

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE E MODELAGEM DE ONDAS NÃO LINEARES EM
DINÂMICA DOS GASES

ANDRÉ VON BORRIES LOPES

ORIENTADOR: FRANCISCO RICARDO DA CUNHA
COORIENTADOR: YURI DUMARESQ SOBRAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 180 A/12

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO - 2012.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE E MODELAGEM DE ONDAS NÃO LINEARES EM
DINÂMICA DOS GASES

ANDRÉ VON BORRIES LOPES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. FRANCISCO RICARDO DA CUNHA, PhD. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. GUSTAVO COELHO ABADE, PhD. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. JORGE CARLOS LUCERO, PhD. (CIC-UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 06 DE NOVEMBRO DE 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA

LOPES, ANDRÉ VON BORRIES

Análise e Modelagem de Ondas Não Lineares em Dinâmica dos Gases.

[Distrito Federal] 2012.

xvii, 157p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2012)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Dinâmica dos Gases

2. Ondas Não Lineares

3. Viscosidade Expansional

4. Método das Características

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPES, A. V. B. (2012). Análise e Modelagem de Ondas Não Lineares em Dinâmica dos Gases. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 180 A/2012, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 157p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: André von Borries Lopes.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Análise e Modelagem de Ondas Não Lineares em Dinâmica dos Gases.

GRAU / ANO: Mestre / 2012

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

André von Borries Lopes

SQS 102 Bloco H Apartamento 602, Asa Sul

70.330-080 Brasília - DF - Brasil.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a Poliana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Pedro e Cláudia, por todo o carinho e suporte que foi me dado durante todo o meu mestrado. Vocês nunca deixaram que nada me faltasse. Obrigado por estarem presentes em todos os momentos da minha vida. Nenhuma conquista seria possível sem vocês.

Agradeço ao meu amor, Poliana, por ter atravessado essa jornada comigo. Obrigado por toda a ajuda que você me deu durante este mestrado. O seu apoio foi o meu pilar. Você sempre acreditou em mim, até quando eu duvidava. Quero construir uma história ao seu lado. Você é a minha metade.

Agradeço as minhas irmãs, Paula e Fernanda, pela amizade de vocês. Vocês são as minhas melhores amigas. Obrigado pelas inúmeras horas de video games, sushi e filmes de terror. A minha vida seria incompleta sem vocês.

Agradeço aos meus avós maternos, Adolfo e Nilse, e paternos, Waldir e Terezinha, por todas as orações e a fé depositada em mim.

Agradeço a minha Tatinha pelo amor de mãe que me foi dado. Você é a pessoa mais incrível que eu conheço. Obrigado por ser o meu anjo da guarda.

Agradeço a minha tia Rosana, por ter o maior coração do mundo. Você está sempre disposta a ajudar todo mundo e comigo nunca foi diferente. Eu tenho muita sorte de ter você na minha vida.

Agradeço aos meus tios, George e Ricardo, por toda a preocupação comigo. Eu almejo ser um profissional tão bom quanto vocês. Sei que muitas vezes parece que eu não escuto vocês, mas saibam vocês sempre foram a minha fonte de inspiração.

Agradeço a madrinha, a tia Lúcia, por ter me dado todos os recursos para chegar aqui. Você é uma construtora de sonhos. Não tenho como agradecer tudo o que você já fez, e tem feito, por mim.

Agradeço ao meu colega, e amigo, Nuno. Durante este mestrado, você teve a maior paciência do mundo comigo. Obrigado por ter me ajudado durante todo este caminho.

Agradeço aos meus amigos por todos os momentos de descontração e suporte. Amo vocês.

Agradeço aos Professores Celius Magalhães e Lineu da Costa Araújo Neto. Vocês participaram de toda a minha vida acadêmica. Obrigado pelos inúmeros conselhos.

Agradeço aos Mestres Márcios Ribeiro e Gagliard Peixoto Lourenço por todos os ensinamentos proporcionados pela prática do esporte.

Agradeço aos Professores Gustavo Coelho Abade e Jorge Carlos Lucero por todas as sugestões e contribuições para o meu trabalho.

Agradeço aos Professores Francisco Ricardo da Cunha e Yuri Dumaresq Sobral por toda a orientação durante este trabalho. Obrigado por toda a dedicação e aprendizagem proporcionada. Vocês são profissionais, e pessoas, excelentes que marcaram o meu caminho. Obrigado pela oportunidade de trabalhar com vocês.

RESUMO

ANÁLISE E MODELAGEM DE ONDAS NÃO LINEARES EM DINÂMICA DOS GASES

Autor: André von Borries Lopes

Orientador: Francisco Ricardo da Cunha

Coorientador: Yuri Dumaresq Sobral

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 6 de Novembro de 2012

A presente dissertação tem como foco o estudo, do ponto de vista teórico, da dinâmica de gases compressíveis de alta frequência, em que os efeitos dissipativos associados ao segundo coeficiente de viscosidade (ou viscosidade expansional) tornam-se relevante. O problema de escoamento foi formulado para o caso unidimensional e transiente, associado a um modelo de fluido barotrópico. Um ponto inovador da dissertação refere-se ao fato que, mesmo em regime de escoamento invíscido, existe um mecanismo difusivo representado por um termo associado com dissipação expansional que transforma a equação de Euler padrão de primeira ordem em uma equação de segunda ordem do tipo Burgers. As equações governantes foram adimensionalizadas e um novo parâmetro físico denominado número de Reynolds expansional identificado. Este parâmetro é dependente da frequência da onda, do tempo de relaxação do escoamento e da razão dos números de Mach avaliados em condições de equilíbrio e numa condição arbitrária de não-equilíbrio do escoamento. O comportamento do sistema de equações governantes obtido foi examinado por meio de várias análises, e foram encontradas soluções analíticas típicas, soluções assintóticas, além de uma proposta de solução baseada em reescalas de variáveis do problema, levando a uma solução por similaridade similar à de problemas parabólicos de camada limite. Desenvolve-se, também, uma análise de estabilidade linear do escoamento e encontrou-se um critério para o número de Reynolds expansional que determina quando o termo difusivo compressional atenua amplitudes de ondas de alta frequência. Um outro objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia numérica para solução do sistema de equações governantes em regimes não-lineares de propagação de ondas.

A implementação numérica do termo difusivo, relativo à viscosidade expansional, foi feita através de uma modificação do método das características. Esta metodologia modificada permitiu o tratamento do sistema fracamente parabólico por uma técnica computacional típica de sistemas hiperbólicos. Simulações computacionais do escoamento barotrópico examinado são realizadas para diferentes números de Reynolds expansional e foi possível construir um diagrama de estabilidade que estabelece a existência do choque na solução em função do número de Reynolds expansional e da razão de números de Mach para uma dada condição inicial de onda. O método das características modificado, segundo a proposta desta dissertação, mostra-se com um ótimo desempenho, sendo os resultados numéricos obtidos validados pelas soluções analíticas e numéricas da equação de Burgers e com os resultados da análise de estabilidade linear desenvolvidos na primeira etapa da dissertação.

ABSTRACT

ANALYSIS AND MODELLING OF NONLINEAR WAVES IN GAS DYNAMICS

Author: André von Borries Lopes

Supervisor: Francisco Ricardo da Cunha

Co-supervisor: Yuri Dumaesq Sobral

Graduate Program in Mechanical Sciences

Brasilia, November 6th, 2012

This dissertation focuses on the theoretical study of compressible gas of high frequency in which the second coefficient of viscosity (also known as expansion viscosity) is relevant. The flow problem is formulated considering the transient one-dimensional case for a barotropic fluid. An innovative point of the dissertation refers to the fact that, even in an inviscid flow regime, there is a diffusive mechanism associated with the expansion dissipation that transforms the standard first order Euler's equation into a second-order Burgers type equation. The governing equations were made dimensionless and a new physical parameter, the expansion Reynolds number, was identified. This parameter is dependent on the frequency of the initial condition, the relaxation time and the ratio of the flow Mach numbers are measured under equilibrium conditions and at an arbitrary condition of non-equilibrium flow. The behavior of the governing equations was examined through various analyses, and typical analytical and asymptotic solutions were found, as well as a solution based on re-scaled variables of the problem, leading to a similarity solution similar to those occurring in parabolic boundary layer problems. Furthermore, a linear stability analysis is developed, and a criterion for the expansion Reynolds number that determines the conditions under which the new compressional diffusive term attenuates the amplitude of high waves frequency was established. Another aim was to develop a numerical methodology for solving the system of equations governing the nonlinear wave propagation regime. The numerical implementation of the diffusive term, related to the expansion viscosity, was developed through a modification of the method of characteristics. This modified methodology allowed the treatment of the

weakly parabolic system of equations through a typical hyperbolic computational method. Simulations were performed for different expansion Reynolds numbers, allowing the construction of a stability diagram that establishes the existence of shocks as a function of the expansion Reynolds number and the Mach numbers ratio for a given initial condition. The modified method of characteristics, according to the proposal of this dissertation, is efficient, and the numerical results were validated through numerical and analytical solutions of the Burgers equation and through the results of linear stability analysis developed in the first stage of the dissertation.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	OBJETIVOS	3
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	4
2	MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	7
2.1	INTRODUÇÃO	7
2.2	O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	7
2.3	EQUAÇÃO DA ADVECÇÃO	9
2.4	EQUAÇÃO DA ADVECÇÃO LINEAR	12
2.5	LEIS DE CONSERVAÇÃO	15
2.6	EQUAÇÃO DE BURGERS INVÍSCIDA	17
2.7	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	26
3	EQUAÇÃO DE BURGERS	29
3.1	INTRODUÇÃO	29
3.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO	30
3.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE RICCATI	30
3.3.1	Solução geral das equações diferenciais de Riccati	31
3.3.2	Redução a uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem	32
3.4	SOLUÇÃO DO TIPO ONDA VIAJANTE	32
3.5	SOLUÇÃO POR SIMILARIDADE	37
3.6	TRANSFORMAÇÃO DE COLE-HOPF	42
3.6.1	Onda de choque de Burgers	45

3.6.2	Onda triangular	46
3.7	SOLUÇÃO NUMÉRICA POR DIFERENÇAS FINITAS	47
3.7.1	Método de solução	47
3.7.2	Implementação numérica	49
3.7.3	Resultados e discussão	52
4	EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO BAROTRÓPICO	61
4.1	INTRODUÇÃO	61
4.2	RESULTADOS PRELIMINARES	61
4.2.1	Teorema do Transporte de Reynolds	62
4.2.2	Teorema da Localização	62
4.3	DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS DA DINÂMICA DOS FLUIDOS	62
4.3.1	Equação da conservação da massa	63
4.3.2	Equação da conservação do momento linear	63
4.4	EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO DE UM GÁS BAROTRÓPICO	65
4.5	SEGUNDO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE	67
4.6	ADIMENSIONALIZAÇÃO	71
4.7	EQUAÇÕES LINEARIZADAS	74
4.8	ANÁLISE MODAL	76
4.9	RESULTADOS E DISCUSSÃO	80
5	O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS MODIFICADO	85
5.1	INTRODUÇÃO	85
5.2	DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS E EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE	85
5.3	METODOLOGIA NUMÉRICA	89
5.4	EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS	93
5.5	ESTABILIDADE DO MÉTODO	94
5.6	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DO NUMÉRICO	95

5.6.1	Teste 1	96
5.6.2	Teste 2	97
5.6.3	Teste 3	101
5.7	RESULTADOS E DISCUSSÃO	105
6	CONCLUSÃO	113
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	114
	BIBLIOGRAFIA	117
A	CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM	123
B	NÃO NEGATIVIDADE DO SEGUNDO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE	127
C	AJUSTE DE UMA CURVA EXPONENCIAL PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	131

Lista de Tabelas

3.1	Comparação da solução numérica com a solução analítica para o problema da onda de choque de Burgers (3.78) para $Re = 0.1$, $h = 0.001$, $k = 0.001$, $a = -100$ e $b = 100$, em $t = 2$	53
5.1	Evolução espacial da amplitude $\mathcal{A}(x)$ obtida numericamente para $\omega = 1.0$, $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.0005$, $U = 10^{-3}$, $h = 0.00001$ e $k = 0.000005$	103

Lista de Figuras

2.1	Ponto Q de intersecção da curva \mathcal{L} , em que o u é conhecido, com a curva característica \mathcal{C} no plano $x - y$	8
2.2	Curvas características da equação da advecção (2.7) com velocidade de propagação $c = 1.0$	10
2.3	Evolução da equação da advecção (2.14) para a condição inicial (2.15).	11
2.4	Diagrama espaço-tempoal da equação da advecção (2.14) para a condição inicial (2.15).	12
2.5	Curvas características da equação da advecção linear (2.16) com velocidade de propagação $c(x, t) = x$	13
2.6	Evolução da equação da advecção linear (2.16) para a condição inicial (2.15) e velocidade de propagação $c(x, t) = x$	14
2.7	Diagrama espaço-tempo da advecção linear (2.16) para a condição inicial (2.15) e velocidade de propagação $c(x, t) = x$	15
2.8	Curvas características da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44). A linha horizontal representa o tempo crítico.	19
2.9	Evolução da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44).	20
2.10	Diagrama espaço-tempo da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44).	21
2.11	Ilustração da regra das áreas iguais para a equação de Burgers invíscida (2.43) com a condição inicial (2.44) em $t = 0.3$	23
2.12	Curvas características da equação de Burgers invíscida (2.55) para a condição inicial (2.56). Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$	24

2.13	Ilustração da regra das áreas iguais para a equação de Burgers invíscida (2.55) com a condição inicial (2.56) em $t = 0.5$. Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$	24
2.14	Diagrama espaço-tempo da equação de Burgers invíscida (2.55) para a condição inicial (2.56). Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$	25
3.1	Perfil da solução onda viajante (3.29) para $Re = 1.0$ e as condições de contorno (3.28).	35
3.2	Diagrama espaço-tempo da solução onda viajante (3.29) para $Re = 1.0$ e as condições de contorno (3.28).	35
3.3	Perfil da solução onda viajante (3.29) para $Re = 0.1$ e as condições de contorno (3.28).	36
3.4	Diagrama espaço-tempo da solução onda viajante (3.29) para $Re = 0.1$ e as condições de contorno (3.28).	36
3.5	Perfil da onda triangular (3.60) em diferentes instantes de tempo para $A = 1.0$ e $Re = 25.0$	40
3.6	Diagrama espaço-tempo da onda triangular (3.60) para $A = 1.0$ e $Re = 25.0$	42
3.7	Perfil da onda de choque (3.81) em diferentes instantes de tempo para $a = 1.0$, $b = 0.1$ e $Re = 25.0$	46
3.8	Solução analítica e numérica para o problema conhecido como onda de choque de Burgers em $t = 2.0$ para $Re = 0.1$, $h = 0.001$, $k = 0.001$, $a = -100$ e $b = 100$	54
3.9	Solução numérica para o Problema 2 com $Re = 1.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$	55
3.10	Solução numérica para o Problema 2 com $Re = 100.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$	55
3.11	Solução numérica para o Problema 3 com $Re = 10.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$. O intervalo de tempo entre as curvas é 0.25.	56
3.12	Solução numérica para o Problema 3 com $Re = 100.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$. O intervalo de tempo entre as curvas é 0.25.	57
3.13	Solução numérica para a equação de Burgers periódica, com $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $Re = 10000.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.0001$	58
3.14	Análise do tempo de colapso, para diversos valores de viscosidade, com $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, com $h = 0.00001$ e $k = 0.00001$. A linha horizontal representa o tempo crítico.	58

- 4.1 (a) Velocidade de propagação do distúrbio para $k_1(\omega)$ dado pela parte real da equação (4.98). (b) Comparação da velocidade de propagação com o regime assintótico em que $\omega\tau \ll 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.103). (c) Comparação da velocidade de propagação com o regime em que $\omega\tau \sim 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.110). (d) Comparação da velocidade de propagação com o regime assintótico em que $\omega\tau \gg 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.107). Estes gráficos foram obtidos para $\tau = 0.001$, $M_0 = 1/\sqrt{1.4}$ e $M_\infty = 1/\sqrt{1.6}$. 81
- 4.2 (a) Taxa de amortecimento do distúrbio para $k_2(\omega)$ dado pela parte imaginária da equação (4.98). (b) Comparação da taxa de amortecimento com o regime assintótico em que $\omega\tau \ll 1$ e dada pela equação (4.104). (c) Comparação da taxa de amortecimento com o regime em que $\omega\tau \sim 1$ dada pela equação (4.111). (d) Comparação da taxa de amortecimento com o regime assintótico em que $\omega\tau \gg 1$ dado pela equação (4.108). Estes gráficos foram obtidos para $\tau = 0.001$, $M_0 = 1/\sqrt{1.4}$ e $M_\infty = 1/\sqrt{1.6}$ 82
- 5.1 Ilustração da malha retangular adotada no método. 90
- 5.2 Ilustração da aproximação das curvas características por linhas retas. 90
- 5.3 Ilustração das características associadas ao ponto P 92
- 5.4 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em diferentes instantes de tempo. Foram usados $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$ 96
- 5.5 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo em diferentes instantes de tempo. Foram usados $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$. 96
- 5.6 Diagrama espaço-tempo do campo de velocidades obtido pela metodologia proposta neste capítulo para $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$ 97
-

- 5.7 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.02$ e no método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$ 98
- 5.8 Convergência do método das características modificado (linha cheia) com a metodologia parabólica proposta no terceiro capítulo (linha tracejada) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$ 99
- 5.9 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.0005$ e no método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$ 99
- 5.10 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.1$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.0005$ em (a) e $h = 0.000125$ em (b). No método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$ 100
- 5.11 Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.0001$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.5$ em (a) e $h = 0.01$ em (b). No método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$ 101
- 5.12 Evolução espacial da amplitude de um distúrbio. 103
- 5.13 Comparação de $k_2(w)$ (linha cheia), conforme a equação (5.60), com a metodologia numérica proposta neste capítulo (linha em pontos) para diferentes valores de ω . Foram usados as condições iniciais (5.66) e (5.67), $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.1$, $U = 0.001$, $h = 0.0001$ e $k = 0.000025$ 104
-

5.14	Comparação de $k_2(w)$ (linha cheia), conforme a equação (5.60), com a metodologia numérica proposta neste capítulo (linha em pontos) para diferentes valores de ω . Foram usados as condições iniciais (5.66) e (5.67), $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.01$, $U = 0.001$, $h = 0.0001$ e $k = 0.000025$	104
5.15	Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0$	107
5.16	Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.1$	108
5.17	Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.01$	109
5.18	Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.004$	110
5.19	Diagrama de formação de choque para o perfil (5.71).	111

LISTA DE SÍMBOLOS

a : velocidade de propagação da onda no fluido

a_0 : velocidade de propagação da onda no fluido no estado de equilíbrio termodinâmico

a_∞ : velocidade de propagação da onda no fluido no infinito

c : velocidade de propagação da solução do tipo onda viajante

C_r : número de Courant

$\text{erfc}(x)$: função erro complementar

F : função fluxo

h : tamanho do intervalo no eixo x

k : tamanho do intervalo no eixo t

k_1 : parte real do número de onda complexo K

k_2 : parte imaginária do número de onda complexo K (taxa de amplificação dos distúrbios)

K : número de onda complexo

M : número de Mach

M_0 : número de Mach no estado de equilíbrio termodinâmico

M_∞ : número de Mach no infinito

p : pressão termodinâmica

p_0 : pressão no estado de equilíbrio termodinâmico

P : pressão mecânica

S : entropia

t_c^* : tempo de colapso

t_c : tempo crítico

u : campo escalar de velocidade do fluido

u_c : escala característica de velocidade

V : taxa de propagação dos distúrbios

x_c : escala característica de comprimento

$\delta(x)$: distribuição Delta de Dirac

η : viscosidade dinâmica

γ : coeficiente politrópico

λ : inclinação da curva característica

ν : viscosidade cinemática

ω : frequência de excitação do escoamento

Φ : fluxo de calor

ρ : massa específica do fluido

ρ_0 : massa específica do fluido no estado de equilíbrio termodinâmico

κ : condutividade térmica

τ : tempo de relaxação

θ : campo escalar de temperatura do fluido

ε : parâmetro adimensional

ζ : segundo coeficiente de viscosidade

Re: número de Reynolds

Re': número de Reynolds expansional

\mathbf{f}_c : forças de campo

\mathbf{f}_s : forças de superfície

\mathbf{D} : tensor taxa de deformação

\mathbf{I} : tensor identidade

\mathbf{u} : campo vetorial de velocidades do fluido

\mathbf{q} : quantidade de movimento

$\boldsymbol{\sigma}$: tensor de tensões

$\boldsymbol{\sigma}'$: tensor de tensões viscoso

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Por ser uma área de grande aplicabilidade científica, a dinâmica dos gases é muito explorada tanto computacionalmente, quanto experimentalmente. Apesar de não possuir uma relação explícita com a dinâmica de leitos fluidizados, que é um assunto ainda pouco compreendido na mecânica dos fluidos, estes dois fenômenos possuem algumas estruturas em comum. Nessas considerações iniciais, faremos um breve paralelo entre dinâmica dos gases e leitos fluidizados, citando produções científicas relacionadas e estabelecendo a nossa proposta para essa dissertação.

Para iniciar a nossa discussão, vamos citar alguns autores e trabalhos acerca dos temas. Liu (1982), propôs uma análise de estabilidade baseada no conceito de hierarquia de ondas para estudar instabilidades em leitos fluidizados. Nesse trabalho, o autor mostrou que ondas de grande comprimento são governadas por equações do tipo Burgers linear, ao passo que ondas de baixo comprimento são governadas por equações do tipo Korteweg-de Vries. Hirayama & Takaki (1996, 1997), com o intuito de validarem as equações não lineares obtidas através da perturbação do estado de fluidização homogênea para distúrbios com pequeno comprimento de onda, realizaram simulações computacionais. Estes autores verificaram que, para regimes em que a taxa de amplificação dos distúrbios não é demasiadamente elevada, os distúrbios não lineares são governados por equações do tipo Burgers e Korteweg-de Vries. Nesse caso, a natureza da equação dependia do grau de instabilidade do sistema.

Como podemos perceber, para compreendermos melhor o fenômeno de leitos fluidizados, precisamos entender as equações de Burgers e Korteweg-de Vries. Nessa dissertação, em particular, nos concentraremos na equação de Burgers e o seu mecanismo não linear de transporte acoplado com o seu efeito dissipativo. Para tal, revisaremos o trabalho de Bateman (1915), que investigou soluções do tipo onda viajante para mostrar que a solução das equações do movimento de um fluido viscoso podem se tornar descontínuas quando a viscosidade se aproxima do valor. Também é objetivo de nossa apresentação, os trabalhos de Hopf (1950) e Cole (1951), que estudaram a equação de Burgers no contexto de dinâmica dos gases e apresentaram, de maneira independente, uma transformação não linear que mapeava a equação de Burgers na equação linear do calor, também conhecida como equação de difusão.

Além disso, será proposto um esquema de diferenças finitas, baseada no método de Crank-Nicolson (Iserles, 2009), para a solução numérica da equação de Burgers. Inclusive, a abordagem numérica para equação de Burgers é muito comum, pois apesar de possuir uma solução analítica para o seu problema de valor inicial, sua solução computacional é fundamental para um melhor entendimento dos fenômenos físicos associados ao problema. Para se ter uma idéia melhor da complexidade e relevância do estudo numérico da Equação de Burgers, o leitor pode consultar os trabalhos de Mittal & Singhal (1996), que propuseram uma solução numérica, via métodos espectrais, para a equação de Burgers em um domínio periódico. O artigo de Ohwada (2009), em que a transformação de Cole-Hopf foi utilizada como uma alternativa à esquemas numéricos de captura de choque para escoamentos compressíveis também é uma fonte complementar para o presente estudo.

Outro assunto recorrente tanto em dinâmica de leitos fluidizados, quanto em dinâmica dos gases, é a utilização do método das características para a análise das equações governantes desses fenômenos. Como trabalhos acerca deste tema, podemos citar os trabalhos de Fanucci, Ness & Yen (1979), Cunha (1986) e Har'El (1994). No primeiro, o método das características foi utilizado para a avaliação de distúrbios não lineares de pequena amplitude em leitos fluidizados. Foi observado que um distúrbio de pequena amplitude produz, através do tempo, uma descontinuidade similar à uma onda de choque no escoamento. Nos trabalhos de Cunha (1986) e Har'El (1994) foram propostos algoritmos, em forma de diferenças finitas, para um

sistema hiperbólico, composto pelas equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, respectivamente, para o problema de escoamento não homentrópico pulsante e o escoamento unidimensional em um tubo. Na dissertação proposta, pretende-se estudar, pelo método das características, o movimento de um gás barotrópico na presença do segundo coeficiente de viscosidade.

Apesar de não abordarmos diretamente nessa dissertação o tema leitos fluidizados, deve ficar claro para o leitor que a metodologia numérica e os estudos aqui realizados servirão de suporte para trabalhos futuros acerca do tema.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta dissertação reside no estudo, do ponto de vista teórico, da dinâmica de gases compressíveis de alta frequência. Com esta motivação, estudaremos, via métodos analíticos e numéricos, a equação de Burgers e o escoamento de um fluido barotrópico na presença do segundo coeficiente da viscosidade.

Os objetivos específicos que serão abordados são:

- Estudar a formulação do método das características para avaliar equações diferenciais parciais quase-lineares de primeira ordem. Propor uma metodologia numérica;
 - Estudar a equação de Burgers invíscida para introduzir o problema do choque em sistemas hiperbólicos;
 - Resolver a equação de Burgers. Estudar as soluções do tipo onda viajante, por similaridade e pela transformação de Cole-Hopf. Propor uma metodologia numérica para o problema de valor inicial com condições de contorno periódicas e de Dirichlet;
 - Introduzir as equações governantes de um fluido barotrópico e estudar a formulação do segundo coeficiente de viscosidade, conforme Mandel'shtam & Leontovich (1937), para problemas de atenuação de ondas sonoras em líquidos;
 - Adimensionalizar as equações governantes e identificar parâmetros físicos relevantes;
 - Realizar uma análise de estabilidade linear para uma melhor compreensão dos parâmetros físicos encontrados.;
-

- Propor uma metodologia numérica, baseada no método das características, para simular o escoamento de um fluido barotrópico na presença do segundo coeficiente da viscosidade em domínio periódico;
- Validar o código numérico proposto para o problema de dinâmica dos gases através da equação de Burgers e da análise de estabilidade linear realizada;
- Realizar simulações computacionais para examinar o escoamento de um fluido barotrópico na presença do segundo coeficiente da viscosidade.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho se encontra dividido da seguinte maneira: o capítulo 2 trata da formulação teórica do método das características. Apresentamos uma solução numérica para equações quase-lineares homogêneas de primeira ordem. O capítulo também aborda a equação da advecção e a equação de Burgers invíscida. Esta última foi utilizada para introduzir um problema presente em equações diferenciais hiperbólicas não lineares: o choque.

O capítulo 3 traz consigo a equação de Burgers, abordando diversos tipos de soluções analíticas e a sua solução numérica pelo método de Crank-Nicolson. São realizados testes para validar a metodologia numérica utilizada e são gerados resultados computacionais.

O capítulo 4 é destinado à introdução das equações que governam o movimento de um fluido barotrópico e à revisão do trabalho de Mandel'shtam & Leontovich (1937), a cerca do segundo coeficiente de viscosidade. Também é objetivo de apresentação deste capítulo adimensionalizar as equações governantes do problema de dinâmica dos gases e efetuar uma análise de estabilidade linear destas equações.

No capítulo 5, formulamos uma aproximação, via método das características, para o problema proposto no capítulo anterior. Apresentamos as equações características e de compatibilidade em diferenças finitas, bem como os aspectos computacionais do método das características. Na sequência, são feitos os testes de validação do código numérico desenvolvido, e então discutimos os resultados numéricos obtidos para as equações que governam o movimento de um fluido barotrópico.

Por fim, no capítulo 6 trata das considerações finais acerca do tema abordado e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, introduziremos o método das características para a solução de equações diferenciais parciais (EDPs) quase-lineares de primeira ordem. Inicialmente esta técnica será usada para resolvermos EDPs lineares homogêneas. Em seguida, aplicaremos essa metodologia para examinar um exemplo não linear de lei de conservação, a saber a equação de Burgers invíscida. Veremos que este caso apresenta dificuldades que não são encontradas no caso linear. Estas dificuldades serão apresentadas e discutidas, mas por tratar-se de um assunto muito rico, o leitor mais interessado pode encontrar explicações mais detalhadas em Fortuna (2000), Iserles (2009) e Whitham (1974).

2.2 O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Considere a EDP quase-linear de primeira ordem

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c, \quad (2.1)$$

em que $u = u(x, t)$, $a = a(x, y, u)$, $b = b(x, y, u)$ e $c = c(x, y, u)$. Neste tipo de problema, as curvas características, caso existam, são as curvas no plano $x - y$ pelas quais as informações

fornecidas pela condição inicial se propagam. Suponha que u seja conhecido ao longo de uma curva \mathcal{L} no plano $x - y$, e seja \mathcal{C} a curva característica que intercepta \mathcal{L} em um ponto Q (ver figura 2.1). Se supormos $u = u(x(y), y)$, então a derivada total de u com respeito à variável y é dada por

$$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Comparando as equações (2.1) e (2.2), determinamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad (2.3)$$

e

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a}. \quad (2.4)$$

A equação (2.3), que define as infinitas características no plano $x - y$, é conhecida como a equação da curva característica \mathcal{C} . Em alguns casos, é possível resolver de maneira analítica a expressão (2.3). Em outros, devemos utilizar métodos numéricos para sua solução. A constante de integração, provinda da integração da equação (2.3), é obtida utilizando-se a coordenada do ponto Q . A igualdade em (2.4), por sua vez, é conhecida como equação de

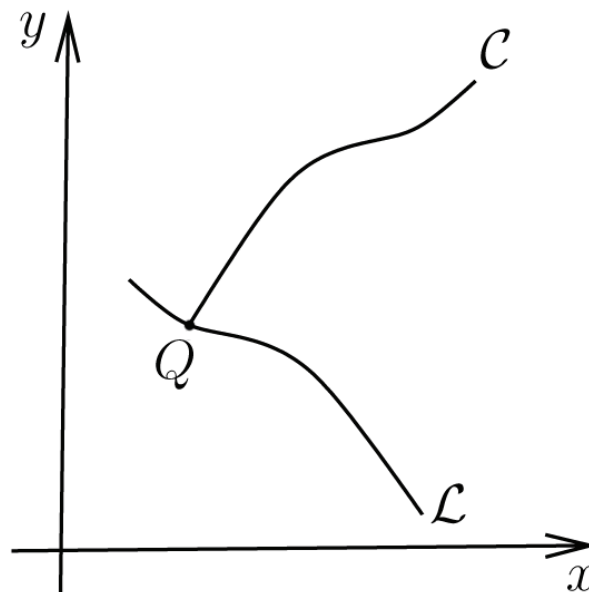


Figura 2.1: Ponto Q de intersecção da curva \mathcal{L} , em que o u é conhecido, com a curva característica \mathcal{C} no plano $x - y$.

compatibilidade da curva característica \mathcal{C} . Por isso, se soubermos o valor de $u = u_q$ no ponto

Q de coordenadas (x_q, y_q) , podemos determinar o valor de u ao longo desta curva a partir dos problema de valores inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad (2.5)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a}, \quad (2.6)$$

em que $y(x_q) = y_q$ e $u(x_q) = u_q$.

Esta metodologia nos forneceu uma simplificação considerável, pois fomos capazes de reduzir uma EDP à solução de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Esta ferramenta, que será a nossa principal arma contra problemas hiperbólicos¹, é conhecida como o método das características.

Em alguns casos, duas características de uma mesma natureza podem passar por um ponto em comum carregando informações diferentes sobre o valor u , i.e., trazendo informações conflitantes. Nesta situação, a solução apresentará uma descontinuidade e haverá a formação de um choque. Este fenômeno ocorre em diversos problemas físicos, por exemplo em escoamentos compressíveis, e será estudada posteriormente nesse capítulo.

2.3 EQUAÇÃO DA ADVECÇÃO

Para compreendermos melhor o método apresentado na seção anterior, considere o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

conhecido como equação da advecção, em que $c > 0$ é uma constante real. Como veremos adiante, esta equação apresenta o transporte da propriedade u com velocidade constante c ao longo do eixo x .

¹para ver como é feita a classificação de EDPs de segunda ordem, o leitor pode conferir o apêndice A

Para este problema, as equações (2.5) e (2.6) no plano $x - t$, são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (2.9)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.10)$$

em que $x(0) = x_0$ e $u(0) = f(x_0)$.

