

# CÁLCULO 1

(Versão 1/09)

Mauro Patrão

UnB - Departamento de Matemática

É permitido copiar e distriuir cópias verbatim (completas e idênticas) deste livro, mas qualquer modificação do mesmo é proibida.

*Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this book, but changing it is not allowed.*

# Sumário

<b>0</b>	<b>Prefácio</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Números reais . . . . .	7
1.1.1	Exercícios . . . . .	13
1.2	Funções reais . . . . .	13
1.2.1	Exercícios . . . . .	18
1.3	Funções trigonométricas . . . . .	19
1.3.1	Exercícios . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Limite e continuidade</b>	<b>25</b>
2.1	Limite de seqüências . . . . .	25
2.2	Propriedades do limite . . . . .	31
2.2.1	Exercícios . . . . .	35
2.3	Função exponencial . . . . .	35
2.3.1	Exercícios . . . . .	39
2.4	Limite de funções . . . . .	39
2.5	Continuidade de funções . . . . .	45
2.5.1	Exercícios . . . . .	49
2.6	Funções inversas e continuidade . . . . .	49
2.6.1	Exercícios . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Derivada</b>	<b>57</b>
3.1	Reta tangente, velocidade e aceleração . . . . .	57
3.1.1	Exercícios . . . . .	62
3.2	Regras de derivação e função derivada . . . . .	63
3.3	Derivada de funções exponenciais . . . . .	70
3.4	Derivada de funções trigonométricas . . . . .	73
3.4.1	Exercícios . . . . .	78
3.5	Derivada de funções compostas . . . . .	78
3.5.1	Exercícios . . . . .	83
3.6	Derivada de funções inversas . . . . .	83
3.6.1	Exercícios . . . . .	86

<b>4</b>	<b>Gráfico e otimização</b>	<b>87</b>
4.1	Formato de gráficos . . . . .	87
4.1.1	Exercícios . . . . .	94
4.2	Teorema do Valor Médio . . . . .	94
4.2.1	Exercícios . . . . .	101
4.3	Teorema do Valor Intermediário . . . . .	102
4.3.1	Exercícios . . . . .	106
4.4	Assíntotas verticais e horizontais . . . . .	106
4.4.1	Exercícios . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Integral</b>	<b>115</b>
5.1	Área líquida . . . . .	115
5.1.1	Exercícios . . . . .	120
5.2	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	121
5.2.1	Exercícios . . . . .	128
5.3	Substituição e integração por partes . . . . .	128
5.3.1	Exercícios . . . . .	134
5.4	Somas de Riemann e aplicações . . . . .	135
5.4.1	Exercícios . . . . .	144
5.5	Frações parciais . . . . .	144
5.5.1	Exercícios . . . . .	152
5.6	Pêndulo sem atrito . . . . .	152
5.6.1	Exercícios . . . . .	155
<b>A</b>	<b>Apêndices</b>	<b>157</b>
A.1	Propriedades da área . . . . .	157
A.1.1	Exercícios . . . . .	160
A.2	Propriedades trigonométricas . . . . .	161
A.3	Método da exaustão . . . . .	163
A.3.1	Exercícios . . . . .	167
A.4	Progressões geométricas . . . . .	167
A.4.1	Exercícios . . . . .	168
A.5	Binômio de Newton . . . . .	168
A.6	Limite e monotonicidade . . . . .	170
A.6.1	Exercícios . . . . .	172

# Capítulo 0

## Prefácio

Este livro de Cálculo foi concebido como uma tentativa inicial de se desenvolver livros de Matemática apoiados em alguns eixos que o autor considera estratégicos.

Um deles é a adequação desses materiais à realidade educacional brasileira, uma vez que grande parte das opções disponíveis atualmente foram concebidas para lidar com a realidade educacional de países muito diversos do Brasil, como os EUA. Neste sentido, este livro se preocupa em estabelecer uma conexão próxima entre o Cálculo e alguns exemplos paradigmáticos da Mecânica, ensinados nos cursos de Física do ensino médio brasileiro. A partir do exemplo básico do lançamento vertical de um objeto na Lua, onde inexistente o atrito com a atmosfera, trazemos este mesmo experimento para a Terra, onde introduzimos os efeitos da resistência do ar, o que nos permite motivar o estudo da derivada da função exponencial. Por sua vez, o problema da descrição do movimento de uma massa presa a uma mola motiva o estudo das derivadas das funções trigonométricas. Esses exemplos paradigmáticos, presentes na origem mesma da formulação do Cálculo, acompanham cada nova técnica que vai sendo introduzida e desenvolvida ao longo do texto. Isto fornece a possibilidade dos leitores experimentarem algumas das mesmas intuições vividas pelos primeiros formuladores desta teoria.

Aliás este é o segundo dos eixos considerado estruturadores: oferecer abordagens múltiplas de um mesmo tópico, ora mais geométricas, ora mais algébricas, ora mais dinâmicas. Isto dá oportunidade ao estudante de se apoiar, em alguns momentos, nas intuições em que ele se sente mais confortável, mas também o ajuda a explorar suas habilidades pouco desenvolvidas. A abordagem dinâmica está presente na definição do conceito de limite, feito através de sequências e cujo emprego já se fazia presente no método grego da obtenção de áreas por exaustão, como também no estudo da cinemática realizado pela mecânica moderna. Por sua vez, a abordagem algébrica é empregada na famosa fórmula do binômio de Newton, que é utilizada na definição da função exponencial. Já a abordagem geométrica aparece logo na definição dos números e das funções reais, bem como na definição da medida de ângulo através de áreas e dos conceitos de derivada e de integral.

O terceiro eixo estratégico tem consequências na escolha de qual é a melhor abordagem para cada assunto: deve-se escolher aquelas que são as mais diretas e as mais simples, possibilitando ir mais fundo nas técnicas e problemas analisados, bem como dar maior transparência e solidez aos conteúdos que vão sendo apreendidos. Aliás, o autor considera que essa é uma das características essenciais do desenvolvimento do próprio conhecimento e, em particular,

da própria Matemática. Fazendo alusão a uma célebre frase de Hilbert, não basta fornecermos ferramentas mais precisas às próximas gerações, ainda que isso seja fundamental. Essas ferramentas devem ser passadas da forma mais simples e didática quanto seja possível, de modo a se empregarem mais facilmente e mais intensamente na intuição das pessoas.

Um quarto eixo, que deverá ser desenvolvido no futuro, é incorporar, ainda que esquematicamente, a evolução histórica dos diversos tópicos do Cálculo e como eles foram sendo incorporados até se obter uma teoria coerente e articulada.

Finalmente quero observar que o emprego de sequências num primeiro curso de Cálculo não é usual e pode gerar uma certa desconfiança. Um cuidado que foi tomado é limitar esta abordagem às sequências propriamente ditas, sem mencionar ou utilizar o conceito de subsequências. Por ser um conceito ainda mais sofisticado, as subsequências devem ser abordadas apenas num segundo curso de Cálculo.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Números reais

Nesta primeira seção, indicamos como construir os números e suas operações a partir de conceitos e propriedades puramente geométricas. Para isto fazemos uso dos resultados da geometria plana apresentados na referência [1], da qual também utilizamos a notação e as definições. Iniciamos com a reta  $\mathbb{R} = 01$  determinada pelos dois pontos distintos 0 e 1, garantidos pelos postulados de existência e determinação (§4 e §7 de [1]), como mostra a Figura 1.1. O ponto 0 é denominado *zero* ou *origem* e o ponto 1 é denominado *um* ou *unidade*. Os pontos sobre a reta  $\mathbb{R}$  são denominados *números reais*.



**Figura 1.1.** Reta real definida pelos pontos 0 e 1.

Existe uma ordem entre pares de números reais, denotada por  $\leq$  e denominada *à esquerda de* ou *menor que*. Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos intuitivamente que  $a < b$  se  $a$  está à esquerda de  $b$ , como ilustrado pela Figura 1.1. Podemos definir a partir da ordem  $<$  as seguintes ordens:

- 1)  $a > b \Leftrightarrow b < a$ .
- 2)  $a \leq b \Leftrightarrow a < b$  ou  $a = b$ .
- 3)  $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$ .

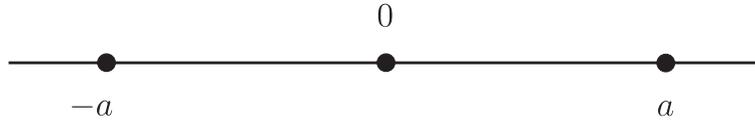
Existe também uma relação entre pares de segmentos, denotada por  $\equiv$  e denominada *congruência de segmentos*. De maneira intuitiva, temos que dois segmentos são congruentes se cada uma das duas pontas de um *compasso* com sua abertura fixada podem ser colocadas sobre cada um dos dois extremos de cada segmento.



**Figura 1.2.** Adição de  $a$  mais  $b$ .

Podemos então, como ilustrado na Figura 1.2 e a partir dos conceitos de ordem e congruência e de suas propriedades, definir a operação de *adição* de números reais, para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$a + b = \begin{cases} c : & c \geq b \text{ e } \overline{bc} \equiv \overline{0a}, \text{ se } a \geq 0 \\ c : & c \leq b \text{ e } \overline{bc} \equiv \overline{0a}, \text{ se } a \leq 0 \end{cases}$$



**Figura 1.3.** O inverso aditivo de  $a$ .

Podemos também definir, como ilustrado na Figura 1.3 o oposto ou inverso aditivo, para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$-a = \begin{cases} c : & c \leq 0 \text{ e } \overline{0c} \equiv \overline{0a}, \text{ se } a \geq 0 \\ c : & c \geq 0 \text{ e } \overline{0c} \equiv \overline{0a}, \text{ se } a \leq 0 \end{cases}$$

A partir das definições e das propriedades da ordem e da congruência, pode-se mostrar que a adição satisfaz, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

A1) **Associatividade:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;

A2) **Neutro:**  $a + 0 = a$ ;

A3) **Inverso:**  $-a + a = 0$ ;

A4) **Comutatividade:**  $a + b = b + a$ .

As propriedades da adição fazem com que a estrutura aditiva dos reais  $(\mathbb{R}, 0, +)$  seja denominada *grupo comutativo*.

O conjunto dos *números naturais*  $\mathbb{N}$  é o **menor** subconjunto de  $\mathbb{R}$  satisfazendo

N1) **Unidade:**  $1 \in \mathbb{N}$ ;

N2) **Recursividade:** Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Tanto a reta  $\mathbb{R}$  como o subconjunto dos números reais à esquerda da origem também satisfazem essas duas propriedades. O conjunto dos números naturais está contido em cada um deles e de fato  $\mathbb{N}$  é a interseção de todos os subconjuntos da reta satisfazendo as propriedades N1 e N2. Portanto todo subconjunto  $A$  dos naturais que satisfaz N1 e N2 é tal que  $A = \mathbb{N}$ . Este resultado é denominado *Princípio de Indução*. Como aplicação deste princípio, vamos mostrar que o conjunto naturais é *fechado* sob a operação da adição.

**Proposição 1.1.** Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $m + n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , consideramos o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$ . Para demonstrar a proposição, basta mostrar que  $A = \mathbb{N}$ . Temos que  $1 \in A$ , pois  $m + 1 \in \mathbb{N}$ . Logo  $A$  satisfaz a propriedade N1. Se  $n \in A$ , então  $m + n \in \mathbb{N}$ . Então  $n + 1 \in A$ , pois  $m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ . Logo  $A$  também satisfaz N2 e, pelo Princípio de Indução, temos que  $A = \mathbb{N}$ , concluindo a demonstração.  $\square$

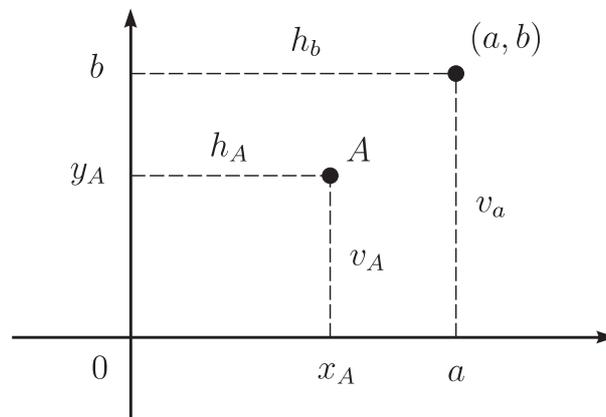
A partir do Princípio de Indução, pode-se demonstrar também um outro princípio muito importante dos números naturais, denominado *Princípio da Boa Ordenação*. Este princípio afirma que qualquer subconjunto não vazio dos naturais possui o menor elemento.

O conjunto dos *números inteiros*  $\mathbb{Z}$  é obtido a partir dos naturais adicionando-se os inversos aditivos e o elemento neutro.

$$\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N} \text{ ou } k = 0 \text{ ou } -k \in \mathbb{N}\}.$$

Pode-se mostrar que o conjunto dos inteiros é também fechado sob a operação da adição. A estrutura aditiva dos inteiros  $(\mathbb{Z}, 0, +)$  é então o **menor** grupo comutativo contendo  $\mathbb{N}$ .

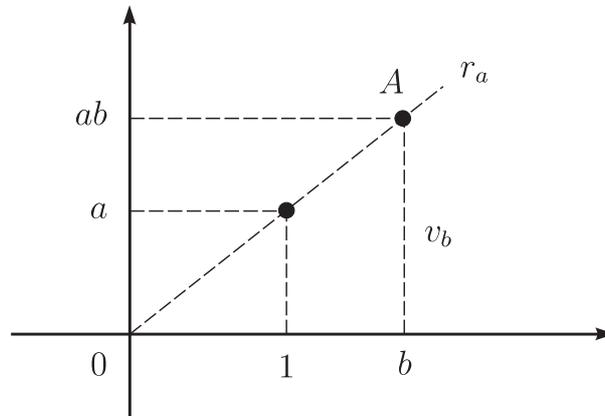
Vamos agora construir um dos objetos mais importantes da matemática moderna, o *plano Cartesiano*. Como ilustrado pela Figura 1.4, denote por  $0y$  a única reta perpendicular a reta  $\mathbb{R}$ , passando pelo ponto  $0$ , chamada de *eixo vertical* (§80 e §81 [1]). Neste contexto, a reta  $\mathbb{R}$  também é denotada por  $0x$ , denominado *eixo horizontal*, e um ponto  $a \in 0x$  é também denotado por  $(a, 0)$ . O ponto  $0 = (0, 0)$  é denominado *origem do plano Cartesiano*. Escolhemos em  $0y$  um ponto, denotado por  $(0, 1)$ , tal que sua distância à origem  $0$  seja igual a 1. Para cada ponto  $a \in 0x = \mathbb{R}$  associamos o ponto  $(0, a)$  em  $0y$ , tal que as distâncias destes dois pontos à origem  $0$  sejam iguais e de modo que ambos sejam maiores que 0 ou ambos menores que 0. A reta  $0y$  é então uma cópia da reta  $\mathbb{R}$  e também é denotada por  $\mathbb{R}$ . Frequentemente denotaremos  $(x, 0) \in 0x$  e também  $(0, y) \in 0y$  serão denotados apenas por  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , respectivamente.



**Figura 1.4.** Plano Cartesiano.

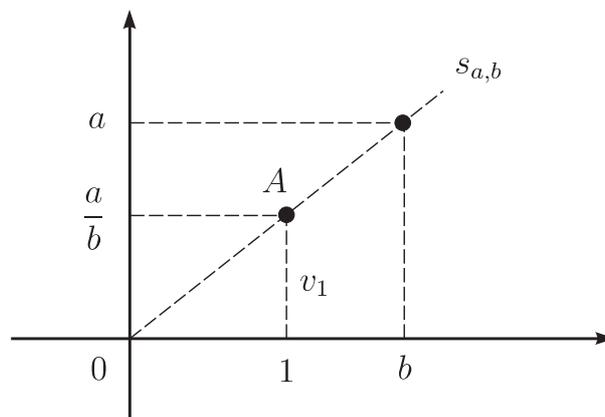
Uma reta paralela ao eixo horizontal é denominada *reta horizontal* e uma reta paralela ao eixo vertical é denominada *reta vertical*. Uma reta horizontal e uma reta vertical possuem um único ponto em comum, pois os eixos são retas concorrentes. Dado qualquer ponto  $A$  no plano denote por  $h_A$  a única reta horizontal passando por  $A$  e denote por  $v_A$  a única vertical que passa por  $A$  (§71 [1]), como ilustrado pela Figura 1.4. A *abscissa* ou *coordenada horizontal* do ponto  $A$  é o único ponto  $x_A$  que está simultaneamente sobre  $v_A$  e sobre  $0x$ . A *ordenada* ou *coordenada vertical* de  $A$  é o único ponto  $y_A$  que está simultaneamente sobre  $h_A$  e sobre  $0y$ . Vice-versa, dado um ponto  $a$  sobre  $0x$  e um ponto  $b$  sobre  $0y$ , associamos o único ponto, denotado pelo par ordenado  $(a, b)$ , que esta sobre  $v_a$  e sobre  $h_b$ . Não é difícil notar que  $A = (x_A, y_A)$ . Portanto para cada ponto  $A$  do plano associamos o par ordenado  $(x_A, y_A)$ , das suas coordenadas.

Vamos então definir a operação de *multiplicação* de números reais, como ilustrado pela Figura 1.5. Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , considere a reta  $r_a$  determinada pela origem  $(0, 0)$  e pelo ponto  $(1, a)$ . Como a reta  $r_a$  e o eixo  $0y$  são concorrentes, cada reta vertical possui um único ponto em comum com  $r_a$ . Dado  $b \in \mathbb{R}$ , seja  $A$  o único ponto que está sobre  $r_a$  e  $v_b$ . A *multiplicação de  $a$  por  $b$*  é definido como a coordenada vertical de  $A$  e é denotado por  $ab$ .



**Figura 1.5.** Multiplicação de  $a$  vezes  $b$ .

Consideraremos agora o conceito de divisão entre números reais, como ilustrado pela Figura 1.6. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $b \neq 0$ . Seja  $s_{a,b}$  a reta determinada pela origem  $(0, 0)$  e pelo ponto  $(b, a)$ . Como  $b \neq 0$ , temos que  $s_{a,b}$  e o eixo  $0y$  são concorrentes e, portanto, cada reta vertical possui um único ponto em comum com  $s_{a,b}$ . Seja  $A$  o único ponto que está sobre  $s_{a,b}$  e a reta vertical  $v_1$ . A *divisão de  $a$  por  $b$*  é definida como a coordenada vertical de  $A$  e é denotada por  $\frac{a}{b}$ . É imediato que  $s_{a,b} = r_{\frac{a}{b}}$  e, portanto, que  $\frac{a}{b} b = a$ .



**Figura 1.6.** Divisão de  $a$  por  $b$ .

Pode-se mostrar que a multiplicação satisfaz, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

M1) **Associatividade:**  $(ab)c = a(bc)$ ;

M2) **Neutro:**  $a1 = a$ ;

M3) **Inverso:**  $\frac{1}{a} a = 1$ , para todo  $a \neq 0$ ;

M4) **Comutatividade:**  $ab = ba$ .

Essas propriedades fazem com que a estrutura multiplicativa dos reais  $(\mathbb{R} - 0, 1, \cdot)$  seja também um grupo comutativo.

Pode-se mostrar que vale a propriedade fundamental que conecta as estruturas aditivas e multiplicativas dos reais, denominada *Distributividade* e mais conhecida como *Regra do Chuveirinho*. Para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , temos que

$$D) \text{ **Distributividade:}** } a(b + c) = ab + ac.$$

A propriedade enunciada acima é denominada *Distributividade à esquerda*. A sua análoga, a *Distributividade à direita* é consequência imediata da comutatividade do produto.

Mais uma vez utilizando o Princípio da Indução, vamos mostrar que o conjunto naturais também é fechado sob a operação de multiplicação.

**Proposição 1.2.** *Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $mn \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Se  $m \in \mathbb{N}$ , consideramos o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}$ . Para demonstrar a proposição, basta mostrarmos que  $A = \mathbb{N}$ . Temos que  $1 \in A$ , pois  $m1 = m \in \mathbb{N}$ . Logo  $A$  satisfaz a propriedade N1. Se  $n \in A$ , então  $mn \in \mathbb{N}$ . Então  $n + 1 \in A$ , pois  $m(n + 1) = mn + m \in \mathbb{N}$ , uma vez que  $\mathbb{N}$  é fechado para a soma, pela Proposição 1.1. Logo  $A$  também satisfaz N2 e, pelo Princípio de Indução, temos que  $A = \mathbb{N}$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Pode-se mostrar também que valem as seguintes propriedades na relação entre a ordem, a adição e a multiplicação,

$$P1) \text{ **Fechamento aditivo:}** } \text{ se } a, b > 0, \text{ então } a + b > 0.$$

$$P2) \text{ **Fechamento multiplicativo:}** } \text{ se } a, b > 0, \text{ então } ab > 0.$$

Por satisfazer as Propriedades A1-A4, M1-M4, D e P1-P2, a estrutura conjunta aditiva e multiplicativa dos reais é denominada um *corpo ordenado*. Num corpo ordenado, valem também as seguintes propriedades com relação às desigualdades.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Temos então que*

$$1) a < b \Leftrightarrow c + a < c + b.$$

$$2) a < b \Leftrightarrow -b < -a.$$

$$3) a < b \text{ e } c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

e que

$$4) a < b \Leftrightarrow ca < cb, \text{ para cada } c > 0.$$

$$5) 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

$$6) 0 < a < b \text{ e } 0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd.$$

O conjunto dos *números racionais*  $\mathbb{Q}$  é a coleção de todas as frações de números inteiros

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \in \mathbb{R} : r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Temos claramente que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Pode-se mostrar que o conjunto dos racionais é fechado sob as operações da adição e da multiplicação e também é um corpo ordenado.

Vamos mostrar agora que entre dois números reais distintos quaisquer, sempre existe um número racional. Esta propriedade de  $\mathbb{Q}$  é denominada *densidade*. Para isso será necessário o uso da denominada *Propriedade Arquimediana* de  $\mathbb{R}$ .

A) **Arquimediana:** Para todo  $L > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < L < n$ .

Pela Proposição 1.3, temos que

$$0 < L < n \quad \text{se e só se} \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}.$$

Escolhendo  $\varepsilon = 1/L$ , temos então a seguinte formulação equivalente.

A) **Arquimediana:** Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Proposição 1.4.** *Se  $a < b$ , então existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < r < b$ .*

*Demonstração.* Pela Propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < \frac{1}{n} < b - a. \tag{1.1}$$

Se  $m$  é o primeiro natural tal que  $a < \frac{m}{n}$ , temos que

$$\frac{m-1}{n} < a. \tag{1.2}$$

Pelas desigualdades (1.1) e (1.2), segue que

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Escolhendo  $r = \frac{m}{n}$ , concluímos a demonstração.  $\square$

Após notarmos a densidade do conjunto dos racionais no conjunto dos números reais, podemos nos perguntar se estes dois conjuntos não são de fato iguais. A resposta é negativa, o que parece ter custado a vida de um dos membros da *Escola Pitagórica*. Pelo Teorema de Pitágoras (§198 [1]), o comprimento  $d$  da diagonal do quadrado unitário é tal que  $d^2 = 2$ , ou seja,  $d = \sqrt{2}$ . Esta diagonal pode ser escrita como um quociente de números naturais?

**Proposição 1.5.**  *$\sqrt{2}$  não é racional.*

*Demonstração.* Vamos utilizar o seguinte fato, que é deixado como exercício,  $n \in \mathbb{N}$  é par se e só se  $n^2$  é par. Vamos demonstrar essa proposição por contradição. Suponha que  $d = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ . Após cancelamento, podemos supor que  $m$  e  $n$  não possuem nenhum fator comum. Neste caso, temos que  $2 = d^2 = \frac{m^2}{n^2}$  e, portanto, que  $m^2 = 2n^2$ . Como  $m^2$  é par, temos que  $m$  é par. Logo  $m = 2k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , e então  $4k^2 = m^2 = 2n^2$ . Portanto  $2k^2 = n^2$ , mostrando que  $n^2$  é par e conseqüentemente  $n$  também é par. Mas isso é uma contradição, pois  $m$  e  $n$  não possuem nenhum fator comum.  $\square$

Concluimos esta seção com a última propriedade dos números reais, a *Completude*. Essa propriedade diz de maneira intuitiva que a reta não possui buracos. Dados  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , dizemos que  $A$  é menor ou igual a  $B$  e denotamos  $A \leq B$ , se  $a \leq b$ , para todos  $a \in A$  e  $b \in B$ .

C) **Completude:** Se  $A \leq B$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $A \leq c \leq B$ .

A propriedade da Completude não é verificada nos conjunto dos números racionais. Definindo o conjunto  $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$  e o conjunto  $B = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > 2\}$ , temos claramente que  $A \leq B$ , mas o único  $c$  tal que  $A \leq c \leq B$  é o número  $\sqrt{2}$ , que no entanto não pertence a  $\mathbb{Q}$ . Devido a esta propriedade, pode-se demonstrar que existem muito mais números reais que números racionais, ou seja, que é impossível estabelecer uma correspondência *um a um* entre os números reais que números racionais. Por outro lado, de maneira surpreendente, existem tantos números racionais quanto números reais, por mais incrível que isto possa parecer, como indica a seguinte enumeração dos racionais

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \dots; \frac{1}{n+m-1}, \frac{2}{n+m-2}, \dots, \frac{m}{n}, \dots, \frac{n+m-1}{1}, \dots$$

Pode-se mostrar que a fração  $\frac{m}{n}$  está localizada nesta lista na posição

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + m.$$

Devido a esta lista, o conjunto dos racionais é denominado *enumerável*. Por sua Completude, o conjunto dos reais não é enumerável.

### 1.1.1 Exercícios

- 1) Mostre que se  $n \in \mathbf{N}$  é par, então  $n^2$  é par. Mostre também que se  $n \in \mathbf{N}$  é ímpar, então  $n^2$  é ímpar. Conclua que se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

## 1.2 Funções reais

Assim como no caso dos números e de suas operações, introduzimos o conceito de função real a partir de uma perspectiva puramente geométrica.

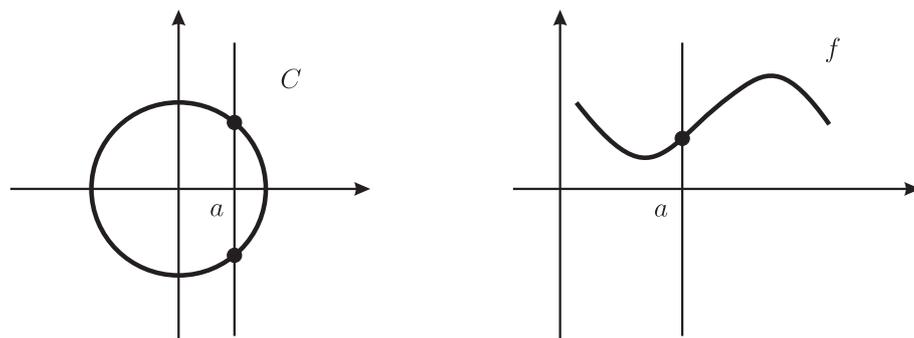


Figura 1.7. O círculo  $C$  não satisfaz, enquanto  $f$  satisfaz o teste da reta vertical.

Uma *função real* é um conjunto de pontos do plano Cartesiano satisfazendo o denominado *teste da reta vertical*: se  $f$  é uma função real, cada reta vertical possui no máximo um ponto em comum com  $f$ , como ilustrado pela Figura 1.7.

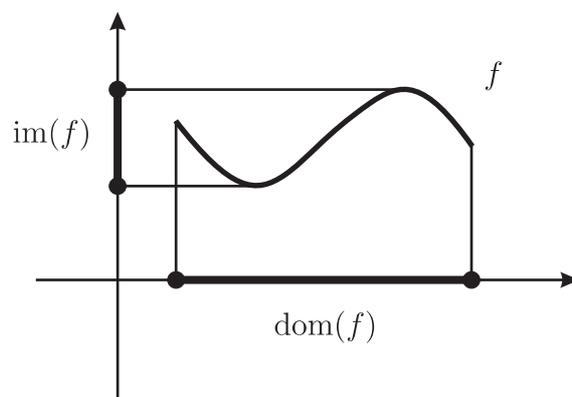
O *domínio da função*  $f$  é sua projeção vertical (§86 [1]) sobre o eixo  $0x$

$$\text{dom}(f) = \{x_A : A \in f\} \subset \mathbb{R},$$

onde  $A$  é um ponto de  $f$  e  $x_A$  sua coordenada horizontal (Seção 1.1). A Figura 1.8 ilustra o domínio de  $f$  como a sombra que  $f$  projetaria no eixo  $0x$  sob o sol de meio dia. De forma análoga, a *imagem da função*  $f$  é a sua projeção horizontal sobre o eixo  $0y$

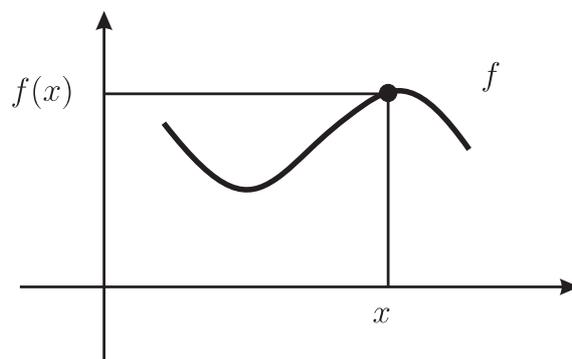
$$\text{im}(f) = \{y_A : A \in f\} \subset \mathbb{R},$$

onde  $y_A$  é a coordenada vertical do ponto  $A$  (Seção 1.1). A Figura 1.8 descreve a imagem de  $f$  como a sombra que  $f$  projetaria no eixo  $0y$  sob o nascer do sol.



**Figura 1.8.** O domínio e imagem da função  $f$ .

Em geral, quando queremos enfatizar o domínio e a imagem de uma dada função  $f$ , denotamos a função por  $f : \text{dom}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ . Quando desconhecemos a imagem de  $f$ , mas sabemos que a imagem está contida num conjunto  $A$ , denominado *um contra-domínio de  $f$* , denotamos isto por  $f : \text{dom}(f) \rightarrow A$ . Observamos que a reta  $\mathbb{R}$  é sempre um contra domínio para qualquer função real.



**Figura 1.9.** O valor de  $f$  em  $x$ .

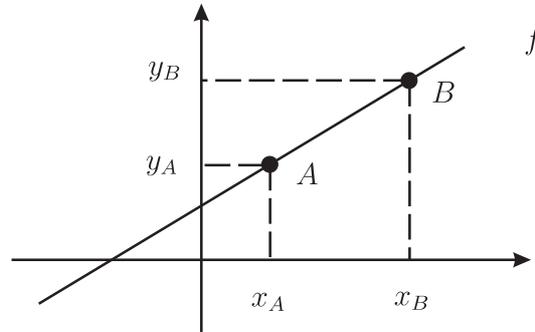
Para cada  $x \in \text{dom}(f)$ , definimos  $f(x) \in \mathbb{R}$ , denominada *o valor de  $f$  em  $x$* , como a coordenada vertical do único ponto comum a  $f$  e a reta vertical  $v_x$ . A Figura 1.9 representa o valor de  $f$  em  $x$  como a altura de  $f$  sobre o ponto  $x$ . Com esta definição, a função  $f$  pode ser descrita por

$$f = \{(x, f(x)) : x \in \text{dom}(f)\}$$

e sua imagem pode ser descrita por

$$\text{im}(f) = \{f(x) : x \in \text{dom}(f)\}.$$

Se  $f$  é uma reta, ela satisfaz o teste da reta vertical se e só se ela não é uma reta vertical. Portanto se  $f$  é uma reta não vertical ela é uma função real, denominada *função afim*. Se  $f$  é uma função afim, então seu domínio e sua imagem coincidem com a reta  $\mathbb{R}$ , como é mostrado pela Figura 1.10.



**Figura 1.10.** Exemplo de uma função afim.

Em geral, se os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à função afim  $f$ , utilizando semelhança de triângulos (§186 [1]), temos que

$$\frac{f(x) - y_A}{x - x_A} = a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a$  é denominado *coeficiente angular*. Temos que o valor de  $f$  em  $x$  é dado então por

$$f(x) = ax + b = y_A + a(x - x_A)$$

onde  $b = f(0)$  é denominado *coeficiente constante*. Esta expressão de  $f(x)$  é denominada *algébrica*, pois é descrita através de  $x$ , utilizando-se as operações dos números reais. Se a função afim  $f$  passa pela origem  $A = (0, 0)$ , temos então que  $f(x) = ax$ .

No exemplo seguinte, vamos mostrar que uma *parábola* é de fato uma função real. Uma parábola é o conjunto dos pontos  $p$  cuja distância é constante em relação a uma dada reta horizontal  $h_g$ , denominada *reta geratriz*, e a um dado ponto  $F$  fora dela, denominado *ponto focal*, como ilustrado pela Figura 1.11. Se o ponto  $A = (x, y)$  pertence a  $p$ , então  $d(A, F) = d(A, h_g)$ . Pelo Teorema de Pitágoras (§198 [1]), a distância entre  $A$  e  $F$ , em termos de suas coordenadas, satisfaz a equação

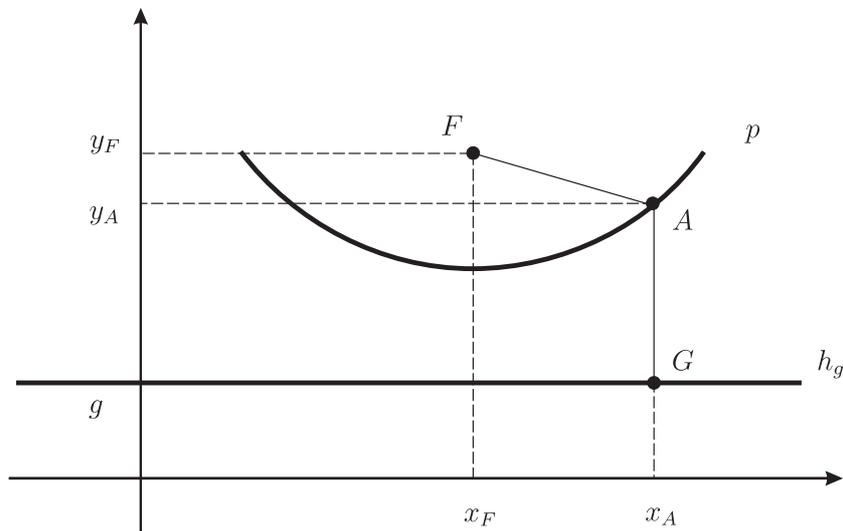
$$d(A, F)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 \quad (1.3)$$

e, pela definição de distância de um ponto a uma reta (§89 [1]), temos que

$$d(A, h_g)^2 = (y - g)^2. \quad (1.4)$$

Igualando os termos à direita das equações (1.3) e (1.4), desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos que

$$2(y_F - g)y = (x - x_F)^2 + y_F^2 - g^2.$$



**Figura 1.11.** A parábola é uma função.

Como o ponto focal  $F$  não está sobre a geratriz  $h_g$ , temos que  $y_F - g \neq 0$  e podemos obter a seguinte expressão para a coordenada vertical do ponto  $A$

$$y = \frac{1}{2(y_F - g)} \left( (x - x_F)^2 + y_F^2 - g^2 \right), \quad (1.5)$$

o que mostra claramente que  $A$  é o único ponto de  $p$  que está sobre a reta vertical que passa por  $x_A$ . Portanto  $p$  é de fato uma função real e  $A = (x, p(x))$ . Desenvolvendo a equação (1.5), obtemos que

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

onde

$$a = \frac{1}{2(y_F - g)}, \quad \frac{b}{a} = -2x_F \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = x_F^2 + y_F^2 - g^2.$$

Como a expressão algébrica de  $p(x)$  é um polinômio em  $x$ , a parábola  $p$  é denominada *função polinomial*. Quando  $F = (0, \frac{1}{4})$  e  $g = -\frac{1}{4}$ , temos que  $a = 1$  e  $b = c = 0$ . Neste caso,

$$p(x) = x^2$$

e a parábola  $p$  é chamada de *potência*.

Dado um polinômio em  $x$

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

temos que o conjunto

$$p = \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

é uma função, denominada *função polinomial*. E quando  $p(x) = x^n$  também dizemos que  $p$  é uma *potência  $n$ -ésima*.

Em geral, dada uma expressão algébrica  $f(x)$  de  $x$ , definimos a função

$$f = \{(x, f(x)) : x \in \text{dom}(f(x))\} \quad (1.6)$$

onde  $\text{dom}f(x)$ , denominado *domínio natural de  $f(x)$* , é o maior conjunto de números reais onde a expressão algébrica  $f(x)$  está definida. Este procedimento é uma das maneiras mais

utilizadas para se construir funções reais. Frequentemente, por economia de notação, denotamos a função  $f : \text{dom}(f(x)) \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela equação (1.6) simplesmente pela expressão algébrica  $f(x)$  utilizada em sua definição.

Por exemplo, se  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios em  $x$ , a função  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  é o conjunto

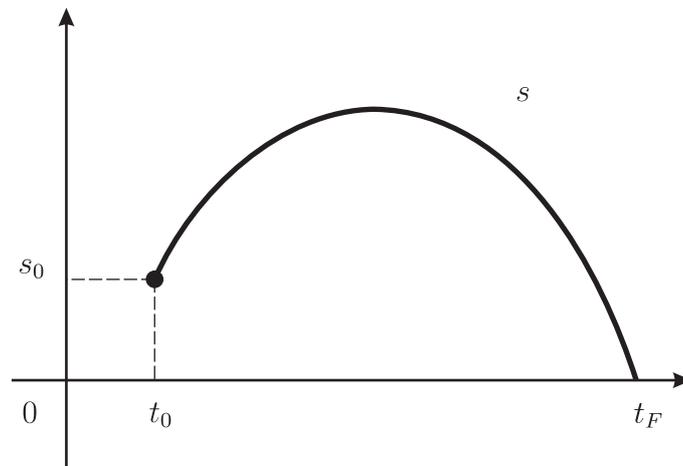
$$r = \{(x, r(x)) : q(x) \neq 0\}$$

e é denominada *função racional*. O domínio de  $r(x)$  é o maior conjunto de números reais onde a expressão algébrica  $r(x)$  está definida, ou seja, todos os  $x$  tais que  $q(x)$  é diferente de zero.

Em certas situações, é necessário considerar funções definidas por expressões algébricas em domínios que são distintos do seu domínio natural. Por exemplo, através de certos princípios físicos e dos instrumentos do Cálculo, será demonstrado que a seguinte expressão polinomial

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2},$$

bem conhecida dos estudantes do ensino médio, fornece de fato a posição no instante  $t$  de um corpo  $C$  arremessado verticalmente no instante inicial  $t_0$ , com uma velocidade inicial  $v_0$  e a partir de uma posição inicial  $s_0$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade local e o atrito com o ar é desconsiderado, como ilustrado pela Figura 1.12.



**Figura 1.12.** Posição de um corpo arremessado verticalmente na Lua.

O domínio natural de  $s(t)$  é a reta  $\mathbb{R}$ , mas evidentemente esta expressão descreve o movimento do corpo  $C$  apenas enquanto o mesmo se move livremente no ar. Se  $t_F$  é o instante final do movimento livre do corpo  $C$ , o domínio de  $s(t)$  a ser considerado é o intervalo fechado

$$[t_0, t_F] = \{t \in \mathbb{R} : t_0 \leq t \leq t_F\}$$

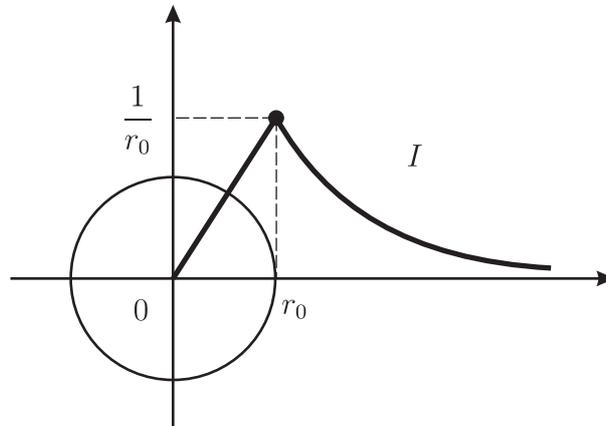
e devemos denotar explicitamente a função movimento por  $s : [t_0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em certos casos, é necessário considerarmos funções cuja expressão algébrica se altera de uma parte para a outra do seu domínio. Tais funções são denominadas *definidas por partes*. Por exemplo, uma corrente estacionária percorrendo um fio retilíneo  $F$ , de seção transversal circular de raio  $r_0$ , gera um campo magnético cuja intensidade, num dado ponto do espaço,

é uma função  $I(r)$  da distância  $r$  do ponto ao eixo do fio, cuja expressão é dada por

$$I(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_0^2}, & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } r \geq r_0. \end{cases}$$

A função  $I : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é ilustrada pela Figura 1.13.



**Figura 1.13.** Campo magnético em função da distância a um fio retilíneo.

Concluiremos esta seção definindo as principais operações entre funções reais. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais. A função

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

é denominada *soma de  $f$  mais  $g$*  e seu domínio natural é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ . De forma análoga, definimos o *produto de  $f$  vezes  $g$*  por

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

onde seu domínio natural é também a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ . No caso do *quociente de  $f$  por  $g$* , definido por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

o domínio natural são os pontos comuns aos domínios de  $f$  e  $g$ , excluindo-se os pontos tais que  $g(x) = 0$ . Finalmente, definimos a *composição de  $f$  com  $g$*  por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

cujos domínios são os pontos  $x \in \mathbb{R}$  que pertencem ao domínio de  $g$  tais que suas imagens  $g(x)$  pertencem ao domínio de  $f$ . Enquanto a soma e o produto de funções são operações comutativas, o mesmo não ocorre com o quociente e a composição de funções.

### 1.2.1 Exercícios

- 1) Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 2$ . Calcule  $g(f(x))$  e também  $f(g(x))$  e conclua que  $g \circ f \neq f \circ g$ .

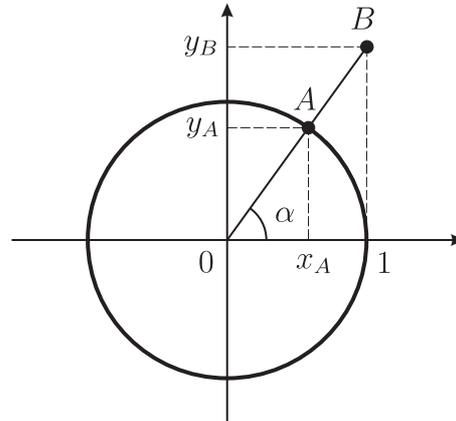
### 1.3 Funções trigonométricas

Consideramos agora, ilustrados pela Figura 1.14, o *circunferência trigonométrica*

$$S = \{A : d(A, 0) = 1\}$$

e também o *círculo trigonométrico*

$$D = \{A : d(A, 0) \leq 1\}. \quad (1.7)$$



**Figura 1.14.** A circunferência e o círculo trigonométricos.

Um ângulo positivo (negativo)  $\alpha$  do círculo trigonométrico é o ângulo  $\widehat{A\hat{O}1}$ , determinado pelas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{O1}$ , onde  $A$  é um ponto de  $S$  com coordenada vertical positiva (negativa). Definimos *coseno e seno de  $\alpha$*  pelas expressões

$$\cos(\alpha) = x_A \quad \text{e} \quad \text{sen}(\alpha) = y_A$$

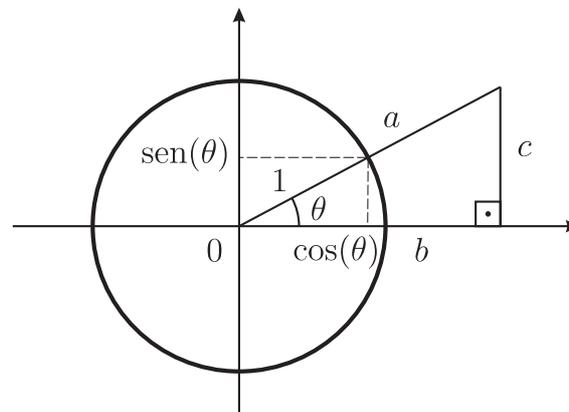
onde claramente

$$\cos(\alpha)^2 + \text{sen}(\alpha)^2 = 1.$$

A *tangente de  $\alpha$*  é definida por

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Pela definição de quociente, temos que  $\text{tg}(\theta) = y_B$ , onde o  $B$  é o único ponto comum à reta  $OA$  e à reta  $v_1$ , como representado na Figura 1.14.



**Figura 1.15.** Relações trigonométricas num triângulo retângulo.

Pelo primeiro caso da semelhança de triângulos (§186 [1]), temos que

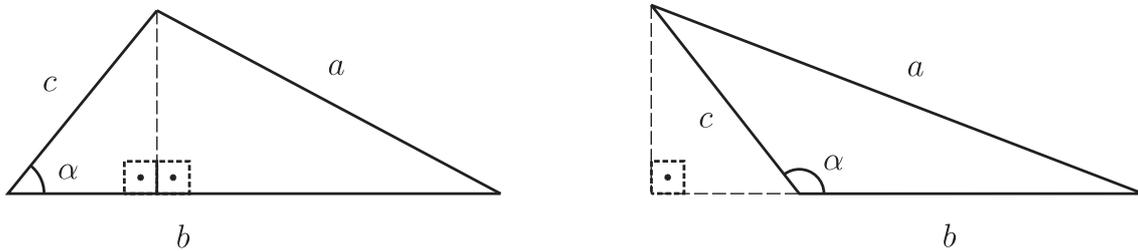
$$\cos(\theta) = \frac{b}{a}, \quad \text{sen}(\theta) = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \text{tg}(\theta) = \frac{c}{b},$$

onde  $a$  é a *hipotenusa*,  $b$  o *cateto adjacente* e  $c$  o *cateto oposto* ao ângulo  $\theta$  do triângulo retângulo ilustrado pela Figura 1.15.

Para um triângulo qualquer, como o apresentado pela Figura 1.16, vale a seguinte equação, conhecida como *lei dos cossenos*, que pode ser interpretada como uma generalização do Teorema de Pitágoras

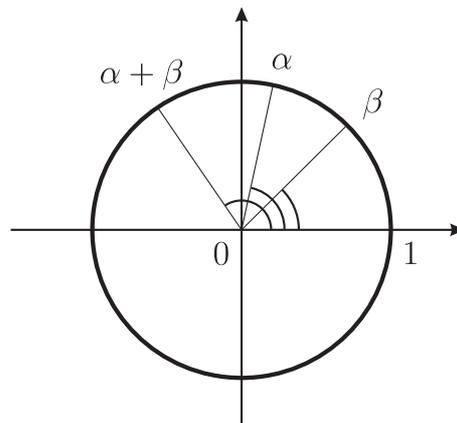
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha),$$

onde  $\alpha$  é o ângulo oposto ao lado  $a$ . Esta relação pode ser obtida, aplicando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ilustrados pela Figura 1.16.



**Figura 1.16.** A lei dos cossenos.

Através da lei dos cossenos, podemos determinar a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos. A *soma* de dois ângulos positivos  $\alpha$  e  $\beta$  do círculo  $S$  é denotada por  $\alpha + \beta$ , como ilustrado pela Figura 1.17.



**Figura 1.17.** A soma de dois ângulos positivos.

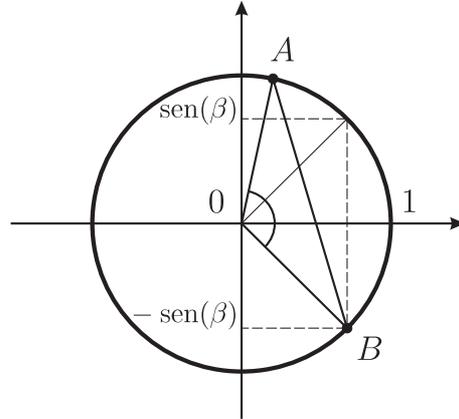
**Proposição 1.6.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos positivos tais que  $\alpha + \beta$  também é positivo. Então vale a seguinte fórmula*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

*Demonstração.* Consideramos  $A = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$  e  $B = (\cos(\beta), -\text{sen}(\beta))$ , pontos do círculo trigonométrico, como ilustrados pela Figura 1.18. Pelo caso (LLL) da congruência

entre triângulos (§52 [1]), temos que o ângulo  $\widehat{10}B$  é congruente ao ângulo  $\beta$ . Logo temos que o ângulo  $\widehat{A0B} \equiv \alpha + \beta$ . Aplicando a lei do cossenos ao triângulo  $\triangle A0B$ , obtemos que

$$\begin{aligned} d(A, B)^2 &= d(A, 0)^2 + d(B, 0)^2 - 2d(A, 0)d(B, 0) \cos(\alpha + \beta) \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (1.8)$$



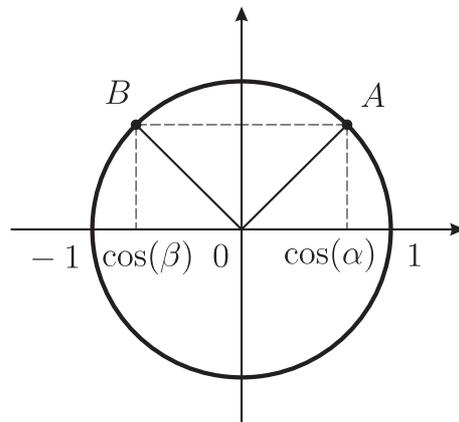
**Figura 1.18.** A fórmula do cosseno da soma.

Por outro lado, utilizando a equação (A.1), temos que

$$\begin{aligned} d(A, B)^2 &= (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - (-\sin(\beta)))^2 \\ &= \cos(\alpha)^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\beta)^2 + \sin(\alpha)^2 + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)^2 \\ &= (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2) + (\cos(\beta)^2 + \sin(\beta)^2) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= 2 - 2(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

O resultado segue, igualando-se os últimos termos das equações (1.8) e (1.9).  $\square$

O próximo resultado relaciona o seno e o cosseno de dois ângulos *suplementares*, cuja soma é congruente a um ângulo raso.

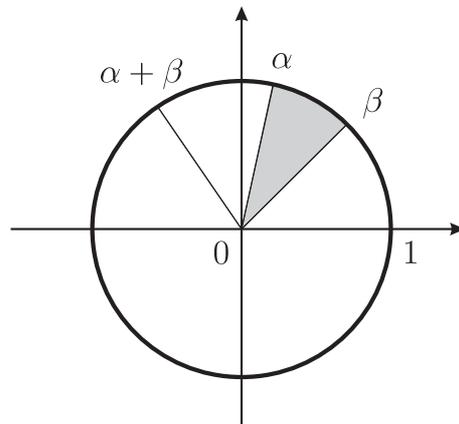


**Figura 1.19.** Dois ângulos suplementares.

**Proposição 1.7.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos positivos tais que  $\alpha + \beta$  é o ângulo  $-\widehat{101}$ . Então  $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$  e  $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ .*

*Demonstração.* Se  $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = 0$ , o resultado é imediato. Logo podemos supor que  $\cos(\beta) < 0 < \cos(\alpha)$ . Sejam  $A$  e  $B$  pontos do círculo trigonométrico tais que  $\alpha = \widehat{A01}$  e  $\beta = \widehat{B01}$ , como representados pela Figura 1.19. Pela definição de soma de ângulos positivos, temos que o ângulo  $\widehat{A0}\cos(\alpha)$  é congruente ao ângulo  $\widehat{A0}\cos(a)$  ao ângulo  $\widehat{B0}\cos(\beta)$ . Então, pelo caso (LAA<sub>0</sub>) da congruência entre triângulos (§52 [1]), temos que o triângulo retângulo  $\triangle A0\cos(a)$  é congruente ao triângulo retângulo  $\triangle B0\cos(b)$ . Isto mostra que os respectivos catetos possuem comprimentos iguais, o que demonstra o resultado.  $\square$

Vamos considerar agora a área dos denominados *setores circulares*. Faremos uso das propriedades A1-A5, apresentadas na Seção A.1. O setor circular  $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ , ilustrado pela Figura 1.20, é a região do plano dos pontos comuns ao círculo trigonométrico  $D$  e ao interior do ângulo  $\widehat{A0B}$ , onde  $A$  e  $B$  são determinados, respectivamente, pelos ângulos positivos  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Figura 1.20.** Área de setores circulares.

