

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO: UMA
EVOLUÇÃO DO MODELO DE LEMAITRE PARA
REDUÇÃO DA DEPENDÊNCIA DO PONTO DE
CALIBRAÇÃO**

LUCIVAL MALCHER

ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA

DOCTORADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.TD - 09/2011

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO – 2011

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO: UMA EVOLUÇÃO DO
MODELO DE LEMAITRE PARA REDUÇÃO DA DEPENDÊNCIA
DO PONTO DE CALIBRAÇÃO**

LUCIVAL MALCHER

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.**

APROVADA POR:

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Dr. (ENM – UnB)
(Orientador)

Prof. Heraldo Silva da Costa Mattos, Dr. (UFF)
(Examinador Externo ao Programa)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, Dr. (ENC – UnB)
(Examinador Externo ao Programa)

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr. (ENM – UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Fábio Comes de Castro, Dr. (ENM – UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Eder Lima de Albuquerque, Dr. (ENM – UnB)
(Suplente)

BRASÍLIA/DF, NOVEMBRO DE 2011.

FICHA CATALOGRÁFICA

MALCHER, LUCIVAL

Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração.

vi. 122p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2011).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------|--------------------------------------|
| 1. Dano Dúctil | 2. Localização e Iniciação de trinca |
| 3. Mecânica do Contínuo | 4. Dependência da Calibração |
| I. ENM/FT(ENM | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Malcher, L. (2011). Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.TD - 09/2011, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 122p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Lucival Malcher.

TÍTULO: Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração.

GRAU: Doutor ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósito acadêmico e científico. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor

Lucival Malcher
SQN 111 Bloco E Apto 508, Asa Norte
70.754-050 Brasília/DF/Brasil.
malcher@unb.br

*Dedico esta tese às mulheres da minha vida
Maria Carolina, Ana Luiza, Cyntia e Graça.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya pela ajuda e confiança dadas no desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos Dr. Fabio Pinho Reis e Dr. Filipe Xavier Costa Andrade, pelas opiniões, conversas e troca de informações/conhecimentos, desde os trabalhos desenvolvidos no Porto em 2007.

Agradecimentos especiais vão também a minha esposa Cyntia Malcher, pela coragem e companheirismo nos sonhos e decisões, em princípio impossíveis. Aos meus filhos, Ana Luiza e Gabriel e principalmente a caçula Maria Carolina, por fazer parte do meu dia a dia e me demonstrar grande vontade e força em viver.

Aos meus pais Antonio Ávila e Graça Malcher por sempre me apoiarem e ajudarem nas decisões simples e fáceis, e também nas complexas e difíceis.

RESUMO

A capacidade de se prever e determinar o momento e local correto de iniciação de uma trinca dúctil é de grande importância e aplicabilidade na indústria de uma forma geral. Inúmeros processos de fabricação e critérios de projeto mecânico adotam modelos elasto-plásticos e com dano acoplado, como condição inicial e de otimização da descrição do comportamento de materiais dúcteis. Pesquisas realizadas nas últimas décadas mostram que a capacidade preditiva destes modelos é fortemente dependente da condição de calibração utilizada para determinação dos parâmetros materiais. Assim, neste trabalho, busca-se aperfeiçoar o modelo de dano de Lemaitre, que é baseado na Mecânica do Dano Contínuo e aplicado a materiais dúcteis, no que se refere à redução de sua dependência da condição de calibração. Para isto, sugere-se a criação de uma chamada *função denominador de dano*, de maneira a substituir o denominador de dano que é se apresenta como uma constante material na lei de evolução de dano originalmente proposta por Lemaitre. Como primeira etapa do trabalho, faz-se uma revisão dos conceitos da mecânica do contínuo, da termodinâmica dos sólidos e da modelação constitutiva. Posteriormente, uma análise do modelo original de Lemaitre, com dano e endurecimento isotrópicos, é feita, levando em consideração seus aspectos matemáticos e numéricos. Através de simulações numéricas preliminares, demonstra-se a imprecisão do modelo quando utilizado em condições reais distantes do ponto utilizado para calibração dos parâmetros materiais. Desta forma, é sugerida a criação de uma *função denominadora de dano*, dependente tanto do nível de triaxialidade quanto do terceiro invariante normalizado, e acoplada a lei de evolução da variável de dano, como originalmente sugerido por Lemaitre. Após o acoplamento, é feito um novo estudo da consistência termodinâmica da nova formulação, no que se refere ao seu potencial de estado e potencial de dissipação. Um novo modelo de integração numérica implícito é sugerido, levando em consideração agora, uma lei de fluxo plástico, obtida através da plasticidade associativa e também não-associativa. O modelo implícito é então implementado em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, juntamente com sua matriz tangente consistente. Para se avaliar a robustez da nova proposição, simulações numéricas são feitas, levando em consideração dois tipos de materiais, como um liga de alumínio 2024-T351 e o aço 1045, e corpos de prova que simulam estados de tensão dentro das regiões de alta e baixa triaxialidade. Por fim, através de uma comparação entre os resultados numericamente obtidos e dados experimentais disponíveis na literatura, mostra-se a redução da dependência do modelo, a sua melhoria e aplicabilidade em largas faixas de triaxialidade. Parâmetros como o nível de deslocamento na fratura, a evolução do parâmetro de dano, o nível de deformação plástica na fratura e a capacidade de determinar o potencial local de início da fratura dúctil são avaliados.

Palavras-chave: triaxialidade, ponto de calibração, mecânica do dano, fratura dúctil.

ABSTRACT

The ability to predict and determine the correct fracture onset and displacement at fracture initiation is of paramount importance and applicability in the industry in general. Many manufacturing processes and project criteria rely on elasto-plastic models coupled with damage, as the initial condition and optimization of the description of the behavior of ductile materials. Research studies in recent decades have shown that the predictive ability of these models is strongly dependent on the condition of calibration used to determine material parameters. Thus, this thesis seeks to improve the damage evolution law of Lemaitre's model, which is based on Continuum Damage Mechanics and applied on ductile materials, with regard to reducing its dependence on the calibration point. To this end, creation of a function called the function of damage denominator is suggested in order to replace the denominator of damage that is a constant and is presented in the evolution damage law originally proposed by Lemaitre. As the first stage of the work, a review of the concepts of Continuum Mechanics, Thermodynamics of Solids and Constitutive Modeling Theory is conducted. Subsequently, an analysis of the original Lemaitre's model with isotropic hardening and damage is done, taking into account its mathematical and numerical aspects. Through preliminary numerical simulations, the inaccuracy of the original model when it is used under conditions far from the calibration point of material parameters is demonstrated. Thus, creation of a function of damage denominator is demonstrated, dependent on both stress triaxiality and the normalized third invariant of the deviatoric stress, and coupled in the evolution law of a damage variable, as originally suggested by Lemaitre. Once the coupling procedure is completed, a new study is conducted based on the thermodynamic consistency of the new formulation, with regard to its state potential and mechanical dissipation. A new implicit numerical integration algorithm is suggested, now taking into account a plastic flow rule, obtained through both associative and non-associative plasticity. The implicit model is then implemented in an academic finite element environment, along with its consistent tangent matrix. To assess the robustness of this new proposition, numerical simulations are made, taking into account two types of materials, such as aluminum alloy 2024-T351 and 1045 steel, and specimens that simulate a state of tension within the regions of high and low stress triaxiality. Finally, through a comparison between the numerical results and experimental data available in the literature, the reduction of dependence on the model, its improvement and broad applicability in a wide range of stress triaxiality is demonstrated. Parameters such as the level of the displacement at fracture, the evolution of damage parameter, the level of equivalent plastic strain at fracture and the ability to determine the potential site to crack formation are further evaluated.

Keywords: triaxiality, calibration point, damage mechanics, ductile fracture.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. A IMPORTÂNCIA E EVOLUÇÃO DA MECÂNICA DO DANO.....	3
1.2. OBJETIVO DA TESE.....	5
1.3. ESCOPO DA TESE.....	5
2. MECÂNICA DO CONTÍNUO, TERMODINÂMICA DOS SÓLIDOS E MODELAÇÃO CONSTITUTIVA	7
2.1. CINEMÁTICA DE DEFORMAÇÃO.....	7
2.1.1. <i>Configuração e movimento de corpos contínuos</i>	7
<i>Dependência do tempo</i>	10
2.1.2. <i>Descrição material e espacial</i>	10
<i>Gradiente material e espacial, divergente e derivada no tempo</i>	11
2.1.3. <i>O gradiente de deformação</i>	11
<i>Decomposição isocórica e volumétrica do gradiente de deformação</i>	13
2.1.4. <i>Decomposição polar: alongamentos e rotação</i>	14
2.1.5. <i>Medidas de deformação</i>	15
2.1.6. <i>Gradiente de velocidade: Taxa de deformação e decomposição</i>	17
2.1.7. <i>Movimento de corpo rígido e objetividade sobrepostos</i>	17
2.2. TENSÃO E EQUILÍBRIO.....	19
2.2.1. <i>O tensor tensão de Cauchy</i>	20
<i>Tensões desviadoras e hidrostática</i>	20
<i>Objetividade do tensor</i>	20
2.2.2. <i>Alternativas para definição do tensor tensão</i>	21
2.2.3. <i>Os invariantes do tensor tensão</i>	22
2.3. LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA.....	22
2.3.2. <i>Conservação da massa</i>	23
2.3.3. <i>Equilíbrio de momento</i>	23
2.3.4. <i>Primeira lei da termodinâmica</i>	24
2.3.5. <i>Segunda lei da termodinâmica</i>	24
2.3.6. <i>Desigualdade de Clausius-Duhem</i>	24

2.4.	TEORIA CONSTITUTIVA.....	25
2.4.2.	<i>Termodinâmica com variáveis internas.....</i>	25
	<i>Variáveis de estado.....</i>	26
	<i>Potencial termodinâmico: Equação constitutiva.....</i>	26
	<i>Forças termodinâmicas.....</i>	27
	<i>Dissipação. Evolução das variáveis internas.....</i>	27
	<i>Potencial de dissipação: Dissipação normal.....</i>	28
2.4.3.	<i>Abordagens fenomenológicas e micro-mecânicas.....</i>	28
2.4.4.	<i>A teoria puramente mecânica.....</i>	29
2.4.5.	<i>Problema constitutivo de valor inicial.....</i>	30
2.5.	EQUILÍBRIO NA FORMA FRACA: PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	30
2.5.2.	<i>Configuração espacial.....</i>	31
2.5.3.	<i>Configuração material.....</i>	31
2.6.	MODELO DE DANO DE LEMAITRE.....	32
2.6.2.	<i>Potencial de estado e relações de estado.....</i>	32
2.6.3.	<i>Potencial de dissipação e equações de evolução associadas.....</i>	35
2.6.4.	<i>Início do dano em materiais dúcteis.....</i>	38
2.6.5.	<i>Critério do dano crítico.....</i>	39
2.7.	DEFINIÇÃO DE RAZÃO DE TRIAXIALIDADE, TERCEIRO INVARIANTE NORMALIZADO E ÂNGULO DE LODE.....	39
3.	ESTRATÉGIA NUMÉRICA, CALIBRAÇÃO E SIMULAÇÃO DO MODELO DE DANO ORIGINAL DE LEMAITRE.....	42
3.1.	ESTRATÉGIA NUMÉRICA.....	42
3.1.1	Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.....	43
3.1.2	Operador tangente consistente.....	50
3.2.	CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS.....	51
3.3.	GEOMETRIA E DISCRETIZAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA.....	54
3.4.	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	56
4.	APERFEIÇOAMENTO DO MODELO DE LEMAITRE PARA REDUÇÃO DA DEPENDENCIA DO PONTO DE CALIBRAÇÃO.....	62
4.1.	O EFEITO DO DENOMINADOR DE DANO NA PRECISÃO DO MODELO DE LEMAITRE.....	63
4.2.	A FUNÇÃO DENOMINADOR DE DANO.....	65
4.2.1.	<i>Região de alta triaxialidade: Tração predominante ($\eta \geq 0.33$).....</i>	66

4.2.2.	<i>Região de baixa triaxialidade: Cisalhamento predominante</i> <i>($0 \leq \eta < 0.33$)</i>	66
4.3.	ACOPLAMENTO DA FUNÇÃO DENOMINADOR E EVOLUÇÃO DO DANO.....	69
4.4.	DEFINIÇÃO DA LEI DE FLUXO PLÁSTICO: MODELO ASSOCIATIVO E NÃO-ASSOCIATIVO.....	71
4.4.1.	<i>Modelo associativo modificado de Lemaitre</i>	71
4.4.2.	<i>Modelo não-associativo modificado de Lemaitre</i>	72
4.5.	DISSIPACÃO MECÂNICA.....	76
4.5.1.	<i>Casos puramente elástico e elasto-plástico</i>	76
4.5.2.	<i>Caso Lemaitre aperfeiçoado: plasticidade associativa</i>	77
4.5.3.	<i>Caso Lemaitre aperfeiçoado: plasticidade não-associativa</i>	78
5.	ALGORITMO IMPLÍCITO PARA O MODELO APERFEIÇOADO DE LEMAITRE	80
5.1.	MODELO ASSOCIATIVO APREFEIÇOADO: Estratégia numérica.....	80
5.1.1	<i>Lei de fluxo plástico e evolução das variáveis interna r e D</i>	80
5.1.2	<i>Operador tangente consistente</i>	85
5.2.	MODELO NÃO-ASSOCIATIVO APREFEIÇOADO: Estratégia numérica	88
5.2.1.	<i>Lei de fluxo plástico e evolução das variáveis interna r e D</i>	88
5.2.2.	<i>Operador tangente consistente</i>	93
6.	RESULTADOS NUMÉRICOS	96
6.1.	GEOMETRIA E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DOS CORPOS DE PROVA.....	96
6.1.1.	<i>Geometria dos corpos de prova</i>	96
6.1.2.	<i>Discretização espacial dos corpos de prova</i>	98
6.2.	CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS.....	100
6.2.1.	<i>Calibração para a liga de alumínio 2024-T351</i>	101
6.2.2.	<i>Calibração para o aço 1045</i>	103
6.3.	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	104
6.3.1.	<i>Resultados numéricos para a liga de alumínio 2024-T351</i>	104
6.3.2.	<i>Resultados numéricos para o aço 104</i>	109
6.3.3.	<i>Curva de fratura: Deformação plástica equivalente versus triaxialidade</i>	113