Resolvendo a equação característica (2.9), obtemos

$$x = ct + x_0. \quad (2.11)$$

Pela relação (2.11), podemos ver que as curvas características para este problema são linhas retas, todas com a mesma inclinação c , ou seja, são retas paralelas (ver figura 2.2). Por sua

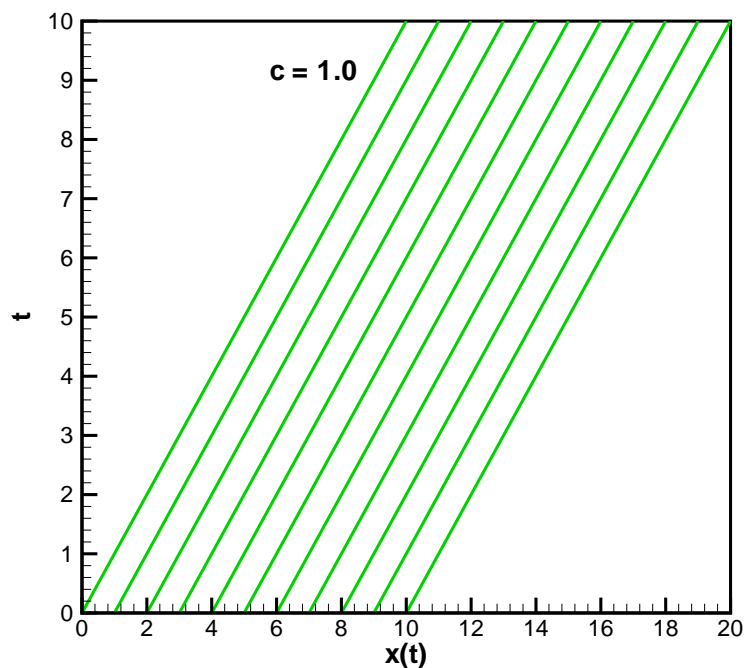


Figura 2.2: Curvas características da equação da advecção (2.7) com velocidade de propagação $c = 1.0$.

vez, resolvendo a equação de compatibilidade, temos que

$$u = f(x_0). \quad (2.12)$$

Esta expressão nos diz que ao longo de uma característica, o valor de u é invariável. Por isso, uma vez que a velocidade de propagação da onda pode ser determinada diretamente da igualdade (2.9), como a constante positiva c , podemos afirmar que u é transportado com velocidade constante para direita. Caso c fosse uma constante negativa, este transporte ocorreria no sentido contrário do eixo x . Por fim, isolando x_0 na equação (2.11) e substituindo

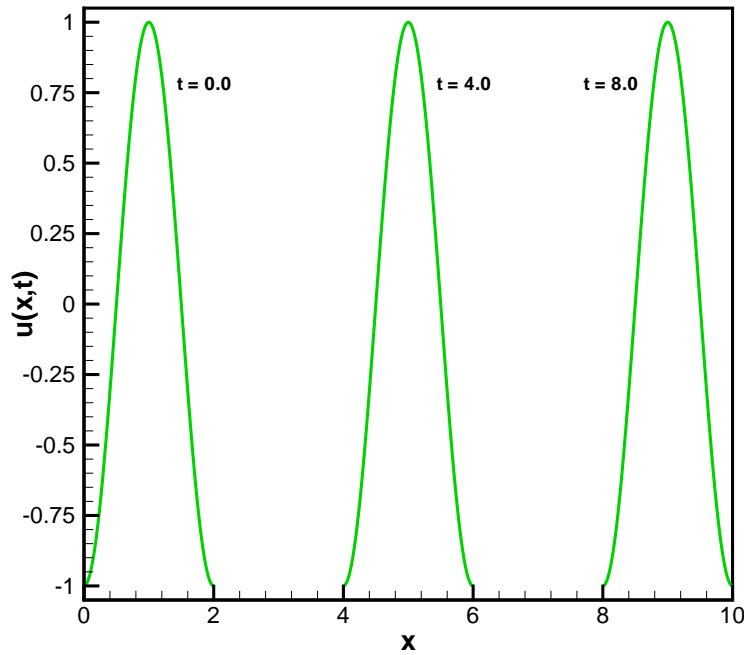


Figura 2.3: Evolução da equação da advecção (2.14) para a condição inicial (2.15).

na relação (2.12), obtemos a solução do nosso problema como

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (2.13)$$

A solução acima é conhecida como solução do tipo onda viajante, pois se trata de uma onda que não muda de forma com a evolução do tempo.

Na figura 2.3, podemos observar a solução da equação da advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ e } t > 0, \quad (2.14)$$

$$u(x, 0) = -\cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (2.15)$$

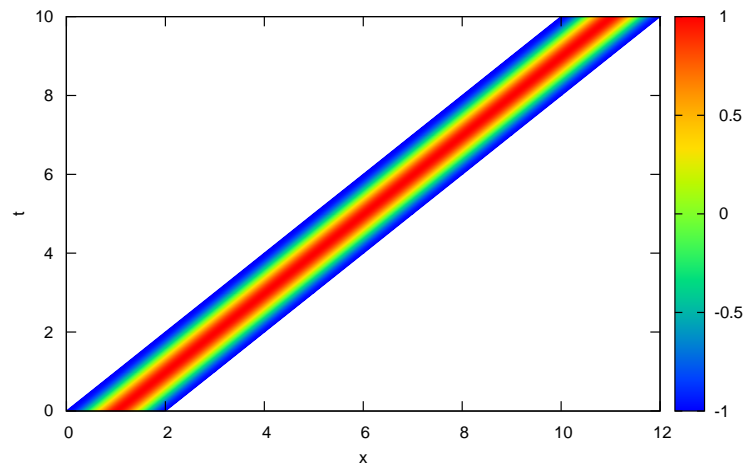


Figura 2.4: Diagrama espaço-temporal da equação da advecção (2.14) para a condição inicial (2.15).

O diagrama espaço-tempo, apresentado na figura 2.4, também foi plotado para o problema de valor inicial acima. Como esperado, essas imagens nos informam que o perfil inicial da onda está se deslocando para a direita, sem mudar a sua forma forma, com velocidade constante $c = 1.0$.

2.4 EQUAÇÃO DA ADVECÇÃO LINEAR

Na seção anterior, estudamos a equação da advecção. Nela, a velocidade de propagação da onda era constante e suas curvas características retas paralelas. Uma pergunta que surge naturalmente é: e no caso que a velocidade não é constante? O que acontece?

Para tentarmos responder esta pergunta, considere o problema de valor inicial para a equação da advecção linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (2.16)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

em que $c(x, t)$ é a função velocidade de propagação da onda.

De acordo com o método das características, obtemos o sistema de EDOs

$$\frac{dx}{dt} = c(x, t), \quad (2.18)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.19)$$

em que $x(0) = x_0$ e $u(0) = f(x_0)$.

Por simplicidade, vamos resolver esse problema para o caso em que $c(x, t) = x$, ou seja, a velocidade de propagação da onda depende apenas da coordenada espacial, x . Neste caso, resolvendo a equação característica (2.18), e rearranjando os termos, obtemos

$$x = x_0 e^t. \quad (2.20)$$

Como podemos perceber pela figura 2.5, as curvas características não são retas como na

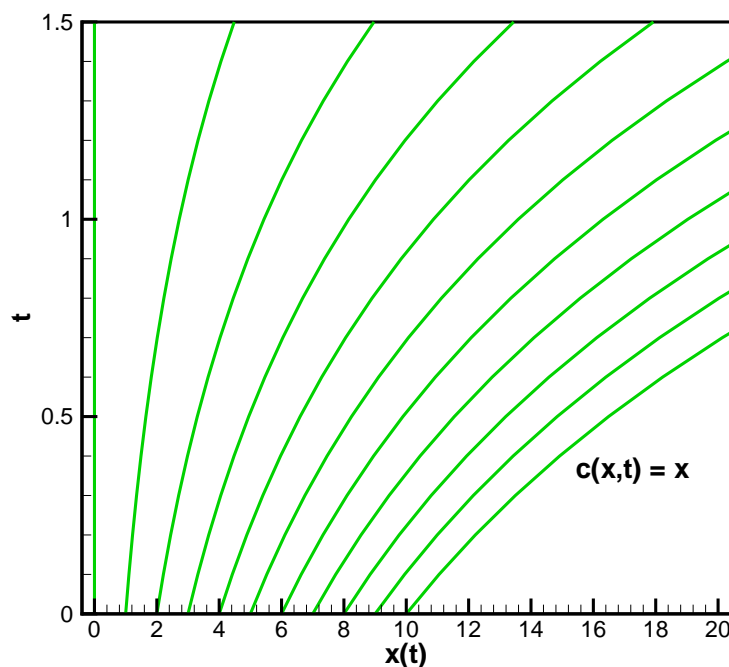


Figura 2.5: Curvas características da equação da advecção linear (2.16) com velocidade de propagação $c(x, t) = x$.

equação (2.11), exceto em $x_0 = 0$, porém a intersecção entre duas curvas quaisquer desse conjunto é um conjunto vazio, ou seja, elas não possuem pontos comuns.

Agora, resolvendo a equação de compatibilidade, obtemos

$$u = f(x_0). \quad (2.21)$$

Pela equação (2.21), podemos concluir que, assim como na equação da advecção, a quantidade u não varia ao longo da curva característica, pois ela só depende do seu valor inicial. Este é o motivo pelo qual uma onda, regida pela equação (2.16), conservará sua amplitude ao longo do tempo.

Pela equação característica, $x_0 = x e^{-t}$. Logo, substituindo essa relação na equação de compatibilidade, podemos concluir que a solução do nosso problema é dada por

$$u(x, t) = f(x e^{-t}). \quad (2.22)$$

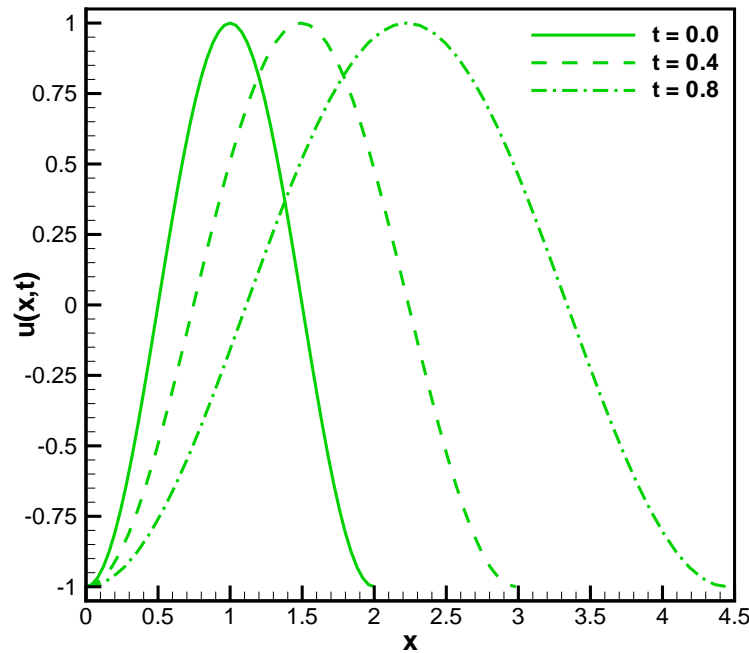


Figura 2.6: Evolução da equação da advecção linear (2.16) para a condição inicial (2.15) e velocidade de propagação $c(x, t) = x$.

Com o auxílio da equação (2.22), podemos perceber que a nossa solução não possui uma estrutura de onda viajante. De fato, se observamos as figuras 2.5 e 2.6, que foram plotadas com a mesma condição inicial do problema (2.14), dada pela equação (2.15), esta observação

fica mais clara. Por essas imagens, constatamos que o período da nossa onda aumenta com o passar do tempo. Logo, o perfil da onda não é conservado ao longo do tempo, em contraste com a solução do tipo onda viajante. Outra observação notável é que $u(0, t) = 0$, para qualquer valor de t . Este fenômeno é explicado pela característica em $x_0 = 0$, que é vertical. Neste caso, não existe transporte ao longo dessa reta. O leitor em busca de mais exemplos

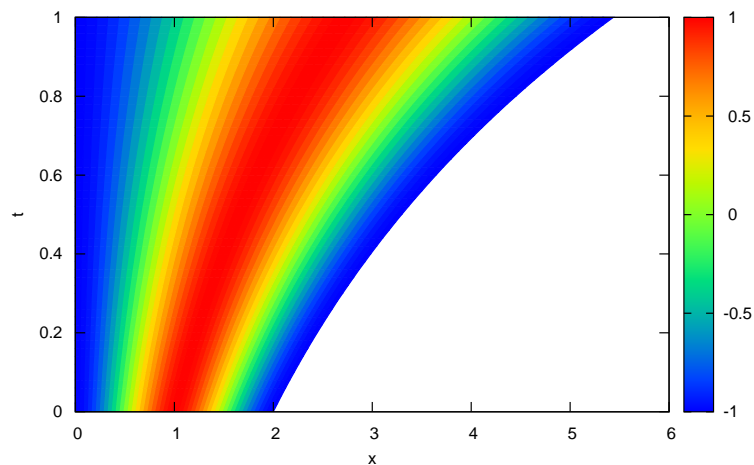


Figura 2.7: Diagrama espaço-tempo da advecção linear (2.16) para a condição inicial (2.15) e velocidade de propagação $c(x, t) = x$.

sobre a equação da advecção linear, pode consultar Strauss (1992).

2.5 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Antes de avançarmos para o caso não linear, é conveniente introduzir uma importante classe de equações diferenciais parciais hiperbólicas, as leis de conservação. Como o próprio nome sugere, elas englobam equações de conservação da física (massa, momento, energia, etc.)

Uma lei de conservação, no espaço unidimensional, é a equação diferencial parcial na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (2.23)$$

em que $u = u(x, t)$ e $F = F(u)$ são, respectivamente, a quantidade conservada e o seu fluxo.

Este tipo de equação surge com muita frequência em problemas de fenômenos de transporte. O motivo de chamarmos (2.23) de lei de conservação, deve-se ao fato de que a taxa de variação da quantidade u , em um intervalo arbitrário $[a, b]$, depender apenas do fluxo nos pontos de fronteira.

Agora, vamos demonstrar essa afirmação. Pela Regra de Leibniz (Boas, 2006), podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx. \quad (2.24)$$

Combinando as relações (2.23) e (2.24), chegamos na igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(u(x, t)) dx. \quad (2.25)$$

Finalmente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Elon, 2008), temos que

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = F(u(a, t)) - F(u(b, t)), \quad (2.26)$$

como queríamos demonstrar.

Para interpretarmos a equação acima, por exemplo, considere um escoamento compressível em um tubo. Se $u(x, t)$ é a massa específica de um fluido, então a integral do lado esquerdo da equação (2.26) representa a taxa de variação da massa fluida contida no intervalo fechado $[a, b]$. O lado direito representa o fluxo nas extremidades do tubo. Em particular, se esse fluxo é nulo,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = 0, \quad (2.27)$$

isto é: a massa total do fluido é conservada.

Como podemos perceber pela própria definição, as equações de conservação são EDPs não lineares, o que introduzirá um fenômeno que ainda não tivemos contato, o choque. Na seção seguinte, usaremos o método das características para estudar a equação (2.23) com

$$F(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad (2.28)$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0. \quad (2.29)$$

A equação acima é conhecida como equação de Burgers invíscida, cuja escolha do nome será explicada com detalhes no capítulo seguinte.

2.6 EQUAÇÃO DE BURGERS INVÍSCIDA

A lei de conservação (2.29)), apresentada na seção anterior, pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.30)$$

Ao escrevê-la desta maneira, podemos perceber que ela possui o mesmo formato das equações de transporte estudadas nesse capítulo. Agora, a velocidade de propagação da onda é $c = u$. Nesta situação, as regiões em que $u > 0$, conhecidas como ondas de compressão, se movem para direita, enquanto ondas de rarefação, em que $u < 0$, se movem para a esquerda.

Para confirmar a descrição feita no parágrafo anterior, novamente utilizaremos o método das características apresentado nesse capítulo, mas agora para o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (2.31)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Neste caso, o sistema de EDOs é simplesmente

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (2.33)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.34)$$

em que $x(0) = x_0$ e $u(0) = f(x_0)$.

Resolvendo a equação de compatibilidade (2.34), obtemos novamente $u = f(x_0)$. Essa igualdade nos diz que assim como nos casos anteriores, a quantidade u é conservada ao longo de uma curva característica. Assim, podemos integrar a equação (2.33) para determinar a

relação

$$x = f(x_0)t + x_0, \quad (2.35)$$

ou ainda,

$$x = ut + x_0. \quad (2.36)$$

Por fim, isolando x_0 na equação (2.36) e substituindo na relação $u = f(x_0)$, determinamos que, ao longo das curvas características, a solução geral do problema é dada por

$$u(x, t) = f(x - ut). \quad (2.37)$$

A equação (2.37) nos fornece uma solução implícita para a equação de Burgers invíscida. Como u é conservada ao longo de uma característica, podemos concluir pela relação (2.36) que as curvas características são linhas retas como na equação da advecção, mas nem todas com a mesma inclinação (salvo o caso em que $f(x) = \text{cte}$). De fato, vamos mostrar que se $f'(x_0) < 0$ para algum ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, duas curvas características, passando por $(x_0, 0)$ e $(x_0 + \delta x_0, 0)$ se interceptam.

Considere as equações características

$$x = f(x_0)t + x_0, \quad (2.38)$$

$$x = f(x_0 + \delta x_0)t + x_0 + \delta x_0. \quad (2.39)$$

Substituindo a primeira equação na segunda e isolando t , temos que

$$t = -\frac{1}{\frac{f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)}{\delta x_0}}. \quad (2.40)$$

No caso limite $\delta x_0 \rightarrow 0$, determinamos que o instante t , no qual as curvas características se interceptam, é dado por

$$t = -\frac{1}{f'(x_0)}. \quad (2.41)$$

Por hipótese, $f'(x_0)$ é estritamente negativa, portanto t é estritamente positivo. Assim, determinamos que o tempo crítico t_c , no qual as características se interceptam pela primeira

vez, é dado por

$$t_c = -\frac{1}{f'(x_c)}, \quad (2.42)$$

em que x_c é o ponto x_0 tal que t_c é mínimo. A partir deste instante de tempo, a solução da equação de Burgers invíscida se torna multivalorada e o método das características não é mais válido. Este tipo de solução não é observada em situações físicas, pois, por exemplo, não é possível encontrarmos velocidades distintas de um escoamento em um mesmo ponto.

Para compreendermos melhor esse fenômeno, considere o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } t > 0, \quad (2.43)$$

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.44)$$

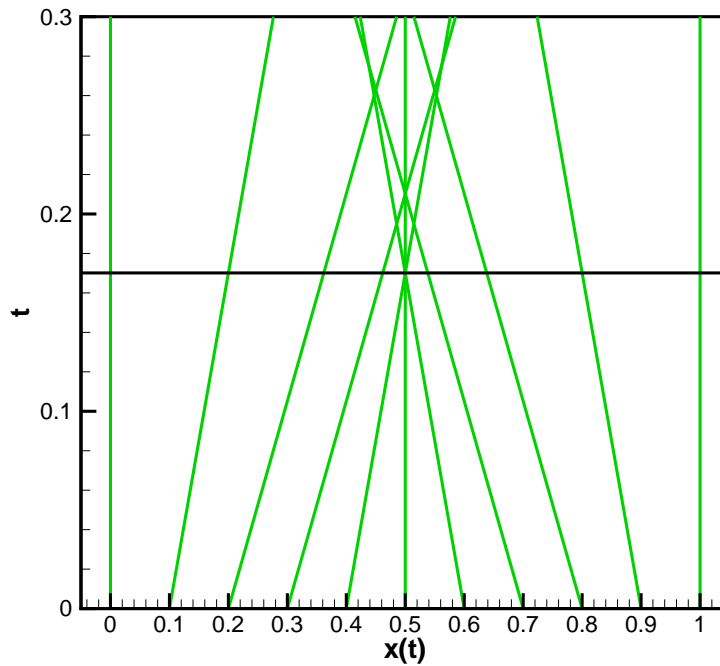


Figura 2.8: Curvas características da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44). A linha horizontal representa o tempo crítico.

Pela figura 2.8, vemos que $x_0 = 0.0$, $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 1.0$ são pontos fixos, isto é, pontos nos quais as características são retas verticais. Entre $x_0 = 0.0$ e $x_0 = 0.5$, observamos uma região em que o coeficiente angular é positivo, portanto é uma região de ondas de compressão. Já entre $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 1.0$, a declividade é estritamente negativa, ou seja, é uma região

de ondas de rarefação. O primeiro instante de tempo em que essas ondas colidem é $1/2\pi$ (aproximadamente 0.16), como determinado pela equação (2.42), pois $f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$, em um período completo, assume o valor mínimo de -2π .

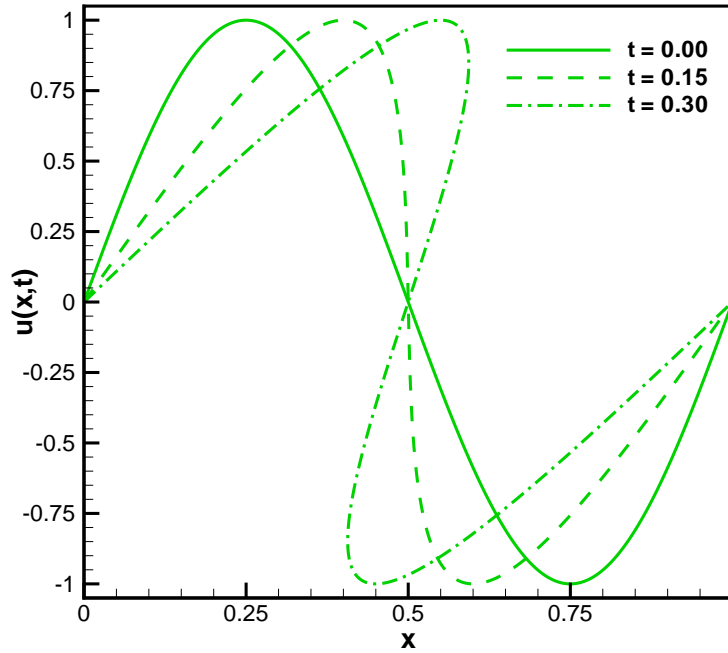


Figura 2.9: Evolução da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44).

Na figura 2.9, vemos a evolução da nossa onda senoidal. Como esperado, o método das características produz uma solução que não é aceitável, visto que existem regiões em que a nossa solução é triplamente valorada. Apesar de podermos construir esse perfil, quando fazemos a análise do diagrama espaço-tempo 2.10, vemos que não podemos evoluir após do tempo crítico sem estabelecer algum critério físico, dado que a partir desse instante de tempo existe uma colisão de ondas de compressão e rarefação. Por isso, a pergunta que devemos responder agora é: Qual critério físico devemos adotar?

Suponha que, em um tempo t , o choque ocorra em $x = s(t)$. Assumindo que, mesmo após o choque, o princípio da conservação de massa continua valendo, devemos ter

$$u_-(t) = (u(s(t)^-, t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^-} u(x, t), \quad u_+(t) = (u(s(t)^+, t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^+} u(x, t), \quad (2.45)$$

de forma que a solução em cada lado da descontinuidade do choque esteja bem definida.

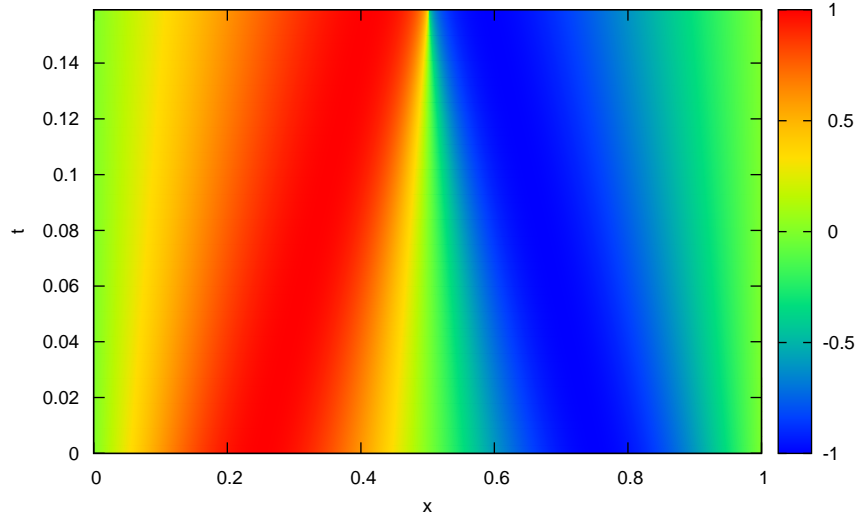


Figura 2.10: Diagrama espaço-tempo da equação de Burgers invíscida (2.43) para a condição inicial (2.44).

Considere um intervalo infinitesimal, entre t e $t + \Delta t$. Durante este tempo, o choque se move de $a = s(t)$ para $b = s(t + \Delta t)$. A massa total do intervalo $[a, b]$ no instante de tempo t , antes do choque, é

$$m(t) = \int_a^b u(x, t) dx \approx \bar{u}_+(t)(b - a) = \bar{u}_+(t)[s(t + \Delta t) - s(t)], \quad (2.46)$$

em que $\bar{u}_+(t)$ é o valor médio de $u(x, t)$ ao longo do intervalo. Após o choque, a massa total é dada por

$$m(t + \Delta t) = \int_a^b u(x, t + \Delta t) dx \approx \bar{u}_-(t)(b - a) = \bar{u}_-(t)[s(t + \Delta t) - s(t)], \quad (2.47)$$

em que $\bar{u}_-(t)$ é o valor médio de $u(x, t + \Delta t)$ ao longo do mesmo intervalo $[a, b]$. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, valem os limites

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{u}_+(t) = u_+(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{u}_-(t) = u_-(t). \quad (2.48)$$

Por conseguinte, a taxa de variação da massa ao longo do choque é

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\bar{x}_-(t) + \bar{x}_+(t)] \quad (2.49)$$

$$= [u_-(t) - u_+(t)] \frac{ds}{dt}, \quad (2.50)$$

que é o produto da velocidade de propagação do choque com a diferença entre o valor na esquerda e na direita do choque.

Por outro lado, para qualquer instante de tempo τ entre t e $t + \Delta t$, vale a relação para o fluxo de massa

$$\frac{1}{2} [u(a, \tau)^2 - u(b, \tau)^2] \rightarrow \frac{1}{2} [u_-(t)^2 - u_+(t)^2], \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0. \quad (2.51)$$

Como a equação de Burgers invíscida é uma lei de conservação, pela equação (2.26), vale a igualdade entre a taxa de variação da massa e o seu fluxo

$$[u_-(t) - u_+(t)] \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} [u_-(t)^2 - u_+(t)^2]. \quad (2.52)$$

Por essa equação, deduzimos a relação de Rankine-Hugoniot

$$\frac{ds}{dt} = \frac{u_-(t) + u_+(t)}{2}, \quad (2.53)$$

isto é, a velocidade do choque é determinada pela média aritmética dos valores na esquerda e na direita da descontinuidade.

Um choque ocorrerá sempre que duas, ou mais, características se cruzarem. Para a ocorrência desse evento, a característica à esquerda do choque tem que possuir uma velocidade (inclinação) maior que aquelas à direita. Como o choque é a média aritmética das inclinações das características na esquerda e na direita, vale a desigualdade

$$u_-(t) > \frac{ds}{dt} = \frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} > u_+(t). \quad (2.54)$$

Na prática, ao adotarmos o princípio da conservação de massa, estabelecemos que a massa total, que em um t arbitrário é a área abaixo da curva $u(x, t)$, deve ser conservada

mesmo após o choque. Essa idéia é traduzida em uma técnica gráfica, conhecida como regra das áreas iguais, discutida e detalhada em Whitham (1974), que consiste em traçar uma reta vertical no ponto em que a área no ponto em que as porções multivaloradas possuem a mesma área.

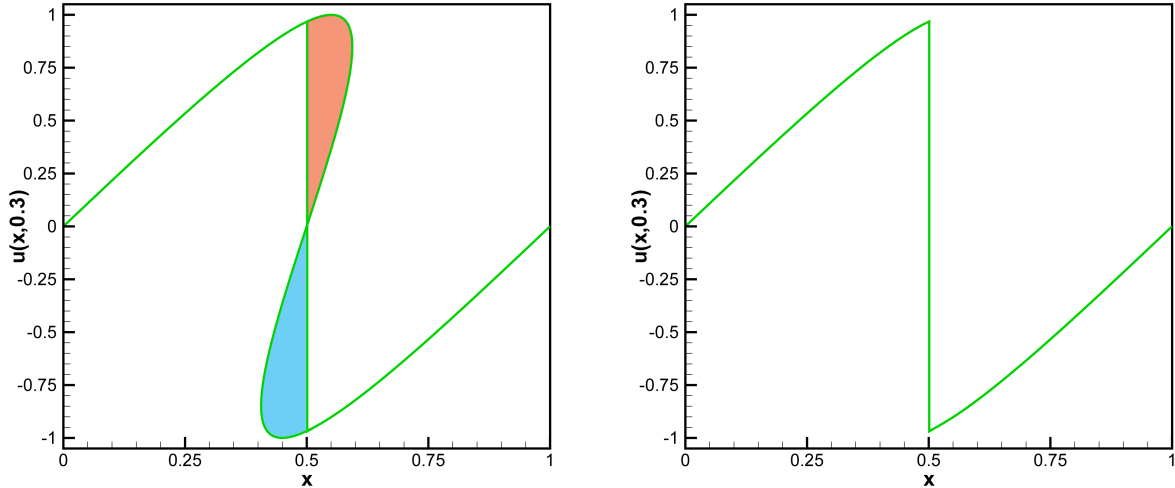


Figura 2.11: Ilustração da regra das áreas iguais para a equação de Burgers invíscida (2.43) com a condição inicial (2.44) em $t = 0.3$.

Na figura 2.11, de acordo com a regra das áreas iguais, a área azul foi adicionada na solução multivalorada, enquanto a área vermelha foi subtraída para produzir uma solução monovalorada, porém descontínua. Para clarearmos mais as idéias, considere o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (2.55)$$

em que a condição inicial, em forma de degrau, é dada por

$$u(x, 0) = \begin{cases} a & \text{se } x < 0, \\ b & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.56)$$

em que $a > b \geq 0$. Neste problema, conhecido como problema de Riemman, as curvas características se interceptam imediatamente (ver 2.12 para o caso $a = 1$ e $b = 0$). Portanto, de acordo com o método das características, para $t > 0$ a nossa solução construída será multivalorada. Mais do que isso, em toda região definida pela desigualdade $bt < x < at$ são assumidos simultaneamente os valores a e b (figura 2.13). Pela regra das áreas iguais, basta

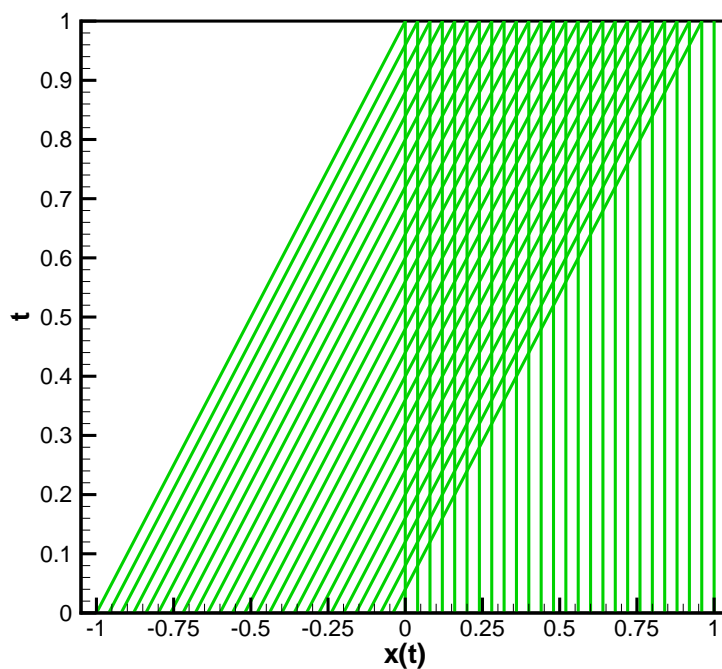


Figura 2.12: Curvas características da equação de Burgers invíscida (2.55) para a condição inicial (2.56). Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$.

traçarmos um segmento de reta ao longo de $x = \frac{1}{2}(a+b)t$, de tal sorte que os dois triângulos, ilustrados na figura 2.13, tenham a mesma área.