Denotamos por  $A(\alpha, \beta)$ , a área do setor o setor circular  $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ , e simplesmente por  $A(\alpha)$ , a área  $A(0, \alpha)$ . Pela definição de soma de ângulos, o setor  $\sphericalangle(\alpha, \alpha + \beta)$  é a imagem do setor  $\sphericalangle(0, \beta)$  pela rotação  $R_\alpha$ , como mostra a Figura 1.20. Logo, pela Propriedade A3, temos que  $A(\alpha, \alpha + \beta) = A(\beta)$ . Portanto, utilizando a Propriedade A1, obtemos que

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta). \quad (1.10)$$

Agora vamos definir as denominada *funções trigonométricas*. Para isso, necessitamos medir ângulos utilizando números reais. A medida de um ângulo positivo  $\alpha$  em *radianos* é por definição

$$\text{rad}(\alpha) = 2A(\alpha). \quad (1.11)$$

Para todo ângulo poitivo  $\alpha$ , temos que  $0 \leq x \leq \pi$ , onde por definição

$$\pi = A(D),$$

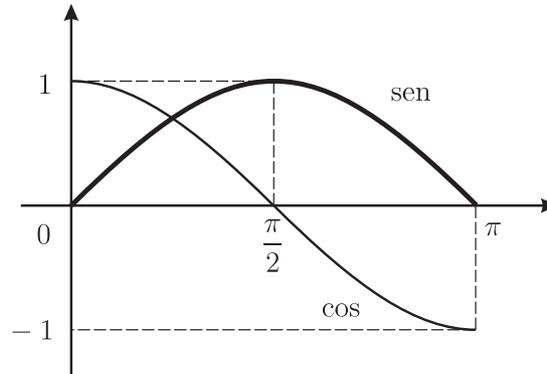
a área do círculo trigonométrico. O seguinte resultado, cuja demonstração será dada apenas no Capítulo 5, afirma que a recíproca também é verdadeira.

**Proposição 1.8 (Radiano).** *Para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq x \leq \pi$ , existe um ângulo positivo  $\alpha$  tal que  $x = \text{rad}(\alpha)$ .*

A definição das funções trigonométricas ocorre então em três etapas. Em primeiro lugar, consideramos  $x = \text{rad}(\alpha) \in [0, \pi]$  e definimos

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(\alpha), \\ \text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha). \end{cases} \quad (1.12)$$

o que é ilustrado na Figura 1.21.

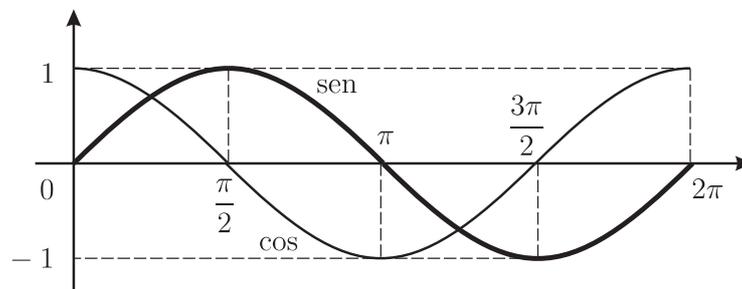


**Figura 1.21.** As funções seno e cosseno em  $[0, \pi]$ .

Em seguida, consideramos  $x \in [\pi, 2\pi]$  e definimos

$$\begin{cases} \cos(x) = -\cos(x - \pi), \\ \text{sen}(x) = -\text{sen}(x - \pi). \end{cases} \quad (1.13)$$

como mostra a Figura 1.22.

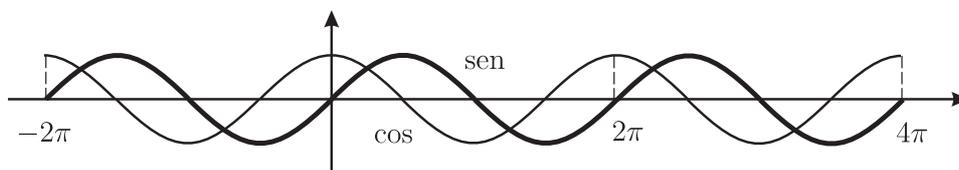


**Figura 1.22.** As funções seno e cosseno em  $[0, 2\pi]$ .

Finalmente, estendemos o domínio para a reta toda, definindo

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(x + 2k\pi), \\ \text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2k\pi), \end{cases} \quad (1.14)$$

onde  $k \in \mathbb{Z}$  é tal que  $x + 2k\pi \in [0, 2\pi]$ , como ilustra a Figura 1.23.



**Figura 1.23.** As funções seno e cosseno na reta  $\mathbb{R}$ .

A função  $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada *função seno ou senóide* e a função  $\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada *função cosseno ou cossenóide*. A *função tangente* é definida, a partir das funções seno e cosseno, por

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}.$$

A partir da Proposição 1.7, pode-se demonstrar que a função cosseno é *par* e as funções seno e tangente são *ímpares*, ou seja, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que

- 1)  $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$ ,
- 2)  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$  e
- 3)  $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$ .

Como claramente  $\text{rad}(\alpha + \beta) = \text{rad}(\alpha) + \text{rad}(\beta)$ , também pode-se demonstrar (Proposição A.3), a partir da fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, as seguintes fórmulas para as funções trigonométricas. Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que

- 1)  $\text{cos}(a + b) = \text{cos}(a)\text{cos}(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$ ,
- 2)  $\text{sen}(a + b) = \text{cos}(a)\text{sen}(b) + \text{sen}(a)\text{cos}(b)$  e
- 3)  $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{1 - \text{tg}(a)\text{tg}(b)}$ .

### 1.3.1 Exercícios

- 1) Demonstre a lei dos cossenos, aplicando o Teorema de Pitágoras através das coordenadas dos vértices  $B$ ,  $C$  e  $D$  do triângulo retângulo  $\triangle BCD$ , ilustrado na Figura 1.16.

# Capítulo 2

## Limite e continuidade

### 2.1 Limite de seqüências

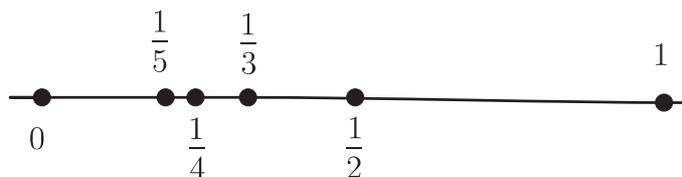
Uma das noções básicas no cálculo é o conceito de limite de uma dada seqüência de números reais. Uma seqüência de números reais é uma lista infinita de números reais

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Quando é necessário fazer referência, denotamos à seqüência acima simplesmente por  $(a_n)$ , onde  $a_n$  é denominado *termo geral* e aparece na lista na posição  $n$ . Devemos pensar numa seqüência de números reais como uma progressão infinita de pontos da reta real  $\mathbb{R}$  evoluindo em estágios sucessivos de tempo. Por exemplo a *seqüência harmônica* é definida como  $(\frac{1}{n})$ , ou seja, é a seguinte lista infinita

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

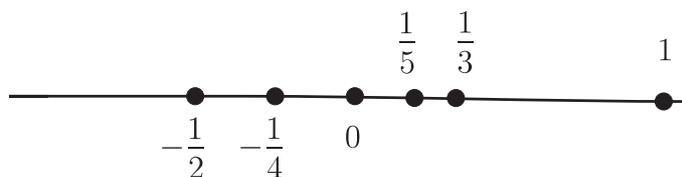
Como ilustra a Figura 2.1, é intuitivo que, à medida que o tempo passa, a seqüência harmônica se aproxima de 0. Neste caso, dizemos que 0 é o limite da seqüência  $(\frac{1}{n})$ .



**Figura 2.1.** Seqüência harmônica se aproximando da origem.

No caso da seqüência harmônica, a posição atingida no estágio de tempo  $n$  é o ponto  $\frac{1}{n}$ .

Um outro exemplo de seqüência que se aproxima da origem é a denominada *seqüência harmônica alternada*, ilustrada pela Figura 2.2.

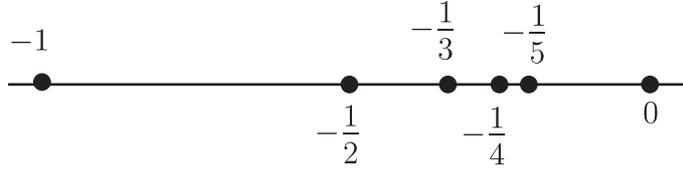


**Figura 2.2.** Seqüência harmônica alternada se aproximando da origem.

e dada por  $(b_n)$ , onde

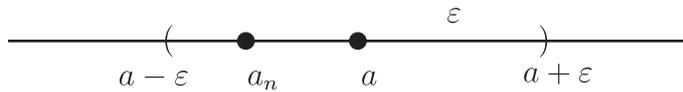
$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ é ímpar} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ é par.} \end{cases}$$

Um último exemplo de sequência se aproximando da origem, como ilustrado pela Figura 2.3, a *sequência anti-harmônica* é dada por  $c_n = -\frac{1}{n}$ .



**Figura 2.3.** Sequência harmônica alternada se aproximando da origem.

Mas o que significa, de maneira mais precisa, que uma sequência  $(a_n)$  se aproxima da origem? A idéia básica é considerarmos intervalos de erro arbitrariamente pequenos em torno da origem. Consideremos então um desses intervalos em torno do ponto  $a$ , com *margem de erro*  $\varepsilon > 0$ , como ilustra a Figura 2.4. Se a sequência  $(a_n)$  se aproxima da origem, a partir de um determinado estágio, a sequência deve passar a ficar dentro desse intervalo de erro. Mas e se considerarmos um intervalo menor, com margem de erro  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ ? Provavelmente teremos que esperar um pouco mais para que a sequência passe a ficar dentro desse novo intervalo de erro. Ou seja, para cada margem de erro  $\varepsilon > 0$ , deve existir um estágio  $n(\varepsilon)$ , chamado *tempo de espera*, tal que para todos os estágios posteriores a sequência fica dentro do intervalo de erro de margem  $\varepsilon$ .



**Figura 2.4.** Intervalo de margem de erro  $\varepsilon$  em torno da origem.

Dizemos então que a sequência  $(a_n)$  se aproxima da origem se, para cada margem de erro  $\varepsilon > 0$ , existir um tempo de espera  $n(\varepsilon)$  de modo que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon,$$

como ilustrado pela Figura 2.4. Neste caso, isto é denotado por  $a_n \rightarrow 0$ .

No caso das sequências apresentadas acima, para cada margem de erro  $\varepsilon > 0$ , podemos definir o tempo de espera como

$$n(\varepsilon) = 1^\circ \text{ natural} > \frac{1}{\varepsilon}$$

e a tabela abaixo apresenta alguns dos seus valores:

$\varepsilon$	$n(\varepsilon)$
0,1	11
0,01	101
0,001	1001

Por exemplo, no caso da sequência harmônica, temos que

$$n \geq n(0, 1) \quad \Rightarrow \quad -0, 1 < \frac{1}{n} < 0, 1.$$

De fato, se  $n \geq 11$ , temos que

$$n > \frac{1}{0, 1}$$

e, invertendo os dois lados da desigualdade, segue que

$$-0, 1 < \frac{1}{n} < 0, 1.$$

Para uma margem de erro arbitrária  $\varepsilon > 0$ ,

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

uma vez que, pela definição, o tempo de espera é tal que  $n(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ . Portanto, para cada  $\varepsilon > 0$ , segue que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Vamos agora considerar o seguinte resultado que afirma que uma sequência se aproxima da origem se e só se sua distância até a origem se aproxima de zero.

**Proposição 2.1.** *Temos que  $a_n \rightarrow 0$  se e só se  $|a_n| \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* O resultado segue do fato de que

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |a_n| < \varepsilon,$$

uma vez que  $|a_n| = a_n$ , quando  $a_n > 0$ , ou  $|a_n| = -a_n$ , quando  $a_n < 0$ . □

Uma consequência da proposição acima é que as sequências harmônica alternada ( $b_n$ ) e anti-harmônica ( $c_n$ ) ambas se aproximam da origem, uma vez que

$$|b_n| = |c_n| = \frac{1}{n}.$$

Outro resultado relevante para a teoria de limites é que a sequência dada pela soma de duas sequências se aproxima da origem caso cada um dos fatores se aproxime da origem.

**Proposição 2.2.** *Se  $a_n, b_n \rightarrow 0$ , então  $a_n + b_n \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$n \geq n_a(\varepsilon/2) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

e também que

$$n \geq n_b(\varepsilon/2) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo

$$n(\varepsilon) = \text{máx} \{n_a(\varepsilon/2), n_b(\varepsilon/2)\}$$

segue que

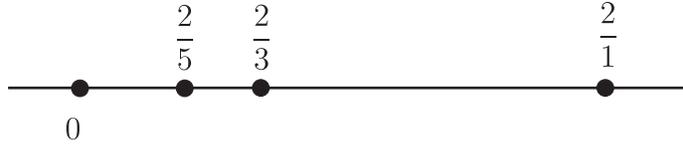
$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n + b_n < \varepsilon.$$

□

Para ilustrar a demonstração do resultado acima, considere a sequência  $(a_n + b_n)$ , que é a soma, respectivamente, das sequências harmônica  $(a_n)$  e harmônica alternada  $(b_n)$ . Temos que

$$a_n + b_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ é ímpar} \\ 0, & n \text{ é par} \end{cases}$$

como ilustrado pela Figura 2.5.



**Figura 2.5.** Soma das sequências harmônica e harmônica alternada.

Neste caso, temos que

$$n_a(\varepsilon) = n_b(\varepsilon) = 1^\circ \text{ natural} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Portanto a função tempo de espera, apresentada na demonstração, é dada por

$$\begin{aligned} n(\varepsilon) &= \text{máx} \{n_a(\varepsilon/2), n_b(\varepsilon/2)\} \\ &= n_a(\varepsilon/2) \\ &= 1^\circ \text{ natural} > \frac{1}{\varepsilon/2}. \\ &= 1^\circ \text{ natural} > \frac{2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

e pode ser melhor visualizada pela tabela abaixo:

$\varepsilon$	$n(\varepsilon)$
0,1	21
0,01	201
0,001	2001

A próxima proposição é uma versão mais restrita do famoso Teorema do Sanduíche.

**Proposição 2.3.** Se  $0 \leq a_n \leq b_n$  e  $b_n \rightarrow 0$ , então  $a_n \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Para cada  $\varepsilon > 0$ , temos que

$$n \geq n_b(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < b_n < \varepsilon.$$

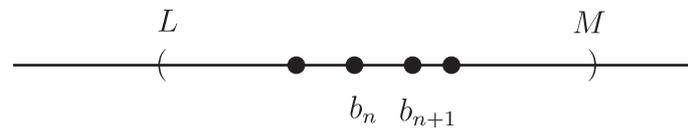
Definindo  $n_a(\varepsilon) = n_b(\varepsilon)$ , segue que

$$n \geq n_a(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon,$$

uma vez que  $0 \leq a_n \leq b_n$ . □

Dizemos que uma sequência  $(b_n)$  é *limitada* quando existem constantes  $L, M$  e um estágio  $n_b$  tais que

$$n \geq n_b \quad \Rightarrow \quad L < b_n < M,$$

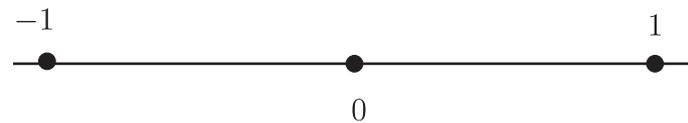


**Figura 2.6.** Uma sequência limitada.

como ilustra a Figura 2.6

Pela definição, toda sequência que se aproxima da origem é limitada. A seguir damos um exemplo de uma sequência limitada, mas que não se aproxima da origem. A denominada sequência *sequência alternada* é ilustrada pela Figura 2.7 e dada por  $(d_n)$ , onde

$$d_n = \begin{cases} 1, & n \text{ é ímpar} \\ -1, & n \text{ é par.} \end{cases}$$



**Figura 2.7.** Sequência alternada é limitada, mas não se aproxima da origem.

O produto de uma sequência limitada por uma sequência que se aproxima da origem também se aproxima da origem. Um exemplo disso é a sequência harmônica alternada que é o produto da sequência harmônica, que se aproxima da origem, pela sequência alternada, que é apenas limitada.

**Proposição 2.4.** Se  $a_n \rightarrow 0$  e  $b_n$  é limitada, então  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Pela definição de sequência limitada, temos que

$$n \geq n_b \quad \Rightarrow \quad L < b_n < M.$$

Escolha  $R > 0$  tal que  $-R < L < M < R$ . Neste caso, segue que

$$n \geq n_b \quad \Rightarrow \quad 0 < |b_n| < R.$$

Pela Proposição 2.1, temos que

$$n \geq n_a(\varepsilon/R) \quad \Rightarrow \quad 0 < |a_n| < \frac{\varepsilon}{R}.$$

Definindo

$$n(\varepsilon) = \max \{n_a(\varepsilon/R), n_b\}$$

segue que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad 0 < |a_n||b_n| < \varepsilon.$$

Isto mostra que  $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \rightarrow 0$  e, portanto, que  $a_n b_n \rightarrow 0$ . □

Uma vez tendo sido definido com precisão o que significa uma sequência se aproximar da origem, podemos considerar o caso geral de uma dada sequência se aproximar de um dado

ponto qualquer. Dizemos que  $(a_n)$  se aproxima de  $a \in \mathbb{R}$  se uma das seguintes condições equivalentes ocorrem

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\rightarrow 0 && \text{ou} \\ a_n - a &\rightarrow 0 && \text{ou} \\ a - a_n &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que a sequência  $(a_n)$  é *convergente* e que o ponto  $a$  seu *limite*. Temos então a seguinte relação entre sequências limitadas e sequências convergentes.

**Proposição 2.5.** *Se  $b_n \rightarrow b$ , então*

(A)  $(b_n)$  é limitada e

(B)  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  é limitada, caso  $b > 0$ .

*Demonstração.* Para o item (A), temos que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon,$$

uma vez que  $b_n - b \rightarrow 0$ . Logo

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon, \quad (2.1)$$

mostrando que  $(b_n)$  é limitada.

Para o item (B), escolhendo  $\varepsilon = \frac{b}{2}$  na equação (2.1), temos que

$$n \geq n(b/2) \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}.$$

Invertendo os três membros da desigualdade acima, segue que

$$n \geq n(b/2) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3b} < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b},$$

mostrando que  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  é limitada. □

A sequência alternada, ilustrada pela Figura 2.7, apesar de limitada, não se aproxima de nenhum ponto da reta. De fato, para qualquer  $d \in \mathbb{R}$ , temos que  $|d_n - d| \geq 1$  para infinitos estágios.

Concluimos esta seção com um exemplo bastante curioso, a denominada *sequência de Fibonacci* dada por  $(a_n)$  da seguinte maneira: seus dois primeiros estágios são iguais a um, ou seja,  $a_1 = a_2 = 1$ . Para obtermos os demais estágios, utilizamos a seguinte fórmula

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Os 10 primeiros estágios desta sequência são apresentados na seguinte lista

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Esta sequência claramente não possui limite. Entretanto é possível mostrar que a sequência

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

dada pelas razões

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

é de fato convergente. Vamos mostrar na seção seguinte que o seu limite é igual a

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

denominado *número áureo ou razão áurea*. Este número mágico, conhecido desde a antiguidade, é obtido geometricamente dividindo-se um dado segmento em dois pedaços, de modo que a proporção da parte maior sobre a parte menor coincida com a proporção do todo sobre a parte maior, como ilustrado na Figura 2.8. A razão áurea  $\phi$  é então qualquer uma destas duas proporções idênticas e satisfaz

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{1 - \phi}.$$



**Figura 2.8.** Razão áurea em segmento.

## 2.2 Propriedades do limite

Iniciamos esta seção considerando o comportamento do limite em relação às operações de soma, produto e quociente de seqüências, as conhecidas *regras de limite*.

**Proposição 2.6.** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , então:*

$$(S) \quad a_n + b_n \rightarrow a + b.$$

$$(P) \quad a_n b_n \rightarrow ab.$$

$$(Q) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}, \text{ quando } b_n, b \neq 0.$$

*Demonstração.* Pela definição, temos que  $a_n - a \rightarrow 0$  e  $b_n - b \rightarrow 0$ . A regra da soma, item (S), segue então da Proposição 2.2, uma vez que

$$a_n + b_n - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b) \rightarrow 0.$$

Para a regra do produto, item (P), primeiro observamos que  $(b_n)$  é limitada, pela Proposição 2.5. Pelas Proposições 2.2 e 2.4, segue que

$$\begin{aligned} a_n b_n - ab &= a_n b_n - ab_n + ab_n - ab, \\ &= (a_n - a)b_n + a(b_n - b) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para a regra do quociente, item (Q), primeiro observamos que, pela regra do produto, como  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ , basta mostramos que  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Para isto, consideramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} &= \frac{b - b_n}{b_n b} \\ &= \frac{1}{b b_n} (b - b_n). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5, temos que  $\left(\frac{1}{bb_n}\right)$  é limitada, uma vez que  $bb_n \rightarrow b^2 > 0$ , pela regra do produto. O resultado segue então da Proposição 2.4.  $\square$

Uma das propriedades fundamentais do limite é a sua *unicidade*, o fato de que uma dada sequência  $(a_n)$  só pode se aproximar de no máximo um número  $a \in \mathbb{R}$ . Tal fato é uma consequência direta de uma outra propriedade muito importante do limite, denominada *monotonicidade*.

**Proposição 2.7 (Monotonicidade).** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ . Se  $a_n \leq b_n$ , então  $a \leq b$ .*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que se  $c_n \rightarrow c$  e  $c_n \leq 0$ , então  $c \leq 0$ . Se  $c > 0$ , podemos escolher  $\varepsilon = c$ . Deste modo, segue que

$$n \geq n(c) \quad \Rightarrow \quad -c < c_n - c < c$$

e então

$$n \geq n(c) \quad \Rightarrow \quad 0 < c_n < 2c,$$

o que é uma contradição, uma vez que estamos supondo que  $c_n \leq 0$ . Agora considere  $c_n = a_n - b_n \leq 0$ . Pelas regras de limite, temos que  $c_n \rightarrow a - b$ . Pela primeira parte da demonstração, temos que  $a - b \leq 0$ , ou seja,  $a \leq b$ .  $\square$

**Corolário 2.8 (Unicidade).** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ . Se  $a_n = b_n$ , então  $a = b$ .*

*Demonstração.* Como  $a_n \leq b_n$  e também  $b_n \leq a_n$ , pela monotonicidade, temos por um lado que  $a \leq b$  e por outro lado que  $b \leq a$ , o que mostra que de fato  $a = b$ .  $\square$

O seguinte teorema é uma ferramenta básica no estudo do comportamento de sequências e é conhecido pelo sugestivo nome de *Teorema do Sanduíche para sequências*.

**Teorema 2.9 (Sanduíche).** *Se  $a_n \leq c_n \leq b_n$  e  $a_n, b_n \rightarrow c$ , então  $c_n \rightarrow c$ .*

*Demonstração.* Como  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , segue que

$$0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n.$$

Pelas regras de limite, temos que  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , uma vez que  $a_n, b_n \rightarrow c$ . Pela Proposição 2.3, segue que  $c_n - a_n \rightarrow 0$ , mostrando que

$$c_n = (c_n - a_n) + a_n \rightarrow c.$$

$\square$

Uma exemplo de aplicação do Teorema do Sanduíche é mostrar que a progressão geométrica com razão  $r = 1/2$  se aproxima da origem. Pode-se demonstrar por indução, o que é deixado como exercício, que  $2^n > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso, invertendo ambos os lados dessa desigualdade, segue que

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}.$$

Como  $0 \rightarrow 0$  e também  $1/n \rightarrow 0$ , temos que  $1/2^n \rightarrow 0$ .

Vamos agora utilizar as propriedades de limite para mostrar que a sequência das razões dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para a razão áurea (Seção 2.1). De fato, vamos supor que  $r_n \rightarrow \phi$ , onde

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{e} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

e mostrar que

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Em primeiro lugar observamos que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= 1 + \frac{1}{r_n}, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Por outro lado, utilizando a mesma função tempo de espera de  $r_n \rightarrow \phi$ , concluímos que  $r_{n+1} \rightarrow \phi$ . Pela unicidade do limite e pelas regras da soma e do quociente, segue que

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Portanto o limite é solução da seguinte equação quadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

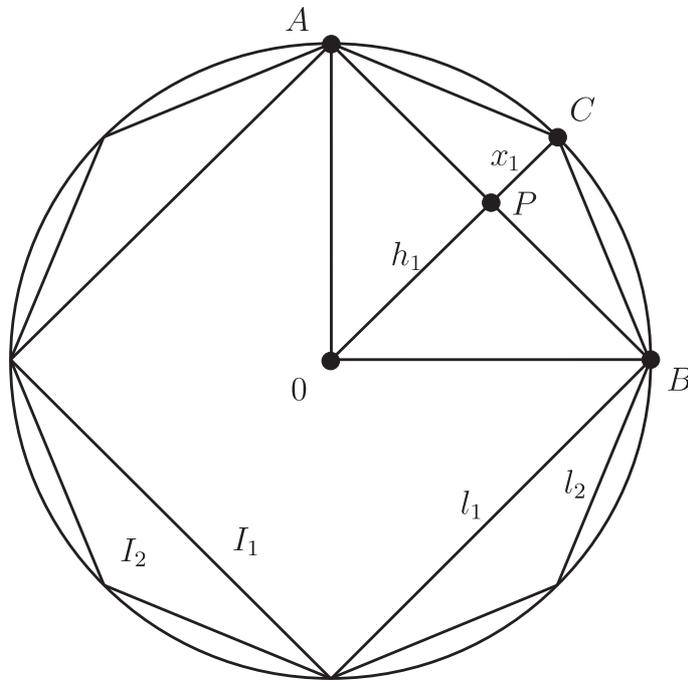
cujas únicas soluções positivas são de fato a razão áurea

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos esta seção com a clássica sequência dos semi-perímetros  $SP(I_n)$  dos polígonos regulares inscritos  $I_n$ , cujo número de lados é igual a  $2^{n+1}$ . A Figura 2.9 ilustra o semi-círculo e os dois primeiros polígonos,  $I_1$  e  $I_2$ , que são, respectivamente, o quadrado e o octógono inscritos. O comprimento dos lados de  $I_n$  é denotado por  $l_n$ .

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que  $l_1 = \sqrt{2}$ . Para calcularmos  $l_2$ , consideramos os triângulos retângulos  $\triangle ACP$  e  $\triangle AP0$ , onde  $0$  é o centro do círculo unitário. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} l_2^2 &= x_1^2 + \frac{l_1^2}{4}, \\ 1 &= h_1^2 + \frac{l_1^2}{4} \quad \text{e} \\ 1 &= x_1 + h_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$



**Figura 2.9.** Sequência de polígonos inscritos.

onde  $h_1$  é a altura do triângulo  $\triangle ABO$  de base  $l_1$ . Pela última equação de (2.2), temos que  $h_1 = 1 - x_1$ . Substituindo na segunda equação de (2.2) e simplificando, obtemos

$$x_1^2 - 2x_1 + \frac{l_1^2}{4} = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara e o fato de que  $0 < x_1 < 1$ , temos que

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - l_1^2}}{2}$$

e, portanto, que

$$x_1^2 = \frac{4 - 4\sqrt{4 - l_1^2} + (4 - l_1^2)}{4}.$$

Substituindo este valor na primeira equação de (2.2), obtemos que

$$l_2^2 = 2 - \sqrt{4 - l_1^2}. \quad (2.3)$$

Além disso, temos também que  $h_1 < h_2$ , onde  $h_2$  é a altura do triângulo  $\triangle AC0$  de base  $l_2$ , pois  $h_2$  é maior que a hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle QP0$ .

Para se obter o lado  $l_3$  a partir do lado  $l_2$ , realiza-se um procedimento análogo. Como mostra a figura (2.9), considerando os triângulos retângulos  $\triangle ADQ$  e  $\triangle AQ0$  e aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} l_3^2 &= x_2^2 + \frac{l_2^2}{4}, \\ 1 &= h_2^2 + \frac{l_2^2}{4} \quad \text{e} \\ 1 &= x_2 + h_2 \end{aligned}$$

onde em todas as equações de (2.2) substituímos  $l_1$  por  $l_2$ ,  $l_2$  por  $l_3$ ,  $x_1$  por  $x_2$  e  $h_1$  por  $h_2$ . Isto mostra que a relação entre o lado  $l_3$  e o lado  $l_2$  deve ser a similar à relação entre o lado  $l_2$  e o lado  $l_1$  dada pela equação (2.3), de modo que

$$l_3^2 = 2 - \sqrt{4 - l_2^2}$$

e novamente temos também que  $h_2 < h_3$ . De maneira geral, procedendo-se de modo análogo, obtemos que a relação entre o lado  $l_{n+1}$  e o lado  $l_n$  é dada pela equação

$$l_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - l_n^2},$$

que  $h_n < h_{n+1}$  e portanto que  $h_1 < h_n$ .

A tabela abaixo mostra os 10 primeiros estágios do processo descrito acima.

$n$	$2^n$	$l_n^2$	$l_n$	$SP(I_n)$
1	2	2	1,414214	2,828427
2	4	0,585786	0,765367	3,061467
3	8	0,152241	0,390181	3,121445
4	16	0,0384294	0,196034	3,136548
5	32	0,00963055	0,0981353	3,140331
6	64	0,00240909	0,0490825	3,141277
7	128	0,000602363	0,0245431	3,141514
8	256	0,000150596	0,0122718	3,141573
9	512	0,0000376494	0,00613591	3,141588
10	1024	0,00000941238	0,00306796	3,141591

### 2.2.1 Exercícios

1) Demonstre por indução que  $2^n > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.3 Função exponencial

Nesta seção, vamos definir a exponencial de um dado  $x \leq 0$  como o limite, quando existir, da sequência  $(x_n)$ , onde

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Pela Proposição A.11, utilizando a notação de somatório descrita na Seção A.4, temos que

$$x_n = \sum_{k=0}^n c_{k,n} \left(\frac{x}{n}\right)^k,$$

onde

$$c_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

é o denominado  $(k, n)$ -número binomial. Segue então que

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_{k,n} x^k$$

onde

$$a_{k,n} = \frac{c_{k,n}}{n^k}.$$

Além disso,

$$a_{k,n} \leq \frac{1}{k!} \leq 1,$$

uma vez que

$$a_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}$$

e que

$$\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k.$$

Agora demonstramos o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** *Para cada  $k \in \mathbf{N}$ , temos que  $a_{k,n} \leq a_{k,n+1}$ , para todo  $n \in \mathbf{N}$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que

$$\frac{a_{k,n}}{a_{k,n+1}} \leq 1$$

para todos  $k, n \in \mathbf{N}$ . Temos que

$$\frac{a_{k,n}}{a_{k,n+1}} = \left( \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \right) \left( \frac{k!(n+1-k)!(n+1)^k}{(n+1)!} \right).$$

Logo

$$\frac{a_{k,n}}{a_{k,n+1}} = (n+1-k)(n+1)^{k-1}n^{-k}$$

e também

$$\frac{a_{k-1,n}}{a_{k-1,n+1}} = (n+2-k)(n+1)^{k-2}n^{-k+1}.$$

Temos então que

$$\frac{a_{k,n}/a_{k,n+1}}{a_{k-1,n}/a_{k-1,n+1}} = \frac{(n+1-k)(n+1)}{(n+2-k)n}.$$

Pode-se mostrar que

$$\frac{(n+1-k)(n+1)}{(n+2-k)n} \leq 1$$

para todo  $k \geq 1$ , o que é deixado como exercício. Portanto

$$\frac{a_{k,n}}{a_{k,n+1}} \leq \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-1,n+1}}$$

para todo  $k \in \mathbf{N}$ . Segue então que

$$\frac{a_{k,n}}{a_{k,n+1}} \leq \frac{a_{0,n}}{a_{0,n+1}} = 1,$$

uma vez que  $a_{0,n} = a_{0,n+1} = 1$ . □

Uma sequência é *não-decrescente* se  $a_n \leq a_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbf{N}$ . Definimos de forma análoga o que é uma sequência *não-crescente*. Uma sequência é *monótona* se é não-decrescente ou não-crescente.

**Corolário 2.11.** *Para cada  $x \geq 0$ , a sequência  $(x_n)$  é não-decrescente.*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.10 e como  $x \geq 0$ , temos que

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_{k,n}x^k \leq \sum_{k=0}^n a_{k,n+1}x^k \leq \sum_{k=0}^{n+1} a_{k,n+1}x^k = x_{n+1}.$$

□

Vamos necessitar do seguinte fato sobre sequências monótonas, demonstração se encontra na Seção A.6.

**Proposição 2.12.** *Se  $(a_n)$  é monótona e limitada, então  $a_n \rightarrow a$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ .*

Para cada  $x \geq 0$ , definimos

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

quando  $\exp(x)$  existir. A próxima proposição mostra que  $\exp(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.13.** *Temos que*

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x},$$

para todo  $-1 < x < 1$  e a primeira desigualdade vale para todo  $x \geq 0$ . Além disso, para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(A) \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y),$$

$$(B) \exp(kx) = \exp(x)^k.$$

*Demonstração.* Uma vez que  $a_{0,n}x^0 = 1$ , que  $a_{1,n}x^1 = x$  e que  $0 < a_{k,n} \leq 1$ , temos que

$$1 + x \leq \sum_{k=0}^n a_{k,n}x^k \leq \sum_{k=0}^n x^k,$$

para todo  $x \geq 0$ . Segue então que

$$1 + x \leq x_n \leq \sum_{k=0}^n x^k.$$

Pela primeira desigualdade acima e pela monotonicidade do limite, segue que  $1 + x \leq \exp(x)$ , para todo  $x \geq 0$ , sempre que  $\exp(x)$  existir. Por outro lado, pela Proposição A.10, temos que

$$x_n \leq \sum_{k=0}^n x^k \leq \frac{1}{1 - x},$$

para todo  $0 \leq x < 1$ . Pelo Corolário 2.11 e pela Proposição 2.12, segue que  $\exp(x)$  existe, para todo  $0 \leq x < 1$ . Pela monotonicidade do limite,

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x},$$

para todo  $0 \leq x < 1$ . Por outro lado, segue então que

$$\frac{1}{1 + x} \geq \frac{1}{\exp(x)} \geq 1 - x,$$

o que mostra que

$$1 + (-x) \leq \exp(-x) \leq \frac{1}{1 - (-x)},$$

para todo  $0 \leq x < 1$ , completando a primeira parte da demonstração.

Se  $x \leq y$  e  $\exp(y)$  existe, então  $x_n \leq y_n \leq \exp(y)$  o que mostra, pela Proposição 2.12, que  $\exp(x)$  também existe. Além disso, temos que

$$(x + y)_n = \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n = x_n y_n. \quad (2.4)$$

Pelo Corolário 2.11 e pela Proposição 2.12,  $\exp(x + y)$  existe sempre que  $\exp(x)$  e  $\exp(y)$  existem. Pode-se então provar por indução, o que é deixado como exercício, que  $\exp(nx)$  existe para todo  $n \in \mathbf{N}$ , desde que  $\exp(x)$  exista. Como  $\exp(1/2)$  existe, temos então que  $\exp(n/2)$  existe para todo  $n \in \mathbf{N}$ , o que mostra que  $\exp(x)$  existe para todo  $x \geq 0$ .

Para mostrar o item (A), basta mostrar que  $x_n y_n - (x + y)_n \rightarrow 0$ . Pela equação (2.4), denotando

$$a = 1 + \frac{x + y}{n} \quad \text{e} \quad b = \frac{xy}{n^2},$$

temos que

$$a^n = (x + y)_n \quad \text{e} \quad (a + b)^n = x_n y_n.$$

Resta então mostrar que

$$(a + b)^n - a^n \rightarrow 0.$$

Utilizando o binômio de Newton, demonstrado na Proposição A.12, temos que

$$(a + b)^n - a^n = \sum_{k=1}^n c_{k,n} a^{n-k} b^k.$$

Como

$$a^{n-k} \leq a^n \leq \exp(x + y),$$

segue que

$$(a + b)^n - a^n \leq \exp(x + y) \sum_{k=1}^n c_{k,n} b^k.$$

Por outro lado, para  $k \geq 1$ , temos que

$$b^k = \left(\frac{xy}{n^2}\right)^k \leq \frac{1}{n} \left(\frac{xy}{n}\right)^k.$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^n c_{k,n} b^k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_{k,n} \left(\frac{xy}{n}\right)^k = \frac{1}{n} (xy)_n \leq \frac{1}{n} \exp(xy).$$

Finalmente, temos que

$$0 \leq (a + b)^n - a^n \leq \frac{1}{n} \exp(xy) \exp(x + y)$$

e o resultado segue por sanduíche. A demonstração do item (B) é deixada como exercício.  $\square$

**Corolário 2.14.** *A função exponencial é crescente.*

*Demonstração.* Se  $y > x$ , então

$$\exp(y) = \exp(y - x) \exp(x) > \exp(x),$$

uma vez que  $1 < 1 + y - x \leq \exp(y - x)$ .  $\square$

A base neperiana é definida por

$$e = \exp(1)$$

e, pela Proposição 2.13, temos que

$$\exp(k) = e^k,$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . A tabela abaixo mostra alguns estágios da sequência  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  que se aproxima da base neperiana.

$n$	1	10	100	1000	10000	...	$\infty$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2,0000	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	...	$e$

### 2.3.1 Exercícios

1) Mostre que

$$\frac{(n+1-k)(n+1)}{(n+2-k)n} \leq 1$$

para todo  $k \geq 1$ .

2) Prove por indução que  $\exp(nx)$  existe para todo  $n \in \mathbf{N}$ , desde que  $\exp(x)$  exista.

3) Mostre que  $\exp(kx) = \exp(x)^k$ , para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.4 Limite de funções

A partir do conceito de limite de sequências, introduzimos nesta seção uma noção fundamental para a análise das funções reais. De maneira intuitiva, dada uma função real  $f$ , queremos analisar qual é o seu comportamento na vizinhança de um dado ponto  $a \in \mathbb{R}$ .

Primeiro notamos que esse ponto  $a$  deve satisfazer algumas condições para podermos realizar essa análise. Primeiro é necessário que exista pelo menos uma sequência  $(x_n)$  de pontos no domínio de  $f$  se aproximando do ponto  $a$ , ou seja, tal que  $x_n \rightarrow a$ , como ilustrado pela Figura 2.10. Vamos exigir também que  $x_n \neq a$ , pois não nos interessa saber o que

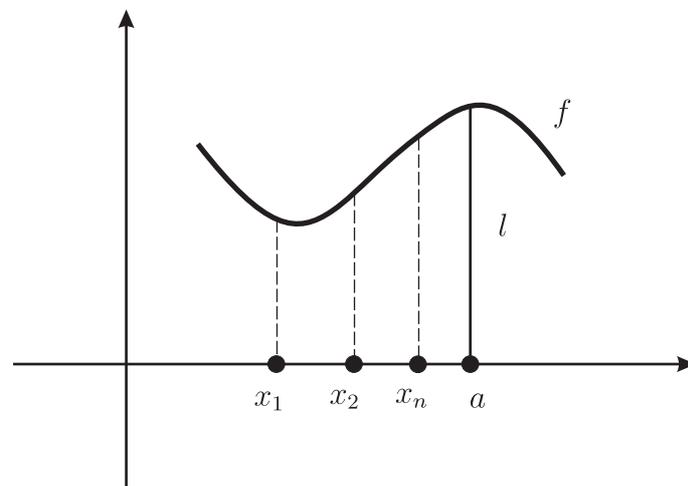


Figura 2.10. Limite de  $f$  no ponto  $a \in \mathbb{R}$ .

acontece exatamente em cima do ponto  $a$  considerado, mas apenas em pontos arbitrariamente

próximo ao ponto  $a$ . Portanto o ponto  $a$  pode nem sequer estar no domínio da função  $f$ , como ilustra o seguinte exemplo. Seja a função dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

cujos domínio algébrico é o conjunto de todos os reais  $x \neq 1$ . Podemos analisar o comportamento de  $f$  na vizinhança de  $a = 1$ . Note que o ponto  $a = 1$  não pertence ao domínio de  $f$ . Entretanto a sequência  $(x_n)$ , dada por

$$x_n = 1 + \frac{1}{n},$$

pertence ao domínio de  $f$ , se aproxima de  $a = 1$  e, além disso,  $x_n \neq a$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora podemos nos perguntar o que acontece com a função  $f$  em cima dos pontos da sequência  $(x_n)$ . Definindo a sequência  $(f(x_n))$ , das alturas dadas por  $f$  em cima da sequência  $(x_n)$ , será que essa sequência de alturas se aproxima de algum valor? No nosso exemplo, temos que

$$f(x_n) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = 2 + \frac{1}{n}$$

e portanto  $f(x_n) \rightarrow 2$ , como ilustra a tabela abaixo:

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
1	2	3
10	1,1	2,1
100	1,01	2,01

E se substituíssemos a sequência  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$  por uma outra sequência  $x_n \rightarrow 1$ ? Continuáramos tendo  $f(x_n) \rightarrow 2$ ? De modo geral, temos que

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1,$$

onde estamos usando que  $x_n \neq 1$ . Pela regra da soma, segue que  $f(x_n) \rightarrow 2$ , sempre que  $x_n \rightarrow 1$ .

O *limite de  $f$  num ponto  $a \in \mathbb{R}$* , quando existe, é o número real denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

tal que se  $(x_n)$  é uma sequência de pontos no domínio de  $f$  tal que  $x_n \neq a$  e também que  $x_n \rightarrow a$ , então a sequência  $(f(x_n))$  das suas alturas é tal que  $f(x_n) \rightarrow l$ . A Figura 2.10 ilustra essa definição.

Pelo que foi visto acima, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Consideramos agora mais um exemplo, onde  $g$  é a função real dada por  $g(x) = x + 1$ , cujo domínio são os números reais não nulos. Pela regra da soma, temos que  $x_n + 1 \rightarrow 2$ , para toda sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n \rightarrow 1$ . Isso mostra que

$$\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2.$$

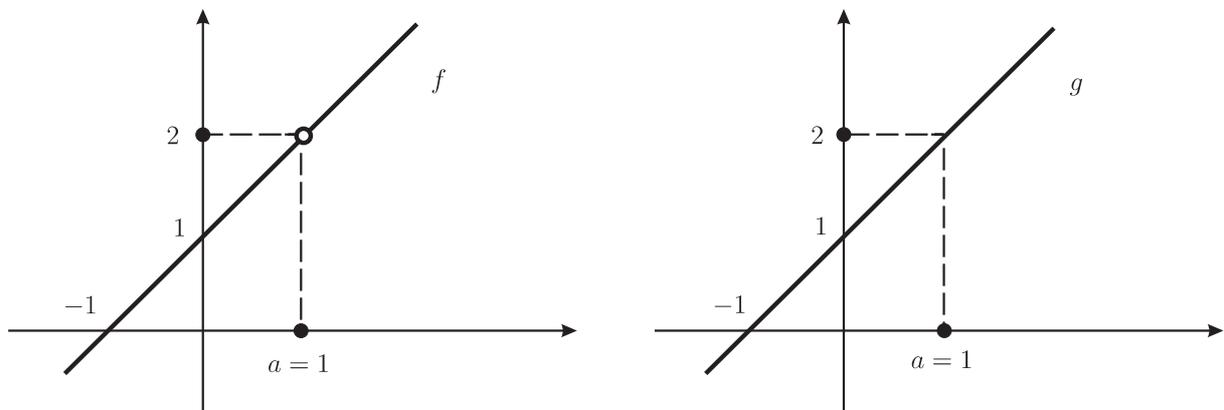
Uma consequência da definição de limite de função é que ele depende apenas do comportamento da função nas proximidades do ponto considerado. Ou seja, duas funções que diferem apenas num dado ponto possuem o mesmo limite neste dado ponto. De fato, suponha que  $f(x) = g(x)$ , sempre que  $x \neq a$ . Para toda sequência de pontos tal que  $x_n \neq a$  e também que  $x_n \rightarrow a$ , temos que a sequência  $(f(x_n))$  coincide com a sequência  $(g(x_n))$ . Portanto  $f(x_n) \rightarrow l$  se e somente se  $g(x_n) \rightarrow l$ , mostrando que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Isso permite que simplifiquemos expressões algébricas dentro do limite. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2,$$

o que é ilustrado pela Figura 2.11.



**Figura 2.11.** Limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $a = 1$ .

Consideraremos agora algumas propriedades do limite de funções que são análogas a propriedade do limite de sequências. Assim como no caso do limite de sequências, o limite e os limites laterais de funções se comportam muito bem em relação às operações de soma, produto e quociente de funções.

**Proposição 2.15.** *Se existem  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , então*

$$(S) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$(P) \quad \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \text{ e}$$

$$(Q) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ desde que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

*Demonstração.* Denotando

$$l_f = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

temos que se  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , então  $f(x_n) \rightarrow l_f$  e também que  $g(x_n) \rightarrow l_g$ . Pelas regras de limite de sequência, temos que

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow l_f + l_g$$

que

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow l_f l_g$$

e, finalmente, que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{l_f}{l_g},$$

o que demonstra a proposição.  $\square$

Por exemplo, temos que

$$\lim_{y \rightarrow 3} y^2 = \left(\lim_{y \rightarrow 3} y\right) \left(\lim_{y \rightarrow 3} y\right) = 3^2 = 9$$

e também que

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 3^2 + 1 = 10.$$

**Proposição 2.16 (Monotonicidade).** *Se  $f \leq g$  e existem*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

onde  $\rightarrow$  pode ser substituído, de maneira uniforme, por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

*Demonstração.* Utilizando a mesma notação empregada na demonstração das regras de limite, temos que se  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , então  $f(x_n) \rightarrow l_f$  e também que  $g(x_n) \rightarrow l_g$ . Como  $f \leq g$ , temos que  $f(x_n) \leq g(x_n)$ . Pela monotonicidade do limite de seqüências, segue que  $l_f \leq l_g$ , o que demonstra o resultado.  $\square$

O seguinte teorema é uma ferramenta básica no estudo do comportamento das funções reais, conhecido pelo sugestivo nome de *Teorema do Sanduíche para funções*.

**Teorema 2.17 (Sanduíche).** *Se  $f \leq h \leq g$  e*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

*Demonstração.* Utilizando a mesma notação empregada na demonstração da monotonicidade, temos que se  $(x_n)$  é tal que  $x_n \rightarrow a$ , então  $f(x_n) \rightarrow l_f$  e também que  $g(x_n) \rightarrow l_g$ . Como  $f \leq h \leq g$ , temos que  $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ . Pelo Teorema do Sanduíche para seqüências, segue que  $h(x_n) \rightarrow l_f = l_g$  e demonstra o resultado.  $\square$

Vamos definir agora os conceitos de limites laterais, respectivamente, esquerdo e direito de uma dada função num dado ponto. Para isso precisamos da seguinte definição de limite de seqüências. Se  $a_n \rightarrow a$  e  $a < a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $a_n$  *tende (ou converge) para a pela direita* e denotamos isto por  $a_n \downarrow a$ . De maneira análoga, se  $a_n \rightarrow a$  e  $a_n < a$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $a_n$  *tende (ou converge) para a pela esquerda* e denotamos isto por  $a_n \uparrow a$ . Enquanto a seqüência harmônica se aproxima com pontos localizados apenas à direita da origem, a seqüência anti-harmônica se aproxima à esquerda da origem e a seqüência harmônica alternada por ambos os lados, como ilustram as Figuras 2.1, 2.2 and 2.3.

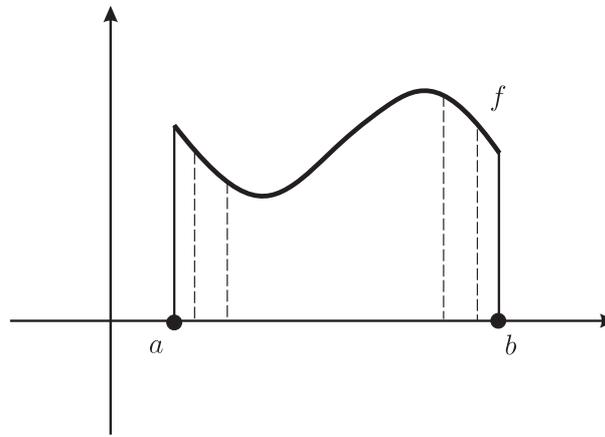
Intuitivamente, o *limite lateral esquerdo de  $f$  em um ponto  $a \in \mathbb{R}$* , quando existe, é o número real denotado por

$$l_e = \lim_{x \uparrow a} f(x)$$

tal que se  $x$  se aproxima de  $a$  pela esquerda, então  $f(x)$  se aproxima de  $l_e$ . Mais precisamente, para toda sequência  $(x_n)$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \uparrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow l_e$ . O *limite lateral direito de  $f$  em um ponto  $a \in \mathbb{R}$*  é definido de forma análoga como o número real denotado por

$$l_d = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

tal que se  $x$  se aproxima de  $a$  pela direita, então  $f(x)$  se aproxima de  $l_d$ , ou de modo mais preciso, para cada sequência  $(x_n)$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \downarrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow l_d$ .

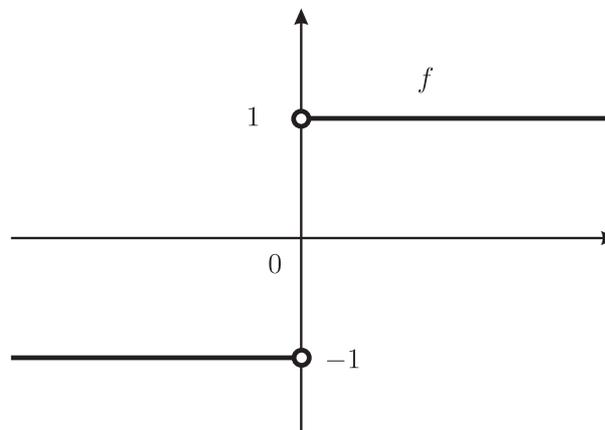


**Figura 2.12.** Limites de  $f$  nos extremos de  $[a, b]$ .

É importante observar que, no caso em que o domínio da função  $f$  é o intervalo limitado  $[a, b]$ , os conceitos de limite e de limite lateral coincidem nos pontos da fronteira, como ilustra a Figura 2.12, onde temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \uparrow b} f(x),$$

pois no primeiro caso não existe o limite lateral esquerdo e no segundo caso não existe o limite lateral direito.



