

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM PONTES
DEVIDO À CARGAS MÓVEIS**

CARLOS ALONSO PACHECO HUACHO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM
PONTES DEVIDO À CARGAS MÓVEIS**

CARLOS ALONSO PACHECO HUACHO

ORIENTADOR: JOSÉ LUÍS VITAL DE BRITO

CO-ORIENTADOR: ZENÓN JOSÉ GUZMÁN NÚÑEZ DEL PRADO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM - 006A/14
BRASÍLIA/DF: 06 DE MAIO – 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM
PONTES DEVIDO À CARGAS MÓVEIS

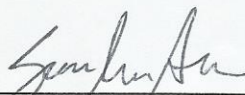
CARLOS ALONSO PACHECO HUACHO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

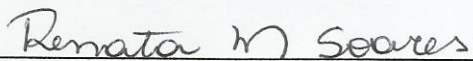
APROVADA POR:



Prof. José Luís Vital de Brito, DSc (UnB)
(Orientador)



Prof. Suzana Moréira Ávila, DSc (UnB)
(Examinador Interno)



Prof. Renata Machado Soares, DSc (UFG)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 06 DE MAIO DE 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

PACHECO HUACHO, CARLOS ALONSO	
Análise Paramétrica de Vibrações Induzidas em Pontes Devido à Cargas Móveis [Distrito Federal] 2014.	
xviii, 108p, 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1. Análise dinâmica	2. Vibração
3. Deslocamento	4. Paramétrica
I. ENC/FT/UnB	II. Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PACHECO HUACHO, C. A. (2014). Análise Paramétrica de Vibrações Induzidas em Pontes Devido à Cargas Móveis. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 006A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Carlos Alonso Pacheco Huacho.

TÍTULO: Análise Paramétrica de Vibrações Induzidas em Pontes Devido à Cargas Móveis.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Carlos Alonso Pacheco Huacho
SCLN 407, Bloco C – Apt. 103 – Asa Norte,
CEP 70.855-530 Brasília – DF – Brasil.
e-mail: carlos_luan@hotmail.com

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por estar presente todo o tempo na minha vida e nunca se esquecer de mim.

Ao professor Zenón José Guzmán Núñez Del Prado, pelo conhecimento transmitido, por ser um grande pesquisador, por sua ajuda incondicional para fazer realidade a conclusão desta dissertação e por sua contínua contribuição com pesquisas em diversas áreas da engenharia.

Ao professor orientador José Luís Vital de Brito, por ter me auxiliado em vários momentos da dissertação e por sua paciência em todo momento.

Aos meus prezados amigos e colegas de mestrado, especialmente a: Agno, Alejandra, Almerio, Eduardo, Fabiano, Gelson, Leonardo, Walter, Wanderley e Wilson pelos momentos compartilhados na sala de estudo do PECC e por suas amizades, e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), da UnB, profissionais admiráveis desde qualquer ponto de vista.

Agradeço a Alonso Ernesto e María Dolores, meus amados pais, por serem meu suporte emocional e me motivar sempre em cada passo da minha vida. Ao Homar, Janette, Rolando e Flor de María, meus irmãos, por seu carinho. E a todos os meus familiares.

Aos meus prezados amigos presentes e fisicamente ausentes, pela força e momentos de alegria proporcionados a mim.

Ao governo Brasileiro, pela oportunidade oferecida e pelo suporte financeiro. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que fez possível a conclusão deste mestrado. E à Universidade de Brasília (UnB), muito obrigado.

Finalmente, ao povo Brasileiro, por sua alegria incomparável e por me fazer parte de sua cultura nestes dois anos de mestrado. Muito obrigado.

À minha sobrinha, María De Los Angeles por ser a luz que ilumina o caminho da nossa família e por nos demonstrar uma grande fortaleza mesmo ela sendo ainda uma criança.

RESUMO

ANÁLISE PARAMÉTRICA DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM PONTES DEVIDO À CARGAS MÓVEIS

Autor: Carlos Alonso Pacheco Huacho

Orientador: José Luís Vital de Brito

Co-orientador: Zenón José Guzmán Núñez del Prado

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 06 Maio de 2014

O controle de vibrações induzidas em pontes sob o efeito de cargas dinâmicas é um objeto de estudo de engenheiros e cientistas.

Neste trabalho são estudadas as vibrações induzidas por cargas móveis em pontes, assim para descrever as vigas considera-se a teoria linear e não linear de Euler-Bernoulli levando-se em consideração a inércia rotacional das vigas e a teoria linear da viga de Timoshenko. Para descrever os deslocamentos transversais das vigas é considerada uma expansão com cinco graus de liberdade que satisfaz as condições de contorno e, posteriormente é aplicado o método de Galerkin para obter sistemas lineares e não lineares de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de equilíbrio dinâmico que posteriormente são resolvidos pelo método de Runge-Kutta. O controle de vibrações é realizado através da aplicação de um absorvedor linear acoplado à viga.

Os resultados mostram a importância da interação veículo-ponte e a posição do absorvedor no controle de vibrações da ponte. A representação gráfica dos resultados é feita através de recursos computacionais que permitem uma visualização em termos adimensionais das características do sistema, assim como, a comparação com outros resultados fornecidos na literatura.

ABSTRACT

PARAMETRIC ANALYSIS OF INDUCED VIBRATIONS IN BRIDGES DUE TO MOVING LOADS

Author: Carlos Alonso Pacheco Huacho

Supervisor: José Luís Vital de Brito

Co-supervisor: Zenón José Guzmán Núñez del Prado

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 06 May 2014

Control of induced vibration on bridges under the effect of dynamic loads has been studied by engineers and scientists.

In this work the control of induced vibrations due to moving loads on bridges is studied, to model the beam the linear and non-linear Euler-Bernoulli beam theory is applied considering the effects of rotator inertia as well as the Timoshenko linear beam theory. To describe the transversal displacements of the beam an expansion with five degrees of freedom that satisfied the boundary conditions is considered and, the Galerkin method is used to obtain a set of ordinary differential equations of dynamic equilibrium which are, in turn, then solved by the Runge-Kutta. The vibration control is performed by applying a linear absorber coupled to the beam.

The results show the importance of vehicle-bridge interaction and the position of absorber to control the vibrations of the beams. The graphical representation of the results is made by computational capabilities that allow a view in dimensionless terms the characteristics of the system, as well as comparison with other results given in the literature.

ÍNDICE

CAPÍTULO	PÁGINA
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. JUSTIFICATIVA	4
1.2. OBJETIVO.....	4
1.2.1. Objetivo geral.....	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	13
3.1. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE EULER-BERNOULLI COM INÉRCIA ROTACIONAL	15
3.2. FORMULAÇÃO LINEAR DE TIMOSHENKO.....	25
3.3. REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO A UMA FORMA ADIMENSIONAL	28
3.4. DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DE GALERKIN	31
3.5. FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA .	39
3.6. CRITÉRIO DE DEN HARTOG PARA A PROCURA DOS PARÂMETROS ÓTIMOS DO ABSORSOR	41
4. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	44
4.1. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA ESTÁTICA	44
4.2. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA HARMÔNICA.....	48
4.3. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA EM MOVIMENTO QUE PERCORRE UMA PONTE	50
4.4. VALIDAÇÃO PARA UM VEÍCULO QUE PERCORRE UMA PONTE.....	53
4.5. VALIDAÇÃO PARA UM VEÍCULO QUE PERCORRE UMA PONTE CONTROLADA POR UM ABSORSOR.....	59
4.6. ANÁLISE PARAMÉTRICA DO SISTEMA	64

4.6.1. Primeiro Modelo Numérico (5,00x0,25x0,50)	67
4.6.2. Segundo Modelo Numérico (10,00x0,25x0,50)	70
4.6.3. Terceiro Modelo Numérico (5,00x0,25x0,75)	73
4.6.4. Quarto Modelo Numérico (10,00x0,25x0,75)	77
4.6.5. Quinto Modelo Numérico (10,00x0,25x1,00)	80
4.6.6. Sexto Modelo Numérico (20,00x0,25x1,00)	83
4.6.7. Sétimo Modelo Numérico Não linear (10,00x0,25x0,25)	87
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	89
5.1. CONCLUSÕES	89
5.2. SUGESTÕES.....	91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92
APÊNDICE A – Rotinas do Método de Galerkin no MAPLE 15.....	96
APÊNDICE B – Adimensionalização da Equação Diferencial de Movimento.....	103
APÊNDICE C – Dedução da Equação Diferencial de Movimento.....	106

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
Figura 1.1 – Esquema de deformação de uma viga que ilustra a diferença entre a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bernoulli: (a) φ e $\partial y/\partial x$ não tem necessariamente que coincidir, enquanto (b) φ e $\partial y/\partial x$ são iguais.....	2
Figura 2.1 – Geometria da seção da ponte (Kwon H. <i>et al</i> , 1998).....	6
Figura 2.2 – Veículo modelo (Kwon H. <i>et al</i> , 1998).	7
Figura 2.3 – Sistema estrutural (Greco e Santini, 2002).	7
Figura 2.4 – Sistema estrutural (Yang <i>et al</i> , 2004).	8
Figura 2.5 – Viga principal e sistema de adaptação (Museros e Martinez-Rodrigo, 2007).....	8
Figura 2.6 – Diferentes configurações de vigas (Lara, 2007).	9
Figura 2.7 – Viga modelo (Samani e Pellicano, 2009).	10
Figura 2.8 – Modelo de viga controlada (Soares e Del Prado, 2012).	10
Figura 2.9 – Modelo de viga simplesmente apoiada e amortecedor acoplado (Da Silva e Del Prado, 2012).	11
Figura 2.10 – Modelo de viga submetida a uma sequência de cargas móveis (Samani e Pellicano, 2012).....	12
Figura 2.11 – Configuração de uma análise com o modelo de veículo completo (Silva, 2012)	12
Figura 3.1 – Viga simplesmente apoiada submetida a carregamento externo.	13
Figura 3.2 – Esquema das formulações desenvolvidas.	14
Figura 3.3 – Modelo de viga simplesmente apoiada controlada (modificado de Soares e Del Prado, 2012)	14
Figura 3.4 – Deslocamento transversal e encurtamento da viga. (modificado de Orlando, 2006).....	16
Figura 3.5 – Elemento infinitesimal da linha neutra da viga. (modificado de Orlando, 2006) 16	16
Figura 3.6 – Representação esquemática do absorvor.....	20
Figura 3.7 – Representação esquemática do veículo modelo.....	21
Figura 3.8 – Esquema do processo de obtenção das respostas dinâmicas.	39
Figura 3.9 – Fator de amplificação em função de β ($\mu=0.05$, $\alpha=1$), (Soong e Dargush, 1997)	43

Figura 4.1 – Modelo de viga simplesmente apoiada submetida a carga pontual no meio do vão	45
.....	
Figura 4.2 – Resposta dinâmica no meio do vão da viga submetida a uma carga pontual.	46
Figura 4.3 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga submetida a uma carga pontual.	47
Figura 4.4 – Viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento senoidal no meio do vão.	48
Figura 4.5 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga submetida a uma carga harmônica.	49
Figura 4.6 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga submetida a uma carga harmônica.	50
Figura 4.7 – Configuração para análise de uma carga pontual que percorre sobre uma viga..	50
Figura 4.8 – Resposta dinâmica da viga submetida a uma carga em movimento.	52
Figura 4.9 – Resposta dinâmica adimensional da viga submetida a uma carga em movimento.	53
Figura 4.10 – Configuração para análise com um veículo que percorre a viga com velocidade constante.	53
Figura 4.11 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga sob ação de veículo percorrendo sua extensão. Teoria de Euler-Bernoulli.	55
Figura 4.12 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga sob ação de veículo percorrendo sua extensão. Teoria de Euler-Bernoulli.	56
Figura 4.13 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga sob ação de um veículo que percorre toda sua extensão. Teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e teoria de Timoshenko.	57
Figura 4.14 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga sob ação de um veículo que percorre toda sua extensão. Teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e Timoshenko.	58
Figura 4.15 – Modelo de viga simplesmente apoiada controlada (modificado de Soares e Del Prado, 2012)	59
Figura 4.16 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli.	61
Figura 4.17 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli.	61

Figura 4.18 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.	62
Figura 4.19 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.	62
Figura 4.20 – Resposta dinâmica no meio do vão da viga fornecida pela teoria da viga de Timoshenko.	63
Figura 4.21 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga fornecida pela teoria da viga de Timoshenko.	63
Figura 4.22 – Esquema da análise paramétrica.	65
Figura 4.23 – Frequências naturais fornecidas pelas diferentes teorias de vigas versus o comprimento.	65
Figura 4.24 – Geometria da viga do primeiro modelo numérico.	67
Figura 4.25 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o primeiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	68
Figura 4.26 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o primeiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	69
Figura 4.27 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o primeiro modelo numérico para uma velocidade adimensional $V = 5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	69
Figura 4.28 – Geometria do segundo modelo numérico.	70
Figura 4.29 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o segundo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$. ..	71
Figura 4.30 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o segundo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	72
Figura 4.31 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o segundo modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 8$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	73
Figura 4.32 – Geometria da viga do terceiro modelo numérico.	74
Figura 4.33 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o terceiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	75
Figura 4.34 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o terceiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	76
Figura 4.35 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o terceiro modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 5,5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	76
Figura 4.36 – Geometria da viga do quarto modelo numérico.	77

Figura 4.37 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o quarto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	78
Figura 4.38 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o quarto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	79
Figura 4.39 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o quarto modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 12$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	79
Figura 4.40 – Geometria da viga do quinto modelo numérico.....	80
Figura 4.41 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o quinto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	81
Figura 4.42 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o quinto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	82
Figura 4.43 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o quinto modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 5,5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	83
Figura 4.44 – Geometria da viga do sexto modelo numérico.	84
Figura 4.45 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o sexto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	85
Figura 4.46 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o sexto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	86
Figura 4.47 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o sexto modelo numérico com uma velocidade adimensional crítica $V = 6$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	86
Figura 4.48 – Geometria da viga do sétimo modelo numérico.	87
Figura 4.49 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o sétimo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$	88

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
Tabela 1.1 – Fator de cisalhamento de Timoshenko (Cowper, 1966).....	3
Tabela 1.2 – Três teorias de vigas (modificado de Seon, Hayn e Timothy, 1999)	3
Tabela 3.1 – Formas dos modos de vibração para uma viga simplesmente apoiada.	32
Tabela 4.1 – Propriedades do modelo de viga simplesmente apoiada submetida a carga pontual.....	45
Tabela 4.2 – Propriedades do modelo – Carga em movimento que percorre uma ponte.....	51
Tabela 4.3 – Propriedades do modelo – Viga sob ação de um veículo percorrendo sua extensão.	54
Tabela 4.4 – Propriedades do modelo – Viga sob ação de um veículo percorrendo sua extensão e controlada por um absorvor.	60
Tabela 4.5 – Frequências naturais para o modelo Veículo-Ponte controlada por um absorvor	60
Tabela 4.6 – Frequências naturais da viga do primeiro modelo numérico.	67
Tabela 4.7 – Parâmetros do absorvor calculados com o critério de Den Hartog para o primeiro modelo numérico.....	67
Tabela 4.8 – Deslocamentos máximos do primeiro modelo numérico.	68
Tabela 4.9 – Frequências naturais do segundo modelo numérico.....	70
Tabela 4.10 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o segundo modelo numérico.	71
Tabela 4.11 – Deslocamentos máximos do segundo modelo numérico.	72
Tabela 4.12 – Frequências naturais do terceiro modelo numérico.....	74
Tabela 4.13 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o terceiro modelo numérico.....	74
Tabela 4.14 - Deslocamentos máximos do terceiro modelo numérico.	75
Tabela 4.15 – Frequências naturais do quarto modelo numérico.....	77
Tabela 4.16 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o quarto modelo numérico.....	77
Tabela 4.17 – Deslocamentos máximos do quarto modelo numérico.....	78
Tabela 4.18 – Frequências naturais do quinto modelo numérico.....	80

Tabela 4.19 – Parâmetros do absorsor encontrados com o critério de Den Hartog para o quinto modelo numérico.....	81
Tabela 4.20 – Deslocamentos máximos do quinto modelo numérico.....	82
Tabela 4.21 – Frequências naturais do sexto modelo numérico.	84
Tabela 4.22 – Parâmetros do absorsor encontrados com o critério de Den Hartog para o sexto modelo numérico.....	84
Tabela 4.23 – Deslocamentos máximos do sexto modelo numérico.	85
Tabela 4.24 – Frequências naturais do sétimo modelo numérico.	87
Tabela 4.25 – Parâmetros do absorsor encontrados com o critério de Den Hartog para o sétimo modelo numérico.....	87
Tabela 4.26 – Deslocamentos máximos do sétimo modelo numérico.	88

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

A	área da seção transversal da viga
A_t	função desconhecida do tempo
A_τ	função desconhecida do tempo adimensional
c	coeficiente de amortecimento da viga
c_v	coeficiente de amortecimento do veículo
d	distância que define a posição do absorvor
E	módulo de elasticidade do material da viga
g	aceleração da gravidade
g'	parâmetro adimensional que representa a gravidade (dada por $m_v L^2 g / EI$)
G	módulo de cisalhamento do material da viga
H	função Heaviside
I	momento de inércia da seção transversal de área da viga
k	fator de cisalhamento de Timoshenko
k_v	coeficiente de rigidez do veículo
k_a	coeficiente de rigidez do absorvor
k_1	coeficiente de rigidez adimensional do absorvor
k_2	coeficiente de rigidez adimensional do veículo
k'_0	coeficiente de amortecimento adimensional da viga
k'_1	coeficiente de amortecimento adimensional do absorvor
k'_2	coeficiente de amortecimento adimensional do veículo
L	comprimento da viga
\mathbf{L}	funcional ou Lagrangeano da viga
L_v	Funcional ou Lagrangeano do veículo
L_a	Funcional ou Lagrangeano do absorvor
m	massa por unidade de comprimento da viga
m_v	massa do veículo
m_a	massa do absorvor
q_i	coordenadas generalizadas
R	função erro no método Galerkin
R_e	função de dissipação de Rayleigh
R_v	função de dissipação do veículo

R_a	função de dissipação do absorvor
t	variável temporal
T	energia cinética
T_v	energia cinética do veículo
T_a	energia cinética do absorvor
u	deslocamento axial
U_i	energia de deformação interna
U_e	energia de deformação externa
U_m	energia de deformação interna axial
U_f	energia de deformação interna gerada pela flexão
U_c	energia de deformação interna gerada pelo cisalhamento
v	velocidade horizontal do veículo
V	energia potencial
V	velocidade adimensional (dada por $L\omega/v$)
V_v	energia cinética do veículo
V_a	energia cinética do absorvor
V_g	energia potencial gravitacional
V_e	energia potencial elástica
W_{nc}	trabalho realizado pelas forças não conservativas
x	variável espacial
y	deslocamento transversal da viga
y_v	deslocamento transversal do veículo
y_a	deslocamento transversal do absorvor
y_x	derivada parcial de primeira ordem do deslocamento transversal da viga
y_{xx}	derivada parcial de segunda ordem do deslocamento transversal da viga
y_{xxx}	derivada parcial de terceira ordem do deslocamento transversal da viga
y_{xxxx}	derivada parcial de quarta ordem do deslocamento transversal da viga
y_t	derivada temporal de primeira ordem
y_{tt}	derivada temporal de segunda ordem
y_{vt}	derivada parcial temporal de primeira ordem do veículo
y_{vtt}	derivada parcial temporal de segunda ordem do veículo
y_{at}	derivada parcial temporal de primeira ordem do absorvor
y_{att}	derivada parcial temporal de segunda ordem do absorvor

$y_1(t)$	deslocamento do sistema principal em relação à base
$1/R_0$	curvatura de estrutura indeformada
$1/R_f$	curvatura do eixo deformado
β	parâmetro adimensional (dado por $I\rho/mL^2$)
Γ	parâmetro adimensional da equação de movimento (dada por $EI/mL^4\omega^2$)
δ	variação dos termos entre parêntesis; função Delta de Dirac
δ_{ij}	função Delta de Kronecker
Δ_x	encurtamento na extremidade da viga
Δ	posição adimensional do absorsor (dado por d/L)
ε	deformação específica da linha neutra
ζ	razão de amortecimento da viga
ζ_v	razão de amortecimento do veículo
ζ_a	razão de amortecimento do absorsor
η	deslocamento transversal adimensional da viga (dado por y/L)
η_v	deslocamento transversal adimensional do veículo (dado por y_v/L)
η_a	deslocamento transversal adimensional do absorsor (dado por y_v/L)
λ_a	coeficiente de amortecimento do absorsor
λ	parâmetro adimensional (dado por $\rho I\omega^2/kAG$)
μ	parâmetro adimensional (dado por $EI/kAGL^2$)
ξ	deslocamento espacial adimensional da viga (dado por x/L)
ρ	massa por unidade de volume da viga
τ	parâmetro adimensional do tempo (dado por ωt)
φ	rotação da viga
ϕ_n	vetor que contém o n-ésimo modo de vibração
\mathcal{X}	mudança da curvatura da viga
ψ	ângulo formado entre o eixo e o eixo da viga; ângulo de fase;
ω_n	frequência natural da viga
ω_a	frequência natural do absorsor
ω_v	frequência natural do veículo

1. INTRODUÇÃO

Um tipo particular de problemas de grande interesse para os engenheiros estruturais envolve a determinação da resposta dinâmica de vigas causadas pela passagem de cargas móveis por toda sua extensão. Um dos exemplos práticos mais importantes deste tipo de problema é representado pela vibração das estruturas de pontes, submetida à passagem de veículos (Greco & Santini, 2002).

O estudo do controle de vibrações induzidas em pontes devido às cargas móveis é um problema que tem sido objeto de estudo de engenheiros e cientistas desde o século passado. Assim, existe um grande interesse acadêmico na análise das vibrações em pontes submetidas ao tráfego de veículos (Yang *et al*, 1997; Museros e Martinez-Rodrigo, 2007). Essas vibrações podem ser controladas através de dispositivos ativos ou passivos e pelo estudo de parâmetros ótimos do absorvedor para diminuir a resposta dinâmica.

Os modelos para vibrações transversais de vigas a serem abordados neste trabalho são baseados nas principais teorias de vigas existentes:

- Euler-Bernoulli.
- Euler-Bernoulli com inércia rotacional.
- Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, pois é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a superestimar levemente as frequências naturais. Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou delgadas do que para as vigas não delgadas.

A teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional representa um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito de rotação da seção transversal. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais da teoria de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

Timoshenko (1921 e 1922) propôs uma teoria de vigas que adiciona tanto o efeito do cisalhamento como o efeito da inércia rotacional ao modelo de Euler-Bernoulli. Conforme

indicado na Figura 1.1 pode-se observar a diferença entre estas duas teorias de vigas. A teoria de Timoshenko caracteriza de modo mais adequado a obtenção da resposta dinâmica de vigas não delgadas e para altas frequências, onde os efeitos de cisalhamento e da inércia rotacional não podem ser desprezados. Na Figura 1.1, φ representa a rotação da seção transversal da viga.

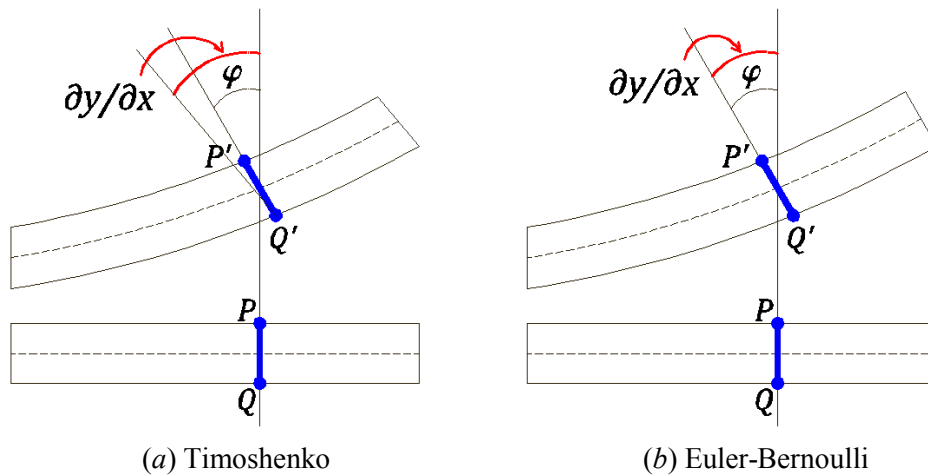


Figura 1.1 – Esquema de deformação de uma viga que ilustra a diferença entre a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bernoulli: (a) φ e $\partial y/\partial x$ não tem necessariamente que coincidir, enquanto (b) φ e $\partial y/\partial x$ são iguais.

Em geral o emprego da teoria de Timoshenko na concepção do modelo de vigas submetidas a carregamentos dinâmicos traz, como consequência, resultados mais consistentes do que os obtidos com o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Especialmente quando se trata de elevados valores de frequência de excitação da viga. Os métodos numéricos dos elementos finitos e elementos de contorno são utilizados neste tipo de análises. No entanto, a solução de tais problemas por meio de elementos de contorno é muito dependente da disponibilidade ou dedutibilidade das chamadas soluções fundamentais.

Um parâmetro essencial na teoria da viga de Timoshenko é o fator de forma k . Também chamado coeficiente de cisalhamento ou fator de redução de área. Este parâmetro surge porque o cisalhamento não é constante ao longo da seção transversal. O fator de forma ou coeficiente de cisalhamento é uma relação entre coeficiente de Poisson e a frequência de vibração, bem como a forma da seção transversal. Tipicamente, a dependência funcional da frequência é ignorada. Davies (1937), Mindlin e Deresiewicz (1954), Cowper (1966) e Spence e Seldin (1970) sugeriram métodos para calcular o coeficiente de cisalhamento como

uma função da forma da seção transversal e o coeficiente de Poisson. Stephen (1978) mostrou variações no fator de forma com a frequência. Segundo o trabalho de Cowper (1966), alguns dos valores desse parâmetro são apresentados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 – Fator de cisalhamento de Timoshenko (Cowper, 1966)

Seção transversal	k
Círculo	$\frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$
Anel circular $m = r_{interno}/r_{externo}$	$\frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}$
Retângulo	$\frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$
Tubo redondo tipo “parede fina”	$\frac{4 + 3\nu}{2(1 + \nu)}$
Tubo quadrado tipo “parede fina”	$\frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}$

Apesar dos esforços atuais para chegar a uma melhor teoria de vigas, as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko são ainda amplamente utilizadas.

Um resumo das três teorias de vigas é apresentado na Tabela 1.2. As hipóteses básicas consideradas para todas as teorias são as seguintes:

- Uma das dimensões (direção axial) é consideravelmente maior do que as outras duas.
- O material é linear elástico (obedece a lei de Hooke).
- O efeito de Poisson não é considerado.
- A área da seção transversal é simétrica de modo que os eixos; neutro e centroidal coincidem.
- Planos perpendiculares ao eixo neutro permanecem perpendiculares após da deformação.
- O ângulo de rotação é pequeno de modo que a suposição de ângulo pequeno pode ser utilizada.

Tabela 1.2 – Três teorias de vigas (modificado de Seon, Hayn e Timothy, 1999)

Modelo de viga	Momento fletor	Deslocamento lateral	Deformação por cisalhamento	Inércia rotacional
Euler-Bernoulli	✓	✓	✗	✗
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	✓	✓	✗	✓
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

1.1. JUSTIFICATIVA

As pontes são estruturas cuja finalidade é oferecer conforto e segurança. Por serem estruturas sujeitas a vibrações, devem ser considerados os procedimentos para analisar os efeitos dinâmicos devido às cargas móveis.

A justificativa do presente trabalho decorre da necessidade de incrementar a informação de vibrações em vigas, fazendo uma comparação entre as teorias de vigas de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional e de Timoshenko, através de uma análise paramétrica de um modelo veículo-ponte-absorção, empregando formulações lineares e não lineares.

1.2. OBJETIVO

1.2.1. Objetivo geral

O objetivo geral do presente trabalho é fazer uma análise paramétrica do sistema veículo-ponte-absorção no regime linear e não linear, abordando aspectos gerais para o controle de vibrações induzidas em pontes devido às cargas móveis. Além disso, a análise paramétrica permite generalizar um problema particular.

1.2.2. Objetivos específicos

- Avaliar e comparar os resultados das teorias de vibrações em vigas de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional e a teoria da viga de Timoshenko, a partir de um modelo veículo-ponte-absorção.
- Analisar e comparar o comportamento e a redução da resposta dinâmica de sistemas veículo-ponte-absorção, devido às cargas móveis.

1.3. DESCRIÇÃO DO TRABALHO

A presente dissertação consta de cinco capítulos, incluindo o capítulo atual, e três apêndices. A seguir é apresentado um resumo do conteúdo e abrangência de cada um destes capítulos.

O primeiro capítulo é a introdução onde se apresenta um breve resumo do trabalho, além disso, sua justificativa e seus objetivos.

No segundo capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o estudo de vibrações em pontes, discutindo as principais alternativas e mecanismos de controle que fazem uso deste

conceito. Por último, se faz um breve resumo da utilização prática em estruturas civis e uma compilação das pesquisas mais relevantes sobre o tema.

No terceiro capítulo, são abordados os fundamentos teóricos do trabalho definindo de forma clara e concisa a formulação matemática do problema estudado. Iniciando-se com uma formulação não linear fornecida pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional até se particularizar esta teoria numa formulação linear. Posteriormente desenvolveu-se a formulação linear descrita pela teoria de Timoshenko. Finalmente, apresentam-se as versões adimensionais das diferentes formulações. Além disso, são abordados os estudos das frequências naturais da viga simplesmente apoiada, o método de Galerkin e o critério de Den Hartog para a procura dos parâmetros ótimos do absorvedor.

No quarto capítulo apresenta-se resultados de modelos para a validação das diferentes formulações, onde se inclui as respostas dinâmicas máximas obtidas, para a estrutura analisada sob condições de carregamento específico. Posteriormente, é apresentada uma análise paramétrica das diferentes formulações desenvolvidas no presente trabalho por intermédio de diferentes modelos numéricos de vigas com variações em suas seções transversais e seus comprimentos.

No quinto capítulo apresentam-se as conclusões obtidas a partir dos resultados determinados na análise paramétrica do capítulo 4 e as sugestões para a realização de pesquisas futuras.

No apêndice A apresenta-se uma descrição das rotinas do método de Galerkin implementadas no programa de álgebra simbólica MAPLE 15 onde foram discretizadas as equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento das diferentes formulações desenvolvidas no presente trabalho. No apêndice B mostra-se a obtenção das equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento, adimensionais, para a formulação de Euler-Bernoulli. Por último, no apêndice C, apresenta-se a dedução da equação diferencial parcial (EDP) de movimento da formulação linear de Euler-Bernoulli.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo são apresentados estudos dedicados à importância da análise das vibrações em pontes tendo como modelo uma viga simplesmente apoiada sob a ação de cargas dinâmicas.

Timoshenko *et al* (1974) encontraram uma solução analítica para o problema e obtiveram uma expressão para a velocidade crítica. A consideração de massas móveis ao invés de cargas móveis parecia ser mais realista, no entanto, Esmailzadeh *et al.* (1995) mostraram que este comportamento de vigas sujeitas a cargas móveis ou massas móveis é bem semelhante quando as massas são consideradas pequenas em comparação com a massa da viga.

Kwon H. *et al* (1998) estudaram o controle de vibrações em uma ponte de três vãos submetido a cargas móveis usando um amortecedor de massa sintonizado (TMD), apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2. O TMD é ajustado aos esforços de modo vertical dominante e instalado no meio da ponte. Concluíram que as velocidades crítica e subcrítica do veículo ocorrem quando o veículo move-se na ponte de três vãos e algumas velocidades subcríticas podem existir dentro das velocidades no projeto da ponte. Os fatores do impacto da ponte devem ser modificados para os níveis adequados, considerando a resposta das pontes sob um veículo percorrendo a velocidade subcrítica. O deslocamento vertical máximo induzido pelo veículo diminui 21% e a vibração livre reduz rapidamente.

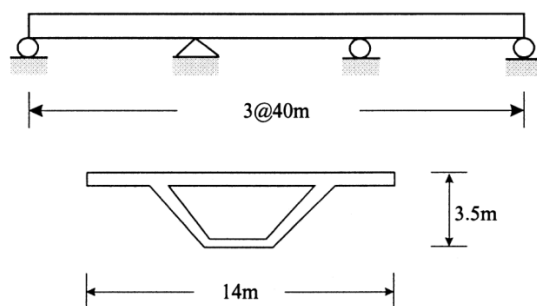


Figura 2.1 – Geometria da seção da ponte (Kwon H. *et al*, 1998).

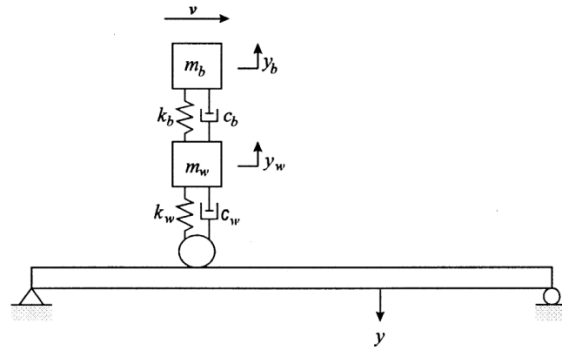


Figura 2.2 – Veículo modelo (Kwon H. *et al*, 1998).

Greco e Santini (2002), utilizando uma extensão do método da superposição de modos, analisaram o problema dinâmico de uma viga contínua com dois amortecedores viscosos rotacionais em suas extremidades sujeita a uma carga dinâmica unitária, Figura 2.3. Concluíram que a eficácia do amortecedor é fortemente dependente da velocidade da carga dinâmica e provaram que, em certos intervalos de velocidades, uma considerável redução da resposta dinâmica da viga é esperada se as propriedades do amortecedor forem corretamente escolhidas.

