

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS EM  
CASCAIS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS**

**FABIANO CAMPOS MACEDO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS**  
**EM CASCAS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS**

**FABIANO CAMPOS MACEDO**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. Ing.**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-005A/14**

**BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2014**

ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS  
EM CASCAS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS

FABIANO CAMPOS MACEDO

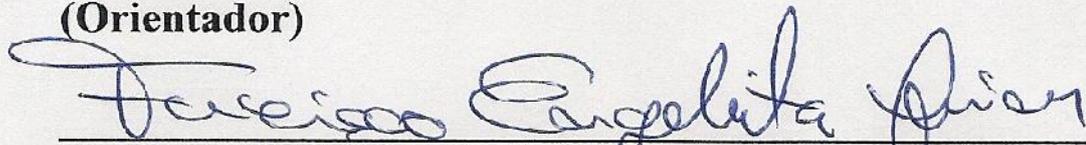
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



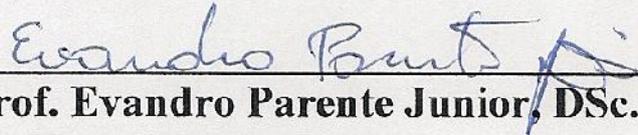
---

Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)  
(Orientador)



---

Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (UnB)  
(Examinador Interno)



---

Prof. Evandro Parente Junior, DSc. (UFC)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 25 DE ABRIL DE 2014

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

MACEDO, FABIANO CAMPOS, Estudo analítico e numérico dos esforços térmicos em cascas cilíndricas axissimétricas. [Distrito Federal] 2014. xix, 131p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1.Cascas cilíndricas	2.Analítico
3.Esforços Térmicos	4. Numérico
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

MACEDO, F. C. (2014). Estudo analítico e numérico dos esforços térmicos em cascas cilíndricas axissimétricas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-005A/14 , Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 131p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Fabiano Campos Macedo

TÍTULO: Estudo analítico e numérico dos esforços térmicos em cascas cilíndricas axissimétricas.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Fabiano Campos Macedo  
EQN 410/411 Bloco A apto. 66, Asa Norte.  
CEP: 70865-405 – Brasília – DF – Brasil.  
fabianocampos87@hotmail.com

## DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Domingas Campos e Olegário Macedo por todo amor e apoio,  
aos meus irmãos Fernando, Fernanda e Fabiana pelo apoio e incentivo.*

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Lineu José pedroso pela confiança, paciência, apoio, contribuição e orientação para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília pelos conhecimentos repassados.

Aos companheiros do grupo de pesquisa Dinâmica e Fluido-estrutura da UnB, pelo apoio, companheirismo e paciência.

Aos colegas do PECC pelo companheirismo, amizade, solidariedade. Em especial gostaria de agradecer à Iure Lustosa, Eduardo, Gelson, Wanderley, Ramon, Elaine, Agno, Sebastião, Alejandro Ospina, Mario, Ronaldo, Yulena, Neander, Nailde, Vitor, Suzane, David Chalco, Carlos Alonso, Maria Paz, Cleiton, Marcos, Carlos, Eva Veloso, Wilber e Almério que de alguma forma contribuíram.

Agradeço ao Evandro Carvalho, Gilvan, Américo, Júnior Rego e Renata, Marizete, Virlane, Zé, Maria Raimunda pela amizade e apoio.

Ao CNPq pelo apoio financeiro e pela oportunidade de aprofundar meus conhecimentos.

Aos meus pais, Domingas e Olegário, pela força, apoio, amor e pela educação. Aos meus irmãos Fernanda, Fernando e Fabiana pela confiança e pela força e a toda minha família pelo apoio.

A Deus pela oportunidade e pelas coisas boas que ele me deu.

## **RESUMO**

### **ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS EM CASCAS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS**

**Autor: Fabiano Campos Macedo**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Abril de 2014.**

Este trabalho tem como objetivo estudar as solicitações térmicas axiais e circunferenciais provocadas por gradientes de temperaturas em cascas cilíndricas finas e longas. Essas estruturas quando submetidas a gradientes de temperatura, e possuindo restrições, geram tensões térmicas que devem ser consideradas na análise estrutural. A metodologia foi aplicada em tanques cilíndricos de concreto, onde se observou que tanto para o caso de produtos armazenados a quente quanto para temperatura ambiente as tensões térmicas são elevadas, podendo causar danos, tais como fissuras axiais e circunferenciais. Esta análise é realizada com comparações entre as equações analíticas desenvolvidas para condições de contorno apoiada e engastada com a solução numérica através do programa de Elementos Finitos ANSYS. No modelo numérico são realizadas análises mais complexas com a inclusão de fundo e tampa no cilindro que mostram uma significativa redução nos esforços calculados analiticamente nas bordas. Verificou-se uma precisão considerável nos resultados.

## **ABSTRACT**

### **ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF THERMAL STRESS IN AXISYMMETRIC CYLINDRICAL SHELLS**

**Author: Fabiano Campos Macedo**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Post-Graduate Program on Structures and Civil Construction**

**Brasília, April of 2014.**

The object in this paper was study the axial and circumferential thermal stresses caused by temperature gradients in thin and long cylindrical shells. When these structures with some restrictions are subjected to temperature gradients are generated thermal stresses that must be considered in the structural analysis. The methodology was applied on cylindrical concrete tanks, where it was observed that the hot stored products and environment temperature can generate high thermal stresses that may cause damage, such as axial and circumferential cracks. This analysis was done with comparison between development analytically equations for supported and clamped boundary conditions and numerical solutions by finite element program ANSYS. The numerical model was done with more complex analyzes which include bottom and top plates in the cylinder that showed a great efforts reduction in comparison with they calculated analytically in the extremes. A considerable accuracy in the results was observed.

# SUMÁRIO

1.0 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 GENERALIDADES .....	1
1.2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA .....	4
1.3 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA .....	6
1.4 OBJETIVOS .....	7
1.4.1 Objetivos gerais .....	7
1.4.2 Objetivos específicos .....	7
1.5 METODOLOGIA .....	8
1.6 LIMITAÇÕES E ABRANGÊNCIA .....	10
1.7 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	10
2.0 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	12
2.1 INTRODUÇÃO .....	12
2.2 PRINCIPAIS ESTUDOS UTILIZADOS NESTA PESQUISA .....	12
2.2.1 Efeitos térmicos em silos e tanques de concreto .....	12
2.2.2 Tubulações industriais e dutos .....	17
2.2.3 Trabalho experimental das tensões térmicas .....	19
2.2.4 Cascas cilíndricas, efeito térmico em concreto massa e fachadas .....	21
3.0 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO .....	22
3.1 ESTUDO TÉRMICO .....	22
3.1.1 Introdução .....	22
3.1.2 Tipos de transferência de calor .....	22
3.1.3 Equações do problema .....	24
3.1.4 Variação da temperatura através de uma parede .....	27
3.2 TEORIA DE CASCAS .....	29
3.2.1 Introdução – Hipóteses Gerais .....	29
3.2.2 Teoria flexional .....	30
3.2.3 Formulação térmica pela teoria de cascas finas .....	36
3.2.4 Fórmulas para cada esforço solicitante .....	41
3.2.5 Esforços acoplados devido ao gradiente térmico .....	43

4.0	MODELIZAÇÃO NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS	.46
4.1	RESULTADO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES ESTRUTURAIS	49
4.2	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS	51
4.3	RESULTADOS DE SAÍDA NO ELEMENTO DE CASCA (ANSYS)	51
5.0	RESULTADOS	56
5.1	CASO 01 – CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e=0^{\circ}\text{C}$ E $T_i=180^{\circ}\text{C}$	59
5.2	CASO 02 – VARIAÇÃO DO TAMANHO DO LADO DO ELEMENTO FINITO QUADRILATERAL	63
5.3	CASO 03 – VARIAÇÃO DA RELAÇÃO h/R	69
5.4	CASO 04 – VARIAÇÃO DA TEMPERATURA ( $T_i/T_e$ )	75
5.5	CASO 05 – TANQUE CILÍNDRICO (A-L) COM $T_e=10^{\circ}\text{C}$ E $T_i=80^{\circ}\text{C}$	80
5.6	CASO 06 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e=30^{\circ}\text{C}$ E $T_i=0^{\circ}\text{C}$	84
5.7	CASO 07- TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e=10^{\circ}\text{C}$ E $T_i=80^{\circ}\text{C}$	89
5.8	CASO 08 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM FUNDO ( $T_e=10^{\circ}\text{C}$ E $T_i=70^{\circ}\text{C}$ )	94
5.9	CASO 09 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM FUNDO E TAMPA ( $T_e=10^{\circ}\text{C}$ E $T_i=70^{\circ}\text{C}$ )	100
6.0	CONCLUSÕES, SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	104
6.1	SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO, CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES	104
6.2	PERSPECTIVAS FUTURAS	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
	ANEXO A – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS	113
	ANEXO B – FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	116
	ANEXO C – OBTENÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS	127
	ANEXO D – OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS	130

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Metodologia de estudo.....	9
Tabela 3.1 – Tabela de equações de temperatura em coordenadas cilíndricas.....	27
Tabela 3.2 – Esforços resultantes de pressão térmica na parede do tanque .....	41
Tabela 3.3 – Tabela de esforços resultantes devido ao esforço circunferencial na borda superior do cilindro.....	42
Tabela 3.4 – Tabela dos esforços resultantes da aplicação de momento na borda superior	42
Tabela 3.5 – Esforços em estrutura cilíndrica engastada na base e livre no topo .....	44
Tabela 3.6 – Esforços em estrutura cilíndrica apoiada na base e livre no topo.....	44
Tabela 3.7 – Esforços em estrutura cilíndrica livre na base e no topo .....	44
Tabela 5.1 - Casos analisados neste trabalho e suas particularidades .....	56
Tabela 5.2 – Dados da análise (Caso 01).....	60
Tabela 5.3 – Dados da análise (Caso 02).....	64
Tabela 5.4 – Tamanhos de elementos da análise numérica .....	65
Tabela 5.5 – Dados da análise (Caso 03).....	70
Tabela 5.6 – Casos de análise da variação de temperatura.....	76
Tabela 5.7 – Dados da análise (Caso 05).....	81
Tabela 5.8 – Dados da análise (Caso 06).....	85
Tabela 5.9 – Dados da análise (Caso 07).....	90
Tabela 5.10 – Dados da análise (Caso 08).....	95

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Tanque de combustível ( <a href="http://www.petronor.com.br/servicos/001.jpg">http://www.petronor.com.br/servicos/001.jpg</a> ) .....	1
Figura 1.2 – Incêndio em um reservatório de etanol em Ourinhos-SP ( <a href="http://noticias.terra.com.br">http://noticias.terra.com.br</a> ) .....	2
Figura 1.3 – Tanque de armazenamento de LNG (Fonte: Arquivo Böhler Welding Group)	3
Figura 1.4 – Torre de resfriamento nuclear ( <a href="http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/nuclear/nuclear.htm">http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/nuclear/nuclear.htm</a> ) .....	3
Figura 1.5 – Vazamento na porção inferior do tanque junto aos bocais (Carmona, 2005) ...	4
Figura 1.6 – Detalhe das fissuras em praticamente toda a altura do tanque.(a) Fissuras verticais e vazamentos.(b) Detalhe das fissuras (Carmona & Pinto Jr., 2005).....	5
Figura 1.7- Quadro de fissuração em um silo de clínquer. (a) Fissuras circunferenciais. (b) fissuras axiais. (Carmona & Pinto Jr., 2005).....	5
Figura 1.8 – Causas de incêndio em tanques de armazenamento de produtos inflamáveis (Goddard, 2011) .....	6
Figura 2.1 – Modelo de silo de concreto armado (Alves, 2001) .....	14
Figura 2.2 – Geometria do tanque (Carmona, 2005).....	15
Figura 2.3 – Vista do reservatório pré-fabricado com painéis nervurados, pós-tensionados com cordões auto-embainhados exteriores, e pormenor do painel nervurado (Pereira,2011) .....	16
Figura 2.4 – Figura esquemática da direção do sol induzindo a carga térmica (a) uniforme e (b) gradiente. (Karbashi, 2013).....	17
Figura 2.5 – Geometria do elemento de tubo (Fonseca, Oliveira & Melo, 2004).....	18
Figura 2.6 – Modelo de base rígida para flambagem vertical (Grangeiro, A. E. B.; Parente Junior, E., 2009). .....	19
Figura 2.7 – Corpo de prova e evolução das tensões elásticas (a) e elastoplásticas (b).....	20
Figura 2.8 – Representação da fissuração e fragmentação nos planos axiais e radiais do corpo de prova (Morais et al., 2010) .....	20
Figura 3.1 – Representação ilustrativa para dedução da equação da condução de calor (Adaptada Rao ,2004).....	24
Figura 3.2 – Elemento em coordenadas cilíndricas (Modificada RAO, 2004) .....	26
Figura 3.3 – Variação da temperatura em cascas espessas (modificada Carmona, 2005) ..	28

Figura 3.4 – Distribuição das tensões circunferenciais para diferentes relações $r_0e$ (Carmona, 2005).....	28
Figura 3.5 – Equilíbrio dos esforços em um elemento infinitesimal de casca ( modificada - Lustosa, 2011) .....	31
Figura 3.6 – Esforço circunferencial e momento circunferencial na borda.....	33
Figura 3.7 – Detalhe do tanque de concreto .....	37
Figura 3.8 – Carga térmica em uma parede. (a) Seção transversal de uma parede circular, (b) Sistema de coordenada, (c) Gradiente de temperatura na parede e (d) Analogia de pressão térmica em elemento infinitesimal da parede do cilindro. (Adaptada Ghali, 2000) .....	38
Figura 3.9 – Esforços sobre a parede de tanques cilíndricos.....	39
Figura 3.10 – Esforços circunferenciais e momentos fletores nas bordas.....	40
Figura 3.11 – Distribuição da temperaturas em um perfil genérico e esforços nas vinculações (Modificado Carmona, 2005) .....	43
Figura 4.1 – Elemento SHELL131 (Biblioteca ANSYS).....	47
Figura 4.2 – Elemento SHELL63 (Biblioteca ANSYS).....	47
Figura 4.3 – Elemento infinitesimal representando as tensões (ANSYS, 2009).....	50
Figura 4.4 – Ilustração do sistema cilíndrico no ANSYS.....	53
Figura 4.5 – Esquema de análise térmica e estrutural da estrutura cilíndrica .....	55
Figura 5.1 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 01) .....	60
Figura 5.2 – Malha do tanque (Caso 01- tamanho de 0,5 cm) .....	61
Figura 5.3 – Tensões térmicas axiais (Caso 01- tamanho de 0,5 cm) .....	62
Figura 5.4 – Tensões térmicas axiais (Caso 01 – tamanho de 0,2 cm).....	62
Figura 5.5 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 02) .....	64
Figura 5.6 – Esquema sequencial de análise de convergência do tamanho do elemento (Caso 02) .....	65
Figura 5.7 – Resultados da tensão circunferencial (Caso 02).....	66
Figura 5.8 – Convergência do deslocamento radial -w (Caso 02).....	67
Figura 5.9 – Convergência do deslocamento radial com a relação H/he (Caso 02).....	67
Figura 5.10 – Convergência do momento circunferencial com o tamanho do elemento (Caso 02) .....	68

Figura 5.11 – Convergência do momento circunferencial na altura de 0,25 m (Caso 02)..	69
Figura 5.12 – Convergência do momento circunferencial na altura de 5 m (Caso 02).....	69
Figura 5.13 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 03).....	70
Figura 5.14 – Tensão circunferencial na parede do tanque com $h/R=0,085$ (Caso 03) .....	71
Figura 5.15 – Tensão circunferencial na parede do tanque com $h/R=0,213$ (Caso 03) .....	71
Figura 5.16 – Tensão circunferencial na parede do tanque com $h/R=0,426$ (Caso 03) .....	72
Figura 5.17 – Convergência na base do tanque ( $z/H=0$ ) .....	72
Figura 5.18 – Convergência na altura de 2 metros do tanque ( $z/H= 0,18$ ).....	73
Figura 5.19 – Convergência na altura de 5 metros do tanque ( $z/H = 0,46$ ).....	73
Figura 5.20 – Convergência na altura de 10 metros do tanque ( $z/H = 0,92$ ).....	74
Figura 5.21 – Variação do erro com a variação do parâmetro $H^2/Rh$ tendo como base as tensões circunferenciais ( $\sigma_\phi$ ). Em a, b, c e d para as alturas (H) de 0 m, 2 m, 5 m e 10 m, respectivamente. ....	75
Figura 5.22 – Detalhe da estrutura com condições de contorno e temperatura (Caso 04) ..	76
Figura 5.23 – Momento circunferencial em cada temperatura (caso 04) .....	77
Figura 5.24 – Momento axial em cada temperatura (caso 04) .....	77
Figura 5.25 – Esforço circunferencial em cada temperatura (caso 04) .....	78
Figura 5.26 – Variação do momento circunferencial com a ralação de temperatura interna e externa (Caso 04 – $z/H = 0,225$ ).....	79
Figura 5.27 – Variação do momento axial com a temperatura (caso 04– $z/H = 0,225$ ).....	79
Figura 5.28 – Variação da relação $N\phi/N\phi_0$ do esforço circunferencial com a temperatura (caso 04 – $z/H = 0,225$ ) .....	80
Figura 5.29 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 05).....	81
Figura 5.30 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05) .....	82
Figura 5.31 – Momento axial ao longo da altura do tanque (Caso 05) .....	82
Figura 5.32 – Momento circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05) .....	83
Figura 5.33 – Tensão circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05).....	83
Figura 5.34 – Tensão axial ao longo da altura do tanque (Caso 05) .....	84
Figura 5.35 – Detalhe da estrutura com condições de contorno e temperatura (Caso 06) ..	85
Figura 5.36 – Momento axial (a) e circunferencial (b) na altura do tanque (Caso 06) .....	86
Figura 5.37 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 06) .....	87

Figura 5.38 – Tensão axial no tanque ao longo da altura do tanque (Caso 06).....	88
Figura 5.39 – Tensão circunferencial no tanque (Caso 06).....	89
Figura 5.40 – Detalhe do tanque de concreto (Caso 07) .....	90
Figura 5.41 – Representação da temperatura no tanque (Caso 07) .....	92
Figura 5.42 – Representação da malha na estrutura (Caso 07) .....	92
Figura 5.43 – Momento circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07) .....	93
Figura 5.44 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07) .....	93
Figura 5.45 – Tensão circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07) .....	94
Figura 5.46 – Detalhe da estrutura com placa de fundo e temperatura (Caso 08).....	95
Figura 5.47 – Malha de estrutura evidenciando a presença de fundo (Caso 08).....	96
Figura 5.48 – Resultado numérico do momento circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08).....	97
Figura 5.49 – Diferença em porcentagem do resultado numérico do momento circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08).....	97
Figura 5.50 – Resultado numérico do momento axial (meridional) da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08).....	98
Figura 5.51 – Diferença em porcentagem do resultado do momento axial (meridional) da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08) .....	98
Figura 5.52 – Resultado numérico do esforço circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08).....	99
Figura 5.53 – Resultado numérico da tensão circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08).....	99
Figura 5.54 – Detalhe da estrutura com placa de fundo e tampa (Caso 09).....	100
Figura 5.55 – Momento circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09).....	101
Figura 5.56 – Esforço circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09) .....	102
Figura 5.57 – Tensão circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09) .....	102
Figura A.1 - Geometria em coordenada polar .....	113
Figura B.2 – Idealização de elemento de casca cônica axissimétrica de revolução. (a) Seção vertical do digestor em forma de ovo para tratamento de água de esgoto. (b) Idealização de elementos finitos. (c) elemento de casca típica. (Ghali, 2000).....	117

Figura B.3 – Elemento finito típico. (a) eixos globais  $x$  e  $r$ ; graus de liberdade e ordem de numeração de coordenadas em um nó típico. (b) coordenadas Locais; convenção sinal positivo para  $u$ ,  $w$ ,  $s$  e  $\alpha$ . (c) visão pictórica de uma área elementar mostrando as resultantes de tensões em convenção de sinal positivo (GHALI, 2000). ..... 119

# LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

## Letras latinas e abreviações

$A$	- Analítica
$A_x$	- Área normal à direção $z$ atravessada pelo fluxo de calor
$ACI$	- American Concrete Institute
$[B]$	- Matriz de deformação
$[C]$	- Matriz de amortecimento estrutural do elemento
$[C^t]$	- Matriz de calor específico do elemento
$[C^{tu}]$	- Matriz de amortecimento termoelástica
$C_1, C_2, C_3, C_4$	- Constantes de integração
$[de]$	- Matriz de elasticidade
$ds$	- Diferencial da distância entre dois pontos
$d\xi$	- Diferencial da distancia em coordenadas naturais
$d_z$	- Diferencial do comprimento do arco do meridiano
$D$	- Rigidez à flexão
$D_3^*, D_6^*$	- Rotações ou momentos radiais das coordenadas $3^*$ e $6^*$
$\{\overline{D}\}$	- Deslocamentos nas direções globais
$\{D^*\}$	- Deslocamentos nas direções locais
$E$	- Módulo de elasticidade
$\dot{E}_{entra}$ e $\dot{E}_{sai}$	- Taxa de energia que entra e que sai do volume
$\dot{E}_{gerada}$	- Taxa de energia gerada no volume.
$\dot{E}_{Armazenada}$	- Taxa de energia armazenada no volume
$\{F\}$	- Soma dos vetores de forças nodais do elemento
$\{\overline{F}\}$	- Vetor de forças em coordenadas globais do elemento
$\{F^*\}$	- Forças em coordenadas locais do elemento
$\{F_n\}$	- Força mecânica
$\{Fr^*\}$	- Forças nodais de restrição

$\{F_{ri}^*\}$	- Força nodal de restrição e um ponto
$\{F_{th}\}$	- Força térmica
$G_{xy}$	- Módulo de cisalhamento
$h$	- Coeficientes de transferência de calor, espessura da casca
$he$	- Tamanho do lado do elemento SHELL63 (ou altura do elemento)
$H$	- Altura do cilindro
$k_x, k_y, k_z, k$	- Condutividade térmica do meio nas respectivas direções
$[K]$	- Matriz de rigidez do elemento
$[K^t]$	- Matriz de condutividade térmica do elemento
$[K^{ut}]$	- Matriz de rigidez termoelástica do elemento
$L$	- Comprimento da linha meridional 1-2
$[L1 \ L2 \ L3 \ L4]$	- Vetor de polinômios de terceiro grau que descrevem a deflexão $w$ da linha do meridiano
$[M]$	- Matriz de massa do elemento
$M_z$	- Momento fletor ao longo do meridiano (axial)
$M_\phi$	- Momento fletor circunferencial
$M_{z\phi}$	- Momento torcional ao longo do meridiano
$M_{\phi z}$	- Momento torcional ao longo do paralelo
$N$	- Análise numérica, função de forma
$\{N\}$	- Vetor de funções de forma
$N_z$	- Força normal (axial) ao longo do meridiano
$N_\phi$	- Força normal circunferencial na borda do tanque
$N_{\phi z}$	- Força de cisalhamento ao longo do meridiano
$N_{z\phi}$	- Força de cisalhamento ao longo do paralelo
$p$	- Pressão constante na parede do cilindro
$q_x, q_y, q_z$	- Componentes da taxa de transferência de calor
$q''$	- Taxa de energia térmica por unidade de área emitida por uma superfície
$Q$	- Intensidade de uma carga uniforme sobre uma linha nodal
$\{Q\}$	- Soma das cargas de geração de calor dos elementos e vetor de fluxo de calor de convecção de superfície;

$Q_z$	- Força cortante normal à direção $z$
$R$	- Raio médio do cilindro
$REI$	- Resultado estrutural 1
$RETI$	- Resultado estrutural com tamanho de elemento 1
$[S^*]$	- Matriz de rigidez em coordenadas locais
$[\bar{S}]$	- Matriz de rigidez em coordenada global
$T_s, T_f$	- Temperatura superficial e temperatura do fluido em movimento respectivamente
$T_0$	- Temperatura de referência absoluta
$T_i$	- Temperatura interna
$T_e$	- Temperatura externa
$\{T\}$	- Vetor de temperatura
$[T]$	- Matriz de transformação de coordenada local para global
$\{u\}$	- Vetor de deslocamento
$w$	- Deslocamento circunferencial do cilindro
$Y$	- Força normal aplicada na área do elemento

## Letras gregas

$\alpha$	- Coeficiente de dilatação térmica
$\{\alpha\}$	- Vetor de coeficientes de expansão térmica.
$\{\beta\}$	- Vetor de coeficientes termoelásticos
$c$	- Calor específico
$\{\delta\}$	- Vetor de deslocamento
$\partial$	- Operador diferencial
$\varepsilon$	-Emissividade da superfície
$\varepsilon_z, \varepsilon_\phi$	- Deformações axiais e circunferenciais
$\{\varepsilon\}$	- Vetor de deformação
$\xi$	- Tamanho em coordenada natural
$\rho$	- Densidade
$\{\sigma\}$	- Vetores de tensão
$\sigma$	-Constante de Stefan – Boltzman
$\{\sigma_r\}$	- Tensões resultantes quando o deslocamento nodal $\{D^*\}=\{0\}$
$\nu$	- Coeficiente de Poisson.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 - GENERALIDADES

No mundo há um crescimento da produção e utilização de petróleo, gás, grãos e outros materiais que necessitam de armazenamento em reservatórios. Estruturas com curvaturas, como é o caso dos reservatórios cilíndricos, proporcionam uma melhor distribuição dos esforços gerados pelo produto do que outras, conforme a Figura 1.1.



Figura 1.1 – Tanque de combustível (<http://www.petronor.com.br/servicos/001.jpg>)

Na construção de reservatórios geralmente são empregados estruturas esbeltas, porém com uma grande capacidade resistente dependendo da forma adotada. Cada reservatório tem suas características e funções para o fim o qual se destina, assim como a maneira que é projetado e o material empregado na sua construção.

A finalidade dessas estruturas vai desde um simples armazenamento de água a armazenamento de produtos com propriedades agressivas e/ou sujeitas a temperaturas severas. Vale lembrar que essas estruturas podem estar com interações complexas de fatores climáticos (Larsson & Thelandersson, 2012), tais como: chuva, vento, expostas aos raios solares e até mesmo a cargas excepcionais como o incêndio, como visualizado na Figura 1.2.



Figura 1.2 – Incêndio em um reservatório de etanol em Ourinhos-SP  
(<http://noticias.terra.com.br>)

O efeito térmico dependendo da sua intensidade pode se tornar um grande risco para todos os tipos de estruturas. No caso de um incêndio se torna uma carga excepcional de grande poder de destruição, por outro lado, ao se considerar armazenamento de materiais a altas e baixas temperaturas, pode vir a interferir na integridade estrutural. Em ambos os casos, tem-se a necessidade de uma análise detalhada dos seus efeitos.

Estruturas tais como silos de armazenagem, barragens, reservatórios, adutoras, circuitos tubulares, tanques de estocagem de fluidos e outras similares, são alguns exemplos de estruturas em que há a necessidade de se verificar o efeito da temperatura para uma maior segurança. A Figura 1.3, ilustra um tanque de armazenamento de gás natural que está com temperatura interna por volta de  $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



Figura 1.3 – Tanque de armazenamento de LNG (Fonte: Arquivo Böhler Welding Group)

As estruturas em cascas são muito utilizadas na confecção de tanques de armazenamento, principalmente os cilíndricos nas indústrias de petróleo, gás natural e grãos. Além disso, elas são encontradas com outras finalidades como exposto na Figura 1.4.



Figura 1.4 – Torre de resfriamento nuclear

(<http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/nuclear/nuclear.htm>)

As estruturas submetidas a ação térmica, seja pelo produto armazenado, seja até mesmo pela variação temperatura do meio ambiente, tendem a se deformar e por consequência gerar esforços que com o passar do tempo e dependendo da intensidade podem causar problemas.

Os reservatórios cilíndricos, em alguns casos, armazenam produtos com elevadas ou baixas temperaturas que provocam tensões na estrutura devido ao gradiente térmico com o meio externo. A variação de temperatura na parede causa tensões quando o alongamento e encurtamento da estrutura estão restringidos, ou devido às ligações das paredes com o fundo e tampa do reservatório ou mesmo devido à presença de armadura (Ghali & Elliott, 1992).

## 1.2 - MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

No Brasil, a incidência de problemas em silos e tanques desperta a atenção pelo grande número de obras de recuperação e reforço. Muitas vezes as estruturas demandam procedimentos onerosos, como injeções de fissuras, reparos em armaduras corroídas e reforços de diversos tipos, ainda nos primeiros anos de sua vida útil (Carmona, 2005).

As tensões térmicas nas paredes do silo, causadas pelo produto armazenado, são algumas vezes bastante significativas, e nesses casos não devem ser ignoradas. A Figura 1.5, Figura 1.6 e Figura 1.7, exibem um problema de origem térmica.

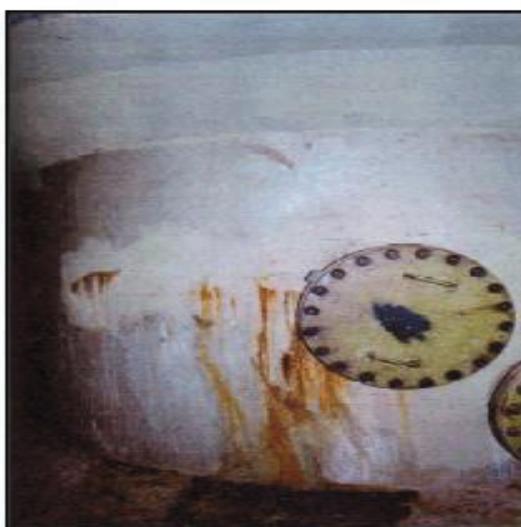


Figura 1.5 – Vazamento na porção inferior do tanque junto aos bocais (Carmona, 2005)

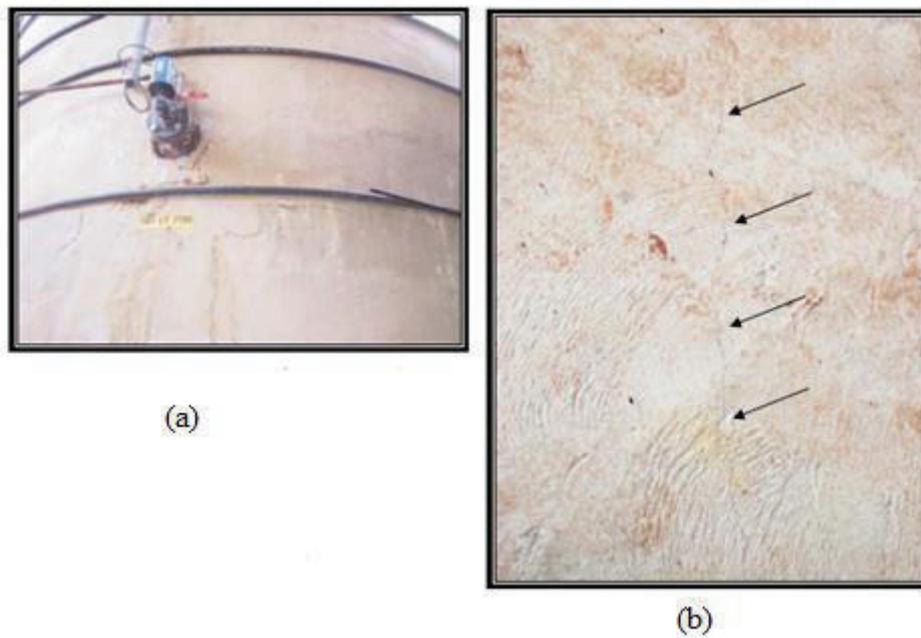


Figura 1.6 – Detalhe das fissuras em praticamente toda a altura do tanque.(a) Fissuras verticais e vazamentos.(b) Detalhe das fissuras (Carmona & Pinto Jr., 2005)



Figura 1.7- Quadro de fissuração em um silo de clínquer. (a) Fissuras circunferenciais. (b) fissuras axiais. (Carmona & Pinto Jr., 2005)

Como visto, muitas estruturas estão submetidas a temperaturas que de alguma forma com o tempo, podem causar problemas se não forem consideradas de forma adequada. No caso de tanques e silos, isso se deve à diferença de temperatura entre o material armazenado e o meio externo que gera o fluxo de calor nas paredes. A Figura 1.8 mostra as causas de problemas em reservatórios de produtos inflamáveis.

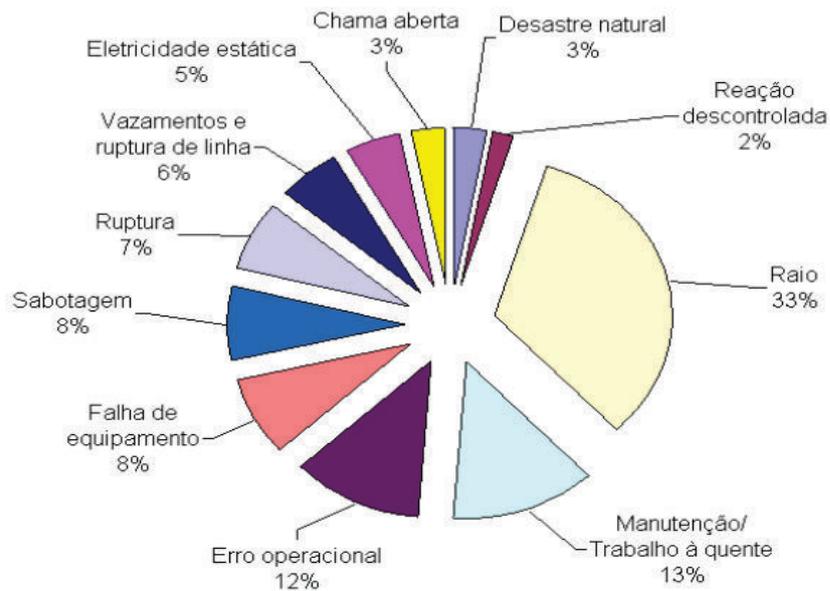


Figura 1.8 – Causas de incêndio em tanques de armazenamento de produtos inflamáveis (Goddard, 2011)

Na figura 1.8 os raios têm a maior parcela dentre as causas de incêndios em reservatórios de produtos inflamáveis. No entanto, três itens chamam atenção, sendo a manutenção e trabalho à quente (13%), vazamentos e ruptura de linha (6%), e ruptura (7%), pois se bem projetadas com a consideração de todas as cargas, inclusive a térmica, esses problemas podem ser evitados.

Sabe-se que poucos institutos de pesquisa, em se tratando de Brasil, se dedicam ao tema definido, e não é diferente na Universidade de Brasília, em que esse trabalho é pioneiro. Além disso, nota-se a falta de normas brasileiras que tratam de tanques, silos ou outras estruturas de armazenamento, que requerem estudo dessa natureza.

### 1.3 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Durante o projeto, construção e acompanhamento do comportamento de alguns reservatórios cilíndricos ao longo de sua vida útil, os projetistas e construtores têm observado uma série de problemas localizados próximo às bordas da estrutura, que depende do tipo de vínculo a que está submetida.

A análise estrutural muitas vezes deixa de prever todas as cargas que solicitam as estruturas, como a variação de temperatura. Uma vez que desconsideradas estas cargas aparentemente de pequena relevância, pelo projetista, podem ocorrer problemas em que o custo de reparação da mesma se torna difícil e oneroso.

As estruturas de armazenamento em que o efeito térmico se torna um fator importante devem ter uma análise detalhada e estudos aprofundados. Com isso, um alto gradiente de temperatura pode ocasionar o surgimento de tensões elevadas, fazendo com que surjam fissuras no concreto.

## **1.4 - OBJETIVOS**

### **1.4.1 - Objetivos gerais**

Analisar os esforços térmicos circunferenciais e axiais em cascas cilíndricas, utilizando soluções analíticas e o programa comercial de elementos finitos ANSYS. Além disso, mostrar a importância e problemas para que os projetistas não ignorem a carga térmica.

