2E_i A_i} \quad (4.2)$$

$$E_{eq} = \frac{u_x A}{P l} \quad (4.3)$$

em que:

n - o número de materiais que compõem a chapa;

P_i - força interna atuando em cada material;

l_i - comprimento de cada material na chapa;

E_i - módulo de elasticidade longitudinal de cada material;

A_i - área da seção transversal.

As equações analíticas acima descritas são calculadas apenas se os coeficientes α e β forem iguais. Quando os dois forem diferentes, como nas configurações c e d da Figura 4.2, utiliza-se para comparação apenas a simulação pelo MEF, em que se utilizam dois elementos, discretizando um elemento para cada material, de forma a malha gerada estar em conformidade com cada material.

Todas as simulações pelo MEFGI utilizam-se para cada configuração da chapa apenas um elemento, em que o mesmo agrupa os dois materiais, em que se separa cada material apenas para se calcular a integração do elemento criança e avaliar suas funções de enriquecimento, como foi visto na seção 2.3 nas equações 2.25 e 2.26. Para integração de cada elemento criança, utiliza-se a regra de integração mínima de Gauss-Legendre.

São apresentadas duas relações de materiais para as simulações numéricas: na primeira, os módulos de elasticidade possuem valores iguais a $E_1 = 2E_R$ para o material 1, $E_2 = E_R$ para o material 2 e para segunda análise os módulos de elasticidade são $E_1 = 10E_R$ e $E_2 = E_R$, respectivamente.

Na Tabela 4.1, apresentam-se os resultados dos erros relativos das energias de deformação da chapa, realizado pelo MEFGI, comparando com a solução analítica para os casos I, III e V, em que os valores de α e β são iguais para as relações entre materiais $E_1/E_2=2$ e também $E_1/E_2=10$.

Tabela 4.1 – Energia de deformação na chapa realizado pelo MEFGI e solução analítica para α e β iguais para as relações $E_1/E_2=2$ e $E_1/E_2=10$.

CASO	$E_1/E_2 = 2$			$E_1/E_2 = 10$		
	Analítico	MEFGI	ϵ_r (%)	Analítico	MEFGI	ϵ_r (%)
I	0,7778	0,7778	0,00	0,6889	0,6889	0,00
III	0,6667	0,6667	0,00	0,4889	0,4889	0,00
V	0,5556	0,5556	0,00	0,2889	0,2889	0,00

Pode-se observar da Tabela 4.1 que para valores de α e β iguais, a solução do MEFGI iguala-se à solução analítica para as duas relações de módulos de elasticidade. Isso mostra sua capacidade de se trabalhar com materiais com geometrias regulares de interface atuantes sobre uma direção uniaxial de carregamento. Os resultados também indicam a convergência independentemente da relação E_1/E_2 estabelecida.

Na Tabela 4.2, são apresentados também os valores dos ϵ_r para energias de deformação da chapa, realizado pelo MEFGI, comparando-se, nesse modelo, com o MEF, para todos os casos da Figura 4.2, nas relações entre materiais $E_1/E_2=2$ e também $E_1/E_2=10$.

Tabela 4.2 – Energia de deformação na chapa realizado pelo MEFGI e MEF para todos os valores de α e β para as relações $E_1/E_2=2$ e $E_1/E_2=10$.

CASO	$E_1/E_2 = 2$			$E_1/E_2 = 10$		
	MEF	MEFGI	ϵ_r (%)	MEF	MEFGI	ϵ_r (%)
I	0,7778	0,7778	0,00	0,6889	0,6889	0,00
II	0,6659	0,6656	0,05	0,4855	0,4787	1,40
III	0,6667	0,6667	0,00	0,4889	0,4889	0,00
IV	0,6659	0,6656	0,05	0,4855	0,4787	1,40
V	0,5556	0,5556	0,00	0,2889	0,2889	0,00

Na Tabela 4.2, pode ser observado, para valores de α e β iguais nos casos I, III e V, a solução do MEFGI que se iguala à solução do MEF para as duas relações de módulos de elasticidade. Isto confirma a capacidade do método MEFGI de se trabalhar com materiais com geometrias regulares, para qualquer relação entre seus módulos de elasticidade, atuantes sobre uma direção uniaxial de carregamento.

Porém, nos casos II e IV, quando os materiais possuem geometrias com distorções angulares, as soluções do MEFGI e do MEF apresentam um pequeno erro relativo ($\varepsilon_r > 0$). Isso se deve ao fato de se trabalhar com elementos distorcidos de acordo com as interfaces, em ambos os casos.

Os valores dos E_{eq} dependem dos valores dos deslocamentos axiais, calculados pela Equação 4.1. Para cada composição de material na chapa, obtém-se valores de deslocamentos diferentes, em que se calcula a média dos mesmos e se utiliza a Equação 4.3 para o cálculo dos módulos equivalentes.

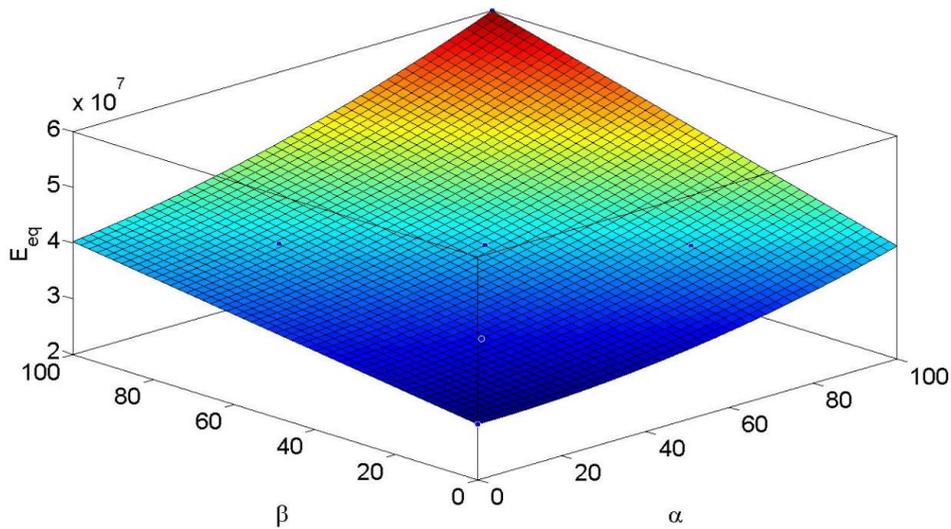
Na Tabela 4.3, são apresentados os valores obtidos para E_{eq} (em unidades consistentes), para as análises realizadas pelo MEFGI e MEF nas duas relações de módulos de elasticidade $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10$.

Tabela 4.3 – Valores dos E_{eq} analisado via MEF e MEFGI.

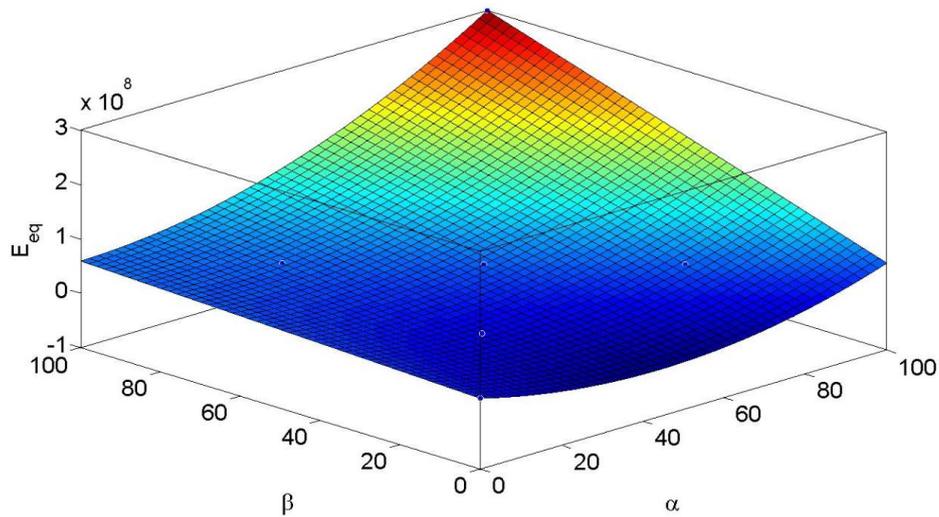
CASO	$E_1/E_2 = 2$			$E_1/E_2 = 10$		
	MEF	MEFGI	ε_r (%)	MEF	MEFGI	ε_r (%)
I	34285714	34285714	0,00	38709677	38709677	0,00
II	40046721	40066368	0,05	54925423	55702739	1,40
III	40000001	40000001	0,00	54545455	54545455	0,00
IV	40046721	40066368	0,05	54925423	55702739	1,40
V	48000000	48000000	0,00	92307692	92307692	0,00

Da Tabela 4.3, visualiza-se os valores dos E_{eq} para o MEF e o MEFGI, e o ε_r entre eles. Observa-se a igualdade dos valores quando os coeficientes α e β são iguais e uma pequena diferença quando os coeficientes são diferentes por causa das distorções angulares dos materiais, vistas anteriormente para as energias de deformação.

Os valores dos E_{eq} para o MEFGI apresentados na Tabela 4.3 são visualizados nos gráficos da Figura 4.3 para os diferentes valores dos coeficientes α e β .



(a)



(b)

Figura 4.3 – Valores do E_{eq} analisado via MEFGI para diferentes valores de α e β ; (a) $E_1/E_2 = 2$; (b) $E_1/E_2 = 10$.

Da Figura 4.3, comenta-se que os gráficos se iniciam com valores de α e β nulos. Esses correspondem, nos gráficos, ao valor de E_{eq} igual a E_2 , prosseguindo para pontos intermediários não nulos de α e β , o que acarreta num E_{eq} determinado pela Equação 4.3. Finaliza-se com valores dos coeficientes iguais a 100 %, que correspondem nos gráficos ao valor de E_{eq} igual a E_1 . Note que as superfícies dos gráficos são polinomiais com aproximações quadráticas. Para $E_1/E_2 = 10$, a superfície possui uma inclinação maior na parte final do que $E_1/E_2 = 2$. Isto faz com que o material E_2 possua rigidez menor do que o E_1 e reduza o valor do deslocamento de forma acentuada na parte final do valor dos coeficientes. Assim o valor do deslocamento é regido quase todo pelo valor do deslocamento do material de rigidez maior E_1 , acarretando na inclinação.

Na Figura 4.4, são mostradas as configurações das deformadas para os cinco casos dos coeficientes α e β comentados anteriormente.

