Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos pro-finitos limites

por

Theo Allan Darn Zapata

Brasília
2011

A todo aquele que ao fazer sua matemática
busca entendê-la profundamente;
saindo do desconhecido,
passando à certeza
e sentido prazer ao longo dos caminhos.

Agradecimentos

Quando se quer agradecer a muitos, corre-se o risco de esquecer alguém. Gostaria portanto, que as pessoas que não estão explicitamente mencionadas neste agradecimento, não se sintam esquecidas, porque o nome delas também está grafado no meu coração.

Ao meu orientador Professor Pavel Zalesski, primeiramente por ser um grande mentor intelectual e por ter regido o curso do meu doutorado. Obrigado por ter aberto a mim as portas do mundo dos grupos profinitos e ter paciência ao tentar explicar algumas vezes um mesmo argumento matemático. Marcadas em mim, ficam as elevadas demonstrações de espírito de pesquisa e colaboração científica. Como passamos diversos momentos pessoais e profissionais juntos, simplifico ao dizer que nesta jornada ele foi em muitas horas meu paizinho e meu irmão.

Ao Prof. Thomas Weigel, supervisor do meu estágio sanduíche na Università di Milano-Biccoca, por ter feito grande parte em muito bons período e local de trabalho, e ter sido um anfitrião incrível.

A todos os mestres com os quais tive a felicidade de aprender alguma matemática. Não poderia deixar de mencionar o Prof. Alexei Krassilnikov pelas muitas lições soviéticas em Álgebra, o Prof. Said Sidki por várias conversas interessantes a milhares de quilômetros de Brasília, e o Prof. Alexandre Zalesskii que em um curto período me ensinou muito mais do que matemática.

A banca examinadora. Em especial a Profa. Dessislava Kochloukova por ter feito uma minuciosa leitura e muitas questoões, que leveram a uma melhoria na redeção desta tese.

As agências de fomento à pesquisa, CAPES e CNPq, quanto as bolsas concedidas.

Aos colegas e amigos de departamento que contribuiram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

A todos que estiveram prestigiando-me com a presença na defesa de doutorado. Particularmente, o Prof. Norai Rocco (Diretor do Instituto de Ciências Exatas - UnB), e o Prof. Hemar Godinho (Coordenador da Pós-Graduação - MAT/UnB). Os amigos Daniel Godoy (Urso) e Rodrigo (Roleiko) Ribeiro.

A minha querida família, ainda que longe apenas na distância geográfica, por ter sempre estimulado os meus estudos e incentivado, a cada momento e a cada lugar, este curso de doutorado.

Por último, e portanto com mais ênfase, eu gostaria de muito agradecer a minha mulher Flávia Zapata por tudo!

Старательно мы наблюдаем свет,
Старательно людей мы наблюдаем
И чудеса постигнуть уповаем.
Какой же плод науки долгих лет?
Что наконец подсмотрят очи зорки?
Что наконец поймёт надменный ум
На высоте всех опытов и дум,
Что? - точный смысл народной поговорки.[†]

Е. А. Баратынскии

[†]Minha tradução livre deste poema russo:

Diligentemente observamos o mundo,
Diligentemente observamos as pessoas,
E esperamos compreender o significado mais profundo deles.
Mas qual é o fruto de longos anos de estudo?
O que os olhos afiados detectam finalmente?
O que faz a mente arrogante finalmente aprender
No auge de toda a experiência e pensamento,
O quê? - O significado exato de um velho provérbio.

Resumo

Nesta tese introduzimos e investigamos uma classe de grupos pro-finitos análoga à importante classe dos grupos limites: grupos pro-finitos limites. Nosso trabalho faz uso de métodos homológicos e da teoria de grupos agindo sobre árvores. Exatamente com estas ferramentas, a classe dos grupos pro-p limites foi originalmente estudada em [KZ11] por D. Kochloukova e P. Zalesskii. Analisamos algumas das semelhanças, diferenças e relações existentes entre os três tipos de grupo limites: discretos, pro-p e pro-finitos. Além disso, em nossa investigação provamos que, sob certa condição, produtos pro-p livres com amalgamações procíclicas herdam de seus fatores livres a propriedade de cada subgrupo 2-gerado ser pro-p livre. Isto generaliza resultados pro-p conhecidos, bem como análogos pro-p de resultados clássicos da Teoria Combinatorial de Grupos.

Palavras chaves: Teoria Combinatorial de Grupos, grupos limites, métodos homológicos, grupos agindo sobre árvores, grupos profinitos, grupos pro-p.

Abstract

In this thesis we introduce and investigate a class of pro-finite groups analogous to the important class of limit groups: limit pro-finite groups. Our work makes use of homological methods and the theory of groups acting on trees. Exactly with these tools, the class of limit pro-p groups was originally studied in [KZ11] by D. Kochloukova and P. Zalesskii. We analyze some similarities, differences and relations among the three types of limit groups: discrete, pro-p and pro-finite. Moreover, in our investigation we prove under a certain condition that free pro-p products with procyclic amalgamation inherit from its free factors the property of each 2-generated subgroup being free pro-p. This generalizes known pro-p results, as well as some pro-p analogues of classical results in Combinatorial Group Theory.

Key words: Combinatorial Group Theory, limit groups, homological methods, groups acting on trees, profinite groups, pro-p groups.

Sumário

Introdução

L'amour pour principe et l'ordre pour base; le progrès pour but.

Auguste Comte

Nesta tese de doutorado em Teoria de Grupos as investigações são realizadas em um universo particular importante e interessante: o dos Grupos Profinitos. Evidentemente, muito da teoria de grupos finitos, quando interpretado da maneira adequada, pode ser executado nos grupos profinitos. E, ao mesmo tempo, a categoria dos grupos profinitos possui objetos livres (grupos profinitos livres); isto trás inúmeras questões da Teoria Combinatorial de Grupos à tona.

Os grupos profinitos surgiram como grupos de Galois de extensões infinitas de corpos, no final do século XIX, e foram inicialmente estudados visando aplicações em Aritmética (*cf.* [Ser62], [Koch70], [Sha72], [FJ05] e [NSW08]). Vale ressaltar que enquanto há três décadas atrás suas investigações eram de certa forma remotas, hoje em dia grupos profinitos podem ser vistos como uma tendência em matemática. Mais especificamente, grupos profinitos têm sido fortemente empregados em investigações em Geometria Algébrica, em Teoria Algébrica dos Números, e ainda em aplicações fora da Matemática Pura, por exemplo em Teoria de Linguagem Formais (ciência da computação) e em Teoria de Renormalização (física teórica).

Um *grupo profinito* G é um grupo topológico que é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo. Uma definição equivalente mais expressiva é que G é o limite projetivo de grupos finitos. Muitas das propriedades dos grupos finitos se estendem aos grupos profinitos por simples "passagem ao limite"; é assim que se definem os *grupos* *pro-p* (limites projetivos de p-grupos finitos), os grupos de Sylow, etc.

Em 2007, D. Kochloukova e P. Zalesski (vide [KZ11]) iniciaram o estudo de um análogo pro-p de uma importante classe de grupos discretos: a dos *grupos limites*. É crucial agora apresentarmos a classe original dos grupos limites e descrever algumas de suas propriedades, para assim compreendermos os resultados obtidos nos casos pro-p e profinitos e, especialmente, os problemas abordados neste trabalho.

Grupos limites foram introduzidos por Z. Sela no primeiro de uma série de artigos ([Sel01], *et seq.*) contendo sua solução do proeminente *Problema de Tarski* sobre a teoria elementar de grupos livres (*cf.* [BMS02]). Na realidade, dentre os grupos finitamente gerados, grupos limites constituem uma classe longamente estudada sob os nomes: grupos totalmente residualmente livres, grupos ω-residualmente livres e grupos $\exists$-livres. Nesse mesmo artigo, Sela estabelece o seguinte: *Um grupo finitamente gerado é um grupo limite se, e somente se, ele é totalmente residualmente livre.*

Um grupo G é totalmente residualmente livre se para qualquer coleção finita de elementos não-triviais $g_1, \ldots, g_n$ de G existe um homomorfismo φ de G sobre um grupo livre F tal que $\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n)$ são elementos não-triviais de F. Os primeiros exemplos finitamente gerados não-livres de grupos limites foram dados pelos irmãos G. Baumslag e B. Baumslag na década de 1960, em estudos sobre propriedades residuais de grupos. Eles obtiveram grupos totalmente residualmente livres por meio de extensões de centralizadores de grupos livres (*cf.* [Bau62] e [BBau67]). *Uma extensão de centralizador de um grupo G é um produto livre com amalgamação da forma $G *_C (C \times B)$ onde C é o centralizador de um elemento de G e B é um grupo abeliano livre finitamente gerado.* De fato, eles mostraram o seguinte resultado: *Se F é um grupo livre e C é um subgrupo cíclico auto-normalizante de F, então para cada grupo abeliano livre B, a extensão de centralizador $F *_C (C \times B)$ é totalmente residualmente livre.*

Sob outro ponto de vista, a classificação dos grupos finitamente gerados que são existencialmente equivalentes a um grupo livre, está intimamente relacionada ao Problema de Tarski mencionado anteriormente. Dizemos que um grupo é um *grupo $\exists$-livre* se sua teoria existencial coincide com a teoria existencial de um grupo livre. Esta definição foi dada por V. Remeslennikov, em [Rem89], onde ele enuncia o seguinte resultado: *Um grupo finitamente gerado é $\exists$-livre se, e somente se, ele é totalmente residualmente livre.*

Por outro lado, O. Kharlampovich e A. Myasnikov também obtiveram uma solução para o Problema de Tarski (*cf.* [KhM98a], [KhM98b] e [KhM06]), ao desenvolverem: a geometria algébrica sobre grupos livres, a teoria de grupos exponenciais livres, e a maquinária de Makanin–Razborov para lidar com equações sobre grupos livres. É crucial para a nossa abordagem sobre os grupos profinitos e pro-p limites o seguinte resultado deles: *Um grupo finitamente gerado é totalmente residualmente livre se, e somente se, ele é um subgrupo de sucessivas extensões de centralizadores a partir de um grupo livre.*

Resumindo as proposições anteriores, temos:

Teorema (Caracterizações de grupos limites)**.** *Seja G um grupo finitamente gerado. As seguintes asserções são equivalentes:*

1. *G é um grupo limite (no sentido de Sela).*
2. *G é um grupo totalmente residualmente livre.*
3. *G possui a mesma teoria existencial de um grupo livre.*
4. *G é um subgrupo de sucessivas extensões de centralizadores a partir de um grupo livre.*

Grupos livres de postos finitos e grupos abelianos livres de postos finitos são claramente exemplos de grupos limites. O produto direto de dois grupos livres não-abelianos de mesmo posto finito é residualmente livre mas não é limite. Um exemplo não tão trivial de um grupo limite é o grupo fundamental M_g de qualquer superfície conexa fechada (compacta e sem fronteira) orientável de gênero $g \geq 2$; este exemplo dá substância à tradição em Teoria Combinatorial de Grupos que, dentre os grupos não-livres, M_g é o que mais se assemelha aos grupos livres.

Antes de entrarmos no universo profinito de análogos de grupos limites, listamos algumas propriedades dos grupos limites.

Proposição (*cf.* [AB06, Prop. 1.1])**.** *Seja G um grupo limite. Então:*

(1) *o grupo G é livre-de-torção;*

(2) *todo subgrupo abeliano de G é finitamente gerado;*

(3) *a comutatividade é uma relação transitiva sobre $G-\{1\}$;*

(4) *se G for não-abeliano, então seu centro é trivial;*

(5) *todo subgrupo abeliano não-trivial está contido em um único subgrupo abeliano maximal;*

(6) *raízes são únicas, i.e. $x^n = y^n$ com $n \neq 0$ implica $x = y$;*

(7) *quaisquer dois elementos não-triviais que comutam e são conjugados devem coincidir;*

(8) *se G for não-abeliano, então sua abelianização é infinita;*

(9) *o grupo G é finitamente apresentado;*

(10) *o grupo G é coerente, i.e. cada subgrupo finitamente gerado é finitamente apresentado (e é um grupo limite);*

(11) *se G não for livre então sua dimensão co-homológica é* $\max(2, m)$ *onde m é o posto maximal de seus subgrupos abelianos;*

(12) *o conjunto de todas as classes de conjugação de subgrupos abelianos maximais de posto ≥ 2 é finito.*

Podemos agora definir grupos limites no contexto pro-p ou profinito. Seja $\mathcal{C}$ a classe de grupos consistindo de todos os grupos finitos (resp. p-grupos finitos). Definimos indutivamente as seguintes classes de grupos pro-$\mathcal{C}$:

$\mathcal{G}_0$ é a classe de todos os grupos pro-$\mathcal{C}$ livres de posto finito.

$\mathcal{G}_n$ $(n > 0)$ é a classe de todos os grupos G_n, onde G_n é o produto pro-$\mathcal{C}$ livre amalgamado $G_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} A_{n-1}$ satisfazendo:

(i) C_{n-1} é um subgrupo próprio procíclico e um fator direto de um grupo pro-$\mathcal{C}$ abeliano livre de posto finito qualquer A_{n-1}.

(ii) C_{n-1} é um subgrupo do grupo G_{n-1} de $\mathcal{G}_{n-1}$ tal que o normalizador em G_{n-1} de cada subgrupo procíclico não-trivial de C_{n-1} coincide com C_{n-1}.

Definição. *Um* **grupo pro-$\mathcal{C}$ limite** *G é um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de algum grupo G_n de $\mathcal{G}_n$ $(n \geq 0)$.*

Observamos que esta definição faz sentido para qualquer classe não-vazia de grupos finitos $\mathcal{C}$ fechada sob formação de subgrupo, quociente e produto direto finito.

A principal razão para as condições do item (ii) na definição dos grupos G_n é a seguinte. Consideremos em um grupo, um elemento que gere um grupo livre de posto 1. No caso discreto, o centralizador deste elemento em um grupo livre é cíclico, e após fazermos uma extensão de centralizadores o centralizador se torna abeliano. No caso profinito, o centralizador em um grupo profinito livre é meta-procíclico, e após fazermos uma extensão de centralizadores o centralizador se torna meta-abeliano, ou (procíclico não-trivial)-por-(diedral pro-π), ou ainda pode conter um subgrupo pro-p livre não-abeliano. Vide Observação 2.2.4, Proposição 2.2.5 e Proposição 2.2.10.

Observemos agora que, a maioria dos métodos tradicionalmente utilizados para demonstrar resultados sobre grupos discretos não podem ser utilizados nos casos profinito ou pro-p. De plano, um elemento de um grupo profinito não pode ser expresso como uma palavra finita nos geradores, isto elimina a possibilidade de utilizar as técnicas combinatoriais no sentido original. Além disso, quando existem versões profinitas ou pro-p dos métodos tradicionais eles não possuem força total.

Os instrumentos essenciais da Teoria Combinatorial dos grupos profinitos são os Métodos Homológicos e, principalmente, a versão profinita da Teoria de Bass-Serre (de grupos agindo sobre árvores). Recentemente desenvolvida por O. Mel'nikov, L. Ribes e P. Zalesskii ([ZM88], [Mel89], [Zal90] e [RZ00a]), a teoria de grupos profinitos agindo sobre árvores possui sólidas realizações e apresenta um bom número de problemas desafiadores (*e.g.* [Zal95], [RSZ98] e [HZ07]).

Com o objetivo de, brevemente, apresentar e revisar os fundamentos da Teoria Combinatorial dos grupos profinitos e pro-p que serão evocados ao longo deste trabalho, escrevemos o Capítulo 1.

No Capítulo 2, introduzimos e iniciamos a investigação da classe dos grupos profinitos limites. Destacamos os seguintes resultados obtidos.

Teorema 2.0.1. *Seja G um grupo pro-finito limite. Então:*

(2.2.2) *o grupo G possui p-dimensão co-homológica finita e portanto é livre-de-torção; além disso, se G não for p-projetivo então $cd_p(G) = \max\{2, \alpha_p(G)\}$, onde $\alpha_p(G) = \sup\{cd_p(A) \mid A \leq_c G, A \text{ abeliano}\}$.*

(2.2.3) *os subgrupos fechados nilpotentes de G são abelianos, e existe um limitante (finito) uniforme para seus postos.*

(2.2.6) *sobre um subgrupo fechado qualquer H de G, as seguinte asserções são equivalentes:* (i) *H não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum, para cada primo p;* (ii) *H é virtualmente solúvel;* (iii) *H possui posto finito;* (iv) *H é abeliano ou meta-procíclico projetivo.*

(2.2.10) *para cada elemento que gera um subgrupo profinito livre de posto 1, o normalizador deste subgrupo é abeliano maximal ou meta-procíclico projetivo.*

(2.2.12) *se G possui a propriedade comutatividade-transitiva, então G é abeliano ou pro-p.*

Exemplos não-óbvios de grupos pro-finitos limites podem ser obtidos através do seguinte resultado, cujo análogo pro-p não é conhecido.

Proposição 2.3.2. *O completamento profinito de um grupo limite discreto é um grupo pro-finito limite.*

Associado ao Capítulo 2, temos o Apêndice A abordando alguns detalhes sobre a propriedade Comutatividade-Transitiva, bem como o Apêndice B detalhando a estrutura dos grupos pro-p virtualmente procíclicos.

No Capítulo 3, fazemos investigações exclusivamente sobre grupos pro-p, utilizando-nos fortemente da teoria de grupos pro-p agindo sobre árvores pro-p mencionada anteriormente. À luz de um admirável resultado de W. Herfort e P. Zalesskii (Teorema 3.0.1 - [HZ07, Sec. 5] ou [HZZ11, Sec. 3]) provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.0.2. *Seja $G = A \amalg_C B$ um produto pro-p livre de A e B com amalgamação procíclica C. Suponhamos que o centralizador em G de cada subgrupo fechado não-trivial de C seja um grupo pro-p abeliano livre e contenha C como um fator direto. Se cada subgrupo pro-p 2-gerado de A e cada subgrupo pro-p 2-gerado de B é um grupo pro-p livre ou um grupo pro-p abeliano livre então cada subgrupo pro-p 2-gerado de G também o é.*

Este resultado é uma versão pro-p de um resultado clássico de G. BAUMSLAG [Bau62, Thm. 2] que deu impulso à teoria dos grupos limites. Nosso teorema generaliza [KZ11, Thm. 7.3], bem como a versão pro-p de [BBau68] para amalgamações procíclicas. Os detalhes estão apresentados na Seção 3.3.

Finalmente no Capítulo 4, encerramos esta tese explicitando algumas das semelhanças, diferenças e relações existentes entre as classes dos grupos (discretos) limites, pro-p limites e pro-finitos limites, bem como levantando problemas a serem abordados no futuro próximo.

Capítulo 1

Preliminares

... los duelos con pan son menos. (Sancho Panza a Don Quijote)

Miguel de Cervantes

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos fundamentais e também colecionamos alguns resultados básicos que serão utilizados com certa freqüência no decorrer do trabalho. Aqui, apenas os resultados que não encontramos demonstração na literatura serão provados. A exposição deste capítulo está fortemente baseada nas Referências Bibliográficas listadas na seção **Grupos Profinitos**.

1.1 Generalidades sobre grupos profinitos e pro-p

Um **grupo profinito** é um grupo topológico o qual é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo. De plano, observamos que dentre os grupos compactos existem dois extremos: grupos de Lie, os quais não possuem subgrupos 'pequenos' (*i.e.* vizinhanças suficientemente pequenas da identidade não contêm subgrupo não-trivial algum); e grupos profinitos, nos quais toda vizinhança da identidade contém um subgrupo aberto. Uma definição equivalente mais expressiva de um grupo profinito é que este é o *limite projetivo de grupos finitos discretos*; donde a origem da terminologia, *pro-finito*. Muitas das propriedades de grupos finitos se estendem aos grupos profinitos por simples "passagem ao limite". É deste modo que podemos definir os *grupos pro-p*, os *subgrupos de Sylow*, o *subgrupo de Frattini*, etc.

Antes de apresentarmos cada um destes conceitos, faremos agora algumas observações triviais de ordem prática. Um subgrupo de um grupo profinito é profinito se, e somente se, ele for fechado. Também por compacidade, um subgrupo é aberto se, e somente se, ele for fechado e possuir índice finito. É comum denotarmos um subgrupo fechado (resp. aberto) H de um grupo profinito G por $H \leq_c G$ (resp. $H \leq_o G$). O quociente de um grupo profinito por um subgrupo normal fechado é profinito, e é discreto (e finito) se, e somente se, o subgrupo é aberto. Por considerações de topologia geral elementar, uma aplicação contínua entre um grupo profinito e um espaço topológico de Hausdorff é necessariamente uma aplicação fechada (*i.e.* o operador 'fecho topológico' comuta com a aplicação).

Um grupo profinito G é um **grupo pro-p** se, e somente se, todo subgrupo normal aberto de G possui índice igual a uma potência do número primo p; equivalentemente G é um limite projetivo de p-grupos finitos (vide [RZ00b, Thm. 2.1.3] para uma caracterização de grupos pro-$\mathcal{C}$ em geral). Grupos pro-p estão para grupos profinitos, assim como p-grupos estão para grupos finitos; por vezes, um resultado sobre grupos profinitos pode ser deduzido a partir do resultado válido para grupos pro-p (para cada primo p).

Dentre os mais fundamentais exemplos de grupos profinitos estão: (a) grupos de Galois de extensões galoisianas de corpos comutativos (*cf.* [NSW08]); (b) grupos analíticos p-ádicos compactos (*cf.* [DDMS]); (c) completamento profinito (resp. pro-p) de um dado grupo abstrato - o limite projetivo de todos os quocientes finitos (resp. p-grupos finitos) do grupo dado (*cf.* [RZ00b, Sec. 3.2]); (d) grupos duais de Pontryagin de grupos abelianos de torção (*cf.* [RZ00b, Sec. 2.9]).

Seja G um grupo profinito. Dizemos que um subconjunto X de G é um conjunto de *geradores* (topológicos) de G, ou que X gera (topologicamente) G se o subgrupo (algebricamente) gerado por X for denso em G. Quando G possui um subconjunto finito de geradores (topológicos) dizemos que G é um **grupo profinito finitamente**

gerado; a menor cardinalidade de um conjunto finito de geradores de G será denotada por $d(G)$. O **subgrupo de Frattini** $\Phi(G)$ de G, é a intersecção de todos os subgrupos próprios fechados maximais de G; logo, um subgrupo característico próprio de G, se G for não-trivial. Analogamente ao que ocorre com grupos finitos e p-grupos finitos, o subgrupo de Frattini está relacionado com elementos (não-)geradores de um grupo profinito e desempenha um papel fundamental no estudo de grupos pro-p.

Proposição 1.1.1 (*cf.* [RZ00b, Sec. 2.8])**.** *Seja G um grupo pro-p.*

(a) *Temos $d(G) = d(G/\Phi(G))$.*

(b) *O quociente $G/\Phi(G)$ é um grupo profinito abeliano p-elementar, donde um espaço vetorial sobre o corpo finito com p elementos $\mathbb{F}_p$.*

(c) *Temos $\Phi(G) = \overline{G^p[G,G]}$, onde $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$ e $[G,G]$ é o grupo derivado.*

(d) *Se $\psi\colon G \to H$ é um homomorfismo contínuo qualquer entre grupos pro-p, então $\psi(\Phi(G)) \subseteq \Phi(H)$.*

(e) *Se G for um limite inverso de grupos pro-p G_i, então $\Phi(G) \cong \varprojlim \Phi(G_i)$ e $G/\Phi(G) \cong \varprojlim G_i/\Phi(G_i)$.*

(vide [RZ00b, Sec. 2.8] para resultados sobre grupos profinitos em geral.)

Encerramos esta seção com os conceitos de ordem e subgrupos p-Sylow de grupos profinitos.