**Figura 2.13.** Limites laterais de  $f$  são distintos na origem.

Pode acontecer também que a função possua os dois limites laterais em um dado ponto, mas não o limite, como mostra o seguinte exemplo. Seja  $f$  a função real dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

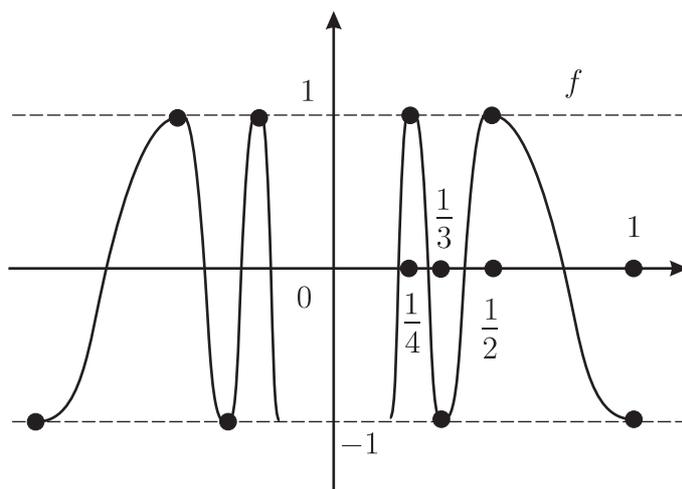
e ilustrada pela Figura 2.13.

Se  $(x_n)$  é a sequência harmônica alternada, apresentada na Seção 2.1, então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é a sequência alternada, que não possui limite algum, como mostrado na Seção 2.1. Isto mostra que não existe o limite de  $f$  no ponto 0, uma vez que  $x_n \rightarrow 0$ . Por outro lado, para toda sequência  $(x_n)$  convergindo a 0 pela direita, a sequência das suas imagens é a sequência constante (1), mostrando que o limite lateral direito existe e é de fato igual a 1. Analogamente, temos que o limite lateral esquerdo existe e é igual a  $-1$ .

O exemplo seguinte apresenta uma função que não possui, num dado ponto limite, sequer um dos limites laterais. Considere a função real  $f$  dada por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad (2.6)$$

ilustrada pela Figura 2.14, cujo domínio são os números reais não nulos.



**Figura 2.14.** Limites laterais de  $f$  não existem na origem.

Se  $(x_n)$  é a sequência harmônica, apresentada na Seção 2.1, então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é a sequência alternada. Isto mostra que não existe o limite lateral direito de  $f$  no ponto 0, uma vez que  $x_n \downarrow 0$  e que, como já mencionamos, a sequência alternada não possui limite algum. Considerando a sequência anti-harmônica, apresentada na Seção 2.1, e argumentando de maneira análoga, obtemos que também não existe o limite lateral esquerdo de  $f$  no ponto 0.

Agora considere uma função cujo domínio é um intervalo aberto. Vamos mostrar que o limite existe em um dado ponto do domínio se e só se os limites laterais existem e são iguais.

**Proposição 2.18.** *Seja  $f$  tal que  $\text{dom}(f)$  é um intervalo aberto. Para todo  $a \in \text{dom}(f)$ , temos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = l = \lim_{x \downarrow a} f(x).$$

*Demonstração.* Vamos primeiro supor que o limite de  $f$  em  $a$  existe e é igual a  $l$ . Neste caso, se  $x_n \uparrow a$  ou  $x_n \downarrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow l$ , o que mostra que os limites laterais existem e são iguais a  $l$ . Agora supomos que os limites laterais existem e são iguais a  $l$ . Seja  $x_n \rightarrow a$  uma sequência qualquer tal que  $x_n \neq a$ . Definimos

$$y_n = a - |a - x_n| \quad \text{e} \quad z_n = a + |x_n - a|.$$

Neste caso, temos que  $y_n \uparrow a$  e que  $z_n \downarrow a$ . Logo segue que  $f(y_n), f(z_n) \rightarrow l$ . Como  $x_n = y_n$ , quando  $x_n < a$ , ou  $x_n = z_n$ , quando  $x_n > a$ , segue que

$$0 \leq |f(x_n) - l| \leq |f(y_n) - l| + |f(z_n) - l|.$$

O resultado segue então do Teorema do Sanduíche.  $\square$

Este resultado é extremamente útil para se analisar a existência do limite nos pontos onde uma dada função muda sua expressão algébrica. Por exemplo, seja  $f$  uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Temos que

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} \frac{x}{4} = \frac{2}{4},$$

pois, pela regra do quociente, se  $x_n \uparrow 2$ , então  $\frac{x_n}{4} \rightarrow \frac{2}{4}$ . Por outro lado temos que

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

pois, novamente pela regra do quociente, se  $x_n \downarrow 2$ , então  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ . Portanto concluímos que os limites laterais de  $f$  no ponto  $x = 2$  existem e coincidem, mostrando que o limite de  $f$  no ponto  $x = 2$  também existe e que

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

## 2.5 Continuidade de funções

A partir do conceito de limite de funções reais, podemos definir outra noção fundamental para a análise das funções reais. De maneira intuitiva, uma função real  $f$  é *contínua em um ponto*  $a \in \mathbb{R}$ , se  $f(x)$  se aproxima de  $f(a)$ , quando  $x$  se aproxima de  $a$ . De maneira mais precisa, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Para que  $f$  seja contínua num ponto  $a \in \mathbb{R}$ , ambos os lados da equação acima devem existir e serem iguais.

As funções constantes e a função identidade são exemplos de funções contínuas em todo ponto  $a \in \mathbb{R}$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

A continuidade se comporta bem em relação às operações entre funções, o que é consequência da Proposição 2.15.

**Corolário 2.19.** *Se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $a \in \mathbb{R}$ , então*

(S) *a função soma  $f + g$  é contínua em  $a$ .*

(P) *a função produto  $fg$  é contínua em  $a$ .*

(Q) *a função quociente  $f/g$  é contínua em  $a$ , desde que  $g(a) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Vamos mostra apenas o caso da soma de funções. Utilizando a Proposição 2.15, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

mostrando que a função  $f + g$  é contínua em  $a$ . □

Se  $p$  é a função polinomial dada por

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

então  $p$  é contínua em todos os pontos. Isso segue a partir das regras da soma e do produto e do fato que as funções constantes e a função identidade serem contínuas em todos os pontos. Dizemos que uma função real  $f$  é *contínua*, se  $f$  é contínua em todos os pontos do seu domínio. Pela observação acima, temos que as funções polinomiais são contínuas.

Se  $r$  é uma função racional dada por

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios, temos, pela regra do quociente, que

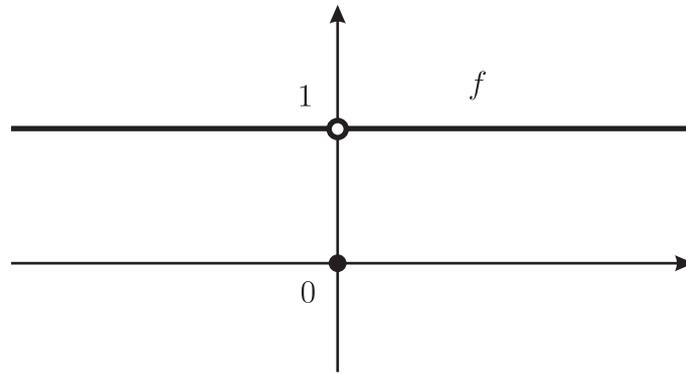
$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a),$$

para todo  $a$  tal que  $q(a) \neq 0$ . Isto mostra que as funções polinomiais são contínuas.

Em termos dos limites laterais, temos a seguinte caracterização, que é uma consequência imediata da Proposição 2.18.

**Corolário 2.20.** *Seja  $a \in \text{dom}(f)$ , onde  $\text{dom}(f)$  é um intervalo aberto. Temos que  $f$  é contínua em  $a$  se e só se os limites laterais de  $f$  em  $a$  são iguais a  $f(a)$ .*

Existem três possibilidades para que uma função  $f$  não seja contínua num dado ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Uma primeira possibilidade é o limite de  $f$  no ponto  $a$  nem sequer existir, como nos exemplos ilustrados pelas Figuras 2.13 e 2.6, onde  $a = 0$ . Uma outra possibilidade é, apesar do limite de  $f$  no ponto  $a$  existir, a função  $f$  não estar definida em  $a$ , como no exemplo apresentado pela Figura 2.11, onde  $a = 1$ . Uma última possibilidade é, o limite de  $f$  no ponto  $a$  existir, a função  $f$  estar definida em  $a$ , mas estes valores não coincidirem, como é ilustrado pela Figura 2.15.



**Figura 2.15.** Limite existe mas não coincide com altura dada por  $f$  na origem.

Neste exemplo, a função  $f$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Concluiremos esta seção mostrando que as funções trigonométricas são também contínuas nos seus respectivos domínios naturais.

Antes necessitamos da seguinte proposição

**Proposição 2.21.** *Temos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h), \quad (2.7)$$

onde um lado desta equação existe se e só se o outro também existe. Em particular,  $f$  é contínua em  $a$  se e só se

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a). \quad (2.8)$$

*Demonstração.* O resultado segue do fato de que  $x_n = h_n + a \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , se e só se  $h_n = x_n - a \rightarrow 0$ , com  $h_n \neq 0$ .  $\square$

Vamos agora mostrar que a função exponencial é contínua.

**Proposição 2.22.** *A função exponencial é contínua.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que a exponencial é contínua na origem, ou seja, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(0) = 1. \quad (2.9)$$

Pela Proposição 2.13, temos que

$$1 + h \leq \exp(h) \leq \frac{1}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ . A equação (2.9) segue então do Teorema do Sanduíche. Novamente pela Proposição 2.13, temos que

$$\exp(a + h) = \exp(a) \exp(h),$$

para todos  $a, h \in \mathbb{R}$ . Utilizando a regra do produto e a continuidade na origem, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \exp(a + h) = \exp(a),$$

o que mostra, pela Proposição 2.21, que a função exponencial é contínua em toda reta  $\mathbb{R}$ .  $\square$

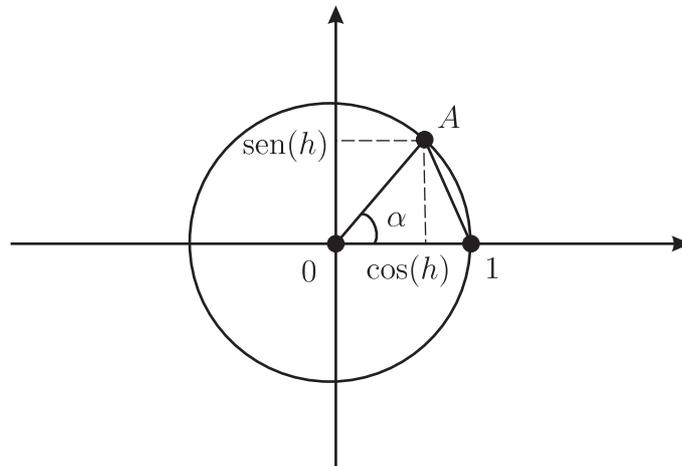
Finalizamos esta seção mostrando que as funções trigonométricas são também contínuas.

**Proposição 2.23.** *As funções seno, cosseno e tangente são contínuas.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que seno e cosseno são contínuas na origem, ou seja, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(h) = \text{sen}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \text{cos}(h) = \text{cos}(0) = 1. \quad (2.10)$$

Seja  $h \in (0, \frac{\pi}{2})$  e considere o triângulo  $\triangle 01T$ , onde  $T = (\text{cos}(h), \text{sen}(h))$ , como ilustra a Figura 2.16.



**Figura 2.16.** Continuidade da função seno na origem.

Por definição, temos que  $h = 2A(\alpha)$ , onde  $A(\alpha)$  é a área do setor circular determinado pelo ângulo  $\alpha$ . Logo temos a seguinte desigualdade

$$0 < \text{sen}(h) = 2A(\triangle 01T) < 2A(\alpha) = h.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, obtemos que

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{sen}(h) = 0.$$

De maneira análoga, demonstra-se também que

$$\lim_{h \uparrow 0} \text{sen}(h) = 0$$

e, portanto, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(h) = 0. \quad (2.11)$$

Para calcular o limite da função cosseno na origem, consideramos  $h \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Como  $\text{sen}(h)^2 = 1 - \text{cos}(h)^2$ , temos a seguinte desigualdade

$$0 < 1 - \text{cos}(h) = \frac{\text{sen}(h)^2}{1 + \text{cos}(h)} < \text{sen}(h)^2,$$

uma vez que  $\cos(h) \in (0, 1)$ . Pelo teorema do produto e utilizando a equação (2.11) e novamente o Teorema do Sanduíche, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} 1 - \cos(h) = 0,$$

o que mostra, pela regra da soma, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1.$$

Pela Proposição A.3, temos que

$$\operatorname{sen}(a + h) = \cos(a) \operatorname{sen}(h) + \operatorname{sen}(a) \cos(h)$$

e também que

$$\cos(a + h) = \cos(a) \cos(h) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(h),$$

para todos  $a, h \in \mathbb{R}$ . Utilizando as regras da soma e do produto e a continuidade na origem, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen}(a) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a + h) = \cos(a),$$

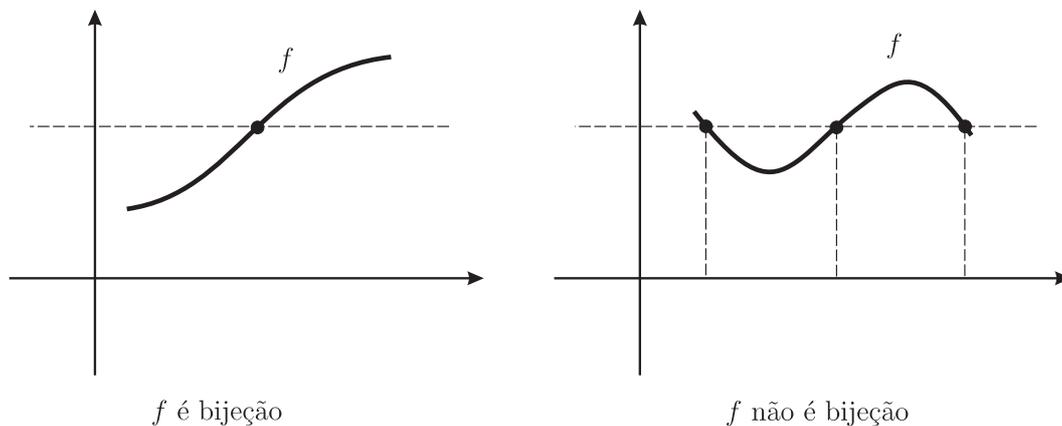
o que mostra, pela Proposição 2.21, que as funções seno e cosseno são contínuas em toda reta  $\mathbb{R}$ . A continuidade da função tangente é consequência imediata da regra do quociente.  $\square$

### 2.5.1 Exercícios

- 1) A partir da regra do produto e do Princípio da Indução, mostre que  $\lim_{x \rightarrow a} cx^n = ca^n$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .
- 2) A partir da regra da soma, do Princípio da Indução e do exercício anterior, mostre que as funções polinomiais são contínuas em qualquer ponto da reta  $\mathbb{R}$ .

## 2.6 Funções inversas e continuidade

Assim como no caso de funções, introduzimos o conceito de função inversa a partir de uma perspectiva puramente geométrica.



**Figura 2.17.** Teste da reta horizontal.

Na Seção 1.2, definimos uma função real como um conjunto de pontos do plano Cartesiano satisfazendo o denominado teste da reta vertical. Uma função

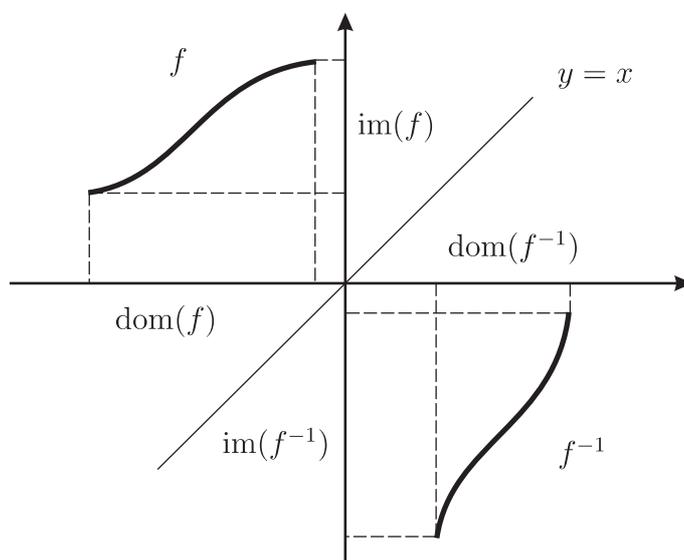
$$f = \{(x, f(x)) : x \in \text{dom}(f)\}$$

é denominada *injeção* se ela também satisfaz o denominado *teste da reta horizontal*: cada reta horizontal possui no máximo um ponto em comum com  $f$ , como ilustrado pela Figura 2.17.

Quando  $f$  é uma injeção, a sua *inversa* é definida pelo conjunto

$$f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in \text{dom}(f)\}, \quad (2.12)$$

ou seja, é o conjunto do pontos do plano obtidos pela troca da primeira coordenada pela segunda coordenada de cada ponto de  $f$ . Geometricamente isto é simplesmente a reflexão de  $f$  em torno da reta bissetriz  $y = x$ , como ilustrado pela Figura 2.18.



**Figura 2.18.** Função  $f$  e sua inversa  $f^{-1}$ .

A reflexão em torno da reta  $y = x$  transforma retas horizontais em retas verticais e *vice-versa*. Como  $f$  satisfaz os testes da reta vertical e da reta horizontal, temos que a inversa  $f^{-1}$  também satisfaz estes dois testes, como ilustrado pela figura (2.18). Portanto  $f^{-1}$  é de fato uma injeção e, em particular, é uma função real, denominada *função inversa de  $f$* .

Temos que o domínio da função inversa  $f^{-1}$  é a imagem da função  $f$ , pois

$$\text{dom}(f^{-1}) = \{f(x) : x \in \text{dom}(f)\} = \text{im}(f).$$

Supondo que  $y = f(x)$ , obtemos que  $y \in \text{dom}(f^{-1})$ . Portanto, temos que

$$(y, f^{-1}(y)) \in f^{-1},$$

pois já observamos que  $f^{-1}$  é de fato uma função. Por outro lado, pela equação (2.12), temos que  $(y, x) \in f^{-1}$ . Temos então que  $f^{-1}(y) = x$ , ou seja, que

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad (2.13)$$

para todo  $x \in \text{dom}(f)$ .

Segue imediatamente da definição que a inversa de  $f^{-1}$  é de fato a própria função  $f$ . Portanto, trocando os papéis de  $f$  e de  $f^{-1}$ , obtemos de modo análogo que  $\text{im}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$  e também que

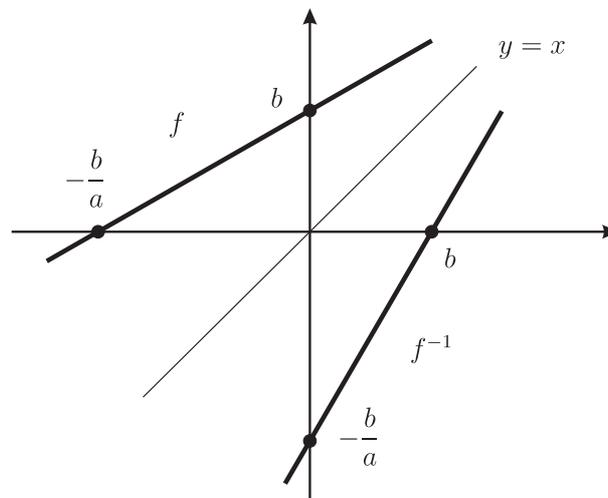
$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad (2.14)$$

para todo  $x \in \text{dom}(f^{-1})$ . É por este motivo, que para obtermos a expressão algébrica de  $f^{-1}(x)$ , basta resolvermos a seguinte equação

$$f(y) = x,$$

cujas incógnitas são  $y = f^{-1}(x)$ .

Vimos que se  $f$  é uma reta não vertical, ela é uma função denominada afim, cuja expressão algébrica é dada por  $f(x) = ax + b$ . Se  $f$  é também uma reta não horizontal, ela é uma injeção e isto ocorre se e só  $a \neq 0$ , como mostra a Figura 2.19.



**Figura 2.19.** Função afim e sua inversa.

Para obtermos a expressão algébrica da função inversa, devemos resolver a seguinte equação

$$f(y) = ay + b = x,$$

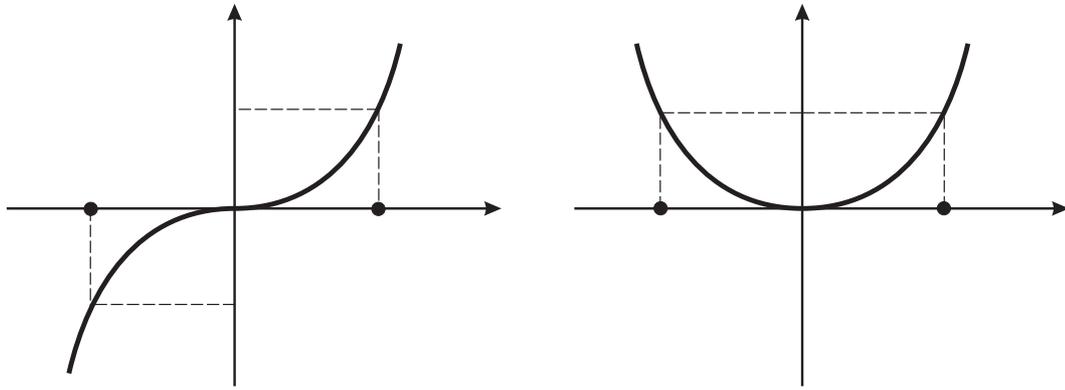
cujas incógnitas são  $y$ . Como  $a \neq 0$ , temos que

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a},$$

o que é ilustrado pela figura (2.19). Portanto a função inversa  $f^{-1}$  de uma função afim  $f$  é também uma função afim, cujo coeficiente angular é o inverso do coeficiente angular de  $f$ .

Agora vamos considerar as inversas das funções potências. Se  $p$  é uma função potência, sua expressão algébrica é dada por  $p(x) = x^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . No caso em que  $n$  é par, temos que  $p$  é uma função par e, por outro lado, no caso em que  $n$  é ímpar, temos que  $p$  é uma função ímpar, o que é ilustrado pela Figura 2.20. De fato esta é a motivação original para o uso da terminologia par e ímpar empregada no estudo de funções.

No Capítulo 4, vamos mostrar que, quando  $n$  é ímpar, a função  $p$  é crescente em toda a reta  $\mathbb{R}$  e, quando  $n$  é par, a função  $p$  é crescente em  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$  e decrescente em  $(-\infty, 0]$ . Quando  $n$  é ímpar,  $p$  satisfaz então o teste da reta horizontal e possui a função inversa  $p^{-1}$ .



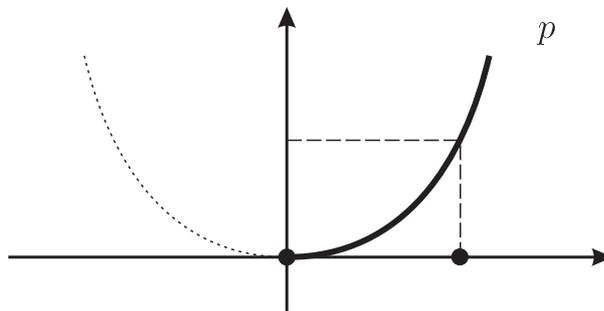
**Figura 2.20.** Potência ímpar e potência par.

Quando  $n$  é par, para podermos considerar a função inversa, devemos substituímos o domínio natural de  $p(x) = x^n$  pela semi-reta  $\mathbb{R}^+$ , como ilustra a figura (2.21).

Em ambos os casos a função inversa  $p^{-1}$  é denominada *função raiz  $n$ -ésima*, cuja expressão algébrica é obtida resolvendo-se a equação

$$p(y) = y^n = x, \quad (2.15)$$

onde a incógnita é  $y = p^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ . O domínio da função raiz  $n$ -ésima é a imagem da função potência, ou seja, é o conjunto dos  $x$  tais que a equação (2.16) possui solução. Apesar de parecer um problema simples, não é de modo nenhum trivial determinar se, por exemplo, a equação  $y^2 = \pi$  possui ou não uma solução. Este problema será considerado no Capítulo 4, onde mostraremos que o domínio é  $\mathbb{R}$ , se  $n$  é ímpar, ou é a semi-reta  $r^+$ , quando  $n$  é par.



**Figura 2.21.** Pedaco de potência par que é injeção.

Após a análise das funções raízes, inversas das funções potências, vamos agora estudar as inversas das funções trigonométricas, as funções arco-trigonométricas. Temos que as funções seno e cosseno são por definição funções periódicas de período  $2\pi$ , ou seja,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{e} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad (2.16)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Neste caso, para podermos considerar as respectivas funções inversas, devemos considerar as funções seno e cosseno restritas a domínios onde elas são de fato bijeções.

Pelo Corolário 2.14, a função exponencial  $\exp$  é crescente e, portanto, possui uma função inversa, que é denominada *função logaritmo (neperiano)*, denotada por  $\log$ . A expressão algébrica do logaritmo é obtida resolvendo-se a equação

$$\exp(y) = x, \quad (2.17)$$

onde a incógnita é  $y = \log(x)$ . O domínio das funções logarítmicas é igual a imagem das funções exponenciais e pode-se mostrar que esta imagem é o conjunto  $\mathbb{R}_*^+$ , dos números reais positivos. A partir das propriedades, obtemos propriedades para os logaritmos análogas às propriedades dos expoentes reais.

**Proposição 2.24.** *Para todos  $x, y > 0$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que:*

$$(A) \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

$$(B) \log(x^k) = k \log(x).$$

*Demonstração.* Para o item (A), definimos  $w = \log(x)$  e também  $z = \log(y)$ . Temos então que  $x = \exp(w)$  e que  $y = \exp(z)$ . Pela Proposição 2.13, segue então que

$$xy = \exp(w) \exp(z) = \exp(w + z),$$

o que mostra que

$$\log(xy) = w + z = \log(x) + \log(y).$$

Para o item (B), utilizando novamente a Proposição 2.13, temos que

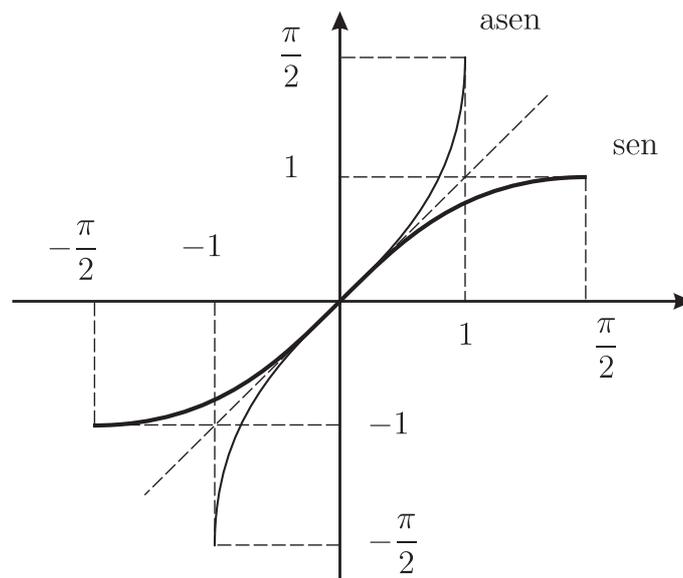
$$x^k = \exp(w)^k = \exp(kw),$$

mostrando que

$$\log(x^k) = kw = k \log(x).$$

□

No caso da função seno, consideramos a função  $\text{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde substituímos o seu domínio natural pela intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , como ilustra a Figura 2.22.



**Figura 2.22.** Função seno e sua inversa arco-seno.

A função inversa  $\text{sen}^{-1}$  é denominada *função arco-seno* e é denotada por *asen*, cuja expressão algébrica é obtida resolvendo-se a equação

$$\text{sen}(y) = x, \tag{2.18}$$

onde a incógnita é  $y = \text{asen}(x)$ . No Capítulo 4, mostraremos que o domínio da função arco-seno é o intervalo  $[-1, 1]$ , conforme a Figura 2.22.

No caso da função cosseno, procedendo-se de maneira análoga ao caso da função seno, consideramos a função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde substituímos o seu domínio natural pela intervalo  $[0, \pi]$ . A função inversa  $\cos^{-1}$  é denominada *função arco-cosseno* e é denotada por  $\text{acos}$ , cuja expressão algébrica é obtida resolvendo-se a equação

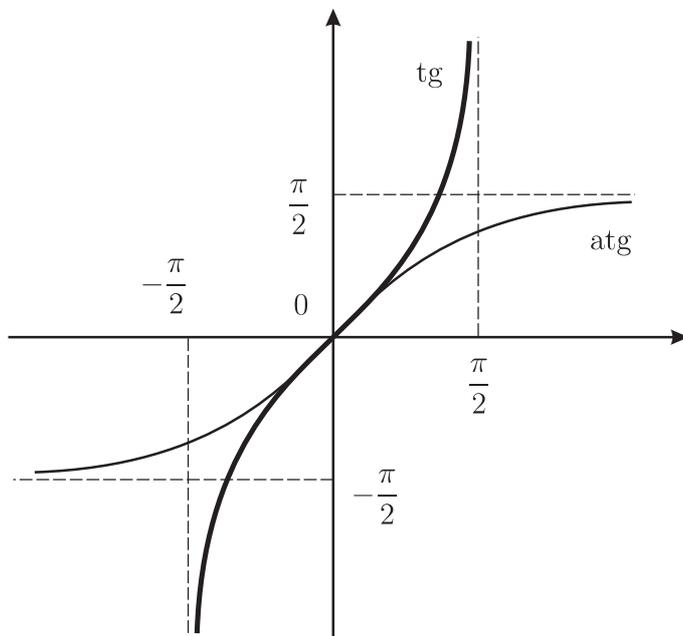
$$\cos(y) = x, \quad (2.19)$$

onde a incógnita é  $y = \text{acos}(x)$ . O domínio da função arco-cosseno é o conjunto dos  $x$  tais que a equação (2.19) possui solução, que é de fato igual a imagem da função  $\cos$ . Como no caso do seno, no Capítulo 4, mostraremos que o domínio da função arco-cosseno é de fato o intervalo  $[-1, 1]$ .

Finalmente, no caso da função tangente, consideramos a função  $\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde substituímos o seu domínio natural pela intervalo aberto  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , como ilustra a Figura 2.23. A função inversa  $\text{tg}^{-1}$  é denominada *função arco-tangente* e é denotada por  $\text{atg}$ , cuja expressão algébrica é obtida resolvendo-se a equação

$$\text{tg}(y) = x, \quad (2.20)$$

onde a incógnita é  $y = \text{atg}(x)$ . O domínio da função arco-tangente é de fato igual a imagem da função  $\text{tg}$ . Como será mostrado no Capítulo 4, o domínio é de fato a reta toda, como mostra a Figura 2.23.



**Figura 2.23.** Função tangente e sua inversa arcotangente.

Uma injeção contínua cuja inversa também é contínua é denominada *homeomorfismo*. No Capítulo 4, vamos mostrar que toda injeção contínua é de fato um homeomorfismo.

**Proposição 2.25.** *Se  $f$  é uma injeção contínua cujo domínio é um intervalo, então sua inversa  $f^{-1}$  também é contínua e seu domínio também é um intervalo.*

Este resultado é extremamente útil no estudo da continuidade das funções inversas. Por exemplo, como as funções potências, exponencial e trigonométricas são contínuas, temos imediatamente que as funções raízes, logaritmo e arco-trigonométricas são também contínuas.

### 2.6.1 Exercícios

- 1) Calcule a função inversa de  $f(x) = 4x + 5$ .

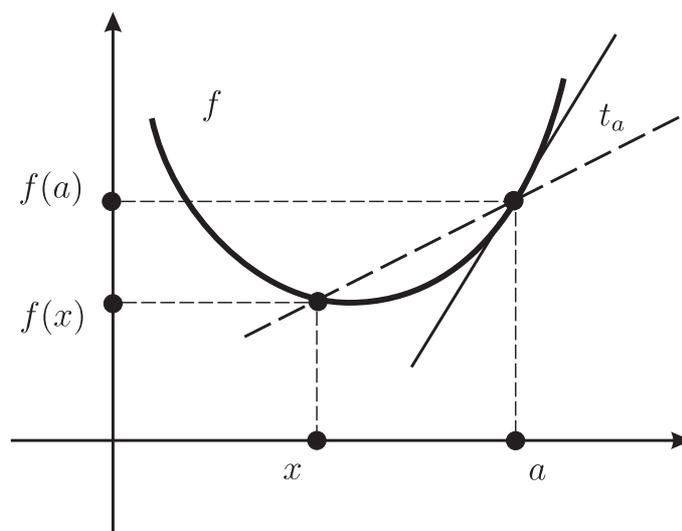


# Capítulo 3

## Derivada

### 3.1 Reta tangente, velocidade e aceleração

Introduzimos o conceito de derivada a partir de uma perspectiva puramente geométrica. A origem do conceito de derivada está relacionada com o problema de se determinar a reta tangente  $t_a$  de uma dada função  $f$  passando pelo ponto  $(a, f(a))$ , como ilustrado pela Figura 3.1.

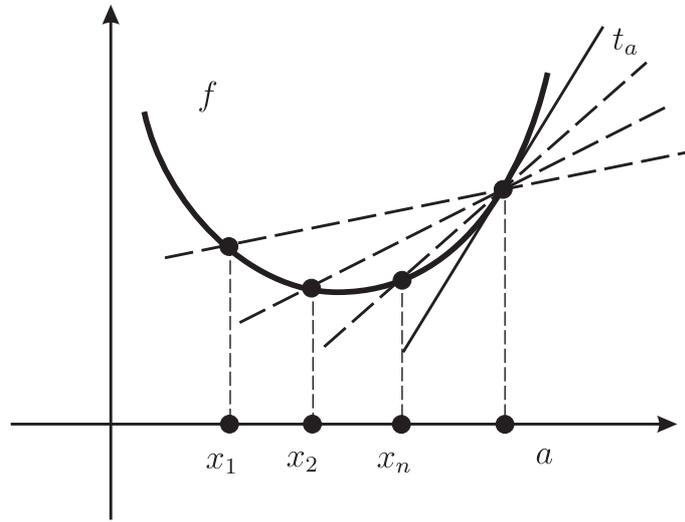


**Figura 3.1.** Limite existe mas não coincide com altura dada por  $f$  na origem.

Como a reta tangente  $t_a$  passa pelo ponto  $(a, f(a))$ , ela fica completamente determinada desde que determinemos seu coeficiente angular, que será denotado por  $m_a$ . Para determinarmos o coeficiente angular  $f'(a)$  da reta tangente  $t_a$ , devemos primeiro calcular o coeficiente angular de uma dada reta secante passando pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$ , onde  $x \neq a$ , como mostra a Figura 3.1. Tal coeficiente angular, denominado *quociente de Newton*, é dado pela seguinte expressão

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Seja agora uma sequência qualquer tal que  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \neq a$ . À medida que  $x_n$  se aproxima do ponto  $a$ , temos que o ponto  $(x_n, f(x_n))$  se aproxima do ponto  $(a, f(a))$ . Portanto, a reta secante determinada por estes dois pontos está cada vez mais próxima da reta tangente  $t_a$ , como ilustrado pela Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Limite existe mas não coincide com altura dada por  $f$  na origem.

Temos então que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \rightarrow m_a,$$

ou seja, a medida que  $x_n$  se aproxima do ponto  $a$ , o coeficiente angular da reta secante determinada por  $(x_n, f(x_n))$  e  $(a, f(a))$  se aproxima do coeficiente angular da reta tangente  $t_a$ . Como isso ocorre para qualquer sequência tal que  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \neq a$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_a.$$

Sempre que este limite existe, dizemos que a função  $f$  é *derivável no ponto  $a$* . A partir de agora, denotamos este limite por  $f'(a)$ , ou seja, temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

denominado de *derivada de  $f$  no ponto  $a$* .

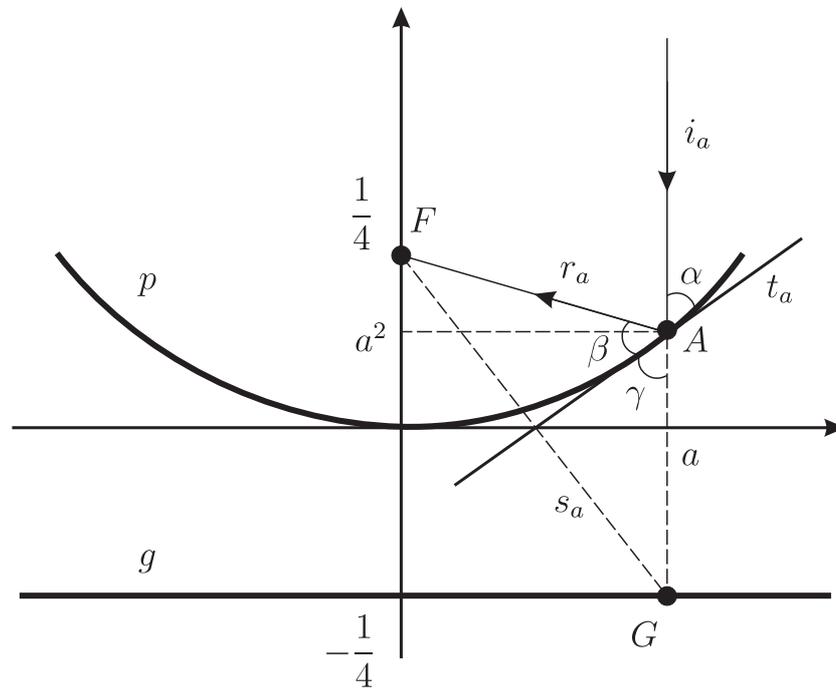
Por exemplo, seja  $p$  a parábola cujo ponto focal é  $F = (0, \frac{1}{4})$  e cuja reta geratriz é a reta horizontal  $h_g$  passando por  $g = -\frac{1}{4}$ , conforme ilustrado pela Figura 3.3. Na Seção 1.2, vimos que  $p$  é uma função cuja expressão algébrica é dada por  $p(x) = x^2$ . Vamos então determinar a reta tangente passando pelo ponto  $A = (a, a^2)$ . Primeiro temos que calcular a derivada de  $p$  no ponto  $a$ ,

$$\begin{aligned} p'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Como  $p'(a) = 2a$ , a equação da reta tangente  $t_a$  é dada por

$$y - a^2 = 2a(x - a).$$

Vamos mostrar qual a razão das antenas possuírem formato parabólico. Suponha que o perfil de uma dada antena é descrito pela função  $p(x) = x^2$ , considerada acima. Suponha que ela tenha que captar sinais eletromagnéticos emitidos por um satélite, localizado em algum ponto do espaço acima da antena. Como o satélite está bastante distante, pode-se supor estes sinais se propagam paralelamente, como ilustrado pela Figura 3.3. A superfície



**Figura 3.3.** Antena parabólica e sua propriedade do foco.

da antena atua como um espelho, refletindo os raios eletromagnéticos. Observe que bem próximo ao ponto  $A = (a, a^2)$  onde o raio incidente  $i_a$  é refletido, a antena tem um formato bem próximo da reta tangente  $t_a$ . Como no caso de espelhos planos, o ângulo de incidência  $\alpha$ , formado pelo raio incidente  $i_a$  e pela reta tangente  $t_a$ , deve ser congruente ao ângulo de reflexão  $\beta$ , formado pelo raio refletido  $r_a$  e pela reta tangente  $t_a$ . Vamos mostrar que o raio refletido  $r_a$  passa sempre pelo ponto focal  $F = (0, \frac{1}{4})$ , independentemente do ponto  $a$ . Este é o motivo para o perfil parabólico das antenas, pois os raios paralelos vindos do satélite são todos refletidos para o ponto focal, onde é claro fica localizado o receptor da antena. Isto provoca uma concentração dos sinais emitidos, melhorando a qualidade da recepção. Para mostrarmos esta propriedade fundamental da antena parabólica, primeiro consideramos a reta  $s_a$  passando pelo ponto focal  $F$  e pelo ponto  $G = (a, -\frac{1}{4})$ . O coeficiente angular de  $s_a$  é igual a

$$\frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{a - 0} = -\frac{1}{2a}$$

e portanto  $s_a$  é perpendicular a  $t_a$ , uma vez que o produto dos coeficientes angulares destas duas retas é igual a  $-1$ . Como  $d(A, F) = d(A, G)$ , pela definição da parábola, segue que os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  são congruentes. Mas os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  também são congruentes, pois são opostos pelo vértice  $A$ . Concluimos então que os seus ângulos de incidência  $\alpha$  e de reflexão  $\beta$  em relação a reta  $t_a$  são realmente congruentes. O sistema de faróis utilizados em automóveis também baseia-se nesta prodigiosa propriedade. Neste caso a fonte luminosa é colocada no ponto focal para se produzir um feixe de raios luminosos paralelos.

Ou motivação que esteve presente nas origens do conceito de derivada é a de taxa de variação instantânea, particularmente, o conceito de velocidade instantânea. Suponha que estejamos na Lua, onde não há atmosfera. Se a função  $s$  descreve a posição no instante  $t$  de uma bola  $B$  arremessada verticalmente no instante inicial  $t = 0$ , temos que sua expressão algébrica é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2},$$

onde  $s_0$  é a posição inicial,  $v_0$  é a velocidade inicial e  $g$  é a aceleração da gravidade na Lua.

A *velocidade média* da bola  $B$  no intervalo de tempo  $[t_0, t]$  é definida como o quociente da variação do espaço  $\Delta s = s(t) - s(t_0)$  pela variação do tempo  $\Delta t = t - t_0$ , ou seja, é igual a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

A *velocidade instantânea* da bola  $B$  em  $t = t_0$  é por definição o limite da velocidade média quando  $\Delta t$  tende a zero, ou seja,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Este limite nos lembra algo visto anteriormente? A velocidade instantânea é de fato a derivada do espaço pelo tempo. Para vermos isto, basta observar que  $\Delta t$  tende a zero se e só se  $t$  tende para  $t_0$  e, portanto, temos que

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Temos então que  $v(t) = s'(t)$ , ou seja, a função velocidade instantânea é igual à derivada da posição instantânea. Na próxima seção, vamos calcular a derivada de  $s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}$  e mostrar que  $s'(t) = v_0 - gt$ .

Agora suponhamos que soltamos a bola  $B$  de um posição inicial  $s_0 = 1$  com velocidade inicial  $v_0 = 0$ . Suponhamos também que a gravidade local na Lua é dada por  $g = 2$  e que o solo lunar é feito de areia bem fofa e encontra-se na altura  $s = 0$ . Temos então que a bola  $B$  toca o solo no instante  $t = 1$  e a função posição tem a seguinte definição por pedaços

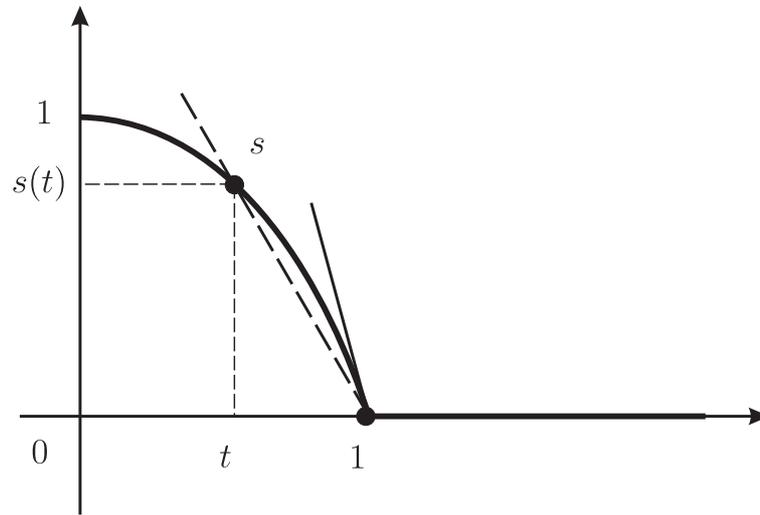
$$s(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

A expressão mostra que, a partir do instante  $t = 1$ , a posição da bola  $B$  permanece constante e igual a  $s(1) = 0$ , devido ao solo ser feito de areia bem fofa. Como descreve a Figura 3.4, temos que a função  $s$  é contínua no instante  $t = 1$ , uma vez que os limites laterais são claramente iguais ao valor da função no ponto.

A pergunta que surge é a função posição é derivável em  $t = 1$ ? Isso é o mesmo que perguntar se o seguinte limite existe

$$s'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1}.$$

Como vimos anteriormente, é necessário que os limites laterais sejam iguais.



**Figura 3.4.** Função posição instantânea da bola  $B$  solta na Lua.

O limite lateral esquerdo é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{1 - t^2 - 0}{t - 1} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{(1 - t)(1 + t)}{t - 1} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} -(t + 1) \\ &= -2, \end{aligned}$$

enquanto o limite lateral direito é igual a

$$\lim_{t \downarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \downarrow 1} \frac{0 - 0}{t - 1} = 0.$$

Como os limites laterais são diferentes em  $t = 1$ , temos que a função posição não é derivável neste instante, conforme ilustra a figura (3.4). Os limites laterais do quociente de Newton são denominados derivadas laterais. Temos que

$$s'(1 \uparrow) = \lim_{t \uparrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = -2$$

é a derivada lateral esquerda de  $s$  em  $t = 1$  e

$$s'(1 \downarrow) = \lim_{t \downarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = 0$$

é a derivada lateral direita de  $s$  em  $t = 1$ . De modo geral, a *derivada lateral esquerda de  $f$  no ponto  $a$*  é definida por

$$f'(a \uparrow) = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a *derivada lateral direita de  $f$  no ponto  $a$*  é definida por

$$f'(a \downarrow) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Em termos das derivadas laterais, temos a seguinte caracterização, que é uma consequência imediata da Proposição 2.18.

**Corolário 3.1.** *Temos que  $f$  é derivável em  $a$  se e só se as suas derivadas laterais em  $a$  são iguais.*

Vamos encerrar esta seção mostrando a relação entre ser derivável e ser contínua num determinado ponto.

**Proposição 3.2.** *Se  $f$  é derivável no ponto  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + f(x) - f(a)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) \\ &= f(a) + \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)). \end{aligned}$$

onde utilizamos a regra do limite da soma. Basta então mostrarmos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= 0 f'(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos a regra do limite do produto. □

### 3.1.1 Exercícios

1) A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

é derivável em  $x = 0$ ?

2) Utilizando o fato de que

$$x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

e calcule

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a},$$

onde  $f(x) = \sqrt{x}$ .

## 3.2 Regras de derivação e função derivada

Iniciamos esta seção com algumas das principais regras de derivação. É importante ressaltar que apesar da derivada da soma ser a soma das derivadas, o mesmo não é verdadeiro nem no caso do produto e nem no caso do quociente.

**Proposição 3.3.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis no ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Temos então que*

(S) a função soma  $f + g$  é derivável em  $a$  e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

(P) a função soma  $fg$  é derivável em  $a$  e

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a) \quad e$$

(Q) se  $g(a) \neq 0$ , então a função quociente  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $a$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

*Demonstração.* Temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad e \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

(S) Temos que

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de soma de funções e a regra do limite da soma.

(P) Temos que

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de produto de funções e também somamos e subtraímos no numerador a expressão  $f(a)g(x)$ . Logo obtemos que

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} f(a) \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) f(a) \\ &= f'(a)g(a) + g'(a)f(a) \end{aligned}$$

onde as regras do limite da soma e do produto e também que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a),$$

pois, pela Proposição 3.2, se uma função é derivável num ponto, ela é contínua neste ponto.

(Q) Primeiro notamos que a derivada da função  $\frac{1}{g}$  no ponto  $a$  é dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{g(a) - g(x)}{x - a} \frac{1}{g(x)g(a)} \right) \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de quociente de funções. Segue então que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} -\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \\ &= -g'(a) \frac{1}{g(a)^2} \\ &= -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

onde utilizamos as regras do limite do produto e do quociente e novamente a continuidade de  $g$  no ponto  $a$ . Finalmente, como  $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ , podemos utilizar a regra da derivada do produto para obter

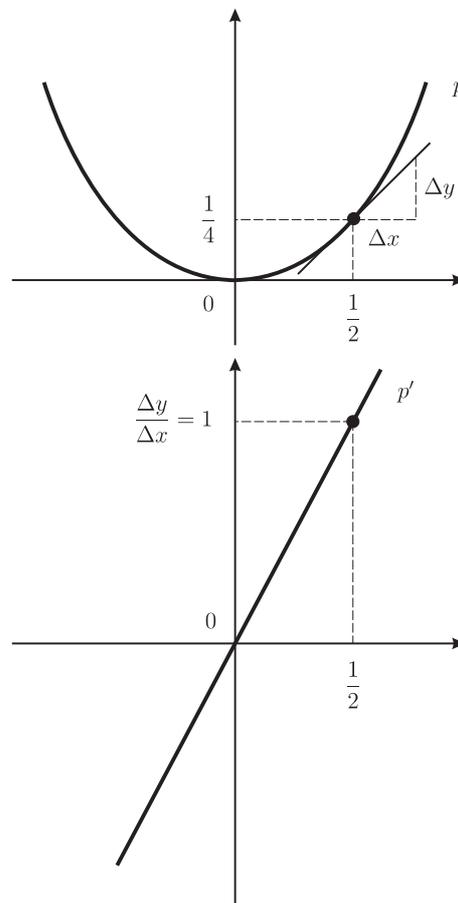
$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + \left(\frac{1}{g}\right)'(a) f(a) \\ &= f'(a) \frac{1}{g(a)} + \left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) f(a) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

Seja  $f$  uma função real. A *função derivada de  $f$* , denotada por  $f'$ , é a função que associa para cada  $x$ , onde  $f$  é derivável, a respectiva derivada  $f'(x)$ . O domínio natural da função derivada são os pontos onde a função  $f$  é derivável. Na seção passada, vimos que se  $p(x) = x^2$ , então  $p'(a) = 2a$ . Portanto sua função derivada é tal que  $p'(x) = 2x$ , como ilustra a Figura 3.5.

Quando lidamos com funções definidas por suas expressões algébricas, uma ferramenta particularmente útil para os cálculos de funções derivadas é o conceito de derivada de uma expressão algébrica. A *derivada da expressão algébrica  $f(x)$* , denotada por  $(f(x))'$ , é por definição a expressão algébrica da função derivada, ou seja,

$$(f(x))' = f'(x).$$



**Figura 3.5.** Função  $p$  e função derivada  $p'$ .

Por exemplo, no caso da função  $f(x) = x^2$ , temos que

$$(x^2)' = 2x.$$

Com esta notação, a aplicação das regras de derivação fica extremamente simplificadas.

**Corolário 3.4.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções reais. Temos então que*

(S) a função soma  $f + g$  é derivável onde  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis e

$$(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))',$$

(P) a função produto  $fg$  é derivável onde  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis e

$$(f(x)g(x))' = (f(x))'g(x) + (g(x))'f(x) \quad e$$

(Q) a função quociente  $\frac{f}{g}$  é derivável onde  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis e onde  $g$  não se anular e

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f(x))'g(x) - (g(x))'f(x)}{g(x)^2}.$$

Como caso particular da regra do produto, temos que

$$(cf(x))' = c(f(x))'$$

ou seja, "a constante sai para fora da derivada".