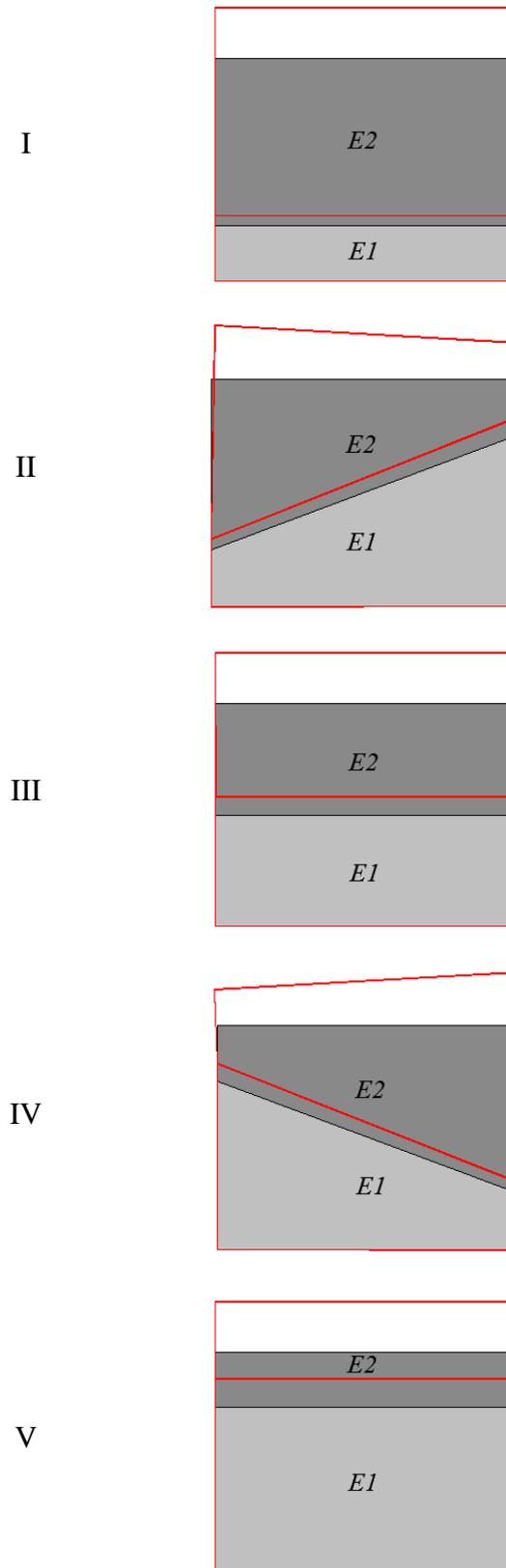


Figura 4.4 – Deformadas para os cinco casos dos coeficientes α e β .

4.2. APLICAÇÃO EM VIGAS LAMINADAS

Neste modelo, é analisada uma viga engastada e livre composta por dois materiais diferentes, submetida à flexão simples, em que é submetida a um carregamento concentrado na aresta livre, conforme pode ser visualizado na Figura 4.5.

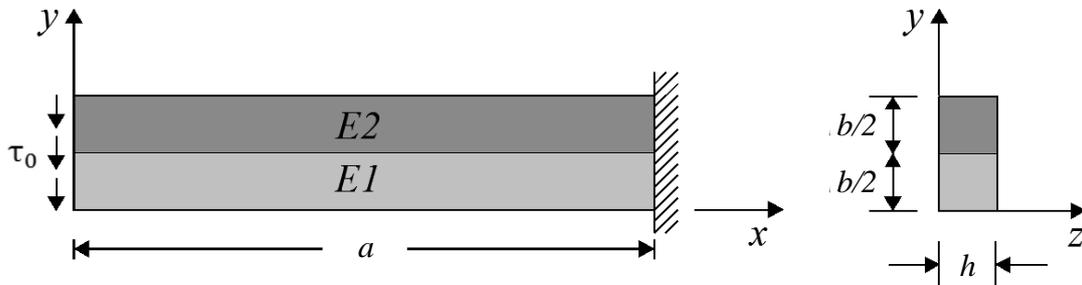


Figura 4.5 – Geometria e carregamento da viga composta de dois materiais submetido à flexão simples.

O carregamento, as propriedades mecânicas para a resolução do problema são dadas abaixo (em unidades consistentes):

$$L = 10;$$

$$b = 2;$$

$$h = 1;$$

Modulo de Elasticidade de Referência, $E_R = 30E+06$;

Coefficiente de Poisson, $\nu = 0,25$;

Para qualquer valor de y em $x = 0$, tem-se uma tensão $\tau_0 = 150$ como uma força uniformemente distribuída de $f_y = -300$.

Nessa viga, o objetivo é analisar a convergência para os valores de deslocamentos e energias de deformação, utilizando o MEFM com as funções de enriquecimento polinomiais e também o MEFMI com as funções de enriquecimento de interface e as funções de enriquecimento polinomiais implementadas em conjunto para o cálculo das aproximações. Para se calcular a solução analítica dessa viga composta por dois materiais, é necessário fazer uma relação entre os módulos de elasticidade dos materiais. No final, ocorre a transformação de um material em outro, formando uma nova seção transversal para a determinação de uma nova inércia com valor do módulo de elasticidade do material que se deseja transformar, para, por fim, utilizar-se as equações

fornecidas pela resistência dos materiais. A solução analítica para deslocamentos, u_y , energias de deformação, U , são dadas respectivamente:

$$u_y(0,1) = - \left(\frac{f_y L^3}{3E_{tr} I_{tr}} \right) [1 + 3(1 + \nu)/L^2] \quad (4.4)$$

$$U = \frac{f_y^2 L^3}{6E_{tr} I_{tr}} [1 + 3(1 + \nu)/L^2] \quad (4.5)$$

Em que:

E_{tr} - módulo de elasticidade longitudinal do material que se deseja transformar;

I_{tr} - inércia da seção transversal transformada.

São apresentadas duas relações de materiais para simulação numérica. Na primeira, os módulos de elasticidade possuem valores iguais a $E_1 = 2E_R$ para o material 1, $E_2 = E_R$ para o material 2 e, para a segunda, a análise dos módulos de elasticidade são $E_1 = 10E_R$ e $E_2 = E_R$, respectivamente.

O valor de referência calculado para a relação entre módulos de elasticidade $E_1/E_2 = 2$, para o deslocamento no ponto determinado, é $u_y(0,1) = 3,7727E-03$ e para a energia de deformação $U = 0,5659$. Para a relação entre módulos $E_1/E_2 = 10$, o valor para o deslocamento é $u_y(0,1) = 1,8941E-03$ e para a energia de deformação $U = 0,2841$.

Nesse modelo, os métodos MEFG e MEFGI são implementados para elementos quadrilaterais, adicionando, em ambas, as funções de enriquecimento polinomiais. Para essas análises, são realizadas seis discretizações diferentes da estrutura como relação à malha como mostradas na Figura 4.6 para o MEFG e na Figura 4.7 para o MEFGI.

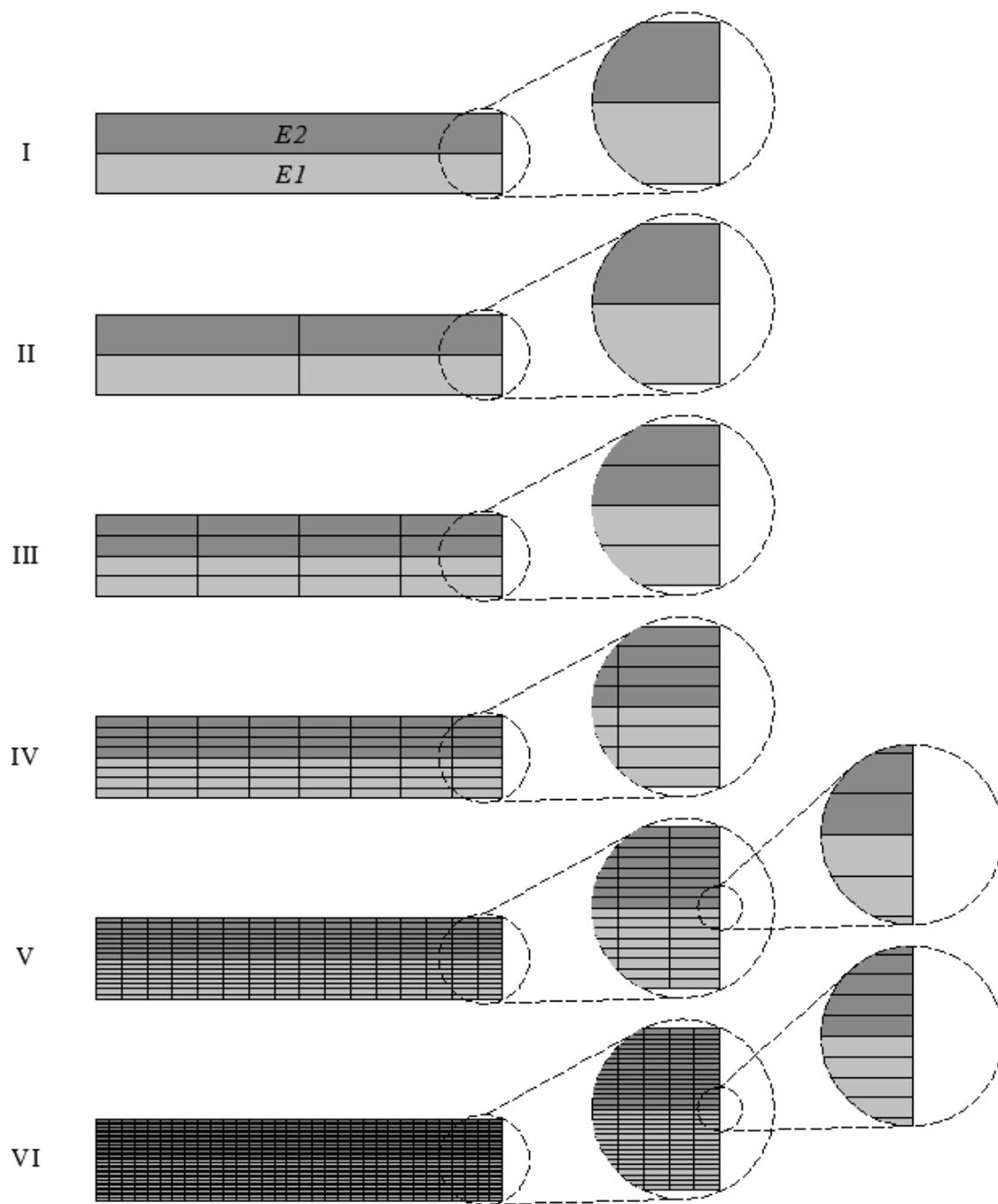


Figura 4.6 – Diferentes configurações de malha para a viga com dois materiais para o MEF.