Um *número supernatural* é um produto formal $\prod_p p^{n(p)}$, onde p percorre o conjunto de todos os números primos e cada $n(p)$ pertence a $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ (este com sua aritmética usual). Definimos o *mínimo múltiplo comum* (mmc) de uma dada família $\{\omega_i = \prod_p p^{n(p,i)}\}$ de números supernaturais por $\mathrm{mmc}\{\omega_i\} = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \sup_i\{n(p,i)\}$; analogamente, o *máximo divisor comum* (mdc) da dada família é $\mathrm{mdc}\{\omega_i\} = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \inf_i\{n(p,i)\}$.

Seja H um subgrupo fechado de um grupo profinito G. O **índice** $|G:H|$ de H em G é o número supernatural $|G:H| = \mathrm{mmc}\{[G/U : HU/U] \mid U \in \mathcal{U}\}$, onde $\mathcal{U}$ denota o conjunto de todos os subgrupos normais abertos de G; a **ordem** de G é $|G:1|$.

Embora grupos profinitos em geral não possuam elementos de ordem potência de p, podemos definir subgrupos p-Sylow do mesmo modo como se faz para grupos finitos.

Um subgrupo (fechado) H de G é um subgrupo **p-Sylow** de G se H é um subgrupo pro-p maximal de G; ou, equivalentemente, se $|H : 1| = \prod_l l^{m(l)}$ e $|G : H| = \prod_l l^{n(l)}$, então sempre que $m(l) \neq 0$ temos $l = p$ e sempre que $n(l) \neq 0$ temos $l \neq p$. Finalmente observamos que por "passagem ao limite" os *Teoremas de Sylow* se estendem para grupos profinitos: G possui um subgrupo p-Sylow (o qual é o limite projetivo de subgrupos p-Sylow de seus quocientes finitos); cada subgrupo pro-p de G está contido em algum subgrupo p-Sylow de G; e G age transitivamente sobre o conjunto de todos os seus subgrupos p-Sylow via conjugação.

Finalmente, um grupo profinito é um **grupo procíclico** se todo quociente por um subgrupo normal aberto é um grupo cíclico; equivalentemente, é um grupo profinito (topologicamente) por no máximo 1 elemento; ou ainda, é o limite projetivo de grupos cíclicos finitos. Quando tal grupo é pro-p temos apenas duas possibilidades: ou cíclico finito, ou topologicamente isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ (vide [DDMS, Prop. 1.28]). Assim, se G é um grupo profinito e g um elemento de G, definimos o grupo procíclico $C = \overline{\langle g \rangle}$ - o menor subgrupo fechado gerado por g. Se C possui ordem $\prod_p p^{n(p)}$ e I denota o conjunto dos primos p tais que $n(p) = \infty$, então C é isomorfo ao produto cartesiano de seus subgrupos p-Sylow:

$$C \cong \prod_{p \in I} \mathbb{Z}_p \times \prod_{p \notin I} \mathbb{Z}/p^{n(p)}\mathbb{Z}$$

(*cf.* [Wil98, Prop. 2.4.3] - uma generalização do Teorema Chinês dos Restos). Para um conjunto de primos π qualquer, denotamos $\prod_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{Z}_\pi$. Quando π consiste de todos os primos, temos que $\mathbb{Z}_\pi$ é topologicamente isomorfo ao completamento profinito $\widehat{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$.

1.2 Co-homologia

Nesta tese nos restringiremos à teoria de co-homologia de grupos profinitos quando os módulos de coeficientes são discretos. As principais referências para este assunto são [Ser62, Chap. I], [Koch70, Chap. 3-7], [Wil98, Chap. 9-11], [RZ00b, Chap. 6-7] e [SW00]. Ao invés de usarmos a maquinária de funtores derivados, definiremos os grupos de co-homologia de uma forma mais concreta.

Sejam G um grupo profinito e A um G-módulo discreto (*i.e.* A é um grupo abeliano discreto sobre o qual existe uma ação contínua de G por automorfismos). Para cada $n \geq 0$, seja $C^n(G,A)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas do produto cartesiano G^n para A ($C^0(G,A) = A$). Definimos homomorfismos de grupos abelianos $d^n\colon C^n(G,A) \to C^{n+1}(G,A)$ pelas fórmulas usuais

$$\begin{aligned}(d^n\varphi)(g_1,\dots,g_{n+1}) = {} & g_1 \cdot \varphi(g_2,\dots,g_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1}\varphi(g_1,\dots,g_n)\end{aligned}$$

(e $(d^0\varphi)(g_1) = g_1\varphi - \varphi$). Como $d^nd^{n-1} = 0$ para cada $n \geq 1$, consideramos os n-ésimos ($n \geq 0$) **grupos de co-homologia** de G com coeficientes em A:

$$H^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A) \ ,$$

onde $Z^n(G,A) = \ker(d^n)$ e, $B^n(G,A) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ para $n \geq 1$ e $B^0(G,A) = 0$. Claramente, $H^0(G,A)$ se identifica com o conjunto A^G dos pontos de A fixos por G, como de costume.

Ao mesmo tempo que estendemos a definição padrão de co-homologia de grupos finitos para profinitos, esta última se reduz à primeira pelo seguinte resultado.

Proposição 1.2.1 (*cf.* [Wil98, Thm. 9.7.2])**.** *Sejam G um grupo profinito e A um G-módulo discreto. Para cada $n \geq 0$ temos*

$$H^n(G,A) = \varinjlim H^n(G/U, A^U) \ ,$$

onde U percorre todos os subgrupos normais abertos de G e A^U denota o conjunto dos pontos de A fixos por U.

Em particular, $H^n(G,A)$ são grupos de torção para cada $n \geq 1$.

Finalmente, a ***p*-dimensão co-homológica** de um grupo profinito G, $\mathrm{cd}_p(G)$, é o ínfimo dos números n tais que para cada G-módulo discreto de torção A e para cada

$q > n$, a componente p-primária de $H^q(G, A)$ é nula; quando não existe um tal inteiro n, dizemos que a p-dimensão co-homológica de G é infinita e denotamos então $\mathrm{cd}_p(G) = +\infty$.

1.3 Construções livres

Muito da teoria de grupos finitos, quando interpretado da maneira adequada, pode ser executado para grupos profinitos. Ao mesmo tempo, a categoria dos grupos profinitos possuem objetos livres – grupos profinitos livres; e isto trás inúmeras questões da Teoria Combinatorial de Grupos à tona. As principais referências para esta seção são [RZ00b, Chap. 3, 8 e 9], [FJ05, Chap. 22 e 25] e [Wil98, Chap. 5].

Grupos livres e projetivos

Como neste trabalho lidamos apenas com grupos finitamente gerados, nos restringimos aos grupos livres de posto finito. O completamento profinito (resp. pro-p) de um grupo livre (abstrato) de posto finito r é o **grupo profinito** (resp. **pro-p**) **livre de posto finito** r. Isto, pois este satisfaz a devida propriedade universal de objeto livre na categoria dos grupos profinitos (resp. pro-p) (*cf.* [RZ00b, Prop. 3.3.2]).

Assim como no caso abstrato, subgrupos fechados de índice finito H de um grupo profinito (resp. pro-p) livre F são profinitos (resp. pro-p) livres e satisfazem a *Fórmula de Schreier*

$$d(H) - 1 = [F : H](d(F) - 1)$$

(*cf.* [RZ00b, Prop. 3.6.2(b)]). Aqui, cabe ressaltarmos o seguinte profundo resultado de O. Mel'nikov.

Teorema 1.3.1 (*cf.* [RZ00b, Thm. 8.6.5])**.** *Seja F um grupo profinito (resp. pro-p) livre de posto finito r, com $r \geq 2$. Um subgrupo normal fechado de F é finitamente gerado se, e somente se, ele possui índice finito em F.*

Mais fundamentalmente, *todo subgrupo de um grupo livre (abstrato) é um grupo livre* (Teorema de Nielsen-Scherier); isto não ocorre já no grupo profinito livre de posto 1 (*e.g.* o grupo $\mathbb{Z}_p$ não é profinito livre); o análogo pro-p do referido teorema é conseqüência do seguinte importante resultado.

Teorema 1.3.2 (*cf.* [RZ00b, Thm. 7.7.4])**.** *Seja G um grupo pro-p. As seguintes asserções são equivalentes:*

(a) *G é um grupo pro-p livre.*

(b) *a p-dimensão co-homológica de G é no máximo igual a* 1.

Na realidade, os grupos pro-p livres são muito mais simples e se comportam de maneira mais próxima aos grupos livres abstratos do que os grupos profinitos livres. Isto se reflete em toda a Teoria Combinatorial de grupos pro-p e profinitos.

Na categoria dos Grupos, os grupos projetivos são retratos de grupos livres e logo são grupos livres, à luz do Teorema de Nielsen-Schreier. Um **grupo profinito projetivo** P é um objeto projetivo na categoria dos Grupos profinitos (*i.e.* cada morfismo $P \to X$ fatora-se através de cada epimorfismo $Y \to X$). Ao contrário do que ocorre com grupos abstratos ou pro-p, grupos profinitos projetivos podem não ser livres (*e.g.* um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ contido em $\widehat{\mathbb{Z}}$).

Proposição 1.3.3 (*cf.* [RZ00b, Sec. 7.6])**.** *Seja G um grupo profinito. As seguintes asserções são equivalentes:*

(a) *G é um grupo profinito projetivo;*

(b) *G é isomorfo a um subgrupo fechado de um grupo profinito livre;*

(c) *para cada primo p, G é p-projetivo (i.e. $cd_p(G) \leq 1$);*

(d) *para cada primo p, todo p-Sylow de G é pro-p livre.*

Os próximos dois resultados serão utilizados no Capítulo 2. Para o primeiro resultado, relembramos que o *posto* de um grupo profinito G é o análogo do posto de Prüfer de um grupo qualquer, e portanto pode ser definido por $\mathrm{rk}(G) = \sup\{d(H) \mid H \leq_c G\}$. (O uso deste termo não causa conflito com o seu tradicional emprego em grupos livres).

Proposição 1.3.4. *Seja G um grupo profinito projetivo. As seguintes asserções são equivalentes:*

(i) *G não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum, para cada primo p;*

(ii) *G é isomorfo a $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$, para certos conjuntos disjuntos de primos π e ρ;*

(iii) *G é virtualmente solúvel;*

(iv) *G possui posto finito.*

Em particular, se G for nilpotente então G é procíclico.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii). Por hipótese, todo subgrupo p-Sylow de G é procíclico. Logo, os subgrupos p-Sylow de cada quociente finito de G são cíclicos. Daí, o subgrupo derivado e a abelianização de cada quociente finito de G são grupos cíclicos de ordens coprimas (*cf.* [Rob96, Proof of 10.1.10]). Por [RZ00b, Cor. 1.1.8(b)] e [RZ00b, Prop. 2.2.4], temos que $\overline{[G,G]}$ e $G/\overline{[G,G]}$ são procíclicos de ordens coprimas. Pela versão do Teorema de Schur-Zassenhaus para grupos profinitos (*cf.* [RZ00b, Thm. 2.3.15]), o resultado segue.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Não há o que se demonstrar.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Segue do simples fato que a classe dos grupos profinitos de posto finito é fechada por formação de extensões (*cf.* [Wil98, Prop. 8.1.1(b)]).

(iii)$\Rightarrow$(i). Seja N um subgrupo solúvel normal aberto de G . Seja S um subgrupo p-Sylow qualquer de G. Então o subgrupo $N \cap S$ é procíclico e pro-p livre; donde trivial ou isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Pela Fórmula de Schreier (p. 6), temos que S é também trivial ou isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

(iv)$\Rightarrow$(i). Todo subgrupo p-Sylow de G deve ser abeliano. Com efeito, o fecho do subgrupo gerado por todos os comutadores de um grupo pro-p livre não-abeliano, não é um subgrupo finitamente gerado (*cf.* Teorema 1.3.1).

Finalmente, se G for nilpotente, decompomos G como produto cartesiano de seus subgrupos de Sylow (*cf.* [RZ00b, Prop. 2.3.8]), donde $G \cong \mathbb{Z}_\sigma$, com $\sigma = \pi \cup \rho$. □

Lema 1.3.5. *Seja G um grupo pro-p livre. Se G possui um subgrupo normal procíclico não-trivial, então $G \cong \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Seja N um subgrupo normal procíclico não-trivial de G. Suponhamos, por absurdo, que o posto de G seja pelo menos 2. Então o índice de N em G não pode ser infinito (pelo Teorema 1.3.1) nem finito (pela Fórmula de Schreier, p. 6). $\square$

Amalgamações

Essencialmente existem duas espécies diferentes de amalgamações de grupos: *produtos livres com amalgamações* e HNN-*extensões*; estas duas são construções-chaves e ferramentas essenciais no estudo de grupos infinitos. A idéia geral neste contexto é: decompor, se possível, um grupo como uma amalgamação de seus subgrupos; e então, informações sobre este grupo podem ser obtidas das correspondentes informações sobre esses subgrupos. Assumiremos aqui conhecidas tais construções no contexto de grupos abstratos, as quais serão denotadas por $\amalg^{abs}$ e HNN^{abs} (*cf.* [MKS66], [LS77], [CZGK93], [FR99] e [CM82]).

Começamos discutindo no universo profinito os produtos livres com amalgamações. Dados três grupos profinitos (resp. pro-p) G_1, G_2 e G_0 juntamente com dois monomorfismos contínuos $f_i\colon G_0 \to G_i$ $(i \in \{1,2\})$, consideramos o produto livre com amalgamação $G^{abs} = G_1 \amalg^{abs}_{G_0} G_2$ e as imersões canônicas $\varphi_i^{abs}\colon G_i \to G^{abs}$ $(i \in \{1,2\})$. Seja $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais N de G^{abs} tais que G^{abs}/N é um grupo finito (resp. p-grupo finito) e $(\varphi_i^{abs})^{-1}(N)$ é um subgrupo fechado de G_i $(i \in \{1,2\})$. O completamento profinito (resp. pro-p) $\widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ de G^{abs} com respeito a $\mathcal{N}$ é o **produto profinito** (resp. **pro-p**) **livre** de G_1 e G_2 **com amalgamação** G_0, denotado por $G_1 \amalg_{G_0} G_2$ (resp. $G_1 \amalg^p_{G_0} G_2$). Quando G_0 é trivial, dizemos simplesmente produto profinito (resp. pro-p) livre. Quando trabalhamos exclusivamente na categoria dos grupos pro-p, denotamos $\amalg^p$ por $\amalg$, por simplicidade notacional - já que p fica implícito no contexto.

A justificativa para esta definição de produto profinito (resp. pro-p) livre com amalgamação vem do fato que este grupo profinito (resp. pro-p) G construído, é um pushout na categoria dos grupos profinitos (resp. pro-p) dos monomorfismos dados, isto é: para quaisquer homomorfismos contínuos de grupos profinitos (resp. pro-p) $\psi_i\colon G_i \to K$

($i \in \{1,2\}$) satisfazendo $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$, existe um único homomorfismo contínuo $\psi\colon G \to K$ tal que $\psi\varphi_i = \psi_i$ ($i \in \{1,2\}$), onde cada φ_i é a composição $G_i \to G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ das aplicações canônicas

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_2"] & \\ G_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_1"'] & G \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\psi"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

(*cf.* [RZ00b, Prop. 9.2.1]). Vide [RZ00b, Chap. 9] para produto pro-$\mathcal{C}$ livre com amalgamação .

Em contraste com o caso abstrato, em geral pode ocorrer das aplicações canônicas $G_i \to G$ ($i \in \{1,2\}$) não serem injetivas tanto no caso pro-p quanto profinito; quando ambas são injetivas dizemos que o produto livre com amalgamação é **próprio**. Por outro lado, se a imagem canônica de G_0 em G coincide com a imagem canônica de G_1 (resp. G_2) em G então $G = G_1 \amalg_{G_0} G_2$ é isomorfo a G_2 (resp. G_1); nestas situações dizemos que este produto livre amalgamado é **fictício**.

Proposição 1.3.6 ([Rib71, Thm. 2.3])**.** *O produto profinito livre de G_1 e G_2 com amalgamação G_0 é próprio se G_0 for central em G_1 ou G_2.*

Proposição 1.3.7 ([Rib71, Thm. 3.2])**.** *O produto pro-p livre de G_1 e G_2 com amalgamação G_0 é próprio se G_0 for procíclico.*

Os resultados a seguir são conseqüências imediatas (e podem ser melhor compreendidos através) da teoria de grupos profinitos agindo sobre árvores profinitas.

Teorema 1.3.8. *Seja $G = G_1 \coprod_H G_2$ um produto pro-p livre com amalgamação próprio.*

(a) ([RZ00a, Thm. 4.2(b)]) *Seja K um subgrupo finito de G. Então $K \subseteq gG_ig^{-1}$ para algum $g \in G$ e algum $i \in \{1,2\}$.*

(b) ([RZ00a, Thm. 4.3(b)]) *Seja $g \in G$. Então $G_i \cap gG_jg^{-1} \subseteq bHb^{-1}$ para algum $b \in G_i$, sempre que $1 \leq i \neq j \leq 2$ ou $g \notin G_i$.*

Proposição 1.3.9 ([RZ96, Cor. 2.7(ii)])**.** *Sejam G_1 e G_2 grupos profinitos com um subgrupo procíclico em comum C, tal que $G = G_1 \amalg_C G_2$ seja próprio. Seja $c \in C$. Então temos a seguinte relação entre normalizadores $N_G(\overline{\langle c \rangle}) = N_{G_1}(\overline{\langle c \rangle}) \amalg_C N_{G_2}(\overline{\langle c \rangle})$.*

Vale também o resultado análogo pro-p desta proposição anterior, o qual será usado no Capítulo 3.

Vamos definir agora HNN-extensões. Dado um grupo profinito (resp. pro-p) H, juntamente com um isomorfismo contínuo entre dois de seus subgrupos fechados $f\colon A \to B$, consideramos a HNN-extensão $G^{abs} = \mathrm{HNN}^{abs}(H, A, B, f, t)$ e a imersão canônica $\varphi^{abs}\colon H \to G^{abs}$. Seja $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais N de G^{abs} tais que G^{abs}/N é um grupo finito (resp. p-grupo finito) e $(\varphi^{abs})^{-1}(N)$ é um subgrupo fechado de H. O completamento profinito (resp. pro-p) $\widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ de G^{abs} com respeito a $\mathcal{N}$, juntamente com a imagem $\iota(t)$ da letra estável t pela aplicação canônica $\iota\colon G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$, é a **HNN-extensão profinita** (resp. **pro-p**) de H com subgrupos associados A e B por f, denotada por $\mathrm{HNN}(H, A, B, f, \iota(t))$ (resp. $\mathrm{HNN}^p(H, A, B, f, \iota(t))$). Quando trabalhamos exclusivamente na categoria dos grupos pro-p, denotamos HNN^p por HNN, por simplicidade notacional - já que p fica implícito no contexto; ademais, dependendo da situação é comum vermos na literatura os seguintes abusos de notação: $\mathrm{HNN}(H, A, f, t)$, $\mathrm{HNN}(H, A, t)$ ou $\mathrm{HNN}(H, A, f)$.

A razão para esta definição vem do fato que este grupo profinito (resp. pro-p) construído, possui a seguinte propriedade universal: para cada grupo profinito (resp. pro-p) K, para cada $k \in K$ e para cada homomorfismo contínuo $\psi\colon H \to K$ satisfazendo $k^{-1}\psi(a)k = \psi(f(a))$ para todo $a \in A$, existe um único homomorfismo contínuo $\omega\colon G \to K$ com $\omega(\iota(t)) = k$ tal que $\psi = \varphi\omega$, onde φ é a composição $H \to G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ das aplicações canônicas

$$\begin{tikzcd}
 & G = \mathrm{HNN}(H, A, B, f, \iota(t)) \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\omega"] & \\
H \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi"'] & & K
\end{tikzcd}$$

Em constraste com o caso abstrato, em geral pode ocorrer da aplicação canônica

$\varphi\colon H \to G$ não ser injetiva tanto no caso pro-p quanto profinito. Quando φ é injetiva dizemos que a HNN-extensão é **própria**.

Proposição 1.3.10 (*cf.* [RZ00b, Prop. 9.4.3(2)]). *Uma* HNN-*extensão pro-p com subgrupos associados finitos é própria.*

Teorema 1.3.11. *Seja* $G = \mathrm{HNN}(H, A, f)$ *uma* HNN-*extensão pro-p própria.*

(a) ([RZ00a, Thm. 4.2(c)]) *Seja K um subgrupo finito de G. Então $K \subseteq gHg^{-1}$ para algum $g \in G$.*

(b) (*cf.* [RZ00a, Thm. 4.3(c)][1]) *Seja $g \in G$. Então*

$$H \cap gHg^{-1} \subseteq bAb^{-1}$$

para algum $b \in H \cup Ht^{-1}$, sempre que $g \notin H$.

1.4 Grupos agindo sobre árvores

Uma abordagem para se estudar amalgamações é puramente combinatorial, via relações e apresentações de grupos. Uma segunda abordagem a qual é uma poderosa técnica geométrica/topológica foi desenvolvida por J-P. Serre e H. Bass (*cf.* [Ser80], [Dic80], [Coh89], [Bau93], [DD89], [Sta83]).

A idéia geral da Teoria de Bass-Serre é a seguinte. Ao analisarmos a ação de um grupo sobre uma árvore, a estrutura de amalgamação deste grupo pode ser deduzida. Mais precisamente, *"o que podemos dizer sobre um grupo G agindo sobre uma árvore T quando conhecemos o grafo quociente $G\backslash T$ bem como todos os estabilizadores de vértices e arestas?"* – o principal resultado de Bass-Serre diz que podemos reconstruir G a partir destas informações por meio de sucessivas amalgamações.

Observamos ainda, que a Teoria de Bass-Serre recupera de modo relativamente fácil os principais teoremas da Teoria Combinatorial de Grupos, *e.g.* Nielsen-Schreier, Subgrupo de Kurosh, Howson, Grushko-Neumann, M. Hall. (*cf.* [MKS66], [LS77], [CZGK93], [FR99], [CM82]).

[1] A possibilidade de b pertencer a Ht^{-1} infelizmente não apareceu escrita em [RZ00a, Thm. 4.3(c), p. 99], mas pode ser deduzida de [ZM88, Thm. 3.12] ou ainda do Teorema 1.4.1(c).

Agora notamos que, em geral, um elemento de um grupo profinito ou pro-p não pode ser expresso como uma palavra finita nos geradores; isto elimina a possibilidade de utilizar os métodos combinatoriais no sentido original. Como veremos a seguir, a versão profinita da teoria de Bass-Serre existe mas não com força total. Esta teoria desenvolvida por O. Mel'nikov, L. Ribes e P. Zalesskii ([ZM88], [Mel89], [Zal90], [RZ96]) é, juntamente com os Métodos Homológicos, um dos principais instrumentos da Teoria Combinatorial de Grupos Profinitos, e portanto da nossa investigação.

Um **grafo profinito** consiste de um conjunto compacto totalmente desconexo não-vazio Γ com um subconjunto distinguido fechado $V(\Gamma)$ e duas aplicações contínuas $d_0, d_1 \colon \Gamma \to V(\Gamma)$ cujas restrições a $V(\Gamma)$ sejam $\mathrm{id}_{V(\Gamma)}$. Os elementos de $V(\Gamma)$ são chamados de vértices de Γ, os elementos de $E(\Gamma) := \Gamma - V(\Gamma)$ são chamados de arestas de Γ, $d_0(e)$ (resp. $d_1(e)$) é chamado de vértice inicial (resp. final) de uma aresta e. Um **morfismo** é uma aplicação $\alpha\colon \Gamma \to \Delta$ entre grafos profinitos tal que $d_j\alpha = \alpha d_j$ para cada $j \in \{0,1\}$. Se α é injetiva (resp. sobrejetiva), dizemos que $\alpha(\Gamma)$ é um subgrafo de Δ (resp. um quociente de Γ).

Um grafo profinito Γ é **conexo** se todos os seus quocientes finitos são grafos conexos no sentido usual (*i.e.* a realização geométrica de cada um destes é conexa).