### **1.4.2 - Objetivos específicos**

- Estudar os esforços térmicos em cascas cilíndricas, comparando resultados analíticos com numéricos;
- Determinar os esforços máximos da estrutura, considerando as tensões térmicas, avaliando o comportamento de estruturas cilíndricas de armazenamentos de produtos a quente;
- Evidenciar o efeito térmico em estruturas cilíndricas de concreto;
- Análise e comparação dos resultados considerando tampa e fundo no cilindro;
- Destacar a limitação da solução analítica nas análises quando comparada com a numérica;
- Recomendações para projetos e construção do modelo numérico;
- Destacar a influência dos esforços e momentos e consequentes tensões circunferenciais em fissuras de estruturas cilíndricas;

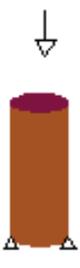
- Procura maneiras de diminuir os esforços calculados analiticamente de forma numérica.

## **1.5 - METODOLOGIA**

A abordagem consiste em um estudo preliminar da distribuição da temperatura em estruturas com condições de contorno que favoreçam a obtenção de resultados analíticos e posterior comparação numérica.

Estuda-se o comportamento das estruturas submetidas a gradientes de temperatura, tais como cascas cilíndricas para casos que possuam soluções analíticas, para comprovação da análise numérica. Em seguida, serão analisadas numericamente estruturas cilíndricas mais complexas, variando tanto as condições de contorno quanto a carga térmica aplicada. Na Tabela 1.1 está o esquema de estudo.

Tabela 1.1 – Metodologia de estudo

ANÁLISE NO ESTADO ESTACIONÁRIO					
	APOIADA NA BASE E LIVRE NO TOPO	ENGASTADA NA BASE E LIVRE NO TOPO	PLACA DE FUNDO SEM TAMPA	PLACA DE FUNDO E TAMPA	
	Análítico x Numérico	Análítico x Numérico	Numérico	Numérico	
TIPO DE ANÁLISE	ESTRUTURAL				
	TERMO-ESTRUTURAL				
	TERMICA				

O trabalho consiste em estudo analítico e numérico realizado com o programa de elementos finitos ANSYS 11.0, que será verificado com os resultados encontrados na literatura. A análise de problemas mais complexos será tratada numericamente devido ao grau de dificuldade em encontrar soluções analíticas.

As análises serão realizadas considerando o material elástico linear obedecendo a lei de Hooke. A teoria a ser empregada para solução analítica será de cascas finas considerando a axissimetria do cilindro de revolução.

O estudo do comportamento da estrutura com a variação de parâmetros tais como a temperatura, variação da espessura e teste de convergência do tamanho do elemento serão

verificados com o resultado numérico, o que dará bases suficientes para análises mais complexas.

Serão realizados estudos de casos para situações já existentes na literatura e casos fictícios com a verificação dos resultados obtidos.

## **1.6 - LIMITAÇÕES E ABRANGÊNCIA**

O presente estudo limita-se a cascas finas axissimétricas, considerando uma distribuição linear de temperatura através da parede. A análise será linear, elástica e isotrópica para problemas que seguem a lei de Hooke. Com isso não será aplicado a problemas de grandes deformações como incêndios.

O presente trabalho é aplicado para casos em que há gradiente térmico na parede do reservatório, provocado pela diferença de temperatura do produto armazenado e o meio ambiente, ou seja, limitando a temperatura de maneira que não provoque a degradação do material, como estudado por RANI e SANTHANAM (2012).

É importante destacar que o programa de análise numérica pode ser aplicado tanto a cascas finas quanto espessas, curtas ou longas, o mesmo não acontece com a formulação analítica, que só poderá ser aplicada a cascas finas e longas.

## **1.7 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

No Capítulo 1, é apresentada uma introdução, algumas generalidades relativas à reservatórios e sua segurança ressaltando a carga térmica, as motivações que levaram a este estudo, a colocação do problema, os objetivos, a abrangência, as limitações e a metodologia empregada.

O Capítulo 2 expõe uma revisão bibliográfica, através dos principais estudos encontrados na literatura sobre tanques, silos e outras estruturas cilíndricas, que foram publicados por diversos autores, ao mesmo tempo que mostram algumas de suas conclusões que servirão de base para esta pesquisa.

O Capítulo 3 apresenta um desenvolvimento teórico simplificado para cascas longas cilíndricas em regime flexional. São mostradas as expressões dos esforços atuantes nas estruturas cilíndricas com uma breve demonstração de como encontrar tais esforços.

No Capítulo 4 será apresentada a análise numérica termomecânica no estado estacionário de temperatura. Além disso, são mostrados os elementos do programa ANSYS que serão utilizados nas análises.

No Capítulo 5 serão apresentadas as primeiras análises com a utilização do programa de elementos finitos ANSYS. Além disso, são realizados testes de convergência e variações de parâmetros.

No Capítulo 6 são mostradas as conclusões tiradas da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

São apresentados quatro anexos, um mostrando a transformação da equação de temperatura em coordenada cartesiana para cilíndrica. O outro anexo mostra um desenvolvimento por elementos finitos, através da utilização de elementos cônicos lineares, um exibe a obtenção dos pontos de Gauss e outro os esforços térmicos.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Nesta seção serão mostrados os principais estudos realizados que envolvem o efeito da temperatura em estruturas de cascas cilíndricas, tais como silos, tanques e reservatórios em geral. Todos esses estudos foram realizados para mostrar a importância desse efeito nas estruturas.

### **2.2 - PRINCIPAIS ESTUDOS UTILIZADOS NESTA PESQUISA**

Os estudos térmicos em estruturas cilíndricas podem aparecer de maneira numérica, analítica e experimental. Alguns trabalhos com enfoque matemático analisam apenas a distribuição de temperatura em uma parede fina ou espessa do cilindro, já outros, como Awaji & Sivakumar (2001) e Jabbari, Sohrabpour & Eslami (2002), têm a preocupação com a intensidade das tensões geradas pelo efeito térmico. Vários autores realizaram procedimentos para cálculo da temperatura transiente em estruturas cilíndricas com várias camadas podendo citar Chen, Wang & Zuo (2003), Godinho, Tadeu & Simões (2004).

As pesquisas sobre o tema podem ser encontradas com diversos enfoques, desde análises estáticas a transientes. Alguns pesquisadores utilizam a teoria flexional, outros a teoria de membrana ou ambas, dependendo do caso em estudo. Com a finalidade de evidenciar pesquisas já realizadas, serão mostradas pesquisas, sendo a maioria em tanques e silos, estruturas nas quais o efeito térmico tem importância significativa.

#### **2.2.1 - Efeitos térmicos em silos e tanques de concreto**

Andersen (1966) realizou um estudo considerando o efeito mecânico do silo e do produto armazenado. O estudo leva em consideração o peso e a posição do grão armazenado e a compressão devido à contração térmica pela queda de temperatura. Foi utilizada a teoria de membrana para cascas finas assumindo o comportamento linear elástico para tensões térmicas, por serem pequenas. Vale lembrar que foi o primeiro estudo a considerar tais efeitos.

Os estudos feitos por Safarian & Harris (1985), determinam que dois tipos de efeitos térmicos precisam ser considerados em silos. O primeiro é o efeito do gradiente de temperatura através das paredes, importante em paredes de concreto, causado pelos produtos armazenados que são mais quentes que a temperatura do ar ao redor do silo. Este efeito é considerado no projeto das paredes das células. O segundo, leva em consideração as mudanças diárias de temperatura devido a intensidade da luz solar e pode causar o efeito de expansão e contração de grupos de silos. Tensões devidas a esse efeito podem ser grandes o suficiente para causar fissuras em paredes de concreto.

Zhang *et al.* (1987), realizaram um estudo das tensões térmicas em reservatórios com produto não coesivo, através do método dos elementos finitos com modelo elastoplástico. Através de teste de pressão lateral estática sem sobrecarga, os resultados numéricos puderam ser comparados e foram satisfatórios. Considerando a sobrecarga, os resultados tiveram uma divergência que foi atribuída à formulação de elementos finitos do modelo de reservatório.

Ghali & Elliott (1992) estudaram tanques de concreto armado através de soluções analíticas para gradientes de temperatura devido ao meio ambiente. A pesquisa procura mostrar que somente as armaduras protendidas não são suficientes para evitar a fissuração, sendo necessárias armaduras não-protendidas adicionais. O comportamento do concreto armado é avaliado pela variação de tensão provocada pela fluência e retração e sua redistribuição após a fissuração.

Jenkyn (1994), realizou um procedimento para o cálculo dos efeitos da temperatura nas paredes dos silos. Há a consideração das taxas de fluxo de calor dos produtos armazenados através das paredes. Notam-se duas condições distintas que devem ser analisadas: a) o pior efeito térmico normalmente ocorre nas paredes dos silos quando o produto é armazenado quente; b) o pior efeito térmico também existe debaixo da superfície do produto armazenado onde a temperatura cai com o fluxo de calor exterior. Para que esses efeitos não provoquem danos na estrutura e no produto armazenado, cabe ao projetista verificar se tem necessidade de reforço na parede ou de um sistema de refrigeração para o produto devido às tensões térmicas.

Na parte computacional, Alves (2001) desenvolveu um programa na linguagem FORTRAN, para dimensionamento de silos, levando em conta a pressão, ações devido ao vento e as ações causadas pela diferença de temperatura do produto armazenado e o meio ambiente. Na Figura 2.1 está o perfil estudado.

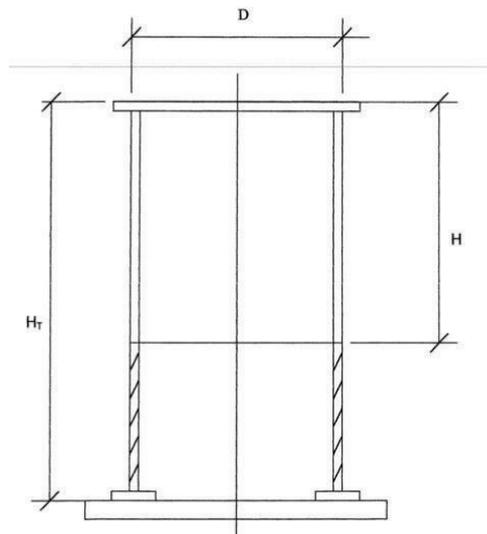


Figura 2.1 – Modelo de silo de concreto armado (Alves, 2001)

Foi realizada uma formulação teórica para uma análise estrutural, pautada nas teorias da resistência dos materiais e especificações da norma americana ACI-313 (1997) para silos em concreto armado cilíndrico.

Carmona (2005), realizou um estudo em um tanque cilíndrico de concreto armado com líquido à elevada temperatura de uma indústria de celulose que apresentava fissuras axiais (verticais). Considerando inicialmente a seção não fissurada e posteriormente a seção fissurada para os esforços circunferenciais, a análise leva em consideração a pressão estática e a temperatura do líquido que gira em torno de 80°C. O detalhe da estrutura estudada pode ser visto na Figura 2.2.

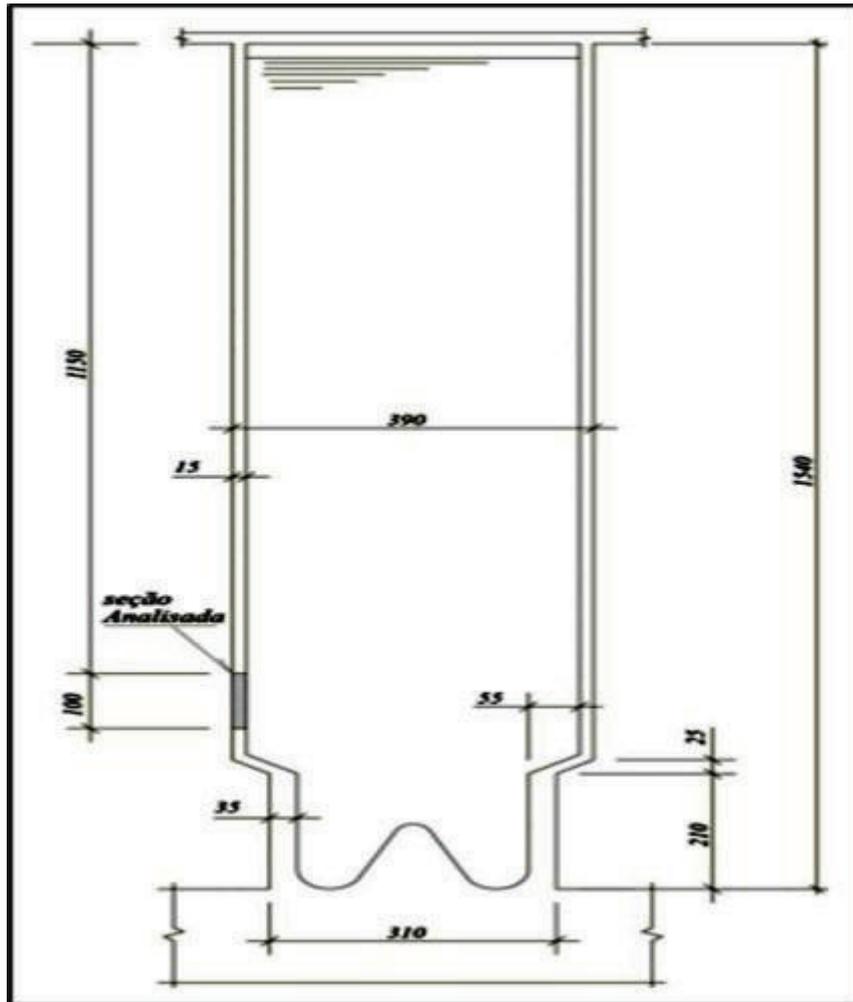


Figura 2.2 – Geometria do tanque (Carmona, 2005)

Para o tanque é mostrada a tensão final com e sem o efeito da temperatura. Como solução foi feito um reforço com cabos externos protendidos não aderentes nas paredes do reservatório.

Shao & Wang (2006), realizaram uma análise tridimensional termoelástica de um painel cilíndrico funcionalmente graduado com tamanho finito e sujeito a cargas térmicas em estado estacionário e cargas mecânicas não uniformes. As tensões e temperaturas foram descobertas por meio de soluções analíticas adimensionais expressas em termos de séries trigonométricas para a condição de contorno simplesmente apoiada. O método de solução apresentado pode ser aplicado apenas para a estrutura cilíndrica simplesmente apoiada. Por outro lado tem como vantagem ser aplicado a materiais funcionalmente graduado, com variação nas propriedades.

As soluções de reservatórios pré-fabricados (ver Figura 2.3) de concreto armado foram estudadas por Pereira (2010). O trabalho estuda o desempenho estrutural dos reservatórios construídos com painéis nervurados com ênfase às nervuras e as juntas que separam os elementos. É utilizado o método dos elementos finitos, com peças pós-tensionadas e há a consideração da interação dinâmica estrutural.



Figura 2.3 – Vista do reservatório pré-fabricado com painéis nervurados, pós-tensionados com cordões auto-embainhados exteriores, e pormenor do painel nervurado (Pereira,2011)

O trabalho leva em consideração os esforços circunferenciais devido à carga térmica, provocados pelas variações de temperatura do ambiente, anual e diária. As tensões térmicas são calculadas através das equações de casca cilíndricas apresentada por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959).

Meijers *et al.* (2013) fizeram um estudo das tensões em tanques cilíndricos de concreto protendido com gases liquefeitos expostos a cargas térmicas severas. As tensões são obtidas pela superposição das tensões térmicas e mecânicas. As tensões térmicas e mecânicas são determinadas por análise elástica linear e análise elástica não linear por elementos finitos. Foi concluído que as tensões calculadas pela superposição dos efeitos térmicos e mecânicos por análise elástica linear é a mesma da análise não linear. Logo, a análise elástica linear se torna uma rota mais econômica e segura para obtenção dos resultados.

Karbaschi (2013), estudou o efeito do gradiente de temperatura variando ao longo do dia pelo sol, através de um ângulo de inclinação solar, em tanques cilíndricos de armazenamento de petróleo. A estrutura analisada foi realizada com e sem a cobertura, sendo variada a relação da altura pelo raio. Através disso, foram realizados estudos da variação dos parâmetros e o comportamento com a pressão hidrostática do líquido armazenado. O método dos elementos finitos foi utilizado através do programa SAP2000, com elementos de cascas finas com um reservatório de 5000 m<sup>3</sup> de volume. A Figura 2.4 ilustra o modelo estudado.

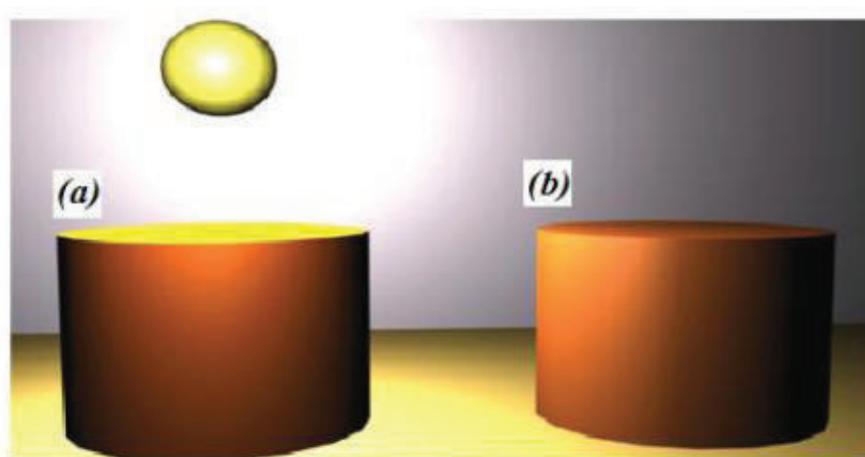


Figura 2.4 – Figura esquemática da direção do sol induzindo a carga térmica (a) uniforme e (b) gradiente. (Karbaschi, 2013)

Nota-se que os estudos são realizados com o intuito de dar importância ao efeito térmico que muitas vezes é ignorado.

### 2.2.2 - Tubulações industriais e dutos

Fonseca, Oliveira & Melo (2004), desenvolveram um elemento finito tubular com dois nós para análise térmica e mecânica de tubulações industriais. Os autores apresentaram uma formulação para tubulações de parede fina com a consideração do efeito da pressão interna e o efeito da temperatura, sendo estes carregamentos axissimétricos.

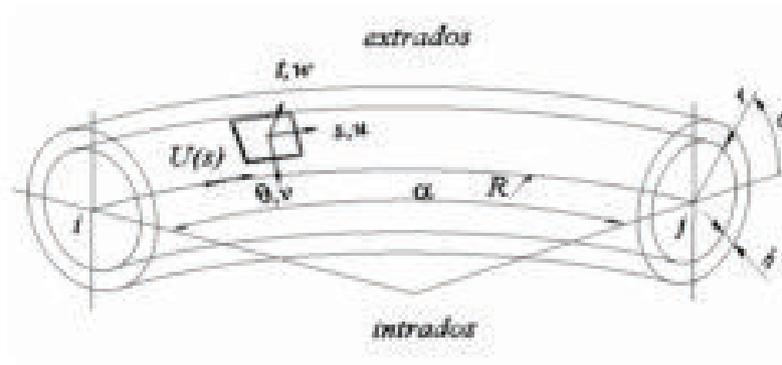


Figura 2.5 – Geometria do elemento de tubo (Fonseca, Oliveira & Melo, 2004)

A solução é obtida por um método de solução direta, através do princípio dos trabalhos virtuais, dado pela Equação 2.1.

$$[K]\{\delta\} = \{F_n\} + \{F_{th}\} \quad (2.1)$$

Sendo  $\delta$  o campo de deslocamentos nodais,  $F_n$  é o vetor de forças mecânicas aplicadas e  $F_{th}$  o vetor de cargas térmicas obtidas a partir da Equação 2.2:

$$F_{th} = \int_{x=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} [B]^T [de] \{\epsilon_{th}\} R h ds d\theta \quad (2.2)$$

Onde  $\{\epsilon_{th}\}$  é o vetor deformação de origem térmica,  $R$  o raio,  $[de]$  a matriz de elasticidade,  $[B]$  as derivadas das funções de forma,  $ds$  o diferencial do comprimento do arco curvo e  $d\theta$  é o diferencial do ângulo circunferencial.

Verifica-se que se a estrutura for aquecida o grau de flexibilidade do sistema tubular aumenta e com a pressão interna a rigidez aumenta. Este estudo torna-se importante, pois é frequente a exposição de tubulações a solicitações térmicas agressivas, podendo ser climática ou devido a elevadas temperaturas de funcionamento ou mesmo à ocorrência de incêndios nas instalações. É importante destacar que aqui é desprezada a contribuição da flexão segundo a direção longitudinal, tendo com isso uma teoria de semi-membrana.

Grangeiro & Parente Junior (2009), estudaram a flambagem vertical de dutos submetidos à aumento de temperatura através de modelos analíticos e numéricos. O duto é considerado como uma viga sobre base rígida, como apresenta a Figura 2.6. A pesquisa procura avaliar os principais parâmetros que influenciam o problema, tais como o diâmetro e a espessura do duto. O Método dos Elementos Finitos, através do programa ABAQUS, é utilizado considerando uma análise não-linear, afim de avaliar as imperfeições ao longo do duto.

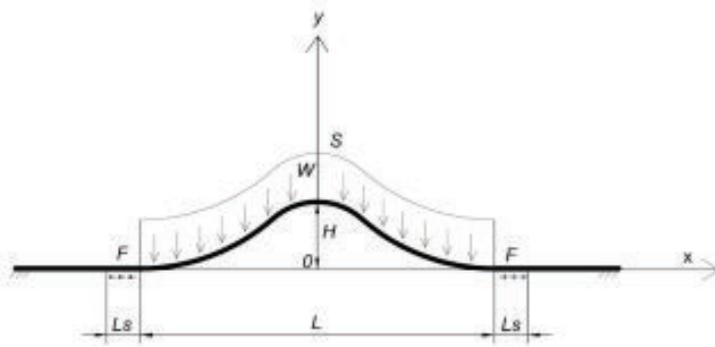


Figura 2.6 – Modelo de base rígida para flambagem vertical (Grangeiro & Parente Junior, , 2009).

Os autores concluíram que existe uma limitação no modelo, pois à medida que a imperfeição aumenta, o trecho instável tende a desaparecer, não sendo possível determinar a temperatura segura com uma curva temperatura-deslocamento. No entanto, os resultados numéricos se mostraram satisfatórios para a flambagem de dutos apoiados sobre base rígida.

### 2.2.3 - Trabalho experimental das tensões térmicas

Na parte experimental, Moraes et al. (2010) realizaram um estudo dos efeitos do concreto submetido a altas temperaturas. O estudo tem como objetivo verificar o efeito “spalling” (fragmentação do concreto) experimentalmente e numericamente com o código de elementos finitos CAST3M desenvolvido na Agência de Energia Atômica da França (CEA). As tensões são calculadas por dois modelos: elástico linear isotrópico e elastoplástico. O corpo de prova foi cilíndrico e as maiores tensões encontradas surgem no centro.

A Figura 2.7 mostra a evolução das tensões em função da temperatura no centro do corpo de prova.

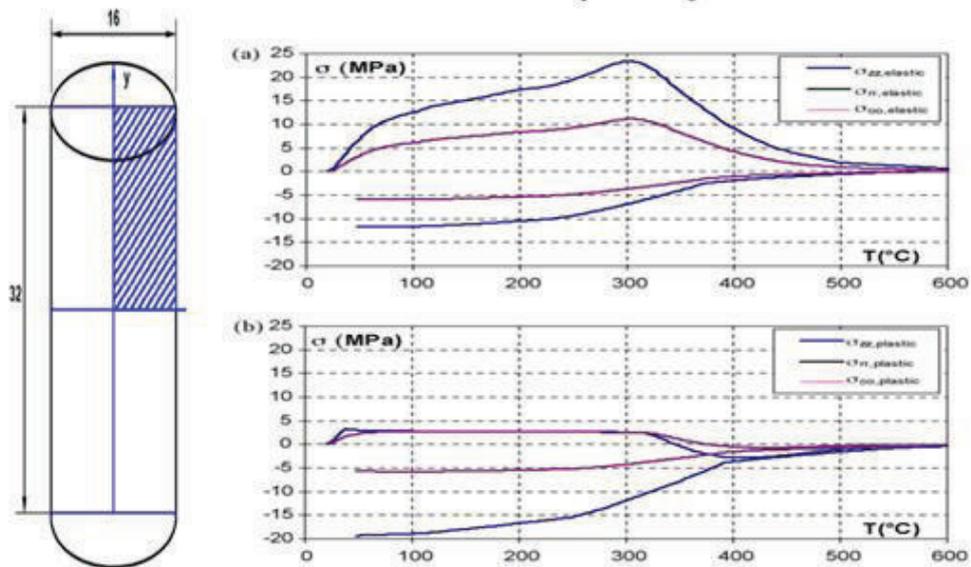


Figura 2.7 – Corpo de prova e evolução das tensões elásticas (a) e elastoplásticas (b)

Na Figura 2.8 está o corpo de prova após o ensaio, representando as fissuras e fragmentações axiais e circunferenciais.



Figura 2.8 – Representação da fissuração e fragmentação nos planos axiais e radiais do corpo de prova (Morais et al., 2010)

Logo a seguir serão apresentados alguns trabalhos realizados na Universidade de Brasília que de alguma forma tem relação com essa pesquisa, seja pelo método, teoria ou fenômeno.

#### **2.2.4 - Cascas cilíndricas, efeito térmico em concreto massa e fachadas**

No âmbito do Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDPE) da UnB, há uma significativa bibliografia a respeito de cascas, barragens, interação dinâmica fluido-estrutura, efeito térmico e estudos afins, como por exemplo, Souza (2007), Lustosa (2011), Campos Júnior (2011), Coelho (2012) e Mendes (2013).

Ainda na UnB, existem algumas pesquisas que buscam avaliar as tensões geradas pelo efeito térmico e a fadiga em fachadas, estabelecendo uma temperatura equivalente das camadas da fachada, citando Saraiva (1998), Uchôa (2007) e Barbosa (2013).

### 3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos e formulações para a análise térmica, mecânica e termomecânica. Inicialmente, faz-se a abordagem dos tipos de transferência de calor e em seguida as soluções analíticas para cascas finas e seu acoplamento termomecânico.

#### 3.1 - ESTUDO TÉRMICO

##### 3.1.1 - Introdução

A transmissão de calor ocorre quando há uma transmissão de energia de uma região para outra devido a uma diferença de temperatura entre elas. Segundo Moaveni (1999), o conhecimento da distribuição de temperatura é útil na determinação de tensões térmicas e correspondentes deflexões em equipamentos e elementos estruturais.

Na natureza encontram-se basicamente três tipos de transferência de calor, a saber: condução, convecção e radiação, descritas a seguir.

##### 3.1.2 - Tipos de transferência de calor

A condução se refere ao modo de transferência de calor que ocorre quando existe um gradiente de temperatura no meio. A energia é transportada de regiões de altas temperaturas para regiões de baixa temperatura por atividades moleculares. Em coordenadas cartesianas em três dimensões a taxa de fluxo de calor é dada pela Lei de Fourier, conforme a Equação 3.1:

$$\begin{aligned}q_x &= -k_x A_x \frac{\partial T}{\partial x} \\q_y &= -k_y A_y \frac{\partial T}{\partial y} \\q_z &= -k_z A_z \frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Sendo:

$q_x, q_y, q_z$  - Componentes da taxa de transferência de calor

$k_x, k_y, k_z$  - Condutividade térmica do meio nas respectivas direções

$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$  - Gradientes de temperatura

A convecção é um processo de transporte de energia pela ação combinada da condução de calor, armazenamento de energia e movimento de mistura (Coelho, 2012 apud Silveira, 1961). A convecção é mais importante como mecanismo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás.

A taxa de transferência de calor entre o fluido e o líquido é dada pela Lei de Resfriamento de Newton, de acordo com a Equação 3.2:

$$q = hA(T_s - T_f) \quad (3.2)$$

Sendo:

$h$  - Coeficientes de transferência de calor

$T_s, T_f$  - temperatura superficial e temperatura do fluido em movimento respectivamente

A radiação é a propagação de energia por meio de partículas ou ondas, sendo que todos os materiais emitem radiação térmica. Esta regra é verdadeira, desde que o corpo em questão esteja a uma determinada temperatura. A quantidade de energia emitida é dada por:

$$q'' = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (3.3)$$

Sendo:

$q''$  - taxa de energia térmica por unidade de área emitida por uma superfície

$\varepsilon$  - Emissividade da superfície ( $0 < \varepsilon < 1$ )

$\sigma$  - Constante de Stefan - Boltzman ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ )

### 3.1.3 - Equações do problema

A obtenção da equação geral de calor será feita a partir de um corpo sólido pequeno, considerando a equação da conservação da energia.

$$\dot{E}_{entra} + \dot{E}_{gerada} = \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{Armazenada} \quad (3.4)$$

Sendo que  $\dot{E}_{entra}$  e  $\dot{E}_{sai}$  representam a taxa de energia que entra e que sai do volume e  $\dot{E}_{gerada}$  e  $\dot{E}_{Armazenada}$  representam a taxa de energia gerada e armazenada no volume. Considerando o elemento infinitesimal da Figura 3.1, tem-se:

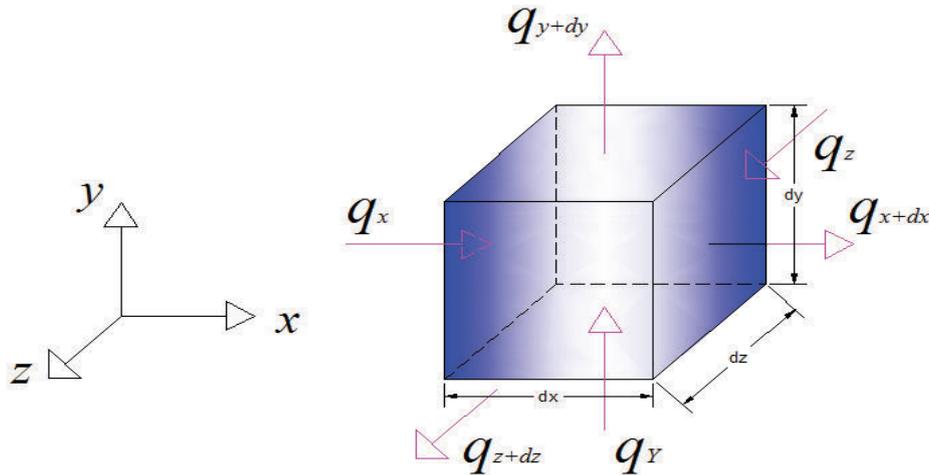


Figura 3.1 – Representação ilustrativa para dedução da equação da condução de calor  
(Adaptada Rao ,2004)

Da Equação 3.4 e da Figura 3.1, obtém-se:

$$\begin{aligned} (q_x + q_y + q_z)dt + \dot{q}dxdydz \\ = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + \rho cdTdxdydz \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sendo:

$$q_x = -k_x A_x \frac{\partial T}{\partial x} = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} dydz \quad (3.6)$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{x+dx} = -k_x A_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x A_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx$$

$$q_{x+dx} = -k_x dydz \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (3.7)$$

Sendo que  $k_x$  é a condutividade térmica do material na direção  $x$ ,  $A_x$  é a área normal à direção  $x$  atravessada pelo fluxo de calor. Substituindo as Equações 3.6 e 3.7 na Equação 3.5, têm-se a equação geral da condução de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.8)$$

Para um material isotrópico as condutividades térmicas são iguais em todas as direções, sendo:

$$k_x = k_y = k_z = k$$

e,

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Tem-se a Equação 3.9, que já é bem conhecida na literatura, sendo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 muda para o caso em que não há geração de calor interna, e se reduz a equação de Fourier:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10)$$

Caso o sistema esteja em regime permanente e com fontes geradoras de calor, a Equação 3.10 se transforma na Equação 3.11, conhecida por equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3.11)$$

No caso do sistema está em regime permanente e sem fontes de calor, a equação se reduz a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.12)$$

### Equação em coordenadas cilíndricas

A equação em coordenadas cilíndricas é obtida de acordo com a Figura 3.2.

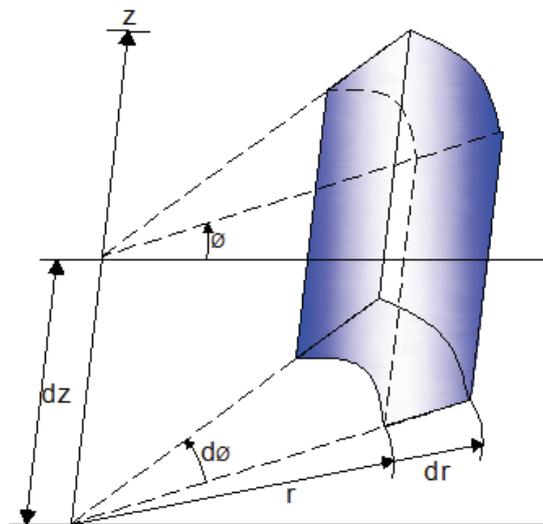


Figura 3.2 – Elemento em coordenadas cilíndricas (Modificada RAO, 2004)

A mudança do sistema de coordenada cartesiana para cilíndrica resulta nas seguintes equações para cada caso na Tabela 3.1 (Ver o Anexo A).

Tabela 3.1 – Tabela de equações de temperatura em coordenadas cilíndricas

Condição	Transiente	
Geral	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$	(3.13)
Sem geração de energia	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$	(3.14)
Sem geração de energia e não depende do ângulo $\phi$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$	(3.15)
Sem geração de energia e não depende de $\phi$ e de $Z$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$	(3.16)

No caso em estudo, devido à simetria em relação ao eixo e sabendo que a variação de temperatura não depende do eixo  $z$ , a equação que se encaixa nessa situação é a Equação 3.16 da Tabela 3.1.

### 3.1.4 - Variação da temperatura através de uma parede

Esta seção servirá de base para validar a simplificação de variação curvilínea para linear da variação de temperatura em uma parede. Tal comportamento pode ser observado em estruturas de cascas finas e será utilizado em todo o trabalho.

Em cilindros com uma espessura grande quando comparada como diâmetro da casca ocorre uma variação curvilínea de temperatura (Carmona, 2005 apud Timoshenko, 1968), dada por:

$$T = \frac{T_i}{\log \frac{b}{a}} \log \frac{b}{r} \quad (3.17)$$

Sendo  $T_i$  a temperatura interna na estrutura cilíndrica que pode ser obtida pela Equação 3.16, desconsiderando o último termo, pois está em estado estacionário e considerando a temperatura externa nula de acordo com a Figura 3.3.

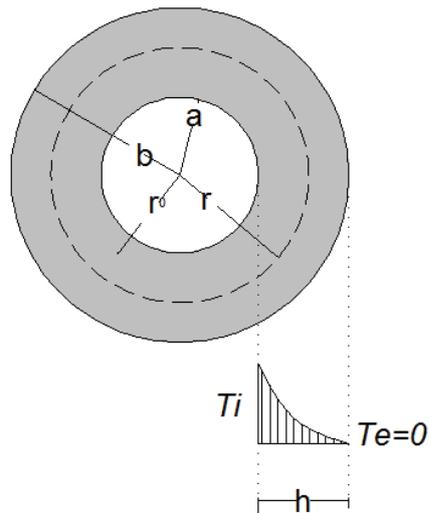


Figura 3.3 – Variação da temperatura em cascas espessas (modificada Carmona, 2005)

Nesta pesquisa serão estudadas cascas delgadas e a Equação 3.17 é apenas para mostrar o comportamento da temperatura em estruturas cilíndricas espessas quando essa vai se tornando esbelta.

Na Figura 3.4 pode ser visualizado o comportamento da distribuição das tensões de acordo com a relação raios e espessura da parede, feita por (CARMONA, 2005).