*Demonstração.* Utilizando a Proposição 3.3 e a notação definida acima, obtemos que

(S)

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= (f + g)'(x) \\ &= f'(x) + g'(x) \\ &= (f(x))' + (g(x))',\end{aligned}$$

(P)

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= (fg)'(x) \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ &= (f(x))'g(x) + (g(x))'f(x) \quad \text{e}\end{aligned}$$

(Q) Temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{(f(x))'g(x) - (g(x))'f(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a regra do produto e o fato que a derivada da função constante é nula, obtemos

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= (c)'f(x) + (f(x))'c \\ &= 0f(x) + c(f(x))' \\ &= c(f(x))'\end{aligned}$$

□

Por exemplo, se  $f(x) = 3x^2 + 5x$ , então

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3x^2 + 5x)' \\ &= 3(x^2)' + 5(x)' \\ &= 3(2x) + 5 \\ &= 6x + 5.\end{aligned}$$

Se  $g(x) = x^3$ , então

$$\begin{aligned}g'(x) &= (x^3)' \\ &= (x^2x)' \\ &= (x^2)'x + (x)'x^2 \\ &= (2x)x + x^2 \\ &= 3x^2.\end{aligned}$$

Se  $h(x) = x^{-3}$ , então

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^{-3})' \\ &= \left(\frac{1}{x^3}\right)' \\ &= \frac{(1)'(x^3) - (x^3)'1}{(x^3)^2} \\ &= \frac{0(x^3) - (3x^2)}{x^6} \\ &= -\frac{3x^2}{x^6} \\ &= -3x^{-4}, \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} (x^2)' &= 2x^{2-1} \\ (x^3)' &= 3x^{3-1} \\ (x^{-3})' &= -3x^{-3-1} \end{aligned}$$

são casos particulares da seguinte fórmula para as derivadas das funções potências, obtida a partir das regras das derivadas da soma e do produto.

**Proposição 3.5.** *Para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que*

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar por indução que a fórmula  $F(n) : (x^n)' = nx^{n-1}$  é verdadeira para todos os naturais. Temos que  $F(1)$  é verdadeira, pois  $(x)' = 1 = 1x^{1-1}$ . Se  $F(n)$  é verdadeira, para um determinado  $n$ , vamos mostrar que  $F(n+1)$  também é verdadeira. Segue então que

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (x^n x)' \\ &= (x^n)'x + (x)'x^n \\ &= nx^{n-1}x + 1x^n \\ &= nx^n + x^n \\ &= (n+1)x^{(n+1)-1}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula  $F(n)$  e a regra da derivada do produto. Temos que a fórmula é válida para  $n = 0$ , pois

$$(x^0)' = (1)' = 0 = 0x^{0-1}.$$

Se  $k = -n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned} (x^k)' &= (x^{-n})' \\ &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' \\ &= \frac{(1)'x^n - (x^n)'1}{(x^n)^2} \\ &= \frac{0x^n - (nx^{n-1})}{x^{2n}} \\ &= -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = x^{-n-1}$ , segue que

$$(x^k)' = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}.$$

□

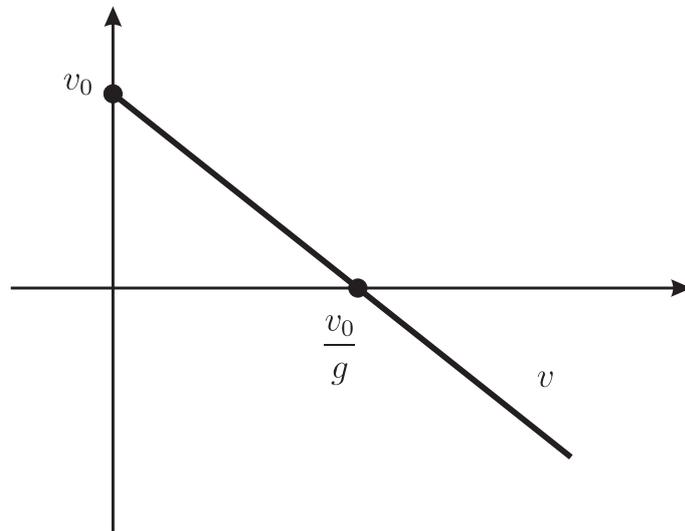
No final da seção anterior, analisamos o comportamento cinemático de uma bola  $B$  lançada verticalmente na Lua. Definimos o conceito de velocidade instantânea e vimos que ela é igual a derivada da posição em relação ao tempo. A função velocidade como é a função que associa a cada tempo  $t$  a respectiva velocidade  $v(t) = s'(t)$ , ou seja, é a função derivada da função posição. Temos que

$$s(t) = s_0 + v_0t - g\frac{t^2}{2}, \quad (3.1)$$

é a a posição de  $B$  no instante  $t$ . Aplicando as regras de derivação, segue que

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) \\ &= \left( s_0 + v_0t - g\frac{t^2}{2} \right)' \\ &= (s_0)' + (v_0t)' - \left( g\frac{t^2}{2} \right)' \\ &= 0 + v_0(t)' - \frac{g}{2}(t^2)' \\ &= v_01 - \frac{g}{2}(2t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

e, portanto,  $v(t) = v_0 - gt$ , como ilustrado pela Figura 3.6.



**Figura 3.6.** Função velocidade instantânea da bola caindo na Lua.

Agora suponhamos que soltamos a bola  $B$  de um posição inicial  $s_0 = 1$  com velocidade inicial  $v_0 = 0$ . Suponhamos também que a gravidade local na Lua  $g = 2$  e que o solo lunar encontra-se na altura  $s = 0$  e feito de areia bem fofa. Temos então que a bola  $B$  toca o solo no instante  $t = 1$  e a função posição tem a seguinte definição por pedaços

$$s(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Vimos também que esta função posição é contínua, porém não é derivável no instante  $t = 1$ . Portanto a sua função velocidade é dada por

$$v(t) = s'(t) = \begin{cases} (1 - t^2)' = -2t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (0)' = 0, & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

É importante notar que o instante  $t = 1$  não faz parte do domínio da função derivada. Isto ocorre uma vez que neste ponto a função não é derivável, já que suas derivadas laterais são distintas, conforme calculado no final da Seção 3.1 e ilustrado pela figura (3.4).

Agora vamos considerar o conceito de aceleração. A *aceleração média* da bola  $B$  no intervalo de tempo  $[t_0, t]$  é definida como o quociente da variação da velocidade  $\Delta v = v(t) - v(t_0)$  pela variação do tempo  $\Delta t = t - t_0$ , ou seja, é igual a

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

A *aceleração instantânea* da bola  $B$  em  $t = t_0$  é por definição o limite da aceleração média quando  $\Delta t$  tende a zero, ou seja,

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Este limite nos lembra algo visto anteriormente? A aceleração instantânea é de fato a derivada do velocidade pelo tempo. Para vermos isto, basta relembrar que  $\Delta t$  tende a zero se e só se  $t$  tende para  $t_0$  e, portanto, temos que

$$a(t_0) = v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

Temos então que  $a(t) = v'(t)$ , ou seja, a função velocidade instantânea é igual à derivada da posição instantânea. No caso da bola  $B$ , temos

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= (v_0 - gt)' \\ &= (v_0)' - g(t)' \\ &= -g. \end{aligned}$$

Esta equação é equivalente à *Segunda Lei de Newton*. De fato, multiplicando-se a equação acima pela massa  $m$ , obtemos que

$$ma(t) = -mg,$$

onde  $-mg$  é exatamente a força peso, a única força atuando sobre a bola  $B$ , uma vez que na Lua não existe atmosfera.

A função aceleração é a função derivada da velocidade, que por sua vez é a função derivada da posição, ou seja, temos que  $a = v' = (s')'$ . Por este motivo dizemos que a função aceleração é a derivada segunda da função posição. Em geral, a *derivada segunda da função*  $f$  é a derivada de sua função derivada e é denotada por  $f''$ . Por exemplo, se  $f(x) = x^2$ , temos que  $f''(x) = 2$ . No contexto da cinemática, temos que  $a(t) = s''(t)$  e, neste caso, a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como  $F = ms''$ .

### 3.3 Derivada de funções exponenciais

Vamos agora considerar a seguinte situação, descrita pela Figura 3.7, onde uma bola  $B$  é arremessada a uma velocidade inicial  $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ , onde  $v_1^0$  é sua componente horizontal e  $v_2^0$  é sua componente vertical. Existem duas forças atuando sobre a bola  $B$ . A primeira é a

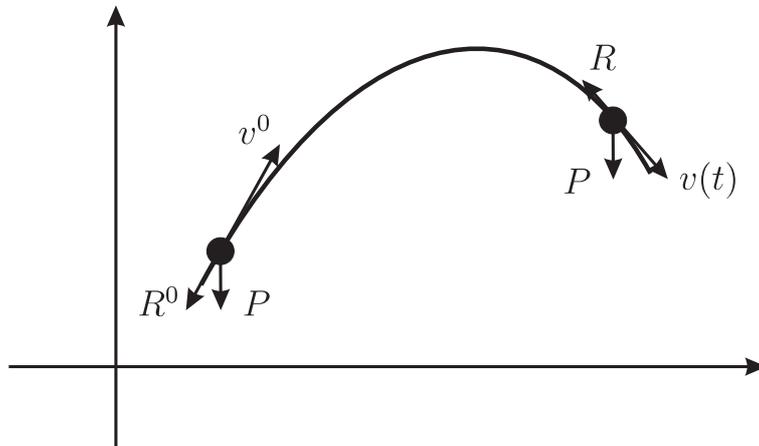


Figura 3.7. Bola  $B$  arremessada na presença do ar.

força peso

$$P = (0, -mg)$$

onde  $g$  é a gravidade local. A segunda é a força de resistência do ar

$$R = (R_1, R_2),$$

que depende da velocidade da bola  $B$ . A força  $R$  tem mesma direção da velocidade  $v$ , mas com sentido oposto a esta. Além disso, o valor absoluto da resistência  $R$  é proporcional ao valor absoluto da velocidade  $v$ . De fato, isto é o que percebemos quando colocamos nossa mão para fora da janela de um carro em movimento. Portanto segue que

$$R = -cv(t)$$

onde  $c$  é o coeficiente de resistência, que depende do tamanho da bola  $B$  e da atmosfera local. Observe que o sinal negativo é devido ao fato de  $R$  ser uma força de resistência ao movimento. As componentes da força  $R$  são então dadas por

$$R_1 = -cv_1(t) \quad \text{e} \quad R_2 = -cv_2(t).$$

Temos então que a força resultante  $F = (F_1, F_2)$  é tal que suas componentes são a soma das componentes da força peso  $P$  e da força de resistência  $R$

$$F_1 = P_1 + R_1 \quad \text{e} \quad F_2 = P_2 + R_2$$

e portanto

$$F_1 = -cv_1(t) \quad \text{e} \quad F_2 = -mg - cv_2(t).$$

Por outro lado, pela Segunda Lei de Newton, temos que  $F = ma$  e portanto

$$F_1 = ma_1(t) \quad \text{e} \quad F_2 = ma_2(t),$$

onde

$$a_1(t) = v_1'(t) \quad \text{e} \quad a_2(t) = v_2'(t).$$

Coletando todas as informações anteriores, obtemos que

$$mv_1'(t) = -cv_1(t) \quad \text{e} \quad mv_2'(t) = -mg - cv_2(t).$$

Dividindo as equações pela massa  $m$ , obtemos que o sistema balístico é dado por

$$v_1'(t) = -bv_1(t) \quad \text{e} \quad v_2'(t) = -g - bv_2(t), \quad (3.3)$$

onde  $b = c/m$  é o coeficiente de resistência por unidade de massa e a primeira equação descreve o movimento horizontal, enquanto a segunda descreve o movimento vertical. Quando podemos desprezar a resistência do ar, temos que o coeficiente  $b$  é nulo e, portanto, o movimento da bola  $B$  é descrito pelas seguintes equações

$$v_1'(t) = 0 \quad \text{e} \quad v_2'(t) = -g,$$

cujas soluções são dadas então por

$$v_1(t) = v_1^0 \quad \text{e} \quad v_2(t) = v_2^0 - gt. \quad (3.4)$$

Vamos mostrar que, nos casos em que a resistência do ar não pode ser desprezada, a solução do sistema balístico é dada através das funções exponenciais. Para isto, devemos primeiro calcular suas derivadas primeiras. Vamos iniciar calculando as suas derivadas no zero.

**Proposição 3.6.** *Temos que  $\exp'(0) = 1$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.13, temos que

$$1 + h \leq \exp(h) \leq \frac{1}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ . Segue então que

$$h \leq \exp(h) - 1 \leq \frac{h}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ , uma vez que

$$\frac{1}{1 - h} - 1 = \frac{h}{1 - h}.$$

Logo, para todo  $0 < h < 1$ , temos que

$$1 \leq \frac{\exp(h) - 1}{h} \leq \frac{1}{1 - h}.$$

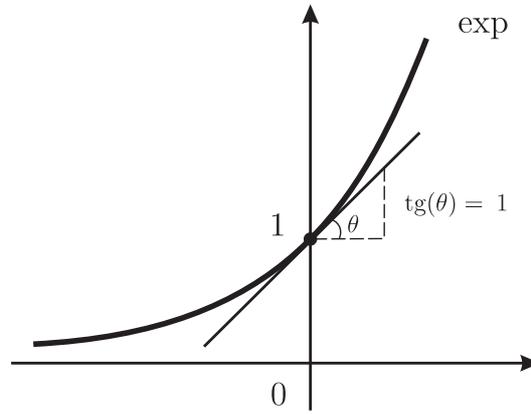
Por sanduíche, segue que

$$\exp'(0 \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

De modo análogo, considerando o caso em que  $-1 < h < 0$ , podemos mostrar que

$$\exp'(0 \uparrow) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1,$$

o que é deixado como exercício. □



**Figura 3.8.** Reta tangente de  $\exp$  na origem.

Vamos mostrar que a função derivada da exponencial é a própria função exponencial.

**Proposição 3.7.** *Temos que  $\exp' = \exp$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.6,  $\exp$  é derivável na origem e pela Proposição 2.13,  $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$ . Segue então, pela Proposição 2.21, que

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x) \exp'(0) \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

□

Apresentamos no corolário seguinte um resultado extremamente útil nos cálculos envolvendo a função exponencial.

**Proposição 3.8.** *Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$(e^{cx})' = ce^{cx}.$$

*Demonstração.* Definindo-se  $f(x) = e^{cx} = \exp(cx)$ , temos que

$$\begin{aligned} (e^{cx})' = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(cx+ch) - \exp(cx)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(cx) - \exp(cx)}{ch} \\ &= c \exp'(cx) \\ &= c \exp(cx) \\ &= ce^{cx}. \end{aligned}$$

□

Agora vamos verificar que as funções

$$v_1(t) = v_1^0 e^{-bt} \quad \text{e} \quad v_2(t) = -\frac{g}{b} + \left(\frac{g}{b} + v_2^0\right) e^{-bt} \quad (3.5)$$

são as soluções das equações (3.3), que descrevem o sistema balístico, considerada a presença da resistência do ar. Relembramos que  $v_1^0$  e  $v_2^0$  são as componentes, respectivamente, horizontal e vertical da velocidade inicial  $v_0$ . Para a primeira solução, temos que

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= (v_1^0 e^{-bt})' \\ &= v_1^0 (e^{-bt})' \\ &= v_1^0 (-be^{-bt}) \\ &= -bv_1(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

No caso da segunda solução, segue que

$$\begin{aligned} v_2'(t) &= \left(-\frac{g}{b} + \left(\frac{g}{b} + v_2^0\right) e^{-bt}\right)' \\ &= \left(\frac{g}{b} + v_2^0\right) (e^{-bt})' \\ &= -g + b\frac{g}{b} + \left(\frac{g}{b} + v_2^0\right) (-be^{-bt}) \\ &= -g - b\left(-\frac{g}{b} + \left(\frac{g}{b} + v_2^0\right) e^{-bt}\right) \\ &= -g - bv_2(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Além disso, temos que

$$v_1(0) = v_1^0 \quad \text{e} \quad v_2(0) = v_2^0.$$

Assim como no caso do sistema massa-mola, é através de funções inversas que mostraremos que as funções apresentada nas equações (3.5) são as únicas soluções do sistema balístico, considerada a presença da resistência do ar.

### 3.4 Derivada de funções trigonométricas

Vamos agora considerar o sistema massa-mola, ilustrado pela Figura 3.9, onde um corpo  $C$  de massa  $m$  é arrastado até a posição  $x_0$  de um sistema de referência cuja origem se localiza na *posição natural* da mola, ou seja, na posição onde a mola não está nem estendida nem contraída.

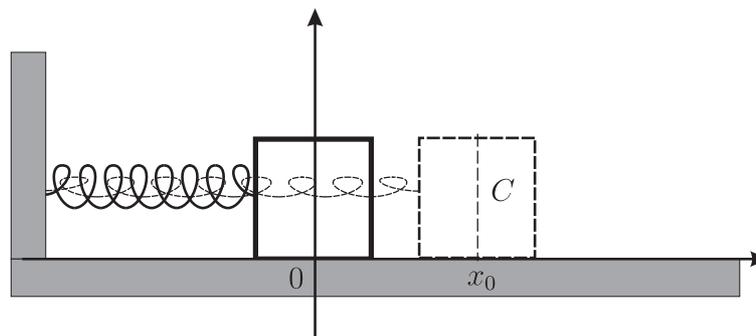


Figura 3.9. Sistema massa-mola sem atrito.

Se o corpo  $C$  é solto no tempo  $t = 0$  com velocidade inicial  $v_0 = 0$ , utilizando princípios da Física, podemos obter uma relação precisa entre as funções posição e aceleração instantâneas. Supondo que a resistência do ar e o atrito com a superfície possam ser desprezadas, pela *Lei de Hooke*, temos que  $F = -kx$ , onde  $k$  é a constante de rigidez da mola, que depende do seu material e da sua geometria. O sinal negativo aparece devido à direção e ao sentido da força, como mostra a Figura 3.9. Como  $x = s(t)$ , temos que a força atuando em  $C$  é uma função do tempo, de modo que  $F(t) = -ks(t)$ . Por outro lado, pela Segunda Lei de Newton  $F(t) = ma(t)$ , temos a seguinte equação

$$ma(t) = -ks(t), \quad (3.8)$$

relacionando a função  $s$  e sua função derivada segunda. No caso em que  $m = k$ , temos que

$$a(t) = -s(t), \quad (3.9)$$

ou seja, a função aceleração é igual a menos a função posição. Vamos mostrar que as funções seno e cosseno satisfazem a esta curiosa propriedade. Para isto, devemos primeiro calcular suas derivadas primeiras. Vamos iniciar calculando as suas derivadas no zero.

**Proposição 3.9.** *Temos que*

$$\text{sen}'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \text{cos}'(0) = 0.$$

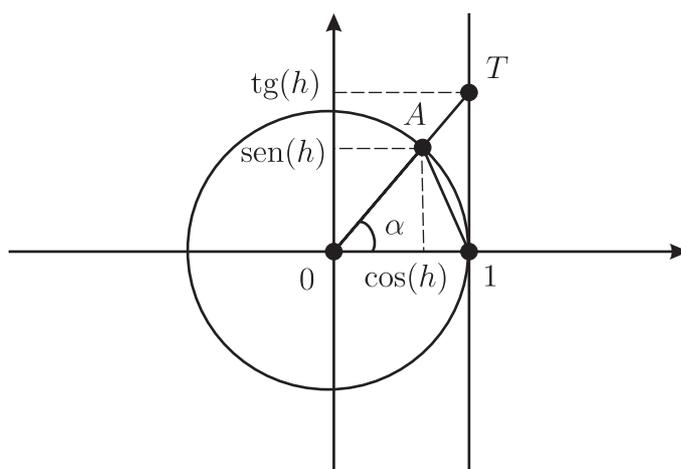
*Demonstração.* Primeiro notamos que

$$\text{sen}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(0+h) - \text{sen}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h},$$

e também que

$$\text{cos}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(0+h) - \text{cos}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h}.$$

Para mostrarmos que  $\text{sen}'(0) = 1$ , seja  $h \in (0, \frac{\pi}{2})$  e considere os triângulos  $\triangle 01A$  e  $\triangle 01T$ , onde  $A = (\text{cos}(h), \text{sen}(h))$  e  $T = (1, \text{tg}(h))$ , como ilustra a Figura 3.10.



**Figura 3.10.** Derivada da função seno na origem.

Por definição, temos que  $h = 2A(\alpha)$ , onde  $A(\alpha)$  é a área do setor circular determinado pelo ângulo  $\alpha$ . Pela monotonicidade da área, temos a seguinte desigualdade

$$2A(\triangle 01A) < 2A(\alpha) < 2A(\triangle 01T)$$

e, portanto, temos que

$$\text{sen}(h) < h < \text{tg}(h)$$

pois

$$A(\triangle O1A) = \frac{\text{sen}(h)}{2} \quad \text{e} \quad A(\triangle O1T) = \frac{\text{tg}(h)}{2}.$$

Da desigualdade acima, segue que

$$\frac{1}{\text{sen}(h)} > \frac{1}{h} > \frac{1}{\text{tg}(h)} = \frac{\cos(h)}{\text{sen}(h)}$$

e multiplicando por  $\text{sen}(h)$ , obtemos que

$$1 > \frac{\text{sen}(h)}{h} > \cos(h).$$

Pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\text{sen}'(0 \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1,$$

pois, pela Proposição 2.23,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = \cos(0) = 1.$$

De maneira análoga, demonstra-se também que  $\text{sen}'(0 \uparrow) = 1$  e, portanto, que  $\text{sen}'(0) = 1$ .

Para mostrarmos que  $\cos'(0) = 0$ , consideramos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \cos'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)^2 - 1}{h} \frac{1}{\cos(h) + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(h)^2}{h} \frac{1}{\cos(h) + 1} \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que  $\cos(h)^2 - 1 = -\text{sen}(h)^2$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \cos'(0) &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)^2}{h^2} \frac{h}{\cos(h) + 1} \\ &= -\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\cos(h) + 1} \\ &= -(\text{sen}'(0))^2 \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

□

Vamos mostrar a seguir que a função derivada do seno é a função cosseno e que a função derivada do cosseno é menos a função seno.

**Proposição 3.10.** *Temos que*

$$\text{sen}' = \cos \quad \text{e} \quad \cos' = -\text{sen}.$$

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $\text{sen}' = \text{cos}$ , consideramos então as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \text{sen}'(x) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\text{sen}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \text{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que  $\text{sen}(x+h) = \text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x)$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \text{sen}'(x) &= \text{sen}(x) \left( \lim_{h \downarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \cos(x) \left( \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \\ &= \text{sen}(x) \cos'(0) + \cos(x) \text{sen}'(0) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

A demonstração de que  $\text{cos}' = -\text{sen}$  é deixada como exercício.  $\square$

Podemos calcular então as derivadas segundas das funções seno e cosseno e mostrar que elas satisfazem à equação

$$s'' = -s, \tag{3.10}$$

que descreve o comportamento do sistema massa-mola quando a massa  $m$  é igual a constante de rigidez  $k$ . No caso da função seno, temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}'' &= (\text{sen}')' \\ &= (\text{cos})' \\ &= -\text{sen} \end{aligned}$$

e no caso da função cosseno

$$\begin{aligned} \text{cos}'' &= (\text{cos}')' \\ &= (-\text{sen})' \\ &= -\text{sen}' \\ &= -\text{cos}. \end{aligned}$$

Observamos agora duas propriedades da derivada segunda análogas a propriedades da derivada primeira.

**Corolário 3.11.** *Se  $f$  e  $g$  são funções reais e  $c \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$(f+g)'' = f'' + g'' \quad \text{e} \quad (cf)'' = cf''.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} (f+g)'' &= ((f+g)')' \\ &= (f' + g')' \\ &= (f')' + (g')' \\ &= f'' + g'' \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}(cf)'' &= ((cf)')' \\ &= (cf')' \\ &= c(f')' \\ &= cf''.\end{aligned}$$

□

Se a função posição é da forma  $s = a \operatorname{sen} + b \operatorname{cos}$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , então a sua derivada segunda satisfaz à equação (3.10), como mostram as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}s'' &= (a \operatorname{sen} + b \operatorname{cos})'' \\ &= (a \operatorname{sen})'' + (b \operatorname{cos})'' \\ &= a \operatorname{sen}'' + b \operatorname{cos}'' \\ &= a(-\operatorname{sen}) + b(-\operatorname{cos}) \\ &= -(a \operatorname{sen} + b \operatorname{cos}) \\ &= -s.\end{aligned}$$

No capítulo seguinte, mostraremos que qualquer solução da equação (3.10) é necessariamente da forma  $s = a \operatorname{sen} + b \operatorname{cos}$ , ou seja, uma *combinação linear das funções seno e cosseno*. Na situação descrita no início desta seção, onde o corpo  $C$  é arrastado até a posição  $x_0$  e solto no tempo  $t = 0$  com velocidade nula, temos que a função posição é exatamente  $s = x_0 \operatorname{cos}$ . De fato, temos que as funções velocidade e aceleração são

$$v = s' = -x_0 \operatorname{sen} \quad e \quad a = s'' = -x_0 \operatorname{cos}$$

e, portanto, segue que

$$s(0) = x_0 \operatorname{cos}(0) = x_0 \quad e \quad v(0) = -x_0 \operatorname{sen}(0) = 0.$$

Encerramos esta seção mostrando que a função derivada da tangente é a secante ao quadrado e que a função derivada da cotangente é menos a cossecante ao quadrado. Relembramos que

$$\sec = \frac{1}{\operatorname{cos}} \quad e \quad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\operatorname{sen}}.$$

**Corolário 3.12.** *Temos que*

$$\operatorname{tg}' = 1 + \operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2} \quad e \quad \operatorname{cotg}' = -1 - \operatorname{cotg}^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2}.$$

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $\operatorname{tg}' = \sec^2$ , consideramos então as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}' &= \left(\frac{\operatorname{sen}}{\operatorname{cos}}\right)' \\ &= \frac{\operatorname{sen}' \operatorname{cos} - \operatorname{cos}' \operatorname{sen}}{\operatorname{cos}^2} \\ &= \frac{\operatorname{cos} \operatorname{cos} - (-\operatorname{sen}) \operatorname{sen}}{\operatorname{cos}^2} \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 + \operatorname{sen}^2}{\operatorname{cos}^2} \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2 \\ &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2}.\end{aligned}$$

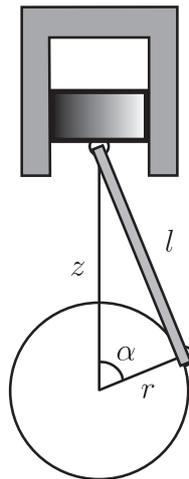
A demonstração de que  $\cot g' = -1 - \cot g^2 = -1/\operatorname{sen}^2$  é deixada como exercício.  $\square$

### 3.4.1 Exercícios

- 1) Utilizando o fato que  $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$ , complete a demonstração da Proposição 3.10, mostrando que de fato  $\cos' = -\operatorname{sen}$ .
- 2) Verifique que  $s(t) = x_0 \operatorname{sen}(t)$  também é uma solução da equação (3.10). Determine, neste caso, a posição inicial  $s_0 = s(0)$  e a velocidade inicial  $v_0 = v(0)$ .
- 3) Utilizando a regra da derivada do quociente e o fato que  $\cot g = \frac{\cos}{\operatorname{sen}}$ , complete a demonstração do Corolário 3.12, mostrando que de fato  $\cot g' = -1 - \cot g^2 = -1/\operatorname{sen}^2$ .

## 3.5 Derivada de funções compostas

Nas seções anteriores definimos de maneira precisa os conceitos de velocidade e de aceleração instantâneas e analisamos os comportamentos dinâmico e cinemático de um corpo em queda livre e também de um corpo num sistema massa-mola. Agora analisaremos o movimento do pistão  $P$  do motor de um automóvel, cuja geometria é descrita pela Figura 3.11. Pela Lei



**Figura 3.11.** Pistão, biela e virabrequim.

do cossenos, temos que

$$l^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos(\alpha) \quad (3.11)$$

onde  $l$  é o comprimento da biela do pistão,  $r$  é raio do virabrequim e  $z$  é a distância do centro do pistão ao eixo do virabrequim. Lembrando que  $r$  e  $l$  são constantes, podemos resolver a equação (3.11) para a variável  $z$ , obtendo  $z$  como uma função de  $\alpha$ , dada por

$$z(\alpha) = r \cos(\alpha) + \sqrt{l^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \quad (3.12)$$

Temos também que tanto o ângulo  $\alpha$  quanto a distância  $z$  são funções do tempo  $t$ . Se  $\alpha = \theta(t)$  e  $z = s(t)$ , pela equação (3.11), temos que a seguinte relação  $s(t) = z(\theta(t))$ . Como podemos então determinar a velocidade e aceleração verticais do pistão  $P$ , conhecendo apenas a posição angular do virabrequim, ou seja, conhecendo apenas a expressão  $\theta(t)$ ? Uma vez que a função  $s$  é dada por uma composição de funções, é necessário obtermos uma regra para a derivação de funções compostas, que é conhecida por *regra da cadeia*.

**Proposição 3.13.** Se  $g$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  é derivável em  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é derivável no ponto  $a$  e

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

*Demonstração.* Vamos supor primeiro que  $g'(a) \neq 0$ . Neste caso, existe  $m \in \mathbf{N}$  tal que  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x$  onde  $0 < |x - a| < 1/m$ . De fato, caso contrário, para cada  $n \in \mathbf{N}$ , existiria  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - a| < 1/n$  e também  $g(x_n) = g(a)$ . Logo teríamos que  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , e também

$$0 = \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

o que implicaria que  $g'(a) = 0$ .

Agora temos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

onde usamos a definição de composição de funções e o fato que  $g(x) - g(a) \neq 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo do ponto  $a$ . Portanto, segue que

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

onde estamos utilizando o fato que

$$f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}$$

uma vez que temos (por quê?)

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Agora analisamos o caso em que  $g'(a) = 0$ . Como

$$f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)},$$

existe  $m \in \mathbf{N}$  tal que

$$\left| \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} \right| \leq m$$

para todo  $y$  onde  $0 < |y - g(a)| < 1/m$ . De fato, caso contrário, para cada  $n \in \mathbf{N}$ , existiria  $y_n$  tal que  $0 < |y_n - g(a)| < 1/n$  e também

$$\left| \frac{f(y_n) - f(g(a))}{y_n - g(a)} \right| > n$$

e portanto  $f$  não seria derivável em  $g(a)$ , uma vez que  $y_n \rightarrow g(a)$ , com  $y_n \neq g(a)$ . Temos então que

$$|f(y) - f(g(a))| \leq m|y - g(a)|,$$

para todo  $y$  com distância a  $g(a)$  menor do que  $1/m$ . Portanto

$$\begin{aligned} 0 \leq |(f \circ g)'(a)| &= \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(g(x)) - f(g(a))|}{|x - a|} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(|g(x) - g(a)|)}{|x - a|} \\ &= m \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| \\ &= m|g'(a)| = 0, \end{aligned}$$

mostrando que

$$(f \circ g)'(a) = 0 = f'(g(a))g'(a).$$

□

Quando trabalhamos com funções dadas pelas suas expressões algébricas, utilizamos a seguinte forma da regra da cadeia.

**Corolário 3.14.** *Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis, então  $f \circ g$  é derivável e*

$$(f(g(x)))' = (f(y))'_{y=g(x)} \cdot (g(x))'.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= ((f \circ g)(x))' \\ &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x))g'(x) \\ &= (f(y))'_{y=g(x)} \cdot (g(x))' \end{aligned}$$

uma vez que

$$(f(y))'_{y=g(x)} = f'(g(x)) \quad \text{e} \quad (g(x))' = g'(x).$$

□

Temos então que a expressão algébrica  $(f(g(x)))'$ , para a derivada da composição, é dada pelo produto da expressão  $(f(y))'_{y=g(x)}$ , que é a derivada da “de fora” calculada na “de dentro”, pela expressão  $(g(x))'$ , da derivada da “de dentro”. O exemplo seguinte ilustra a aplicação da regra da cadeia. Sejam  $f(y) = y^2$  e  $g(x) = x^3 + 1$ . Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} ((x^3 + 1)^2)' &= (f(y))'_{y=g(x)} \cdot (g(x))' \\ &= (y^2)'_{y=x^3+1} (x^3 + 1)' \\ &= (2y)_{y=x^3+1} (3x^2) \\ &= 2(x^3 + 1)(3x^2). \end{aligned}$$

Por um lado, temos que  $(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$  e portanto temos que

$$((x^3 + 1)^2)' = (x^6 + 2x^3 + 1)' = 6x^5 + 6x^2,$$

que é de fato a mesma expressão obtida pela regra da cadeia. O exemplo seguinte ilustra a utilidade da regra cadeia

$$\begin{aligned} ((x^2 + 1)^{100})' &= (y^{100})'_{y=x^2+1} (x^2 + 1)' \\ &= (100y^{99})_{y=x^2+1} (2x) \\ &= 200x(x^2 + 1)^{99}. \end{aligned}$$

É bastante evidente que seria muito mais difícil primeiro obtermos a expressão polinomial de  $(x^2 + 1)^{100}$  para somente depois derivarmos.

Agora vamos aplicar a regra da cadeia para determinar a velocidade vertical do pistão  $P$ . Como  $s(t) = z(\theta(t))$ , temos então que

$$\begin{aligned} v(t) &= (s(t))' & (3.13) \\ &= (z(\alpha))'_{\alpha=\theta(t)} (\theta(t))' \\ &= (z(\alpha))'_{\alpha=\theta(t)} \omega(t). \end{aligned}$$

onde  $\omega(t) = (\theta(t))'$  é denominada a *velocidade angular instantânea da manivela  $M$*  no tempo  $t$ . A velocidade angular do virabrequim está relacionada com a rotação do motor, normalmente medida em RPM. Vamos então calcular a expressão da derivada de  $z(\alpha)$ , no caso em que o raio do virabrequim é  $r = 1$  e o comprimento da biela é  $l = 2$ . Neste caso,

$$z(\alpha) = \cos(\alpha) + \sqrt{4 - \text{sen}(\alpha)^2} \quad (3.14)$$

e então temos que

$$\begin{aligned} (z(\alpha))' &= (\cos(\alpha))' + (\sqrt{4 - \text{sen}(\alpha)^2})' \\ &= -\text{sen}(\alpha) + (\sqrt{y})'_{y=4-\text{sen}(\alpha)^2} (4 - \text{sen}(\alpha)^2)'. \end{aligned}$$

Utilizando o exercício (2) da Seção 3.1, temos que

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

e portanto

$$(z(\alpha))' = -\text{sen}(\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{4 - \text{sen}(\alpha)^2}} (4 - \text{sen}(\alpha)^2)'$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (4 - \text{sen}(\alpha)^2)' &= -(\text{sen}(\alpha)^2)' \\ &= -(y^2)'_{y=\text{sen}(\alpha)} (\text{sen}(\alpha))' \\ &= -(2y)'_{y=\text{sen}(\alpha)} (\cos(\alpha)) \\ &= -2\text{sen}(\alpha) \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Temos então que

$$(z(\alpha))' = -\text{sen}(\alpha) - \frac{\text{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\sqrt{4 - \text{sen}(\alpha)^2}}$$

e, utilizando a equação (3.13), segue que

$$v(t) = \left( -\text{sen}(\theta(t)) - \frac{\text{sen}(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\sqrt{4 - \text{sen}(\theta(t))^2}} \right) \omega(t).$$

Poderíamos também determinar a aceleração vertical do pistão  $P$ , que está diretamente ligada, pela Segunda Lei de Newton, à força  $F$  atuando em  $P$ .

Agora mostraremos como a regra da cadeia pode nos auxiliar na obtenção da solução do sistema massa-mola no caso geral, onde a massa do corpo  $C$  pode ser diferente da constante de rigidez da mola  $M$ . Para isso, enunciaremos a seguinte consequência imediata da regra da cadeia.

**Corolário 3.15.** *Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$(f(cx))' = cf'(cx) \quad e \quad (f(cx))'' = c^2 f''(cx).$$

*Demonstração.* Pela regra da cadeia, segue que

$$(f(cx))' = (f(y))'_{y=cx}(cx)' = f'(cx)c.$$

Para derivada segunda, temos que

$$\begin{aligned} (f(cx))'' &= ((f(cx))')' \\ &= (cf'(cx))' \\ &= c(f'(cx))' \\ &= c(cf''(cx)) \\ &= c^2 f''(cx). \end{aligned}$$

□

Seja  $c$  um número real tal que  $c^2 = k/m$ . Vamos mostrar que se a função posição é da forma  $s(t) = a \operatorname{sen}(ct) + b \operatorname{cos}(ct)$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $s$  satisfaz à equação

$$ms'' = -ks, \tag{3.15}$$

que descreve o comportamento do sistema massa-mola, onde  $m$  é a massa do corpo  $C$  e  $k$  é a constante de rigidez da mola  $M$ . No caso da função seno, temos que

$$\begin{aligned} ms''(t) &= m(a \operatorname{sen}(ct) + b \operatorname{cos}(ct))'' \\ &= m[a(\operatorname{sen}(ct))'' + b(\operatorname{cos}(ct))''] \\ &= m[ac^2 \operatorname{sen}''(ct) + bc^2 \operatorname{cos}''(ct)] \\ &= mc^2[a(-\operatorname{sen}(ct)) + b(-\operatorname{cos}(ct))] \\ &= -k(a \operatorname{sen}(ct) + b \operatorname{cos}(ct)) \\ &= -ks(t). \end{aligned}$$

No capítulo seguinte, mostraremos que qualquer solução da equação (3.15) é necessariamente da forma  $s(t) = a \operatorname{sen}(ct) + b \operatorname{cos}(ct)$ , onde  $c^2 = \frac{k}{m}$ .

Vamos concluir a seção, consideramos o período do sistema massa-mola. O *período* de um sistema dinâmico é por definição o menor intervalo de tempo  $T > 0$  tal que

$$s(t + T) = s(t)$$

para todo instante  $t$ . No caso do sistema massa-mola, isso ocorre quando

$$\text{sen}(c(t + T)) = \text{sen}(ct) \quad \text{e} \quad \text{cos}(c(t + T)) = \text{cos}(ct)$$

para todo instante  $t$ . Segue então que  $cT = 2\pi$  e, portanto, que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

ou seja, o período é proporcional a raiz quadrada da razão da massa do corpo  $C$  pela constante de rigidez da mola  $M$ .

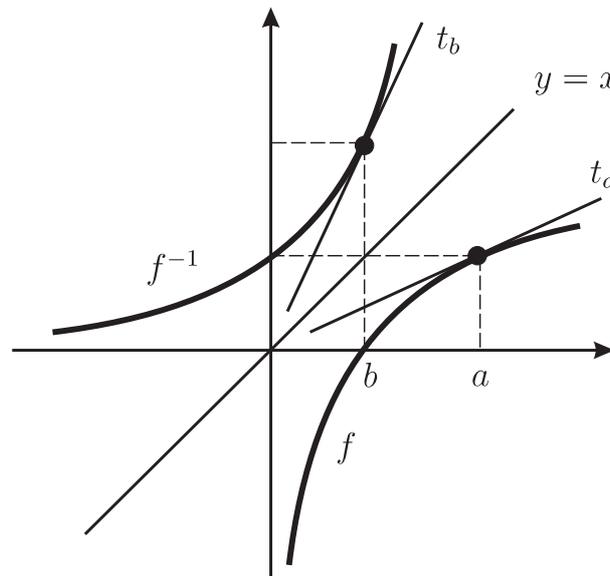
### 3.5.1 Exercícios

- 1) No caso em que o raio do virabrequim é  $r = 1$ , o comprimento da manivela é  $l = 2$  e a posição angular é dada por  $\theta(t) = t$ , utilize as regras de derivação para calcular a aceleração vertical do pistão.

## 3.6 Derivada de funções inversas

Como veremos no próximo capítulo, qualquer solução do sistema massa-mola é necessariamente uma combinação linear das funções seno e cosseno. Para mostrarmos isto será necessário calcularmos as derivadas das suas funções inversas, as funções arco-trigonométricas.

Como vimos na Seção 2.6, a função inversa  $f^{-1}$  de uma dada função  $f$  é a reflexão de  $f$  em torno da reta bissetriz  $y = x$ . Se  $f$  é derivável num ponto  $a \in \mathbb{R}$  e a reta tangente  $t_a$  é não horizontal, temos que a reflexão de  $t_a$  em torno da reta bissetriz é a reta não vertical  $t_b$ , tangente ao gráfico de  $f^{-1}$  no ponto  $b = f(a)$ , como ilustra a Figura 3.12.



**Figura 3.12.** Retas tangentes de  $f$  e de  $f^{-1}$ .

Temos portanto que a função inversa é derivável no ponto  $b = f(a)$ . Para obtermos a expressão algébrica de  $t_b$ , devemos resolver a equação

$$t_a(y) = f(a) + f'(a)(y - a) = x, \quad (3.16)$$

onde a incógnita é  $y = t_b(x)$ . Temos então que

$$\begin{aligned} y &= t_b(x) \\ &= a + \frac{1}{f'(a)}(x - f(a)) \\ &= f^{-1}(b) + (f^{-1})'(b)(x - b) \end{aligned}$$

e, portanto, temos que

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Vamos agora dar uma demonstração de fato utilizando a definição de derivada e as propriedades do limite.

**Proposição 3.16.** *Se  $f$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  e  $f'(a) \neq 0$ , então  $f^{-1}$  é derivável em  $b = f(a)$  e*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \quad (3.17)$$

*Demonstração.* Seja  $y_n \rightarrow b = f(a)$ , com  $y_n \neq b$ . Pela Proposição 4.18,  $f^{-1}$  é contínua em  $b$  e, portanto,  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(b) = a$ . Definindo-se  $x_n = f^{-1}(y_n)$ , segue que  $x_n \rightarrow a$  e que

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} &= \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \rightarrow \frac{1}{f'(a)}. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Uma maneira alternativa e geralmente mais prática de se encontrar a derivada da inversa é utilizar a regra da cadeia. Como vimos na equação (2.14), temos que

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

para todo  $x \in \text{dom}(f^{-1})$ . Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1,$$

o que mostra que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Utilizando apenas as expressões algébricas, temos que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f(y))'_{y=f^{-1}(x)}}.$$

Vamos agora calcular a derivada da função logarítmica.

**Proposição 3.17.** *Temos que*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 3.7, temos que  $\exp' = \exp$ . Pela regra da cadeia, como

$$\exp(\log(x)) = x,$$

segue que

$$\exp(\log(x)) \log'(x) = 1.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{\exp(\log(x))} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

□

Temos que

$$x^k = \exp(k \log(x)),$$

para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\log(x^k) = k \log(x)$ , pela Proposição 2.24. Para cada  $c \in \mathbb{R}$ , podemos então utilizar essa identidade para definir a *função potência*  $c$  por

$$x^c = \exp(c \log(x)),$$

para todo  $x > 0$ .

**Proposição 3.18.** *Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$(x^c)' = cx^{c-1}.$$

*Demonstração.* Segue que

$$\begin{aligned} (x^c)' &= (\exp(c \log(x)))' \\ &= \exp(c \log(x)) c \log'(x) \\ &= x^c c \frac{1}{x} \\ &= cx^{c-1}. \end{aligned}$$

□

Vamos concluir esta seção aplicando este procedimento para calcular as derivadas das inversas das funções trigonométricas.

**Proposição 3.19.** *Temos que*

$$\operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{acos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad e \quad \operatorname{atg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 3.10, temos que

$$\operatorname{sen}'(y) = \cos(y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}(y)^2}.$$

Pela regra da cadeia, como

$$\operatorname{sen}(\operatorname{asen}(x)) = x,$$

segue que

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}(\operatorname{asen}(x))^2} \operatorname{asen}'(x) = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{asen}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(\operatorname{asen}(x))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

O cálculo da derivada da função arco-cosseno é similar e será deixada como exercício.

Pelo Corolário 3.12, temos que

$$\operatorname{tg}'(y) = 1 + \operatorname{tg}(y)^2.$$

Pela regra da cadeia, como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{atg}(x)) = x$$

segue que

$$(1 + \operatorname{tg}(\operatorname{atg}(x))^2) \operatorname{atg}'(x) = 1.$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{atg}'(x) &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{atg}(x))^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

□

### 3.6.1 Exercícios

- 1) Complete a demonstração da Proposição 3.19, mostrando que de fato

$$\operatorname{acos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

# Capítulo 4

## Gráfico e otimização

### 4.1 Formato de gráficos

Nesta seção, vamos mostrar como podemos obter o formato do gráfico das funções reais a partir do conhecimento das suas derivadas. Determinando as derivadas primeira e segunda de uma dada função  $f$ , seremos capazes de desenhar um esboço de seu gráfico. Para isto, será necessário o seguinte resultado, conhecido como *Teorema do Valor Médio*, cuja demonstração será apresentada na próxima seção.

**Teorema 4.1 (TVM).** *Se  $f$  é uma função derivável no intervalo fechado  $[a, b]$ , então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Em outras palavras, o TVM afirma que se a função for suave, existe um ponto  $c$  entre os pontos  $a$  e  $b$  tal que a reta tangente em  $(c, f(c))$  é paralela à reta secante passando por  $(a, f(a))$  e por  $(b, f(b))$ , como ilustra a Figura 4.1.

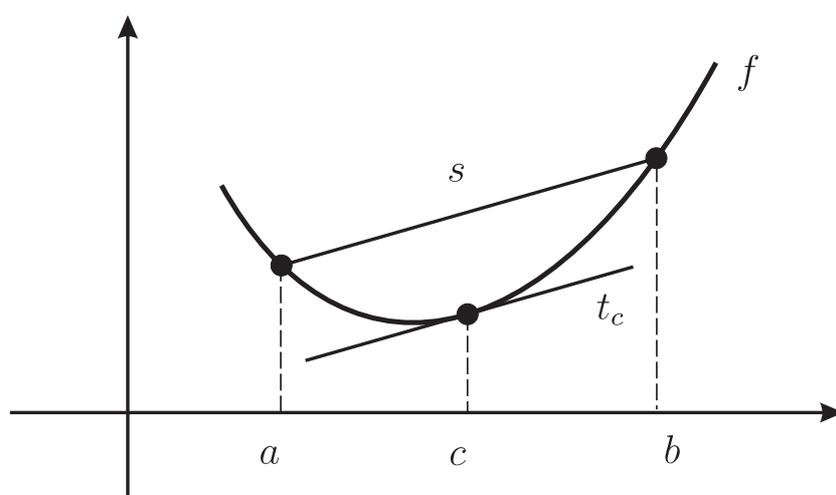


Figura 4.1. Teorema do Valor Médio.

Uma consequência imediata do TVM é a relação entre o sinal da derivada num dado intervalo e o crescimento ou decrescimento da função.

**Proposição 4.2.** *Seja  $f$  uma função derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

- (A) *se  $f' > 0$ , então  $f$  é crescente,*
- (B) *se  $f' = 0$ , então  $f$  é constante e*
- (C) *se  $f' < 0$ , então  $f$  é decrescente.*

*Demonstração.* (A) Se  $f' > 0$ , dados  $x, y \in (a, b)$ , com  $x < y$ , então  $f'(c) > 0$  para todo  $c \in (x, y)$ . Pelo TVM, temos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0,$$

o que mostra que  $f(y) > f(x)$ , uma vez que escolhemos  $y > x$ . Segue portanto que  $f$  é crescente, pois os pontos  $x, y \in (a, b)$  são arbitrários.

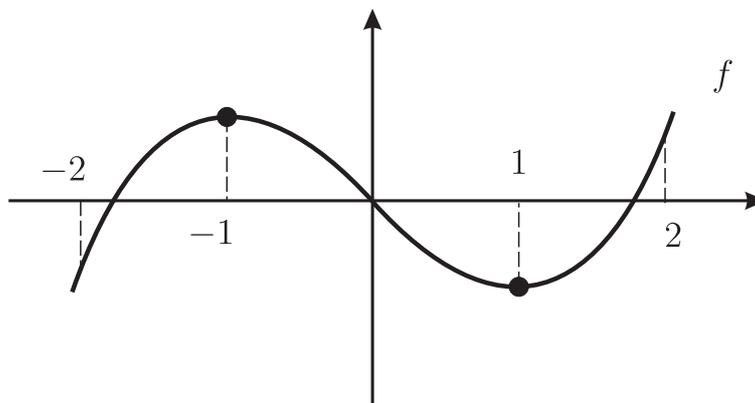
- (B) Se  $f' = 0$ , dados  $x, y \in (a, b)$ , com  $x \neq y$ , então  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (x, y)$ . Pelo TVM, temos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0,$$

o que mostra que  $f(y) = f(x)$ . Segue portanto que  $f$  é constante, pois os pontos  $x, y \in (a, b)$  são arbitrários.

- (C) A demonstração deste item é análoga a dos itens anteriores e é deixada como exercício. □

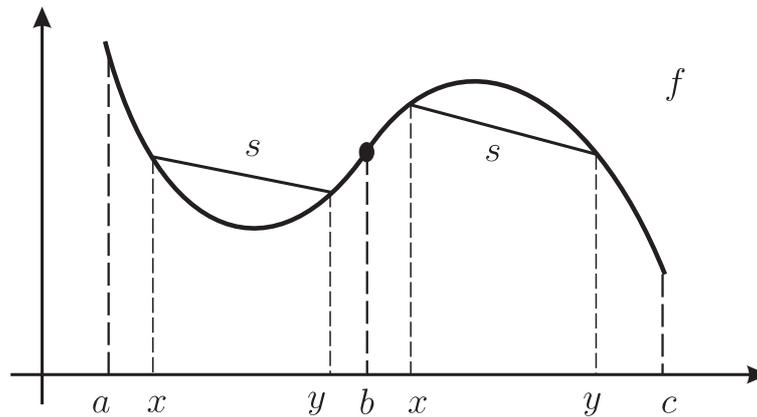
Vamos determinar os intervalos de crescimento e de decréscimo da função  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ . Como  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , temos que  $f'(x) > 0$ , caso  $x \in (-2, -1)$  ou  $x \in (1, 2)$ , e temos também que  $f'(x) < 0$  se  $x \in (-1, 1)$ , como mostra a Figura 4.2. Portanto  $f$  é crescente nos intervalos  $(-2, -1)$  e  $(1, 2)$  e é decrescente no intervalo  $(-1, 1)$ , como ilustrado pela Figura 4.2.



**Figura 4.2.** Crescimento e decréscimo da função  $f$ .

Outro aspecto importante para o esboço do gráfico de funções reais é determinar os intervalos onde a concavidade da função está para cima e os intervalos onde a concavidade está para baixo. Como vimos na Seção 3.3, uma função  $f$  possui *concavidade para cima num dado intervalo  $(a, b)$*  se, para todos  $x, y \in (a, b)$ , o gráfico de  $f$  no intervalo  $(x, y)$  se situa *todo abaixo* da reta secante  $s$  passando pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ . Por outro

lado, uma função  $f$  possui *concauidade para baixo num dado intervalo*  $(b, c)$  se, para todos  $x, y \in (b, c)$ , o gráfico de  $f$  no intervalo  $(x, y)$  se situa *todo acima* da reta secante  $s$  passando pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ , como ilustra a Figura 4.3.



**Figura 4.3.** Concauidade para cima e para baixo da função  $f$ .

O resultado seguinte relaciona o crescimento ou decrescimento da derivada com a concauidade da função e também é uma consequência do TVM.

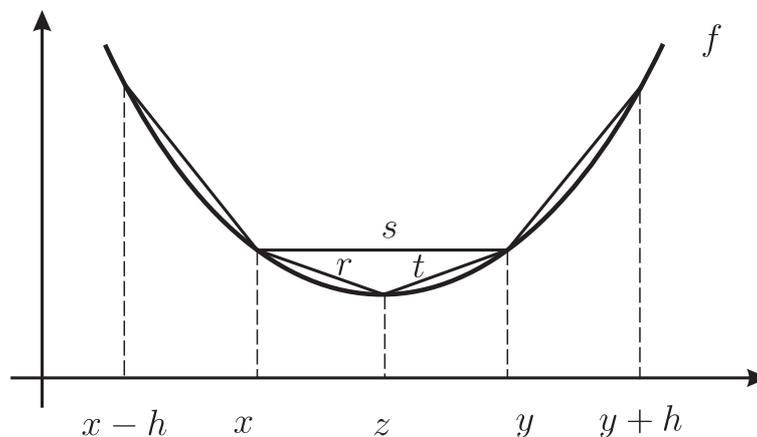
**Proposição 4.3.** *Seja  $f$  uma função derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

- (A)  $f'$  é crescente se e só se  $f$  possui concauidade para cima,
- (B)  $f'$  é constante se e só se  $f$  é uma reta e
- (C)  $f'$  é decrescente se e só se  $f$  possui concauidade para baixo.