Seja Γ um grafo profinito. Denotemos por $(E^*(\Gamma), *)$ o espaço topológico quociente $E^*(\Gamma) = \Gamma/V(\Gamma)$ com ponto distingüido $* = \{V(\Gamma)\}$. Dizemos que Γ é uma **árvore profinita** (resp. **pro-*p***) se:

A1. Γ é conexo;

A2. para cada primo l (resp. para $l = p$), temos a seguinte seqüência exata de $\mathbb{F}_l$-módulos profinitos livres

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_l[\![(E^*(\Gamma), *)]\!] \xrightarrow{d} \mathbb{F}_l[\![V(\Gamma)]\!] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_l \longrightarrow 0$$

onde os $\mathbb{F}_l$-homomorfismos são dados por $\varepsilon(v) = 1$ para cada $v \in V(\Gamma)$, e, $d(\bar{e}) = d_1(e) - d_0(e)$, onde $\bar{e}$ é a imagem de uma aresta $e \in E(\Gamma)$ no quociente $E^*(\Gamma)$, e $d(*) = 0$.

(*cf.* [ZM88, Lemma 1.16]). [Sugerimos [RZ00b, Sec. 5.2] para detalhes sobre módulos profinitos livres sobre anéis profinitos, e [Dic80, Prop. I.1.1, p. 3] como referência para o caso de grafos abstratos.]

A intersecção de uma família de subárvores profinitas (resp. pro-p) de uma árvore profinita (resp. pro-p) é, ou vazia, ou uma árvore profinita (resp. pro-p). A menor (única) subárvore profinita (resp. pro-p) contendo dois vértices v e w será chamada de a geodésica conectando v e w e será denotada por $[v, w]$ (*cf.* [RZ00a, p. 83-84]).

Um grupo profinito G **age** sobre um grafo Γ profinito, se a ação sobre o espaço topológico subjacente Γ é contínua e comuta com as aplicações d_0 e d_1, (*i.e.*, $g(d_j(m)) = d_j(gm)$, para quaisquer $g \in G$, $m \in \Gamma$, $j \in \{0, 1\}$). Denotaremos o subgrupo dos estabilizadores de um elemento m de Γ por $\mathrm{stab}_G(m)$.

Colecionamos a seguir alguns resultados fundamentais da teoria de grupos profinitos agindo sobre árvores pro-p(!).

Teorema 1.4.1. *Seja G um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T.*

(a) ([RZ00a, Prop. 3.5]) *$T/\widetilde{G}$ é uma árvore pro-p, onde $\widetilde{G} = \overline{\langle \mathrm{stab}_G(v) \mid v \in V(T) \rangle}$.*

(b) ([RZ00a, Cor. 3.6]) *$G/\widetilde{G}$ é um grupo pro-p livre, onde $\widetilde{G} = \overline{\langle \mathrm{stab}_G(v) \mid v \in V(T) \rangle}$.*

(c) ([RZ00a, Cor. 3.8]) *Se v e w são dois vértices distintos de T, então $E([v, w]) \neq \emptyset$ e $(\mathrm{stab}_G(v) \cap \mathrm{stab}_G(w)) \leq \mathrm{stab}_G(e)$ para cada $e \in E([v, w])$.*

(d) ([RZ00a, Thm. 3.9]) *Se G é finito, então $G = \mathrm{stab}_G(v)$, para algum $v \in V(T)$.*

A seguinte proposição asserta uma propriedade de grupos agindo sobre árvores que não possui análogo na situação abstrata, em geral; a principal razão para isto é a compacidade da árvore.

Proposição 1.4.2 ([Zal90, Lemma 1.5])**.** *Seja G um grupo profinito agindo sobre uma árvore profinita T. Existe uma subárvore G-invariante minimal não-vazia D de T; se D possui mais de um elemento, D é única.*

Finalmente temos a fundamental tricotomia que descreve os grupos agindo sobre árvores.

Teorema 1.4.3 ([Zal90, Thm. 3.1]). *Seja G um grupo profinito agindo sobre uma árvore profinita T. Então vale uma das seguintes asserções:*
(a) *G estabiliza algum vértice de T,*
(b) *G possui um subgrupo pro-p livre não-abeliano P tal que $P \cap \mathrm{stab}_G(v) = 1$, para cada vértice v de T.*
(c) *existe uma aresta e de T, cujo estabilizador $\mathrm{stab}_G(e)$ é normal em G, e $G/\mathrm{stab}_G(e)$ é isomorfo a:* (c.1) *um grupo projetivo $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$, onde $\pi \cap \rho = \varnothing$;* (c.2) *um grupo de Frobenius $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, onde m não é divisível por primo algum de π e $[k, c] \neq 1$ para cada $k \in \mathbb{Z}_\pi - \{0\}$ e cada $c \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} - \{0\}$;* (c.3) *um grupo pro-$\pi$ diedral infinito $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \amalg^\pi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, onde $2 \in \pi$.*

Encerramos o presente capítulo com grupos pro-p fundamentais de grafos finitos de grupos pro-p, os quais aparecem apenas no Capítulo 3 (e no Apêndice C). Estes grupos são generalizações das duas importantes construções por amalgamações que apresentamos anteriormente. A melhor referência sobre o assunto ainda é o trabalho original [ZM88, Sec. 3], embora lá os resultados estejam enunciados apenas para grupos profinitos fundamentais.

Até o final da presente seção Γ será um grafo finito conexo diferente de um único vértice. Um **grafo de grupos pro-p** $(\mathcal{G}, \Gamma)$ consiste de uma coleção de grupos pro-p $\{\mathcal{G}(m) \mid m \in \Gamma\}$ e uma coleção de homomorfismos contínuos $\{\partial_{j,e} : \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_j(e)) \mid e \in E(\Gamma), j \in \{0, 1\}\}$. Dizemos que $\mathcal{G}(v)$, $v \in V(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{G}(e)$, $e \in E(\Gamma)$) são os grupos-vértices (resp. grupos-arestas).

Seja T uma subárvore maximal de Γ. Uma ***T*-especialização** (β, β_1) de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ para um grupo pro-p K consiste de duas aplicações $\beta \colon \cup_{m\in\Gamma} \mathcal{G}(m) \to K$ e $\beta_1 \colon \Gamma \to K$ satisfazendo:

(1) $\beta_{|\mathcal{G}(m)} \colon \mathcal{G}(m) \to K$ é um homomorfismo contínuo, $\forall\, m \in V(\Gamma)$;

(2) $\beta_1(m) = 1$, $\forall\, m \in T$;

(3) $\beta_1(e)^{-1} \beta_{|\mathcal{G}(d_0(e))}(\partial_{0,e}(g)) \beta_1(e) = \beta_{|\mathcal{G}(d_1(e))}(\partial_{1,e}(g))$, $\forall\, e \in E(\Gamma)$, $\forall\, g \in G(e)$.

O **grupo pro-p fundamental** de um grafo de grupos pro-p $(\mathcal{G},\Gamma)$ com respeito a uma subárvore maximal T, consiste de um grupo pro-p $G = \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ e uma T-especialização $(\nu,\nu_1)\colon (\mathcal{G},\Gamma) \to G$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada T-especialização $(\beta,\beta_1)\colon (\mathcal{G},\Gamma) \to K$ existe um único homomorfismo contínuo $\omega\colon G \to K$ tal que $\omega\nu = \beta$ e $\omega\nu_1 = \beta_1$.

$$\begin{tikzcd}
& G = \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T) \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\omega"] & \\
(\mathcal{G},\Gamma) \arrow[ur, "(\nu,\nu_1)"] \arrow[rr, "(\beta,\beta_1)"'] & & K
\end{tikzcd}$$

A existência de tal grupo pode ser realizada procedendo como anteriormente (*cf.* [ZM88, (3.3)]): consideramos a construção abstrata correspondente; ignoramos a topologia de cada $\mathcal{G}(m)$ e formamos o grupo fundamental abstrato (*cf.* [Dic80, Sec. I.4]); e, completamos este grupo com respeito a uma certa topologia pro-p. Alternativamente, podemos verificar que o grupo dado pela apresentação pro-p

$$G = \langle X, Y \mid U, V, W \rangle \ ,$$

onde $X = \{\mathrm{ger}\,\mathcal{G}(v) \mid v \in V(\Gamma)\}$, $Y = \{t_e \mid e \in E(\Gamma)\}$, $U = \{\mathrm{rel}\,\mathcal{G}(v) \mid v \in V(\Gamma)\}$, $V = \{t_e^{-1}\partial_{0,e}(g)t_e\partial_{1,e}(g)^{-1} \mid g \in \mathcal{G}(e), e \in E(\Gamma)\}$, e $W = \{t_e \mid e \in E(T)\}$, satisfaz a propriedade universal.

A seguir, vamos também supor que cada uma das aplicações $\partial_{j,e}$ bem como cada uma das aplicações canônicas $\mathcal{G}(m) \to \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ sejam injetivas. Com efeito, sempre podemos substituir os grupos em $(\mathcal{G},\Gamma)$ por suas imagens canônicas em $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$; esta operação não altera o grupo $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ e ficamos assim na situação desejada.

Para a T-especialização $(\nu,\nu_1)\colon (\mathcal{G},\Gamma) \to \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ definimos o **grafo padrão do grupo pro-p fundamental de grafos de grupos** $S = S(\mathcal{G},\Gamma,T)$ do seguinte modo: $S = \cup_{m\in\Gamma} G/\nu(\mathcal{G}(m))$ com a topologia da união disjunta, $V(S) = \cup_{v\in V(\Gamma)} G/\nu(\mathcal{G}(v))$, $d_0(g\nu(\mathcal{G}(m))) = g\nu(\mathcal{G}(d_0(m)))$ e $d_1(g\nu(\mathcal{G}(m))) = g\nu_1(m)\nu(\mathcal{G}(d_1(m)))$. Notamos que $E(S)$ é um subconjunto compacto de S.

Analogamente ao que ocorre na Teoria de Bass-Serre, o grupo $G = \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$

age naturalmente sobre $S = S(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ por $g_1(g_2\nu(\mathcal{G}(m))) = (g_1g_2)\nu(\mathcal{G}(m))$, e de modo que $G\backslash S = \Gamma$; se $Gs = m \in \Gamma$, então o estabilizador de um elemento s de S é conjugado a $\nu(\mathcal{G}(m))$; e, o grafo $S = S(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ é uma *árvore* (*cf.* [ZM88, Prop. 3.8]).

Para a conveniência do leitor, explicitamos a construção da árvore profinita padrão S sobre a qual um dado produto profinito livre amalgamado próprio $G = A \amalg_C B$ age. Os vértices de S são todas as classes laterais de G/A e G/B, e as arestas de S são todas as classes laterais de G/C; cada aresta gC "conecta" o vértice inicial gA ao vértice final gB.

$$gA \bullet \xrightarrow{gC} \bullet\, gB$$

Finalmente apresentamos um resultado que será utilizado no Capítulo 3. A versão profinita deste resultado está essencialmente escrita em [BZ11, Prop. 2.2(ii)].

Proposição 1.4.4. *Seja $G = \mathrm{HNN}(H, A, B, t)$ uma* HNN-*extensão pro-p. Se A e B não são conjugados em H, então $N_G(A) = N_H(A) \amalg_A N_{H^{t^{-1}}}(A)$.*

Demonstração. Seja S a árvore pro-p padrão sobre a qual G age. Por restrição, o normalizador $N_G(A)$ age sobre a subárvore S^A dos pontos de S fixos por A. Afirmamos que o grafo quociente $N_G(A)\backslash S^A$ é um laço ou um segmento. De fato, se gA é uma aresta de S^A então $g \in N_G(A)$; ou seja, temos uma única aresta no quociente. Agora, a hipótese de A e $B = t^{-1}At$ não serem conjugados em H é equivalente a $N_G(A)1H \neq N_G(A)tH$; donde $N_G(A)\backslash S^A$ é um segmento. Da versão pro-p de [ZM89, Prop. 4.4], o resultado segue. $\square$

Capítulo 2

Grupos pro-finitos limites

The driving force in research is curiosity. When is a particular result true? Is that the best proof, or is there a more natural or elegant one? What is the most general context in which the result holds?

Sir Michael Atiyah

No presente capítulo introduzimos a classe dos grupos pro-finitos limites e iniciamos um estudo de tal classe.

Com o intuito de tornar mais inteligíveis as propriedades, e até mesmo a definição, dos grupos pro-finitos limites, apresentamos na primeira seção deste capítulo resultados que são válidos para construções livres mais gerais. Em seguida, provamos resultados sobre esta nova classe de grupos profinitos e apresentamos alguns exemplos.

Os seguintes teoremas resumem os principais resultados obtidos neste capítulo.

Teorema 2.0.1. *Seja G um grupo pro-finito limite. Então:*

(2.2.2) *o grupo G possui p-dimensão co-homológica finita e portanto é livre-de-torção; além disso, se G for p-projetivo então $cd_p(G) = \max\{2, \alpha_p(G)\}$, onde $\alpha_p(G) = \sup\{cd_p(A) \mid A \leq_c G, A \text{ abeliano}\}$.*

(2.2.3) *os subgrupos fechados nilpotentes de G são abelianos, e existe uma limitação (finita) uniforme para seus postos.*

(2.2.6) *sobre um subgrupo fechado qualquer H de G, as seguinte asserções são equivalentes:* (i) *H não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum, para cada primo* *p;* (ii) *H é virtualmente solúvel;* (iii) *H possui posto finito;* (iv) *H é abeliano ou meta-procíclico projetivo.*

(2.2.10) *para cada elemento que gera um subgrupo profinito livre de posto 1, o normalizador deste subgrupo é abeliano maximal ou meta-procíclico projetivo.*

(2.2.12) *se G possui a propriedade 'comutatividade-transitiva', então G é abeliano ou pro-p.*

Exemplos não-óbvios de grupos pro-finitos limites podem ser obtidos através do seguinte resultado, cujo análogo pro-p não é conhecido.

Proposição 2.3.2. *O completamento profinito de um grupo limite discreto é um grupo pro-finito limite.*

Observamos que no Capítulo 4 explicitamos algumas das semelhanças, diferenças e relações existentes entre as classes de grupos limites discretos, pro-p e pro-finitos.

O presente capítulo está inspirado nas Referências Bibliográficas listadas na seção **Grupos Limites** e está baseado no trabalho [KZ11].

2.1 Alguns resultados gerais

Para o primeiro resultado, necessitamos do conceito suficientemente geral de soma direta (coproduto) de famílias de grupos profinitos abelianos indexadas por espaços profinitos e espaços profinitos com um ponto distinguido, originalmente desenvolvido em [Mel89]. Além disso, para um número primo p e um G um grupo profinito quaisquer, definamos

$$\alpha_p(G) = \sup\{cd_p(A) \mid A \leq_c G, A \text{ abeliano}\} .$$

Por simplicidade notacional denotaremos $\text{stab}_G(m)$ por G_m.

Proposição 2.1.1. *Seja G um grupo profinito agindo sobre uma árvore profinita T. Temos que*

$$cd_p(G) \leq \sup\{cd_p(G_v), 1 + cd_p(G_e) \mid v \in V(T), e \in E(T)\} . \tag{2.1}$$

Em particular, se existe um limitante (finito) para as p-dimensões co-homológicas de todos os estabilizadores de vértices, então G possui p-dimensão co-homológica finita.

Além disso, no caso de cada estabilizador de aresta ser procíclico, se para cada estabilizador de vértice tivermos $cd_p(G_v) = \max\{2, \alpha_p(G_v)\}$, *então* $cd_p(G) = \max\{2, \alpha_p(G)\}$.

Demonstração. Pela dualidade entre co-homologia e homologia (*cf.* [RZ00b, Prop. 6.3.6]), é suficiente mostrar nulidades de homologias. Consideramos a seguinte seqüência exata associada à árvore T

$$0 \to \widehat{\mathbb{Z}}[\![(E^*(T), *)]\!] \to \widehat{\mathbb{Z}}[\![V(T)]\!] \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 0$$

(compare com eq. (1.4), p. 13). De acordo com [Mel89, Parag. 1 e 3], podemos reescrever esta seqüência como

$$0 \to \bigoplus_{(G\backslash E^*, *)} (\widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}[\![G_e]\!]} \widehat{\mathbb{Z}}) \to \bigoplus_{G\backslash V} (\widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}[\![G_v]\!]} \widehat{\mathbb{Z}}) \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 0 \ .$$

Aplicando o tensor completo sobre $\widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!]$ com qualquer $\widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!]$-módulo profinito M, e tomando a seqüência exata de homologia de G para esta seqüência de módulos de coeficientes, obtemos a seguinte seqüência de Mayer-Vietoris

$$\ldots \to H_{q+1}(G, M) \to \bigoplus_{(G\backslash E^*, *)} H_q(G, \widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}[\![G_e]\!]} M) \to \bigoplus_{G\backslash V} H_q(G, \widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}[\![G_v]\!]} M) \to$$
$$\to H_q(G, M) \to \ldots\ldots\ldots \to H_0(G, M) \to 0$$

(*cf.* [Mel89, Thm. 5.7]).

Agora, o Lema de Shapiro (*cf.* [RZ00b, Thm. 6.10.9]) diz que para cada vértice temos $H_n(G, \widehat{\mathbb{Z}}[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}[\![G_v]\!]} M) \cong H_n(G_v, M)$. Por hipótese, $H_q(G_v, M)$ é nulo para $q > cd_p(G_v)$. Donde a equação (2.1) segue.

Finalmente, para a última asserção, supomos que os estabilizadores de arestas sejam procíclicos. Claramente temos $\max\{2, \alpha_p(G)\} \leq cd_p(G)$. Por outro lado, usando novamente a hipótese sobre os estabilizadores de vértices, segue da equação (2.1) que $cd_p(G) \leq \sup\{2, cd_p(G_v) \mid v \in V(T)\} = \sup\{2, \alpha_p(G_v) \mid v \in V(T)\} \leq \max\{2, \alpha_p(G)\}$. $\square$

Proposição 2.1.2. *Seja $\mathcal{P}$ a propriedade de que subgrupos fechados abelianos possuam posto finito limitado. Seja G um grupo profinito agindo sobre uma árvore profinita T. Se cada estabilizador de vértice de G possui a propriedade $\mathcal{P}$ então G também a possui.*

Demonstração. Seja A um subgrupo fechado abeliano de G. Então A age sobre T por restrição, e aplicamos o Teorema 1.4.3. O caso (b) desse teorema não pode ocorrer, pois todo subgrupo de A é abeliano.

Suponhamos primeiramente o caso (a), ou seja, que o grupo A estabiliza algum vértice de T. Temos, por definição (vide p. 16), que A está contido, a menos de conjugação por um elemento de G, em algum grupo-vértice; logo, por hipótese, o resultado segue.

No caso (c), existe uma aresta e de T tal que $\mathrm{stab}_A(e)$ é um subgrupo normal de A cujo quociente $A/\mathrm{stab}_A(e)$ é isomorfo a: (c.1) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$; (c.2) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; (c.3) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donde, $A/\mathrm{stab}_A(e)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_\sigma$ para algum conjunto σ de primos (pois A é abeliano). Ora, $\mathrm{stab}_A(e)$ é um subgrupo abeliano de um estabilizador de vértice, digamos $\mathrm{stab}_A(v)$. Portanto, $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(\mathbb{Z}_\sigma) + \mathrm{rk}(\mathrm{stab}_A(e)) \leq 1 + \sup\{\mathrm{rk}(C) \mid C \leq_c \mathrm{stab}_G(v), C \text{ abeliano}\}$ (*cf.* [Wil98, Prop. 8.1.1(b)]). □

Proposição 2.1.3. *Seja $G = G_1 \amalg_{G_0} G_2$ um produto profinito livre com amalgamação procíclica. Suponhamos que G_0 seja livre-de-torção. Seja p um número primo com $p > 2$. Se nenhum produto semidireto $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ (com respeito a ações não-triviais) é subgrupo de G_1 ou G_2, então G também não possui subgrupo isomorfo a tais grupos.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que H seja um subgrupo de G isomorfo a algum $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. Seja T a árvore profinita padrão sobre a qual o produto amalgamado próprio G age. Então H age sobre T por restrição e aplicamos o Teorema 1.4.3. No caso (a), H ficaria contido, a menos de conjugação, em um dos fatores livres; o que não pode ocorrer por hipótese. Evidentemente, o caso (b) deste Teorema não pode ocorrer, pois H é solúvel.

No caso (c), existe uma aresta e de T tal que $\mathrm{stab}_H(e)$ é um subgrupo normal de H cujo quociente $H/\mathrm{stab}_H(e)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou ao grupo trivial (pois H é pro-p).

Claramente podemos supor que $\mathrm{stab}_H(e) \neq 1$ e $H/\mathrm{stab}_H(e) \cong \mathbb{Z}_p$. Seja H_e um conjugado de $\mathrm{stab}_H(e)$ por um elemento de G, de modo que H_e seja um subgrupo de G_0 isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Seja $\alpha\colon N_G(H_e) \to \mathrm{Aut}(H_e)$ a ação por conjugação de $N_G(H_e)$ sobre H_e. Relembremos que $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, pois $p \neq 2$ (*cf.* [RZ00b, Thm. 4.4.7(a)]). Se a imagem $\alpha(N_G(H_e))$ fosse finita, então $\alpha(H)$ seria trivial; logo H_e seria central em H ($\cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$) e portanto trivial. Caso contrário, afirmamos que $N_{G_1}(H_e)$ ou $N_{G_2}(H_e)$ conteria $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. De fato, à luz da Proposição 1.3.9, temos que $N_G(H_e)$ é topologicamente gerado por $N_{G_1}(H_e)$ e $N_{G_2}(H_e)$; assim, $\alpha(N_{G_1}(H_e))$ e $\alpha(N_{G_2}(H_e))$ não podem ser ambos de torção; como $\mathbb{Z}_p$ é projetivo e ambos $N_{G_1}(H_e)$ e $N_{G_2}(H_e)$ contêm H_e, a afirmação segue. $\square$

Observação 2.1.4. *Se $p = 2$, o subgrupo $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ pode aparecer como $\mathbb{Z}_2$-por-$(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De fato, se N é um subgrupo normal de um grupo pro-p G tal que $G/N \cong Q_1 \amalg^p Q_2$, então $G = \pi^{-1}(Q_1) \amalg^p_N \pi^{-1}(Q_2)$ onde π denota a aplicação canônica $G \to G/N$.*

2.2 Propriedades de grupos pro-finitos limites

Seja $\mathcal{C}$ uma classe não-vazia de grupos finitos fechada sob formação de subgrupo, quociente e produto direto finito. Definimos indutivamente as seguintes classes de grupos pro-$\mathcal{C}$:

$\mathcal{G}_0$ é a classe de todos os grupos pro-$\mathcal{C}$ livres de posto finito.

$\mathcal{G}_n$ $(n > 0)$ é a classe de todos os grupos G_n, onde G_n é o produto pro-$\mathcal{C}$ livre amalgamado $G_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} A_{n-1}$ satisfazendo:

(i) C_{n-1} é um subgrupo próprio procíclico e um fator direto de um grupo pro-$\mathcal{C}$ abeliano livre de posto finito qualquer A_{n-1}.

(ii) C_{n-1} é um subgrupo do grupo G_{n-1} de $\mathcal{G}_{n-1}$ tal que o normalizador em G_{n-1} de cada subgrupo procíclico não-trivial de C_{n-1} coincide com C_{n-1}.

Definição 2.2.1. *Um* **grupo pro-$\mathcal{C}$ limite** *G é um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de algum grupo G_n de $\mathcal{G}_n$ $(n \geq 0)$. O* **peso** *de G é o menor tal inteiro n.*

Observamos que, quando $\mathcal{C}$ consiste de todos os p-grupos finitos a nossa classe de grupos pro-$\mathcal{C}$ limites coincide precisamente com a classe de grupos originalmente estudada em [KZ11]. De fato, a propriedade de grupos limites de o normalizador e o centralizador de um subgrupo 1-gerado não-trivial qualquer serem abelianos e coincidirem, se verifica para tais grupos pro-p ([KZ11, Thm. 5.1]).