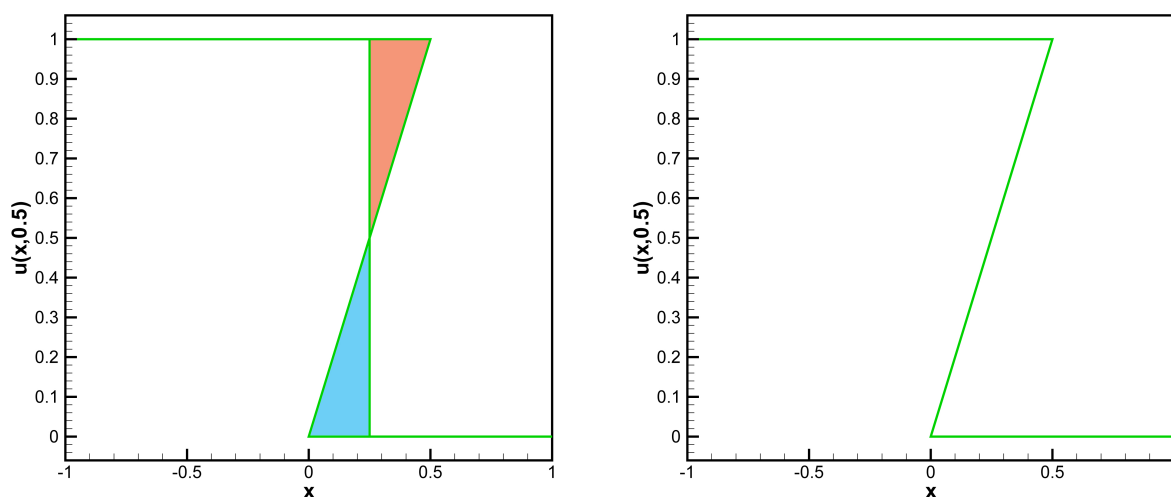


Figura 2.13: Ilustração da regra das áreas iguais para a equação de Burgers invíscida (2.55) com a condição inicial (2.56) em $t = 0.5$. Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$.

Pela equação (2.53), o choque se move com velocidade $c = \frac{a+b}{2}$. Por conseguinte, a

solução monovalorada para essa onda de choque é

$$u(x, t) = \begin{cases} a & \text{se } x < \frac{1}{2}(a + b)t, \\ b & \text{se } x \geq \frac{1}{2}(a + b)t. \end{cases} \quad (2.57)$$

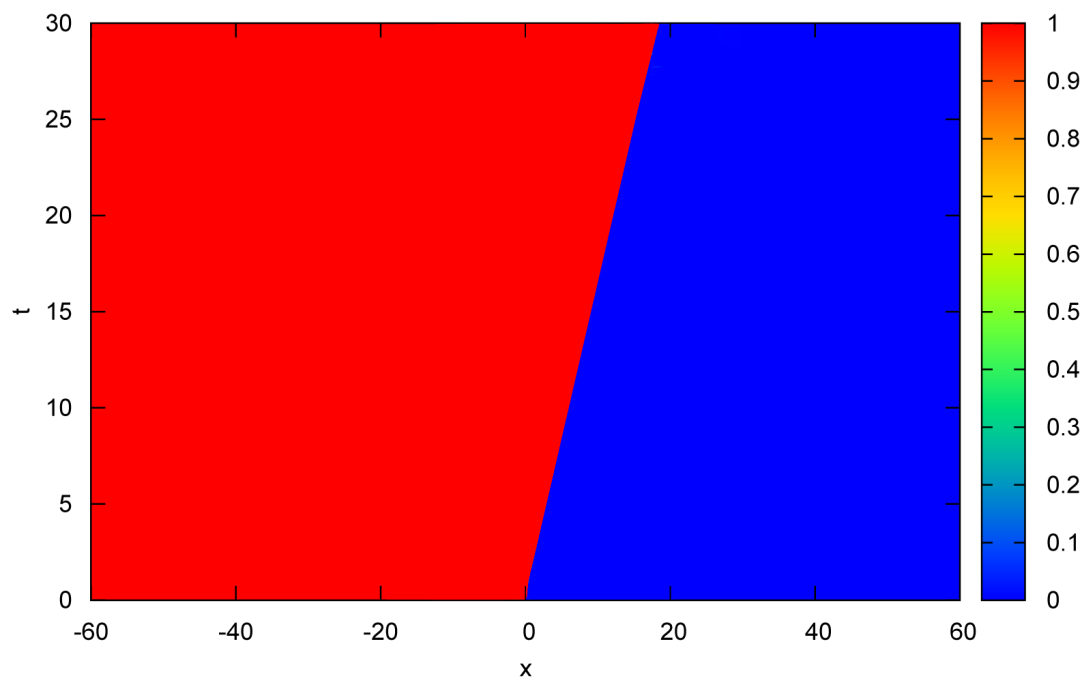


Figura 2.14: Diagrama espaço-tempo da equação de Burgers invíscida (2.55) para a condição inicial (2.56). Foram escolhidos $a = 1$ e $b = 0$.

Infelizmente, nem sempre é possível resolvermos esse problema analiticamente e, muitas vezes, é complicado determinarmos a posição do choque, bem como a sua evolução, para usarmos a regra das áreas iguais. Para contornar esse problema, existem métodos numéricos, por exemplo, os métodos de Godunov e Glimm (LeVeque & Randall, 1992), que satisfazem várias condições não triviais, como a condição de Rankine-Hugoniot. Outra opção é considerar a equação parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.58)$$

no caso limite em que $\nu \rightarrow 0$. Como veremos no próximo capítulo, a inserção desse termo garante a suavidade da solução ao longo tempo, além de impedir o surgimento de soluções multivaloradas, que é uma característica de problemas hiperbólicos não lineares.

2.7 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Até o momento, focamos a nossa atenção em equações diferenciais parciais da forma

$$a \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.59)$$

em que $a = a(x, t, u)$ e $b = b(x, t, u)$. Nesta seção, apresentaremos a solução numérica dessa equação.

A equação (2.59) é uma equação hiperbólica e, naturalmente, requer uma condição inicial. Para não perdermos a generalidade do nosso problema, escolheremos a condição complementar

$$u_0(x, 0) = f(x), \quad (2.60)$$

em que f é uma função arbitrária. Pelo método das características, descrito nesse capítulo, precisamos resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (2.62)$$

em que $c = b/a$. Para resolvermos numericamente este sistema, devemos discretizar a condição inicial (2.60), suposta válida em um intervalo $[a, b]$. Em $t = 0$, adotaremos no eixo espacial uma discretização uniforme no plano $x - u$, com $h \equiv \Delta x$, em que a abscissa do ponto $(x_i, u(x_i, 0))$ é dada por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (2.63)$$

com

$$m = \frac{b - a}{h}. \quad (2.64)$$

O passo de tempo é fixado como $k \equiv \Delta t$. Para $0 \leq t \leq T$, usaremos as definições

$$T = nk \quad (2.65)$$

e

$$t_k = jk, \quad (2.66)$$

em que $j = 0, 1, \dots, n$.

Numericamente, para cada valor de $j = 1, 2, \dots, n$ devemos resolver o sistema formado pelas equações (2.61) e (2.62) para $i = 0, 1, \dots, m$. A primeira destas equações, conhecida como equação de compatibilidade, pode ser resolvida analiticamente como

$$u_{[i]}^j = u_{[i]}^{j-1}, \quad (2.67)$$

ou seja, o valor de u é conservado ao longo de cada característica, um fato que já foi observado anteriormente. Observe que adotamos a notação $\phi_{[i]}^j$ para indicar o valor da grandeza ϕ , avaliada na característica i , no instante de tempo igual a $j\Delta t$. Como o valor de u é constante ao longo de uma característica, a equação (2.62) pode ser integrada diretamente. Porém, interessados em metodologia mais geral, usaremos as relações

$$x_{[i]}^j = x_{[i]}^{j-1} + \frac{k}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (2.68)$$

em que

$$r_1 = c_{[i]}^{j-1}, \quad (2.69)$$

$$r_2 = c_{[i]}^{j-1} + \frac{k}{2}r_1, \quad (2.70)$$

$$r_3 = c_{[i]}^{j-1} + \frac{k}{2}r_2, \quad (2.71)$$

$$r_4 = c_{[i]}^{j-1} + kr_3. \quad (2.72)$$

Acima, foi aplicado o método Runge-Kutta clássico de quarta ordem, abreviado simplesmente por RK4 (Zill & Cullen, 2006). Este método, que é um membro da família Runge-Kutta, pode ser usado para qualquer problema de valor inicial do tipo $y' = \Omega(y, t)$. Neste caso, a

aproximação por RK4 de $y(t_j)$ é

$$y(t_j) = y(t_{j-1}) + \frac{k}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (2.73)$$

em que

$$r_1 = \Omega(t_{j-1}, y_{j-1}), \quad (2.74)$$

$$r_2 = \Omega\left(t_{j-1} + \frac{k}{2}r_1, y_{j-1} + \frac{k}{2}r_1\right), \quad (2.75)$$

$$r_3 = \Omega\left(t_{j-1} + \frac{k}{2}r_2, y_{j-1} + \frac{k}{2}r_2\right), \quad (2.76)$$

$$r_4 = \Omega(t_{j-1} + kr_3, y_{j-1} + kr_3). \quad (2.77)$$

Capítulo 3

EQUAÇÃO DE BURGERS

3.1 INTRODUÇÃO

Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

em que $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática, conhecida como equação de Burgers, em homenagem ao físico holandês Johannes Martinus Burgers, que a estudou como um modelo matemático simplificado de turbulência. Ela foi introduzida por Bateman (1915) e resolvida independentemente por Hopf (1950) e Cole (1951).

A equação de Burgers é uma das equações mais importantes da mecânica dos fluidos, pois representa um modelo que combina efeitos tanto de transporte não linear quanto de difusão. Além disso, podemos perceber que ela é similar a equação unidimensional da conservação de momento linear, também conhecida como equação de Navier-Stokes, na ausência do gradiente de pressão e de forças de campo. Neste capítulo, desenvolveremos estudos analíticos e numéricos para melhor compreendermos o comportamento da equação de Burgers.

3.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para iniciarmos os nossos estudos acerca da equação de Burgers, devemos primeiramente adimensionalizar a equação (3.1). Para tal, considere as seguintes grandezas adimensionais

$$u^* = \frac{u}{u_c}, \quad x^* = \frac{x}{x_c}, \quad t^* = \frac{u_c t}{x_c}, \quad (3.2)$$

em que u_c e x_c são grandezas características, respectivamente, de velocidade e comprimento. Assim, substituindo as relações em (3.2) na equação de Burgers (3.5), obtemos

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\nu}{u_c x_c} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} = 0. \quad (3.3)$$

Considere o parâmetro adimensional

$$\text{Re} = \frac{u_c x_c}{\nu}, \quad (3.4)$$

em que Re é o número de Reynolds (Batchelor, 1967). Omitindo o sobrescrito “*” da equação adimensionalizada (3.3), no referiremos, a partir deste momento, a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

como equação de Burgers.

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE RICCATI

Como perceberemos ao longo desse capítulo, a equação de Burgers está intimamente ligada com a equação diferencial ordinária não linear

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x), \quad b(x) \neq 0 \quad (3.6)$$

conhecida como equação de Riccati, em homenagem ao matemático e físico italiano Jacopo Francesco Riccati (Boyce & DiPrima, 2006).

Em geral, obter soluções analíticas para equações diferenciais não lineares pode ser uma tarefa muito difícil. Felizmente, a equação diferencial de Riccati pertence a uma classe muito especial, pois apesar de ser não linear, ela pode ser transformada em uma equação diferencial linear.

3.3.1 Solução geral das equações diferenciais de Riccati

Se alguma solução particular $y_p = y_p(x)$ seja conhecida. Substituindo na equação (3.6) a transformação não linear

$$y = y_p(x) + \frac{1}{v(x)}, \quad (3.7)$$

nos fornece

$$y'_p(x) - \frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} = a(x) \left[y_p(x) + \frac{1}{v} \right] + b(x) \left[v(x) + \frac{1}{v} \right]^2 + c(x), \quad (3.8)$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dx} = - \left[a(x)y_p(x) + b(x)g(x)^2 + c(x) - y'_p(x) \right] v^2 - \left[a(x) + 2b(x)y_p(x) \right] v - b(x). \quad (3.9)$$

Note que

$$y'_p(x) = a(x)y_p(x) + b(x)y_p^2 + c(x), \quad (3.10)$$

pois $y_p(x)$ é uma solução da EDO original. Por conseguinte, o termo entre colchetes da equação (3.9) é identicamente nulo. Dessa maneira, temos que

$$\frac{dv}{dx} = -(a + 2by_p)v - b. \quad (3.11)$$

Após resolvermos essa equação, basta usar a relação (3.7) para retornarmos à variável original do nosso problema não linear. Note que $v(x)$ conterá uma única constante arbitrária.

Assim, mostramos que é possível cancelar o efeito não linear quadrático da equação original. Essas equações foram estudadas de modo extensivo por Riccati. Entretanto, foi o grande matemático e físico Leonhard Paul Euler, em 1760, quem anunciou e demonstrou tal resultado (Boyce & DiPrima, 2006).

3.3.2 Redução a uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

Outra transformação não linear notável é

$$y = -\frac{v'}{v} \frac{1}{b(x)}, \quad (3.12)$$

que após alguns cálculos simples, nos fornece

$$b(x)v'' - [b'(x) + a(x)b(x)]v' + [b(x)]^2c(x)v = 0. \quad (3.13)$$

Nesse caso, podemos observar que a equação de Riccati pode ser levada em uma equação linear homogênea de segunda ordem. Essa transformação, em particular, será a base para a solução analítica do problema de Cauchy para a equação de Burgers.

3.4 SOLUÇÃO DO TIPO ONDA VIAJANTE

Bateman (1915) investigou a solução da equação de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.14)$$

empregando uma ferramenta estudada no capítulo anterior: a solução do tipo onda viajante. Neste artigo, uma das propostas de Bateman era mostrar que soluções das equações do movimento de um fluido viscoso podem tornar-se descontínuas quando a viscosidade tende para zero.

Seja

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (3.15)$$

em que f é uma função a ser determinada e c é a velocidade de propagação da onda e defina

$$s = x - ct. \quad (3.16)$$

Note que $u_t = -cf'$, $u_x = f'$ e $u_{xx} = f''$. Portanto, a equação (3.14) pode ser reescrita como

$$-cf' + ff' - \frac{1}{\text{Re}}f'' = 0. \quad (3.17)$$

Integrando a equação acima, obtemos a equação de Riccati com coeficientes constantes

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{\text{Re}}f' = A, \quad (3.18)$$

em que A é uma constante de integração. Aplicando a transformação

$$f = -\frac{1}{-\frac{\text{Re}}{2}} \frac{v'}{v}, \quad (3.19)$$

obtemos

$$-\frac{1}{2\text{Re}^2}v'' + \frac{c}{4}v' + \frac{A}{4}v = 0. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é uma equação diferencial com coeficientes constantes, cuja equação característica é

$$-\frac{1}{2\text{Re}^2}m^2 + \frac{c}{4}m + \frac{A}{4} = 0. \quad (3.21)$$

As raízes da equação (3.21) são

$$m_1 = -\frac{\text{Re}}{2}f_1, \quad m_2 = \frac{\text{Re}}{2}f_2, \quad (3.22)$$

em que $f_1 = c - \sqrt{c^2 + 2A}$ e $f_2 = c + \sqrt{c^2 + 2A}$. Portanto, a solução geral da equação (3.20) é

$$v(s) = B_1 e^{-\frac{\text{Re}}{2}f_1 s} + B_2 e^{\frac{\text{Re}}{2}f_2 s}, \quad (3.23)$$

em que B_1 e B_2 são constantes arbitrárias. Substituindo a equação (3.23) na (3.19), e fazendo algumas manipulações algébricas, temos que

$$f(s) = B \frac{f_2 + f_1 \exp\{Ks\}}{1 + \exp\{Ks\}}, \quad (3.24)$$

em que $K = \frac{\text{Re}}{2}(f_2 - f_1)$ e $B = B_2/B_1$. Pela equação (3.24), percebemos que a constante

B é um fator de escala. Sem prejuízo, podemos tomar $B = 1$. Por conseguinte, f é uma função suave que decresce monotonicamente de $f(-\infty) = f_2$ para $f(\infty) = f_1$, em que $s = 0$ é o ponto de inflexão.

Finalmente, a solução do tipo onda viajante para a equação de Burgers, conhecida por onda de choque de Burgers, é dada por

$$u(x, t) = f(x - ct) = \frac{f_2 + f_1 \exp \{K(x - ct)\}}{1 + \exp \{K(x - ct)\}}, \quad (3.25)$$

em que a velocidade de propagação da onda é determinada pelas definições de f_1 e f_2 como

$$c = \frac{f_1 + f_2}{2}. \quad (3.26)$$

Pela regra de l'Hôpital, fácil verificar que

$$\lim_{Re \rightarrow \infty^+} u(x, t) = \begin{cases} f_2 & \text{se } x < ct, \\ f_1 & \text{se } x > ct. \end{cases} \quad (3.27)$$

Portanto, como observado por Bateman (1915), a continuidade da solução é perdida e, conseqüentemente, a curva deixa de ser suave.

Para melhor compreendermos o que foi mostrado nessa seção, considere o problema de valor de contorno para a equação de Burgers com

$$u(-\infty, t) = 1 \text{ e } u(\infty, t) = 0. \quad (3.28)$$

Logo, com auxílio da equação (3.25), encontramos que $f_1 = 0$ e $f_2 = 1$. Assim, determinamos que a constante de integração A é idênticamente nula e a velocidade de propagação da onda é $c = \frac{1}{2}$.

Nesse caso,

$$u(x, t) = f(x - t/2) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{\text{Re}(x-t/2)}{2} \right\}} \quad (3.29)$$

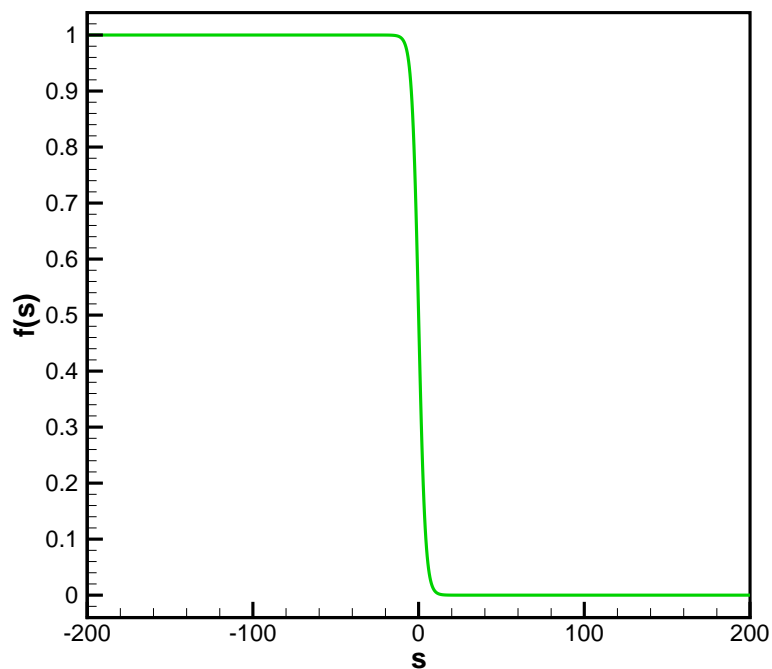


Figura 3.1: Perfil da solução onda viajante (3.29) para $Re = 1.0$ e as condições de contorno (3.28).

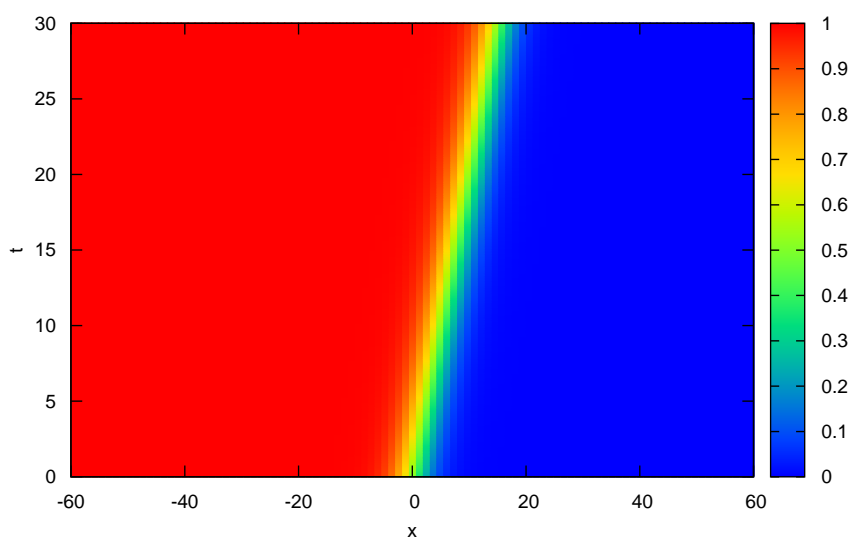


Figura 3.2: Diagrama espaço-tempo da solução onda viajante (3.29) para $Re = 1.0$ e as condições de contorno (3.28).

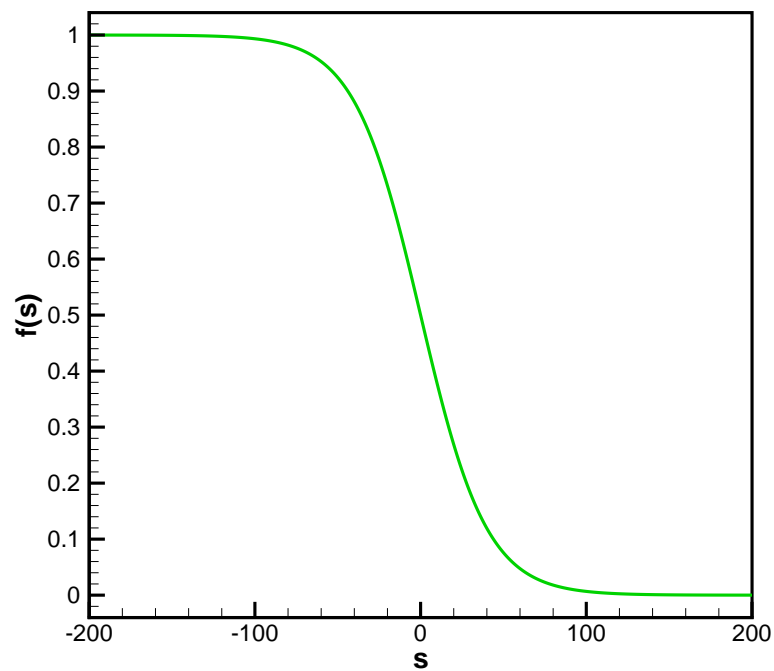


Figura 3.3: Perfil da solução onda viajante (3.29) para $Re = 0.1$ e as condições de contorno (3.28).

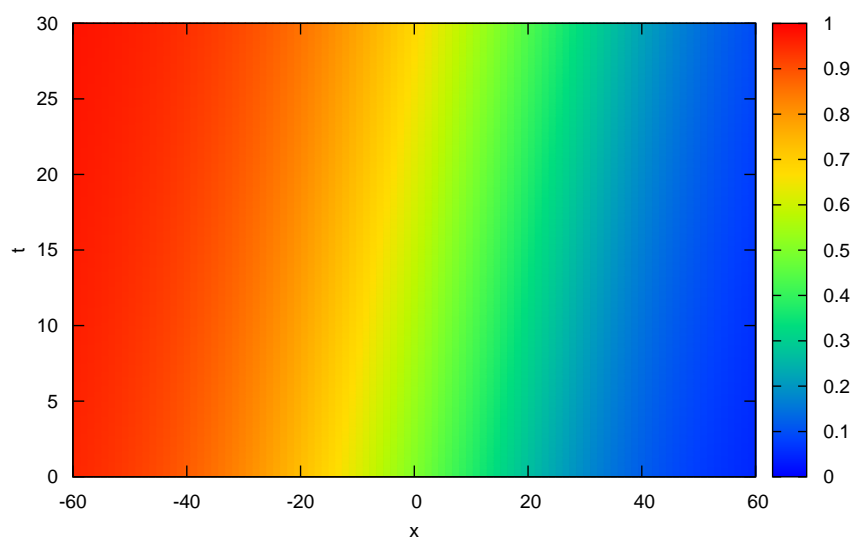


Figura 3.4: Diagrama espaço-tempo da solução onda viajante (3.29) para $Re = 0.1$ e as condições de contorno (3.28).

e

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow \infty^+} u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (3.30)$$

Pelas figuras 3.4 e 3.5, podemos verificar que a solução obtida é de fato uma solução do tipo onda viajante, caracterizada por manter sua forma durante todo tempo e propagar com velocidade constante $c = 1/2$, limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. É interessante perceber que apesar da presença do termo difusivo da equação de Burgers, é possível compensar esse efeito com o mecanismo de transporte não linear, ou seja, a presença de um mecanismo de dissipativo não garante o processo de difusão. Outra observação pertinente é que a influência da viscosidade fica evidente. De fato, como esperado, ao compararmos os diagramas espaço-tempo 3.4 e 3.5 com a figura 2.14, vemos que ao diminuirmos a viscosidade, vamos ficando com um perfil semelhante ao do caso invíscido da equação de Burgers para o problema de Riemman com

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Daí, podemos tirar mais uma conclusão importante: o problema de Riemman é a solução do tipo onda viajante para a equação de Burgers invíscida.

3.5 SOLUÇÃO POR SIMILARIDADE

O procedimento utilizado na seção anterior nos permitiu reduzir a equação de Burgers, que é uma equação diferencial parcial, em uma equação diferencial ordinária. Podemos tentar repetir essa estratégia com outro procedimento: a solução por similaridade. Na matemática, uma solução por similaridade é uma solução em que uma mudança de variáveis permite a redução do número de variáveis independentes do problema.

Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) &= A\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que A é uma grandeza adimensional e $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac (Boyce & DiPrima, 2006) definida como tendo as propriedades

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (3.34)$$

Rigorosamente, $\delta(x)$ não pode ser classificada como função, porque o seu valor em $x = 0$ não é finito. Na literatura matemática ela é classificada como uma função generalizada, ou distribuição.

Para a construção da nossa solução por similaridade, considere a transformação

$$u(x, t) = t^m F(S), \quad (3.35)$$

em que F é uma função a ser determinada e o parâmetro S é definido por

$$S = xt^n. \quad (3.36)$$

Neste caso, m e n são os valores para os quais a relação funcional (3.35) representa, de fato, uma solução da equação de Burgers (3.32).

A partir da equação (3.35), podemos estabelecer as seguintes identidades:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{m-1} F(m + nF'); \quad (3.37)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = t^{2m+n} F F'; \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{m+2n} F''. \quad (3.39)$$

Substituindo as equações (3.37), (3.38) e (3.39) na (3.32), obtemos que

$$t^{m-1}(m + nF')F + t^{2m+n} F F' - \frac{1}{\text{Re}} t^{m+2n} F'' = 0. \quad (3.40)$$

Portanto, para que a nossa EDP admita solução por similaridade, é necessário que

$$m - 1 = 2m + n = m + 2n. \quad (3.41)$$

Pela equação (3.41), segue imediatamente que $m = n = -1/2$. Assim, o funcional (3.35) assume a forma

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} F(xt^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.42)$$

Por conveniência, o funcional acima será substituído, de tal forma que

$$u = \frac{1}{\sqrt{\text{Re } t}} f(s), \quad (3.43)$$

em que f é o novo funcional e

$$s = x\sqrt{\frac{\text{Re}}{4t}}. \quad (3.44)$$

Assim, substituindo a relação (3.43) no problema (3.32), temos que

$$\begin{aligned} f + sf' - ff' + \frac{1}{2}f'' &= 0, \\ f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Fisicamente, as condições de contorno nos dizem que a onda se propaga com velocidade finita de forma que não temos qualquer distúrbio no infinito. Note que a nossa EDO em questão pode ser reescrita como

$$f'' - (f^2)' + 2(sf)' = 0. \quad (3.46)$$

Assim, integrando o problema de valor de contorno acima, obtemos

$$f' - f^2 + 2sf = 0, \quad (3.47)$$

que é uma equação de Riccati. Fazendo a substituição

$$f(s) = -\frac{v'}{v}, \quad (3.48)$$

conforme a equação (3.12), obtemos a equação

$$\frac{v''}{v'} + 2s = 0, \quad (3.49)$$

cuja solução é dada por

$$v = -B_1 \operatorname{erfc}(s) + B_2, \quad (3.50)$$

em que B_1 e B_2 são constantes de integração e $\operatorname{erfc}(s)$ é a função erro complementar (Boas, 2006) definida por

$$\operatorname{erfc}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} \exp\{-y^2\} dy. \quad (3.51)$$

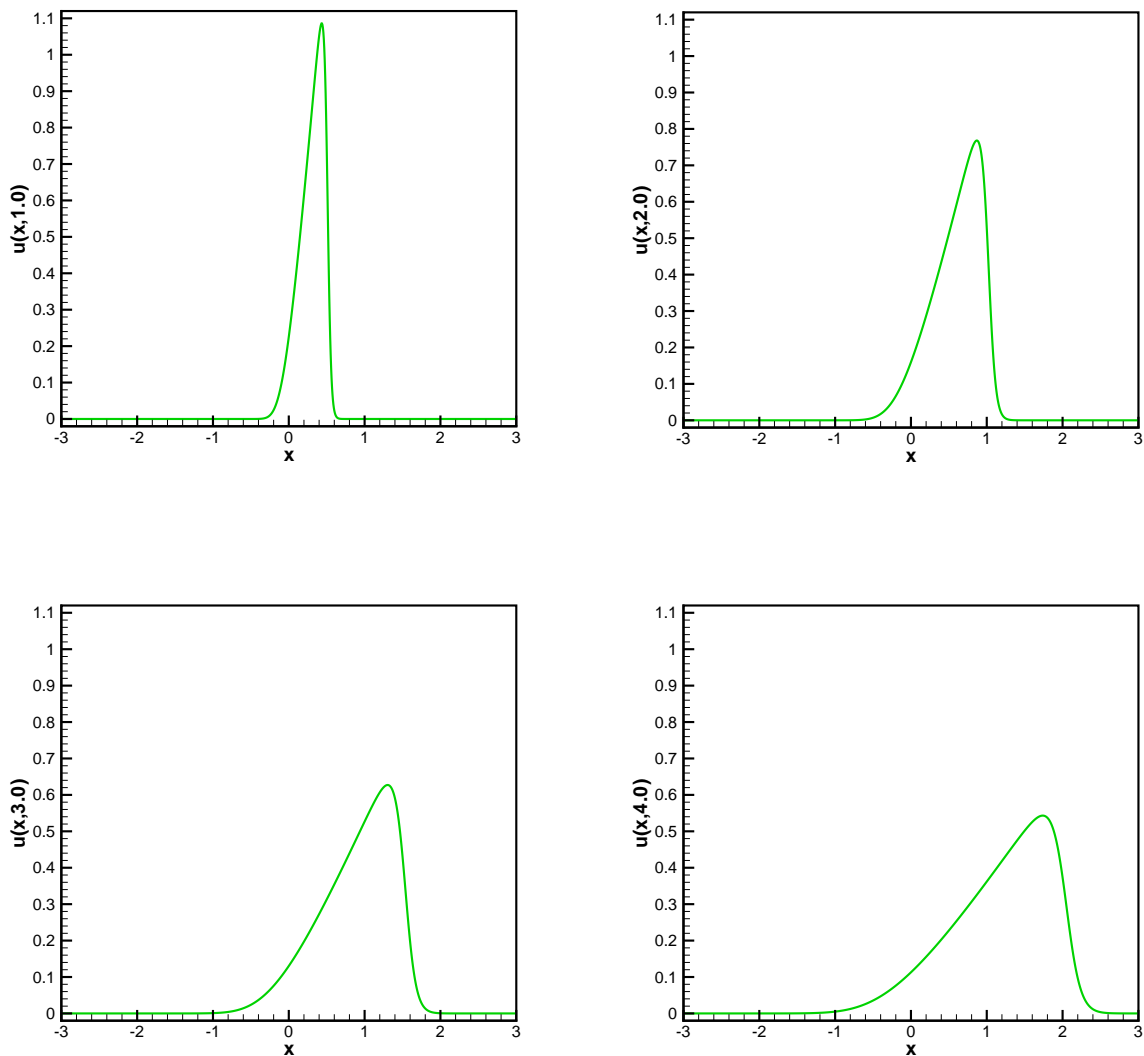


Figura 3.5: Perfil da onda triangular (3.60) em diferentes instantes de tempo para $A = 1.0$ e $\operatorname{Re} = 25.0$.