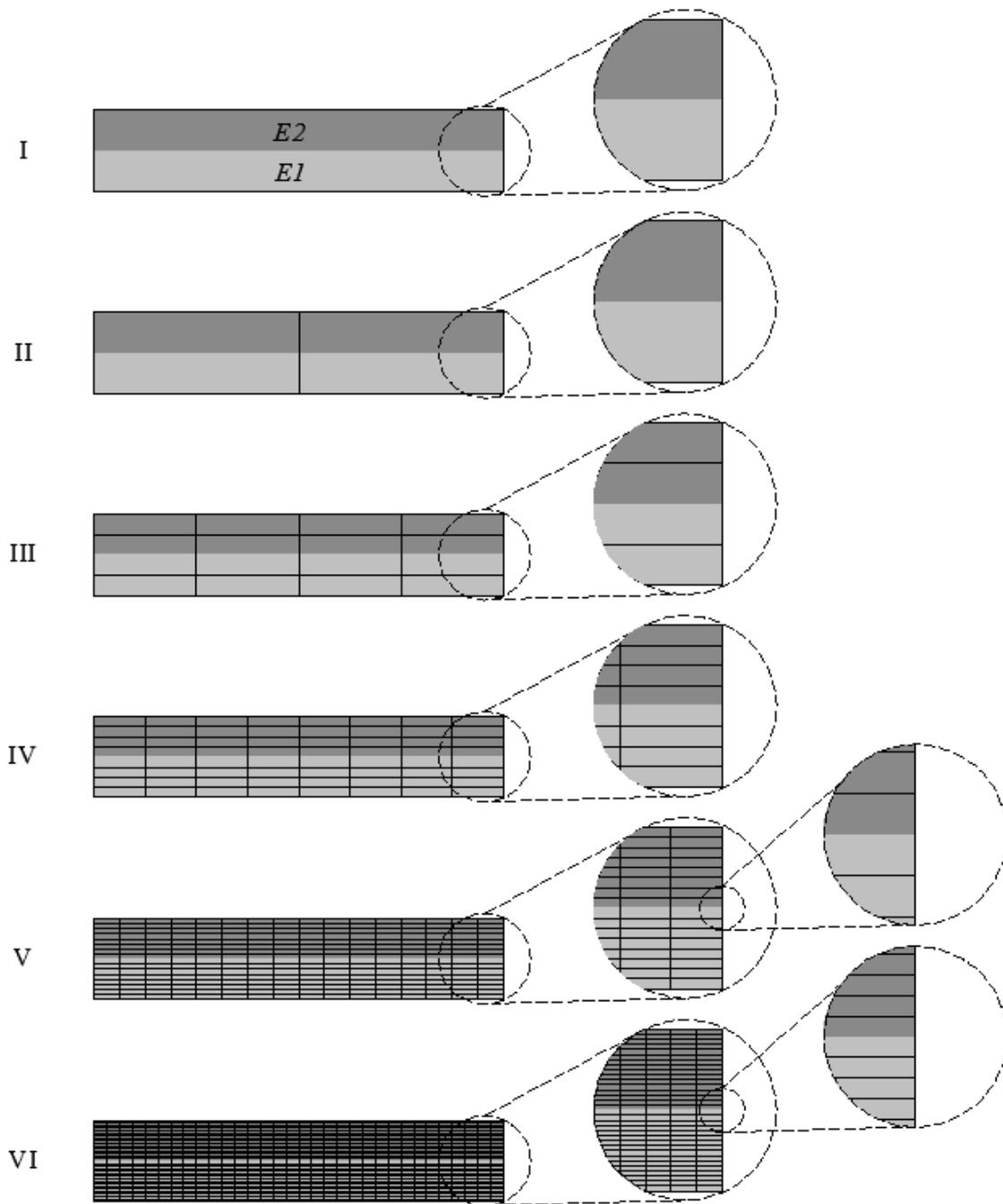


Figura 4.7 – Diferentes configurações de malha para a viga com dois materiais para o MEFGL.

Na Tabela 4.4 são apresentados o número de elementos e de nós para cada malha visualizada na Figura 4.6 para o MEFGL.

Tabela 4.4 – Número de elementos e nós para cada malha para o MEFG.

MALHAS	nº elementos	nº nós
I	2	6
II	4	9
III	16	25
IV	64	81
V	256	289
VI	1024	1089

Na Tabela 4.5 são apresentados o número de elementos e de nós para cada malha visualizada na Figura 4.7 para o MEFGI.

Tabela 4.5 – Número de elementos e nós para cada malha para o MEFGI.

MALHAS	nº elementos	nº nós
I	1	4
II	2	6
III	12	20
IV	56	72
V	240	272
VI	992	1056

Visualiza-se na Figura 4.6 que as malhas para o MEFG são geradas de forma a estarem em conformidade com a interface material, ou seja, a interface não corta o elemento, ou melhor, está alinhada com as arestas dos elementos que a formam. No MEFGI, as malhas são visualizadas na Figura 4.7 e não estão em conformidade com a interface e cortam todos os elementos que a abrigam.

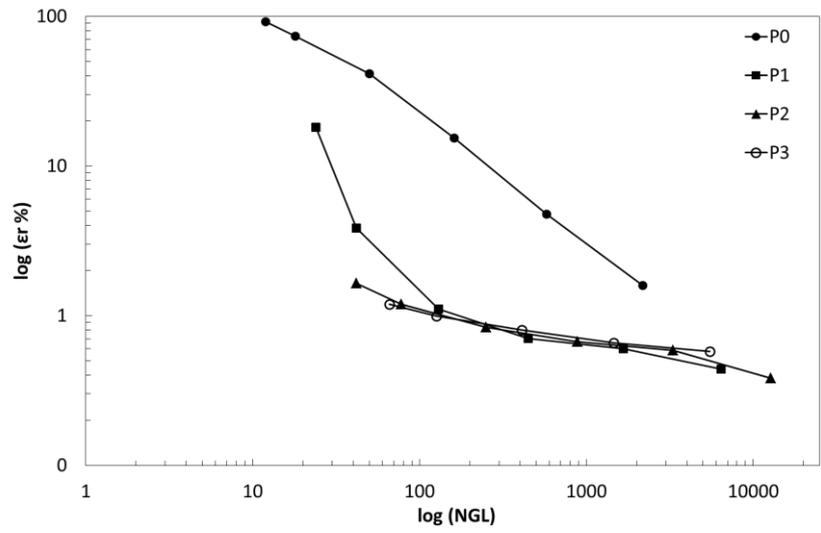
As condições de contorno de deslocamentos impostas para a viga, utilizando o MEFG e o MEFGI, foram diferentes. No MEFG, utiliza-se todos os nós do engaste para a restrição horizontal e apenas o nó central para a restrição na direção vertical. No entanto, para o MEFGI, utilizam-se dois nós para a restrição na direção vertical devido ao nó central da viga não possuir um nó de malha geométrica e, sim, um nó de interface. Como uma alternativa então, restringe-se os dois nós da malha mais próximos ao nó central, de forma a ficar simétrica a discretização e poder proporcionar o mínimo de mudança possível nas simulações e resultados.

As simulações são realizadas para as relações $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10$. Os nós situados na aresta engastada não tiveram seus deslocamentos enriquecidos para se respeitar as condições de contorno do problema. A integração numérica, utilizando enriquecimentos polinomiais, é realizada para todas as análises dessa viga pela regra de integração de Gauss - Legendre mínima para cada elemento, porém no MEFGI os elementos que abrigam a interface dividem-se em dois elementos de integração e em cada um deles aplica-se a regra acima.

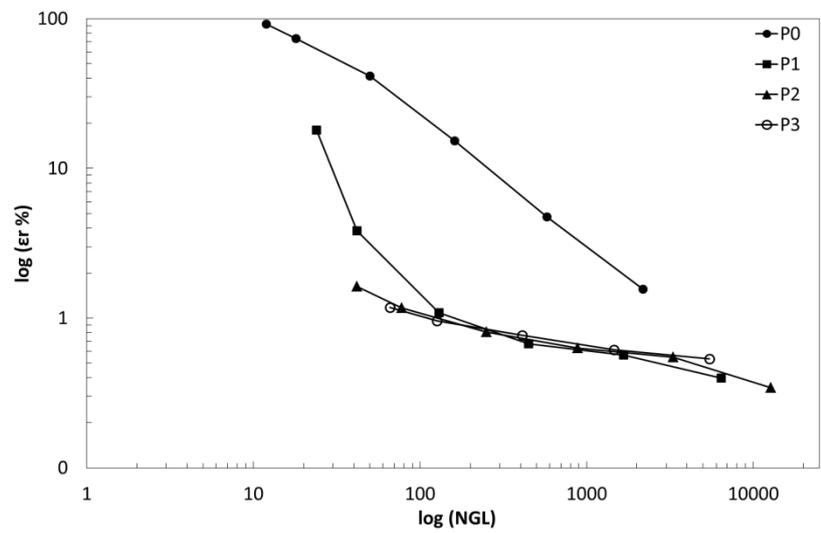
4.2.1. Análise da convergência do refinamento de malha

A primeira análise para ambos os métodos foi obter uma aproximação do campo dos deslocamentos considerando o refinamento da malha, iniciando da malha I (mais grosseira) até a malha VI (mais refinada) sem qualquer combinação de função de enriquecimento sobre a PU, isso resultou em uma aproximação final de ordem P0. Repetiu-se o mesmo refinamento de malha anterior, porém adicionou-se à PU linear das funções de aproximação do MEF, funções de enriquecimento polinomiais com aproximação local de ordem um, dois e três, resultando em aproximações finais P1, P2 e P3, respectivamente.

Na Figura 4.8, são apresentados os gráficos correspondentes ao ε_r com relação ao NGL, por meio do refinamento da malha para cada ordem de aproximação enriquecida separadamente, analisados para os deslocamentos (Figura 4.8(a)) e energias de deformação (Figura 4.8(b)) para o MEFG, utilizando a relação entre materiais $E_1/E_2 = 2$. Na Figura 4.9, apresentam-se os mesmos gráficos, porém para a relação $E_1/E_2 = 10$. Nesses gráficos o aumento do NGL é devido ao aumento no número de elementos para cada ordem polinomial utilizada.



(a)



(b)

Figura 4.8 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFG para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

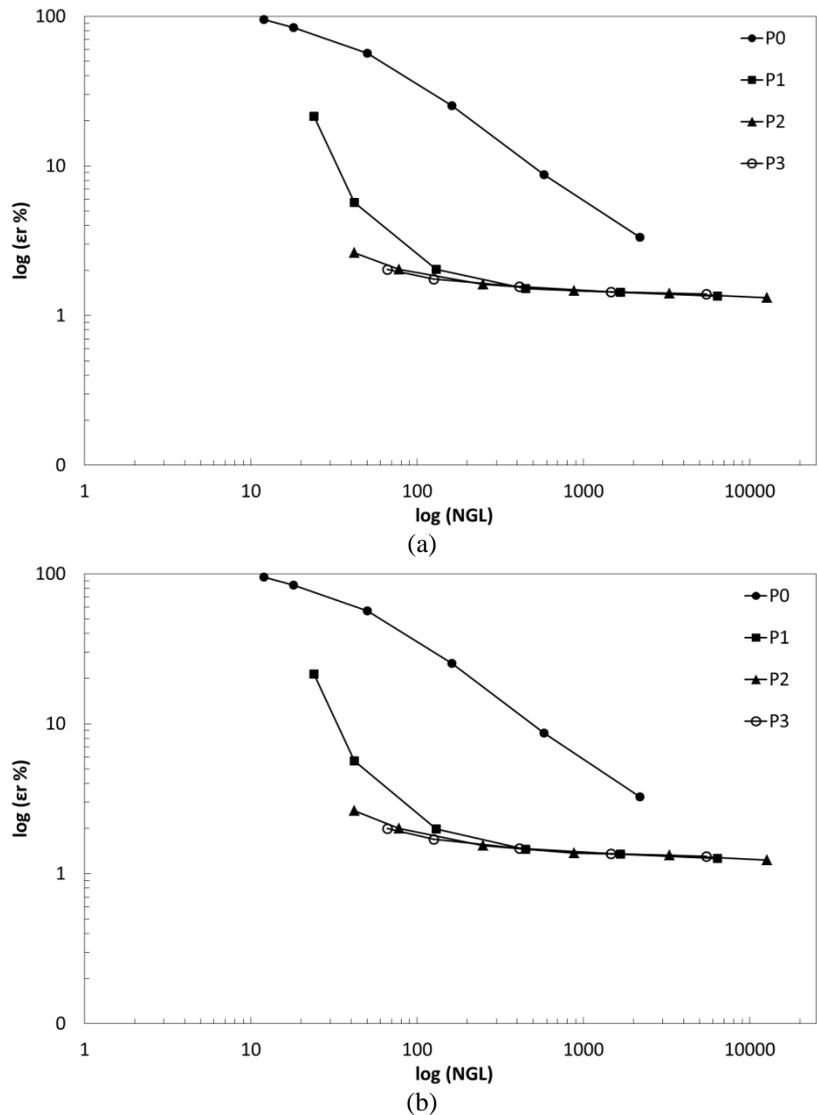
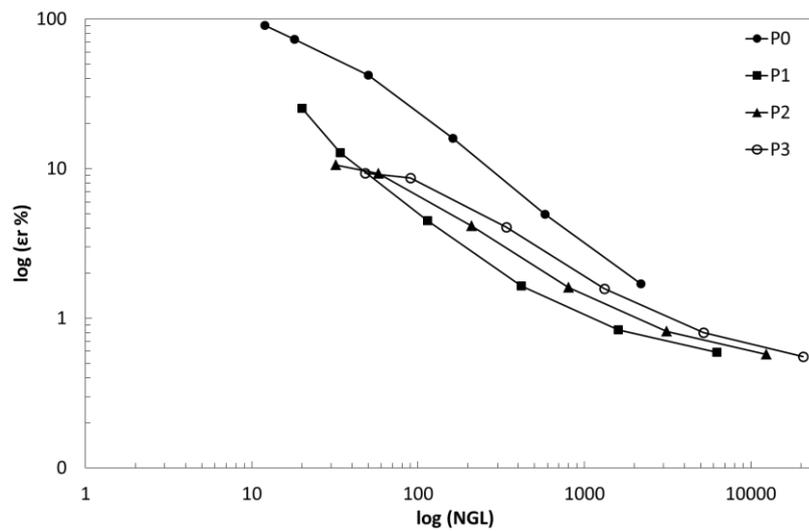