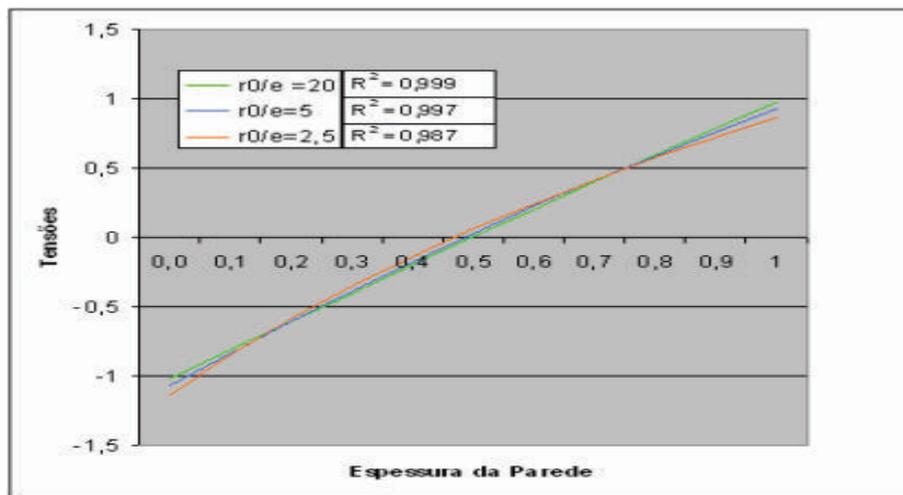


Figura 3.4 – Distribuição das tensões circunferenciais para diferentes relações  $\left(\frac{r_0}{e}\right)$   
(Carmona, 2005)

A utilização da Equação 3.17 fornece uma distribuição não linear das tensões. Nota-se, que quando a espessura da parede é pequena em relação ao diâmetro do tubo a aproximação para uma equação linearizada é completamente satisfatória.

### **3.2 - TEORIA DE CASCAS**

Nesta seção será apresentado o desenvolvimento analítico através da teoria de cascas finas, para o gradiente de temperatura, com uma demonstração simplificada da equação geral. Inicialmente serão mostradas as principais teorias e em seguida o acoplamento termomecânico para estrutura.

#### **3.2.1 - Introdução – Hipóteses Gerais**

Segundo Baker et al. (1972), a teoria para pequenas deflexões de cascas elásticas está baseada nas equações da teoria matemática de elasticidade linear. A geometria das cascas (uma dimensão muito menor que as outras), não garante, em geral, as equações da elasticidade tridimensional completa.

Existem várias teorias lineares de cascas, que podem ser classificadas em quatro categorias básicas. O objetivo neste trabalho não é o estudo das teorias de casca, no entanto serão citadas algumas categorias básicas em que elas se encaixam, tais como citado por Baker *et al* (1972):

- Teoria de cascas de aproximação de primeira ordem
- Teoria de casca de aproximação de segunda ordem
- Teoria de cascas especializadas
- Teoria de membrana em cascas

A Teoria de cascas de aproximação de primeira ordem foi desenvolvida para simplificar as relações deformação-deslocamento. Sendo que Love (1888) foi o primeiro a aplicar tal conceito nas cascas, e atualmente é conhecida como hipótese de Kirchhoff – Love. Tal hipótese tem como características: espessura muito menor que o raio, a componente de tensão normal no meio da seção é desprezada por ser pequena se comparada com as outras

seções, as deformações e deslocamentos são pequenos, por isso os termos de mais alta ordem são desprezados e os elementos do meio da seção não sofrem deformações.

A Teoria de casca de aproximação de segunda ordem de acordo com Baker et al. (1972), Flügge (1973) e Byrne (1944) mantém o termo  $h/R$  em comparação com a unidade nas equações de tensão resultante e nas relações deformação-deslocamento. Sendo  $h$  a espessura da casca e  $R$  o raio.

Geralmente tem aplicação a casos restritos de formas cilíndricas circulares. E é utilizada para cascas espessas, sendo que tal teoria foi obtida a partir de Vlasov (1964). Tendo como hipóteses:  $\epsilon_z = \gamma_{\phi z} = \gamma_{\phi\theta} = 0$ , sendo  $\epsilon_z$  a deformação na direção  $z$  e os dois últimos termos são as deformações de cisalhamento transversais.

Teoria de cascas especiais: Em alguns casos há a necessidade de incluir algumas características para a casca, tal como: inclusão de deformação do cisalhamento e teoria de cascas abatidas. Sendo que muitas delas são baseadas nas aproximações de primeira ordem (Baker, Kovalsvsky & Rish, 1972).

### **3.2.2 - Teoria flexional**

A teoria flexional é aplicada quando ocorrem efeitos devido aos esforços cortantes e momentos fletores solicitando a estrutura.

O desenvolvimento analítico das cascas cilíndricas empregado aqui pode ser encontrado em várias literaturas, tais como Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), Baker, Kovalsvsky & Rish (1972), Gravina (1957) e em trabalhos desenvolvidos no Grupo de Dinâmica e Fluido – Estrutura da Universidade de Brasília por Pedroso (1998), Lustosa (2011), Campos Júnior (2011) e Mendes (2013).

Devido à axissimetria, os resultados finais não irão variar com o ângulo, no caso de cascas cilíndricas. Na Figura 3.5, encontra-se o equilíbrio de um elemento de casca infinitesimal, que está submetido a uma pressão  $Y$ , normal a seu plano.

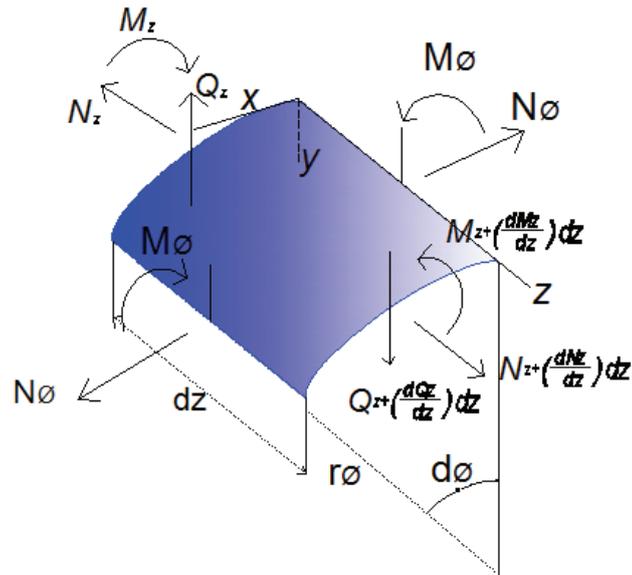


Figura 3.5 – Equilíbrio dos esforços em um elemento infinitesimal de casca ( modificada - Lustosa, 2011)

Sendo:

$M_z$  – Momento fletor axial ao longo do meridiano;

$Q_z$  – Força cortante normal à direção z;

$M_\phi$  – Momento circunferencial ao longo do paralelo;

$N_z$  – Força normal ao longo do meridiano;

$d_z$  – Diferencial do comprimento do arco do meridiano;

$Y$  – Força normal aplicada na área do elemento.

Fazendo o equilíbrio da Figura 3.5, de acordo com Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), também utilizado por Lustosa (2011):

$$\begin{aligned} \frac{dN_z}{dz} r_\phi dz d\phi &= 0 \\ \frac{dQ_z}{dz} r_\phi dz d\phi + N_\phi dz d\phi + Y r_\phi dz d\phi &= 0 \\ \frac{dM_z}{dz} r_\phi dz d\phi - N_\phi r_\phi dz d\phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Os momentos são dados pelas equações de placas abaixo:

$$M_{\phi} = \nu M_z \quad (3.19)$$

$$M_z = -D \frac{d^2 w}{dz^2}$$

Sendo que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $w$  é a deflexão radial e a rigidez à flexão  $D$ , dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.20)$$

Sendo:

$h$  – Espessura da parede da casca;

$\nu$  – Coeficiente de Poisson.

Substituindo as Equações 3.19 na Equação 3.18, e devido à axissimetria que faz com que o resultado não dependa do ângulo (Pedroso, 1998 apud Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959), obtém-se:

$$D \frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{Eh}{R^2} w = Y \quad (3.21)$$

A Equação 3.21 pode ser representada por:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + 4\beta^4 w = \frac{Y}{D} \quad (3.22)$$

Sendo a constante  $\beta$  dada por:

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2 D} = \frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \quad (3.23)$$

A solução da Equação 3.22, é dada por:

$$w = e^{\beta z}(C_1 \cos \beta z + C_2 \text{sen} \beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \cos \beta z + C_4 \text{sen} \beta z) + f(z) \quad (3.24)$$

Sendo que  $w$  representa a deflexão, as constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  podem ser encontradas de acordo com as condições de contorno e  $f(z)$  é a solução particular obtida na solução de membrana.

A Equação 3.24 pode ser reduzida para o caso de cilindros longos, em que a parcela  $e^{\beta z}(C_1 \cos \beta z + C_2 \text{sen} \beta z)$  é nula, pois para carregamentos aplicados nos extremos se produz uma flexão local que amortece rapidamente. Para uma distância  $z$  da borda a primeira parcela aumenta o valor da flexão local, o que não é a realidade. Logo eliminando a primeira parcela da Equação 3.24 e a parcela referente à solução de membrana  $f(z)$ , tem-se:

$$w = e^{-\beta z}(C_3 \cos \beta z + C_4 \text{sen} \beta z) \quad (3.25)$$

A Figura 3.6 ilustra esforços distribuídos na extremidade de um cilindro longo.

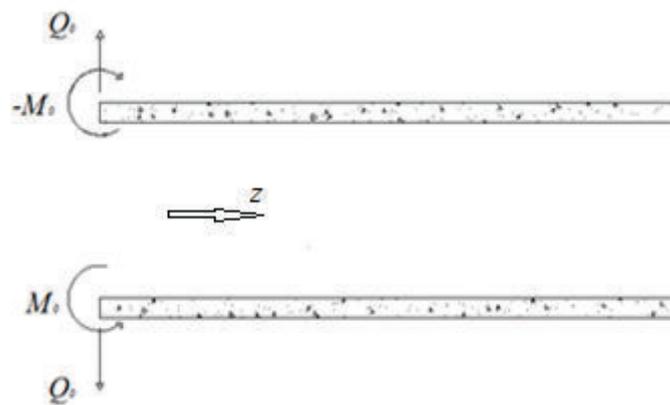


Figura 3.6 – Esforço circunferencial e momento circunferencial na borda

As condições de contorno para o extremo esquerdo engastado da Figura 3.6, são dadas por;

$$(M_z)_{z=0} = -D \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)_{z=0} = M_0 \quad (3.26)$$

$$(Q_z)_{z=0} = \left( \frac{dM_z}{dz} \right)_{z=0} = -D \left( \frac{d^3 w}{dz^3} \right)_{z=0} = Q_0$$

Logo, aplicando as condições de contorno da Equação 3.26 na 3.25, temos a deflexão dada por:

$$w = \frac{e^{-\beta z}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\text{sen } \beta z - \text{cos } \beta z) - Q_0 \text{cos } \beta z]$$

Derivando a equação acima, têm-se as equações dadas por 3.27:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 k_1(\beta z) + Q_0 k_2(\beta z)] \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 k_2(\beta z) + Q_0 k_3(z)] \\ \frac{d^2 w}{dz^2} &= -\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 k_3(\beta z) + 2Q_0 k_4(\beta z)] \\ \frac{d^3 w}{dz^3} &= \frac{1}{D} [2\beta M_0 k_4(\beta z) - Q_0 k_1(\beta z)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sendo:

$$k_1 = e^{-\beta z} (\text{cos } \beta z - \text{sen } \beta z)$$

$$k_2 = e^{-\beta z} \text{cos } \beta z$$

$$k_3 = e^{-\beta z} (\text{cos } \beta z + \text{sen } \beta z)$$

$$k_4 = e^{-\beta z} \text{sen } \beta z$$

No caso em questão, nota-se que a deflexão máxima se dá em  $z = 0$ , sendo:

$$(w)_{z=0} = -\frac{1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 + Q_0] \quad (3.28)$$

As Equações 3.27, serão utilizadas para obtenção dos momentos fletores através do gradiente térmico.

Da lei de Hooke obtém-se a equação do esforço circunferencial na casca dado abaixo:

$$N_{\phi} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\phi} + \nu\varepsilon_y) \quad (3.29)$$

Sendo  $\varepsilon_z = \frac{du}{dy}$  e  $\varepsilon_{\phi} = -\frac{w}{r}$  as deformações nos eixos z e y. Logo  $N_{\phi}$  passa a ser:

$$N_{\phi} = \frac{Ehw}{r} \quad (3.30)$$

Esta equação será útil para encontrar os esforços térmicos no tópico seguinte.

Vale ressaltar que a teoria para o caso de cilindros longos se aplica quando a Equação 3.23 atender a seguinte condição para altura, sendo  $H \geq \frac{\pi}{\beta}$  como mostrado por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) e utilizada por Ghali & Elliott (1992). Logo com  $\nu = 0,2$  (para concreto) a seguinte relação deve ser atendida.

$$\frac{H^2}{Rh} \geq 5.8 \quad (3.31)$$

A relação acima será válida neste trabalho, pois serão utilizadas estruturas em concreto armado em alguns estudos de casos. No caso de um material com  $\nu = 0,3$  como o ferro fundido, aço e outros semelhantes, tem-se a seguinte relação a ser atendida.

$$\frac{H^2}{Rh} \geq 5.96 \quad (3.32)$$

É importante lembrar que uma casca para ser considerada fina deve obedecer a relação mostrada por Ventsel & Krauthammer (2001):

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (3.33)$$

Quando a casca não atender a relação acima será considerada espessa e não poderá ser aplicada a teoria já apresentada.

Como o interesse aqui é estudar os esforços que causam fissuras axiais, será dado ênfase as sollicitações circunferenciais. A expressão para a máxima tensão circunferencial ( $\sigma_\phi$ ) pode ser encontrada em Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), como segue:

$$\sigma_\phi = -6 \frac{M_\phi}{h^2} + \frac{N_\phi}{h} \quad (3.34)$$

### 3.2.3 - Formulação térmica pela teoria de cascas finas

A solução analítica para os esforços térmicos em cascas cilíndricas pode ser encontrada em Ghali & Elliott (1992) e será útil para validação dos elementos a serem utilizados na solução numérica. A convenção de sinais positivos será: Força  $N$  positiva quando de tração; Momento  $M$  positivo, quando traciona a face externa da parede; Alongamento e encurtamento são positivos e negativos, respectivamente. A Figura 3.7 ilustra a geometria, condições de contorno e principais dados da estrutura em estudo.

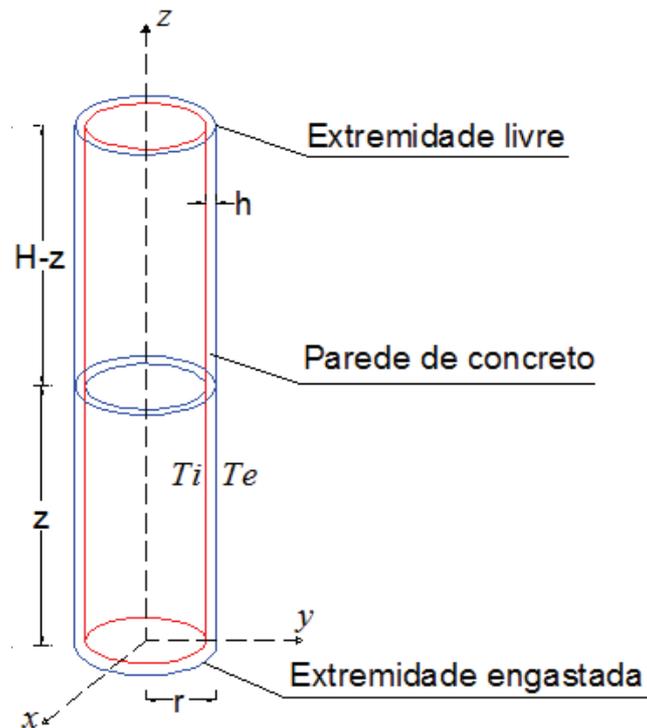


Figura 3.7 – Detalhe do tanque de concreto

Sendo a espessura ( $h$ ), altura ( $H$ ), o raio ( $R$ ) da casca, a temperatura externa ( $T_e$ ) e interna ( $T_i$ ).

A solução analítica foi obtida utilizando-se a teoria de cascas finas com axissimetria e considerando apenas as diferenças de temperatura interna e externa ao tanque, para um processo de condução de temperatura.

Supõem-se ainda que, sendo a estrutura axissimétrica e sabendo-se que o produto armazenado ocupa toda parte interna do tanque, a distribuição de temperatura ao longo da espessura será a mesma para qualquer altura da parede. A temperatura externa do meio ambiente será considerada com uma distribuição axissimétrica.

Os esforços representados na Figura 3.1 podem ser encontrados através da teoria de cascas finas por analogia de pressão nas paredes, com a utilização do método das forças ou método dos deslocamentos. Os esforços devido à temperatura são transformados em forças circunferenciais, momentos e pressão na parede do cilindro, como representado na Figura 3.8.

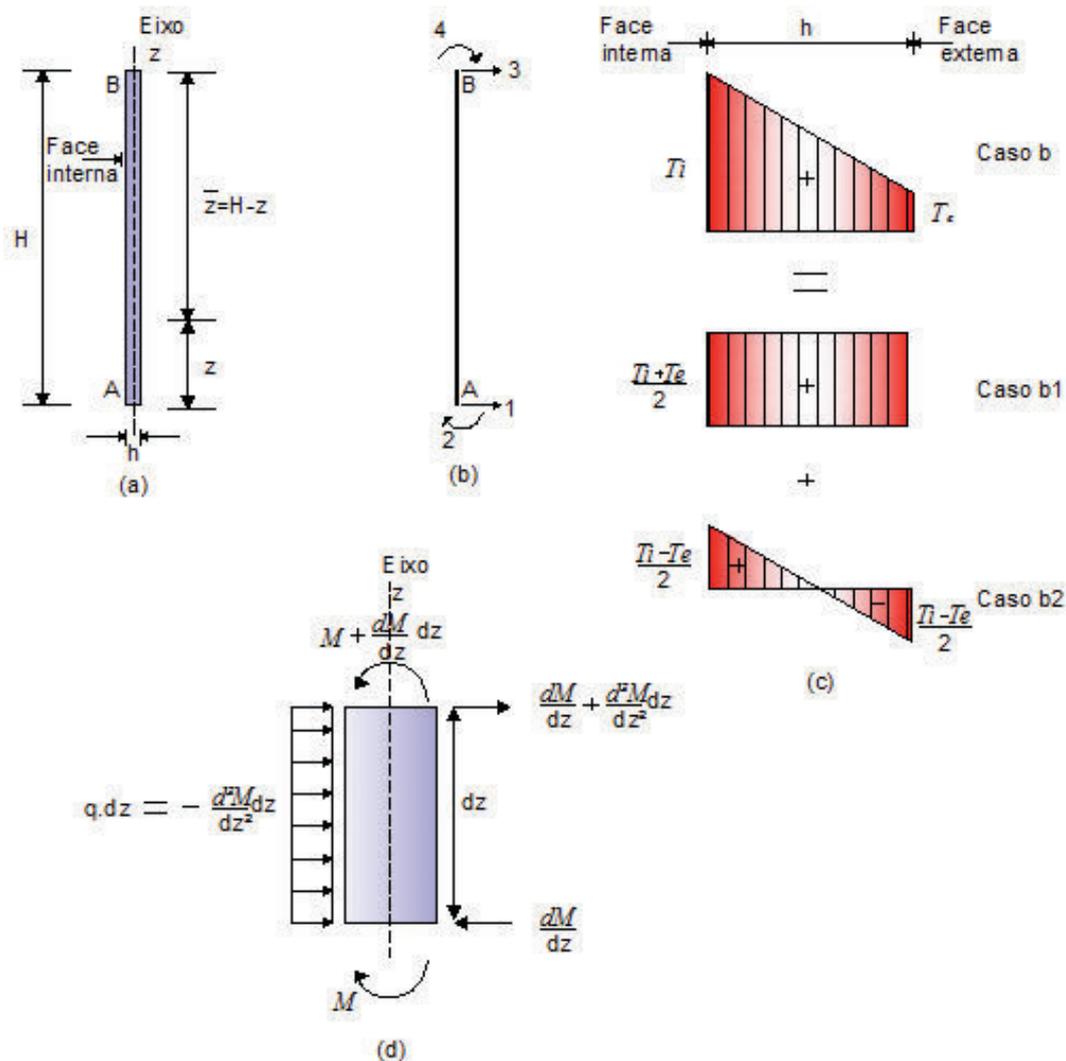


Figura 3.8 – Carga térmica em uma parede. (a) Seção transversal de uma parede circular, (b) Sistema de coordenada, (c) Gradiente de temperatura na parede e (d) Analogia de pressão térmica em elemento infinitesimal da parede do cilindro. (Adaptada Ghali, 2000)

A Figura 3.8 ilustra dois casos (b1 e b2) de temperatura, sendo que o resultado da superposição dessas resulta na temperatura que está sendo aplicada na estrutura. Além disso, a temperatura irá gerar uma pressão que está representada na Figura 3.8 d.

Alguns esforços já são conhecidos, como as tensões e momentos nos extremos e podem ser encontrados em Priestley (1976), Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) e Ghali (2000), sendo dados pelas expressões (ver anexo D):

$$p = \frac{E\alpha h(T_e + T_i)}{2R(1-\nu)} \quad (\text{Analogia de pressão devido à carga térmica}) \quad (3.35)$$

$$M_z = -\frac{E\alpha(T_e - T_i) h^2}{12(1-\nu)} \quad (\text{Momento vertical na borda do tanque}) \quad (3.36)$$

$$N_z = -\frac{E\alpha h(T_e + T_i)}{2(1-\nu)} \quad (\text{Força axial na borda do tanque}) \quad (3.37)$$

Sendo:  $p$  – Pressão térmica;  $E$  – módulo de elasticidade;  $\alpha$  - Coeficiente de dilatação térmica;  $h$  – espessura da parede;  $R$  – raio médio da estrutura;  $M_z$  - Momento vertical na parede;  $N_z$  - Esforço axial;  $\nu$  – Coeficiente de Poisson.

Se as bordas do cilindro estão restringidas, forças desenvolvem-se produzindo momentos de flexão e forças circunferenciais na casca (Ghali, 2000). A Figura 3.9 mostra os esforços verticais (axiais) e circunferenciais atuando no elemento infinitesimal da parede de uma estrutura cilíndrica.

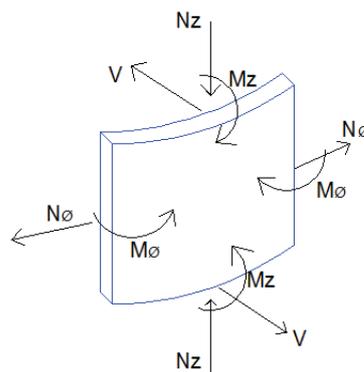


Figura 3.9 – Esforços sobre a parede de tanques cilíndricos

A seguir serão deduzidas as equações para os esforços mostrados na Figura 3.9. Sendo que inicialmente é considerado apenas o momento fletor e depois o esforço cortante, sendo a resultante, a soma dos esforços encontrados.

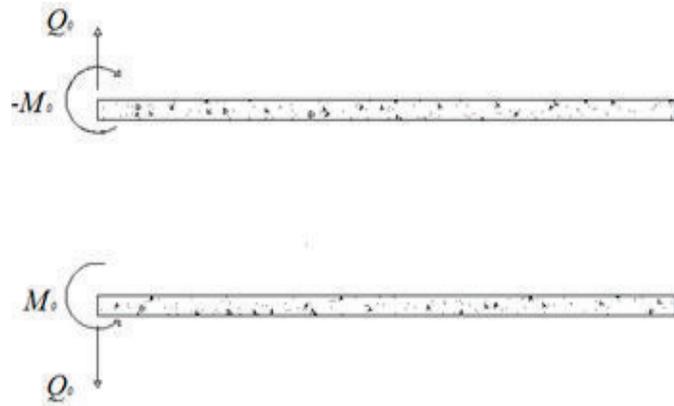


Figura 3.10 – Esforços circunferenciais e momentos fletores nas bordas

Logo adiante será mostrado o desenvolvimento das equações de momento fletor circunferencial e esforço circunferencial, com a estrutura submetida a momento fletor ao longo da borda superior do cilindro, através das equações mostradas anteriormente.

#### Momento fletor na borda

Para um cilindro longo engastado na borda e utilizando as Equações 3.27 e 3.36, a uma distancia  $\bar{z} = (H-z)$  da borda livre de acordo com a Figura 3.7 obtém-se:

$$M_z = \frac{E\alpha(T_e - T_i) h^2}{12(1-\nu)} \bar{k}_3 \quad (3.38)$$

$$M_\phi = \frac{\nu E\alpha(T_e - T_i) h^2}{12(1-\nu)} \bar{k}_3 \quad (3.39)$$

Utilizando as Equações 3.30 e 3.27 encontra-se o esforço circunferencial atuante na estrutura para uma distância  $\bar{z} = (H-z)$ . Sendo que este  $\bar{z}$  é substituído nas equações do  $k$  e  $\bar{k}_i$  é encontrada.

$$N_{\phi} = -\frac{E\alpha(1+\nu)}{2R\beta^2}(T_e - T_i)\bar{k}_4 \quad (3.40)$$

As outras equações são obtidas pelo mesmo processo, sendo que nos próximos tópicos serão apresentadas as equações para cada tipo de esforço.

### 3.2.4 - Fórmulas para cada esforço solicitante

Logo abaixo estão ilustradas as equações dos esforços devido à carga térmica de acordo com a analogia mostrada nas Equações 3.35 à 3.37, sendo apresentadas as soluções para a pressão, momento circunferencial e esforço circunferencial ao longo da altura do cilindro.

#### Pressão na parede do cilindro - $p_r$

As forças internas, devido a uma pressão radial  $= p_r = -\frac{E\alpha h}{(1-\nu)R}\left(\frac{T_e + T_i}{2}\right)$  são:

Tabela 3.2 – Esforços resultantes de pressão térmica na parede do tanque

$N_{z1} = 0$	(3.41)
$N_{\phi1} = \frac{E\alpha h}{2(1-\nu)}(T_e + T_i) - \frac{E\alpha h}{2(1-\nu)}(T_e + T_i)k_3$	(3.42)
$M_{\phi1} = -\frac{\nu E\alpha R\beta^2 h^3}{12(1-\nu)(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1$	(3.43)
$M_{z1} = -\frac{E\alpha R\beta^2 h^3}{12(1-\nu)(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1$	(3.44)

#### Força circunferencial na borda - $N_r$

As forças internas devido à força na borda superior  $= -N_r = \frac{E\alpha h}{(1-\nu)}\left(\frac{T_0 + T_i}{2}\right)$  são

observadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Tabela de esforços resultantes devido ao esforço circunferencial na borda superior do cilindro

$N_{z2} = \frac{E\alpha h}{2(1-\nu)}(T_0 + T_i)$	(3.45)
$N_{\phi2} = \frac{\nu E\alpha h}{2(1-\nu)}(T_0 + T_i)k_3$	(3.46)
$M_{\phi2} = -\frac{\nu^2 E\alpha R\beta^2 h^3}{12(1-\nu)(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1$	(3.47)
$M_{z2} = -\frac{\nu E\alpha R\beta^2 h^3}{12(1-\nu)(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1$	(3.48)

### Momento circunferencial na borda - $M_r$

As forças internas, devido ao momento borda no topo =  $-M_r = -\frac{E\alpha h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)$  são:

Tabela 3.4 – Tabela dos esforços resultantes da aplicação de momento na borda superior

$N_{z3} = 0$	(3.49)
$N_{\phi3} = \frac{E\alpha(1+\nu)}{2R\beta^2}(T_e - T_i)\bar{k}_1$	(3.50)
$M_{\phi3} = \frac{\nu E\alpha h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)\bar{k}_3$	(3.51)
$M_{z3} = \frac{E\alpha h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)\bar{k}_3$	(3.52)

### SUPERPOSIÇÃO

A superposição dos  $N_{\phi i}$ ,  $M_{\phi i}$ ,  $M_{z i}$  e  $N_{z i}$  das Equações 3.41 à 3.52 para cada esforço aplicado ( $P_r$ ,  $N_r$ ,  $M_r$ ) determinados pelas Equações 3.35, 3.36 e 3.37, da  $N_z = 0$  e as Equações 3.53 até 3.61, que serão vistas adiante. Sendo que  $i$  varia de 1 a 3.

### 3.2.5 - Esforços acoplados devido ao gradiente térmico

Os esforços que surgem em uma estrutura cilíndrica engastada sob gradiente térmico são basicamente de flexão nas bordas. Conforme a parede se distancia das bordas esses efeitos de flexão vão desaparecendo. Na Figura 3.11 está um esquema ilustrativo dos esforços que surgem em uma estrutura cilíndrica.

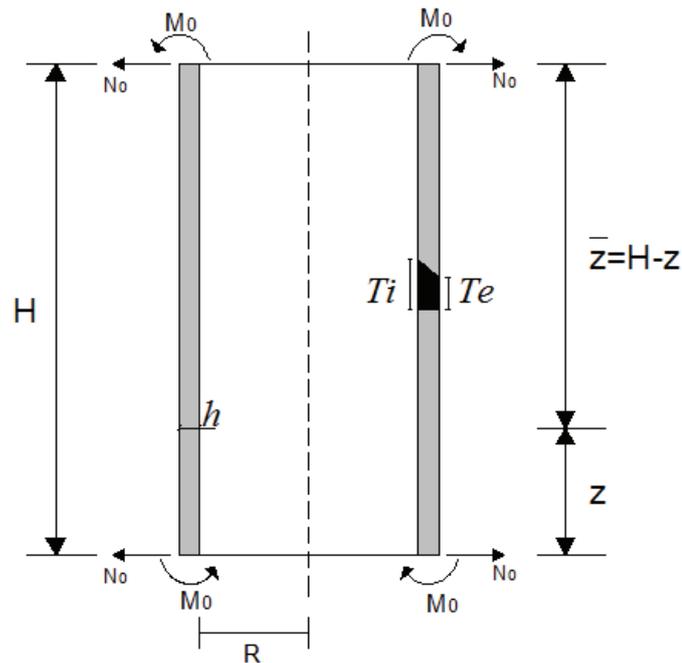


Figura 3.11 – Distribuição da temperaturas em um perfil genérico e esforços nas vinculações (Modificado Carmona, 2005)

Os esforços e momentos representados na Figura 3.11 podem ser encontrados fazendo a substituição dos esforços já calculados no tópico anterior ou em (Ghali & Elliott, 1992), como mostrado a seguir:

### Engastada na base e livre no topo

Tabela 3.5 – Esforços em estrutura cilíndrica engastada na base e livre no topo

$N_{\phi 4} = -E\alpha \left[ \frac{h}{2}(T_e + T_i)k_3 + \frac{(1+\nu)}{2R\beta^2}(T_e - T_i)\bar{k}_1 \right]$	(3.53)
$M_{\phi 4} = -E\alpha \left[ \frac{\nu R\beta^2 h^3}{12(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1 + \frac{h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)(1 - \nu\bar{k}_3) \right]$	(3.54)
$M_{z 4} = -E\alpha \left[ \frac{R\beta^2 h^3}{12(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_1 + \frac{h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)(1 - \bar{k}_3) \right]$	(3.55)

### Simplesmente apoiada na base e livre no topo

Tabela 3.6 – Esforços em estrutura cilíndrica apoiada na base e livre no topo

$N_{\phi 5} = -E\alpha \left[ \frac{h}{2}(T_e + T_i)k_2 + \frac{(1+\nu)}{2R\beta^2}(T_e - T_i)(k_1 + \bar{k}_1 - k_2) \right]$	(3.56)
$M_{\phi 5} = -E\alpha \left[ -\frac{\nu R\beta^2 h^3}{12(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_4 + \frac{h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)[1 - \nu(k_3 - k_4 + \bar{k}_3)] \right]$	(3.57)
$M_{z 5} = -E\alpha \left[ -\frac{R\beta^2 h^3}{12(1-\nu^2)}(T_e + T_i)k_4 + \frac{h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)(1 - k_3 + k_4 - \bar{k}_3) \right]$	(3.58)

### Livre na base e no topo

Tabela 3.7 – Esforços em estrutura cilíndrica livre na base e no topo

$N_{\phi 6} = -E\alpha \frac{(1+\nu)}{2R\beta^2}(T_e - T_i)(k_1 + \bar{k}_1)$	(3.59)
$M_{\phi 6} = -\frac{E\alpha h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)(1 - \nu k_3 - \nu\bar{k}_3)$	(3.60)
$M_{z 6} = -\frac{E\alpha h^2}{12(1-\nu)}(T_e - T_i)(1 - k_3 - \bar{k}_3)$	(3.61)

Como mostrado no t3pico 3.2.2 tem-se os coeficientes abaixo:

$$k_1 = e^{-\beta z}(\cos \beta z - \text{sen } \beta z) \quad (3.62)$$

$$k_2 = e^{-\beta z}(\cos \beta z) \quad (3.63)$$

$$k_3 = e^{-\beta z}(\cos \beta z + \text{sen } \beta z) \quad (3.64)$$

$$k_4 = e^{-\beta z}(\text{sen } \beta z) \quad (3.65)$$

$$\bar{k}_1 = e^{-\beta z}(\cos \beta \bar{z} - \text{sen } \beta \bar{z}) \quad (3.66)$$

$$\bar{k}_2 = e^{-\beta z}(\cos \beta \bar{z}) \quad (3.67)$$

$$\bar{k}_3 = e^{-\beta z}(\cos \beta \bar{z} + \text{sen } \beta \bar{z}) \quad (3.68)$$

$$\bar{k}_4 = e^{-\beta z}(\text{sen } \beta \bar{z}) \quad (3.69)$$

Tais esfor3os surgem devido à flexão da parede da estrutura, que por encontrar as restrições acabam ocorrendo. Com isso, as equações mostradas vêm para mostrar o valor numérico desses efeitos térmicos em estruturas cilíndricas.

## 4. MODELIZAÇÃO NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção será apresentada a análise termomecânica no estado estacionário, utilizando elementos de casca com quatro nós, através de temperaturas conhecidas nas faces internas e externas da estrutura.

Para o manual do ANSYS (2009) alguns tipos de análises acopladas, tais como, termo-estrutural e termomagnética representam efeitos térmicos acoplados com outros fenômenos. Uma análise de campo-acoplada pode usar matriz acoplada de elementos do ANSYS, ou vetor de carga sequencial acoplando entre simulações separadas de cada fenômeno.

O ANSYS permite realizar uma análise acoplada para diferentes problemas de engenharia. No caso da termoelasticidade linear clássica, resolve-se o problema da condução de calor e importa-se a solução resultante (temperatura) no problema de equilíbrio para a obtenção do campo de deslocamento no corpo. Em geral, dois métodos distintos podem ser, a saber, o método sequencial e o método direto.

O método sequencial envolve duas ou mais análises sequenciais, cada uma pertencente a um campo distinto de conhecimento. Este é o método utilizado neste trabalho. O método direto envolve uma única análise e é vantajoso quando o acoplamento entre as grandezas é altamente não linear (Aguiar, 2006).

Para a análise serão utilizados dois elementos da biblioteca do ANSYS 11.0, um para a análise térmica e outro para análise estrutural. Na análise térmica o elemento utilizado é o SHELL131, como mostrado na Figura 4.1.

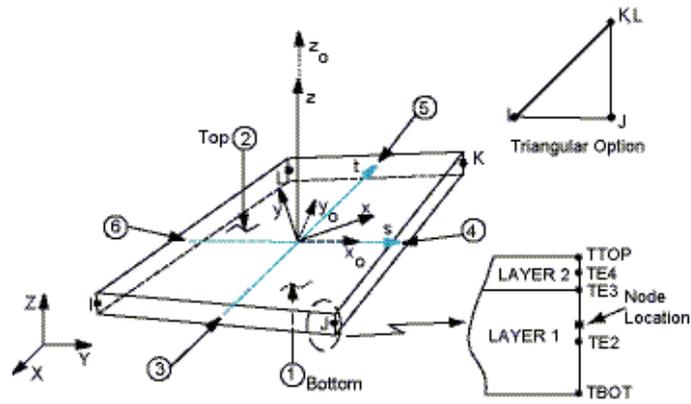


Figura 4.1 – Elemento SHELL131 (Biblioteca ANSYS)

O elemento 3D em camadas SHELL131 é utilizado para análise térmica nos estados estacionário e transiente. Este elemento possui quatro nós com até 32 graus de liberdade de temperatura em cada nó.