Desta maneira, substituindo a equação (3.50) em (3.48), obtemos sem dificuldades que

$$f(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\{-s^2\}}{\operatorname{erfc}(s) - B}, \quad (3.52)$$

em que $B = B_2/B_1$ é uma constante de integração arbitrária. Para determiná-la, note que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = A, \quad (3.53)$$

ou seja,

$$A = \frac{2}{\operatorname{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \quad (3.54)$$

$$= \frac{2}{\operatorname{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\{-s^2\}}{\operatorname{erfc}(s) - B} ds. \quad (3.55)$$

Para resolver a integral em (3.55), perceba que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\{-s^2\}}{\operatorname{erfc}(s) - B} = \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{1}{\operatorname{erfc}(s) - B} \right]. \quad (3.56)$$

Por conseguinte,

$$A = \frac{2}{\operatorname{Re}} \ln \left[\frac{1}{\operatorname{erfc}(s) - B} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (3.57)$$

$$= \frac{2}{\operatorname{Re}} \ln \left(1 - \frac{2}{B} \right). \quad (3.58)$$

Dessa maneira, temos que

$$B = \frac{2}{1 - \exp\{\gamma\}}, \quad (3.59)$$

e a solução do nosso problema, conhecida como onda triangular, é

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{4}{\pi \operatorname{Re} t}} \frac{e^{-s^2}}{\operatorname{erfc}(s) + 2/(e^\gamma - 1)}, \quad (3.60)$$

em que $\gamma = \operatorname{Re} A/2$.

Pelas figuras 3.5 e 3.6, vemos que, diferentemente da solução onda de choque de Burgers, a onda triangular apresenta um comportamento difusivo e instável (i.e., a forma da onda não é conservada).

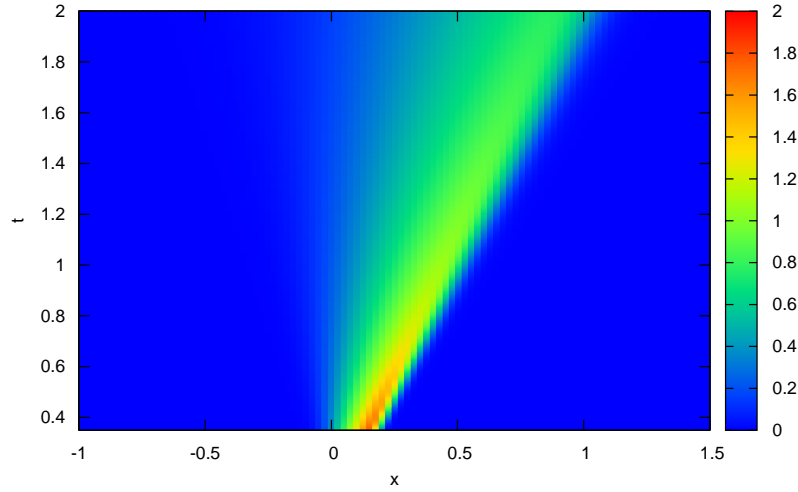


Figura 3.6: Diagrama espaço-tempo da onda triangular (3.60) para $A = 1.0$ e $\text{Re} = 25.0$.

3.6 TRANSFORMAÇÃO DE COLE-HOPF

Tanto na construção da solução do tipo onda viajante, quanto na solução por similaridade, o problema de resolver a equação de Burgers se resumiu a resolver uma equação de Riccati. Entretanto, essas são apenas soluções particulares. Em nenhum momento conseguimos resolver propriamente o problema de Cauchy para a equação de Burgers. Felizmente, existe uma transformação similar à transformação de Riccati que é capaz de linearizar a equação de Burgers.

Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (3.61)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.62)$$

A transformação não linear

$$u = -\frac{2}{\text{Re}} \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad (3.63)$$

conhecida como transformação de Cole-Hopf, em homenagem aos matemáticos Julian David

Colee Heinz Hopf, converte a equação (3.61) na equação

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \varphi = 0. \quad (3.64)$$

Por conseguinte, se $\varphi = \varphi(x, t)$ é solução do problema de valor inicial para a equação de difusão unidimensional transiente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (3.65)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.66)$$

então $u = u(x, t)$, dado pela transformação de Cole-Hopf (3.63), é solução da equação de Burgers.

O problema de Cauchy para a equação de difusão unidimensional transiente possui solução analítica, como será exposto a seguir. Aplicando a transformada de Fourier (com respeito a x) na equação (3.65), obtemos

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} - \frac{\omega^2}{\text{Re}} \hat{\varphi} = 0, \quad (3.67)$$

em que ω é a frequência angular e

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(x, t) dx. \quad (3.68)$$

Para cada ω fixado, a equação (3.68) é uma equação diferencial ordinária em t , que pode ser integrada (pelo método do fator integrante) para determinarmos a equação

$$\hat{\varphi}(\omega, t) = C e^{-\frac{\omega^2}{\text{Re}} t}, \quad (3.69)$$

em que C é a constante de integração. Para encontrá-la, basta usarmos a condição inicial (3.66):

$$C = \hat{\varphi}(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi_0(x) dx = \hat{\varphi}_0(\omega). \quad (3.70)$$

Desta maneira, para cada $t > 0$, podemos concluir que

$$\hat{\varphi}(\omega, t) = \hat{\varphi}_0(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{\text{Re}} t}, \quad (3.71)$$

Observe que

$$e^{-\frac{\omega^2}{\text{Re}}t} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}^{-1} t}} e^{-\frac{\text{Re}}{4} \frac{x^2}{t}} \right], \quad (3.72)$$

em que \mathcal{F} é a transformada de Fourier. Portanto, usando o resultado sobre a transformada de Fourier do produto de convolução de funções (Figueiredo, 2007)

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g], \quad (3.73)$$

em que f e g são funções arbitrárias e $*$ é o produto de convolução, encontramos que

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4 \text{Re}^{-1} \pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \exp \left\{ -\frac{\text{Re}}{4} \frac{(x-y)^2}{t} \right\} dy. \quad (3.74)$$

Combinando as equações (3.63) e (3.74), obtemos

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} \varphi_0(y) \exp \left\{ -\frac{\text{Re}}{4} \frac{(x-y)^2}{t} \right\} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \exp \left\{ -\frac{\text{Re}}{4} \frac{(x-y)^2}{t} \right\} dy}. \quad (3.75)$$

Agora, falta apenas estabelecer a conexão entre φ_0 e u_0 para concluirmos a solução do problema de valor inicial para a equação de Burgers. Para resolver tal questão, note que a equação (3.63) pode ser escrita em função de φ como

$$\varphi(x, t) = \exp \left\{ -\frac{\text{Re}}{2} \int_0^x u(v, t) dv \right\}. \quad (3.76)$$

Em particular, a equação (3.76) nos fornece

$$\varphi(x, 0) = \exp \left\{ -\frac{\text{Re}}{2} \int_0^x u_0(v) dv \right\}, \quad (3.77)$$

assim fechando a solução apresentada em (3.75). O resultado apresentado é notável, pois através de uma transformação não linear, fomos capazes de mapear a equação de Burgers na equação de difusão unidimensional transiente, uma equação diferencial parcial linear com solução analítica.

3.6.1 Onda de choque de Burgers

Para mostrarmos o poder da transformação de Cole-Hopf, bem como o efeito suavizador do termo dissipativo, vamos estudar o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (3.78)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 0, \\ b & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.79)$$

em que $a > b \geq 0$. Este problema, conhecido como problema de Riemman, já foi estudado no segundo capítulo para o caso invíscido da equação de Burgers. Substituindo a condição inicial (3.79) na equação (3.77), temos que

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a \text{Re}}{2}x} & \text{se } x < 0, \\ e^{-\frac{b \text{Re}}{2}x} & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.80)$$

Agora, usando a equação (3.80) na (3.75), determinamos, após algumas manipulações algébricas, que

$$u(x, t) = a + \frac{b - a}{1 + h(x, t) \exp \left\{ \frac{(b - a) \text{Re}}{2} (x - ct) \right\}}, \quad (3.81)$$

em que

$$h(x, t) = \frac{\text{erfc} \left(\frac{x - bt}{\sqrt{4 \text{Re}^{-1} t}} \right)}{\text{erfc} \left(\frac{x - at}{\sqrt{4 \text{Re}^{-1} t}} \right)}, \quad c = \frac{a + b}{2}. \quad (3.82)$$

Na figura 3.7, podemos visualizar a solução (3.81), com $a = 1.0$, $b = 0.1$ e $\text{Re} = 25.0$, em diferentes instantes de tempo. Nela, verificamos que a descontinuidade na condição inicial, apresentada em forma de choque, evolui rapidamente para uma curva suave. Para $\text{Re} \rightarrow \infty$, podemos verificar sem dificuldade que $h(x, t) \rightarrow 1$. Neste caso, como espereado, a equação (3.81) é reduzida a que é exatamente a solução onda de choque (2.57) do problema de Riemman obtida no segundo capítulo. Nesta solução, a velocidade de propagação do choque é a média aritmética dos valores iniciais a e b .

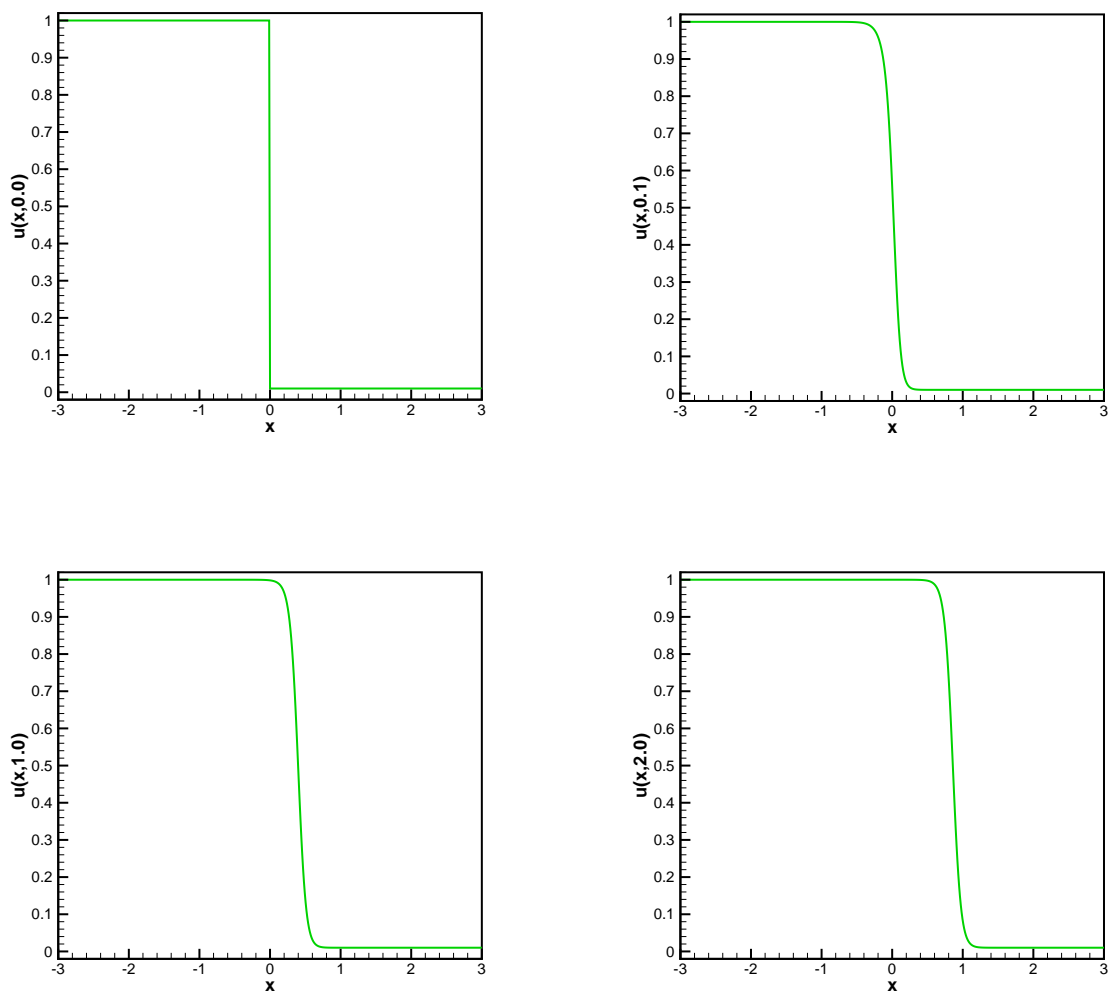


Figura 3.7: Perfil da onda de choque (3.81) em diferentes instantes de tempo para $a = 1.0$, $b = 0.1$ e $\text{Re} = 25.0$.

3.6.2 Onda triangular

Mais um exemplo notável é o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (3.83)$$

$$u(x, 0) = A\delta(x), \quad (3.84)$$

em que A é um valor constante.

Para esse caso, a equação (3.77) nos fornece

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{A\text{Re}}{2}\right\} & \text{se } \xi < 0, \\ 1 & \text{se } \xi \geq 0. \end{cases} \quad (3.85)$$

Agora, substituindo a equação (3.85) na (3.75), obtemos

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{4}{\pi \operatorname{Re} t}} \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4 \operatorname{Re}^{-1} t}}\right)^2}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4 \operatorname{Re}^{-1} t}}\right) + 2/(e^{\frac{A \operatorname{Re}}{2}} - 1)}. \quad (3.86)$$

Novamente recuperamos uma solução já obtida anteriormente: a onda triangular (3.60). Como podemos perceber, a transformação de Cole-Hopf é uma ferramenta poderosa para a equação de Burgers. Entretanto, avaliar analiticamente as integrais na equação (3.76) pode ser muito complicado ou ainda impossível. Nesses casos, devemos recorrer a uma abordagem numérica

3.7 SOLUÇÃO NUMÉRICA POR DIFERENÇAS FINITAS

Apesar de possuímos uma solução analítica, para um problema de valor inicial, com o intuito de compreendermos melhor a equação de Burgers, apresentaremos também uma solução numérica.

3.7.1 Método de solução

O plano $x - t$ será discretizado por uma malha com $h \equiv \Delta x$ e com um passo de tempo $k \equiv \Delta t$, em que os pontos (x_i, t_j) discretizados da malha são dados por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (3.87)$$

e

$$t_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (3.88)$$

em que

$$m = \frac{b - a}{h} \text{ e } n = \frac{T}{k}. \quad (3.89)$$

Na definição acima, $a \leq x \leq b$ e $0 \leq t \leq T$.

Para construirmos o nosso método, usaremos as seguintes fórmulas em diferenças finitas (Fortuna, 2000)

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{k}, \quad (\text{aproximação avançada de primeira ordem}) \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2h}, \quad (\text{aproximação centrada de segunda ordem}) \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{h^2}, \quad (\text{aproximação centrada de segunda ordem}) \quad (3.92)$$

em que $f = f(x, t)$ é uma função arbitrária.

Adotando o método implícito de Crank-Nicolson (Iserles, 2009), na equação de Burgers (3.5), obtemos

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{F_{i+1}^{j+1} - F_{i-1}^{j+1}}{2h} \right\} - \frac{1}{2 \text{Re}} \left\{ \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right\} + \tilde{r}_i^j = 0, \quad (3.93)$$

em que

$$\tilde{r}_i^j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{F_{i+1}^j - F_{i-1}^j}{2h} \right\} - \frac{1}{2 \text{Re}} \left\{ \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \right\} \quad (3.94)$$

e

$$F = \frac{u^2}{2} \quad (3.95)$$

é o termo convectivo escrito na forma conservativa.

A princípio, o termo não linear é problemático, pois para avançarmos um passo de tempo, devemos resolver um sistema não linear de equações. Felizmente, esse problema pode ser resolvido por uma expansão em séries de Taylor:

$$F_i^{j+1} = F_i^j + k \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_i^j + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right]_i^j + \dots \quad (3.96)$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.97)$$

ou seja,

$$\frac{F_i^{j+1} - F_i^j}{k} = u_i^j \left\{ \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \right\}. \quad (3.98)$$

Logo, vale a expressão

$$F_i^{j+1} = F_i^j + u_i^j(u_i^{j+1} - u_i^j) + O(\Delta t^2). \quad (3.99)$$

Substituindo a equação (3.99) na relação (3.93), e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos o esquema numérico

$$a_i^j u_{i-1}^{j+1} + b_i^j u_i^{j+1} + c_i^j u_{i+1}^{j+1} = d_i^j, \quad (3.100)$$

em que

$$a_i^j = -\frac{k}{4h} u_{i-1}^j - \frac{C_r}{2}, \quad (3.101)$$

$$b_i^j = 1 + C_r, \quad (3.102)$$

$$c_i^j = \frac{k}{4h} u_{i-1}^j - \frac{C_r}{2}, \quad (3.103)$$

$$d_i^j = \frac{C_r}{2} u_{i-1}^j + (1 - C_r) u_i^j + \frac{C_r}{2} u_{i+1}^j, \quad (3.104)$$

$$C_r = \frac{k}{\text{Re } h^2}. \quad (3.105)$$

Pode se provar que o método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável e $O(h^2)$ no espaço (Iserles, 2009).

3.7.2 Implementação numérica

Para implementarmos numericamente o sistema de equações (3.100), devemos saber quais serão as condições de fronteira adotadas. Neste trabalho, usaremos dois tipos de condições de contorno:

- condição de contorno de Dirichlet;
- condição de contorno periódica.

Para a condição de contorno de Dirichlet, também conhecida como condição de contorno de primeiro tipo, devemos especificar quais valores a nossa solução deve assumir nas fronteiras do nosso domínio. Por exemplo, se as condições de contorno no intervalo $[a, b]$ forem $u(a, t) =$

α_1 e $u(b, t) = \alpha_2$, em que α_1 e α_2 são constantes reais, o sistema de (3.100) se transforma no sistema

$$\begin{aligned}
 u_1^{j+1} &= \alpha_1 \\
 a_2^j u_1^{j+1} + b_2^j u_2^{j+1} + c_2^j u_3^{j+1} &= d_2^j \\
 &\dots \\
 a_i^j u_{i-1}^{j+1} + b_i^j u_i^{j+1} + c_i^j u_{i+1}^{j+1} &= d_i^j \\
 &\dots \\
 a_{m-1}^j u_{m-2}^{j+1} + b_{m-1}^j u_{m-1}^{j+1} + c_{m-1}^j u_m^{j+1} &= d_{m-1}^j \\
 u_m^{j+1} &= \alpha_2
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

O sistema de equações (3.106) é tridiagonal. Em notação matricial, podemos escrevê-lo como

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & & & 0 \\
 a_2^j & b_2^j & c_2^j & & \\
 & a_3^j & b_3^j & c_3^j & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & a_{m-1}^j & b_{m-1}^j & c_{m-1}^j \\
 0 & & & & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1^{j+1} \\
 u_2^{j+1} \\
 u_3^{j+1} \\
 \vdots \\
 u_{m-1}^{j+1} \\
 u_m^{j+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 \\
 d_2^j \\
 d_3^j \\
 \vdots \\
 d_{m-1}^j \\
 \alpha_2
 \end{bmatrix}. \tag{3.107}$$

Para resolver esse sistema de equações, podemos usar o eficiente algoritmo de Thomas (Conte & deBoor, 2009). O algoritmo de Thomas, também conhecido como TDMA (“Tridiagonal Matrix Algorithm”), reduz o a ordem de operações $O(m^3)$ da eliminação Gaussiana para $O(m)$.

Para a condição de contorno periódica, temos que adotar uma extensão periódica do nosso domínio. Em outras palavras, para qualquer número inteiro k , devemos ter $u_k^j = u_{k+m}^j$. Se

aplicarmos essa condição na relação (3.100), obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned}
 a_1^j u_m^{j+1} + b_1^j u_1^{j+1} + c_1^j u_2^{j+1} &= d_1^j \\
 a_2^j u_1^{j+1} + b_2^j u_2^{j+1} + c_2^j u_3^{j+1} &= d_2^j \\
 &\dots \\
 a_i^j u_{i-1}^{j+1} + b_i^j u_i^{j+1} + c_i^j u_{i+1}^{j+1} &= d_i^j \tag{3.108} \\
 &\dots \\
 a_{m-1}^j u_{m-2}^{j+1} + b_{m-1}^j u_{m-1}^{j+1} + c_{m-1}^j u_m^{j+1} &= d_{m-1}^j \\
 a_m^j u_{m-1}^{j+1} + b_m^j u_m^{j+1} + c_m^j u_1^{j+1} &= d_m^j
 \end{aligned}$$

O sistema de equações (3.108) não é tridiagonal, mas sim tridiagonal periódico, como podemos perceber claramente em sua formulação matricial

$$\begin{bmatrix}
 b_1^j & c_1^j & & & a_1^j \\
 a_2^j & b_2^j & c_2^j & & \\
 & a_3^j & b_3^j & c_3^j & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & a_{m-1}^j & b_{m-1}^j & c_{m-1}^j \\
 c_m^j & & & & a_m^j & b_m^j
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1^{j+1} \\
 u_2^{j+1} \\
 u_3^{j+1} \\
 \vdots \\
 u_{m-1}^{j+1} \\
 u_m^{j+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_1^j \\
 d_2^j \\
 d_3^j \\
 \vdots \\
 d_{m-1}^j \\
 d_m^j
 \end{bmatrix}. \tag{3.109}$$

Nesse caso, o algoritmo de Thomas não pode ser aplicado diretamente. Entretanto, podemos usar uma de suas variações, conhecida como PTDMA (“Periodic Tridiagonal Matrix Algorithm”), que usa a fórmula de Sherman-Morrison (Sherman & Morrison, 1950)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v}\mathbf{A}^{-1})}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}, \tag{3.110}$$

em que \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores e \mathbf{A} é uma matriz inversível, para evitar as operações adicionais da eliminação Gaussiana. O operador \otimes denota o produto diádico entre duas entidades vetoriais.

Para entendermos como o PTDMA é implementado, observe que o nosso sistema de equações (3.109) pode ser reescrito como

$$(\mathbf{A}^j + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\phi^j = \mathbf{d}^j, \quad (3.111)$$

em que

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} c_1^j - a_1^j & c_1^j & & & & 0 \\ a_2^j & b_2^j & c_2^j & & & \\ & a_3^j & b_3^j & c_3^j & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{m-1}^j & b_{m-1}^j & c_{m-1}^j \\ 0 & & & & a_m^j & b_m^j - c_m^j \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1^j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m^j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Agora, os passos do algoritmo são:

1. Computar a solução de $\mathbf{A}^j \mathbf{q} = \mathbf{u}$;
2. Computar a solução de $\mathbf{A}^j \mathbf{x}^* = \mathbf{d}^j$;
3. Computar $\phi^{j+1} = \mathbf{x}^* - \mathbf{q} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}^* \rangle}{1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle}$,

em que o operador $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno entre duas entidades vetoriais.

3.7.3 Resultados e discussão

Agora, o algoritmo proposto na subseção anterior será aplicado em três problemas distintos.

3.7.3.1 Problema 1

Considere a equação de Burgers com condições de contorno de Dirichlet $u(-\infty, t) = 1$ e $u(\infty, t) = 0$ com valor inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.114)$$

conhecido como onda de choque de Burgers (3.78). Naturalmente, esperamos encontrar numericamente valores muito próximos da solução analítica obtida neste capítulo:

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + h(x, t) \exp \left\{ \frac{\text{Re}}{2} (x - t/2) \right\}}, \quad (3.115)$$

em que

$$h(x, t) = \frac{\text{erfc} \left(\frac{-x}{\sqrt{4 \text{Re}^{-1} t}} \right)}{\text{erfc} \left(\frac{x - t}{\sqrt{4 \text{Re}^{-1} t}} \right)}. \quad (3.116)$$

Porém, para implementarmos esse problema de valor de contorno, precisamos determinar como iremos tratar finitamente as condições de contorno no infinito. Como uma primeira aproximação, faremos $u(-100, t) = 1$ e $u(100, t) = 0$.

Tabela 3.1: Comparação da solução numérica com a solução analítica para o problema da onda de choque de Burgers (3.78) para $\text{Re} = 0.1$, $h = 0.001$, $k = 0.001$, $a = -100$ e $b = 100$, em $t = 2$

	solução numérica	solução analítica	erro
$u(-20, 2)$	0.99970872	0.99972610	0.00001738
$u(-12, 2)$	0.98431710	0.98494310	0.00062600
$u(-4, 2)$	0.79677654	0.80147294	0.00469640
$u(0, 2)$	0.56080871	0.56750499	0.00669628
$u(4, 2)$	0.29930060	0.30523619	0.00593559
$u(12, 2)$	0.03153545	0.032712519	0.001177069
$u(20, 2)$	0.00081272	0.000855896	0.000043177

Com o auxílio da tabela 3.1 e a figura 3.8, percebemos que o nosso fenômeno está sendo reproduzido de maneira adequada. Vale reportar que os resultados analíticos foram obtidos com auxílio do sistema algébrico computacional Maple 15. Para aumentarmos a precisão, podemos tanto melhorar a nossa discretização, quanto aumentar o nosso intervalo (a, b) para

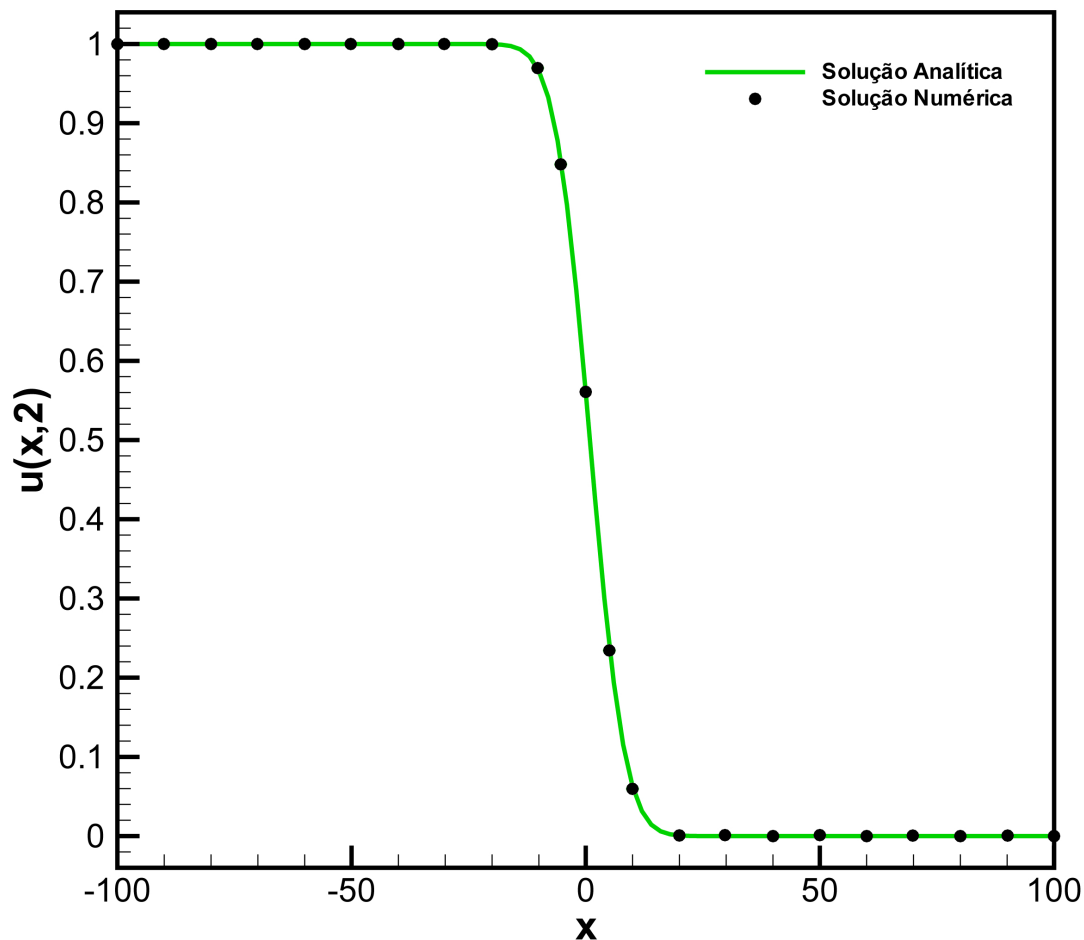


Figura 3.8: Solução analítica e numérica para o problema conhecido como onda de choque de Burgers em $t = 2.0$ para $Re = 0.1$, $h = 0.001$, $k = 0.001$, $a = -100$ e $b = 100$.

refinar a condição de contorno de Dirichlet.

3.7.3.2 Problema 2

Considere a equação de Burgers de com condições de contorno periódicas para o problema de valor inicial

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (3.117)$$

Pelas figuras 3.9 e 3.10, percebemos que a onda, com perfil inicial em forma de harmônico simples, vai se dissipando até decair para zero. Claramente, observamos que o número de Reynolds desempenha um papel importante. Ela determina qual mecanismo, seja ele difusivo ou de transporte não linear, será dominante. Se $Re = 1.0$, como na figura 3.9, o efeito

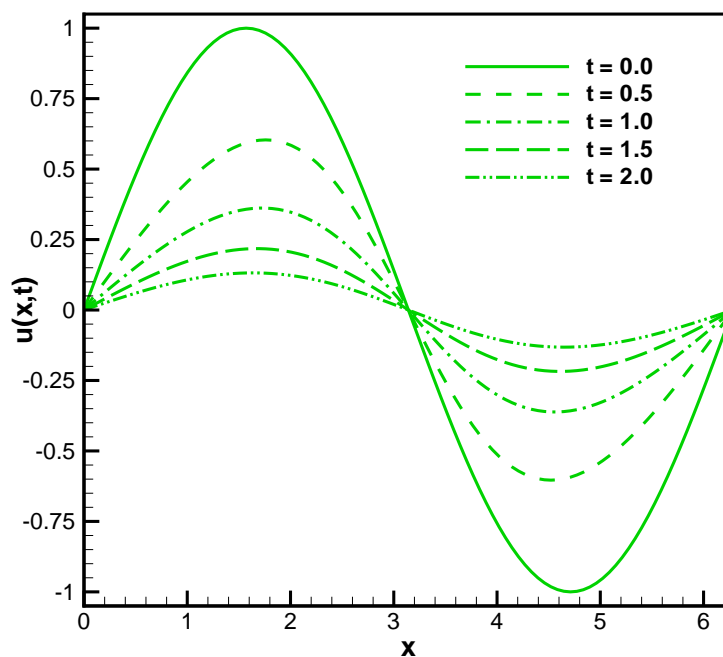


Figura 3.9: Solução numérica para o Problema 2 com $Re = 1.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

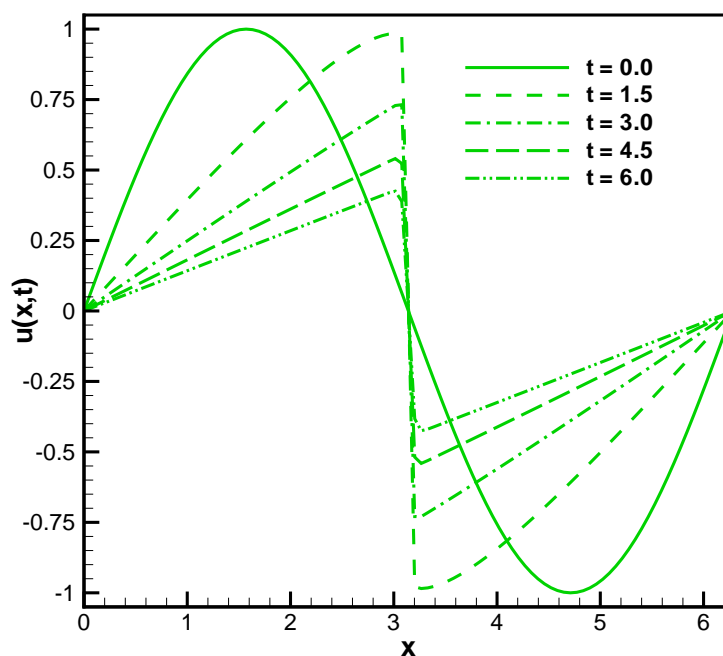


Figura 3.10: Solução numérica para o Problema 2 com $Re = 100.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

dissipativo é muito forte e quase não conseguimos perceber a distorção característica da não linearidade da equação de Burgers. Entretanto, se Re é grande, e.g. 3.10, o efeito não linear

é claro e a dissipação da onda ocorre de maneira mais lenta. Outra observação pertinente é que a figura 3.10 é muito parecida com a figura 2.13, que ilustra a regra das áreas iguais para a equação de Burgers invíscida. Isso nos diz que a abordagem parabólica da equação de Burgers, com $Re \rightarrow \infty$, é uma boa opção para lidarmos com o problema invíscido.