Notamos ainda que no caso profinito, as aplicações canônicas $G_{n-1} \to G_n$ e $A_{n-1} \to G_n$ são monomorfismos, pela Proposição 1.3.6. Obviamente, temos que todo grupo profinito livre de posto finito ou abeliano livre de posto finito é um grupo pro-finito limite.

Da versão profinita do Teorema 1.3.8(a), temos que cada grupo pro-finito limite é livre-de-torção. Na verdade, temos a seguinte propriedade mais forte.

Proposição 2.2.2. *Todo grupo pro-finito limite G possui p-dimensão co-homológica finita e portanto é livre-de-torção. Além disso, se G não for p-projetivo então $cd_p(G) = \max\{2, \alpha_p(G)\}$, onde $\alpha_p(G) = \sup\{cd_p(A) \mid A \leq_c G, A$ abeliano$\}$.*

Demonstração. Seja G um subgrupo fechado de algum grupo G_n de $\mathcal{G}_n$. Se $n = 0$, temos $cd_p(G) \leq 1$. Suponhamos então $n \geq 1$. Em virtude da primeira asserção da Proposição 2.1.1, temos

$$cd_p(G) \leq \sup\{2, cd_p(G \cap xG_{n-1}x^{-1}), cd_p(G \cap yA_{n-1}y^{-1}) \mid x, y \in G_n\} \ .$$

Além disso, se G não for p-projetivo, claramente temos $\max\{2, \alpha_p(G)\} \leq cd_p(G)$. Para a desigualdade na outra direção, primeiramente notamos que $cd_p(G \cap yA_{n-1}y^{-1}) \leq \alpha_p(G)$. Por indução temos que $cd_p(G \cap xG_{n-1}x^{-1}) \leq \max\{2, \alpha_p(G \cap xG_{n-1}x^{-1})\}$, pois quando $n = 1$ temos $cd_p(G \cap xG_{n-1}x^{-1}) \leq 1$. □

Assim, os grupos pro-finitos limites procíclicos são isomorfos a $\mathbb{Z}_\pi$, para algum conjunto de primos π. Quando π é vazio, obtemos o único grupo limite que é pro-finito limite, o qual é também o único grupo finito pro-finito limite, o grupo trivial.

Mais geralmente, são grupos pro-finitos limites todos os grupos profinitos finitamente gerados G abelianos livres-de-torção, a saber

$$G \cong \prod_p \left(\prod_{m(p)} \mathbb{Z}_p \right) \ ,$$

com $m(p) \leq d(G)$.

Observamos que, da seguinte Proposição 2.2.3, cada subgrupo fechado abeliano de um grupo pro-finito limite é um subgrupo (topologicamente) finitamente gerado de um grupo profinito abeliano livre de posto finito; donde um grupo pro-finito limite de peso no máximo 1. Na verdade, podemos estender a Proposição 2.1.2 para subgrupos fechados um pouco mais gerais do que subgrupos nilpotentes de grupos pro-finitos limites.

Diremos que um grupo profinito G satisfaz *a condição do normalizador para subgrupos fechados*, se para cada subgrupo próprio fechado H de G temos que o normalizador $N_G(H)$ contém própriamente H. Notemos que para um tal grupo, temos que: todo subgrupo fechado e todo quociente por um subgrupo normal fechado também satisfaz a condição do normalizador para subgrupos fechados; e, existe um único subgrupo p-Sylow para cada primo p, donde subgrupos de Sylow coprimos comutam pontualmente.

Proposição 2.2.3. *Seja G um grupo pro-finito limite. Os subgrupos fechados de G que satisfazem a condição do normalizador para subgrupos fechados são abelianos, e existe um limitante (finito) uniforme para seus postos.*

Demonstração. Seja A um subgrupo fechado que satisfaça a condição do normalizador para subgrupos fechados de um certo grupo G_n. Se $n = 0$ então A é projetivo, e como cada subgrupo pro-p livre de A deve ser abeliano (*cf.* Teorema 1.3.8(b)), temos que cada subgrupo de Sylow de A é procíclico; donde $A \cong \mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$ com π e ρ disjuntos (*cf.* Proposição 1.3.4) e portanto $A \cong \mathbb{Z}_{\pi\cup\rho}$, pois subgrupos de Sylow coprimos comutam pontualmente.

Suponhamos $n \geq 1$. Seja T a árvore profinita padrão sobre a qual o produto profinito amalgamado próprio G_n age. Então A age sobre T por restrição e aplicamos o Teorema 1.4.3; evidentemente, o caso (b) deste Teorema não pode ocorrer, pela condição do normalizador.

Suponhamos primeiramente o caso (a), ou seja, que o grupo A estabilize algum vértice de T. Temos, por definição (vide p. 17), que A está contido, a menos de conjugação por um elemento de G_n, em G_{n-1} ou A_{n-1}; logo, por indução o resultado segue.

Na outra situação possível (o caso (c)), temos $A \cong \mathrm{stab}_A(e) \rtimes \mathbb{Z}_\sigma$. Como $\mathrm{stab}_A(e)$ está contido, a menos de conjugação por um elemento de G_n, em C_{n-1}, temos $A \cong \mathbb{Z}_\tau \rtimes \mathbb{Z}_\sigma$ e $\mathrm{rk}(A) \leq 2$. Da condição de normalizadores de A segue que A é abeliano (pois caso contrário A conteria um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ com respeito a uma ação não-trivial). $\square$

Grupos limites discretos ou pro-p possuem uma forte relação de comutatividade: a comutatividade é transitiva sobre os elementos não-triviais; ou seja, o centralizador de cada elemento não-trivial em tais grupos é abeliano (*cf.* Apêndice A). Desta propriedade decorrem os seguintes resultados:

(1) grupos limites não-abelianos possuem centro trivial;

(2) grupos limites virtualmente abelianos são abelianos;

(3) grupos limites solúveis são abelianos.

Como geralmente se espera, a situação pro-finita é mais complexa do que a discreta ou pro-p. No Apêndice A (p. 61), apresentamos um simples exemplo de grupo, a saber $G \cong \mathbb{Z}_{p'} \rtimes \mathbb{Z}_p$, que é pro-finito limite de peso 0, não-livre, não-abeliano e virtualmente $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Antes de provarmos mais resultados, daremos a principal razão para as condições do item (ii) na definição dos grupos G_n. Consideremos em um grupo, um elemento que gere um grupo livre de posto 1. No caso discreto, o centralizador deste elemento em um grupo livre é cíclico, e após fazermos uma extensão de centralizadores o centralizador se torna abeliano. No caso profinito, o centralizador em um grupo profinito livre é meta-procíclico, e após fazermos uma extensão de centralizadores o centralizador se torna meta-abeliano, ou (procíclico não-trivial)-por-(diedral pro-π), ou ainda pode conter um subgrupo pro-p livre não-abeliano. Vide Proposição 2.2.5 e Proposição 2.2.10.

Observação 2.2.4. Segue do item (ii) na definição de grupos pro-finitos limites (p. 22), que *cada subgrupo procíclico não-trivial P de C_{n-1} possui normalizador em G_n abeliano.* Com efeito, à luz da Proposição 1.3.9 temos

$$N_{G_n}(P) = N_{G_{n-1}}(P) \amalg_{C_{n-1}} N_{A_{n-1}}(P) = C_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} A_{n-1} = A_{n-1} \ .$$

No próximo resultado veremos como seriam subgrupos solúveis de grupos profinitos um pouco mais gerais do que grupos pro-finitos limites. Para isto, diremos que um grupo profinito é um *grupo profinito pré-limite* se o item (ii) na construção da classe de grupos pro-finitos limites *fosse apenas* 'C_{n-1} é um subgrupo auto-normalizante do grupo G_{n-1} de $\mathcal{G}_{n-1}$'.

Proposição 2.2.5. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo profinito pré-limite. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *H não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum, para cada primo p;*

(ii) *H é virtualmente solúvel;*

(iii) *H é abeliano ou (procíclico)-por-(extensão cindida de dois grupos procíclicos);*

(iv) *H é metabeliano ou (procíclico não-trivial)-por-$(\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

(v) *H possui posto finito.*

Demonstração. Seja H um subgrupo fechado virtualmente solúvel de algum G_n. Se $n = 0$, a Proposição 1.3.4 encerra a demonstração.

Suponhamos então $n \geq 1$. Seja T a árvore padrão sobre a qual G_n age, e restrinjamos a ação a H. Sob qualquer uma das condições (i)-(v) desta Proposição, os únicos casos do Teorema 1.4.3 que podem ocorrer são (a) e (c).

No caso (a), H é um subgrupo de um conjugado de G_{n-1} ou A_{n-1}. Por indução sobre n, o resultado segue. No caso (c), existe uma aresta e de T tal que $\mathrm{stab}_H(e)$ é um subgrupo normal de H cujo quociente $H/\mathrm{stab}_H(e)$ é isomorfo a: (c.1) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$; (c.2) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; (c.3) $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notemos que, $\mathrm{stab}_H(e)$ é um subgrupo de um conjugado do grupo procíclico C_{n-1}. Logo, H é poli-procíclico.

Portanto, valem as condições (i), (ii) e (v) e estas são duas a duas equivalentes. Resta mostrarmos que (iii) implica (iv).

(iii)$\Rightarrow$(iv). Vamos analisar a estrutura de G que é, em princípio, $\mathbb{Z}_\sigma$-por-$(\mathbb{Z}_\pi \rtimes H)$, de acordo com as três alternativas do caso (c) do Teorema 1.4.3.

Caso (c.1). Escrevendo $\mathbb{Z}_\pi = \prod_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$, consideramos o conjunto π_0 de todos primos p de π tais que $\mathbb{Z}_p$ é fixo pela ação de $\mathbb{Z}_\rho$, e definimos $\pi_1 = \pi - \pi_0$. Assim, $\mathbb{Z}_\pi = \mathbb{Z}_{\pi_0} \times \mathbb{Z}_{\pi_1}$. Logo, G é $(\mathbb{Z}_\sigma$-por-$\mathbb{Z}_{\pi_1})$-por-$(\mathbb{Z}_{\pi_0}$-por-$\mathbb{Z}_\rho)$. Como o subgrupo normal $\mathbb{Z}_\sigma$ possui grupo de automorfismos abeliano (*cf.* [RZ00b, Thm. 4.4.7]), o subgrupo derivado $\overline{[G,G]}$ centraliza $\mathbb{Z}_\sigma$. Por outro lado, $\mathbb{Z}_\pi$ é o subgrupo derivado de $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$ (vide demonstração da Proposição 1.3.4). Logo G é $(\mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{Z}_{\pi_1})$-por-$(\mathbb{Z}_{\pi_0} \times \mathbb{Z}_\rho)$.

Caso (c.2). *Mutatis mutandis* nos argumentos no caso anterior. O conjunto π_0 é vazio, pois a ação é livre-de-pontos-fixos; e, o subgrupo derivado de $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}_\pi$ (pelo [RZ00b, Lemma 4.6.5] e pelo fato que o subgrupo derivado de um grupo de Frobenius finito é o produto do núcleo de Frobenius pelo derivado do subgrupo de Frobenius). Portanto, G é $(\mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{Z}_\pi)$-por-$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, com σ não-vazio.

Caso (c.3). Neste caso, não há como obtermos um grupo metabeliano (*cf.* Observação 2.1.4), e assim G é (procíclico não-trivial)-por-(diedral pro-π). $\square$

Já observamos anteriomente que existe um grupo pro-finito limite não-abeliano virtualmente $\widehat{\mathbb{Z}}$ (*cf.* Apêndice A, p. 61). De modo geral, *um grupo profinito livre-de-torção virtualmente procíclico G é meta-(procíclico) projetivo; e logo é abeliano se, e somente se, $G \cong \mathbb{Z}_\pi$ para algum conjunto π de primos.* Isto segue, por exemplo, da Proposição B.3 ou do proeminente teorema de Serre sobre dimensão co-homológica de grupos profinitos (*cf.* [RZ00b, Thm. 7.3.7(a)]).

Corolário 2.2.6. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo pro-finito limite. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *H não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum, para cada primo p;*

(ii) *H é virtualmente solúvel;*

(iii) *H possui posto finito;*

(iv) *H é abeliano ou meta-procíclico projetivo.*

Demonstração. Basta chegarmos à condição (iv). Seja H um subgrupo fechado virtualmente solúvel de algum G_n. Seguindo a demonstração da Proposição 2.2.5, podemos supor que $n \geq 1$. A simplificação ocorre no caso (c) do Teorema 1.4.3. Se $\mathrm{stab}_H(e) = 1$, então a única situação possível é (c.1), pois G é livre-de-torção. Suponhamos $\mathrm{stab}_H(e) \neq 1$, e seja H_e, contido em C_{n-1}, um conjugado do estabilizador de aresta $\mathrm{stab}_H(e)$ por um elemento de G_n. Ora, $N_{G_n}(H_e)$ é abeliano, pela Observação 2.2.4; donde $H = N_H(\mathrm{stab}_H(e))$ é abeliano. □

Em particular, temos que *os grupos pro-finitos limites satisfazem a p-alternativa de Tits (i.e. cada subgrupo fechado de um grupo pro-finito limite ou é virtualmente solúvel, ou possui um subgrupo pro-p livre não-abeliano).*

Corolário 2.2.7. *Para qualquer primo p, nenhum produto semidireto $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ (com respeito a uma ação não-trivial) é um subgrupo de um grupo pro-finito limite.* □

Relembramos que um grupo profinito G é analítico p-ádico se, e somente, G contiver um subgrupo pro-p aberto de posto finito (*cf.* [DDMS, Cor. 8.34] ou [RZ00b, Sec. 2.12.1]). Logo, se G for profinito, analítico p-ádico, e livre-de-torção, temos que G é um grupo pro-p de posto finito (*cf.* [DDMS, Ex. 3.1, p. 58]). Observamos então o seguinte resultado.

Corolário 2.2.8. *Cada grupo pro-finito limite que é analítico p-ádico deve ser pro-p abeliano livre de posto finito.* □

Diremos que um grupo profinito G é *just-infinite*[1] se G for infinito e cada quociente próprio contínuo de G for finito; equivalentemente, cada subgrupo normal não-trivial fechado de G é aberto. Como um grupo profinito infinito não pode ser simples, a propriedade de ser just-infinite é um análogo natural de simplicidade para grupos profinitos.

[1]Uma possível expressão em português seria “um pouquinho não-finito”.

Corolário 2.2.9. *Seja H um subgrupo fechado virtualmente just-infinite de um grupo pro-finito limite. Se H não contém subgrupo pro-p livre não-abeliano algum para cada primo p, então H é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ para algum primo p.*

Demonstração. Basta mostrarmos o resultado para H just-infinite, pois um grupo profinito livre-de-torção virtualmente $\mathbb{Z}_p$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ (*cf.* Proposição B.3).

Consideremos primeiramente H projetivo; isto é, $H \cong \mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$. Supondo H just-infinite, temos $H \cong \mathbb{Z}_p$ com p em π se π for não-vazio, e p em ρ caso contrário.

Finalmente, um grupo profinito abeliano just-infinite G qualquer deve ser isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. De fato, como G é produto de seus subgrupos de Sylow, temos que G é um grupo pro-p. Usando novamente que G é just-infinite, segue que o subgrupo de Frattini de G deve ser aberto e logo G é finitamente gerado. Agora, G não pode conter elemento de torção, ou seja G é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito. Portanto G deve ser isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. □

Voltamos agora à questão da transitividade da comutação de grupos pro-finitos limites.

Proposição 2.2.10. *Seja H um subgrupo fechado qualquer de um grupo pro-finito limite, e seja g um elemento qualquer de H com $\overline{\langle g\rangle}$ isomorfo a um grupo profinito livre de posto 1. Temos:*

(i) *o centralizador $C_H(g)$ é abeliano maximal ou meta-procíclico projetivo;*

(ii) *o normalizador $N_H(\overline{\langle g\rangle})$ é abeliano maximal ou meta-procíclico projetivo, e abeliano só se coincide com o centralizador.*

Demonstração. (i) Basta mostrarmos o resultado para $H = G_n$. Por simplicidade notacional, sejam $G := G_n$ e $C := C_G(g)$.

Se $n = 0$, temos que $\overline{\langle g\rangle}$ é um subgrupo normal do grupo pro-finito projetivo C. Seja S um subgrupo p-Sylow de C. Intersectando $\overline{\langle g\rangle}$ com S, obtemos o subgrupo p-Sylow de $\overline{\langle g\rangle}$. Pelo Lema 1.3.5, temos que $S \cong \mathbb{Z}_p$. Donde C é meta-procíclico projetivo, pela Proposição 1.3.4.

Suponhamos então $n \geq 1$. Seja T a árvore profinita padrão sobre a qual o produto amalgamado próprio G_n age. Pela Proposição 1.4.2 existe uma subárvore profinita C-invariante minimal não-vazia D. Quando D possui apenas um elemento, existe um elemento x em G_n tal que o subgrupo conjugado xCx^{-1} está contido em G_{n-1} ou A_{n-1}. Pela hipótese de indução, segue que C é abeliano ou meta-procíclico. Suponhamos que D possua mais de um elemento. O núcleo K da ação de C sobre D é um subgrupo de cada estabilizador de aresta da ação. Como cada estabilizador de aresta está contido, a menos de conjugação por um elemento de G_n, em C_{n-1}, o grupo K é procíclico.

Se $g \in K$, temos que $C_G(g)$ é abeliano, pela Observação 2.2.4.

Se $g \notin K$, então $\overline{\langle g \rangle} \cap K$ é trivial ou não. Na última situação o resultado segue, pois se $1 \neq x \in (\overline{\langle g \rangle} \cap K)$, temos $C_G(g) \subseteq C_G(x)$ e então $N_G(\overline{\langle x \rangle})$ é abeliano, pela Observação 2.2.4. Na primeira situação, $\overline{\langle g \rangle}K/K$ é um subgrupo de C/K isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}$, e o centralizador $C_{C/K}(\overline{\langle g \rangle}K/K)$ é C/K. Como C/K age fiel e irredutivelmente sobre D, temos por [Zal90, Lemma 2.4(d)], que $C_{C/K}(\overline{\langle g \rangle}K/K)$ é projetivo. Pela Proposição 1.3.4, C é procíclico-por-(meta-procíclico); donde abeliano ou meta-procíclico projetivo, pelo Corolário 2.2.6.

(ii) O grupo de automorfismos $Aut(\overline{\langle g \rangle})$ é abeliano (*cf.* [RZ00b, Cor. 4.4.8]); logo, $N_G(\overline{\langle g \rangle})$ é metabeliano-por-abeliano, e portanto abeliano ou meta-procíclico projetivo, pelo Corolário 2.2.6. Obviamente, se existe um elemento x em $N_G(\overline{\langle g \rangle}) - C_G(g)$, então o subgrupo $\overline{\langle g, x \rangle}$ de $N_G(\overline{\langle g \rangle})$ é não-abeliano. □

Corolário 2.2.11. *Em um grupo pro-finito limite, um subgrupo fechado que possua* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *como fator direto deve ser abeliano.* □

Para o último resultado desta seção, vamos relembrar conceitos de recobrimentos de grupos profinitos. Seja G um grupo profinito. Dizemos que um epimorfismo de grupos profinitos $\varphi\colon \widetilde{G} \to G$ é um recobrimento *projetivo* (resp. de *Frattini*) se, $\widetilde{G}$ for projetivo (resp. $\ker(\varphi) \subseteq \Phi(\widetilde{G})$). Por [FJ05, Prop. 22.6.1] (ou ainda [RZ00b, Lemma 2.8.15]), *cada grupo profinito* G *possui um epimorfismo* $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{G} \to G$*, único a menos de isomorfismo, que* *é um recobrimento projetivo e de Frattini.* Tal recobrimento é chamado de **recobrimento de Frattini universal**.

Proposição 2.2.12. *Um grupo pro-finito limite que possui a propriedade comutatividade-transitiva é abeliano ou pro-p.*

Demonstração. Por simplicidade, um grupo que possui a propriedade 'comutatividade-transitiva' será chamado de um grupo CT. Seja G um subgrupo profinito finitamente gerado CT de algum G_n.

Se $n = 0$, então G é procíclico ou pro-p livre não-abeliano. De fato, suponhamos G não-abeliano. Se cada quociente finito de G é um p-grupo, então G é pro-p livre. Caso contrário, seja Q um quociente finito não-abeliano de G com elementos de ordens primas distintas. Então, a aplicação canônica $G \to Q$ se fatora sobre o seu recobrimento de Frattini universal $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{Q} \to Q$ (pois G é projetivo), de modo que $G \to \widetilde{Q}$ também é um epimorfismo (pois $\ker(\widetilde{\varphi}) \subseteq \Phi(\widetilde{Q})$). Agora, o Frattini $\Phi(\widetilde{Q})$ é um subgrupo normal aberto, e $\widetilde{Q}$ possui um subgrupo p-Sylow S_p não-trivial; intersectando este com $\Phi(\widetilde{Q})$ obtemos um subgrupo p-Sylow de $\Phi(\widetilde{Q})$, o qual possui índice finito em S_p. Daí, como $\Phi(\widetilde{Q})$ é pronilpotente (*cf.* [Wil98, Prop. 2.5.1(d)]), subgrupos de Sylow de $\widetilde{Q}$ relativos a primos distintos comutam pontualmente; donde $\widetilde{Q}$ é pronilpotente (vide [Wil98, Prop. 2.4.3]). Por outro lado, sendo $\widetilde{Q}$ projetivo, este pode ser visto como um subgrupo de G; logo $\widetilde{Q}$ também é CT. Assim, cada subgrupo de Sylow de $\widetilde{Q}$ é abeliano; donde $\widetilde{Q}$ também o é. Uma contradição com a definição de $\widetilde{Q}$.

Suponhamos, por indução sobre n, que o resultado seja verdadeiro para $\mathcal{G}_{n-1}$ (p. 22). Consideramos $G_n \in \mathcal{G}_n$ onde $G_n = G_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} A_{n-1}$ com $A_{n-1} = B_{n-1} \times C_{n-1}$ e $G_{n-1} \neq C_{n-1} \neq A_{n-1}$. Seja D_{n-1} um fator direto maximal procíclico não-trivial de B_{n-1} (que pode coincidir com B_{n-1}) e definamos $K = \overline{\langle gD_{n-1}g^{-1} \mid g \in G_n \rangle}$. Por [Zal95, Thm. B], K é um grupo pro-finito projetivo. Seja P a intersecção de K com G. Como no segundo parágrafo não usamos o fato que G é finitamente gerado, temos três possibilidades para P: pro-p livre não-abeliano, procíclico não-trivial, ou trivial. Para concluirmos a demonstração, suponhamos doravante que G não seja pro-p.

Não pode ocorrer de P ser pro-p livre não-abeliano. De fato, como existe um elemento y em G tal que $\overline{\langle y\rangle} \cong \mathbb{Z}_q$ com $q \neq p$, e como G é CT, $\overline{\langle y\rangle}$ agiria não-trivialmente sobre o subgrupo normal P; ou seja, existiria x em P que não comutaria com y. Logo o subgrupo $\overline{\langle x, y\rangle}$ seria CT, projetivo, não-abeliano e não-pro-p; uma contradição com o segundo parágrafo.

Suponhamos que P seja procíclico não-trivial. Tomamos, então um subgrupo l-Sylow não-trivial S de P, o qual é característico em P, e logo normal em G. Se S for central em G, então G deve ser abeliano. Senão, existiria um elemento de G que não comutaria com S e logo existiria um subgrupo T, de ordem potência de um primo r, que não comutaria com S. Consideraríamos então $S.T \cong \mathbb{Z}_l \rtimes \mathbb{Z}_r$. Se $r \neq l$, então este produto, e logo G, não seria CT (*cf.* Corolário A.4). O caso $r = l$, não poderia ocorrer pelo Corolário 2.2.7.