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS.....	116
7.1. CONCLUSÕES.....	116
7.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Variáveis de estado para a teoria de dano isotrópico.....	34
Tabela 3.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de Lemaitre. De Souza Neto (2002)	49
Tabela 3.2. Propriedades materiais básicas para a liga de alumínio 2024-T351...	51
Tabela 3.3. Parâmetros de dano calibrados para o modelo original de Lemaitre (alumínio 2024-T351)	53
Tabela 3.4. Deslocamento para a fratura numérico e experimental.....	60
Tabela 4.1. Comparação entre os valores de S determinados através de calibração e através da função denominador.....	69
Tabela 4.2. Modelo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e a função denominador de dano.....	70
Tabela 4.3. Modelo associativo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e com a função denominador de dano	72
Tabela 4.4. Modelo nao-associativo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e com função denominador de dano.....	75
Tabela 5.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo associativo aperfeiçoado de Lemaitre.....	84
Tabela 5.2. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo não-associativo aperfeiçoado de Lemaitre.....	90
Tabela 5.3. Algoritmo de Newton-Raphson para resolução do sistema não-linear.....	92
Tabela 6.1. Propriedades materiais para a liga de alumínio 2024-T351.....	102
Tabela 6.2. Propriedades materiais para o aço 1045.....	103
Tabela 6.3. Análise comparativa entre os deslocamentos experimentais e numéricos (liga de alumínio 2025-T351)	106
Tabela 6.4. Análise comparativa entre os deslocamentos experimentais e numéricos (aço 1045)	111

Tabela 7.1. Ganho percentual na determinação do nível de deslocamento requerido para a fratura.....	117
Tabela 7.2. Valores de deformação plástica equivalente na fratura.....	118

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Exemplos do uso de modelos constitutivos para descrever o comportamento elasto-plástico de estruturas e componentes mecânicos. Fonte: Bao (2004), (Bai, 2008) e Stoughton (2011).....	2
Figura 2.1. Configuração de um corpo deformado.....	8
Figura 2.2. Definição do determinante do gradiente de deformação.....	12
Figura 2.3. Sobreposição de movimento de corpo rígido.....	18
Figura 2.4. Forças de superfícies. Tensor de Cauchy.....	19
Figura 2.5. Representação do estado de tensão inicial em função de ξ e $\bar{\theta}$	41
Figura 3.1. (a) Geometria do corpo de prova cilíndrico liso (dimensões em mm) e (b) discretização espacial da região de ensaio. Reproduzido de Teng (2008)	52
Figura 3.2. (a) Curva de reação obtida através do modelo de Lemaitre. (b) Parâmetro de dano crítico, calibrado para $u_f = 6.65 \text{ mm}$	53
Figura 3.3. Curva de encruamento para o modelo de Lemaitre.....	53
Figura 3.4. Geometria para os corpos de prova. (a) barra cilíndrica entalhada $R = 4 \text{ mm}$, (b) barra cilíndrica entalhada $R = 12 \text{ mm}$ e corpo de prova borboleta. Dimensões em mm	54
Figura 3.5. Malha de elementos finitos quadrilateral de oito nós. (a) barra cilíndrica entalhada $R = 4 \text{ mm}$, (b) barra cilíndrica entalhada $R = 12 \text{ mm}$	55
Figura 3.6. Malha tridimensional de elementos finitos de vinte nós.....	56
Figura 3.7. Quadro com a distribuição dos corpos de prova testados, de acordo com o nível de triaxialidade.....	56
Figura 3.8. Curvas força versus deslocamento para diferentes corpos de prova e condições de carregamento aplicado.....	58
Figura 3.9. Evolução da variável de dano e da deformação plástica equivalente para diferentes corpos de prova e condições de carregamento aplicado.....	59

Figura 3.10. Contorno da variável de dano ao longo da malha de elementos finitos, para os diferentes corpos de prova avaliados.....	61
Figura 4.1. Comportamento do modelo de Lemaitre quanto da dependência do ponto de calibração.....	63
Figura 4.2. Evolução da variável de dano para S calibrado tradicionalmente e S calibrado para cada condição de carregamento.....	64
Figura 4.3. Relação de dependência entre o denominador de dano e a razão de triaxialidade.....	65
Figura 4.4. Comportamento gráfico da função denominador de dano.....	68
Figura 4.5. Função denominador de dano. Projeção para estado plano de tensão.	68
Figura 6.1. Corpos de prova (a) borboleta e (b) cilíndrico liso, utilizados em ambos os materiais (Bai, 2008)	97
Figura 6.2. Corpo de prova cilíndrico entalhado, utilizado para o aço 1045 (Bai, 2008)	97
Figura 6.3. Corpos de prova cilíndricos entalhados, utilizado para a liga de alumínio 2024-T351 (Bai, 2008)	98
Figura 6.4. Malha tridimensional de elementos finitos de vinte nós. Corpo de prova do tipo “borboleta”	99
Figura 6.5. Malha de elementos finitos para os corpos cilíndricos (Al 2024-T351)	99
Figura 6.6. Malha de elementos finitos para os corpos cilíndricos (aço 1045).....	100
Figura 6.7. Pontos de calibração para o novo modelo proposto.....	101
Figura 6.8. Ajuste entre as curva de reação numérica e experimental obtida após o procedimento de otimização (liga Al 2024-T351).....	102
Figura 6.9. Ajuste entre as curva de reação numérica e experimental obtida após o procedimento de otimização (aço 1045).....	103
Figura 6.10. Curvas força versus deslocamento para a liga de alumínio 2024-T351.....	105

Figura 6.11. Evolução do dano para o modelo original e proposto, considerando os diferentes corpos de prova analisados (liga de alumínio 2024-T351)	107
Figura 6.12. Contorno do parâmetro de dano para os três modelos analisados (liga de alumínio 2024-T351)	108
Figura 6.13. Curvas força versus deslocamento para o aço 1045.....	110
Figura 6.14. Evolução do dano para o modelo original e proposto, considerando os diferentes corpos de prova analisados (aço 1045).....	112
Figura 6.15. Contorno do parâmetro de dano para os três modelos analisados (aço 1045)	113
Figura 6.16. Curva de fratura (a) liga de alumínio 2024-T351 e (b) aço 1045.....	115

LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{\bar{\epsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica equivalente
\dot{W}^p	Taxa de evolução do trabalho plástico
$\dot{\epsilon}^p$	Lei de fluxo plástico
$\bar{\epsilon}^p$	Deformação plástica equivalente
$\nabla_p \alpha$	Gradiente material
$\nabla_x \alpha$	Gradiente espacial
$\text{div}_p(*)$	Divergente material
$\text{div}_x(*)$	Divergente espacial
Ψ^*	Pseudo-potencial de dissipação
Ψ^d	Contribuição devido ao dano no potencial de dissipação
Ψ^p	Contribuição plástica no potencial de dissipação
A_k	Forças termodinâmicas
\dot{D}	Taxa de evolução do dano
D_c	Dano crítico
D_{n+1}	Variável de dano no pseudo-tempo t_{n+1}
D_{n+1}^{trial}	Variável de dano tentativa
R_{n+1}	Força termodinâmica de endurecimento isotrópico no pseudo-tempo t_{n+1}
R_{n+1}^{trial}	Força termodinâmica de endurecimento isotrópico tentativa
W^e	Energia elástica
p_{n+1}	Pressão hidrostática no pseudo-tempo t_{n+1}
p_{n+1}^{trial}	Pressão hidrostática tentativa
\dot{r}	Taxa de evolução da variável interna de endurecimento isotrópico
u_f	Deslocamento na fratura
$\mathbf{E}^{(m)}$	Família de tensores de deformação Lagrangeana
\mathbf{F}_{iso}	Componente isocórica do gradiente de deformação
\mathbf{F}_v	Componente volumétrica do gradiente de deformação
\mathbf{S}_{n+1}	Tensor das tensões desviadoras no pseudo-tempo t_{n+1}
\mathbf{S}_{n+1}^{trial}	Tensor das tensões desviadoras tentativa
\mathcal{D}_{mec}	Dissipação mecânica
\mathbb{D}^{ep}	Operador tangente elasto-plástico consistente
$\dot{\gamma}$	Taxa de evolução do multiplicador plástico
$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$	Família de tensores de deformação Euleriana
ε_D^p	Liminar de dano
ε_f^p	Deformação plástica equivalente na fratura
$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado
σ_y	Lei de encruamento do material
ψ^l	Contribuição devido ao endurecimento isotrópico na energia livre
ψ^{ed}	Contribuição elástica-dano na energia livre
ψ^p	Contribuição plástica na energia livre
$\boldsymbol{\alpha}_k$	Variáveis internas
$\dot{\boldsymbol{\beta}}$	Taxa de evolução da variável interna de endurecimento cinemático
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo t_{n+1}

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor das deformações plásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor das deformações plásticas no pseudo-tempo t_{n+1}
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações plásticas
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão efetivo
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão no pseudo-tempo t_{n+1}
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão tentativa
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Incremento de deformação plástica
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento de deformação
H	Módulo de endurecimento isotrópico
Ξ	Potencial de dissipação
Φ	Função de escoamento do material
Ψ	Potencial de dissipação complementar
D	Variável isotrópica de dano
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de cisalhamento
J	Determinante do gradiente de deformação
K	Módulo volumétrico
R	Força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico
S	Denominador de dano
$S(\eta, \xi)$	Função denominador de dano
Y	Força termodinâmica associada ao dano
e	Energia específica interna
p	Pressão hidrostática
q	Tensão equivalente de von Mises
r	Variável interna associada ao endurecimento isotrópico
r	Terceiro invariante
s	Entropia específica
s	Expoente de dano
t	Tempo
\boldsymbol{C}	Tensor de Cauchy-Green à direita
\boldsymbol{F}	Gradiente de deformação
\boldsymbol{I}	Tensor identidade de segunda ordem
\boldsymbol{N}	Vetor de fluxo plástico
\boldsymbol{P}	Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff
\boldsymbol{Q}	Tensor ortogonal - sobreposição da rotação de corpo rígido
\boldsymbol{R}	Tensor de rotação
\boldsymbol{S}	Componente desviadora do tensor tensão de Cauchy
\boldsymbol{S}	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff
\boldsymbol{T}	Campo tensorial
\boldsymbol{U}	Tensor de alongamento à direita
\boldsymbol{V}	Tensor de alongamento à esquerda
\boldsymbol{X}	Tensor back-stress
\boldsymbol{a}	Campo de aceleração
\boldsymbol{b}	Tensor de Cauchy-Green à esquerda
\boldsymbol{d}	Tensor da taxa de velocidade
\boldsymbol{f}	Força de campo
\boldsymbol{g}	Gradiente de temperatura

l	Tensor do gradiente de velocidade
p	Posição inicial ou de referência da partícula
q	Ponto onde o corpo contínuo é rotacionado
q	Fluxo de calor
$u^{(*)}$	Vetor deslocamento
v	Campo de velocidade
w	Tensor rotativo
x	Posição atual ou corrente da partícula
t	Vetor tensão
\mathbb{D}	Tensor constitutivo
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
Ω	Corpo contínuo
α	Campo material
γ	Multiplicador plástico
η	Razão de triaxialidade
θ	Temperatura
θ	Ângulo de Lode
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Terceiro invariante normalizado
ρ	Densidade
ψ	Energia específica livre/potencial termodinâmico/energia livre Helmholtz
ω	Integridade do material
β	Variável interna associada ao endurecimento cinemático
σ	Tensor tensão de Cauchy
τ	Tensor tensão de Kirchhoff
$\varphi^{(*)}$	Mapa de deformação
$J_{2,3}$	Segundo e terceiro invariantes do tensor desviador
$I_{1,2,3}$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão de Cauchy
$S_{0,00}$	Denominador de dano para baixa triaxialidade
σ_0	Tensão de escoamento inicial do material
$\varphi^{-1}^{(*)}$	Mapa de referência
$S_{0,33}$	Denominador de dano para alta triaxialidade

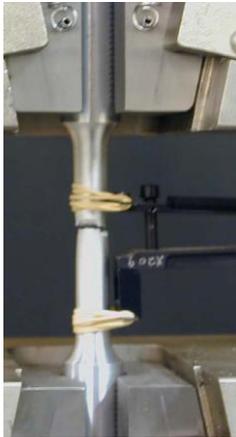
1. INTRODUÇÃO

A previsão correta do início da fratura em materiais dúcteis tornou-se, nos últimos anos, um assunto de grande importância para setores competitivos das indústrias automotiva, aeroespacial, naval, militar, entre outras (Andrade Pires, 2005; Bai, 2008). Por exemplo, a redução de peso em estruturas veiculares como chassis e carrocerias, sem a perda de performance e competitividade, tem utilizado critérios de projeto que partem da determinação do correto momento e local para o início de uma trinca. Desta forma, a concepção de novos produtos exige um planejamento cuidadoso de cada etapa necessária ao seu desenvolvimento, otimização e fabricação.

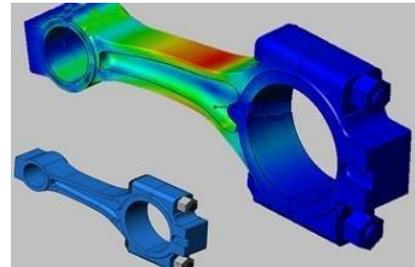
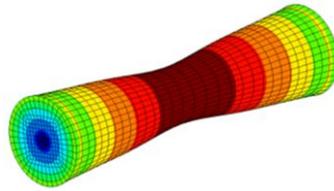
Nas últimas duas décadas, observou-se um aumento substancial na conscientização do meio industrial, do grande potencial existente na aplicação de métodos científicos, durante a concepção destes novos produtos. Em cada etapa, é necessário garantir que os produtos desenvolvidos e os processos aplicados sejam otimizados, especialmente em setores competitivos da indústria, como a metalúrgica, e, simultaneamente, satisfaçam a funcionalidade e o baixo custo de produção. Para superar os problemas encontrados durante as fases de desenvolvimento e projeto, e ainda manter uma vantagem competitiva, é muito importante estar constantemente atualizado com os mais recentes progressos científicos e tecnológicos.