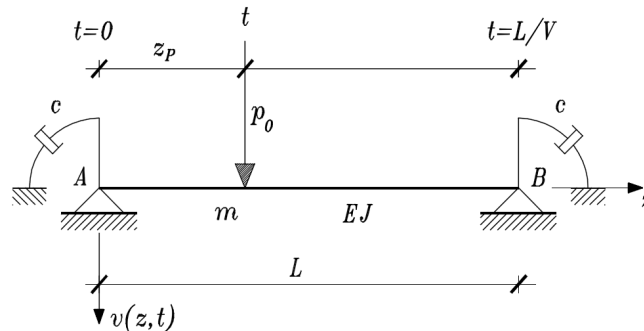


Figura 2.3 – Sistema estrutural (Greco e Santini, 2002).

Yang *et al* (2004) estudaram as frequências de vibração de pontes para identificar os principais parâmetros na resposta da interação veículo ponte. O veículo é modelado como um sistema massa-mola e a ponte como uma viga simplesmente apoiada considerando apenas o primeiro modo de vibração, Figura 2.4. Ferreira (1991) desenvolveu um estudo paramétrico sobre os efeitos causados pela ação de cargas em movimento sobre uma ponte devido ao movimento do veículo e seu impacto sobre as irregularidades da superfície da estrada.

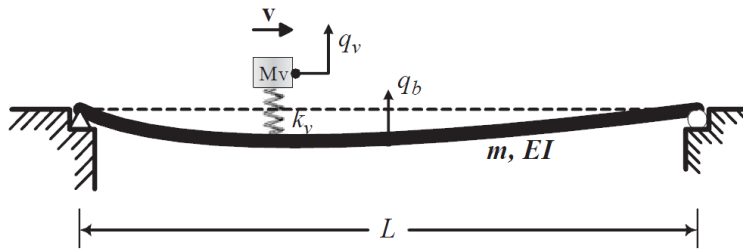


Figura 2.4 – Sistema estrutural (Yang *et al*, 2004).

Wu (2006) propôs o uso de amortecedores helicoidais para reduzir a vibração de vigas sujeitas a cargas dinâmicas usando o método dos elementos finitos para modelar a viga. O amortecedor, localizado no meio da viga, teve a massa de sua mola levada em consideração. Para estudar o comportamento da viga, as equações dinâmicas que representam o sistema foram reduzidas a um sistema de um grau de liberdade. Esse modelo simplificado foi utilizado para a obtenção dos valores ótimos para a rigidez e a relação de amortecimento do amortecedor por meio do critério de Den Hartog (1956).

A possibilidade de redução da ressonância na vibração de vigas simples, sob a ação de cargas dinâmicas, por meio do aumento do amortecimento estrutural com aparelhos de dissipação de energia passiva foi avaliada por Museros e Martinez-Rodrigo (2007). Esses autores utilizaram um amortecedor linear viscoso para conectar a viga principal, que suporta as cargas, a uma viga auxiliar localizada abaixo da viga principal, Figura 2.5. Os resultados indicam que a resposta ressonante da viga principal pode ser drasticamente reduzida com esse tipo de aparelho e que essa metodologia proposta teria grande potencial em aplicações para redução da resposta de pontes ferroviárias sob a ação de trens de alta velocidade.

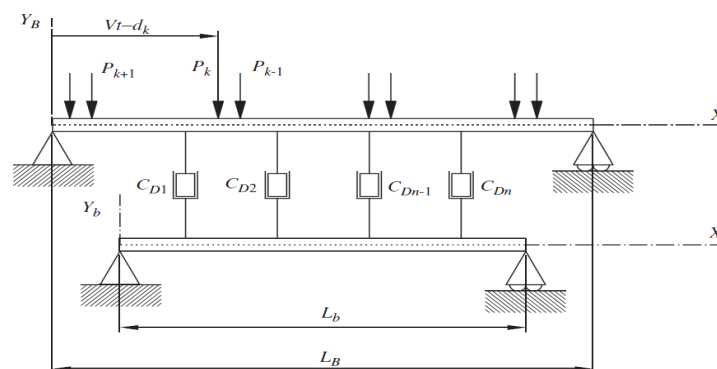


Figura 2.5 – Viga principal e sistema de adaptação (Museros e Martinez-Rodrigo, 2007).

Lara (2007) fez uma análise numérica através do software ANSYS, variando o número e a posição dos amortecedores de massa sintonizados para vigas com diferentes configurações de apoio, Figura 2.6. Os parâmetros do AMS foram calculados mediante as expressões de Den Hartog (para o caso de um único AMS) e o critério desenvolvido por Jangid (para o caso de AMS múltiplo). Foram realizadas análises modais e uma serie de análises transientes com o objetivo de determinar as frequências naturais e os modos de vibração das vigas modeladas, assim como as respostas dinâmicas máximas obtidas das estruturas analisadas sob uma condição de carregamento específica.

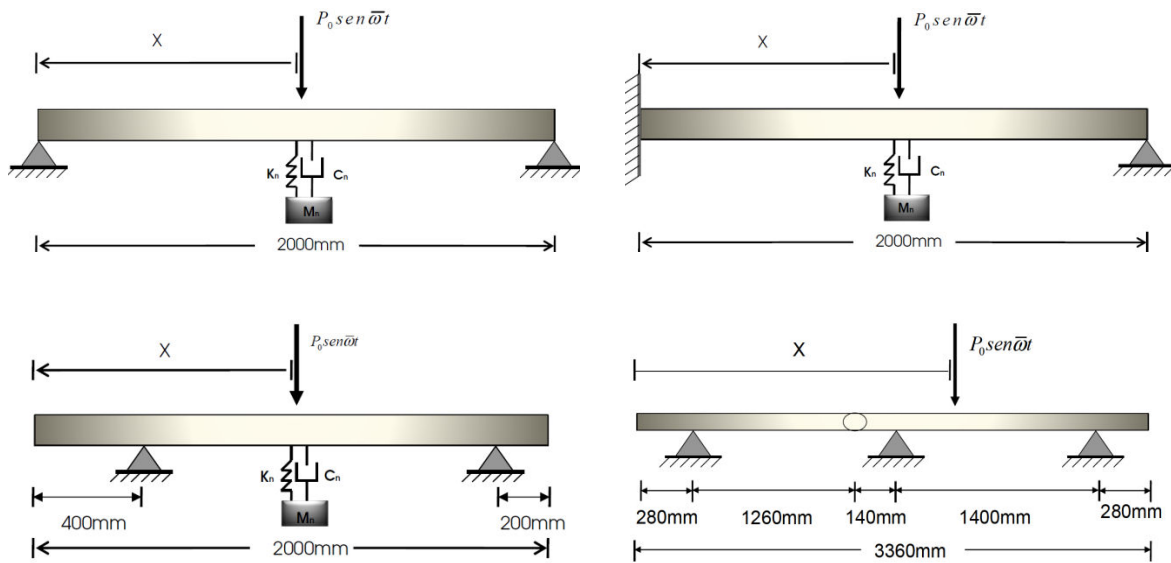


Figura 2.6 – Diferentes configurações de vigas (Lara, 2007).

Thompson (2008) utilizou um amortecedor contínuo com sistema massa-mola acoplado a uma viga para atenuar a propagação de ondas estruturais e reduzir o som irradiado, enquanto que Samani e Pellicano (2009) analisaram a efetividade de um amortecedor de vibrações dinâmicas aplicado em uma viga simplesmente apoiada suportando cargas dinâmicas apresentado na Figura 2.7. Foram analisados modelos de amortecedores lineares e não lineares. O desempenho dos amortecedores dinâmicos, na redução de vibrações, foi estimado pela amplitude máxima de vibração e pela quantidade de energia dissipada pelo amortecedor.

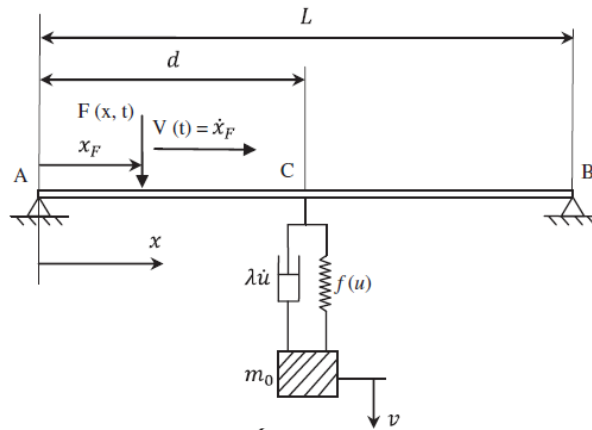


Figura 2.7 – Viga modelo (Samani e Pellicano, 2009).

Ali S. e Padhi R. (2009) apresentaram um estudo do controle de vibrações de vigas de Euler-Bernoulli que utilizam equações diferenciais parciais não lineares de movimento sendo, portanto livres de erros de aproximação (como a redução de modelo, linearização, etc.). Foram utilizados dois controladores de retroalimentação sobre a base da técnica de inversão dinâmica ótima, que leva a soluções de forma fechada para a variável de controle. Foi mostrado que se podem minimizar as vibrações de uma viga simplesmente apoiada de Euler-Bernoulli não linear sob diferentes condições iniciais usando a técnica de inversão dinâmica ótima.

Soares e del Prado (2012) utilizaram a teoria da viga linear e não linear de Euler-Bernoulli para estudar o controle de vibrações de uma viga simplesmente apoiada sujeita a cargas móveis e controlada por um amortecedor fixo ou móvel apresentado na Figura 2.8. Encontraram que as máximas amplitudes de vibração da viga dependem tanto da velocidade da carga e da posição do absorvedor.

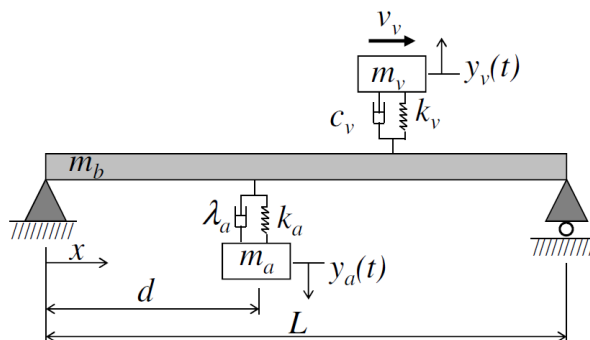


Figura 2.8 – Modelo de viga controlada (Soares e Del Prado, 2012).

Da Silva e Del Prado (2012) utilizaram a teoria da viga linear de Euler-Bernoulli para estudar o controle de vibrações de uma viga simplesmente apoiada sujeita a cargas dinâmicas e controlada por um amortecedor fixo ou móvel apresentado na Figura 2.9. Foi estudada a influência dos parâmetros (massa, coeficiente de amortecimento, rigidez e localização) de um amortecedor de massa sintonizado (AMS) linear passivo no controle da vibração de uma viga submetida a uma carga dinâmica, que pode ou não possuir velocidade constante.

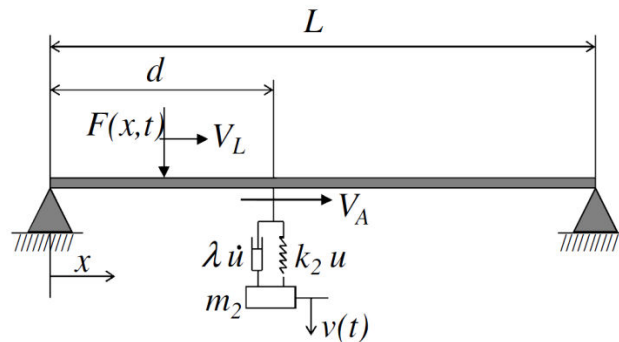


Figura 2.9 – Modelo de viga simplesmente apoiada e amortecedor acoplado (Da Silva e Del Prado, 2012).

Awrejcewicz *et al* (2011) estudaram as vibrações em uma viga de Euler-Bernoulli tipo flexível não linear submetida às cargas dinâmicas, incluindo o impacto, e com várias condições de contorno. A modelagem da viga elástica após da aplicação do método das diferenças finitas ao longo das coordenadas espaciais, resultou em um sistema com 40 graus de liberdade comportando-se como um sistema de 40 osciladores acoplados. Foi mostrada a importância das razões de amortecimento na análise do controle de vibrações de uma viga flexível.

Samani e Pellicano (2012) avaliaram o desempenho de um absorber de vibração dinâmico (Dynamic Vibration Absorber, DVA) na redução de vibrações de uma viga simplesmente apoiada submetida a uma frequência infinita de cargas móveis concentradas e espaçadas regularmente, como apresentado na Figura 2.10. Foram considerados vários tipos de DVA e foi concluído que o emprego de DVAs não lineares em substituição aos dispositivos lineares clássicos geralmente não é conveniente; o DVA não linear deve ser analisado com grande atenção e comparado com o linear, abrangendo assim todas as condições de operabilidade.

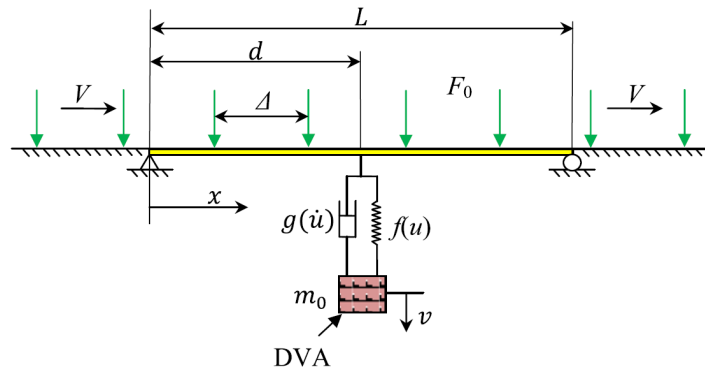


Figura 2.10 – Modelo de viga submetida a uma sequência de cargas móveis (Samani e Pellicano, 2012).

Silva (2012) desenvolveu um programa computacional para análise dinâmica da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias. A ponte adotada para o estudo de vibrações induzidas pela a passagem das cargas é representada por uma viga simplesmente apoiada modelada por elementos finitos de pórtico plano, o modelo empregado é apresentado na Figura 2.11. Foi empregado o método da integração direta ao longo do tempo na solução das equações diferenciais de segunda ordem, resultantes das equações de movimento, que incluem o problema da interação veículo-estrutura.

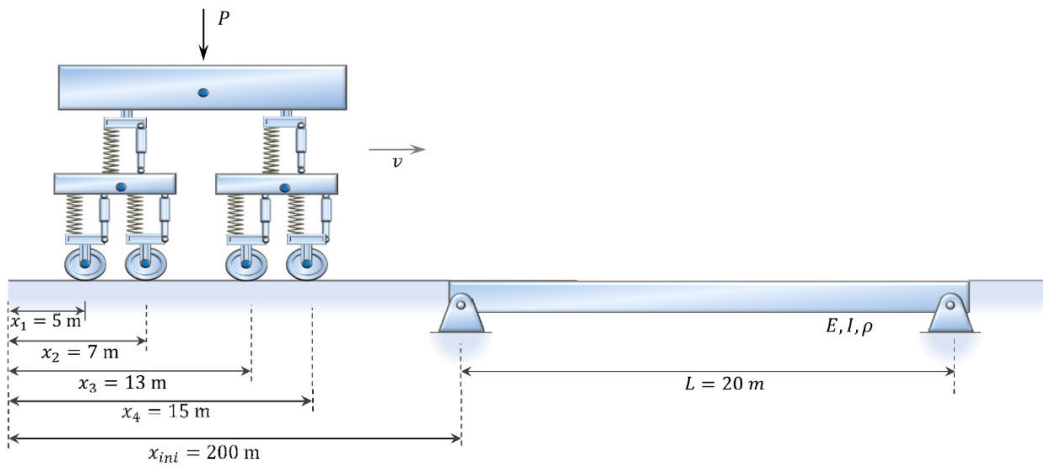


Figura 2.11 – Configuração de uma análise com o modelo de veículo completo (Silva, 2012)

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

As vigas são elementos estruturais amplamente utilizadas na engenharia com diversas aplicações, como, por exemplo, em pontes, passarelas, edifícios, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas. O estudo das respostas estáticas e dinâmicas de componentes estruturais sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas reais e mais complexas sujeitas a carregamentos dinâmicos, como mostra a Figura 3.1.

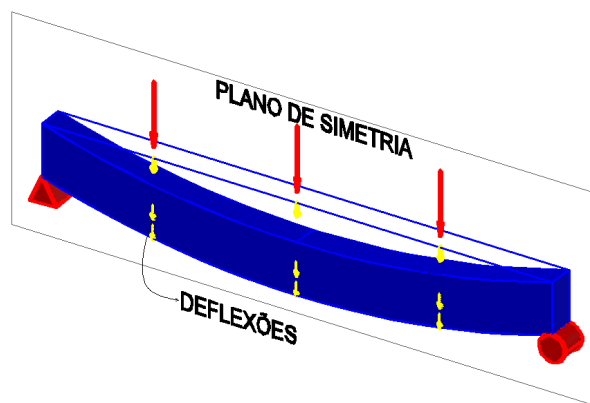


Figura 3.1 – Viga simplesmente apoiada submetida a carregamento externo.

Sendo assim, neste capítulo desenvolve-se um modelo de viga simplesmente apoiada submetida a um veículo em movimento que percorre toda sua extensão com uma velocidade constante, baseado nas teorias de vigas de Euler-Bernoulli, com e sem inércia rotacional, e de Timoshenko, que serão estudadas no decorrer do trabalho. Faz-se uma breve descrição dos efeitos da flexão, inércia rotacional e cisalhamento que devem ser consideradas em cada uma dessas teorias.

Além disso, serão utilizadas as formulações lineares e não lineares para as teorias de vigas de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional assim como a formulação linear da viga de Timoshenko. As formulações foram feitas para estudar os deslocamentos transversais da viga, considerada como um sistema contínuo elástico. O veículo é descrito como um sistema linear massa-mola movendo-se com velocidade constante ao longo da viga e o controle das vibrações é realizado por um absorvedor discreto linear localizado na viga. O esquema da Figura 3.2 apresenta as teorias e formulações desenvolvidas neste trabalho.

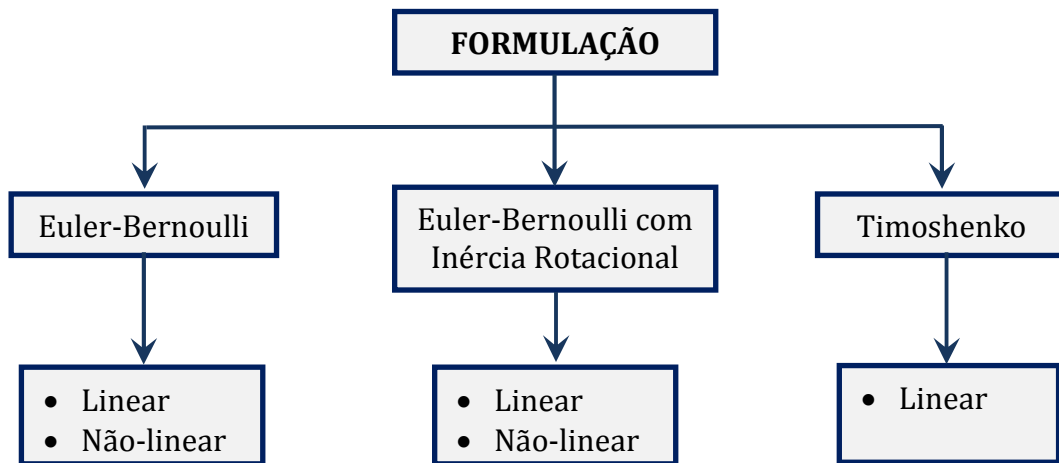


Figura 3.2 – Esquema das formulações desenvolvidas.

A Figura 3.3 apresenta o modelo veículo-ponte-absorvor que foi empregado nas formulações. Na qual E é o módulo de elasticidade da viga, I é o momento de inércia da seção transversal, m é a massa por unidade de comprimento da viga, m_v é a massa do veículo, L é o comprimento da viga, m_a é a massa do absorvor, c é o coeficiente de amortecimento da viga, c_v é o coeficiente de amortecimento do veículo e λ_a é o coeficiente de amortecimento do absorvor.

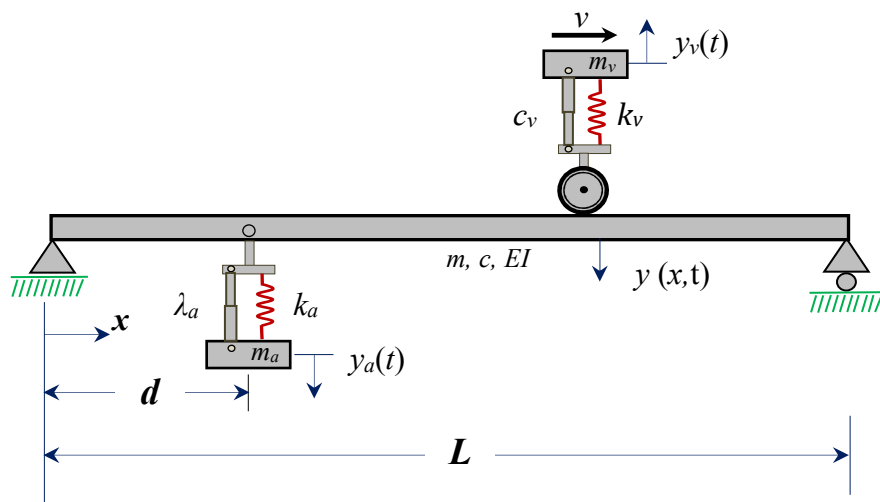


Figura 3.3 – Modelo de viga simplesmente apoiada controlada (modificado de Soares e Del Prado, 2012)

Nesta formulação, as equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento são obtidas através do Princípio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (3.1)$$

Onde T é a energia cinética, V a energia potencial total e δ representa a variação dos termos entre parênteses. O funcional ou Lagrangeano é dado por: $L=T-V$

A equação (3.1) é utilizada para sistemas em vibração livre sem amortecimento ou qualquer outra forma de dissipação de energia.

Para o caso de ocorrência de forças não conservativas, tem-se que a variação de energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante um intervalo de tempo de t_1 a t_2 deve ser igual à zero, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(W_{nc}) dt = 0 \quad (3.2)$$

Onde W_{nc} é o trabalho realizado pelas forças não conservativas.

3.1. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE EULER-BERNOULLI COM INÉRCIA ROTACIONAL

A expressão da energia cinética para esta formulação considera duas parcelas, a primeira referente ao efeito da inércia à translação na direção transversal ao eixo da viga e a segunda ao efeito da inércia rotacional.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \quad (3.3)$$

A energia potencial total V de uma viga uniforme é obtida através da soma da energia potencial interna de deformação U_i com a energia potencial externa U_e , ou seja:

$$V = U_i + U_e \quad (3.4)$$

Na equação (3.5), a energia potencial interna U_i é dada pela energia de flexão gerada pelo alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas, portanto, pode-se expressar como:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI \mathcal{X}^2 dx \quad (3.5)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material da viga, I é o momento de inércia da seção transversal, \mathcal{X} representa a mudança da curvatura.

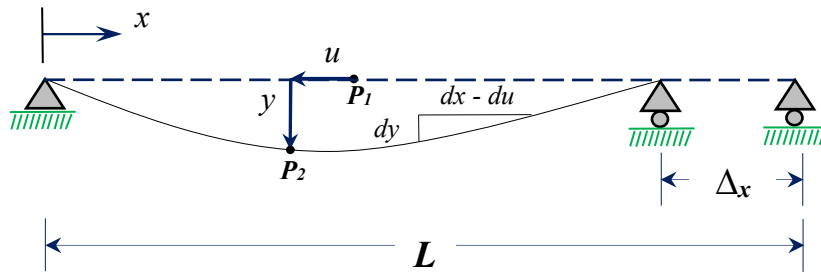


Figura 3.4 – Deslocamento transversal e encurtamento da viga. (modificado de Orlando, 2006)

A partir da Figura 3.4, tem-se que o deslocamento de um ponto P_1 , na configuração indeformada, para uma nova posição P_2 em uma configuração deformada pode ser representado por um vetor de deslocamentos decomposto em duas componentes: deslocamento axial u e deslocamento transversal y . Ainda, se a linha neutra da estrutura é inextensível, considera-se o elemento infinitesimal dx igual ao elemento curvo ds , como apresentado na Figura 3.5.

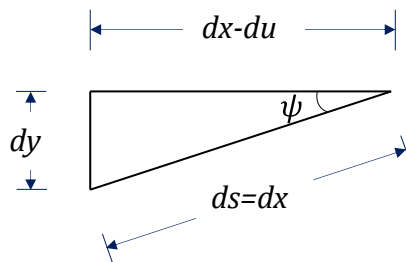


Figura 3.5 – Elemento infinitesimal da linha neutra da viga. (modificado de Orlando, 2006)

Da Figura 3.5, pode-se deduzir as relações:

$$\text{sen}(\psi) = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \quad (3.6)$$

$$\psi = \text{sen}^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (3.7)$$

Sendo que ψ é o ângulo formado entre o eixo horizontal e o eixo da curvatura.

A curvatura do eixo deformado, $1/R_f$, é dada por:

$$\frac{1}{R_f} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d \left[\text{sen}^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.8)$$

Já a curvatura da estrutura indeformada, $1/R_0$, é:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (3.9)$$

Assim, a variação da curvatura \mathcal{X} , tem a forma:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.10)$$

Expandindo a equação (3.10) em séries de Taylor até a segunda ordem, chega-se à aproximação:

$$\mathcal{X} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (3.11)$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.5), pode-se reescrever a energia potencial interna U_i , como:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 dx \quad (3.12)$$

A energia potencial externa U_e , pode ser dividida em duas parcelas, uma gravitacional V_g , e outra elástica V_e , dada por:

$$U_e = V_g + V_e \quad (3.13)$$

A energia potencial gravitacional V_g , pode ser calculada tomando-se a definição usual.

$$V_g = \int_0^L m_v g (y_v - y) dx \quad (3.14)$$

Onde m_v é a massa do veículo, g é a aceleração da gravidade, y é o deslocamento transversal da viga e y_v é o deslocamento transversal do veículo.

A energia potencial elástica V_e , pode ser calculada como:

$$V_e = \frac{1}{2} \int_0^L [k_a (y - y_a)^2 + k_v (y_v - y)^2] dx \quad (3.15)$$

Onde k_a é o coeficiente de rigidez do absorvedor, k_v é o coeficiente de rigidez do veículo, y é o deslocamento transversal da viga, y_a é o deslocamento transversal do absorvedor e y_v é o deslocamento transversal do veículo.

Substituindo as equações (3.14) e (3.15) na equação (3.13), temos a energia potencial externa V_e , dada pelas forças externas.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L [k_a (y - y_a)^2 + k_v (y_v - y)^2] dx + \int_0^L m_v g (y_v - y) dx \quad (3.16)$$

Assim, pode-se chegar à equação da energia potencial total V da viga, substituindo-se as equações (3.12) e (3.16) na equação (3.4).

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 dx \quad (3.17)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L [k_a (y - y_a)^2 + k_v (y_v - y)^2] dx + \int_0^L m_v g (y_v - y) dx$$

O funcional ou Lagrangeano de energia da viga para a formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional é dado abaixo:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L [k_a (y - y_a)^2 + k_v (y_v - y)^2] dx - \int_0^L m_v g (y_v - y) dx
\end{aligned} \tag{3.18}$$

O amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios. Entretanto, é difícil a descrição real da força de amortecimento, embora seja possível a admissão de modelos ideais de amortecimento, que muitas vezes resultam em prognósticos satisfatórios da resposta. A presença do agente amortecedor muda as características do movimento, passando-se a ter um movimento harmônico amortecido ou até caráter oscilatório.

Portanto, a parcela de trabalho (R_e) é acrescentada ao funcional de energia, da forma sugerida por Rayleigh, que representa as parcelas de dissipadoras da viga, do absorsor e do veículo:

$$R_e = \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_a \left[\frac{\partial}{\partial t} (y - y_a) \right]^2 + \frac{1}{2} c_v \left[\frac{\partial}{\partial t} (y_v - y) \right]^2 \tag{3.19}$$

Onde: y_a é o deslocamento do absorsor, y_v é o deslocamento transversal do veículo, c é o coeficiente de amortecimento da viga; λ_a é o coeficiente de amortecimento do absorsor e c_v é coeficiente de amortecimento do veículo.

A equação de movimento do absorsor pode ser obtida a partir das equações de Euler-Lagrange, simplesmente expressa na forma de energia Cinética T e energia Potencial V , em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{3.20}$$

Onde se denomina Lagrangeano $L = T - V$ à diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema. Para escrever todo o movimento do sistema, deve-se escrever esta equação para cada um dos i -ésimos graus de liberdade q_i do sistema.

É possível modelar várias formas de funções dissipativas quando o sistema não for conservativo. Quando parte da energia do sistema for dissipada por elementos submetidos a forças que sejam proporcionais a sua velocidade é possível acrescentar uma parcela à equação de Euler-Lagrange utilizando uma função dissipativa R (Barbosa, 1999; Montoya 2009 e Cavalcante, 2010).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.21)$$

Onde R é denominado função de dissipação de Rayleigh, a qual é uma função que depende da velocidade \dot{y} e c representa a dissipação do sistema.

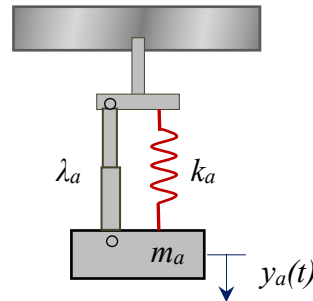


Figura 3.6 – Representação esquemática do absorvedor

As parcelas de energia cinética, energia potencial e função de dissipação são respectivamente:

$$T_a = \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial y_a}{\partial t} \right)^2 \quad (3.22)$$

$$V_a = \frac{1}{2} k_a (y - y_a)^2 \quad (3.23)$$

$$R_a = \frac{1}{2} \lambda_a \left[\frac{\partial}{\partial t} (y - y_a) \right]^2 \quad (3.24)$$

Onde; m_a é a massa do absorvedor, k_a é o coeficiente de rigidez do absorvedor, y é o deslocamento transversal da viga, y_a é o deslocamento transversal do absorvedor e λ_a é o coeficiente de amortecimento do absorvedor. O funcional ou Lagrangeano do absorvedor é:

$$L_a = \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial y_a}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} k_a (y - y_a)^2 \quad (3.25)$$

No caso da equação de movimento do absorvor foi deduzida aplicando as equações de Euler-Lagrange para sistemas lineares, acrescentando uma parcela correspondente à função dissipativa de Rayleigh.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_a}{\partial y_{at}} \right) - \frac{\partial L_a}{\partial y_a} + \frac{\partial R_a}{\partial y_{at}} = 0 \quad (3.26)$$

Onde:

- y_a = $y_a(t)$, deslocamento transversal do absorvor.
- y_{at} = $\partial y_a / \partial t$
- y_{att} = $\partial^2 y_a / \partial t^2$
- T_a = Energias cinética do absorvor
- R_a = Função de dissipação de Rayleigh do absorvor
- V_a = Energia potencial do absorvor

Com base na equação (3.26) e as equações (3.24) e (3.25), e calculando as derivadas necessárias, obtêm-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento do absorvor.

$$m_a y_{att} - k_a (y - y_a) - \lambda_a (y_t - y_{at}) = 0 \quad t > 0; \quad (3.27)$$

A equação de movimento do veículo pode ser obtida a partir das equações de Euler-Lagrange, simplesmente expressa na forma de energia Cinética T e energia Potencial V , tomando como base à equação (3.21).

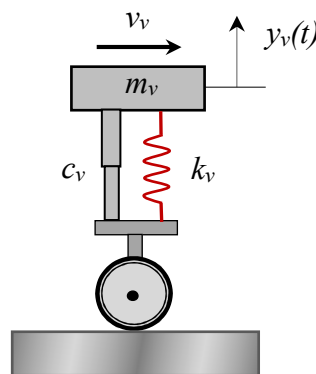


Figura 3.7 – Representação esquemática do veículo modelo

As parcelas de energia cinética, energia potencial e função de dissipação são respectivamente:

$$T_v = \frac{1}{2} m_v \left(\frac{\partial y_v}{\partial t} \right)^2 \quad (3.28)$$

$$V_v = \frac{1}{2} k_v (y_v - y)^2 \quad (3.29)$$

$$R_v = \frac{1}{2} c_v \left[\frac{\partial}{\partial t} (y_v - y) \right]^2 \quad (3.30)$$

Onde m_v é a massa do veículo, k_v é o coeficiente de rigidez do veículo, y é o deslocamento transversal da viga, y_v é o deslocamento transversal do veículo e c_v é o coeficiente de amortecimento do veículo. O funcional ou Lagrangeano do veículo é:

$$L_v = \frac{1}{2} m_v \left(\frac{\partial y_v}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} k_v (y_v - y)^2 \quad (3.31)$$

No caso da equação de movimento do veículo foi deduzida aplicando as equações de Euler-Lagrange para sistemas lineares, acrescentando uma parcela correspondente à função dissipativa de Rayleigh.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_v}{\partial y_{vt}} \right) - \frac{\partial L_v}{\partial y_v} + \frac{\partial R_v}{\partial y_{vt}} = 0 \quad (3.32)$$

Onde:

y_v = $y_v(t)$, deslocamento transversal do veículo.

y_{vt} = $\partial y_v / \partial t$

y_{vtt} = $\partial^2 y_v / \partial t^2$

T_v = Energias cinética do veículo

R_v = Função de dissipação de Rayleigh do veículo

V_v = Energia potencial do veículo

Com base na equação (3.32) e as equações (3.30) e (3.31), e calculando as derivadas necessárias, obtêm-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento do veículo.

$$m_v y_{vtt} - k_v (y_v - y) - c_v (y_{vt} - y_t) = 0 \quad x \in (0, L) \quad t > 0 \quad (3.33)$$

No caso da formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional o sistema veículo-ponte-absorção (Figura 3.3), possui uma variável y , então, faz-se necessário encontrar

uma função $y(x, t)$ para o deslocamento transversal da viga. O funcional a ser minimizado é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L(y_x, y_{xx}, y_{xt}, y_t, t) \quad (3.34)$$

Onde:

y = $y(x,t)$, deslocamento transversal da viga.

t = tempo.

y_x = $\partial y / \partial x$

y_{xx} = $\partial^2 y / \partial x^2$

y_{xt} = $\partial^2 y / \partial x \partial t$

y_t = $\partial y / \partial t$

Porém as ferramentas do cálculo variacional não fornecem essas funções diretamente, mas sim as equações diferenciais que essas funções devem satisfazer. Aplicando as ferramentas do cálculo variacional e o princípio de Hamilton, tem-se no caso da formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional, a seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_t} \right) - \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{xx}} \right) + \frac{d^2}{dx dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{xt}} \right) \right] + \frac{\partial R_e}{\partial y_t} \right\} \delta y dx dt = 0 \quad (3.35)$$

Na equação (3.35), o termo entre chaves representa a equação de Euler-Lagrange da viga em função de seu deslocamento, ou seja, sua equação diferencial parcial (EDP) de movimento.