*Demonstração.* (A) Se  $f$  possui concauidade para cima, sejam  $x, y \in (a, b)$ , com  $x < y$ . Denotamos por

$$N_x(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \text{e} \quad N_y(h) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$$

respectivamente os quocientes de Newton nos pontos  $x$  e  $y$  ilustrados pela Figura 4.4.



**Figura 4.4.** Se  $f$  possui concauidade para cima, então  $f'$  é crescente.

Se  $z$  é tal que  $x < z < y$  temos que

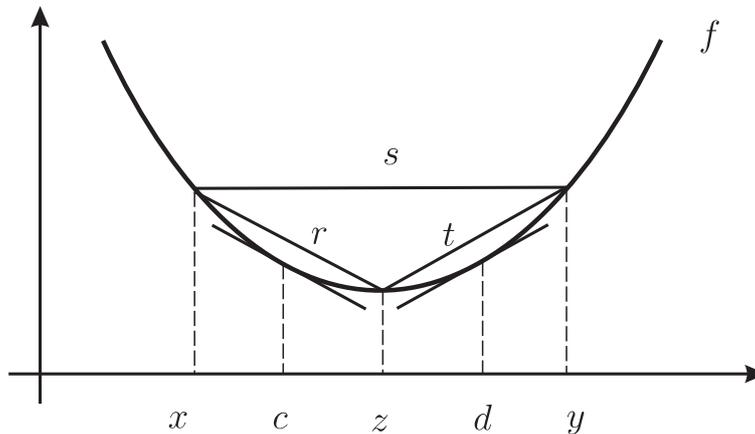
$$N_x(h) < m_r < m_t < N_y(h)$$

para todo  $h > 0$ , onde  $r$  e  $t$  são as retas secantes ilustradas pela Figura 4.4. De fato, para mostrarmos que  $m_r < m_t$ , basta notarmos que, como  $f$  possui concavidade para cima, temos que  $m_r < m_s < m_t$ , onde  $s$  é a reta secante apresentada na figura (4.4). As outras desigualdades são obtidas de maneira análoga. Portanto

$$f'(x) = \lim_{h \downarrow 0} N_x(h) \leq m_r < m_t \leq \lim_{h \downarrow 0} N_y(h) = f'(y)$$

o que mostra que  $f'$  é crescente.

Agora se  $f'$  é crescente, vamos mostrar que, dados  $x, y \in (a, b)$ , a reta secante  $s$  passando por  $(x, f(x))$  e por  $(y, f(y))$  se situa acima do gráfico de  $f$  entre estes dois pontos. Seja  $z \in (x, y)$  e denote por  $r$  e  $t$  as retas secantes ilustradas pela Figura 4.5. Pelo TVM, existe  $c \in (x, z)$  tal que  $f'(c) = m_r$  e também existe  $d \in (z, y)$  tal que  $f'(d) = m_t$ . Como  $c < d$  e  $f'$  é crescente, temos que  $f'(c) < f'(d)$ , o que implica que  $m_r < m_t$ . Portanto o ponto  $(z, f(z))$  se situa abaixo da reta secante  $s$ , mostrando que  $f$  possui concavidade para cima.



**Figura 4.5.** Se  $f'$  é crescente, então  $f$  possui concavidade para cima.

- (B) Claramente se  $f$  é uma reta, então  $f'$  é constante. Por outro lado, se  $f'$  é constante, então  $f'(x) = c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ . Definindo  $g(x) = f(x) - cx$ , temos que  $g'(x) = f'(x) - c = 0$ . Pela Proposição 4.2, temos que  $g$  é constante. Portanto  $g(x) = d$ , onde  $d \in \mathbb{R}$ , o que mostra que  $f(x) = cx + g(x) = cx + d$ .
- (C) A demonstração deste item é análoga à do item (A) e é deixada como exercício. □

Voltando ao exemplo da função  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ , vamos determinar os intervalos onde a concavidade está para cima e onde ela está para baixo. Como  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , temos que  $f'$  é crescente no intervalo  $(0, 2)$  e que  $f'$  é decrescente no intervalo  $(-2, 0)$ . Portanto  $f$  possui concavidade para cima no intervalo  $(0, 2)$  e concavidade para baixo no intervalo  $(-2, 0)$ , como ilustrado pela figura (4.2).

Uma consequência imediata das Proposições 4.2 e 4.3 é a relação entre o sinal da derivada segunda num dado intervalo e a concavidade da função.

**Corolário 4.4.** *Seja  $f$  uma função derivável duas vezes no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

(A) *se  $f'' > 0$ , então  $f$  possui concavidade para cima,*

(B) *se  $f'' = 0$ , então  $f$  é uma reta e*

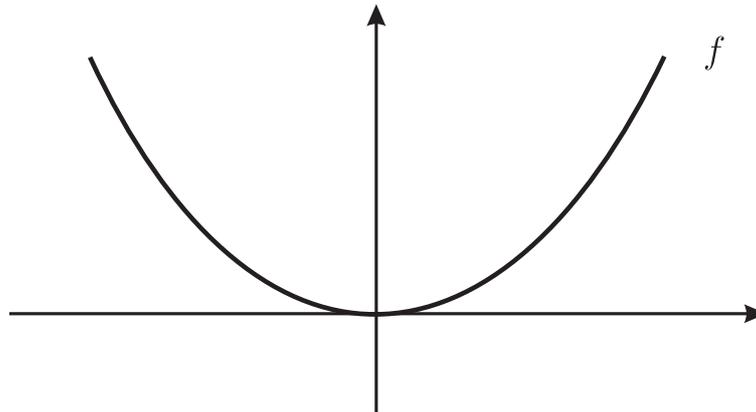
(C) *se  $f'' < 0$ , então  $f$  possui concavidade para baixo.*

*Demonstração.* (A) Se  $f'' > 0$ , pela Proposição 4.2, segue  $f'$  é crescente, pois temos que  $(f')' = f''$ . Pela Proposição 4.3, temos portanto que  $f$  possui concavidade para cima.

A demonstração dos itens (B) e (C) é análoga à do item (A) e é deixada como exercício.  $\square$

No exemplo da função  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ , temos que  $f''(x) = 6x$ . Temos então que  $f''(x) > 0$ , caso  $x \in (0, 2)$  e que  $f''(x) < 0$  se  $x \in (-2, 0)$ . Portanto concluímos novamente que  $f$  possui concavidade para cima no intervalo  $(0, 2)$  e concavidade para baixo no intervalo  $(-2, 0)$ , como ilustra a Figura 4.2..

Os pontos onde o gráfico da função  $f$  muda de concavidade são chamados de *pontos de inflexão de  $f$* . No exemplo da  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ , temos que  $x = 0$  é o único ponto de inflexão. Pelo Corolário 4.4, temos que os pontos de inflexão são os pontos onde a derivada segunda muda de sinal. Necessariamente a derivada segunda se anula nos pontos de inflexão, mas a recíproca não é sempre verdadeira, como mostra o exemplo seguinte. Se  $f(x) = x^4$ , temos que  $f''(x) = 12x^2$ . Temos que  $f''(0) = 0$ , mas  $x = 0$  não é um ponto de inflexão, uma vez que a  $f''(x)$  nunca muda de sinal. De fato,  $f$  possui concavidade para cima em toda reta  $\mathbb{R}$ , como ilustra a Figura 4.6.

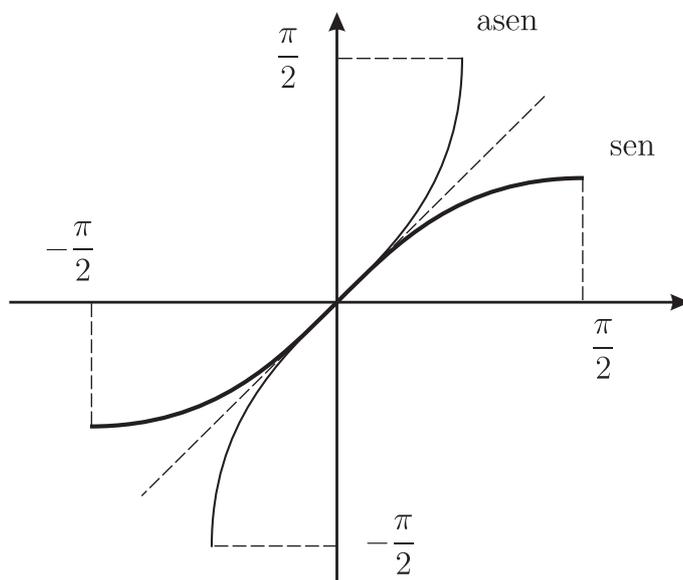


**Figura 4.6.** Derivada segunda se anular não significa que o ponto é de inflexão.

Vamos considerar o formato do gráfico da função seno no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Como  $\text{sen}' = \text{cos}$  e  $\text{sen}'' = -\text{sen}$ , temos que o formato do gráfico da função seno possui quatro intervalos com comportamentos qualitativamente distintos. O primeiro é o intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , onde a função é crescente com concavidade para baixo, uma vez que  $\text{sen}' > 0$  e  $\text{sen}'' < 0$ . O segundo intervalo é  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , onde a função passa a ser decrescente e a concavidade continua para baixo, uma vez que a derivada primeira mudou de sinal,  $\text{sen}' < 0$ , enquanto a derivada segunda manteve o mesmo sinal,  $\text{sen}'' < 0$ . No terceiro intervalo,  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ , é o sinal da derivada

segunda que muda,  $\text{sen}'' > 0$ , enquanto o sinal da derivada primeira se mantém,  $\text{sen}' < 0$ . Neste intervalo a função continua decrescendo, mas agora com concavidade para cima. No quarto e último intervalo,  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , é a derivada primeira que muda de sinal,  $\text{sen}' > 0$ , enquanto o sinal da derivada segunda se mantém,  $\text{sen}'' > 0$ . Neste intervalo a função passa a crescer, mantendo a concavidade para cima. É importante notar que a mudança de concavidade coincidem com as mudanças de sinal da função pelo fato de que  $\text{sen}'' = -\text{sen}$ . Portanto os pontos de inflexão coincidem com as raízes da função.

Vamos agora determinar o formato do gráfico da função seno no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e posteriormente o gráfico de sua inversa, a função arco-seno. Temos que  $\text{sen}$  é crescente em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , uma vez que  $\text{sen}' = \text{cos} > 0$  neste intervalo. Além disso, temos que  $\text{sen}$  possui concavidade para cima em  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , pois  $\text{sen}'' = -\text{sen} > 0$  neste intervalo, e possui concavidade para baixo em  $(0, \frac{\pi}{2})$ , pois  $\text{sen}'' = -\text{sen} < 0$  neste intervalo. O esboço do gráfico da função  $\text{sen}$  no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  é apresentado na Figura 4.7 com linha mais grossa, onde também utilizamos o fato de que  $\text{sen}(0) = 0$  e que  $\text{sen}'(0) = 1$ .



**Figura 4.7.** Função seno e sua inversa arcoseno.

No caso da função  $\text{asen} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que

$$\text{asen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \text{asen}''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Logo  $\text{asen}$  é crescente em  $(-1, 1)$ , uma vez que  $\text{asen}' > 0$  neste intervalo. Além disso, temos que  $\text{asen}$  possui concavidade para baixo em  $(-1, 0)$ , pois  $\text{asen}'' < 0$  neste intervalo, e possui concavidade para cima em  $(0, 1)$ , pois  $\text{asen}'' > 0$  neste intervalo. O esboço do gráfico da função  $\text{asen}$  é apresentado na Figura 4.7 com linha mais fina, onde também utilizamos o fato de que  $\text{asen}(0) = 0$  e que  $\text{asen}'(0) = 1$ . Os formatos dos gráficos das funções  $\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\text{acos} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  são obtidos de maneira similar, o que é deixado como exercício.

Vamos encerrar esta seção mostrando como a Proposição 4.2 pode ser usada para mostrar que de fato as soluções encontradas para descrever o movimento de sistemas mecânicos são realmente as únicas possíveis.

**Corolário 4.5.** *Temos que  $f' = g'$  se e só se  $f = g + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Se  $f = g + c$ , então claramente  $f' = g'$ , pois a derivada da função constante é nula. Por outro lado, se  $f' = g'$ , definimos  $h = f - g$ . Temos que  $h' = f' - g' = 0$ , o que mostra que  $h$  é constante, pela Proposição 4.2. Portanto  $h = c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ , mostrando que  $f = g + c$ .  $\square$

Vimos na Seção 3.3, que a velocidade horizontal  $v_1 = v$  de uma bola  $B$  arremessada na presença da resistência do ar satisfaz a seguinte equação

$$v'(t) = -bv(t) \quad (4.1)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $b = \frac{c}{m}$  é o coeficiente de atrito por unidade de massa da bola  $B$ . Utilizando a regra da cadeia, obtemos que

$$(\log(v(t)))' = \frac{v'(t)}{v(t)} \quad \text{e} \quad (-bt)' = -b.$$

Pela equação (4.1), temos então que  $(\log(v(t)))' = (-bt)'$ , o que mostra que

$$\log(v(t)) = -bt + c,$$

devido ao Corolário 4.5. Logo temos que

$$v(t) = e^{-bt+c} = e^c e^{-bt}.$$

Para determinarmos  $e^c$ , basta notarmos que

$$e^c = v(0) = v_0.$$

Isto mostra que a velocidade horizontal tem de ter necessariamente a expressão

$$v(t) = v_0 e^{-dt},$$

já apresentada na Seção 3.3.

Uma outra aplicação do Corolário 4.5 é a obtenção da Lei da Conservação da Energia para o sistema massa-mola, que satisfaz a equação

$$ms'' = -ks. \quad (4.2)$$

Pela regra da cadeia ou pela regra do produto, temos que

$$\left(m \frac{v^2}{2}\right)' = mvv' \quad \text{e} \quad \left(-k \frac{s^2}{2}\right)' = -kss'.$$

Utilizando a equação 4.2 e o fato de que  $v = s'$  e de que  $v' = s''$ , obtemos que

$$\left(m \frac{v^2}{2}\right)' = \left(-k \frac{s^2}{2}\right)'.$$

Pelo Corolário 4.5, segue que

$$m \frac{v^2}{2} = -k \frac{s^2}{2} + E,$$

onde  $E \in \mathbb{R}$  é uma constante denominada *energia do sistema massa-mola*. Portanto temos que

$$m \frac{v^2}{2} + k \frac{s^2}{2} = E,$$

que é de fato a Lei da Conservação da Energia para o sistema massa-mola. Através da dessa lei, podemos mostrar que existe uma única solução para a equação (refeqmassamolaconservacao), com as condições iniciais  $s(0) = s_0$  e  $s'(0) = v_0$ . De fato, dadas duas soluções  $s_1$  e  $s_2$  da equação (refeqmassamolaconservacao) com essas mesmas condições iniciais, definimos  $s = s_1 - s_2$ . Pelo Corolário 3.11, temos que  $s'' = s_1'' - s_2''$ , o que mostra que  $s$  também satisfaz à equação (refeqmassamolaconservacao). Além disso,  $s(0) = 0$  e  $v(0) = s'(0) = 0$ , uma vez que  $s_1$  e  $s_2$  possuem as mesmas condições iniciais. Temos então que

$$E = m \frac{v(0)^2}{2} + k \frac{s(0)^2}{2} = 0.$$

Pela Lei da Conservação da Energia, segue que

$$m \frac{v^2}{2} + k \frac{s^2}{2} = 0,$$

mostrando que  $s = 0$  e, portanto, que  $s_1 = s_2$ .

### 4.1.1 Exercícios

- 1) Complete a demonstração da Proposição 4.2.
- 2) Complete a demonstração da Proposição 4.3.
- 3) Complete a demonstração do Corolário 4.4.
- 4) Determine os esboços dos gráficos da função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e de sua função inversa  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 4.2 Teorema do Valor Médio

Nesta seção, será demonstrado o Teorema do Valor Médio. Isto será feito após desenvolvermos um pouco a denominada *Teoria da Otimização*. No processo de otimização, buscamos determinar onde ocorrem os valores extremos de uma determinada função. Por exemplo, se estamos preocupados com o desenvolvimento sustentável do ambiente, muitas vezes, queremos maximizar a eficiência energética de um determinado processo e, em outras oportunidades, desejamos minimizar a quantidade de recursos naturais utilizado na produção de um determinado produto.

Na produção de uma lata cilíndrica metálica que deve conter 5 litros de tinta, gostaríamos de saber qual os valores do raio e da altura que minimizam a quantidade de material a ser utilizado na sua fabricação. Como a quantidade de material é proporcional à área, devemos determinar quais as dimensões de uma lata cilíndrica de 5 litros que minimizam sua área. Temos que o volume e área da lata são dados por

$$V = \pi r^2 h = 5 \quad \text{e} \quad A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

onde consideramos, para o cálculo da área da lata, a área lateral e as áreas da tampa e do fundo. Pela equação do volume, temos que

$$h = \frac{5}{\pi r^2}$$

e substituindo esta expressão na equação da área, obtemos esta última como uma função apenas do raio

$$A = A(r) = \frac{10}{r} + 2\pi r^2.$$

Desejamos então obter o raio  $r_0$  tal que  $A(r_0)$  é o mínimo valor da função  $A(r)$ . A área  $A(r_0)$  é denominada um valor extremo da função  $A(r)$  e o raio  $r_0$  é denominado um ponto de extremo.

Dada uma função  $f$ , denominamos *pontos de extremo de  $f$*  os pontos do domínio onde a função atinge um máximo ou um mínimo, ou seja,  $c \in \text{dom}(f)$  tal que

$$f(c) = \text{máx } f(x) \quad \text{ou} \quad f(c) = \text{mín } f(x)$$

e, em ambos os casos,  $f(c)$  é denominado *valor extremo de  $f$* . No primeiro caso,  $c$  é denominado *ponto de máximo de  $f$*  e  $f(c)$  é denominado *valor máximo de  $f$* . Já no segundo caso,  $c$  é denominado *ponto de mínimo de  $f$*  e  $f(c)$  é denominado *valor mínimo de  $f$* .

A Proposição 4.2 fornece condições sobre o sinal da derivada para que um dado ponto seja de máximo ou de mínimo.

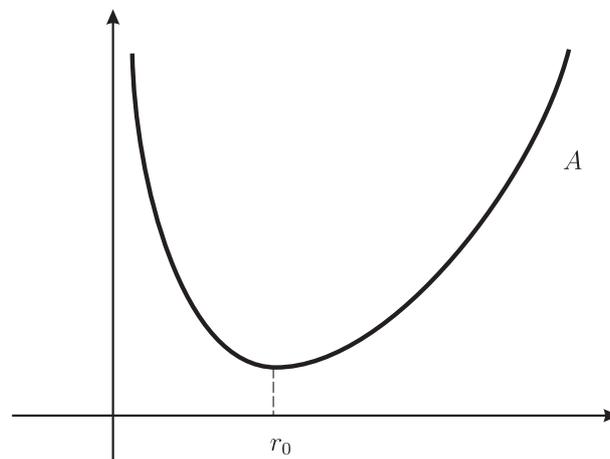
**Corolário 4.6.** *Seja  $f$  uma função derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

(A) *se  $f' > 0$  em  $(a, c)$  e  $f' < 0$  em  $(c, b)$ , então  $c$  é o único ponto de máximo e*

(B) *se  $f' < 0$  em  $(a, c)$  e  $f' > 0$  em  $(c, b)$ , então  $c$  é o único ponto de mínimo.*

*Demonstração.* (A) Se  $f' \geq 0$  em  $(a, c)$  e  $f' \leq 0$  em  $(c, b)$ , pela Proposição 4.2, temos que  $f$  é crescente em  $(a, c)$  e decrescente em  $(c, b)$ , o que mostra que  $c$  é de fato ponto de máximo.

(B) A demonstração deste item é análoga a do item anterior e é deixada como exercício. □



**Figura 4.8.** Área da lata cilíndrica em função do raio.

Aplicando o Corolário 4.6, obtemos que

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{2\pi}}$$

é o único ponto de mínimo de  $A(r)$ , pois como

$$A'(r) = \frac{-10}{r^2} + 4\pi r = \frac{2}{r^2}(2\pi r^3 - 5)$$

temos que  $A' < 0$  em  $(0, r_0)$  e  $A' > 0$  em  $(r_0, \infty)$ , como ilustra a Figura 4.8.

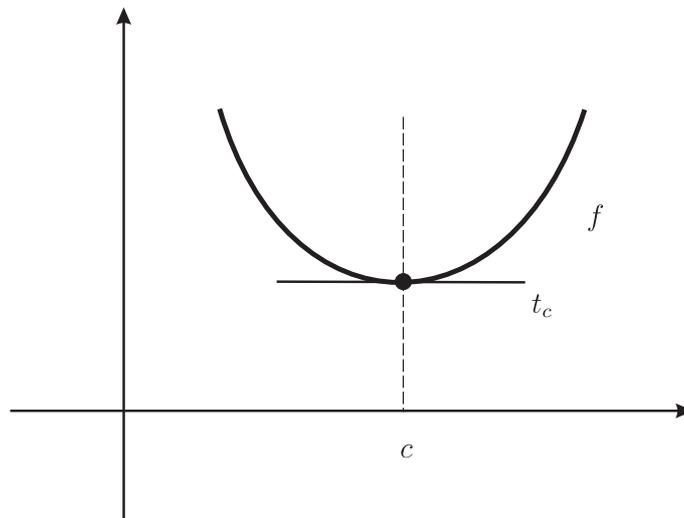
Agora consideramos o denominado *teste da derivada segunda*, que relaciona o sinal da derivada segunda aos pontos de extremo local.

**Corolário 4.7.** *Seja  $f$  uma função cuja derivada segunda  $f''$  é contínua num intervalo aberto contendo  $c \in \mathbb{R}$ , um ponto crítico de  $f$ . Temos então que*

(A) *se  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$  e*

(B) *se  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é ponto de máximo local  $f$ .*

*Demonstração.* (A) Como  $f''$  é contínua e  $f''(c) > 0$ , temos que  $f'' > 0$  num intervalo aberto contendo  $c$ . Pela Proposição 4.3, temos que a concavidade da  $f$  é voltada para cima neste intervalo. Como  $c$  é ponto crítico de  $f$ , temos que  $f'(c) = 0$ , o que mostra que  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$ , como ilustrado pela Figura 4.9. Outra maneira de demonstrar é notar que, como  $(f')' = f''$ , pela Proposição 4.2, temos que  $f'$  é crescente neste intervalo. Como  $f'(c) = 0$ , temos que  $f'(x) < 0$ , quando  $x < c$ , e também que  $f'(x) > 0$ , quando  $x > c$ . Pelo Corolário 4.6, segue que  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$ .



**Figura 4.9.** Teste da derivada segunda.

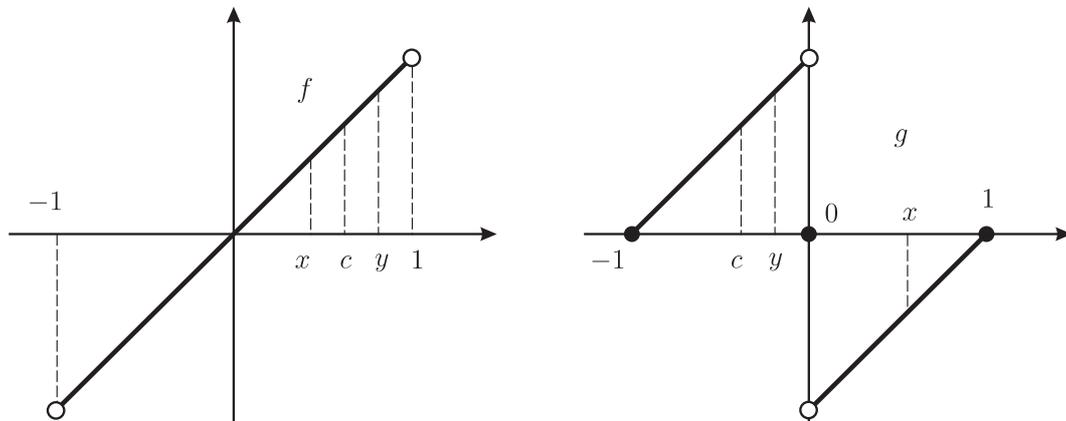
(B) A demonstração deste item é análoga a do item anterior e é deixada como exercício. □

Nem todas as funções possuem pontos de extremo, como ilustram os seguintes exemplos. Primeiro considere a função  $f(x) = x$ , onde  $\text{dom}(f) = (-1, 1)$ , como ilustrado pela Figura 4.10. Existe algum  $c \in (-1, 1)$  que seja ponto de extremo de  $f$ ? A resposta é negativa,

pois existem  $x, y \in (-1, 1)$  tais que  $x < c < y$  e, portanto, temos que  $f(x) < f(c) < f(y)$ , mostrando que  $f(c)$  não é nem valor máximo nem valor mínimo. Consideremos agora a função  $g$ , ilustrada pela Figura 4.10 e definida por partes

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ x - 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Novamente podemos perguntar se existe algum  $c \in \text{dom}(g) = [-1, 1]$  que seja ponto de extremo de  $g$ ? E novamente a resposta é negativa. Por exemplo, se  $c \in [-1, 0)$ , existem  $x, y \in [-1, 1]$  tais que  $c < y < 0 < x$  e, portanto, temos que  $f(x) < f(c) < f(y)$ , mostrando que  $f(c)$  não é nem valor máximo nem valor mínimo. Analogamente podemos mostrar que se  $c \in (0, 1]$ , então  $f(c)$  também não é nem valor máximo nem valor mínimo. Como  $c = 0$  claramente não é ponto de extremo, concluímos que estes não existem no caso da função  $g$ .



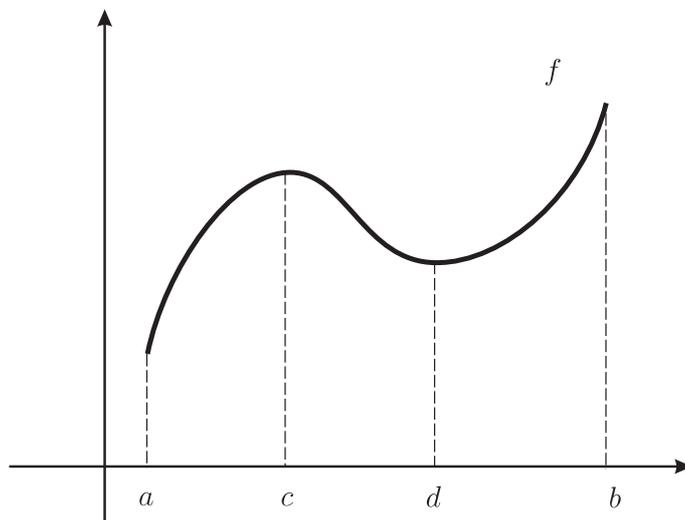
**Figura 4.10.** Funções  $f$  e  $g$  não possuem pontos de extremo.

Observamos que a função  $f$  apresentada como exemplo, apesar de contínua em todos os pontos do seu domínio, está definida num intervalo aberto. Por outro lado, a função  $g$  apresentada acima está definida num intervalo fechado mas não é contínua em todos os pontos do seu domínio. O resultado seguinte, conhecido como *Teorema de Weierstrass* e cuja demonstração está fora do escopo destas notas, afirma que é somente nestes dois casos que os pontos de extremo podem não existir.

**Teorema 4.8.** *Seja  $f$  uma função contínua definida num intervalo fechado. Então existem pontos de máximo e de mínimo de  $f$ .*

Existe um outro conceito de pontos de extremo, denominados *pontos de extremo locais*. Um ponto  $c \in \text{dom}(f)$  é um *ponto de máximo local de  $f$*  se existe um intervalo aberto tal que  $c$  é um ponto de máximo de  $f$  restrita a este intervalo aberto. Da mesma forma,  $d \in \text{dom}(f)$  é um *ponto de mínimo local de  $f$*  se existe um intervalo aberto tal que  $d$  é um ponto de mínimo de  $f$  restrita a este intervalo aberto. Se o domínio de  $f$  é um intervalo fechado, temos que todo ponto de extremo de  $f$  pertencente ao intervalo aberto é também um ponto de extremo local de  $f$ . Porém, nem todo ponto de extremo local de  $f$  é também um ponto de extremo, como mostra a Figura 4.11.

O resultado seguinte mostra que existe uma relação entre pontos de extremo local e a derivada da função se anular. Um ponto onde a derivada de  $f$  se anula é denominado *ponto crítico de  $f$* .



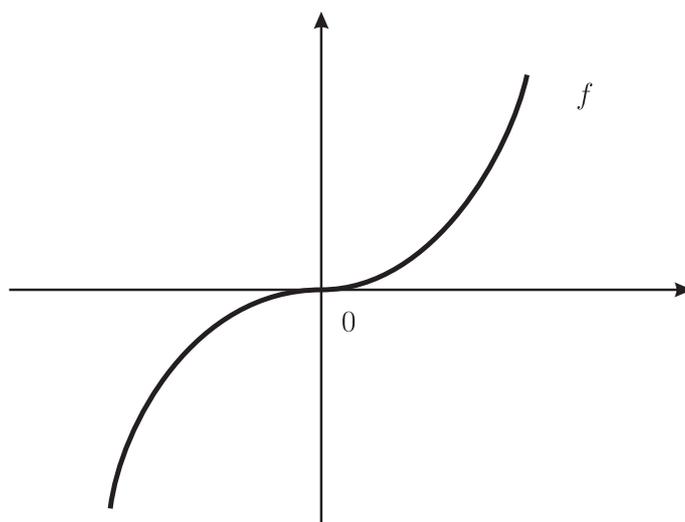
**Figura 4.11.** Extremos locais que não são extremos.

**Proposição 4.9.** *Se  $c$  é ponto de extremo local onde  $f$  é derivável, então  $c$  é ponto crítico de  $f$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que  $c$  é ponto de máximo local, sendo que a demonstração do caso em que  $c$  é ponto de mínimo é análoga e deixada como exercício. Como  $c$  é ponto de máximo local, temos que  $f(c) - f(x) \geq 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo ao ponto  $c$ . Logo temos que

$$0 \leq \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c \uparrow) = f'(c) = f'(c \downarrow) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pois no primeiro limite  $x - c > 0$  e no segundo limite  $x - c < 0$ . Portanto segue que  $f'(c) = 0$ , ou seja, que  $c$  é ponto crítico de  $f$ .  $\square$

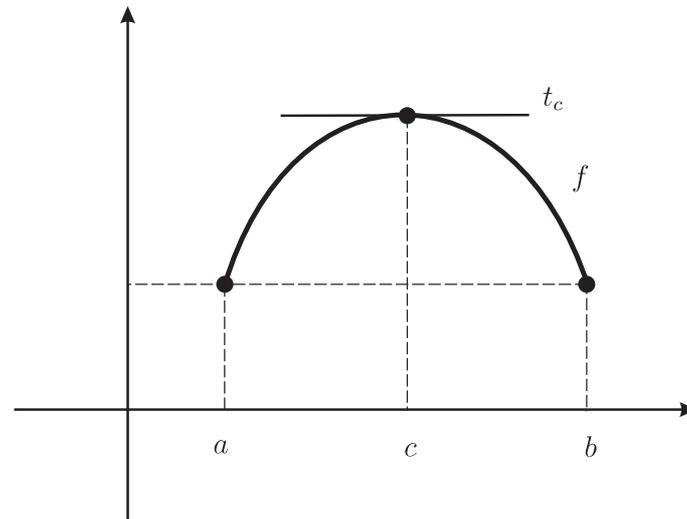


**Figura 4.12.** Origem é um ponto de sela.

No caso de funções deriváveis, a Proposição 4.9 mostra que todo ponto de extremo local é de fato um ponto crítico. Mas a recíproca não é verdadeira, como ilustra o seguinte exemplo. Seja  $f(x) = x^3$ , onde  $x \in [-1, 1]$ . Temos que  $x = 0$  é ponto crítico de  $f$ , pois  $f'(x) = 3x^2$ , mas claramente ele não é um ponto de extremo local de  $f$ , como mostra a Figura 4.12. O

ponto  $x = 0$  é denominado *ponto de sela* de  $f$ , pois é um ponto crítico de  $f$  que não é ponto de extremo local de  $f$ .

Vamos agora demonstrar o resultado decisivo na demonstração do TVM, conhecido como *Teorema de Rollê*, que pode ser considerado como um caso particular do TVM, quando a reta secante é horizontal, como ilustrado pela Figura 4.13.



**Figura 4.13.** Teorema de Rollê.

**Teorema 4.10.** *Se  $f$  uma função derivável no intervalo fechado  $[a, b]$  e também  $f(a) = f(b)$ , então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Weierstrass, existem pontos de máximo e de mínimo de  $f$  em  $[a, b]$ . Se  $f$  é constante, temos que  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Caso contrário, existe  $c \in (a, b)$  que é ponto de extremo de  $f$ , ou  $c$  é um ponto de máximo ou é um ponto de mínimo. Logo  $c$  também é um ponto de extremo local, o que mostra que  $f'(c) = 0$ , pela Proposição 4.9.  $\square$

Demonstramos a seguir uma versão mais geral do TVM, denominada *Teorema do Valor Médio de Cauchy*.

**Teorema 4.11.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis no intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $g' \neq 0$ , então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

*Demonstração.* Considere a função

$$h(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) (g(x) - g(a)),$$

definida para  $x \in [a, b]$ . Temos que  $h$  é derivável no intervalo fechado  $[a, b]$  e também que  $h(a) = f(a) = h(b)$ . Pelo Teorema de Rollê, segue que existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ . Por outro lado,

$$h'(x) = f'(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(x),$$

o que mostra que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

O Teorema do Valor Médio é então uma consequência imediata do Teorema 4.11, bastando escolher  $g(x) = x$ . Uma outra consequência relevante do TVM de Cauchy é a denominada *Regra de L'Hôpital* para o cálculo de limites de quociente onde o numerador e o denominador tendem ambos para zero. Por exemplo, se quisermos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2},$$

não podemos usar a regra do quociente, pois temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Essa situação é denominada *indeterminação do tipo*  $\frac{0}{0}$ .

**Proposição 4.12.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis num intervalo aberto que contenha o ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Se  $g(x), g'(x) \neq 0$  para todo  $x \neq a$  e também  $f(a) = 0 = g(a)$ , então*

$$\lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \square a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

caso o segundo limite exista, onde  $\square$  pode ser substituído, de maneira uniforme, por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ .

*Demonstração.* Vamos fazer a demonstração no caso em que  $\square = \downarrow$ , sendo que os outros casos são similares e deixados como exercício. Pelo TVM de Cauchy, para cada  $x > a$ , existe  $c(x)$  com  $a < c(x) < x$ , tal que

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (4.3)$$

onde utilizamos o fato de que  $f(a) = 0 = g(a)$ . Pelo Teorema do Sanduíche, temos que

$$\lim_{x \downarrow a} c(x) = a.$$

Portanto

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

onde utilizamos também a equação (4.3). □

Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x},$$

onde novamente surgiu uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Podemos aplicar mais uma vez a regra de L'Hôpital para obter que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vamos concluir esta seção com uma aplicação interessante da regra de L'Hôpital. Uma bola é arremessada verticalmente diversas vezes dentro de uma caixa hermeticamente fechada, onde é possível controlar a quantidade de ar presente no seu interior. Em cada arremesso, a velocidade inicial  $v_0$  é sempre a mesma, mas diminui-se um pouco a quantidade de ar no interior da caixa. A progressiva diminuição da quantidade do ar provoca uma diminuição do coeficiente de atrito com o ar  $c$  e também uma diminuição do coeficiente  $b = c/m$ , uma vez que a massa da bola permanece inalterada. Além disso, em cada arremesso, registra-se a posição  $s_b(t)$  da bola sempre num mesmo instante de tempo  $t$  pré-fixado. A medida que  $b$  se aproxima de 0, o que ocorre a posição  $s_b(t)$ ? A solução do problema balístico com atrito se aproxima da solução ideal, onde a resistência do ar é desconsiderada? Para um dado coeficiente  $b$ , a posição da bola no instante de tempo  $t$  é dada por

$$s_b(t) = s_0 - \frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right).$$

Fixando o instante  $t$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} s_b(t) &= \lim_{b \rightarrow 0} \left[ s_0 - \frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \left[ s_0 + v_0 \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right) + g \left(\frac{bt + 1 - e^{-tb}}{b^2}\right) \right] \\ &= s_0 + v_0 \left(\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-tb}}{b}\right) + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{bt + 1 - e^{-tb}}{b^2}\right) \end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital e lembrando que o instante  $t$  está fixo e que é o coeficiente  $b$  quem está variando, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} s_b(t) &= s_0 + v_0 \left(\lim_{b \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-tb})'}{(b)'}\right) + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{(bt + 1 - e^{-tb})'}{(b^2)'}\right) \\ &= s_0 + v_0 \left(\lim_{b \rightarrow 0} \frac{te^{-tb}}{1}\right) + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{t + te^{-tb}}{2b}\right) \\ &= s_0 + v_0t + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{t + te^{-tb}}{2b}\right) \end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra de L'Hôpital, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} s_b(t) &= s_0 + v_0t + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{(t + te^{-tb})'}{(2b)'}\right) \\ &= s_0 + v_0t + g \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{-t^2e^{-tb}}{2}\right) \\ &= s_0 + v_0t - g\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Concluimos então que a medida que  $b$  se aproxima de 0, a solução do problema balístico com atrito se aproxima progressivamente da solução ideal, onde a resistência do ar é desconsiderada.

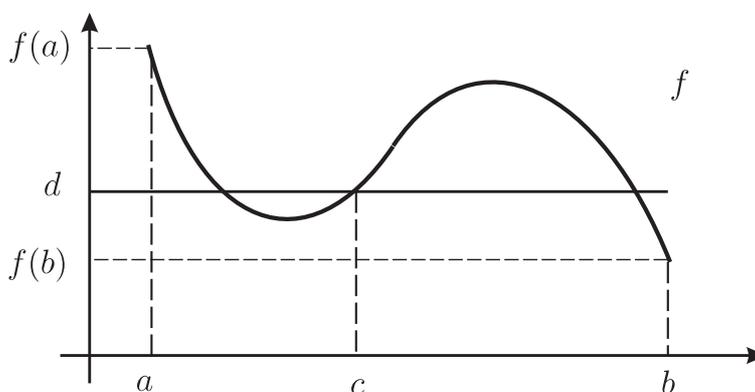
### 4.2.1 Exercícios

- 1) Complete a demonstração do Corolário 4.6.

- 2) Complete a demonstração da Proposição 4.9.
- 3) Complete a demonstração da Proposição 4.12.
- 4) Complete a demonstração do Teorema 4.13.
- 5) Complete a demonstração do Corolário 4.7.

### 4.3 Teorema do Valor Intermediário

Uma outra consequência do Teorema de Weierstrass e da Proposição 4.9 é que as funções derivadas sempre satisfazem à denominada *Propriedade do Valor Intermediário*. Uma função  $f$  satisfaz a PVI se dados  $a$  e  $b$  pontos no seu domínio e um valor intermediário  $d \in \mathbb{R}$  entre as imagens  $f(a)$  e  $f(b)$ , existe um ponto  $c$  entre os pontos  $a$  e  $b$  tais que  $d = f(c)$ . Geometricamente isto significa que toda reta horizontal entre as imagens  $f(a)$  e  $f(b)$  intercepta  $f$  entre os pontos  $a$  e  $b$ , como ilustrado pela Figura 4.14.



**Figura 4.14.** Propriedade do Valor Intermediário.

Uma observação imediata é que se  $f$  satisfaz a propriedade do valor intermediário, então sua imagem é necessariamente um intervalo, pois todos valores  $d$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$  fazem parte da imagem, ou seja, são da forma  $f(c)$ .

Este resultado, conhecido como *Teorema de Darboux*, é demonstrado a seguir.

**Teorema 4.13.** *Toda função derivada satisfaz a PVI.*

*Demonstração.* Seja  $[a, b]$  um intervalo contido no domínio de uma dada função derivada  $f'$ . Vamos supor que  $f'(a) < d < f'(b)$ , sendo análoga a demonstração do caso em que  $f'(b) < d < f'(a)$  e deixada como exercício. Consideramos então a função  $g(x) = f(x) - dx$ . Temos que a função derivada  $g'$  está definida no intervalo  $[a, b]$  e também que

$$g'(a) = f'(a) - d < 0 \quad \text{e} \quad g'(b) = f'(b) - d > 0.$$

Pelo Teorema de Weierstrass, existe um ponto de mínimo de  $g$  em  $[a, b]$ . Vamos mostrar que nem o ponto  $a$  nem o ponto  $b$  podem ser pontos de mínimo da função  $g$  em  $[a, b]$ . De fato, se  $a$  fosse ponto de mínimo, teríamos que  $g(x) \geq g(a)$ , para todo  $x \in [a, b]$ , e então

$$g'(a) = \lim_{x \downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0.$$

O argumento é similar no caso do ponto  $b$  e também é deixado como exercício. Logo existe  $c \in (a, b)$  que é ponto de mínimo de  $g$  e, portanto, é ponto de extremo local. Pela Proposição 4.9, temos que

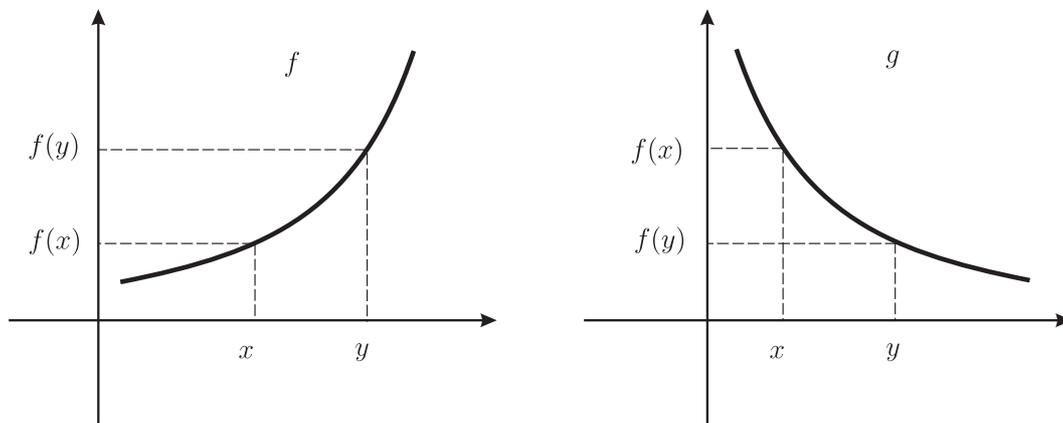
$$f'(c) - d = g'(c) = 0,$$

o que mostra que  $f'(c) = d$ . □

No Capítulo 5 veremos que toda função contínua é a função derivada de alguma função. Portanto obtemos o seguinte resultado, conhecido como *Teorema do Valor Intermediário* e que é de fundamental importância no Cálculo.

**Teorema 4.14 (TVI).** *Se  $f$  é contínua e seu domínio é um intervalo, então ela satisfaz a propriedade do valor intermediário. Portanto sua imagem também é um intervalo.*

Uma função  $f$  é denominada *monótona* se ela é *crescente* ou ela é *decrecente*, como ilustrado pela Figura 4.15.

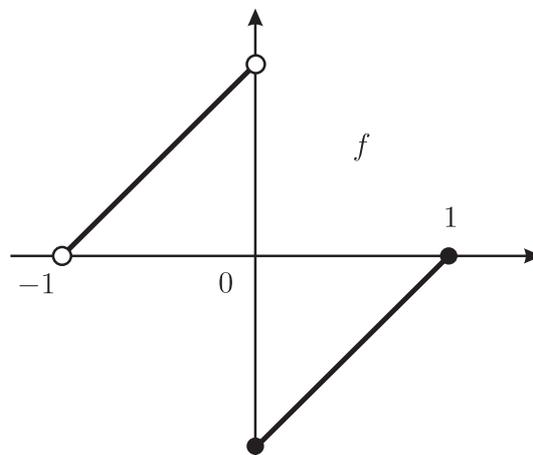


**Figura 4.15.** Função  $f$  é crescente e função  $g$  é decrescente.

Se  $f$  é monótona, então ela é uma injeção, pois claramente satisfaz o teste da reta horizontal. Entretanto existem bijeções que não são sequer monótonas, como mostra o seguinte exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ x - 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ilustrado pela Figura 4.16.

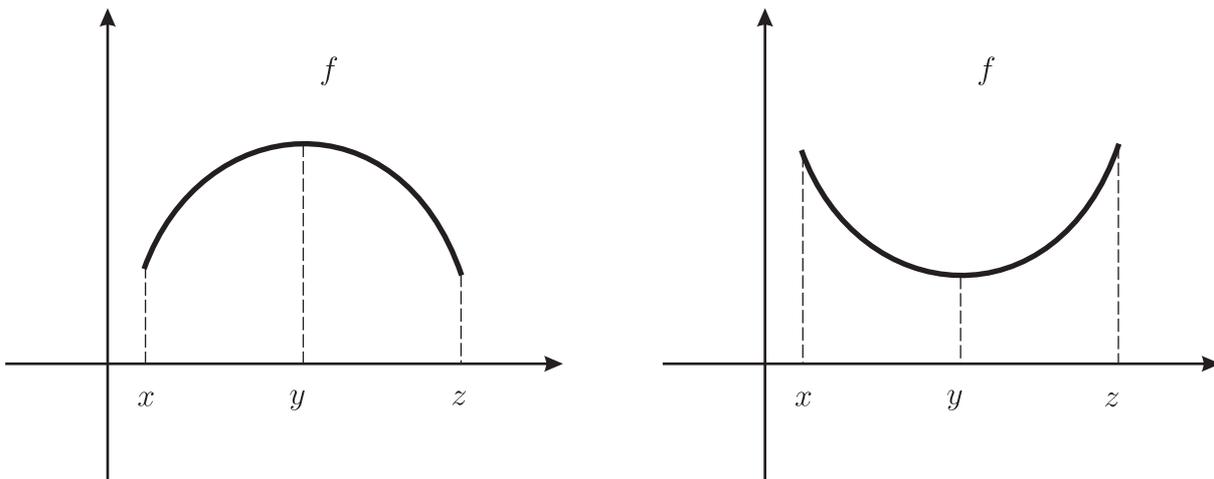


**Figura 4.16.** Uma injeção que não é monótona.

Quando  $f$  é contínua e seu domínio é um intervalo, devido ao Teorema do Valor Intermediário, este tipo de situação não pode ocorrer.

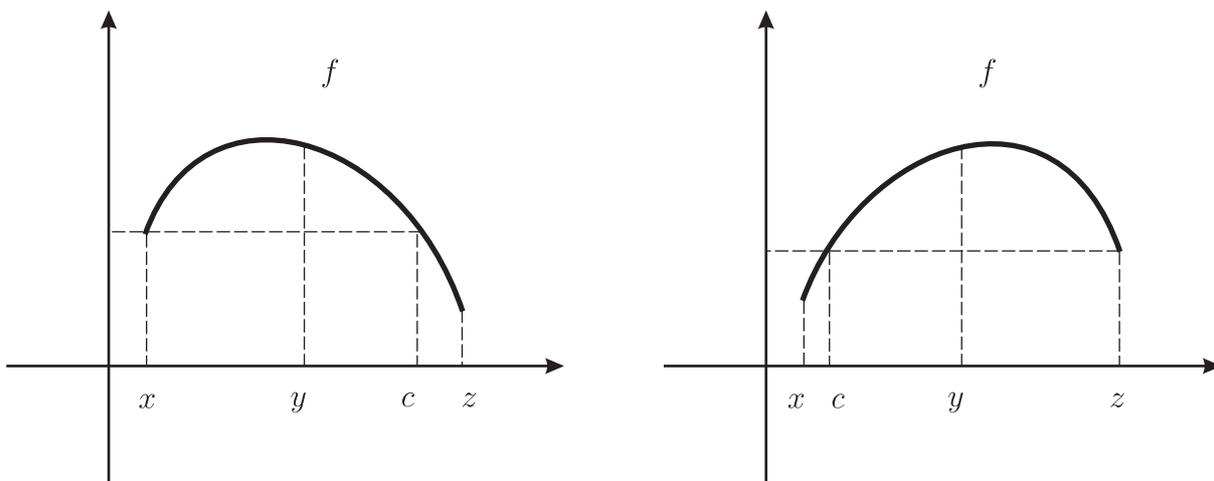
**Proposição 4.15.** *Seja  $f$  uma função contínua cujo o domínio é um intervalo. Então  $f$  é uma injeção se e só se  $f$  é monótona.*

*Demonstração.* Já observamos acima que se  $f$  é monótona, então  $f$  é uma injeção. Resta portanto mostrarmos que se  $f$  é uma injeção, então  $f$  é monótona. Se  $f$  fosse uma injeção, mas não fosse monótona, então existiriam  $x < y < z$ , pontos no domínio de  $f$ , satisfazendo a uma das seguintes possibilidades: (1)  $f$  cresce de  $x$  para  $y$  mas decresce de  $y$  para  $z$  ou (2)  $f$  decresce de  $x$  para  $y$  mas cresce de  $y$  para  $z$ , como ilustra a Figura 4.17.



**Figura 4.17.** Possibilidades (1) e (2).

Vamos analisar possibilidade 1). Neste caso, temos que  $f(x) < f(y)$  e também que  $f(y) > f(z)$  e então teríamos mais duas possibilidades: (A)  $f(z) < f(x)$  ou (B)  $f(z) > f(x)$ , como mostra a Figura 4.18.



**Figura 4.18.** Possibilidades (A) e (B).

No caso (A), teríamos que  $f(z) < f(x) < f(y)$ . Pelo TVI, existiria  $c \in \text{dom}(f)$ , onde  $y < c < z$  e tal que  $f(c) = f(x)$ . Mas isto seria uma contradição com o fato de supormos que  $f$  é uma injeção. No caso (B), teríamos que  $f(y) > f(z) > f(x)$ . Pelo TVI, existiria  $c \in \text{dom}(f)$ , onde  $x < c < y$  e tal que  $f(c) = f(z)$ . Novamente isto seria uma contradição com o fato de supormos que  $f$  é uma injeção. Analisando a possibilidade (2) de maneira

análoga, o que é deixado como exercício, obteríamos mais uma vez uma contradição. Portanto concluímos que se  $f$  é uma injeção, então  $f$  só pode ser monótona.  $\square$

Vamos encerrar esta seção demonstrando que se uma injeção é contínua, sua inversa também é contínua. Para isso precisamos de dois resultados preliminares.

**Proposição 4.16.** *Seja  $f$  é uma função monótona, então sua inversa também é monótona.*

*Demonstração.* De fato, vamos mostrar que se  $f$  é crescente, então a inversa  $f^{-1}$  também é crescente. O caso em que  $f$  é decrescente é análogo e deixado como exercício. Se  $f$  fosse uma função crescente, mas sua inversa  $f^{-1}$  não fosse crescente, então existiriam  $c < d$ , pontos do domínio da inversa  $f^{-1}$  tais que  $f^{-1}(d) \leq f^{-1}(c)$ . Como  $f$  é crescente, teríamos que

$$d = f(f^{-1}(d)) \leq f(f^{-1}(c)) = c$$

o que seria uma contradição. Portanto concluímos que se  $f$  é uma função crescente, então sua inversa  $f^{-1}$  só pode ser uma função crescente.  $\square$

O segundo resultado preliminar é de grande relevância no Cálculo e sua demonstração se encontra na Seção A.6.

**Proposição 4.17.** *Se  $f$  é uma função monótona cujo domínio é um intervalo aberto, então os limites laterais existem.*

Uma injeção contínua cuja inversa também é contínua é denominada *homeomorfismo*. A seguir vamos mostrar que toda injeção contínua é de fato um homeomorfismo.