Desde o final da década de sessenta, inúmeros modelos matemáticos foram formulados no sentido de descrever, de maneira satisfatória, o comportamento macro e microscópico da fratura dúctil em materiais metálicos, como o aço, as ligas de alumínio, etc. Modelos como o de McClintock (1968), que assume o vazio dentro de uma matriz metálica na forma de um cilindro, o proposto por Rice e Tracey (1969), que considera o vazio como uma esfera perfeita, o de Gurson-Tvergaard-Needleman (1975 e 1984), que descreve o comportamento elasto-plástico de materiais porosos, o de Lemaitre (1996), que assume os princípios da mecânica do dano contínuo, os de Oyane (1980), Cockcroft e Lathan (1968) e Johnson e Cook (1985), que utilizam observações experimentais para descrever a fratura, são alguns dos modelos mais conhecidos na literatura para descrever o comportamento elasto-plástico de materiais dúcteis. A Figura 1.1 mostra alguns exemplos da utilização destes modelos matemáticos, pela indústria de uma forma geral, para concepção e otimização de projetos de estruturas metálicas. Tais modelos podem ser utilizados tanto na caracterização do material (Figura 1.1a), como na análise de

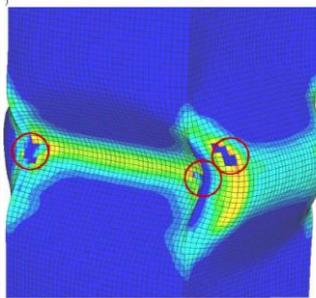
tenções de componentes mecânicos (Figura 1.1b), na simulação da falha de uma estrutura (Figura 1.1c), na otimização de processos de fabricação (Figura 1.1d) e/ou de processos industriais (Figura 1.1e)



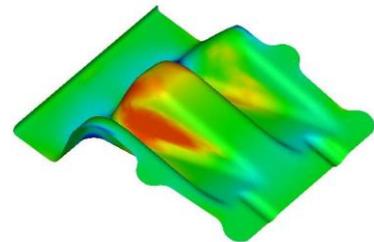
(a)



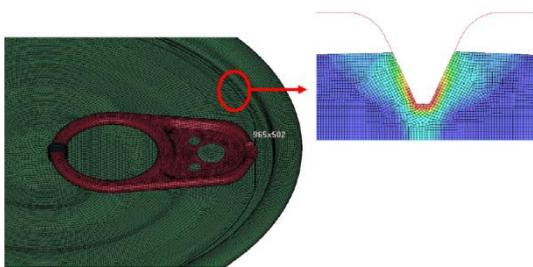
(b)



(c)



(d)



(e)



Figura 1.1. Exemplos do uso de modelos constitutivos para descrever o comportamento elasto-plástico de estruturas e componentes mecânicos. Fonte: Bao (2004), (Bai, 2008) e Stoughton (2011).

1.1. A IMPORTÂNCIA E EVOLUÇÃO DA MECÂNICA DO DANO

Desde o trabalho pioneiro de Kachanov (1958), inúmeros outros desenvolvimentos em mecânica aplicada foram feitos, no sentido de formular novos modelos constitutivos que sejam capazes de descrever a degradação interna de sólidos, de acordo com os princípios da mecânica do contínuo. Passado cinco décadas de pesquisa, significativos progressos foram observados e a chamada Mecânica do Dano Contínuo (MDC) surgiu como uma formulação alternativa para a introdução de novas variáveis de estado dentro dos modelos constitutivos (Lemaitre, 1985).

O comportamento do material é geralmente modelado por equações constitutivas, levando em consideração a sua deterioração progressiva. Esses modelos são baseados no pressuposto de que o dano interno inicia-se a partir de micro-trincas e pode ser eficazmente representado por uma ou mais variáveis internas associadas, que podem ser grandezas de natureza escalar, vetorial ou tensorial. Essas variáveis, chamadas de variáveis de dano, podem ser definidas como uma medida de defeitos dentro de um volume representativo elementar (VRE). A sua evolução deve ser definida através das relações termodinâmicas constitutivas, normalmente representadas por um sistema de equações diferenciais no tempo. Baseada na MDC, vários modelos constitutivos já foram propostos, tais como: Lemaitre (1985), para dano causado por escoamento plástico, Chaboche (1984) e Murakami & Ohmo (1981), para dano por desgaste, Krajeinovic & Fonseka (1981), para dano frágil, entre outros.

Nos últimos anos, a necessidade de se ter modelos robustos e confiáveis para serem utilizados em projetos de engenharia, aliados ao advento da popularização dos computadores digitais, provocou a progressiva evolução das técnicas numéricas. As melhorias constantes dos modelos numéricos e algoritmos associados, conjuntamente com o aumento significativo da capacidade de processamento versus o custo dos computadores, provocaram um enorme impacto na aceitação de técnicas numéricas dentro do meio acadêmico e o ambiente industrial. Os métodos numéricos, principalmente baseados no método de elementos finitos, têm sido continuamente desenvolvidos e aperfeiçoados, tanto para aplicações lineares como não-lineares. Particularmente, na solução de problemas não-lineares da mecânica dos sólidos, verificam-se avanços consideráveis em vários tópicos desta área de pesquisa. Em muitas áreas, os métodos numéricos atingiram um grau elevado de capacidade preditiva e, hoje,

são de grande ajuda para o projetista e um instrumento essencial para resolução de problemas reais de engenharia.

Durante o desenvolvimento inicial de algoritmos numéricos para a análise de tensões, a descrição constitutiva da resposta do material é dominada pelas teorias da elasticidade e elasto-(visco) plasticidade. Ao longo dos anos, as técnicas de elementos finitos inicialmente baseados nestes modelos constitutivos foram continuamente modificadas e adaptadas para fazer face a processos que envolvam deformações mais complexas, podendo incluir: grandes deflexões, deformações finitas, efeitos viscosos, entre outros. Em particular, os avanços feitos na simulação numérica de problemas de grandes deformações na presença de deformações finitas inelásticas (Peri'C & Owen, 2004), tiveram um grande impacto na simulação de processos de conformação mecânica.

Apesar desses avanços, várias questões continuam em aberto, como a modelação de problemas relacionados com falhas (fratura) de material, que resultam da progressiva deterioração micro estrutural associada com grandes deformações. Nesses casos, o desenvolvimento de novos e mais refinados modelos constitutivos merecem uma análise cuidadosa e, desta forma, o tema continua a ser uma excelente área de pesquisa e desenvolvimento.

Existem vários processos tecnológicos que muito se beneficiariam de um melhor conhecimento e quantificações dos diferentes fenômenos físicos que ocorrem próximos da ruptura de materiais dúcteis. O corte de metais, por exemplo, é um processo tecnológico utilizado na fabricação de um vasto número de produtos e é atualmente empregado por um elevado número de empresas. A importância deste processo é salientada pelo fato de que, quase todos os objetos que utilizamos em nossa sociedade possuem uma ou mais superfícies maquinadas. Devido à sua enorme utilização, a eficácia deste processo tem um impacto considerável na qualidade e custo dos produtos obtidos. Por exemplo, a compreensão do processo de retirada da aparas é de importância vital na seleção do material e projeto de ferramentas, bem como na garantia da precisão dimensional e integridade da superfície do produto final.

1.2. OBJETIVO DA TESE

Com base no contexto apresentado, este trabalho tem como objetivo o estudo detalhado e o aprimoramento do modelo de dano de Lemaitre (1985), com endurecimento e dano isotrópicos. O trabalho se inicia com o estudo do modelo original de Lemaitre, através de corpos de prova convencionais que resultem em diferentes níveis de triaxialidade. Com base nos resultados deste estudo, procura-se mostrar a falta de precisão desta formulação, no que se refere à previsão do correto momento (deslocamento) e local potencial para início da fratura, quando a condição de carregamento imposta se apresenta distante do ponto fixado como calibração dos parâmetros elasto-plásticos e de evolução da variável de dano, como: curva de endurecimento do material, expoente de dano e denominador de dano. Após esta análise preliminar, objetiva-se ajustar o modelo de Lemaitre, no que se refere a sua precisão e forte dependência do ponto de calibração. Para isto, propõe-se a criação de uma função denominadora de dano, em lugar do denominador de dano, que originalmente se apresenta como uma constante material.

Com esta modificação, propõe-se também a definição de um novo potencial de estado e potencial de dissipação para o modelo, mantendo assim a consistência termodinâmica da formulação. Uma nova lei de evolução para a variável de dano é então deduzida, bem como para as outras variáveis internas, como deformação plástica e variável associada ao endurecimento isotrópico.

Um novo modelo de integração numérica é sugerido para a formulação proposta, com base na metodologia da *decomposição do operador* (Simo *et al.*, 1990), e novas simulações numéricas são feitas, com o objetivo de demonstrar o ganho preditivo da nova formulação, no que se refere à determinação do correto deslocamento na fratura, bem como o local potencial para início da trinca.

1.3. ESCOPO DA TESE

Tendo como objetivo o aprimoramento do modelo de Lemaitre, no que se refere a sua precisão e dependência do ponto de calibração, na previsão da fratura em materiais dúcteis, este trabalho foi dividido nas seguintes partes: No Capítulo 1 é feito um breve

histórico da aplicabilidade da modelagem analítica para o projeto de componentes mecânicos e da previsão da falha em materiais metálicos, bem como a evolução e importância da mecânica do dano. Já no Capítulo 2 será feito um breve resumo dos conceitos relacionados à Mecânica do Contínuo, bem como dos fundamentos das leis da termodinâmica e mostrados detalhes da modelação constitutiva de materiais dúcteis. Considerando os principais tópicos, os conceitos da cinemática da deformação, tensão e equilíbrio, leis da termodinâmica, teoria constitutiva, princípio dos trabalhos virtuais e modelo de dano dúctil de Lemaitre, serão abordados. No Capítulo 3, é apresentada a estratégia de solução numérica implícita para o modelo original de Lemaitre, que é baseada na metodologia da *decomposição do operador*, resultando em um chamado preditor elástico e um corretor plástico. Além disso, o procedimento de calibração dos parâmetros materiais como a curva de encruamento, o expoente de dano e o denominador de dano, é apresentado, bem como uma série de simulações e resultados numéricos para faixa de triaxialidade compreendida entre 0 e 1, mostrando o desempenho do modelo original no que se refere a previsão do início da fratura dúctil. No Capítulo 4, é discutida a performance do modelo original e sua forte dependência da relação entre o ponto de calibração escolhido e a condição externa de carregamento. Uma proposta de aprimoramento do modelo de Lemaitre é sugerida, com base na modificação da lei de evolução da variável isotrópica de dano, no que se refere ao chamado denominador de dano, que agora passará a ser uma função do nível de triaxialidade e do chamado terceiro invariante normalizado. No Capítulo 5, é abordada uma nova estratégia de integração numérica para o modelo aperfeiçoado associativo e não associativo, de maneira a se manter o alto desempenho computacional do modelo original. No Capítulo 6, novas simulações numéricas são realizadas, levando em consideração dois conjuntos de ensaios experimentais para dois tipos de materiais distintos. O desempenho da nova proposta é então avaliado no que se refere à análise da curva de reação, evolução da deformação plástica equivalente e variável de dano, bem como o contorno do parâmetro de dano e previsão do potencial local para início da fratura. No Capítulo 7, são mostradas as conclusões encontradas, com base na capacidade preditiva da nova formulação, assim como são sugeridos novos tópicos para evolução da performance dos modelos com dano acoplado.

2. MECÂNICA DO CONTÍNUO, TERMODINÂMICA DOS SÓLIDOS E MODELAÇÃO CONSTITUTIVA

2.1. CINEMÁTICA DE DEFORMAÇÃO

Tendo como base a teoria relacionada com a descrição da cinemática de deformação, esta seção tem como finalidade apresentar um estudo que compreenda os conceitos de movimento e deformação, conforme o que se segue (ver Khan, 1995; Chadwick, 1999; Spencer, 2004; Bonet *et al.*, 2008).

2.1.1. Configuração e movimento de corpos contínuos

Como ponto de partida, considera-se um espaço Euclidiano tridimensional e um corpo contínuo, representado por Ω , na qual uma partícula, denotada por $\mathbf{p} \in \Omega$, é analisada em um dado instante de tempo t . Neste sentido, pode-se estabelecer que a chamada configuração de referência seja assumida como a configuração inicial e cada partícula material é então descrita como uma função das coordenadas de \mathbf{p} . Considerando agora a chamada configuração deformada, o corpo contínuo Ω , ocupa a região $\varphi(\Omega)$ com fronteira $\varphi(\partial\Omega)$ definida ao longo do mapa de deformação φ . Desta forma, a posição atual da partícula \mathbf{p} de Ω na configuração deformada pode ser assim definida:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{p}) , \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x} representa a posição atual (ou corrente), $\varphi(\cdot)$ é o chamado mapa de deformação e \mathbf{p} representa uma partícula contida em um corpo contínuo.

Por sua vez, o deslocamento da partícula \mathbf{p} , que aqui é então definido pelo vetor $\mathbf{u}(\mathbf{p})$, pode também ser escrito pela relação abaixo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) - \mathbf{p} , \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{u}(\cdot)$ representa o vetor deslocamento. Contudo, substituindo a Equação 2.1 na Equação 2.2, a configuração deformada $\varphi(\cdot)$, pode também ser reescrita como uma função da configuração inicial e do deslocamento da partícula $\mathbf{u}(\cdot)$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}) . \quad (2.3)$$

A Figura 2.1 representa a configuração inicial e deformada do corpo contínuo Ω , e também a chamada posição referência e atual (ou corrente) da partícula \mathbf{p} , considerando um deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{p})$.

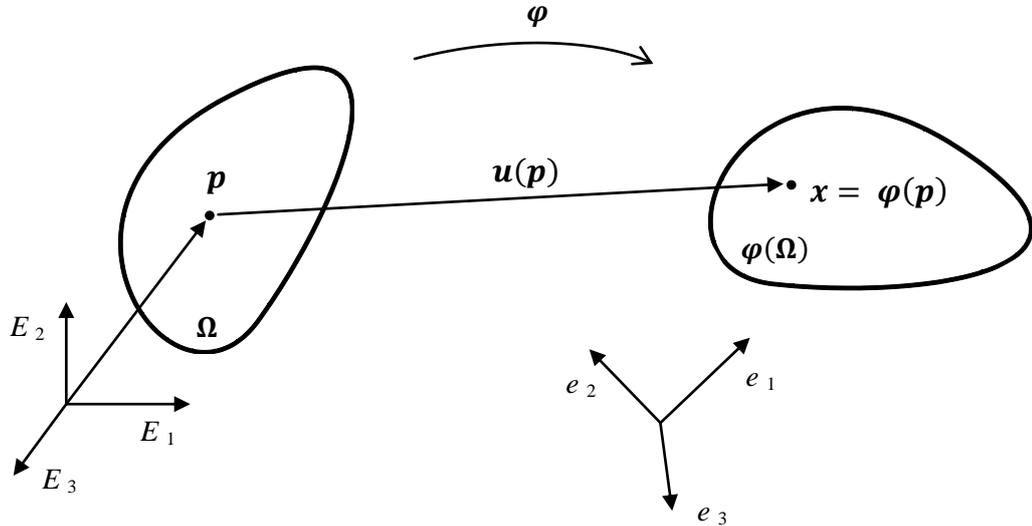


Figura 2.1. Configuração de um corpo deformado.