Com base na equação (3.35), no funcional de energia da viga dado pela equação (3.18) e na função de dissipação de Rayleigh da viga dada pela equação (3.19), e calculando as derivadas necessárias, obtêm-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga para a formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

$$\begin{aligned} & m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} - \rho I y_{xxtt} \\ & + E I \left\{ y_{xx}^3 + y_x^2 y_{xxxx} + 4 y_x y_{xx} y_{xxx} + \frac{3}{2} y_x^2 y_{xx}^3 + \frac{1}{4} y_x^4 y_{xxxx} + 2 y_x^3 y_{xx} y_{xxx} \right\} \\ & + [k_a (y - y_a) + \lambda_a (y_t - y_{at})] \delta (x - d) \\ & = [k_v (y_v - y) + c_v (y_{vt} - y_t) - m_v g] \delta (x - vt) H \left(\frac{L}{v} - t \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Onde:

δ = Função Delta de Dirac que define a posição do absorvor.

$H(t)$ = Função Heaviside, que define a distância percorrida pelo veículo ao longo da viga.

$$y_{tt} = \partial^2 y / \partial t^2$$

$$y_t = \partial y / \partial t$$

$$y_{xxxx} = \partial^4 y / \partial x^4$$

$$y_{xxtt} = \partial^4 y / \partial x^2 \partial t^2$$

$$y_x^2 = (\partial y / \partial x)^2$$

$$y_x^3 = (\partial y / \partial x)^3$$

$$y_x^4 = (\partial y / \partial x)^4$$

$$y_{xx}^3 = (\partial^2 y / \partial x^2)^3$$

Eliminando os termos não lineares da equação (3.36), obtém-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento fornecida pela formulação linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional, apresentada na equação (3.37).

$$\begin{aligned} & m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} - \rho I y_{xxtt} + [k_a (y - y_a) + \lambda_a (y_t - y_{at})] \delta(x - d) \\ & = [k_v (y_v - y) + c_v (y_{vt} - y_t) - m_v g] \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Eliminando os termos correspondente à inércia rotacional na equação (3.36) obtém-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento fornecida pela formulação não linear de Euler-Bernoulli, apresentada na equação (3.38).

$$\begin{aligned} & m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} \\ & + E I \left\{ y_{xx}^3 + y_x^2 y_{xxxx} + 4 y_x y_{xx} y_{xxx} + \frac{3}{2} y_x^2 y_{xx}^3 + \frac{1}{4} y_x^4 y_{xxxx} + 2 y_x^3 y_{xx} y_{xxx} \right\} \\ & + [k_a (y - y_a) + \lambda_a (y_t - y_{at})] \delta(x - d) \\ & = [k_v (y_v - y) + c_v (y_{vt} - y_t) + m_v g] \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Finalmente, eliminando os termos correspondentes à inercia rotacional e os termos não lineares na equação (3.36) obtém-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento fornecida pela formulação linear de Euler-Bernoulli, apresentada na equação (3.39).

$$\begin{aligned}
& my_{tt} + cy_t + EIy_{xxxx} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})]\delta(x - d) \\
& = [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

As condições de contorno e as condições iniciais de uma viga simplesmente apoiada são dadas por:

$$\begin{aligned}
y(0, t) &= 0; & y(L, t) &= 0; \\
y_{xx}(0, t) &= 0; & y_{xx}(L, t) &= 0; \\
y(x, 0) &= 0; & y_t(x, 0) &= 0;
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.2. FORMULAÇÃO LINEAR DE TIMOSHENKO

Nesta formulação, o termo de energia cinética usada no modelo de Euler-Bernoulli com inércia rotacional é modificado a fim de incluir apenas o ângulo de rotação devido à flexão, substituindo $\partial y/\partial x$ por φ .

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 dx \tag{3.41}$$

No termo relativo à energia potencial interna U_i na equação (3.5) tem-se que substituir o termo $\partial y/\partial x$ por φ na parcela da deformação por flexão. Além disso, despreza-se a parcela da deformação axial, desta maneira a energia potencial interna nesta formulação toma a seguinte forma:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kAG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi\right)^2 dx \tag{3.42}$$

Onde k é um fator relacionado à forma da seção transversal da viga.

A energia potencial externa U_e , é dada pela equação (3.15) desenvolvida na formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional. A energia potencial total da estrutura V é obtida substituindo as equações (3.15) e (3.42) na equação (3.4).

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kAG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi\right)^2 dx \tag{3.43}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L [k_a(y - y_a)^2 + k_v(y_v - y)^2] dx + \int_0^L m_v g(y_v - y) dx$$

Com base na equação (3.1) e substituindo as equações (3.41) e (3.43), tem-se o funcional de energia da viga que representa a formulação linear de Timoshenko, dado por:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L kAG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L [k_a(y - y_a)^2 + k_v(y_v - y)^2] dx - \int_0^L m_v g(y_v - y) dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

No caso da formulação linear de Timoshenko o sistema veículo-ponte-absorção (Figura 3.3), possui duas variáveis, y e φ , tem-se uma equação diferencial parcial para cada variável. Faz-se necessário encontrar uma função $y(x, t)$ para o deslocamento transversal da viga, e uma função $\varphi(x, t)$ para a rotação da viga. O funcional a ser minimizado é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L(y, y_x, y_t, \varphi, \varphi_x, \varphi_t, t) \quad (3.45)$$

Onde:

φ = Rotação da viga

φ_x = $\partial \varphi / \partial x$

φ_t = $\partial \varphi / \partial t$

Porém as ferramentas do cálculo variacional não fornecem essas funções diretamente, mas as equações diferenciais que essas funções devem satisfazer. Aplicando as ferramentas do cálculo variacional e o princípio de Hamilton, tem-se no caso da formulação linear de Timoshenko:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_t} \right) - \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y_x} \right) \right] + \frac{\partial R_e}{\partial y_t} \right\} \delta y dx dt = 0 \quad (3.46)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_t} \right) - \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_x} \right) \right] \right\} \delta \varphi dx dt = 0 \quad (3.47)$$

Na equação (3.46), o termo entre chaves representa a equação de Euler-Lagrange da viga em função de seu deslocamento, ou seja, sua equação diferencial parcial de movimento. Já na equação (3.47) o termo entre chaves representa a rotação da viga devido ao cisalhamento.

Com base na equação (3.46), o funcional de energia da viga dado pela equação (3.44) e a função de dissipação de Rayleigh da viga dada pela equação (3.19), e calculando as derivadas necessárias, obtêm-se a equação (3.48) em função do deslocamento transversal e da rotação da viga.

$$\begin{aligned} m y_{tt} + c y_t - kAG y_{xx} + kAG \varphi_x + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})] \\ - [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g] = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pondo em evidencia φ_x na equação (3.48):

$$\begin{aligned} \varphi_x = -\frac{m}{kAG} y_{tt} - \frac{c}{kAG} y_t + y_{xx} - \frac{1}{kAG} [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})] \\ + \frac{1}{kAG} [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Com base na equação (3.47) e o funcional de energia da viga dado pela equação (3.44), e calculando as derivadas necessárias, obtêm-se a equação (3.50), em função do deslocamento transversal e da rotação da viga.

$$\rho I \varphi_{tt} - kAG y_x + kAG \varphi - EI \varphi_{xx} = 0 \quad (3.50)$$

Que após da diferenciação em relação a x torna-se:

$$\rho I \varphi_{xtt} - kAG y_{xx} + kAG \varphi_x - EI \varphi_{xxx} = 0 \quad (3.51)$$

Substituindo a equação (3.49) na equação (3.51) obtêm-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga fornecida pela teoria de Timoshenko, em função do deslocamento transversal da viga.

$$\begin{aligned}
& my_{tt} + \frac{\rho I}{kAG} my_{tttt} - \frac{EI}{kAG} my_{xxtt} + cy_t + \frac{\rho I}{kAG} cy_{ttt} - \frac{EI}{kAG} cy_{xt} \\
& + EIy_{xxxx} - \rho Iy_{xxtt} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})]\delta(x - d) \\
& - \frac{\rho I}{kAG} [k_a(y_{tt} - y_{att}) + \lambda_a(y_{ttt} - y_{attt})]\delta(x - d) \\
& + \frac{EI}{kAG} [k_a y_{xx} + \lambda_a y_{xxt}]\delta(x - d) \tag{3.52} \\
& = [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) - m_v g]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right) \\
& + \frac{\rho I}{kAG} [k_v(y_{vtt} - y_{tt}) + c_v(y_{vttt} - y_{ttt})]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right) \\
& + \frac{EI}{kAG} [k_v y_{xx} + c_v y_{xxt}]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right)
\end{aligned}$$

Onde:

$$y_{xxt} = \partial^3 y / \partial x^2 \partial t$$

$$y_{att} = \partial^2 y_a / \partial t^2$$

$$y_{attt} = \partial^3 y_a / \partial t^3$$

$$y_{vtt} = \partial^2 y_v / \partial t^2$$

$$y_{vttt} = \partial^3 y_v / \partial t^3$$

3.3. REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO A UMA FORMA ADIMENSIONAL

As Equações (3.27), (3.33), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) e (3.52) podem ser escritas em termos de variáveis adimensionais, considerando os parâmetros adimensionais dados pela expressão (3.53). A versão adimensional é conveniente, pois permite generalizar um problema particular.

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{y}{L}; \eta_a = \frac{y_a}{L}; \eta_v = \frac{y_v}{L}; \xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \tau = t\omega \\
k_1 &= \frac{k_a L^3}{EI}; k_2 = \frac{k_v L^3}{EI}; k'_0 = \frac{c L^3 \omega}{EI}; k'_1 = \frac{\lambda_a L^3 \omega}{EI}; k'_2 = \frac{c_v L^3 \omega}{EI} \tag{3.53} \\
\Gamma &= \frac{EI}{m L^4 \omega^2}; \mu = \frac{EI}{k A G L^2}; \lambda = \frac{\rho I}{k A G} \omega^2; \beta = \frac{I \rho}{m L^2}; g' = \frac{m_v}{EI} L^2 g; V = \frac{L \omega}{v}
\end{aligned}$$

Na Expressão (3.53) η , η_a e η_v são deslocamentos adimensionais da viga, absorsor e do veículo respectivamente, ξ é a coordenada axial adimensional e Δ a posição adimensional do

absorção, enquanto que τ representa a variável temporal adimensional. k_1 e k_2 são os coeficientes adimensionais da rigidez do absorção e veículo, e k'_0 , k'_1 e k'_2 são os coeficientes adimensionais de amortecimento da viga, absorção e veículo respectivamente. As variáveis ω , ω_a e ω_v representam as frequências naturais da viga, absorção e do veículo.

A equação (3.54) é a versão adimensional da equação (3.36), fornecida pela formulação não linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

$$\begin{aligned} & \eta_{\tau\tau} + 2\zeta\eta_{\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \Gamma\eta_{\xi\xi}^3 + \Gamma\eta_{\xi}^2\eta_{\xi\xi\xi\xi} + 4\Gamma\eta_{\xi}\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\Gamma\eta_{\xi}^2\eta_{\xi\xi}^3 \\ & + \frac{1}{4}\Gamma\eta_{\xi}^4\eta_{\xi\xi\xi\xi} + 2\eta_{\xi}^3\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} - \beta\eta_{\xi\xi\tau\tau} + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau})]\delta(\xi - \Delta) \quad (3.54) \\ & = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) - g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \end{aligned}$$

Onde:

η = $\eta(\xi, \tau)$, Deslocamento transversal adimensional da viga.

η_a = $\eta_a(\tau)$, Deslocamento transversal adimensional do absorção.

η_v = $\eta_v(\tau)$, Deslocamento transversal adimensional do veículo.

δ = Função Delta de Dirac que define a posição do absorção.

$H(\tau)$ = Função Heaviside, que define a distância percorrida pelo veículo ao longo da viga.

$\eta_{\tau\tau}$ = $\partial^2\eta/\partial\tau^2$

η_{τ} = $\partial\eta/\partial\tau$

$\eta_{\xi\xi\xi\xi}$ = $\partial^4\eta/\partial\xi^4$

$\eta_{\xi\xi\tau\tau}$ = $\partial^4\eta/\partial\xi^2\partial\tau^2$

η_{ξ}^2 = $(\partial\eta/\partial\xi)^2$

η_{ξ}^3 = $(\partial\eta/\partial\xi)^3$

η_{ξ}^4 = $(\partial\eta/\partial\xi)^4$

$\eta_{\xi\xi}^3$ = $(\partial^2\eta/\partial\xi^2)^3$

$\eta_{a\tau\tau}$ = $\partial^2\eta_a/\partial\tau^2$

$\eta_{a\tau}$ = $\partial\eta_a/\partial\tau$

$\eta_{v\tau\tau}$ = $\partial^2\eta_v/\partial\tau^2$

$\eta_{v\tau}$ = $\partial\eta_v/\partial\tau$

A equação (3.55) é a versão adimensional da equação (3.37), fornecida pela formulação linear de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

$$\begin{aligned}
& \eta_{\tau\tau} + 2\zeta\eta_{\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} - \beta\eta_{\xi\xi\tau\tau} + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau})]\delta(\xi - \Delta) \\
& = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) - g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

A equação (3.56) é a versão adimensional da equação (3.38), fornecida pela formulação não linear de Euler-Bernoulli.

$$\begin{aligned}
& \eta_{\tau\tau} + 2\zeta\eta_{\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \Gamma\eta_{\xi\xi}^3 + \Gamma\eta_{\xi}^2\eta_{\xi\xi\xi\xi} + 4\Gamma\eta_{\xi}\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} \\
& + \frac{3}{2}\Gamma\eta_{\xi}\eta_{\xi\xi}^3 + \frac{1}{4}\Gamma\eta_{\xi}^4\eta_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Gamma\eta_{\xi}^3\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi\xi} \\
& + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau})]\delta(\xi - \Delta) \\
& = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

A equação (3.57) é a versão adimensional da equação (3.39), fornecida pela formulação linear de Euler-Bernoulli.

$$\begin{aligned}
& \eta_{\tau\tau} + 2\zeta\eta_{\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau})_{\tau}]\delta(\xi - \Delta) \\
& = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

As condições de contorno e as condições iniciais adimensionais de uma viga simplesmente apoiada em sua versão adimensional são dadas por:

$$\begin{aligned}
& \eta(0, \tau) = 0; & \eta(1, \tau) = 0; \\
& \eta_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; & \eta_{\xi\xi}(1, \tau) = 0; \\
& \eta(\xi, 0) = 0; & \eta_{\tau}(\xi, 0) = 0;
\end{aligned} \tag{3.58}$$

A equação (3.59) é a versão adimensional da equação (3.27), equação diferencial parcial (EDP) de movimento do absorvor:

$$\eta_{a\tau\tau} - \frac{k_1EI}{m_aL^3\omega^2}(\eta - \eta_a) - \frac{k'_1EI}{m_aL^3\omega^2}(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau}) \quad \tau > 0; \tag{3.59}$$

A equação (3.60) é a versão adimensional da equação (3.33), equação diferencial parcial (EDP) de movimento do veículo:

$$\eta_{v\tau\tau} - \frac{k_2EI}{m_vL^3\omega^2}(\eta_v - \eta) - \frac{k'_2EI}{m_vL^3\omega^2}(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) \quad \xi \in (0,1), \tau > 0 \tag{3.60}$$

A equação (3.61) é a versão adimensional da equação (3.52) fornecida pela formulação linear de Timoshenko.

$$\begin{aligned}
& \eta_{\tau\tau} + \lambda\eta_{\tau\tau\tau} - \mu\eta_{\xi\xi\tau\tau} + 2\zeta\Gamma\eta_{\tau} + 2\zeta\gamma\eta_{\tau\tau\tau} - 2\zeta\mu\eta_{\xi\xi\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} - \beta\eta_{\xi\xi\tau\tau} \\
& + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta_{\tau} - \eta_{a\tau})]\delta(\xi - \Delta) \\
& - \lambda\Gamma[k_1(\eta_{\tau\tau} - \eta_{a\tau\tau}) + k'_1(\eta_{\tau\tau\tau} - \eta_{a\tau\tau\tau})]\delta(\xi - \Delta) \\
& + \mu\Gamma[k_1\eta_{\xi\xi} + k'_1\eta_{\xi\xi\tau}]\delta(\xi - \Delta) \\
& = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_{v\tau} - \eta_{\tau}) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \\
& + \lambda\Gamma[k_2(\eta_{v\tau\tau} - \eta_{\tau\tau}) + k'_2(\eta_{v\tau\tau\tau} - \eta_{\tau\tau\tau})]\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \\
& + \mu\Gamma[k_2\eta_{\xi\xi} + k'_2\eta_{\xi\xi\tau}]\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\eta_{\xi\xi\tau} &= \partial^3\eta/\partial\xi^2\partial\tau \\
\eta_{a\tau\tau} &= \partial^2\eta_a/\partial\tau^2 \\
\eta_{a\tau\tau\tau} &= \partial^3\eta_a/\partial\tau^3 \\
\eta_{v\tau\tau} &= \partial^2\eta_v/\partial\tau^2 \\
\eta_{v\tau\tau\tau} &= \partial^3\eta_v/\partial\tau^3
\end{aligned}$$

3.4. DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DE GALERKIN

De maneira geral, são três as abordagens para as soluções das equações diferenciais parciais lineares e não lineares mostradas neste trabalho (Paidoussis, 1998). A primeira solução consiste em tentar simplificar o problema para então resolvê-lo com métodos numéricos; a segunda resume-se em procurar diretamente a solução numérica para o problema; e por fim, utilizar o método de Galerkin.

Há várias formas de se obter soluções aproximadas para problemas de autovalores e todas consistem em descrever um sistema contínuo por meio de outro com n de graus de liberdade finitos, ou seja, discretizar o sistema. O número de graus escolhidos define a precisão desejada para a resposta procurada.

No método de Galerkin assume-se uma solução para o problema de autovalores na forma de uma série de n funções de comparação, todas satisfazendo as condições de contorno de um problema similar. Em geral, quando a solução para o problema similar é substituída na

equação de interesse, a série não vai satisfazer a equação diferencial desejada, ou seja, um erro surgirá em decorrência da substituição das funções. Por fim, os coeficientes da função de peso (ou as próprias funções, se obtidas numericamente) são escolhidos de modo que a integral sobre o erro dê zero como resultado (Meirovitch, 1967).

Para achar uma solução aproximada supõe-se uma solução-teste que atenda às condições de contorno para a viga simplesmente apoiada. Esta função pode ser composta pelas autofunções multiplicadas por outras que deem a evolução temporal adimensional, Equação (3.62). Neste caso as funções $\phi_n(x)$ do sistema serão os modos de vibração como os apresentados na Tabela 3.1, variando de 1 a n , onde o número n corresponde aos modos de vibração utilizados que satisfazem as condições de contorno.

$$y(x, t) \cong \sum_{i=1}^n A_i(t)\phi_i(x)L \quad (3.62)$$

Onde $\phi_n(x)$ são os modos de vibração da viga que são dados pela equação (3.63) e $A_i(t)$ é uma função desconhecida do tempo.

$$\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.63)$$

Tabela 3.1 – Formas dos modos de vibração para uma viga simplesmente apoiada.

Modo	Forma do Modo de Vibração
1	
2	
3	
4	
5	

Por exemplo, quando a solução da equação (3.62) é substituída na equação (3.23) o resultado, em geral, não será igual a zero, mas igual a uma função erro denominada aqui de R . O método de Galerkin requer que a integração de R multiplicada pelas autofunções (modos de vibração), que são naturalmente ortogonais, equação (3.64), seja igual a zero, como mostrado na equação (3.65).

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij} \quad (3.64)$$

Onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^L R \phi_i dx = 0 \quad (3.65)$$

Por exemplo, substituindo a equação (3.62) nos sistemas lineares de equações diferenciais parciais (3.27), (3.33), (3.37), (3.39) e (3.52) e aplicando o método de Galerkin, é determinado um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs), as quais tem que ser reduzidas a uma primeira ordem e finalmente tem que ser resolvidas pelo método de Runge-Kutta para obter a resposta no domínio do tempo do sistema. Para os sistemas lineares de equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento, depois de usar as condições de ortonormalidade, é obtido o seguinte sistema de equações diferenciais:

As equações (3.66) e (3.67) apresentam o método de Galerkin aplicado às EDPs dinâmicas de movimento do absorvor e do veículo, respectivamente:

$$m_a y_{att} - k_a \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(d) - y_a \right] - \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(d) - y_{at} \right] = 0 \quad (3.66)$$

$$m_v y_{vtt} - k_v \left[y_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(vt) \right] - 2\zeta_v m_v \omega_v \left[y_{vt} - \sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(vt) \right] = 0 \quad (3.67)$$

As equações (3.68) e (3.69) apresentam o método de Galerkin aplicado às EDPs de movimento lineares de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} A_{itt} + \xi_i \omega_i mL A_{it} + \frac{\omega_i^2 mL}{2} A_i + \frac{I \rho \pi^2}{2L} A_{itt} \\
& + \left\{ k_a \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(d) - y_a \right] + \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(d) - y_{at} \right] \right\} \phi_p(d) \\
& = \left\{ k_v \left[y_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(vt) \right] + 2\xi_v m_v \omega_v \left[y_{vt} - \sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(vt) \right] + m_v g \right\} \\
& \phi_p(vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} A_{itt} + \zeta_i \omega_i mL A_{it} + \frac{\omega_i^2 mL}{2} A_i \\
& + \left\{ k_a \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(d) - y_a \right] + \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(d) - y_{at} \right] \right\} \phi_i(d) = \\
& + \left\{ k_v \left[y_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(vt) \right] + 2\zeta_v m_v \omega_v \left[y_{vt} - \sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(vt) \right] + m_v g \right\} \\
& \phi_p(vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Onde:

- y_a = $y_a(t)$, deslocamento transversal do absorsor.
- y_v = $y_v(t)$, deslocamento transversal do veículo.
- y_{at} = $\partial y_a / \partial t$
- y_{att} = $\partial^2 y_a / \partial t^2$
- y_{vt} = $\partial y_v / \partial t$
- y_{vtt} = $\partial^2 y_v / \partial t^2$
- A_i = $A_i(t)$, Função desconhecida do tempo. $i = 1 \dots 5$
- A_{it} = dA_i / dt
- A_{itt} = $d^2 A_i / dt^2$
- ϕ_i = $\phi_i(x)$, Modos de vibração. $i = 1 \dots 5$

A equação (3.70) apresenta o método de Galerkin aplicado à EDP de movimento fornecida pela teoria linear da viga de Timoshenko:

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} A_{itt} + \frac{\rho IL}{2kAG} mA_{itttt} + \frac{EI m \pi^2}{2LkAG} A_{itt} + \xi_i \omega_i mL A_{it} \\
& + \frac{\rho I}{2kAG} \xi_i \omega_i mA_{ittt} + \frac{EI \pi^2}{2kAG} \xi_i \omega_i mA_{it} + \frac{\omega_i^2 mL}{2} A_i + \frac{I \rho \pi^2}{2L} A_{itt} \\
& + \left\{ k_a \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(d) - y_a \right] + \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_i(d) - y_{at} \right] \right\} \phi_p(d) \\
& - \frac{\rho I}{kAG} \left\{ k_a \left[\sum_{i=1}^n A_{itt} \phi_i(d) - y_{att} \right] + \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{ittt} \phi_i(d) - y_{attt} \right] \right\} \phi_p(d) \\
& + \frac{EI}{kAG} \left\{ k_a \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_{ixx}(d) \right] + \lambda_a \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_{ixx}(d) \right] \right\} \phi_p(d) \\
& = \left\{ k_v \left[y_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(vt) \right] + 2\xi_v m_v \omega_v \left[y_{vt} - \sum_{i=1}^n A_{it} \phi_r(vt) \right] + m_v g \right\} \\
& \phi_p(vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \\
& + \frac{\rho I}{kAG} \left\{ k_v \left[y_{vtt} - \sum_{i=1}^n A_{itt} \phi_r(vt) \right] + 2\xi_v m_v \omega_v \left[y_{vttt} - \sum_{i=1}^n A_{ittt} \phi_r(vt) \right] \right\} \\
& \phi_p(vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \\
& + \frac{EI}{kAG} \left\{ k_v \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_{ixx}(vt) \right] + 2\xi_v m_v \omega_v \left[\sum_{i=1}^n A_{it} \phi_{ixx}(vt) \right] \right\} \phi_p(vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Onde:

$$A_{ittt} = d^3 A_i / dt^3$$

$$\phi_{ixx} = d^2 \phi_i / dx^2$$

A ideia principal do método de Galerkin é discretizar as equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento para obter equações diferenciais ordinárias (EDOs) que depois serão reduzidas a equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Finalmente tem que ser resolvidas pelo método de Runge-Kutta para obter a resposta dinâmica do sistema no domínio do tempo.

A forma adimensional das equações (3.62) a (3.65) é dada pelas equações (3.71) a (3.74).

$$\eta(\xi, \tau) \cong \sum_{i=1}^n A_i(\tau) \phi_i(\xi) \tag{3.71}$$

Onde $\phi_i(\xi)$ são os modos de vibração da viga que é dada pela equação (3.72) e $A_i(\tau)$ é uma função desconhecida do tempo adimensional.

$$\phi_n(\xi) = \text{sen}(n\pi\xi) \quad (3.72)$$

$$\int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi = \delta_{ij} \quad (3.73)$$

Onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^1 R \phi_i d\xi = 0 \quad (3.74)$$

Da mesma maneira, substituindo a equação (3.71) nas equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento adimensional (3.55), (3.57), (3.59), (3.60) e (3.61), depois de aplicado o método de Galerkin, são obtidos um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs), as quais tem que ser reduzidas a um sistema de primeira ordem equivalente e depois resolvidas pelo método de Runge-Kutta. Para os sistemas lineares de equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento adimensional, depois de usar as condições de ortonormalidade, é obtido o seguinte sistema de equações diferenciais:

As equações (3.75) e (3.76) apresentam o método de Galerkin aplicado às EDPs de movimento adimensional do absorvor e do veículo, respectivamente:

$$\eta_{a\tau\tau} - \frac{k_1 EI}{m_a L^3 \omega^2} \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\Delta) - \eta_a \right] - \frac{k'_1 EI}{m_a L^3 \omega^2} \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau} \right] = 0 \quad (3.75)$$

$$\eta_{v\tau\tau} - \frac{k_2 EI}{m_v L^3 \omega^2} \left[\eta_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\tau/V) \right] - \frac{k'_2 EI}{m_v L^3 \omega^2} \left[\eta_{v\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\tau/V) \right] = 0 \quad (3.76)$$

As equações (3.77) e (3.78) apresentam o método de Galerkin aplicado às EDPs de movimento adimensional de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional linear, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}A_{i\tau\tau} + \zeta A_{i\tau} + \frac{\Gamma\pi^4}{2}A_i + \frac{\beta\pi^2}{2}A_{i\tau\tau} \\
& + \Gamma \left\{ k_1 \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\Delta) - \eta_a \right] + k'_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau} \right] \right\} \phi_p(\Delta) \\
& = \Gamma \left\{ k_2 \left[\eta_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\tau/V) \right] + k'_2 \left[\eta_{v\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\tau/V) \right] + g' \right\} \\
& \phi_p(\tau/V)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}A_{i\tau\tau} + \zeta A_{i\tau} + \frac{\Gamma\pi^4}{2}A_i \\
& + \Gamma \left\{ k_1 \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\Delta) - \eta_a \right] + k'_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau} \right] \right\} \phi_p(\Delta) \\
& = \Gamma \left\{ k_2 \left[\eta_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\tau/V) \right] + k'_2 \left[\eta_{v\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\tau/V) \right] + g' \right\} \\
& \phi_p(\tau/V)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Onde:

η_a = $\eta_a(\tau)$, deslocamento transversal adimensional do absorvor.

η_v = $\eta_v(\tau)$, deslocamento transversal adimensional do veículo.

$\eta_{a\tau}$ = $\partial\eta_a/\partial\tau$

$\eta_{a\tau\tau}$ = $\partial^2\eta_a/\partial\tau^2$

$\eta_{v\tau}$ = $\partial\eta_v/\partial\tau$

$\eta_{v\tau\tau}$ = $\partial^2\eta_v/\partial\tau^2$

A_i = $A_i(\tau)$, Função desconhecida do tempo adimensional. $i = 1...5$

$A_{i\tau}$ = $dA_i/d\tau$

$A_{i\tau\tau}$ = $d^2A_i/d\tau^2$

ϕ_i = $\phi_i(\xi)$, Modos de vibração. $i = 1...5$

A equação (3.79) apresenta o método de Galerkin aplicado à EDP de movimento adimensional de Timoshenko linear:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}A_{i\tau\tau} + \frac{\lambda}{2}A_{i\tau\tau\tau} + \frac{\mu\pi^2}{2}A_{i\tau\tau} + \zeta\Gamma A_{i\tau} + \zeta\lambda A_{i\tau\tau\tau} + \zeta\mu\pi^2 A_{i\tau} + \frac{\Gamma\pi^4}{2}A_i + \frac{\beta\pi^2}{2}A_{i\tau\tau} \\
& + \Gamma \left\{ k_1 \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\Delta) - \eta_a \right] + k'_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau} \right] \right\} \phi_p(\Delta) \\
& - \lambda\Gamma \left\{ k_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau\tau} \right] + k'_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau\tau\tau} \phi_i(\Delta) - \eta_{a\tau\tau\tau} \right] \right\} \phi_p(\Delta) \\
& + \mu\Gamma \left\{ k_1 \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_{i\xi\xi}(\Delta) \right] + k'_1 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_{i\xi\xi}(\Delta) \right] \right\} \phi_p(\Delta) \\
& = \Gamma \left\{ k_2 \left[\eta_v - \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(\tau/V) \right] + k'_2 \left[\eta_{v\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_i(\tau/V) \right] + g' \right\} \\
& \phi_p(\tau/V)H(V - \tau) \\
& + \lambda\Gamma \left\{ k_2 \left[\eta_{v\tau\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau\tau} \phi_i(\tau/V) \right] + k'_2 \left[\eta_{v\tau\tau\tau} - \sum_{i=1}^n A_{i\tau\tau\tau} \phi_i(\tau/V) \right] \right\} \\
& \phi_p(\tau/V)H(V - \tau) \\
& + \mu\Gamma \left\{ k_2 \left[\sum_{i=1}^n A_i \phi_{i\xi\xi}(\tau/V) \right] + k'_2 \left[\sum_{i=1}^n A_{i\tau} \phi_{i\xi\xi}(\Delta) \right] \right\} \phi_p(\tau/V)H(V - \tau)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Onde:

$$A_{i\tau\tau\tau} = d^3A_i/d\tau^3$$

$$\phi_{i\xi\xi} = d^2\phi_i/d\xi^2$$

A Figura 3.10 apresenta o esquema do processo da obtenção das respostas dinâmicas no domínio do tempo para as diferentes formulações desenvolvidas no presente trabalho.

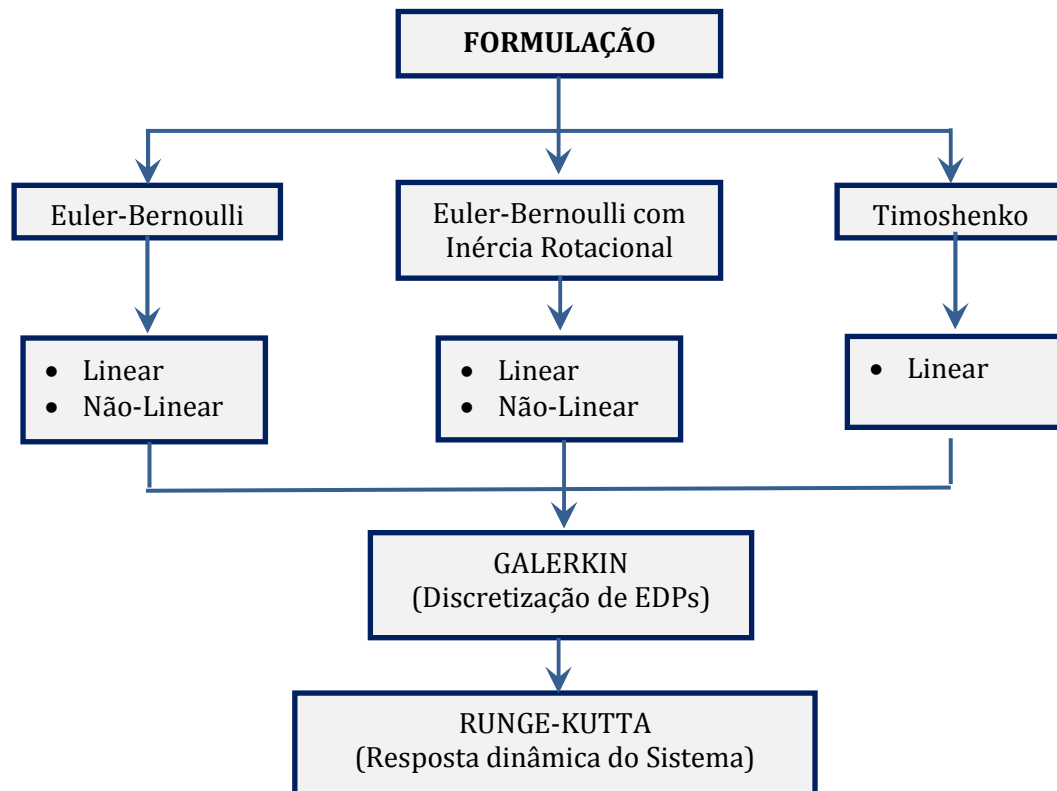


Figura 3.8 – Esquema do processo de obtenção das respostas dinâmicas.