Finalmente suponhamos que $P = 1$. Ora, K é o núcleo do epimorfismo $\pi\colon G_n \to G_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} (A_{n-1}/D_{n-1})$ induzido pela identidade de G_{n-1} e pela aplicação canônica $A_{n-1} \to A_{n-1}/D_{n-1}$. Então, $G \cong \pi(G)$ e, ou $A_{n-1}/D_{n-1} \cong C_{n-1}$ ou $d(A_{n-1}/D_{n-1}) < d(A_{n-1})$. Por indução sobre n e $d(A_{n-1})$ o resultado segue. $\square$

Notamos que grupos pro-finitos limites não-abelianos podem possuir centro não-trivial. Por exemplo, se p e q são primos distintos e q divide $\max\{2, p-1\}$, consideramos o grupo não-abeliano $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$.

2.3 Mais exemplos e não-exemplos

No clássico artigo [Bau62] sobre grupos residualmente livres, surge a importante construção de G. Baumslag conhecida, hoje em dia, por *duplo de Baumslag*. Esta consiste de um produto livre com amalgamação cíclica auto-normalizante nos fatores livres, onde estes são grupos isomorfos. Adicionando uma natural condição, obtemos que, assim como nos casos discreto e pro-p, um duplo de Baumslag de um grupo pro-finito limite é também um grupo pro-finito limite:

Proposição 2.3.1. *Seja G um grupo pro-finito limite contido em algum grupo G_n de $\mathcal{G}_n$, e seja $\overline{}: G \to \overline{G}$ um isomorfismo de grupos profinitos. Suponhamos que para cada subgrupo procíclico não-trivial D de C tenhamos $N_{G_n}(D) = C$. Se K é o produto pro-finito livre com amalgamação procíclica $G \amalg_{C=\overline{C}} \overline{G}$, então K é um grupo pro-finito limite de peso $\leq n+1$.*

Demonstração. Definamos $G_{n+1} := G_n \amalg_{C_n} A_n$, onde $C_n := C$ e $A_n := C \times \overline{\langle t \rangle}$ com t tal que A_n seja profinito abeliano livre de posto 2. Como K é isomorfo ao subgrupo $\overline{\langle G, tGt^{-1} \rangle}$ de $G \amalg_{C_n} A_n$, temos que K é um subgrupo profinito finitamente gerado de G_{n+1} que satisfaz

$$N_{G_{n+1}}(D) = N_{G_n}(D) \amalg_{C_n} N_{A_n}(D) = C_n \amalg_{C_n} A_n = A_n \,,$$

à luz da Proposição 1.3.9. □

O próximo resultado nos fornece exemplos não-triviais de grupos pro-finitos limites, cujo análogo pro-p não é conhecido.

Proposição 2.3.2. *O completamento profinito de um grupo limite discreto é um grupo pro-finito limite.*

Demonstração. Seja L um subgrupo finitamente gerado de um grupo livre (discreto) L_0. Temos que o grupo $\widehat{L}$ está naturalmente contido em $\widehat{L_0}$. De fato, por [RZ00b, Lemma 3.2.6], basta mostrarmos que a topologia profinita de L_0 induz a topologia profinita sobre L. Agora, um Teorema de M. Hall diz que cada subgrupo finitamente gerado de um grupo livre é um fator livre de algum subgrupo de índice finito; isto é, existe um subgrupo de índice finito V de modo que $V = K \amalg^{abs} L$, para algum subgrupo K de L_0. Por [RZ00b, Lemma 3.1.4(a)], a topologia profinita de L_0 induz a topologia profinita sobre V e, por [RZ00b, Cor. 3.1.6(a)], a topologia profinita de V induz a topologia profinita sobre L.

Seja L um subgrupo finitamente gerado do grupo limite discreto $L_n = L_{n-1} \amalg^{abs}_{Z_{n-1}} X_{n-1}$, onde Z_{n-1} é um subgrupo próprio cíclico e fator direto do grupo abeliano livre de posto finito X_{n-1}, e auto-centralizante em L_{n-1}.

Afirmamos que $\widehat{L_n} = \widehat{L_{n-1}} \amalg_{\widehat{Z_{n-1}}} \widehat{X_{n-1}}$. De fato, L_n é residualmente livre e portanto residualmente finito. Além disso, por [RZ96, Lemma 2.1], a topologia profinita de L_n induz a topologia profinita sobre L_{n-1}, X_{n-1} e Z_{n-1}. A afirmação segue imediatamente de [RZ00b, Ex. 9.2.7(2)].

Agora, seja Y um subgrupo não-trivial de Z_{n-1}. Por [CZ07, Prop. 3.4, Prop. 3.5, e Lemma 3.3], temos para cada inteiro k que

$$N_{\widehat{L_k}}(\overline{Y}) = C_{\widehat{L_k}}(\overline{Y}) = \overline{C_{L_k}(Y)} = \overline{N_{L_k}(Y)} \ .$$

Assim, o subgrupo $\widehat{Z_{n-1}}$ é autonormalizante em $\widehat{L_{n-1}}$. Além disso, $\widehat{Y}$ possui normalizador em $\widehat{L_n}$ abeliano (por comutatividade-transitiva), donde $N_{\widehat{L_{n-1}}}(\widehat{Y}) = \widehat{Z_{n-1}}$ (vide Observação 2.2.4).

Finalmente, argumentando como no primeiro parágrafo, temos que o grupo $\widehat{L}$ está naturalmente contido em $\widehat{L_n}$. Agora, [Wil08, Thm. B] diz que grupos limites retratam-se virtualmente sobre cada um de seus subgrupos finitamente gerados, ou seja existe um subgrupo de índice finito V em L_n que contém L e existe um homomorfismo de grupos $\rho\colon V \to L$ tal que $\rho_{|L} = \mathrm{id}_L$. Assim, $V \cong \ker(\rho) \rtimes L$. Portanto, a topologia profinita de L_n induz a topologia profinita sobre V, que por sua vez induz a topologia profinita sobre L. □

Em particular, o completamento profinito de cada grupo de superfície que não seja não-orientável de característica de Euler 1, 0 ou -1, é um grupo pro-finito limite. (*cf.* [FR99, Sec. 3.5] para grupos de superfícies).

Encerramos este capítulo dando exemplos de que, ao contrário do que ocorre para grupos limites discretos e pro-p, a abelianização contínua de grupos pro-finitos limites pode não ser infinita.

Proposição 2.3.3. *O recobrimento de Frattini universal de um grupo finito simples não-abeliano possui abelianização contínua trivial.*

Demonstração. Seja $\pi\colon X \to Y$ um recobrimento de Frattini de um grupo profinito Y.

Então, um subgrupo fechado X_0 de X é igual a X se, e somente se, $\pi(X_0) = Y$. Logo, se Y é um grupo profinito perfeito, (*i.e.* $Y = \overline{[Y, Y]}$), então X também o é. $\square$

Capítulo 3

Subgrupos 2-gerados de produtos pro-p livres com amalgamação procíclica

Quando le cose diventano troppo complicate, qualche volta ha un senso fermarsi e chiedersi: ho posto la domanda giusta?

Enrico Bombieri

O resultado principal da Teoria de Bass-Serre de grupos agindo sobre árvores afirma que um grupo G agindo sobre uma árvore T é o grupo fundamental de um grafo de grupos cujos grupos-vértice e grupos-arestas são estabilizadores de certos vértices e arestas de T. Isto diz que G pode ser obtido por sucessivas formações de produtos livres com amalgamação e HNN-extensões. A versão pro-p deste teorema não vale em geral (*cf.* Apêndice C, Exemplo C.8, p. 68), a saber, um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p não é necessariamente isomorfo ao grupo pro-p fundamental de um grafo de p-grupos finitos (provenientes dos estabilizadores). Além disso, o grupo pro-p fundamental de um grafo profinito de grupos pro-p não necessariamente se decompõe como um produto pro-p livre com amalgamação ou uma HNN-extensão pro-p sobre alguns estabilizadores de arestas; a razão é que retirando uma aresta do grafo profinito podemos destruir sua compacidade. Estes dois fatos são usualmente os principais obstáculos para se demonstrar teoremas de subgrupos de construções livres na categoria de grupos pro-p.

No Apêndice C apresentamos resultados de W. Herfort e P. Zalesskii (*cf.* [HZ07, Sec. 5] ou [HZZ11, Sec. 3]) que mostram que os dois resultados da Teoria de Bass-Serre mencionados anteriormente valem para grupos pro-p finitamente gerados infinitos agindo *virtualmente livremente* sobre árvores pro-p, *i.e.* tais que a restrição da ação sobre um certo subgrupo aberto seja livre; um tal grupo pro-p é então virtualmente pro-p livre.

Teorema 3.0.1 (*cf.* Apêndice C)**.** *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado infinito agindo virtualmente livremente sobre uma árvore pro-p T. Então*

(C.6) *G se decompõe ou como um produto pro-p livre amalgamado ou como uma* HNN-*extensão pro-p sobre algum estabilizador de aresta;*

(C.7) *G é isomorfo ao grupo pro-p fundamental $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ de um grafo finito conexo de p-grupos finitos cujos grupos-vértices e grupos-arestas são isomorfos a estabilizadores de vértices e arestas de T.*

À luz do Teorema 3.0.1 nós obtemos o resultado principal deste capítulo:

Teorema 3.0.2. *Seja $G = A \amalg_C B$ um produto pro-p livre de A e B com amalgamação procíclica C. Suponhamos que o centralizador em G de cada subgrupo fechado não-trivial de C seja um grupo pro-p abeliano livre e contenha C como um fator direto. Se cada subgrupo pro-p 2-gerado de A e cada subgrupo pro-p 2-gerado de B é um grupo pro-p livre ou um grupo pro-p abeliano livre então cada subgrupo pro-p 2-gerado de G também o é.*

Este resultado é uma versão pro-p de um resultado clássico de G. Baumslag [Bau62, Thm. 2] que deu impulso à teoria dos grupos limites. Nosso teorema generaliza [KZ11, Thm. 7.3], bem como a versão pro-p de [BBau68] para amalgamações procíclicas. Os detalhes estão apresentados na Seção 3.3.

O método da demonstração consiste em considerarmos a árvore pro-p padrão T sobre a qual G age; daí, para um subgrupo pro-p 2-gerado L de G, decompomos o par (L, T) como um limite inverso de (L_n, T_n) satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.0.1.

Notação. Ao longo deste capítulo, p denota um número primo arbitrário fixo. *Por razões estéticas*, fazemos algumas simplificações nas nossas notações. Para x e y em um grupo escrevemos $y^x := x^{-1}yx$. Todos os grupos são pro-p, subgrupos são fechados e homomorfisms são contínuos. Para um subconjunto A de um grupo G denotamos por $\langle A\rangle$ o subgrupo de G (topologicamente) gerado por A e por A^G o fecho normal de A em G, *i.e.*, o menor subgrupo normal fechado de G contendo A. O conjunto de todos os elementos de torção de G é denotado por $\mathrm{tor}(G)$. Para um grupo G agindo continuamente sobre um espaço X denotamos o conjunto dos pontos fixos de G por X^G e para cada $x \in X$ o estabilizador pontual por G_x (ao invés de $\mathrm{stab}_G(x)$). Definimos $\widetilde{G} := \langle G_x \mid x \in X\rangle$.

3.1 Resultados sobre limites inversos

Antes de provarmos seis resultados sobre limites inversos, iniciamos com um resultado essencial que será utilizado após aplicarmos o Teorema 3.0.1 na demonstração do Teorema 3.0.2.

Proposição 3.1.1. *Seja G um grupo pro-p 2-gerado.*

(a) *Se G é um produto pro-p livre com amalgamação procíclica, então um dos seus fatores livres é procíclico.*

(b) *Se G é uma* HNN-*extensão pro-p própria com subgrupos associados procíclicos, então seu subgrupo base H é no máximo 2-gerado.*

(c) *Se G é o grupo pro-p fundamental de uma árvore finita, diferente de um único vértice, de p-grupos finitos tal que todos os grupos-arestas são cíclicos, então: ou $G = K \amalg_D R$ com K cíclico e R finito, ou $G = K \amalg_D M \amalg_E N$, com K e N cíclicos e $M \subseteq \Phi(G)$.*

Demonstração.

(a) Suponhamos que $G = A \amalg_C B$ e denotemos por "barra" passar ao quociente de Frattini. Temos um epimorfismo óbvio de G para o "pushout" induzido $P := \overline{A} \amalg_{\overline{C}} \overline{B}$. Seja $n := d(A) + d(B)$. Como C é procíclico, a imagem M do núcleo da aplicação canônica $\overline{A} \amalg \overline{B} \to \overline{G}$ via a aplicação cartesiana $\overline{A} \amalg \overline{B} \to \overline{A} \times \overline{B}$ é também procíclica. Esta última aplicação induz um epimorfismo de $\overline{G}$ para o grupo pro-p abeliano elementar pelo menos $(n-1)$-gerado $(\overline{A} \times \overline{B})/M$. Portanto, $n \leq 3$ e o resultado segue.

(b) Suponhamos que $G = \mathrm{HNN}(H, C, f, t)$ com $C = \langle c \rangle$ e denotemos por "barra" passar ao quociente de Frattini. Se $d(H) \geq 3$ então $d(G) \geq 3$, como pode ser visto ao utilizarmos o epimorfismo óbvio $G \to (\overline{H} \times \overline{\langle t \rangle})/\langle \bar{t}^{-1}\bar{c}\bar{t}\,\overline{f(c)}^{-1} \rangle$. Logo $d(H) \leq 2$.

(c) Seja $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ com grupos-vértices finitos $\mathcal{G}(v)$ e grupos-arestas cíclicos $\mathcal{G}(e)$. Afirmamos que Γ possui no máximo 3 vértices. De fato, decompondo G sobre uma aresta e de Γ, podemos e vamos supor que $\mathcal{G}(d_0(e))$ é procíclico pelo item (a); donde $d_0(e)$ é um vértice pendurado de Γ (*i.e.*, existe uma única aresta incidente ao vértice). Suponhamos então que Γ possua pelo menos 3 vértices, e seja a uma aresta de $\Gamma - \{e\}$ possuindo vértice inicial ou final $v = d_1(e)$; sem perda de generalidade, suponhamos que $d_0(a) = v$. Então $d_1(a)$ é um vértice pendurado com grupo-vértice procíclico $\mathcal{G}(d_1(a))$; com efeito, caso contrário, decompondo G sobre a aresta a obteríamos $d(G) > 2$, uma contradição. Agora, se tivermos um número $r \geq 2$ de arestas com vértice inicial ou final v então segue da apresentação pro-p de G (p. 16) que este possui um grupo pro-p abeliano livre $\mathbb{Z}_p^r$ como quociente; isto implica $r = 2$, donde $|V(\Gamma)| \leq 3$.

Se $|V(\Gamma)| = 2$ então $G = K \amalg_D M$ com K e M finitos, e, pelo item (a), podemos supor que K seja cíclico.

Suponhamos finalmente que $|V(\Gamma)| = 3$. Então $G = K \amalg_D M \amalg_E N$ com D e E cíclicos e K, M, e N finitos. Como a decomposição de G é própria, temos $d(K \amalg_D M) = d(M \amalg_E N) = 2$ e, usando o item (a), concluímos que K e N devem ser cíclicos. Como $d(G) = 2$ então $M \subseteq \Phi(G)$ segue. $\square$

Para os próximos três resultados mais técnicos, *supomos que os conjuntos parcialmente ordenados dirigidos I dos sistemas inversos sejam isomorfos a $\mathbb{N}$*. Relembramos que um subconjunto J de um conjunto parcialmente ordenado qualquer $(I, \leq)$ é *cofinal* se para cada elemento i em I, existe um elemento j em J tal que $i \leq j$.

Proposição 3.1.2. *Seja G o limite inverso de um sistema inverso sobrejetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos pro-p. Suponhamos que cada $G_i = \mathrm{HNN}(H_i, A_i, B_i, t_i)$ seja uma HNN-extensão pro-p com H_i finito. Temos:*

(a) *Existe um sistema inverso de grupos* $\{H_i', \varphi_{ij}, J\}$ *onde* J *é um subconjunto cofinal de* I*, e cada* H_i' *é um conjugado de um subgrupo de* H_i *por um elemento de* G_i*.*

(b) *Se* $\varphi_{ij}(H_i) \cong H_j$*, então existe um subconjunto cofinal* J *de* I *tal que, existe um sistema inverso de grupos* $\{A_i'', \varphi_{ij}, J\}$ *com cada* A_i'' *um conjugado de* A_i *por um elemento de* G_i*, ou existe um sistema inverso de grupos* $\{B_i'', \varphi_{ij}, J\}$ *com cada* B_i'' *um conjugado de* B_i *por um elemento de* G_i*.*

(c) *Se* $\varphi_{ij}(H_i) \cong H_j$ *e* $\varphi_{ij}(A_i) \cong A_j$*, então* $G \cong \mathrm{HNN}(H, A, B, t)$ *com* $H := \varprojlim H_i'$*,* $A := \varprojlim A_i''$ *e* $B := \varprojlim B_i''$*.*

Demonstração. Fixemos l e k em I com $k \leq l$. Pelo Teorema 1.3.11(a) existe um elemento g_k de G_k com $\varphi_{lk}(H_l) \subseteq H_k^{g_k^{-1}}$. Conjugando H_l, A_l, B_l e t_l por um elemento g_l de $\varphi_{lk}^{-1}(g_k)$, não alteramos G_l, e obtemos H_l', A_l', B_l' e t_l' de modo que $\varphi_{lk}(H_l') \subseteq H_k'$.

(a) Para o subconjunto cofinal J de I consistindo de todos os i com $k \leq i$ obtemos o sistema inverso desejado $\{H_i', \varphi_{ij}, J\}$.

(b) Como $A_l = H_l \cap H_l^{t_l^{-1}}$ e cada φ_{lk} é sobrejetiva, pelo Teorema 1.3.11(b) temos que $\varphi_{lk}(A_l')$ está contido, a menos de conjugação por elemento h_k^{-1} de H_k', em A_k ou B_k. Pelo mesmo argumento $\varphi_{lk}(B_l')$ está contido, a menos de conjugação por elemento de H_k', em A_k ou B_k.

Suponhamos que para uma infinidade de índices i e j de I tenhamos que A_i' sejam enviados, a menos de conjugação, para A_j'. Conjugando H_i', A_i', B_i' e t_i' por um elemento h_i de $\varphi_{ij}^{-1}(h_j) \cap H_i'$ (notemos que tal h_i existe pois $\varphi_{ij}(H_i) \cong H_j$), obtemos H_i', A_i'', B_i'' e t_i'' tais que $\varphi_{ij}(A_i'')$ está contido em A_j'; isto não altera o grupo G_i. Passando a um subconjunto cofinal, obtemos um sistema inverso $\{A_i'', \varphi_{ij}, J\}$.

Caso contrário, existe uma infinidade de índices i e j de I tais que B_i' são enviados, a menos de conjugação, para B_j'. Então conjugando e passando a um subconjunto cofinal, obtemos um sistema inverso $\{B_i'', \varphi_{ij}, J\}$.

(c) Passando a um subconjunto cofinal de I, para cada i temos dois casos: (i) ou A_i'' e B_i'' são conjugados em H_i'; (ii) ou A_i'' e B_i'' não são conjugados em H_i'.

No caso (i), podemos, mediante conjugação não alterando G_i, supor que A_i'' e B_i'' coincidem. Isto é, obtemos sistemas inversos coincidentes $\{A_i'', \varphi_{ij}, J\}$ e $\{B_i'', \varphi_{ij}, J\}$.

No caso (ii), podemos supor que $\varphi_{jk}(A''_j)$ (resp. $\varphi_{jk}(B''_j)$) coincide com A_k ou B_k, pois $\varphi_{ij}(A_i) \cong A_j$. Agora, não pode ocorrer de ambos A''_i e B''_i irem para um mesmo subgrupo associado de H'_j. De fato, digamos que $\varphi_{ij}(A''_i) = A''_j = \varphi_{ij}(B''_i)$, então $\varphi_{ij}(t''_i)$ normalizaria A_k e portanto $\varphi_{ij}(t''_i)$ ficaria contido no subgrupo próprio $\langle H'_k, H'^{t''^{-1}_k}_k \rangle$, pela Proposição 1.4.4; uma contradição com a sobrejetividade de φ_{ij}. Portanto, ou $\varphi_{ij}(A''_i) \subseteq A''_j$ e $\varphi_{ij}(B''_i) \subseteq B''_j$, ou $\varphi_{ij}(A''_i) \subseteq B''_j$ e $\varphi_{ij}(B''_i) \subseteq A''_j$.. Passando a um subconjunto cofinal, obtemos sistemas inversos $\{A''_i, \varphi_{ij}, J\}$ e $\{B''_i, \varphi_{ij}, J\}$.

Agora, sejam $H := \varprojlim H'_i$, $A := \varprojlim A''_i$, $B := \varprojlim B''_i$ e sejam $\varphi_i \colon G \to G_i$ as projeções. Para cada i em I consideremos o subconjunto

$$X_i := \{\tau_i \in G \,|\, \varphi_i(A)^{\varphi_i(\tau_i)} = \varphi_i(B) \text{ e } G_i = \langle \varphi_i(H), \varphi_i(\tau_i) \rangle\} \ .$$

Claramente cada X_i é compacto não-vazio, e como $X_{i+1} \subseteq X_i$, existe t em $\bigcap_i X_i$ de modo que $B = A^t$.

O isomorfismo desejado entre $\mathrm{HNN}(H, A, t)$ e G segue então da propriedade universal de HNN-extensões pro-p. $\square$

Proposição 3.1.3. *Seja G o limite inverso de um sistema inverso sobrejetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos pro-p G_i, cada qual um produto pro-p livre $G_i = A_i \amalg B_i$ com A_i cíclico e B_i procíclico. Temos:*

(a) *Se algum B_i for infinito, então existe um sistema inverso $\{A'_i, \varphi_{ij}, J\}$ onde J é um subconjunto cofinal de I, e cada A'_i é um conjugado de A_i por um elemento de G_i, de modo que $G \cong \left(\varprojlim A'_i\right) \amalg \mathbb{Z}_p$.*

(b) *Se cada B_i for finito, então existem sistemas inversos $\{A'_i, \varphi_{ij}, J\}$ e $\{B'_i, \varphi_{ij}, J\}$, onde J é um subconjunto cofinal de I, e cada A'_i (resp. B'_i) é um conjugado de A_i (resp. B_i) por um elemento de G_i, de modo que $G \cong \left(\varprojlim A'_i\right) \amalg \left(\varprojlim B'_i\right)$.*

Demonstração.

(a) Seja i_0 em I tal que $B_{i_0} \cong \mathbb{Z}_p$, temos $B_i = \langle t_i \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ para cada i com $i_0 \leq i$. Pelo Teorema 1.3.8(a), A_i é enviado por φ_{ij} a um conjugado de A_j. E de fato, sobrejetivamente; pois caso contrário, o homomorfismo induzido entre os produtos cartesianos $A_i \times B_i \to$

$A_j \times B_j$ não seria sobrejetivo. Para obtermos o resultado desejado, basta aplicamos a Proposição 3.1.2(c) para $G_i = \mathrm{HNN}(A_i, 1, t_i)$.