Assumindo agora uma deformação rígida como base, então a deformação de um corpo contínuo Ω , preserva a distância entre todas as partículas materiais do corpo e pode ser escrita como uma translação, uma rotação ou uma combinação de translação e rotação. Considerando primeiramente uma translação rígida, a deformação ocorre com o vetor de deslocamento constante, no qual pode ser representado por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{u} . \quad (2.4)$$

Por outro lado, considerando uma translação rígida, a deformação passa agora a ser matematicamente representada como:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) , \quad (2.5)$$

onde \mathbf{R} representa um tensor ortogonal característico ou o chamado tensor de rotação, e \mathbf{q} representa o ponto no qual o corpo contínuo Ω é rotacionado. Por outro lado, uma deformação é chamada rígida, considerando translação e rotação, se, e somente se, ela puder ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) + \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) , \quad (2.6)$$

onde a equação acima representa um mapa de deformação para uma translação rígida com deslocamento $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}$, sobreposto por uma rotação rígida de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre o ponto \boldsymbol{p} .

Considerando também a dependência do tempo sob a deformação de um corpo contínuo $\boldsymbol{\Omega}$, a qual pode ser designada como um movimento do corpo $\boldsymbol{\Omega}$. Assim, este movimento pode ser definido através da função $\boldsymbol{\varphi}$, de modo que em cada instante t , o mapa $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, t)$ é uma deformação do corpo contínuo $\boldsymbol{\Omega}$. Agora, considerando o movimento $\boldsymbol{\varphi}$, a posição \boldsymbol{x} , de uma partícula material \boldsymbol{p} , no tempo t , é expressa por:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}, t). \quad (2.7)$$

Similarmente ao que foi desenvolvido para deformação independente do tempo, a configuração deformada de um corpo contínuo $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\Omega}, t)$, descreve a região do espaço tridimensional ocupada pelo corpo $\boldsymbol{\Omega}$, no tempo t . Além disso, as posições atuais (ou correntes) dessas partículas são localizadas, geralmente, através das coordenadas \boldsymbol{x} com relação a uma base Cartesiana alternativa \boldsymbol{e}_i (ver Figura 2.1). Considerando o campo de deslocamento, o movimento pode ser então expresso por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}, t) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}, t), \quad (2.8)$$

onde $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}, t)$ representa o deslocamento da partícula \boldsymbol{p} no tempo t . Desde que em cada instante t , o mapa $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, t)$ seja um função bijetora por suposição, pontos materiais podem ser escritos como função do lugar que cada um ocupa em um determinado momento, por:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t), \quad (2.9)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ representa um mapa de deformação aqui denominado de mapa de referência. Em relação à análise, tendo como base uma deformação finita, nenhuma suposição é feita considerando a magnitude do deslocamento $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}, t)$. Na verdade, pode-se até exceder as dimensões iniciais do corpo, como no caso de conformação mecânica. Por outro lado, considerando a análise da deformação infinitesimal, o deslocamento $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}, t)$ é assumido como sendo pequeno em comparação com as dimensões do corpo contínuo e as mudanças geométricas podem ser, em princípio, ignoradas.

Dependência do tempo

Para problemas não-lineares, a deformação no tempo $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}, t)$, tem que ser contemplada. Considerando um movimento $\boldsymbol{\varphi}$, termos como a velocidade e a aceleração de uma partícula material \boldsymbol{p} , podem ser determinados através da primeira e segunda derivada do movimento com relação ao tempo. A Equação 2.10 representa ambos os termos como:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}, t)}{\partial t} \quad ; \quad \ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}, t) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}, t)}{\partial^2 t} \quad (2.10)$$

onde $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}, t)$ e $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}, t)$ representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivada do movimento com relação ao tempo. Usando o mapa de referência $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$, as seguintes funções podem ser também definidas:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t) \quad ; \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t), \quad (2.11)$$

onde \boldsymbol{v} e \boldsymbol{a} denotam a descrição espacial do campo de velocidade e do campo de aceleração, respectivamente.

2.1.2. Descrição material e espacial

Considerando deformações finitas, uma distinção criteriosa deve ser feita entre os sistemas de coordenadas que são escolhidos para descrever o comportamento do corpo contínuo $\boldsymbol{\Omega}$. Pode-se considerar, por uma questão de simplicidade, uma quantidade de tempo escalar dependente, α , definido sobre o corpo $\boldsymbol{\Omega}$. Assim:

(a) *Descrição material*: se o valor de α é definido como uma função das partículas materiais, \boldsymbol{p} , e o tempo, t , com relação ao domínio $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbb{R}^3$, então α pode ser chamado como um campo material, definido como:

$$\alpha_m(\boldsymbol{p}, t). \quad (2.12)$$

(b) *Descrição espacial*: por outro lado, se o valor de α é expresso como uma função de uma posição espacial, \boldsymbol{x} , e o tempo, t , com relação ao domínio $\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbb{R}^3$, então α pode ser chamado como um campo espacial, definido como:

$$\alpha_s(\boldsymbol{x}, t). \quad (2.13)$$

Considerando ambos, campos vetorial e tensorial, a definição acima pode também ser aplicada. As descrições material e espacial são alternativamente referidas como descrições Lagrangeanas e Eulerianas, respectivamente.

Gradiente material e espacial, divergente e derivada no tempo

Ao considerar um campo escalar α , os gradientes material e espacial podem ser definidos através das equações que se seguem:

$$\nabla_p \alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \alpha_m(\mathbf{p}, t) \quad ; \quad \nabla_x \alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha_s(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

onde $\nabla_p \alpha$ e $\nabla_x \alpha$ denotam, respectivamente, os gradientes material e espacial, no qual são derivadas de α com relação a \mathbf{p} e \mathbf{x} , tendo como t fixo. Em complemento, os divergentes material e espacial do campo vetorial \mathbf{r} são, respectivamente, dados por:

$$\text{div}_p \mathbf{r} = \text{tr}(\nabla_p \mathbf{r}) \quad ; \quad \text{div}_x \mathbf{r} = \text{tr}(\nabla_x \mathbf{r}). \quad (2.15)$$

Considerando agora um campo tensorial \mathbf{T} , os divergentes material e espacial, neste caso, são dados em coordenadas cartesianas por:

$$(\text{div}_p \mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial p_j} \quad ; \quad (\text{div}_x \mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

Similarmente, as derivadas no tempo da configuração material e espacial de α , representadas respectivamente por $\dot{\alpha}_m$ e $\dot{\alpha}_s$, são assim definidas:

$$\dot{\alpha}_m = \frac{\partial}{\partial t} \alpha_m(\mathbf{p}, t) \quad ; \quad \dot{\alpha}_s = \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

A derivada material no tempo $\dot{\alpha}_m$ mede a taxa de mudança de α para uma partícula material fixa \mathbf{p} . Por outro lado, a derivada espacial no tempo $\dot{\alpha}_s$ mede a taxa de mudança de α observada através de uma posição espacial fixa \mathbf{x} .

2.1.3. O gradiente de deformação

Considere um gradiente de deformação do movimento $\boldsymbol{\varphi}$, no qual é definido como uma relação entre quantidades antes da deformação e as quantidades correspondentes após ou durante a deformação. Matematicamente, o gradiente de deformação é representado por um tensor de segunda ordem, de acordo com a equação abaixo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = \nabla_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \mathbf{p}} \quad (2.18)$$

onde \mathbf{F} representa o gradiente de deformação. Considerando a Equação 2.5, o tensor de segunda ordem \mathbf{F} pode ser escrito como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{u} \quad (2.19)$$

onde \mathbf{I} representa o tensor identidade de segunda ordem. Contudo, o gradiente de deformação também pode ser escrito em função de componentes cartesianas, conforme mostrado a seguir:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \quad (2.20)$$

onde o termo x_i representa as componentes de \mathbf{x}_t . Além disso, considerando o mapa de referência, o tensor \mathbf{F} passa a ser descrito por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = [\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}, t)]^{-1} = [\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}]^{-1} \quad (2.21)$$

Definido um volume infinitesimal $d\mathbf{V}$, o qual pode ser escrito como função dos vetores infinitesimais $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$ e $d\mathbf{c}$, partindo da partícula material \mathbf{p} , na chamada configuração de referência (ver Figura 2.2). Desta forma, o termo $d\mathbf{V}$ é então matematicamente expresso por $(d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c}$.

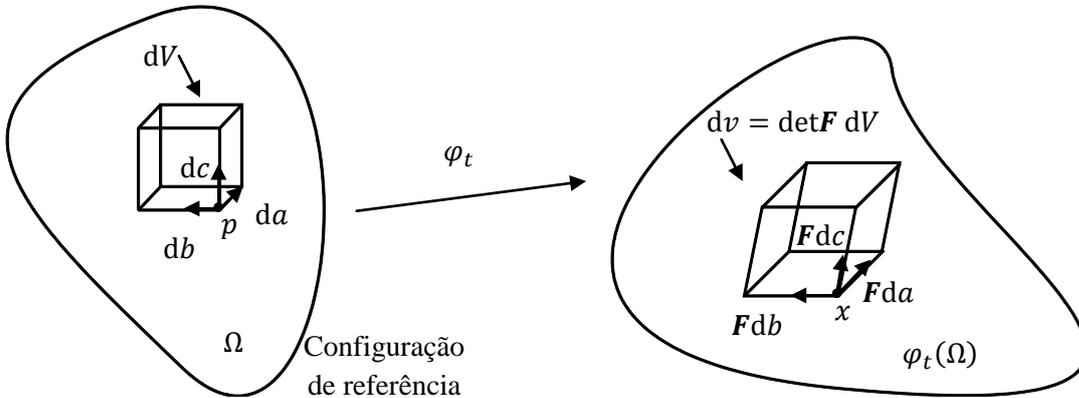


Figura 2.2. Definição do determinante do gradiente de deformação.

Considerar agora o mapa de deformação $\boldsymbol{\varphi}_t$, aplicado sobre o volume infinitesimal dV (ver Figura 2.2). Então, o volume infinitesimal deformado pode ser expresso matematicamente como:

$$dv = (\mathbf{F} d\mathbf{a} \times \mathbf{F} d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{F} d\mathbf{c}. \quad (2.22)$$

Tomando uso de algumas manipulações matemáticas, o determinante do gradiente de deformação pode ser então descrito pela Equação 2.23, no qual representa o volume após a deformação por unidade de volume de referência, matematicamente representado por:

$$\det \mathbf{F} = \frac{(\mathbf{F} \, d\mathbf{a} \times \mathbf{F} \, d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{c}}{(d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c}} = \frac{dv}{dV} \quad (2.23)$$

onde o termo $\det \mathbf{F}$ representa o determinante do gradiente de deformação. Na Mecânica do Contínuo, o termo J é então freqüentemente empregado para representar o determinante de \mathbf{F} . Assim:

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (2.24)$$

Desta forma, ao se fazer uma análise na Equação 2.19, é possível concluir que, se $J = 0$, então o volume infinitesimal entrou em colapso dentro de uma partícula material, o que representa uma situação fisicamente inaceitável. Considerando a configuração de referência, nesse caso, o gradiente de deformação passa a ser igual ao tensor identidade de segunda ordem, $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, e, conseqüentemente, o determinante de \mathbf{F} é igual à unidade $J = 1$. Desta maneira, a configuração com $J < 0$ não pode ser estabelecida, partindo da configuração de referência, sem passar em algum momento por $J = 0$. Assim, para qualquer configuração deformada de um corpo contínuo, J satisfaz a condição:

$$J > 0. \quad (2.25)$$

Decomposição isocórica e volumétrica do gradiente de deformação

Considerando a decomposição do gradiente de deformação, o tensor \mathbf{F} também pode, localmente, ser escrito como uma deformação puramente volumétrica seguido por uma deformação isocórica, ou uma deformação isocórica seguida por uma deformação puramente volumétrica. Matematicamente, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação pode ser assim expressa:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{iso}} \mathbf{F}_{\text{v}} = \mathbf{F}_{\text{v}} \mathbf{F}_{\text{iso}}, \quad (2.26)$$

onde a deformação puramente volumétrica \mathbf{F}_{v} é definida por:

$$\mathbf{F}_{\text{v}} \equiv (\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}, \quad (2.27)$$

e a componente isocórica \mathbf{F}_{iso} , a qual também é chamada de volume constante ou unimodular, é expressa por:

$$\mathbf{F}_{\text{iso}} \equiv (\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{F}. \quad (2.28)$$

É importante destacar que, por definição, \mathbf{F}_V corresponde de fato a uma deformação puramente volumétrica, desde que:

$$\det \mathbf{F}_V = \left[(\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \right]^3 \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}. \quad (2.29)$$

Neste caso, \mathbf{F}_V produz a mesma mudança de volume que \mathbf{F} . Por outro lado, a componente isocórica, que representa uma deformação a volume constante, é expressa por:

$$\det \mathbf{F}_{\text{iso}} = \left[(\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \right]^3 \det \mathbf{F} = 1. \quad (2.30)$$

2.1.4. Decomposição polar: alongamentos e rotação

O gradiente de deformação \mathbf{F} pode ser também decomposto em termos de seus componentes de alongamento e rotação, através da aplicação da chamada decomposição polar, a qual é representada por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (2.31)$$

onde \mathbf{U} é o tensor de alongamento à direita, com base na configuração de referência, e \mathbf{V} é o tensor de alongamento à esquerda, o qual é representado na chamada configuração atual (ou corrente). O tensor de segunda ordem \mathbf{R} representa um tensor ortogonal característico, que é um tensor de rotação local, conectando ambas as configurações. Os tensores de alongamento à direita e à esquerda podem ser relacionados através do tensor de rotação por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad (2.32)$$

onde o termo \mathbf{R}^T representa a transposta do tensor de rotação. Além disso, as Equações 2.33 e 2.34, abaixo, relacionam os tensores \mathbf{F} , \mathbf{U} e \mathbf{V} , na forma:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \quad ; \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}}, \quad (2.33)$$

onde \mathbf{C} e \mathbf{b} são denominados de tensor de Cauchy-Green à direita e à esquerda, respectivamente. Contudo, ambos os tensores de Cauchy-Green são definidos como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad ; \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (2.34)$$

onde, \mathbf{F}^T representa a transposta do gradiente de deformação.

Ambos os tensores de alongamento, os quais foram designados por \mathbf{U} e \mathbf{V} , são tensores simétricos. Assim, considerando o chamado “*Teorema espectral*”, ambos os tensores admitem a decomposição espectral e podem ainda ser escritos como:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad ; \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (2.35)$$

onde o conjunto de parâmetros $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ são os autovalores de \mathbf{U} e \mathbf{V} chamados de alongamento principal. Os vetores \mathbf{N}_i e \mathbf{n}_i definem os autovetores unitários de \mathbf{U} e \mathbf{V} respectivamente. As tríades $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ e $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ formam bases ortogonais para o espaço \mathbf{U} de vetores em \mathbb{R}^3 . Eles são chamados, respectivamente, por tríades Lagrangeana e Euleriana e definem as direções principais Lagrangeana e Euleriana.