3.5. FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Com base na equação (3.52) fornecido pela teoria de Timoshenko, desprezando as parcelas referentes ao veículo e ao absorvor e, além disso, considerando a viga sem amortecimento ($c = 0$), e definindo:

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad e \quad r^2 = \frac{I}{A} \quad (3.80)$$

Obtemos a equação de movimento linear fornecida pela teoria da viga de Timoshenko:

$$\alpha^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{kG} r \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (3.81)$$

Podemos expressar a solução da equação (3.81) como:

$$y(x, t) = C \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \omega_n t \quad (3.82)$$

Que satisfaz as condições de contorno necessárias em $x = 0$ e $x = 1$. Aqui, C é uma constante e ω_n é a n -ésima frequência natural. Substituindo a equação (3.82) na equação (3.81), obtemos a equação da frequência.

$$\omega_n^4 \left(\frac{\rho r^2}{kG} \right) - \omega_n^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} \frac{E}{kG} \right) + \left(\frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{L^4} \right) = 0 \quad (3.83)$$

Podemos ver que a equação (3.83) é uma equação quadrática em ω_n^2 e para qualquer n dado; há dois valores de ω_n que satisfaz a equação (3.83). O valor menor corresponde ao modo de deformação por flexão, ao passo que o maior corresponde ao modo de deformação por cisalhamento.

Se for considerado somente o efeito da inércia rotacional, a equação de movimento resultante não contém nenhum termo envolvendo o coeficiente de cisalhamento k , por consequência, obtemos da equação de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.84)$$

Nesse caso, a equação de frequência dada pela equação (3.83) reduz-se a:

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{L^4 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} \right)} \quad (3.85)$$

Se forem desprezados os efeitos da inércia de rotação, assim como os da deformação por cisalhamento, a equação (3.81) reduz-se à equação de movimento clássica, equação (3.86) dada pela teoria de Euler-Bernoulli.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.86)$$

E a frequência natural dada pela equação (3.83) reduz-se, a:

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{L^4} \quad (3.87)$$

3.6. CRITÉRIO DE DEN HARTOG PARA A PROCURA DOS PARÂMETROS ÓTIMOS DO ABSORSOR

O absorvedor discreto linear consiste basicamente em uma massa, uma mola e um amortecedor, os quais são conectados na estrutura, sintonizando a frequência do absorvedor a uma frequência particular, com o objetivo de fazer que o absorvedor retire energia do sistema causado pelo carregamento dinâmico, transferindo-se assim a energia para o mesmo.

A inclusão de um absorvedor num sistema estrutural obedece à necessidade de diminuir ao valor mais baixo possível os deslocamentos verticais e/ou horizontais de uma estrutura. Para alcançar esse objetivo, os parâmetros que governam o absorvedor, tais como massa, amortecimento e rigidez, deverão ser apropriados para a estrutura que se pretende estudar, de modo a reduzir a amplitude das vibrações a um valor mínimo.

São muitos os autores que tem desenvolvido distintas metodologias para a procura dos parâmetros ótimos de um absorvedor. Den Hartog (1956) foi o pioneiro no estudo de absorvedores dinâmicos. Ele estudou sistemas simples com um grau de liberdade, generalizando posteriormente para sistemas com vários graus de liberdade, sem amortecimento e submetidos a excitações harmônicas. A partir desse estudo o autor obteve expressões para a determinação dos parâmetros ótimos dos absorvedores.

De acordo com Den Hartog (1956) as equações de movimento de um sistema de um grau de liberdade sujeito a uma ação dinâmica externa $f(t)$ com um absorvedor instalado são dadas por:

$$M\ddot{y}_1(t) + C\dot{y}_1(t) + Ky_1(t) = f(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) \quad (3.88)$$

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}_1(t) + g(t) \quad (3.89)$$

Onde $y_1(t)$ é o deslocamento relativo do sistema estrutural, de massa M , em relação à base; $z(t)$ o deslocamento relativo da massa m do absorvedor linear em relação à estrutura; C e K o amortecimento e a rigidez do sistema principal, respectivamente; c e k o amortecimento e a rigidez do absorvedor linear e $g(t)$ é uma força aplicada à base da estrutura. A parcela $g(t)$ é igual a zero para o caso de excitações de vento; no caso de excitações sísmicas $g(t) = \mu f(t)$, sendo $\mu = m/M$, a razão entre as massas.

Considere o caso de carregamento $f(t) = F_0 e^{i\omega t}$ e assumamos uma solução permanente do tipo:

$$y_1(t) = Y_1 e^{i\omega t} \quad (3.90)$$

$$z(t) = Z e^{i\omega t} \quad (3.91)$$

Onde Y_1 é a amplitude da vibração do sistema principal e Z a amplitude da vibração do absorvedor linear. Substituindo as equações (3.90) e (3.91) nas equações (3.88) e (3.89) obtém-se a expressão da resposta no tempo do sistema principal:

$$y_1(t) = \frac{(k - \omega^2 m + i\omega c) F_0 e^{i\omega t}}{[K + k - \omega^2 M + i\omega(C + c)](k - \omega^2 m + i\omega c) - (k + i\omega c)^2} \quad (3.92)$$

O chamado fator de amplificação dinâmica, R , do sistema principal pode ser expresso por:

$$R = \frac{KY_1}{F_0} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad (3.93)$$

Onde

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \quad (3.94)$$

$$B = 2\zeta_2 \alpha \beta \quad (3.95)$$

$$C = \alpha^2(1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2 - \beta^2(1 - \beta^2) - 4\zeta_1 \zeta_2 \alpha \beta^2 \quad (3.96)$$

$$D = 2\zeta_2 \alpha \beta(1 - \beta^2 - \mu \beta^2) + 2\zeta_1 \beta(\alpha^2 - \beta^2) \quad (3.97)$$

Sendo ζ_1 e ζ_2 as taxas de amortecimento do sistema principal e do absorvedor linear respectivamente; α a razão entre as frequências naturais do absorvedor linear e do sistema principal; μ a razão entre as massas do absorvedor e do sistema principal e β a razão entre as frequências da excitação e a frequência natural do sistema principal.

Fazendo com que o amortecimento do sistema principal seja nulo ($\zeta_1 = 0$), podem-se obter as expressões ótimas clássicas para os parâmetros do sistema apresentadas por Den Hartog (1956). Existem dois valores de β onde o fator R independe da taxa de amortecimento ζ_2 , chamados pontos invariantes P e Q, como pode-se observar através da Figura 3.11. Estes

pontos existem porque A e C independem de ζ_2 e B e D são proporcionais a ζ_2 fazendo com que a resposta seja independente de ζ_2 se $A/C = B/D$, o que ocorre nos pontos P e Q.

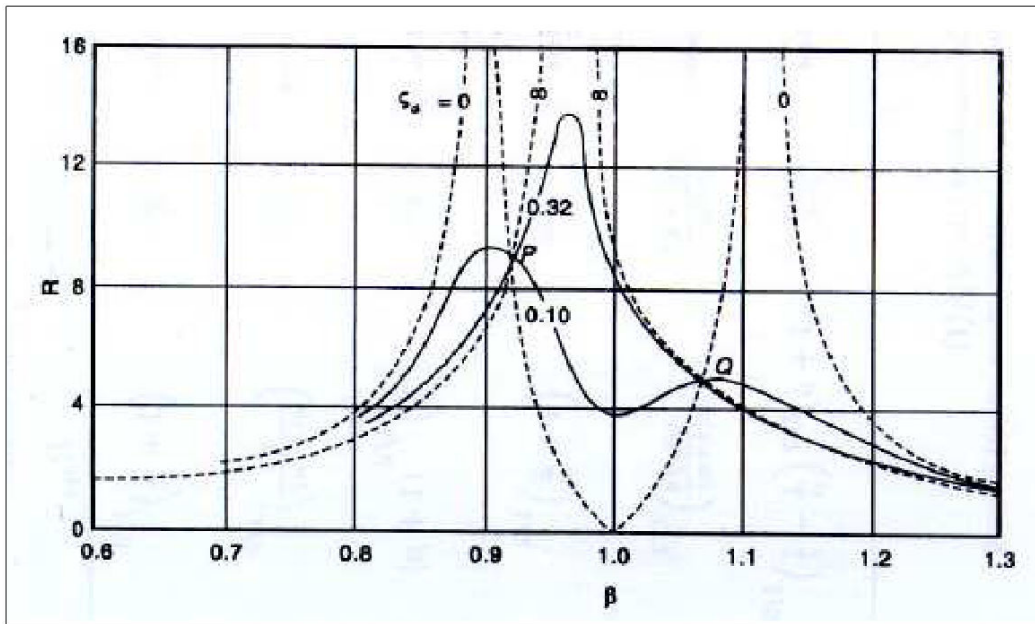


Figura 3.9 – Fator de amplificação em função de β ($\mu=0.05$, $\alpha=1$), (Soong e Dargush, 1997)

A partir dessa expressão obtém-se uma expressão quadrática em β^2 para as frequências dos pontos invariantes. Otimizando essa relação fazendo com que as respostas correspondentes aos pontos invariantes coincidam, as frequências nesses pontos são dadas por:

$$\beta^2_{1,2} = \left(\frac{1}{1 + \mu} \right) \left[1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right] \quad (3.98)$$

A razão de frequências é dada pela relação da frequência natural do absorvedor e a frequência natural do sistema principal. Já a razão entre frequências ótima em termos de μ é dada por:

$$\alpha_{ótimo} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (3.99)$$

E a resposta nos pontos invariantes é:

$$R_{ótimo} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (3.100)$$

Se a inclinação da curva de resposta for igualada a zero em cada um dos pontos invariantes o amortecimento do absorvedor é dado por:

$$\zeta_2^2 = \frac{\mu \left[3 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \right]}{8(1 + \mu)^3} \quad (3.101)$$

De acordo com Den Hartog (1956), a razão de amortecimento ζ ótima é dada pelo valor médio da equação (3.101):

$$\zeta_{ótimo} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (3.102)$$

Com estas expressões é possível calcular os parâmetros ótimos do absorvedor para estruturas reduzidas a um grau de liberdade, não amortecidas, submetidas a uma excitação harmônica.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Serão apresentados, neste capítulo, os testes para validação das rotinas desenvolvidas com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15 para o método de Galerkin cujas respostas dinâmicas serão comparadas com alguns resultados obtidos analiticamente, exemplos apresentados nas referências bibliográficas e também desenvolvidos pelo autor. Além disso, será realizada uma análise paramétrica utilizando modelos numéricos para comparar as diferentes teorias de vigas desenvolvidas neste trabalho.

4.1. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA ESTÁTICA

O exemplo usado para a validação da modelagem computacional da viga foi proposto por Lara (2007). Neste exemplo, a viga é considerada como simplesmente apoiada e submetida a uma carga pontual $P_o = 100 \text{ N}$, conforme apresentado na Figura 4.1. O deslocamento vertical do ponto central de uma viga simplesmente apoiada é dado por $y(L/2) = P_o L^3 / 48EI$.

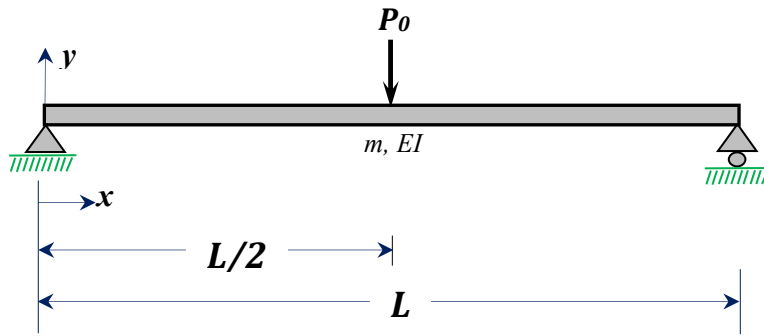


Figura 4.1 – Modelo de viga simplesmente apoiada submetida a carga pontual no meio do vão

As propriedades do modelo são mostradas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades do modelo de viga simplesmente apoiada submetida a carga pontual.

Propriedades	Nomenclatura	Valor	Unidade
Comprimento	L	2	m
Área	A	$1,71 \times 10^{-4}$	m^2
Momento de inércia	I	$1,152 \times 10^{-8}$	m^4
Módulo de elasticidade	E	199,9	GPa
Massa por unidade de comprimento da viga	m	1,3422	kg/m
Frequência natural da viga	ω_n	13,09	rad/s
Carga pontual	P_0	100	N
Coefficiente de amortecimento da viga	ξ	0,001	

A equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga submetida a uma carga pontual é dada pela equação (4.1):

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P_0 \delta \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0 \quad (4.1)$$

A solução utilizada como solução-teste no método de Galerkin para vibração forçada da viga simplesmente apoiada é dada pela equação (4.2):

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) \phi_i(x) \quad (4.2)$$

Na equação (4.2), $A_i(t)$ é uma função desconhecida do tempo e $\phi_n(x)$ são os cinco primeiros modos de vibração dados pela equação (4.3):

$$\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1 \dots 5 \quad (4.3)$$

A equação (4.1) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.2). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.2.

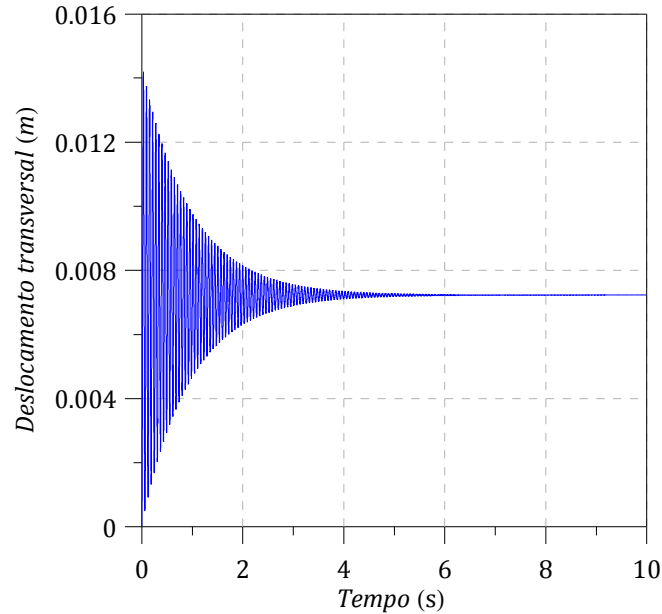


Figura 4.2 – Resposta dinâmica no meio do vão da viga submetida a uma carga pontual.

Pode-se observar que o deslocamento obtido numericamente em torno da sua configuração estática, foi de aproximadamente $y_{numérico} = -0,007234 \text{ m}$ o qual leva 4s para convergir e coincide com o resultado analítico $y_{analítico}(L/2) = -PoL^3/48EI = -0,007237 \text{ m}$. Deste modo, a rotina feita no software MAPLE 15 apresenta um bom resultado e valida o teste para a viga submetida a uma carga estática no meio do vão da viga.

A versão adimensional da equação (4.1) é obtida fazendo-se as mudanças de variáveis a variáveis adimensionais conforme à equação (4.4), tendo como resultado a equação (4.5):

$$\xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \eta = \frac{y}{L}; \tau = t\omega; \Gamma = \frac{EI}{mL^4\omega^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + 2\zeta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^4 \eta}{\partial \tau^4} - \frac{P_0}{mL^4\omega^2} \delta(\xi - \Delta) = 0 \quad (4.5)$$

A solução adimensional utilizada como solução-teste para o método de Galerkin é obtida fazendo adimensionais as equações (4.2) e (4.3).

Deslocamento adimensional é dado pela equação (4.6):

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n A_i(\tau)\phi_i(\xi) \quad (4.6)$$

A expressão adimensional para os cinco primeiros modos de vibração $\phi_i(\xi)$ é dada pela equação (4.7):

$$\phi_i(\xi) = \text{sen}(n\pi\xi) \quad n = 1 \dots 5 \quad (4.7)$$

A equação (4.5) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.6). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.3.

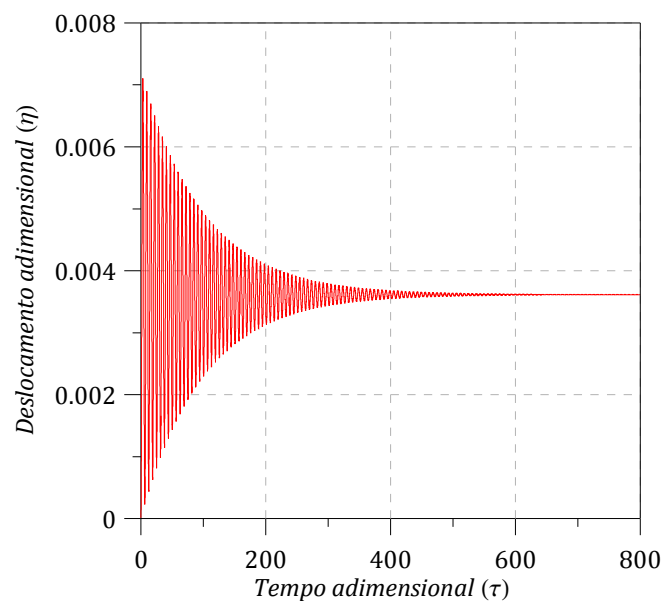


Figura 4.3 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga submetida a uma carga pontual.

4.2. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA HARMÔNICA

Para este teste será usado o mesmo exemplo anterior e usada a equação (4.9) apresentada por Lara (2007), sendo agora a viga submetida à ação de uma carga harmônica do tipo $P_0 \text{sen}(\Omega t)$ com uma frequência de excitação da carga de $\Omega = 81,763 \text{ rad/s}$ aplicada no meio do vão da viga como pode ser visto na Figura 4.4.

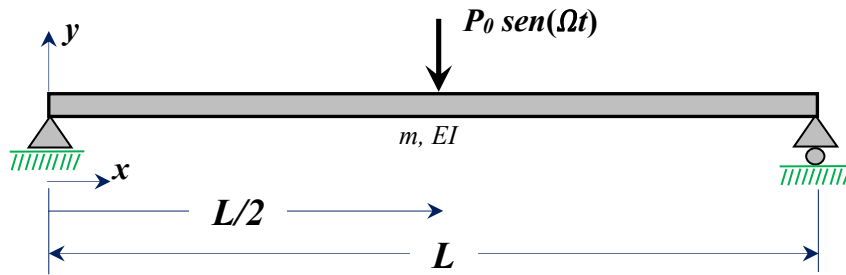


Figura 4.4 – Viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento senoidal no meio do vão.

A equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga submetida a uma carga harmônica é dada pela equação (4.8):

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P_0 \text{sen}(\Omega t) \delta \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0 \quad (4.8)$$

A equação (4.9) apresentada abaixo define a resposta dinâmica em função do tempo de uma viga simplesmente apoiada, submetida à excitação de uma carga harmônica. Na equação abaixo, são substituídas as propriedades da viga e, t e o tempo total para análise da resposta, ω_n e a n -ésima frequência natural adotada e $\beta_n = \Omega/\omega_n$ é a relação entre as frequências de excitação externa Ω e a frequência natural ω_n da viga. Para esta análise, foram considerados apenas o primeiro e o terceiro modo de vibração da viga.

$$y(t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] (\text{sen} \Omega t - \beta_n \text{sen} \omega_n t) \quad (4.9)$$

A equação (4.8) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.2). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs)

e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.5.

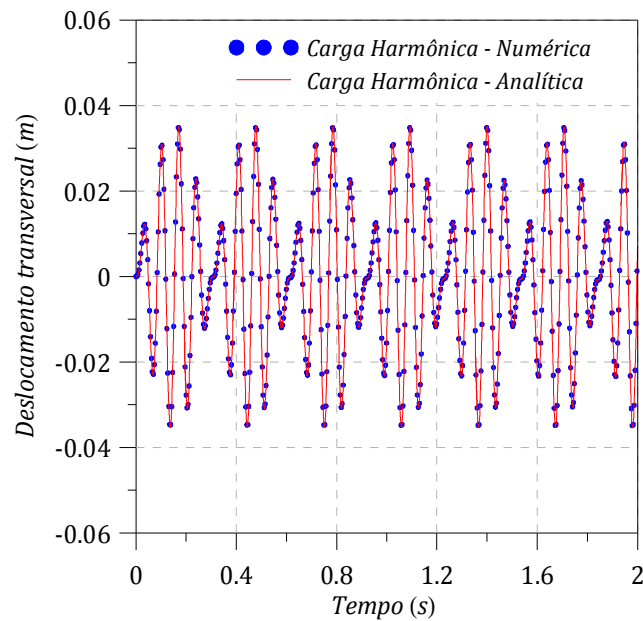


Figura 4.5 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga submetida a uma carga harmônica.

A versão adimensional da equação (4.8) é obtida fazendo-se as mudanças de variáveis dadas pela equação (4.10), tendo como resultado a equação (4.11):

$$\xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \eta = \frac{y}{L}; \tau = t\omega; \varpi = \frac{\Omega}{\omega}; \Gamma = \frac{EI}{mL^4\omega^2} \quad (4.10)$$

$$\eta_{\tau\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{P_0}{mL\omega^2} \text{sen}(\varpi\tau)\delta(\xi - \Delta) = 0 \quad (4.11)$$

A equação (4.11) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.6). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.6.

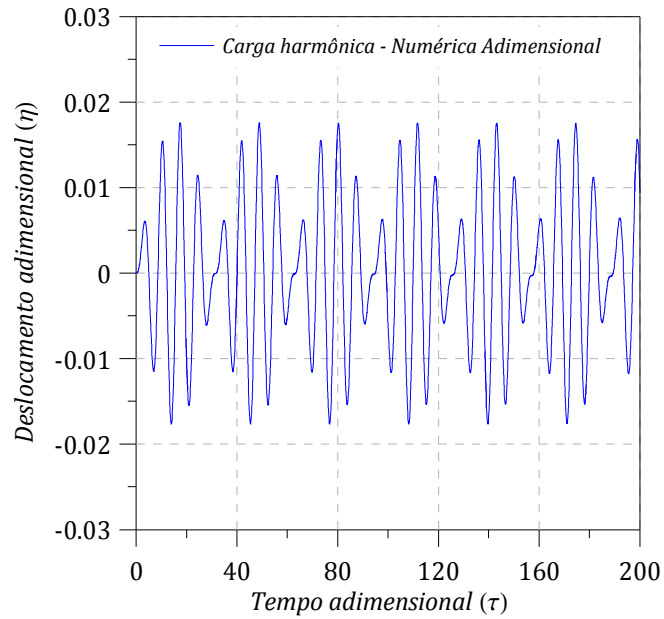


Figura 4.6 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga submetida a uma carga harmônica.

4.3. VALIDAÇÃO PARA UMA CARGA EM MOVIMENTO QUE PERCORRE UMA PONTE

Neste terceiro caso, é analisada a passagem de uma carga pontual com velocidade constante percorrendo uma ponte de comprimento L , como é ilustrado na Figura 4.7. O deslocamento é obtido no meio do vão ao longo do tempo para logo em seguida serem comparados os resultados numéricos com a solução analítica apresentada por Barbero (2001).

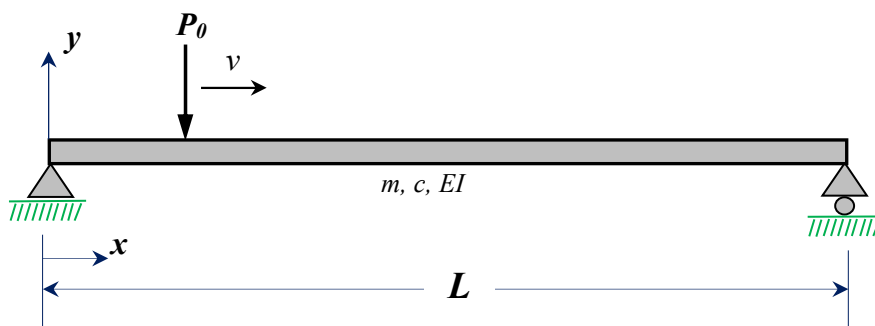


Figura 4.7 – Configuração para análise de uma carga pontual que percorre sobre uma viga.

A equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga submetida a uma carga que percorre sua extensão é dada pela equação (4.12):

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P_0 \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) = 0 \quad (4.12)$$

O deslocamento analítico é representado por duas equações: a primeira é utilizada para representar o deslocamento enquanto a carga se encontra sobre a viga na equação (4.13), e a segunda é utilizada para representar os deslocamentos após a carga deixar a viga, ficando submetida somente às vibrações livres expressa na equação (4.14).

$$y(t) = \frac{y_s}{1 - r^2} [\text{sen}(r\omega_0 t) - r e^{-\zeta\omega_0 t} \text{sen}(\omega_0 t)] \quad (4.13)$$

$$y(t) = \frac{y_s r}{1 - r^2} [\text{sen}(\omega_0 t) e^{-\zeta\omega_0 t} - \text{sen}(\omega_0(t - t_1)) e^{-\zeta\omega_0(t - t_1)}] \quad (4.14)$$

Nas equações acima, t é o tempo percorrido pela carga contado a partir do início da viga, t_1 é o tempo necessário para a carga percorrer a viga completamente, ω_0 é frequência natural do primeiro modo de vibração, ζ é a razão de amortecimento, $y_s = P_0 L^3 / 48EI$ é a flecha estática e r é dado pela relação:

$$r = \frac{\pi v}{\omega_0 L} \quad (4.15)$$

Para obter a solução analítica e numérica são apresentadas as propriedades mostradas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Propriedades do modelo – Carga em movimento que percorre uma ponte.

Propriedades	Nomenclatura	Valor	Unidade
Comprimento	L	15	m
Módulo de elasticidade e Momento de inércia	EI	8323	GN/m^2
Massa por unidade de comprimento da viga	m	2303	T/m
Frequência natural da viga	ω_n	83,39	rad/s
Coefficiente de amortecimento da viga	ξ	0,01	
Deslocamento estático	y_s	1,715	mm
Tempo para percorrer a viga	t_1	0,18	s
Velocidade da carga em movimento	v	83,33	m/s

A equação (4.12) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.2). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs)

e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.8.

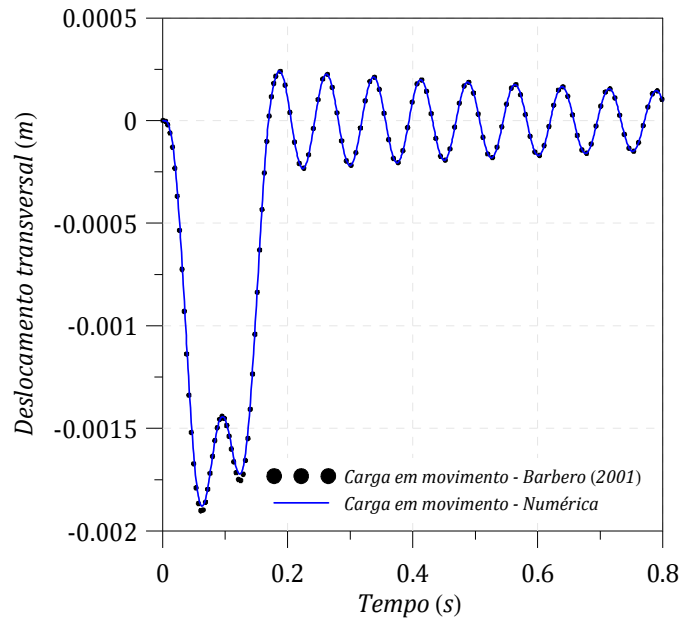


Figura 4.8 – Resposta dinâmica da viga submetida a uma carga em movimento.

A versão adimensional da equação (4.12) é obtida fazendo-se as mudanças de variáveis dadas pela equação (4.16) e tem como resultado a equação (4.17):

$$\xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \eta = \frac{y}{L}; \tau = t\omega; \Gamma = \frac{EI}{mL^4\omega^2}; V = \frac{L\omega}{v} \quad (4.16)$$

$$\eta_{\tau\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{P_0}{mL^2\omega^2}\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) = 0 \quad (4.17)$$

A equação (4.17) foi discretizada pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste adimensional dada pela equação (4.6). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. O resultado da análise é apresentado na Figura 4.9.

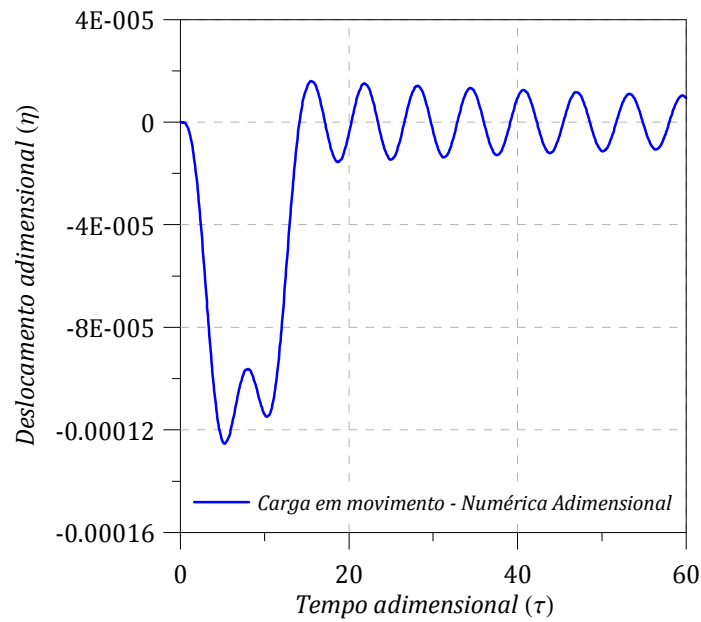


Figura 4.9 – Resposta dinâmica adimensional da viga submetida a uma carga em movimento.

4.4. VALIDAÇÃO PARA UM VEÍCULO QUE PERCORRE UMA PONTE

Para a verificação da precisão do presente modelo, considera-se o caso onde o veículo percorre a viga com velocidade constante de $v = 10 \text{ m/s}$, apresentado na Figura 4.10. Não foi levado em consideração a razão de amortecimento da viga ($\xi = 0$).

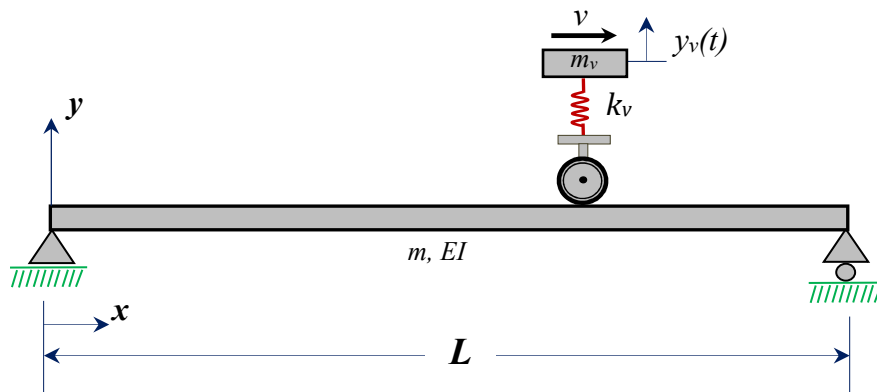


Figura 4.10 – Configuração para análise com um veículo que percorre a viga com velocidade constante.

A Tabela 4.3 apresenta as propriedades do modelo utilizado na análise.

Tabela 4.3 – Propriedades do modelo – Viga sob ação de um veículo percorrendo sua extensão.

Propriedades	Nomenclatura	Valor	Unidade
Comprimento da viga	L	25	m
Área da seção transversal da viga	A	2	m^2
Momento de inércia da seção transversal da viga	I	0,12	m^4
Módulo de elasticidade do material da viga	E	27,5	GPa
Massa por unidade de comprimento da viga	m	4800	kg/m
Massa do veículo	m_v	1200	kg
Frequência natural do veículo	ω_v	20,42	rad/s
Módulo de Poisson da viga	ν	0,3	
Coefficiente de cisalhamento de Timoshenko	k	5/6	

A equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga sob a ação de um veículo percorrendo sua extensão é dada pela equação (4.18).

$$my_{tt} + Ely_{xxxx} = [k_v(y_v - y) + m_v g] \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \quad (4.18)$$

A equação diferencial parcial (EDP) de movimento do veículo é dada pela equação (4.19)

$$m_v y_{vtt} + k_v(y_v - y) = 0 \quad (4.19)$$

Onde y denota o deslocamento transversal da viga, y_v é o deslocamento transversal do veículo, m a massa por unidade de comprimento da viga, m_v a massa do veículo, g a aceleração da gravidade, k_v coeficiente de rigidez do veículo, δ e a função Delta de Dirac que define a posição do veículo, H e a função Heaviside.

A frequência natural da viga (ω) para o primeiro modo de vibração é dada pela equação (3.87), fornecida pela teoria de Euler-Bernoulli, como sendo: $\omega = 13.0935$ rad/seg.

O deslocamento analítico (Yang *et al* 2004), é representado pela equação (4.20).

$$y(t) = \frac{\Delta_{st}}{1 - S^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - S \sin(\omega t) \right] \quad (4.20)$$

Onde Δ_{st} , dada abaixo, denota aproximadamente o deslocamento estático no meio do vão da viga sob a ação da massa gravitacional m_v no mesmo ponto.

$$\Delta_{st} = -\frac{2m_v g L^3}{\pi^4 E I} \quad (4.21)$$

O que é muito próximo do valor $-m_v g L^3 / (48EI)$. O parâmetro da velocidade S é definido como a razão entre a metade da frequência do veículo $\pi v / L$ e a frequência da ponte ω .

$$S = \frac{\pi v}{L\omega} \quad (4.22)$$

As equações (4.18) e (4.19) foram discretizadas pelo método de Galerkin com auxílio do software de computação simbólica MAPLE 15. Utilizou-se a solução-teste dada pela equação (4.2). O método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo. A Figura 4.11 apresenta as respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecida pela teoria de Euler-Bernoulli e que foram comparados com a resposta dinâmica obtida no trabalho de Yang *et al* (2004).