3.7.3.3 Problema 3

A condição inicial é

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.118)$$

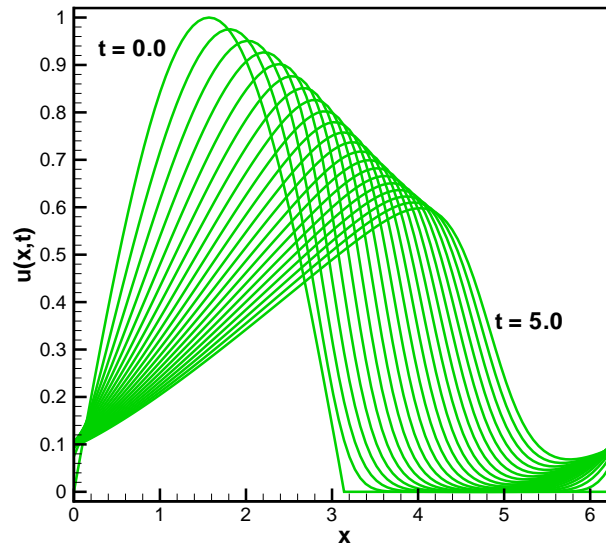


Figura 3.11: Solução numérica para o Problema 3 com $Re = 10.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$. O intervalo de tempo entre as curvas é 0.25.

As figuras 3.11 e 3.12 representam a evolução temporal do Problema 3, com um intervalo de tempo igual a 0.25 entre cada curva. Analisando-as, vemos que quanto maior o valor do número de Reynolds, maior o efeito não linear, assim como no Problema 2.

Na figura 3.12, em particular, percebemos a tendência da formação de uma descontinuidade, em forma de choque, que vai se propagando para a direita com o passar do tempo. Outro fenômeno observável é que a inclinação da porção da curva à esquerda do choque vai decrescendo. Claramente, esse efeito está associado com o mecanismo difusivo da equação de Burgers, que apesar de estar acompanhado, neste caso, por um número de Reynolds muito

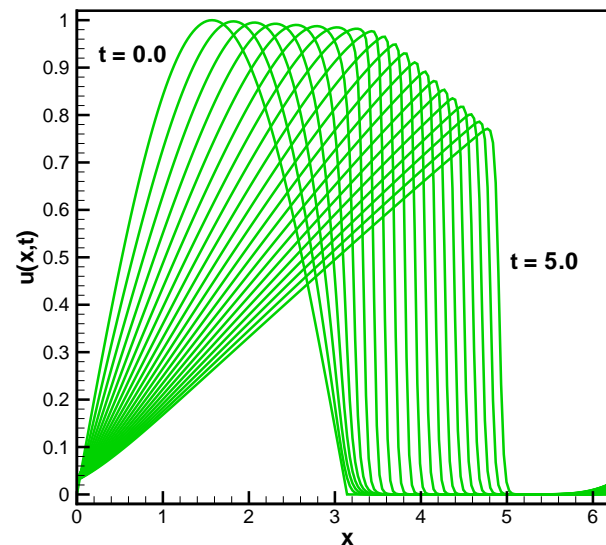


Figura 3.12: Solução numérica para o Problema 3 com $Re = 100.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.001$. O intervalo de tempo entre as curvas é 0.25.

grande, ele continua atuando até a dissipação total da onda ¹.

3.7.3.4 Limitações da solução numérica

Infelizmente, o método de Crank-Nicolson apresentado nesta seção possui limitações. A medida que aumentamos o número de Reynolds, fazendo o limite $Re \rightarrow \infty$, a equação de Burgers vai adquirindo um caráter cada vez mais hiperbólico. Como consequência, a suavidade de suas soluções vai sendo perdida e os perfis iniciais tendem à formação de uma descontinuidade (choque). Neste regime, o valor das derivadas se torna tão grande que oscilações espúrias acabam destruindo a nossa solução pelo método de diferenças finitas. Para números de Reynolds muito grandes, outros métodos devem ser usados. Para ilustrar esta limitação, considere a figura 3.13, em que $Re = 10000.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.0001$. Nesta gravura, percebemos que em $t = 0.5$ a onda possui um perfil de choque e, tanto na sua crista quanto no seu vale, existe uma oscilação espúria que contamina a nossa solução. Para evitar este tipo de problema, a saída natural é refinar a discretização da nossa malha.

O gráfico 3.14 foi construído através da análise do termo $\partial^2 u / \partial x^2$, relacionado com a

¹Observação: Os problemas 2 e 3 foram escolhidos especificamente para compararmos com o artigo “Numerical solution of periodic Burgers equation” (Mittal & Singhal, 1996), no qual um método espectral foi empregado para resolver a equação de Burgers com condições de contorno periódicas. Os nossos resultados mostraram uma boa concordância.

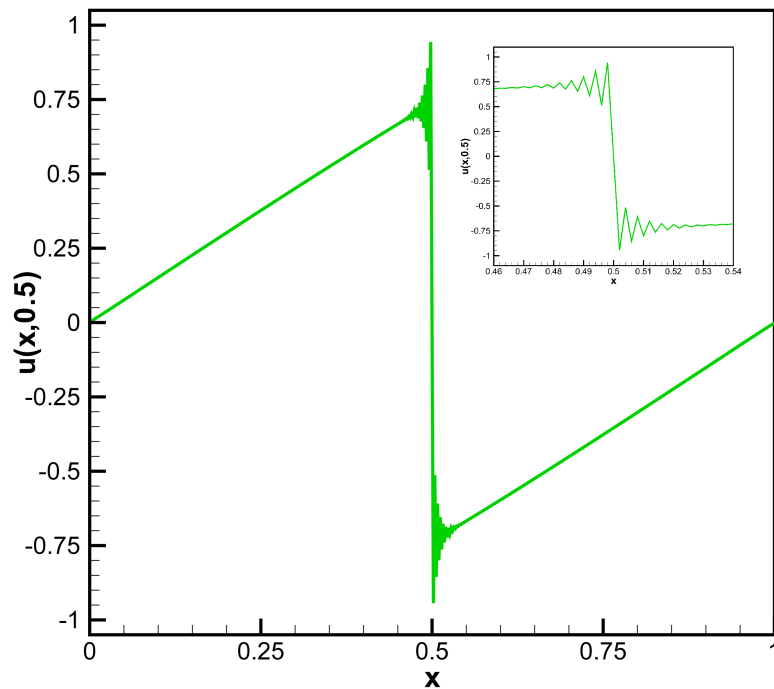


Figura 3.13: Solução numérica para a equação de Burgers periódica, com $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $\text{Re} = 10000.0$, $h = 0.001$ e $k = 0.0001$.

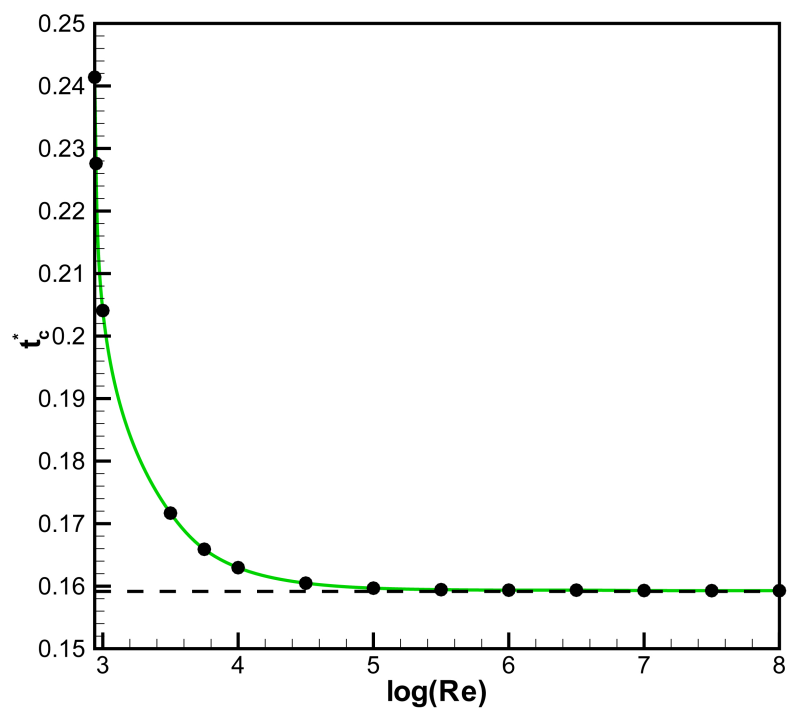


Figura 3.14: Análise do tempo de colapso, para diversos valores de viscosidade, com $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, com $h = 0.00001$ e $k = 0.00001$. A linha horizontal representa o tempo crítico.

curvatura da nossa solução no plano $u - x$, para vários instantes de tempo. Se esta derivada, discretizada em diferenças finitas, explodir em algum ponto da curva, então a nossa solução passou por uma região onde existe uma transição muito rápida de regime, caracterizando o surgimento de um choque. Como não poderia deixar de ser, essa imagem nos diz que, para valores cada vez maiores do número de Reynolds, o tempo de colapso converge para $1/2\pi$, que é o tempo crítico para o perfil senoidal

$$f(x) = \text{sen}(2\pi x) \quad (3.119)$$

na equação de Burgers invíscida. Vale observar que para $\text{Re} = 100.0$, por exemplo, o efeito dissipativo domina o de não linearidade e o nosso critério numérico não encontrou nenhum indício de formação de choque.

Aqui, definimos numericamente o choque como o primeiro instante de tempo numérico em que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{-1} < 10^{-6}. \quad (3.120)$$

Capítulo 4

EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO BAROTRÓPICO

4.1 INTRODUÇÃO

As equações conservativas que governam o movimento de um fluido barotrópico serão apresentadas neste capítulo. Em particular, consideraremos um modelo politrópico.

Será apresentada a formulação do segundo coeficiente de viscosidade, conforme Mandel'shtam & Leontovich (1937), para processos não instantâneos envolvendo compressões e expansões adiabáticas periódicas.

A adimensionalização e a análise de estabilidade linear das equações governantes do nosso problema também serão tratadas neste capítulo.

4.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Para deduzirmos as leis básicas da dinâmica dos fluidos, que são a equação da conservação da massa (também conhecida como equação da continuidade) e as equações da conservação da quantidade de movimento, precisamos enunciar dois teoremas fundamentais: o Teorema do Transporte de Reynolds e o Teorema da Localização.

4.2.1 Teorema do Transporte de Reynolds

O Teorema do Transporte de Reynolds, deduzido em Acheson (1990), é

$$\frac{d}{dt} \int_V G dV = \int_V \left\{ \frac{DG}{Dt} + G(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} dV, \quad (4.1)$$

em que $G = G(x, y, z, t)$ denota uma função contínua arbitrária, V é o volume ocupado por um fluido homogêneo e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ é o campo de velocidades do fluido. O operador

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla), \quad (4.2)$$

conhecida como derivada material, corresponde a taxa de variação temporal vista por um observador que translada com a partícula fluida. Este teorema, nomeado em homenagem ao físico britânico Osborne Reynolds, é a versão tridimensional da Regra de Leibniz.

4.2.2 Teorema da Localização

O Teorema da Localização, conforme Gonzalez & Stuart (2008), é enunciado da seguinte maneira: Se

$$\int_V G dV = 0, \quad (4.3)$$

em que G e V são definidos da mesma maneira que no Teorema do Transporte de Reynolds, então

$$G \equiv 0 \quad (4.4)$$

para qualquer ponto (x, y, z) de V em um instante de tempo t .

4.3 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

Agora que apresentamos o Teorema do Transporte de Reynolds e o Teorema da Localização, podemos partir para a dedução das equações básicas da dinâmica dos fluidos.

4.3.1 Equação da conservação da massa

A massa m de um volume fixo V arbitrário ocupado por um fluido homogêneo é, por definição, dada por

$$m = \int_V \rho \, dV, \quad (4.5)$$

em que $\rho = \rho(x, y, z, t)$ é a massa específica do fluido.

De acordo com o princípio da conservação da massa, a massa m permanece inalterada durante o movimento do fluido. Matematicamente, esta lei é expressa por

$$\frac{Dm}{Dt} = 0. \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.5) para m na equação (4.6) e usando o Teorema do Transporte de Reynolds, obtemos

$$\int_V \left\{ \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} dV = 0. \quad (4.7)$$

Portanto, pelo Teorema da Localização, segue que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (4.8)$$

A equação diferencial parcial (4.8), conhecida como a equação da continuidade, é uma das equações fundamentais da mecânica dos fluidos. Usando a equação (4.2) na (4.8), determinamos uma forma alternativa para a equação da conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (4.9)$$

4.3.2 Equação da conservação do momento linear

De maneira similar à seção anterior, nosso objetivo é deduzir uma equação diferencial a partir de uma lei de conservação que, neste caso, é a lei da conservação do momento linear.

Considere um volume de fluido V de forma arbitrária. De acordo com a segunda lei de Newton, temos que

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{q} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_s, \quad (4.10)$$

em que \mathbf{q} é a quantidade de momento linear, \mathbf{f}_c e \mathbf{f}_s , respectivamente, representam as forças de campo e de superfície.

Por definição, o momento linear é dado por

$$\mathbf{q} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV. \quad (4.11)$$

Pelo Teorema do Transporte de Reynolds, a equação (4.11) pode ser reescrita como

$$\mathbf{q} = \int_V \left\{ \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} dV \quad (4.12)$$

$$= \int_V \left\{ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \right\} dV. \quad (4.13)$$

Usando a equação da continuidade (4.9), a equação (4.14) é reduzida a

$$\mathbf{q} = \int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad (4.14)$$

Agora observe que, se \mathbf{b} é a força de campo por unidade de massa, então a força de campo resultante é dada por

$$\mathbf{f}_c = \int_V \rho \mathbf{b} dV. \quad (4.15)$$

Por sua vez, as forças de superfícies são representadas pela integral

$$\mathbf{f}_s = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS, \quad (4.16)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões.

Pelo teorema da divergência para tensores (Chandrasekharaiah & Debnath, 1994), a integral de superfície da equação (4.16) pode ser reescrita como a integral de volume

$$\mathbf{f}_s = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (4.17)$$

A substituição das equações (4.11), (4.15) e (4.17) na equação (4.10) nos fornece

$$\int_V \left\{ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} dV = 0. \quad (4.18)$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando deve ser identicamente nulo (conforme o Teorema da Localização), ou seja,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (4.19)$$

A equação (4.19), conhecida como a equação do movimento de Cauchy, representa a conservação do momento linear em termos do tensor de tensões.

4.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO DE UM GÁS BAROTRÓPICO

Conforme Landau & Lifshitz (1987), o tensor de tensões de um fluido newtoniano é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad (4.20)$$

em que $p = p(x, y, z, t)$ é o campo escalar de pressão e $\boldsymbol{\sigma}'$ é o tensor de tensões viscoso. Para fluidos compressíveis, o tensor de tensões viscoso pode ser escrito em notação indicial como

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (4.21)$$

em que as constantes positivas η e ζ são os coeficientes de viscosidade conhecidos, respectivamente, por viscosidade dinâmica e segundo coeficiente de viscosidade.

Substituindo a equação (4.21) na equação do movimento de Cauchy (4.19), obtemos a relação

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (4.22)$$

Em notação tensorial, a equação (4.22) é simplesmente

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (4.23)$$

A equação (4.23) é conhecida como a equação de Navier-Stokes. Para fluidos incompressíveis

(massa específica constante), a equação (4.2) é consideravelmente mais simples, porque a equação da continuidade (4.8) é transformada em

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.24)$$

e, conseqüentemente, o último termo da equação (4.23) é zero. Entretanto, estamos interessados no caso em que ρ não é constante.

No caso de um escoamento unidimensional e transiente, ou seja, $p = p(x, t)$, $\rho = \rho(x, t)$ e $u = u(x, t)$, as equações (4.8) e (4.23) assumem a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (4.25)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.26)$$

Naturalmente, para fecharmos o sistema de equações anterior, precisamos de mais uma equação. Para continuarmos num contexto puramente hidrodinâmico, assumiremos que a pressão p é uma função apenas da massa específica ρ , i.e., $p = p(\rho)$. Este tipo de escoamento é conhecido na literatura como escoamento barotrópico.

A velocidade de propagação do som num fluido é a velocidade na qual uma onda de pressão infinitesimal se movimenta dentro dele. Conforme Patterson (1983), esta velocidade é dada pela expressão

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\mathcal{S}}}, \quad (4.27)$$

em que o subíndice \mathcal{S} indica que a derivada parcial foi tomada mantendo a entropia constante. Portanto, pela regra da cadeia e a relação (4.27), as equações governantes (4.25) e (4.26) podem reescritas como

- Equação da continuidade:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.28)$$

- Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.29)$$

4.5 SEGUNDO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE

A teoria clássica da dinâmica de fluidos viscosas assume que só existe um coeficiente de viscosidade, o coeficiente de viscosidade dinâmica η (Batchelor, 1967). Para o segundo coeficiente de viscosidade $\zeta = \frac{2}{3}\eta + \lambda$ é assumida a hipótese de Stokes ($\zeta = 0$), em que $\lambda = -2/3\eta$, em que λ é uma constante material do fluido, de tal sorte que a pressão mecânica

$$P = p - \left(\frac{2}{3}\eta + \lambda \right) \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4.30)$$

seja simplesmente a pressão termodinâmica p . Entretanto, Karim & Rosenhead (1953) verificaram experimentalmente que para o caso atenuação de ondas de sonoras em líquidos, o valor de λ não só é positivo, mas também muito maior que de η .

A seguir, mostraremos uma metodologia geral, proposta por Mandel'shtam & Leontovich (1937), para tratar este fenômeno. O leitor mais interessado no assunto pode consultar Landau & Lifshitz (1987) para uma explicação mais detalhada.

Em processos de compressão e expansão, o fluido sai do seu estado de equilíbrio termodinâmico e processos internos, com intuito de restaurar o equilíbrio, começam a agir. Geralmente, esses processos são muito rápidos, i.e., o tempo de relaxação é pequeno, de tal sorte que qualquer mudança de volume, desde que não muito grande, é acompanhada por um processo de restauração praticamente instantâneo.

Por outro lado, se o tempo de relaxação é longo, enquanto o fluido não estiver em estado de equilíbrio, o valor de ξ , em que ξ representa alguma quantidade física do fluido¹, irá variar ao longo do tempo, até atingir o seu valor de equilíbrio ξ_0 . Se o valor de ξ for muito próximo daquele de ξ_0 , podemos adotar a aproximação de primeira ordem

$$\frac{d\xi}{dt} = - \frac{(\xi - \xi_0)}{\tau}, \quad (4.31)$$

¹No caso de misturas, por exemplo, ξ pode ser a concentração de uma componente química.

em que τ é o tempo de relaxação do processo em questão. O sinal negativo, como veremos adiante, é fundamental para garantir a convergência de ξ para um valor finito.

Supondo que o fluido está sujeito a compressões e expansões adiabáticas periódicas, de tal sorte que ξ possa ser escrito na forma

$$\xi = \xi_{00} + \xi', \quad (4.32)$$

em que ξ_{00} é o valor médio de ξ e ξ' é a parte proporcional à quantidade temporal $e^{-i\omega t}$ e escrevendo ξ_0 , de maneira similar, como

$$\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0, \quad (4.33)$$

concluimos que a equação (4.31) pode ser reescrita como

$$-i\omega\xi' = -\frac{(\xi' - \xi'_0)}{\tau}, \quad (4.34)$$

ou seja,

$$\xi' = \frac{\xi'_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (4.35)$$

Neste problema, a pressão deve ser tratada como uma função não só da massa específica e da entropia, que nós supomos constante, mas também de ξ , i.e., $P = P(\rho, \xi)$. Portanto, pela regra da cadeia, temos que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho}. \quad (4.36)$$

Como

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} \quad (4.37)$$

e

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'_0}{\partial \rho}, \quad (4.38)$$

podemos determinar as igualdades

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'_0}{\partial \rho} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} \frac{1}{1 - i\omega\tau}. \quad (4.39)$$

Por conseguinte, substituindo a equação (4.39) na relação (4.36), obtemos

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi + \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}, \quad (4.40)$$

que nos fornece, após algumas manipulações algébricas, a identidade

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi \right\}. \quad (4.41)$$

Para um processo muito lento, em que o fluido permanece praticamente em equilíbrio, podemos afirmar que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}. \quad (4.42)$$

Desta maneira, a equação (4.41) se resume a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 - i\omega\tau \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi \right\}. \quad (4.43)$$

Se a massa específica é acrescida adiabaticamente de $\delta\rho$, então a diferença $P - p$ é dada por

$$P - p = \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \right\}, \quad (4.44)$$

que, com o auxílio da igualdade (4.43), se transforma na relação

$$P - p = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi \right\}. \quad (4.45)$$

Com o intuito de relacionarmos o movimento do fluido com as variações de massa específica, podemos usar a equação da conservação da massa (Batchelor, 1967), dada por

$$\frac{D}{Dt}(\delta\rho) + \delta\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.46)$$

Como $\delta\rho$ é uma grandeza periódica, segue que

$$\frac{D}{Dt}(\delta\rho) = -i\omega\delta\rho \quad (4.47)$$

e, conseqüentemente,

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega}\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4.48)$$

Substituindo essa expressão em (4.44), obtemos

$$P = p + \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}(a_0^2 - a_\infty^2)\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4.49)$$

em que

$$a_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \quad (4.50)$$

e

$$a_\infty^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\xi. \quad (4.51)$$

Porém, conforme a equação (4.30), a pressão mecânica é relacionada com a pressão termodinâmica pela expressão

$$P = p - \zeta\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4.52)$$

Por isso, podemos concluir que a ocorrência de processos lentos para reestabelecer o equilíbrio é macroscopicamente equivalente a presença do segundo coeficiente de viscosidade dado por

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}(a_\infty^2 - a_0^2). \quad (4.53)$$

Pela equação (4.49), vemos que este tipo de processo não influencia na viscosidade dinâmica η . Escrevendo a equação (4.53) na forma algébrica de um número complexo, vemos que

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 + (\omega\tau)^2}(a_\infty^2 - a_0^2) + i\frac{\omega\tau^2\rho}{1 + (\omega\tau)^2}(a_\infty^2 - a_0^2). \quad (4.54)$$

Agora, se o processo em questão envolver fenômenos de alta frequência e pequenos tempos de relaxação, de tal sorte que $\omega\tau \sim 1$, podemos concluir que a parte imaginária da equação (4.54) é uma contribuição de segunda ordem. A partir deste momento, assumiremos que

estamos trabalhando neste regime proposto e, além da aproximação $\zeta \gg \eta$, adotaremos a expressão

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 + (\omega\tau)^2}(a_\infty^2 - a_0^2) \quad (4.55)$$

para o segundo coeficiente de viscosidade. Por este motivo, nossas equações governantes (4.28) e (4.29) se transformam, após pequenas manipulações algébricas, em

- Equação da continuidade:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.56)$$

- Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.57)$$

em que ζ é dado pela expressão (4.55)

4.6 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para iniciarmos os nossos estudos teóricos e computacionais, é interessante reescrever as equações (4.56) e (4.57) em termos de variáveis e parâmetros adimensionais fazendo:

$$u = u_c \tilde{u}, \quad x = x_c \tilde{x}, \quad t = \frac{x_c}{u_c} \tilde{t}, \quad \tau = \frac{x_c}{u_c} \tilde{\tau} \quad (4.58)$$

$$p = p_0 \tilde{p}, \quad \rho = \rho_0 \tilde{\rho}, \quad a = u_c \tilde{a}, \quad (4.59)$$

em que p_0 e ρ_0 são, respectivamente, a pressão e a massa específica no estado de equilíbrio termodinâmico. A grandeza escalar x_c representa um comprimento característico do escoamento. No caso de um escoamento em um tubo finito, por exemplo, podemos escolher a escala característica de comprimento como o comprimento do tubo. A velocidade característica u_c é dada pela expressão $(p_0/\rho_0)^{1/2}$. Esta última escala foi escolhida, como veremos adiante, de tal sorte que $u_c \propto a_0$.

Substituindo as igualdades (4.58) e (4.59) nas equações (4.56) e (4.57), obtemos, usando propriedades de álgebra elementar, as relações adimensionais

- Equação da continuidade adimensionalizada:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\rho} \tilde{a}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (4.60)$$

- Equação de Navier-Stokes adimensionalizada:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\zeta_0}{\rho_0 u_c x_c} \left(1 - \frac{\tilde{a}_\infty^2}{\tilde{a}_0^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad (4.61)$$

em que ζ_0 , o segundo coeficiente de viscosidade no estado de equilíbrio termodinâmico, é definido por

$$\zeta_0 = \frac{\rho_0 \tau a_0^2}{1 + (\omega \tau)^2}. \quad (4.62)$$

Sejam

$$\text{Re}' = \frac{\rho_0 u_c x_c}{\zeta_0}, \quad (4.63)$$

$$M_0 = \frac{1}{\tilde{a}_0}, \quad M_\infty = \frac{1}{\tilde{a}_\infty}. \quad (4.64)$$

O parâmetro adimensional Re' é o número de Reynolds expansional, que mede a razão entre as forças de inércia ($\rho_0 u_c^2 x_c^2$) e as forças de compressão e expansão em escoamento ($\zeta_0 u_c x_c$) e M é o número de Mach.

Por conveniência, a partir deste momento, omitiremos o sobrescrito til as equações (4.60) e (4.61). Assim, as equações governantes adimensionalizadas do movimento de um gás barotrópico são

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.65)$$

- Equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.66)$$

Neste trabalho, adotaremos um modelo barotrópico particular: o modelo politrópico. Este modelo, é descrito pela relação

$$p = \beta \rho^\gamma, \quad (4.67)$$

em que β e γ são valores constantes. O coeficiente γ é aproximadamente 1.4 para o ar em condições normais de temperatura e pressão (Acheson, 1990).

Num processo politrópico, as equações (4.27) e (4.67) podem ser combinadas para nos fornecer

$$dp = a^2 d\rho \quad (4.68)$$

e

$$d\rho = \frac{\rho}{a} \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) da. \quad (4.69)$$

Para demonstrar a segunda identidade na equação (4.68), observe que

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \beta \gamma \rho^{\gamma-1}. \quad (4.70)$$

Em termos de diferenciais totais, (4.70) nos dá

$$da^2 = \beta \gamma d(\rho^{\gamma-1}). \quad (4.71)$$

Pela regra da cadeia, a equação (4.71) pode ser reescrita como

$$2ada = \beta \gamma (\gamma - 1) \rho^{\gamma-2} d\rho. \quad (4.72)$$

Resolvendo a equação (4.72) para $d\rho$, ficamos com a relação

$$d\rho = (\beta \gamma \rho^{\gamma-2})^{-1} \left(\frac{2a}{\gamma - 1} \right) da, \quad (4.73)$$

mas, de acordo com (4.70), vale a identidade

$$\beta \gamma \rho^{\gamma-2} = \frac{a^2}{\rho}. \quad (4.74)$$

Portanto, usando as equações (4.73) e (4.74), podemos afirmar que

$$d\rho = \frac{\rho}{a} \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) da, \quad (4.75)$$

como queríamos demonstrar.

As identidades em (4.68) são muito convenientes, uma vez que nos permite usar a variável a no lugar p e ρ nas equações governantes (4.65) e (4.66) como:

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2a}{\gamma - 1} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2a}{\gamma - 1} \right) + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.76)$$

- Equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2a}{\gamma - 1} \right) + \frac{1}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.77)$$

4.7 EQUAÇÕES LINEARIZADAS

O primeiro passo para tratarmos o sistema de equações (4.76) e (4.77) é a análise de estabilidade linear. A importância desta análise é, por exemplo, determinar a influência do número de Reynolds expansional na estabilidade do movimento de um gás barotrópico. Para realizar esta análise, considere as perturbações de pequenas amplitudes da solução elementar $u = 0$ e $a = a_0 = 1/M_0$ dadas por

$$u = u', \quad a = \frac{1}{M_0} + a', \quad (4.78)$$

em que $u' = u(x, t)$ e $a' = a'(x, t)$ são perturbações infinitesimais do estado de equilíbrio termodinâmico.

Substituindo as relações em (4.78) nas equações governantes adimensionalizadas, e preservando apenas os termos lineares, obtemos

- Equação da continuidade linearizada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2a'}{\gamma - 1} \right) + \frac{1}{M_0} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (4.79)$$

- Equação de Navier-Stokes linearizada:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{M_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2a'}{\gamma - 1} \right) + \frac{1}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0. \quad (4.80)$$

Antes de prosseguirmos para a análise modal das equações (4.79) e (4.80), vamos fazer uma observação sobre a velocidade de propagação da onda no fluido. Considere as pequenas perturbações

$$p = 1 + p', \quad \rho = 1 + \rho', \quad (4.81)$$

em que $p' = p'(x, t)$ e $\rho' = \rho'(x, t)$. Observe que tanto no campo de pressão, quanto no campo de massa específica, apareceu o número 1. Isto se deve ao fato de p e ρ terem sido adimensionalizados pelos seus valores no estado de equilíbrio termodinâmico. Assim, podemos encontrar o valor da constante β na expressão (4.67), usando o fato que $p(1) = 1$, como $\beta = 1$. Por conseguinte, substituindo a equação (4.81) em (4.67), ficamos com

$$p + p' = (1 + \rho')^\gamma, \quad (4.82)$$

i.e.,

$$(1 + p')(1 + \rho')^{-\gamma} = 1. \quad (4.83)$$

O multiplicando $(1 + \rho')^{-\gamma}$ pode ser expandido como

$$(1 + \rho')^{-\gamma} = 1 - \gamma\rho' + O(\rho'^2). \quad (4.84)$$

Portanto, substituindo (4.84) em (4.83), e desprezando os termos de ordem superior, determinamos que

$$p' = \gamma\rho'. \quad (4.85)$$

Sabemos que para pequenas perturbações, vale a relação

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{M_0^2}. \quad (4.86)$$

Desta maneira, podemos combinar as equações (4.81), (4.85) e (4.86) para obtermos

$$\frac{1}{M_0} = \sqrt{\gamma}. \quad (4.87)$$

A expressão (4.87) nos fornece um resultado importante: o número de Mach no estado de equilíbrio termodinâmico é determinado pelo coeficiente γ . Esta informação será de extrema importância quando usarmos a análise de estabilidade linear, que será desenvolvida ainda neste capítulo, com o objetivo de validar um código numérico proposto para o sistema de equações composto por (4.76) e (4.77). Outra observação pertinente é que, para o ar a uma temperatura de $20^\circ C$ ao nível do mar, a versão dimensional da equação (4.87) nos fornece uma velocidade do som aproximadamente igual a 340m/s.

4.8 ANÁLISE MODAL

O objetivo desta seção é explorar, através de uma análise modal, o comportamento do nosso sistema linearizado de equações quando sujeito a pequenos distúrbios de ondas planas

$$a' = A \exp \{i(Kx - \omega t)\} \text{ e } u' = U \exp \{i(Kx - \omega t)\}, \quad (4.88)$$

em que i é a unidade imaginária, A e U são as amplitudes das perturbações, ω é a frequência e K é o número de onda dos distúrbios.

A nossa análise de estabilidade pode ser analisada de duas formas distintas:

- Análise modal espacial: se K for um número de onda complexo.
- Análise modal temporal: se ω for uma frequência complexa.

A escolha da análise modal apropriada, será feita adiante.

Substituindo as relações da equação (4.88) no nosso sistema linearizado de equações, com-

posto por (4.79) e (4.80), obtemos as equações no plano $\omega - K$ dadas por

$$\frac{2\omega}{\gamma - 1}A - \frac{K}{M_0}U = 0, \quad (4.89)$$

$$\frac{2iK}{M_0(\gamma - 1)}A - \left[\frac{K^2}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) + i\omega \right] U = 0. \quad (4.90)$$

Note que, para construirmos as relações anteriores, usamos as identidades

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -i\omega U \exp \{i(Kx - \omega t)\}; \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = iKU \exp \{i(Kx - \omega t)\}; \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = -K^2U \exp \{i(Kx - \omega t)\}; \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} = -i\omega A \exp \{i(Kx - \omega t)\}; \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial a'}{\partial x} = iKA \exp \{i(Kx - \omega t)\}. \quad (4.95)$$

O sistema linearizado anterior pode escrito na forma $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, em que a matriz quadrada de segunda \mathbf{M} é conhecida como matriz modal, e $\mathbf{\Omega}$ é o vetor das amplitudes dos distúrbios. Neste sentido, o sistema em questão pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \frac{2\omega}{\gamma - 1} & -\frac{K}{M_0} \\ \frac{2iK}{M_0(\gamma - 1)} & -\frac{K^2}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Para que o sistema resultante possua solução não trivial, é necessário que $\det \mathbf{M} = 0$. Com esta condição, determinamos a equação algébrica em K

$$K^2 \left[-\frac{\omega}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right) + \frac{1}{M_0^2}i \right] - i\omega^2 = 0, \quad (4.97)$$

cuja solução é dada por

$$K(\omega) = \frac{i\omega}{\sqrt{-\frac{i\omega}{\text{Re}'}\left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2}\right) - \frac{1}{M_0^2}}}. \quad (4.98)$$

Pela equação (4.98), podemos ver que o número de onda é complexo. Portanto, a análise modal apropriada é a espacial.