Ao efetuar a substituição da Equação 2.32 na Equação 2.35, é possível determinar a relação entre os autovetores de \mathbf{V} e \mathbf{U} , o que significa que cada vetor \mathbf{n}_i se difere do correspondente \mathbf{N}_i por uma rotação \mathbf{R} :

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{R} \mathbf{n}_i. \quad (2.36)$$

A decomposição espectral dos tensores de alongamento à direita e à esquerda implica que, para qualquer deformação, o alongamento local de uma partícula material pode ser sempre expresso como uma superposição de alongamentos ao longo de três direções mutuamente ortogonais.

2.1.5. Medidas de deformação

Considerando uma vizinhança infinitesimal de uma partícula material genérica \mathbf{p} , rotações puras podem ser distinguidas de alongamento puro por meio da decomposição polar do gradiente de deformação \mathbf{F} . Além disso, sujeitas a ação de rotações puras, as distâncias entre as partículas dentro desta vizinhança permanecem fixas. Neste caso, a diferença entre a vizinhança deformada de \mathbf{p} e sua configuração de referência é uma deformação rígida.

Por outro lado, o alongamento puro é caracterizado por \mathbf{U} ou \mathbf{V} e altera a distância entre partículas materiais. Para quantificar a deformação, que representa o valor de quanto o tensor \mathbf{U} ou \mathbf{V} se afasta de uma deformação rígida \mathbf{I} , alguns tipos de medidas

de deformação são definidas. A definição de uma medida de deformação é um tanto arbitrária, e uma escolha específica geralmente é ditada por conveniência matemática e física. Uma família de tensores de deformação Lagrangeana, a qual é baseada na tríade Lagrangeana, é expressa por:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), & m \neq 0 \\ \ln[\mathbf{U}], & m = 0 \end{cases}, \quad (2.37)$$

onde m é um número real e $\ln[\mathbf{U}]$ denota o tensor logarítmico do tensor de alongamento à direita \mathbf{U} . Considerando a decomposição espectral, a expressão acima pode ser também reescrita como:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad (2.38)$$

onde o termo $f(\lambda_i)$ é definido como se segue:

$$f(\lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1), & m \neq 0 \\ \ln[\lambda_i], & m = 0 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Considerando uma família de tensores de deformação Lagrangeana, tem-se: o tensor de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}^{(2)}$, o tensor de deformação de Biot, onde $m = 1$, e os tensores de deformação de Hencky ($m = 0$) e Almansi ($m = -2$). Pode-se verificar que para algum valor de m , o tensor tensão associado desaparece se, e somente se, o gradiente de deformação representar, localmente, uma deformação rígida:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}. \quad (2.40)$$

A mesma representação estabelecida acima também pode ser aplicada para definir tensores que mensuram deformação ao longo das direções Eulerianas principais ou tensores de deformação Euleriana. Baseado no tensor de alongamento à esquerda, a contrapartida Euleriana da família Lagrangeana de medidas de deformação é definida por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}), & m \neq 0 \\ \ln[\mathbf{V}], & m = 0 \end{cases}, \quad (2.41)$$

ou, através da tríade Euleriana:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.42)$$

Uma relação entre tensores de deformação Lagrangeana e Euleriana pode ser possível e expressa matematicamente através da equação abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{R} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{R}^T . \quad (2.43)$$

A equação estabelece que ambos os tensores de deformação se diferenciam por uma rotação local \mathbf{R} .

2.1.6. Gradiente de velocidade: Taxa de deformação e decomposição

A Equação 2.11 representa a velocidade, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, como uma função das coordenadas espaciais. A derivada desta expressão em relação às coordenadas espaciais define o chamado tensor de gradiente de velocidade, como se segue:

$$\mathbf{l} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} , \quad (2.44)$$

onde \mathbf{l} representa o tensor do gradiente de velocidade. Tomando mão da regra da cadeia, o gradiente de velocidade pode ser escrito como:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.45)$$

O tensor \mathbf{l} pode também ser decomposto em suas partes simétrica e não-simétrica “*skew*”. Ambas as partes são nomeadas como tensor da taxa de deformação, \mathbf{d} , e tensor rotativo “*spin*”, \mathbf{w} , e são definidos como:

$$\mathbf{d} = \text{sym}(\mathbf{l}) \quad ; \quad \mathbf{w} = \text{skew}(\mathbf{l}) . \quad (2.46)$$

As notações abaixo também são usadas para representar ambas as partes do tensor do gradiente de velocidade:

$$\text{sym}(\cdot) = \frac{1}{2} [(\cdot) + (\cdot)^\square] \quad ; \quad \text{skew}(\cdot) = \frac{1}{2} [(\cdot) - (\cdot)^\square] . \quad (2.47)$$

2.1.7. Movimento de corpo rígido e objetividade sobrepostos

O conceito de objetividade pode ser entendido através do estudo do efeito de um movimento de corpo rígido sobreposto à configuração deformada. Do ponto de vista de um observador parado, para outro rotacionando juntamente com um sólido, muitas grandezas que descrevem o comportamento do sólido permanecem inalteradas. Tais

quantidades, como a distância entre duas partículas ou o estado de tensão no corpo, entre outros, são ditas a ser objetivo (ver Holzapfel, 2000).

Embora a natureza intrínseca destas quantidades se mantenha inalterada, sua descrição espacial pode mudar. Considera-se um vetor elementar $d\mathbf{p}$ na configuração inicial que deforma para $d\mathbf{x}$, e subsequente rotaciona para $d\check{\mathbf{x}}$, representado na Figura 2.3.

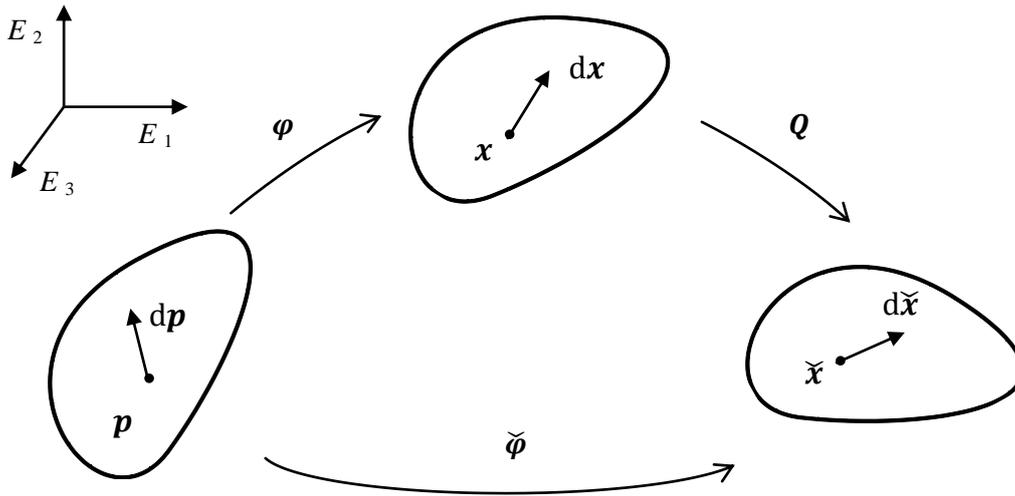


Figura 2.3. Sobreposição de movimento de corpo rígido.

A relação entre esses vetores elementares pode ser estabelecida por:

$$d\check{\mathbf{x}} = Qd\mathbf{x} = \mathbf{QF}d\mathbf{p}, \quad (2.48)$$

onde \mathbf{Q} denota um tensor ortogonal descrevendo a sobreposição da rotação de corpo rígido. Mesmo que o vetor $d\check{\mathbf{x}}$ seja diferente de $d\mathbf{x}$, suas magnitudes são consideradas iguais. Neste sentido, é possível dizer que $d\mathbf{x}$ é objetiva tomando-se movimentos de corpo rígido. Essa definição é também estendida para algum vetor \mathbf{a} que transforma de acordo com $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{Qa}$. Da Equação 2.48, é possível notar que os gradientes de deformação, com relação às configurações atual e rotacionada, são relacionados por:

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{QF} \quad (2.49)$$

Desta forma, o próximo passo consiste em estender a definição de objetividade, para tensores de segunda ordem. Tensores de segunda ordem objetiva, \mathbf{G} , transformam como:

$$\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T. \quad (2.50)$$

Obviamente, tensores materiais (definidos na configuração referência), como \mathbf{C} e \mathbf{E} , mantêm-se inalterados por sobreposição de movimentos de corpo rígido.

2.2 TENSÃO E EQUILÍBRIO

Os conceitos de tensão e equilíbrio necessitam ser introduzidos para um corpo deformável sujeito a um movimento finito (Bonet *et al.*, 2008, De Souza Neto *et al.*, 2008). Pode-se constatar que, até a presente seção, nenhuma referência foi feita às forças e como elas são transferidas no âmbito dos corpos contínuos. Considerando a descrição das forças de superfície, os conceitos de tensão, bem como as diferentes formas de quantificá-la, também são aqui apresentados. Por exemplo, o axioma de Cauchy, que é uma importante definição para se descrever as forças de superfícies, estabelece que: Primeiramente, considera-se um corpo Ω em uma configuração arbitrária deformada. Adota-se então \mathcal{S} , como sendo uma superfície orientada de Ω , com vetor unitário normal \mathbf{n} , em um ponto \mathbf{x} (ver Figura 2.4).

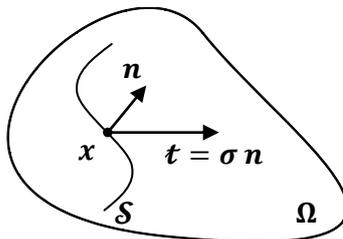


Figura 2.4. Forças de superfícies. Tensor de Cauchy.

Assim, o axioma de Cauchy estabelece que: para \mathbf{x} , o vetor tensão \mathbf{t} depende da superfície de contato \mathcal{S} , apenas através do vetor unitário \mathbf{n} , normal a superfície no ponto \mathbf{x} . Ou seja, tem o mesmo valor e a mesma direção para todas as superfícies que passam por \mathbf{x} e que tenham a mesma norma \mathbf{n} . Essa força (por unidade de área) é chamada de vetor de tensão de Cauchy e é representado por:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}), \quad (2.51)$$

com dependência de \mathbf{x} e do tempo omitidas por conveniência de notação. Se \mathcal{S} pertence à fronteira de Ω , então o vetor de tensão de Cauchy representa a força de contato exercida pelo meio sobre Ω .

2.2.1 O tensor tensão de Cauchy

A dependência da força de superfície \boldsymbol{t} sobre a normal \boldsymbol{n} é linear. Isto implica que existe um campo de tensão $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ no qual o vetor tensão de Cauchy é dado por:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} . \quad (2.52)$$

O termo $\boldsymbol{\sigma}$ é então chamado de tensor tensão de Cauchy e é um tensor simétrico, onde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (2.53)$$

e o termo $\boldsymbol{\sigma}^T$ representa a transposta do tensor tensão de Cauchy.

Tensões desviadoras e hidrostática

Tendo como objetivo a modelagem constitutiva, muitas vezes é conveniente se decompor o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ em duas partes: sendo uma componente esférica e outra desviadora, no qual é representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I}, \quad (2.54)$$

onde o termo p é um escalar e representa a chamada pressão hidrostática, que é definida por:

$$p \equiv \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.55)$$

e a componente \boldsymbol{S} é um tensor cujo traço é igual a zero e denominado de tensor desviador, definido como:

$$\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{\sigma} - p\boldsymbol{I} = \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \right] : \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.56)$$

onde \mathbb{I} representa o tensor identidade de quarta ordem. O tensor das tensões esféricas pode ser também definido através da seguinte operação:

$$p\boldsymbol{I} = \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.57)$$

A pressão hidrostática p pode ser definida como um invariante do tensor tensão.

Objetividade do tensor

Uma vez que o tensor das tensões de Cauchy é de fundamental importância para o estabelecimento de qualquer equilíbrio ou equação constitutiva, é importante saber se $\boldsymbol{\sigma}$

é objetiva, como definido previamente. Considerando-se as transformações do vetor normal e do vetor de tração implícito no movimento sobreposto de corpo rígido \mathbf{Q} como:

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{t}}(\check{\mathbf{n}}) &= \mathbf{Q}\mathbf{t}(\mathbf{n}) \\ \check{\mathbf{n}} &= \mathbf{Q}\mathbf{n}\end{aligned}\tag{2.58}$$

com a dependência de \mathbf{x} e do tempo omitidos por conveniência notacional. Usando a relação entre o vetor tração e o tensor tensão (Equação 2.52), em conjunto com as quantidades acima (Equação 2.58), tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T .\tag{2.59}$$

Assim, a rotação de $\boldsymbol{\sigma}$ dada pela equação acima está de acordo com a definição de objetividade de um tensor de segunda ordem.

2.2.2 Alternativas para definição do tensor tensão

Inúmeras alternativas para definir o tensor tensão têm sido propostas na literatura. Muitas destas definições passam a não ter um significado físico:

O tensor tensão de Kirchhoff: muitas vezes é conveniente se trabalhar com o então chamado tensor tensão de Kirchhoff, $\boldsymbol{\tau}$, o qual se diferencia do tensor de Cauchy apenas razão volumétrica J , e é então escrito como:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} .\tag{2.60}$$

Devido à simétrica de $\boldsymbol{\sigma}$, o tensor tensão de Kirchhoff é também simétrico.

O primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff: o vetor tração $\check{\mathbf{t}}$ mede a força exercida através da superfície do material por unidade de área deformada. Sabendo que em muitas situações a configuração deformada de Ω não é conhecida previamente, assim, nestes casos, é conveniente se definir o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff como:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} .\tag{2.61}$$

Essa definição é derivada a partir do vetor contrapartida $\bar{\mathbf{t}}$ de \mathbf{t} que mede, no ponto de interesse, a força atual (ou corrente) por unidade de área na configuração de referência. O tensor \mathbf{P} é comumente denominado como tensão nominal ou de engenharia. Nota-se que, diferentemente do tensor de Cauchy, \mathbf{P} geralmente é não-simétrico.

O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff: por outro lado, é possível escrever um tensor tensão material totalmente simétrico, conhecido como o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , e definido por:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.62)$$

Esta definição, muitas vezes, representa uma medida de tensão útil na mecânica computacional e na formulação de equações constitutivas, em particular para sólidos. Apesar da conveniência matemática, ele não admite uma interpretação física em termos de tensões de superfície.