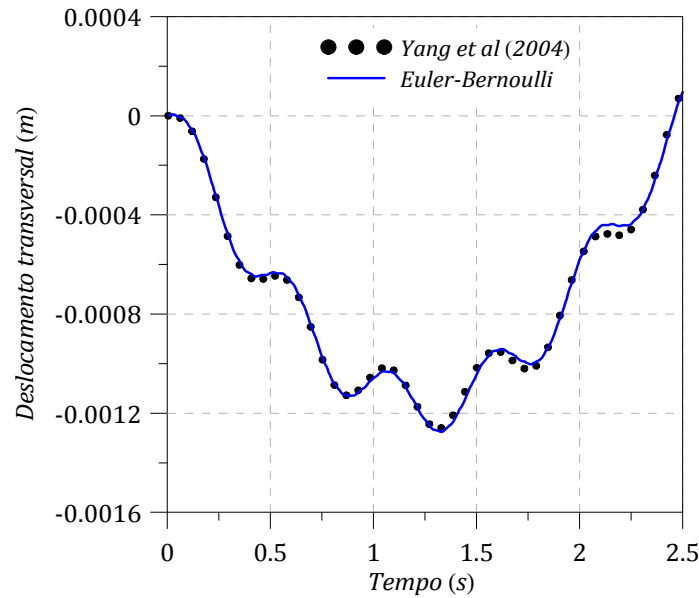


Figura 4.11 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga sob ação de veículo percorrendo sua extensão. Teoria de Euler-Bernoulli.

As versões adimensionais das equações (4.18) e (4.19) são obtidas fazendo-se as mudanças de variáveis dadas pela equação (4.23) tendo como resultado as equações (4.24) e (4.25) respectivamente:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \eta = \frac{y}{L}; \tau = t\omega; \Gamma = \frac{EI}{mL^4\omega^2}; V = \frac{L\omega}{v} \\ k_2 = \frac{k_v L^3}{EI}; g' = \frac{m_v}{EI} L^2 g; V = \frac{L\omega}{v} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\eta_{\tau\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \quad (4.24)$$

$$\eta_{v\tau\tau} + \frac{k_2EI}{m_vL^3\omega^2}(\eta_v - \eta) = 0 \quad (4.25)$$

A Figura 4.12 apresenta a resposta dinâmica adimensional fornecida pela teoria de Euler-Bernoulli.

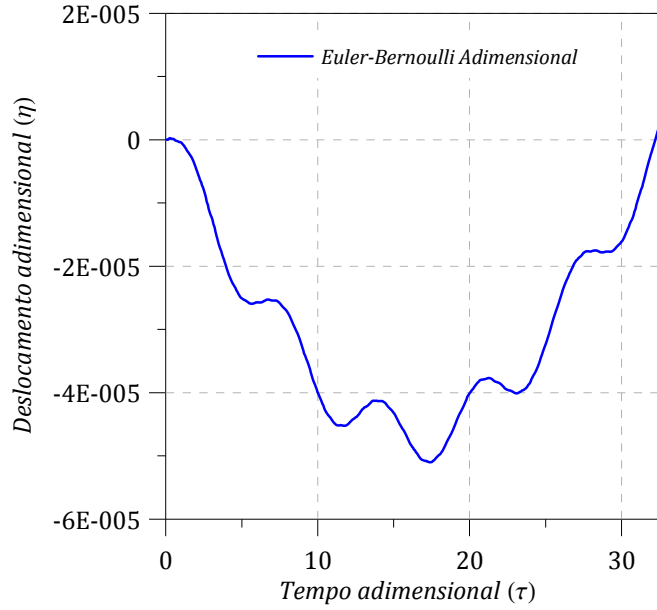


Figura 4.12 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga sob ação de veículo percorrendo sua extensão. Teoria de Euler-Bernoulli.

A equação (4.26) representa a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga dada pela formulação de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

$$my_{tt} + EIy_{xxxx} - I\rho y_{xxtt} = [k_v(y_v - y) - m_v g]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right) \quad (4.26)$$

A equação (4.27) representa a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga dada pela formulação de Timoshenko.

$$\begin{aligned} my_{tt} + \frac{\rho I}{kAG}my_{tttt} - \frac{EI}{kAG}my_{xxtt} + EIy_{xxxx} - I\rho y_{xxtt} \\ = [k_v(y_v - y) - m_v g]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right) + \frac{EI}{kAG}[k_v y_{xx}]\delta(x - vt)H\left(\frac{L}{v} - t\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

As frequências naturais (ω) para o primeiro modo de vibração são dadas pelas equações (3.85) e (3.83) fornecidas pelas teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional ($\omega=13.0831$ rad/seg) e Timoshenko ($\omega=13.0680$ rad/seg) respectivamente.

A Figura 4.13 apresenta a resposta dinâmica analítica fornecida por Yang *et al* (2004) e as respostas dinâmicas numéricas fornecidas pelas teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e Timoshenko. Pode ser observado que os resultados numéricos das teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e Timoshenko apresentam respostas dinâmicas muito próximas da resposta dinâmica analítica.

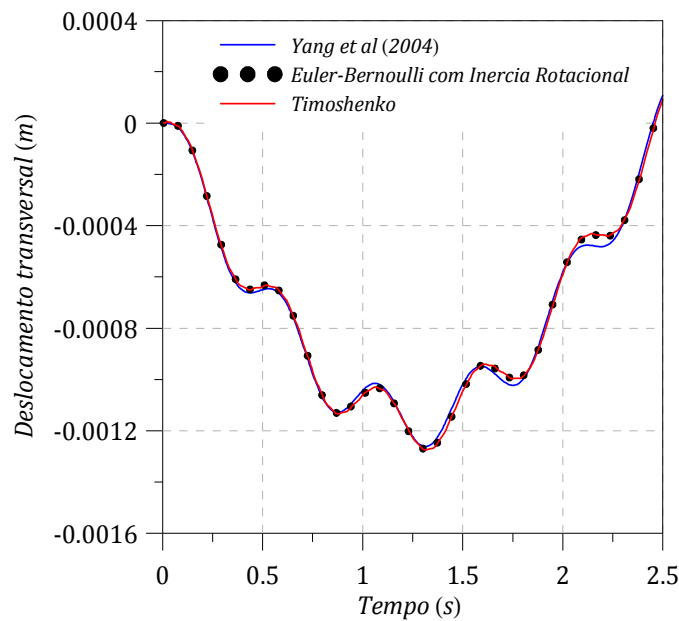


Figura 4.13 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga sob ação de um veículo que percorre toda sua extensão. Teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e teoria de Timoshenko.

As versões adimensionais das equações (4.26) e (4.27) são obtidas fazendo-se as mudanças de variáveis dadas pela equação (4.28)

$$\xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \eta = \frac{y}{L}; \tau = t\omega; k_2 = \frac{k_v L^3}{EI}; g' = \frac{m_v}{EI} L^2 g \quad (4.28)$$

$$\lambda = \frac{\rho I}{kAG\omega^2}; \mu = \frac{EI}{KAGL^2}; \Gamma = \frac{EI}{mL^4\omega^2}; \beta = \frac{I\rho}{mL\omega^2}; V = \frac{L\omega}{v}$$

Portanto, a versão adimensional do modelo da viga submetida a um veículo percorrendo sua extensão segundo a teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional é dada pela equação (4.29).

$$\eta_{\tau\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} - \beta\eta_{\xi\xi\tau\tau} = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \quad (4.29)$$

A versão adimensional do modelo da viga submetida a um veículo percorrendo sua extensão segundo a teoria de Timoshenko é dada pela equação (4.30).

$$\begin{aligned} &\eta_{\tau\tau} + \lambda\eta_{\tau\tau\tau\tau} - \mu\eta_{\xi\xi\tau\tau} + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} - \beta\eta_{\xi\xi\tau\tau} \\ &= \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) + \mu\Gamma[k_2\eta_v\xi\xi]\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \end{aligned} \quad (4.30)$$

A Figura 4.14 apresenta as respostas dinâmicas adimensionais fornecidas pelas teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e Timoshenko respectivamente. Os resultados adimensionais mostram uma boa precisão em relação à teoria de Euler-Bernoulli adimensional apresentada na Figura 4.12.

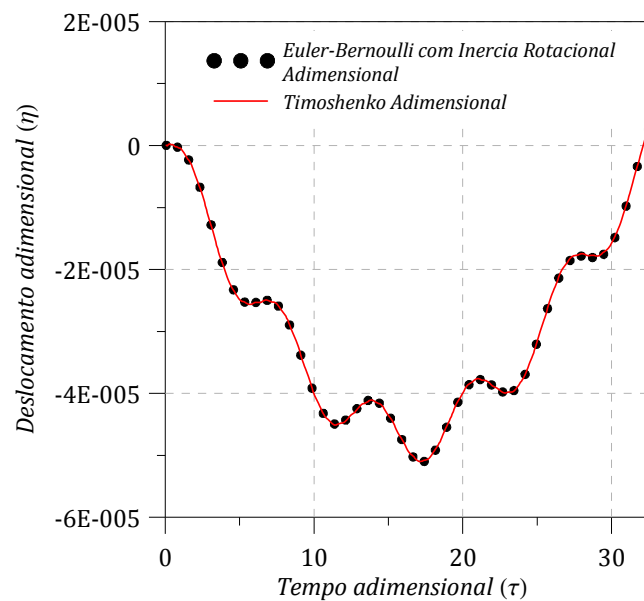


Figura 4.14 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga sob ação de um veículo que percorre toda sua extensão. Teorias de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e Timoshenko.

4.5. VALIDAÇÃO PARA UM VEÍCULO QUE PERCORRE UMA PONTE CONTROLADA POR UM ABSORSOR

Para esta validação a viga é submetida à ação de um veículo que percorre toda sua extensão a uma velocidade constante. Além disso, a viga é controlada por um absorvor discreto linear. O modelo é apresentado na Figura 4.15.

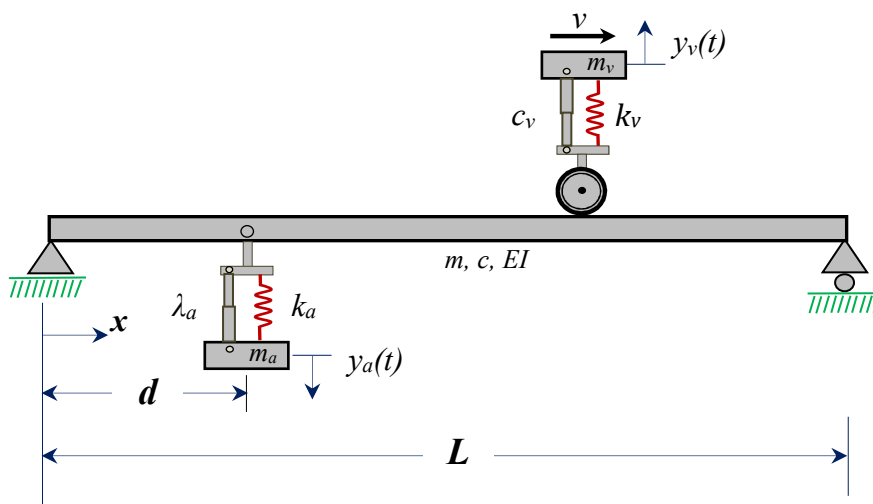


Figura 4.15 – Modelo de viga simplesmente apoiada controlada (modificado de Soares e Del Prado, 2012)

As equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento da viga são dadas pelas equações (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) e (3.52), no caso dimensional e as equações (3.54), (3.55), (3.56), (3.57) e (3.61) no caso adimensional. As equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento do veículo e do absorvor são dadas pelas equações (3.27) e (3.33) no caso dimensional e as equações (3.59) e (3.60) no caso adimensional, respectivamente. As propriedades do modelo são apresentadas na Tabela 4.4 e as frequências naturais para as diferentes teorias são apresentadas na Tabela 4.5, as frequências foram calculadas usando a equação (3.87) para Euler-Bernoulli, equação (3.85) para Euler-Bernoulli com inércia rotacional e a equação (3.83) para Timoshenko, respectivamente.

Tabela 4.4 – Propriedades do modelo – Viga sob ação de um veículo percorrendo sua extensão e controlada por um absorvor.

Propriedades	Nomenclatura	Valor	Unidade
Comprimento da viga	L	25	m
Área da seção transversal da viga	A	2	m^2
Momento de inércia da seção transversal da viga	I	0,12	m^4
Módulo de elasticidade do material da viga	E	27,5	GPa
Massa por unidade de comprimento da viga	m	4800	kg/m
Massa do veículo	m_v	1200	kg
Massa do absorvor	m_a	6000	kg
Frequência natural do veículo	ω_v	20,42	rad/s
Frequência natural do absorvor	ω_a	11,89	rad/s
Velocidade do veículo	v	10	m/s
Razão de amortecimento da viga	ζ	0,03	
Razão de amortecimento do veículo	ζ_v	0,10	
Razão de amortecimento do absorvor	ζ_a	0,18	
Módulo de Poisson da viga	ν	0,3	
Coefficiente de cisalhamento de Timoshenko	k	5/6	

Os parâmetros ótimos do absorvor (frequência, rigidez e amortecimento), foram determinados a partir das expressões fornecidas pelo critério de Den Hartog (1956). Fixando a razão de massas do absorvor e o sistema principal em $\mu = 0.10$, a razão de frequências ótimas é dada por $\alpha_{ótimo} = 0.909$ e a razão de amortecimento ótima é $\zeta_{ótima} = 0.18464$.

Tabela 4.5 – Frequências naturais para o modelo Veículo-Ponte controlada por um absorvor

Teoria de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	13,0935	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	13,0831	-0.08
Timoshenko	13,0680	-0.19

As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam as respostas dinâmicas do sistema no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli linear e não-linear e suas versões dimensional e adimensional respectivamente. Verifica-se pelas Figuras 4.16 e 4.17 que não há diferenças significativas entre as respostas dinâmicas obtidas com as formulações lineares e não lineares.

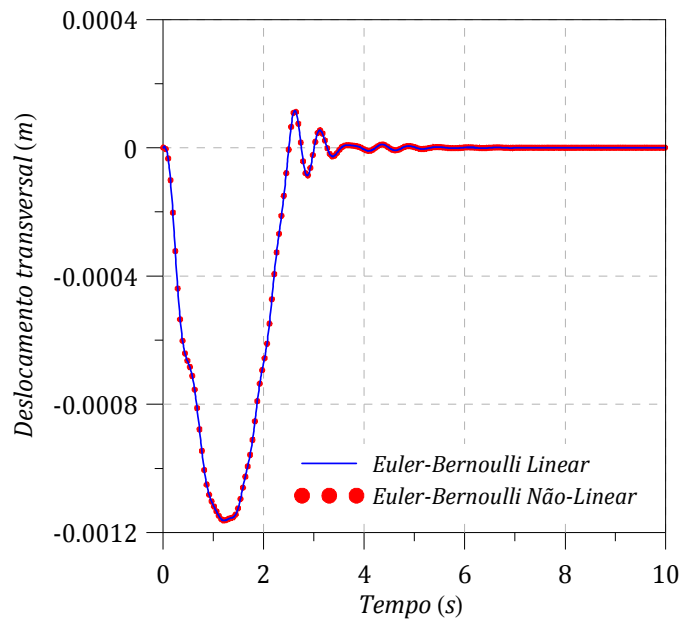


Figura 4.16 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli.

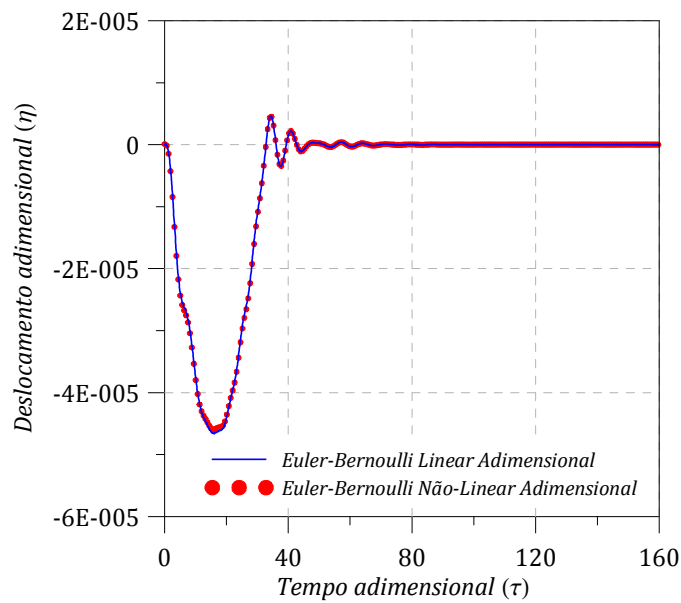


Figura 4.17 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli.

As Figuras 4.18 e 4.19 apresentam as respostas dinâmicas do sistema no meio do vão da viga fornecidos pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional linear e não linear em suas versões dimensional e adimensional, respectivamente. Verifica-se pelas Figuras 4.18 e 4.19 que não há diferenças significativas entre as respostas dinâmicas obtidas com as formulações lineares e não lineares.

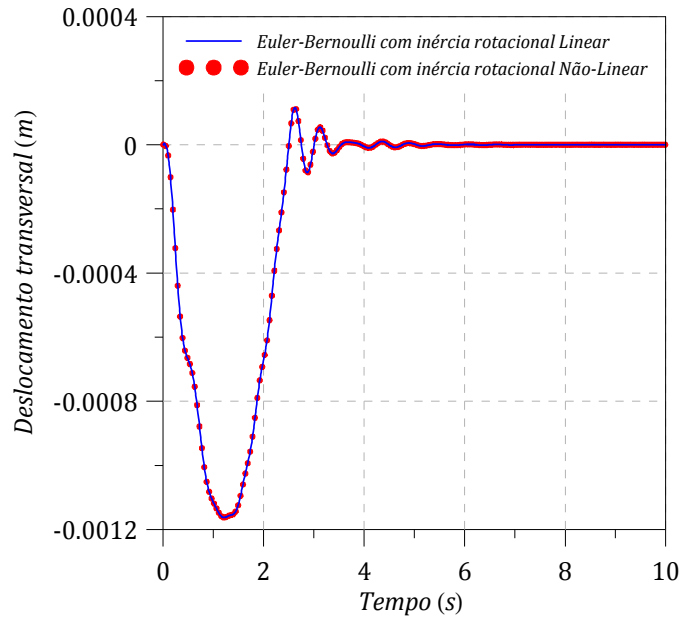


Figura 4.18 – Respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

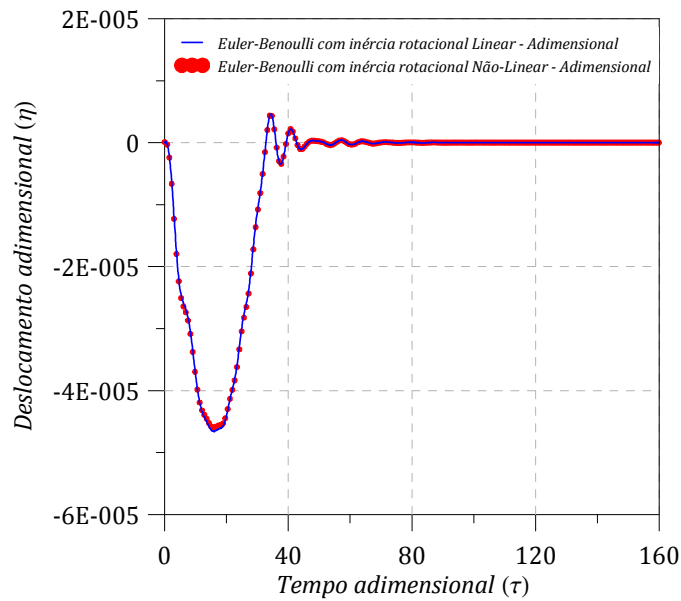


Figura 4.19 – Respostas dinâmicas adimensionais no meio do vão da viga fornecidas pela teoria de Euler-Bernoulli com inércia rotacional.

As Figuras 4.20 e 4.21 apresentam as respostas dinâmicas no meio do vão da viga fornecidas pela teoria da viga de Timoshenko linear e suas versões dimensional e adimensional, respectivamente.

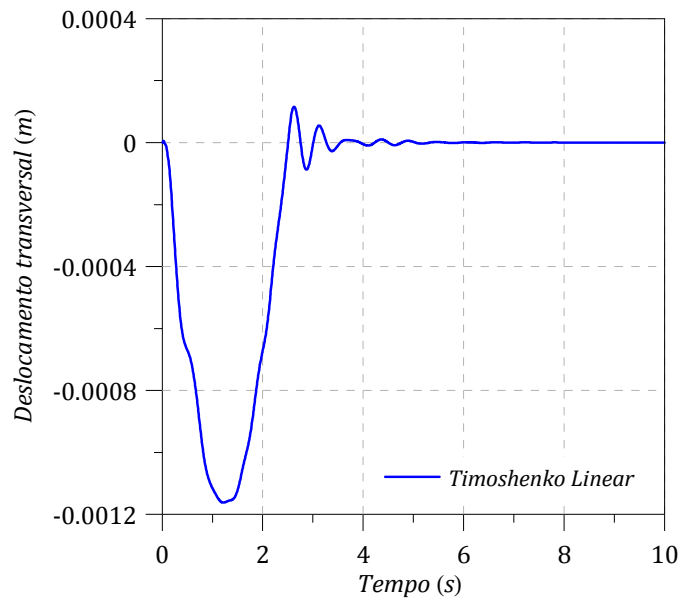


Figura 4.20 – Resposta dinâmica no meio do vão da viga fornecida pela teoria da viga de Timoshenko.

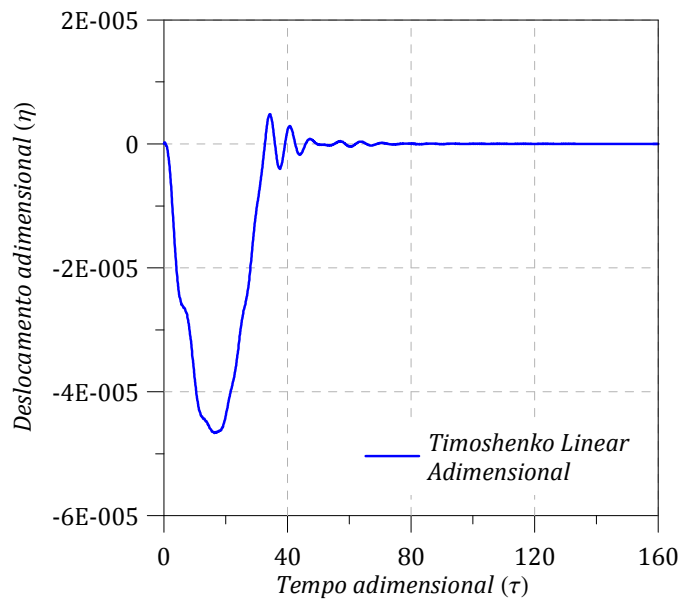


Figura 4.21 – Resposta dinâmica adimensional no meio do vão da viga fornecida pela teoria da viga de Timoshenko.

Como pode ser observado nas Figuras 4.16 a 4.21, as respostas dinâmicas dimensionais e adimensionais da viga são muito similares utilizando as equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento lineares e não lineares. Portanto, nos cálculos da análise paramétrica serão utilizadas as formulações lineares, ou seja, serão utilizados os sistemas de equações diferenciais parciais (EDP) de movimentos lineares.

4.6. ANÁLISE PARAMÉTRICA DO SISTEMA

Neste trabalho foi realizada uma análise paramétrica simples, que consistiu em mudar o comprimento e a altura da seção transversal de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada submetida a um veículo que percorre toda a sua extensão com velocidade constante.

O absorvedor discreto linear será utilizado na viga com a finalidade de diminuir a sua resposta dinâmica devido ao veículo em movimento percorrendo sua extensão. Os parâmetros ótimos do absorvedor (frequência, rigidez e amortecimento), serão determinados a partir das expressões fornecidas pelo critério de Den Hartog (1956). Fixando a razão de massas do absorvedor e o sistema principal em $\mu = 0,10$, a massa sintonizada ótima é $\alpha_{ótima} = 0,909$ e a razão de amortecimento ótima é $\zeta_{ótima} = 0,1678$.

As propriedades do veículo serão as mesmas que no trabalho de Yang *et al* (2004), massa do veículo é $m_v = 1200 \text{ kg}$, o coeficiente de rigidez do veículo é $k_v = 500 \text{ kN/m}$, frequência $\omega_v = 20,42 \text{ rad/seg}$, e razão de amortecimento $\zeta_v = 0.10$, Ferreira (1991).

O módulo de elasticidade da viga é $E = 3,23 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$, módulo de cisalhamento $G = 1,24 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$, coeficiente de Poisson da viga $\nu = 0,30$ e o coeficiente de cisalhamento de Poisson $k = 5/6$ (seção retangular).

Utilizando as equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento, primeiramente obtêm-se as velocidades adimensionais e a seguir a posição ótima do absorvedor e finalmente a resposta no domínio do tempo para a velocidade crítica. O esquema é apresentado na Figura 4.22.

Nesta análise paramétrica primeiramente foram escolhidos os modelos numéricos em função de seus comprimentos e seções transversais baseados em suas frequências naturais correspondentes ao primeiro modo de vibração, calculadas para cada uma das teorias e que são apresentadas na Figura 4.23.

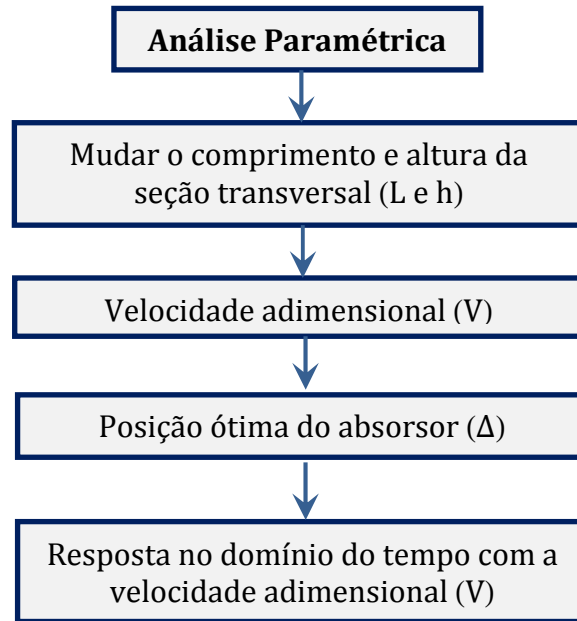


Figura 4.22 – Esquema da análise paramétrica.

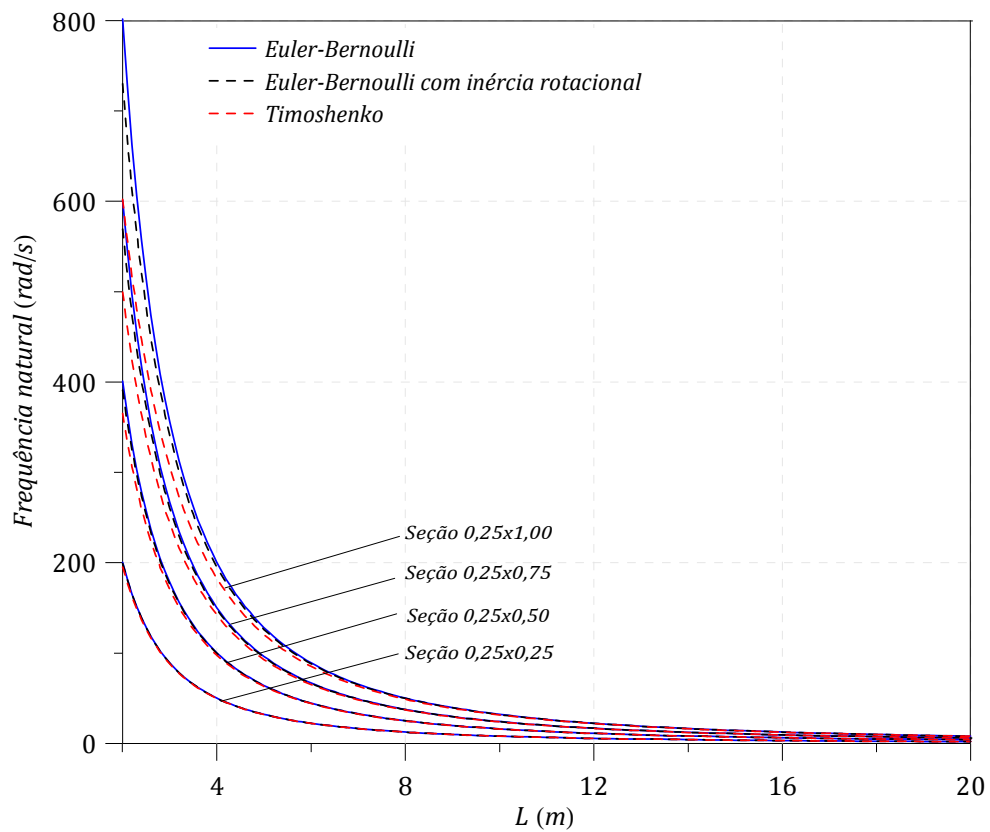


Figura 4.23 – Frequências naturais fornecidas pelas diferentes teorias de vigas versus o comprimento.

- As frequências naturais dadas pela seção transversal $0,25 \times 0,25$ apresentam valores muito próximos, por isso não será utilizada como modelo numérico linear, somente como modelo numérico não linear.
- As frequências naturais dadas pelas seções transversais $0,25 \times 0,50$, $0,25 \times 0,75$ e $0,25 \times 1,00$ apresentam valores adequados para uma análise paramétrica. Os comprimentos foram escolhidos a partir de $L = 5 \text{ m}$. Portanto, estas seções transversais serão utilizadas nos modelos numéricos com comprimentos de $L = 5 \text{ m}$, $L = 10 \text{ m}$ e $L = 20 \text{ m}$.

Os seis primeiros modelos numéricos são lineares e o sétimo modelo numérico é não linear, e são representados pelas dimensões da viga (comprimento, largura e altura), dados abaixo:

- Primeiro modelo numérico ($5,00 \times 0,25 \times 0,50$)
- Segundo modelo numérico ($10,00 \times 0,25 \times 0,50$)
- Terceiro modelo numérico ($5,00 \times 0,25 \times 0,75$)
- Quarto modelo numérico ($10,00 \times 0,25 \times 0,75$)
- Quinto modelo numérico ($10,00 \times 0,25 \times 1,00$)
- Sexto modelo numérico ($20,00 \times 0,25 \times 1,00$)
- Sétimo modelo numérico não linear ($10,00 \times 0,25 \times 0,25$)

4.6.1. Primeiro Modelo Numérico (5,00x0,25x0,50)

No primeiro modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvedor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 5 \text{ m}$, a altura da seção transversal é $h = 0,50 \text{ m}$, momento de inércia $I = 0,0026 \text{ m}^4$, massa por metro linear é dada por $m = 318,55 \text{ kg/m}$ e a massa do absorvedor é $m_a = 159,27 \text{ kg}$. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.24, as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual, são apresentadas na Tabela 4.6 e os parâmetros ótimos do absorvedor são apresentados na Tabela 4.7.

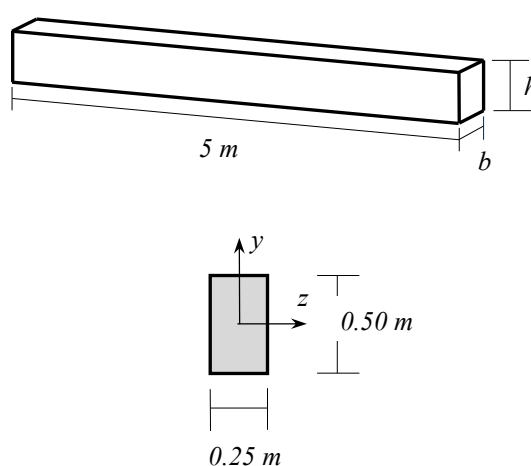


Figura 4.24 – Geometria da viga do primeiro modelo numérico.