Figura 4.9 – Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFG para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

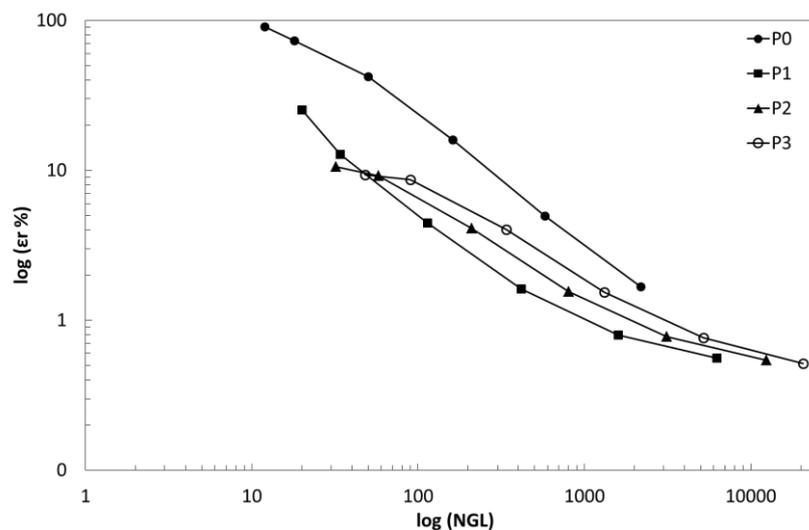
Nos gráficos da Figura 4.8 e Figura 4.9, analisa-se uma redução no ε_r à medida que se refina a malha, porém a qualidade da solução somente potencializa-se quando se utiliza o enriquecimento polinomial na aproximação fornecido pelo MEFG. Visualiza-se que a aproximação sem enriquecimento P0 reduz o ε_r , mas não alcança uma convergência aceitável. Essa aproximação é a realizada pelo MEF tradicional. Pode-se observar nos gráficos da Figura 4.8 e Figura 4.9 que para todas as ordens polinomiais de enriquecimento P1 a P3, a convergência da solução é garantida à medida que ocorre o refinamento da malha, chegando-se a $\varepsilon_r < 1\%$ para a relação $E_1/E_2 = 2$ e $\varepsilon_r \approx 1\%$ para a relação $E_1/E_2 = 10$. Visualiza-se também que, na primeira malha analisada com aproximação final P2 e P3, o ε_r é pequeno. Isso se deve como visto no modelo relacionado ao enriquecimento polinomial na seção anterior, à aproximação final da

solução ser de ordem cúbica e de representar a solução analítica dos deslocamentos e energias de deformação, pois ambas também são aproximações de ordem cúbica.

Na Figura 4.10, apresentam-se os gráficos em que se analisam os mesmos parâmetros visualizados nos gráficos anteriores ε_r por NGL, para os deslocamentos (Figura 4.10(a)) e energias de deformação (Figura 4.10(b)) simulados pelo MEFGI para a relação $E_1/E_2 = 2$ e, na Figura 4.11, apresentam-se os gráficos para a relação $E_1/E_2 = 10$. Nesses gráficos o aumento do NGL também é devido ao aumento do número de elementos para cada ordem polinomial utilizada.

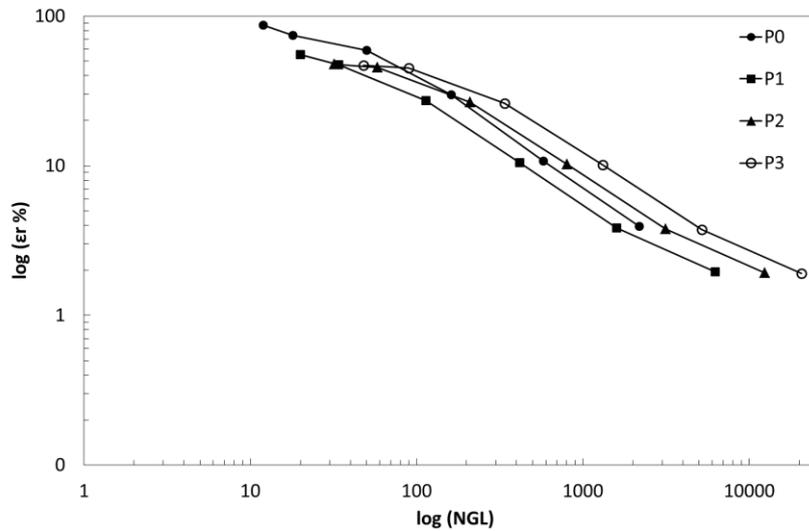


(a)

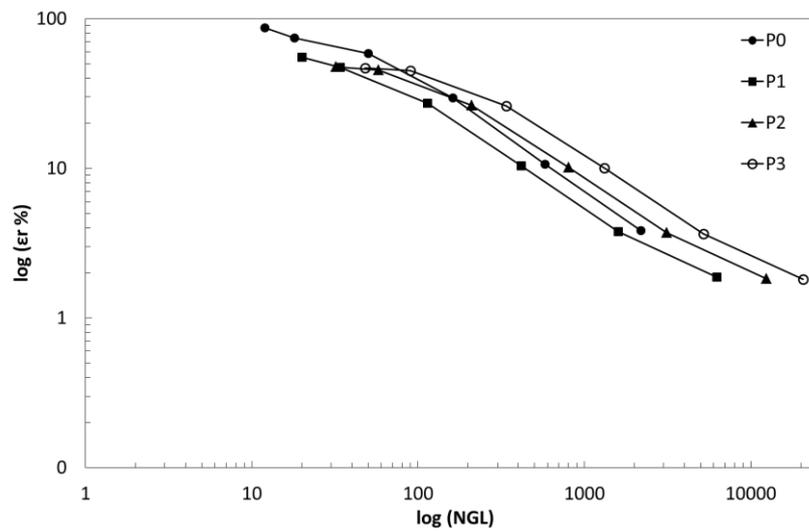


(b)

Figura 4.10 – Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGI para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.



(a)



(b)

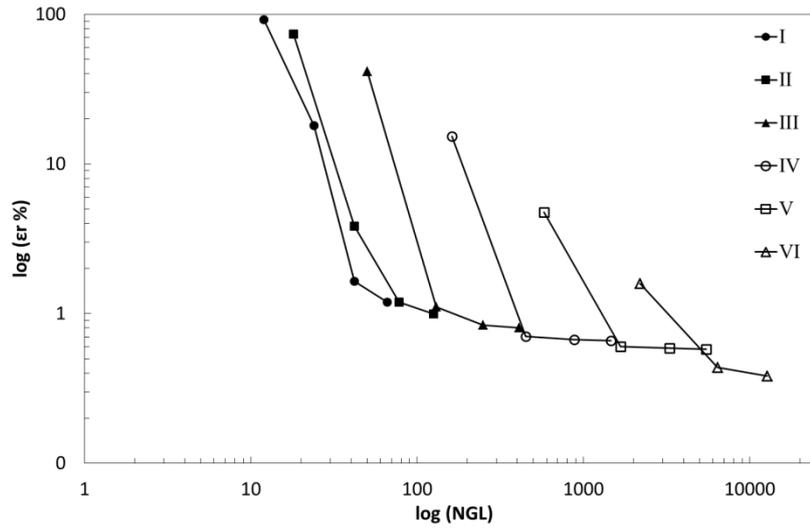
Figura 4.11 – Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para diferentes ordens de funções de enriquecimento para o MEFGI para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Dos gráficos presentes na Figura 4.10 e Figura 4.11, analisa-se que para a simulação do MEFGI, assim como no MEFG, obteve-se uma redução no ε_r à medida que se refina a malha. Porém, no MEFGI, as aproximações resultantes P1 a P3, fornecidas pelo enriquecimento polinomial, não potencializam a melhora na qualidade da solução da maneira desejada, como foi no caso do MEFG. No entanto, com o refinamento da malha, o método alcança resultados satisfatórios, obtendo ε_r , assim como na aproximação do MEFG, $\varepsilon_r < 1\%$ nas simulações com a relação entre materiais $E_1/E_2 = 2$ e $\varepsilon_r \approx 1\%$ para a relação $E_1/E_2 = 10$.

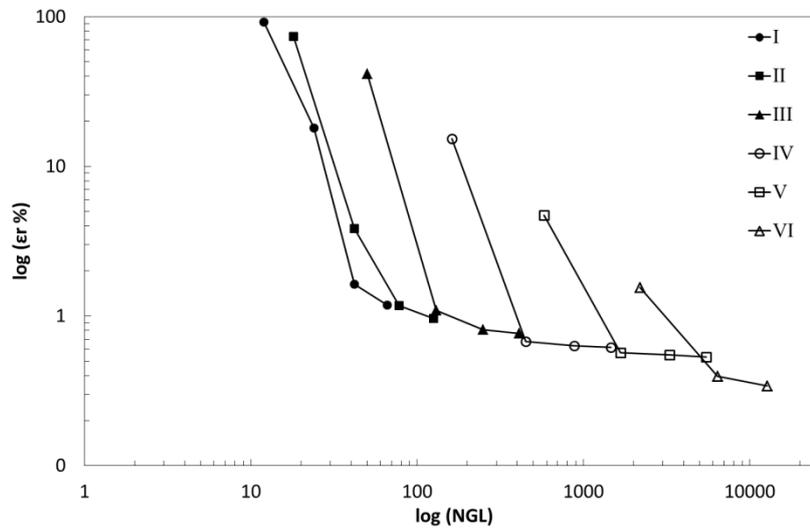
4.2.2. Análise da convergência da ordem polinomial do enriquecimento

Outra análise estabelecida para ambos os métodos e relações de materiais na viga foram utilizar para cada malha da Figura 4.6 e Figura 4.7, quatro casos de aproximação para o campo de deslocamentos. O primeiro caso foi à aproximação da PU linear das funções de aproximação do MEF, sem adicionar enriquecimentos, obtendo a uma aproximação final P0 e os demais casos a aproximação da PU com a adição de enriquecimentos lineares, quadráticos e cúbicos, resultando em aproximações finais P1, P2 e P3, respectivamente.