2.2.3 Os invariantes do tensor tensão

Os invariantes são quantidades cujos valores não variam com o sistema de eixos considerado (Holzapfel, 2000). É habitual se representar os invariantes do tensor das tensões (Equação 2.54) pela letra “ I ” e os invariantes do tensor das tensões desviadoras pela letra “ J ” (Equação 2.56). Assim, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão e do tensor desviador são determinados de acordo com as Equações 2.63 e 2.64, como se segue:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ I_2 &= \frac{1}{2}[\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)] \\ I_3 &= \det(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

e,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S} \\ J_3 &= \det(\mathbf{S}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

É importante destacar que, como o tensor desviador \mathbf{S} por definição (Equação 2.56), é um tensor cujo traço é igual a zero, seu primeiro invariante é necessariamente igual nulo.

2.3 LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

Para se abordar as leis fundamentais da termodinâmica, primeiramente são necessárias introduzir os campos escalares θ , e , s e r definidos sobre $\boldsymbol{\Omega}$, o qual denota a

temperatura, energia interna específica, entropia específica e densidade de produção de calor, respectivamente (ver Spencer, 2004; Bonet *et al.*, 2008, De Souza Neto *et al.*, 2008). Em adição, \mathbf{f} e \mathbf{q} representam os campos vetoriais correspondentes a força no corpo (força por unidade de volume na configuração deformada) e o fluxo de calor, respectivamente.

2.3.1 Conservação da massa

O postulado da conservação da massa exige que:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.65)$$

onde $\operatorname{div}_x \dot{\mathbf{u}}$ representa o divergente espacial de $\dot{\mathbf{u}}$.

2.3.2 Equilíbrio de momento

O equilíbrio de momento pode ser representado matematicamente pela equação abaixo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \dot{\mathbf{u}} & \text{em } \varphi(\Omega) \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} & \text{em } \varphi(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde o equilíbrio (ou balanço) de momento é expresso na forma local. O termo \mathbf{n} é o vetor unitário normal para fora do limite deformado $\varphi(\partial\Omega)$ de Ω , \mathbf{t} é o limite do campo do vetor de tração em $\varphi(\partial\Omega)$. As equações de balanço de momento acima são formuladas na configuração espacial (deformada). Equivalentemente, as equações podem ser expressas na configuração de referência (material) de Ω em termos do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, como:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_p \mathbf{P} + \bar{\mathbf{f}} &= \bar{\rho} \dot{\mathbf{u}} & \text{em } \Omega \\ \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{P} \mathbf{m} & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}, \quad (2.67)$$

onde $\operatorname{div}_p \mathbf{P}$ representa o divergente material, $\bar{\mathbf{f}}$ é a força de corpo medida por unidade de volume na configuração de referência, $\bar{\rho}$ é a densidade na configuração de referência, no qual pode ser escrita como:

$$\bar{\rho} = J\rho, \quad (2.68)$$

$\bar{\mathbf{t}}$ é a força de tração de superfície por unidade de área na configuração referência e \mathbf{m} é a normal para fora do limite de Ω com relação a sua configuração de referência.

2.3.3 Primeira lei da termodinâmica

O primeiro princípio da termodinâmica postula a conservação de energia. Antes de se estabelecer este princípio, é conveniente introduzir o seguinte produto:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} , \quad (2.69)$$

no qual representa a energia de tensão por unidade de volume na configuração deformada de um corpo contínuo. O primeiro princípio da termodinâmica é matematicamente representado pela equação:

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \operatorname{div}_x \mathbf{q} . \quad (2.70)$$

A equação acima representa que a taxa de energia interna por unidade de volume na configuração deformada tem que ser igual à soma da energia de tensão e a produção de calor por unidade de volume na configuração deformada, menos o divergente espacial do fluxo de calor.

2.3.4 Segunda lei da termodinâmica

O segundo princípio da termodinâmica postula a irreversibilidade da produção de entropia e é expresso por meio da seguinte desigualdade:

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div}_x \left[\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0 \quad (2.71)$$

2.3.5 Desigualdade de Clausius-Duhem

Considerando o primeiro e segundo princípios estabelecidos acima, a desigualdade de Clausius-Duhem é determinada através da combinação de ambos os princípios. Com a utilização de algumas manipulações matemáticas, é possível se escrever:

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div}_x \left[\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \operatorname{div}_x \mathbf{q}) \geq 0 . \quad (2.72)$$

A introdução da energia específica livre ψ , a qual também é conhecida como energia específica de Helmholtz por unidade de massa, é definida como:

$$\psi = e - \theta s . \quad (2.73)$$

A Equação 2.73 pode ainda ser reescrita de acordo com o que se segue:

$$\operatorname{div}_x \left[\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] = \frac{1}{\theta} \operatorname{div}_x \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_x \theta . \quad (2.74)$$

Assim, substituindo a Equação 2.73 na desigualdade de Clausius-Duhem (Equação 2.72) é possível se determinar:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 , \quad (2.75)$$

onde o termo \mathbf{g} é definido como $\mathbf{g} = \nabla_x \theta$.

2.4 TEORIA CONSTITUTIVA

Os princípios de equilíbrio apresentados até agora são válidos para qualquer corpo contínuo, independentemente de que material o corpo é feito. Com o intuito de se estabelecer uma diferença entre os vários tipos de materiais, a modelagem constitutiva deve ser então introduzida. Assim, nesta seção, o uso de variáveis internas para formular modelos constitutivos de materiais dissipativos é apresentado (ver Khan, 1995; Bonet *et al.*, 2008, De Souza Neto *et al.*, 2008).

2.4.1 Termodinâmica com variáveis internas

Uma forma eficiente para se descrever o comportamento constitutivo dissipativo é a adoção da chamada termodinâmica com variáveis internas. O ponto de partida deste estudo está na hipótese de que em algum instante do processo termodinâmico, o estado termodinâmico (definido por $\boldsymbol{\sigma}$, ψ , s e \mathbf{q}), para um dado ponto \mathbf{p} , pode ser completamente determinado através do conhecimento de um número finito de variáveis de estado. O estado termodinâmico depende somente dos valores instantâneos das variáveis de estado e não dos valores históricos passados. Essa hipótese está intimamente ligada com a suposição da existência de um estado (fictícia) de equilíbrio termodinâmico conhecido como o estado local que acompanha (Kestin & Bataille, 1977), descrito pelo valor atual (corrente) das variáveis de estado. Em outras palavras, todo processo é considerado como sendo uma sucessão de estados de equilíbrio. Portanto, apesar do sucesso da teoria do uso de variáveis internas em numerosos campos da física do contínuo, fenômenos induzidos por rápidas ações externas (para escalas de tempo comparadas às vibrações dos átomos), que envolvem estados distantes do equilíbrio termodinâmico, são excluídos da representação pela teoria de variáveis internas.

Variáveis de estado

Assumindo que em algum instante t , o estado termodinâmico em um ponto é definido através do conjunto de variáveis de estado, como:

$$\{\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}\}, \quad (2.76)$$

onde os termos \mathbf{F}, θ e \mathbf{g} são valores instantâneos do gradiente de deformação, temperatura e gradiente de temperatura. O termo $\boldsymbol{\alpha}$ representa o conjunto de variáveis internas, em geral, com natureza escalar, vetor ou tensor associadas com o mecanismo de dissipação mecânica, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_k$. Onde k representa o número de variáveis internas consideradas no processo.

Potencial termodinâmico: Equação constitutiva

Seguindo as hipóteses mostradas acima, assume-se que a energia específica livre possui a seguinte forma:

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.77)$$

de modo, sua taxa de mudança é dada por:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k, \quad (2.78)$$

onde o somatório em k está implícito. Nesse caso, usando a seguinte definição para a energia de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}}, \quad (2.79)$$

pode-se obter a expressão para a desigualdade de Clausius-Duhem, escrita como:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \quad (2.80)$$

Equivalentemente, em termos de energia por unidade de volume na configuração referência, tem-se:

$$\left(\mathbf{P} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} - \bar{\rho} \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \quad (2.81)$$

A Equação 2.81 deve ser válida para qualquer par de funções $\{\dot{\mathbf{F}}(t), \dot{\theta}(t)\}$. Isto implica nas seguintes equações constitutivas conhecidas:

$$\mathbf{P} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.82)$$

para o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff e a entropia. A Equação 2.82 é equivalente às seguintes relações constitutivas para os tensores tensão de Cauchy e Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad \boldsymbol{\tau} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.83)$$

Forças termodinâmicas

Para cada variável interna α_k do conjunto de variáveis $\boldsymbol{\alpha}$, define-se a sua conjugada força termodinâmica da seguinte forma:

$$A_k \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} \quad (2.84)$$

onde A_k representa a força termodinâmica associada à variável interna α_k . Com essa definição e as identidades (ver Equação 2.82), a desigualdade de Clausius-Duhem pode ser reescrita como:

$$-A_k \dot{\alpha}_k - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.85)$$

Para as próximas definições, a seguinte notação é adotada para o conjunto de forças termodinâmicas:

$$\mathbf{A} \equiv \{A_k\}. \quad (2.86)$$

Dissipação. Evolução das variáveis internas

Com o objetivo de se caracterizar completamente um modelo constitutivo, leis complementares associadas com os mecanismos de dissipação são requeridas. Destacadamente, equações constitutivas para as variáveis de fluxo $\frac{1}{\theta} \mathbf{q}$ e internas $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ devem ser postuladas. Em um caso geral, assume-se que as variáveis de fluxo são funções dadas das variáveis de estado. Assim, as seguintes equações constitutivas são então postuladas:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= f(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \frac{1}{\theta} \mathbf{q} &= h(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.87)$$

A desigualdade de Clausius-Duhem, agora expressa pela Equação 2.85, deve valer para qualquer processo. Esta exigência impõe restrições sobre as formas possíveis para as funções gerais constitutivas f e h da Equação 2.87 (ver Coleman & Gurtin, 1967; Truesdell, 1969). Também é importante mencionar que, quando as variáveis internas de natureza vetorial ou tensorial estão presentes, é freqüentemente conveniente se reescrever a Equação 2.87 em termos das chamadas taxas objetivas e não das derivadas materiais no tempo de α . Taxas objetivas são insensíveis a movimentos de corpo rígido e podem ser essenciais na definição de quadros invariantes das leis de evolução para variáveis que representam estados físicos associados com as direções de material.

Potencial de dissipação: Dissipação normal

Uma forma eficaz de garantir que a Equação 2.85 seja satisfeita, consiste em postular a existência de um valor escalar potencial de dissipação da forma:

$$\Xi = \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{g}; \mathbf{F}, \theta, \alpha), \tag{2.88}$$

onde as variáveis de estado \mathbf{F} , θ e α aparecem como parâmetros. O potencial Ξ é assumido convexo com relação a cada A_k e \mathbf{g} , não negativo e nulo na origem, $\{\mathbf{A}, \mathbf{g}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$. Em adição, a hipótese de dissipação normal é introduzida, o que implica que as variáveis de fluxo podem ser determinadas através das seguintes leis:

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \Xi}{\partial A_k}, \quad \frac{1}{\theta} \mathbf{q} = -\frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{g}}. \tag{2.89}$$

Um modelo constitutivo, que é definido pelas Equações 2.77, 2.82 e 2.89, satisfaz, em princípio, a desigualdade de dissipação. No entanto, deve-se notar que a descrição constitutiva por meio de potenciais convexos, como descritos acima, não é uma consequência da termodinâmica, mas sim uma ferramenta para a formulação de equações constitutivas sem violar as leis da termodinâmica. Exemplos de modelos constitutivos suportados pela evidência experimental, que não admitem a representação por meio de potenciais de dissipação, são discutidos por Onat & Leckie (1988).

2.4.2 Abordagens fenomenológicas e micro-mecânicas

O sucesso de um modelo constitutivo formulado para descrever o comportamento de um determinado material depende fundamentalmente da escolha de um conjunto

adequado de variáveis internas. Considerando que nenhum modelo plausível seja geral o suficiente para descrever a resposta de um material em todos os processos, deve-se ter em mente que a escolha de variáveis internas deve ser guiada não só pelo material específico em questão, mas também as variáveis de processo material. Em geral, devido à dificuldade na identificação dos mecanismos de dissipação de base, a escolha do conjunto apropriado de variáveis internas é um pouco sutil e tende a ser enviesada pelas preferências e experiência do pesquisador.

Pode-se dizer que a modelagem constitutiva por meio de variáveis internas se baseia tanto em uma abordagem micro-mecânica e/ou fenomenológica. A abordagem micro-mecânica envolve a determinação dos mecanismos e variáveis relacionadas em níveis atômicos, moleculares ou cristalinos. Em geral, essas variáveis são quantidades discretas em seus contínuos (macroscópica) ou em contrapartida podem ser definidas por meio de técnicas de homogeneização. Por outro lado, a abordagem fenomenológica é baseada no estudo da resposta de um volume elementar representativo, o que significa que o elemento da matéria é grande o suficiente para ser considerado como um contínuo homogêneo. As variáveis internas, neste caso, são diretamente associadas com o comportamento dissipativo observado em um nível macroscópico, em termos de quantidades contínuas (como a deformação, a tensão, a temperatura, etc.). Apesar da natureza macroscópica de teorias derivadas com base na metodologia fenomenológica, deve-se esperar que "boas variáveis internas fenomenológicas sejam de alguma forma relacionadas com subjacentes mecanismos microscópicos (de Souza Neto *et al.*, 2005a).

2.4.3 A teoria puramente mecânica

Efeitos térmicos são ignorados em toda teoria constitutiva associada a este trabalho. Portanto, neste caso é conveniente resumir o conjunto de variáveis internas baseadas em equações constitutivas puramente mecânicas. Ao se remover os termos térmicos da teoria mostrada na seção acima, chega-se ao seguinte conjunto de equações constitutivas puramente mecânicas:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi(\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha}) \\
 \mathbf{P} &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \\
 \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{f}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha})
 \end{aligned}
 \tag{2.90}$$

onde se tem o potencial termodinâmico ψ , o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} e a taxa de evolução das variáveis internas $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$.

2.4.4 Problema constitutivo de valor inicial

Um problema básico constitutivo é definido da seguinte forma: "Dada o histórico do gradiente de deformação (e o histórico do gradiente de temperatura e a temperatura, se os efeitos térmicos são considerados), encontrar a energia livre e a tensão (mais entropia e fluxo de calor, no caso termo-mecânico), de acordo com a lei constitutiva". Se a abordagem da variável interna é adotada na formulação das equações constitutivas, o problema constitutivo genérico reduz-se a um problema mecânico de valor inicial, como se segue:

Problema 2.4.1 (O problema constitutivo mecânico de valor inicial)

Dados os valores iniciais das variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ e o histórico do gradiente de deformação

$$\mathbf{F}(t) \quad t \in [t_0, t], \quad (2.91)$$

determinar as funções $\mathbf{P}(t)$ e $\boldsymbol{\alpha}(t)$, para a primeira tensão de Piola-Kirchhoff e o conjunto de variáveis internas, tais como as equações constitutivas:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \bar{\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right|_t \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= f(\mathbf{F}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) \end{aligned} \quad (2.92)$$

sejam satisfeitas para $t \in [t_0, t]$.