Por causa da raiz quadrada no denominador em (4.98), não é fácil escrever o número de onda complexo K na forma $k_1 + ik_2$. Entretanto, se considerarmos os regimes em que $\omega\tau \ll 1$ e $\omega\tau \gg 1$, é possível encontrar aproximações via métodos assintóticos.

Observe que, de acordo a definição feita neste capítulo, o número de Reynolds expansional complexo, i.e., sem adotarmos a aproximação para altas frequências de oscilação e tempos de relaxação pequenos ($\omega\tau \sim 1$), é dado pelo quociente

$$\text{Re}' = -\frac{(1 - i\omega\tau)}{\frac{\tau}{M_0^2}}. \quad (4.99)$$

Desta maneira, a expressão (4.98), após pequenas manipulações algébricas, pode ser reescrita como

$$K = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{\frac{1}{M_0^2} - i\frac{\omega\tau}{M_\infty^2}}}. \quad (4.100)$$

Num regime em que $\omega\tau \ll 1$, podemos fazer a seguinte expansão assintótica da equação (4.100):

$$\sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{\frac{1}{M_0^2} - i\frac{\omega\tau}{M_\infty^2}}} = M_0 - i\frac{\omega\tau M_0}{2} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2}\right) + O((\omega\tau)^2). \quad (4.101)$$

Através da equação (4.101), é fácil ver que K pode ser escrito na forma algébrica $k_1 + ik_2$ como

$$K(\omega) = \frac{\omega}{a_0} - i\frac{\omega^2\tau M_0}{2} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2}\right), \quad (4.102)$$

em que

$$k_1(\omega) = \omega M_0 \quad (4.103)$$

e

$$k_2(\omega) = -\frac{\omega^2\tau M_0}{2} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2}\right). \quad (4.104)$$

Similarmente, fazendo uma expansão assintótica para o caso em que $\omega\tau \gg 1$, obtemos

$$\sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{\frac{1}{M_0^2} - i\omega\tau\frac{1}{M_\infty^2}}} = M_\infty + i\frac{M_\infty}{2\omega\tau} \left(1 - \frac{M_\infty^2}{M_0^2}\right) + O((\omega\tau)^{-2}). \quad (4.105)$$

Portanto, para um regime em que $\omega\tau \gg 1$, podemos adotar a aproximação

$$K(\omega) = \omega M_\infty + i\frac{M_\infty}{2\tau} \left(1 - \frac{M_\infty^2}{M_0^2}\right). \quad (4.106)$$

Neste caso, temos que

$$k_1(\omega) = \omega M_\infty \quad (4.107)$$

e

$$k_2(\omega) = \frac{M_\infty}{2\tau} \left(1 - \frac{M_\infty^2}{M_0^2}\right). \quad (4.108)$$

Neste caso, a taxa de amortecimento dos distúrbios, conforme a equação (4.108), é independente da frequência de oscilação ω .

Para o caso que estamos interessados, em que $\omega\tau \sim 1$, basta substituírmos o número de Reynolds expansional, definido na equação (4.63), na equação (4.98). Fazendo este procedimento, obtemos

$$K(\omega) = \frac{i\omega}{\sqrt{\frac{i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \left(\frac{1}{M_\infty^2} - \frac{1}{M_0^2}\right) - \frac{1}{M_0^2}}}. \quad (4.109)$$

Aqui, k_1 e k_2 são dados por

$$k_1(\omega) = \Re\{K(\omega)\}, \quad (4.110)$$

$$k_2(\omega) = \Im\{K(\omega)\}, \quad (4.111)$$

em que $\Re\{K(\omega)\}$ e $\Im\{K(\omega)\}$ denotam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número de onda complexo $K(\omega)$ dado pela equação (4.109).

4.9 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como escolhemos uma perturbação proporcional ao fator $\exp\{iKx\}$ e o número de onda complexo é

$$K = k_1 + ik_2, \quad (4.112)$$

podemos afirmar que

$$\exp\{iKx\} = \exp\{-k_2x\} \exp\{ik_1x\}. \quad (4.113)$$

Este resultado nos diz para possuímos amortecimento, precisamos que

$$-k_2 < 0, \quad (4.114)$$

ou seja, a parte complexa do número de onda deve ser estritamente positiva. Por este motivo, as expressões em (4.102) e (4.108) nos fornecem um resultado importante:

$$\frac{M_0}{M_\infty} > 1. \quad (4.115)$$

Isto significa que a velocidade de propagação do som fluido vai decrescer até o sistema voltar ao estado de equilíbrio. Se estas condições forem obedecidas, podemos afirmar que o este sistema não retorna modos instáveis. Segue da inequação (4.115) que, se definirmos

$$\varepsilon = -\frac{1}{\text{Re}' } \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right), \quad (4.116)$$

então $\varepsilon > 0$. Esta informação é essencial para o código numérico que será proposto no próximo capítulo. Apesar dessa afirmação ter sido demonstrada através de uma análise de estabilidade linear, ela é uma consequência direta da segunda lei da termodinâmica (ver apêndice B).

Vale observar que, para $\omega\tau \ll 1$, a velocidade $V(\omega)$ de propagação dos distúrbios, definida por

$$V(\omega) = \frac{\omega}{k_1(\omega)} \quad (4.117)$$

é simplesmente $1/M_0$. Neste caso, a velocidade de propagação do distúrbio é a própria

velocidade de propagação do som na onda, ou seja, estamos falando que quando o tempo de relaxação é muito menor que o período $1/\omega$ da onda sonora, a velocidade do som é determinada simplesmente pelo seu valor no estado de equilíbrio termodinâmico. No caso de altas frequências de oscilação ($\omega\tau \gg 1$), a equação (4.117) nos fornece a velocidade de propagação dos distúrbios $1/M_\infty$. Portanto, se o tempo de relaxação for muito maior que o período da onda sonora, então a velocidade de propagação do som no fluido é dada pela derivada $(\partial p/\partial \rho)_\zeta$.

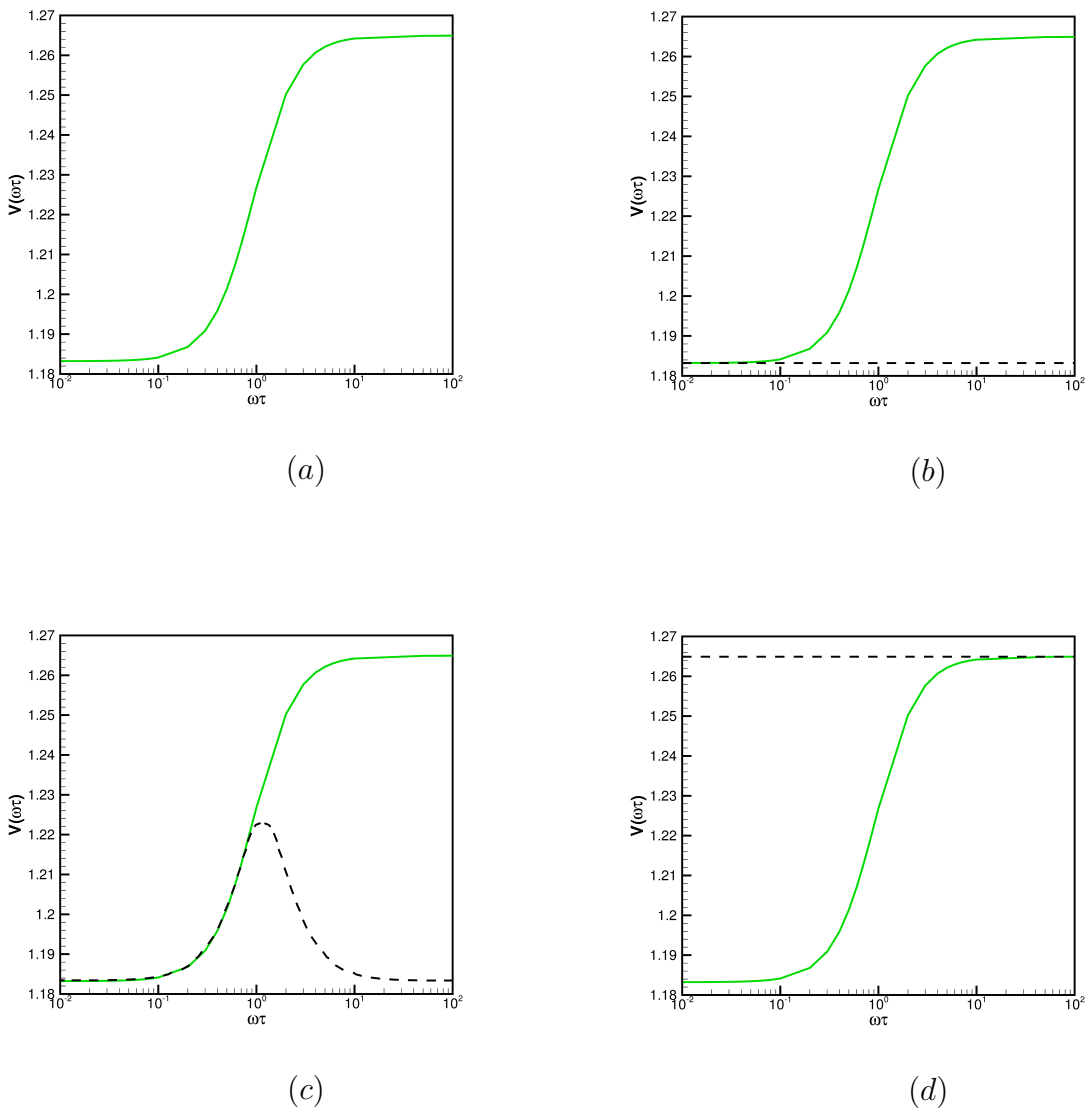


Figura 4.1: (a) Velocidade de propagação do distúrbio para $k_1(\omega)$ dado pela parte real da equação (4.98). (b) Comparação da velocidade de propagação com o regime assintótico em que $\omega\tau \ll 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.103). (c) Comparação da velocidade de propagação com o regime em que $\omega\tau \sim 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.110). (d) Comparação da velocidade de propagação com o regime assintótico em que $\omega\tau \gg 1$ e $k_1(\omega)$ é dado pela equação (4.107). Estes gráficos foram obtidos para $\tau = 0.001$, $M_0 = 1/\sqrt{1.4}$ e $M_\infty = 1/\sqrt{1.6}$.

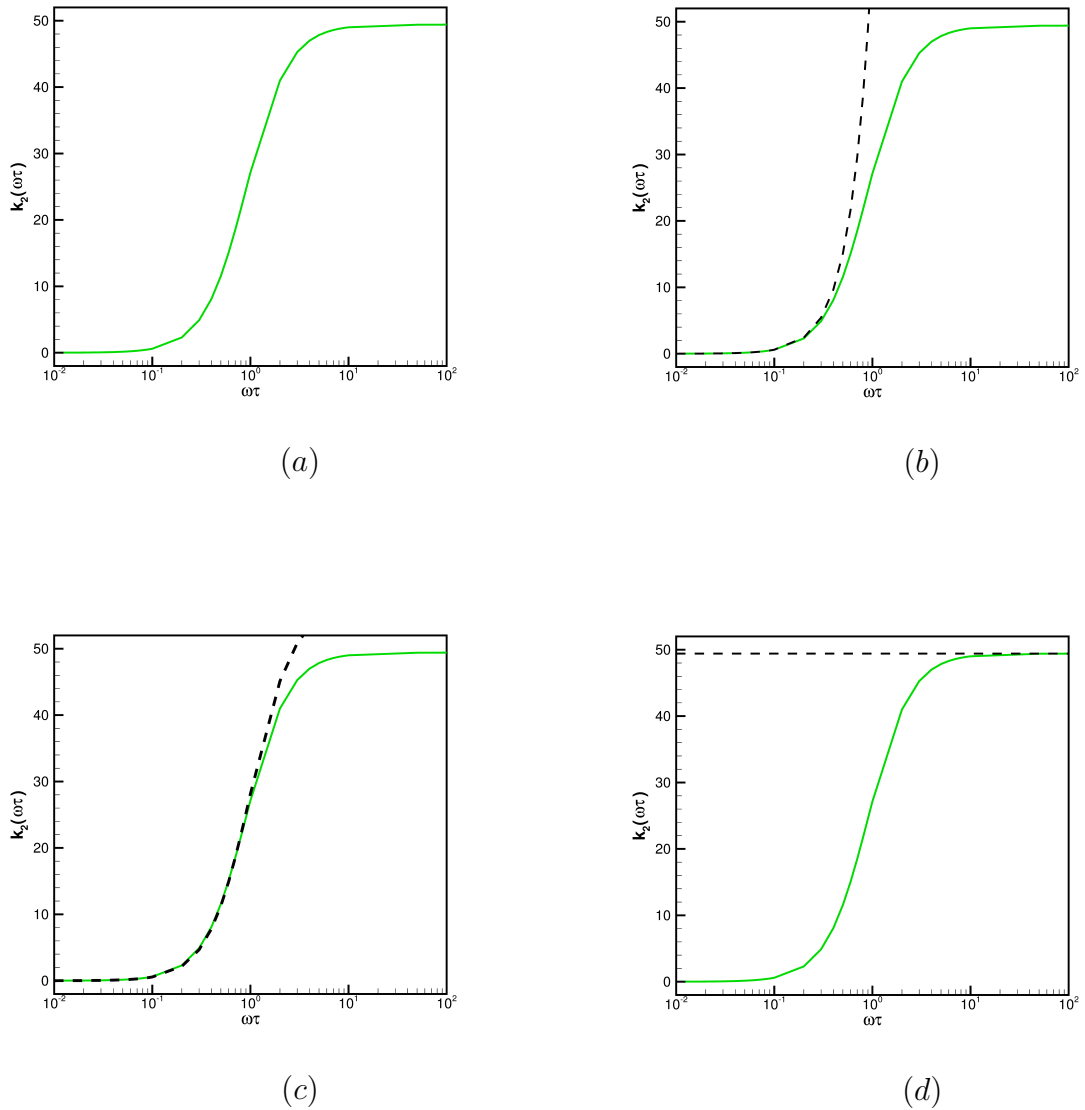


Figura 4.2: (a) Taxa de amortecimento do distúrbio para $k_2(\omega)$ dado pela parte imaginária da equação (4.98). (b) Comparação da taxa de amortecimento com o regime assintótico em que $\omega\tau \ll 1$ e dada pela equação (4.104). (c) Comparação da taxa de amortecimento com o regime em que $\omega\tau \sim 1$ dada pela equação (4.111). (d) Comparação da taxa de amortecimento com o regime assintótico em que $\omega\tau \gg 1$ dado pela equação (4.108). Estes gráficos foram obtidos para $\tau = 0.001$, $M_0 = 1/\sqrt{1.4}$ e $M_\infty = 1/\sqrt{1.6}$.

Pela figura 4.1, podemos perceber mais claramente o comportamento da velocidade de propagação dos distúrbios. Para regimes em que $\omega\tau \ll 1$, a velocidade do som na onda permanece muito próxima de $1/M_0$, que pode ser identificada como a cota inferior de $V(\omega)$. Isto significa que o fluido permanece em um estado muito próximo do equilíbrio termodinâmico. No caso oposto, em que $\omega\tau \gg 1$, a velocidade de propagação é maior e limitada superiormente por $1/M_\infty$. Outro fato notável é que a transição entre estes regimes é feita de maneira suave.

Observando as figuras 4.1 e 4.2, podemos perceber que as equações (4.102), (4.106) e (4.109) mostram uma ótima concordância dentro dos regimes propostos.

Capítulo 5

O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS MODIFICADO

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão tratados os aspectos matemáticos e teóricos do método das características aplicado ao problema de dinâmica de gases, assim como a obtenção das equações características e de compatibilidade em diferenças finitas, juntamente com os aspectos computacionais envolvidos. A modelagem numérica e o algoritmo apresentado aqui seguem as linhas adotadas nos trabalhos de Cunha (1989) e Har'El (1994).

5.2 DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS E EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

O modelo unidimensional de dinâmica dos gases, apresentado no capítulo anterior, é governado por um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. Como verificaremos ao longo deste capítulo, é possível determinar as soluções deste sistema via uma aproximação numérica baseada no método das características.

Matematicamente, o método que será apresentado nesta seção tem como objetivo encon-

trar as características nas quais o sistema de equações diferenciais parciais pode ser reescrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias, assim como foi feito no capítulo 2 para o estudo de equações hiperbólicas de primeira ordem. Para aplicar tal metodologia, vamos lembrar que as equações governantes do problema estudado no capítulo anterior são:

- Equação da conservação da massa:

$$L_1 = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.1)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5.2)$$

em que ε é um parâmetro estritamente positivo, conforme foi demonstrado no capítulo anterior, definido por

$$\varepsilon = -\frac{1}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2} \right). \quad (5.3)$$

- Equação de um gás politrópico:

$$p = \beta \rho^\gamma. \quad (5.4)$$

As equações de conservação (5.1) e (5.2) podem ser acopladas através de um operador diferencial linear L como uma combinação linear L_1 e L_2 . Desta maneira,

$$L = \theta_1 L_1 + \theta_2 L_2 = 0, \quad (5.5)$$

em que θ_1 e θ_2 são funções arbitrárias. Usando as definições de L_1 e L_2 em (5.5), tem-se

$$\theta_1 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \theta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, a equação (5.6) pode ser reescrita como

$$\theta_1 \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(u + \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{1}{\rho} \right) \right] + \theta_2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(u + \frac{\theta_1}{\theta_2} \rho a^2 \right) \right] - \theta_2 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5.7)$$

Agora, note que se usarmos as identidades

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.8)$$

e

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.9)$$

em que

$$\lambda = \frac{dx}{dt}, \quad (5.10)$$

e definirmos a inclinação da curva característica como

$$\lambda = u + \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{1}{\rho} = u + \frac{\theta_1}{\theta_2} \rho a^2, \quad (5.11)$$

então, concluímos que a equação (5.7) é dada, em forma de diferenciais totais, por

$$\theta_1 dp + \theta_2 du + \theta_2 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = 0. \quad (5.12)$$

A equação (5.12), conhecida como equação de compatibilidade, é válida somente ao longo da curva característica λ definida pelas igualdades em (5.11).

Através das relações em (5.11), podemos determinar o sistema de equações

$$\theta_1(\lambda - u) - \frac{\theta_2}{\rho} = 0, \quad (5.13)$$

$$-\theta_1 \rho a^2 + \theta_2(\lambda - u) = 0. \quad (5.14)$$

Na forma matricial

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

em que \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor solução, e $\mathbf{0}$ é o vetor nulo, o sistema de

equações anterior é dado por

$$\begin{pmatrix} \lambda - u & -\frac{1}{\rho} \\ -\rho a^2 & \lambda - u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Para que o sistema (5.16) não admita a solução trivial ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja identicamente nulo, i.e.,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - u & -\frac{1}{\rho} \\ -\rho a^2 & \lambda - u \end{pmatrix} = 0. \quad (5.17)$$

Efetuando o determinante, obtemos o polinômio característico do segundo grau em λ :

$$(\lambda - u)^2 - a^2 = 0, \quad (5.18)$$

cuja solução nos fornece as inclinações características

$$\lambda_{\pm} = u \pm a. \quad (5.19)$$

Agora que conhecemos os autovalores λ_{\pm} , podemos determinar os parâmetros θ_1 e θ_2 . De fato, substituindo a equação (5.19) em (5.13), e fazendo pequenas manipulações algébricas, determinamos que

$$\theta_1 = \pm \frac{1}{\rho a} \theta_2. \quad (5.20)$$

Pelo o que foi exposto na equação anterior, as relações (5.8) e (5.9) podem ser reescritas como

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.21)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.22)$$

Note que, em termos de operadores diferenciais, podemos afirmar simplesmente que

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.23)$$

Usando o fato que θ_2 é não nulo, e substituindo (5.20) e (5.21) em (5.7), determinamos as equações de compatibilidade

$$du \pm \frac{dp}{\rho a} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = 0. \quad (5.24)$$

Assumindo que o fluido obedece o modelo politrópico da equação (5.4), então $p \propto \rho^\gamma$ e $a^2 \propto \rho^{\gamma-1}$. Logo, podemos eliminar p e ρ da relação (5.24), usando as equações (4.68) e (4.69), para obtermos a identidade

$$\frac{dp}{\rho a} = \frac{2}{\gamma - 1} da. \quad (5.25)$$

Infelizmente, o terceiro termo da equação (5.24) impede que esta equação seja integrada de maneira analítica. Na verdade, este problema é ainda mais grave. Esse termo fere a hiperbolicidade do nosso problema, impedindo assim a aplicação do método das características, que é um método próprio para equações diferenciais hiperpólicas. Entretanto, se trabalharmos na hipótese de um termo parabólico fraco e, por conseguinte, um parâmetro ε pequeno, este problema ainda pode ser abordado numericamente por um método das características modificado. Para tal, adotaremos uma estratégia similar àquela adotada ao longo deste trabalho, ou seja, usaremos uma metodologia baseada em aproximações do laplaciano por diferenças finitas. Por esses motivos, o método que será descrito adiante será um método das características modificado ou, alternativamente, método das características fraco.

Substituindo as equações (5.25) em (5.24), ficamos com

$$du \pm \frac{2}{\gamma - 1} da - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = 0. \quad (5.26)$$

5.3 METODOLOGIA NUMÉRICA

O método que será apresentado neste seção adota uma malha regularmente espaçadas e, ao contrário da metodologia utilizada utilizada no capítulo 2, fixa no plano das características

(ver figura 5.1).

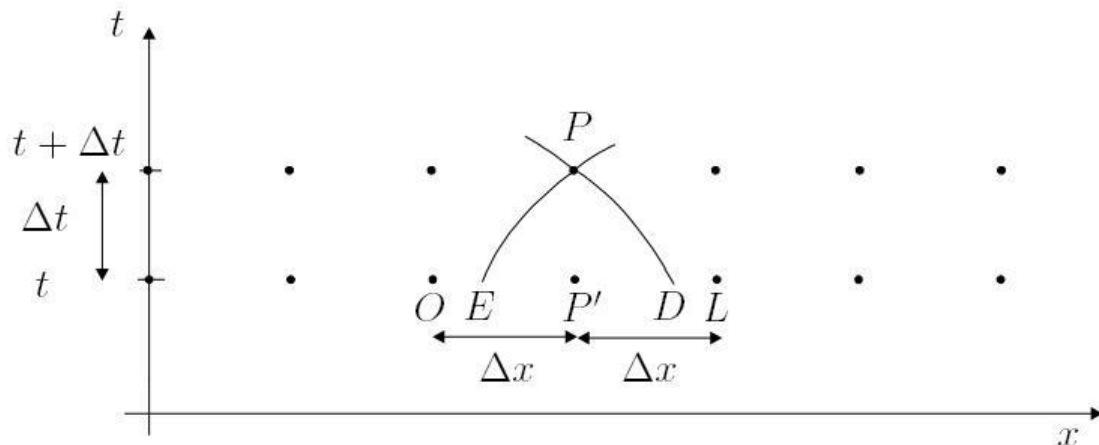


Figura 5.1: Ilustração da malha retangular adotada no método.

Na figura 5.1, a solução em um tempo posterior $t + \Delta t$ avaliada no ponto P é obtida através das características que passam pelos pontos D e E em uma linha de tempo conhecida.

Antes de prosseguirmos, faremos a seguinte simplificação: as curvas características serão aproximadas por linhas retas (ver figura 5.2). Esta abordagem, além de facilitar na implementação numérica, é muito precisa se usarmos um passo de tempo suficientemente pequeno.

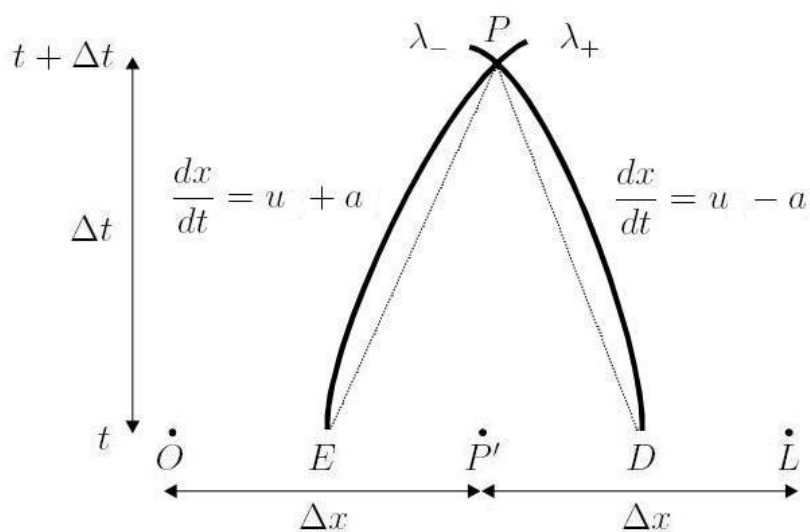


Figura 5.2: Ilustração da aproximação das curvas características por linhas retas.

Agora que adotamos a forma de nossas características, precisamos construí-las. A incli-

nação da curva característica que passa por E , em uma linha de tempo conhecida, é

$$\frac{dx}{dt} = (u^E + a^E). \quad (5.27)$$

Por sua vez, a declividade da curva característica que passa por P é

$$\frac{dx}{dt} = (u^P + a^P). \quad (5.28)$$

Entretanto, diferentemente do valor das propriedades u e a em E , estes valores em P não são conhecidos. Portanto, precisamos fazer uma aproximação. Partindo dos valores conhecidos de P' , usaremos a inclinação neste ponto para determinar a de P , ou seja, empregaremos a aproximação (ver figura 5.3)

$$\frac{\Delta x^E}{\Delta t} = u^{P'} + a^{P'}, \quad (5.29)$$

em que

$$\Delta x^E = x^{P'} - x^E. \quad (5.30)$$

De maneira similar, a equação para a característica que passa por D é aproximada por

$$\frac{\Delta x^D}{\Delta t} = u^{P'} - a^{P'}, \quad (5.31)$$

em que

$$\Delta x^D = x^D - x^{P'}. \quad (5.32)$$

No caso das equações de compatibilidade, uma análise cuidadosa da equação (??) nos fornece as relações

$$\left(u^P + \frac{2}{\gamma-1}a^P\right) - \left(u^E + \frac{2}{\gamma-1}a^E\right) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^E \Delta t \quad (5.33)$$

e

$$\left(u^P - \frac{2}{\gamma-1}a^P\right) - \left(u^D + \frac{2}{\gamma-1}a^D\right) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^D \Delta t. \quad (5.34)$$

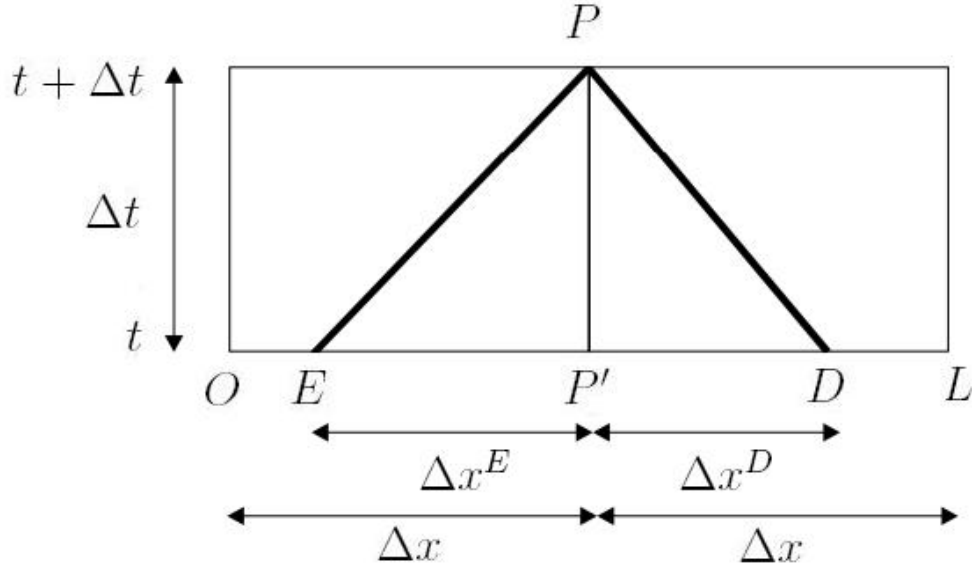


Figura 5.3: Ilustração das características associadas ao ponto P .

Resolvendo as equações de (5.33) e (5.34) para u^P e a^P , que são os pontos de interesse, determinamos que:

$$u^P = \frac{(u^E + u^D)}{2} + \frac{(a^E - a^D)}{\gamma - 1} + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^E + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^D \right] \Delta t, \quad (5.35)$$

e

$$a^P = \frac{\gamma - 1}{4} (u^E - u^D) + \frac{(a^E + a^D)}{2} + \frac{\varepsilon(\gamma - 1)}{4} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^E - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^D \right] \Delta t. \quad (5.36)$$

Para simplificar as equações anteriores, podemos adotar mais duas aproximações:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^E \approx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{P'}, \quad (5.37)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^D \approx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{P'}. \quad (5.38)$$

Na verdade, ao escolhermos estas expressões, decidimos avaliar o termo dissipativo no ponto P' , localizado entre E e D .

Com isto, as equações (5.35) e (5.36) se transformam em

$$u^P = \frac{(u^E + u^D)}{2} + \frac{(a^E - a^D)}{\gamma - 1} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{P'} \Delta t; \quad (5.39)$$

$$a^P = \frac{\gamma - 1}{4}(u^E - u^D) + \frac{(a^E + a^D)}{2}. \quad (5.40)$$

Para implementarmos as equações (5.39) e (5.40), precisamos determinar como avaliaremos u e a nos pontos E e D . Neste caso, adotaremos um procedimento padrão conhecido como interpolação linear. Com o auxílio desta técnica, podemos usar os pontos O , P' e L , que são conhecidos, para obtermos

$$\chi^E = \chi^{P'} - \frac{\Delta x^E}{\Delta x}(\chi^{P'} - \chi^O), \quad (5.41)$$

e

$$\chi^D = \chi^{P'} - \frac{\Delta x^D}{\Delta x}(\chi^{P'} - \chi^L), \quad (5.42)$$

em que χ pode representar as propriedades u e a .

5.4 EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS

Adotando, como nos métodos apresentados anteriormente, $h \equiv \Delta x$ como a distância entre os pontos $(i-1, j)$ e (i, j) na malha e $k \equiv \Delta t$ como o passo de tempo, podemos obter as aproximações para u^E e a^E , a partir das equações (5.41) e (5.42), como:

$$u^E = u_i^j - \frac{k}{h}(u_i^j + a_i^j)(u_i^j - u_{i-1}^j), \quad (5.43)$$

e

$$a^E = a_i^j - \frac{k}{h}(u_i^j + a_i^j)(a_i^j - a_{i-1}^j). \quad (5.44)$$

Analogamente, para D obtemos

$$u^D = u_i^j + \frac{k}{h}(u_i^j - a_i^j)(u_{i+1}^j - u_i^j), \quad (5.45)$$

e

$$a^D = a_i^j + \frac{k}{h}(u_i^j - a_i^j)(a_{i+1}^j - a_i^j). \quad (5.46)$$

Substituindo as equações (5.43), (5.44), (5.45) e (5.46) em (5.39) e (5.40), podemos calcular as aproximações de $u^P \equiv u_i^{j+1}$ e $a^P \equiv a_i^{j+1}$. Para o termo dissipativo, usaremos a seguinte aproximação de segunda ordem em diferenças finitas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (5.47)$$

As equações apresentadas nesta seção são válidas para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n-1$. Naturalmente, como na implementação do método de Crank-Nicolson para a equação de Burgers (ver capítulo 3), precisaremos de condições de contorno para fechar o nosso problema. Neste caso, trabalharemos exclusivamente com as condições de contorno periódicas:

$$u_k^j = u_{k+m}^j, \quad (5.48)$$

e

$$a_k^j = a_{k+m}^j, \quad (5.49)$$

em que k é um número inteiro qualquer.