**Proposição 4.18.** *Se  $f$  é uma injeção contínua cujo domínio é um intervalo aberto, então sua inversa  $f^{-1}$  também é contínua.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.15, temos que  $f$  é monótona, o que, pela Proposição 4.16, implica que a inversa  $f^{-1}$  é também monótona. Para mostrar a continuidade num ponto  $a$  do domínio de  $f^{-1}$ , pela Proposição 2.20, basta mostrar que os limites laterais são iguais a  $f^{-1}(a)$ . Pela Proposição 4.17, o seguinte limite existe

$$l = \lim_{x \downarrow a} f^{-1}(x).$$

Por definição, se  $x_n \downarrow a$ , então  $f^{-1}(x_n) \rightarrow l$ . Como a função  $f$  é contínua, segue que

$$x_n = f(f^{-1}(x_n)) \rightarrow f(l).$$

Pela unicidade do limite, temos que  $a = f(l)$ . Portanto  $l = f^{-1}(a)$ . No caso do limite lateral esquerdo, o procedimento é análogo e deixado como exercício.  $\square$

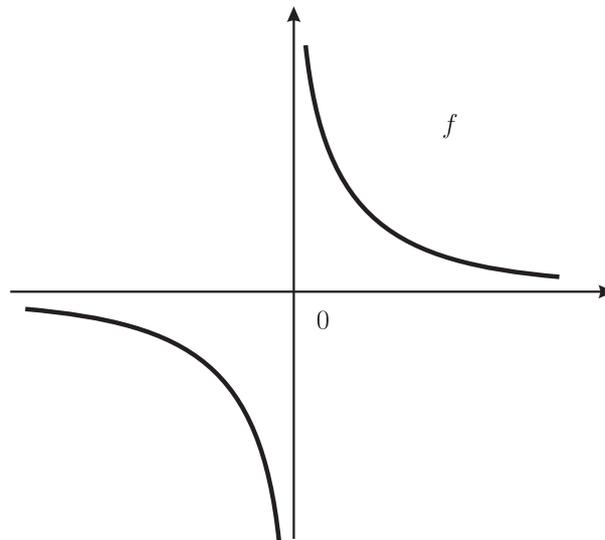
Este resultado é extremamente útil no estudo da continuidade das funções inversas. Por exemplo, como as funções potências e as funções trigonométricas são contínuas, temos imediatamente que as funções raízes e as funções arco-trigonométricas são também contínuas.

### 4.3.1 Exercícios

- 1) Em relação à demonstração da Proposição 4.15, analise a possibilidade 2) de maneira análoga à análise feita da possibilidade 1) e conclua que obteríamos mais uma vez uma contradição.
- 2) Complete a demonstração da Proposição 4.16, considerando o caso em que  $f$  é decrescente.
- 3) Complete a demonstração da Proposição 4.18, considerando o caso em que o limite lateral esquerdo de  $f^{-1}$  no ponto  $a$  faz sentido.
- 4) Mostre que as imagens do seno em  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e do cosseno em  $[0, \pi]$  são iguais ao intervalo  $[-1, 1]$ . Conclua que os domínios do arco-seno e do arco-cosseno são dados pelo intervalo  $[-1, 1]$ .

## 4.4 Assíntotas verticais e horizontais

Nesta seção vamos analisar o denominado *comportamento assintótico* de uma função, que é a propriedade do seu gráfico se aproximar de retas, que são então denominadas *assíntotas*. Por exemplo, o gráfico da função  $f(x) = 1/x$  se aproxima do eixo horizontal ( $y = 0$ ), a medida que  $x$  cresce, como ilustrado pela Figura 4.19.



**Figura 4.19.** Assíntotas verticais e horizontais da função  $f$ .

De maneira semelhante, o gráfico de  $f$  também se aproxima do eixo horizontal, a medida que  $x$  se torna cada vez mais negativo. Em ambos os casos, denominamos a reta  $y = 0$  de *assíntota horizontal*. Por outro lado, a medida que  $x$  se aproxima da origem pela direita, o gráfico de  $f$  sobe, aproximando-se do eixo vertical ( $x = 0$ ), como ilustrado pela Figura 4.19. Quando  $x$  se aproxima da origem pela esquerda, o gráfico de  $f$  desce e também se aproxima do eixo vertical. Nestes dois casos, denominamos a reta  $x = 0$  de *assíntota vertical*.

Para tornar preciso o conceito do gráfico de uma função se aproximar de uma dada reta, devemos introduzir os conceitos de *limite infinito* e também de *limite no infinito*. Assim como no conceito usual de limites, primierio consideramos limites de seqüências.

De maneira intuitiva, uma sequência  $(a_n)$  tende para o infinito se ela fica cada vez maior, a medida que o tempo passa. De maneira precisa, dado um raio  $R > 0$ , deve existir um estágio  $n(R)$ , denominado *tempo de espera*, de modo que

$$n \geq n(R) \quad \Rightarrow \quad R < a_n < \infty.$$

Neste caso, dizemos que  $(a_n)$  se aproxima de mais infinito e denotamos isto por  $a_n \rightarrow \infty$ . Por exemplo, consideremos a função

$$n(R) = 1^\circ \text{ natural} > R \quad (4.4)$$

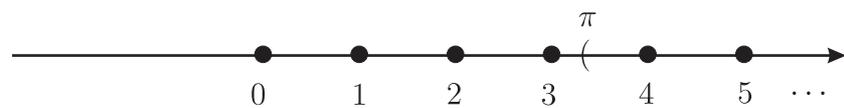
onde  $R > 0$ . A tabela abaixo apresenta os valores de  $n(R)$  para alguns valores de  $R > 0$ .

$R$	$n(R)$
$\pi$	4
$10\pi$	32
$100\pi$	315

Temos que esta é uma função de aproximação da *sequência dos números naturais*, onde  $a_n = n$ , pois de fato se  $n > n(L) \geq L$ , então

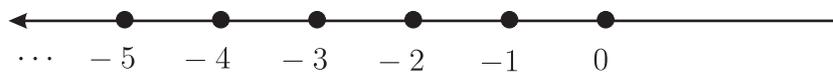
$$n \geq n(R) \quad \Rightarrow \quad R < n < \infty,$$

como ilustra a Figura 4.20.



**Figura 4.20.** Sequência dos números naturais.

Por outro lado, dizemos que  $(b_n)$  se aproxima de menos infinito e denotamos isto por  $b_n \rightarrow -\infty$ , quando  $-b_n \rightarrow \infty$ . Temos então que a *sequência dos números inteiros negativos*, onde  $b_n = -n$ , se aproxima de menos infinito, como ilustra a Figura 4.21.



**Figura 4.21.** Sequência dos números inteiros negativos.

O resultado seguinte mostra a relação entre sequências que se aproximam da origem com sequências que se aproximam de mais ou de menos infinito.

**Proposição 4.19.** *Temos que*

(A) Se  $a_n \rightarrow \infty$ , então  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

(B) Se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$ , então  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$ .

(C) Se  $a_n \rightarrow \infty$  e  $a_n \leq b_n$ , então  $b_n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Para o item (A), escolhendo  $R = 1/\varepsilon$ , temos que

$$n \geq n_a(1/\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < a_n < \infty.$$

Definindo  $n(\varepsilon) = n_a(1/\varepsilon)$ , temos que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

Para o item (B), escolhendo  $\varepsilon = 1/R$ , temos que

$$n \geq n_a(1/R) \quad \Rightarrow \quad 0 < a_n < \frac{1}{R}.$$

Definindo  $n(R) = n_a(1/R)$ , temos que

$$n \geq n(R) \quad \Rightarrow \quad R < \frac{1}{a_n} < \infty.$$

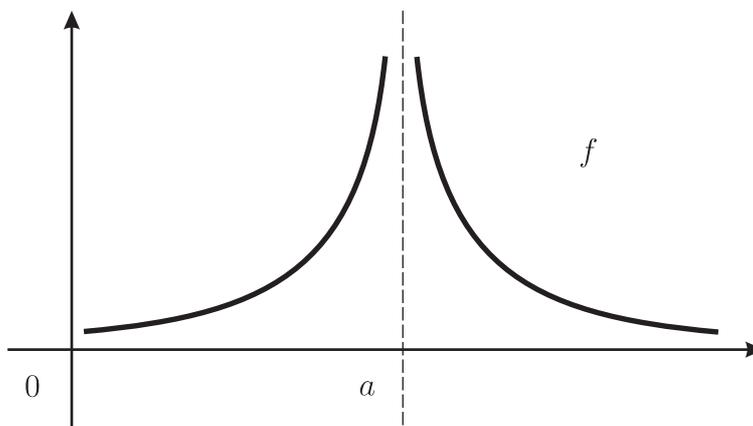
Finalmente para o item (C), escolhendo  $n_b(R) = n_a(R)$ , temos que

$$n \geq n_b(R) \quad \Rightarrow \quad R < a_n \leq b_n.$$

□

Podemos agora definir o conceito preciso de limite de função associado a assíntotas verticais. Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto limite de uma dada função  $f$ . O *limite de  $f$  em  $a$  é mais infinito*, quando para toda sequência  $(x_n)$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \neq a$  e também que  $x_n \rightarrow a$ , temos que a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Neste caso, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$



**Figura 4.22.** Assíntota vertical em  $x = a$ .

De maneira análoga, o *limite lateral esquerdo (ou direito) de  $f$  em  $a$  é mais infinito*, quando para toda sequência  $(x_n)$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \uparrow a$  (ou  $x_n \downarrow a$ ), temos que a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

O *limite (ou os limites laterais) de  $f$  em  $a$  é menos infinito* se o limite (ou os limites laterais) de  $-f$  em  $a$  é mais infinito. Neste caso, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Quando o limite (ou os limites laterais) de  $f$  em  $a$  é mais ou menos infinito, dizemos que a reta  $x = a$  é uma *assíntota vertical ao gráfico de  $f$* , como ilustram as Figuras 4.19 e 4.22.

O resultado seguinte é utilizado para se detectar assíntotas verticais.

**Proposição 4.20.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $a \in \mathbb{R}$  tais que  $f(a) \neq 0$  e  $g(a) = 0$ . Temos então que*

$$(A) \text{ se } \pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ para } x < a, \text{ então } \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

$$(B) \text{ se } \pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ para } x > a, \text{ então } \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty.$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar apenas o item (A), uma vez que a demonstração do item (B) é semelhante e pode ser deixada como exercício. Pela regra do quociente, temos que

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(a)}{f(a)} = 0.$$

Caso  $\pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0$  e  $x_n \uparrow a$ , definindo

$$a_n = \pm \frac{g(x_n)}{f(x_n)},$$

temos que

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad a_n > 0.$$

Pela Proposição 4.19, segue que

$$\pm \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty,$$

o que mostra que

$$\lim_{x \uparrow a} \pm \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

concluindo a demonstração. □

Deste modo, temos que

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

como ilustra a Figura 4.19, uma vez que  $1/x > 0$  em  $(0, \infty)$  e que  $1/x < 0$  em  $(-\infty, 0)$ .

Valem também as seguintes propriedades para o limite infinito da soma e do produto de funções.

**Proposição 4.21.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções reais. Se  $f$  é contínua em  $a$  e*

$$\lim_{x \square a} g(x) = \pm \infty,$$

então

$$\lim_{x \square a} f(x) + g(x) = \pm \infty,$$

onde  $\square$  pode ser substituído, de maneira uniforme, por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ .

Podemos então determinar o formato do gráfico da função  $\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ . Como

$$\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad \text{e} \quad \text{tg}''(x) = 2 \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)^3}.$$

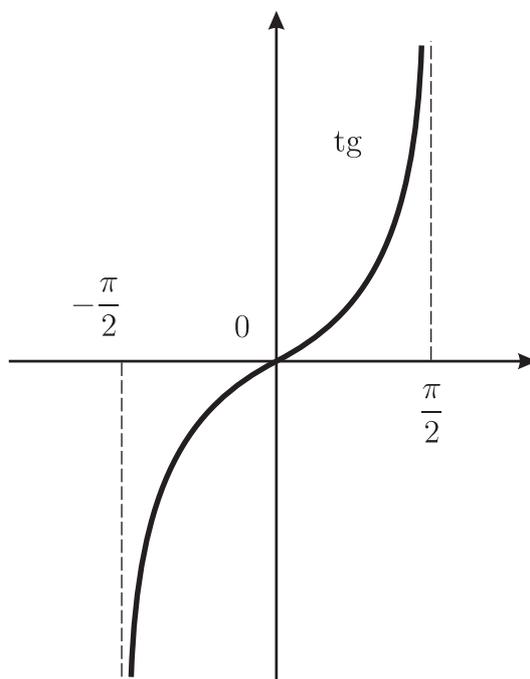
Logo  $\operatorname{tg}$  é crescente em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , uma vez que  $\operatorname{tg}' > 0$  neste intervalo. Além disso, temos que  $\operatorname{tg}$  possui concavidade para baixo em  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , pois  $\operatorname{tg}'' < 0$  neste intervalo, e possui concavidade para cima em  $(0, \frac{\pi}{2})$ , pois  $\operatorname{tg}'' > 0$  neste intervalo. Além disso, temos que a reta  $x = \frac{\pi}{2}$  e a reta  $x = -\frac{\pi}{2}$  são assíntotas verticais do gráfico de  $\operatorname{tg}$ . Como

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(\pi/2) = 0,$$

pela Proposição 4.20, temos que

$$\lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty,$$

uma vez que  $\operatorname{tg} < 0$  em  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  e que  $\operatorname{tg} > 0$  em  $(0, \frac{\pi}{2})$ . O esboço do gráfico da função  $\operatorname{tg}$  é apresentado na Figura 4.23, onde também utilizamos o fato de que  $\operatorname{tg}(0) = 0$  e que  $\operatorname{tg}'(0) = 1$ .



**Figura 4.23.** Esboço do gráfico da tangente.

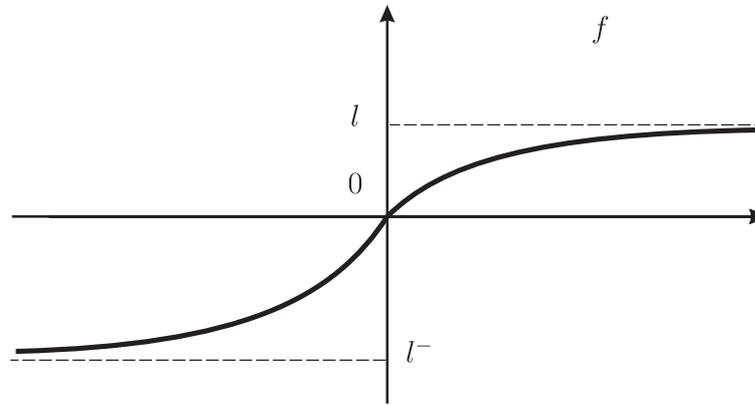
Vamos agora definir o conceito preciso de limite de função associado a assíntotas horizontais. Suponha que o domínio de uma dada função  $f$  contenha um intervalo da forma  $(a, \infty)$ . O *limite de  $f$  em mais infinito*, quando existe, é o número real denotado por

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

tal que se  $(x_n)$  é uma sequência de pontos no domínio  $\operatorname{dom}(f)$  tal que  $x_n \rightarrow \infty$ , então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow l$ . Neste caso, dizemos que a reta  $y = l$  é uma *assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  para a direita*, como ilustra a Figura 4.24. De modo análogo, definimos o conceito de *limite de  $f$  em menos infinito*, que é denotado por

$$l^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Neste caso, dizemos que a reta  $y = l^-$  é uma *assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  para a esquerda*, como ilustra a Figura 4.24.



**Figura 4.24.** Assíntotas horizontais em  $y = l$  e  $y = l^-$ .

As regras do limite da soma, do produto e do quociente são também válidas para limites de função no infinito, sendo que as demonstrações de tais propriedades são idênticas às demonstrações apresentadas no caso de limite de função num dado ponto. Além disso, temos o seguinte resultado utilizado para se detectar assíntotas horizontais.

**Proposição 4.22.** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

*Demonstração.* Se  $x_n \rightarrow \pm\infty$ , então  $f(x_n) \rightarrow \infty$  e, pela Proposição 4.19, segue que

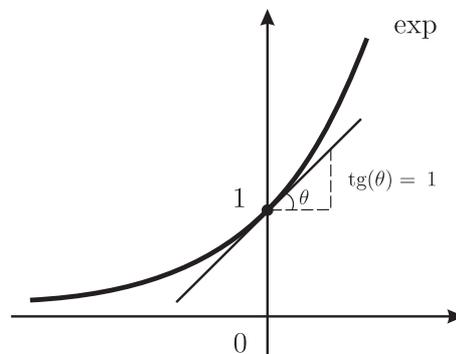
$$\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow 0,$$

concluindo a demonstração. □

Deste modo, pela Proposição 4.22, segue que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

como ilustra a a figura (4.19), uma vez que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$ .



**Figura 4.25.** Esboço do gráfico da exponencial.

Podemos então determinar o formato do gráfico da função exponencial. Como

$$\exp'' = \exp' = \exp > 0$$

temos que  $\exp$  é crescente com concavidade para cima. Pela Proposição 3.6, temos que  $1 + x \leq \exp(x)$ , para todo  $x > 0$ . Isso mostra, pela Proposição 4.19, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Pela Proposição 4.22, segue então que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

O esboço do gráfico da função  $\exp$  é apresentado na Figura 4.25, onde também utilizamos o fato de que  $\exp(0) = 0$  e que  $\exp'(0) = 1$ .

Encerramos esta seção, apresentando a versão geral da *Regra de L'Hôspital* para o cálculo de limites indeterminados.

**Proposição 4.23.** *Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis tais que*

$$\lim_{x \square a} f(x) = \lim_{x \square a} g(x) = l$$

então

$$\lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \square a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (4.5)$$

caso o segundo limite exista, onde pode haver as seguintes substituições, de maneira uniforme:

$\square$  por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ ,

$l$  por  $0$ , por  $\infty$  ou por  $-\infty$  e

$a$  por  $\infty$ , por  $-\infty$  ou por um número real.

*Demonstração.* A regra já foi demonstrada no caso em que  $l = 0$  e  $a$  é um número real. Se  $l = 0$  e  $a = \infty$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{x \downarrow 0} f(1/x) = \lim_{x \downarrow 0} g(1/x) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

A demonstração do caso em que  $l = \pm\infty$  é mais delicada. Vamos supor, sem demonstrar, que o primeiro limite da equação (4.5) existe, quando o segundo limite existe. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \square a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \\ &= \lim_{x \square a} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'} \end{aligned}$$

uma vez que, pela Proposição 4.22,

$$\lim_{x \square a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \square a} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

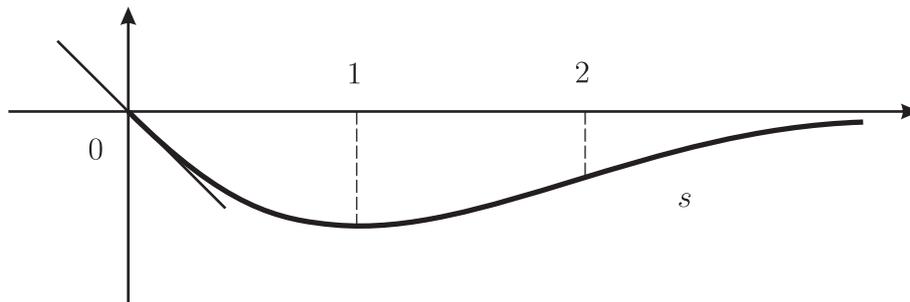
Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \square a} \frac{-g'(x)/g(x)^2}{-f'(x)/f(x)^2} \\ &= \lim_{x \square a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \\ &= \lim_{x \square a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left( \lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{\left( \lim_{x \square a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \right)} \\ &= \lim_{x \square a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

□



**Figura 4.26.** Esboço do gráfico da posição instantânea.

Apresentamos agora um esboço da função

$$s(t) = -te^{-t}$$

que, como veremos no próximo capítulo, descreve a posição instantânea de um sistema massa-mola na presença de um amortecedor. Temos que

$$v(t) = -e^{-t}(1-t) \quad \text{e} \quad a(t) = e^{-t}(2-t).$$

Logo  $s' < 0$  no intervalo  $(0, 1)$  e  $s' > 0$  no intervalo  $(1, \infty)$ , o que mostra que  $s$  é decrescente em  $(0, 1)$  e é crescente  $(1, \infty)$ . Além disso,  $s'' > 0$  no intervalo  $(0, 2)$  e  $s'' < 0$  no intervalo  $(2, \infty)$ , o que mostra que  $s$  possui concavidade para cima em  $(0, 2)$  e possui concavidade para baixo em  $(2, \infty)$ . O único ponto crítico é  $t = 1$  e o único ponto de inflexão é  $t = 2$ . Não há assíntotas verticais, pois  $s$  é contínua em todo  $[0, \infty)$ . Pela regra de L'Hôpital, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^t} = 0,$$

o que mostra que a reta  $y = -1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico da posição  $s$ . O esboço do gráfico da função  $s$  é apresentado na Figura 4.26, onde também utilizamos o fato de que  $s(0) = 0$  e que  $v(0) = -1$ .

Vamos concluir esta seção, utilizando a regra de L'Hôpital para mostrar que a função exponencial cresce *mais rápido* do que qualquer potência.

**Proposição 4.24.** *Temos que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução. Para  $n = 1$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

onde utilizamos a regra de L'Hôpital. Se a fórmula vale para  $n \in \mathbb{N}$ , vamos mostrar que vale para  $n + 1$ . Temos então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

onde novamente utilizamos a regra de L'Hôpital. □

#### 4.4.1 Exercícios

- 1) Conclua a demonstração das Proposições 4.20 e 4.22.
- 2) Mostre que a imagem da tangente em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  é a reta  $\mathbf{R}$ . Conclua que o domínio do arco-tangente é a reta  $\mathbf{R}$ .
- 3) Mostre que a imagem da exponencial é o intervalo  $(0, \infty)$ . Conclua que o domínio do logaritmo é o intervalo  $(0, \infty)$ .

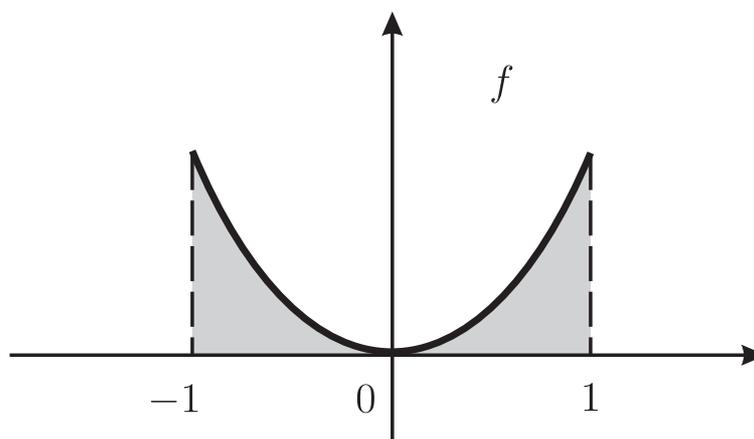
# Capítulo 5

## Integral

### 5.1 Área líquida

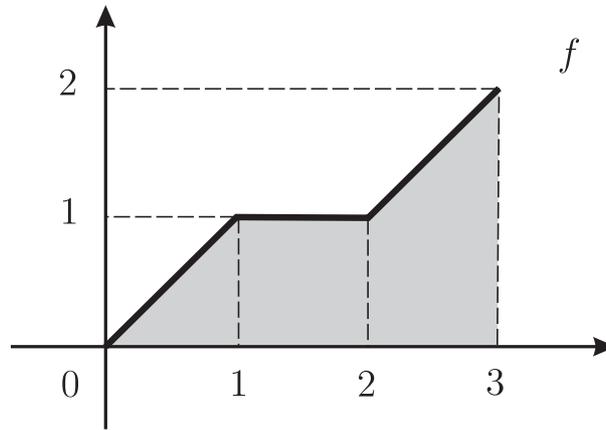
No Capítulo 3, o conceito de derivada foi introduzido como sendo tanto a inclinação da reta tangente, quanto a velocidade e a aceleração instantâneas, as taxas de variação instantâneas, respectivamente, do espaço e da velocidade pelo tempo. Assim como no caso da derivada, o conceito de integral surge de tanto de problemas geométricos, quanto de problemas dinâmicos.

Do ponto de vista geométrico, a integral de uma função não-negativa  $f$  de  $a$  para  $b$ , onde  $a \leq b$ , é definida como sendo a área da região delimitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo horizontal e pelas retas verticais passando por  $x = a$  e por  $x = b$ . Isso é ilustrado pela Figura 5.1, onde  $f(x) = x^2$ ,  $a = -1$  e  $b = 1$ .



**Figura 5.1.** Área determinada pela parábola.

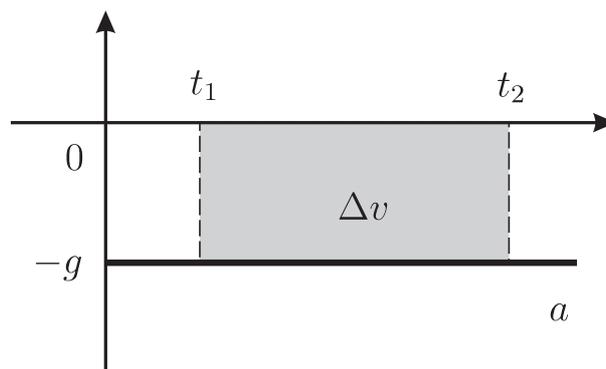
Desde os gregos, o valor desta área já era conhecido como sendo igual a  $2/3$ . Na próxima seção, obteremos este valor através de um dos resultados mais importantes do cálculo, que estabelece uma maneira de se calcular esta área através do uso do conceito de derivada. Quando a função  $f$  é uma poligonal, como ilustrado pela Figura 5.2, sua integral entre dois valores pode ser calculada diretamente, através de resultados elementares de geometria. A integral de  $f$  de  $a = 0$  para  $b = 1$  é igual a  $1/2$  e de  $a = 1$  para  $b = 2$  é igual a 1. O cálculo da integral de  $f$  de  $a = 2$  para  $b = 3$  e também de  $a = 0$  para  $b = 3$  é deixado como exercício.



**Figura 5.2.** Área determinada pela poligonal.

No Capítulo 3, vimos como obter a velocidade instantânea a partir da posição instantânea: a velocidade instantânea no tempo  $t$  é igual a inclinação da reta tangente ao gráfico da posição no ponto  $(t, s(t))$ . De maneira análoga, vimos como obter a aceleração instantânea a partir da velocidade instantânea. E quanto ao caminho inverso? Como obter a função posição a partir da função velocidade e, de modo similar, como obter a função velocidade a partir da função aceleração? Do ponto de vista dinâmico, o conceito de integral surgiu para responder estes problemas cinemáticos inversos.

Por exemplo, num lançamento vertical de uma bola  $B$ , na ausência de atrito, temos que a posição instantânea é dada por  $s(t) = s_0 + v_0t - gt^2/2$ , a velocidade instantânea é dada por  $v(t) = v_0 - gt$  e a aceleração instantânea é dada por  $a(t) = -g$ , onde  $s_0$  é a posição inicial,  $v_0$  é a velocidade inicial e  $-g$  é a aceleração da gravidade local. Quando a função é não-positiva, como no caso da função aceleração ilustrada pela Figura 5.3, sua integral do instante  $t_1$  para o instante  $t_2$ , onde  $t_1 \leq t_2$ , é definida como sendo o oposto da área da região delimitada pelo gráfico de  $a$ , pelo eixo horizontal e pelas retas verticais passando por  $t = t_1$  e por  $t = t_2$ . No presente caso, este valor é dado por  $-g(t_2 - t_1)$ , que é igual a variação da velocidade instantânea entre estes dois instantes.



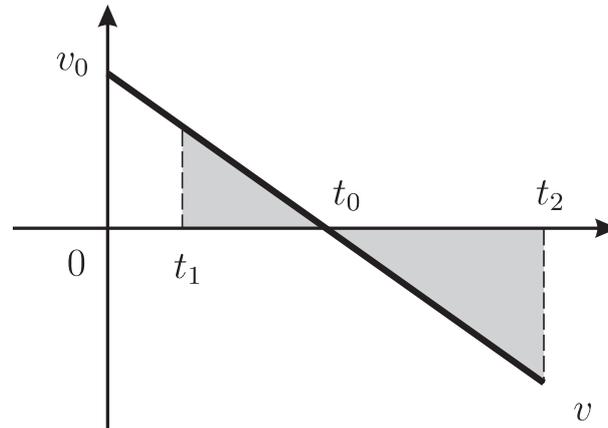
**Figura 5.3.** Área com sinal determinada pela função aceleração.

Quando a função tem partes positivas e negativas, como no caso da função velocidade ilustrada pela Figura 5.4, sua integral do instante  $t_1$  para o instante  $t_2$ , onde  $t_1 \leq t_2$ , é definida como sendo a área das regiões delimitadas pelo gráfico de  $v$  que estão acima do eixo horizontal menos a área das regiões delimitadas pelo gráfico de  $v$  que estão abaixo do eixo horizontal. No presente caso, a região que está acima do eixo horizontal é delimitada pelo

gráfico de  $v$  e pelas retas verticais passando por  $t = t_1$  e por  $t = t_0$ , onde  $t_0 = v_0/g$  é o instante tal que a velocidade instantânea se anula. A área desta região é portanto igual a  $(t_0 - t_1)v(t_1)/2$ . Por outro lado, a região que está abaixo do eixo horizontal é delimitada pelo gráfico de  $v$  e pelas retas verticais passando por  $t = t_0$  e por  $t = t_2$  e sua área é dada por  $(t_2 - t_0)(-v(t_2))/2$ . Portanto a integral de  $v$  do instante  $t_1$  para o instante  $t_2$  é dada por

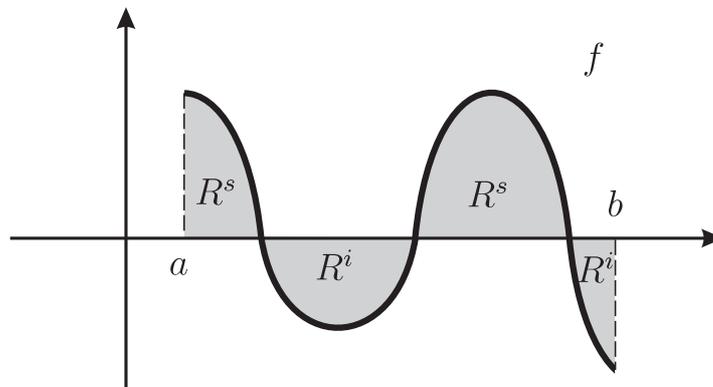
$$\frac{1}{2}[(t_0 - t_1)v(t_1) - (t_2 - t_0)(-v(t_2))] = v_0(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2),$$

que é igual a variação da velocidade instantânea entre estes dois instantes.



**Figura 5.4.** Área líquida determinada pela função velocidade.

Seja  $f$  uma função contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , como apresentada pela Figura 5.5.



**Figura 5.5.** Área líquida determinada pela função  $f$ .

A integral definida de  $f$  da esquerda para a direita em  $[a, b]$  é definida por

$$\int_a^b f = A^s - A^i$$

onde  $A^s$  é a área da região superior em  $[a, b]$  dada por

$$R^s = \{ (x, y) : x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x) \}$$

e  $A^i$  é a área da região inferior em  $[a, b]$  dada por

$$R^i = \{ (x, y) : x \in [a, b] \text{ e } f(x) \leq y \leq 0 \}$$

onde ambas regiões são ilustradas pela Figura 5.5. A integral é portanto a área líquida determinada pela função  $f$  entre os pontos  $a$  e  $b$ . Quando houver possibilidade de ambiguidades com relação a qual função ou qual intervalo estamos considerando, as áreas superior e inferior serão denotadas por  $A_f^s[a, b]$  e  $A_f^i[a, b]$ , enquanto as regiões superior e inferior serão denotadas simplesmente por  $R_f^s[a, b]$  e  $R_f^i[a, b]$ .

No exemplo a seguir, ilustrado pela Figura 5.6, onde  $f$  é uma função poligonal, sua integral entre dois valores pode ser calculada diretamente, através de resultados elementares de geometria.

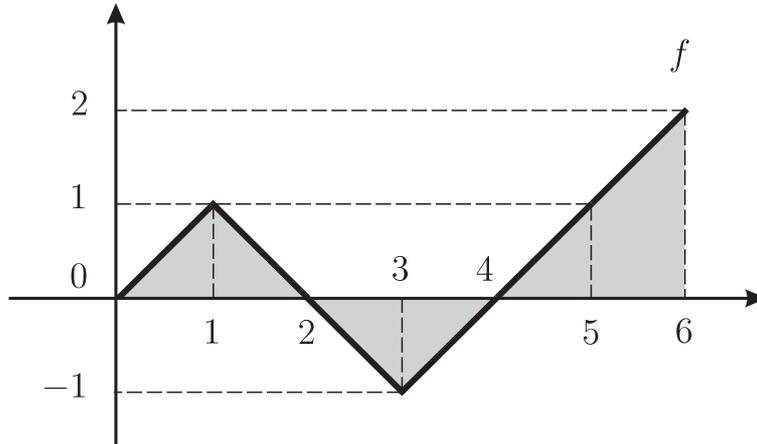


Figura 5.6. Integral definida da função poligonal  $f$ .

Temos que

$$\int_0^3 f = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_3^6 f = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

O cálculo da integral de  $f$  de  $a = 0$  para  $b = 6$  é deixado como exercício.

A proposição seguinte apresenta duas propriedades fundamentais do conceito de integral, a monotonicidade e a decomponibilidade do domínio.

**Proposição 5.1.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$ . Temos que*

(M) *se  $f \leq g$ , então*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \text{e}$$

(D) *se  $c \in [a, b]$ , então*

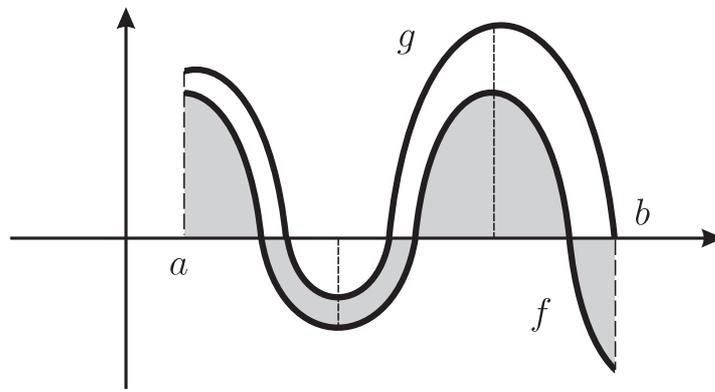
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Demonstração.* Para o item (M), se  $f(x) \geq 0$ , então  $0 \leq y \leq f(x) \leq g(x)$ , o que mostra que  $R_f^s \subset R_g^s$ . Por outro lado, se  $g(x) \leq 0$ , então  $f(x) \leq g(x) \leq y \leq 0$ , o que mostra que  $R_g^i \subset R_f^i$ , como ilustrado pela Figura 5.7. Pela monotonicidade da área, temos que

$$A_f^s \leq A_g^s \quad \text{e} \quad A_g^i \leq A_f^i$$

Multiplicamos a segunda desigualdade por  $-1$ , obtemos que

$$A_f^s \leq A_g^s \quad \text{e} \quad -A_f^i \leq -A_g^i$$



**Figura 5.7.** Monotonicidade da integral definida.

o que implica que

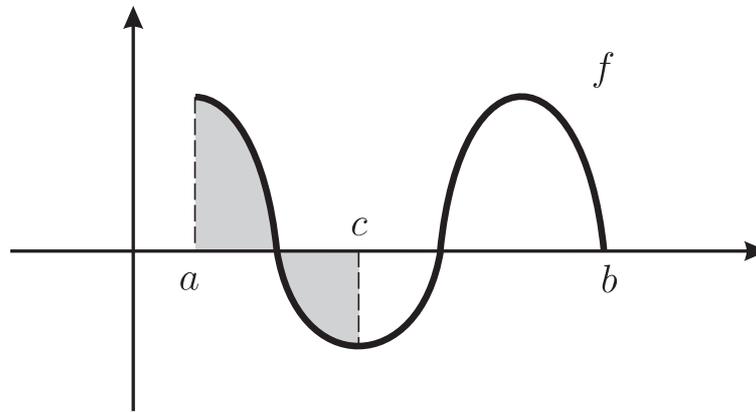
$$\int_a^b f = A_f^s - A_f^i \leq A_g^s - A_g^i = \int_a^b g.$$

Para o item (D), se  $c \in [a, b]$ , então

$$R^s[a, b] = R^s[a, c] \cup R^s[c, b] \quad \text{e} \quad R^i[a, b] = R^i[a, c] \cup R^i[c, b].$$

como mostra a Figura 5.8. Utilizando a aditividade da área, segue que

$$A^s[a, b] = A^s[a, c] + A^s[c, b] \quad \text{e} \quad A^i[a, b] = A^i[a, c] + A^i[c, b].$$



**Figura 5.8.** Decomponibilidade da integral definida.

Utilizando a aditividade da área, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= A^s[a, b] - A^i[a, b] \\ &= (A^s[a, c] + A^s[c, b]) - (A^i[a, c] + A^i[c, b]) \\ &= (A^s[a, c] - A^i[a, c]) + (A^s[c, b] - A^i[c, b]) \\ &= \int_a^c f + \int_c^b f. \end{aligned}$$

□

A integral definida de  $f$  da direita para a esquerda em  $[a, b]$  é definida por

$$\int_b^a f = A^i - A^s.$$

Ou seja, da esquerda para a direita a integral é a área superior menos a área inferior, enquanto que da direita para a esquerda a integral é a área inferior menos a área superior. Como exemplo, temos que

$$\int_5^2 f = 1 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_6^0 f = -2,$$

onde a função  $f$  é ilustrada pela Figura 5.6. O cálculo da integral de  $f$  de  $a = 6$  para  $b = 1$  é deixado como exercício.

Esta definição possibilita estendermos a propriedade da decomposição do domínio para quaisquer  $c \in \mathbb{R}$ , desde que as integrais estejam bem definidas.

**Corolário 5.2.** *Seja  $f$  uma função contínua. Temos que*

(D)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

desde que todas as integrais estejam bem definidas.

*Demonstração.* Vamos demonstrar apenas o caso em que  $a \leq b \leq c$ , sendo que o caso em que  $a \leq c \leq b$  foi demonstrado na Proposição 5.1 e a demonstração do caso em que  $c \leq a \leq b$  é similar e deixada como exercício. Utilizando a Proposição 5.1, temos que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^b f = \int_a^b f,$$

onde utilizamos o fato de que

$$\int_c^a f = -\int_a^c f.$$

□

### 5.1.1 Exercícios

- 1) Calcule a integral de  $f$  de  $a = 2$  para  $b = 3$  também de  $a = 0$  para  $b = 3$ , onde a função  $f$  é ilustrada pela Figura 5.2.
- 2) Calcule a integral de  $f$  de  $a = 2$  para  $b = 3$  também de  $a = 0$  para  $b = 6$ , onde a função  $f$  é ilustrada pela Figura 5.6. Verifique se

$$\int_0^3 f + \int_3^6 f = \int_0^6 f.$$

- 3) Calcule a integral de  $f$  de  $a = 6$  para  $b = 1$  também de  $a = 0$  para  $b = 6$ , onde a função  $f$  é ilustrada pela Figura 5.6. Verifique se

$$\int_6^0 f + \int_0^1 f = \int_6^1 f.$$

- 4) Complete a demonstração do Corolário 5.2, no caso em que  $a \leq b \leq c$ .

## 5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

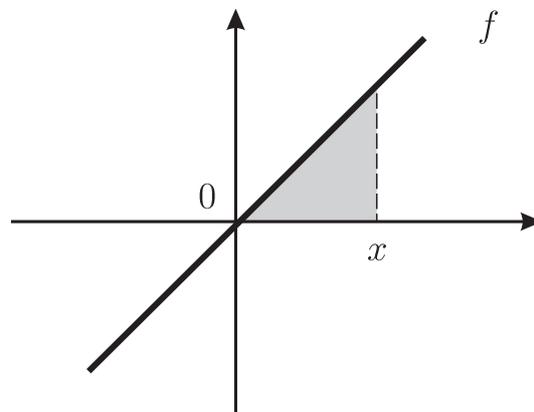
Vamos apresentar agora um dos resultados mais importantes do Cálculo, conhecido como *Teorema Fundamental do Cálculo*, que estabelece a ligação entre os conceitos de derivada e integral. Uma função  $F$  é a *primitiva de uma dada função  $f$*  quando  $F' = f$ . Dada uma função contínua  $f$ , vamos mostrar que a denominada *função integral de  $f$  a partir do ponto  $a$*  dada por

$$F(x) = \int_a^x f$$

é uma primitiva da função  $f$ . Por exemplo, se  $f(x) = x$  e  $a = 0$ , temos que

$$F(x) = \int_0^x f = \frac{x^2}{2},$$

como mostra a Figura 5.9.



**Figura 5.9.** Decomponibilidade da integral definida.

Temos claramente que  $F'(x) = x = f(x)$ , mostrando que função integral de  $f$  em 0 é uma primitiva de  $f$ . O cálculo da função integral de  $f$  a partir do ponto  $a = 1$  e a partir do ponto  $a = -1$  é deixado como exercício.

**Teorema 5.3 (TFC).** *Se  $f$  é uma função contínua e  $a \in \mathbb{R}$ , então*

$$\left( \int_a^x f \right)' = f(x).$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $F'(x \downarrow) = f(x)$ , sendo que a demonstração que o mesmo vale para derivada lateral esquerda é deixado como exercício. Temos que

$$F'(x \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f, \end{aligned} \quad (5.2)$$

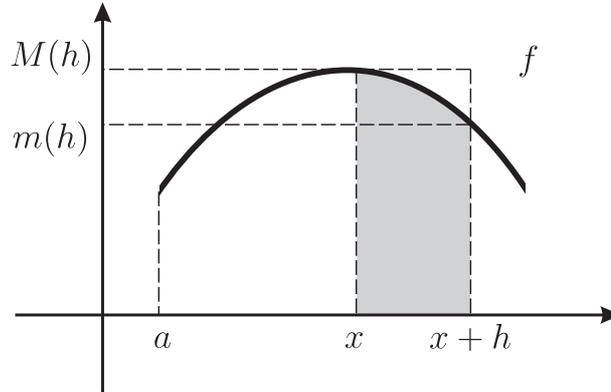
onde utilizamos o fato de que

$$\int_a^{x+h} f = \int_a^x f + \int_x^{x+h} f. \quad (5.3)$$

Como  $f$  é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, temos que existem  $m(h)$  e  $M(h)$ , respectivamente, o mínimo e o máximo da função  $f$  no intervalo  $[x, x+h]$ . Neste intervalo, temos que  $m(h) \leq f \leq M(h)$ . Pela monotonicidade, segue que

$$h m(h) = \int_x^{x+h} m(h) \leq \int_x^{x+h} f \leq \int_x^{x+h} M(h) = h M(h), \quad (5.4)$$

como mostra a Figura 5.10.



**Figura 5.10.** Teorema Fundamental do Cálculo.

Dividindo a desigualdade (5.4) por  $h$ , segue que

$$m(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \leq M(h).$$

Como  $f$  é contínua, temos que

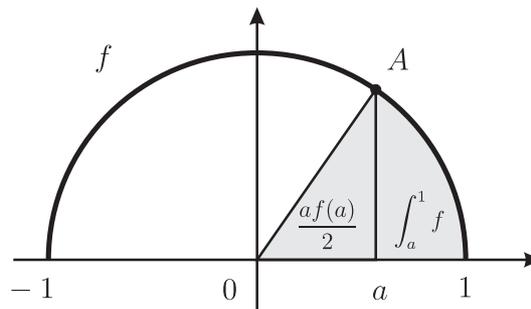
$$\lim_{h \downarrow 0} m(h) = f(x) = \lim_{h \downarrow 0} M(h),$$

o que, pelo Teorema do Sanduíche, implica que

$$F'(x \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = f(x).$$

□

Temos então que o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4.14) é uma consequência imediata do Teorema de Darboux (Teorema 4.13) e do Teorema Fundamental do Cálculo, que afirma que toda função contínua é de fato a derivada de alguma função. Isso nos permite demonstrarmos a Proposição 1.8, sobre a medida de ângulos por radianos.



**Figura 5.11.** Propriedade da medida por radianos.

*Demonstração (Radiano).* Considere a função  $\text{rad}(a)$  que para cada  $a \in [-1, 1]$  associa a medida em radianos do ângulo  $\alpha$  determinado pelo eixo horizontal e pela semireta saindo da origem e passando pelo ponto  $A = (a, f(a))$  da circunferência unitária, onde  $f(a) = \sqrt{1 - a^2}$ , como ilustra a Figura 5.11. Temos então que

$$\text{rad}(a) = 2 \left( \frac{af(a)}{2} + \int_a^1 f \right).$$

Como  $\text{rad}(-1) = \pi$  e  $\text{rad}(1) = 0$ , dado  $0 \leq x \leq \pi$ , pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $a \in [-1, 1]$  tal que  $x = \text{rad}(a)$ , uma vez que  $\text{rad}(a)$  é contínua.  $\square$

O TFC estabelece uma relação estreita entre as integrais de uma dada função contínua e suas primitivas. Por este motivo o conjunto das expressões algébricas das primitivas de uma dada função  $f$  é denotado por

$$\int f(x) dx$$

e denominado *integral indefinida de  $f$* , onde  $dx$  aparece apenas para indicar que  $x$  é a variável independente. Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  temos que

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\},$$

o que é denotado simplesmente por

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária, que percorre todos os números reais. Isto ocorre pois duas primitivas da função  $f$  necessariamente diferem por uma constante e sempre que se adiciona uma constante a uma primitiva de  $f$  obtém-se uma nova primitiva de  $f$ .

Apresentamos a seguir uma lista com as integrais indefinidas de algumas funções elementares. Note que as integrais indefinidas são conjuntos de expressões algébricas e portanto não são números reais.

**Proposição 5.4.** *Temos que*

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + c,$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) + c \text{ e}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ quando } a \neq -1.$$

Dados uma função contínua  $f$  e dois pontos na reta  $a, b$ , podemos associar a sua integral indefinida

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

um número real denominado *colchete de a para b* e dado por

$$\left[ \int f(x) dx \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Note que o colchete é a diferença do valor da expressão algébrica de qualquer primitiva de  $f$  calculada no extremo de cima menos o valor dessa expressão calculada no extremo de baixo, uma vez que

$$(F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

O próximo resultado é uma consequência importante do TFC que afirma que a integral de  $f$  de  $a$  para  $b$  é o colchete da sua integral indefinida de  $a$  para  $b$ .

**Corolário 5.5.** *Seja  $f$  uma função contínua. Então*

$$\int_a^b f = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b.$$

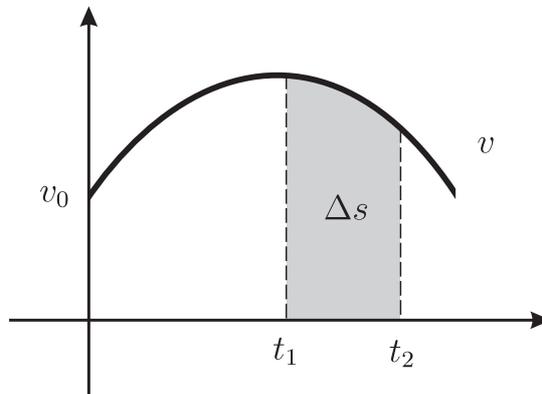
*Demonstração.* Pelo TFC, temos que

$$F(x) = \int_a^x f$$

é uma primitiva de  $f$  e claramente  $F(a) = 0$ . Logo

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a) = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b.$$

□



**Figura 5.12.** Integral definida da velocidade é a variação da posição.

Uma aplicação conhecida deste corolário é o resultado que afirma que a área líquida determinada pela função velocidade entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , ilustrada pela Figura 5.12, é a variação da posição instantânea entre estes dois instantes uma vez que

$$\int_{t_1}^{t_2} v = \left[ \int v(t) dt \right]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1) = \Delta s.$$

Da mesma forma, a área líquida determinada pela função aceleração entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é a variação da velocidade instantânea entre estes dois instantes.

Quando a função é dada por sua expressão algébrica  $f(x)$ , também denotamos a integral de  $f$  de  $a$  para  $b$  por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Temos então que

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b.$$

Isto nos permitir calcular a área delimitada pela parábola  $f(x) = x^2$ . Como

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c,$$

temos que

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \int x^2 dx \right]_{-1}^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3},$$

conforme foi afirmado no início desta seção.

As propriedades das integrais indefinidas são reflexos das propriedades das derivadas. Por exemplo, como a derivada da soma é a soma das derivadas, temos que a integral indefinida da soma é a soma das integrais indefinidas. Da mesma forma, como constantes saem para fora da derivada, temos que o mesmo ocorre com integrais indefinidas.

**Proposição 5.6.** *Temos que*

$$(S) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ e}$$

$$(C) \int af(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ onde } a \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\int f(x) dx = F(x) + c_1 \quad \text{e} \quad \int g(x) dx = G(x) + c_2,$$

onde  $F'(x) = f(x)$  e também  $G'(x) = g(x)$ . Por definição

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + c$$

e também

$$a \int f(x) dx = aF(x) + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. O resultado segue pois, pelas regras de derivação,

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (aF(x))' = af(x).$$

□

Vamos agora mostrar, no caso do arremesso vertical de uma bola na ausência de atrito com o ar, como utilizar a integral para obter a posição instantânea, desde que sejam dadas a posição e a velocidade iniciais. Como  $a(t) = -g$ , temos que

$$\int a(t) dt = \int -g dt.$$

O primeiro lado da igualdade é sempre igual  $v(t) + c_1$ , pois a aceleração instantânea é, por definição, igual a derivada da velocidade instantânea. O segundo lado da igualdade é igual

$$\int -g dt = -g \int 1 dt = -gt + c_2,$$

onde utilizamos os resultados da proposição anterior. Temos então que

$$v(t) + c_1 = -gt + c_2$$

e portanto que

$$v(t) = -gt + c$$

onde  $c = c_2 - c_1$  é também uma constante arbitrária. Para determinarmos esta constante, temos que conhecer o valor da velocidade em algum instante, por exemplo, o instante inicial. Se a velocidade inicial é  $v(0) = v_0$ , temos que  $c = v_0$ , o que mostra que  $v(t) = v_0 - gt$ . Logo temos que

$$\int v(t) dt = \int v_0 - gt dt.$$

O primeiro lado da igualdade é sempre igual  $s(t) + c_1$ , pois a velocidade instantânea é, por definição, igual a derivada da posição instantânea. O segundo lado da igualdade é igual

$$\int v_0 - gt dt = v_0 \int 1 dt - g \int t dt = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + c_2,$$

onde utilizamos os resultados da proposição anterior. Temos então que

$$s(t) + c_1 = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + c_2$$

e portanto que

$$s(t) = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + c$$

onde  $c = c_2 - c_1$  é também uma constante arbitrária. Para determinarmos esta constante, temos que conhecer o valor da posição em algum instante, por exemplo, o instante inicial. Agora se a posição inicial é  $s(0) = s_0$ , temos que  $c = s_0$ , o que mostra que

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}.$$

Propriedades análogas são verificadas para as integrais definidas.