A realização da análise estrutural só pode ser feita com um elemento compatível com o SHELL131 que no caso podem ser o SHELL43, SHELL63, SHELL181 ou SHELL281. Para a análise em questão e devido a um conhecimento do elemento de casca SHELL63, será este o elemento utilizado.

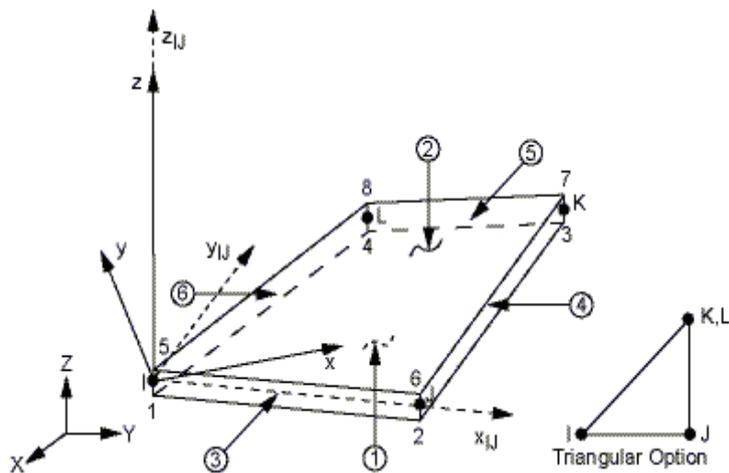


Figura 4.2 – Elemento SHELL63 (Biblioteca ANSYS)

O elemento SHELL63 é usado na análise estrutural com esforços de flexão e membrana. Possui seis graus de liberdade, sendo, três de translação e três de rotação.

Realiza-se a análise térmica, depois, o resultado gerado é colocado como carga térmica na análise estrutural. Vale ressaltar que essa análise pode ser feita usando apenas um elemento estrutural que receba carga térmica.

Na análise direta, a obtenção das matrizes termoelásticas é feita a partir da equação de movimento e equação de conservação do fluxo de calor, acopladas por equações constitutivas termoelásticas que produz a seguinte equação de matrizes de elementos finitos (Ansys, 2009).

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Sendo:

$$[M] - \text{Matriz de massa do elemento} = \rho \int_{vol} [N]^T [N] d(vol);$$

$[C]$  – Matriz de amortecimento estrutural do elemento;

$$[K] - \text{Matriz de rigidez do elemento} = \int_{vol} [B]^T [D] [B] d(vol);$$

$\{u\}$  – Vetor de deslocamento;

$\{F\}$  – Soma dos vetores de forças nodais do elemento;

$$[C^t] - \text{Matriz de calor específico do elemento} = \rho \int_{vol} c \{N\} \{N\}^T d(vol);$$

$$[K^t] - \text{Matriz de condutividade de difusão do elemento} = \int_{vol} [B]^T [D] [B] d(vol);$$

$\{T\}$  – Vetor de temperatura;

$\{Q\}$  – Soma das cargas de geração de calor dos elementos e vetor de fluxo de calor de convecção de superfície;

$$[K^{ut}] - \text{Matriz de rigidez termoelástica do elemento} = \int_{vol} [B]^T \{\beta\} (\nabla \{N\}^T) d(vol);$$

$$[B] - \text{Matriz de deformação-deslocamento} = \{\varepsilon\} \{u\}^{-1};$$

$$[C^{tu}] - \text{Matriz de amortecimento termoelástica} = -T_0 [K^{ut}]^T;$$

$\{N\}$ - Funções de forma,  $\{\varepsilon\}$  - vetor de deformação,  $T_0$  - temperatura de referência absoluta,  $\rho$  - densidade,  $c$  - Calor específico;

$\{\beta\}$  - Vetor de coeficientes termo-elásticos =  $[D]\{\alpha\}$ ;

$\{\alpha\}$  - Vetor de coeficientes de expansão térmica.

Nesse trabalho não serão considerados os dois primeiros termos da Equação 4.1, pois não será utilizada a matriz de massa nem o amortecimento, restando somente o acoplamento seguinte:

$$\begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Vale relembrar que a análise realizada será sequencial, ou seja, primeiro é feita a análise térmica e em seguida com outro elemento a análise estrutural para um estado estacionário de temperatura.

#### 4.1 - RESULTADO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES ESTRUTURAIS

Esta seção discute as relações para material linear das tensões e deformações que é encontrada na literatura e é utilizada na formulação por elementos finitos do programa ANSYS. Sendo que a tensão é relacionada com a deformação por:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (4.3)$$

Onde  $\{\sigma\}$  representa o vetor de tensões, dado em nas direções  $x, y$  e  $z$  quando considerado o sistema cartesiano, como mostrado na Equação 4.4:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}]^T \quad (4.4)$$

O vetor de tensão, mostrado em todas as suas direções podem ser representado como um elemento infinitesimal, sendo que o programa ANSYS considera a tração positiva e compressão negativa, como mostrado na Figura 4.3:

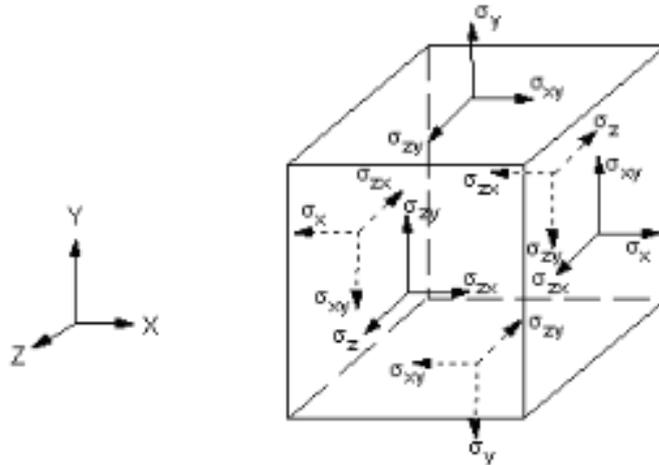


Figura 4.3 – Elemento infinitesimal representando as tensões (ANSYS, 2009)

A matriz de elasticidade  $[D]$  ou matriz de tensão-deformação, onde se encontram as relações constitutivas do material, pode ser vista na Equação 4.5:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Sendo  $E_x$  o módulo de elasticidade na direção  $x$ ,  $\nu_{xy}$  coeficiente de Poisson,  $G_{xy} = E_x / 2(1 + \nu_{xy})$  é o módulo de cisalhamento.

O vetor de deformação elástica considerado na análise numérica leva em consideração duas parcelas, como a deformação total e a deformação térmica, sendo que a Equação 4.6 apresenta seu valor.

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\} \quad (4.6)$$

Sendo que o vetor de deformação total  $\{\varepsilon\}$  é dado pela Equação 4.7:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz}]^T \quad (4.7)$$

A outra parcela da deformação é referente à deformação de origem térmica que para um caso 3D é dado pelo vetor seguinte:

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [\alpha_x^{se} \quad \alpha_y^{se} \quad \alpha_z^{se} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.8)$$

Com  $\alpha_x^{se}$  o coeficiente secante de expansão térmica na direção  $x$ , e  $\Delta T = T - T_{ref}$  a diferença entre a temperatura no corpo e a temperatura de referência (temperatura do ambiente).

## 4.2 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS

A equação constitutiva termoelástica acoplada do elemento é obtida com a utilização das equações 4.3 e 4.6, que resulta na Equação 4.9.

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} - \{\alpha\} \Delta T \quad (4.9)$$

É importante notar que da forma como está mostrada a equação abaixo, a análise pode ser feita de forma sequencial, ou seja, uma parcela referente a análise mecânica e outra à termomecânica.

## 4.3 - RESULTADOS DE SAÍDA NO ELEMENTO DE CASCA (ANSYS)

A saída dos resultados do programa tem algumas peculiaridades a serem destacadas. Para elementos de casca, as forças ( $F$ ) e momentos ( $M$ ) por unidade de comprimento (Cook, 1995) são calculados como:

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (4.10)$$

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad (4.11)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad (4.12)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \quad (4.13)$$

Para elementos de casca com material elástico linear, a teoria utilizada pelo programa faz uma simplificação das equações 4.10 até 4.13, que se transformam nas Equações 4.14 à 4.17, como ilustrado abaixo.

$$F_x = \frac{h(\sigma_{x,top} + 4\sigma_{x,mid} + \sigma_{x,bot})}{6} \quad (4.14)$$

$$F_y = \frac{h(\sigma_{y,top} + 4\sigma_{y,mid} + \sigma_{y,bot})}{6} \quad (4.15)$$

$$M_x = \frac{h^2(\sigma_{x,top} - \sigma_{x,bot})}{12} \quad (4.16)$$

$$M_y = \frac{h^2(\sigma_{y,top} - \sigma_{y,bot})}{12} \quad (4.17)$$

Das equações acima é possível perceber a maneira que o programa calcula os esforços da estrutura de casca. Como visto anteriormente as forças estão representadas por  $F$  e os momento por  $M$ , sendo que essa nomenclatura no programa é representada por  $T$  e  $M$  respectivamente, em sua teoria de referência.

A obtenção dos resultados no programa ANSYS requer o conhecimento do seu sistema de coordenadas, tanto na hora da criação do modelo quanto na retirada dos resultados. De acordo com Lustosa (2011), a interpretação dos resultados da saída do Ansys não é uma tarefa tão simples para um usuário iniciante.

Os resultados podem ser retirados em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. No entanto, o programa tem como padrão a saída dos resultados em coordenadas cartesianas, mesmo que durante a montagem do modelo tenha sido definido o sistema cilíndrico. Com isso, ao solicitar os resultados novamente há a necessidade de configurar a saída para o sistema de coordenadas desejado.

Quando da definição do sistema de coordenadas desejado existem as possibilidades de locais e globais, sendo aqui abordada a primeira. A figura abaixo ilustra o sistema de coordenada cilíndrica.

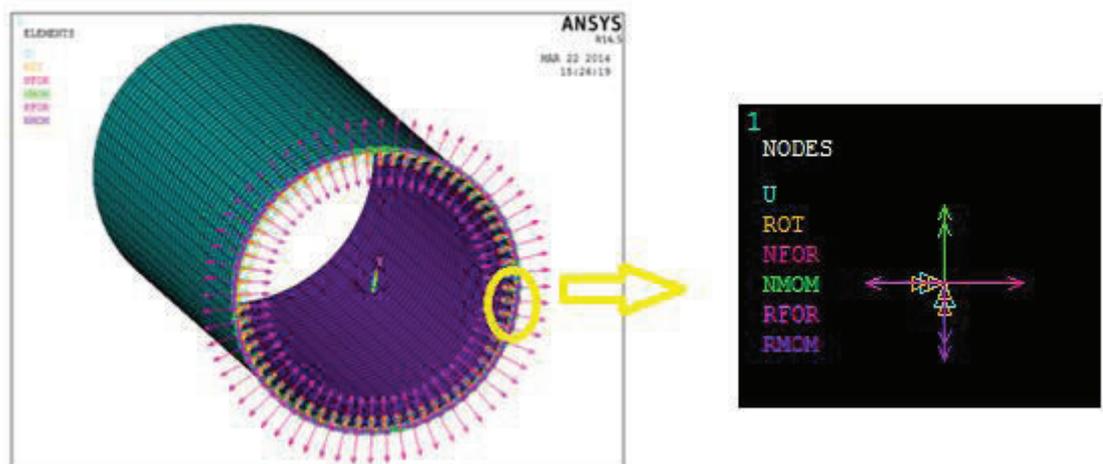


Figura 4.4 – Ilustração do sistema cilíndrico no ANSYS

A Figura 4.4 mostra as direções dos esforços que estão atuando na restrição no sistema de coordenadas cilíndricas. Estão evidentes as letras e cores de cada esforço ou restrição, tendo seus significados abaixo:

*U* – deslocamentos nas direções radiais (x), tangenciais (y) e axiais (z);

*ROT* – rotação nas direções radiais (x), tangenciais (y) e axiais (z);

*NFORC* – Forças atuantes normais;

*RFORC* – Reações das forças normais;

*NMOM* – Momento atuante;

*RMOM* – Momento de reação.

Aqui, procurou-se adotar o mesmo sistema de coordenadas do programa. Com isso, as formulações analíticas já estão respeitando as coordenadas do programa.

Existem outras formulações mais simplificadas que a do programa ANSYS que dão resultados excelentes. Um exemplo disso é a formulação feita por Zienkiewicz & Taylor (1991) e adaptada para problemas térmicos por Ghali & Elliott (1992), que utiliza uma simplificação de elementos cônicos lineares. Apesar de não ser um dos objetivos deste trabalho, com esta formulação está sendo feito um programa de elementos finitos, que não está neste trabalho por não ter validação suficiente até o momento. A formulação em questão pode ser vista no Anexo B.

Aqui não será trabalhado com uma temperatura de referência, no entanto pelo modelo apresentado a menor temperatura será considerado como referência.

A Figura 4.5 ilustra o esquema de análise que será utilizado para obtenção dos resultados numéricos.

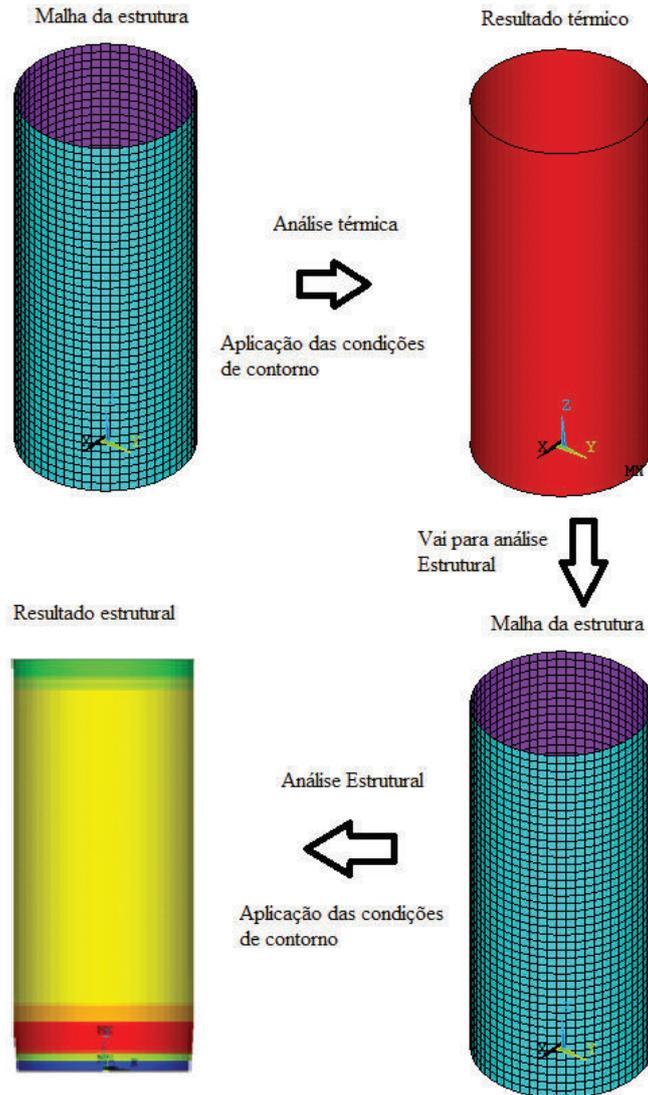


Figura 4.5 – Esquema de análise térmica e estrutural da estrutura cilíndrica

De acordo com a Figura 4.5, inicialmente cria-se a geometria com o elemento SHELL131, com posterior refinamento da malha, aplicação da temperatura e solução. Na segunda etapa, realizam-se todos os procedimentos anteriores, no entanto com o elemento SHELL63 e aplica-se a solução do resultado térmico como carga na estrutura. Dessa maneira os casos seguintes serão analisados.

## 5. RESULTADOS

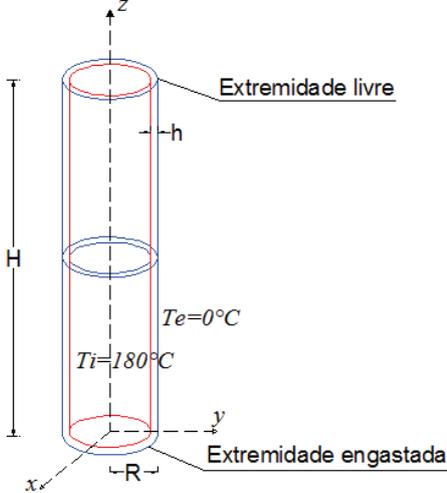
Este capítulo apresenta as primeiras análises, testes de convergências e análises finais com a utilização do programa de elementos finitos ANSYS e formulação analítica apresentada no capítulo 3, com a finalidade de verificar o quão próximo é o resultado numérico do analítico, assim como o entendimento dessa ferramenta de análise.

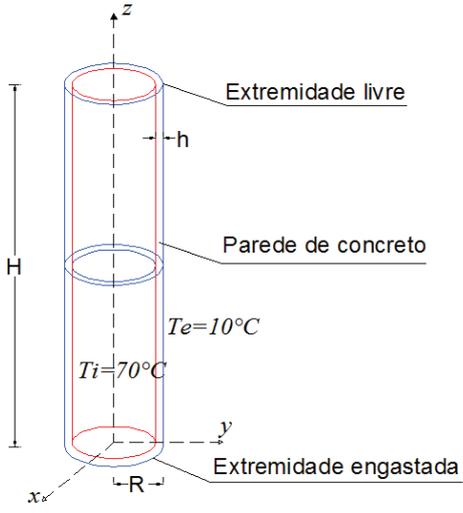
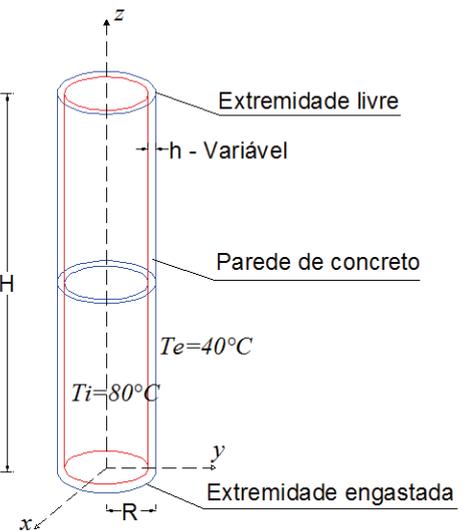
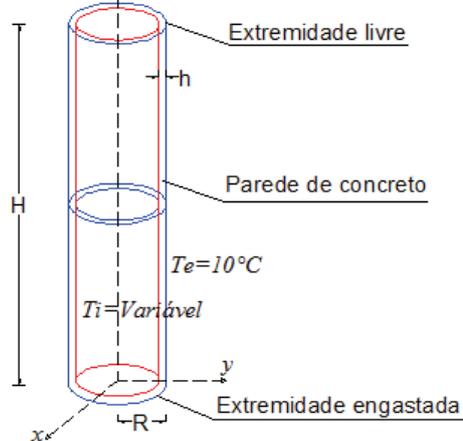
As análises serão definidas como casos, sendo que cada um possui suas características. Serão apresentadas duas condições de contorno, a saber: engastado, representado por E e apoiado representado por A. As outras bordas serão livres, representadas por L.

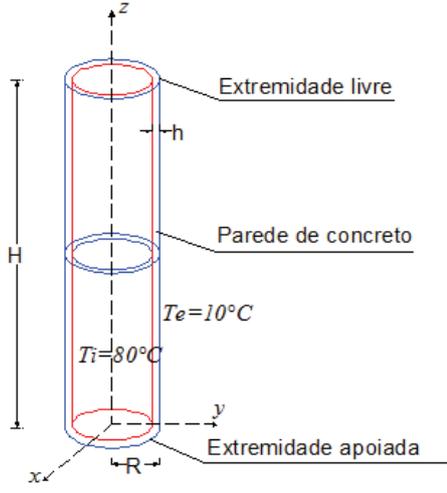
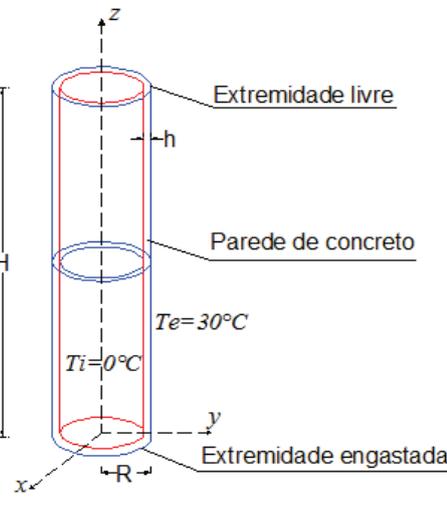
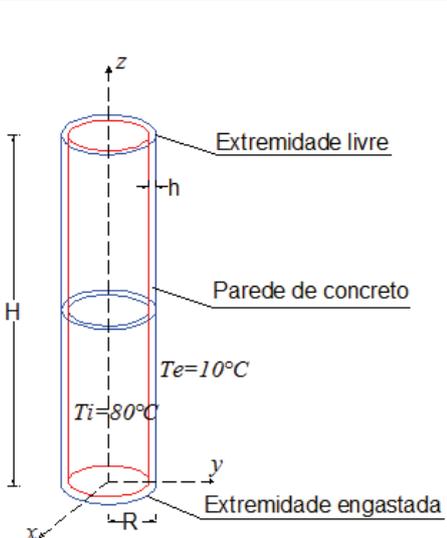
Nos resultados analíticos para cascas com bordas engastadas e livres serão utilizadas as Equações 3.34, 3.53, 3.54 e 3.55. Já no caso da condição apoiada e livre serão utilizadas as Equações 3.34, 3.56, 3.57 e 3.58.

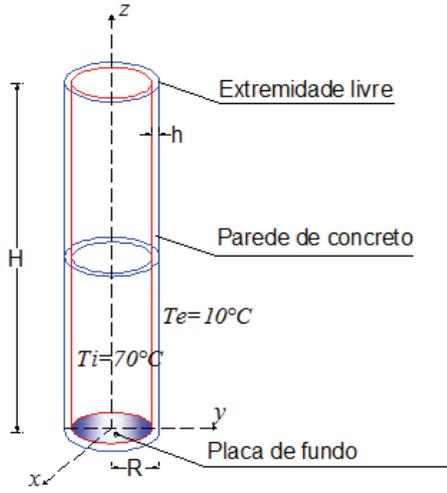
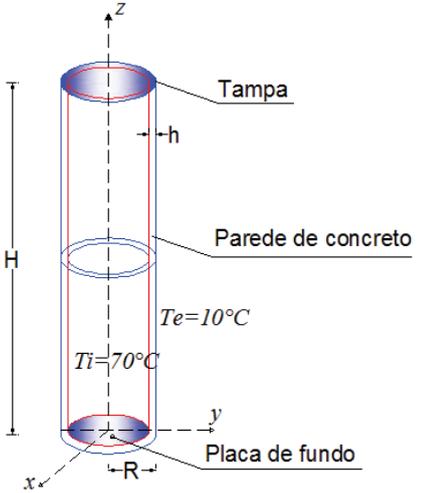
Os casos estudados são apresentados pela Tabela 5.1 e realizados de acordo com a Tabela 1.1.

Tabela 5.1 - Casos analisados neste trabalho e suas particularidades

CASOS	ESQUEMA	ANÁLISE	OBJETIVO
1		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>-Caso preliminar;</li> <li>-Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com a literatura (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959)</li> </ul>

2		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realizar um teste de convergência;</li> <li>- Obtenção do tamanho do lado do elemento que proporciona uma malha ideal para uma resposta satisfatória.</li> </ul>
3		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realizar uma variação no parâmetro espessura;</li> <li>- Verificar a relação h/R;</li> <li>- Observar como o resultado analítico e numérico diferem a partir do aumento da relação h/R;</li> </ul>
4		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>- Verificar o comportamento dos esforços com o aumento da temperatura;</li> <li>- Realizar uma análise de variação do parâmetro temperatura;</li> </ul>

05		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>-Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com a literatura (GHALI, 2000)</li> <li>-Verificar os esforços para um líquido a alta temperatura.</li> </ul>
06		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>-Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com a literatura (GHALI e ELLIOTT, 1992)</li> <li>- Verificar os esforços para à temperatura ambiente.</li> </ul>
07		A-N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>-Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com a literatura (GHALI, 2000)</li> <li>-apresentado por (CARMONA e PINTO JR., 2005);</li> <li>- Verificar os esforços para um líquido a alta temperatura.</li> </ul>

08		N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>-Caso fictício;</li> <li>-Comparar os resultados numéricos com fundo e sem fundo;</li> <li>- Verificar as diferenças nos resultados.</li> </ul>
09		N	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Comparar os resultados do cilindro sem tampa e sem fundo com o cilindro com tampa e fundo;</li> <li>- Caso fictício.</li> </ul>

Legenda:

A= analítico; N= numérico.

A Tabela 5.1 ilustra os casos estudados, mostrando as condições de contorno aplicadas e as temperaturas que são adotadas nas faces internas e externas.

### 5.1- CASO 01 – CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e = 0^\circ\text{C}$ E $T_i = 180^\circ\text{C}$

Nesta seção será mostrado um resultado preliminar de uma solução da literatura com o resultado do ANSYS 11.0, apenas para validar os elementos em estudo.

O problema aborda um cilindro de ferro fundido engastado na base e livre no topo submetido a um gradiente de temperatura. Na face externa do cilindro a temperatura é nula, enquanto que na face interna a temperatura é 180 °C. Será considerado aqui apenas o processo de condução de temperatura. O problema foi resolvido analiticamente por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) e os dados estão na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Dados da análise (Caso 01)

Características	Valores	Unidades
E	100	GPa
$\nu$	0.2	
$\alpha$	$1,01 \times 10^{-5}$	/°C
H	0,108	m
h	0,0345	m
R	0,246	m
h/R	0,14	
$H^2/Rh$	1,37	

A estrutura genérica pode ser visualizada na Figura 5.1:

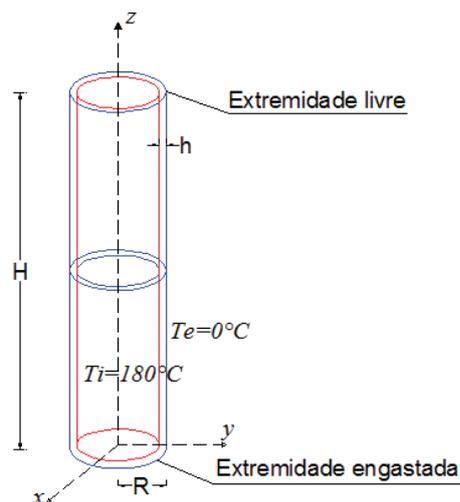


Figura 5.1 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 01)

## Análise e discussões

O resultado para máxima tensão térmica axial é encontrada por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), com o valor de 45,83 MPa na base da estrutura, considerando as correções propostas por eles. Essa correção se deve à estrutura não obedecer as relações  $h/R < 1/20$  e  $H^2/Rh \geq 5,8$  já estabelecidas no capítulo 3.

A Figura 5.2 ilustra o modelo numérico, com um tamanho de elemento de 0.5 de lado, sendo evidenciada a malha na estrutura. Como se observa, a malha do cilindro está bem refinada.

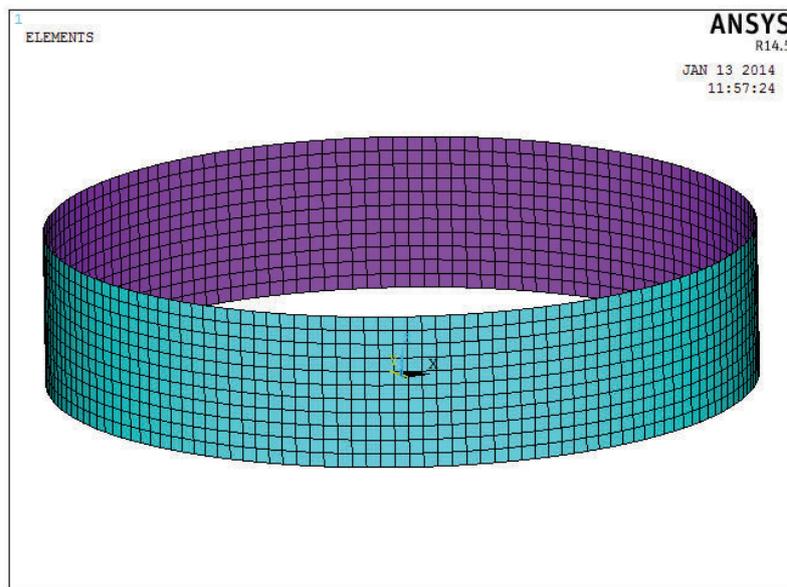


Figura 5.2 – Malha do tanque (Caso 01- tamanho de 0,5 cm)

Na Figura 5.3, são mostrados os resultados das tensões térmicas axiais no cilindro para dois tamanhos de elementos. O primeiro resultado refere-se ao tamanho de 0.5 cm do lado do elemento quadrilateral de casca utilizado.

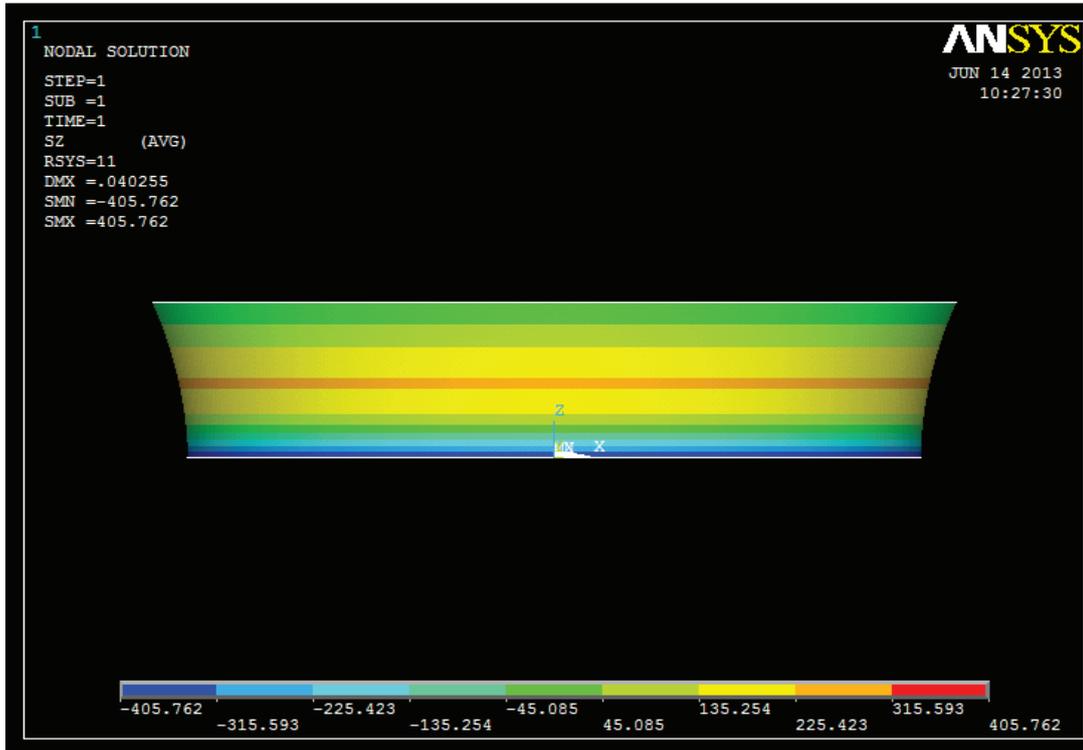


Figura 5.3 – Tensões térmicas axiais (Caso 01- tamanho de 0,5 cm)

O segundo resultado refere-se ao tamanho de elemento mais refinado de 0,2 cm na Figura 5.4.

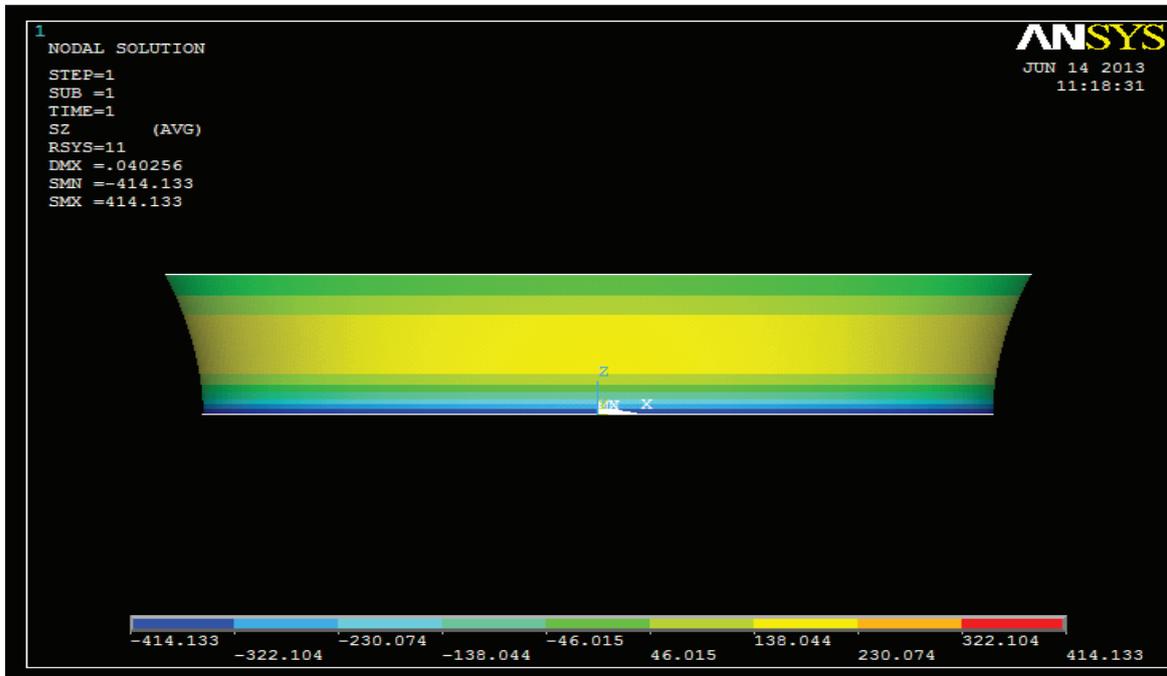


Figura 5.4 – Tensões térmicas axiais (Caso 01 – tamanho de 0,2 cm)

A partir dos refinamentos realizados para a estrutura, observa-se que o resultado se aproxima do valor de referência de 45,83 MPa ( 458,30 kgf/cm<sup>2</sup> ). Para o segundo resultado na Figura 5.4 há uma diferença de 4,4 MPa (44 kgf/cm<sup>2</sup>) que equivale a aproximadamente 9,63% do valor estabelecido.

As maiores tensões são próximas das bordas engastadas, pois nelas estão concentrados os momentos de flexão de origem térmica, além de serem regiões que sofrem grandes perturbações.

Embora os resultados estejam próximos, existe a necessidade de um estudo aprofundado a fim de validar a análise numérica. Com isso nos casos seguintes serão realizados alguns testes de convergências e variações de parâmetros, com o intuito de conhecer o comportamento do elemento utilizado para uma solução mais precisa.

## **5.2- CASO 02 – VARIAÇÃO DO TAMANHO DO LADO DO ELEMENTO FINITO QUADRILATERAL**

Neste tópico serão realizados testes de convergência com a finalidade de verificar a utilização do elemento finito, descobrindo com isso o tamanho da malha necessária para obtenção de resultados satisfatórios.