5.5 ESTABILIDADE DO MÉTODO

A condição de estabilidade de Courant, conforme Abbott (1966), garante que as interseções das linhas λ_+ e λ_- caíam entre os pontos de soluções anteriores O e L , que são os pontos empregados na interpolação linear para a determinação das propriedades do escoamento nos pontos iniciais E e D . Para este problema, as condições a serem respeitadas são

$$\frac{h}{k} \geq u + a, \quad (5.50)$$

e

$$\frac{h}{k} \geq u - a. \quad (5.51)$$

Porém, como $u + a > u - a$, a equação (5.51) não é necessária. Esta condição nos diz que o domínio de dependência física, determinado pelas curvas características, contenha o domínio de dependência numérica em qualquer ponto da malha.

Na prática, para adotarmos o critério na equação (5.50), escolhemos o passo de tempo k de forma

$$k \leq h(u + a)_{\max}, \quad (5.52)$$

em que $(u + a)_{\max}$ é o valor máximo que $u + a$ assume em um passo de tempo conhecido.

5.6 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DO NUMÉRICO

Com o objetivo de validar a metodologia numérica proposta neste capítulo, serão feitos três testes. Será resolvido o sistema de equações (5.1), (5.2) e (5.4), com as seguintes condições iniciais e valores de ε :

- **Teste 1.**

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x), \quad (5.53)$$

$$a(x, 0) = 0 \quad (5.54)$$

e $\varepsilon = 0$.

- **Teste 2.**

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad (5.55)$$

$$a(x, 0) = 0 \quad (5.56)$$

e ε variando de 10^{-2} até 10^{-5} .

- **Teste 3.** Neste caso, será realizada uma comparação da taxa de amplificação espacial pelo método implementado e (4.104), obtida pela análise de estabilidade linear. Para este teste, as condições iniciais serão deduzidas e serão testados os valores $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

5.6.1 Teste 1

O primeiro teste corresponde à equação de Burgers invíscida. Como este caso já foi resolvido pelo próprio método das características (linha em pontos), porém usando uma metodologia direta, podemos realizar uma comparação com o método indireto proposto neste capítulo.

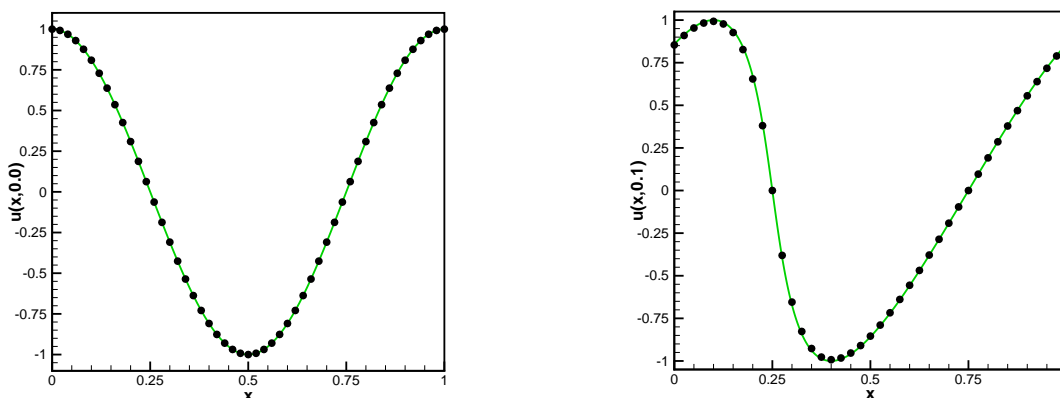


Figura 5.4: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em diferentes instantes de tempo. Foram usados $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$.

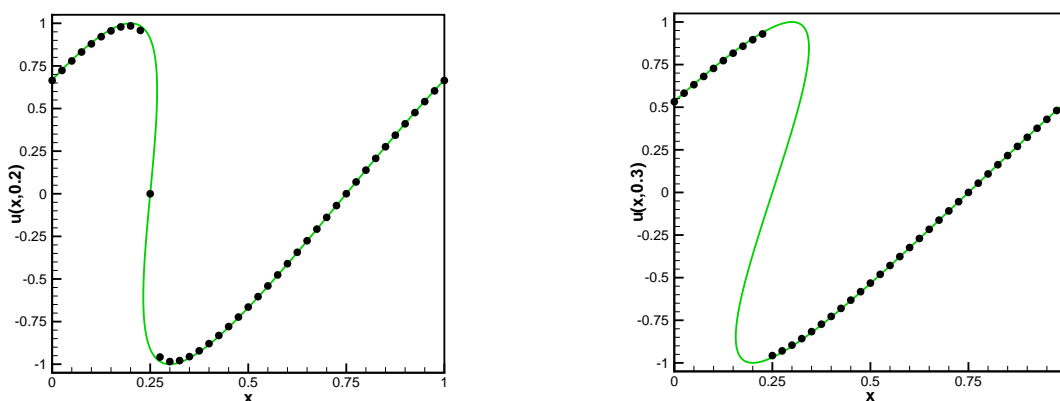


Figura 5.5: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo em diferentes instantes de tempo. Foram usados $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$.

Na figura 5.4, vemos que a solução numérica proposta neste capítulo concorda com a solução proposta no capítulo 2. Na figura 5.5, podemos perceber uma vantagem da metodologia indireta proposta neste capítulo. Ao contrário da metodologia direta, ela obedece

à regra das áreas iguais, ou seja, a solução numérica calculada através do método descrito neste capítulo não retorna regiões multivaloradas para $t > 1/2\pi$, no caso da condição inicial $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$. Este fato é consequência direta da adoção de uma malha fixa no plano das características.

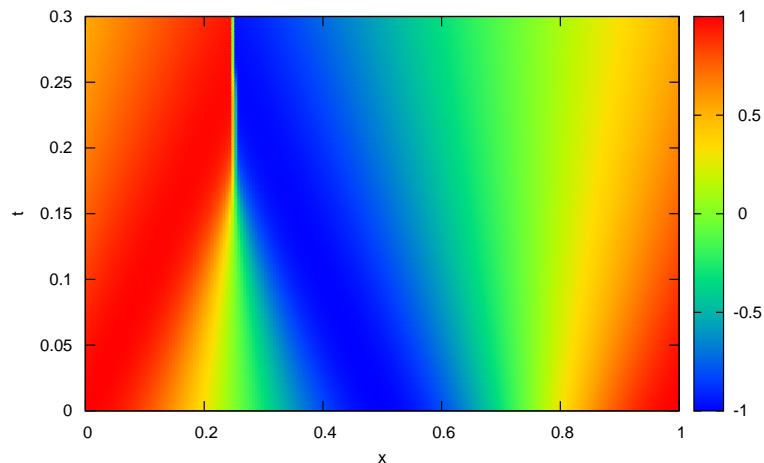


Figura 5.6: Diagrama espaço-tempo do campo de velocidades obtido pela metodologia proposta neste capítulo para $u(x, 0) = \cos(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0$, $h = 0.005$ e $k = 0.00125$.

A gravura 5.6 representa o diagrama espaço-tempo do campo de velocidades para o problema em questão. Nela, podemos perceber a evolução da onda cosseínodal periódica (5.53). Como já foi observado no parágrafo anterior, a onda possui um perfil de choque para tempos maiores que $1/2\pi$. Isto é evidenciado pela transição súbita do campo de velocidades em $x = 0.25$.

5.6.2 Teste 2

O segundo teste corresponde à equação de Burgers (3.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.57)$$

em que $\varepsilon = \text{Re}^{-1}$. Esta equação já foi resolvida numericamente, no terceiro capítulo deste trabalho, pelo método implícito de Crank-Nicolson. O objetivo aqui é realizar uma comparação

entre o método das características modificado, apresentado neste capítulo, e a metodologia de Crank-Nicolson (3.100).

Para avaliarmos a convergência do nosso método na presença de um termo parabólico, testaremos a condição inicial senoidal

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x). \quad (5.58)$$

Neste caso, a condição de Courant, baseada no critério da inequação (5.52), escolhida foi

$$k = \frac{h}{64}. \quad (5.59)$$

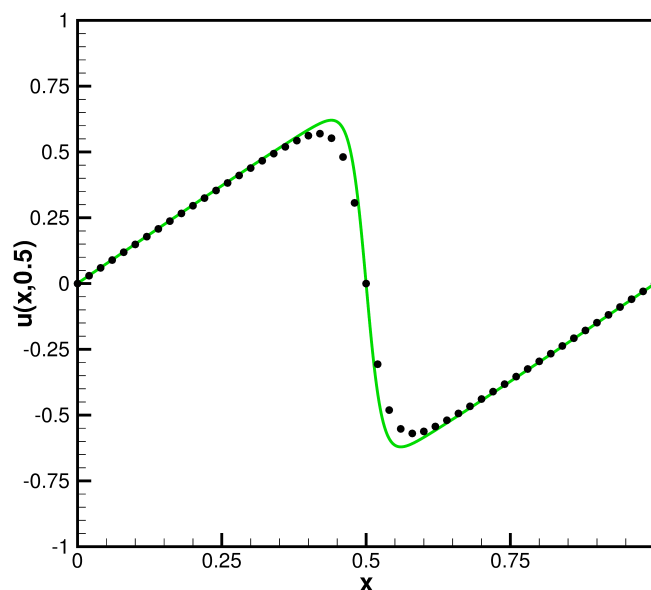


Figura 5.7: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.02$ e no método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

A figura 5.7 mostra uma comparação entre a metodologia parabólica de Crank-Nicolson (em linha cheia), apresentada no terceiro capítulo, com o método das características modificado apresentado neste capítulo. Claramente, podemos perceber que existe uma divergência, mesmo que não muito grande, entre as duas soluções numéricas apresentadas. Como o método de Crank-Nicolson já foi validado, queremos verificar se refinarmos a discretização es-

pacial, e conseqüentemente a temporal, então a solução obtida pela metodologia hiperbólica modificada converge para a solução numérica obtida pelo método parabólico.

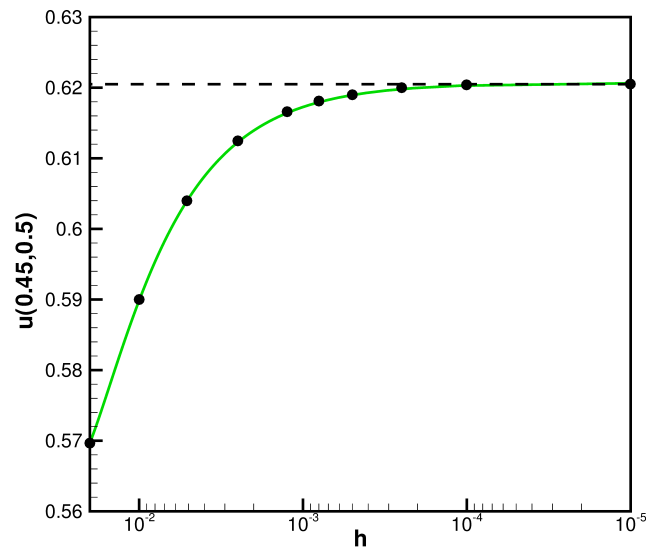


Figura 5.8: Convergência do método das características modificado (linha cheia) com a metodologia parabólica proposta no terceiro capítulo (linha tracejada) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$.

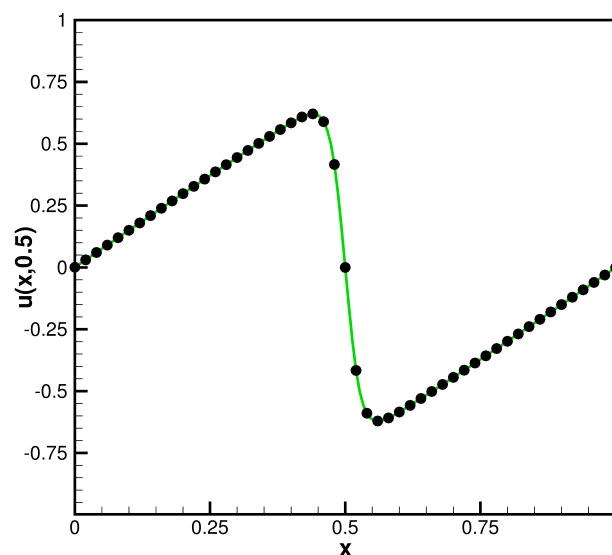


Figura 5.9: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.01$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.0005$ e no método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

De fato, como podemos ver na figura 5.8, ao aumentarmos a discretização espacial, a

solução numérica obtida pelo método das características modificado converge para a solução obtida pelo método de Crank-Nicolson. Observe que, para chegarmos nesta conclusão, escolhamos um ponto fixo no espaço, no caso em $x = 0.45$, e avaliamos o seu valor obtido pela metodologia hiperbólica modificada para diferentes valores de h . Na figura 5.9, como esperado, vemos que para um valor adequado de h , a metodologia proposta neste capítulo é uma boa aproximação para o problema parabólico não linear (5.57).

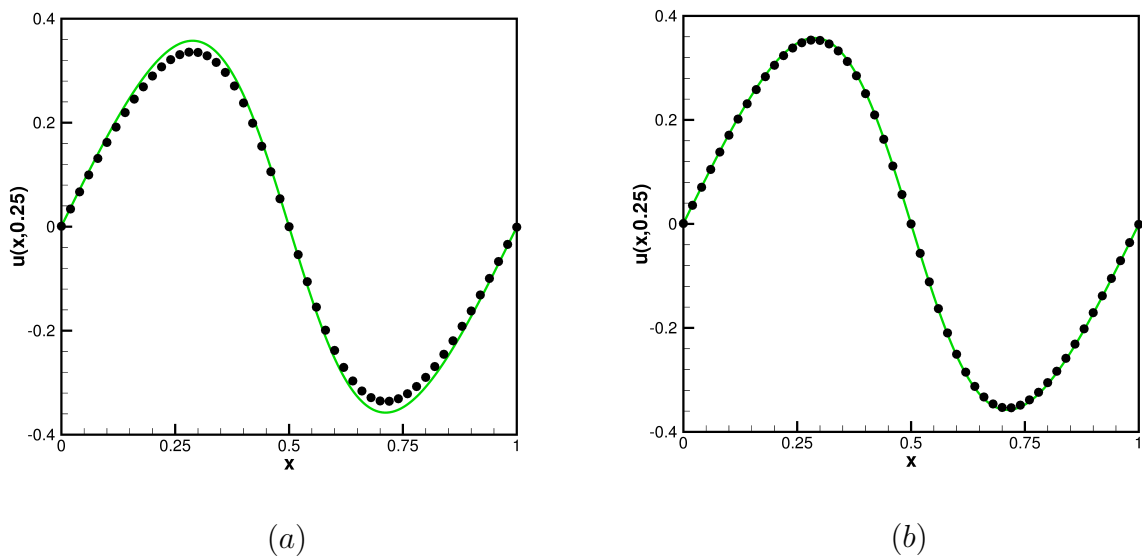


Figura 5.10: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.1$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.0005$ em (a) e $h = 0.000125$ em (b). No método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

Naturalmente, se aumentarmos ou diminuirmos o valor de ε , o valor de h também deverá ser alterado para que o método das características continue concordando com o método de Crank-Nicolson. A figura 5.10 nos diz que, se quisermos manter a precisão do método para $\varepsilon = 0.1$, então precisamos diminuir o valor de h (com relação àquele usado para $\varepsilon = 0.01$). Já na figura 5.11, em que $\varepsilon = 0.0001$, enquanto no método das características modificado precisamos adotar $h = 0.01$, no método de Crank-Nicolson foi necessário tomar $h = 0.0001$ e $k = 0.0001$ para evitar as oscilações espúrias do método parabólico presentes para pequenos valores de ε . Isto reforça a idéia que na interface entre o problema parabólico e o problema hiperbólico, em que $\varepsilon \rightarrow 0$, o método das características modificado se apresenta como uma boa alternativa numérica.

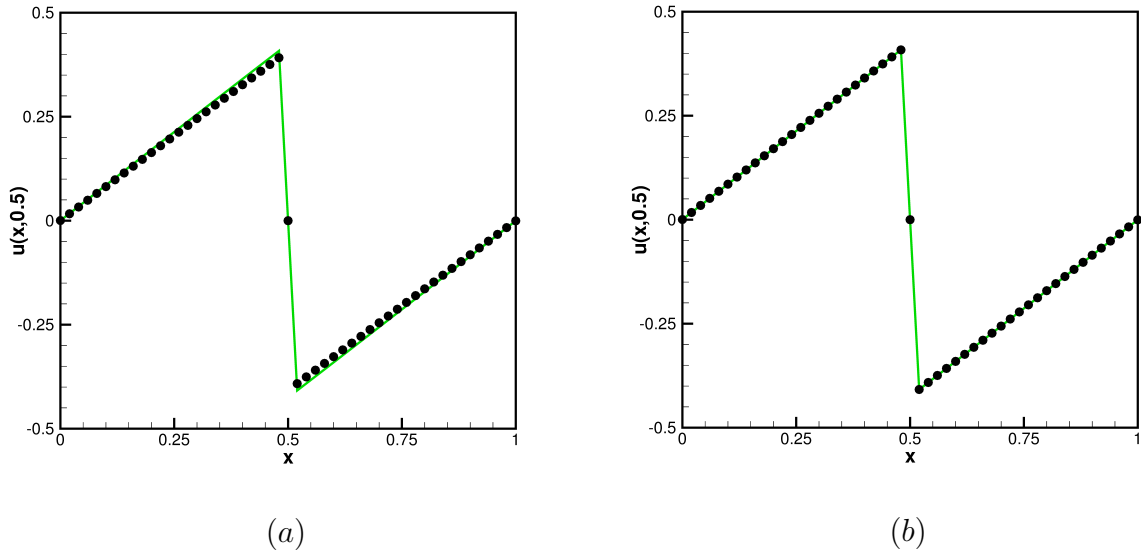


Figura 5.11: Comparação da metodologia empregada no segundo capítulo (linha cheia) com a metodologia proposta neste capítulo (linha em pontos) em $t = 0.5$. Foram usados $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$, $a(x, 0) = 0$ e $\varepsilon = 0.0001$. Para o método das características modificado, adotamos $h = 0.5$ em (a) e $h = 0.01$ em (b). No método de Crank-Nicolson, usamos $h = 0.001$ e $k = 0.001$.

Sendo assim, podemos fazer um comentário importante sobre as vantagens de adotar uma aproximação baseada no método das características modificado. Ele é um método explícito, ao contrário do método implícito de Crank-Nicolson que é, por natureza, mais trabalhoso de ser implementado. Outra vantagem clara do método desenvolvido é o seu baixo custo computacional.

5.6.3 Teste 3

A terceira e última parte desta seção consiste em validar o nosso código numérico através da análise de estabilidade linear realizada no capítulo anterior. De acordo com esta análise, a taxa de amplificação dos distúrbios para $\omega\tau \sim 1$, conforme a equação (4.111), é dada por

$$k_2(\omega) = \Im \left\{ \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega\varepsilon - \frac{1}{M_0^2}}} \right\}. \quad (5.60)$$

Agora, o nosso objetivo é recuperar numericamente a expressão (5.60). Para tal, as condições iniciais que deverão ser testadas são

$$u(x, 0) = U \cos(k_1 x), \quad (5.61)$$

$$a(x, 0) = \frac{1}{M_0} + A \cos(k_1 x), \quad (5.62)$$

em que

$$k_1 = k_1(\omega) = \Re \left\{ \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega\varepsilon - \frac{1}{M_0^2}}} \right\}, \quad (5.63)$$

e a amplitude do distúrbio A está vinculada com U , conforme a equação (4.89), pela relação

$$A = \frac{k_1(\gamma - 1)}{2\omega M_0} U. \quad (5.64)$$

Para as condições iniciais de pequenas perturbações, além das equações (5.61), (5.62) e (5.64), ainda temos que considerar a equação (4.87)

$$\frac{1}{M_0} = \sqrt{\gamma}, \quad (5.65)$$

que foi deduzida no capítulo anterior.

Combinando as relações de (5.61) a (5.65), concluímos que as condições iniciais que deverão ser implementadas são

$$u(x, 0) = U \cos(k_1 x), \quad (5.66)$$

$$a(x, 0) = \sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{k_1(\gamma - 1)}{2\omega} U \cos(k_1 x) \right]. \quad (5.67)$$

Depois disso, precisamos avaliar a evolução da amplitude do distúrbio, dado pela equação (5.66), conforme este avança no espaço (ver figura 5.12). Então, usamos o método dos mínimos quadrados (ver apêndice C) para encontrar a curva

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{B} \exp(\lambda(\omega)x) \quad (5.68)$$

que melhor ajusta os pontos do nosso espaço amostral. O parâmetro λ é o nosso maior

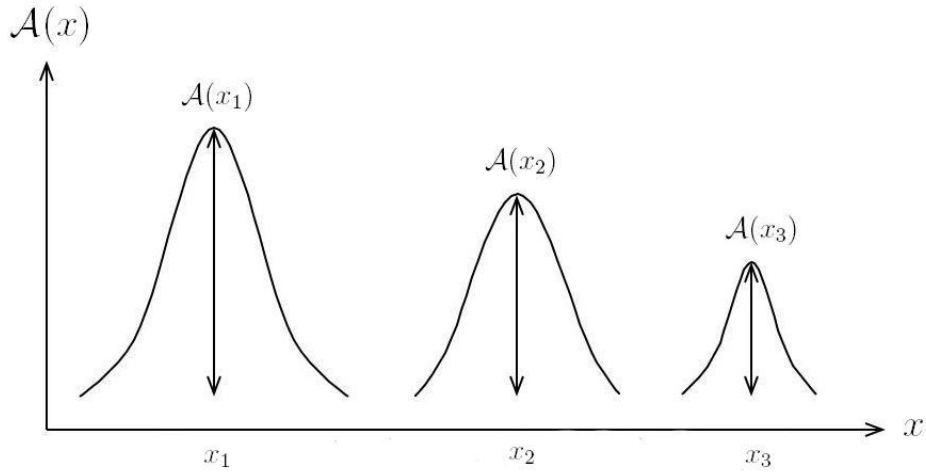


Figura 5.12: Evolução espacial da amplitude de um distúrbio.

Tabela 5.1: Evolução espacial da amplitude $\mathcal{A}(x)$ obtida numericamente para $\omega = 1.0$, $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.0005$, $U = 10^{-3}$, $h = 0.00001$ e $k = 0.000005$.

x	$\mathcal{A}(x)$
0.000000	0.002000
0.001178	0.001947
0.004594	0.001801
0.008190	0.001660

interesse, porque o seu simétrico é exatamente a taxa de amplificação dos distúrbios, i.e.

$$\lambda(\omega) = -k_2(\omega). \quad (5.69)$$

Por sua vez, o parâmetro \mathcal{B} , se o nosso modelo foi implementado corretamente, deve retornar um valor muito próximo de $2U$.

Para exemplificarmos o que foi discutido no parágrafo anterior, considere a tabela 5.1. Aplicando o método dos mínimos quadrados, obtemos

$$\mathcal{A}(x) = 0.001999 \exp(-22.755413x) \quad (5.70)$$

Como podemos perceber, os valores de \mathcal{B} e λ , obtidos numericamente, são muito próximos de seus valores analíticos, respectivamente, 0.002 e -23.26641576 .

Analisando as figuras 5.13 e 5.14, vemos que para valores pequenos de ε , neste caso 0.1 e 0.01, os resultados obtidos numericamente, pelo método dos mínimos quadrados, para a

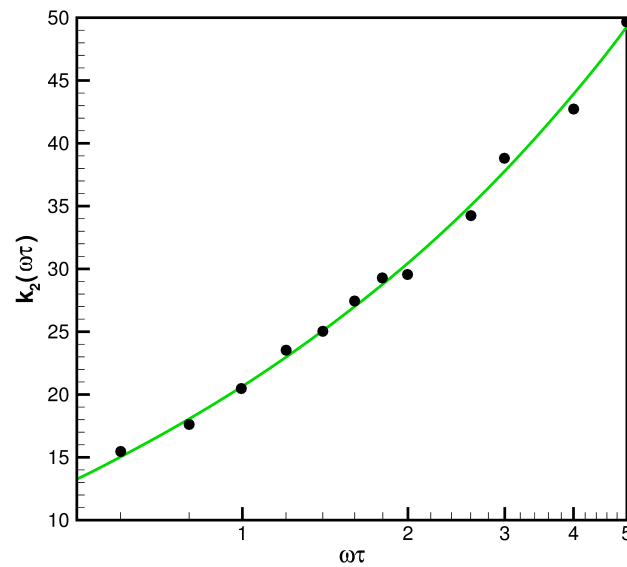


Figura 5.13: Comparação de $k_2(w)$ (linha cheia), conforme a equação (5.60), com a metodologia numérica proposta neste capítulo (linha em pontos) para diferentes valores de ω . Foram usados as condições iniciais (5.66) e (5.67), $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.1$, $U = 0.001$, $h = 0.0001$ e $k = 0.000025$.

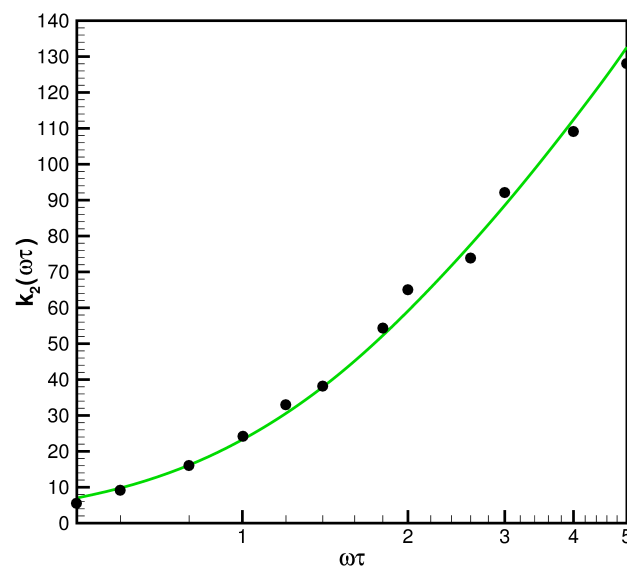


Figura 5.14: Comparação de $k_2(w)$ (linha cheia), conforme a equação (5.60), com a metodologia numérica proposta neste capítulo (linha em pontos) para diferentes valores de ω . Foram usados as condições iniciais (5.66) e (5.67), $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.01$, $U = 0.001$, $h = 0.0001$ e $k = 0.000025$.

taxa de amplificação dos distúrbios concordam com os valores analíticos da equação (5.60).

Portanto, desde que seja respeitada a condição $\omega\tau \sim 1$, a análise de estabilidade linear

realizada no capítulo anterior garante a validade do método das características modificado que está sendo utilizado neste trabalho.

5.7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Agora que validamos o código numérico proposto neste capítulo, vamos utilizá-lo para compreendermos melhor o comportamento do nosso sistema de equações composto por (5.1), (5.2) e (5.4).

Para gerarmos os resultados desta seção, usaremos o seguinte conjunto de condições iniciais:

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) \quad (5.71)$$

e

$$a(x, 0) = \frac{1}{M_0} + \frac{\gamma - 1}{2} u(x, 0). \quad (5.72)$$

A condição inicial para a velocidade a de propagação do som no fluido foi escolhida conforme o trabalho de Romão, de Moura e Silva (2008).

Para as seguintes simulações, controlaremos o valor de ε e usaremos

$$\gamma = 1.4, \quad (\text{para o ar ao nível do mar}) \quad (5.73)$$

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \quad (\text{conforme a equação (4.87)}) \quad (5.74)$$

$$h = 5 \cdot 10^{-4}, \quad (5.75)$$

$$k = \frac{h}{64} \approx 7.8 \cdot 10^{-6}. \quad (\text{condição de Courant}) \quad (5.76)$$

A figura 5.15, plotada para $\varepsilon = 0$, mostra que o perfil de velocidade u vai sendo deformado ao longo do tempo. Observe que, enquanto a onda não choca, a amplitude da nossa condição inicial (5.71) é conservada. Neste caso, a perda de amplitude não é causada por um efeito dissipativo, mas pela lei de conservação das áreas iguais que impede o surgimento de funções multivaloradas. Entretanto, se considerarmos $\varepsilon = 0.1$ ou $\varepsilon = 0.01$, por exemplo, esse fenômeno não é repetido (ver figuras 5.16 e 5.17). A partir destes gráficos, podemos concluir que quanto maior o valor de ε , maior será o efeito dissipativo na onda em questão.

Neste sentido, o parâmetro ε pode ser interpretado como um mediador entre o mecanismo de dissipação e o de transporte não linear.

Na figura 5.15, em $t = 0.21$, podemos observar a caracterização de um choque no perfil de u para $\varepsilon = 0$. Este fenômeno era esperado, porque, como foi visto ao longo desta dissertação, o choque é uma característica de problemas hiperbólicos não lineares. Entretanto, estamos interessados em casos onde o parâmetro ε é pequeno e diferente de 0. Para $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$ (figuras 5.16 e 5.17), vemos que, apesar da deformação em seus perfis, não existe indício de formação de choque. De fato, se definirmos numericamente o choque como o primeiro instante de tempo numérico em que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{-1} < 10^{-6}, \quad (5.77)$$

assim como foi feito no capítulo 3, verificamos que este fenômeno ocorre para $\varepsilon \sim 10^{-3}$ ou menor (ver figura 5.18).

Desta maneira, e lembrando que

$$\varepsilon = -\frac{1}{\text{Re}'} \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\infty^2}\right), \quad (5.78)$$

fomos capazes de construir a figura 5.19. Nesta figura, a curva apresentada delimita a região com choque (acima da curva) e a região livre de choque (abaixo da curva). A partir desta curva, percebemos que o número de Reynolds expansional é o parâmetro mais influente na determinação da ocorrência de um choque no perfil do escoamento. Observe que para $M_0/M_\infty = 1$, sempre irá ocorrer a formação de choque, pois se trata de um regime assintótico em que $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, podemos verificar que, mesmo para valores de M_0/M_∞ próximos de 1, caso o número de Reynolds expansional seja suficientemente pequeno, é possível que ocorra um choque no perfil do escoamento.

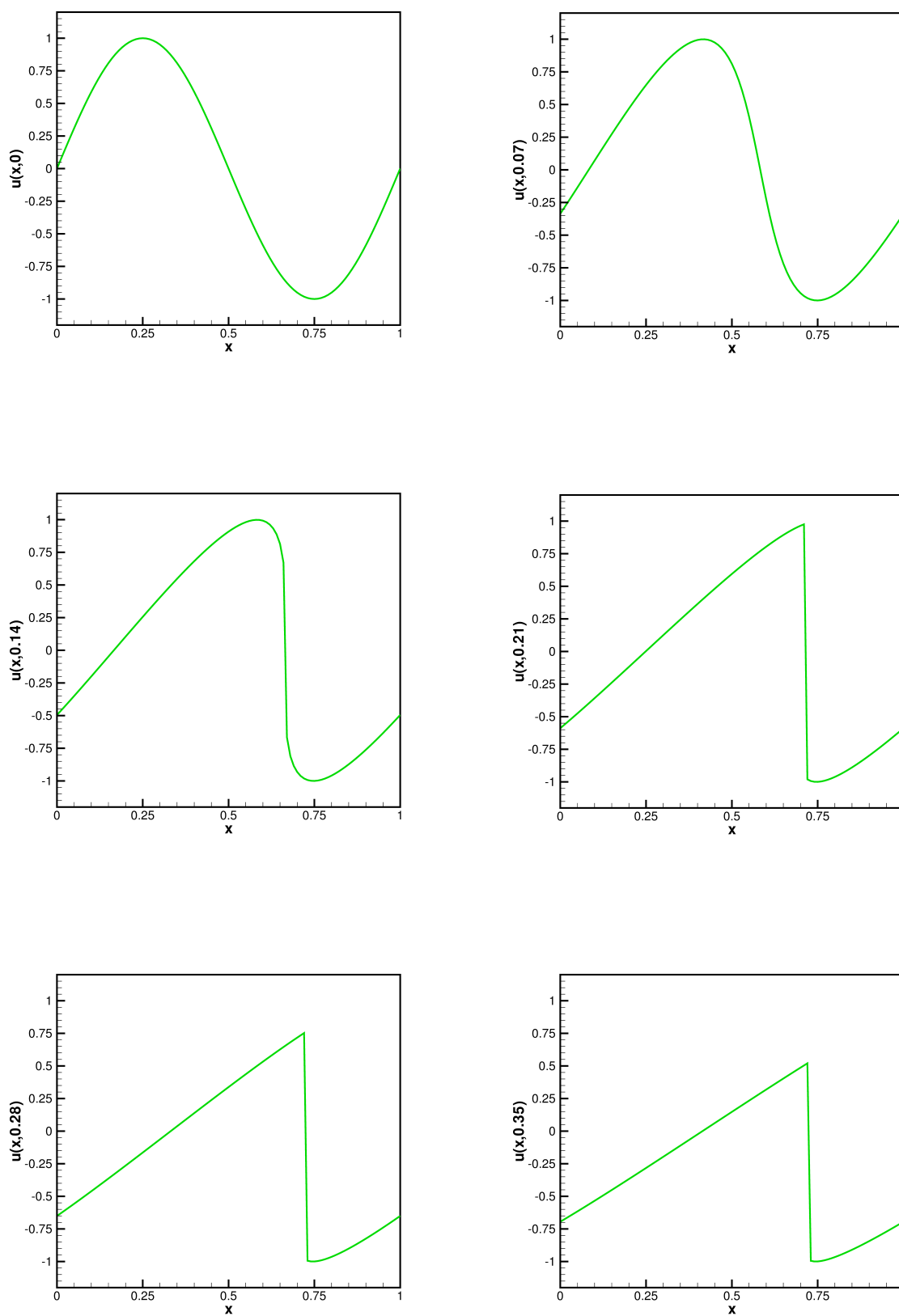


Figura 5.15: Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0$.