**Corolário 5.7.** *Temos que*

$$(S) \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \text{ e}$$

$$(C) \int_a^b cf = c \int_a^b f, \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\int f(x) dx = F(x) + c_1 \quad \text{e} \quad \int g(x) dx = G(x) + c_2$$

(S) Pela Proposição 5.7, segue que

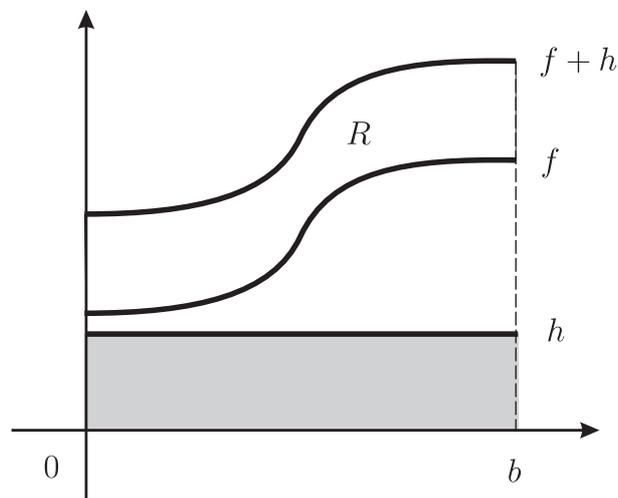
$$\begin{aligned}
 \int_a^b (f + g) &= \left[ \int (f(x) + g(x)) dx \right]_a^b \\
 &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\
 &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\
 &= \left[ \int f(x) dx \right]_a^b + \left[ \int g(x) dx \right]_a^b \\
 &= \int_a^b f + \int_a^b g.
 \end{aligned}$$

(C) Temos que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b cf &= \left[ \int cf(x) dx \right]_a^b \\
 &= cF(b) - cF(a) \\
 &= c(F(b) - F(a)) \\
 &= c \left[ \int f(x) dx \right]_a^b \\
 &= c \int_a^b f.
 \end{aligned}$$

□

A aditividade da integral pode ser utilizada para demonstrar o denominado *Princípio de Cavallieri*. Seja  $R$  a região delimitada pelos gráficos das funções  $f$  e  $f + h$ , onde  $h > 0$ , e pelas retas verticais passando pelos pontos  $x = 0$  e  $x = b$ , como apresentada pela Figura 5.13.



**Figura 5.13.** Princípio de Cavallieri.

Temos que a área da região  $R$  é dada por

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_0^b (f + h) - \int_0^b f \\
 &= \int_0^b f + \int_0^b h - \int_0^b f \\
 &= \int_0^b h = bh,
 \end{aligned}$$

o que mostra que esta área é simplesmente a área do retângulo de base  $b$  e altura  $h$ .

### 5.2.1 Exercícios

- 1) Calcule a função integral de  $f(x) = x$  a partir do ponto  $a = 1$  e a partir do ponto  $a = -1$ . Verifique que em ambos os casos a função obtida é uma primitiva da função  $f$ .
- 2) Complete a demonstração do TFC, mostrando que  $F'(x) = f(x)$ .

## 5.3 Substituição e integração por partes

Outra propriedade fundamental da integral indefinida é a denominada *regra de substituição de variáveis*, que veremos a seguir ser um reflexo da regra da cadeia. Suponha que  $f$  é contínua e que

$$\int f(y) dy = F(y) + c,$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $c$  é uma constante arbitrária. Para cada função  $g$  derivável, definimos

$$\left( \int f(y) dy \right)_{y=g(x)} = F(g(x)) + c.$$

**Proposição 5.8.** *Temos que*

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left( \int f(y) dy \right)_{y=g(x)}.$$

*Demonstração.* Pela regra da cadeia, temos que

$$(F(g(x)))' = (F(y))'_{y=g(x)}(g(x))' = f(g(x))g'(x).$$

□

Uma maneira bastante conveniente de apresentar a regra da substituição é introduzirmos a seguinte notação para a derivada de uma dada função. Se  $y = g(x)$ , então

$$g'(x) = \frac{dy}{dx}$$

uma vez que por definição

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Neste caso, temos que  $dy = g'(x) dx$ . Portanto quando substituirmos a variável  $y$  por  $g(x)$ , devemos também substituir  $dy = g'(x) dx$ . Por exemplo, se quisermos calcular

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x dx$$

fazemos a seguinte substituição  $y = x^2 + 1$ , pois então  $dy = 2x dx$ , o que mostra que  $x dx = dy/2$  e portanto

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x dx = \left( \int \sqrt{y} \frac{dy}{2} \right)_{y=x^2+1}.$$

Temos então que

$$\int \sqrt{y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \left( \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) + c = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

e, portanto, segue que

$$\int \sqrt{x^2+1} x dx = \left( \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \right)_{y=x^2+1} + c = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$$

Na Seção 3.3, vimos que a velocidade vertical instantânea  $v_2 = v$  de uma bola  $B$  arremessada na presença da resistência do ar satisfaz a seguinte equação

$$v'(t) = -g - bv(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $b = \frac{c}{m}$  é o coeficiente de atrito por unidade de massa da bola  $B$ . Vamos então determinar a expressão da função velocidade instantânea. Como

$$\frac{v'(t)}{g + bv(t)} = -1,$$

temos que

$$\int \frac{v'(t)}{g + bv(t)} dt = \int -1 dt = -t + c_1.$$

Fazendo a substituição  $x = g + bv(t)$ , temos que  $dx = bv'(t) dt$ , o que mostra que  $v'(t) dt = dx/b$ . Então

$$\begin{aligned} \int \frac{v'(t)}{g + bv(t)} dt &= \left( \int \frac{1}{x} \frac{dx}{b} \right)_{x=g+bv(t)} \\ &= \frac{1}{b} \left( \int \frac{1}{x} dx \right)_{x=g+bv(t)} \\ &= \frac{1}{b} \log(g + bv(t)) + c_2, \end{aligned}$$

onde estamos supondo que  $g + bv(t) > 0$ . Logo

$$\log(g + bv(t)) = -bt + c_3.$$

onde  $c_3 = b(c_1 - c_2)$ , o que mostra que

$$g + bv(t) = ce^{-bt}$$

onde  $c = e^{c_3}$ . Se  $v_0 = v(0)$  é a velocidade inicial, temos que  $c = g + bv_0$  e, portanto, temos que

$$v(t) = -\frac{g}{b} + \left( \frac{g}{b} + v_0 \right) e^{-bt}.$$

Uma vez determinada a expressão da função velocidade, podemos determinar a expressão da função posição. Para isso utilizaremos o seguinte corolário, que é uma consequência imediata da regra da substituição.

**Corolário 5.9.** *Temos que*

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c.$$

Vamos agora obter a expressão da posição instantânea da bola arremessada verticalmente com atrito. Pela expressão obtida acima para a velocidade instantânea, segue que

$$\begin{aligned} s(t) + c_1 &= \int v(t) dt \\ &= -\frac{g}{b} \int 1 dt + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \int e^{-bt} dt \\ &= -\frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \frac{e^{-bt}}{-b} + c_2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

e portanto

$$s(t) = -\frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \frac{e^{-bt}}{-b} + c,$$

onde  $c = c_2 - c_1$  é uma constante arbitrária. Se  $s_0 = s(0)$  é a posição inicial, temos que

$$s_0 = \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \frac{1}{-b} + c,$$

o que mostra que

$$s(t) = s_0 - \frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right).$$

Outra aplicação da regra da substituição é a obtenção da Lei da Conservação da Energia no caso do sistema massa-mola e também no caso do pêndulo sem atrito. No caso do sistema massa mola, temos que equação

$$ms''(t) = -ks(t),$$

para todo instante de tempo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $m$  é a massa e  $k$  é a constante de rigidez da mola. Multiplicando a equação acima por  $s'(t)$  e integrando em relação a  $t$ , segue que

$$m \int s'(t)s''(t) dt = -k \int s(t)s'(t) dt. \tag{5.6}$$

Temos que

$$\int s(t)s'(t) dt = \left(\int y dy\right)_{y=s(t)} = \frac{s(t)^2}{2} + c_1,$$

pois  $dy = s'(t) dt$  e

$$\int s'(t)s''(t) dt = \left(\int z dz\right)_{z=v(t)} = \frac{v(t)^2}{2} + c_2,$$

pois  $dz = v'(t) dt = s''(t) dt$ . Substituindo as expressões das integrais indefinidas na equação (5.6), segue que

$$m \frac{v(t)^2}{2} + k \frac{s(t)^2}{2} = E,$$

onde  $E = -kc_1 - mc_2$  é a energia mecânica do sistema.

O próximo resultado apresenta a regra da substituição na direção oposta do modo como a empregamos até o presente momento.

**Proposição 5.10.** *Temos que*

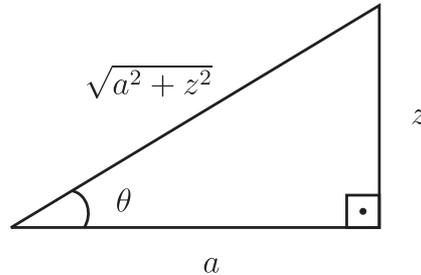
$$\int f(z) dz = \left(\int f(g(\theta))g'(\theta) d\theta\right)_{\theta=g^{-1}(z)}.$$

*Demonstração.* Pela regra da substituição, temos que

$$\left( \int f(z) dz \right)_{z=g(\theta)} = \int f(g(\theta))g'(\theta) d\theta.$$

O resultado segue fazendo-se a substituição  $\theta = g^{-1}(z)$ , pois  $z = g(g^{-1}(z))$ .  $\square$

Esta maneira de utilizar a regra da substituição está ligada com as denominadas *substituições trigonométricas*. Estas substituições estão relacionadas a funções cujas expressões algébricas contém a expressão  $\sqrt{a^2 - z^2}$  ou a expressão  $\sqrt{a^2 + z^2}$ .



**Figura 5.14.** Substituição trigonométrica no caso da expressão  $\sqrt{a^2 + z^2}$ .

A expressão  $\sqrt{a^2 + z^2}$  pode ser representada geometricamente pela hipotenusa do triângulo retângulo cujo cateto oposto ao ângulo  $\theta$  tem comprimento  $z$  e cujo cateto adjacente possui comprimento  $a$ , como ilustrado pela Figura 5.14. Neste caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{z}{a}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (5.7)$$

A primeira relação trigonométrica determina a substituição  $z = g(\theta) = a \operatorname{tg}(\theta)$  e a substituição inversa  $\theta = \operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right)$ , enquanto a segunda determina a relação da expressão considerada com a variável  $\theta$  de modo que

$$a^2 + z^2 = \frac{a^2}{\cos^2(\theta)} = a^2 \sec^2(\theta).$$

Vamos utilizar esta mudança de variáveis para determinar a seguinte integral indefinida

$$\int \frac{1}{a^2 + z^2} dz. \quad (5.8)$$

Temos que  $dz = a \sec^2(\theta) d\theta$ , pois

$$\frac{dz}{d\theta} = (a \operatorname{tg}(\theta))' = a \sec^2(\theta).$$

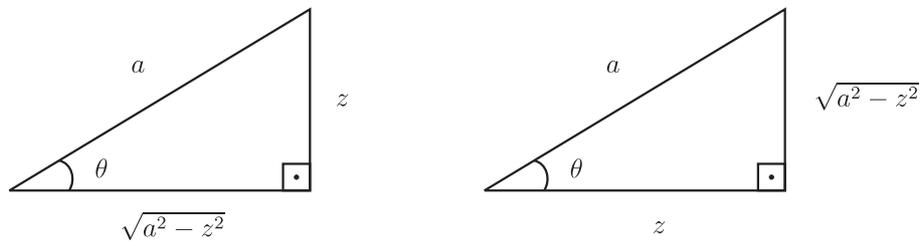
Logo

$$\int \frac{1}{a^2 + z^2} dz = \left( \int \frac{1}{a^2 \sec^2(\theta)^2} a \sec^2(\theta)^2 d\theta \right)_{\theta=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right)} = \left( \int \frac{1}{a} d\theta \right)_{\theta=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right)}$$

e portanto

$$\int \frac{1}{a^2 + z^2} dz = \left( \frac{1}{a} \theta + c \right)_{\theta=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right)} = \frac{1}{a} \operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right) + c.$$

Para verificar que este é o resultado correto, basta derivar a expressão encontrada, o que é deixado como exercício.



**Figura 5.15.** Substituições trigonométricas no caso da expressão  $\sqrt{a^2 - z^2}$ .

Um outro tipo de substituição trigonométrica, relaciona a expressão  $\sqrt{a^2 - z^2}$  ao triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento  $a$  e um dos catetos possui comprimento  $z$ . Neste caso, existem duas possibilidades, como apresentado pela Figura 5.15.

O valor  $z$  pode ser visto como sendo tanto o comprimento do cateto oposto ao ângulo  $\theta$  como o comprimento do cateto adjacente. No primeiro caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{z}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}, \quad (5.9)$$

o que implica que

$$z = a \operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2 - z^2} = a \operatorname{cos}(\theta).$$

Já no segundo caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{cos}(\theta) = \frac{z}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}, \quad (5.10)$$

o que implica que

$$z = a \operatorname{cos}(\theta) \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2 - z^2} = a \operatorname{sen}(\theta).$$

Vamos utilizar a mudança de variáveis  $z = a \operatorname{cos}(\theta)$  para determinar a seguinte integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz. \quad (5.11)$$

Temos que  $\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{z}{a}\right)$  e que  $dz = -a \operatorname{sen}(\theta) d\theta$ , pois

$$\frac{dz}{d\theta} = (a \operatorname{cos}(\theta))' = -a \operatorname{sen}(\theta).$$

Logo

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz = \left( \int \frac{1}{a \operatorname{sen}(\theta)} (-a \operatorname{sen}(\theta)) d\theta \right)_{\theta=\operatorname{acos}\left(\frac{z}{a}\right)} = \left( \int -1 d\theta \right)_{\theta=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{a}\right)}$$

e portanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz = (-\theta + c)_{\theta=\operatorname{acos}\left(\frac{z}{a}\right)} = -\operatorname{acos}\left(\frac{z}{a}\right) + c.$$

Mais uma vez, para verificar que este é o resultado correto, basta derivar a expressão encontrada, o que também é deixado como exercício.

Outra propriedade fundamental da integral indefinida é a denominada *regra de integração por partes*, que veremos a seguir ser um reflexo da regra da derivada do produto.

**Proposição 5.11.** *Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis, temos que*

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx.$$

*Demonstração.* Pela regra da derivada da soma e do produto, temos que

$$\begin{aligned} \left( f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \right)' &= (f(x)g(x))' - \left( \int f(x)g'(x) dx \right)' \\ &= (f'(x)g(x) + g'(x)f(x)) - g'(x)f(x) \\ &= f'(x)g(x) \\ &= \left( \int f'(x)g(x) dx \right)' . \end{aligned}$$

□

Uma aplicação da integração por partes é o cálculo da integral indefinida do logaritmo, que pode ser vista como a integral de um produto

$$\int \log(|x|) dx = \int 1 \log(|x|) dx.$$

Se  $f'(x) = 1$  e  $g(x) = \log(|x|)$ , temos que  $g'(x) = 1/x$  e podemos escolher  $f(x) = x$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int \log(|x|) dx &= \int f'(x)g(x) dx \\ &= f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx \\ &= x \log(|x|) - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \log(|x|) - x + c. \end{aligned}$$

Uma outra aplicação da integração por partes é o cálculo da integral indefinida do quadrado do seno

$$\int \text{sen}(\theta)^2 d\theta = \int \text{sen}(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta.$$

Se  $f'(\theta) = \text{sen}(\theta)$  e  $g(\theta) = \text{sen}(\theta)$ , temos que  $g'(\theta) = \text{cos}(\theta)$  e podemos escolher  $f(\theta) = -\text{cos}(\theta)$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int \text{sen}(\theta)^2 d\theta &= \int f'(\theta)g(\theta) d\theta \\ &= f(\theta)g(\theta) - \int g'(\theta)f(\theta) d\theta \\ &= -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) - \int \text{cos}(\theta)(-\text{cos}(\theta)) d\theta \\ &= -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) + \int \text{cos}(\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Como  $\text{cos}(\theta)^2 = 1 - \text{sen}(\theta)^2$ , segue que

$$\begin{aligned} \int \text{sen}(\theta)^2 d\theta &= -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) + \int (1 - \text{sen}(\theta)^2) d\theta \\ &= -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) + \int 1 d\theta - \int \text{sen}(\theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\int \text{sen}(\theta)^2 d\theta = -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) + \theta - \int \text{sen}(\theta)^2 d\theta$$

Portanto

$$2 \int \operatorname{sen}(\theta)^2 d\theta = \theta - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + c$$

implicando que

$$\int \operatorname{sen}(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)) + c.$$

A integral indefinida do quadrado do cosseno pode ser obtido de maneira similar e é deixada como exercício.

Uma dificuldade para a aplicação deste método é identificar corretamente o produto e quem deve ser a função derivada neste produto. Quando temos o produto de uma potência  $x^n$  por  $\operatorname{sen}(ax)$ ,  $\cos(ax)$  ou  $e^{ax}$  sempre escolhemos  $g(x) = x^n$ . Por exemplo, vamos calcular a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

Se  $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$  e  $g(x) = x^2$ , temos que  $g'(x) = 2x$  e podemos escolher  $f(x) = -\cos(x)$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= -\cos(x) x^2 - \int 2x(-\cos(x)) dx \\ &= -\cos(x) x^2 + 2 \int x \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Novamente aplicamos a integração por partes escolhendo agora  $f'(x) = \cos(x)$  e  $g(x) = x$ . Neste caso, temos que  $g'(x) = 1$  e podemos escolher  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= -\cos(x) x^2 + 2 \int x \cos(x) dx \\ &= -\cos(x) x^2 + 2 \left( \operatorname{sen}(x)x - \int 1 \operatorname{sen}(x) dx \right) \\ &= -\cos(x) x^2 + 2 (\operatorname{sen}(x)x - (-\cos(x))) + c \\ &= -\cos(x) x^2 + 2 \operatorname{sen}(x)x + 2 \cos(x) + c. \end{aligned}$$

(5.12)

### 5.3.1 Exercícios

1) Mostre que

$$\left( \frac{1}{a} \operatorname{atg} \left( \frac{z}{a} \right) + c \right)' = \frac{1}{a^2 + z^2}.$$

2) Mostre que

$$\left( -a \cos \left( \frac{z}{a} \right) + c \right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

3) Calcule a seguinte integral

$$\int \frac{1}{(a^2 - z^2)^{3/2}} dz,$$

utilizando o método da substituição trigonométrica.

4) Utilize integração por partes para mostrar que

$$\int \cos(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)) + c.$$

## 5.4 Somas de Riemann e aplicações

Nesta seção vamos mostrar como podemos utilizar a integral definida de uma dada função  $f$  num dado intervalo  $[a, b]$  para o cálculo de volumes, comprimentos e áreas. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais, temos que a integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  pode ser decomposta da seguinte forma

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (5.13)$$

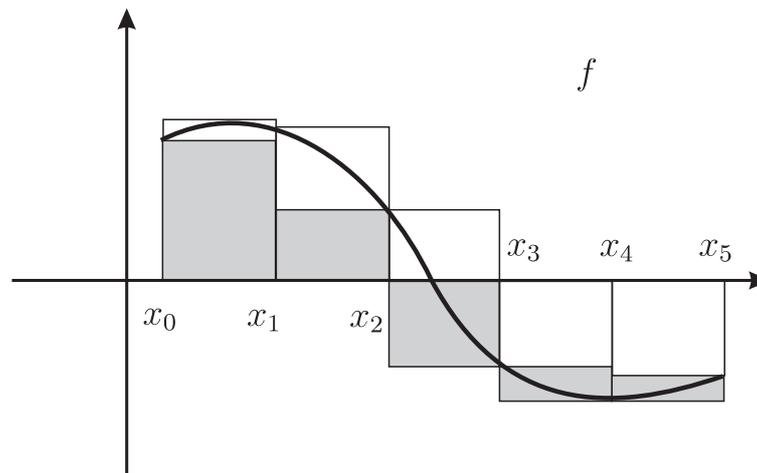
onde  $x_k = a + k\Delta x$  e

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Denotando por  $M_k$  e por  $m_k$ , respectivamente, o máximo e o mínimo da função  $f$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , pela monotonicidade da integral, temos que

$$m_k \Delta x \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq M_k \Delta x,$$

como ilustrado pela Figura 5.16.



**Figura 5.16.** Somas superiores e inferiores da função  $f$ .

A  $n$ -ésima soma superior e a  $n$ -ésima soma inferior são definidas, respectivamente, por

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x \quad \text{e} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x.$$

Utilizando a equação (5.13), segue que

$$s_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n. \quad (5.14)$$

É possível mostrar que se  $f$  é contínua as seqüências das somas inferiores e das somas superiores se aproximam da integral. Na proposição seguinte, demonstramos este fato apenas para o caso de funções monótonas.

**Proposição 5.12.** *Se  $f$  é contínua, então*

$$s_n, S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar a proposição apenas no caso em que  $f$  é monótona. Consideramos o caso em que  $f$  é crescente, deixando o caso em que  $f$  é decrescente como exercício. Primeiro mostramos que  $S_n - s_n \rightarrow 0$ . De fato, como  $f$  é crescente, temos que  $M_k = f(x_{k+1})$  e  $m_k = f(x_k)$ , como ilustra a Figura 5.17.

Neste caso, temos que

$$S_n = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x$$

e

$$s_n = (f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))\Delta x.$$

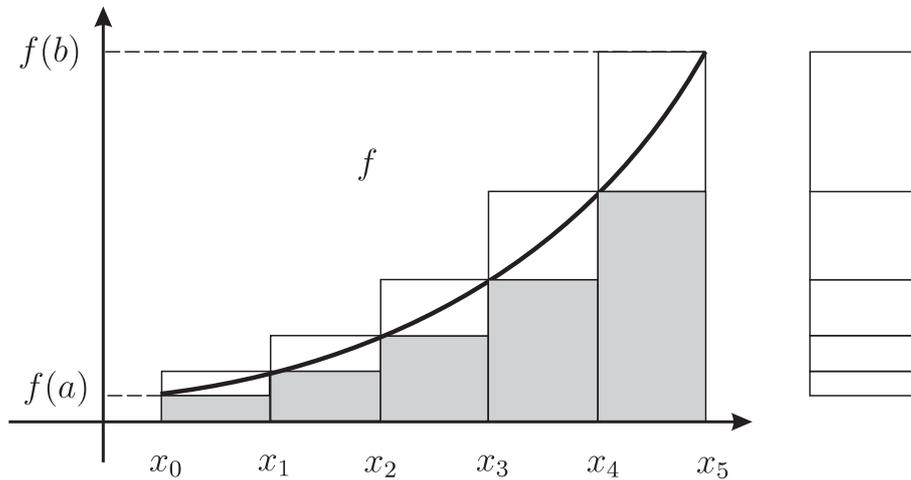
Segue então que

$$S_n - s_n = (f(x_n) - f(x_0))\Delta x$$

e portanto que

$$S_n - s_n = (f(b) - f(a)) \left( \frac{b-a}{n} \right) \rightarrow 0,$$

como ilustrado pela Figura 5.17.



**Figura 5.17.** Somas superiores e inferiores de uma função monótona.

Subtraindo  $s_n$  nos três termos da desigualdade (5.14), segue que

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - s_n \leq S_n - s_n.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\int_a^b f(x) dx - s_n \rightarrow 0,$$

que é o mesmo que

$$s_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Finalmente temos que

$$S_n = (S_n - s_n) + s_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

□

Escolhendo um ponto  $x_k^*$  qualquer do intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , definimos a denominada *soma de Riemann da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  com  $n$  fatores* por

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x$$

Como  $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$ , segue que

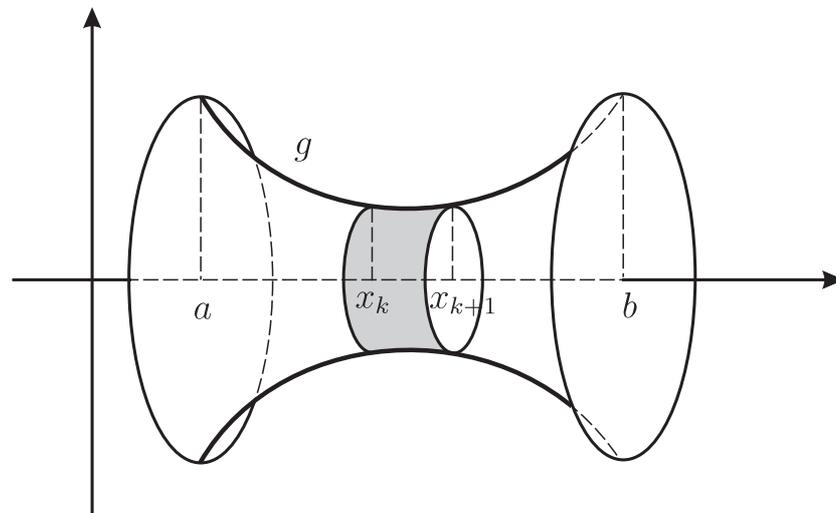
$$s_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x \leq S_n.$$

Pela Proposição 5.12 e pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

o que explica a notação de integral, onde a letra grega  $\Sigma$ , que denota somatório, é substituída pela letra latina “S” estilizada  $\int$  e, por outro lado, a letra grega  $\Delta$ , que denota diferença, é substituída pela letra latina “d”.

Os conceitos de somas superior, inferior e de Riemann podem ser utilizado para o cálculo de volumes, comprimentos e áreas. Dada uma função geratriz  $g \geq 0$  definida no intervalo  $[a, b]$ , denotamos por  $S_h$  a superfície obtida pela rotação do gráfico de  $g$  em relação ao eixo horizontal, como ilustrado pela Figura 5.18.



**Figura 5.18.** Volume de um sólido de rotação em relação ao eixo horizontal.

Denotamos por  $R_h$  a região interna delimitada pela superfície  $S_h$  e pelos planos transversais ao eixo horizontal passando, respectivamente, pelo ponto  $x = a$  e pelo ponto  $x = b$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que o volume da região  $R_h$  é dado por

$$V(R_h) = \sum_{k=0}^{n-1} V(R_h^k),$$

que é a soma dos volumes das regiões  $R_h^k$  delimitadas pela superfície  $S_h$  e pelos planos transversais ao eixo horizontal passando, respectivamente, pelo ponto  $x = x_k$  e pelo ponto  $x = x_{k+1}$ , como ilustrado pela Figura 5.18. Para cada  $k$ , temos que o volume  $V(R_h^k)$  menor

que o volume do cilindro de altura  $\Delta x$  e raio  $L_k$  e é maior que o volume do cilindro de altura  $\Delta x$  e raio  $l_k$ , onde  $L_k$  é o máximo e  $l_k$  é o mínimo da função  $g$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ . Como o volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura, temos que

$$\pi l_k^2 \Delta x \leq V(R_h^k) \leq \pi L_k^2 \Delta x.$$

Definindo-se  $f(x) = \pi g(x)^2$ , temos que o mínimo e o máximo da função  $f$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  são dados, respectivamente, por

$$m_k = \pi l_k^2 \quad \text{e} \quad M_k = \pi L_k^2.$$

Temos então que

$$m_k \Delta x \leq V(R_h^k) \leq M_k \Delta x$$

e, somando sobre  $k$ , temos que

$$s_n \leq V(R_h) \leq S_n, \tag{5.15}$$

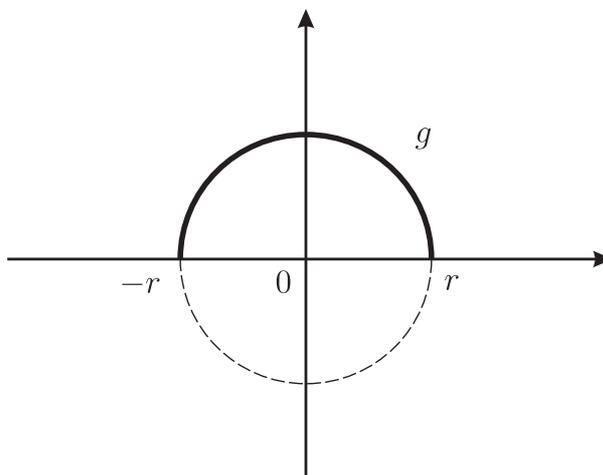
onde

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x \quad \text{e} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x$$

são, respectivamente, a  $n$ -ésima soma superior e a  $n$ -ésima soma inferior da função  $f$ . Pela equação (5.15), pela Proposição 5.12 e pelo Teorema do Sanduíche, temos que

$$V(R_h) = \int_a^b f(x) dx = \pi \int_a^b g(x)^2 dx. \tag{5.16}$$

Vamos agora aplicar estes resultados e calcular o volume da esfera de raio  $r$ . Vamos primeiro considerar esta esfera dada pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[-r, r]$ , como mostra a Figura 5.19.



**Figura 5.19.** Volume da esfera por rotação em relação ao eixo horizontal.

Pela equação (5.16), temos então que

$$\begin{aligned} V(R_h) &= \pi \int_{-r}^r g(x)^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, dada uma função geratriz  $g \geq 0$  definida no intervalo  $[a, b]$ , com  $a \geq 0$ , denotamos por  $S_v$  a superfície obtida pela rotação do gráfico de  $g$  em relação ao eixo vertical, como ilustrado pela Figura 5.20. Denotamos por  $R_v$  a região interna delimitada pela superfície  $S_v$ , pelas superfícies laterais do cilindro de raio  $a$  e altura  $f(a)$  e do cilindro de raio  $b$  e altura  $f(b)$  e pelo plano perpendicular ao eixo vertical contendo o eixo horizontal. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que o volume da região  $R_v$  pode ser aproximado por

$$V(R_v) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} V(T_k),$$

que é a soma dos volumes

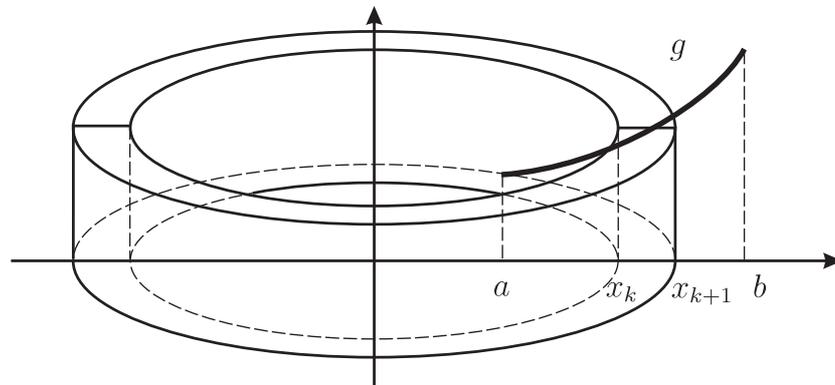
$$V(T_k) = \pi(x_{k+1}^2 - x_k^2)g(x_k^*),$$

dos tubos cilíndricos, que são obtidos pela diferença

$$\pi x_{k+1}^2 g(x_k^*) - \pi x_k^2 g(x_k^*),$$

dos volumes dos cilindros externo e interno, cujos raios são, respectivamente, iguais a  $x_{k+1}$  e a  $x_k$  e cuja altura comum é igual a  $g(x_k^*)$ , onde

$$x_k^* = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}.$$



**Figura 5.20.** Volume de um sólido de rotação em relação ao eixo vertical.

Quanto maior o número de cilindros, mais próxima esta soma vai estar do volume da região  $R_v$ , de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} V(T_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \pi(x_{k+1}^2 - x_k^2)g(x_k^*) & (5.17) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \pi(x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k)g(x_k^*) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k^* g(x_k^*) \Delta x \\ &\rightarrow V(R_v), \end{aligned}$$

(5.18)

onde utilizamos o fato de que

$$2x_k^* = x_{k+1} + x_k \quad \text{e} \quad \Delta x = x_{k+1} - x_k.$$

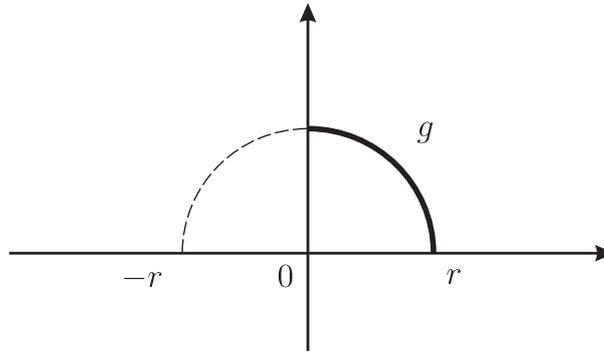
Por outro lado, definindo-se  $f(x) = 2\pi xg(x)$ , temos que o volume aproximado é uma soma de Riemann da função  $f$  e portanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(T_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Pela unicidade dos limites segue que

$$V(R_v) = \int_a^b f(x) dx = 2\pi \int_a^b xg(x) dx. \quad (5.19)$$

Uma outra maneira de calcular o volume de uma esfera é considerar o hemisfério superior da esfera de raio  $r$  dado pela rotação, em relação ao eixo vertical, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[0, r]$ , como mostra a Figura 5.21. Podemos então calcular o volume deste hemisfério utilizando a equação (5.19), o que é deixado como exercício.



**Figura 5.21.** Volume do hemisfério por rotação em relação ao eixo vertical.

Vamos agora determinar a integral que fornece o comprimento do gráfico de uma função suave  $g$ , definida em  $[a, b]$ , como ilustrado pela Figura 5.22. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que o comprimento de  $g$  pode ser aproximada por

$$C(g) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} C_k,$$

que é o comprimento da poligonal ilustrado pela Figura 5.22 que é dado pela soma dos comprimentos  $C_k$  dos segmentos de reta ligando os pontos  $(x_k, g(x_k))$  e  $(x_{k+1}, g(x_{k+1}))$ .

Pelo teorema de Pitágoras, temos que

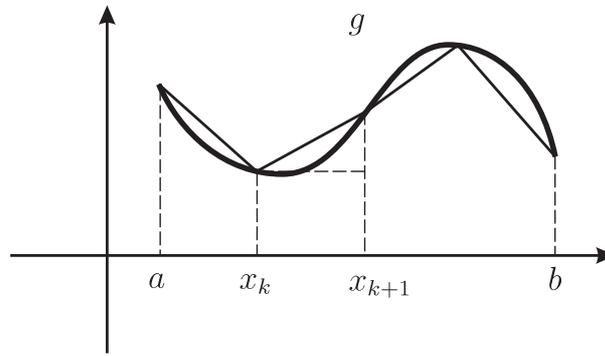
$$C_k^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe  $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$  tal que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x_k^*).$$

Logo

$$C_k^2 = (\Delta x)^2 + (g'(x_k^*)\Delta x)^2.$$



**Figura 5.22.** Comprimento do gráfico de uma função suave.

e portanto

$$C_k = \sqrt{1 + g'(x_k^*)} \Delta x.$$

Quanto maior o número de segmentos de reta, mais próxima esta soma vai estar do comprimento de  $g$ , de modo que

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + g'(x_k^*)^2} \Delta x \rightarrow C(g).$$

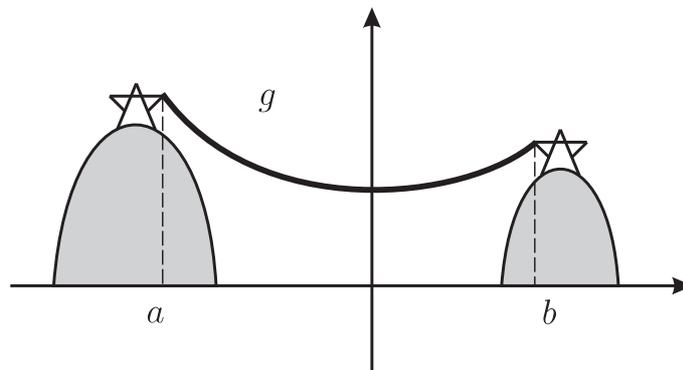
Por outro lado, definindo-se  $f(x) = \sqrt{1 + g'(x)^2}$ , temos que o volume aproximado é uma soma de Riemann da função  $f$  e portanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Pela unicidade dos limites segue que

$$C(g) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx. \quad (5.20)$$

Vamos aplicar este resultado para calcular o comprimento de um cabo de energia sustentado por duas torres de alta tensão, como ilustrado pela Figura 5.23.



**Figura 5.23.** Comprimento de um cabo de energia.

A função que descreve essa curva numa unidade de medida conveniente é a denominada *catenária* ou *cosseno hiperbólico* cuja expressão é dada por

$$g(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A derivada do cosseno hiperbólico é denominada *seno hiperbólico* e sua expressão é

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Essas funções são denominadas funções trigonométricas hiperbólicas, pois do mesmo modo que as funções trigonométricas clássicas satisfazem equação do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ , ou seja,

$$\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)^2 = 1,$$

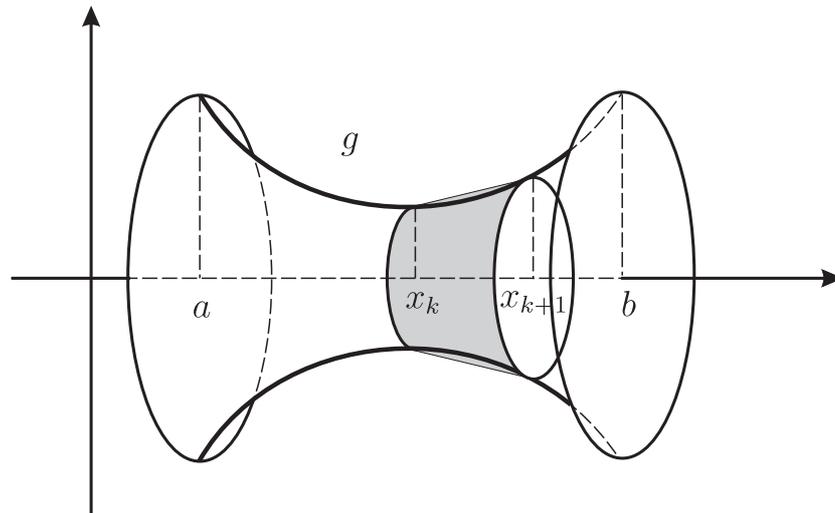
elas satisfazem a equação da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ , ou seja,

$$\operatorname{cosh}(x)^2 - \operatorname{senh}(x)^2 = 1.$$

A verificação dessa propriedade é deixada como exercício. Pela equação (5.20), temos então que

$$\begin{aligned} C(g) &= \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{cosh}'(x)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{senh}(x)^2} dx \\ &= \int_a^b \operatorname{cosh}(x) dx \\ &= [\operatorname{senh}(x) + c]_a^b, \\ &= \operatorname{senh}(b) - \operatorname{senh}(a). \end{aligned}$$

Vamos encerrar esta seção determinando a integral que fornece a área da superfície  $S_h$ , obtida pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico de  $g \geq 0$ , definida em  $[a, b]$ , como ilustrado pela Figura 5.24.



**Figura 5.24.** Área de uma superfície de rotação em relação ao eixo horizontal.

Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que a área de  $S_h$  pode ser aproximada por

$$A(S_v) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} A(L_k),$$

que é a soma das áreas

$$A(L_k) = 2\pi \left( \frac{g(x_{k+1}) + g(x_k)}{2} \right) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

das cascas laterais  $L_k$  obtidas pela rotação do segmento de reta que liga o ponto  $(x_k, g(x_k))$  ao ponto  $(x_{k+1}, g(x_{k+1}))$ , como ilustrado pela Figura 5.24.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe  $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$  tal que

$$g(x_k^*) = \frac{g(x_k) + g(x_{k+1})}{2}$$

pois este valor está entre  $g(x_k)$  e  $g(x_{k+1})$ . Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe  $x_k^{**} \in [x_k, x_{k+1}]$  tal que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x_k^{**}).$$

Finalmente, temos que quanto maior o número de cascas laterais, mais próxima esta soma vai estar da área da superfície  $S_h$ , de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A(L_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi g(x_k^*) \sqrt{(\Delta x)^2 + (g'(x_k^{**}) \Delta x)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi g(x_k^*) \sqrt{1 + g'(x_k^{**})^2} \Delta x \\ &\rightarrow A(S_h) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Por outro lado, definindo-se  $f(x) = 2\pi g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2}$ , temos que o volume aproximado lembra uma soma de Riemann da função  $f$  e de fato pode-se mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} A(L_k) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Pela unicidade dos limites segue que

$$A(S_h) = \int_a^b f(x) dx = 2\pi \int_a^b g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2} dx. \tag{5.22}$$

Vamos agora aplicar este resultado e calcular a área da esfera de raio  $r$ . Temos que a esfera é dada pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[-r, r]$ , como mostra a figura (5.19). Pela equação (5.22), temos então que

$$\begin{aligned} A(S_h) &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r dx \\ &= 4\pi r^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que

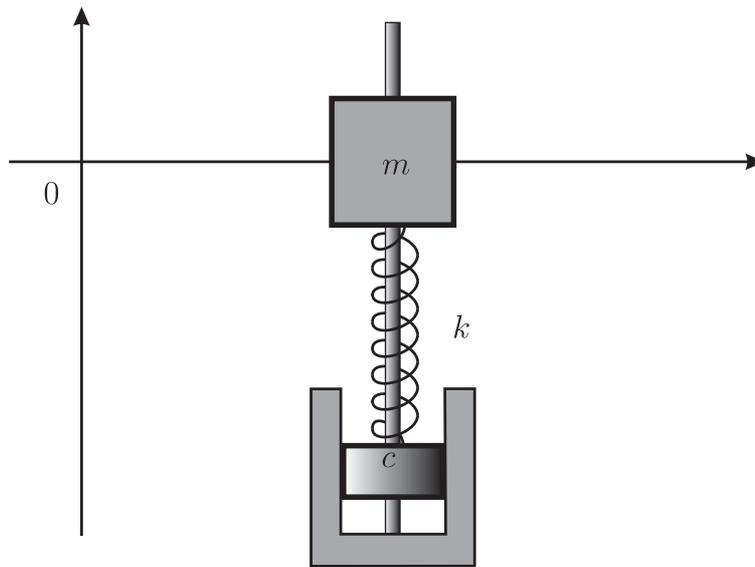
$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

### 5.4.1 Exercícios

- 1) Utilize a equação (5.19) para calcular o volume do hemisfério superior da esfera de raio  $r$  dado pela rotação, em relação ao eixo vertical, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[0, r]$ , como mostra a figura (5.21).
- 2) A partir das definições, mostre que  $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 5.5 Frações parciais

O mecanismo de suspensão de um veículo consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor, como mostra a Figura 5.25.



**Figura 5.25.** Mecanismo de suspensão de um veículo em equilíbrio.

Denotando por  $s(t)$  a posição vertical de um veículo de massa  $m$  em relação a posição de equilíbrio, temos que a força da mola é dada, pela lei de Hooke, por  $FH = -ks(t)$  e a força do amortecedor é dada por  $FR = -cv(t)$ , onde  $v(t)$  é a velocidade instantânea e a constante  $c$  é denominada viscosidade do amortecedor. Denotando por  $a(t)$  a aceleração instantânea, pela segunda lei de Newton,

$$ma(t) = -ks(t) - cv(t), \quad (5.23)$$

para todo tempo  $t \geq 0$ . Vamos supor  $s(t)$  é positiva num dado intervalo. Neste caso, podemos escrever  $s(t) = e^{y(t)}$ , onde  $y(t) = \log(s(t))$ . Temos então que

$$v(t) = s'(t) = y'(t)e^{y(t)} \quad \text{e} \quad a(t) = s''(t) = (y''(t) + y'(t)^2)e^{y(t)}.$$

Substituindo na equação (5.23), obtemos que

$$m(y''(t) + y'(t)^2)e^{y(t)} = -ke^{y(t)} - cy'(t)e^{y(t)}.$$

Cancelando o fator comum  $e^{y(t)}$ , obtemos a seguinte equação

$$m(y''(t) + y'(t)^2) = -k - cy'(t). \quad (5.24)$$

que é conhecida como *equação de Ricatti* associada à equação (5.23). Podemos isolar o termo em que aparece a derivada de  $y$ , de modo que

$$my''(t) = -k - cy'(t) - my'(t)^2$$

e, portanto, temos que

$$\frac{y''(t)}{my'(t)^2 + cy'(t) + k} = -\frac{1}{m}.$$

Integrando os dois lados desta equação na variável  $t$ , segue que

$$\int \frac{y''(t)}{my'(t)^2 + cy'(t) + k} dt = -\frac{t}{m} + D.$$

Para calcularmos primeira integral fazemos a substituição  $x = y'(t)$ . Neste caso, temos que  $dx = y''(t) dt$ , o que mostra que

$$\int \frac{y''(t)}{my'(t)^2 + cy'(t) + k} dt = \left( \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \right)_{x=y'(t)}$$

e, portanto, que

$$\left( \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \right)_{x=y'(t)} = -\frac{t}{m} + D. \quad (5.25)$$

A solução da integral

$$\int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \quad (5.26)$$

depende das raízes da equação

$$mx^2 + cx + k = 0, \quad (5.27)$$

denominada *equação característica* associada à equação (5.23), que pode ser escrita como

$$ms'' + cs' + ks = 0, \quad (5.28)$$

e que também é conhecida como *equação do sistema massa-mola-amortecedor*. Existem então três possibilidades dependendo do sinal de  $\Delta = c^2 - 4mk$ :

- 1) **supercrítico** ( $\Delta > 0$ ): duas raízes reais distintas  $r_1$  e  $r_2$ ,
- 2) **crítico** ( $\Delta = 0$ ): uma única raiz real  $r$  e
- 3) **subcrítico** ( $\Delta < 0$ ): duas raízes complexas conjugadas  $r + i\omega$  e  $r - i\omega$  onde

$$r = \frac{-c}{2m} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}.$$

Para cada uma destas três situações, existe uma maneira de se calcular a integral (5.27).

- 1) No caso supercrítico, utilizamos o denominado *método das frações parciais*. Neste caso, temos que

$$mx^2 + cx + k = m(x - r_1)(x - r_2)$$

e vamos mostrar que existem constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{1}{mx^2 + cx + k} = \frac{1}{m} \left( \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_1} \right).$$

Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , primeiro colocamos as duas frações do lado direito no mesmo denominador

$$\frac{1}{mx^2 + cx + k} = \frac{A(x - r_2) + B(x - r_1)}{m(x - r_1)(x - r_2)}.$$

Como os denominadores são iguais, o mesmo vale para os numeradores, o que mostra que

$$1 = A(x - r_2) + B(x - r_1) = (A + B)x - (Ar_2 + Br_1).$$

Temos então uma igualdade entre dois polinômios, o que acontece somente se os seus coeficientes são também iguais. No lado direito o coeficiente do termo constante é igual a 1 e o coeficiente que multiplica  $x$  é igual a zero, o que implica no seguinte sistema de equações onde as constantes  $A$  e  $B$  são as incógnitas:

$$A + B = 0 \quad \text{e} \quad -(Ar_2 + Br_1) = 1.$$

Da primeira equação, temos que  $B = -A$ , o que substituindo na segunda equação, mostra que

$$A(r_1 - r_2) = -(Ar_2 - Ar_1) = 1.$$

Como  $r_1 \neq r_2$ , temos que

$$A = \frac{1}{r_1 - r_2} = -B.$$

A integral (5.27) pode então ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx &= \frac{1}{m} \left( \int \frac{A}{x - r_1} dx + \int \frac{B}{x - r_2} dx \right) \\ &= \frac{1}{m} (A \log(|x - r_1|) - A \log(|x - r_2|)) \\ &= \frac{1}{m(r_1 - r_2)} \log \left( \left| \frac{x - r_1}{x - r_2} \right| \right) + E. \end{aligned}$$

2) No caso crítico, temos que

$$mx^2 + cx + k = m(x - r)^2.$$

Neste caso, a integral (5.27) é dada por

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx &= \frac{1}{m} \int \frac{1}{(x - r)^2} dx \\ &= \frac{1}{m} \left( \int \frac{1}{u^2} du \right)_{u=x-r} \\ &= -\frac{1}{m(x - r)} + E. \end{aligned}$$

3) Finalmente, no caso subcrítico, temos que

$$\begin{aligned} mx^2 + cx + k &= m(x - (r + i\omega))(x - (r - i\omega)) \\ &= m((x - r) - i\omega)((x - r) + i\omega) \\ &= m((x - r)^2 + \omega^2), \end{aligned}$$

o que mostra que a integral (5.27) é dada por

$$\int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx = \frac{1}{m} \int \frac{1}{(x-r)^2 + \omega^2} dx.$$

Fazendo a substituição  $z = x - r$ , obtemos que

$$\int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx = \frac{1}{m} \int \frac{1}{z^2 + \omega^2} dz.$$

Utilizamos então a substituição trigonométrica  $z = \omega \operatorname{tg}(\theta)$ , ilustrada pela Figura 5.26.

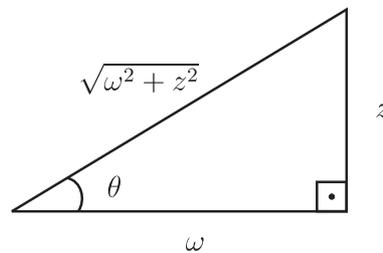
Neste caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{z}{\omega} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{\omega^2}{\sqrt{z^2 + \omega^2}}. \quad (5.29)$$

Logo temos que

$$z^2 + \omega^2 = \omega^2 \sec(\theta)^2 \quad \text{e} \quad dz = \omega \sec(\theta)^2 d\theta.$$

Portanto



**Figura 5.26.** Substituição trigonométrica.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int \frac{1}{z^2 + \omega^2} dx &= \frac{1}{m} \left( \int \frac{1}{\omega^2 \sec(\theta)^2} \omega \sec(\theta)^2 d\theta \right)_{z=\omega \operatorname{tg}(\theta)} \\ &= \frac{1}{m\omega} \left( \int 1 d\theta \right)_{z=\omega \operatorname{tg}(\theta)} \\ &= \frac{1}{m\omega} (\theta + E_1)_{z=\omega \operatorname{tg}(\theta)}. \end{aligned}$$

Retornando à variável  $z$  e depois à variável  $x$ , temos que

$$\int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx = \frac{1}{m\omega} \operatorname{atg} \left( \frac{x-r}{\omega} \right) + E,$$

onde  $E = E_1/m\omega$ .

Utilizando a equação (5.25) e escolhendo  $C = D - E$ , temos que a solução  $y(t)$  da equação de Ricatti satisfaz as seguintes equações, dependendo do sinal de  $\Delta$ :

- 1) **supercrítico** ( $\Delta > 0$ ):  $\frac{1}{m(r_1 - r_2)} \log \left( \left| \frac{y'(t) - r_1}{y'(t) - r_2} \right| \right) = -\frac{t}{m} + C,$
- 2) **crítico** ( $\Delta = 0$ ):  $-\frac{1}{m(y'(t) - r)} = -\frac{t}{m} + C \quad \text{e}$
- 3) **subcrítico** ( $\Delta < 0$ ):  $\frac{1}{m\omega} \operatorname{atg} \left( \frac{y'(t) - r}{\omega} \right) = -\frac{t}{m} + C.$

Em cada um destes casos, podemos resolver a equação de modo a encontrar a expressão de  $y'(t)$ .