Na Figura 4.12, apresentam-se gráficos correspondentes ao ε_r com relação ao NGL para cada caso de malha mostrada anteriormente, adicionando a cada uma dessas malhas funções de enriquecimento de ordem zero até três, analisadas para os deslocamentos (Figura 4.12(a)) e energias de deformação (Figura 4.12(b)), utilizando uma simulação pelo MEF para a relação $E_1/E_2 = 2$. Na Figura 4.13, são mostrados os mesmos gráficos, mas para a relação $E_1/E_2 = 10$. O aumento do NGL nesses gráficos é devido ao aumento da ordem de aproximação para cada malha.



(a)



(b)

Figura 4.12 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFM para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

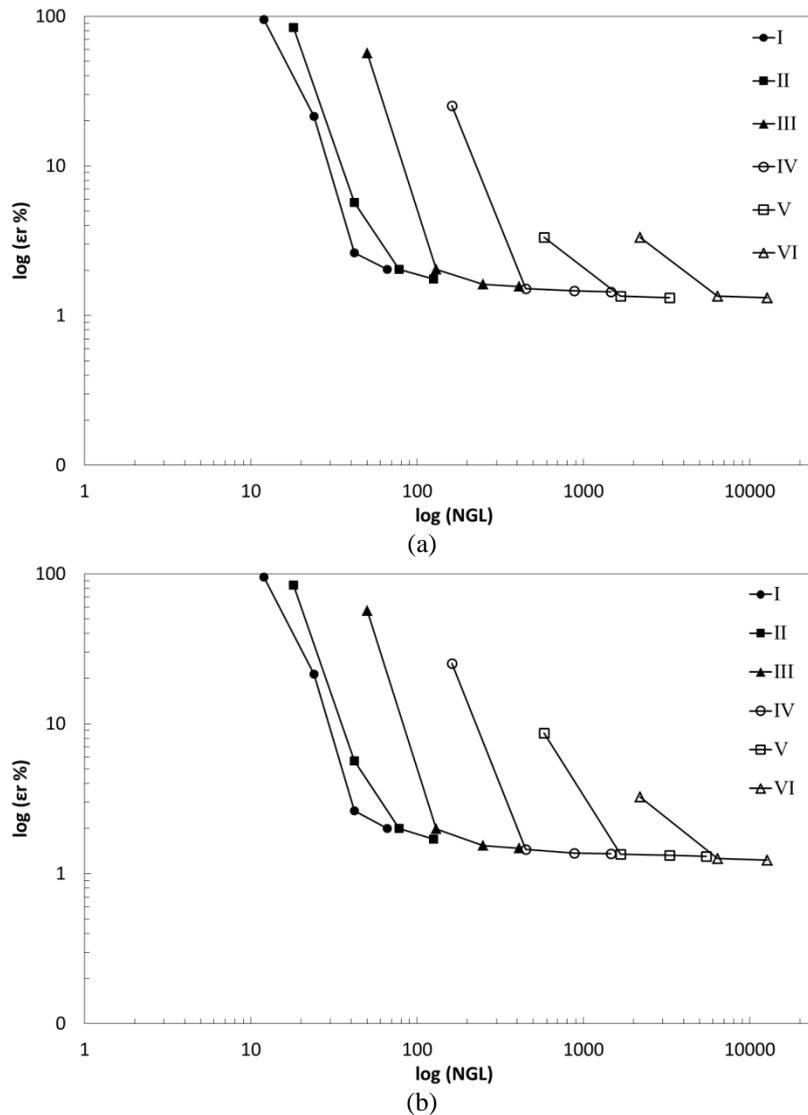


Figura 4.13 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFM para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Para as duas relações entre módulos de elasticidade para o MEFM nos gráficos da Figura 4.12 e Figura 4.13, pode-se visualizar que, para todas as configurações de malhas utilizadas, os ϵ_r reduziram à medida que se adicionaram ordens polinomiais de enriquecimento sobre as mesmas, obtendo para todas as malhas $\epsilon_r < 1\%$ na relação $E_1/E_2 = 2$ e $\epsilon_r \approx 1\%$ para a relação $E_1/E_2 = 10$. O uso da malha I com apenas 2 elementos quadrilaterais, cada um para a discretização de cada material, alcançou resultados nas simulações com aproximação final P3, melhores do que muitos resultados simulados com outras configurações de malhas que possuem mais elementos e nós, resultando num ganho satisfatório no custo computacional, o que mostrou a capacidade do MEFM na ampliação do espaço de aproximação.

Na Figura 4.14, apresentam-se os gráficos em que se analisam os parâmetros de ε_r por NGL simulados para o MEFGI em cada caso de malha, adicionando, a cada uma, funções de enriquecimento de ordem zero até três, analisadas para os deslocamentos (Figura 4.14(a)) e energias de deformação (Figura 4.14(b)) para a relação $E_1/E_2 = 2$. Na Figura 4.15, são mostrados os mesmos gráficos, mas para a relação $E_1/E_2 = 10$.

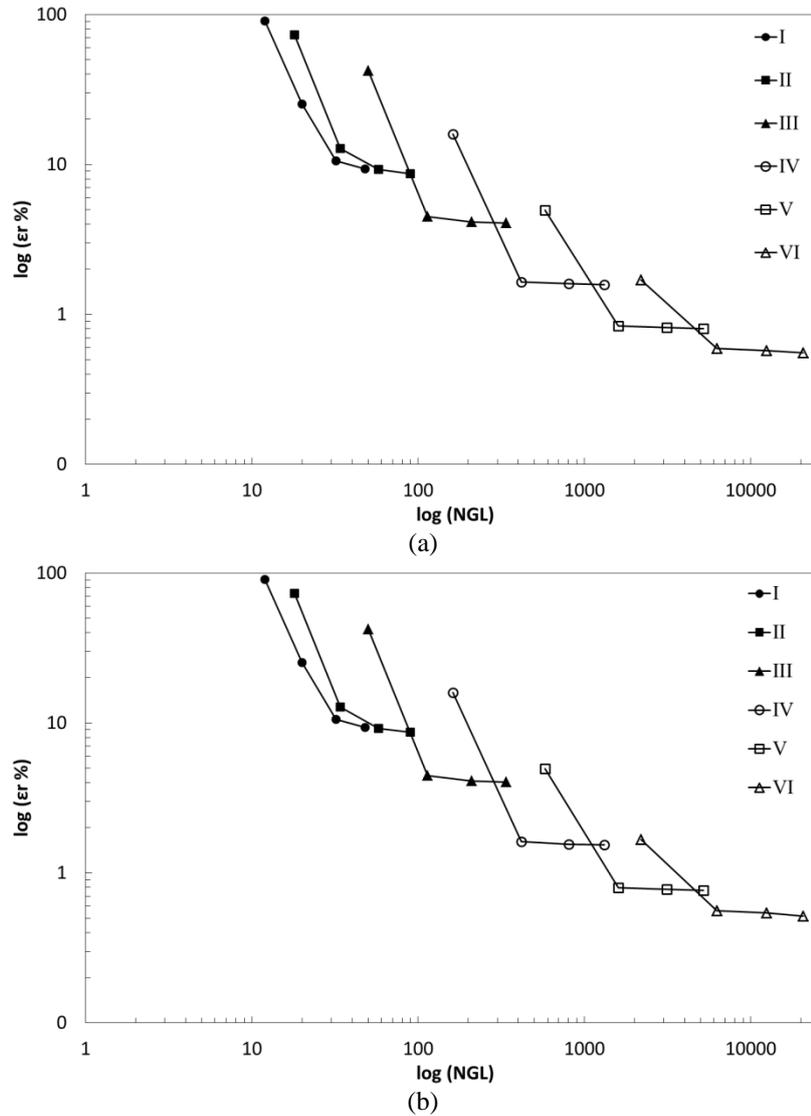


Figura 4.14 – Erro relativo, ε_r , com relação ao Número de Graus de Liberdade para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFGI para $E_1/E_2 = 2$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

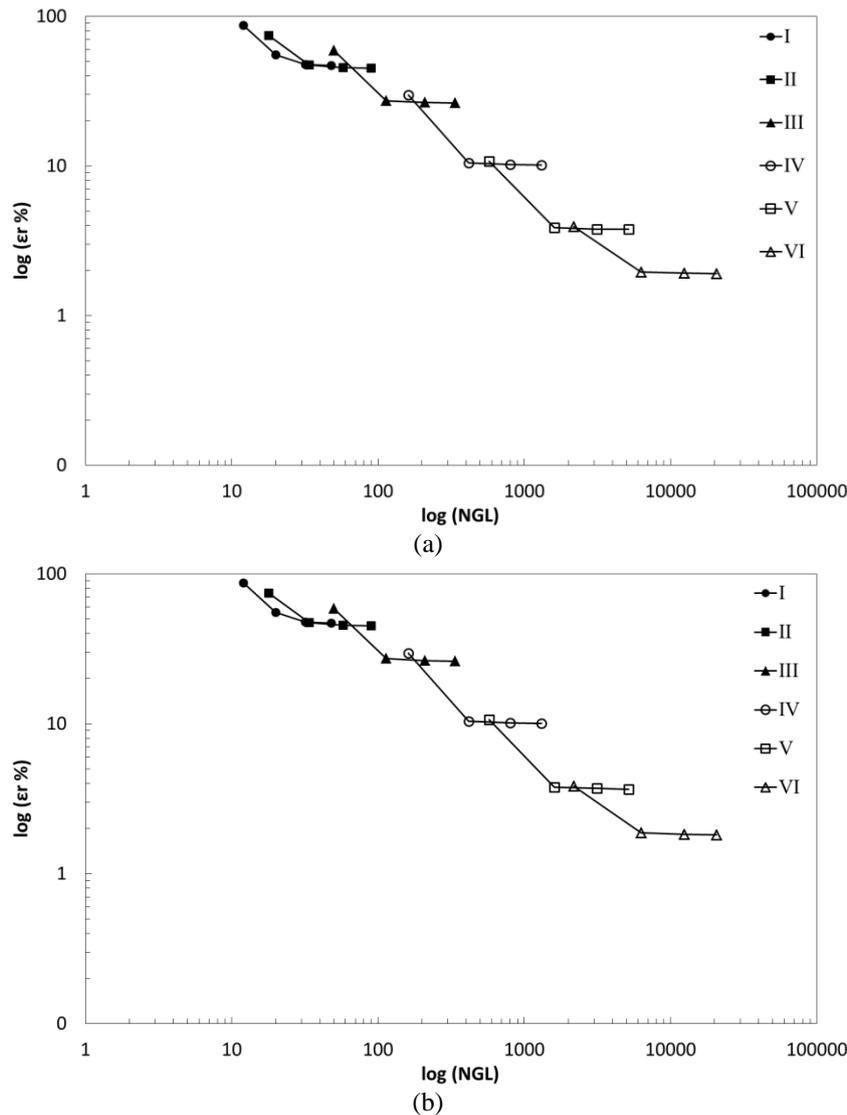


Figura 4.15 – Erro relativo, ϵ_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha simulando pelo MEFGI para $E_1/E_2 = 10$; (a) Deslocamento; (b) Energia de Deformação.