(b) Como cada B_i é finito e cada φ_{ij} é sobrejetiva, do Teorema 1.3.8(a), obtemos que fatores livres distintos de G_i são enviados, a menos de conjugação, a fatores livres distintos de G_j. Logo, existe um subconjunto cofinal J de I de modo que para todos i, j em J temos $\varphi_{ij}(A_i) = A_j^{x_j}$ e $\varphi_{ij}(B_i) = B_j^{y_j}$ para certos x_j, y_j em G_j. Assim, após conjugações, obtemos indutivamente os sistemas inversos desejados $\{A'_i, \varphi_{ij}, I\}$ e $\{B'_i, \varphi_{ij}, I\}$. O resultado segue de [RZ00b, Lemma 9.1.5]. □

Proposição 3.1.4. *Seja G o limite inverso de um sistema inverso sobrejetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos pro-p G_i. Suponhamos que G_i se decomponha como um produto pro-p livre amalgamado $G_i = K_i \amalg_{D_i} R_i$ com K_i cíclico e R_i finito ou $G_i = K_i \amalg_{D_i} M_i \amalg_{E_i} N_i$, com K_i e N_i cíclicos, M_i finito e $M_i \subseteq \Phi(G_i)$. Então, passando a um subconjunto cofinal J de I, se necessário, existem sistemas inversos $\{K'_i, \varphi_{ij}, J\}$ e $\{D''_i, \varphi_{ij}, J\}$ tais que $D''_i \subseteq K'_i$, $\varphi_{ij}(K'_i) = K'_j$, onde cada K'_i (resp. D''_i) é um conjugado de K_i (resp. D_i) por um elemento de G_i.*

Demonstração. Usando o Teorema 1.3.8(a), se G_i se decompõe da primeira maneira, φ_{ij} envia fatores livres para fatores livres a menos de conjugação, se da segunda, φ_{ij} envia fatores cíclicos para fatores cíclicos a menos de conjugação. Assim, em ambos os casos, podemos passar a um subconjunto cofinal J de I tal que para todos $i \geq j$ em J temos $\varphi_{ij}(K_i) \subseteq K_j^{g_j}$, para algum g_j em G_j. Daí, como K_j é cíclico, temos $\varphi_{ij}(K_i) = K_j^{g_j}$ (com efeito, caso contrário $\varphi_{ij}(K_i)^{G_j} \neq K_j^{G_j}$ contradiria a sobrejetividade de φ_{ij}). Agora escolhendo $g_i \in \varphi_{ij}^{-1}(g_j)$ e tomando $K'_i := K_i^{g_i^{-1}}$, indutivamente obtemos o sistema inverso desejado $\{K'_i, \varphi_{ij}, J\}$. A seguir, tomando $D'_i := D_i^{g_i^{-1}}$ temos $D'_i \subseteq K'_i \cap M_i^{g_i}$; então, pelo Teorema 1.3.8(b), $\varphi_{ij}(D'_i) \subseteq K_j \cap \varphi_{ij}(M_i) \subseteq D_j'^{b_j}$, para algum b_j em K'_j. Escolhendo $b_i \in \varphi_{ij}^{-1}(b_j) \cap K'_i$ e tomando $D''_i := D_i'^{b_i^{-1}}$ obtemos o outro sistema inverso desejado $\{D''_i, \varphi_{ij}, I\}$. □

Encerramos a presente seção com três lemas gerais simples.

Lema 3.1.5. *Seja G o limite inverso de um sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos pro-p. Suponhamos que exista uma constante d com $d(G_i) = d$ para todo $i \in I$. Se $d(G) = d$, então existe k em I tal que φ_{ik} é sobrejetiva para cada i. Em particular, as projeções $G \to G_i$ são sobrejetivas sempre que $i \geq k$.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, seja $\varphi_i \colon G \to G_i$ a projeção. Suponhamos, por absurdo, que para cada j em I existisse alguma φ_{ij} não-sobrejetiva. Por [RZ00b, Prop. 7.7.2], a aplicação induzida $G_i/\Phi(G_i) \to G_j/\Phi(G_j)$ também seria não-sobrejetiva; em particular, $\varphi_j(G)\Phi(G_j)/\Phi(G_j)$ seria um subgrupo próprio de $G_j/\Phi(G_j)$. Como $G/\Phi(G) = \varprojlim_j \varphi_j(G)\Phi(G_j)/\Phi(G_j)$, o quociente $G/\Phi(G)$, e logo G, poderia ser gerado por $d-1$ elementos; uma contradição.

A última afirmação do Lema segue de [RZ00b, Prop. 1.1.10]. $\square$

Lema 3.1.6. *Seja G o limite inverso de um sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos pro-p. Suponhamos que exista uma constante d com $d(G_i) = d$ para todo $i \in I$. Sejam H_i subgrupos de G_i tais que $\varphi_{ij}(H_i) \subseteq H_j$ para quaisquer i, j de I com $j \leq i$. Para o limite inverso induzido $H := \varprojlim H_i$, temos a seguinte igualdade envolvendo fechos normais $H^G = \varprojlim H_i^{G_i}$.*

Demonstração. Definamos $K := \varprojlim H_i^{G_i}$. Como $H \subseteq K$, temos $H^G \subseteq K$, pois $K \trianglelefteq G$. Logo, basta mostrarmos que $K \subseteq H^G$. Agora, o Lema 3.1.6 é verdadeiro quando os grupos G_i são finitos e existe um limitante suas para as suas ordens. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Então, como $d(G_i) = d$, existe um limitante para as ordens de todos os $G_i/\Phi^n(G_i)$. Portanto, $\varprojlim H_i^{G_i}\Phi^n(G_i) = H^G\Phi^n(G)$, e daí $K \subseteq H^G\Phi^n(G)$. Como, $d(G) \leq d$, temos que G é finitamente gerado, e logo o conjunto $\{\Phi^n(G)\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da identidade de G (*cf.* [RZ00b, Prop. 2.8.13]). Donde $K \subseteq H^G$, como desejado. $\square$

Observamos que o lema anterior vale mais geralmente, sem precisarmos supor que *existe uma constante d com $d(G_i) = d$ para todo $i \in I$.*

Lema 3.1.7. *Seja L um grupo pro-p agindo sobre um espaço topológico compacto Ω. Seja $(\widetilde{U_n})_{n\geq 1}$ uma coleção de subgrupos normais de L satisfazendo $\widetilde{U_{n+1}} \subseteq \widetilde{U_n}$, para cada $n \geq 1$, e $\bigcap_{n\geq 1} \widetilde{U_n} = 1$. Definamos $L_n = L/\widetilde{U_n}$ e $\Omega_n = \widetilde{U_n}\backslash\Omega$. Suponhamos que existam subgrupos S_n de L_n tais que $\varphi_{nm}(S_n) \subseteq S_m$ onde φ_{nm} são as aplicações canônicas. Seja $S := \varprojlim S_n$ o limite inverso. Se $\Omega_n^{S_n} \neq \emptyset$ para cada $n \geq 1$, então $\Omega^S \neq \emptyset$.*

Demonstração. Denotemos por $\varphi_n\colon L \to L_n$ e $\pi_n\colon \Omega \to \Omega_n$ as projeções canônicas. Então $\Omega_n^{\varphi_n(S)} \supseteq \Omega_n^{S_n} \neq \emptyset$. Portanto $Y_n := \pi_n^{-1}(\Omega_n^{\varphi_n(S)}) \neq \emptyset$. Ora, $Y_n = \{x \in \Omega \mid Sx \subseteq \widetilde{U_n}x\}$, de modo que $Y_{n+1} \subseteq Y_n$; da compacidade de Ω segue que $\emptyset \neq \bigcap Y_n \subseteq \Omega^S$. □

3.2 Resultado Principal

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 3.0.2. Assim, *doravante, $G := A\amalg_C B$ é um produto pro-p livre de A e B com amalgamação procíclica C satisfazendo as seguintes condições:*

C1. o centralizador em G de C é um grupo pro-p abeliano livre e contém C como um fator direto.

C2. cada subgrupo pro-p 2-gerado de A e cada subgrupo pro-p 2-gerado de B é um grupo pro-p livre ou um pro-p abeliano livre.

Claramente, **C2** é uma condição necessária para o Teorema 3.0.2. Além disso, é uma conseqüência do próximo simples resultado que, na presença de **C2**, a condição **C1** é equivalente à seguinte condição:

C1′. o centralizador em G de cada subgrupo procíclico não-trivial de C é um grupo pro-p abeliano livre e contém C como um fator direto.

Lema 3.2.1. *Para cada subgrupo não-trivial D de C temos $N_G(D) = C_G(D) = C_G(C)$.*

Demonstração. Afirmamos que as igualdades que desejamos mostrar valem ao trocarmos G por A e G por B.

Suponhamos, por absurdo, que $N_A(D) \neq C_A(D)$. Então, existiria um elemento a em $N_A(D) - C_A(D)$ e teríamos o subgrupo 2-gerado metabeliano não-abeliano $\langle a, D\rangle$; uma contradição com **C2**.

Por outro lado, se existisse um elemento a em $C_A(D)-C_A(C)$, o grupo $\langle a, C\rangle$ seria pro-p livre não-abeliano, por **C2**. Portanto, $\langle a, C\rangle = \langle a\rangle \amalg C$. Como $a \in C_A(D)$, obteríamos uma contradição com o Teorema 1.3.8(b).

Finalmente, pela versão pro-p da Proposição 1.3.9 temos

$$N_G(D) = N_A(D) \amalg_C N_B(D)\,.$$

Logo $N_G(D) = \langle N_A(D), N_B(D)\rangle = \langle C_A(C), C_B(C)\rangle \subseteq C_G(C)$, como desejado. $\square$

Agora nós reenunciamos e provamos o Teorema 3.0.2.

Teorema 3.2.2. *Seja $G = A \amalg_C B$ um produto pro-p livre de A e B com amalgamação procíclica C. Suponhamos que o centralizador em G de C seja um grupo pro-p abeliano livre e contenha C como um fator direto. Se cada subgrupo pro-p 2-gerado de A e cada subgrupo pro-p 2-gerado de B é um grupo pro-p livre ou um grupo pro-p abeliano livre então cada subgrupo pro-p 2-gerado de G também o é.*

Demonstração. Seja T a árvore pro-p padrão sobre a qual G age (vide p. 16) e seja L um subgrupo pro-p 2-gerado de G. Segue da definição de T que se L estabiliza um vértice de T, então L está a menos de conjugação em um dos fatores livres de G; donde L é um grupo pro-p livre ou pro-p abeliano livre, pela hipótese **C2**. Suponhamos então que L não fixe vértice algum de T.

Como L é finitamente gerado, temos $L \cong \varprojlim L/U_n$ onde $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de subgrupos normais abertos de L com $\bigcap U_n = 1$. Relembremos nossa notação de $\widetilde{U_n}$ para o subgrupo fechado U_n gerado por todos os estabilizadores de vértices com respeito à ação de U_n sobre T.

Definindo $L_n := L/\widetilde{U_n}$ afirmamos que cada L_n age virtualmente livremente sobre a árvore pro-p $\widetilde{U_n}\backslash T$. De fato, o grafo quociente $\widetilde{U_n}\backslash T$ é uma árvore pro-p pelo Teorema 1.4.1(a), e cada $U_n/\widetilde{U_n}$ é um grupo pro-p livre, pelo Teorema 1.4.1(b). Além disso, se tivéssemos $U_n = \widetilde{U_n}$ para quase todo n, então L_n seria um grupo finito agindo sobre $\widetilde{U_n}\backslash T$; daí, pelo Teorema 1.4.1(d), poderíamos aplicar o Lema 3.1.7 para $\Omega := V(T)$ e

$S_n := L_n$, obtendo um vértice de T fixo por $L \cong \varprojlim\{L_n, \varphi_{nm}\}$ onde cada φ_{nm} é a aplicação canônica. Isto contradiriz a suposição feita no final do primeiro parágrafo. Logo, devemos ter $U_n \neq \widetilde{U_n}$, *i.e.* L_n é infinito para quase todo n.

Em virtude do Teorema 3.0.1(C.7), podemos supor que cada L_n é o grupo pro-p fundamental de um grafo finito conexo Γ_n, diferente de um único vértice, de p-grupos finitos cujos grupos-vértices (resp. grupos-arestas) são estabilizadores de certos vértices (resp. arestas) de $\widetilde{U_n}\backslash T$.

Agora, como $L/\widetilde{L}$ é um grupo pro-p livre de posto no máximo 2, precisamos considerar apenas dois casos $L = \widetilde{L}$ e $L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$; no outro caso, quando $d(L/\widetilde{L}) = 2$, L é pro-p livre de posto 2 – pela propriedade de Hopf (*cf.* [RZ00b, Prop. 2.5.2]). Vamos supor que $\widetilde{L} \neq 1$, caso contrário não há o que se demonstrar.

Caso 1. $L = \widetilde{L}$.

Afirmamos que cada Γ_n é uma árvore. Caso contrário existiria uma aresta e_n em Γ_n de modo que $L_n = \mathrm{HNN}(P_n, G(e_n), t_n)$ com $G(e_n)$ finito. Assim, teríamos um homomorfismo de L_n sobre $\mathbb{Z}_p$; contradizendo $\widetilde{L}/\widetilde{U_n} = \langle \mathrm{tor}(L_n)\rangle$ (*cf.* Teorema 1.4.1(d)).

Então, pela Proposição 3.1.1(c), cada grupo L_n possui uma decomposição não-fictícia $L_n = K_n \amalg_{D_n} W_n$ onde K_n são grupos cíclicos. À luz da Proposição 3.1.4, e seguindo sua notação, temos sistemas inversos $\{K'_n, \varphi_{nm}\}$ e $\{D''_n, \varphi_{nm}\}$ de grupos conjugados de K_n e D_n. Consideremos dois grupos procíclicos $K := \varprojlim K'_n$ e $D := \varprojlim D''_n$.

Afirmamos que $D = 1$. Notemos que, como cada D_n é um estabilizador de aresta com respeito à L_n-ação, nós temos $D = L \cap C^g$ para algum $g \in G$. Suponhamos, por absurdo, que $D \neq 1$. A condição $\mathbf{C1'}$ diz que C^g é um fator direto do grupo pro-p abeliano livre $C_G(D)$, donde D é um fator direto de $C_L(D)$, pois $C_L(D) = L \cap C_G(D)$. Como o grupo procíclico K contém D, segue que $D = K$. Agora, a projeção $K \to K'_{n_0}$ é sobrejetiva para algum n_0 suficientemente grande, pelo Lema 3.1.5. Assim $D''_{n_0} = K'_{n_0}$; uma contradição com a decomposição não-fictícia de L_{n_0}. A afirmação está provada.

Pelo Lema 3.1.6, temos $\varprojlim D''^{L_n}_n = 1$; donde $L \cong \varprojlim L_n/D''^{L_n}_n$. Agora, se cada

$L_n/D_n''^{L_n}$ é procíclico, então L é procíclico. Então, suponhamos que cada $L_n/D_n''^{L_n}$ seja 2-gerado. Daí, escrevendo $L_n \cong K_n' \amalg_{D_n''} W_n'$ temos $L \cong \varprojlim (K_n'/D_n'' \amalg W_n'/D_n''^{W_n'})$. Como K_n'/D_n'' é 1-gerado, $W_n'/D_n''^{W_n'}$ também o é. Portanto $L \cong \mathbb{Z}_p \amalg \mathbb{Z}_p$, pela Proposição 3.1.3. Nossa demonstração está terminada para o *Caso 1.*

Caso 2. $L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$.

Para cada n temos $L_n/(\widetilde{L}/\widetilde{U_n}) \cong L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$ e portanto Γ_n não pode ser uma árvore. Então escolhemos uma aresta adequada e_n de Γ_n, tomamos $\Delta_n := \Gamma_n - \{e_n\}$, e apresentamos $L_n = \mathrm{HNN}(K_n, D_n, t_n)$ com grupo-aresta cíclico D_n de e_n e $K_n = \Pi_1(\mathcal{G}_{n|\Delta_n}, \Delta_n)$. Mostraremos a seguir que cada Δ_n é uma árvore.

Sendo $\widetilde{L}/\widetilde{U_n}$ gerado por torção, como conseqüência do Teorema 1.3.11(a), temos que $\widetilde{L}/\widetilde{U_n}$ está contido em ${K_n}^{L_n}$; logo, $\langle \mathrm{tor}(L_n)\rangle = {K_n}^{L_n}$. Por [Zal04, Prop. 1.7(ii)], $K_n/\langle \mathrm{tor}(K_n)\rangle$ é um grupo pro-p livre, donde $\langle \mathrm{tor}(L_n)\rangle$ possui imagem trivial no quociente $\mathrm{HNN}(K_n/\langle \mathrm{tor}(K_n)\rangle, 1, t_n)$ de L_n. Assim $K_n = \langle \mathrm{tor}(K_n)\rangle$. Como K_n age sobre a árvore pro-p $\widetilde{U_n}\backslash T$ temos $K_n = \widetilde{K_n}$ (*cf.* Teorema 1.4.1(d)); logo, em particular, Δ_n deve ser uma árvore.

Passando agora a um subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$, se necessário, podemos e vamos supor que: para cada n ou Δ_n é um único vértice ou Δ_n contém uma aresta. Discutimos a seguir os dois subcasos.

Subcaso 2(α). Para cada n a árvore Δ_n é um único vértice.

Temos que K_n é finito. Na análise deste subcaso usaremos fortemente a Proposição 3.1.2 e sua notação.

Pela Proposição 3.1.2(a), temos um sistema inverso de conjugados K_n' dos grupos K_n. Passando novamente a um subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$, se necessário, e fazendo uso do Proposição 3.1.1(b) podemos e vamos supor para cada n que, ou K_n' é cíclico ou $d(K_n') = 2$. Assim, ou $K := \varprojlim K_n'$ é procíclico ou $d(K) = 2$.

Se K for procíclico, então para cada m existe $n > m$ tal que $\varphi_{nm}(K_n')$ é cíclico e logo $\varphi_{nm}(D_n') = \varphi_{nm}({D_n'}^{t_n'})$. Donde $\varphi_{nm}(t_n')$ normaliza $\varphi_{nm}(D_n')$ e logo $L_m =$

$N_{L_m}(\varphi_{nm}(D'_n))$. Como $L = \varprojlim L_m$ temos que $D := \varprojlim D'_m$ é normal em L. Sendo $E(T)$ um L-espaço compacto, tomando no Lema 3.1.7 $\Omega := E(T)$ e $S_n := D'_n$, encontramos $e \in E(T)$ com $D \subseteq L_e$. Portanto $D^g \subseteq C$ para algum $g \in G$. Se $D \neq 1$, fazendo uso do Lema 3.2.1, encontramos que L é pro-p abeliano livre pela condição **C1′**.

Se, por outro lado, $D = 1$, segue do Lema 3.1.6 que $\varprojlim D_m^{L_m} = 1$ e logo $L = \varprojlim L_m/D_m^{L_m}$. Observando que $L_m/D_m^{L_m} = K_m/(K_m \cap D_m^{L_m}) \amalg \langle t_m \rangle$, a Proposição 3.1.3 nos dá que L é pro-p livre, pois K é procíclico.

Para terminarmos o Subcaso 2(α) suponhamos agora que $d(K) = 2$, e assim $d(K'_n) = 2$ para cada n. Logo, pelo Lema 3.1.5 com $d = 2$, estamos nas condições da Proposição 3.1.2(b). Portanto temos um sistema inverso de conjugados D''_n dos grupos cíclicos D_n, e vamos considerar o grupo procíclico $D := \varprojlim D''_n$. Como $d(L) \leq 2$, pelo argumento do parágrafo anterior, podemos e vamos supor que $D \neq 1$. Então, passando a um subconjunto cofinal, o Lema 3.1.5 com $d = 1$, nos permite aplicar a Proposição 3.1.2(c), e obter que $L \cong \mathrm{HNN}(K, D, t)$.

Ora, pelo Lema 3.1.7, K estabiliza um vértice de T; logo K está contido, a menos de conjugação, em A ou B e portanto é pro-p livre ou pro-p abeliano livre, pela hipótese **C2**. No primeiro caso, D ou D^t não está contido no Frattini $\Phi(K)$, pois $d(L) \leq 2$; assim, D ou D^t é um fator livre de K. Sem perda de generalidade, suponhamos $K = D \amalg E$. Sejam d um gerador de D e $f(d)$ o gerador correspondente de D^t. Então $L \cong (D \amalg E \amalg \langle t \rangle)/\langle d^t f(d)^{-1} \rangle^{D \amalg E \amalg \langle t \rangle}$ e $d^t f(d)^{-1} \notin \Phi(D \amalg E \amalg \langle t \rangle)$ pois $(D \amalg E) \cap (D \amalg E)^t = 1$ (vide Teorema 1.3.8(b)). Logo, L é um grupo pro-p livre de posto 2.

Suponhamos então que K seja um grupo pro-p abeliano livre. Notamos que $\mathrm{HNN}(K, D, t)$ contém o subgrupo não-abeliano $\langle K, K^t \rangle$. Por outro lado, sendo $E(T)$ um L-espaço compacto, tomando no Lema 3.1.7 $\Omega := E(T)$ e $S_n := D_n$ encontramos $e \in E(T)$ com $D \subseteq G_e$. Donde $D^g \subseteq C$ para certo $g \in G$. Pela condição **C1′**, $C_G(D)$ seria abeliano e conteria $\langle K, K^t \rangle$, uma contradição. Assim terminamos o Subcaso 2(α).

Subcaso 2(β). Para cada n a árvore Δ_n contém uma aresta.

Pela Proposição 3.1.1(c), cada grupo K_n possui uma decomposição não-fictícia $K_n = X_n \amalg_{Z_n} W_n$ onde X_n são grupos cíclicos. Além disso, procedendo como na Proposição 3.1.4 (mas usando aqui que $\varphi_{nm}(L_n) = L_m$), existe um sistema inverso $\{X'_n, \varphi_{nm}\}$ de conjugados de X_n em K_n; e consideramos o grupo procíclico $X = \varprojlim X'_n$. Temos duas alternativas: ou X é trivial, ou não.

Suponhamos primeiramente que X seja trivial. Então, do Lema 3.1.6, segue que $\varprojlim X'^{L_m}_m = 1$ e logo $L \cong \varprojlim L_m/X'^{L_m}_m$. Agora, temos que $L_m/X'^{L_m}_m$ é uma HNN-extensão com subgrupos associados cíclicos e grupo base um quociente finito de W_n. De fato, observemos que $K_m/X^{K_m}_m$ é cíclico (pois $K_m = \langle \mathrm{tor}(K_m)\rangle$ e $d(K_m) = 2$) e logo $L_m/X'^{L_m}_m$ é uma HNN-extensão $\mathrm{HNN}(\bar{K}_m, \bar{D}_m, t_m)$ de um quociente cíclico $\bar{K}_m$ de K_m onde as imagens de D_m e $D^{t_m}_m$ coincidem. Assim, do Subcaso 2(α), L é pro-p livre ou pro-p abeliano livre.

Finalmente, suponhamos que X seja não-trivial. Pelo Lema 3.1.5, com $d = 1$, obtemos que $\varphi_{nm}(X'_n) = X'_m$. Logo, como na Proposição 3.1.4, existe um sistema inverso $\{Z''_n, \varphi_{nm}\}$ de grupos conjugados a Z_n em X'_n; e consideramos o grupo procíclico $Z = \varprojlim Z''_n$. Temos $Z \neq X$, caso contrário pelo Lema 3.1.5 poderíamos encontrar n com $Z''_n = X'_n$; uma contradição com a decomposição não-fictícia $K_n = X_n \amalg_{Z_n} W_n$. Tomando no Lema 3.1.7 $\Omega := E(T)$ e $S_n := Z''_n$ obtemos $e \in E(T)$ com $Z \subseteq L_e$. Donde existe $g \in G$ com $Z^g \subseteq C$. Agora, como $Z \neq X$, a condição $\mathbf{C1'}$ implica $Z = 1$. Portanto $L \cong \varprojlim L_n/Z^{L_n}_n$.

Agora, o grupo $L_n/Z^{L_n}_n$ pode ser visto como o grupo quociente $K_n/{Z_n}^{K_n} \amalg \langle t_n\rangle$ módulo uma relação, sendo esta, proveniente da relação entre os subgrupos associados da HNN-extensão. De modo preciso, denotemos por "barra" a imagem de um subgrupo de K_n em $K_n/{Z_n}^{K_n}$, e escrevamos $\overline{K_n} = A_n \amalg B_n$ com $A_n \cong X_n/{Z_n}^{X_n} = X_n/Z_n$ e $B_n \cong W_n/{Z_n}^{W_n}$. O quociente que vamos analisar é $(\overline{K_n} \amalg \langle t_n\rangle)/\langle t_n^{-1}\overline{d_{0n}}t_n\overline{d_{1n}}^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle}$, onde d_{0n} (resp. d_{1n}) é um gerador de D_n (resp. $D_n^{t_n}$).

Pelo Teorema 1.3.8(a), os grupos cíclicos $\overline{D_n}$ e $\overline{D_n^{t_n}}$ estão contidos, a menos de conjugação por um elemento de $\overline{K_n}$, em A_n ou B_n.