A variação do resultado numérico em relação ao analítico será mostrada através de gráficos em função de percentual de erro para os momentos radiais e em função dos deslocamentos radiais, sendo que, ambos variam com a relação (altura do cilindro)/(tamanho do elemento). As temperaturas internas e externas serão de 70 °C e 10 °C respectivamente e a estrutura está engastada na base e livre no topo, sendo os dados de análise apresentado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dados da análise (Caso 02)

Características	Valores	Unidades
$E$	21	GPa
$\nu$	0.2	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
$K$	1,79	$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
$\rho$	2500	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c$	1100	$\text{cal}/(\text{g}\cdot^{\circ}\text{C})$
$H$	10	m
$h$	0,10	m
$R$	2,50	m
$h/R$	0,04	
$H^2/Rh$	400	

A partir dos dados da Tabela 5.3 e com os tamanhos de elementos da Tabela 5.4 e a estrutura na figura abaixo, serão realizadas as análises.

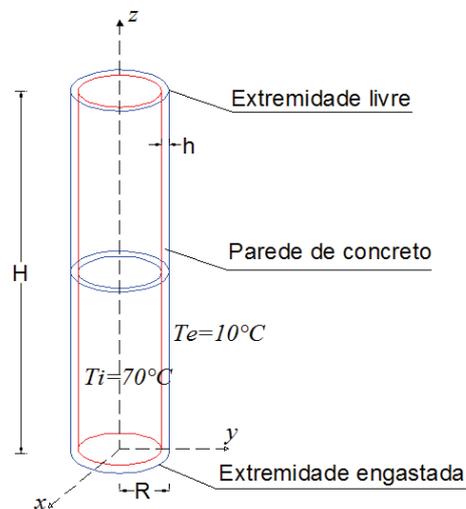


Figura 5.5 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 02)

A Figura 5.5 ilustra a estrutura com suas condições de contorno e as temperaturas aplicadas, sendo que se trata de um caso genérico apenas para o teste de convergência de uma estrutura engastada na base e livre no topo. As análises foram divididas como mostra a Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Tamanhos de elementos da análise numérica

Análise	Tamanho do elemento
RET1	5
RET2	3
RET3	1
RET4	0,5
RET5	0,25

O esquema de análise está representado na Figura 5.6, em que ilustra a malha de todos os casos:

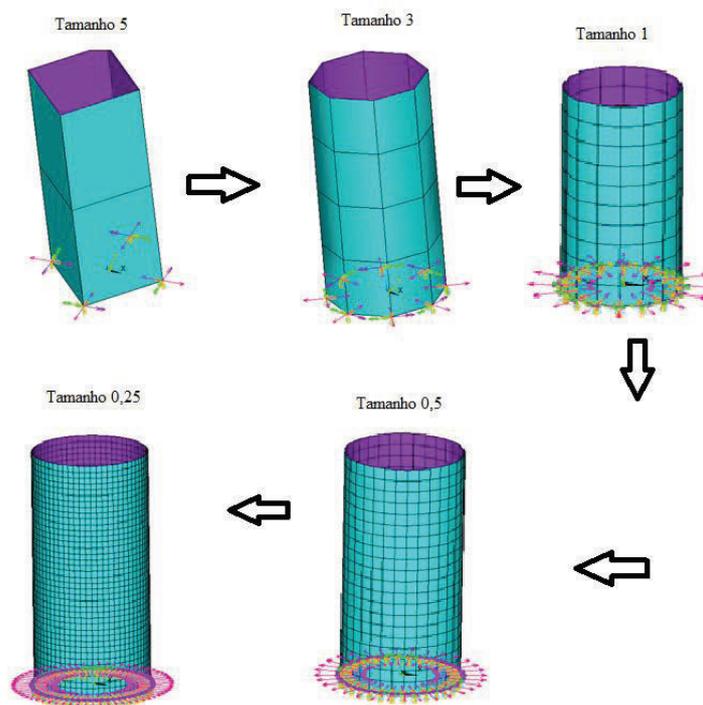


Figura 5.6 – Esquema sequencial de análise de convergência do tamanho do elemento (Caso 02)

Os resultados numéricos obtidos podem ser observados abaixo, através de gráficos que mostram as diferenças encontradas com os resultados analíticos para os diferentes tamanhos de elementos. O resultado numérico está representado pelo nome do programa

(ANSYS) seguido pelo respectivo tamanho de elemento utilizado na análise e o resultado analítico.

### Análise e discussões

A Figura 5.7 exhibe os resultados das tensões circunferenciais que se mostram tão mais precisas quanto mais refinada for a malha. Nota-se que os resultados estão representados pelo nome do programa seguido do tamanho do elemento utilizado, neste caso em metros (m).

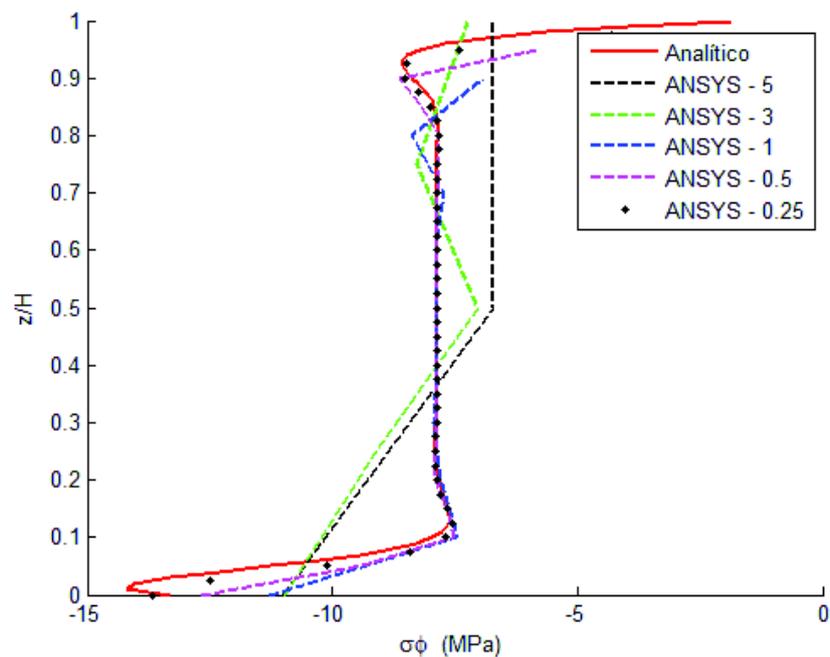


Figura 5.7 – Resultados da tensão circunferencial (Caso 02)

É importante notar que com elementos menores de 0,5 m os resultados se mostram aceitáveis. No entanto, esse resultado é ideal para a estrutura em estudo, por isso, será realizada uma análise paramétrica dos resultados.

Através de uma análise paramétrica será possível estabelecer uma relação aceitável para diversos tamanhos de estruturas cilíndricas e o tamanho de elemento que mais se adequa. Diante disso, será realizado um teste de convergência com a deflexão radial da

estrutura numericamente, sendo verificado o comportamento da relação (altura do cilindro- $H$ )/(tamanho do elemento- $he$ ), como mostrado na Figura 5.8 e Figura 5.9.

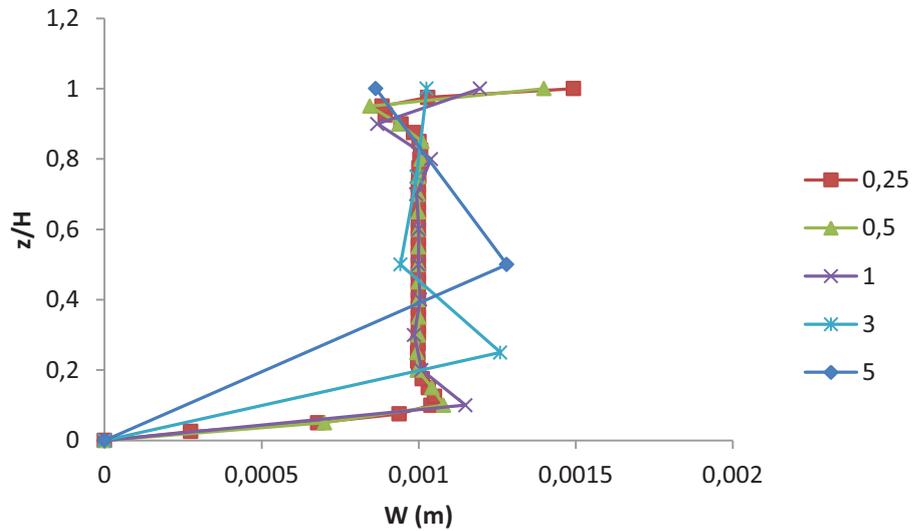


Figura 5.8 – Convergência do deslocamento radial  $-w$  (Caso 02)

Na Figura 5.8 está representado o tamanho do elemento precedido do nome do programa utilizado. Sendo que para tamanhos de elementos ( $he$ ) menores que 0,5 m nota-se uma boa aproximação dos resultados. A fim de verificar a variação da relação  $H/he$ , na Figura 5.11 está um gráfico que enfatiza sua convergência do deslocamento radial.

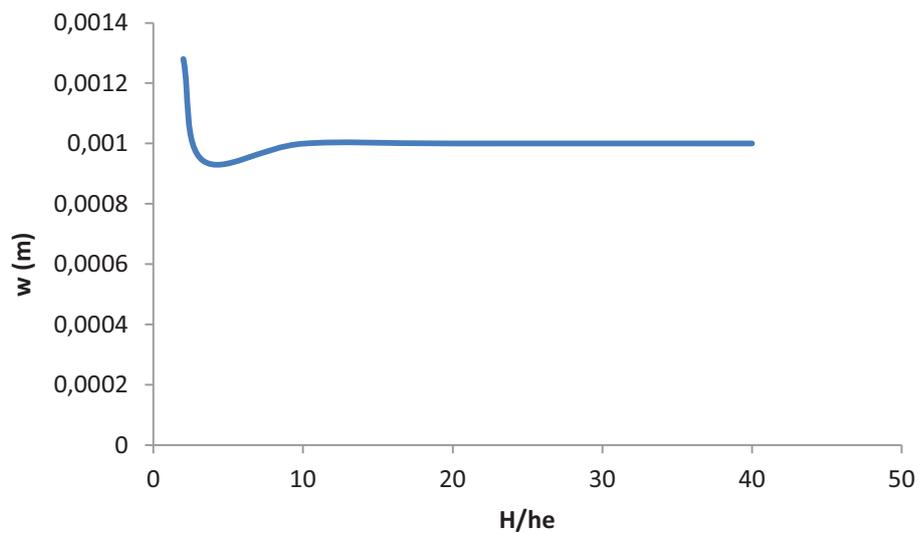


Figura 5.9 – Convergência do deslocamento radial com a relação  $H/he$  (Caso 02)

Neste caso, para relações  $H/h_e \geq 10$  os resultados dos deslocamentos (Figura 5.9) convergem para o mesmo valor. Na Figura 5.10 estão representadas as curvas dos momentos circunferenciais para cada tamanho dos elementos.

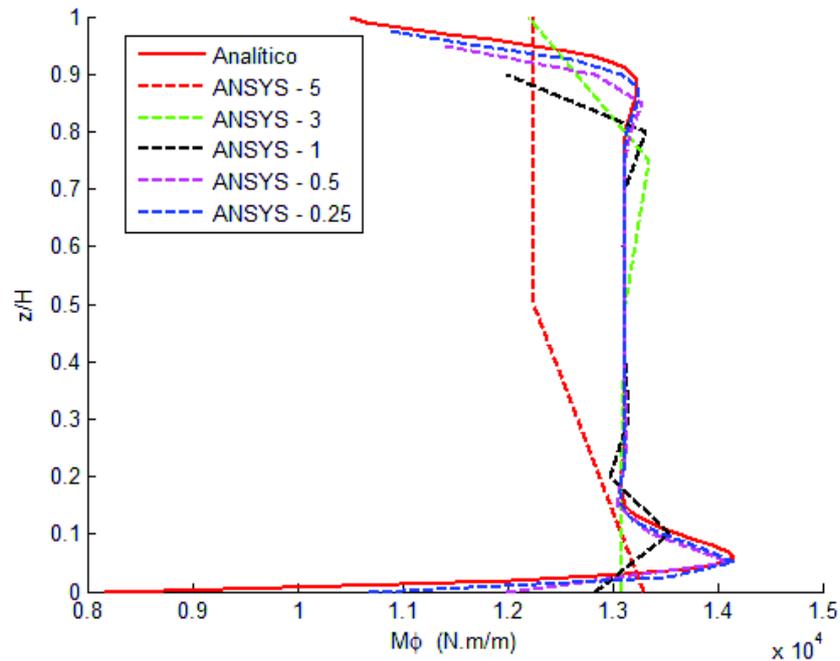


Figura 5.10 – Convergência do momento circunferencial com o tamanho do elemento  
(Caso 02)

Os valores dos momentos circunferenciais começam a se aproximar com um tamanho de elemento de 0,5 m (Figura 5.10). Sabendo disso, será feito novamente um estudo com os momentos circunferenciais para duas alturas escolhidas de acordo com a importância de seus efeitos na estrutura. Sendo  $Erro = (M_{\phi Analítica} - M_{\phi Numérica}) / M_{\phi Analítica} \times 100$ .

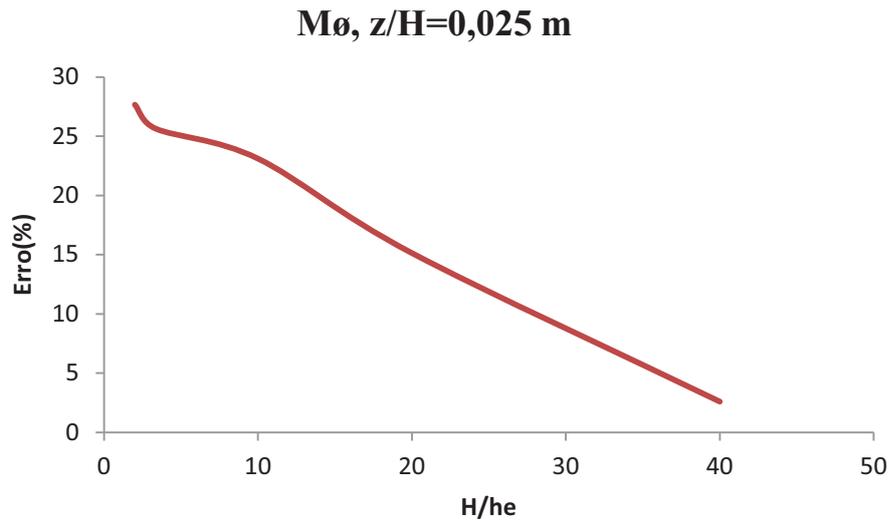


Figura 5.11 – Convergência do momento circunferencial na altura de 0,25 m (Caso 02)

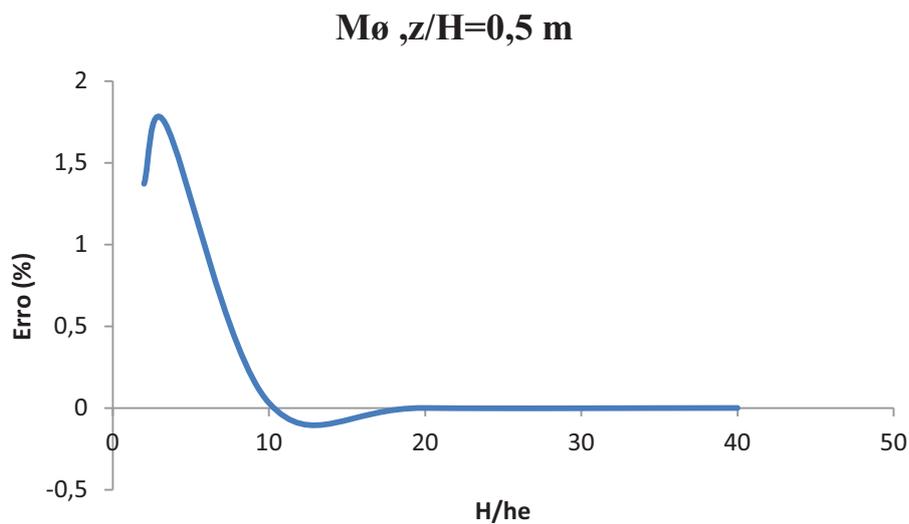


Figura 5.12 – Convergência do momento circunferencial na altura de 5 m (Caso 02)

Na verificação da Figura 5.11 a convergência não é tão satisfatória do que Figura 5.12, em que todos os valores da relação (altura do cilindro)/(tamanho do elemento) estudados demonstram uma boa aproximação para o resultado analítico.

### 5.3- CASO 03 – VARIAÇÃO DA RELAÇÃO $h/R$

Aqui será realizada a variação no parâmetro, com o elemento Shell63, para várias relações  $h/R$ , sendo os resultados mostrados em porcentagem de erro com o resultado analítico. O

teste leva em consideração várias alturas em um tanque de 10,9 m, tal como: 0, 2, 5,10 e 10,9 metros. A análise leva em consideração uma temperatura constante de 80 °C e 40 °C na face interna e externa do tanque, respectivamente. Além disso, a estrutura está engastada na base e livre no topo.

Tabela 5.5 – Dados da análise (Caso 03)

Características	Valores	Unidades
$E$	21	GPa
$\nu$	0.2	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
$K$	1,79	$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
$\rho$	2500	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c$	1100	$\text{cal}/(\text{g}\cdot^{\circ}\text{C})$
$H$	10,9	m

O detalhe da estrutura é mostrado abaixo, com suas condições de contorno e as temperaturas aplicadas, sendo que os dados estão representados na tabela acima.

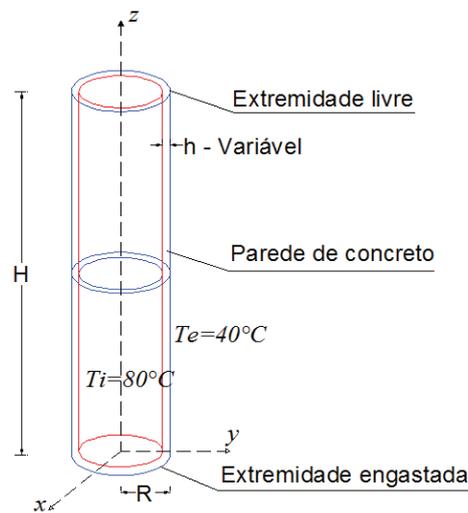


Figura 5.13 – Detalhe da estrutura com suas condições de contorno e temperatura (Caso 03)

## Análise e discussões

Os resultados serão mostrados inicialmente com a superposição dos resultados analíticos e numéricos para as tensões circunferenciais obtidas. Logo abaixo podem ser observados os resultados para as tensões circunferenciais.

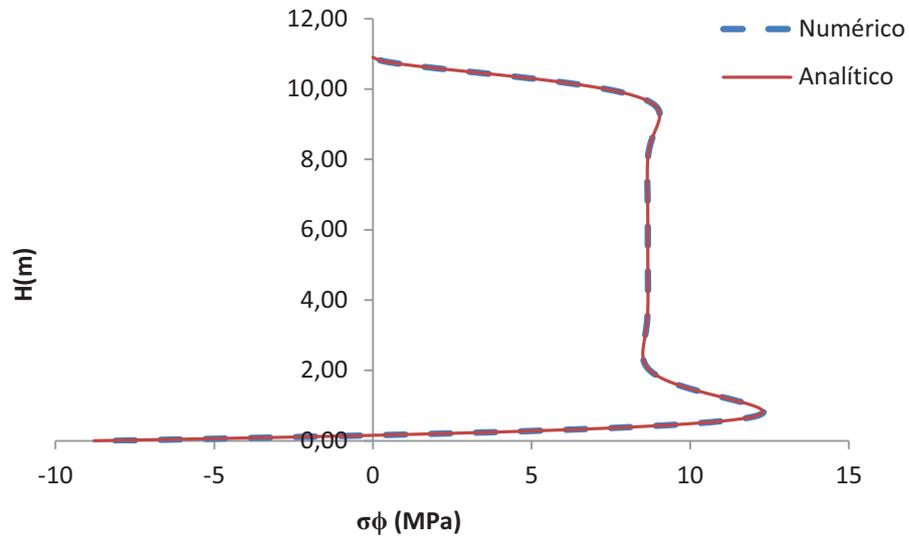


Figura 5.14 – Tensão circunferencial na parede do tanque com  $h/R=0,085$  (Caso 03)

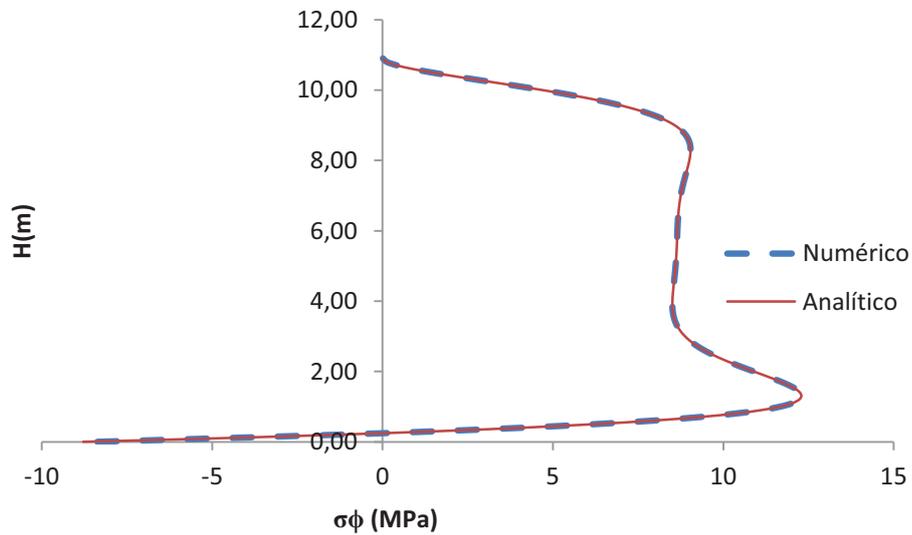


Figura 5.15 – Tensão circunferencial na parede do tanque com  $h/R=0,213$  (Caso 03)

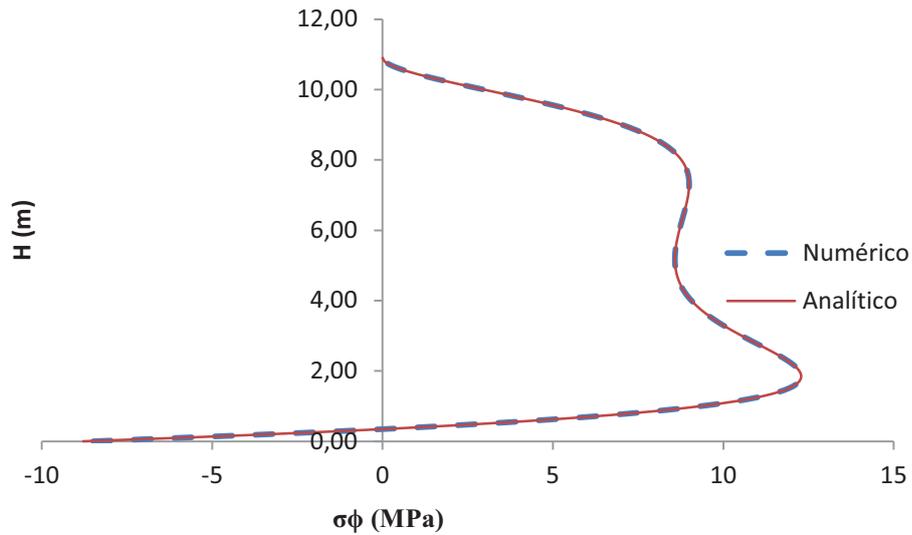


Figura 5.16 – Tensão circunferencial na parede do tanque com  $h/R=0,426$  (Caso 03)

Da Figura 5.14 à Figura 5.16 é possível notar que quanto maior a relação  $h/R$ , os resultados analíticos e numéricos são praticamente iguais. Para melhor entendimento serão escolhidos alguns pontos ao longo da altura do cilindro com o intuito de mostrar as diferenças dos resultados numéricos a analíticos, sendo  $Erro = (\sigma_{\phi Analítica} - \sigma_{\phi Numérica}) / \sigma_{\phi Analítica} \times 100$ , como ilustrado a seguir.

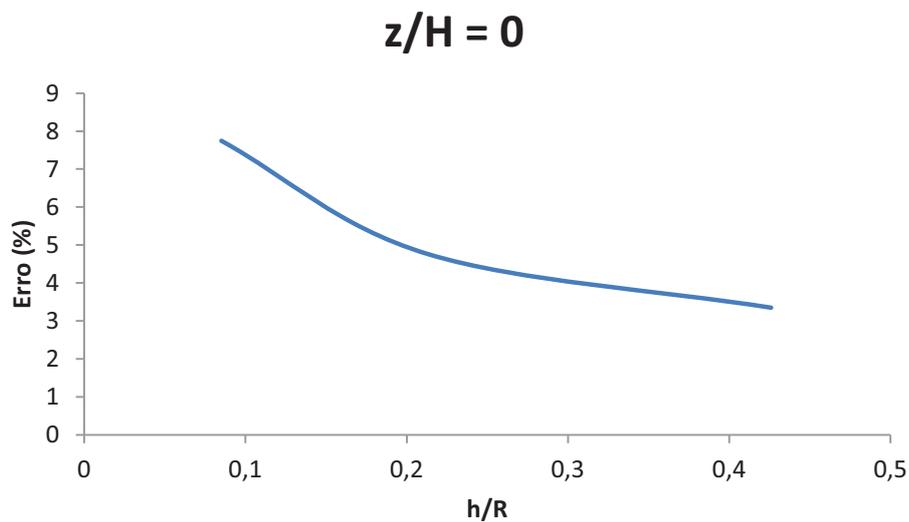


Figura 5.17 – Convergência na base do tanque ( $z/H=0$ )

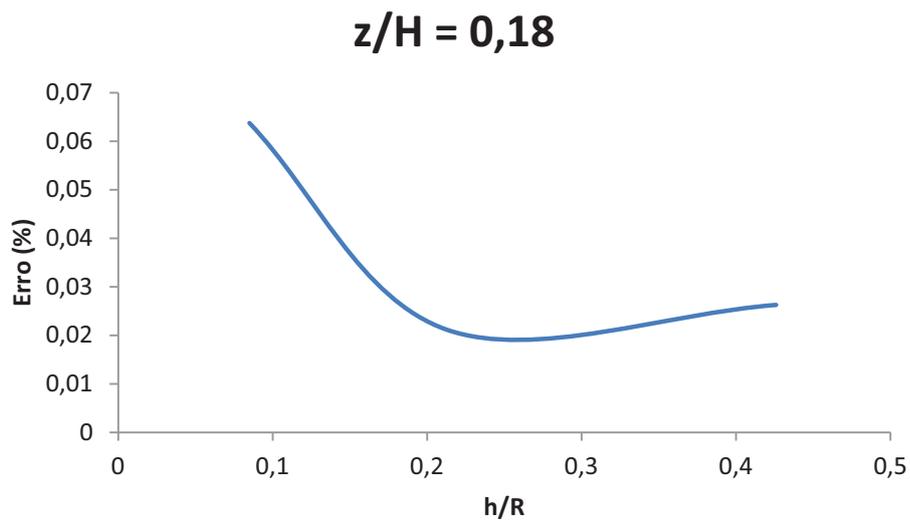


Figura 5.18 – Convergência na altura de 2 metros do tanque ( $z/H = 0,18$ )

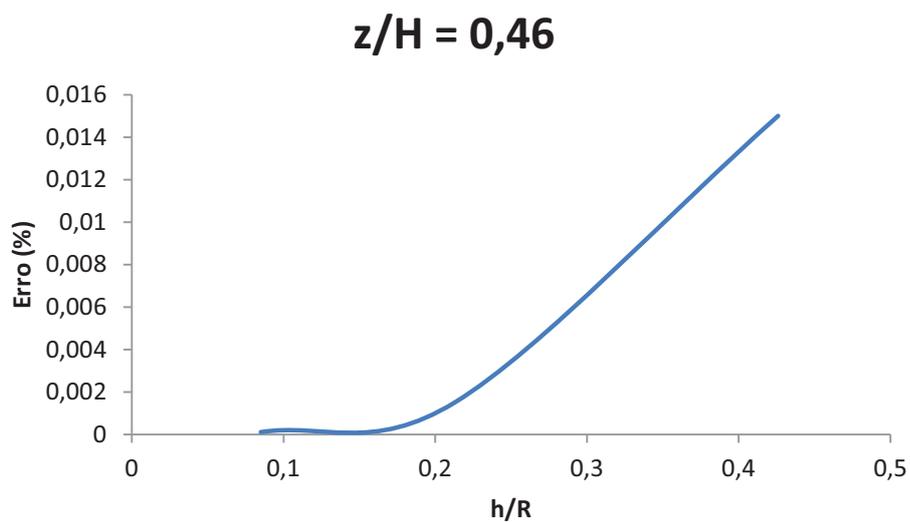


Figura 5.19 – Convergência na altura de 5 metros do tanque ( $z/H = 0,46$ )

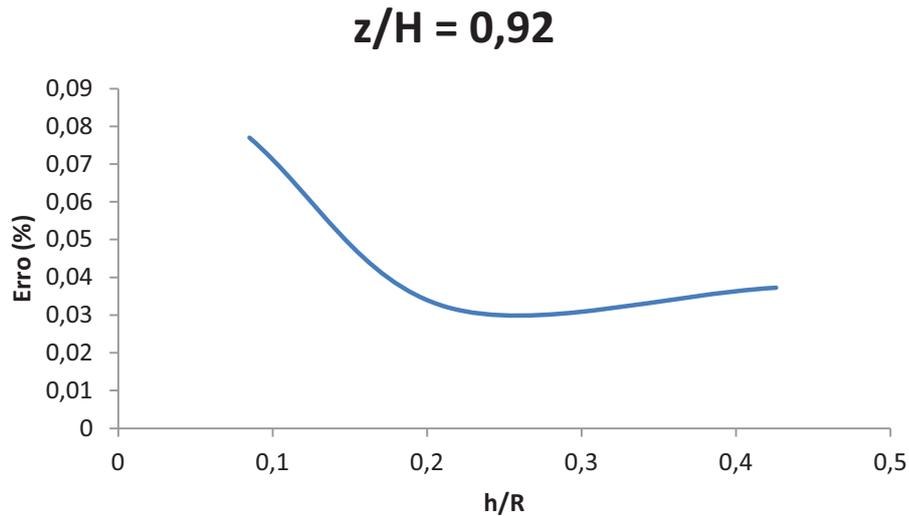


Figura 5.20 – Convergência na altura de 10 metros do tanque ( $z/H = 0,92$ )

Da mesma maneira que as análises anteriores percebe-se pequenas diferenças entre os resultados analíticos e numéricos conforme a um aumento da relação  $h/R$ . Tal fato pode ser explicado pois a relação tem um limite a ser atingido para que os resultados fiquem dentro da teoria adotada, e nesse caso os valores fora da teoria não seriam válidos. Neste caso a relação  $h/R$  teria que ser menor que  $1/20$ , como apresentado no tópico 3.2.2 ou atender ao menos a relação  $H^2/Rh$  que será exibida para as mesmas análises abaixo, com o

$$Erro = (\sigma_{\phi_{Analitica}} - \sigma_{\phi_{Numérica}}) / \sigma_{\phi_{Analitica}} \times 100 \quad .$$

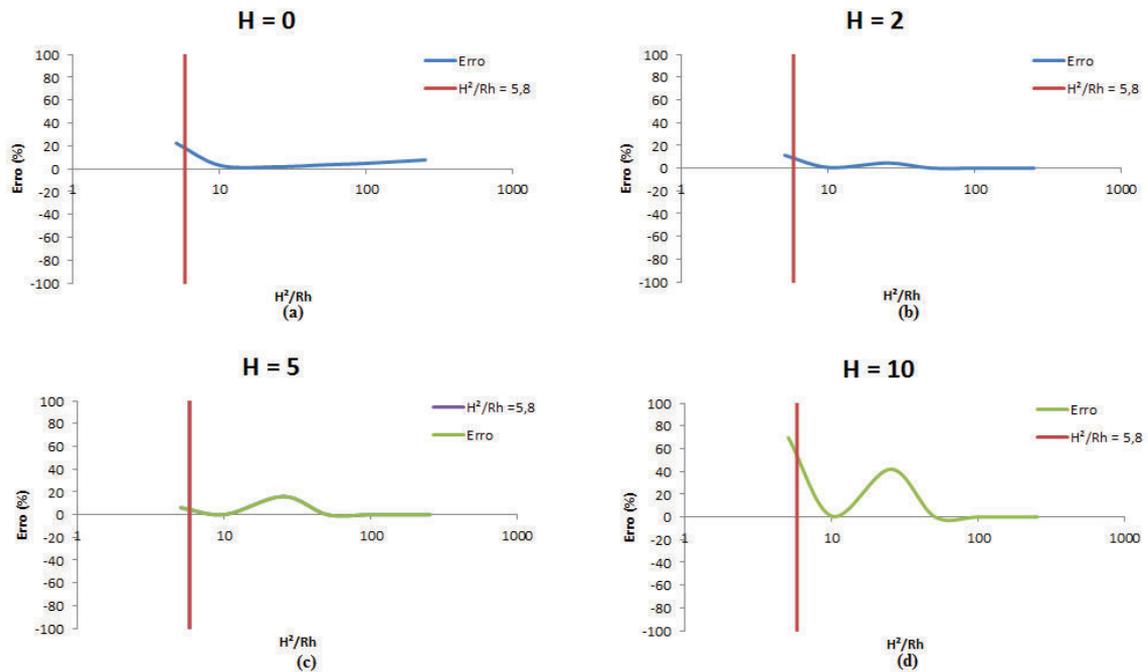


Figura 5.21 – Variação do erro com a variação do parâmetro  $H^2/Rh$  tendo como base as tensões circunferenciais ( $\sigma_\phi$ ). Em a, b, c e d para as alturas (H) de 0 m, 2 m, 5 m e 10 m, respectivamente.

Da Figura 5.21 é possível observar a variação no erro dos resultados analíticos e numéricos com a mudança da relação  $H^2/Rh$ . Sendo observado que nas relações acima de 5,8 (direita da linha vermelha) os resultados se mostram aceitáveis, como já estudado por Ghali & Elliott (1992). Para relações menores não dão resultados tão precisos, pois fogem da teoria adotada. Nota-se que para  $H^2/Rh$  entre 10 e 100 ocorrem perturbações, que se tornam mais acentuada na altura de 10 m ( $z/H=0,92$ ), ou seja, próximo da borda livre.

É importante destacar que mesmo que as relações  $h/R$  não sejam atendidas, houve resultados bons. Isso se explica, pois a relação  $H^2/Rh$  foi atendida nestes casos e com isso a estrutura se comporta como casca longa, sendo para esta as formulações realizadas aqui.

#### 5.4- CASO 04 – VARIACÃO DA TEMPERATURA ( $T_i/T_e$ )

A variação da temperatura é um parâmetro muito importante a ser verificado a fim de descobrir o comportamento dos esforços. Aqui, serão realizadas várias análises com a

temperatura externa igual em todos os casos e com a temperatura interna variando de acordo com a Tabela 5.6:

Tabela 5.6 – Casos de análise da variação de temperatura

Análise	Text (°C)	Tint (°C)	$\Delta T$
RE1	10	20	10
RE2	10	30	20
RE3	10	40	30
RE4	10	50	40
RE5	10	60	50
RE6	10	70	60
RE7	10	80	70
RE8	10	90	80
RE9	10	100	90

Como visto na seção 5.2, um elemento com 0,25 m de tamanho de lado fornece bons resultados, por isso será utilizado em todos os casos. Os dados serão os mesmos da seção citada, assim como a geometria e condições de contorno, como mostrado na Figura 5.22.