Tabela 4.6 – Frequências naturais da viga do primeiro modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	64,1431	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	63,8810	-0,41
Timoshenko	63,0895	-1,64

Tabela 4.7 – Parâmetros do absorvedor calculados com o critério de Den Hartog para o primeiro modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	58,3061	541477,02	3117,61
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	58,0679	537059,88	3104,87
Timoshenko	57,3484	523833,54	3066,40

Como pode ser observado na Figura 4.25, os três modelos controlados (veículo-ponte-absorção), apresentam deslocamentos adimensionais muito próximos. No caso dos modelos sem absorção os deslocamentos adimensionais aumentaram consideravelmente. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 5$. A Tabela 4.8 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

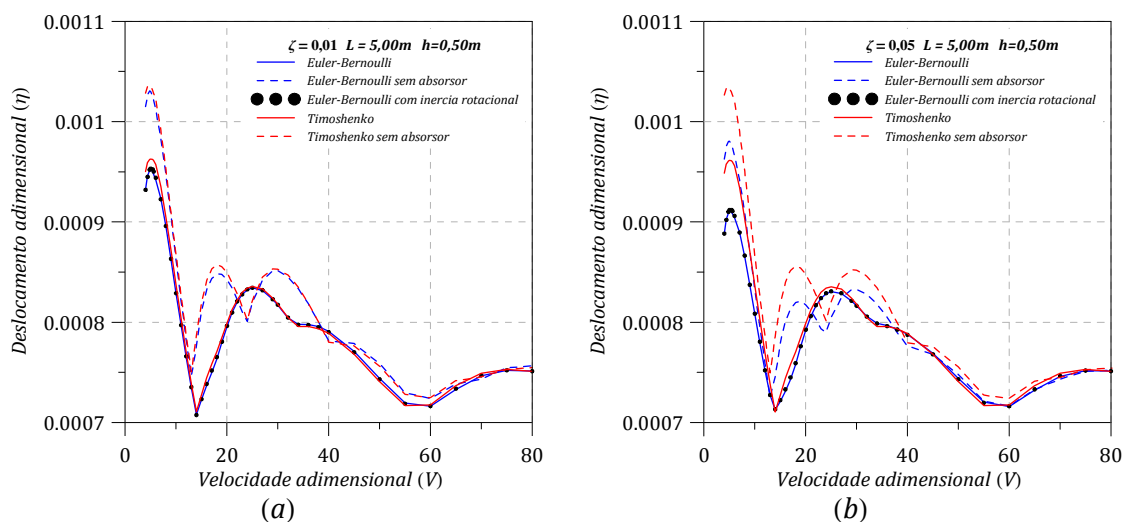


Figura 4.25 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o primeiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.8 – Deslocamentos máximos do primeiro modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,000952	0,000910	4,91
Euler-Bernoulli sem absorção	0,001031	0,000980	4,95
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,000953	0,000912	4,30
Timoshenko	0,000963	0,000961	0,21
Timoshenko sem absorção	0,001035	0,001033	0,19

A posição do absorção foi variada, considerando a velocidade adimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 5$) e os resultados são apresentados na Figura 4.26. A melhor posição do absorção é próxima ao vão central da viga ($\Delta = 0,55$).

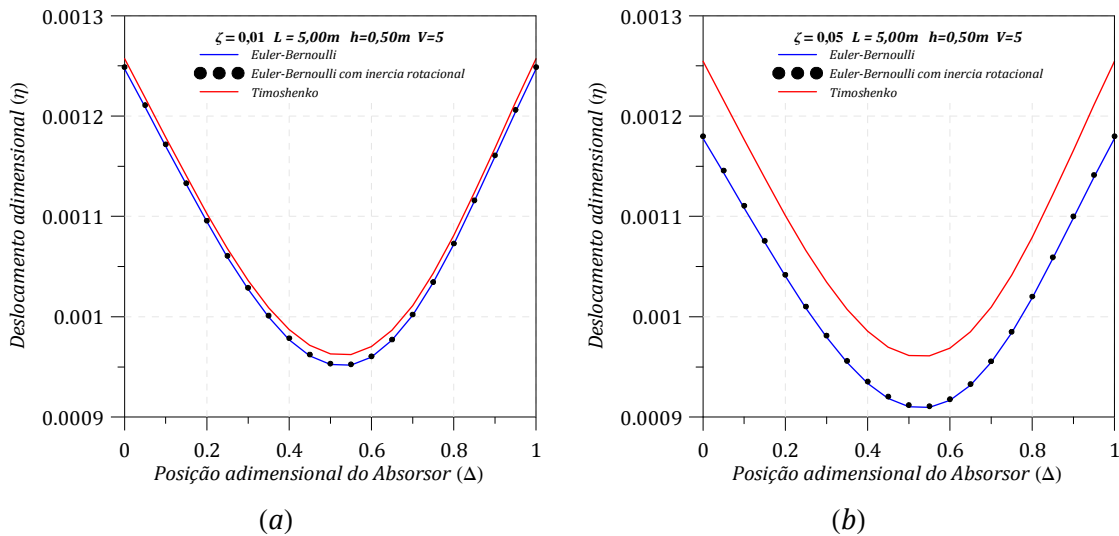


Figura 4.26 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o primeiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

A Figura 4.27 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo do primeiro modelo numérico para as três teorias de vigas desenvolvidas, influenciadas pela razão de amortecimento ($\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$).

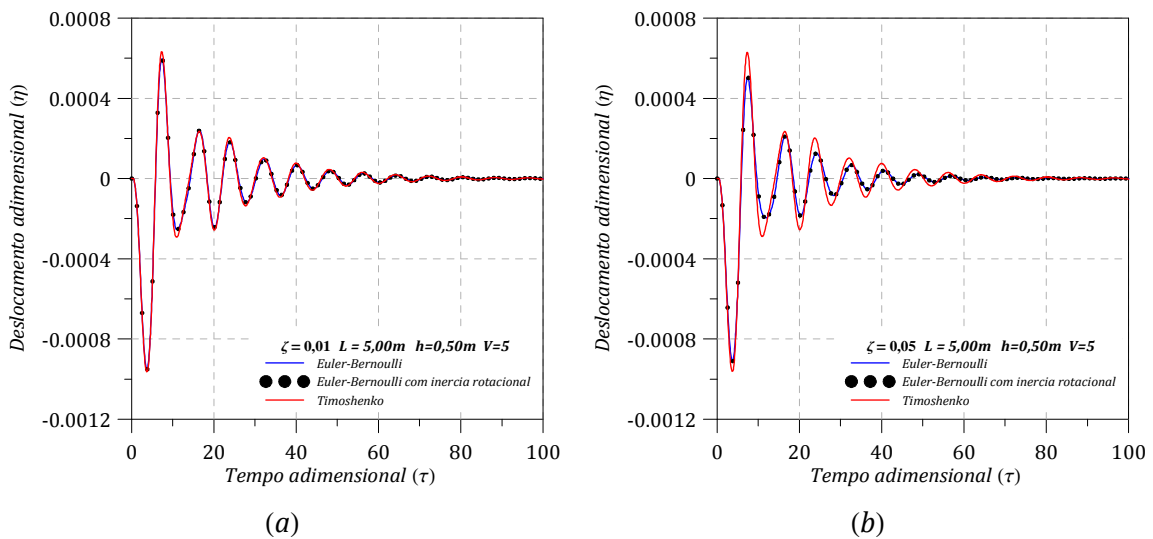


Figura 4.27 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o primeiro modelo numérico para uma velocidade adimensional $V = 5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Neste primeiro modelo numérico a razão altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,10$) tem maior influência para o modelo de Timoshenko pois os deslocamentos adimensionais foram maiores neste modelo em comparação aos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. Além disso, a razão de amortecimento $\zeta = 0.05$ tem mais influência nas teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

A velocidade máxima tem um valor de $V = 5$ (dimensionalmente $v = 64,14$ m/s), e a faixa de velocidades adimensionais nos gráficos da Figura 4.22, tem um valor máximo de $V = 80$ (dimensionalmente $v = 4,00$ m/s), já que para velocidades acima de 80, representariam valores muito baixos de velocidade dimensional. A posição onde se obteve o melhor desempenho do absorvor, projetado com o critério de Den Hartog, foi próximo ao vão central da viga ($\Delta = 0.55$).

4.6.2. Segundo Modelo Numérico (10,00x0,25x0,50)

No segundo modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 10$ m, a altura da seção transversal é $h=0.50$ m, momento de inércia $I = 0.0026$ m⁴, a massa por metro linear é $m = 318.55$ kg/m e a massa do absorvor é $m_a = 318.55$ kg. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.28 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual, são apresentados na Tabela 4.9 e os parâmetros ótimos do absorvor na Tabela 4.10.

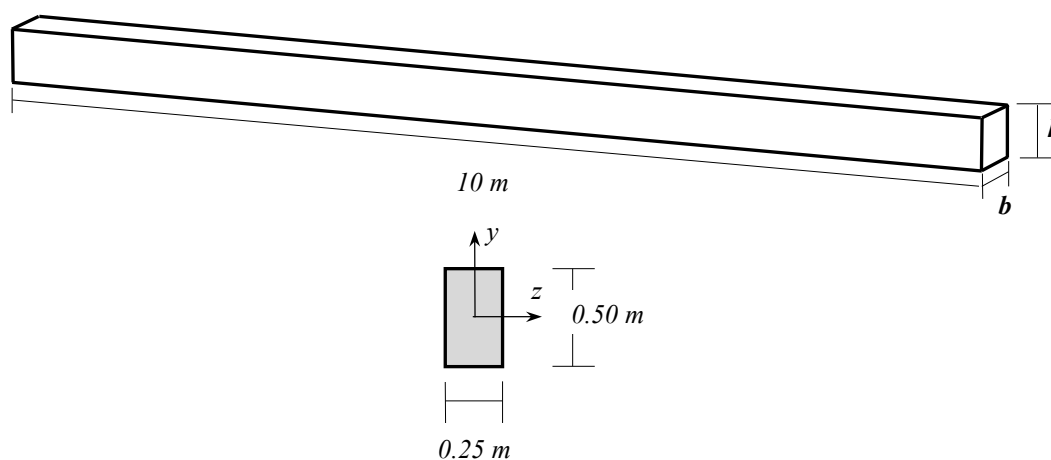


Figura 4.28 – Geometria do segundo modelo numérico.

Tabela 4.9 – Frequências naturais do segundo modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	16,0358	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	16,0193	-0,10
Timoshenko	15,9684	-0,42

Tabela 4.10 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o segundo modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	14,5465	67684,62	1558,81
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	14,5615	67545,74	1557,21
Timoshenko	14,5153	67116,93	1552,26

Como pode ser observado na Figura 4.29, nos modelos apresentam deslocamentos adimensionais são quase iguais, independentemente das razões de amortecimento. No caso dos modelos sem absorvor os deslocamentos são maiores. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 8$. A influência do comprimento ($L = 10\text{ m}$) é um parâmetro muito importante no segundo modelo numérico. A Tabela 4.11 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

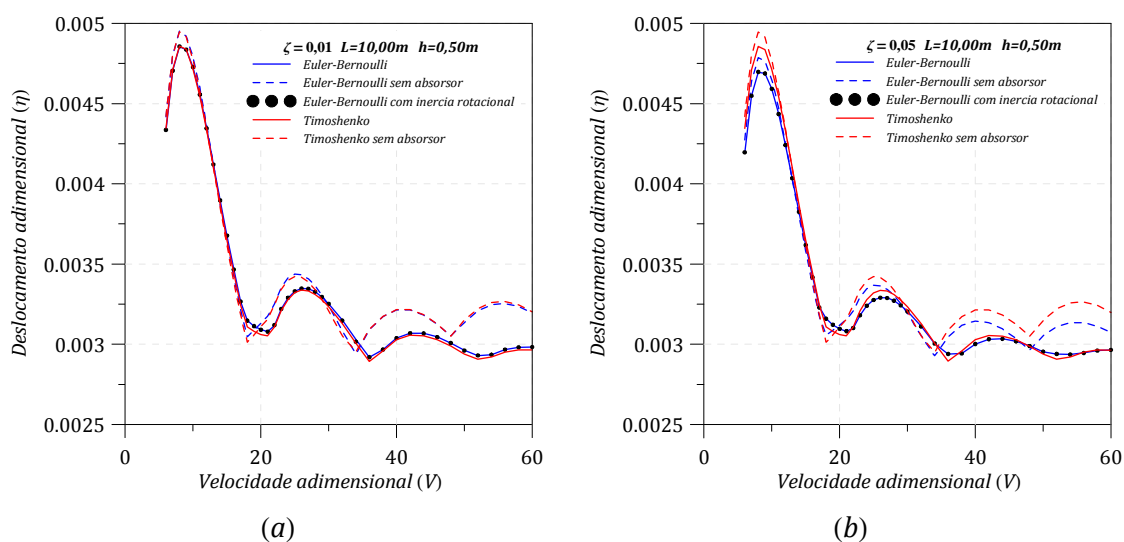


Figura 4.29 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o segundo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.11 – Deslocamentos máximos do segundo modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,004854	0,004695	3,28
Euler-Bernoulli sem absorSOR	0,004952	0,004786	3,35
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,004856	0,004697	3,27
Timoshenko	0,004859	0,004856	0,06
Timoshenko sem absorSOR	0,004948	0,004945	0,06

A posição do absorSOR foi variada, considerando a velocidade dimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 8$) e os resultados são apresentados na Figura 4.30. A melhor posição do absorSOR é no meio do vão da viga ($\Delta = 0,50$). A Figura 4.31 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo dos modelos controlados.

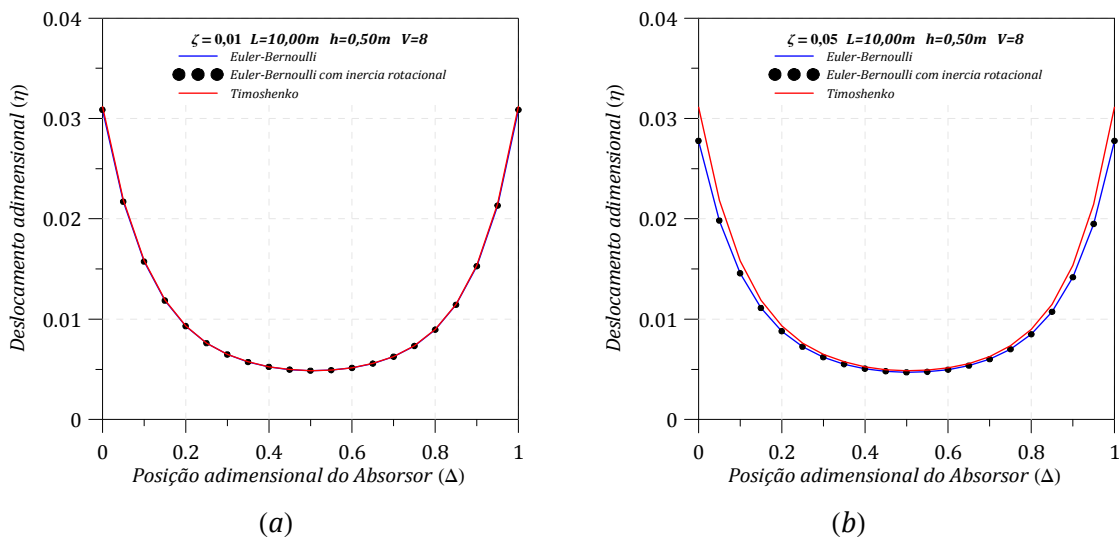


Figura 4.30 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorSOR para o segundo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

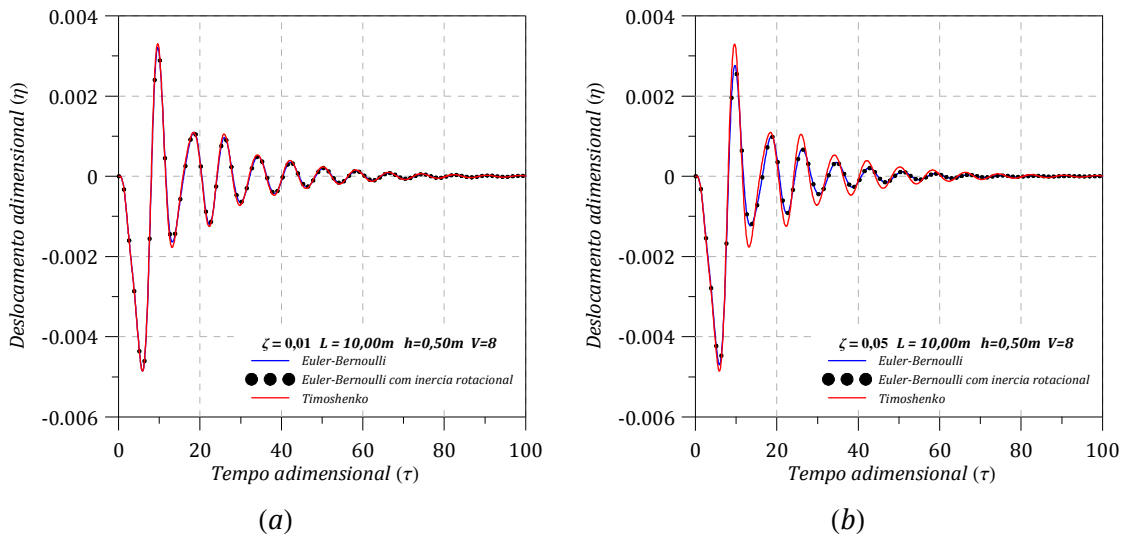


Figura 4.31 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o segundo modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 8$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Neste segundo modelo numérico as três teorias apresentam resultados muito próximos, devido à influência da flexão, já que a razão altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,05$) torna a viga numa viga esbelta, A Figura 4.30 apresenta fielmente a influência da flexão nas teorias na posição do absorvor. Além disso, a razão de amortecimento $\zeta = 0,05$ tem mais influência nas teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional em comparação com o modelo de Timoshenko.

A velocidade máxima tem um valor de $V = 8$ ($v = 20,04$ m/s), a teoria de Timoshenko (com e sem absorvor) apresenta levemente os maiores deslocamentos adimensionais em comparação aos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. A influência das razões de amortecimento ($\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$) é maior nos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. A posição onde se obteve a melhor desempenho do absorvor, projetado com o critério de Den Hartog, foi no meio da viga ($\Delta = 0.50$).

4.6.3. Terceiro Modelo Numérico (5,00x0,25x0,75)

No terceiro modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 5$ m, a altura da seção transversal é $h = 0,75$ m, momento de inércia $I = 0.0087$ m⁴ e a massa por metro linear da viga é $m = 477,82$ kg/m e a massa do absorvor é $m_a = 238,91$ kg. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.32 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes

teorias e sua respectiva diferença percentual, são apresentadas na Tabela 4.12 e os parâmetros ótimos do absorvor na Tabela 4.13.

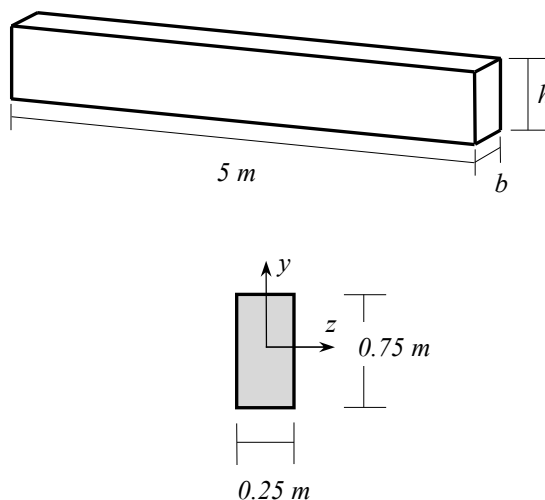


Figura 4.32 – Geometria da viga do terceiro modelo numérico.

Tabela 4.12 – Frequências naturais do terceiro modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	96,2148	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	95,3367	-0,91
Timoshenko	92,7870	-3,56

Tabela 4.13 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o terceiro modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	87,4593	1827484,94	7014,63
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	86,6611	1794280,86	6950,61
Timoshenko	84,3434	1699592,30	6764,72

Como pode ser observado na Figura 4.33, o modelo de Timoshenko apresenta os maiores deslocamentos adimensionais. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 5,5$. A influência da altura da seção transversal ($h = 0,75 \text{ m}$) mostra a importância da teoria de Timoshenko pelo efeito de cisalhamento, além do efeito da flexão e da inércia rotacional. A Tabela 4.14 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

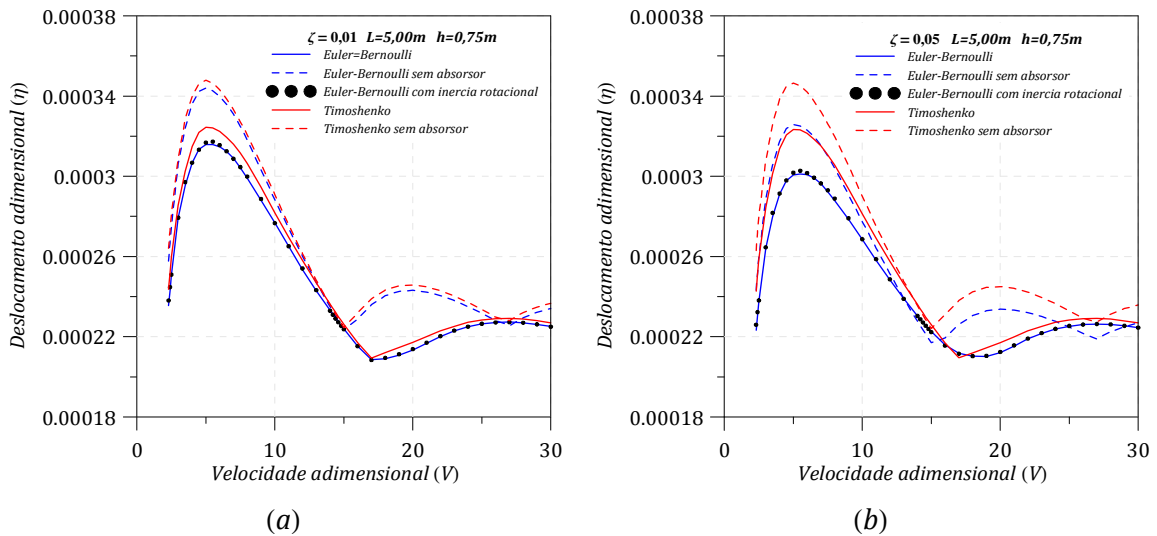


Figura 4.33 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o terceiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.14 - Deslocamentos máximos do terceiro modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,000316	0,000301	4,75
Euler-Bernoulli sem absorber	0,000344	0,000326	5,23
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,000317	0,000303	4,42
Timoshenko	0,000324	0,000323	0,31
Timoshenko sem absorber	0,000348	0,000347	0,29

A posição do absorber foi variada, considerando a velocidade adimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 5,5$), os resultados são apresentados na Figura 4.34. A melhor posição do absorber é perto do meio do vão da viga ($\Delta = 0,55$), para as duas razões de amortecimento. A Figura 4.35 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo dos modelos controlados.

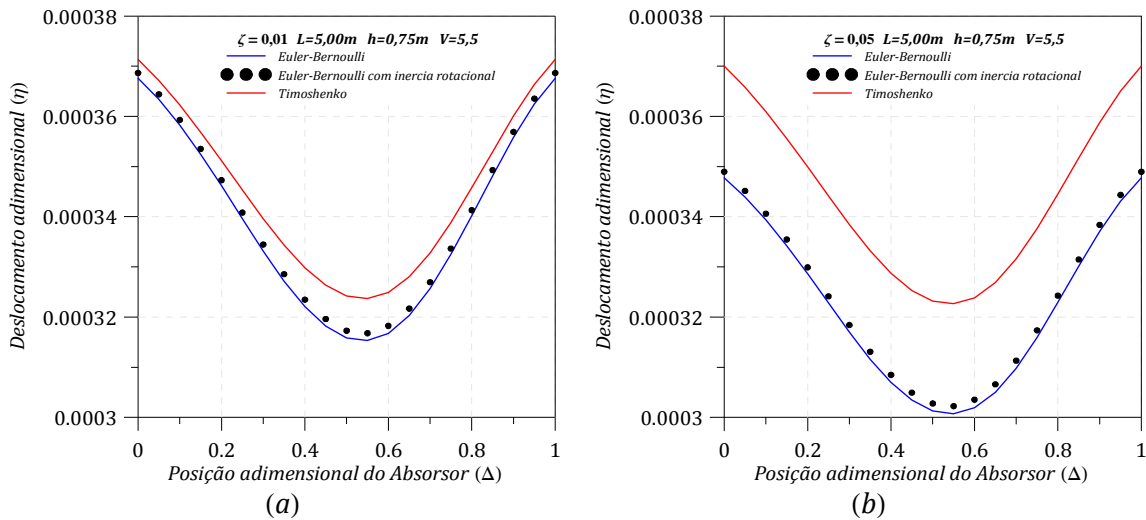


Figura 4.34 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o terceiro modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

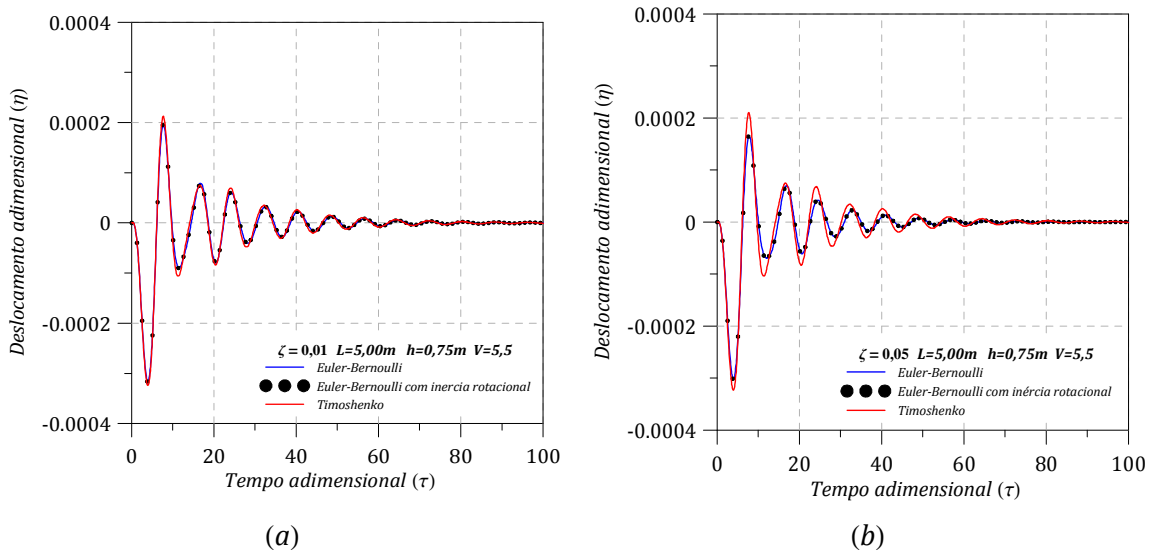


Figura 4.35 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o terceiro modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 5,5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

A melhor representação da teoria de Timoshenko é dado neste terceiro modelo numérico onde a razão altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,15$), tem o maior valor. A Figura 4.34 apresenta fielmente a influência da teoria de Timoshenko na posição do absorvor.

A velocidade máxima tem um valor de $V = 5,5$ ($v = 87,47$ m/s), a teoria de Timoshenko apresenta maiores deslocamentos adimensionais em comparação aos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. A influência das razões de amortecimento ($\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$) é maior nos modelos numéricos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

4.6.4. Quarto Modelo Numérico (10,00x0,25x0,75)

No quarto modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvedor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 10\text{ m}$, a altura da seção transversal é $h = 0,75\text{ m}$, momento de inércia $I = 0,0087\text{ m}^4$, massa por metro linear da viga $m = 477,82\text{ kg/m}$ e a massa do absorvedor $m_a = 477,83\text{ kg}$. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.36 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual são apresentados na Tabela 4.15 e os parâmetros ótimos do absorvedor na Tabela 4.16.

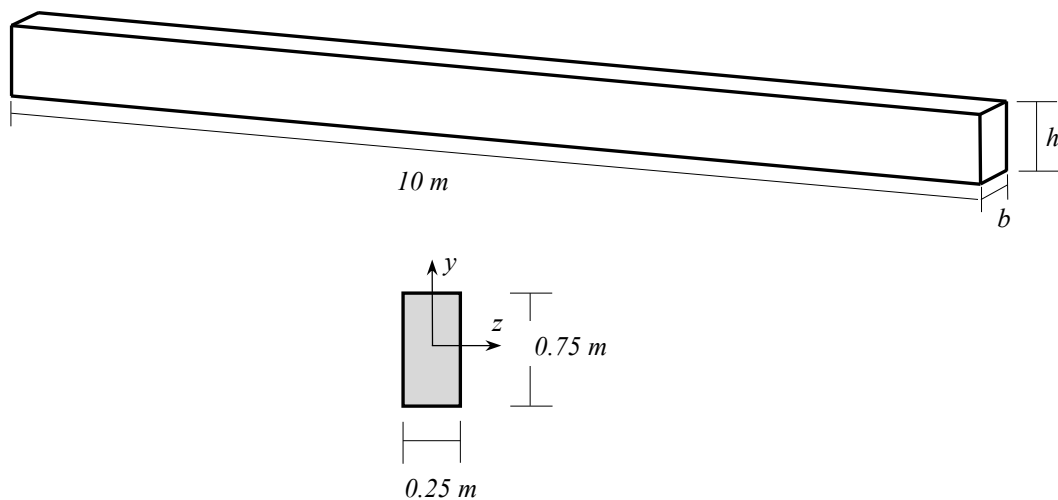


Figura 4.36 – Geometria da viga do quarto modelo numérico.

Tabela 4.15 – Frequências naturais do quarto modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	24,0537	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	23,9982	-0,23
Timoshenko	23,8284	-0,94

Tabela 4.16 – Parâmetros do absorvedor encontrados com o critério de Den Hartog para o quarto modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	21,8648	228435,62	3507,31
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	21,8144	227383,65	3499,23
Timoshenko	21,6601	224177,34	3474,47

Como pode ser observado na Figura 4.37, os três modelos apresentam deslocamentos adimensionais muito próximos. No caso dos modelos sem absorvor os deslocamentos adimensionais diminuem consideravelmente com respeito ao modelo completo. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 12$. A influência do comprimento ($L = 10\text{ m}$) incrementa a importância da teoria de Euler-Bernoulli pela maior grandeza do efeito da flexão neste modelo de viga. A Tabela 4.17 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

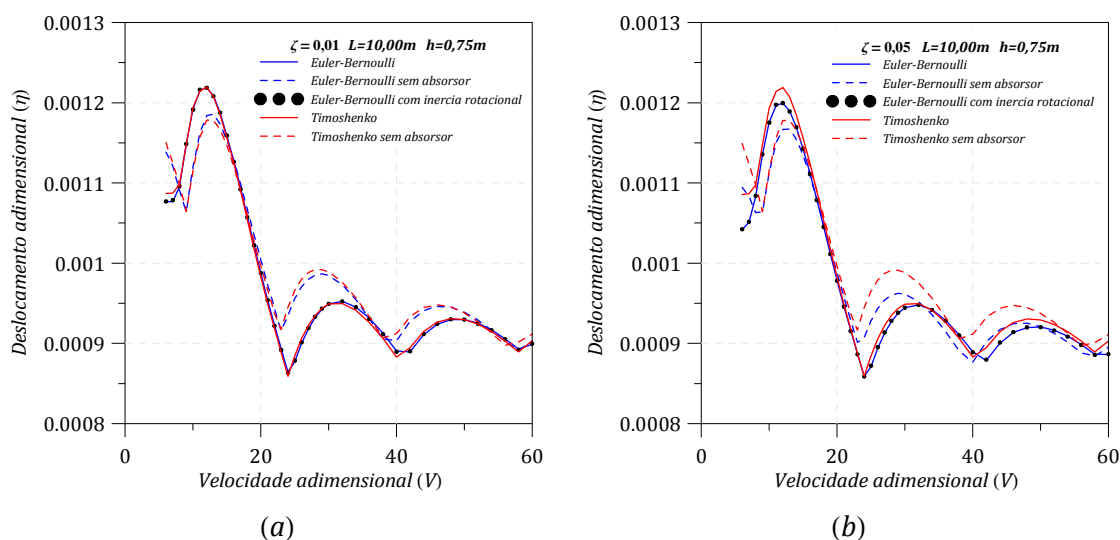


Figura 4.37 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o quarto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.17 – Deslocamentos máximos do quarto modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,001219	0,001199	1,64
Euler-Bernoulli sem absorvor	0,001186	0,001167	1,60
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,001219	0,001199	1,64
Timoshenko	0,001219	0,001219	0,00
Timoshenko sem absorvor	0,001178	0,001178	0,00

A posição do absorvor foi variada, considerando a velocidade adimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 12$) e os resultados são apresentados na Figura 4.38. A melhor posição do absorvor é perto do meio do vão da viga ($\Delta = 0,50$), para as duas razões de amortecimento. A Figura 4.39 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo dos modelos controlados.

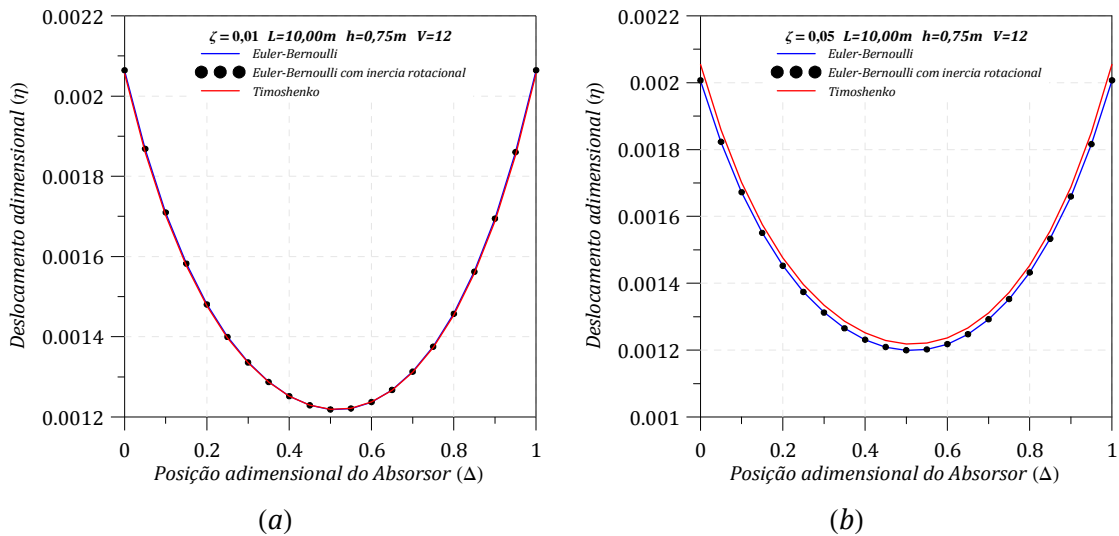


Figura 4.38 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o quarto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

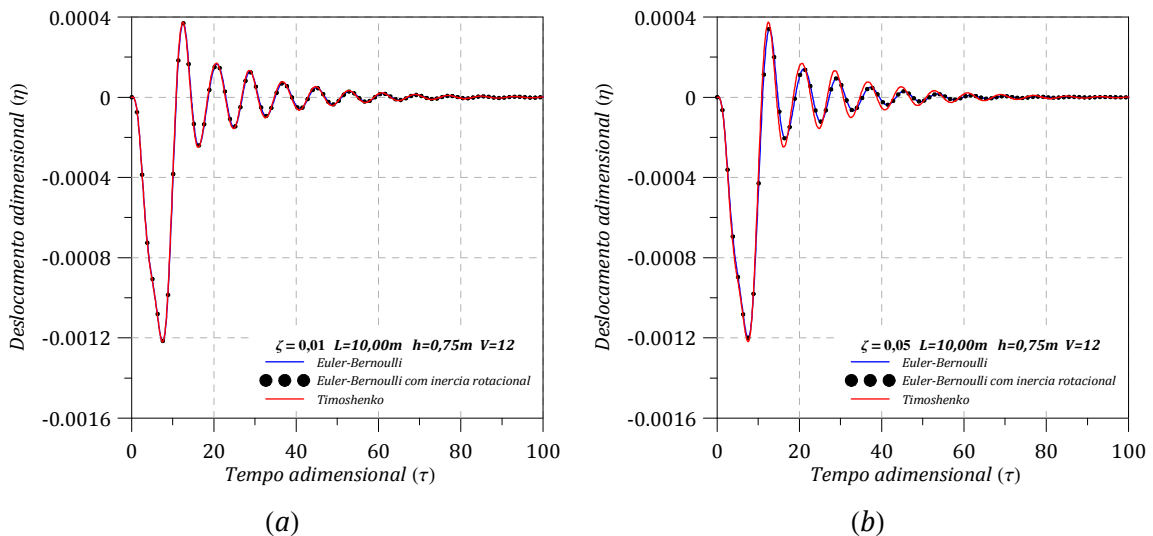


Figura 4.39 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o quarto modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 12$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Neste quarto modelo numérico a razão de altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,075$) torna a viga em uma viga esbelta. Portanto, os modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional apresentam deslocamentos adimensionais mais próximos ao modelo de Timoshenko para uma razão de amortecimento de $\zeta = 0,05$.