2.5 EQUILÍBRIO NA FORMA FRACA: PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

A forma forte (local ou diferencial) do equilíbrio de momento foi estabelecida na seção 2.3 pelas equações 2.66 e 2.67. Nesta seção, as equações de equilíbrio (ou balanço) serão estabelecidas em sua correspondente forma fraca (global ou integral). O estabelecimento do equilíbrio fraco – o princípio dos trabalhos virtuais – é fundamental para a definição de um problema inicial de contorno básico e é o ponto inicial de problemas de elementos finitos (ver Bonet *et al.*, 2008; De Souza Neto *et al.*, 2008).

Novamente, considera-se o corpo Ω , no qual ocupa a região $\Omega \subset R^3$ com fronteira $\partial\Omega$ em sua configuração de referência, submetido às forças de corpo em seu interior e forças de superfície em sua fronteira. Em sua configuração deformada, Ω ocupa a região $\varphi(\Omega)$ com fronteira $\varphi(\partial\Omega)$ definida ao longo do mapa de deformação φ .

2.5.1 Configuração espacial

A versão espacial do princípio dos trabalhos virtuais estabelece que “o corpo Ω está em equilíbrio se, e somente se, o seu campo de tensão de Cauchy, σ , satisfaz a equação:

$$\int_{\varphi(\Omega)} [\sigma: \nabla_x \eta - (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \eta] dv - \int_{\varphi(\partial\Omega)} \mathbf{t} \cdot \eta da = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \quad (2.93)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{t} são forças de corpo por unidade de volume deformado e forças de superfícies por unidade de área deformada e \mathcal{V} é o espaço de deslocamentos virtuais de Ω , o que significa que o espaço de suficientemente regulares deslocamentos arbitrários.

$$\eta: \varphi(\Omega) \rightarrow \mathbf{u}. \quad (2.94)$$

2.5.2 Configuração material

As equações dos trabalhos virtuais podem ser equivalentemente expressas na configuração de referência de Ω . A versão material correspondente dos princípios dos trabalhos virtuais (ou de referência) estabelece que Ω está em equilíbrio se, e somente se, o campo da primeira tensão de Piola-Kirchhoff, \mathbf{P} , satisfaz:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{P}: \nabla_p \eta - (\bar{\mathbf{f}} - \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \eta] dv - \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \eta da = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \quad (2.95)$$

onde $\bar{\mathbf{f}} = J \mathbf{f}$ é a força de corpo na configuração de referência e $\bar{\mathbf{t}}$ é a força de superfície por unidade de área na configuração de referência. Portanto, o espaço do deslocamento virtual de Ω é definido como o espaço suficientemente regular de um campo de deslocamento arbitrário:

$$\eta: \Omega \rightarrow \mathbf{u}. \quad (2.96)$$

A versão material da equação dos trabalhos virtuais é obtida introduzindo, em sua contrapartida espacial, as identidades:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \qquad \nabla_x \mathbf{a} = \nabla_p \mathbf{a} \mathbf{F}^{-1} \qquad (2.97)$$

onde a segunda expressão é válida para um campo vetorial genérico \mathbf{a} , e fazendo uso da relação padrão (Gurtin, 1981):

$$\int_{\varphi(\Omega)} a(\mathbf{x}) dv - \int_{\Omega} J(\mathbf{p}) a(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p})) dv \qquad (2.98)$$

válido para qualquer campo escalar a .

2.6 MODELO DE DANO DE LEMAITRE

A descrição detalhada do modelo de dano dúctil de Lemaitre (ver Lemaitre, 1985:1996), com endurecimento cinemático e isotrópico e dano isotrópico, é apresentada a seguir.

2.6.1 Potencial de estado e relações de estado

O ponto de partida desta teoria baseia-se na hipótese de existência de um potencial de estado ou potencial termodinâmico, do qual são derivadas as leis de estado. A energia livre de Helmholtz é adotada como potencial termodinâmico e pode ser então definida, neste caso, como uma função do conjunto de variáveis $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D\}$ na forma:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D), \qquad (2.99)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ representa o tensor das deformações elásticas, r e D são variáveis internas escalares associadas, respectivamente, com o endurecimento isotrópico e dano isotrópico. O tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\beta}$ é a variável interna relacionada ao endurecimento cinemático. Através da Tabela 2.1, pode-se observar as variáveis de estado e suas respectivas forças termodinâmicas associadas.

Neste caso, assume-se o processo como sendo isotérmico, então a escolha das variáveis internas depende do fenômeno físico em estudo (elasticidade, endurecimento isotrópico e cinemático e dano).

Tabela 2.1. Variáveis de estado para a teoria de dano isotrópico.

Mecanismo	Tipo	Variáveis de estado		Variáveis associadas
		Observável	Internas	
Elasticidade	Tensorial	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
Plasticidade	Tensorial		$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	$-\boldsymbol{\sigma}$
Endurecimento isotrópico	Escalar		r	R
Endurecimento cinemático	Tensorial		$\boldsymbol{\beta}$	\boldsymbol{X}
Dano	Escalar		D	Y

Sob a hipótese de o dano afetar somente o comportamento elástico, a energia livre de Helmholtz pode ser expressa através da decomposição aditiva de dois potenciais de estado correspondentes, dados por:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D) = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(r, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.100)$$

onde ψ^{ed} e ψ^p são, respectivamente, a contribuição devido a elasticidade-dano e devido a plasticidade na energia liberada. O potencial de estado associado à elasticidade-dano é definido como:

$$\bar{\rho}\psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.101)$$

onde \mathbb{D} representa o tensor de elasticidade padrão. Uma prova clássica (Chaboche, 2007) permite eliminar todos os processos reversíveis da desigualdade de Clausius-Duhem e, portanto, as relações de estado são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.102)$$

no qual representa a lei elástica linear ou lei de Hooke. Equivalentemente, a lei elástica danificada pode ser escrita como:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.103)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ é chamado de tensor tensão efetivo, sendo relacionado com o tensor tensão de Cauchy através da expressão:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{1-D} \sigma . \quad (2.104)$$

A força termodinâmica associada com a variável interna de dano, Y , também deriva do potencial de estado, devido à elasticidade-dano e pode ser escrito como:

$$Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e , \quad (2.105)$$

ou, utilizando o inverso da lei elástica tensão/deformação, tem-se:

$$Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.106)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, é possível escrever Y como uma função da pressão hidrostática, p , e da tensão equivalente de von Mises, q :

$$-Y = \left[\frac{q^2}{6G(1-D)^2} + \frac{p^2}{2K(1-D)^2} \right] , \quad (2.107)$$

onde $G = E/2(1 + \nu)$ representa o módulo de cisalhamento e $K = E/3(1 - 2\nu)$ representa o módulo volumétrico. O termo ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de Young. Também, pode-se demonstrar que $-Y$ é igual à metade da energia de deformação elástica liberada devido à evolução do dano para uma tensão fixa (Chaboche, 2007). Partindo da lei elástica e sua diferenciação, tem-se:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{D}} : d\boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\partial \tilde{\mathbb{D}}}{\partial D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dD = 0 . \quad (2.108)$$

Sabendo que $\tilde{\mathbb{D}} = (1 - D) \mathbb{D}$ e rearranjando matematicamente, a Equação 2.108 pode ser então escrita como:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1-D} . \quad (2.109)$$

Definindo agora a variação da energia elástica, para uma tensão constante, tem-se:

$$dW^e = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^e , \quad (2.110)$$

e usando a definição da Equação 2.109, é suficiente para se calcular que:

$$\begin{aligned}
dW^e &= \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^e \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1-D} \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1-D)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1-D} \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dD
\end{aligned} \tag{2.111}$$

E finalmente, partindo da definição da Equação 2.105, é possível escrever:

$$-Y = \frac{1}{2} \frac{dW^e}{dD}. \tag{2.112}$$

Assim, da Equação 2.112, o termo $-Y$ pode também ser chamado de taxa de densidade de energia de deformação liberada devido ao dano, que é igual à metade da variação da densidade de energia de (Lemaitre, 1996). Isto também corresponde à taxa de energia de deformação liberada por uma trinca, J , comumente usada na teoria básica da Mecânica da Fratura.

Em relação ao potencial de estado plástico $\psi^p(r, \boldsymbol{\beta})$, ele pode ser considerado como a soma de diferentes contribuições relacionadas ao endurecimento isotrópico e cinemático. Assim, o potencial de estado plástico é dado pela soma de termos:

$$\bar{\rho}\psi^p(r, \boldsymbol{\beta}) = \bar{\rho}\psi^I(r) + \frac{a}{2}\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}, \tag{2.113}$$

onde a é uma constante material associada ao endurecimento cinemático, e a contribuição devido ao endurecimento isotrópico, $\psi^I(r)$, é uma função escalar arbitrária de variável interna isotrópica, r . Assim, é possível se postular as relações de estado para as forças termodinâmicas associadas ao endurecimento isotrópico e cinemático, R e \mathbf{X} , respectivamente, associadas com as variáveis internas como:

$$\begin{aligned}
R &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial r} = \frac{\partial \psi^I(r)}{\partial r} = R(r) \\
\mathbf{X} &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = a\boldsymbol{\beta}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

onde \mathbf{X} é então chamado de tensor “back-stress”.

2.6.2 Potencial de dissipação e equações de evolução associadas

Tendo-se todo o estado e as correspondentes variáveis associadas definidas, este segundo potencial dará as relações constitutivas cinemáticas para descrever a evolução

do fenômeno (Lemaitre, 1996). A existência de um potencial de dissipação único, Ψ , é então assumido na qual, usando a regra da normalidade, as equações de evolução para todas as variáveis internas são derivadas. Contudo, antes de se apresentar a expressão explícita para o potencial de dissipação, podem-se estabelecer algumas restrições para sua formulação. Selecionando três fenômenos físicos como endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático e dano, a dissipação intrínseca deve satisfazer o segundo princípio da termodinâmica, escrito na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} - Y\dot{D} \geq 0 \quad (2.115)$$

Levando em consideração a definição das forças termodinâmicas associadas a cada variável interna. Pode-se reescrever a desigualdade acima assumindo que a mesma pode ser decomposta em dois termos, nomeadamente, dissipação plástica e dissipação do dano, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} &\geq 0 \\ -Y\dot{D} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

Como mostrado na Equação 2.116, a desigualdade deveria ser identicamente verificada para cada mecanismo de dissipação selecionado. Como $-Y$ é uma função quadrática positiva (ver Equação 2.107), a taxa do dano \dot{D} também deve ser uma função não negativa. Isso significa que a variável de dano somente leva em consideração a degradação progressiva de materiais, não sendo possível nenhum tipo de recuperação de energia. Portanto, satisfazendo, em princípio, essa restrição e a desigualdade de dissipação, é assumido a existência de um pseudo-potencial de dissipação (com valor escalar) Ψ^* , que é função das taxas de mudanças das variáveis internas:

$$\Psi^* = \Psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{r}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D), \quad (2.117)$$

onde variáveis internas são consideradas como variáveis do processo neste pseudo-potencial. Usando agora a transformação de Legendre-Fenchel, um equivalente pseudo-potencial de dissipação complementar Ψ pode ser postulado. Este pseudo-potencial é também uma função com valores escalares, contínuo, não negativo e convexo com relação a cada força termodinâmica:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}, Y, \boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D). \quad (2.118)$$

Usando a abordagem de um potencial de dissipação único, esse potencial de dissipação complementar é dado pela decomposição aditiva dos potenciais de endurecimento Ψ^p e dano Ψ^d na forma:

$$\Psi = \Psi^p + \Psi^d = \Phi + \frac{b}{2a} \mathbf{X} : \mathbf{X} + \frac{S}{(1-D)(s+1)} \left(\frac{-Y}{S} \right)^{s+1}, \quad (2.119)$$

onde a , b , S e s são constantes materiais e Φ é a função de escoamento de von Mises escrita na forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)), \quad (2.120)$$

e σ_0 é o valor inicial da tensão de escoamento do material. De acordo com a hipótese da normalidade generalizada, o escoamento plástico é dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.121)$$

tendo o termo \mathbf{N} representado o chamado vetor de fluxo que e é expresso de acordo com o modelo de Lemaitre por:

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{(1-D) \|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|}. \quad (2.122)$$

A evolução das variáveis internas associadas ao endurecimento isotrópico e cinemático, \dot{r} e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, são:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \dot{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\gamma} (a\mathbf{N} - b\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.123)$$

e a lei de evolução do dano é dada por:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s, \quad (2.124)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o parâmetro plástico, o qual deve satisfazer a lei de complementaridade da plasticidade, independente da taxa:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \Phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.125)$$

Para complementar a descrição formal da elasto-plasticidade acoplada com dano, é importante se definir a taxa de deformação plástica equivalente $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, no qual tem que está de acordo com o critério de escoamento adotado. Para o critério de von Mises, e assumindo a equivalência da taxa do trabalho plástico, tem-se:

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = q \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p . \quad (2.126)$$

Usando a Equação 2.121 e a definição da tensão equivalente de von Mises, tem-se:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3J_2}. \quad (2.127)$$

A taxa da deformação plástica equivalente é calculada da equivalência da Equação 2.126 como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}. \quad (2.128)$$

Assim, usando a Equação 2.124 e a Equação 2.128, a lei de evolução do dano pode ser reescrita como:

$$\dot{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \left(\frac{-Y}{S} \right)^s . \quad (2.129)$$

2.6.3 Início do dano em materiais dúcteis

Em materiais dúcteis é observado que para valores baixos de deformação plástica, a degradação aparente do material é limitada (pequena) e, portanto, os seus efeitos nas propriedades físicas podem ser então negligenciados. Tomando como exemplo um caso de tração pura monotônica, é assumido que a degradação interna ou o dano somente tem seu crescimento iniciado quando certo nível de deformação plástica acumulada é atingido (Lemaitre, 1996). Desde que a equação de evolução do dano seja governada pela taxa da deformação plástica equivalente, é então lógico se determinar esse limiar, baseado na própria deformação plástica equivalente. Esse valor crítico é denotado por “*limiar do dano*” ε_D^p e corresponde à deformação plástica equivalente abaixo da qual não ocorre dano por micro-trincas. Embora esse limiar dependa do tipo de carregamento aplicado e do tipo de dano, é geralmente considerado um parâmetro material, identificado a partir de um ensaio uniaxial monotônico. Desta forma, esse “*limiar do*

“dano” é introduzido na lei de evolução do dano através do uso de uma função indicativa H , como:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \left(\frac{-Y}{S} \right)^s H(\bar{\epsilon}^p - \epsilon_D^p), \quad (2.130)$$

onde H é a função indicativa e é definida como:

$$H(\bar{\epsilon}^p - \epsilon_D^p) = H(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0 \\ 1, & \text{se } a \geq 0 \end{cases} \quad (2.131)$$

onde $a = \bar{\epsilon}^p - \epsilon_D^p$.