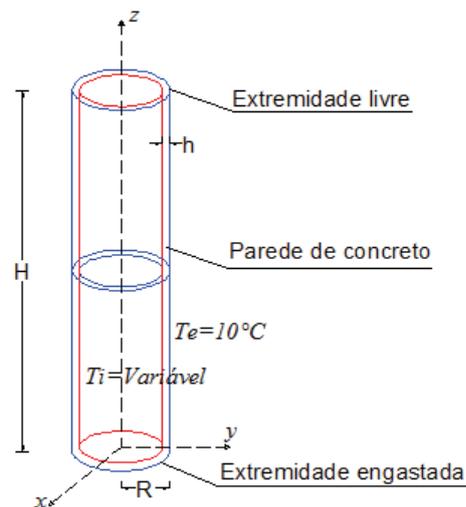


Figura 5.22 – Detalhe da estrutura com condições de contorno e temperatura (Caso 04)

A Figura 5.22 apresenta o detalhe da estrutura em que a temperatura interna é variável e a temperatura externa é constante e de valor 10°C, para posterior variação dos parâmetros.

## Análise e discussão

De posse dos resultados numéricos, disponibiliza-se abaixo o gráfico que engloba todas as análises através dos resultados do momento circunferencial, momento tangencial e esforço circunferencial que atuam na estrutura em cada temperatura, sendo mostrados nas Figuras 5.23, 5.24 e 5.25, respectivamente.

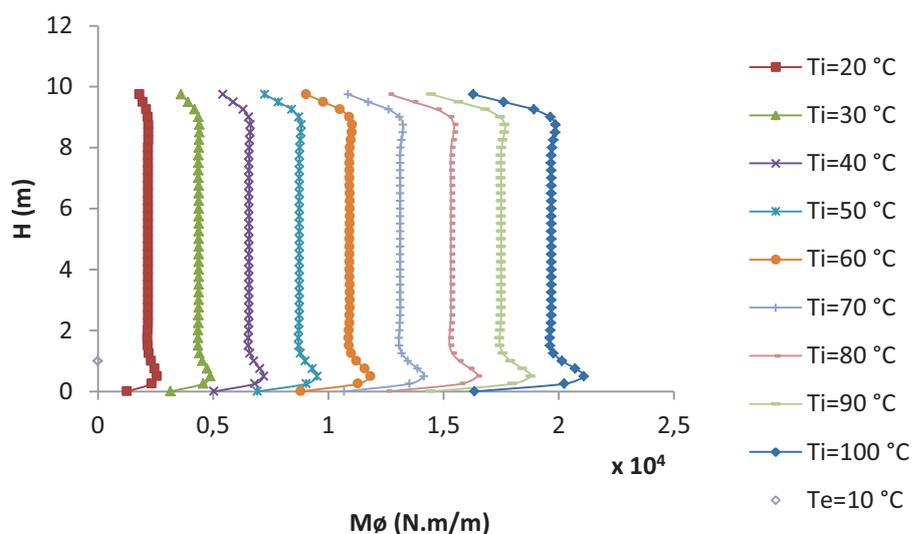


Figura 5.23 – Momento circunferencial em cada temperatura (caso 04)

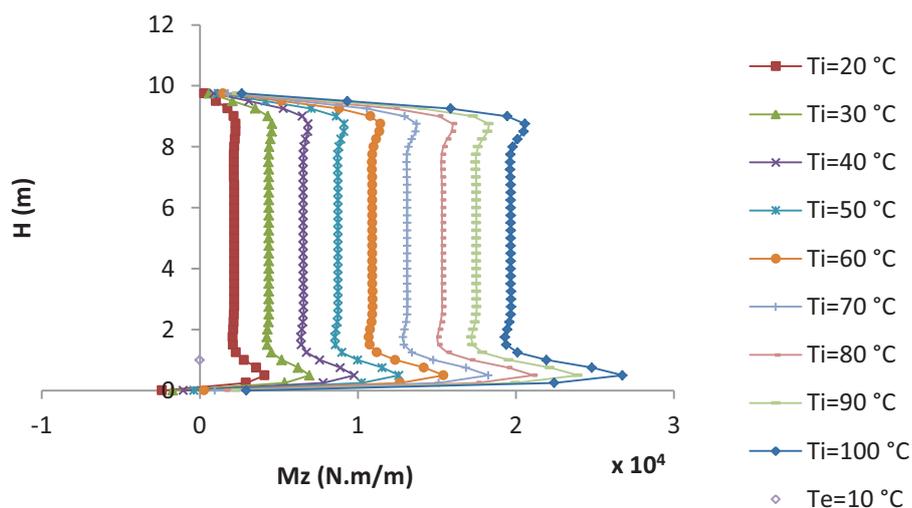


Figura 5.24 – Momento axial em cada temperatura (caso 04)

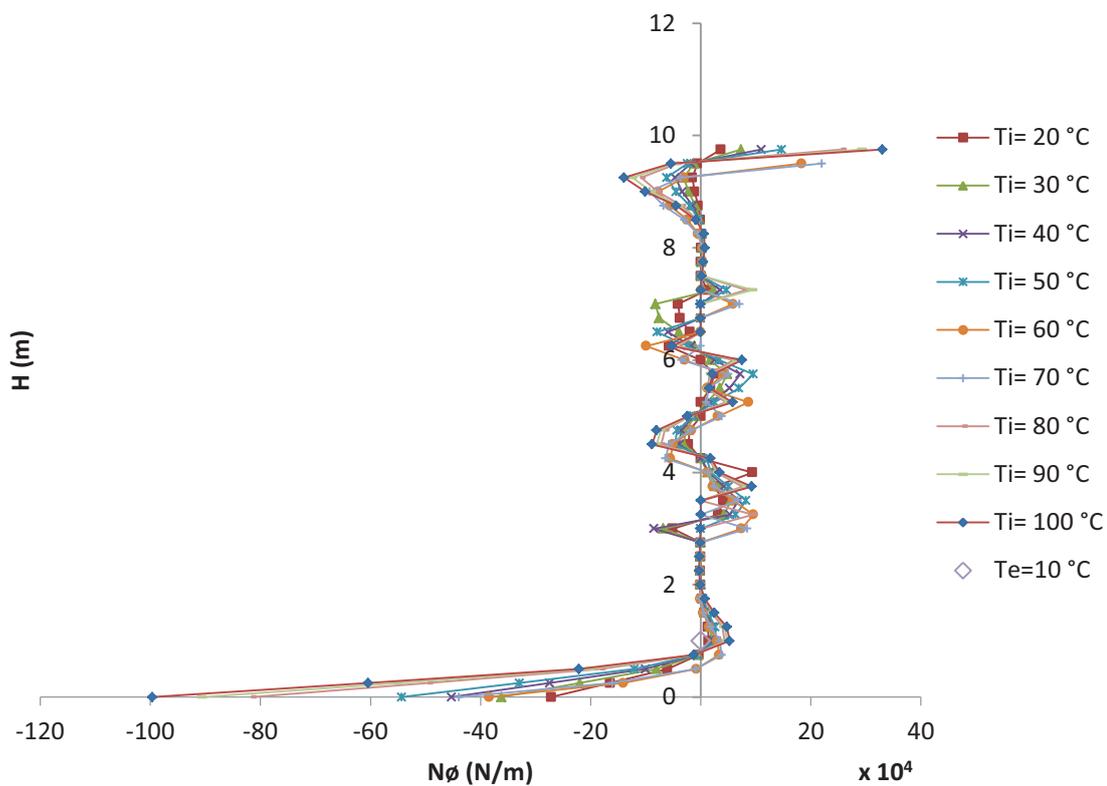


Figura 5.25 – Esforço circunferencial em cada temperatura (caso 04)

O comportamento do momento fletor circunferencial, axial e o esforço circunferencial são parecidos em todos os casos, apenas mudando de intensidade com o aumento da temperatura. Esse comportamento será mostrado com a relação da variação de temperatura interna e externa na altura de 2,25 m do tanque, logo abaixo. Sendo  $M_{\theta 0}$ ,  $N_{\theta 0}$  e  $M_{z 0}$  os esforços na extremidade inferior do cilindro.

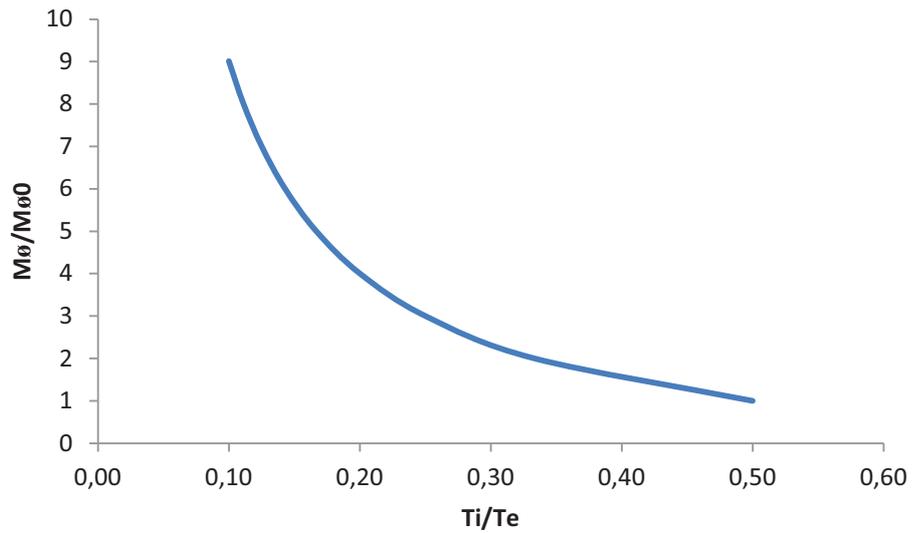


Figura 5.26 – Variação do momento circunferencial com a relação de temperatura interna e externa (Caso 04 –  $z/H = 0,225$ )

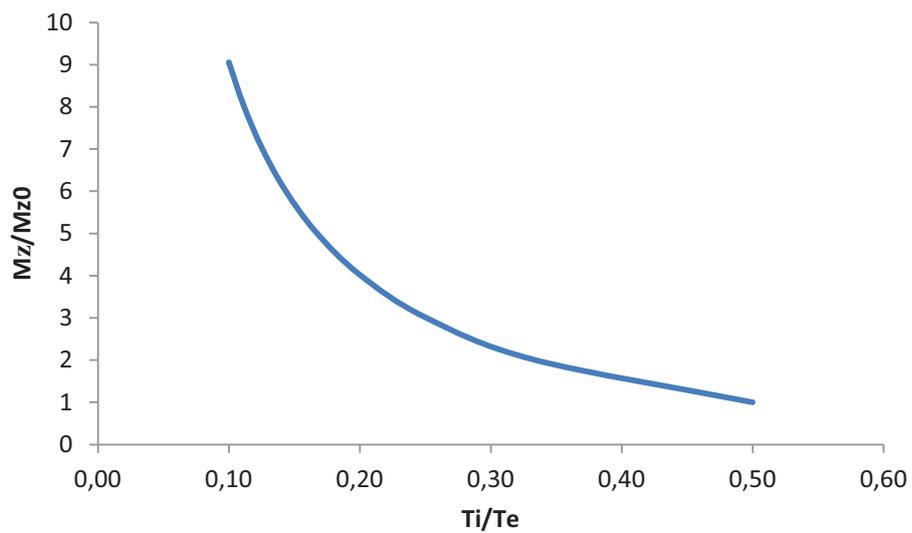


Figura 5.27 – Variação do momento axial com a temperatura (caso 04–  $z/H = 0,225$ )

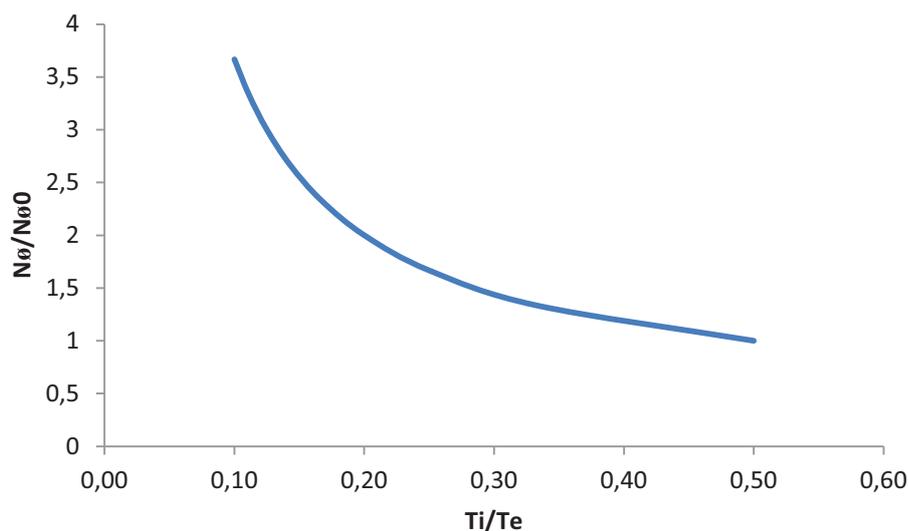


Figura 5.28 – Variação da relação  $N_{\theta}/N_{\theta 0}$  do esforço circunferencial com a temperatura  
(caso 04 –  $z/H = 0,225$ )

Os comportamentos dos esforços da Figura 5.26 até a Figura 5.28, se mostram funções exponenciais, sendo que, quanto menor a relação  $T_i/T_e$  maior serão os esforços desenvolvidos na estrutura. Isso pode ser entendido, pois quanto maior a diferença de temperatura maior será o esforço gerado.

#### 5.5- CASO 05 – TANQUE CILÍNDRICO (A-L) COM $T_e = 10^{\circ}\text{C}$ E $T_i = 80^{\circ}\text{C}$

Aqui serão apresentados os resultados para um cilindro apoiado na base e livre no topo e temperatura fixa nas faces interna e externa de  $80^{\circ}\text{C}$  e  $10^{\circ}\text{C}$  respectivamente, e sua comparação dos resultados numérico e analítico. A Tabela 5.7 exhibe os dados deste caso.

Tabela 5.7 – Dados da análise (Caso 05)

Características	Valores	Unidades
E	21	GPa
$\nu$	0.2	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
K	1,79	W/(m·K)
$\rho$	2500	kg/m <sup>3</sup>
c	1100	cal/(g·°C)
H	10.9	m
h	0,20	m
R	4,50	m
h/R	0,044	
$H^2/Rh$	132	

A estrutura está representada na figura abaixo.

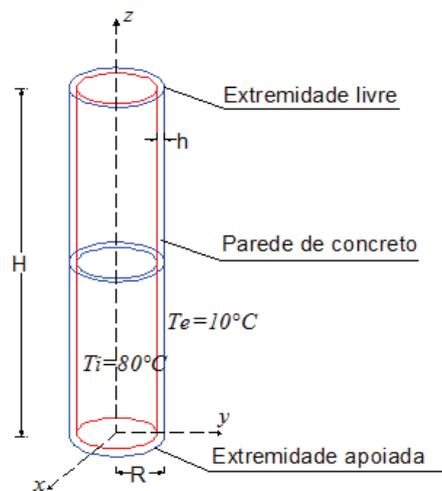


Figura 5.29 – Detalhe da estrutura com condições de contorno e temperatura (Caso 05)

A Figura 5.29 mostra o detalhe simplificado de um tanque cilíndrico simplesmente apoiado na base e livre no topo, com as temperaturas aplicadas nas faces interna e externa.

## Análise e discussões

Utilizando as Equações 3.59, 3.60 e 3.61, e comparando com a análise numérica, têm-se os gráficos abaixo, mostrando as curvas dos esforços e momentos de forma analítica e numérica.

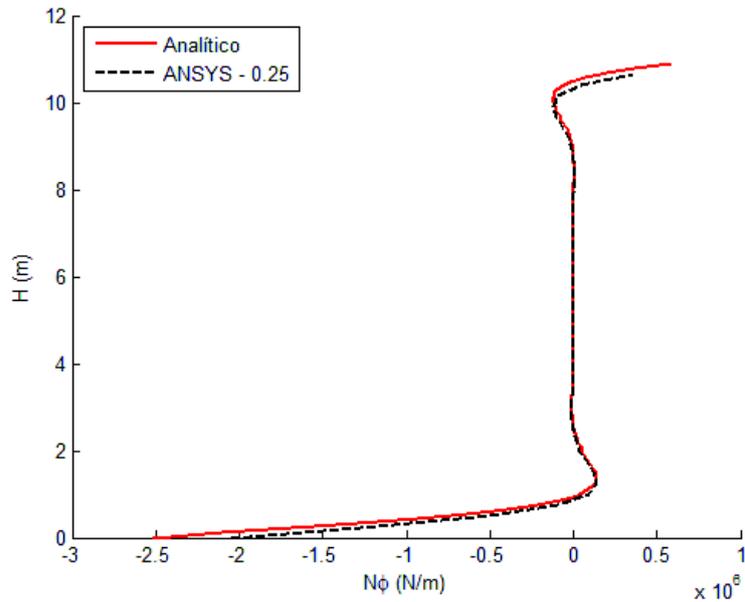


Figura 5.30 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05)

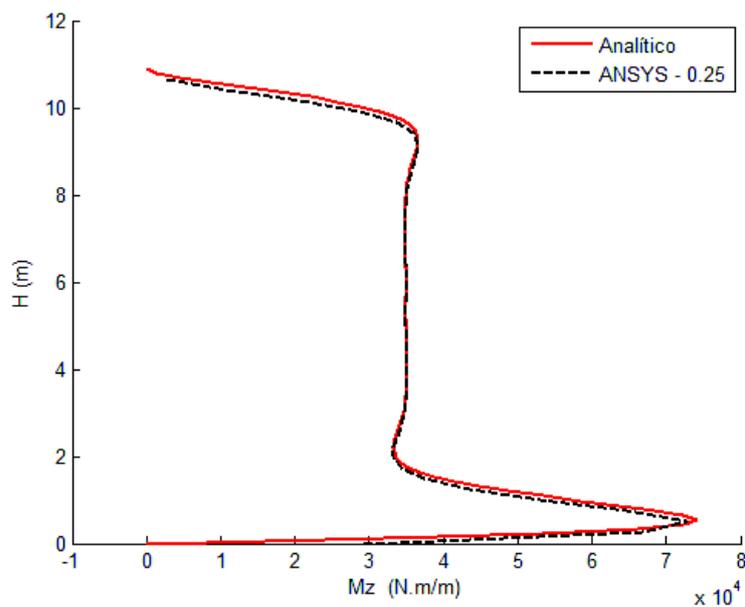


Figura 5.31 – Momento axial ao longo da altura do tanque (Caso 05)

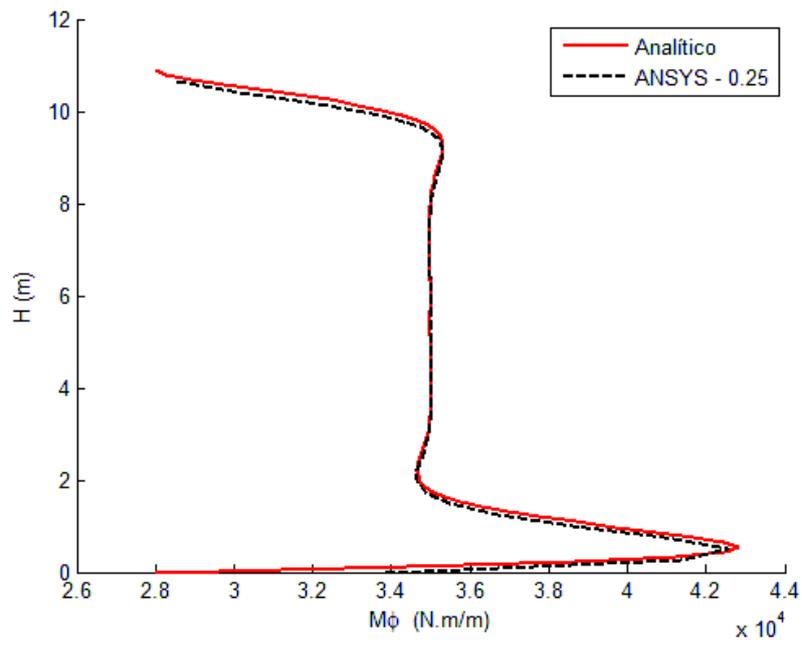


Figura 5.32 – Momento circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05)

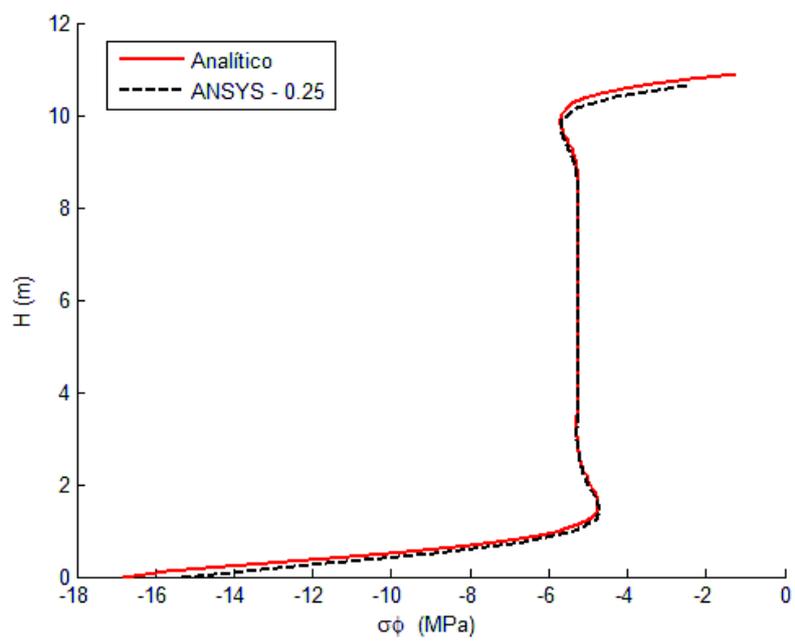


Figura 5.33 – Tensão circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 05)

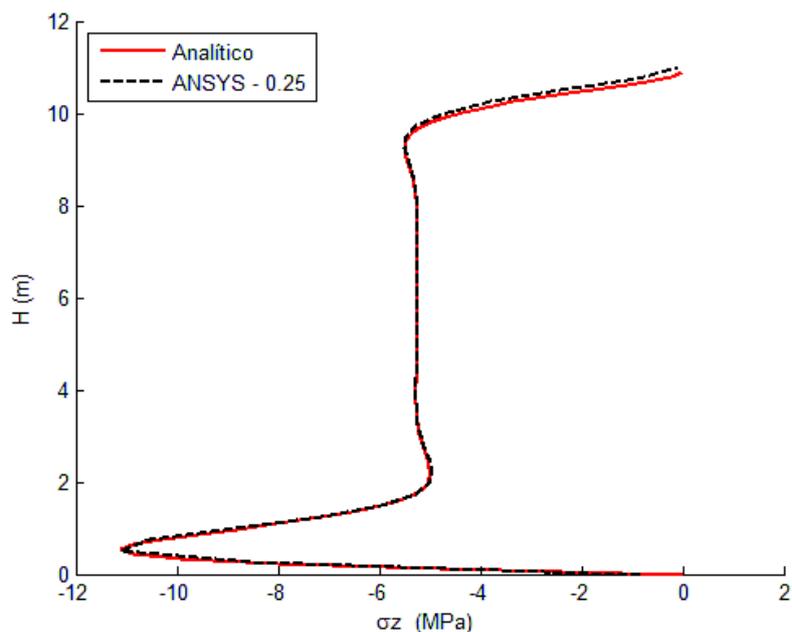


Figura 5.34 – Tensão axial ao longo da altura do tanque (Caso 05)

Do exposto na Figura 5.30 até a Figura 5.34, é notável a aproximação dos resultados analíticos e numéricos para esta condição de contorno, a saber, apoiado na base e livre no topo. É importante observar que as tensões tanto na direção axial ( $\sigma_z$ ) quanto na circunferencial ( $\sigma_\phi$ ) são bastante elevadas, até mesmo entre as alturas de 2 m e 10 m em que elas aparecem praticamente constantes.

Para este modelo não foi utilizada a convecção, nem uma placa de fundo, sendo que estas podem reduzir as diferenças entre as temperaturas internas e externas, diminuindo com isso as tensões geradas. Sendo que estas, no caso das tensões circunferenciais, estão em torno de 17 MPa, que a torna uma tensão suficiente para causar problemas nas estruturas.

#### 5.6- CASO 06 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e=30^\circ\text{C}$ E $T_i=0^\circ\text{C}$

Neste caso, é analisado para uma temperatura do meio ambiente com as soluções analíticas estudadas no tópico 3.2.5. O caso foi apresentado por Ghali & Elliott (1992), considerando às temperaturas de  $0^\circ\text{C}$  e  $30^\circ\text{C}$  interna e externa, respectivamente. Os dados da análise são mostrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Dados da análise (Caso 06)

Características	Valores	Unidades
E	32	GPa
$\nu$	1/6	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
K	1,79	W/(m·K)
$\rho$	2500	kg/m <sup>3</sup>
c	1100	cal/(g·°C)
H	10	m
h	0,25	m
R	30	m
h/R	0,025	
$H^2/Rh$	13,33	

Abaixo está a representação das condições de contorno e temperatura aplicadas, em uma estrutura submetida a temperaturas equivalentes à do meio ambiente:

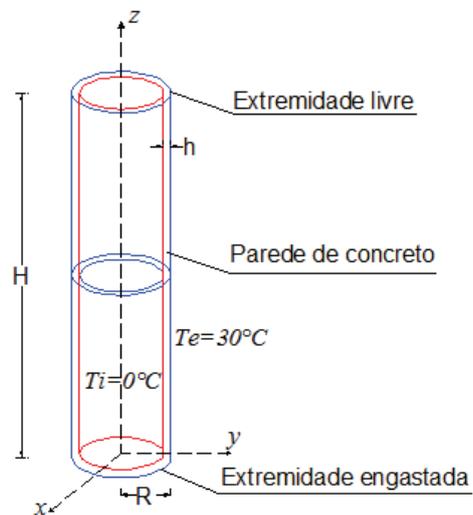


Figura 5.35 – Detalhe da estrutura com condições de contorno e temperatura (Caso 06)

## Análise e discussões

Na Figura 5.36 até a Figura 5.39 estão os resultados analíticos dos esforços circunferenciais e axiais para efeito de comparação com a análise numérica efetuada com o programa ANSYS e a Tabela 5.8 destaca que as relações foram atendidas.

Nas figuras a seguir são comparados, respectivamente, os resultados analíticos e numéricos para os momentos e esforços circunferenciais, e as tensões axiais e circunferenciais.

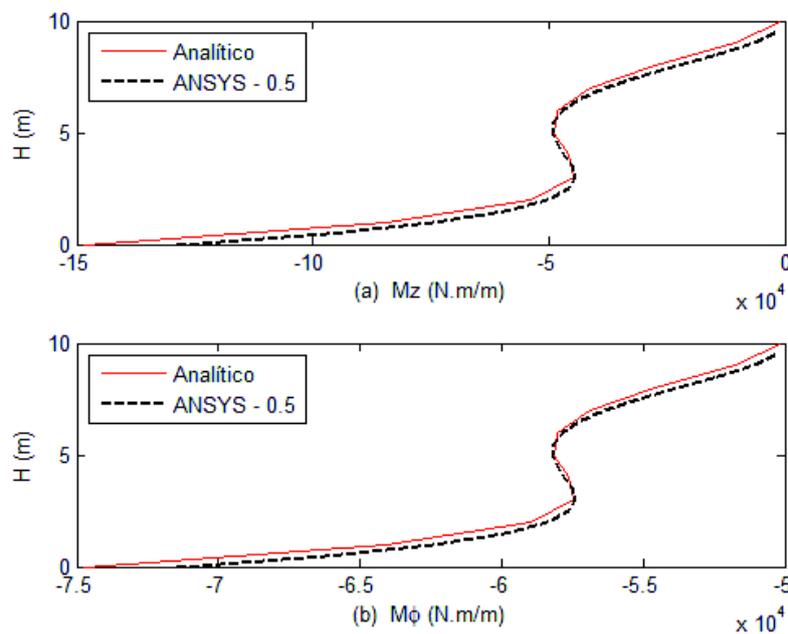


Figura 5.36 – Momento axial (a) e circunferencial (b) na altura do tanque (Caso 06)

A Figura 5.36 a e b apresentam os momentos axiais ( $M_z$ ) e circunferenciais ( $M_\phi$ ) respectivamente, mostrando que os valores numéricos e analíticos estão bem próximos. Além disso, é possível notar que os maiores valores estão próximos à restrição, sendo nestes pontos onde ocorre a maioria dos problemas, como fissuras em tanques. A maior contribuição para fissuração na direção vertical é devido ao momento circunferencial.

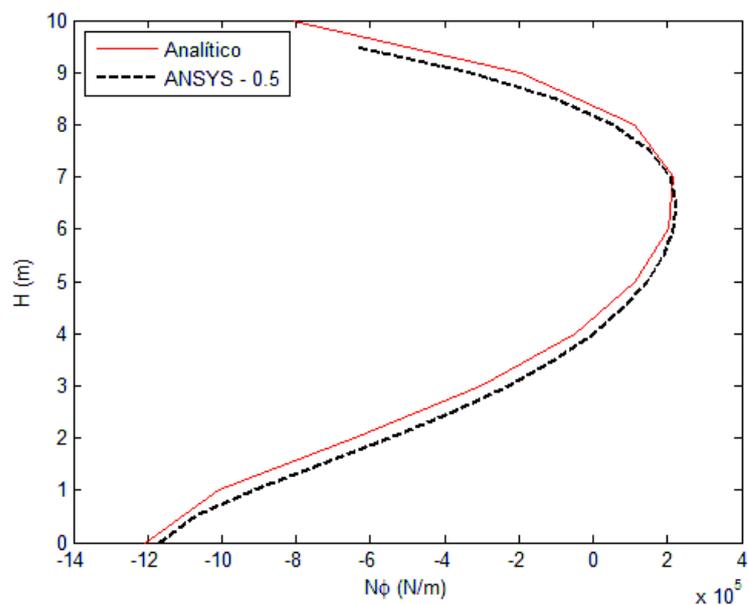


Figura 5.37 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 06)

A Figura 5.37 mostra o esforço circunferencial ( $N_\phi$ ) que atua no tanque devido à carga térmica. Para este caso por se tratar de cilindro curto em relação à altura do tanque é possível notar que os valores dos esforços estão bem divididos na estrutura, sendo que próximo à região central se concentram os maiores esforços. Através dos momentos e esforços circunferenciais são gerados os gráficos das tensões nas Figuras 5.42 e 5.43.

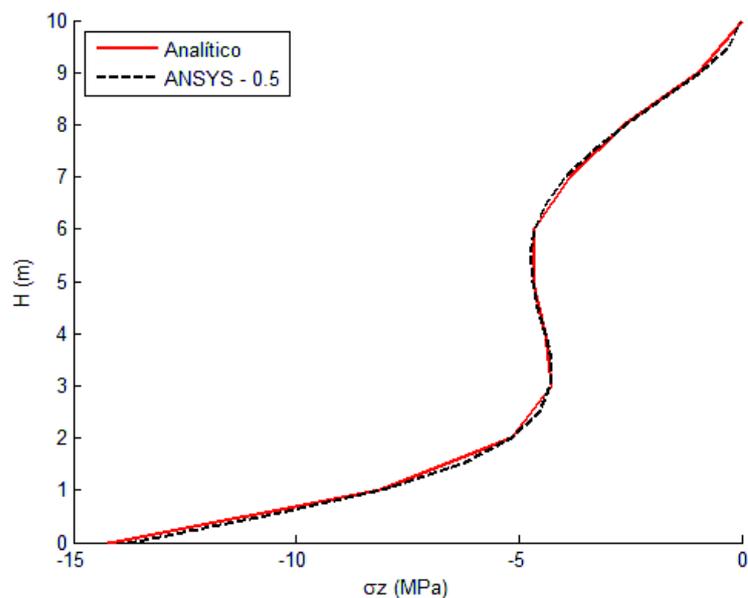


Figura 5.38 – Tensão axial no tanque ao longo da altura do tanque (Caso 06)

A tensão axial ( $\sigma_z$ ) ao longo da altura do tanque teve uma das melhores aproximações dos resultados numéricos e analíticos, devido ao fato de que os resultados são retirados do nó e não do elemento quadrilateral no programa. Com valores elevados essa tensão pode causar problemas, principalmente, fissuração na direção horizontal. No entanto, essa não é uma das tensões que causam grandes problemas nas estruturas cilíndricas de armazenamento e estão mostradas na Figura 5.38 apenas para validação do elemento utilizado pelo programa.

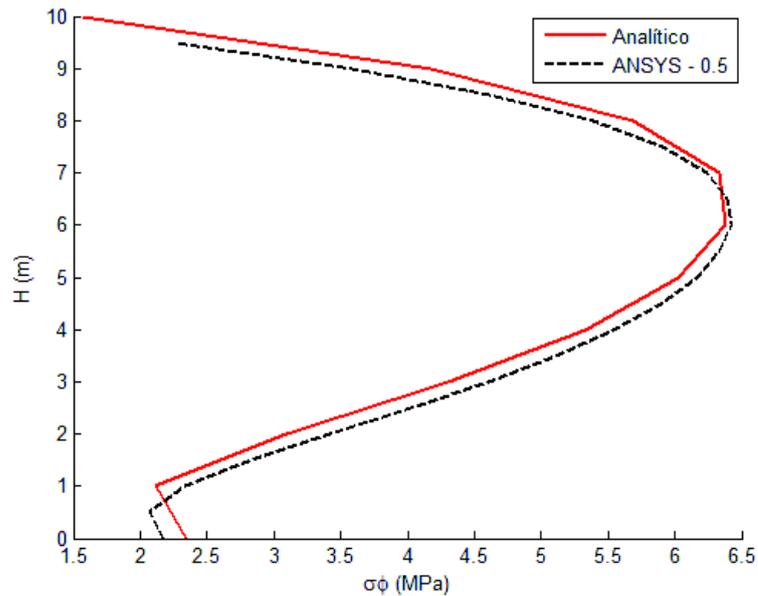


Figura 5.39 – Tensão circunferencial no tanque (Caso 06)

A análise da Figura 5.39 mostra que as tensões circunferenciais tem uma curva parecida com o esforço normal. Para este caso, de possuir pequena altura se comparada com o raio, o esforço circunferencial é uma das cargas que mais solicita a estrutura.

Pela análise da Figura 5.36 até a Figura 5.39, pode-se observar que existe uma boa aproximação dos resultados analíticos e numéricos. Em alguns gráficos se percebe que os valores estão um pouco deslocados do resultado analítico, isto pode ser explicado pelo fato de que os resultados retirados do programa são dados no elemento e não no nó escolhido para a avaliação analítica.

### 5.7- CASO 07- TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM $T_e = 10^\circ\text{C}$ E $T_i = 80^\circ\text{C}$

Este caso trata de um tanque de uma fábrica de celulose apresentado por Carmona & Pinto Jr. (2005) com algumas alterações. Será analisado apenas o efeito térmico no tanque. A estrutura possui base engastada e topo livre e os dados da análise podem ser vistos na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Dados da análise (Caso 07)

Características	Valores	Unidades
E	21	GPa
$\nu$	0,2	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
K	1,79	W/(m·K)
$\rho$	2500	kg/m <sup>3</sup>
c	1100	cal/(g.°C)
H	10.9	m
h	0,20	m
R	4,50	m
h/R	0,044	
H <sup>2</sup> /Rh	12,11	

O detalhe do modelo estudado é apresentado pela Figura 5.40.