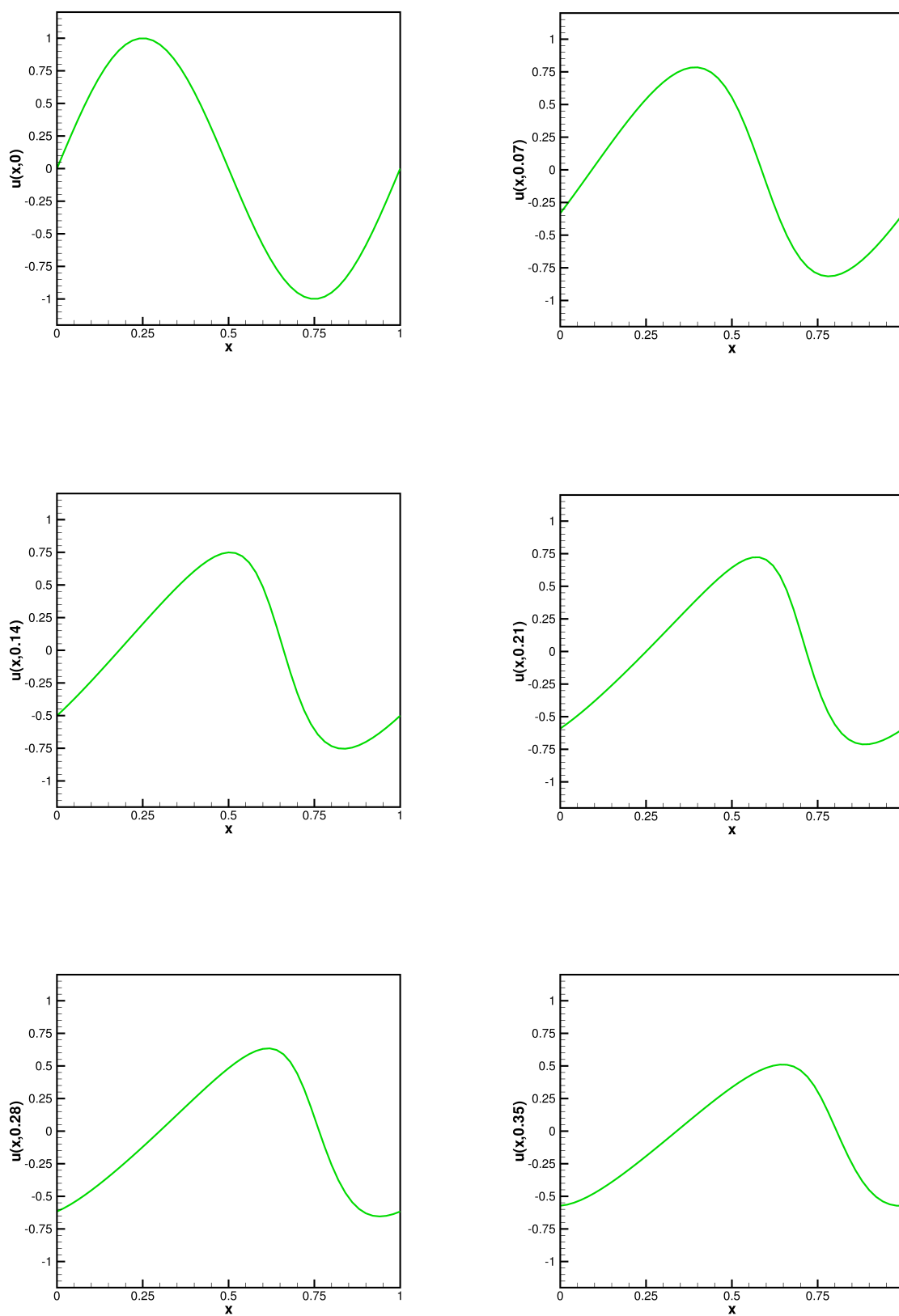


Figura 5.16: Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.1$.

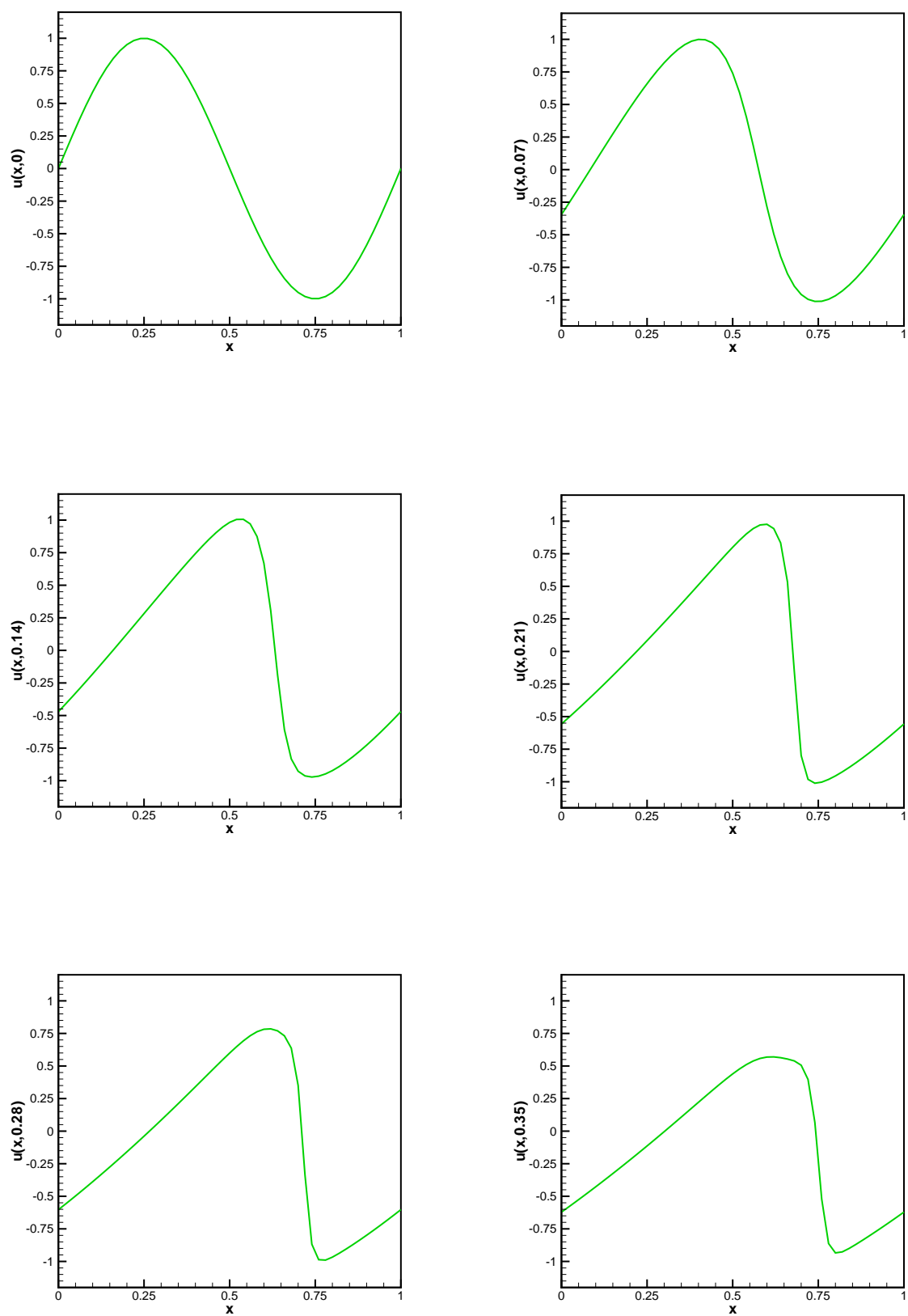


Figura 5.17: Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.01$.

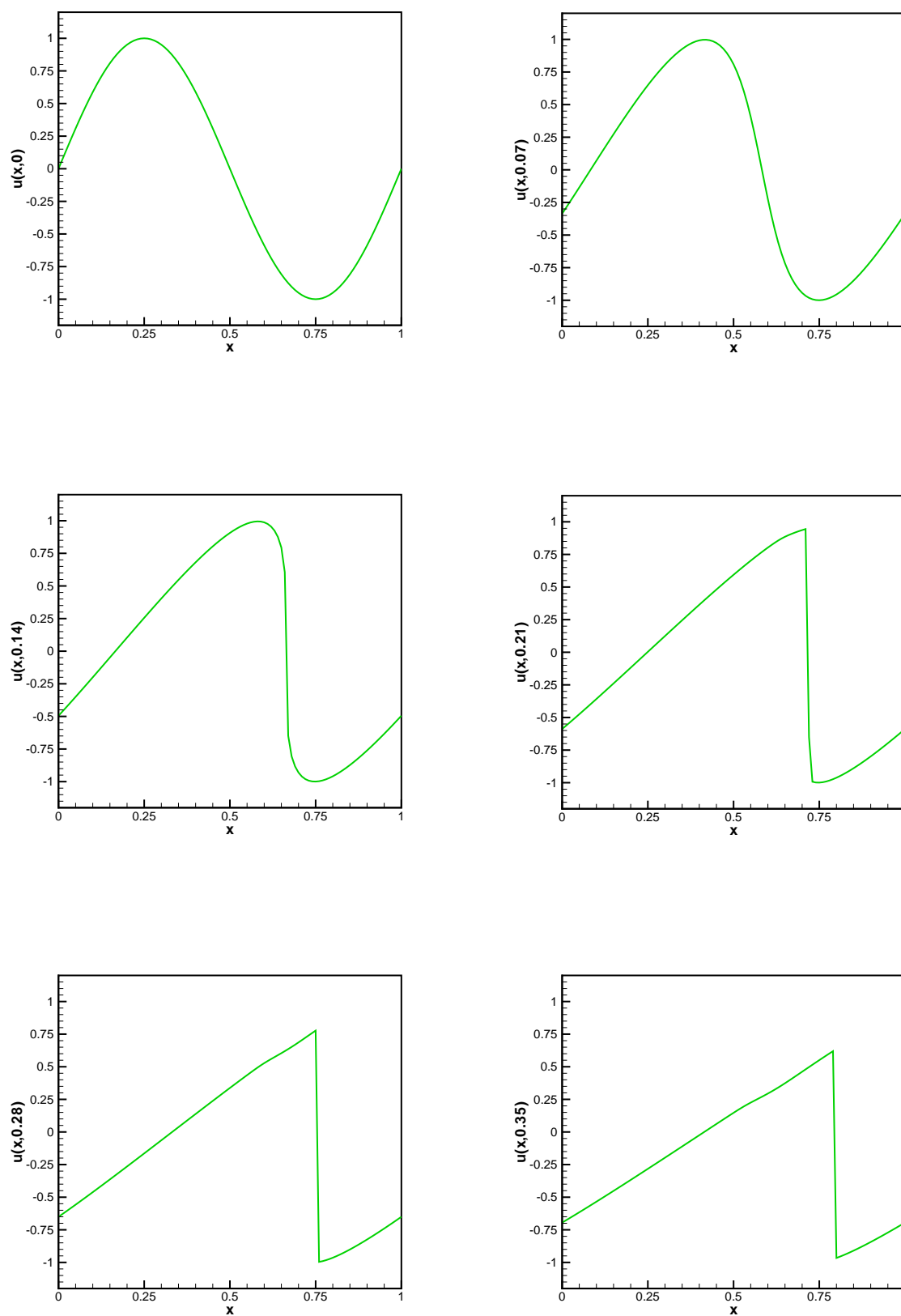


Figura 5.18: Evolução do perfil apresentado na equação (5.71) para $\varepsilon = 0.004$.

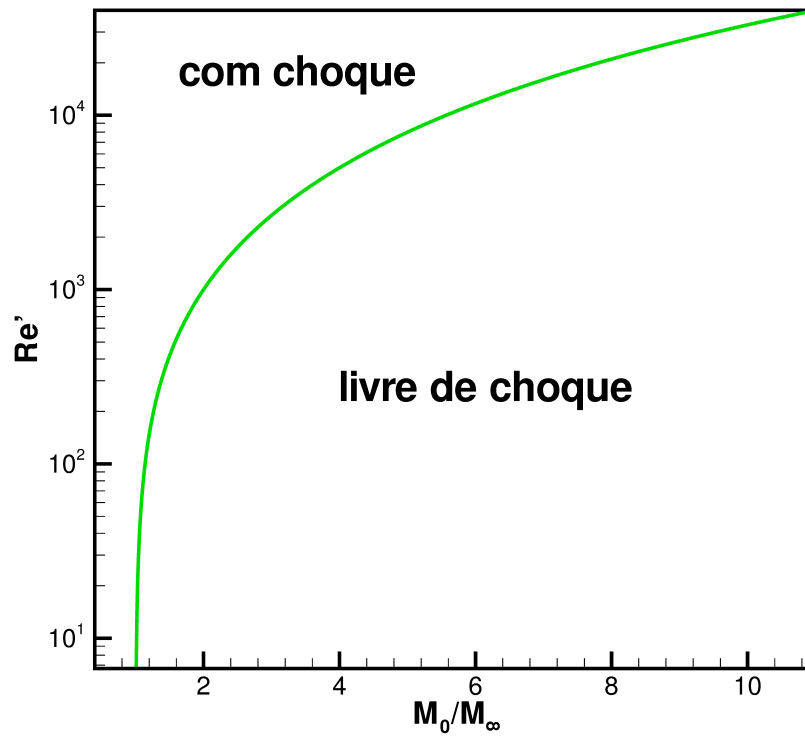


Figura 5.19: Diagrama de formação de choque para o perfil (5.71).

Capítulo 6

CONCLUSÃO

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o objeto de estudo foi a modelagem e o tratamento de ondas não lineares. Inicialmente, estudamos o modelo mais simples de propagação de ondas: a equação da advecção. Depois de explorarmos algumas variações desta equação, analisamos a nossa primeira equação de transporte não linear, a equação de Burgers invíscida. Esta equação foi o nosso primeiro contato com o choque, um fenômeno recorrente neste trabalho. Essas equações, apresentadas no segundo capítulo foram resolvidas, tanto numericamente quanto analiticamente, pelo método das características.

Após trabalharmos com equações de transporte de primeira ordem, voltamos a nossa atenção para a equação de Burgers. Esta equação, que é uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem, introduziu o efeito dissipativo da viscosidade. Para realizar este efeito, estudamos as soluções do tipo onda viajante e por similaridade. Então, foi proposta uma metodologia numérica, baseada no método de Crank-Nicolson, que foi validada usando as soluções analíticas mencionadas anteriormente e o artigo de Mittal & Singhal (1996). Os resultados obtidos foram satisfatórios. Depois, introduzimos as equações do movimento de um gás barotrópico e apresentamos a teoria acerca do segundo coeficiente de viscosidade, conforme Mandelstam & Leontovich(1937). Utilizando uma análise de estabilidade linear, concluímos que a taxa de amplificação dos distúrbios retorna apenas modos estáveis para este problema. Ainda considerando essas equações não lineares da dinâmica dos gases, propomos

uma metodologia numérica baseada no método das características para sistemas hiperbólicos. Para um termo parabólico suficientemente pequeno, foi possível verificar uma boa convergência do método proposto. Através desse método, conseguimos observar o comportamento não linear do nosso sistema de equações e, em particular, capturamos a formação de ondas de choque no escoamento.

Para validar o código numérico foram realizados três testes. O primeiro consistia em comparar a solução numérica com aquela proposta no segundo capítulo para o caso da equação Burgers invíscida. O segundo teste foi muito parecido com o primeiro, mas dessa vez a solução numérica foi comparada com a solução desenvolvida pelo método de Crank-Nicolson para a equação de Burgers. Particularmente, mostramos que para uma viscosidade suficientemente pequena, o método das características modificado, diferentemente da metodologia parabólica, é capaz de reproduzir com fidelidade e baixo custo computacional soluções com tendência a formação de choque. Por último, realizamos uma comparação com a taxa de amplificação de pequenos distúrbios obtida pela análise de estabilidade linear do sistema de equações da dinâmica dos gases. Por apresentarem bons resultados, estes testes reforçaram a validade da implementação do método.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se um estudo da equação diferencial de Korteweg-de Vries de maneira similar àquele feito neste trabalho para a equação de Burgers. Neste sentido, propomos a análise de suas soluções clássicas, do tipo onda viajante e por similaridade, bem como a sua solução numérica. Estas investigações são essenciais para compreendermos a equação governante de leitos fluidizados em sua forma não linearizada, conforme Sobral (2004).

Outra proposta interessante é introduzir o efeito do segundo coeficiente de viscosidade, discutido neste trabalho no contexto de dinâmica dos gases, na equação da conservação da quantidade de movimento da fase particulada de um leito fluidizado. Para tal, sugere-se também revisar o trabalho de Sobral (2004), onde, através da formulação das equações de balanço do contínuo para leitos fluidizados, foi feito um estudo do comportamento global de

um leito fluidizado.

Por fim, também seria interessante aplicarmos o método das características, desenvolvendo uma metodologia semelhante àquela utilizada nesta dissertação, para melhorar a compreensão acerca dos mecanismos de formação de bolhas em leitos fluidizados. Existem evidências que este fenômeno possa ser interpretado como um choque no leito fluidizado, similar àqueles estudados nesta dissertação para escoamentos compressíveis. Como podemos ver, todas as sugestões giram em torno de um tema: dinâmica de leitos fluidizados. Apesar deste assunto não ter sido abordado nesta dissertação de mestrado, foram fornecidas ferramentas que nos permitem abordar todos os problemas supracitados.

Bibliografia

- [1] Abbott, M. B., “An Introduction to the Method of Characteristics”, Nova Iorque: *American Elsevier*, 1966
- [2] Acheson, D. J., “Elementary Fluid Dynamics”, Nova Iorque: *Oxford University Press*, 1990
- [3] Anderson, J. D., “Modern Compressible Flow: With Historical Perspective”, Nova Iorque: *McGraw-Hill*, 2002
- [4] Batchelor, G. K., “An Introduction to Fluid Dynamics”, Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 1967
- [5] Bateman, H., “Some Recent Researches on the Motion of Fluids”, *Monthly Weather Review*, Vol. 43, 1915, p. 163-170
- [6] Benton, E. R., Platzman, G. W., “A Table of Solutions of the of the One-Dimensional Burgers Equation”, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 30, 1972, p. 195-212
- [7] Boas, M. L., “Mathematical Methods in the Physical Sciences”, Estados Unidos: *John Wiley & Sons, Inc.*, 2006
- [8] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno”, Rio de Janeiro: *LTC*, 2006
- [9] Burgers, J. M., “A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 1, 1948, p. 171-199
- [10] Chandrasekharaiah, D. S., Debnath, L., “Continuum Mechanics”, Boston: *Academic Press*, 1994

-
- [11] Chorin, A. J., Marsden, J. E., “A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics”, Nova Iorque: *Springer*, 1993
- [12] Cole, J. D. “On a Quasi-linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics”, *Q. Appl. Math.*, Vol. 9, 1951, p. 225-236
- [13] Conte, S.D., deBoor, C., “Elementary Numerical Analysis”, Nova Iorque: *McGraw-Hill*, 1972
- [14] Cunha, F. R., “Análise Dinâmica de Mecanismos Não-Lineares na Fluidização”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 1989.
- [15] Cunha, F. R., “Notas de Aula em Dinâmica dos Fluidos”, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2010.
- [16] Drazin, P. G., Jonhson, R. S., “Solitons: An introduction”, Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 1993
- [17] Figueiredo, D. G., “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, Rio de Janeiro: *Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 2007
- [18] Fortuna, A. O., “Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações”, São Paulo: *Edusp*, 2000
- [19] Forsyth, A. R., “Theory of Differential Equations”, Vol. 6, Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 1906
- [20] Gonzalez, S., Stuart, A. M., “A First Course in Continuum Mechanics”, Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 2008
- [21] Fanucci, J. B., Ness, N., Yen, R. H., “On the Formation of Bubbles in GasParticulate Fluidized Beds”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 94, p. 353-367,1979
- [22] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., “Fundamentals of Physics”, Vol. 2, Nova Iorque: *John Wiley & Sons, Inc.*, 2005
-

-
- [23] Har'El, N., "Numerical Solution of One-Dimensional Duct Flow By Method of Characteristics", 1994
- [24] Hinch, E. J., "Perturbation Methods", Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 1991
- [25] Hirayama, O., Takaki, R., "Numerical Analysis of Nonlinear Stability of a TwoDimensional Uniform Fluidized Bed: Numerical Check of Linear Stability", *Fluid Dynamics Research*, Vol. 17, p. 275-291, 1996
- [26] Hirayama, O., Takaki, R., "Analysis of Nonlinear Waves in a One-Dimensional Fluidized Bed", *Fluid Dynamics Research*, Vol. 21, p. 233-247, 1997
- [27] Hopf, E., "The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ", *JC. Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 3, p. 201-230, 1950
- [28] Hughes, W., Brighton, J., "Schaum's Outline of Fluid Dynamics", Nova Iorque: *McGraw-Hill*, 1999
- [29] Iserles, A., "A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations", Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 2009
- [30] Karim, S. M., Rosenhead, L., "The Second Coefficient of Viscosity of Liquids and Gases", *Reviews of Modern Physics.*, Vol. 24, 1952, p. 108-116
- [31] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. "Fluid Mechanics", China: *Butterworth-Heinemann*, 1987
- [32] LeVeque, Randall, J., "Numerical Methods for Conservation Laws", Berlin: *Birkhäuser*, 1992
- [33] Lima, E. L., "Curso de Análise", Vol. 1, Rio de Janeiro: *Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 2008
- [34] Lima, E. L., "Curso de Análise", Vol. 2, Rio de Janeiro: *Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 2008
- [35] Liu, J. T. C., "Note on a Wave-Hierarchy Interpretation of Fluidized Bed Instabilities", *Proc. R. Soc. Lond.*, A380, 1982, p. 229-239
-

-
- [36] Mandelstam, L. I., Leontovich, M. A., “On the theory of sound absorption in fluids”, *J. Exp. Theor. Phys. U.S.S.R.*, Vol. 7, 1937, p. 438-453
- [37] Mittal, R. C., Singhal, P., “Numerical Solution of Periodic Burgers Equation”, *Indian J. pure and appl. Math.*, Vol. 27, 1996, p. 689-700
- [38] Nussenzveig, M. H., “Curso de Física 1: Mecânica”, São Paulo: *Edgard Blücher*, 2002
- [39] Nussenzveig, M. H., “Curso de Física 2: Fluidos/ Oscilações e Ondas/ Calor”, São Paulo: *Edgard Blücher*, 2002
- [40] Ohwada, T., “Cole-Hopf Transformation as Numerical Tool for the Burgers Equation”, *Appl. Comput. Math.*, Vol. 8, 2009, p. 107-113
- [41] Paterson, A. R., “A First Course in Fluid Dynamics”, Nova Iorque: *Cambridge University Press*, 1983
- [42] Romão, E. C., de Moura, L. F., Silva, J. B. C., “Método das Características na Solução de Problemas de Propagação de Ondas de Amplitude Finita”, *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2008, p. 327-331
- [43] Sarra, S. A., “The Method of Characteristics with applications to Conservation Laws”, *Journal of Online Mathematics and its Applications*, Vol. 3, 2002
- [44] Sherman, J., Morrison, W. J. “Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix”, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 21, 1950, p. 124-127
- [45] Sobral, Y., D. “Estabilidade Hidrodinâmica e Magnética de Leitos Fluidizados”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2004.
- [46] Strauss, W. A., “Partial Differential Equations: An Introduction”, Nova Iorque: *John Wiley & Sons, Inc.*, 1992
- [47] Thomas Jr., G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R., “Cálculo”, Vol. 1, São Paulo: *Addison Wesley*, 2009
-

-
- [48] Thomas Jr., G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R., “Cálculo”, Vol. 2, São Paulo: *Addison Wesley*, 2009
- [49] Zill, D. G., Cullen, M. R., “Advanced Engineering Mathematics”, Estados Unidos: *Jones & Bartlett Publishers*, 2006
- [50] Whitham, G. B., “Linear and Non-Linear Waves”, Nova Iorque: *John Wiley & Sons, Inc.*, 1974
-

Apêndice A

CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

A classificação de EDPs não é apenas uma questão de formalidade. Na verdade, sua importância se estende desde a descrição teórica até a escolha da metodologia numérica.

Considere um problema descrito pela equação diferencial parcial

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D = 0 \quad (\text{A.1})$$

em que os coeficientes A , B , C e D podem ser constantes, funções de x , y e ϕ e suas primeiras derivadas derivadas.

Se os coeficientes A , B e C forem constantes, e $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, podemos fazer a classificação das equações diferenciais parciais como

- Equações diferenciais parciais elípticas:

$$\text{se } B^2 - 4AC < 0. \quad (\text{A.2})$$

Exemplo: Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

- Equações diferenciais parciais parabólicas:

$$\text{se } B^2 - 4AC = 0. \quad (\text{A.4})$$

Exemplo: Equação do Calor

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.5})$$

em que α é a difusividade térmica.

- Equações diferenciais parciais hiperbólicas:

$$\text{se } B^2 - 4AC > 0. \quad (\text{A.6})$$

Exemplo: Equação da Onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.7})$$

em que c é a velocidade de propagação da onda.

A nomenclatura usada para esta classificação é uma analogia àquela da geometria, uma vez que o critério de classificação é semelhante ao usado nas curvas cônicas do espaço tridimensional.

Definindo $\Phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\Psi = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, pequenas variações de Φ e Ψ com relação a x e y podem ser escritas como

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dy \quad (\text{A.8})$$

e

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy. \quad (\text{A.9})$$

Note que, combinando as equações (A.8) e (A.9), obtemos

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(A \frac{dy}{dx} + C \frac{dx}{dy} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(A \frac{d\Phi}{dx} + C \frac{d\Psi}{dx} \frac{dx}{dy} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Comparando as equações (A.1) e (A.10), determinamos que

$$A \frac{d\Phi}{dx} + C \frac{d\Psi}{dx} \frac{dx}{dy} - D = 0. \quad (\text{A.11})$$

e

$$A \frac{dy}{dx} + C \frac{dx}{dy} - B = 0. \quad (\text{A.12})$$

Esta última relação pode ser transformada, multiplicando-se tudo por dy/dx , em

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0, \quad (\text{A.13})$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (\text{A.14})$$

O discriminante $B^2 - 4AC$ determina o número de soluções de dy/dx , chamadas de características. Neste sentido, podemos contruir as identificações

EDP hiperbólica : $B^2 - 4AC > 0$ duas soluções reais

EDP parabólica : $B^2 - 4AC = 0$ uma solução real

EDP elíptica : $B^2 - 4AC < 0$ nenhuma solução real

Apêndice B

NÃO NEGATIVIDADE DO SEGUNDO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE

O tensor de tensões de um fluido compressível, conforme Batchelor (1967), é dado pela expressão

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\eta \left[\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \right]. \quad (\text{B.1})$$

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, a produção de entropia é uma quantidade positiva definida. Matematicamente, este princípio é expresso pela inequação

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + p(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Phi \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

em que \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, $\theta = \theta(x, y, z, t)$ é o campo escalar de temperatura e a quantidade vetorial Φ , conhecida como fluxo de calor, é definida pela equação constitutiva

$$\Phi = -\kappa \nabla \theta, \quad (\text{B.3})$$

conhecida como Lei de Fourier. No caso de um fluido homogêneo e isotrópico, κ é uma constante escalar denominada condutividade térmica do fluido.

Antes de proseguirmos com a nossa demonstração principal, vamos mostrar que κ é

não-negativo. Para tal, basta perceber que, no contexto de condução em um meio fluido estacionário, ou seja, em que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, a equação (B.2) nos fornece

$$-\Phi \cdot \frac{\nabla\theta}{\theta} \geq 0. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a equação (B.3) na equação anterior, obtemos

$$\kappa \frac{(\nabla\theta)^2}{\theta} \geq 0, \quad (\text{B.5})$$

em que $(\nabla\theta)^2 = \nabla\theta \cdot \nabla\theta$. Supondo $\theta > 0$, e como $\kappa \neq 0$ e $(\nabla\theta)^2 \geq 0$, segue a desigualdade

$$\kappa > 0. \quad (\text{B.6})$$

Portanto, o fluxo de calor Φ flui da maior para a menor temperatura.

Agora, observe que para o caso mais geral de movimento em meio contínuo compressível, o termo dissipativo $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$, conforme Cunha (2010), é expresso pela relação

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\eta(\mathbf{D} : \mathbf{D}) - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot \mathbf{u})^2. \quad (\text{B.7})$$

Assim, substituindo a equação (B.1) na segunda lei da termodinâmica (B.2), determinamos que

$$\zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\eta \left[\mathbf{D} : \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] + \kappa \frac{(\nabla\theta)^2}{\theta} \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Para analisar o sinal do segundo coeficiente de viscosidade ζ , basta considerar a inequação (B.8) sob a hipótese um escoamento invíscido compressível. Fazendo isto, obtemos que

$$\zeta \geq -\frac{\kappa(\nabla\theta)^2}{\theta(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}. \quad (\text{B.9})$$

Entretanto, é sabido que $(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \geq 0$ e $\Phi = -k\nabla\theta > 0$. Por conseguinte, tomando novamente o caso em que $\theta > 0$, a desigualdade (B.9) estabelece que

$$\zeta \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

como queríamos demonstrar. Fisicamente, este resultado mostra que, mesmo em casos adiabáticos ou isotérmicos, o termo referente a viscosidade expansional representa uma produção de energia interna de um escoamento associado a oscilações de altas frequência, correspondendo também a um aumento da entropia do escoamento.

Apêndice C

AJUSTE DE UMA CURVA EXPONENCIAL PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Considere um conjunto de n pontos a serem ajustados por uma curva da forma

$$y = A e^{Bx}, \quad (\text{C.1})$$

em que A e B são os parâmetros mais apropriados para o ajuste.

Aplicando a transformação

$$\ln y = \ln(A e^{Bx}) = \ln A + Bx, \quad (\text{C.2})$$

e fazendo $Y = \ln y$ e $C = \ln A$, o problema de ajustar uma exponencial aos pontos da forma (x_i, y_i) é convertido no problema de ajustar o conjunto de pontos (x_i, Y_i) à equação da reta

$$Y = Bx + C. \quad (\text{C.3})$$

Desta maneira, o nosso interesse é minimizar a distância de cada ponto (x_i, Y_i) do nosso conjunto de pontos à cada ponto $(x_i, Bx_i + C)$ da reta (C.3).

A distância entre os pontos mencionados no parágrafo anterior é $|Y_i - Bx_i - C|$. Portanto,

pelo método dos mínimos quadrados (Boas, 2006), devemos minimizar a função

$$d(B, C) = \sum_{i=1}^n (Y_i - Bx_i - C)^2. \quad (\text{C.4})$$

Para tal, as derivadas parciais de d em relação a cada um de seus parâmetros deve ser nula, i.e.,

$$\frac{\partial d}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - Bx_i - C) = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial d}{\partial C} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (Y_i - Bx_i - C) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas nas equações (C.5) e (C.6), obtemos o sistema de equações

$$nC - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) B = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (\text{C.7})$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) C + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) B = \sum_{i=1}^n x_i Y_i, \quad (\text{C.8})$$

cuja solução é dada por

$$B = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$C = \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i Y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (\text{C.10})$$

Para determinarmos o parâmetro A , basta observar que $C = \ln A$. Logo, $A = e^C$.