Suponhamos que, a menos de conjugação, ambos $\overline{D_n}$ e $\overline{D_n^{t_n}}$ não coincidam com os fatores livres que os contém. Então ambos estão contidos no Frattini $\Phi(\overline{K_n})$ e logo $\langle t_n^{-1}\overline{d_{0n}}t_n\overline{d_{1n}}^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle}$ está contido em $\Phi(\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle)$. Assim, $\overline{K_n}/\Phi(\overline{K_n})\amalg\langle t_n\rangle/\Phi(\langle t_n\rangle)$ é um quociente do grupo $(\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle)/\langle t_n^{-1}\overline{d_{0n}}t_n\overline{d_{1n}}^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle}$. Como $d(L_n)\leq 2$, temos que $d(\overline{K_n})=1$ e B_n é trivial; donde $W_n=Z_n$. Uma contradição com a decomposição não-fictícia de $K_n=X_n\amalg_{Z_n}W_n$.

Caso contrário, suponhamos sem perda de generalidade, que $\overline{D_n}$ coincida, a menos de conjugação, com A_n. Trocando A_n por um conjugado, se necessário, temos $\overline{D_n}=A_n$. Por outro lado, existe um elemento y_n em $\overline{K_n}$ tal que $\overline{d_{1n}}=w_n^{y_n^{-1}}$ para algum w_n pertencendo a $\overline{D_n}$ ou a B_n. Tomando $z_n:=t_ny_n$ temos $(\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle)/\langle t_n^{-1}\overline{d_{0n}}t_n\overline{d_{1n}}^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle}=(\overline{D_n}\amalg B_n\amalg\langle t_n\rangle)/\langle\overline{d_{0n}}(t_n\overline{d_{1n}}^{-1}t_n^{-1})\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle t_n\rangle}\cong(\overline{D_n}\amalg B_n\amalg\langle z_n\rangle)/\langle\overline{d_{0n}}z_nw_n^{-1}z_n^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle z_n\rangle}$.

Se $w_n\in B_n$, o quociente desejado é isomorfo ao produto pro-p livre de um quociente de B_n e $\langle z_n\rangle$, ao eliminarmos o gerador $\overline{d_{0n}}$ de $\overline{D_n}$. Como $d(L_n)\leq 2$, segue da Proposição 3.1.3(a) que L é um grupo pro-p livre.

Suponhamos agora que w_n seja uma potência de $\overline{d_{0n}}$. Então, z_n normaliza o grupo finito A_n em $(\overline{D_n}\amalg B_n\amalg\langle z_n\rangle)/\langle\overline{d_{0n}}z_nw_n^{-1}z_n^{-1}\rangle^{\overline{K_n}\amalg\langle z_n\rangle}$. Denotemos por "linha" passarmos a um quociente de Frattini, consideremos a seguinte imagem no quociente desejado $(\overline{K_n}'\times\langle z_n\rangle')/\langle z_n'^{-1}\overline{d_{0n}}'z_n'w_n'^{-1}\rangle^{\overline{K_n}'\times\langle z_n\rangle'}$. Notemos que $w_n'=\overline{d_{0n}}'$ nesta imagem. Com efeito, como z_n age por conjugação sobre o grupo finito A_n temos que z_n age "coprimamente" e portanto trivialmente sobre o grupo $A_n'=A_n/\Phi(A_n)$. Assim a imagem considerada é simplesmente $\overline{K_n}'\times\langle z_n\rangle'$. Como $d(L_n)\leq 2$, B_n deve ser trivial. Isto contradiz a decomposição não-fictícia de $K_n=X_n\amalg_{Z_n}W_n$.

Isto conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 3.2.3. *Suponhamos que todos os subgrupos 2-gerados abelianos de A e todos os subgrupos 2-gerados abelianos de B sejam procíclicos. Então cada subgrupo fechado 2-gerado de G é um grupo pro-p livre.*

Demonstração. Seja L um subgrupo fechado 2-gerado de G. Suponhamos que L seja pro-p abeliano livre de posto 2.

Seja T a árvore pro-p padrão sobre a qual G age. Então pela versão pro-p do Teorema 1.4.3 (*cf.* [RZ00a, Thm. 3.18]), temos que ou L estabiliza um vértice de T, ou existe uma aresta e de T tal que $L/L_e \cong \mathbb{Z}_p$. Mas L não pode estabilizar um vértice; pois caso contrário L seria conjugado a um subgrupo de um dos fatores livres de G (pelo Teorema 1.3.8(a)), contradizendo a hipótese.

Portanto $L/L_e \cong \mathbb{Z}_p$. Como $d(L) = 2$ temos $L_e \neq 1$. Conjugando L por um elemento de G, podemos e vamos supor que L_e esteja contido em C. Agora, temos $N_G(L_e) = \langle C_A(C), C_B(C)\rangle$, pelo Lema 3.2.1; e, a hipótese do corolário juntamente com a condição **C1** implicam $C_A(C) = C = C_B(C)$. Portanto $L = N_L(L_e) \cong \mathbb{Z}_p$; uma contradição. Logo, pelo Teorema 3.0.2, L deve ser um grupo pro-p livre. $\square$

3.3 Comparação com resultados na literatura

Análogo de G. Baumslag

Teorema ([Bau62, Thm. 2]). *Seja* $\overline{}: F \to \overline{F}$ *um isomorfismo entre grupos livres, e seja* K *o produto livre com amalgamação cíclica* $F \amalg^{abs}_{C=\overline{C}} \overline{F}$. *Se* $C_F(C) \subseteq C$, *então cada subgrupo* 2*-gerado de* K *é livre.*

Seja C um subgrupo procíclico não-trivial de um grupo pro-p livre F. O normalizador $N_F(C)$ é um grupo pro-p livre de posto 1 contendo o subgrupo normal aberto C (*cf.* Lema 1.3.5). Assim $N_F(C) = C_F(C) \cong \mathbb{Z}_p$; em particular, C é auto-centralizante em F se, e somente se, C é um subgrupo procíclico maximal de F. Então, a versão pro-p *ipsis litteris* do resultado de G. Baumslag é uma conseqüência do nosso Teorema 3.0.2 e da versão pro-p da relação entre normalizadores da Proposição 1.3.9.

Observamos que este análogo pro-p foi o estudo da tese de doutorado [Sant08].

Análogo de B. Baumslag

Diremos que um grupo G é 2-*livre* se cada subgrupo gerado por 2 elementos é livre. Recordamos que um subgrupo H de um grupo qualquer G é *malnormal* se para cada elemento g em $G-H$ temos $H \cap gHg^{-1} = 1$.

Teorema ([BBau68]). *Seja $G = A \amalg_M^{abs} B$ um produto livre com amalgamação. Se M é malnormal em A e B, e A e B são 2-livres, então G é 2-livre.*

Para o análogo de B. Baumslag com amalgamação procíclica, notemos que se um subgrupo procíclico não-trivial é malnormal então ele é um subgrupo procíclico maximal. Agora, seja $G = G_1 \amalg_{G_0} G_2$ um produto pro-p livre com amalgamação procíclica onde cada G_i é 2-livre. Seja H um subgrupo procíclico não-trivial de G_0 e fixemos $i \in \{1, 2\}$. Se $N_{G_i}(H)$ é 1-gerado então ele coincide com G_0, e nós usamos o Teorema 3.0.2. Caso contrário, consideraríamos um elemento y de $N_{G_i}(H) - H$. Da hipótese sobre G_i, o subgrupo 2-gerado $F_i = \langle y, H \rangle$ é pro-p livre; isto não pode ocorrer pelo Lema 1.3.5.

Subgrupos em produtos pro-p livres

Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p satisfazendo a condição de que cada um de seus subgrupos pro-p 2-gerados sejam pro-p livres (resp. sejam pro-p livres ou pro-p abelianos). Pelas versões pro-p do Teorema de Kurosh de Subgupo e do Teorema de Grushko-Neumann (*e.g.*, [Mel89, Thm. 4.3] e [RZ00b, Thm. 9.1.15]), segue que cada subgrupo pro-p 2-gerado de $G = G_1 \coprod G_2$ é pro-p livre (resp. pro-p livre ou pro-p abeliano).

Grupos pro-p limites

Está provado em [KZ11, Thm. 7.3] que cada grupo pro-p limite 2-gerado é pro-p livre ou abeliano. Como as hipóteses do Teorema 3.0.2 (condições **C1** e **C2**) são satisfeitas (*cf.* [KZ11, Thm. 5.1]), nosso resultado generaliza [KZ11, Thm. 7.3].

Um exemplo não coberto pela literatura

Sejam D um grupo de Dëmushkin (*i.e.* um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 2) não-solúvel e F um grupo pro-p livre não-abeliano de posto finito. Se $G := D \amalg_C F$, onde C é um subgrupo procíclico maximal em D e F, então pelo Corolário 3.2.3 cada subgrupo 2-gerado de G é um grupo pro-p livre. De fato, cada subgrupo 2-gerado de D é um grupo pro-p livre, e $N_G(C) = N_D(C) \amalg_C N_F(C) = C \amalg_C C = C$ e cada subgrupo 2-gerado de D é um grupo pro-p livre. (*cf.* [Ser94, Ex. 5(b) e Ex. 6, p. 41]).

Capítulo 4

Considerações Finais

Não chores, meu filho;
Não chores, que a vida
É luta renhida:
Viver é lutar.
A vida é combate,
Que os fracos abate,
Que os fortes, os bravos
Só pode exaltar.

Gonçalves Dias

Encerramos esta tese fazendo comparações de alguns resultados e mencionando algumas questões que surgiram nas investigações dos Capítulos 2 e 3. Em particular, verificamos algumas das semelhanças, diferenças e relações existentes entre os três tipos de grupo limites: discretos, pro-p e pro-finitos.

Como enunciados na Introdução, temos os seguintes resultados sobre grupos limites discretos.

Proposição (*cf.* [AB06, Prop. 1.1]). *Seja G um grupo limite. Então:*

(1) *o grupo G é livre-de-torção;*

(2) *todo subgrupo abeliano de G é finitamente gerado;*

(3) *a comutatividade é uma relação transitiva sobre $G-\{1\}$;*

(4) *se G for não-abeliano, então seu centro é trivial;*

(5) *todo subgrupo abeliano não-trivial está contido em um único subgrupo abeliano maximal;*

(6) *raízes são únicas, i.e.* $x^n = y^n$ *com* $n \neq 0$ *implica* $x = y$*;*

(7) *quaisquer dois elementos não-triviais que comutam e são conjugados devem coincidir;*

(8) *se* G *for não-abeliano, então sua abelianização é infinita;*

(9) *o grupo* G *é finitamente apresentado;*

(10) *o grupo* G *é coerente, i.e. cada subgrupo finitamente gerado é finitamente apresentado (e é um grupo limite);*

(11) *se* G *não é livre então sua dimensão co-homológica é* $\max(2, m)$ *onde* m *é o posto maximal de seus subgrupos abelianos;*

(12) *o conjunto de todas as classes de conjugação de subgrupos abelianos maximais de posto* ≥ 2 *é finito.*

Evidentemente, a propriedade (1) é válida para os três tipos de grupos limites. O mesmo ocorre para as propriedades (2) e (11) (*cf.* Proposição 2.2.3 e Proposição 2.2.2).

As propriedades (3), (4), (5), (6) e (7) se verificam também para os grupos pro-p limites pois elas estão relacionadas com a propriedade 'CSA' (vide Apêndice A e [KZ11, Thm. 5.1]). Quanto a grupos pro-finitos limites, já no simples exemplo de Brandis-Jarden (vide p. 61) temos que: o subgrupo $\overline{\langle \pi^p \rangle}$ está contido em mais de um subgrupo fechado abeliano maximal; e, os elementos z e z^{π} comutam e são conjugados. Notemos que este grupo não-abeliano possui centro não-trivial.

Em [Koch10, Cor. 4], a propriedade (8) foi demonstrada. Que esta propriedade vale para grupos pro-p limites, segue do fato que tais grupos são extensões (pro-p livre)-por-(poli-procíclico livre-de-torção) (*cf.* [KZ11, Sec. 4]). Por outro lado, existem grupos pro-finitos limites de peso 0 que são não-abelianos e possuem abelianização (contínua) trivial (*cf.* Proposição 2.3.3).

Sobre as propriedades (7) e (8), temos que cada subgrupo fechado finitamente gerado de um grupo pro-p limite é finitamente apresentado (como grupo pro-p). Isto segue do fato mais geral que tais grupos são de tipo FP_∞ (*cf.* [KZ11, Cor. 4.2]). Para grupos pro-finitos, em geral, sabemos que subgrupos abertos dos grupos G_n são finitamente apresentados (de fato, para $n \geq 1$, G_{n-1} e A_{n-1} são finitamente apresentados e C_{n-1} é finitamente gerado). Ainda não está claro que cada grupo pro-finito limite de peso ≥ 1 é finitamente apresentado.

Não conseguimos mostrar a propriedade (10) em geral. Contudo podemos verificá-la para os grupos profinitos (resp. pro-p) G_n, sob algumas condições adicionais.

Agora, seguindo [KZ11, Sec. 9], listamos alguns problemas que ainda estão abertos para grupos pro-finitos ou pro-p limites e que possuem resposta positiva para grupos (discretos) limites. A seguir, G denota sempre um grupo pro-finito ou pro-p limite.

P1. Grupos limites são residualmente livres? Ou pelo menos residualmente nilpotente livre-de-torção?

P2. Grupos limites satisfazem a propriedade de Howson (*i.e.* a intersecção de quaisquer dois subgrupos finitamente gerados ainda é finitamente gerado)?

P3. Todo grupo limite possui a propriedade LRV (localmente retrato virtual): para cada subgrupo finitamente gerado H de G existe um subgrupo V_H de índice finito em G que contém H tal que a inclusão $H \hookrightarrow V_H$ possua inversa à esquerda?

P4. Se cada subgrupo abeliano é prociclico de um grupo G não-procíclico, temos necessariamente que a deficiência de G é ≥ 2?

P5. A característica de Euler $\chi(G)$ é nula se, e somente se, G é abeliano? No caso profinito, G é de tipo p-FP_∞ e $\chi_p(G) \leq 0$?

P6. Os únicos grupos limites 3-gerados são o grupo livre de posto 3, o grupo abeliano livre de posto 3 ou uma extensão de centralizador de um grupo livre de posto 2 (*i.e.* $\langle x_1, x_2, x_3 \,|\, x_3^{-1} v x_3 = v \rangle$, onde v é um elemento autocentralizante no grupo livre com base $\{x_1, x_2\}$)? No caso profinito, os únicos grupos limites 2-gerados são projetivos ou abelianos?

Destacamos que um grupo profinito livre não-abeliano não pode ser residualmente solúvel, o que elimina a segunda questão de **P1** para grupos pro-finitos limites. Além disso, **P4** possui resposta negativa para grupos pro-finitos limites em geral: grupos profinitos projetivos possuem deficiência não-negativa. Referente à primeira parte de **P6**, notemos que se $G = \mathbb{F}_p^3$, então $d(\widetilde{G}) = d(G) = 3$, onde $\widetilde{G}$ denota o recobrimento de Frattini uuniversal de G.

Neste trabalho escrevemos sobre alguns problemas em teoria combinatorial de grupos profinitos. Na verdade, esta nossa investigação levantou inúmeras questões, das quais apenas algumas foram resolvidas e outras serão estudadas após o doutorado.

Apêndice A

Comutatividade-Transitiva

O simples conceito da comutatividade ser transitiva sobre elementos não-triviais, teve e contínua tendo um forte impacto em Teoria dos Grupos, e até mesmo em outras áreas de Álgebra. Um grupo com a propriedade *comutatividade-transitiva* será simplesmente chamado de CT.

Quanto a grupos finitos, além dos trabalhos [Wei25] e [Wu98] sobre grupos solúveis CT, destacamos o trabalho [Suz57] que mostra que grupos simples CT possuem ordem par. Este último culminou no célebre teorema de Feit-Thompson sobre a solubilidade de grupos de ordem ímpar.

Por outro lado, a principal importância atualmente de grupos infinitos CT está na profunda relação com grupos residualmente livres (*e.g.* Teorema A.9). Dentre alguns exemplos de grupos CT destacamos: grupos livres, grupos hiperbólicos livres-de-torção, subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (em particular, grupos fuchsianos e kleinianos), monstros de Tarski, e grupos de torção a uma relação (*cf.* [FR08] para referências sobre estes e outros resultados).

Proposição A.1. *Seja G um grupo qualquer. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *a comutatividade é uma relação transitiva sobre* $G-\{1\}$*:*

$$\forall\, a,b,c \in G-\{1\}\,, \quad [a,b]=1=[b,c] \implies [a,c]=1\ ;$$

(ii) *para cada elemento não-trivial* g *de* G *o centralizador* $C_G(g)$ *é abeliano;*

(iii) *os subgrupos abelianos maximais distintos de* G *intersectam-se trivialmente.*

Demonstração.

(i)$\Rightarrow$(ii). Sejam x e y elementos de $C_G(g)$. Então $[x,g]=1=[g,y]$; logo $[x,y]=1$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sejam M_1 e M_2 grupos abelianos maximais distintos. Suponhamos que exista $g \in M_1 \cap M_2$ com $g \neq 1$. Tomemos $x \in M_1-(M_1 \cap M_2)$. Então existe $y \in M_2$ tal que $[x,y] \neq 1$; pois caso contrário $[x,M_2]=1$ e o grupo abeliano $\langle x, M_2\rangle$ conteria propriamente o subgrupo abeliano maximal M_2. Agora, $x,y \in C_G(g)$ mas $[x,y]\neq 1$; uma contradição.

(iii)$\Rightarrow$(i). Sejam $a,b,c \in G-\{1\}$ tais que $[a,b]=1=[b,c]$. Seja M_1 o subgrupo abeliano maximal de G contendo a e b e, seja M_2 o subgrupo abeliano maximal de G contendo b e c. Como $1 \neq b \in M_1 \cap M_2$, temos $M_1 = M_2$ e $[a,c]=1$. □

Observação A.2. *Seja* G *um grupo* CT*. Temos que:*

(i) *o centralizador de cada elemento não-trivial de* G *é um subgrupo abeliano maximal de* G*; reciprocamente, cada subgrupo abeliano maximal de* $G \neq 1$ *é o centralizador de algum elemento não-trivial de* G*.*

(ii) *para cada subgrupo abeliano maximal* H *e cada elemento* g *de* G*, o subgrupo* H *e seu conjugado* gHg^{-1} *coincidem ou se intersectam trivialmente.*

(iii) *se dois subgrupos abelianos intersectam-se não-trivialmente, a união deles gera um subgrupo abeliano.*

(iv) G *é a união disjunta de seus subgrupos abelianos maximais.*

Colecionamos a seguir algumas propriedades de grupos CT.

Corolário A.3. *Um grupo* CT *não-abeliano é diretamente indecomponível.*

Demonstração. Suponhamos que G seja um grupo CT não-abeliano possuindo subgrupos normais não-triviais N e Q tais que $N \cap Q = 1$ e $G = N.Q$. Escolhamos dois elementos quaisquer n em $N - \{1\}$ e q em $Q - \{1\}$. Como cada elemento de N comuta com cada elemento de Q, temos que $N \subseteq C_G(q)$ e $Q \subseteq C_G(n)$. Logo, G é um produto direto de grupos abelianos, donde abeliano; uma contradição. □

Corolário A.4. *Um grupo* CT *ou é abeliano ou possui centro trivial.*

Demonstração. Seja G um grupo CT. Suponhamos que exista um elemento z em $Z(G) - \{1\}$. Para quaisquer $x, y \in G$ temos $[x, z] = 1 = [z, y]$, donde $[x, y] = 1$. □

Corolário A.5. *Um grupo* CT *livre-de-torção é virtualmente abeliano se, e somente se, for abeliano.*

Demonstração. Seja G um grupo CT livre-de-torção virtualmente abeliano. Seja H um subgrupo abeliano maximal de índice finito em G. Suponhamos que G seja não-abeliano e tomemos $g \in G–H$. Como G é livre-de-torção, existe um inteiro $k > 1$ tal que $g^k \in H–\{1\}$. Assim para qualquer h em H temos $[h, g^k] = 1 = [g^k, g]$, donde $[h, g] = 1$. Portanto $\langle H, g\rangle$ é um subgrupo abeliano de G; contradizendo a maximalidade de H. □

Corolário A.6. *Sejam a e b elementos de um grupo* CT *livre-de-torção. Para quaisquer m e n inteiros não-nulos temos:*
(i) *se $a^m = b^n$ então $[a, b] = 1$;*
(ii) *se $a^n = b^n$ então $a = b$, i.e. raízes de elementos, quando existem, são únicas;*
(iii) *se $a^m b^n = b^n a^m$ então $[a, b] = 1$.*

Demonstração. (i) Os comutadores $[a, a^m]$, $[a^m, b^n]$ e $[b^n, b]$ são triviais. Como o grupo é livre-de-torção, pela transitividade da comutação, temos $[a, b] = 1$.
(ii) Do item (i) segue que $(ab^{-1})^n = a^n b^{-n} = 1$, donde $a = b$.
(iii) Por simples manipulação, podemos supor que m e n sejam positivos. Então $a^m = b^n a^m b^{-n} = (b^n a b^{-n})^m$, donde $a = b^n a b^{-n}$ pelo item (ii). Logo, $b^n = a b^n a^{-1} = (aba^{-1})^n$ e $b = aba^{-1}$ pela mesma razão. Portanto $[a, b] = 1$. □

No estudo de grupos totalmente residualmente livres, a seguinte propriedade desempenha um papel fundamental.

Definição A.7. *Dizemos que um grupo G é* CSA *se G satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:*

(i) *cada subgrupo abeliano maximal de G é malnormal;*

(ii) *o centralizador de cada elemento não-trivial de G é abeliano e malnormal;*

(iii) *para quaisquer $a, b, c, g, h \in G - \{1\}$ temos: $[a, b] = [b, c] = 1$ implica $[a, c] = 1$ e, $[g, hgh^{-1}] = 1$ implica $[g, h] = 1$.*

Claramente cada grupo CSA é CT. Em particular, cada subgrupo de um grupo CSA ainda é CSA. Por outro lado, segue da definição que, cada grupo abeliano é CSA; donde, os grupos CSA realmente interessantes são os CSA não-abelianos.

Observação A.8. *Seja G um grupo* CSA *não-abeliano. Temos que:*

(i) *cada subgrupo normal não-trivial de G é também* CSA *não-abeliano; em particular, G não possui subgrupo solúvel não-abeliano;*

(ii) *G é infinito, pois sua única involução é* 1.

(iii) *cada subgrupo de índice finito de G é ainda* CSA *não-abeliano.*

Ressaltamos o importante resultado de A. Gaglione e D. Spellman e, independentemente, V. Remeslennikov.

Teorema A.9 ([GS95],[Rem95])**.** *Um grupo residualmente livre é* CT *se, e somente se, é* CSA*.*

O exemplo de Brandis-Jarden ([Jar82, Ex. 5])

Finalmente, apresentamos um grupo profinito livre-de-torção, não-livre, e que contém $\widehat{\mathbb{Z}}$ como um subgrupo próprio aberto.

Consideremos um primo p e definamos para cada primo l um elemento α_l do grupo aditivo $\mathbb{Z}_l$ da seguinte maneira:

$$\text{se } p \text{ divide } (l-1) \text{ então } \alpha_l \neq 1;$$
$$\text{se } p \text{ não divide } (l-1) \text{ então } \alpha_l = 1.$$

Então $\alpha = (\alpha_l) \in \prod_l \mathbb{Z}_l \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ e temos $\alpha^p = 1$. Consideremos agora uma cópia multiplicativa de $\mathbb{Z}_p$ gerada por um elemento π e tomemos uma cópia multiplicativa de $\prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$ gerada por um elemento z. Definamos uma ação de $\langle \pi \rangle$ sobre $\langle z \rangle$ pela fórmula

$$z^{\pi} = z^{\alpha}$$

e seja G o correspondente produto semidireto, $G \cong \mathbb{Z}_{p'} \rtimes \mathbb{Z}_p$.