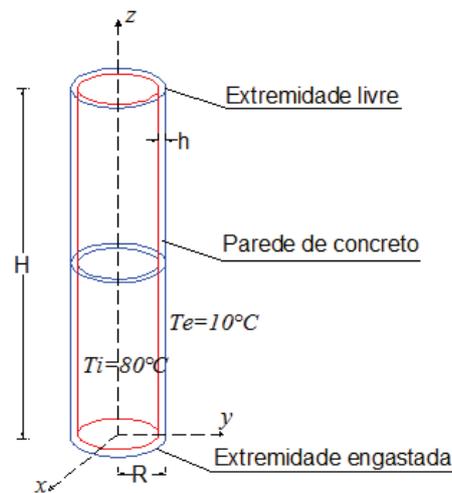


Figura 5.40 – Detalhe do tanque de concreto (Caso 07)

Utilizando-se os mesmos valores das constantes apresentadas por Carmona & Pinto Jr. (2005) para condutibilidade térmica do concreto, representada por  $k$  e do ar, representada por  $f$ , sendo:

$$k (\text{concreto}) = 6 \times 10^{-3} \text{ cal.cm/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^{\circ}\text{C} ; f (\text{ar aquecido}) = 4 \times 10^{-4} \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^{\circ}\text{C}.$$

De acordo com o ACI 307 (1998), norma aplicada à chaminés, a distribuição de temperatura para estruturas com várias camadas é obtida a partir da relação para o fluxo de calor ( $Q$ ):

$$Q = \frac{(T_i - T_e)}{\sum \frac{1}{f} + \sum \frac{h}{k}} \quad (5.1)$$

$$T_e = \frac{h}{k} \frac{(T_i - T_e)}{\sum \frac{1}{f} + \sum \frac{h}{k}} \quad (5.2)$$

Onde:

$f$  – coeficiente de condutividade térmica de cada película de ar;  $h$  – espessura de cada camada;  $k$  – coeficiente de condutividade térmica de cada material.

Através dessa equação é possível descobrir a temperatura na parede externa do tanque que está em contato com o ar (CARMONA, 2005).

$$T_e = \frac{20}{6.10^{-3}} \frac{(80 - 10)}{\sum \frac{1}{4.10^{-4}} + \sum \frac{20}{6.10^{-3}}} = 40^\circ C$$

Para parte interna do tanque, será considerado que a temperatura do concreto é igual à temperatura do líquido.

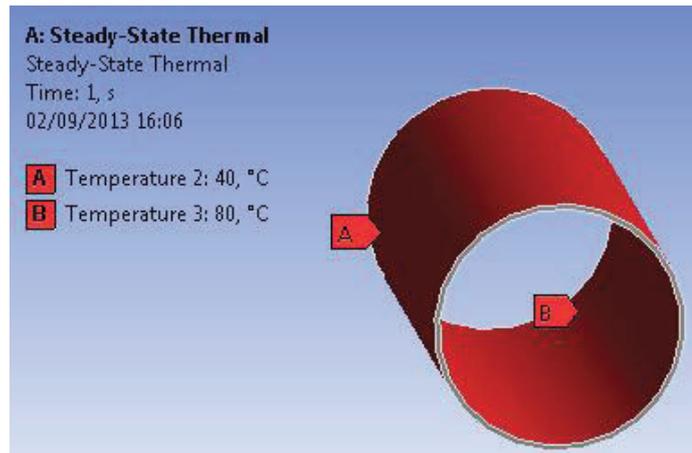


Figura 5.41 – Representação da temperatura no tanque (Caso 07)

Os esforços que solicitam a estrutura são calculados numericamente para posterior análise de seus efeitos. Apresenta-se na Figura 5.43 até a Figura 5.45, os esforços circunferenciais que solicitam a estrutura e consequente tensão circunferencial que é objeto de estudo. O tamanho do lado do elemento no ANSYS é de 0.25 m, e os resultados são mostrados para a parte externa da parede.

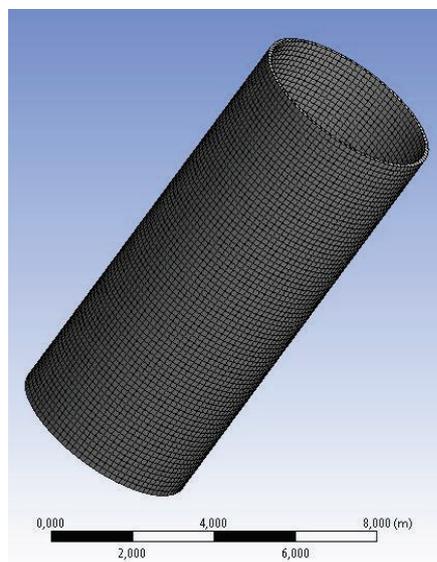


Figura 5.42 – Representação da malha na estrutura (Caso 07)

## Análise e discussões

Para melhor visualização dos resultados, é colocada, junto aos gráficos, a estrutura com representação de cores (retirada do programa ANSYS) que representa os valores do gráfico ao lado de cada uma.

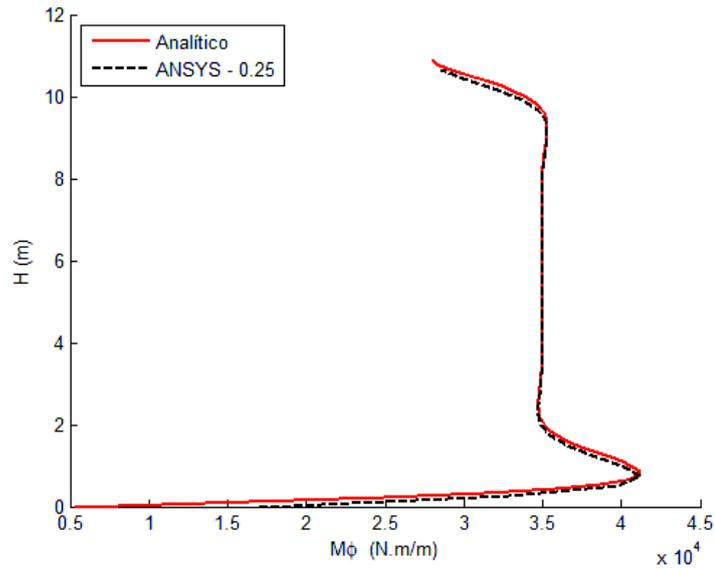


Figura 5.43 – Momento circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07)

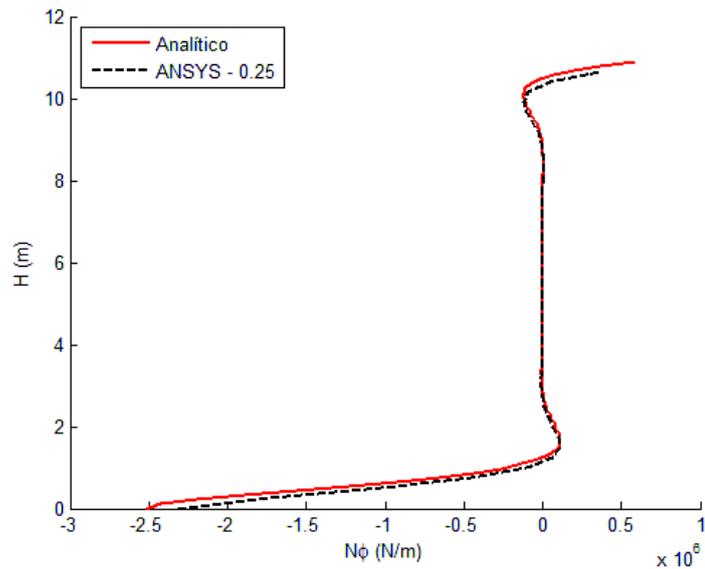


Figura 5.44 – Esforço circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07)

Observa-se na Figura 5.43 e Figura 5.44 que as maiores perturbações das solicitações na estrutura, ocorrem próximo à restrição, evidenciando as regiões que podem ser afetadas pela carga térmica. Como a temperatura é maior na parede interna, esta tende a se dilatar mais que a parede externa provocando tração na parede interna e compressão na externa. Com os valores dos esforços são obtidas as tensões, mostradas na Figura 5.45.

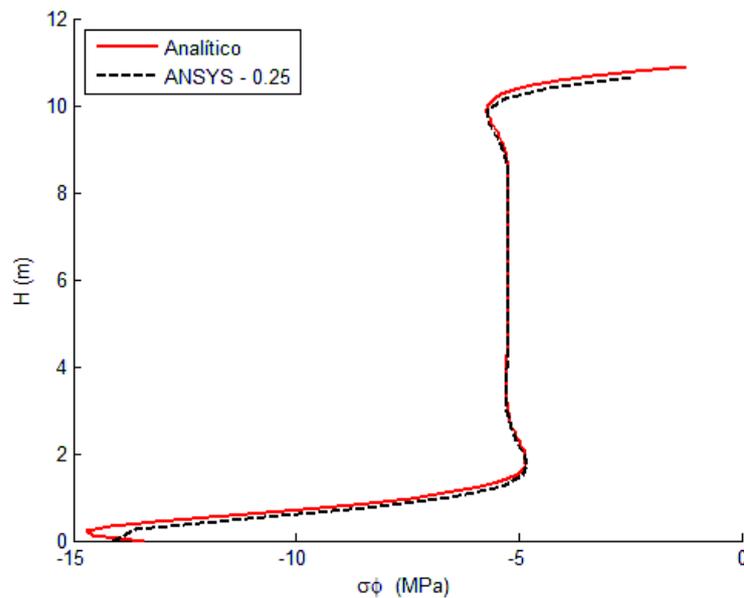


Figura 5.45 – Tensão circunferencial ao longo da altura do tanque (Caso 07)

Com o intuito de mostrar o valor das tensões geradas a Figura 5.45, mostra seus valores obtidos pelos esforços já mostrados anteriormente. Os valores das tensões aparecem com valores altos, cerca de 14 MPa, o que seria suficiente para causar danos em uma estrutura de concreto.

### 5.8- CASO 08 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM FUNDO ( $T_e = 10^\circ\text{C}$ E $T_i = 70^\circ\text{C}$ )

Aqui será mostrada a diferença nos resultados numéricos e consequentemente analíticos com a colocação do fundo no modelo estudado. Os dados serão estão representados na Tabela 5.10, com o tamanho de elemento de 0,25 m. O objetivo é verificar as mudanças nos esforços atuantes no cilindro de base engastada com a adição deste fundo.

Tabela 5.10 – Dados da análise (Caso 08)

Características	Valores	Unidades
$E$	21	GPa
$\nu$	0,2	
$\alpha$	$10^{-5}$	$/^{\circ}\text{C}$
$K$	1,79	$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
$\rho$	2500	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c$	1100	$\text{cal}/(\text{g}\cdot^{\circ}\text{C})$
$H$	10	m
$h_{\text{parede}}$	0,10	m
$R$	2,50	m
$h_{\text{fundo}}$	0,10	m
$h/R$	0,04	
$H^2/Rh$	400	

A Figura 5.46 mostra a estrutura a ser analisada, exibindo a placa de fundo para um modelo simplificado e fictício, com suas condições de contorno e temperaturas aplicadas.

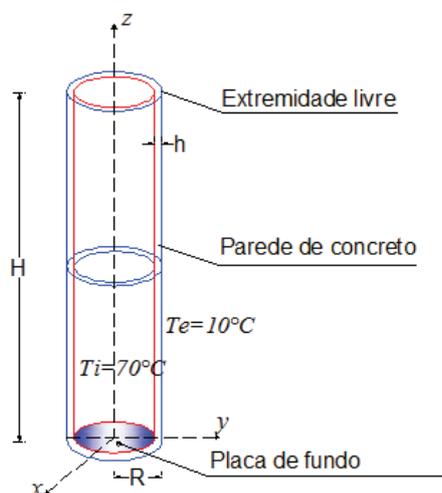


Figura 5.46 – Detalhe da estrutura com placa de fundo e temperatura (Caso 08)

A Figura 5.46 ilustra uma estrutura fictícia com temperatura interna de  $70^{\circ}\text{C}$  e temperatura externa de  $10^{\circ}\text{C}$ , sendo que neste modelo há a presença de fundo que funciona como

engaste na base e na parte superior está livre. A malha e o fundo da estrutura podem ser observados na Figura 5.47.



Figura 5.47 – Malha de estrutura evidenciando a presença de fundo (Caso 08)

### **Análise e discussões**

Neste modelo o fundo é considerado infinitamente rígido, apenas para simplificar, pois o deslocamento na direção  $z$  não é possível, devido à condição de contorno adotada ( $W_z = 0$ ) para a placa de fundo. Com isso, obtêm-se os resultados abaixo:

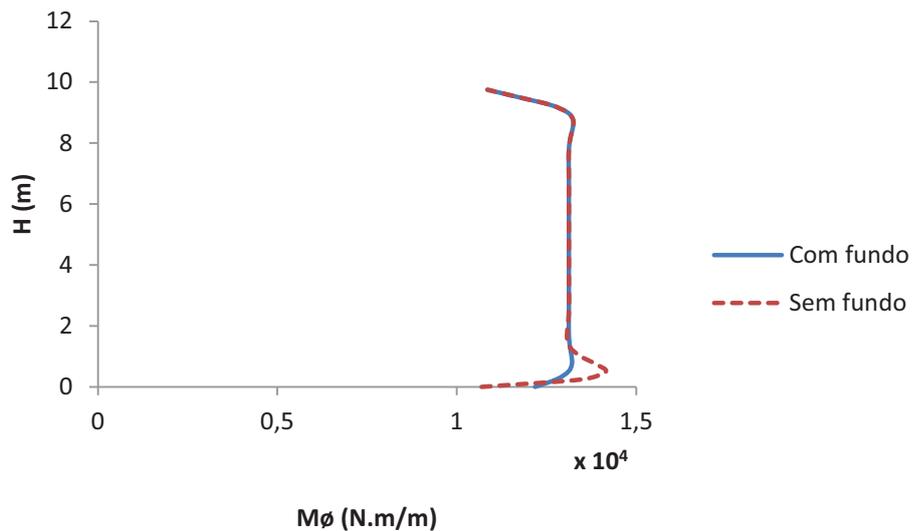


Figura 5.48 – Resultado numérico do momento circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

A partir da Figura 5.48 é feito um gráfico mostrando as porcentagens de diferença entre os resultados do cilindro com e sem fundo para os momentos circunferenciais, como ilustrado abaixo.

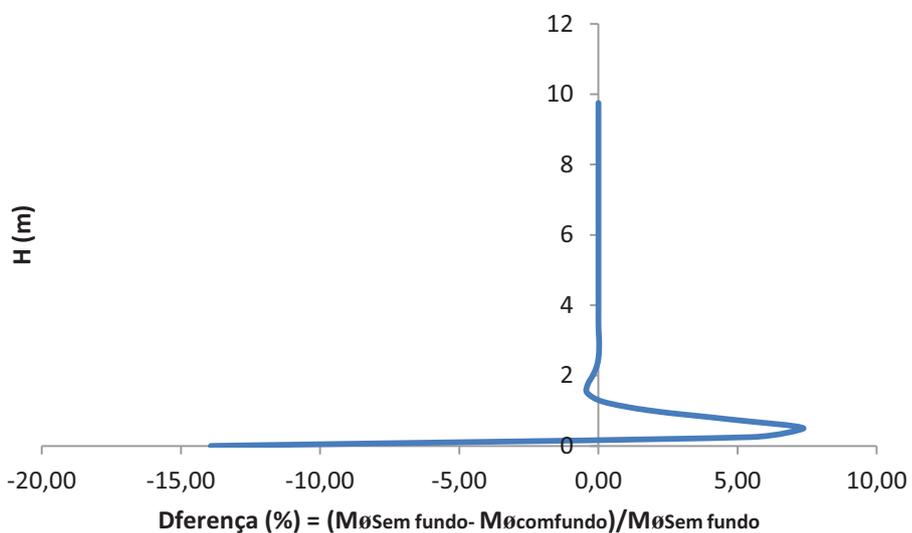


Figura 5.49 – Diferença em porcentagem do resultado numérico do momento circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

As diferenças apresentadas para o momento circunferencial (Figura 5.49) estão em torno de 7% próximas à base da estrutura cilíndrica (local onde ocorrem perturbações). Nota-se que na altura (H) próximo de 2 m os resultados convergem.

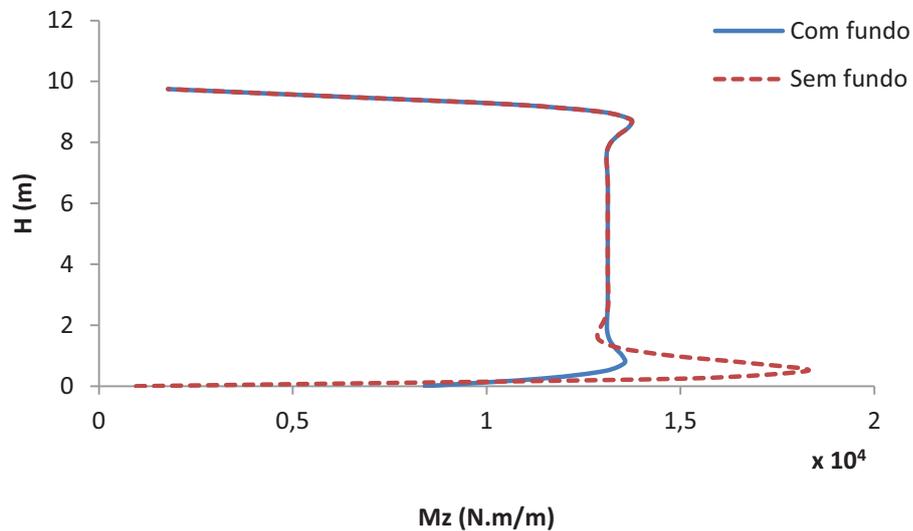


Figura 5.50 – Resultado numérico do momento axial (meridional) da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

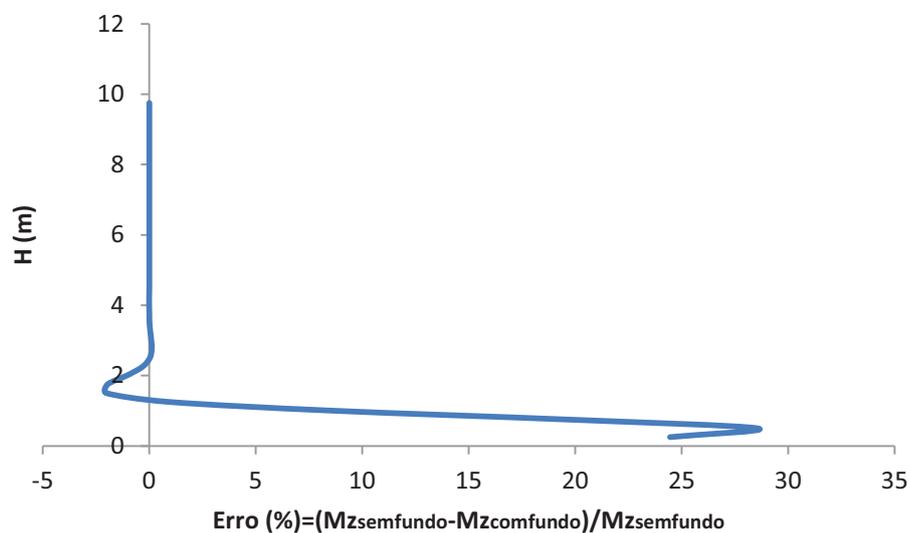


Figura 5.51 – Diferença em porcentagem do resultado do momento axial (meridional) da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

De acordo com a Figura 5.51 e Figura 5.50 as diferenças dos resultados do momento axial chega a ter em torno de 28 % de diferença entre os resultados numéricos na base da

estrutura com fundo e sem fundo. É possível observar que acima da altura (H) de 2 m e praticamente não existem mais discrepâncias nos resultados.

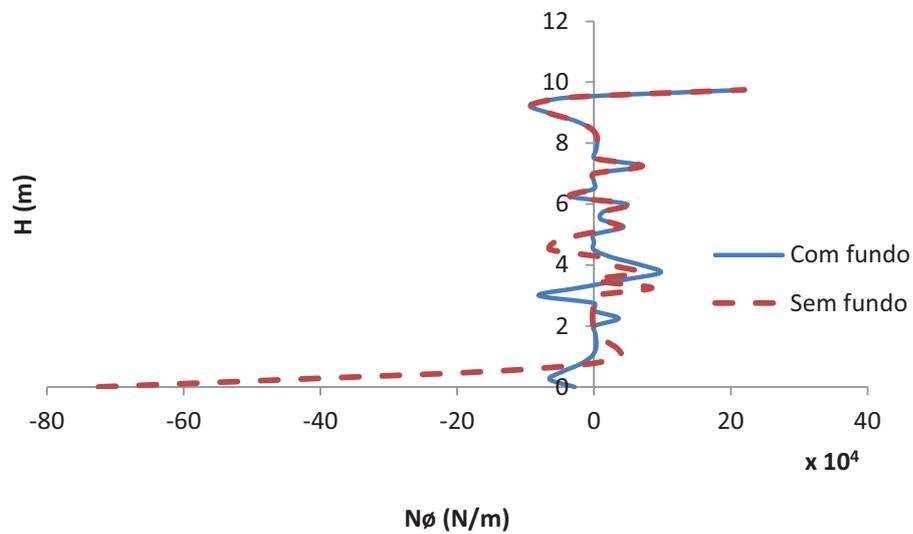


Figura 5.52 – Resultado numérico do esforço circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

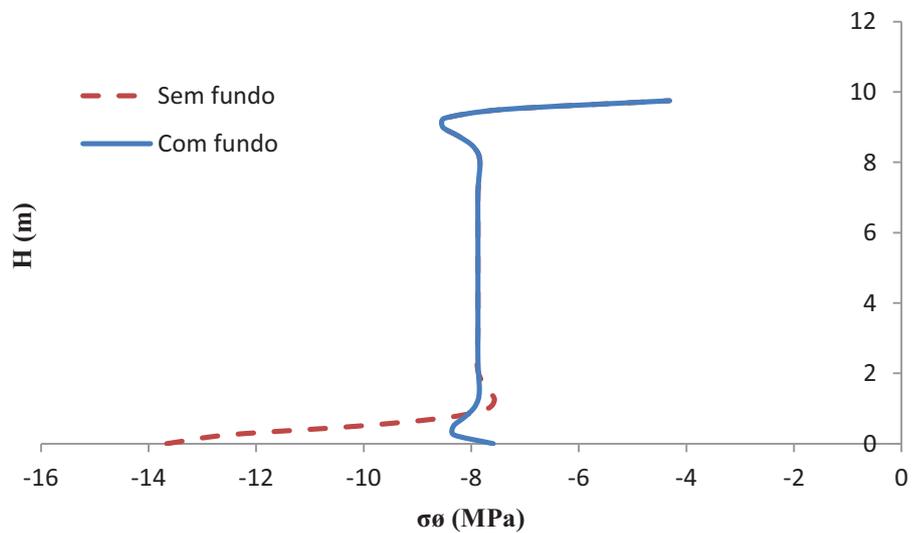


Figura 5.53 – Resultado numérico da tensão circunferencial da estrutura com fundo versus sem fundo (Caso 08)

Da Figura 5.48 até Figura 5.53 é importante salientar que as maiores diferenças estão próximas à região de engaste ou fundo, sendo que estas geralmente ocorrem a uma altura inferior a 2 m, porém o esforço circunferencial sofre perturbação até uma altura de 5 m. Na

Figura 5.53, fica evidente a variação do resultado das tensões circunferenciais passando de cerca de 14 MPa para aproximadamente 8 MPa, ou seja, tem uma redução com a placa de fundo de aproximadamente 43 % do valor sem fundo.

Vê-se que os resultados das tensões, esforços e momentos têm uma grande redução com a colocação de fundo na estrutura, que funciona como engaste. Com isso, um modelo simplificado com fundo, e considerando condições de contorno mais próximas possíveis da realidade, podem fornecer resultados mais precisos.

No entanto, para resultados mais conservadores, apenas a consideração da base engastada fornece resultados que podem dar uma segurança maior para os projetistas. Por outro lado, a estrutura pode vir a não ser econômica.

### 5.9- CASO 09 – TANQUE CILÍNDRICO (E-L) COM FUNDO E TAMPA ( $T_e = 10^\circ\text{C}$ E $T_i = 70^\circ\text{C}$ )

Neste caso será feita uma comparação das estruturas com fundo e tampa e a estrutura sem fundo e sem tampa numericamente. Os dados são os mesmos do caso 08, com a inclusão de uma tampa no cilindro como ilustra a Figura 5.54.

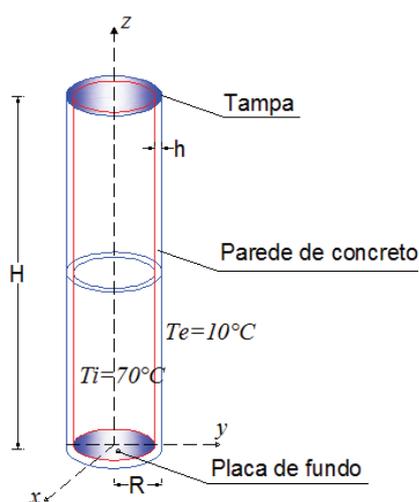


Figura 5.54 – Detalhe da estrutura com placa de fundo e tampa (Caso 09)

A tampa é considerada engastada na parede do cilindro, sendo suas temperaturas internas e externas de 70 °C e 10°C respectivamente e sua malha com tamanho de elemento de 0,25. O fundo tem restringido o deslocamento na direção z, ou seja, na vertical.

### Análise e discussões

Das condições de contorno adotadas para a placa de fundo e para a tampa, obtêm-se os resultados seguintes para o cilindro.

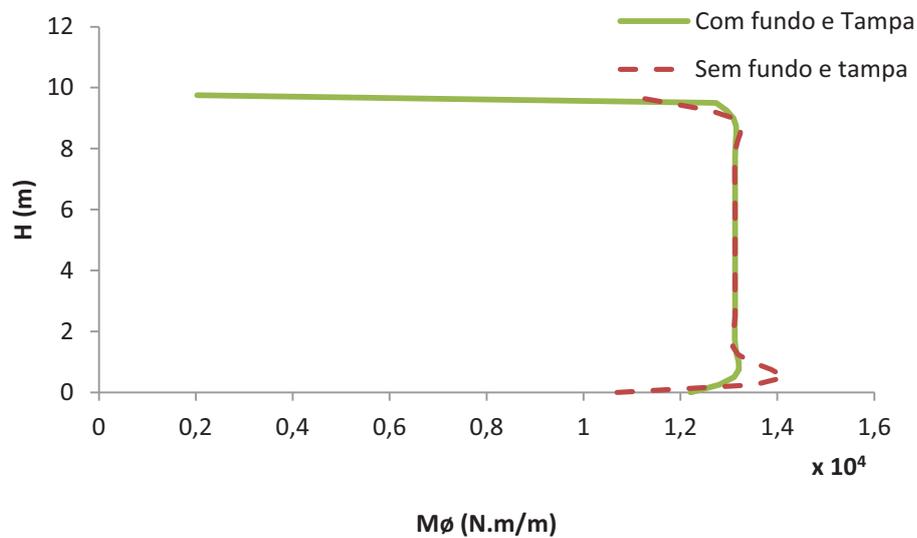


Figura 5.55 – Momento circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09)

O momento circunferencial na parte superior da estrutura com tampa tem uma grande redução quando comparada com o caso sem tampa, assim como foi observado com a colocação do fundo no caso 08 e neste caso (Figura 5.55). Com isso, quanto mais o modelo vai se aproximando das condições apresentadas em estruturas reais é notável a redução dessa solicitação.

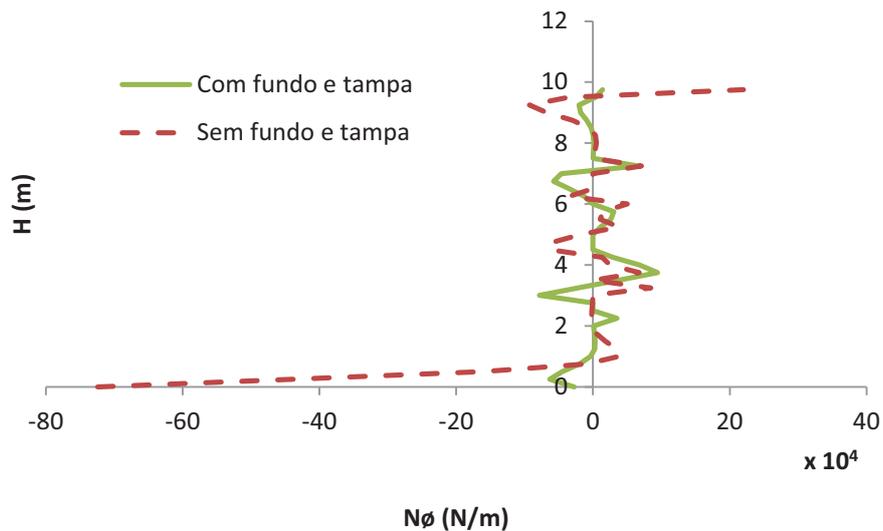


Figura 5.56 – Esforço circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09)

A comparação do esforço circunferencial, na Figura 5.56, apresenta redução nos resultados, no entanto, não há concordância entre as curvas apresentadas no gráfico com fundo e tampa e sem fundo e sem tampa. De posse dos esforços e momentos circunferenciais foi elaborado o gráfico das tensões abaixo.

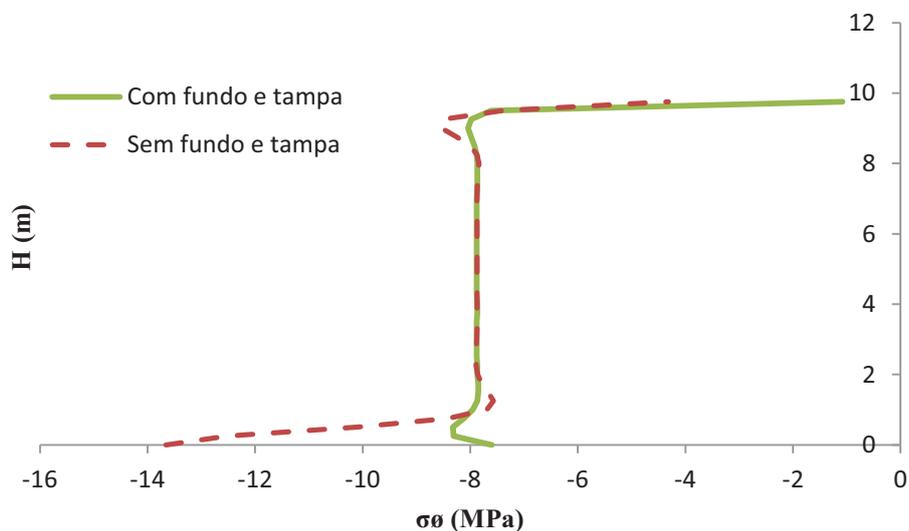


Figura 5.57 – Tensão circunferencial na estrutura com fundo e tampa e sem fundo e tampa (Caso 09)

As tensões na base tiveram as mesmas reduções do caso 08, já na parte superior as reduções foram grandes com a inclusão da tampa com as tensões em cerca de 1,08 MPa.

Das análises é possível perceber que as perturbações geradas nas bordas livres e engastadas, podem ser reduzidas de maneira significativa com a mudança do modelo numérico adotado, ou seja, com a consideração do fundo e da tampa.

## **6. CONCLUSÕES, SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS**

Este capítulo destaca as principais conclusões, contribuições e sugestões futuras a cerca do tema estudado.

### **6.1 - SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO, CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES**

Neste trabalho foi desenvolvido um procedimento para estudo do efeito térmico em cascas cilíndricas, com o acoplamento simplificado termomecânico a partir da teoria analítica clássica de cascas da literatura técnica. Além disso, são mostrados métodos analíticos para estruturas cilíndricas axissimétricas, sendo apresentada de forma simplificada a obtenção das equações que são encontradas na literatura.

A partir das equações analíticas encontradas para o acoplamento termomecânico foi possível obter as soluções para o sistema. Deste modo, este trabalho tem como contribuição, algumas tabelas (Ghali & Elliott, 1992) com expressões literais em função de parâmetros conhecidos que facilitam a obtenção dos resultados.

A simulação numérica foi obtida a partir de um estudo do programa de Elementos finitos ANSYS, sendo vencidas as diversas dificuldades relativas à modelização da geometria, vínculos e acoplamento. O elemento SHELL63 da biblioteca do ANSYS foi escolhido por ser um elemento que fornece bons resultados para cascas. Na análise térmica foi utilizado o elemento SHELL131, pois é compatível com o elemento estrutural citado anteriormente. Para a obtenção de um melhor desempenho e confiabilidade dos elementos foi realizado um teste de convergência, além da variação paramétrica.

Das análises, é possível perceber que os esforços circunferenciais mais significativos que solicitam as estruturas estão próximos da restrição em quase todos os casos (grande altura em relação ao raio) e próximos ao centro (pequena altura em relação ao raio). Assim, em estruturas que não são previstas cargas térmicas, podem ocorrer problemas junto às bordas, como fissuras devido aos esforços de tração. Tais problemas vêm sendo observados há muito tempo em tanques e silos de armazenamento.

A análise numérica é um processo interessante que apresenta resultados rápidos e satisfatórios, podendo ser aplicados em estruturas de armazenamento de geometrias complexas sem soluções analíticas.

Os resultados obtidos para as tensões circunferenciais mostram que deve ser dado um tratamento especial aos efeitos térmicos, seja com a previsão de armadura adicional ou com a protensão da estrutura para se evitar danos indesejáveis.

Foi observado que com simplificações de engaste na base da estrutura, as variações nos resultados são altas, no entanto com a inclusão de um fundo na estrutura cilíndrica esses esforços tem uma significativa redução. Com isso, para resultados mais próximos da realidade há a necessidade de se considerar o fundo.

Foi observado que com a colocação da tampa as perturbações geradas nas extremidades livres acabam diminuindo assim como os esforços calculados analiticamente. A mesma conclusão foi observada com a colocação da placa de fundo. No entanto, a simplificação do engaste na base dá uma segurança maior para o projetista, pois está a favor da segurança. É importante salientar que com essa simplificação a estrutura pode vir a se tornar não econômica.

Mostrou-se alguns exemplos já estudados na literatura, desde a temperatura do meio ambiente como no caso 07 até uma temperatura elevada de um líquido, como no caso 08. Em ambos os casos, as tensões geradas foram suficientes para causar fissuras na estrutura, pois ultrapassam a resistência à tração do concreto. Com isso, há a necessidade da verificação de possíveis soluções estruturais, tais como, a utilização da protensão e como estudado por Ghali & Elliott (1992), utilizar armaduras extras não protendidas, pois só a protensão não é suficiente para combater os problemas de fissuração.

Através das variações dos parâmetros foi possível observar que mesmo que uma estrutura não atenda a relação para cascas finas  $h/R \leq 1/20$ , foi possível obter bons resultados. Isso porque a relação  $H^2/Rh \geq 5,8$ , dada por Ghali & Elliott (1992), foi atendida. Nos casos em que nenhuma das relações forem atendidas, ou seja, a casca não é fina nem longa, a

formulação aqui apresentada pode ser utilizada desde que seja feita a correção como apresentado por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) (ver caso 01) .

## **6.2 - PERSPECTIVAS FUTURAS**

Logo abaixo segue uma lista de pesquisas futuras que podem ser feitas contribuindo para os avanços obtidos neste trabalho.