A velocidade adimensional máxima tem um valor de $V = 12$ ($v = 20,04$ m/s). A influência das razões de amortecimento ($\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$) é maior nos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

4.6.5. Quinto Modelo Numérico (10,00x0,25x1,00)

No quinto modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvedor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 10\text{ m}$, a altura da seção transversal é $h = 1,00\text{ m}$, momento de inércia $I = 0,0208\text{ m}^4$, a massa por metro linear da viga $m = 637,10\text{ kg/m}$ e a massa do absorvedor $m_a = 637,10\text{ kg}$. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.40 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual são apresentadas na Tabela 4.18 e os parâmetros ótimos do absorvedor na Tabela 4.19.

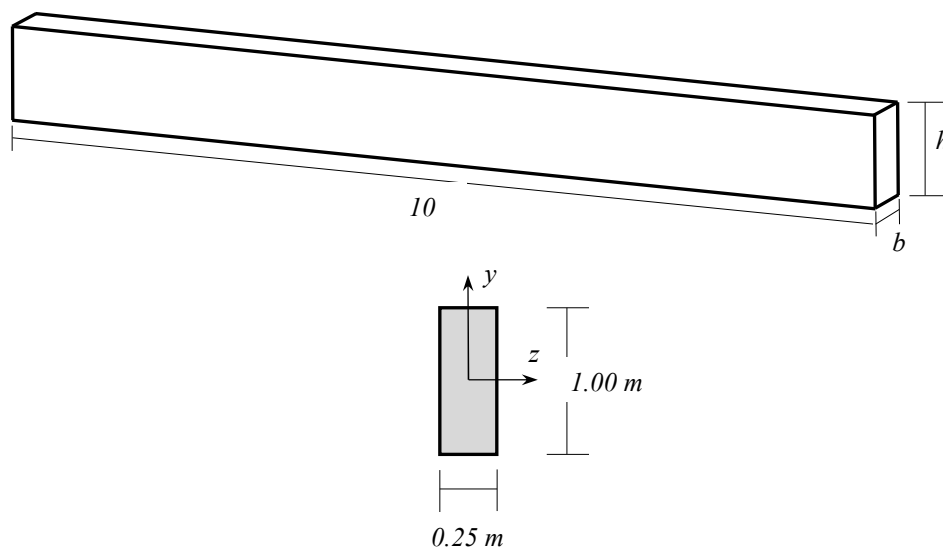


Figura 4.40 – Geometria da viga do quinto modelo numérico.

Tabela 4.18 – Frequências naturais do quinto modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	32,0716	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	31,9405	-0,41
Timoshenko	31,5447	-1,64

Tabela 4.19 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o quinto modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	29,1538	541477,02	6235,22
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	29,0339	537059,88	6209,74
Timoshenko	28,6742	523833,54	6132,80

Como pode ser observado na Figura 4.41, os três modelos completos (veículo-ponte-absorvor), apresentam deslocamentos adimensionais muito próximos no caso da razão de amortecimento $\zeta = 0,01$, no caso da razão de amortecimento $\zeta = 0,05$ teve menor influência na teoria de Timoshenko em comparação com às teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. No caso dos modelos sem absorvor os deslocamentos adimensionais diminuem consideravelmente com respeito ao modelo completo. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 5,5$. A Tabela 4.20 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

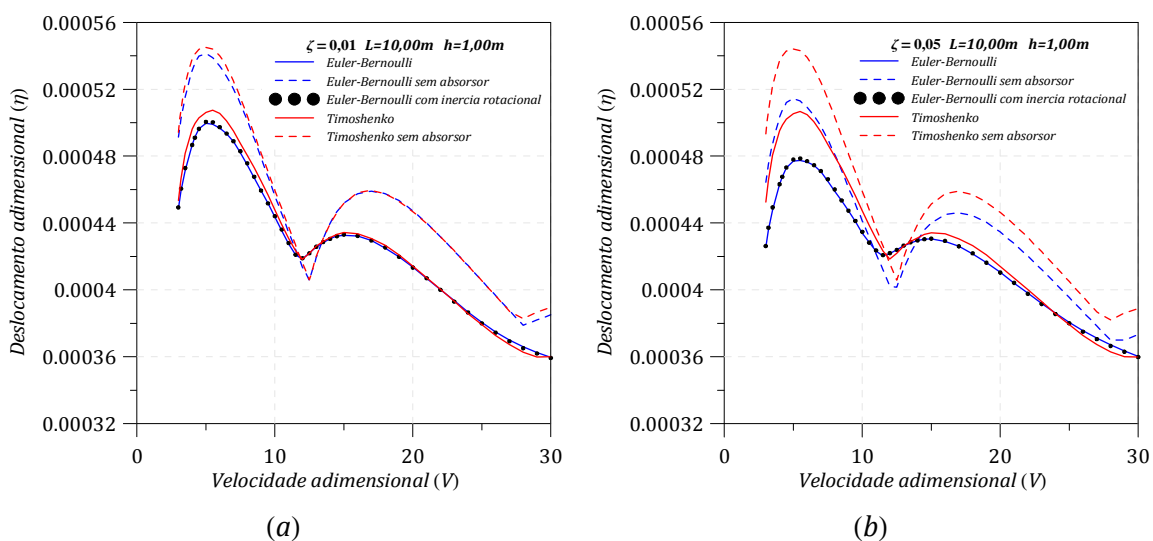


Figura 4.41 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o quinto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.20 – Deslocamentos máximos do quinto modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,000499	0,000477	4,41
Euler-Bernoulli sem absorvor	0,000541	0,000515	4,81
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,000500	0,000479	4,20
Timoshenko	0,000507	0,000507	0,00
Timoshenko sem absorvor	0,000545	0,000544	0,18

A posição do absorvor foi variada, considerando a velocidade adimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 5,5$) e os resultados são apresentados na Figura 4.42. A melhor posição do absorvor é no meio do vão da viga ($\Delta = 0,50$). A Figura 4.43 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo dos modelos controlados.

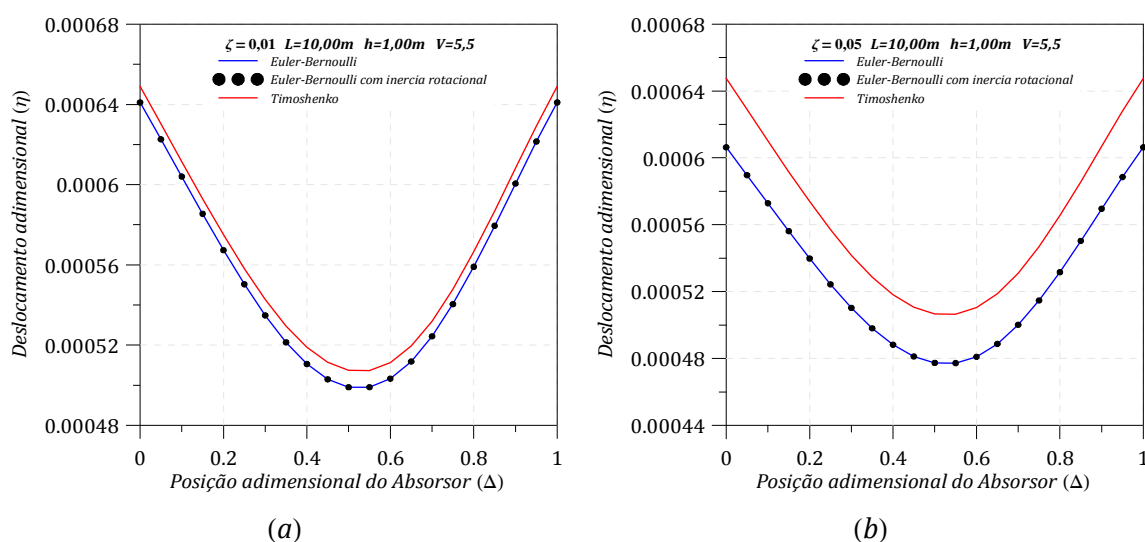


Figura 4.42 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o quinto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

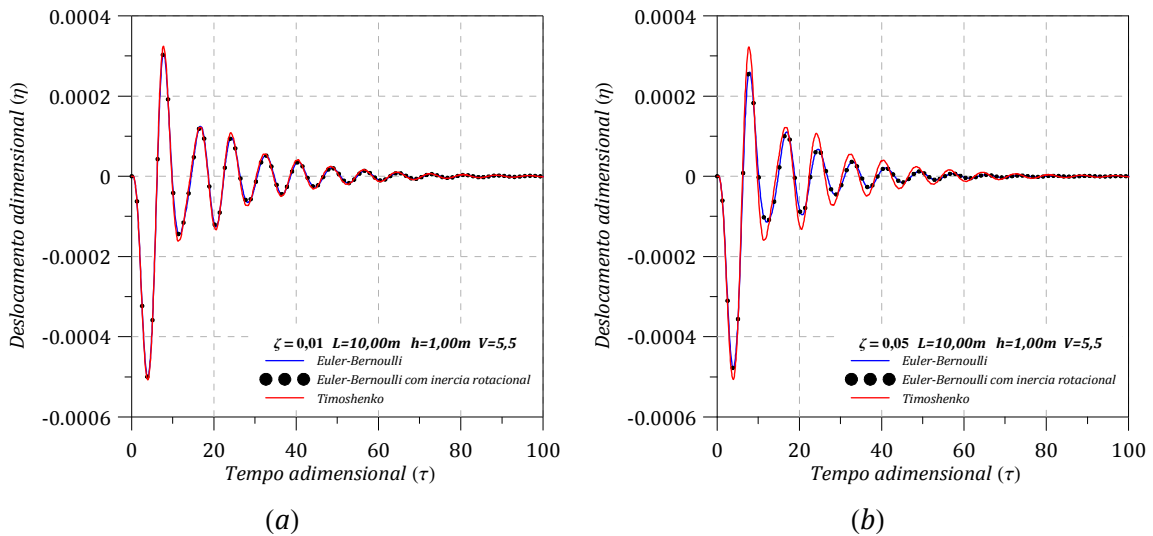


Figura 4.43 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o quinto modelo numérico com uma velocidade adimensional $V = 5,5$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Neste quinto modelo numérico a razão de altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,10$) tem maior influência no modelo de Timoshenko pois os deslocamentos adimensionais foram maiores em comparação aos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional. Além disso, a razão de amortecimento $\zeta = 0,05$ tem mais influência nas teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

A velocidade máxima tem um valor de $V = 5,5$ ($v = 58,31$ m/s), a teoria de Timoshenko apresenta valores muito próximos aos deslocamentos fornecidos pelos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional para o caso da razão de amortecimento $\zeta = 0,01$, e deslocamentos maiores no caso da razão de amortecimento de $\zeta = 0,05$. A influência das razões de amortecimento ($\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$) é maior nos modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

A posição do absorvor foi variada, considerando a velocidade adimensional gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 5,5$) e os resultados são apresentados na Figura 4.39. A melhor posição do absorvor é no meio do vão da viga ($\Delta = 0,50$).

4.6.6. Sexto Modelo Numérico (20,00x0,25x1,00)

No sexto modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 20$ m, a altura da seção transversal é $h = 1,00$ m, momento de inércia $I = 0,0087$ m⁴, a massa por metro linear da viga é $m = 637,10$ kg/m e a massa do absorvor é $m_a = 1274,21$ kg. A geometria da

viga é apresentada na Figura 4.44 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual são apresentadas na Tabela 4.21 e os parâmetros ótimos do absorvor na Tabela 4.22.

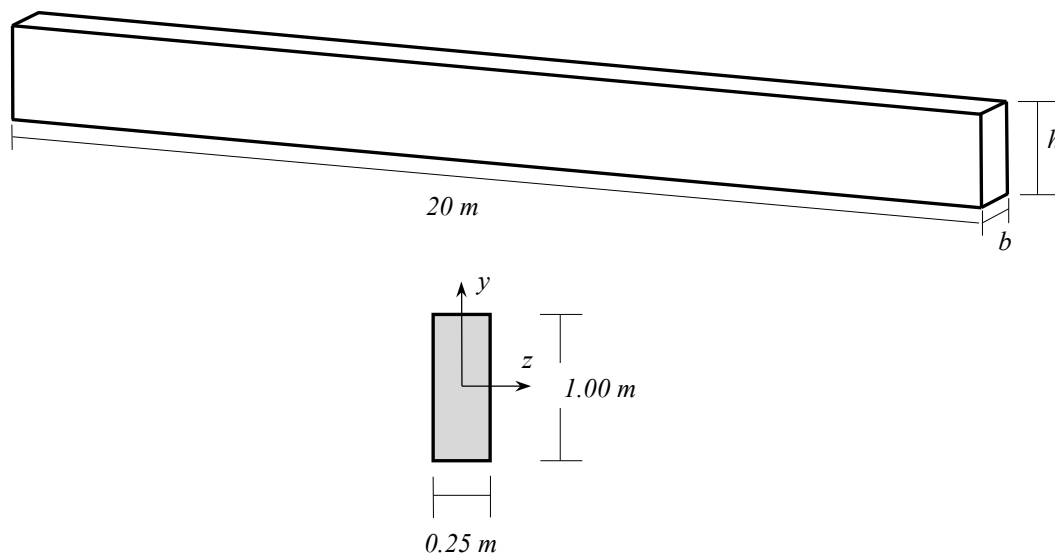


Figura 4.44 – Geometria da viga do sexto modelo numérico.

Tabela 4.21 – Frequências naturais do sexto modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	8,0179	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	8,0097	-0,10
Timoshenko	7,9842	-0,42

Tabela 4.22 – Parâmetros do absorvor encontrados com o critério de Den Hartog para o sexto modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	7,2886	67684,63	3117,61
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	7,2808	67545,74	3114,41
Timoshenko	7,2576	67116,93	3104,51

Como pode ser observado na Figura 4.45, os três modelos apresentam deslocamentos adimensionais mais próximos para uma razão de amortecimento $\zeta = 0,01$, já para uma razão de amortecimento $\zeta = 0,05$, os deslocamentos fornecidos pelo modelo de Timoshenko são

maiores. No caso dos modelos sem absorvedor os deslocamentos adimensionais aumentam em relação ao modelo completo. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 6$. A influência do comprimento ($L = 20\text{ m}$) mostra a importância da teoria de Euler-Bernoulli pelo efeito da flexão na viga, mesmo assim, o modelo de Timoshenko continua apresentando os maiores deslocamentos adimensionais. A Tabela 4.23 apresenta os deslocamentos adimensionais máximos fornecidos pelas diferentes teorias.

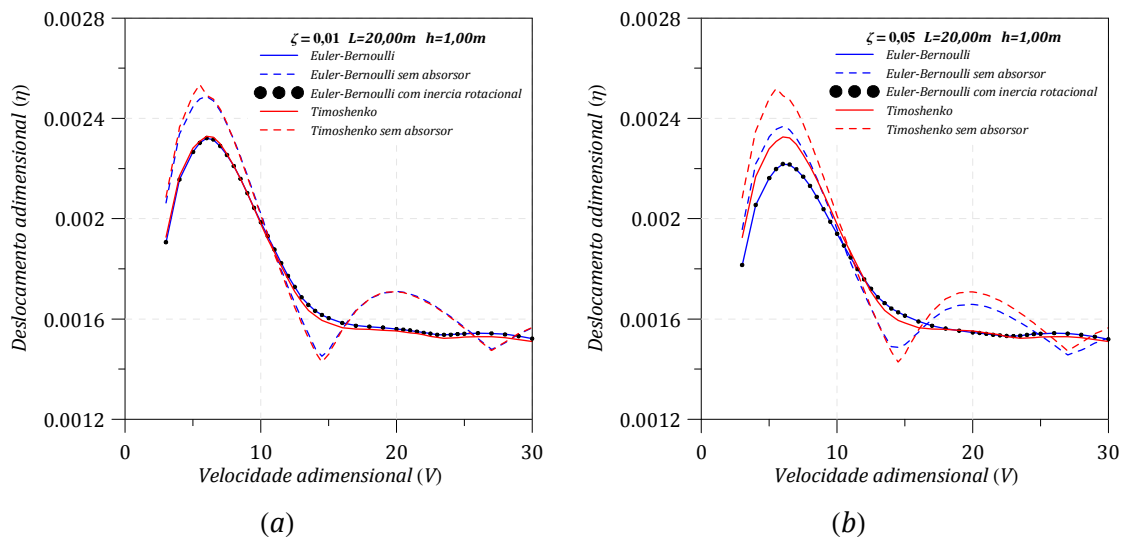
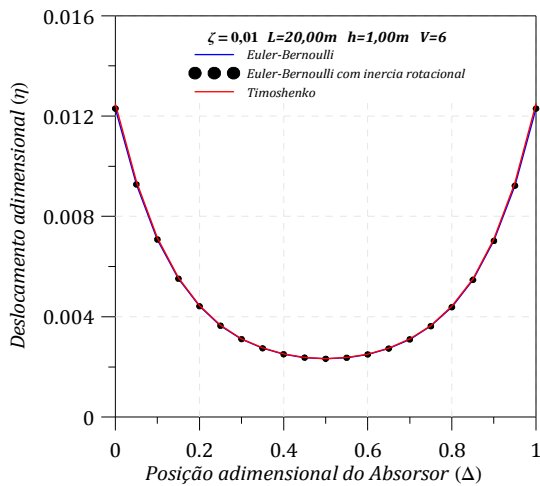


Figura 4.45 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o sexto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

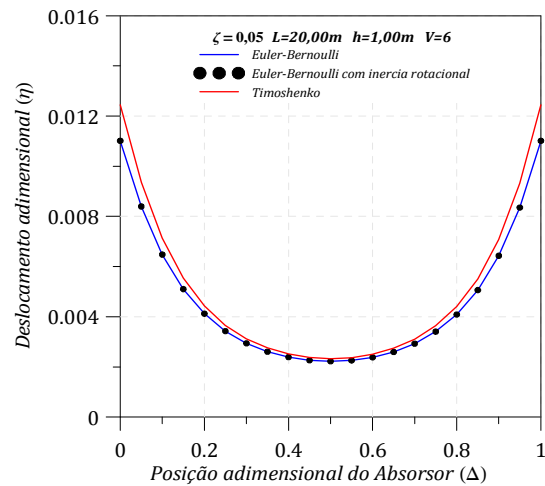
Tabela 4.23 – Deslocamentos máximos do sexto modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0,002321	0,002218	4,44
Euler-Bernoulli sem absorvedor	0,002489	0,002369	4,82
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0,002321	0,002218	4,44
Timoshenko	0,002329	0,002327	0,09
Timoshenko sem absorvedor	0,002492	0,002490	0,08

A posição do absorvedor foi variada, considerando a velocidade adimensional que gera os deslocamentos máximos na viga ($V = 6$) e os resultados são apresentados na Figura 4.46. A melhor posição do absorvedor é no meio do vão da viga ($\Delta = 0,50$). A Figura 4.47 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo dos modelos controlados.

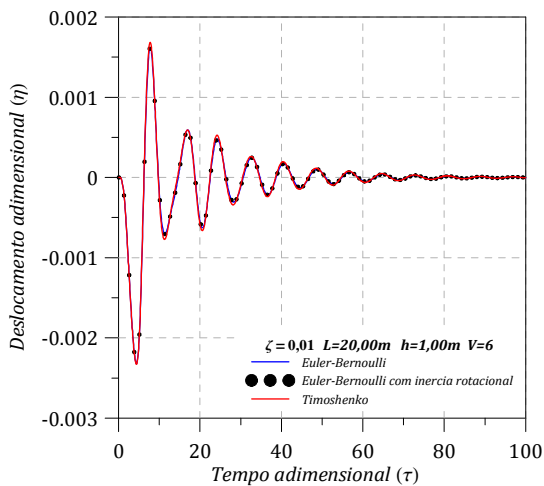


(a)

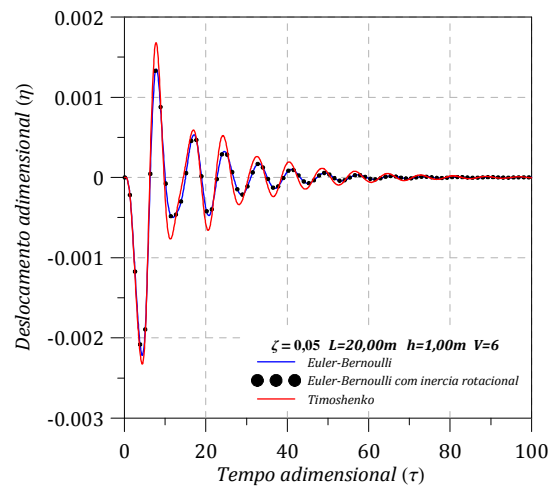


(b)

Figura 4.46 – Máximo deslocamento adimensional da viga com diferentes posições do absorvor para o sexto modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.



(a)



(b)

Figura 4.47 – Respostas dinâmicas no domínio do tempo para o sexto modelo numérico com uma velocidade adimensional crítica $V = 6$. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Neste sexto modelo numérico a razão altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,05$) tem maior influência para os modelos de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional já que torna a viga em uma viga esbelta. Além disso, a razão de amortecimento $\zeta = 0,05$ tem mais influência nas teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional.

4.6.7. Sétimo Modelo Numérico Não linear (10,00x0,25x0,25)

No sétimo modelo numérico a viga simplesmente apoiada submetida à ação de um veículo em movimento e controlada por um absorvedor (Figura 4.15), tem um comprimento $L = 10\text{ m}$, a altura da seção transversal é $h = 0,25\text{ m}$, momento de inércia $I = 0,0003\text{ m}^4$, a massa por metro linear da viga é $m = 159,27\text{ kg/m}$ e a massa do absorvedor é $m_a = 159,28\text{ kg}$. A geometria da viga é apresentada na Figura 4.48 e as frequências naturais calculadas pelas diferentes teorias e sua respectiva diferença percentual são apresentadas na Tabela 4.24 e os parâmetros ótimos do absorvedor na Tabela 4.25.

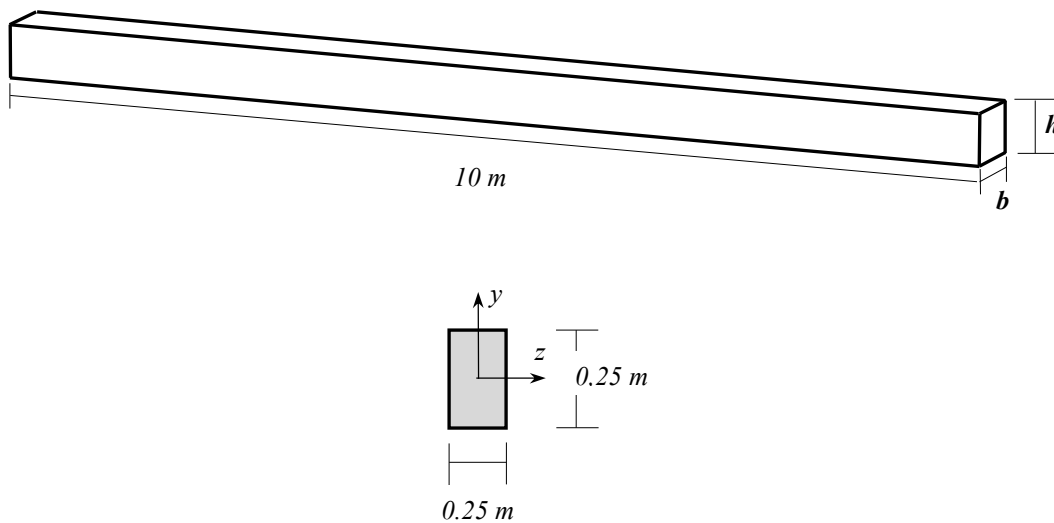


Figura 4.48 – Geometria da viga do sétimo modelo numérico.

Tabela 4.24 – Frequências naturais do sétimo modelo numérico.

Modelo de viga	Frequência Natural (rad/seg)	Diferença (%)
Euler-Bernoulli	8,0190	-----
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	8,0158	-0,04

Tabela 4.25 – Parâmetros do absorvedor encontrados com o critério de Den Hartog para o sétimo modelo numérico.

Teoria de viga	Frequência (ω_a) (rad/seg)	Rigidez (k_a) (N/m)	Amortecimento (λ_a) (N.s/m)
Euler-Bernoulli	7,2882	8460,58	389,70
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	7,2864	8456,23	389,60

Apresenta-se na Figura 4.49, as velocidades adimensionais dos modelos lineares e não lineares de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional para razões de amortecimento $\zeta = 0,01$ e $\zeta = 0,05$. Os deslocamentos fornecidos pelas formulações lineares apresentam maiores deslocamentos em comparação às formulações não lineares. O deslocamento máximo ocorre para uma velocidade adimensional $V = 12,5$.

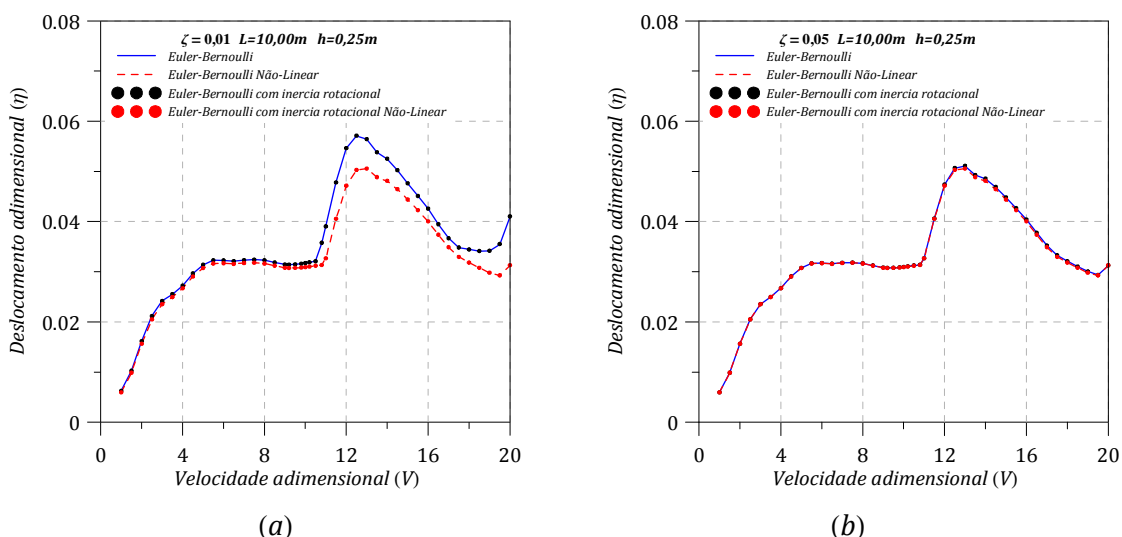


Figura 4.49 – Deslocamento adimensional máximo (η) no meio do vão da viga versus velocidade adimensional (V), para o sétimo modelo numérico. (a) $\zeta = 0,01$, (b) $\zeta = 0,05$.

Tabela 4.26 – Deslocamentos máximos do sétimo modelo numérico.

Teoria de viga	Deslocamento adimensional máximo (η)		Diferença (%)
	$\zeta = 0,01$	$\zeta = 0,05$	
Euler-Bernoulli	0.057079	0.050639	9,49
Euler-Bernoulli Não-Linear	0.050253	0,050555	-0.06
Euler-Bernoulli com inércia rotacional	0.057145	0.050695	9,48
Euler-Bernoulli com inércia rotacional Não-Linear	0.050307	0.050307	0.00

Para este modelo numérico a análise não linear apresentou resultados menores que os obtidos com o linear. Assim, para este caso não seria necessário levar em conta a análise não linear.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1. CONCLUSÕES

No presente trabalho, se desenvolveu uma análise paramétrica de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada, controlada por um absorvedor discreto linear, submetida a um veículo que a percorre com velocidade constante por toda a sua extensão.

As propriedades geométricas da viga foram modificadas para cada modelo numérico. Os resultados numéricos foram obtidos com o auxílio do programa MAPLE 15 para a discretização das equações diferenciais parciais (EDPs) de movimento e um código computacional em C++ para obter as respostas dinâmicas no domínio do tempo pelo método de Runge-Kutta. A principal finalidade desta análise paramétrica foi determinar a influência dos parâmetros geométricos de uma viga analisada com as principais teorias de vibrações em vigas. Além disso, verificar a diminuição das vibrações excessivas no controle da resposta dinâmica da estrutura.

As vigas utilizadas nesta análise paramétrica eram vigas que possuíam uma seção retangular onde a largura de $0,25\text{ m}$ foi fixada e os parâmetros variáveis foram o comprimento (L) e altura (h). As dimensões destes parâmetros foram variadas com a finalidade de apreciar os efeitos de flexão, inércia rotacional e cisalhamento fornecidos pelas teorias de vigas desenvolvidas no presente trabalho.

Deste modo, as seguintes conclusões gerais podem ser extraídas do presente trabalho:

- ❖ As maiores respostas do sistema foram obtidas com os modelos numéricos fornecidos pela teoria de Timoshenko, que contempla o efeito do cisalhamento, da flexão e da inércia rotacional. Concluiu-se que a posição ótima do absorvedor localiza-se próxima ao vão central da viga (mas não necessariamente no meio), para todos os modelos numéricos.
- ❖ A maior influência do efeito do cisalhamento pode ser vista no terceiro modelo numérico onde a razão altura da seção transversal/comprimento ($h/L = 0,15$), torna a viga numa viga curta, desta maneira reduz significativamente a resposta dinâmica do terceiro modelo numérico.

- ❖ A maior influência do efeito da flexão pode ser vista no segundo modelo numérico onde a razão altura da secção transversal/comprimento ($h/L = 0,05$), torna a viga numa viga esbelta. Neste modelo os resultados das diferentes teorias são muito próximos.
- ❖ As teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional tem praticamente os mesmos resultados em todos os modelos lineares e não lineares. A importância da inércia rotacional não foi muito relevante para os modelos desenvolvidos neste trabalho.
- ❖ A análise paramétrica realizada, mostrou que foi possível encontrar os parâmetros satisfatórios (h/L), que depois de um estudo experimental adequado poderiam ser empregados nas análises de vibrações em pontes.
- ❖ Os modelos numéricos sem absorvedor (veículo-ponte) são baseados nas teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko e foram representados nos gráficos adimensionais de deslocamento versus velocidade para fazer uma comparação com os modelos completos (veículo-ponte-absorvedor), das mesmas teorias.
- ❖ A metodologia desenvolvida pelo método de Galerkin foi utilizada para discretizar as equações de equilíbrio dinâmico e permitiu representar os deslocamentos com boa precisão quando a viga é submetida a cargas em movimento ao longo de seu comprimento. O emprego de métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais facilita enormemente a obtenção de resultados, além disso, estes resultados têm boa precisão em comparação com os resultados analíticos fornecidos pela literatura.
- ❖ Os parâmetros ótimos do absorvedor (frequência, rigidez e amortecimento), foram calculados pelo critério de Den Hartog (1956) para cada uma das teorias de vigas para os diferentes modelos numéricos desenvolvidos neste trabalho. A não seleção adequada desses parâmetros resultaria em respostas dinâmicas inadequadas.
- ❖ Tal como pode ser verificado no modelo do problema, existem várias possibilidades para configurar o veículo modelo, a partir de uma carga simples percorrendo uma ponte, bem como modelos mais ou menos complexos.

- ❖ A análise mostrou que as razões de amortecimento nos modelos numéricos tiveram menor influência para a teoria de Timoshenko. Já no caso das teorias de Euler-Bernoulli com e sem inércia rotacional as razões de amortecimento foram mais relevantes.