1) No caso supercrítico, temos que

$$\log \left( \left| \frac{y'(t) - r_1}{y'(t) - r_2} \right| \right) = t(r_2 - r_1) + A,$$

onde  $A = m(r_1 - r_2)C$ . Isto mostra que

$$\frac{y'(t) - r_1}{y'(t) - r_2} = Be^{t(r_2 - r_1)},$$

onde  $B$  é uma nova constante arbitrária igual a  $e^A$  ou a  $-e^A$  dependendo do sinal do lado esquerdo desta equação. Temos então que

$$y'(t) = \frac{r_1 - r_2 Be^{t(r_2 - r_1)}}{1 - Be^{t(r_2 - r_1)}}.$$

2) No caso crítico, temos que

$$\frac{1}{y'(t) - r} = t + B,$$

onde  $B = -mC$ , o que mostra que

$$y'(t) = r + \frac{1}{t + B}.$$

3) Finalmente, no caso subcrítico, temos que

$$\operatorname{atg} \left( \frac{y'(t) - r}{\omega} \right) = -\omega t + B,$$

onde  $A = m\omega C$ , o que mostra que

$$y'(t) = r + \omega \operatorname{tg}(-\omega t + B).$$

Temos então que

1) **supercrítico** ( $\Delta > 0$ ): 
$$y'(t) = \frac{r_1 - r_2 Be^{t(r_2 - r_1)}}{1 - Be^{t(r_2 - r_1)}},$$

2) **crítico** ( $\Delta = 0$ ): 
$$y'(t) = r + \frac{1}{t + B} \quad \text{e}$$

3) **subcrítico** ( $\Delta < 0$ ): 
$$y'(t) = r + \omega \operatorname{tg}(-\omega t + B).$$

Se desejamos obter a expressão algébrica da função posição instantânea, devemos primeiro obter

$$y(t) = \int y'(t) dt,$$

uma vez que  $s(t) = e^{z(t)}$ .

1) No caso supercrítico, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{r_1 - r_2 B e^{t(r_2-r_1)}}{1 - B e^{t(r_2-r_1)}} dt \\ &= \int \frac{r_1(1 - B e^{t(r_2-r_1)} + B e^{t(r_2-r_1)}) - r_2 B e^{t(r_2-r_1)}}{1 - B e^{t(r_2-r_1)}} dt \\ &= \int \left( r_1 + \frac{-(r_2 - r_1) B e^{t(r_2-r_1)}}{1 - B e^{t(r_2-r_1)}} \right) dt, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\begin{aligned} y(t) &= r_1 t + \int \frac{-(r_2 - r_1) B e^{t(r_2-r_1)}}{1 - B e^{t(r_2-r_1)}} dt \\ &= r_1 t + \left( \int \frac{1}{x} dx \right)_{x=1-B e^{t(r_2-r_1)}}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a substituição  $x = 1 - B e^{t(r_2-r_1)}$  tal que

$$dx = -(r_2 - r_1) B e^{t(r_2-r_1)} dt.$$

Portanto, segue que

$$y(t) = r_1 t + \log(|1 - B e^{t(r_2-r_1)}|) + A.$$

2) No caso crítico, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \left( r + \frac{1}{t+B} \right) dt \\ &= r t + \log(|t+B|) + A. \end{aligned}$$

3) Finalmente, no caso subcrítico, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int (r + \omega \operatorname{tg}(-\omega t + B)) dt \\ &= r t + \int \frac{\omega \operatorname{sen}(-\omega t + B)}{\cos(-\omega t + B)} dt \\ &= r t + \left( \int \frac{1}{x} dx \right)_{x=\cos(-\omega t + B)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a substituição  $x = \cos(-\omega t + B)$  tal que

$$dx = \omega \operatorname{sen}(-\omega t + B) dt.$$

$$z(t) = r t + \log(|\cos(-\omega t + B)|) + A.$$

Temos então que

- 1) **supercrítico** ( $\Delta > 0$ ):  $y(t) = r_1 t + \log(|1 - B e^{t(r_2-r_1)}|) + A,$   
 2) **crítico** ( $\Delta = 0$ ):  $y(t) = r t + \log(|t+B|) + A$  e  
 3) **subcrítico** ( $\Delta < 0$ ):  $y(t) = r t + \log(|\cos(-\omega t + B)|) + A.$

Para determinarmos a expressão algébrica posição instantânea, basta então utilizarmos a fórmula

$$s(t) = e^{y(t)}.$$

1) No caso supercrítico, temos que

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{r_1 t + \log(|1 - Be^{t(r_2 - r_1)}|) + A} \\ &= e^A e^{r_1 t} e^{\log(|1 - Be^{t(r_2 - r_1)}|)} \\ &= c_1 e^{r_1 t} (1 - Be^{t(r_2 - r_1)}) \end{aligned}$$

onde  $c_1 = \pm e^A$ , dependendo do sinal de  $1 - Be^{t(r_2 - r_1)}$ . Temos então que

$$\begin{aligned} s(t) &= c_1 e^{r_1 t} - B c_1 e^{r_1 t} e^{t(r_2 - r_1)} \\ &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \end{aligned}$$

onde  $c_2 = -B c_1$ .

2) No caso crítico, temos que

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{rt + \log(|t + B|) + A} \\ &= e^A e^{rt} e^{\log(|t + B|)} \\ &= c_1 e^{rt} (t + B), \end{aligned}$$

onde  $c_1 = \pm e^A$ , dependendo do sinal de  $t + B$ . Temos então que

$$s(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt},$$

onde  $c_2 = B c_1$ .

3) Finalmente, no caso subcrítico, temos que

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{rt + \log(|\cos(-\omega t + B)|) + A} \\ &= e^A e^{rt} e^{\log(|\cos(-\omega t + B)|)} \\ &= D e^{rt} \cos(-\omega t + B) \end{aligned}$$

onde  $D = \pm e^A$ , dependendo do sinal de  $\cos(-\omega t + B)$ . Temos então que

$$\begin{aligned} s(t) &= D e^{rt} (\cos(\omega t) \cos(B) + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(B)) \\ &= c_1 e^{rt} \cos(\omega t) + c_2 e^{rt} \text{sen}(\omega t), \end{aligned}$$

onde  $c_1 = D \cos(B)$  e  $c_2 = D \text{sen}(B)$ .

Para constantes arbitrárias  $c_1$  e  $c_2$ , segue então que

- 1) **supercrítico** ( $\Delta > 0$ ):  $s(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ ,
- 2) **crítico** ( $\Delta = 0$ ):  $s(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt}$  e
- 3) **subcrítico** ( $\Delta < 0$ ):  $s(t) = c_1 e^{rt} \cos(\omega t) + c_2 e^{rt} \text{sen}(\omega t)$ .

Suponha que  $m = 1$ ,  $c = 2$  e  $k = 1$ . Neste caso, a equação característica associada é igual a

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

cujas únicas raízes reais são  $r = -1$  e tal que  $\Delta = 0$ . Como este é o exemplo de um sistema crítico, temos que a função posição é da forma

$$s(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt} = c_1 t e^{-t} + c_2 e^{-t}.$$

Vamos então determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , sabendo que  $s(0) = 0$  e que  $v(0) = -1$ . Temos que

$$0 = s(0) = c_1(0)e^0 + c_2 e^0 = c_2,$$

mostrando que  $c_2 = 0$ . Por outro lado, temos que

$$v(t) = s'(t) = (c_1 t e^{-t})' = c_1(1 - t)e^{-t}.$$

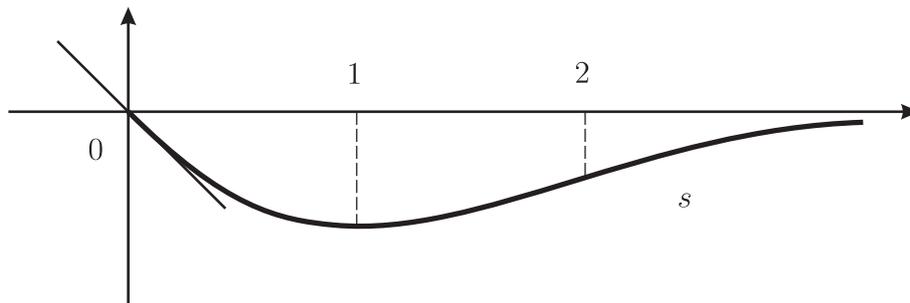
Logo

$$-1 = v(0) = c_1(1 - 0)e^0 = c_1,$$

mostrando que  $c_1 = -1$ . Portanto

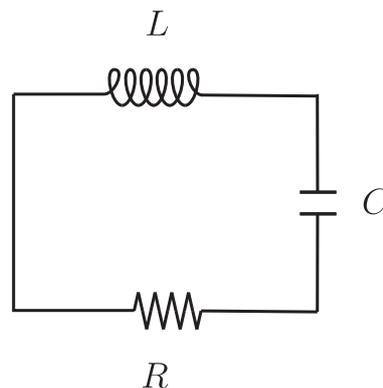
$$s(t) = -t e^{-t},$$

cujos gráficos para  $t \geq 0$  é ilustrado pela Figura 5.27.



**Figura 5.27.** Esboço do gráfico da posição instantânea no caso crítico.

Agora vamos ver que todo esse nosso trabalho também resolve o problema de um outro campo das aplicações da física. Dado o circuito elétrico, ilustrado pela Figura 5.28, composto de um indutor, de um resistor e de um capacitor, denotamos por  $q$  a função que fornece a quantidade de carga elétrica no ponto  $A$ .



**Figura 5.28.** Esquema de um circuito RLC.

Da teoria de circuitos elétricos, temos que a função  $q$  satisfaz à seguinte equação

$$Lq'' + Rq' + Cq = 0, \quad (5.30)$$

conhecida como *equação do circuito RLC*, onde  $L$  é a *indutância* do indutor,  $R$  a *resistência* do resistor e  $C$  a *capacitância* do capacitor. A equação (5.30) é quase idêntica à equação (5.28), do sistema massa-mola-amortecedor. Portanto esta equação também possui soluções críticas, supercríticas e subcríticas, dependendo das raízes da sua equação característica associada

$$Lx^2 + Rx + C = 0.$$

### 5.5.1 Exercícios

- 1) Mostre que se  $ax + b = cx + d$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $a = c$  e  $b = d$ .
- 2) Determine constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

A partir desta decomposição, calcule

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 - 4} dx.$$

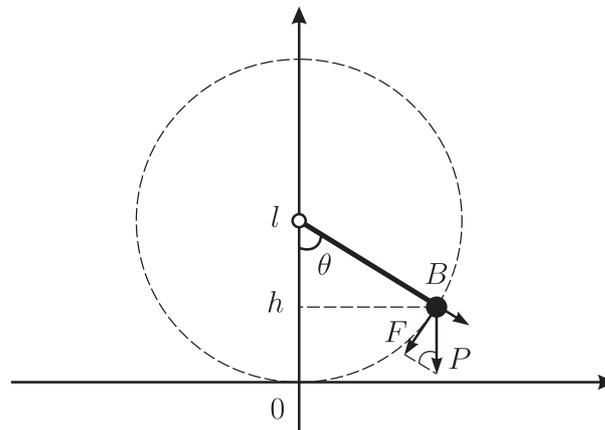
- 3) Calcule a seguinte integral indefinida

$$\int \frac{5x - 2}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Para isto, primeiro determine as duas raízes reais de  $x^2 + 3x + 2$  e em seguida, como no exercício anterior, escreva o integrando como soma de frações parciais.

## 5.6 Pêndulo sem atrito

Nesta seção, determinaremos o movimento do pêndulo sem atrito, conforme ilustrado pela Figura 5.29. Em primeiro lugar, vamos determinar sua Lei de Conservação da Energia.



**Figura 5.29.** Pêndulo sem atrito.

Supomos que a haste rígida que sustenta a bola  $B$  de massa  $m$  possui comprimento  $l$  e massa desprezível. A força tangencial  $F$  atuando no bola  $B$  é tal que

$$\frac{F}{P} = \text{sen}(\theta(t)),$$

onde  $P = -mg$  é a força peso e o ângulo  $\theta = \theta(t)$  é uma função do tempo  $t$  e é ilustrado pela Figura 5.29.

Pela Segunda Lei de Newton, temos que  $F = ma(t)$ , onde a aceleração tangencial é dada por

$$a(t) = s''(t) = l\theta''(t),$$

uma vez que a posição tangencial é dada por  $s(t) = l\theta(t)$ . Portanto temos que

$$ml\theta''(t) = -mg \text{sen}(\theta(t)). \quad (5.31)$$

Multiplicando a equação (5.31) por  $\theta'(t)$  e integrando em relação a  $t$ , segue que

$$ml \int \theta''(t)\theta'(t) dt = mg \int -\text{sen}(\theta(t))\theta'(t) dt. \quad (5.32)$$

Temos que

$$\int \theta''(t)\theta'(t) dt = \left( \int y dy \right)_{y=\theta'(t)} = \frac{\theta'(t)^2}{2} + c_1,$$

pois  $dy = \theta''(t) dt$  e

$$\int -\text{sen}(\theta(t))\theta'(t) dt = \left( \int -\text{sen}(z) dz \right)_{z=\theta(t)} = \cos(\theta(t)) + c_2,$$

pois  $dz = \theta'(t) dt$ . Multiplicando a equação (5.32) por  $l$  e substituindo as expressões das integrais indefinidas, segue que

$$m \frac{l^2 \theta'(t)^2}{2} - mgl \cos(\theta(t)) = c.$$

Como a velocidade tangencial é dada por

$$v(t) = s'(t) = l\theta'(t)$$

e a altura em relação ao solo é da por

$$h(t) = l - l \cos(\theta(t)), \quad (5.33)$$

temos que

$$m \frac{v(t)^2}{2} + mgh(t) = E,$$

onde  $E = c + mgl$  é a energia mecânica do sistema.

Se o bloco  $B$  seja solto da altura  $2l$  com velocidade nula, temos que

$$E = m \frac{0^2}{2} + mg(2l) = 2mgl.$$

Neste caso, segue que

$$m \frac{l\theta'(t)^2}{2} + mgl(1 - \cos(\theta(t))) = 2mgl.$$

Isolando  $\theta'(t)$  e simplificando, obtemos que

$$\theta'(t)^2 = \frac{2g}{l}(1 + \cos(\theta(t))).$$

Agora vamos utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2)^2,$$

cuja demonstração é deixada como exercício. Temos então que

$$\theta'(t)^2 = \frac{4g}{l} \cos(\theta(t)/2)^2,$$

o que mostra que

$$\frac{\theta'(t)}{\cos(\theta(t)/2)} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Integrando esta equação na variável  $t$ , segue que

$$\int \frac{\theta'(t)}{\cos(\theta(t)/2)} dt = 2\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_1. \quad (5.34)$$

Para calcularmos esta integral, utilizamos a substituição  $\alpha = \theta(t)/2$ . Neste caso, temos que  $2d\alpha = \theta'(t) dt$ , o que mostra que

$$\int \frac{\theta'(t)}{\cos(\theta(t)/2)} dt = \left( \int \frac{2}{\cos(\alpha)} d\alpha \right)_{\alpha=\theta(t)/2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\cos(\alpha)} d\alpha &= \int \frac{2 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} d\alpha \\ &= \int \frac{2 \cos(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)^2} d\alpha \\ &= \left( \int \frac{2}{1 - x^2} dx \right)_{x=\sin(\alpha)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a substituição  $x = \sin(\alpha)$ , de modo que  $dx = \cos(\alpha) d\alpha$ . Vamos agora utilizar o método das frações parciais. Como

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x),$$

temos que existem constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x}.$$

Colocando as frações do lado direito no mesmo denominador, temos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - x^2} &= \frac{A(1 + x) + B(1 - x)}{(1 - x)(1 + x)} \\ &= \frac{(A - B)x + (A + B)}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Como os denominadores são iguais, temos que

$$2 = (A - B)x + (A + B),$$

o que, por igualdade de polinômios, mostra que

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad A + B = 2.$$

Resolvendo este sistema, obtemos que  $A = B = 1$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1-x^2} dx &= \int \frac{1}{1+x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx \\ &= \log(|1+x|) - \log(|1-x|) + c_2 \\ &= \log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c_2. \end{aligned}$$

Como

$$x = \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta(t)/2)$$

Temos que

$$\int \frac{\theta'(t)}{\cos(\theta(t)/2)} dt = \log\left(\frac{1 + \text{sen}(\theta(t)/2)}{1 - \text{sen}(\theta(t)/2)}\right) + c_2.$$

Utilizando a equação (5.34), segue que

$$\log\left(\frac{1 + \text{sen}(\theta(t)/2)}{1 - \text{sen}(\theta(t)/2)}\right) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}t + c.$$

onde  $c = c_1 - c_2$ . Supondo que  $\theta(0) = 0$ , obtemos que  $c = \log(1) = 0$  e também que

$$\frac{1 + \text{sen}(\theta(t)/2)}{1 - \text{sen}(\theta(t)/2)} = e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Isolando  $\text{sen}(\theta(t)/2)$ , temos que

$$\text{sen}(\theta(t)/2) = \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 1}.$$

Agora vamos utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \text{sen}(\alpha/2)^2,$$

cujas demonstrações são deixadas como exercício. Temos então que

$$1 - \cos(\theta(t)) = 2 \left( \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 1} \right)^2.$$

Pela equação (5.33), segue então que

$$h(t) = 2l \left( \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 1} \right)^2.$$

### 5.6.1 Exercícios

1) Utilize as identidades

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha/2) &= \cos(\alpha/2)^2 - \text{sen}(\alpha/2)^2 \\ 1 &= \cos(\alpha/2)^2 + \text{sen}(\alpha/2)^2, \end{aligned}$$

para mostrar que

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2)^2$$

e também que

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha/2)^2.$$

Observe que  $\cos(2\alpha/2) = \cos(\alpha)$ .

# Apêndice A

## Apêndices

### A.1 Propriedades da área

Vamos iniciar esta seção, apresentando as propriedades fundamentais que caracterizam o conceito de *área de uma região plana*. Antes devemos introduzir os conceitos de *isometria* e de *congruência entre figuras planas*. Uma isometria é uma transformação  $T$  do plano Cartesiano nele mesmo que preserva a distância entre pontos. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância  $d(A, B)$  entre os pontos  $A$  e  $B$  satisfaz a seguinte equação

$$d(A, B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2, \quad (\text{A.1})$$

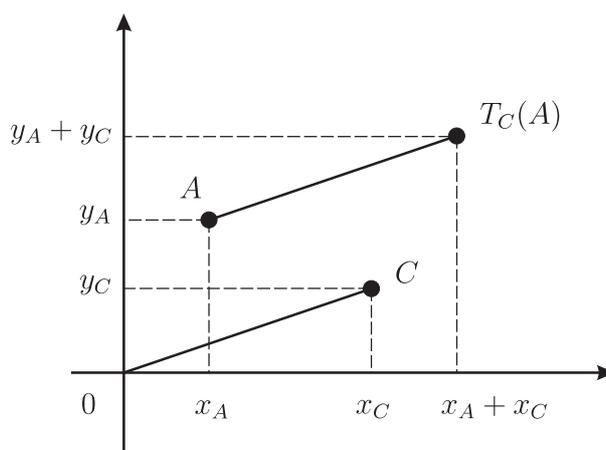
em termos de suas coordenadas. A transformação

$$T_C(x, y) = (x + x_C, y + y_C),$$

denominada *translação pelo ponto  $C$* , claramente satisfaz a equação

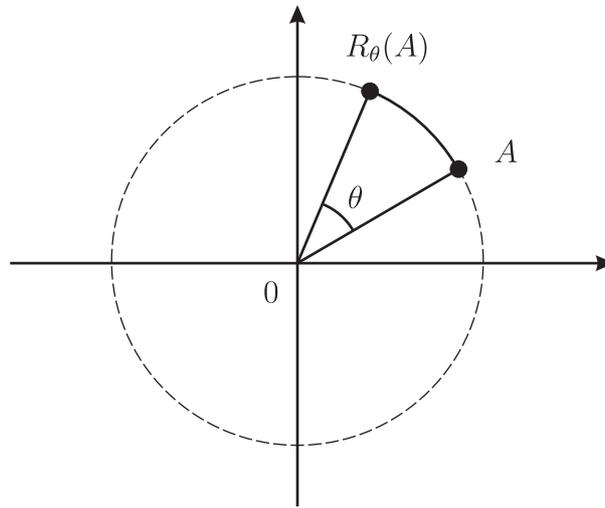
$$d(T_C(A), T_C(B)) = d(A, B),$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$ . Portanto a translação pelo ponto  $C$  é uma isometria, ilustrada pela Figura A.1.



**Figura A.1.** Translação do ponto  $A$  pelo ponto  $C$ .

Outro exemplo relevante é a transformação  $R_\theta$ , denominada *rotação pelo ângulo  $\theta$* , tal que  $R_\theta(A)$  é a rotação anti-horária de um ponto  $A$  pelo ângulo  $\theta$ , como ilustrado pela Figura A.2.



**Figura A.2.** Rotação do ponto  $A$  pelo ângulo  $\theta$ .

Pelo caso (LAL) da congruência entre triângulos (§48 [1]), temos que a rotação pelo ângulo  $\theta$  satisfaz a equação

$$d(R_\theta(A), R_\theta(B)) = d(A, B),$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$  e também é uma isometria.

Um último exemplo de isometria é a *reflexão em torno do eixo  $0y$* , dada por

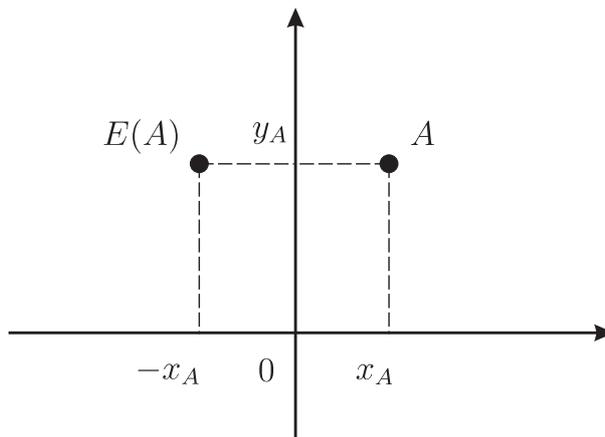
$$E(x, y) = (-x, y)$$

e apresentada pela Figura A.3.

A composição de isometrias é uma isometria, pois se  $T$  e  $S$  são isometrias, então

$$d(T(S(A)), T(S(B))) = d(S(A), S(B)) = d(A, B),$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$ . Pode-se mostrar que qualquer isometria é uma composição de uma translação, de uma rotação e de uma reflexão.

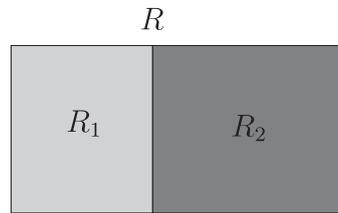


**Figura A.3.** Reflexão do ponto  $A$  em torno do eixo  $0y$ .

Duas regiões  $R_1$  e  $R_2$  do plano Cartesiano são *congruentes* e denota-se  $R_1 \equiv R_2$  se existe uma isometria  $T$  tal que  $R_1 = T(R_2)$ . Como a composição de isometrias é uma isometria, a relação de congruência é transitiva. Claramente ela é reflexiva, pois a transformação identidade é uma isometria. E também simétrica, pois pode-se mostrar que toda isometria possui uma isometria inversa.

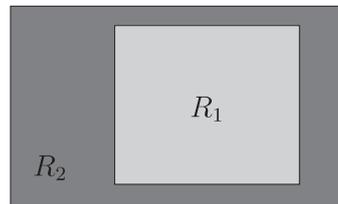
A área  $A(R)$  de uma dada região  $R$  do plano cartesiano é um número real maior ou igual a zero satisfazendo as seguintes propriedades:

- A1) **Aditividade:** A área do todo é a soma da área das partes, ou seja, se a região  $R$  é a união de duas subregiões disjuntas  $R_1$  e  $R_2$ , então  $A(R) = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$ ;



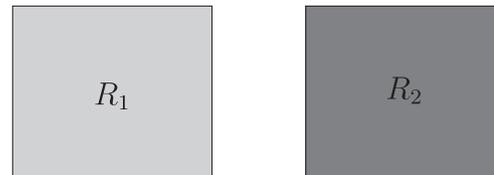
**Figura A.4.** Aditividade.

- A2) **Monotonicidade:** A área do todo é maior ou igual a área de cada parte, ou seja, se  $R_1 \subset R_2$  é uma subregião, então  $A(R_1) \leq A(R_2)$ ;



**Figura A.5.** Monotonicidade.

- A3) **Invariância:** A área de regiões congruentes é igual, ou seja, se  $R_1 \equiv R_2$  são regiões congruentes, então  $A(R_1) = A(R_2)$ ;



**Figura A.6.** Invariância.

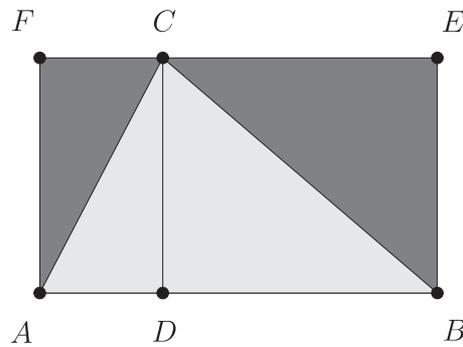
- A4) **Unidade:** A área de um quadrado unitário é igual a um;

- A5) **Nulidade:** A área de um segmento de reta é nula.

Como primeira consequência das propriedades A1-A5, obtemos a bem conhecida relação entre as áreas de triângulos e de retângulos. Devido à Propriedade A3, como retângulos de lados iguais são congruentes (§237 [1], eles possuem a mesma área.

**Proposição A.1.** *A área de um triângulo de base  $b$  e altura  $h$  é a metade da área de um retângulo de lados  $b$  e  $h$ .*

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e o retângulo  $\square ABEF$ , ilustrados pela Figura A.7, tal que  $\overline{AB}$  é a base comum de comprimento  $b$  e  $\overline{CD}$  é a altura comum de comprimento  $h$ , onde  $D$  está entre  $A$  e  $B$ .



**Figura A.7.** Ponto  $D$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Pelo caso (LLL) da congruência entre triângulos (§52 [1]), temos que o triângulo  $\triangle ADC$  é congruente ao triângulo  $\triangle CFA$  e também que o triângulo  $\triangle DBC$  é congruente ao triângulo  $\triangle ECB$ . Por A3), temos então que

$$A(\triangle ADC) = A(\triangle CFA) \quad \text{e} \quad A(\triangle DBC) = A(\triangle ECB)$$

Além disso, por A1) e A5), temos que

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle ADC) + A(\triangle DBC)$$

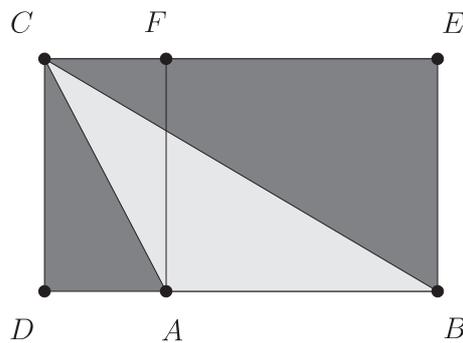
e também que

$$\begin{aligned} A(\square ABEF) &= A(\triangle ADC) + A(\triangle CFA) + A(\triangle DBC) + A(\triangle ECB) \\ &= 2A(\triangle ADC) + 2A(\triangle DBC) \\ &= 2A(\triangle ABC). \end{aligned}$$

A demonstração do caso em que o ponto  $A$  está entre os pontos  $D$  e  $B$  é análoga e é deixada como exercício.  $\square$

### A.1.1 Exercícios

- 1) Complete a demonstração da Proposição A.1, como indicado na Figura A.8.



**Figura A.8.** Ponto  $A$  entre os pontos  $D$  e  $B$ .

- 2) Utilizando o Princípio da Indução e que, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$A(a + b, c) = A(a, c) + A(b, c),$$

mostre que  $A(na, b) = nA(a, b)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## A.2 Propriedades trigonométricas

Vamos mostrar, a partir da Proposição 1.7, que a função cosseno é *par* e as funções seno e tangente são *ímpares*.

**Proposição A.2.** *Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$1) \cos(-x) = \cos(x),$$

$$2) \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \text{ e}$$

$$3) \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x).$$

*Demonstração.* 1) Se  $0 \leq x \leq \pi$ , então  $0 \leq (\pi - x) \leq \pi$ . Pela propriedade (R) e pelas equações (1.10) e (1.11), temos que  $x = \operatorname{rad}(\alpha)$  e  $\pi - x = \operatorname{rad}(\beta)$ , onde  $\alpha + \beta$  é o ângulo  $-\widehat{101}$ . Pela Proposição 1.7, temos que  $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$ . Utilizando as equações (1.12), (1.13) e (1.14), obtemos que

$$\cos(-x) = \cos(2\pi - x) = -\cos(\pi - x) = \cos(x).$$

Se  $\pi \leq x \leq 2\pi$ , então  $0 \leq (2\pi - x) \leq \pi$  e também  $0 \leq (x - \pi) \leq \pi$ . Pelo resultado anterior e utilizando a equação (1.13), temos que  $\cos(x) = -\cos(x - \pi) = -\cos(\pi - x)$ . Utilizando as equações (1.13) e (1.14), obtemos que

$$\cos(-x) = \cos(2\pi - x) = -\cos((2\pi - x) + \pi) = -\cos(\pi - x) = \cos(x).$$

No caso geral, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 \leq (x + 2k\pi) \leq 2\pi$ . Utilizando os resultados anteriores e a equação (1.14), obtemos que

$$\cos(-x) = \cos(2(-k)\pi - x) = \cos(-(x + 2k\pi)) = \cos(x + 2k\pi) = \cos(x).$$

2) É análoga ao item 1), usando o fato que, pela Proposição 1.7, se  $\alpha + \beta$  é o ângulo  $-\widehat{101}$ , então temos que  $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)$ .

3) Pelos itens anteriores, temos que

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x).$$

□

A partir das fórmulas do cosseno e do seno da soma de dois ângulos, as seguintes fórmulas para as funções trigonométricas.

**Proposição A.3.** *Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$1) \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),$$

$$2) \operatorname{sen}(a + b) = \cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b) \text{ e}$$

$$3) \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.$$

*Demonstração.* 1) A demonstração deste item para o caso em que  $0 \leq a, b \leq 2\pi$  é dividida em quatro etapas.

1.1) Primeiro supomos que  $0 \leq a, b \leq \pi$  e que  $a + b \leq \pi$ . Pela propriedade (R) e pelas equações (1.10) e (1.11), temos que  $a + b = \text{rad}(\alpha + \beta)$ , onde  $a = \text{rad}(\alpha)$  e  $b = \text{rad}(\beta)$ . Isto implica o item 1), pela Proposição 1.6.

1.2) Agora supomos que  $0 \leq a, b \leq \pi$  e que  $\pi \leq a + b \leq 2\pi$ . Temos que  $0 \leq (\pi - a), (\pi - b) \leq \pi$  e também que  $0 \leq (\pi - a) + (\pi - b) \leq \pi$ . Utilizando o item 1.1) e o fato que a função cosseno é par e que a função seno é ímpar, obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(a + b) = \cos(-(a + b)) &= \cos(2\pi - (a + b)) = \cos((\pi - a) + (\pi - b)) \\ &= \cos(\pi - a) \cos(\pi - b) - \text{sen}(\pi - a) \text{sen}(\pi - b) \\ &= \cos(a - \pi) \cos(b - \pi) - \text{sen}(a - \pi) \text{sen}(b - \pi) \\ &= \cos(a + \pi) \cos(b + \pi) - \text{sen}(a + \pi) \text{sen}(b + \pi) \\ &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b) \end{aligned}$$

onde usamos também as equações (1.13) e (1.14).

1.3) Supomos então que  $\pi \leq a, b \leq 2\pi$ . Temos que  $0 \leq (a - \pi), (b - \pi) \leq \pi$ . Utilizando os itens anteriores e também as equações (1.13) e (1.14), obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a + b - 2\pi) = \cos((a - \pi) + (b - \pi)) \\ &= \cos(a - \pi) \cos(b - \pi) - \text{sen}(a - \pi) \text{sen}(b - \pi) \\ &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b). \end{aligned}$$

1.4) Finalmente supomos que  $0 \leq a \leq \pi \leq b \leq 2\pi$ . Temos que  $0 \leq (b - \pi) \leq \pi$ . Utilizando os dois primeiros itens e a equação (1.13), obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= -\cos(a + b - \pi) = -\cos(a + (b - \pi)) \\ &= -(\cos(a) \cos(b - \pi) - \text{sen}(a) \text{sen}(b - \pi)) \\ &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b). \end{aligned}$$

No caso geral, existem  $k, l \in \mathbb{Z}$  tais que  $0 \leq (a + 2k\pi), (b + 2l\pi) \leq 2\pi$ . Utilizando os itens anteriores e a equação (1.14), obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a + b + 2(k + l)\pi) = -\cos((a + 2k\pi) + (b + 2l\pi)) \\ &= \cos(a + 2k\pi) \cos(b + 2l\pi) - \text{sen}(a + 2k\pi) \text{sen}(b + 2l\pi) \\ &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b). \end{aligned}$$

2) Pelo item 1), temos que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(x) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x).$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x + \pi) \\ &= \cos(x) \cos(\pi) - \text{sen}(x) \text{sen}(\pi) \\ &= -\cos(x) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(a+b+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(a+\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(a)\cos\left(b+\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}\left(b+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b).\end{aligned}$$

3) Usando os itens anteriores, obtemos que

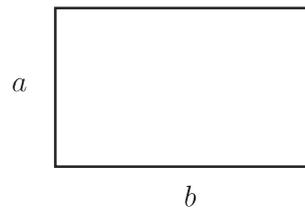
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}. \quad (\text{A.2})$$

O resultado segue, dividindo-se o numerador e o denominador por  $\cos(a)\cos(b)$ .

□

### A.3 Método da exaustão

Uma consequência das propriedades A1-A5, apresentadas na Seção A.1, é a famosa fórmula da área de um retângulo. Como dois retângulos com lados  $a$  e  $b$  são congruentes, pela propriedade A-3, eles tem a mesma área, que será denotada por  $A(a, b)$ , como ilustrado pela Figura A.9.



**Figura A.9.** Retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

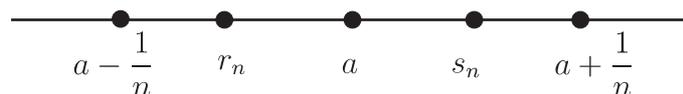
A densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$  permite construir sequências de números racionais convergindo para cada número  $a \in \mathbb{R}$ . Este resultado é uma consequência imediata do Teorema do Sanduíche.

**Corolário A.4.** Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existem sequências  $(r_n)$  e  $(s_n)$ , onde  $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $r_n \uparrow a \downarrow s_n$ , ou seja,  $r_n \uparrow a$  e também  $s_n \downarrow a$ .

*Demonstração.* Pela densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$  tais que

$$a - \frac{1}{n} < r_n < a < s_n < a + \frac{1}{n},$$

como ilustrado pela Figura A.10.



**Figura A.10.** Sanduíche de sequências de frações.

O resultado segue do Teorema do Sanduíche e da regra da soma, uma vez que

$$a \pm \frac{1}{n} \rightarrow a.$$

□

Vamos demonstrar então a famosa fórmula da área de um retângulo.

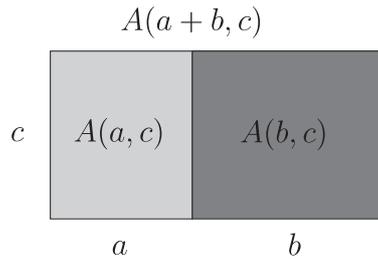
**Proposição A.5.** *A área de um retângulo é igual ao produto dos seus lados, ou seja, temos que*

$$A(a, b) = ab.$$

*Demonstração.* Como ilustrado pela Figura A.11, utilizando as Propriedades A1 e A3 e também a definição de soma, obtemos que

$$A(a + b, c) = A(a, c) + A(b, c),$$

para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .



**Figura A.11.** Retângulos justapostos.

Utilizando o Princípio da Indução, pode-se mostrar que  $A(na, b) = nA(a, b)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que é deixado como exercício. Logo

$$A\left(\frac{a}{n}, b\right) = \frac{1}{n}A(a, b)$$

pois

$$nA\left(\frac{a}{n}, b\right) = A(a, b).$$

Portanto obtemos que

$$A\left(\frac{m}{n}a, b\right) = \frac{m}{n}A(a, b).$$

Se

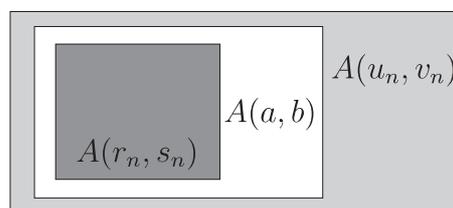
$$r = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad s = \frac{k}{l},$$

então

$$A(r, s) = A\left(\frac{m}{n}, \frac{k}{l}\right) = \frac{m}{n} \frac{k}{l} A(1, 1) = rs,$$

onde utilizamos que  $A(a, b) = A(b, a)$  e, na última igualdade, a Propriedade A4. Portanto a fórmula é verdadeira para retângulos de lados racionais.

Agora demonstramos a fórmula para lados  $a$  e  $b$  quaisquer. Pelo Corolário A.4, existem sequências de racionais  $(r_n)$ ,  $(s_n)$ ,  $(u_n)$  e  $(v_n)$  tais que  $r_n \uparrow a \downarrow u_n$  e que  $s_n \uparrow b \downarrow v_n$ .



**Figura A.12.** Sanduíche de retângulos.

Como mostra a Figura A.12, temos então que

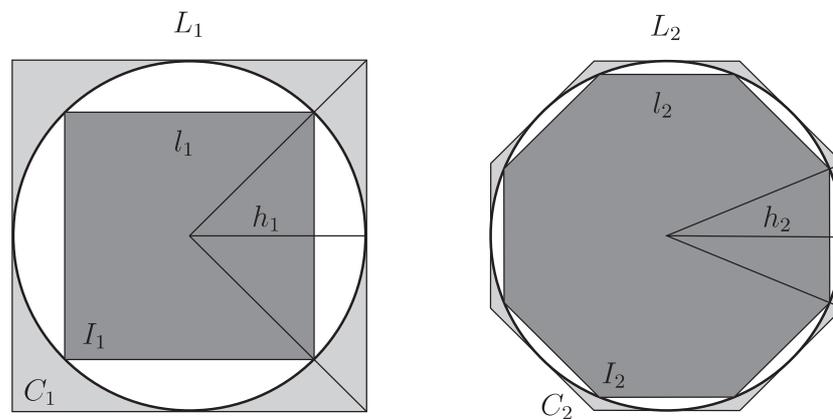
$$r_n s_n = A(r_n, s_n) \leq A(a, b) \leq A(u_n, v_n) = u_n v_n.$$

O resultado segue então da regra do produto e do Teorema do Sanduíche.  $\square$

Como consequência imediata das Proposições A.5 e A.1, obtemos a conhecida fórmula para a área de um triângulo.

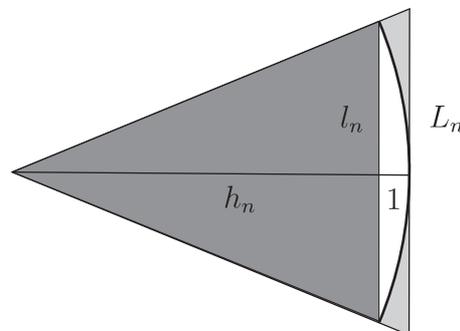
**Corolário A.6.** *A área do triângulo é igual a metade do produto de uma base pela sua altura.*

Uma das mais remotas aplicações do conceito de limite de seqüências é o cálculo da área do círculo trigonométrico  $D$  através do denominado *método da exaustão*. Tal método baseia-se na aproximação da área do círculo trigonométrico através das seqüências das áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos.



**Figura A.13.** Sanduíche do círculo com polígonos regulares.

De fato, vamos considerar as seqüências  $A(I_n)$  e  $A(C_n)$ , onde  $I_n$  é o polígono regular inscrito de  $2^{n+1}$  lados, descrito anteriormente na Seção 2.2, e  $C_n$  é o polígono regular circunscrito de  $2^{n+1}$  lados. Como ilustrado pela Figura A.13, temos que  $I_1$  e  $C_1$  são, respectivamente, os quadrados inscrito e circunscrito e que  $I_2$  e  $C_2$  são, respectivamente, os octógonos inscrito e circunscrito. Os comprimentos dos lados de  $I_n$  e  $C_n$  são denotados, respectivamente, por  $l_n$  e  $L_n$ .



**Figura A.14.** Triângulos elementares de  $I_n$  e  $C_n$ .

A Figura A.14 destaca cada um triângulo elementar que compõem  $I_n$  e um triângulo elementar associado que compõem  $C_n$ . Enquanto o triângulo elementar de  $C_n$  possui base de comprimento  $L_n$  e altura com comprimento 1, o triângulo elementar de  $I_n$  possui base de

comprimento  $l_n$  e altura com comprimento denotado por  $h_n$ , da mesma maneira que na Seção 2.2. Como o número de triângulos elementares é igual ao número de lados, temos então que a área dos polígonos regulares é o produto do número de seus lados pela área comum dos seus triângulos elementares. Após simplificações, obtemos as seguintes expressões para as áreas

$$A(C_n) = 2^n L_n \quad \text{e} \quad A(I_n) = 2^n l_n h_n. \quad (\text{A.3})$$

Vamos mostrar em primeiro lugar o seguinte resultado.

**Proposição A.7.**  $A(I_n) \uparrow A(D)$ , onde  $A(D)$  é a área do círculo trigonométrico.

*Demonstração.* Utilizando o fato de que  $I_n \subset D \subset C_n$  e também a terceira propriedade da área apresentada na Seção 1.3, temos que

$$A(I_n) \leq A(D) \leq A(C_n). \quad (\text{A.4})$$

A partir das desigualdades (A.4), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 \leq A(D) - A(I_n) &\leq A(C_n) - A(I_n) \\ &= A(I_n) \left( \frac{A(C_n)}{A(I_n)} - 1 \right) \\ &\leq A(D) \left( \frac{A(C_n)}{A(I_n)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Pelo Teorema do Sanduíche, basta mostrarmos que o último termo das desigualdades (A.5) converge para zero, o que, pelas regras de limite, é o mesmo que mostrar que  $\frac{A(C_n)}{A(I_n)} \rightarrow 1$ . Para isto, vamos considerar novamente a Figura A.14. Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{1}{h_n}$$

e, pelo Teorema de Pitágoras,  $h_n^2 = 1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$ . Portanto, pelas equações (A.3), segue que

$$\begin{aligned} \frac{A(C_n)}{A(I_n)} &= \frac{L_n}{l_n h_n} \\ &= \frac{1}{h_n^2} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Pelas regras de limite, para mostrarmos que  $\frac{A(C_n)}{A(I_n)} \rightarrow 1$ , basta mostrarmos que  $l_n \rightarrow 0$ . Isso segue mais uma vez do Teorema do Sanduíche e da seguinte desigualdade

$$0 \leq l_n \leq \frac{A(D)}{2^n h_1}, \quad (\text{A.6})$$

que é demonstrada da seguinte maneira. Como  $A(I_n) \leq A(D)$ , pela equação (A.3), temos que

$$0 \leq l_n \leq \frac{A(D)}{2^n h_n}$$

e a desigualdade (A.6) segue do fato de que  $h_1 < h_n$ , o que é demonstrado na Seção 2.2.  $\square$

A Proposição A.7 implica, em particular, que a sequência  $SP(I_n)$  dos semi-perímetros dos polígonos inscritos é realmente convergente, o que foi indicado apenas numericamente na Seção 2.1.

**Corolário A.8.** *Temos que  $SP(I_n) \rightarrow A(D)$  e, portanto,  $A(D) = \pi = SP(D)$ , onde  $SP(D)$  é o semi-perímetro do círculo trigonométrico.*

*Demonstração.* Como  $SP(I_n) = 2^n l_n = \frac{A(I_n)}{h_n}$ , pela regra do quociente, basta mostrar que  $h_n \rightarrow 1$ . Como  $l_n^2 = 1 - h_n^2$ , temos que

$$0 \leq 1 - h_n = \frac{l_n^2}{1 + h_n} \leq l_n^2.$$

O resultado segue então pelo Teorema do Sanduíche, uma vez que  $l_n \rightarrow 0$ .  $\square$

### A.3.1 Exercícios

1) Utilizando o Princípio da Indução e que, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$A(a + b, c) = A(a, c) + A(b, c),$$

mostre que  $A(na, b) = nA(a, b)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## A.4 Progressões geométricas

Nesta seção, vamos considerar limites relacionados a uma dada progressão geométrica ( $r^n$ ). Nosso primeiro resultado afirma que essa progressão se aproxima da origem, desde que  $-1 < r < 1$ .

**Proposição A.9.** *Se  $-1 < r < 1$ , então  $r^n \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Se  $0 \leq r < 1$ , então

$$r = \frac{1}{1 + a}$$

onde

$$a = \frac{1}{r} - 1 > 0.$$

Pode-se mostrar por indução, o que é deixado como exercício, que  $(1 + a)^n > an$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue então que

$$0 \leq r^n = \frac{1}{(1 + a)^n} < \frac{1}{an}$$

e o resultado segue por sanduíche. Se  $-1 < r < 1$ , então  $0 \leq |r| < 1$  e, pela primeira parte da demonstração, temos que  $|r^n| = |r|^n \rightarrow 0$ , o que completa a demonstração, devido à Proposição 2.1.  $\square$

A soma dos  $n$  primeiros termos de uma dada sequência  $(a_k)$  partindo de  $k = 0$  pode ser representada através da notação de somatório. Denotamos

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Agora vamos considerar a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão geométrica  $(r^k)$  partindo de  $k = 0$ . Temos então que

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n.$$

Vamos mostrar que a sequência  $(s_n)$  possui limite, desde que  $-1 < r < 1$ .

**Proposição A.10.** *Se  $-1 < r < 1$ , então*

$$s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$$

*Além disso, para todo  $0 \leq r < 1$ , temos que*

$$\sum_{k=0}^n r^k \leq \frac{1}{1-r}.$$

*Demonstração.* Temos que

$$rs_n = r \sum_{k=0}^n r^k = r + r^2 + \dots + r^{n+1} = s_n + r^{n+1} - 1.$$

Logo  $rs_n = s_n + r^{n+1} - 1$  e isolando  $s_n$  nesta equação, segue que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

A primeira afirmação segue então da Proposição A.9 e das regras de limite. A segunda afirmação é imediata, pois, para todo  $0 \leq r < 1$ , temos que

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \leq \frac{1}{1 - r}.$$

□

### A.4.1 Exercícios

- 1) Mostre, por indução, que  $(1 + a)^n > an$ , para todo  $n \in \mathbf{N}$ .

## A.5 Binômio de Newton

Nesta seção, vamos mostrar como relacionar a potência  $(a + b)^n$  com as potências  $a^k$  e  $b^k$ , onde  $0 \leq k \leq n$ . Para isso, vamos utilizar a notação de somatório descrita na Seção A.4. Primeiro vamos considerar o caso particular onde  $a = 1$  e  $b = x$ .

**Proposição A.11.** *Temos que*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k,$$

onde

$$c_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

é o denominado  $(k, n)$ -número binomial.



Encerramos a seção com a famosa fórmula do *binômio de Newton*.

**Proposição A.12.** *Temos que*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n c_{k,n} a^{n-k} b^k.$$

*Demonstração.* Temos que

$$(a + b)^n = a^n (1 + x)^n,$$

onde  $x = b/a$ . Pela Proposição A.11, temos que

$$(a + b)^n = a^n \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k = \sum_{k=0}^n c_{k,n} a^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^n c_{k,n} a^{n-k} b^k.$$

□

## A.6 Limite e monotonicidade

Nesta seção, vamos mostrar dois resultados que garantem a existência do limite de seqüências e de funções monótonas. A demonstração destes resultados está diretamente ligada à propriedade da completude da reta  $\mathbb{R}$ . O primeiro afirma que uma seqüência monótona limitada sempre possui um limite.

**Proposição A.13.** *Se  $(a_n)$  é monótona e limitada, então  $a_n \rightarrow a$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ .*

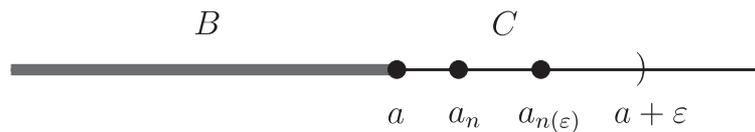
*Demonstração.* Vamos supor que  $(a_n)$  é não-crescente. Definimos o conjunto

$$C = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq a_n \text{ para todo } n \in \mathbf{N}\},$$

ilustrados pela Figura A.15.



**Figura A.15.** Conjuntos  $B$  e  $C$ .

Temos que  $C$  é não-vazio e, como  $(a_n)$  é limitada, temos que  $B$  também é não-vazio. Além disso, por definição, temos que  $B \leq C$ . Logo pela completude de  $\mathbb{R}$ , existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $B \leq a \leq C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $a + \varepsilon$  não pertence a  $B$ . Logo existe  $n(\varepsilon)$  tal que

$$a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Como  $a \leq C$  e como  $(a_n)$  é não-crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow a \leq a_n \leq a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq a_n - a < \varepsilon,$$

mostrando que  $a_n \rightarrow a$ . O caso em que  $(a_n)$  é não-decrescente pode ser reduzido ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício. □

O segundo resultado afirma que uma função monótona sempre possui limite laterais.

**Proposição A.14.** *Se  $f$  é uma função monótona cujo domínio é um intervalo aberto, então os limites laterais existem.*

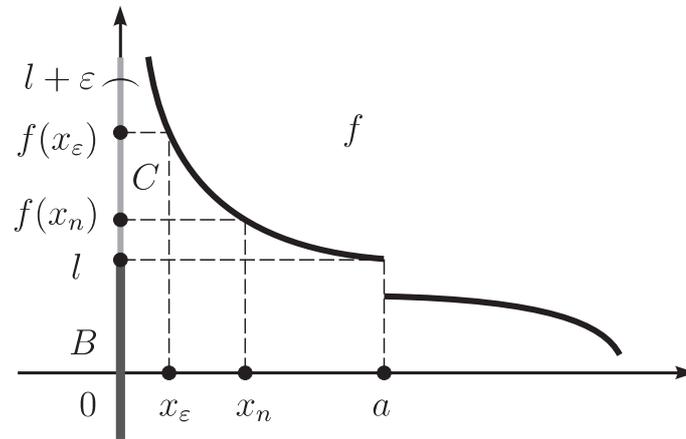
*Demonstração.* Vamos supor que  $f$  é não-crescente e considerar o limite lateral esquerdo em  $a \in \text{dom}(f)$ . Definimos o conjunto

$$C = \{f(x) : x < a, x \in \text{dom}(f)\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq f(x) \text{ para todo } x < a, x \in \text{dom}(f)\},$$

ilustrados pela Figura A.16.



**Figura A.16.** Conjuntos  $B$  e  $C$ .

Como domínio de  $f$  é um intervalo aberto, temos que  $C$  é não-vazio e, como  $f$  é não-crescente, temos que  $f(a) \in B$ . Além disso, por definição, temos que  $B \leq C$ . Logo pela completude de  $\mathbb{R}$ , existe  $l \in \mathbb{R}$  tal que  $B \leq l \leq C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $l + \varepsilon$  não pertence a  $B$ . Logo existe  $x_\varepsilon < a$ ,  $x_\varepsilon \in \text{dom}(f)$ , tal que

$$f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon.$$

Se  $x_n \uparrow a$ , então existe  $n(\varepsilon)$  tal que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow x_\varepsilon < x_n < a.$$

Como  $l \leq C$  e como  $f$  é não-crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow l \leq f(x_n) \leq f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq f(x_n) - l < \varepsilon,$$

mostrando que  $f(x_n) \rightarrow l$ . Como  $x_n \uparrow a$  é arbitrária, segue que

$$l = \lim_{x \uparrow a} f(x).$$

Os casos em que  $f$  é não-decrescente e o limite é o lateral direito podem ser reduzidos ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício.  $\square$

### A.6.1 Exercícios

- 1) Complete a demonstração da Proposição 2.12, considerando o caso em que  $(a_n)$  é não-decrescente.
- 2) Complete a demonstração da Proposição 4.17, considerando o caso em que  $f$  é não-decrescente e também o caso do limite lateral direito.

# Bibliografia

- [1] Iezzi, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6ª Edição. Volume 9. São Paulo: Atual, 1985.