- Análise numérica utilizando outros elementos finitos;
- Obtenção das equações acopladas das paredes com o fundo da casca cilíndrica;
- Estudo dos efeitos térmicos em cascas não axissimétricas;
- Análise não linear da distribuição de temperatura e posterior obtenção das tensões geradas;
- Obtenção das equações gerais com cargas estáticas aplicadas, somada ao efeito da carga térmica.
- Análise considerando simultaneamente o fundo e a tampa nas estruturas cilíndricas;
- Consideração da variação de temperatura no estado transiente;
- Estudo do efeito térmico em casca curta nos estados estacionário e transiente;
- Análise térmica nas estruturas considerando as propriedades reológicas;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguiar, A. R. (2006) *Problema Termo-estrutural – Tutorial*. . São Paulo: Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/cursos/SET181/sergio/MecIIexemplomodelo\\_3.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/cursos/SET181/sergio/MecIIexemplomodelo_3.pdf)>.
- Alves, V. (2001). *Análise e Dimensionamento de Silos de Concreto Armado: Desenvolvimento de um programa Computacional*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas – SP.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE COMMITTEE. *ACI 313 – Recommended practice for design and construction of concrete bins, silo and bunkers for storing granular materials*. Detroit, 1997.
- Andersen, P. (1966). *Temperature Stress in Steel Grain-Storage Tanks*. Civil Engineering – ASCE, p. 74.
- ANSYS, I. *Thermal Analysis Guide*. V. 15317, n. April, p. 724–746, 2009.
- Awaji, H. & Sivakumar, R. (2001). Temperature and Stress Distributions in a Hollow Cylinder of Functionally Graded Material: The Case of Temperature-Independent Material Properties. *Journal of the American Ceramic Society*. V. 65, p. 1059–1065.
- Baker, E. H.; kovalesvsky, L. & Rish, F. L. (1972). *Structural Analysis of Shells*. California, United States: McGraw-Hill.
- Barbosa, A. S. (2013). *Estudo numérico-computacional e analítico do choque térmico em fachadas de edificações*. 2013. Xxiv, 275 f., il. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Universidade de Brasília, Brasília.
- Byrne, R. (1944)., *Theory of small deformations of a thin elastic shell*, Seminar Reports in Math, University of California, Publ. in Math, N.S., vol. 2, No. 1, pp. 103–152.
- Campos Júnior, H. S. (2011) *Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-007A/11. Universidade de Brasília.
- Carmona, T. G. (2005). *Esforços Circunferenciais em Tanques de Concreto Armado com Seção Circular - Tensões originadas Por Gradiente Térmico*. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- Carmona, T. G. & Pinto Jr., N. (2005). *Esforços Circunferenciais em Tanques Cilíndricos de Concreto -Verificação da Fissuração*. *Ibracon*.

- Chen, Y.; Wang, S. & Zuo, Z. (2003) A procedure for calculating transient thermal load through multilayer cylindrical structures. *Applied Thermal Engineering*, v. 23, n. 16, p. 2133–2145, doi:10.1016/S1359-4311(03)00182-0.
- Coelho, N. A. (2012). *Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. 152p. Publicação E.DM-006A/12, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. UnB. Brasília, DF, 152p.
- Cook, R. D. (1995). *Finite element modeling for stress analysis*. University of Wisconsin – Madison. New York: John Wiley & Sons, Inc. p. 330
- Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. New York. Springer, 525 p.
- Fonseca, E. M. M.; Oliveira, C. A. M. e Melo, F. J. M. (2004). Q. Análise termo-mecânica e sistemas tubulares submetidos a pressão interna e a temperaturas elevadas. *Métodos Computacionais em Engenharia*. Lisboa. Portugal, 1–12.
- Ghali, A. (2000). *Circular Storage Tanks and silos*. 2nd. Ed. London: Taylor & Francis Routledge. P. 41.
- Ghali, A. & Elliott, E. (1992). Serviceability of Circular Prestressed Concrete Tanks. *ACI Structural Journal*, n. 89, 345–355.
- Goddard, J. Storage Tank Fires Turn Fatal. Disponível em: <<http://www.ircrisk.com/blognet/post/2011/06/28/Storage-Tank-Fires-Turn-Fatal.aspx>. ERM Risk and Safety Blog.>. Acesso em: 22 jun. 2013.
- Godinho, L.; Tadeu, A. & Simões, N. (2004). Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, n. 6, 593–606, doi:10.1016/j.enganabound.2003.09.002.
- Gravina, P. B. (1957). *Teoria e calculo das cascas: Cascas de revolução*. 1. Ed. São Paulo: Salesianas, Escolas profissionais.
- Grangeiro, A. E. B.; Parente Junior, E. (2009). Flambagem Vertical de Dutos Submetidos à Aumento de Temperatura. *5º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás*. Fortaleza. Anais do 5º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, 2009. V. 1. P. 1-9.
- Jabbari, M.; Sohrabpour, S. & Eslami, M. R. (2002). Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 79, n. 7, p. 493–497, doi:10.1016/S0308-0161(02)00043-1.

- Jenkyn, R. (1994). How to Calculate Thermal Loadings in Silos. *Bulk Solids Handling*, v.14, n. 2, p.345-49.
- Karbaschi, M. E. (2013). Effect of uniform and gradient thermal loadings on cylindrical steel reservoirs: analytical investigation. *Journal of Civil Engineering and Construction Technology*. V. 4(3), n. March, p. 90–103, doi:10.5897/JCECT12.091.
- Kreith F. (1973). *Princípios da Transmissão de calor*. São Paulo: Edigard Blücher LTDA.
- Larsson, O. & Thelandersson, S. (2012). Transverse thermal stresses in concrete box cross-sections due climatic exposure. *Structural Concrete Journal of the FIB*, p. 227–235, doi:10.1002/suco.201200010.
- Love, A.E.H. (1888). *The Small Free Vibrations of a Thin Elastic Shell*. (1888). In: Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 179, 491-549.
- Lustosa, I. A. A. (2011). *Um Estudo Comparativo Analítico- Numérico de Esforços E Deslocamentos Em Cascas Cilíndricas Abertas ou com Conexões de Borda*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-003A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 164p.
- Meijers, S.; Sloten, J. Van & Kraus, J. (2013). Design of Prestressed Concrete Structures Subject to severe Thermal Loading. *Proceedings of the FIB Symposium Tel-Aviv*.
- Mendes, N. B. (2013). *Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicação a barragens em arco*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-12A/13. Universidade de Brasília.
- Moaveni, S. (1999). *Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall. P. 121–183
- Morais, M. V. G. et al. (2010). Contribution to the explanation of the spalling of small specimen without any mechanical restraint exposed to high temperature. *Nuclear Engineering and Design*. V. 240, n. 10, p. 2655–2663, doi:10.1016/j.nucengdes.2010.04.041.
- Pedroso, L. J. (1998). Teoria de Placas e Cascas - Uma Abordagem Analítica e Numérica. Publicação Didática (Apostila interna); In: Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, Universidade de Brasília, Brasil.
- Pedroso, L. J. (2011). “*Manuscritos, Esquemas, Discussões e Notas de Seções de Orientações, 2013-2014*”. In: Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, Universidade de Brasília, Brasil.

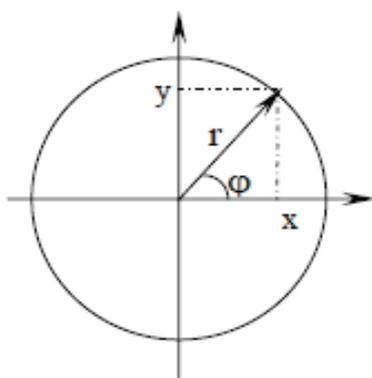
- Pereira, A. R. C. P. S. (2010). *Análise de Reservatórios Circulares Pré-fabricados de Betão Armado Pós- Tensionados*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa. Lisboa.
- Priestley, M. J. N. (1976). Ambient Thermal Stresses in Circular Prestressed Concrete Tanks. *ACI Journal*, n. 73.
- Rani, S. D. e Santhanam, M. (2012). Influence of moderately elevated temperatures on engineering properties of concrete used for nuclear reactor vaults. *Cement & Concrete Composites*, v. 34, p. 917–923.
- Rao, S. S. (2004). *The Finite Element Method in Engineering*. 4. Ed : Elsevier Science & Technology Books.
- Safarian, S. & Harris, E. C. (1985). *Design and Construction of Silos and Bunkers*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Saraiva, A G.(1998). “*Contribuição ao Estudo de Tensões de Natureza Térmica em Sistemas de Revestimento Cerâmico de Fachada*”. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- Shao, Z. S. & Wang, T. J. (2006). Three-dimensional solutions for the stress fields in functionally graded cylindrical panel with finite length and subjected to thermal/mechanical loads. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, n. 13, p. 3856–3874, doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.043.
- Silveira, A. F.(1961). *As variações de temperatura nas barragens*. Lisboa: Lab. Nac. Eng. Civ. 437 p.
- Souza, S. M. (2007). *Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-004<sup>a</sup>/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 177p.
- Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. 2 ed. New York: McGraw-Hill.
- Uchôa, J. C. B. (2007). “*Procedimento numérico e experimental para a avaliação da resistência à fadiga de sistemas de revestimento*”, Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- Ventsel, E. & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications*. 1. Ed. New York: CRC Press.
- Vlasov, V.Z. (1964). *General Theory of Shells and its Applications in Engineering*, NASA, Washington, DC, 860–77.

- Zhang, Q. et al. (1987). Finite Element Model for Predicting Static and Thermally Induced Bin Wall Pressures. *American Society of Agricultural Engineers*.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1991)*The Finite Element Method*. 4. Ed. London: McGraw-Hill Book Company Europe. v. 1. p. 135–141

## **ANEXOS**

## ANEXO A – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A variação de temperatura se dará através das variações de x e y. A seguir está a transformação das coordenadas cartesianas em cilíndricas.



Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{A 1}$$

Das relações tem-se:

Figura A.1 - Geometria em coordenada polar

$$x = r \sin \varphi \quad \text{e} \quad y = r \cos \varphi \quad \text{A 2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad \text{A 3}$$

De A 2 e A 3, tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \text{A 4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \varphi$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \left[ \cos \varphi \frac{\partial \dots}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \dots}{\partial \varphi} \right] T \quad \text{A 5}$$

Por outro lado:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \left[ \cos \varphi \frac{\partial \dots}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \dots}{\partial \varphi} \right] \left[ \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] \quad \text{A 6}$$

Operando A 6, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] \quad \text{A 7} \end{aligned}$$

Sendo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \cos \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

A 8

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \cos \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} - \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

Operando de maneira similar com relação a y vem:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \left[ \sin \varphi \frac{\partial \dots}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \dots}{\partial \varphi} \right] T \quad \text{A 9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \left[ \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] \quad \text{A 10} \end{aligned}$$

Substituindo A 6 e a A 10 em

A 1, tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

A 11

## **ANEXO B – FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS**

Nesta seção, será mostrada uma dedução pelo método dos elementos finitos de uma casca axissimétrica de revolução, idealizada com elementos cônicos (Figura B.2 a) que pode ser encontrada em Zienkiewicz & Taylor (1991) com complementação em Ghali (2000). Para o desenvolvimento também foi utilizada a formulação apresentada por Cook (1995). Este elemento é relativamente simples, porém, dá resultados precisos para o caso a ser estudado.

Seguindo as mesmas hipóteses já citadas no capítulo anterior, considera-se o material da casca isotrópico, elástico, a espessura da casca é considerada pequena em relação o raio, de tal modo que a deformação de cisalhamento possa ser ignorada. Esta formulação pode ser aplicada em várias formas de cascas axissimétricas. Destaca-se que a formulação pode ser empregada na análise de parede, tampa e fundo como estruturas contínuas.

### **B.1. DESLOCAMENTOS NODAIS E FORÇAS NODAIS**

A Figura B.2b mostra um corte no eixo de revolução de uma casca axissimétrica submetido a um carregamento axissimétrico. Através de um conjunto de cascas cônicas, conectados por linhas nodais circulares, a casca é idealizada. A Figura B.2b apresenta os nós com três graus de liberdade, que é representado por seis coordenadas locais.

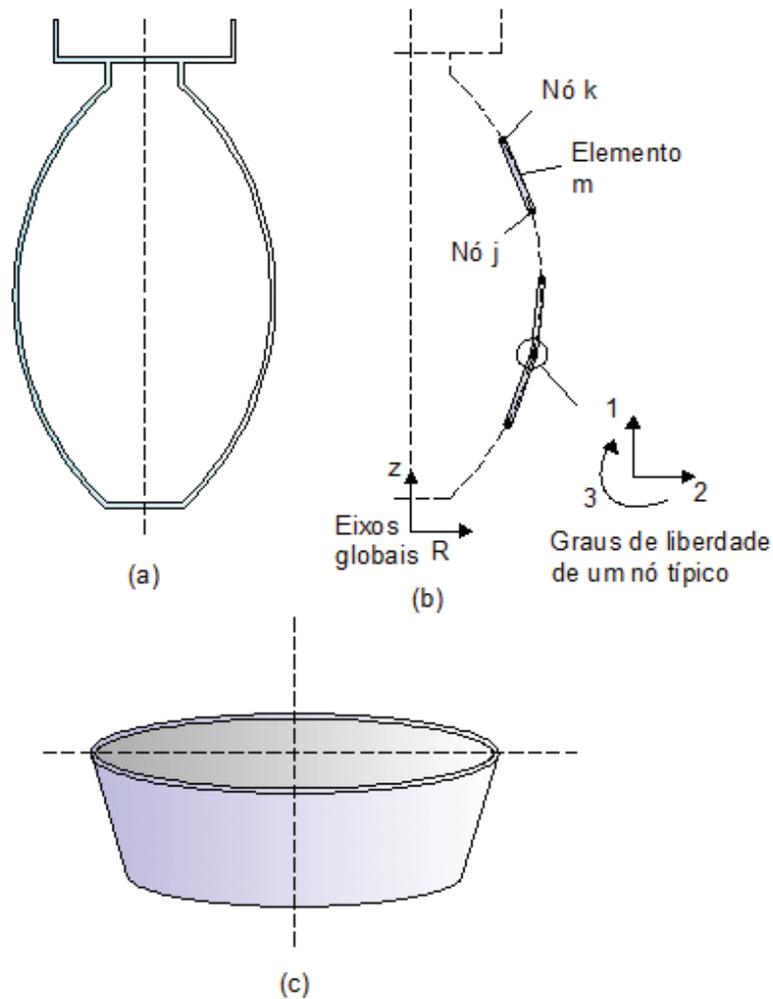


Figura B.2 – Idealização de elemento de casca cônica axissimétrica de revolução. (a) Seção vertical do digestor em forma de ovo para tratamento de água de esgoto. (b) Idealização de elementos finitos. (c) elemento de casca típica. (Ghali, 2000)

As coordenadas  $1^*$  e  $4^*$  (Figura B.3) representam as translações ou forças ao longo de linha do meridiano,  $2^*$  e  $5^*$  representam translações ou forças na direção de uma normal à superfície do cone. As rotações ou momentos radiais das coordenadas  $3^*$  e  $6^*$  são representada por  $D_3^*$  e  $D_6^*$ , sendo expressa por:

$$D_3^* = \left( \frac{dw}{ds} \right)_{\xi=0}, \quad D_6^* = \left( \frac{dw}{ds} \right)_{\xi=1} \quad \text{B.1}$$

Onde  $w$  é o deslocamento em qualquer ponto da direção normal ao reservatório e  $\xi = \frac{s}{l}$ , sendo  $s$  a distancia do nó 1 a qualquer ponto sobre o meridiano e o tamanho  $l$ .

As forças  $\{F\}^*$  são iguais à intensidade das forças nodais multiplicadas pelo comprimento das linhas nodais, sendo:

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \end{Bmatrix} = 2\pi R_1 \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_4^* \\ F_5^* \\ F_6^* \end{Bmatrix} = 2\pi R_2 \begin{Bmatrix} q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} \quad \text{B.2}$$

Onde  $q$  representa a intensidade de uma carga uniforme sobre uma linha nodal (força por unidade de comprimento ou (força  $\times$  comprimento) / comprimento);  $R_1$  e  $R_2$  são os raios dos nós 1 e 2. Qualquer carga distribuída sobre a superfície do elemento tem de ser substituída por cargas em linha estática equivalente nas linhas nodais 1 e 2.

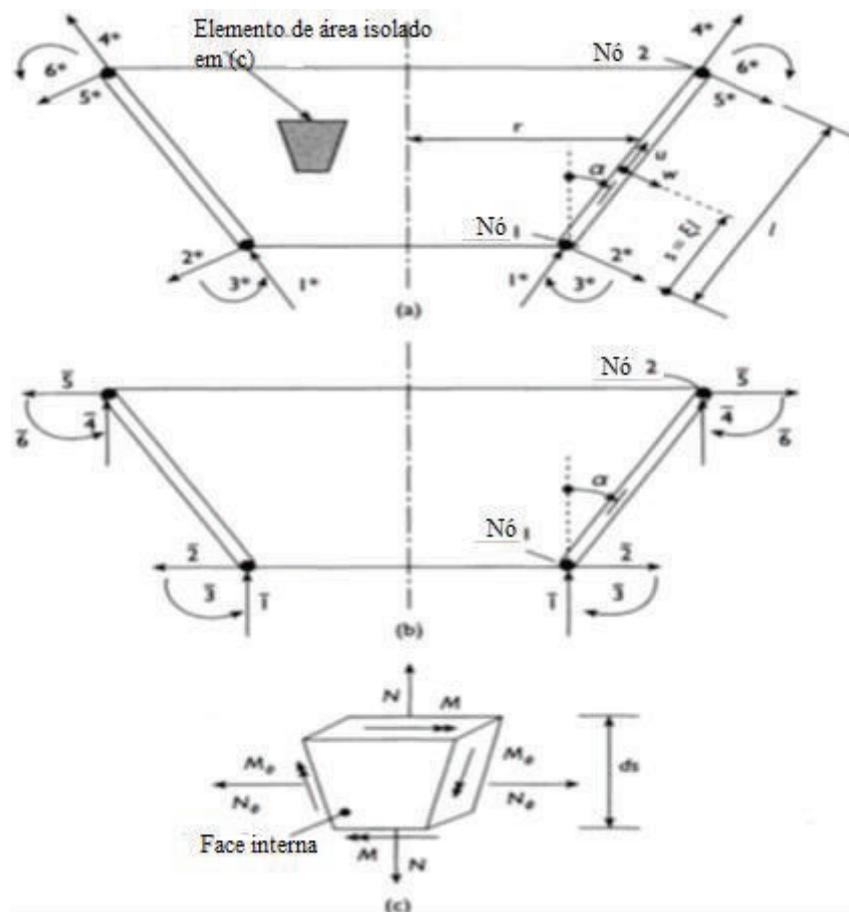


Figura B.3 – Elemento finito típico. (a) eixos globais x e r; graus de liberdade e ordem de numeração de coordenadas em um nó típico. (b) coordenadas Locais; convenção sinal positivo para u, w, s e  $\alpha$ . (c) visão pictórica de uma área elementar mostrando as resultantes de tensões em convenção de sinal positivo (GHALI, 2000).

Os deslocamentos e forças nodais são representados na Figura B.3(b), nas direções paralelas aos eixos globais x e r (Figura B.2b). As forças do elemento  $\{\bar{F}\}$  e os deslocamentos  $\{\bar{D}\}$  nas direções globais se relacionam com  $\{D^*\}$  e  $\{F^*\}$  em coordenadas locais como mostrado abaixo:

$$\{D^*\} = [T]\{\bar{D}\}, \quad \{\bar{F}\} = [T]^T \{F^*\} \quad \text{B.3}$$

Em que:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}, \quad [t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O ângulo  $\alpha$  e sua convenção de sinal positivo são definidos na Figura B.3 a e b, sendo que o expoente T indica a transposta da matriz.

A matriz de rigidez a ser obtida adiante, relaciona forças nodais e deslocamentos dos elementos em seis coordenadas locais definidos na Figura B.3 a da seguinte forma.

$$[S^*]\{D^*\} = \{F^*\} \quad \text{B.4}$$

## B.2. TRANSFORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Os elementos da matriz de rigidez  $[S^*]$  representam as forças devidas aos deslocamentos unitários com as coordenadas locais de um elemento. As matrizes de rigidez dos elementos são combinadas para se obter a matriz de rigidez estrutura. Com isso, a matriz rigidez individual  $[S^*]$  é transformado para a  $[\bar{S}]$  que corresponde a coordenadas globais em sentidos mostrados na Figura B.3(b), sendo:

$$[\bar{S}] = [T]^T [S^*] [T] \quad \text{B.5}$$

Sendo  $[\bar{S}]$ , a relação das matrizes  $\{\bar{F}\}$  e  $\{\bar{D}\}$ , abaixo:

$$[\bar{S}]\{\bar{D}\} = \{\bar{F}\} \quad \text{B.6}$$

A matriz de rigidez  $[\bar{S}]$  relaciona as forças  $\{\bar{F}\}$  com deslocamentos do elemento  $\{\bar{D}\}$  nas direções globais. Ambas as matrizes  $[S^*]$  e  $[\bar{S}]$  são simétricas. Para provar a Equação B.5, considera-se que o produto  $\frac{1}{2} \{\bar{D}\}^T \{\bar{F}\}$  é igual ao trabalho realizado pelas forças  $\{\bar{F}\}$ , isto é, o mesmo trabalho realizado pelas forças  $[F^*]$ . Assim:

$$\{\bar{D}\}^T \{\bar{F}\} = \{D^*\}^T \{F^*\} \quad \text{B.7}$$

Elimina-se  $\{\bar{F}\}$  pela utilização da Equação B.6; também eliminar  $\{F^*\}$  e  $\{D^*\}^T$  pela respectiva utilização da Equação B.4 e a primeira das Equações B.3 e da sua transposta. Isto dá:

$$\{\bar{D}\}^T [\bar{S}]\{\bar{D}\} = \{\bar{D}\}^T [T]^T [S^*] [T]\{\bar{D}\} \quad \text{B.8}$$

A comparação dos dois lados da Equação B.8 resulta na Equação B.5.

### B.3. INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Em qualquer ponto em uma linha de meridiano, os deslocamentos  $\{u, w\}$  são assumidos estar relacionado com os deslocamentos nodais pela Equação B.9 (Figura B.3b):

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & L1 & L2 & 0 & L3 & L4 \end{bmatrix} \{D^*\} \quad \text{B.9}$$

Sendo que  $u$  é a translação de qualquer ponto na direção meridional 1-2 e  $w$  é a deflexão transversal na direção normal à superfície (sentido das coordenadas 2 \* ou 5 \* na Figura B.3a;  $\xi = \frac{s}{l}$ , com  $s$  sendo a distância entre o nó 1 e o ponto considerado,  $l$  é o comprimento da linha meridional 1-2, e  $L1$  a  $L4$  são polinômios de terceiro grau que descrevem a deflexão  $w$  da linha do meridiano (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

$$[L1 \quad L2 \quad L3 \quad L4] = [1-3\xi^2 + 2\xi^3 \quad l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (-\xi^2 + \xi^3)] \quad \text{B.10}$$

O polinômio  $L1$  dá a variação de  $w$  ao longo do comprimento  $l$ , quando  $D_2^* = 1$ , enquanto os outros deslocamentos nodais são zero. Do mesmo modo,  $(1-\xi)$  dá o valor de  $u$  em qualquer ponto dentro do elemento quando  $D_1^* = 1$ , enquanto os outros deslocamentos nodais são zero. Da mesma forma, cada um dos elementos da matriz 2 x 6 na Equação B.9 podem ser definidos. Estas são as funções da forma de  $\xi$  interpolando  $u$  e  $w$  entre os valores nodais, para dar os valores em qualquer ponto do meridiano.

### B.4. TENSÕES RESULTANTES

As tensões resultantes no meridiano e na direção circunferencial (Figura B.3c), podem ser expressas como:

$$\{\sigma\} = [de]\{\varepsilon\} \quad \text{B.11}$$

Onde  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  representam vetores de tensão e deformação generalizados definido como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\phi \\ \chi_z \\ \chi_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (w \cos \alpha + u \sin \alpha)/R \\ -d^2w/ds^2 \\ -(\sin \alpha/R)(dw/ds) \end{Bmatrix} \quad \text{B.12}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N \\ N_\phi \\ M \\ M_\phi \end{Bmatrix} \quad \text{B.13}$$

Onde  $N$  e  $M$  são a força normal e o momento na direção do meridiano por unidade de comprimento;  $N_\phi$  e  $M_\phi$  são a força normal e o momento na direção circunferencial por unidade de comprimento. A convenção de sinal positivo das tensões resultantes é mostrada na Figura B.3c. A matriz de elasticidade relacionando a tensão generalizada e a deformação generalizada Equação B.11 é:

$$[de] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2/12 & \nu h^2/12 \\ 0 & 0 & \nu h^2/12 & h^2/12 \end{bmatrix} \quad \text{B.14}$$

Onde  $h$  é a espessura do elemento,  $E$  é módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Por substituição de  $u$  e  $w$  da Equação B.9 na Equação B.12, a deformação generalizada pode ser expressa em termos de deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{D^*\} \quad \text{B.15}$$

Sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\text{sen}\alpha}{R}(1-\xi) & \frac{\cos\alpha}{R}L1 & \frac{\cos\alpha}{R}L2 & \frac{\text{sen}\alpha}{r}\xi & \frac{\cos\alpha}{R}L3 & \frac{\cos\alpha}{R}L4 \\ 0 & \frac{1}{l^2}(6-12\xi) & \frac{1}{l}(4-6\xi) & 0 & \frac{1}{l^2(12\xi-6)} & \frac{1}{l}(2-6\xi) \\ 0 & \frac{\text{sen}\alpha}{Rl}(6\xi-6\xi^2) & \frac{\text{sen}\alpha}{R}(4\xi-3\xi^2-1) & 0 & \frac{\text{sen}\alpha}{Rl}(6\xi^2-6\xi) & \frac{\text{sen}\alpha}{R}(2\xi-3\xi^2) \end{bmatrix} \quad \text{B.16}$$

Substituindo a Equação B.15 na B.11 dá as tensões resultantes:

$$\{\sigma\} = [de][B]\{D^*\} + \{\sigma_r\} \quad \text{B.17}$$

O vetor  $\{\sigma_r\}$  representa as tensões resultantes quando o deslocamento nodal  $\{D^*\}=\{0\}$ ;  $\{\sigma_r\}$  é não nula somente quando a análise é para o efeito da mudança de volume (ex. devido a temperatura, retração ou alongamento). O uso da Equação B.17 com  $\xi=0,5$  e  $R=(R1+R2)/2$  dá as tensões resultantes medias entre as linhas nodais do elemento. Estes são valores comumente inclusos nos resultados calculados.

## B.5. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Considera-se o elemento finito na Figura B.3<sup>a</sup> sujeito a forças  $\{F^*\}$ , produzindo deslocamentos  $\{D^*\}$ . Quando  $\{D^*\}=0$ , a tensão inicial  $\{\sigma_r\}$  é considerada nula. O trabalho feito por forças  $\{F^*\}$  é igual à energia de deformação. Então,

$$\frac{1}{2}\{F^*\}\{D^*\} = \frac{1}{2} \int_{area} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} da \quad \text{B.18}$$

Sendo a área  $da$ :

$$da = 2\pi R ds \quad \text{B.19}$$

Onde  $ds = l d\xi$ . O uso das Equações B.4, B.11, B.15 e B.19 para eliminar  $\{F^*\}$ ,  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  dá a matriz de rigidez do elemento em relação a suas coordenadas locais (Figura B.3<sup>a</sup>):

$$[S^*] = 2\pi l \int_0^1 R[B]^T [de][B] d\xi \quad \text{B.20}$$

O raio em qualquer ponto pode ser expresso como uma função de  $\xi$ :

$$R = (l_i - \xi)R1 + \xi R2 \quad \text{B.21}$$

Onde  $R1$  e  $R2$  são os raios nos nós 1 e 2. A integração numérica de Gauss pode ser empregada para dar valor a Equação B.20. Para resolver problemas com essa formulação, dois pontos do modelo de Gauss são suficientes (Ghali, 2000) no cálculo das integrais na Equação B.20, assim como das forças que serão mostradas adiante. Com esta escolha, o valor da integral é  $(g1+g2)/2$ , onde  $g1$  e  $g2$  são valores de integração em  $\varepsilon = (3-\sqrt{3})/6$  e  $(3+\sqrt{3})/6$  (ver anexo C). Dois pontos do modelo dão precisão suficiente para este elemento finito.

## B.6. ANÁLISE DO EFEITO DA TEMPERATURA

A análise do efeito de variação de temperatura é frequentemente necessária nos projetos de tanques e silos. A solução do problema através do método de elementos finitos é discutida abaixo. O elemento na Figura B.3<sup>a</sup> está sujeito a um aumento de temperatura axissimétrica que varia linearmente com a espessura entre  $T_i$  e  $T_e$  para as faces interior e exterior, respectivamente. Primeiro, assume-se os deslocamentos nodais artificialmente impedidos pelas forças nodais  $\{Fr^*\}$ , assim, a expansão térmica é contida, provocando o desenvolvimento de tensões generalizadas de restrição  $\{\sigma_r\}$ , que é dada pela Equação B.22.

$$\{\sigma_r\} = -[de] \begin{Bmatrix} \alpha(T_e + T_i)/2 \\ \alpha(T_e + T_i)/2 \\ \alpha(T_e - T_i)/h \\ \alpha(T_e - T_i)/h \end{Bmatrix} \quad \text{B.22}$$

Em que  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica ( $1/^\circ\text{C}$ ). O vetor no lado direito da equação representa os valores da deformação generalizada que ocorreria se a parte elementar do reservatório na Figura B.3c estivesse livre para expandir livremente. Neste estado de retenção, o elemento está em equilíbrio com as forças nodais  $\{F_r^*\}$ , produzindo tensão constante  $\{\sigma_r\}$ , dado pela Equação B.22. Através do método dos trabalhos virtuais, qualquer uma das forças de retenção  $\{F_{ri}^*\}$ , pode ser calculada através da introdução de um deslocamento virtual  $D_i^* = 1$  com todos os outros deslocamentos nodais iguais zero. A força é então dada por:

$$F_{ri}^* = \int_{\text{area}} \{\varepsilon_{ui}\}^T \{\sigma_r\} da \quad \text{B.23}$$

Onde  $\{\varepsilon_{ui}\}$  representa a deformação generalizada quando  $D_i^* = 1$ ; esta é a mesma que a coluna  $i$ th da matriz B Equação B.16. A Equação B.23 aplicada com  $i = 1, 2, \dots, 6$  dá o vetor de forças de restrição:

$$\{F_r^*\} = 2\pi l \int_0^l R[B]^T \{\sigma_r\} d\xi \quad \text{B.24}$$

As forças restritivas  $\{F_r^*\}$  em coordenadas locais (Figura B.3a) são equivalentes estáticos para as forças nodais  $\{\bar{F}_r^*\}$  nas direções globais (Figura B.3b), cujos valores são dados pela Equação B.3:

$$\{\bar{F}_r^*\} = [T]^T \{F_r^*\}. \quad \text{B.25}$$

As Equações B.24 e B.25 são aplicadas para todos os elementos, e as forças de retenção  $\{\bar{F}_r^*\}$  do elemento são montadas para dar um vetor de forças de restrição para a estrutura. Estas forças são aplicadas numa direção contrária para eliminar a retenção artificial e produzir deslocamentos nodais devido à temperatura. Quando os deslocamentos nodais são determinados, a Equação B.17 dá a tensão térmica generalizada em elementos individuais.

## **B.7. ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA**

Com a formulação anteriormente apresentada está sendo desenvolvido um programa que calcula o efeito térmico em estruturas cilíndricas de forma estática. Logo abaixo esta a organização do programa;

- Programa principal;
- Rotina que calcula a carga térmica no nó;
- Rotina que mapeia a carga térmica;
- Rotina que faz o mapeamento de todas as cargas e restrições;
- Rotina que calcula a matriz de rigidez do elemento.

Este programa tem outros módulos/ funções que não foram apresentados, pois está em fase de testes.

## ANEXO C – OBTENÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS

Nesta seção será mostrada a obtenção dos pesos e posição dos pontos de Gauss que serão utilizados para integração no Método dos Elementos Finitos (MEF) apresentados neste trabalho. A integração muitas vezes pode se tornar muito complicada, e por isso é essencial recorrer a integração numérica também conhecidas como quadratura.

### C1 - SIMBOLOGIA

A simbologia adotada está descrita na tabela abaixo.

Tabela C.1 - Simbologia relativa à quadratura de Gauss

<i>c</i>	Coefficiente de um termo de um polinómio
<i>I</i>	Valor exacto do integral
<i>J</i>	Valor do integral calculado de acordo com a quadratura de Gauss
<i>P</i>	Posição de um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
<i>W</i>	Peso ( <i>weight</i> ) associado a um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
<i>n</i>	Número de pontos de Gauss utilizados numa direcção
<i>p</i>	Grau de um polinómio

### C2 - INTEGRAÇÃO DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

A função polinomial utilizada será esta representada pela equação abaixo:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad \text{C 1}$$

A integral do polinómio C 1 no intervalo de [0,1] é,

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{C 2}$$

$$I = \int_0^1 (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) dx \quad C 3$$

$$I = \frac{1}{1}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{4}c_3 \quad C 4$$

Suponha-se agora que se pretende avaliar o integral de  $f(x)$  por intermédio do somatório de avaliações da função  $f(x)$  em determinados locais, multiplicadas por pesos adequados. No caso do polinómio de grau 3 indicado em (C 1), será adiante mostrado que, para se obter um resultado exato, se deve avaliar a função  $f(x)$  em dois pontos de amostragem  $P_i$  e multiplicar cada um desses valores por pesos  $W_i$ . A integral avaliada desta forma é designado por  $J$ , sendo:

$$J = W_1 f(P_1) + W_2 f(P_2) \quad C 5$$

Uma vez que  $f(x)$  é um polinómio do tipo C 1, a expressão C 5 passa a ser,

$$\begin{aligned} J &= W_1 (c_0 + c_1P_1 + c_2P_1^2 + c_3P_1^3) \\ &+ W_2 (c_0 + c_1P_2 + c_2P_2^2 + c_3P_2^3) \end{aligned} \quad C 6$$

Fazendo o segundo membro em função de  $c_i$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} J &= (W_1 + W_2)c_0 + (W_1P_1 + W_2P_2)c_1 + (W_1P_1^2 + W_2P_2^2)c_2 \\ &+ (W_1P_1^3 + W_2P_2^3)c_3 \end{aligned} \quad C 7$$

A solução será obtida igualando a solução exata (C 4) com a solução aproximada (C 7), ou seja:

$$I = J \quad C 8$$

Da igualdade resulta:

Tabela C.2 - Pontos de Gauss em estudo

P1	$\frac{\sqrt{3} + 3}{6}$
	$\frac{-\sqrt{3} + 3}{6}$
P2	$\frac{-\sqrt{3} + 3}{6}$
	$\frac{\sqrt{3} + 3}{6}$
W1=W2	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$

O estudo que foi aqui realizado com um polinômio de grau 3 pode ser feito, de um modo semelhante, com polinômios de qualquer grau.

## ANEXO D – OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS TÉRMICOS

Aqui será mostrada a obtenção dos esforços térmicos, com a consideração de uma variação linear de temperatura, que pode ser encontrada em Ghali & Elliott (1992) e Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959).

### D1 - EFEITO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA NA PAREDE

As tensões circunferenciais e axiais para uma expansão térmica restringida na parede de um cilindro são,

$$\sigma_{\phi} = \sigma_z = -\frac{E\alpha}{1-\nu}T \quad D1$$

Sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson;  $T = T(x)$  é a temperatura na espessura da parede. Com isso as forças e momentos axiais e circunferenciais são:

$$N_{\phi} = N_z = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T)(dx) \quad D2$$

$$M_{\phi} = M_z = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T)(x)(dx) \quad D3$$

Considerando as forças circunferenciais nulas e momentos e forças axiais dados por  $M_{\phi r}$ ,  $N_{zr}$  respectivamente, nas bordas. Sabendo que a pressão é dada por:

$$P = N_{\phi r}/r \quad D4$$

### D2 - VARIAÇÃO DE TEMPERATURA NA PAREDE

A variação da temperatura na parede é considerada linear e através dela com as equações anteriores são obtidas as equações finais. Considerando os deslocamentos e rotações nas extremidades restringidas e com a temperatura dada na parede por:

$$T = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2x}{h} \right) T_e + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2x}{h} \right) T_i \quad \text{D5}$$

Sendo que  $x$  varia do raio interno ao raio externo e  $h$  é a espessura do tanque. Substituindo a Equação D5 nas Equações D2 e D3, têm-se:

$$N_\phi = N_z = -\frac{E\alpha h}{1-\nu} \left( \frac{T_e + T_i}{2} \right) \quad \text{D6}$$

$$M_\phi = M_z = -\frac{E\alpha h^2}{1-\nu} \left( \frac{T_e - T_i}{2} \right) \quad \text{D7}$$