Dos gráficos da Figura 4.14 e Figura 4.15, analisa-se para a simulação do MEFGI, assim como no MEFG, uma redução no ϵ_r em cada configuração de malha à medida que se adicionaram ordens polinomiais de enriquecimento sobre as mesmas. No entanto, diferentemente do que ocorreu no MEFG, as malhas com poucos elementos não convergem para resultados desejáveis, só obtendo uma melhora na qualidade das aproximações à medida que se utiliza malhas com muitos elementos. Essas malhas mais refinadas, adicionadas às ordens polinomiais de enriquecimentos, alcançaram, assim como nas análises pelo MEFG, $\epsilon_r < 1\%$ na relação $E_1/E_2 = 2$ e $\epsilon_r \approx 1\%$ para a relação $E_1/E_2 = 10$. Os resultados finais não tiveram uma maior aproximação devido às condições de contorno impostas no MEFGI, em que se utilizaram os dois nós mais

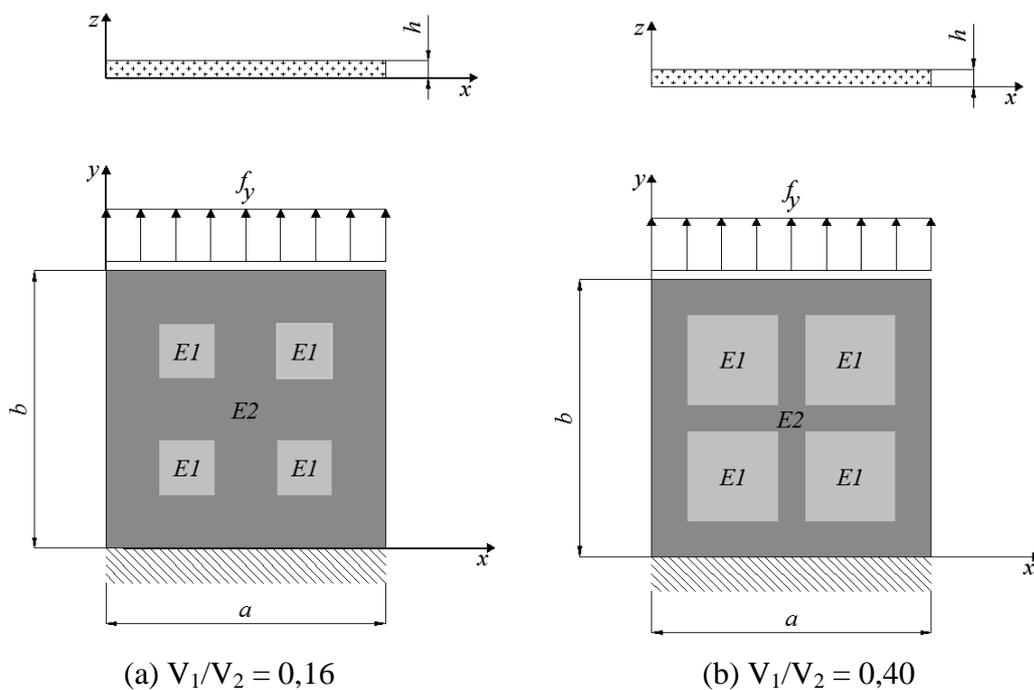
próximos ao nó central para a restrição na direção vertical, em vez de um no nó central como no MEFG.

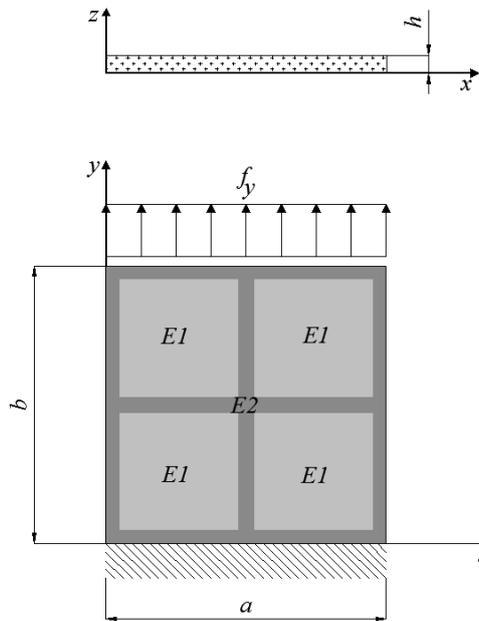
Visualiza-se também que a convergência do ε_r depende da relação E_1/E_2 , alcançando melhores resultados quando a relação tende a unidade, ou seja, uma relação constante.

No entanto, como comentado anteriormente, o MEFGI é vantajoso, pois a interface corta alguns elementos e, mesmo assim, com o refinamento da malha e adicionando enriquecimentos polinomiais, alcançam resultados muito próximos do valor de aproximação pretendido, sem a preocupação de gerar malhas com elementos em conformidade com os materiais como na aproximação realizada pelo MEFG, o que é bastante útil em problemas envolvendo mudança no formato de materiais, pois só gera a malha apenas uma vez, com a mudança apenas das coordenadas da interface.

4.3. APLICAÇÃO EM COMPÓSITOS DE MATRIZ E INCLUSÕES

Neste modelo, é analisada uma chapa engastada em uma extremidade e submetida a um esforço de tração na outra extremidade. A chapa é um material compósito heterogêneo formado pelas inclusões com módulo de elasticidade E_1 e a matriz com módulo de elasticidade E_2 . Na Figura 4.16 apresentam para a chapa três configurações de compósitos com relação ao seu volume.





(c) $V_1/V_2 = 0,70$

Figura 4.16 – Geometria, carregamento da chapa submetido a esforço de tração.

As dimensões, o carregamento, as propriedades mecânicas para a resolução do problema são dados abaixo (em unidades consistentes):

$$a = 1;$$

$$b = 1;$$

$$h = 0.036;$$

Modulo de Elasticidade de Referência, $E_R = 30E+06$;

$$\nu = 0;$$

Força uniformemente distribuída na extremidade livre de $f_y = 1000$.

O E_R é um valor de base para comparação, em que os valores de E_1 e E_2 são relacionados a esse valor. Nesta chapa, o objetivo é analisar as respostas para os deslocamentos para a construção de um E_{eq} , à medida que se muda o valor E_1 das inclusões com relação à matriz dessa chapa para análise realizada pelo MEFGL. Na Figura 4.17, é simulado para a chapa com relação entre volumes $V_1/V_2 = 0,16$ (Figura 4.16(a)) quatro diferentes configurações de malhas para análise.

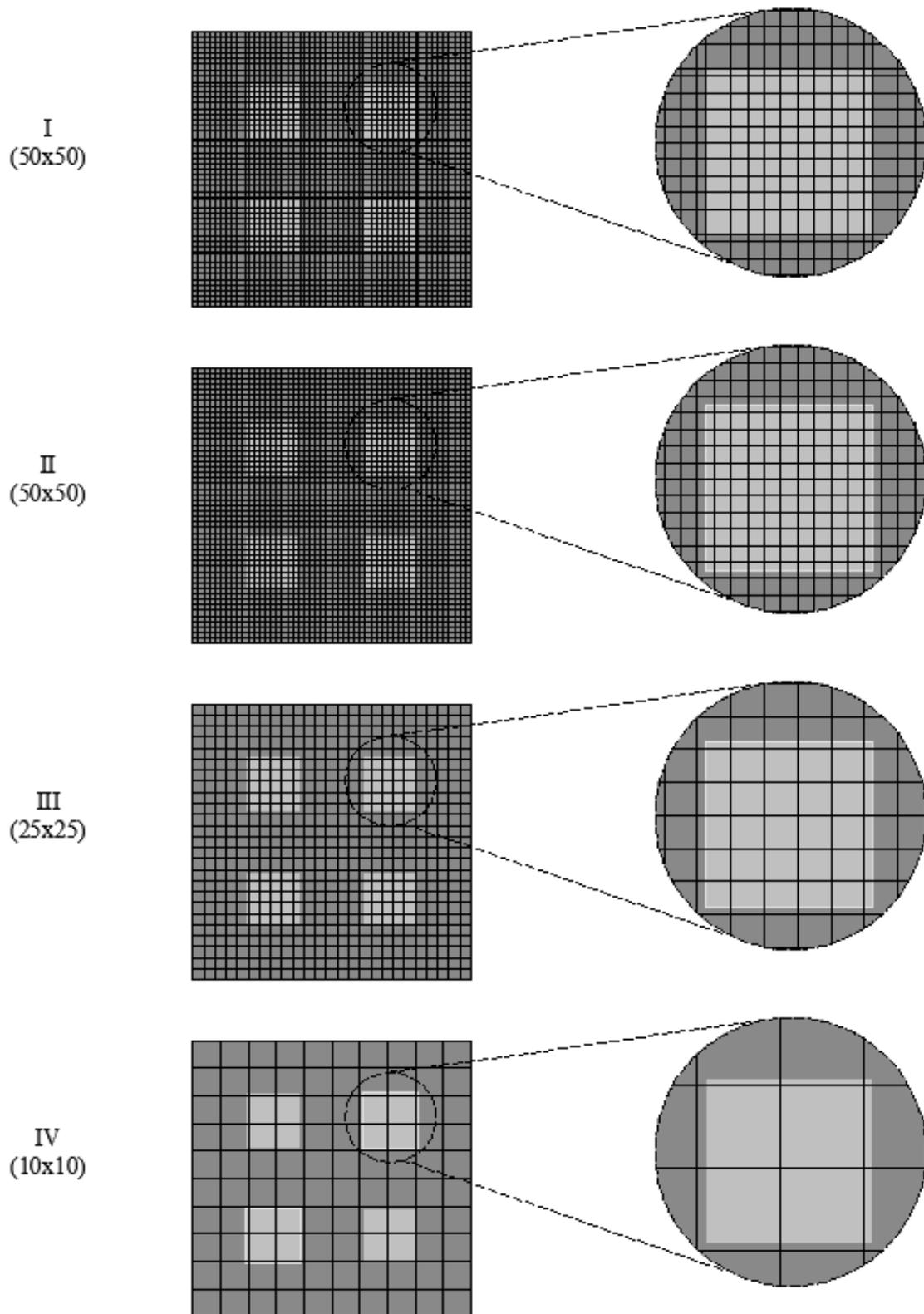


Figura 4.17 – Configurações de malhas para $V_1/V_2 = 0,16$

A Malha I foi simulada pelo MEF com os elementos em conformidade na interface existente entre a matriz e as inclusões. As malhas II, III e IV são simuladas pelo MEFGI, com a interface das inclusões cortando alguns elementos na discretização. Na

malha IV, utilizam-se ainda funções de enriquecimento polinomiais de ordem linear e quadrática em conjunto com as funções de enriquecimento de interface.