Temos $z^{\pi^p} = z^{\alpha^p} = z$, donde o subgrupo aberto $\overline{\langle \pi^p \rangle}$ de $\overline{\langle \pi \rangle}$ (o qual é também isomorfo a $\mathbb{Z}_p$), age trivialmente sobre $\overline{\langle z \rangle}$. Portanto, o subgrupo $\overline{\langle z\pi^p \rangle}$ de índice p de G é isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}$. Mostraremos que G é livre-de-torção. De fato, cada elemento $g \in G$ pode ser escrito unicamente como $g = \nu x$, onde $x \in \overline{\langle z \rangle}$ e $\nu \in \overline{\langle \pi \rangle}$. Assim

$$g^n = \nu^n x^{\nu^{n-1}} x^{\nu^{n-2}} \dots x\,.$$

Se $g^n = 1$, então $\nu^n = 1$, donde $\nu = 1$ e portanto $g = 1$. Além disso, notemos que o grupo profinito 2-gerado G não é profinito livre, por exemplo pela Fórmula de Schreier (p. 6).

Apêndice B

Grupos virtualmente procíclicos

Na Teoria de Grupos Infinitos, empregamos o advérbio *virtualmente* para modificar uma propriedade de modo que ela necessite valer para algum subgrupo de índice finito. Tratando-se de grupos topológicos, dada uma propriedade $\mathcal{P}$, dizemos que um grupo profinito é virtualmente $\mathcal{P}$ se existe um subgrupo fechado de índice finito que possua a propriedade P.

Assim, uma possível primeira direção para entendermos alguns grupos infinitos não necessariamente abelianos é compreender os grupos profinitos *grupos virtualmente procíclicos*. Temos a seguinte versão pro-p do resultado bem conhecido para grupos (abstratos) virtualmente cíclicos.

Proposição B.1. *Seja G um grupo pro-p. Então G é virtualmente procíclico se, e somente se, G for isomorfo a um dos seguintes tipos de grupos:*

(i) *finito;*

(ii) *finito-por-$\mathbb{Z}_p$;*

(iii) *finito-por-$(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, onde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ age sobre $\mathbb{Z}_2$ por inversão.*

Demonstração. Obviamente os grupos do tipo (i) são virtualmente procíclicos. Como extensões do tipo finito-por-$\mathbb{Z}_p$ cindem (pois $\mathbb{Z}_p$ é projetivo), e os grupos (virtualmente procíclicos)-por-finitos são virtualmente procíclicos, temos que os grupos do tipo (ii) e (iii) são virtualmente procíclicos.

Agora, suponhamos que G seja virtualmente (procíclico infinito); caso contrário G seria finito[1]. Considerando intersecções de conjugados, seja N um subgrupo normal de índice finito em G que seja isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Claramente G age por conjugação sobre N e seja K o núcleo desta ação; então N é um subgrupo central de K, pois N é abeliano.

Pelo Teorema de Schur (*cf.* [Suz82, Chap. 2, Thm. 9.8]), $\overline{[K,K]}$ é finito. Então a imagem inversa T de $\operatorname{tor}(K/\overline{[K,K]})$ pela aplicação canônica $K \to K/\overline{[K,K]}$ é $\operatorname{tor}(K)$; assim T é um subgrupo normal finito de G. Logo, G/T é uma extensão de K/T por G/K.

Sendo N livre-de-torção, temos que $K/\overline{[K,K]}$ é virtualmente N; donde, $(K/\overline{[K,K]})/\operatorname{tor}(K/\overline{[K,K]})$ e portanto K/T é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Por outro lado, G/K é isomorfo a um p-subgrupo finito de $Aut(N)$, e portanto ou trivial ou isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (*cf.* [RZ00b, Thm. 4.4.7]). Além disso, temos que uma extensão $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou é $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ com $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agindo sobre $\mathbb{Z}_2$ por inversão.

Portanto, ou G é finito-por-$\mathbb{Z}_p$, ou finito-por-$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ e logo finito-por-$\mathbb{Z}_2$, ou finito-por-$(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. □

Corolário B.2. *Se G for um grupo pro-p virtualmente procíclico, então $G/\overline{\langle \operatorname{tor}(G) \rangle}$ é pro-p livre de posto no máximo 1.*

Demonstração. Se G for do tipo (i) ou (ii), não há o que se demonstrar. Suponhamos então que exista um subgrupo normal finito T de G tal que $G/T \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Temos que $\operatorname{tor}(G/T) = \operatorname{tor}(G)T/T$, pois T é finito; donde $(G/T)/\overline{\langle \operatorname{tor}(G/T) \rangle} \cong G/\overline{\langle \operatorname{tor}(G) \rangle}$. Como $(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 \amalg^2 \mathbb{Z}/2$, temos $(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \overline{\langle \operatorname{tor}(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rangle}$, pelo Teorema 1.3.8(a). O resultado segue. □

[1] Aqui cabe a anedota: grupos finitos são virtualmente triviais!

Proposição B.3. *Se G for um grupo profinito virtualmente procíclico, então $G/\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}$ é meta-procíclico projetivo.*

Demonstração. Seja S um subgrupo p-Sylow de G. Então $S\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}/\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}$ é um subgrupo p-Sylow de $G/\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}$, e um quociente de $S/\overline{\langle \mathrm{tor}(S)\rangle}$. Pelo Corolário B.2, cada subgrupo p-Sylow de $G/\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}$ é procíclico. Donde G é isomorfo a $\mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$, para certos conjuntos disjuntos de primos π e ρ, pela Proposição 1.3.4. □

Observamos que estes dois últimos resultados seguem, mais geralmente, do resultado principal de [Zal04]: *se G for um grupo profinito virtualmente projetivo, então $G/\overline{\langle \mathrm{tor}(G)\rangle}$ é projetivo.*

Encerramos este apêndice descrevendo os grupos pro-finitos limites virtualmente nilpotentes.

Exemplo B.4. *Um grupo profinito abeliano possui um subgrupo procíclico de índice finito se, e somente se, este subgrupo procíclico é um fator direto com complemento finito.* Seja P um subgrupo procíclico de índice finito de um grupo profinito abeliano G, e denotemos por G_p (resp. P_p) o p-Sylow subgrupo de G (resp. P). Pela Proposição B.1, $G_p = P_p \times F_p$, para algum p-subgrupo finito F_p. Consideremos o conjunto finito σ de todos os números primos que dividem $[G : P]$. Então, para cada primo p que não pertence a σ temos $G_p = P_p$, pois $[G_p : P \cap G_p] = [PG_p : P]$. Portanto $G = \prod_p G_p = P \times (\prod_{p\in\sigma} F_p)$.

Exemplo B.5. Para dois conjuntos disjuntos de primos π e ρ, *o grupo $G = \mathbb{Z}_\pi \rtimes \mathbb{Z}_\rho$ é virtualmente procíclico se, e somente se, o núcleo K da ação por conjugação de $\mathbb{Z}_\rho$ sobre $\mathbb{Z}_\pi$ é aberto em $\mathbb{Z}_\rho$.* De fato, se K for aberto, então $K\mathbb{Z}_\pi$ é procíclico e $[G : K\mathbb{Z}_\pi] = [\mathbb{Z}_\rho : K]$. Reciprocamente, seja P um subgrupo procíclico de índice finito de G. Consideremos o conjunto finito σ de todos os números primos que dividem $[G : P]$, e escrevamos $\mathbb{Z}_\pi = \mathbb{Z}_{\pi_0} \times \mathbb{Z}_{\pi_1}$ com $\pi_0 = \pi - \sigma$ e $\pi_1 = \pi \cap \sigma$. Agora, $[\mathbb{Z}_{\pi_0} : \mathbb{Z}_{\pi_0} \cap P] = [\mathbb{Z}_{\pi_0} P : P] = 1$ ou seja $\mathbb{Z}_{\pi_0} \subseteq P$; como P é abeliano, temos $P \cap \mathbb{Z}_\rho \subseteq C_{\mathbb{Z}_\rho}(\mathbb{Z}_{\pi_0})$; logo $[\mathbb{Z}_\rho : C_{\mathbb{Z}_\rho}(\mathbb{Z}_{\pi_0})]$ é finito. Por outro lado, como π_1 é finito temos que $[\mathbb{Z}_\rho : C_{\mathbb{Z}_\rho}(\mathbb{Z}_{\pi_1})]$ é finito. Portanto $[\mathbb{Z}_\rho : K]$ é finito, pois a ação original é por conjugação.

Apêndice C

Teoremas de decomposição para grupos pro-p agindo sobre árvores pro-p

Seguindo as notações do Capítulo 3, enunciamos aqui os resultados de [HZ07, Sec. 5] e [HZZ11, Sec. 3]. Não apresentamos suas demonstrações mas ao menos descrevemos a interdependência lógica deles:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & & \textbf{C.7} \arrow[d] & \\
 & & \textbf{C.6} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \textbf{C.4} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \textbf{C.5} \\
\textbf{C.2} \arrow[d] & & \textbf{C.3} & \\
\textbf{C.1} & & &
\end{tikzcd}$$

Lema C.1. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado não-trivial agindo sobre um grafo profinito conexo Γ. Suponhamos que Δ seja um subgrafo conexo de Γ tal que $G\Delta = \Gamma$. Então existe um conjunto minimal de geradores X de G de modo que $\Delta \cap x\Delta \neq \emptyset$ para cada x em X.*

Lema C.2. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado infinito agindo sobre uma árvore pro-p T. Suponhamos que T contenha uma subárvore pro-p D tal que $GD = T$ Então existe um conjunto minimal de geradores X de um retrato de $G/\widetilde{G}$ em G de modo que $D \cap xD \neq \emptyset$ para cada x em X.*

Lema C.3. *Seja G um grupo pro-p agindo fiel e irredutivelmente sobre uma árvore pro-p T. Suponhamos que G_e seja um estabilizador de aresta minimal e que o conjunto de arestas $GE(T^{G_e})$ seja aberto em T. Então $T - GE(T^{G_e})$ é uma floresta pro-p.*

Além disso, seja $\overline{T}$ o grafo quociente obtido por colapsarmos componentes conexas distintas de $T - GE(T^{G_e})$ para pontos distintos. Então $\overline{T}$ é uma árvore pro-p sobre a qual G age fiel e irredutivelmente, e $\overline{T} = G\overline{T}^{G_e}$.

Lema C.4. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo fiel e irredutivelmente e virtualmente livremente sobre uma árvore pro-p T. Então existem uma árvore pro-p D, uma aresta e de D, um subconjunto finito V de D^{G_e}, e um subconjunto finito X de G tais que:*

(a) *G age fielmente sobre D;*

(b) *todos os estabilizadores de arestas são dois-a-dois conjugados; em particular, $D = GD^{G_e}$;*

(c) *para todos $v_1, v_2 \in V$, $Gv_1 = Gv_2$ implica $v_1 = v_2$;*

(d) *X gera livremente um subgrupo pro-p livre H tal que para $G_0 := \langle G_v \mid v \in V \rangle$ temos $G = \langle G_0, H \rangle$ e $H \cap G_0^G = 1$;*

(e) *para cada $x \in X$, temos*
$$G_e^x \subseteq \bigcup_{v \in V} G_v \,.$$

Lema C.5. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo sobre uma árvore pro-p T. Suponhamos que todos os estabilizadores sejam finitos e que todos os estabilizadores de arestas sejam dois-a-dois conjugados. Suponhamos ainda que existam uma aresta $e \in T$ e um subconjunto finito V de T^{G_e} tais que:*

(i) *para todos $v_1, v_2 \in V$, $Gv_1 = Gv_2$ implique $v_1 = v_2$;*

(ii) *G seja gerado pelos G_v, $v \in V$.*

Se F é um subgrupo normal aberto pro-p livre de G, então
$$\operatorname{rank}(F) - 1 = [G : F] \left(\frac{|V| - 1}{|G_e|} - \sum_{v \in V} \frac{1}{|G_v|} \right) .$$

Teorema C.6. *Um grupo pro-p finitamente gerado infinito agindo virtualmente livremente sobre uma árvore pro-p se decompõe como um produto pro-p livre amalgamado ou como uma* HNN*-extensão pro-p sobre algum estabilizador de aresta.*

Teorema C.7. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado agindo virtualmente livremente sobre uma árvore pro-p T. Então G é isomorfo ao grupo pro-p fundamental de um grafo finito conexo de p-grupos finitos cujos grupos-vértices e grupos-arestas são isomorfos a estabilizadores de vértices e arestas de T.*

A seguir apresentamos o menor exemplo de um grupo pro-p contavelmente gerado infinito agindo virtualmente livremente sobre uma árvore que não satisfaz as conclusões dos teoremas C.6 e C.7.

Exemplo C.8. Sejam A e B grupos de ordem 2 e $G_0 = \langle A \times B, t \mid A^t = B \rangle$ uma HNN-extensão pro-2 de $A \times B$ com subgrupos associados A e B. Notamos que G_0 possui um automorfismo φ de ordem 2 que troca A e B e inverte t. Seja $G = G_0 \rtimes \langle \varphi \rangle$ o holomorfo relativo. Definamos $H_0 = \langle \mathrm{tor}(G_0) \rangle$ e $H = H_0 \rtimes \langle \varphi \rangle$. Como G_0 age sobre sua árvore pro-2 padrão com estabilizadores de vértice finitos, o mesmo ocorre para H. O resultado principal em [HZ10] mostra que H não se decompõe como grupo pro-2 fundamental de um grafo profinito de 2-grupos finitos. Sua demonstração mostra também que H não se decompõe como produto pro-2 livre com amalgamação ou como HNN-extensão pro-2 sobre um grupo finito.

Referências Bibliográficas

Teoria Geral dos Grupos

[Asc86] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Hup67] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967.

[KM82] M.I. Kargapolov e Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the Group Theory*, Nauka, Moscow, 1982.

[Kur60] A. Kurosh, *The Theory of Groups I and II*, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[Rob96] D. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer, New York, 1996.

[Suz82] M. Suzuki, *Group Theory I and II*, Springer, Berlin, 1982.

Teoria Combinatorial dos Grupos

[Bau62] G. Baumslag, *On generalised free products*, Math. Z., **78**, (1962), 423–438.

[BBau68] B. Baumslag, *Generalized free products whose two-generator subgroups are free*, J. London Math. Soc., **43**, (1968), 601–606.

[BMS02] G. Baumslag, A. Myasnikov, e V. Shpilrain, *Open problems in combinatorial group theory. Second edition*, Combinatorial and geometric group theory, 1–38, Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[CM82] B. Chandler e W. Magnus, *The history of combinatorial group theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[CZGK93] D. Collins, H. Zieschang, R. Grigorchuk, e P. Kurchanov, *Algebra, VII*, Combinatorial group theory and Applications to geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[FR99] B. Fine e G. Rosenberger, Algebraic generalizations of discrete groups, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

[Joh97] D. Johnson, *Presentations of Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[LS77] R. Lyndon and P. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[MKS66] W. Magnus, A. Karrass, e D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1966.

[Sti93] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.

Teoria de Bass-Serre

[Bau93] G. Baumslag, *Topics in combinatorial group theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[Coh89] D. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Dic80] W. Dicks, *Groups, trees and projective modules*, Lecture Notes in Mathematics, 790, Springer, Berlin, 1980.

[DD89] W. Dicks e M. Dunwoody, *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Sta83] J. Stallings, *Topology of finite graphs*, Invent. Math., **71**, (1983), no. 3, 551–565,

[Ser80] J-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Wal79] C. Wall (Ed.), *Homological group theory*, Proceedings of a Symposium on Homological and Combinational Techniques in Group Theory held at Durham, September, 1977, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

Métodos Homológicos

[AM94] A. Adem e R. Milgram, *Cohomology of finite groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Bab72] A. Babakhanian, *Cohomological Methods in Group Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.

[Ben98] D. Benson, *Representations and cohomology I and II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Bie76] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Mathematics Department, Queen Mary College, London, 1976.

[Bro82] K. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Coh72] D. Cohen, *Groups of cohomological dimension one*, Lecture Notes in Mathematics, 245, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[GM94] S. Gelfand e Yu. Manin, *Homological algebra*, Algebra, V, Encyclopaedia Math. Sci., 38, 1–222, Springer, Berlin, 1994.

[GM96] S. Gelfand e Yu. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Geo08] R. Geoghegan, *Topological methods in group theory*, Springer, New York, 2008.

[Gru70] K. Gruenberg, *Cohomological topics in group theory*, Lecture Notes in Mathematics, 143, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Rot09] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Springer, New York, 2009.

[Sta73] U. Stammbach, *Homology in group theory*, Lecture Notes in Mathematics, 359, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Wei94] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Comutatividade-Transitiva

[FR08] B. Fine e G. Rosenberger, *Reflections on commutative transitivity*, Aspects of infinite groups, 112–130, World Sci. Publ., 2008.

[GS95] A. Gaglione e D. Spellman, *More model theory of free groups*, Houston J. Math., **21**, (1995), no. 2, 225–245.

[Rem95] V. Remeslennikov, *∃-free groups and groups with length function*, in Second International Conference on Algebra (Barnaul, 1991), Contemp. Math., 184, 369–376, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Suz57] M. Suzuki, *The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order*, Proc. Amer. Math. Soc., **8**, (1957), 686–695.

[Wei25] L. Weisner, *Groups in which the normaliser of every element except identity is abelian*, Bull. Amer. Math. Soc., **31**, (1925), no. 8, 413–416.

[Wu98] Yu-Fen Wu, *Groups in which commutativity is a transitive relation*, J. Algebra, **207**, (1998), no. 1, 165–181.

Grupos Limites

[AB06] E. Alibegović e M. Bestvina, *Limit groups are* CAT(0), J. London Math. Soc. (2), **74**, (2006), 259–272.

[BBau67] B. Baumslag, *Residually free groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **17**, (1967), 402–418.

[BH07] M. Bridson e J. Howie, *Normalisers in limit groups*, Math. Ann., **337**, (2007), no. 2, 385–394.

[CZ07] S. Chagas e P. Zalesskii, *Limit Groups are conjugacy separable*, Internat. J. Algebra Comput., **17**, (2007), no. 4, 851–857.

[CG05] C. Champetier e V. Guirardel, *Limit groups as limits of free groups*, Israel J. Math., **146**, (2005), 1–75.

[KhM98a] O. Kharlampovich e A. Myasnikov, *Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz.*, J. Algebra, **200**, (1998), no. 2, 472–516.

[KhM98b] O. Kharlampovich e A. Myasnikov, *Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups*, J. Algebra, **200**, (1998), no. 2, 472–516.

[KhM06] O. Kharlampovich e A. Myasnikov, *Elementary theory of free non-abelian groups*, J. Algebra, **302**, (2006), no. 2, 451–552.

[Koch10] D. Kochloukova, *On subdirect products of type* FP_m *of limit groups*, J. Group Theory, **13**, (2010), no. 1, 1–19.

[Rem89] V. Remeslennikov, *∃-free groups*, Sibirsk. Mat. Zh., **30**, (1989), 193–197.

[Sel01] Z. Sela, *Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93**, (2001), 31–105.

[Sel06] Z. Sela, *Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group*, Geom. Funct. Anal., **16**, (2006), no. 3, 707–730.

[Wil08] H. Wilton, *Hall's theorem for limit groups*, Geom. Funct. Anal., **18**, (2008), 271–303.

Grupos Profinitos

[BZ11] V. Bessa e P.A. Zalesskii, *Genus for* HNN-*extensions*, preprint, 2011.

[DDMS] J. Dixon, M. du Sautoy, A. Mann, e D. Segal, *Analytic pro-p groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[FJ05] M. Fried e M. Jarden, *Field arithmetic*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[GJPZ] F. Grunewald, A. Jaikin-Zapirain, A. Pinto, e P. Zalesskii, *Normal Subgroups of Profinite Groups of Non-negative Deficiency*, *preprint*, 2008.

[HZ07] W. Herfort e P. Zalesskii, *On virtually pro-p groups*, *preprint*, 2007.

[HZ10] W. Herfort e P. Zalesskii, *A virtually free pro-p need not be the fundamental group of a profinite graph of finite groups*, Arch. Math. (Basel), **94**, (2010), no. 1, 35–41.

[HZZ11] W. Herfort, P. Zalesskii, e T. Zapata, *Splitting theorems for pro-p groups acting on pro-p trees and 2-generated subgroups of free pro-p products with procyclic amalgamations*, submetido. `http://arxiv.org/pdf/1103.2955`.

[Jar82] M. Jarden, *Torsion-free profinite groups with open free subgroups*, Arch. Math. (Basel), **39**, (1982), no. 6, 496–500.

[Koch70] H. Koch, *Galoissche Theorie der p-Erweiterungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Ko09] D. Kochloukova, *Homological properties of abstract and profinite modules and groups*, J. Pure Appl. Algebra, **213**, (2009), no. 3, 313–320, doi:10.1016/j.jpaa.2008.07.010.

[KZ10] D. Kochloukova e P. Zalesskii, *Fully residually free pro-p groups*, J. Algebra, (2010), no. 4, 782–792, doi:10.1016/j.jalgebra.2010.04.019.

[KZ11] D. Kochloukova e P. Zalesskii, *On pro-p analogues of limit groups via extensions of centralizers*, Math. Z., **267**, (2011), no. 1–2, 109–128, doi:10.1007/s00209-009-0611-y.

[Mel89] O. Mel'nikov, *Subgroups and the homology of free products of profinite groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **53**, (1989), no. 1, 97–120.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schimidt, e K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Rib71] L. Ribes, *On amalgamated products of profinite groups*, Math. Z., **123**, (1971), 357–364.

[RSZ98] L. Ribes, D. Segal, e P. Zalesskii, *Conjugacy separability and free products with cyclic amalgamation*, J. London Math. Soc. (2) **57**, (1998), 609–628.

[RZ96] L. Ribes e P. Zalesskii, *Conjugacy separability of amalgamated free products of groups*, J. Algebra **179**, (1996), no. 3, 751–774.

[RZ00a] L. Ribes e P. Zalesskii, *Pro-p trees and applications*, New horizons in pro-p groups, Progr. Math., 184, 75–119, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[RZ00b] L. Ribes e P. Zalesskii, *Profinite groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Sant08] P. Santos Jr., *Subgrupos 2-gerados de Produtos Livres de Grupos Pro-p com Amalgamação Cíclica*, tese de doutorado, Universidade de Brasília, 2008.

[Sha72] S. Shatz, *Profinite groups, arithmetic, and geometry*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972.

[Ser62] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1962/1963.

[Ser94] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[SW00] P. Symonds e T. Weigel, *Cohomology of p-adic analytic groups*, New horizons in pro-p groups, Progr. Math., 184, 349–410, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[WZ04] T. Weigel e P. Zalesskii, *Profinite groups of finite cohomological dimension*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **338**, (2004), no. 5, 353–358, doi:10.1016/j.crma.2003.12.022.

[Wil98] J. Wilson, *Profinite Groups*, Oxford University Press, New York, 1998.

[Zal88b] P. Zalesskii, *Nilpotent and solvable profinite groups acting on trees*, Dokl. Akad. Nauk BSSR, **32**, (1988), no. 6, 485–488, 572.

[Zal90] P. Zalesskii, *Profinite groups, without free nonabelian pro-p-subgroups, that act on trees*, Mat. Sb., **181**, (1990), no. 1, 57–67.

[Zal95] P. Zalesskii, *Normal subgroups of free constructions of profinite groups and the congruence kernel in the case of positive characteristic*, Izv. RAN. Ser. Mat., **59**:3, (1995), 59–76.

[Zal04] P. Zalesskii, *On virtually projective groups*, J. Reine Angew. Math., **572**, (2004), 97–110, doi:10.1515/crll.2004.055.

[ZM88] P. Zalesskii e O. Mel'nikov, *Subgroups of profinite groups acting on trees*, Mat. Sb. (N.S.) **135(177)**, (1988), no. 4, 419–439, 559.

[ZM89] P. Zalesskii e O. Mel'nikov, *Fundamental groups of graphs of profinite groups*, Algebra i Analiz, **1**, 1989, no. 4, 117–135.

Índice Remissivo