5.2. SUGESTÕES

São sugeridos a seguir alguns tópicos importantes que poderão complementar a pesquisa realizada nesta dissertação:

- Realizar um estudo experimental com o objetivo de comparar os resultados numéricos obtidos neste trabalho com os valores experimentais e, além disso, possibilitar calibrar o modelo teórico com base nestes resultados experimentais.
- Desenvolver uma análise paramétrica mais complexa, para o caso de vigas, que permita modificar os coeficientes de amortecimento e de rigidez utilizados no absorvedor discreto linear.
- Estudar outras configurações de vigas.
- Desenvolver uma aplicação computacional que mediante um processo iterativo permita selecionar os parâmetros ótimos do absorvedor discreto linear, no caso de vigas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Atica, E., Costa J. (2006). O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Ali S. e Padhi R., (2009). Active vibration suppression of non-linear beams using optimal dynamic inversion. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, Vol. 223, pp. 657-672.
- Awrejcewicz J., Saltykova O.A., Chebotyrevskiy Yu. B., Krysko V.A., (2011). Nonlinear vibrations of the Euler-Bernoulli beam subjected to transversal load and impact actions. Journal Nonlinear Studies, Vol. 18, pp. 329-364.
- Barbosa, R. S. (1999). Desenvolvimento de algoritmo e implementação computacional para a análise dinâmica de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura. Tese de doutorado, 296. São Carlos, São Paulo, Brasil: EESC/USP.
- Barbero, J. D. (2001). Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia. Tesis doctoral, 293. Madrid, Spain: Universidad Politécnica de Madrid.
- Cavalcante, E. L. (2010). Implementação computacional para análise dinâmica plana e espacial de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura. Dissertação, 121. Belém, Pará, Brasil: UFPa.
- Cowper G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Journal of Applied Mechanics (1966), pp. 335-340.
- Davies M. R. The frequency of transverse vibration of a loaded fixed-free bar III. The Effect of rotatory inertia of de bar. Philosophical Magazine (1937), 563.
- Da Silva E., Del Prado Z. J. G. N. (2012). Controle de vibrações de pontes sujeitas a cargas dinâmicas utilizando amortecedor móvel. Universidade Federal de Goiás.
- Den Hartog, J. P. (1956). Mechanical Vibrations. McGraw-Hill.
- Dym Shames, (1973). Solid mechanics a variational approach. McGraw-Hill.

- Ferreira, K. I. I., 1991. Avaliação do critério para cálculo dos efeitos das cargas móveis em pontes rodoviárias. Tese de doutorado, Pontifícia universidade Católica de Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.
- Greco, A., Santini, A. (2002). Dynamic response of a flexural non-classically damped continuous beam under moving loadings. *Computers and Structures*, Vol. 80, pp. 1945–1953.
- Han, S. M., and Benaroya, H. (1999). Dynamic of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 225, No. 5, pp. 935-988.
- Junior C. (2012). Análise dinâmica de torres de energia eólica. Dissertação, Universidade de Brasília. Brasília.
- Kwon H., Kim M., Lee I., (1998). Vibrations of control of bridges under moving loads. *Computer and Structures*. Vol. 66, pp. 473-480.
- Meirovitch, L. (1967). *Analytical Method in Vibration*. MacMillan Publishing Co.
- Mindlin R. D. and Deresiewicz H. *Proceeding of 2nd U.S. National Congress of Applied Mechanics* (1954), 175-178 New York: ASME.
- Montoya, R. C. (2009). Desenvolvimento de algoritmo e implementação computacional para a análise dinâmica de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura. Dissertação. Belém, Pará, Brasil: UFPa.
- Museros, P., Martinez-Rodrigo, M. D. (2007). Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, pp. 292–315.
- Ladislav Fryba, (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads*, Noordhoff International Publishing, Groningen, 309-324.
- Lara, L. A. (2007). Controle de Vibrações em Vigas Metálicas com Distintas Configurações de Apoio Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados. Dissertação de Mestrado. Brasília, DF, Brasil: UnB.

- Orlando, D. (2006). Absorber pendular para controle de vibrações de torres esbeltas. Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.
- Païdoussis, M. Fluid-structure interactions. San Diego, CA: Academic Press, 1998.
- Singiresu S. Rao. (2007). Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons.
- Silva D. (2012). Programa computacional para análise dinâmica da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias. Dissertação, Universidade de Brasília. Brasília.
- Samani, F.A., Pellicano, F. (2009). Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers. *Journal Sound and Vibration*, Vol. 325, pp. 742-754.
- Samani, F.A., Pellicano, F. (2012). Vibration reduction on beams under successive traveling loads by means of linear and nonlinear dynamic absorbers. *Journal Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 2272-2290.
- Soares, R., Del Prado Z. J. G. N. (2012). On the vibration control of bridges subjected to loads. XXXII CILAMCE, Ouro Preto, 2012.
- Spence G. B. e Seldin E. J. (1970). Sonic resonance of a bar compound torsion oscillator. *Journal of Applied Physics*, pp. 3383-3389.
- Stephen N. G. 1978 *ASME Journal of Applied Mechanics* 45, 695-697. On the variation of Timoshenko's shear coefficient with frequency.
- Soong, T. T. e Dargush G. T. (1997). Passive energy dissipation system in structural engineering. Chichester: John Wiley & Sons.
- Thompson, D. J. (2008). A continuous damped vibration absorber to reduce broad-band wave propagation in beams. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, pp. 824-842.
- Wu, J. J. (2006). Study on the inertia effect of helical spring of the absorber on suppressing the dynamic responses of a beam subjected to a moving load. *Journal Sound and Vibration*, Vol. 297, pp. 981-999.
- Yang, Y. B., Yau, J. D., Hsu L. C. (1997). Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 11, pp. 936-944.

Yang, Y. B., Yau, J. D., Lin, C. W. (2004). Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle, Vol. 272, pp. 471-493.

Timoshenko, S. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Philosophical Magazine* 41, 744-746.

Timoshenko, S. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 43 (1922), pp. 125-131.

Timoshenko, S. (1953). *History of Strength of Materials*. Dover Publications, New York.

Timoshenko, S. Young D. Y. (1961). *Vibration problems in Engineering*. 3rd edition, Van Nostrand, New York, pp. 329-331.

APÊNDICE A – Rotinas do Método de Galerkin no MAPLE 15

Rotina Método Galerkin: Formulação de Euler-Bernoulli Linear – Paramétrico

restart; with(linalg): with(student): with(plots): with(CodeGeneration):

1. Equações Diferenciais Parciais de Movimento

1.1. Equação Diferencial Parcial de movimento da viga

```
>Eq_Dif1:=diff(eta(xi,tau),tau$2)+2*zeta*diff(eta(xi,tau),tau)+Gamma*diff(eta(xi,tau),xi$4)
+Fa*Dirac(xi-D)-Fv*Dirac(xi-tau/V)*Heaviside(V-tau):
```

1.2. Equação Diferencial Parcial de movimento do absorvor

```
>Eq_Dif2:=diff(a(tau),tau$2)-k1*EI/(ma*L^3*omega^2)*(eta(xi,tau)-a(tau))-
k11*EI/(ma*L^3*omega^2)*(diff(eta(xi,tau),tau)-diff(a(tau),tau)):
```

1.3. Equação Diferencial Parcial de movimento do veículo

```
>Eq_Dif3:=diff(v(tau),tau$2)+k2*EI/(mv*L^3*omega^2)*(v(tau)-eta(xi,tau))-
k22*EI/(mv*L^3*omega^2)*(diff(v(tau),tau)-diff(eta(xi,tau),tau)):
```

2. Propriedades e Variáveis dimensionais assumidas

2.1. Propriedades geométricas e mecânicas da viga

```
>NN:=1: N:=5:
```

```
L:=10.0: d:=L/2: rho:=25000/9.81: b:=0.25: h:=1.00: A:=b*h: Inércia:=simplify(b*h^3/12):
```

```
E:=simplify(5600*sqrt(32)*1e6/9.81): EI:=E*Inércia: m:=rho*A:
```

```
>Velocidade:=10.00: g:=9.81: zeta:=0.05: omega:= simplify((NN*Pi)^2*sqrt(EI/(m*L^4))):
```

```
>for i from 1 to N do omega||i:= simplify((i*Pi)^2*sqrt(EI/(m*L^4))): end do:
```

```
>for i from 1 to N do cb||i:=simplify(2*zeta*m*omega||i): end do:
```

2.2. Propriedades mecânicas do absorvor

```
uu:=0.1: AAA:=0.909: omega_a:=AAA*omega: xia:=sqrt(3*uu/(8*(1+uu)^3)):
```

```
ma:=m*L*uu: ka:=omega_a^2*ma: ca:=2*ma*omega_a*xia:
```

2.3. Propriedades mecânicas do veículo

```
>mv:=1200: kv:=500000: xiv:=0.1: omega_v:=simplify((kv/mv)^0.5): cv:=
```

```
simplify(2*xiv*mv*omega_v):
```

2.4. Variáveis dimensionais assumidas

```
>D:=d/L: Gamma:=EI/(m*L^4*omega^2): G:=mv*L^2*g/EI: V:=L*omega/Velocidad:
```

```
k1:=ka*L^3/EI: k11:=ca*L^3*omega/EI: k2:=kv*L^3/EI: k22:=cv*L^3*omega/EI:
```

3. Modos de vibração e Deslocamento transversal assumido

3.1. Modos de vibração

```
>NModos:=5:
```

```
phi1:= sin(1*Pi*xi): phi2:= sin(2*Pi*xi): phi3:= sin(3*Pi*xi): phi4:= sin(4*Pi*xi):
```

```
phi5:= sin(5*Pi*xi):
```

3.2. Deslocamento transversal assumido

```
>w_n:=0: for i from 1 to NModos do w_n:=w_n+(alpha||i)(tau)*phi||i end do: w_n:
```

4. Método de Galerkin

4.1. Viga

```
>for i from 1 to NModos do
```

```
>Eq||i:=int(expand(powsubs(eta(xi,tau)=w_n,Fa=0,Fv=0,Eq_Dif1)*phi||i),xi=0..1);
```

```
>Fa||i:=Gamma*(k1*(subs(xi=D,w_n)-alpha6(tau))+k11*(subs(xi=D,diff(w_n,tau))-  
diff(alpha6(tau),tau)))*subs(xi=Da,phi||i);
```

```
>Fv||i:=Gamma*(k2*(alpha7(tau)-subs(xi=D,w_n))+k22*(diff(alpha7(tau),tau)-  
subs(xi=D,diff(w_n,tau)))-G)*subs(xi=tau/V,phi||i)*HH;
```

```
>EQ||i:= Eq||i+Fa||i-Fv||i; end do: EQ1:EQ2:EQ3:EQ4:EQ5:
```

4.2. Absorção

```
>EQ6:= expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=D,w_n),a(tau)=alpha6(tau),Eq_Dif2)):
```

4.3. Veículo

```
>EQ7:= expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=tau/V,w_n),v(tau)=alpha7(tau),Eq_Dif3)):
```

5. Redução de ordem das equações diferenciais ordinárias obtidas pelo método Galerkin

```
>for i from 1 to NModos+2 do
```

```
>Ac||i :=rhs(expand(isolate(powsubs(diff((alpha||i)(tau),tau$2)=AA, EQ||i),AA))); end do:
```

```
>for i from 1 to NModos+2 do d[2*i-1]:=F[2*i-1] = y[i*2];
```

```
>d[2*i]:=F[2*i]=powsubs(seq(diff(alpha||j(tau),tau)=y[j*2],j=1..NModos+2),
```

```
seq(alpha||j(tau)=y[2*j-1],j=1..NModos+2), Ac||i); end do:
```

6. Geração do código para obter a resposta do sistema pelo método de Runge-Kutta

- with(CodeGeneration): for i from 1 to 14 do C(d[i]): end do:

Rotina Método de Galerkin: Formulação Euler-Bernoulli com inércia rotacional Linear – Paramétrico

restart; with(linalg): with(student): with(plots): with(CodeGeneration):

1. Equações Diferenciais Parciais de Movimento

1.1. Equação Diferencial Parcial de movimento da viga

```
>Eq_Dif1:=diff(eta(xi,tau),tau$2)+2*zeta*diff(eta(xi,tau),tau)+Gamma*diff(eta(xi,tau),xi$4)-
beta*diff(eta(xi,tau),xi$2,tau$2)+Fa*Dirac(xi-D)-Fv*Dirac(xi-tau/V)*Heaviside(V/omega-
tau/omega):
```

1.2. Equação Diferencial Parcial de movimento do absorsor

```
>Eq_Dif2:=diff(a(tau),tau$2)-k1*EI/(ma*L^3*omega^2)*(eta(xi,tau)-a(tau))-
k11*EI/(ma*L^3*omega^2)*(diff(eta(xi,tau),tau)-diff(a(tau),tau)):
```

1.3. Equação Diferencial Parcial de movimento do veículo

```
>Eq_Dif3:=diff(v(tau),tau$2)+k2*EI/(mv*L^3*omega^2)*(v(tau)-eta(xi,tau))-
k22*EI/(mv*L^3*omega^2)*(diff(v(tau),tau)-diff(eta(xi,tau),tau)):
```

2. Propriedades e Variáveis adimensionais assumidas

2.1. Propriedades geométricas e mecânicas da viga

```
>NN:=1: N:=5: L:=20.00: d:=L/2: rho:=25000/9.81: b:=0.25: h:=1.00: A:=b*h:
Inércia:=simplify(b*h^3/12): E:=simplify(5600*sqrt(32)*1e6/9.81): EI:=E*Inércia:
m:=rho*A: r:=sqrt(Inércia/A): Ip:=Inércia*rho: Velocidad:=26.69: g:=9.81: zeta:=0.05:
omega:=simplify((NN*Pi)^2/(sqrt(1+(NN*Pi*r)^2/L^2))*sqrt(EI/(m*L^4))):
```

```
>for i from 1 to N do omega||i:=
simplify((i*Pi)^2/(sqrt(1+(i*Pi*r)^2/L^2))*sqrt(EI/(m*L^4))); end do:
omega1:omega2:omega3:omega4:omega5:
```

```
>for i from 1 to N do cb||i:=simplify(2*zeta*m*omega||i); end do: cb1:cb2:cb3:cb4:cb5:
```

2.2. Propriedades mecânicas do absorsor

```
>uu:=0.1: AAA:=0.909: omega_a:=AAA*omega: xia:=sqrt(3*uu/(8*(1+uu)^3)):
ma:=m*L*uu: ka:=omega_a^2*ma: ca:=2*ma*omega_a*xia:
```

2.3. Propriedades mecânicas do veículo

```
>mv:=1200: kv := 500000: xiv:=0.1: omega_v:=simplify((kv/mv)^0.5): cv:=
simplify(2*xiv*mv*omega_v):
```

2.4. Variáveis adimensionais assumidas

>D:=d/L: Gamma:=EI/(m*L^4*omega^2): beta:=Inércia*rho/(m*L^2):
V:=L*omega/Velocidad: k1:=ka*L^3/EI: k11:=ca*L^3*omega/EI: k2:=kv*L^3/EI:
k22:=cv*L^3*omega/EI: G:=mv*L^2*g/EI:

3. Modos de vibração e Deslocamento transversal assumido

3.1. Modos de vibração

>NModos:=5:
phi1:=sin(Pi*xi): phi2:=sin(2*Pi*xi): phi3:=sin(3*Pi*xi): phi4:=sin(4*Pi*xi):
phi5:=sin(5*Pi*xi):

3.2. Deslocamento transversal assumido

>w_n:= 0: for i from 1 to NModos do w_n:= w_n+(alpha|i)(tau)*phi|i end do: w_n:

4. Método de Galerkin

4.1. Viga

>for i from 1 to NModos do
>Eq|i:=int(expand(powsubs(eta(xi,tau)=w_n,Fa=0,Fv=0,Eq_Dif1)*phi|i),xi=0..1);
>Fa|i:=Gamma*(k1*(subs(xi=D,w_n)-alpha6(tau))+k11*(subs(xi=D,diff(w_n,tau))-
diff(alpha6(tau),tau)))*subs(xi=D,phi|i);
>Fv|i:=Gamma*(k2*(alpha7(tau)-subs(xi=D,w_n))+k22*(diff(alpha7(tau),tau)-
subs(xi=D,diff(w_n,tau)))-G)*subs(xi=tau/V,phi|i)*HH;
>EQ|i:=Eq|i+Fa|i-Fv|i: end do: EQ1:EQ2:EQ3:EQ4:EQ5:

4.2. Absorção

>EQ6:=expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=D,w_n),a(tau)=alpha6(tau),Eq_Dif2)):

4.3. Veículo

>EQ7:=expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=tau/V,w_n),v(tau)=alpha7(tau),Eq_Dif3)):

5. Redução de ordem das equações diferenciais ordinárias obtidas pelo método Galerkin

>for i from 1 to NModos+2 do
>Ac|i :=rhs(expand(isolate(powsubs(diff((alpha|i)(tau),tau,tau)=AA, EQ|i),AA))); end do:
>for i from 1 to NModos+2 do d[2*i-1]:=F[2*i-1]=y[i*2];
d[2*i]:=F[2*i]=powsubs(seq(diff(alpha|j(tau),tau)=y[j*2],j=1..NModos+2),
seq(alpha|j(tau)=y[2*j-1],j=1..NModos+2), Ac|i); end do:

6. Geração do código para obter a resposta do sistema pelo método de Runge-Kutta

- with(CodeGeneration): for i from 1 to 14 do C(d[i]): end do:

Rotina Método de Galerkin: Formulação de Timoshenko Linear – Paramétrico

restart; with(linalg): with(student): with(plots): with(CodeGeneration):

1. Equações Diferenciais Parciais de Movimento

1.1. Equação Diferencial Parcial de movimento da viga

```
>Eq_Dif1:=diff(eta(xi,tau),tau$2)+lambda*diff(eta(xi,tau),tau$4)-
mu*diff(eta(xi,tau),xi$2,tau$2)+2*zeta*Gamma*diff(eta(xi,tau),tau)+2*zeta*lambda*diff(eta
(xi,tau),tau$3)-2*zeta*mu*diff(eta(xi,tau),xi$2,tau)+Gamma*diff(eta(xi,tau),xi$4)-
beta*diff(eta(xi,tau),xi$2,tau$2)+Fa1*Dirac(xi-D)-Fa2*Dirac(xi-D)+Fa3*Dirac(xi-D)-
Fv1*Dirac(xi-tau/V)*Heaviside(V-tau)-Fv2*Dirac(xi-tau/V)*Heaviside(V-
tau)+Fv3*Dirac(xi-tau/V)*Heaviside(V-tau):
```

1.2. Equação Diferencial Parcial de movimento do absorvor

```
>Eq_Dif2:=diff(a(tau),tau$2)-k1*EI/(ma*L^3*omega^2)*(eta(xi,tau)-a(tau))-
k11*EI/(ma*L^3*omega^2)*(diff(eta(xi,tau),tau)-diff(a(tau),tau)):
```

1.3. Equação Diferencial Parcial de movimento do veículo

```
>Eq_Dif3:=diff(v(tau),tau$2)+k2*EI/(mv*L^3*omega^2)*(v(tau)-eta(xi,tau))-
k22*EI/(mv*L^3*omega^2)*(diff(v(tau),tau)-diff(eta(xi,tau),tau)):
```

2. Propriedades e Variáveis dimensionais assumidas

2.1. Propriedades geométricas e mecânicas da viga

NN:=1: N:=5: L:=20.00: d:=L/2: rho:=25000/9.81: b:=0.25: h:=1.00: A:=b*h:

Inércia:=simplify(b*h^3/12): E:=simplify(5600*sqrt(32)*1e6/9.81): EI:=E*Inércia:

m:=rho*A: r:=sqrt(Inércia/A): Ip:=Inércia*rho: poiss:=0.30: G:=E/(2*(1+poiss)): k:=5/6:

Velocidad:=26.61401523: g:=9.81: zeta:=0.05:

```
>W:=w^2*(rho*r^2/(k*G))*(1+(NN*Pi*r/L)^2+(NN*Pi*r/L)^2*E/(k*G))+(NN*Pi)^4*EI/(m
*L^4): Lista:=[solve(W,w)]: omega:=sqrt(Lista[2]):
```

```
>for i from 1 to N do W||i:=w^2*(rho*r^2/(k*G))-
w*(1+(i*Pi*r/L)^2+(i*Pi*r/L)^2*E/(k*G))+(i*Pi)^4*EI/(m*L^4): end do:
```

```
>for i from 1 to N do Lista||i:=solve(W||i,w): end do:
```

```
>for i from 1 to N do omega||i:=sqrt(Lista||i[2]): end do:
omega1:omega2:omega3:omega4:omega5:
```

```
>for i from 1 to N do cb||i:=simplify(2*zeta*m*omega||i): end do: cb1:cb2:cb3:cb4:cb5:
```

2.2. Propriedades mecânicas do absorsor

```
>uu:=0.1: AAA:=0.909: omega_a:=AAA*omega: xia:=sqrt(3*uu/(8*(1+uu)^3)):
ma:=m*L*uu: ka:=omega_a^2*ma: ca:=2*ma*omega_a*xia:
```

2.3. Propriedades mecânicas do veículo

```
>mv:=1200: kv:=500000: xiv:=0.1: omega_v:=simplify((kv/mv)^0.5):
cv:=simplify(2*xiv*mv*omega_v):
```

2.4. Variáveis adimensionais assumidas

```
>D:=d/L: Gamma:=EI/(m*L^4*omega^2): mu:=EI/(k*A*G*L^2):
lambda:=rho*Inércia*omega/(k*A*G): beta:=Inércia*rho/(m*L^2): V:=L*omega/Velocidad:
>k1:=ka*L^3/EI: k11:=ca*L^3*omega/EI: k2:=kv*L^3/EI: k22:=cv*L^3*omega/EI:
>GG:=mv*L^2*g/EI:
```

3. Modos de vibração e Deslocamento transversal assumido

3.1. Modos de vibração

```
>NModos:=5:
phi1:=sin(1*Pi*x): phi2:=sin(2*Pi*x): phi3:=sin(3*Pi*x): phi4:=sin(4*Pi*x):
phi5:=sin(5*Pi*x):
```

3.2. Deslocamento transversal assumido

```
>w_n:= 0: for i from 1 to NModos do w_n:= w_n+(alpha|i)(tau)*phi|i end do: w_n;
```

4. Método de Galerkin

4.1. Viga

```
for i from 1 to NModos do
```

```
>Eq|i:=int(expand(powsubs(eta(xi,tau)=w_n,Fa1=0,Fa2=0,Fa3=0,Fv1=0,Fv2=0,Fv3=0,Eq_D
if1)*phi|i),xi=0..1);
```

```
>FFa|i:=Gamma*(k1*(subs(xi=D,w_n)-alpha6(tau))+k11*(subs(xi=D,diff(w_n,tau))-
diff(alpha6(tau),tau)))*subs(xi=D,phi|i);
```

```
>FFFa|i:=lambda*Gamma*(k1*(subs(xi=D,diff(w_n,tau$2))-
diff(alpha6(tau),tau$2))+k11*(subs(xi=D,diff(w_n,tau$3))-
diff(alpha6(tau),tau$3)))*subs(xi=D,phi|i);
```

```
>FFFFa|i:=mu*Gamma*(k1*subs(xi=D,diff(w_n,xi$2))+k11*subs(xi=D,diff(w_n,xi$2,tau)))
*subs(xi=D,phi|i);
```



```

>FFv||i:=Gamma*(k2*(alpha7(tau)-subs(xi=D,w_n))+k22*(diff(alpha7(tau),tau)-
subs(xi=D,diff(w_n,tau)))-GG)*subs(xi=tau/V,phi||i)*HH;
>FFFv||i:=lambda*Gamma*(k2*(diff(alpha7(tau),tau$2)-
subs(xi=tau/V,diff(w_n,tau$2)))+k22*(diff(alpha7(tau),tau$3)-
subs(xi=tau/V,diff(w_n,tau$3))))*subs(xi=tau/V,phi||i)*HH;
>FFFFv||i:=mu*Gamma*(k2*subs(xi=tau/V,diff(w_n,xi$2))+k22*subs(xi=tau/V,diff(w_n,xi$
2,tau)))*subs(xi=tau/V,phi||i)*HH;
>EQ||i:=Eq||i+FFa||i-FFFa||i+FFFFa||i-FFv||i-FFFv||i-FFFFv||i;           end           do:
EQ1:EQ2:EQ3:EQ4:EQ5:

```

4.2. Absorção

```
EQ6:= expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=D,w_n),a(tau)=alpha6(tau), Eq_Dif2));
```

4.3. Veículo

```
>EQ7:=expand(subs(eta(xi,tau)=subs(xi=tau/V,w_n),v(tau)=alpha7(tau), Eq_Dif3));
```

5. Redução de ordem das equações diferenciais ordinárias obtidas pelo método Galerkin

```
for i from 1 to NModos+2 do
```

```
>Ac||i :=rhs(expand(isolate(powsubs(diff((alpha||i)(tau),tau$2)=AA, EQ||i),AA))); end do:
```

```
>for i from 1 to NModos+2 do d[2*i-1]:=F[2*i-1] = y[i*2]:
```

```
d[2*i]:=F[2*i]=powsubs(seq(diff(alpha||j(tau),tau)=y[j*2],j=1..NModos+2),
```

```
seq(alpha||j(tau)=y[2*j-1],j=1..NModos+2), Ac||i); end do:
```

6. Geração do código para obter a resposta do sistema pelo método de Runge-Kutta

```
with(CodeGeneration): for i from 1 to 14 do C(d[i]); end do;
```

APÊNDICE B – Adimensionalização da Equação Diferencial de Movimento

Adimensionalização da Equação Diferencial de Movimento– Teoria Euler-Bernoulli – Linear

1.1. Equações diferenciais parciais de movimento do sistema

Viga

$$\begin{aligned} & m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})] \delta(x - d) \\ & = [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g] \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right) \end{aligned} \quad (b.1)$$

Absorvor

$$m_a y_{att} - k_a(y - y_a) - \lambda_a(y_t - y_{at}) = 0 \quad t > 0; \quad (b.2)$$

Veículo

$$m_v y_{vtt} - k_v(y_v - y) - c_v(y_{vt} - y_t) = 0 \quad x \in (0, L) \quad t > 0 \quad (b.3)$$

1.2. Parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{L}; \eta_a = \frac{y_a}{L}; \eta_v = \frac{y_v}{L}; \xi = \frac{x}{L}; \Delta = \frac{d}{L}; \tau = t\omega \\ k_1 &= \frac{k_a L^3}{EI}; k_2 = \frac{k_v L^3}{EI}; k'_0 = \frac{c L^3 \omega}{EI}; k'_1 = \frac{\lambda_a L^3 \omega}{EI}; k'_2 = \frac{c_v L^3 \omega}{EI} \\ \Gamma &= \frac{EI}{m L^4 \omega^2}; \mu = \frac{EI}{k A G L^2}; \lambda = \frac{\rho I}{k A G} \omega^2; \beta = \frac{I \rho}{m L^2}; g' = \frac{m_v}{EI} L^2 g; V = \frac{L \omega}{v}; \end{aligned} \quad (b.4)$$

1.3. Adimensionalização da Viga

$$m y_{tt} = m L \omega^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = m L \omega^2 \eta_{\tau\tau} \quad (b.5)$$

$$c y_t = 2 \zeta m \omega L \omega \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 2 \zeta m L \omega^2 \eta_{\tau} \quad (b.6)$$

$$E I y_{xxxx} = E I \frac{L}{L^4} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = \frac{E I}{L^3} \eta_{\xi\xi\xi\xi} \quad (b.7)$$

$$[k_a(y - y_a) + \lambda_a(y - y_a)_t] = \frac{E I}{L^3} [k_1 L(\eta - \eta_a) + k'_1 L(\eta - \eta_a)_\tau] \quad (b.8)$$

$$[k_v(y_v - y) + c_v(y_v - y)_t + m_v g] = \frac{EI}{L^3} [k_2 L(\eta_v - \eta) + k'_2 L(\eta_v - \eta)_\tau + g' L] \quad (\text{b.9})$$

$$\delta(x - d) = \delta(\xi L - \Delta L) = \delta(\xi - \Delta) \quad (\text{b.10})$$

$$\delta(x - vt) = \delta\left(\xi L - \frac{L\omega}{V} \tau\right) = \delta\left(\xi L - \frac{\tau}{V} L\right) = \delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right) \quad (\text{b.11})$$

$$H\left(\frac{L}{v} - t\right) = H\left(\frac{L}{L\omega} - \frac{\tau}{\omega}\right) = H(V - \tau) \quad (\text{b.12})$$

Substituindo as equações (b.5) - (b.12), na equação (b.1), tem-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga para a formulação linear de Euler-Bernoulli.

$$\begin{aligned} \eta_{\tau\tau} + 2\zeta\eta_\tau + \Gamma\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \Gamma[k_1(\eta - \eta_a) + k'_1(\eta - \eta_a)_\tau]\delta(\xi - \Delta) \\ = \Gamma[k_2(\eta_v - \eta) + k'_2(\eta_v - \eta)_\tau + g']\delta\left(\xi - \frac{\tau}{V}\right)H(V - \tau) \end{aligned} \quad (\text{b.13})$$

1.4. Adimensionalização do Absorvor

$$m_a y_{att} = m_a L \omega^2 \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial \tau^2} = m_a L \omega^2 \eta_{a\tau\tau} \quad (\text{b.14})$$

$$k_a (y - y_a) = \frac{k_1 EI}{L^3} (\eta L - \eta_a L) = \frac{k_1 EI}{L^2} (\eta - \eta_a) \quad (\text{b.15})$$

$$\lambda_a (y_t - y_{at}) = \frac{k'_1 EI}{L^3 \omega} \left(L \omega \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - L \omega \frac{\partial \eta_a}{\partial \tau} \right) = \frac{k'_1 EI}{L^2} (\eta_\tau - \eta_{a\tau}) \quad (\text{b.16})$$

Substituindo as equações (b.14) - (b.16), na equação (b.2), tem-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento do absorvor em sua versão adimensional.

$$\eta_{a\tau\tau} + \frac{k_1 EI}{m_a L^3 \omega^2} (\eta - \eta_a) + \frac{k'_1 EI}{m_a L^3 \omega^2} (\eta_\tau - \eta_{a\tau}) = 0 \quad \tau > 0; \quad (\text{b.17})$$

1.5. Adimensionalização do Veículo

$$m_v y_{vtt} = m_v L \omega^2 \frac{\partial^2 \eta_v}{\partial \tau^2} = m_v L \omega^2 \eta_{v\tau\tau} \quad (\text{b.18})$$

$$k_v(y_v - y) = \frac{k_2 EI}{L^3} (\eta_v L - \eta L) = \frac{k_2 EI}{L^2} (\eta_v - \eta) \quad (\text{b.19})$$

$$c_v(y_{vt} - y_t) = \frac{k'_2 EI}{L^3 \omega} \left(L \omega \frac{\partial \eta_v}{\partial \tau} - L \omega \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) = \frac{k'_2 EI}{L^2} (\eta_{v\tau} - \eta_\tau) \quad (\text{b.20})$$

Substituindo as equações (b.18) - (b.20), na equação (b.3), tem-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento do veículo em sua versão adimensional.

$$\eta_{v\tau\tau} + \frac{k_2 EI}{m_v L^3 \omega^2} (\eta_v - \eta) + \frac{k'_2 EI}{m_v L^3 \omega^2} (\eta_{v\tau} - \eta_\tau) = 0 \quad \xi \in (0,1) \quad \tau > 0 \quad (\text{b.21})$$

APÊNDICE C – Dedução da Equação Diferencial de Movimento

Dedução da Equação Diferencial Parcial de Movimento – Teoria Euler-Bernoulli – Linear

Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, um princípio de mecânica variacional, diz que a variação da integral da energia cinética menos a energia potencial durante qualquer intervalo de tempo t_1 a t_2 deve ser igual a zero. Assim:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (c.1)$$

Onde, T é a energia cinética do sistema, expressa em termos das coordenadas generalizadas e de suas primeiras derivadas no tempo, V é a energia potencial (gravitacional, elástica e energia potencial de forças externas conservativas).

No caso da formulação linear de Euler-Bernoulli o sistema veículo-ponte-absorção, possui uma variável y , então, faz-se necessário encontrar uma função $y(x, t)$ para o deslocamento transversal da viga. O funcional a ser minimizado é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L(y, y_{xx}, y_t, t) \quad (c.2)$$

Aplicando as ferramentas do cálculo variacional (integração por partes) e o princípio de Hamilton, tem-se no caso da formulação linear de Euler-Bernoulli a seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_t} \right) - \left[\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{xx}} \right) \right] + \frac{\partial R_e}{\partial y_t} \right\} \delta y dx dt = 0 \quad (c.3)$$

Onde o funcional de energia da viga a ser minimizado foi desenvolvido na formulação de Euler-Bernoulli:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (c.4)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^L [k_a(y - y_a)^2 + k_v(y_v - y)^2] dx - \int_0^L m_v g(y_v - y) dx$$

Desenvolvendo termo a termo a equação (c.3), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_t} \right) = m y_{tt} \quad (c.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = k_v(y_v - y) - k_a(y - y_a) + m_v g \quad (c.6)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{xx}} \right) = -E I y_{xxxx} \quad (c.7)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{xx}} \right) = c y_t + \lambda_a(y_t - y_{at}) - c_v(y_{vt} - y_t) \quad (c.8)$$

Substituindo as equações (c.5) a (c.8) na equação (c.3), tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})]\} \delta y dx dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{[k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g]\} \delta y dx dt = 0 \quad (c.9)$$

Onde os termos entre chaves são iguais a zero, então:

$$m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})]$$

$$= [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g] \quad (c.10)$$

Agora tem-se multiplicar o quarto termo da equação (c.10) pela função Delta de Dirac que define a posição do absorvor na viga e que tem unidades inversas ao argumento. Além disso, tem-se que definir o movimento do veículo multiplicando o quinto termo da equação (c.10) pela função Delta de Dirac e Heaviside, finalmente tem-se a equação diferencial parcial (EDP) de movimento da viga fornecida pela formulação de Euler-Bernoulli:

$$m y_{tt} + c y_t + E I y_{xxxx} + [k_a(y - y_a) + \lambda_a(y_t - y_{at})] \delta(x - d) \quad (c.11)$$

$$= [k_v(y_v - y) + c_v(y_{vt} - y_t) + m_v g] \delta(x - vt) H\left(\frac{L}{v} - t\right)$$

Onde:

$\delta(x - d)$, define o absorsor fixo.

$\delta(x - d)$, define a posição do veículo.

$H(L/v-t)$, Função Heaviside, que define a distância percorrida pelo veículo ao longo da viga.