Nas análises realizadas pelo MEFGI, o elemento pai é dividido em dois e três elementos criança, para o cálculo da integração numérica, utiliza-se dois elementos para o plano de interface que corta em dois nós o elemento e três para o plano que corta em três nós os elementos, como os cantos das inclusões conforme visualizado na Figura 4.17.

Na Figura 4.18 ilustra de uma forma mais detalhada a região do canto da inclusão. O elemento pai foi dividido em três elementos criança para o cálculo da integração numérica. A avaliação das funções de enriquecimento correspondentes a cada nó da interface são apresentadas nas Equações 4.6, 4.7 e 4.8.

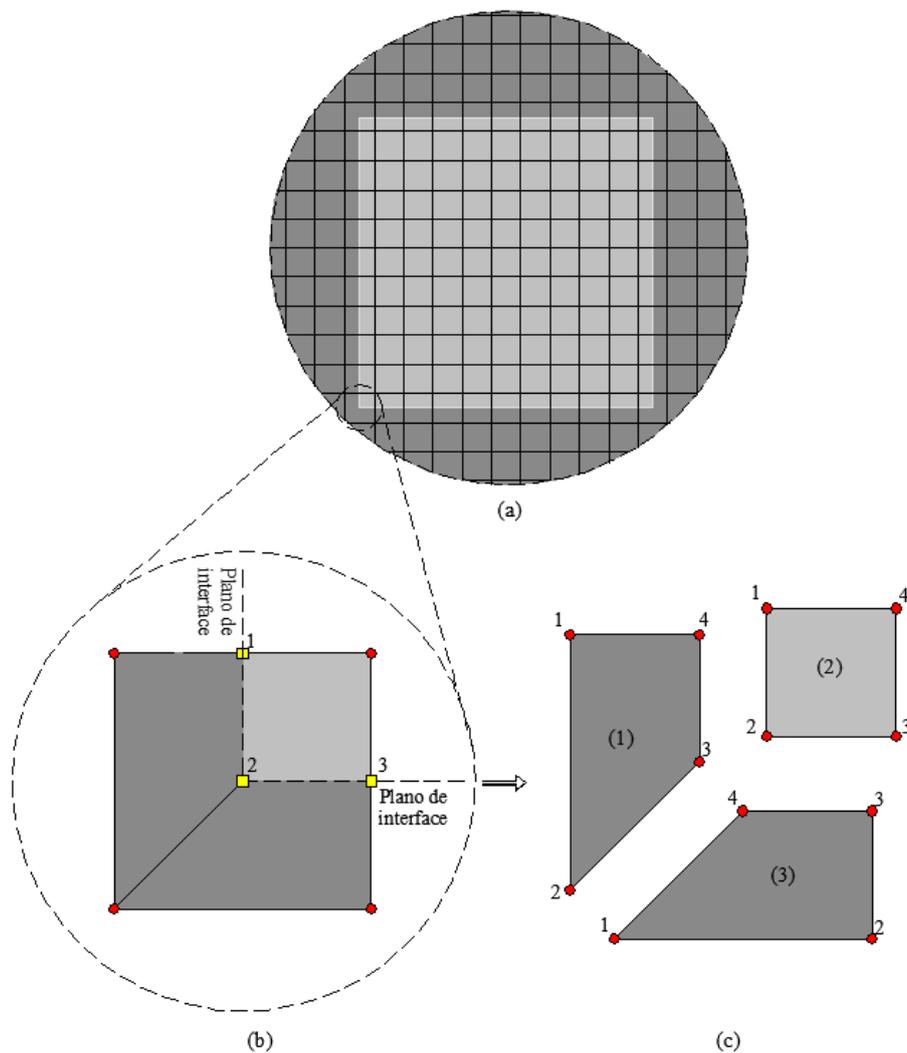


Figura 4.18 – Funções de enriquecimento no MEFGI 2D com criação dos elementos de integração para um elemento quadrilátero de quatro nós, cortado por uma interface feita por dois segmentos lineares interceptados (Adaptado de Soghrati *et al.*, 2012).

$$\psi_1 = N_4^{(1)} + N_1^{(2)} \quad (4.6)$$

$$\psi_2 = N_3^{(1)} + N_2^{(2)} + N_4^{(3)} \quad (4.7)$$

$$\psi_3 = N_3^{(2)} + N_3^{(3)} \quad (4.8)$$

É importante comentar que o elemento pai tem que ser dividido em um número mínimo de elementos, como visto anteriormente na Figura 4.18. Além dos nós da aresta do elemento com a interface, criam-se nós no interior do elemento e esse procedimento aplica-se quando se objetiva reduzir erros causados pela geometria, referentes a diversas formas da interface entre materiais.

Os valores dos E_{eq} dependem dos valores dos deslocamentos axiais como visto na análise do modelo da seção 4.1, que se calcula pela Equação 4.1. Para cada composição de material na chapa, obtém-se valores de deslocamentos diferentes, em que se calcula a média dos mesmos e se utiliza a Equação 4.3 para o cálculo dos módulos equivalentes.

No gráfico da Figura 4.19, são apresentados valores para o E_{eq} para as diferentes configurações de malhas, juntamente com os tipos de simulações realizadas para as diferentes relações entre os Módulos de Elasticidade E_1/E_2 , com o valor $E_2 = E_R$ para todas as simulações.

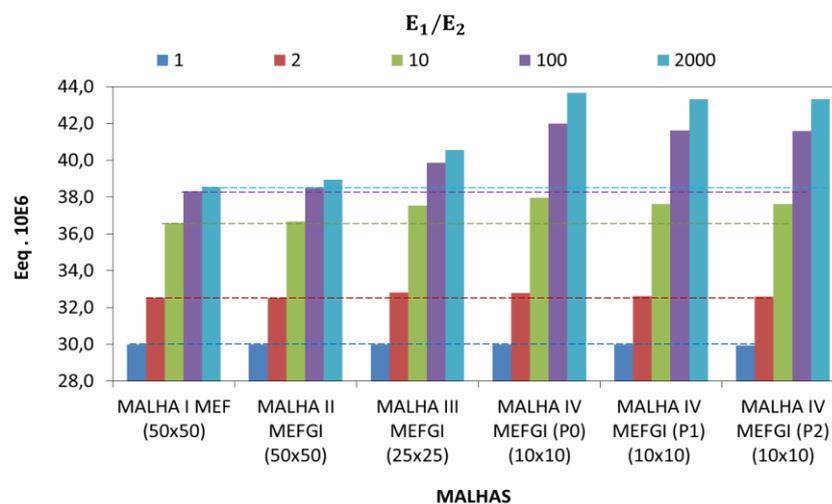


Figura 4.19 – Valores de E_{eq} para diferentes malhas e tipos de simulações com diferentes relações E_1/E_2 .

Do gráfico da Figura 4.19, analisa-se uma significativa proximidade dos valores de E_{eq} entre a malha I simulada pelo MEF e a malha II, simulada pelo MEFGI, com a mesma quantidade de elementos para todas as relações E_1/E_2 estabelecidas, garantindo boas aproximações para o MEFGI em malhas refinadas. A diferença E_{eq} para a malha I aumenta à medida que se reduz o número de elementos e se aumenta o valor da relação E_1/E_2 entre a matriz e as inclusões, como nas malhas III e IV. No entanto, apesar do aumento da diferença, esses resultados são satisfatórios, pois se utilizou uma quantidade menor de elementos e comparou-se com uma malha bem mais refinada. Certamente, os valores de E_{eq} , para essas simulações de MEFGI, possuem valores da mesma ordem se for utilizada a mesma quantidade de elementos simulados pelo MEF. O MEFGI pode ser melhor utilizado com um refinamento da malha, porém somente se estabelece o tamanho dessa malha apenas uma vez, tendo como vantagem a possibilidade dos materiais mudarem de forma e não precisar gerar uma nova malha para contorná-los.

No gráfico da Figura 4.20, são apresentados os valores para o E_{eq} na malha II, simulada com 2500 elementos quadrilaterais para relações entre E_1/E_2 iguais a 0,0001; 0,01; 1; 100 e 10000, com $E_2 = E_R$ para a relação entre volumes $V_1/V_2 = 0,16$. Também se utilizou a relação entre materiais $V_1/V_2 = 0,40$, $V_1/V_2 = 0,70$ para a malha II de 50×50 e $V_1/V_2 = 0,00$, em que apenas a rigidez da matriz é considerada.

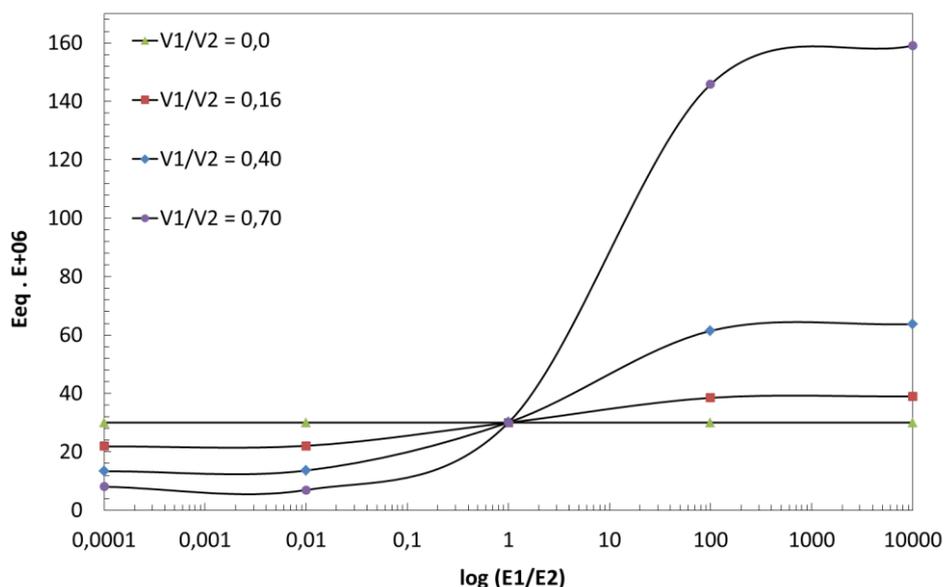


Figura 4.20 – Valor do E_{eq} para a malha II para relações de E_1/E_2 iguais a 0,0001; 0,01; 1; 100 e 10000 para três proporções entre volumes.

Do gráfico da Figura 4.20, pode-se analisar o valor constante para o E_{eq} para a relação $V_1/V_2 = 0,0$, isso é devido a não presença das inclusões, obtendo apenas o valor do módulo de elasticidade da matriz. Para a curva $V_1/V_2 = 0,16$, se obtêm que para $E_1/E_2 = 1$, o valor de E_{eq} se iguala ao valor de E_2 , pois E_1 e E_2 possuem valores iguais nessa relação e valores também iguais ao E_R . À medida que E_1/E_2 é maior que 1, os valores de E_{eq} aumentam, pois os valores dos deslocamentos decrescem devido a rigidez das inclusões serem maior que a da matriz; ao passo que a medida que a relação E_1/E_2 é menor que 1, os valores de E_{eq} decrescem, pois os valores dos deslocamentos aumentam por causa do valor da rigidez nas inclusões serem menores que o da matriz.

Os resultados para as relações não alteraram muito com relação ao de referência, porque se deve ao fato da relação entre o volume das inclusões com relação ao volume total da chapa ser pequeno (da ordem de 16 %), fazendo com que se prevaleça o valor dos módulos próximos ao da matriz. Para as curvas $V_1/V_2 = 0,40$ e $V_1/V_2 = 0,70$, se obteve as mesmas conclusões que as anteriores, a única diferença é no fato da relação $E_1/E_2 = 10000$ aumentar o valor do E_{eq} com relação à curva anterior, isso é devido ao volume das inclusões aumentarem com relação ao da matriz (da ordem de 40% e 70%, respectivamente). Esse exemplo serve para ilustrar a eficiência em se utilizar o MEFGI para problemas de materiais compósitos, sem se preocupar muito com a geração da malha de elementos para a discretização do problema.

Da Figura 4.20, pode-se extrair valores de E_{eq} para qualquer relação entre os intervalos estudados. Isto é útil para projeto de materiais compósitos em que se especifica uma rigidez e por meio do gráfico da Figura 4.20, determinam-se as relações entre módulos de elasticidade E_1/E_2 e volumes V_1/V_2 para a matriz e as inclusões. Na Figura 4.21 se visualiza os mesmos parâmetros da Figura 4.20, porém numa abordagem tridimensional.

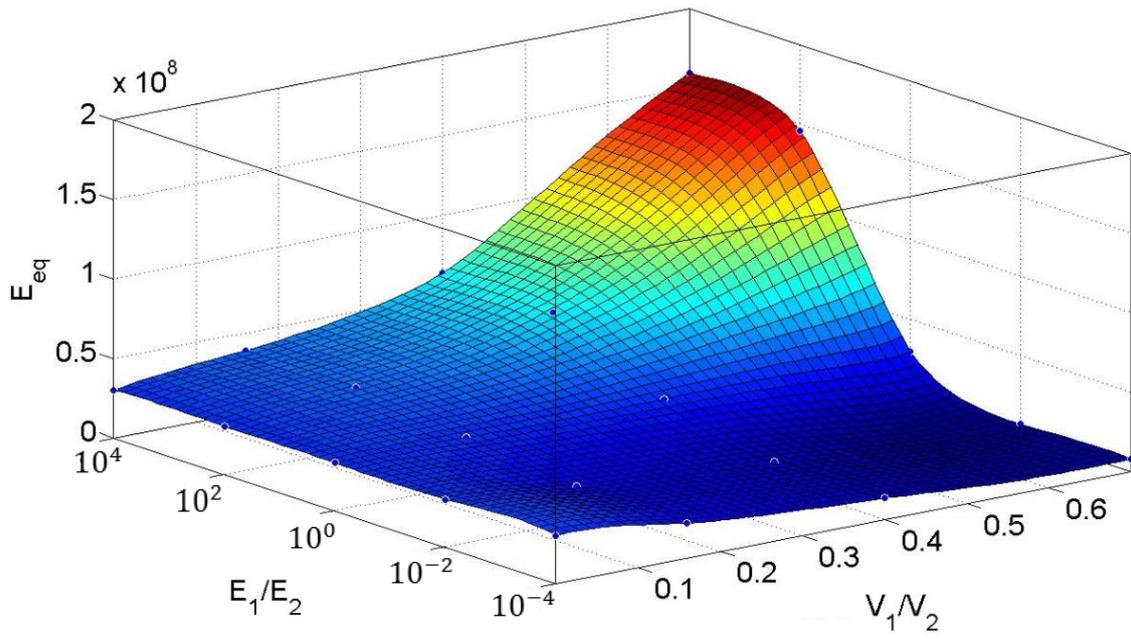


Figura 4.21 – Valor do E_{eq} para a malha II numa abordagem tridimensional.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1. CONCLUSÕES

Essa dissertação abordou a formulação e implementação de métodos não convencionais do MEF, especificamente, o MEFG, utilizando funções de enriquecimento polinomiais, singulares e de interface para aplicações em estruturas bidimensionais de materiais homogêneos e compósitos. Foram realizadas simulações numéricas de cinco modelos para validar as formulações e implementações propostas. Os métodos apresentaram um sucesso na implementação de funções de enriquecimentos polinomiais, singulares e de interface.

As funções de enriquecimento polinomiais obtiveram convergências satisfatórias, tanto através do refinamento da malha quanto pela ordem polinomial de enriquecimento, para elementos triangulares e quadrilaterais, ampliando o espaço de aproximação sem a necessidade de muitos elementos. Como esperado, os enriquecimentos polinomiais adquiriram melhores convergências em soluções “suaves”, ou seja, em soluções contínuas, e derivadas contínuas, em todo o domínio.

Em problemas de mecânica da fratura, a utilização de funções de enriquecimento singulares para o MEFG capturou de forma eficaz os elevados gradientes de tensão adicionando funções de enriquecimento apenas na vizinhança dos pontos singulares. A aproximação da solução singular foi amplamente melhorada com um reduzido custo computacional.

Para a metodologia para materiais compósitos, a estratégia de enriquecimento proposta, denominada MEFGI, demonstrou grande potencialidade para a resolução de problemas com gradiente descontínuo originado pela diferença de rigidez entre os diferentes materiais sem usar uma malha de conformidade nas bordas da interface. A principal característica do método proposto é que os graus de liberdade do enriquecimento são atribuídos somente nos nós fictícios da interface. Esta variação na formulação elimina os problemas encontrados em algumas funções de enriquecimento no MEFG convencional para a atribuição de condições de contorno essenciais dos nós enriquecidos. Além disso, as funções de enriquecimento são simplesmente construídas

através da combinação linear de funções de forma Lagrangeanas nos elementos de integração, o que reduz o custo e facilita a aplicação deste método.

O método foi validado para materiais compósitos laminados, chapa constituída por dois materiais e chapa constituída por matriz e inclusões.

A convergência do MEFGI pela ordem polinomial de enriquecimento não é satisfatória, no entanto, a convergência com relação ao refinamento da malha é semelhante a do MEF. A vantagem do MEFGI está no alcance de bons resultados para a aproximação com a utilização de elementos que abrigam a interface, ou seja, a mesma corta alguns elementos sem precisar se preocupar com a geração da malha, como no MEF.

Para problemas compósitos, o MEFGI captura de forma eficiente os valores dos módulos de elasticidade equivalentes, desde que a malha seja composta por muitos elementos (convergência h). Os resultados mostraram a utilidade destas análises no desenvolvimento de materiais compósitos através da otimização da rigidez equivalente do compósito, por meio da otimização simultânea da rigidez e volume das inclusões.

Finalizando, conclui-se que a utilização do MEFG traz uma grande capacidade na qualidade da aproximação final com a utilização racional de funções de enriquecimento melhorando a eficiência computacional. A aplicação das funções de interface propostas flexibilizam significativamente a modelagem de problemas com campos de gradiente descontínuos, em que se geram malhas sem a preocupação de estar em conformidade com cada material.

5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros e, especialmente, para desenvolvimentos de novas simulações pelos métodos MEFG e MEFGI, propõe-se:

- Implementar elementos tridimensionais para o MEFG e MEFGI;
- Adicionar enriquecimentos de descontinuidade forte (no campo dos deslocamentos) para modelar presença de trincas;
- Aplicar novas funções de enriquecimento que caracterizem problemas locais específicos;
- Aplicar uma estratégia global local aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface;

- Adicionar outros modelos constitutivos para análises tais como viscoelástico, plásticos;e
- Processamento de imagem integrado com análise do MEFGL.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, P.D. *Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 239p. 2012.

Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 945 – 981, 1994.

Babuška, I.; Melenk, J. M.. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727-758, 1997.

Babuška, I.; Strouboulis, T.; Copps, K.; Gangara, SK.; Upadhyay, CS. A-posteriori error estimation for finite element and generalized finite element method. Disponível em http://yoyodyne.tamu.edu/research/error/gfem_france.pdf. Reportado na internet em 1997.

Barros, F. B. *Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas*. Tese de Doutorado Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.

Bathe, K. J. *Finite element procedures*. [S.I.]: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-301458-4.

Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601-620. 1999.

Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional Structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2, p. 215-232, 2000.

Duarte, C. A.; Kim, D .J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global- local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, p. 487-504, 2008.

Duarte, C. A.; Liszka, T. J.; Tworzydło, W. W. Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, n. 11, p. 2409–2440, 2006.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin, May 1995.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, p. 237-262, 1996.

Evangelista Jr, F.; Roesler, J. R.; Duarte, C.A. Prediction of Potential Cracking Failure Modes in Three-Dimensional Airfield Rigid Pavements with Existing Cracks and Flaws. *Transportation Research Record*, v.2266, p. 11-19, 2012.

- Evangelista Jr, F.; Roesler, J. R.; Duarte, C.A. Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method. *Internationsl Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 1991-2002, 2013.
- Garzon,J.; Kim, D. J.; Duarte, C.A.; Buttlar, W. Two-scale Three-Dimensional Analysis of Reflective Crack in Airfield Paviments. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 10, n.6, 2013.
- Gupta, V.; Kim, D. J.; Duarte, C. A. Analysis of improvements of Global-Local enrichments for the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 245-246, p. 47-62, 2012.
- Kim, D. J.; Pereira, J.P.; Duarte, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, pp. 335-365. 2010.
- Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Sobh, N, A. Parallel simulations of three – dimensional cracks using the generalized finite element method. *Computational Mechanics*, v.47, p. 265-282, 2011.
- Melenk, J. M.; Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, p. 289-314, 1996.
- Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150. 1999.
- Moës, N.; Cloiree, M.; Cartraud, P.; Remacle, J. F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v. 192, pp. 3163-3177, 2003.
- Oden, J. T.; Duarte, C.A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-basedhp finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 153, pp. 117-126, 1998.
- Pereira, J. P. A. *Generalized finite element methods for three-dimensional crack growth simulations*, 2010. Phd thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2010, Urbana, Illinois.
- Pereira, J. P.; Duarte, C.A.; Guoy, D; Jiao, X. *hp* - Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, pp. 661-633, 2009.
- Pereira, J. P.; Duarte, C.A.; Jiao, X.; Guoy, D. Generalized finite elment method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems. *Computational Mechanics*, v. 44, pp. 73-92, 2009.
- Plews, J.; Duarte, C.A.; Eason, T. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 91, n.4, pp. 426-449, 2012.

Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method* 3rd ed: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering. Inc., 2006, ISBN 0-07-246685-5.

Simone, A.; Duarte, C. A.; Giessen, E. V. A Generalized Finite Element Method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 67, n. 8, p. 1122-1145, 2006.

Soghrati, S.; Aragón, A. M.; Duarte, C.A.; Geubelle, P. H.. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields. *International Journal for numerical methods in engineering*, 89, pp. 991-1008, 2012.

Soghrati, S.; Geubelle, P. H. An 3D interface-enriched generalized finite element method for weakly discontinuous problems with complex internal geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, n. 217-220 , pp. 46-57. 2012.

Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1–3, p. 43-69, 2000.

Torres, I. F. R. *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese de Doutorado Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2003.

Woo, K.; Whitcomb, J. D. Macro finite elements using subdomain integration. In: *International Journay for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol 9, n. 12, p. 937-949, 1993.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z. *Finite Element Methods – Its Basic and Fundamentals* 6th ed. Elsevier, Inc., 2005. ISBN 0-7506-6320-0.