2.6.4 Critério do dano crítico

Existem inúmeras formas possíveis de se definir a localização e a iniciação de uma trinca na escala mesoscópica. A maneira mais simples e de solução mais prática é usar o chamado critério de dano crítico, o qual estabelece que uma trinca mesoscópica seja iniciada quando o valor do dano atinge um valor crítico (Lemaitre, 2005).

$$D > D_c. \quad (2.132)$$

O termo D_c é considerado uma constante material. Embora seu valor seja de difícil determinação, para muitos materiais, o valor de dano crítico está na faixa de 0.2 a 0.5.

2.7 DEFINIÇÃO DE RAZÃO DE TRIAXIALIDADE, TERCEIRO INVARIANTE NORMALIZADO E ÂNGULO DE LODE

No estudo da elasto-plasticidade, alguns parâmetros são comumente citados na definição do estado de tensão de um ponto material. Dentre os parâmetros e conceitos mais importantes, pode-se destacar a chamada pressão hidrostática, p , (ver Equação 2.55) que é igual ao traço do tensor tensão e a tensão equivalente de von Mises, q , que é uma função do segundo invariante do tensor desviador, como definido pela Equação 2.127. A razão entre estes dois parâmetros elasto-plásticos define a chamada razão de triaxialidade, que de acordo com alguns autores (ver Bai, 2008; Bai *et al.*, 2007) é responsável por estabelecer o tamanho do regime elástico do material.

$$\eta = \frac{p}{q}, \quad (2.133)$$

onde η representa a razão de triaxialidade.

Outro parâmetro elasto-plástico bastante relevante é o chamado terceiro invariante do tensor desviador, r , (ver Equação 2.64), que pode ser escrito também na forma:

$$r = \left(\frac{27}{2} \det \mathbf{S}\right)^{1/3} = \left(\frac{27}{2} J_3\right)^{1/3}. \quad (2.134)$$

O mesmo pode ser escrito na forma normalizada através da razão entre r e a chamada tensão equivalente de von Mises, como se segue:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3 = \frac{\frac{27}{2} \det \mathbf{S}}{q^3}, \quad (2.135)$$

onde ξ representa o chamado terceiro invariante normalizado do tensor desviador. Através do parâmetro ξ pode-se definir agora, o chamado ângulo de Lode, que o ângulo formado entre a projeção do tensor desviador no plano π e a linha de cisalhamento puro (ver Bai, 2008; Malcher *et al.*, 2011):

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \xi, \quad (2.136)$$

onde θ representa o chamado ângulo de Lode. A sua forma normalizada, $\bar{\theta}$, pode ser determinado através da expressão, a seguir:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi}. \quad (2.137)$$

Para alguns autores (ver Bai, 2008; Bai *et al.*, 2007), o ângulo de Lode, é o parâmetro elasto-plástico responsável por controlar a forma da superfície de escoamento do material.

A razão de triaxialidade é um parâmetro elasto-plástico que pode ser utilizada para definição de um carregamento predominantemente de compressão, onde se tem a chamada região de triaxialidade negativa $\left(-\frac{1}{3} \leq \eta < 0\right)$, predominantemente cisalhante, onde se tem a região de baixa triaxialidade $\left(0 \leq \eta < \frac{1}{3}\right)$ e predominantemente de tração, ou região de alta triaxialidade $\left(\eta \geq \frac{1}{3}\right)$. Além disso, o tipo de carregamento também pode ser definido em função do valor do terceiro

invariante normalizado e do valor do ângulo de Lode. Para região de carregamento cisalhante predominante, o valor de $\xi = 0$ e $\bar{\theta} = 0$. Contudo para regiões de alta triaxialidade, ou de carregamento cisalhante predominante, tem-se que $\xi = 1$ e $\bar{\theta} = 1$. A Figura 2.5 apresenta o comportamento da razão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado, de acordo com o tipo de carregamento aplicado.

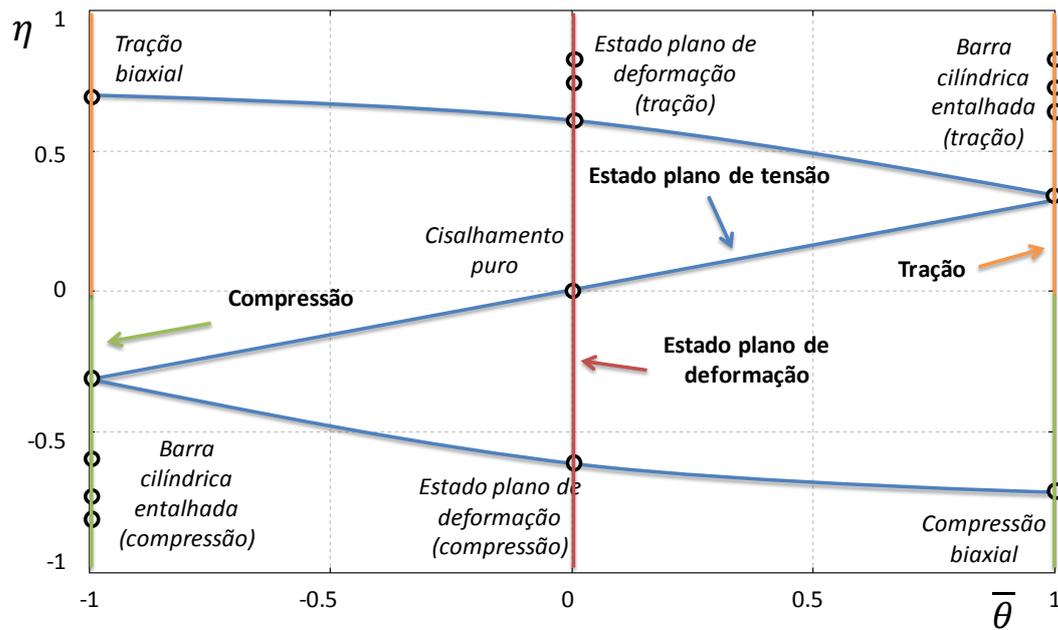


Figura 2.5. Representação do estado de tensão inicial em função de ξ e $\bar{\theta}$.

3. ESTRATÉGIA NUMÉRICA, CALIBRAÇÃO E SIMULAÇÃO DO MODELO DE DANO ORIGINAL DE LEMAITRE

Neste capítulo será abordada a estratégia numérica para integração implícita do modelo de dano isotrópico original de Lemaitre (1985), bem como os procedimentos para calibração dos parâmetros materiais requeridos pelo mesmo, tais como a curva de endurecimento isotrópico, expoente de dano, denominador de dano e dano crítico. Por fim, simulações numéricas são feitas, com intuito de se demonstrar a capacidade preditiva do modelo, no que se refere à determinação do deslocamento na fratura, bem como a indicação do local potencial para início de uma trinca.

3.1 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

A integração numérica das equações constitutivas do modelo elasto-plástico com dano isotrópico de Lemaitre é baseado em uma estratégia de mapeamento de retorno que foi originalmente proposta por Benallal *et al.* (1988) e, Doghri e Billardon (1995) considerando a hipótese de pequenas deformações e mais tarde, expandido por vários pesquisadores, considerando grandes deformações (De Souza Neto, 1994:1998; Saanouni, 2000). O algoritmo de integração originalmente proposto conduzia a um sistema não linear com quinze equações escalares, no caso de um problema em três dimensões, que era solucionado iterativamente de acordo com o método de Newton-Raphson. Explorando o procedimento padrão de mapeamento de retorno (Simo, 1998), o algoritmo de integração numérica originalmente proposto para o modelo de Lemaitre foi reduzido para a solução de um sistema não linear de duas equações, em um caso completamente isotrópico (Saanouni, 2007). Uma simplificação maior para o mesmo foi sugerida por De Souza Neto (2002), considerando a resolução de somente uma equação escalar não linear com o multiplicador plástico, γ , como única variável a ser determinada. Este último algoritmo de retorno desconsidera o efeito do endurecimento cinemático.

O uso de modelos constitutivos dependentes da trajetória, como é o caso do modelo original de Lemaitre, invariavelmente leva à necessidade de formulação de algoritmos para integração numérica das equações de evolução. O problema então consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, geralmente denominadas por α_n , no tempo

t_n , para obter as variáveis internas α_{n+1} no tempo t_{n+1} , onde o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ se assume conhecido. Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é aplicada ao modelo, baseado no esquema de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998). Desde que o modelo seja implementado em programa acadêmico de elementos finitos para um carregamento quase-estático, é necessário também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

O procedimento de atualização das tensões, no qual é baseado na chamada metodologia da *decomposição do operador* (Simo e Hughes, 1998; De Souza Neto *et al.*, 2008), é especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizados na plasticidade computacional. Esse método consiste em dividir o problema em duas partes: um preditor elástico, aonde o problema é assumido ser completamente elástico e um corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução é resolvido, tomando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema. No caso da função de escoamento ser violada, o chamado corretor plástico é então inicializado e o método de Newton-Raphson é usado para se resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. O método de Newton-Raphson é escolhido para solucionar o problema devido ao fato de se atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução.

3.1.1 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas

Na plasticidade computacional, o algoritmo de atualização é também comumente chamado de algoritmo de mapeamento de retorno e a sua construção requer os seguintes passos: conhecidos os valores da deformação elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ e do conjunto das variáveis internas α_n , no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, e dado também o incremento de deformação prescrito, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, para este intervalo, o chamado estado tentativa elástico pode ser então construído, como:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} &= (1 - D_n)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\
 R_{n+1}^{\text{trial}} &= R_n & D_{n+1}^{\text{trial}} &= D_n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ representa o tensor das tensões tentativa, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$ é o tensor das deformações plásticas tentativa, R_{n+1}^{trial} é a variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa e D_{n+1}^{trial} é a variável de dano tentativa.

O tensor das tensões tentativas pode ser então decomposto em uma parte desviadora e outra hidrostática:

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} , \quad p_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} , \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$ e p_{n+1}^{trial} representam, respectivamente a componente desviadora e a hidrostática do tensor das tensões tentativas. As constantes G e K representam as constantes de Lamé e são denominadas de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente. Os termos $\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}$ representam as componentes desviadoras e volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa.

O próximo passo então está em verificar se o estado tentativa construído acima, se encontra dentro ou fora do limite elástico do material. Para isto, a função de escoamento é determinada com base nos termos definidos acima. Para o modelo de Lemaitre, a função de escoamento é então determinada como:

$$\phi^{trial} = \frac{q^{trial}}{1 - D_n} - \sigma_y(R_n) , \quad (3.3)$$

onde o termo q^{trial} representa a tensão equivalente de von Mises que é definida em função da contribuição desviadora do tensor das tensões tentativa $q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}}$. A lei de encruamento do material é aqui representada pelo termo $\sigma_y(R_n)$ que passa a ser uma função da variável de endurecimento isotrópico, R_n . A expressão que defini a evolução do limite de escoamento do material em função de R_n é escrita como:

$$\sigma_y(R_n) = \sigma_0 + HR_n , \quad (3.4)$$

onde H representa o módulo de endurecimento isotrópico, que é uma propriedade material.

Caso ϕ^{trial} seja menor ou igual a zero, isto significa que o incremento de deformação prescrito inicialmente é realmente totalmente elástico e o estado tentativa

construído passa então a ser considerado o estado real do material, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Porém, caso ϕ^{trial} seja maior que zero, então é possível constatar que o material se encontra dentro do regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, que inicialmente foi considerado elástico, possui uma parcela plástica. Desta forma, há a necessidade de se corrigir o estado tentativa construído acima.

A correção do estado tentativa é feita a partir da remoção do incremento de deformação plástica de dentro da deformação elástica tentativa, que pode ser então expresso por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p . \quad (3.5)$$

Para o modelo original de Lemaitre, o incremento de deformação plástica é então definido através da Equação 2.118. Assim, substituindo esta expressão na equação acima, temos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}_{n+1}}{(1 - D_{n+1}) \|\boldsymbol{S}_{n+1}\|} , \quad (3.6)$$

onde $\Delta\gamma$ representa o multiplicador plástico e $\|\boldsymbol{S}_{n+1}\|$ é a norma da parte desviadora do tensor tensão. É importante destacar, que neste trabalho, o efeito cinemático no encruamento do material é desprezado.

A atualização das variáveis isotrópicas de dano e encruamento podem ser obtidas através das equações a seguir:

$$R_{n+1} = R_n - \Delta\gamma , \quad (3.7)$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s , \quad (3.8)$$

onde S e s representam o denominador e expoente de dano, respectivamente.

Por fim, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real no pseudo-tempo t_{n+1} , de acordo com a expressão:

$$\phi_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_{n+1}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_{y0} - HR_n - H\Delta\gamma = 0 . \quad (3.9)$$

Verifica-se então, analisando as Equações 3.6, 3.8 e 3.9 que para se determinar o estado real do material, há a necessidade de se resolver um sistema não-linear de equações, onde se tem como variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, D_{n+1} e $\Delta\gamma$.

O sistema não-linear formado pelas Equações 3.6, 3.8 e 3.9 pode ser considerado, para um estado geral de tensão (problema tridimensional), como um sistema com oito variáveis e oito equações. Porém, através de uma análise criteriosa e manipulações matemáticas, pode-se reduzir este sistema de oito incógnitas para um sistema não-linear com apenas duas incógnitas de característica escalar. Para se chegar a esta simplificação, primeiramente, tem-se que substituir a Equação 3.6 na chamada Lei de Hooke com dano acoplado, que pode ser expresso por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \mathbb{D} : \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1 - D_{n+1}) \|\mathbf{S}_{n+1}\|} \right] . \quad (3.10)$$

Considerando que o tensor das deformações elásticas também pode ser decomposto em uma parte desviadora e outra volumétrica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \varepsilon_v^e \mathbf{I}$, e manipulando matematicamente a Equação 3.10, pode-se concluir que:

$$\mathbf{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d \ n+1}^{e \text{ trial}} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} , \quad (3.11)$$

$$p_{n+1} = (1 - D_{n+1}) K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}} . \quad (3.12)$$

Definindo $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} \equiv 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d \ n+1}^{e \text{ trial}}$ e que $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}$ é proporcional a \mathbf{S}_{n+1} , a Equação 3.11 pode ser re-escrita como:

$$\mathbf{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} . \quad (3.13)$$

Sabendo que $\tilde{q}^{trial} = \sqrt{3/2} \|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|$ e reagrupando os termos da Equação 3.13, pode-se então encontrar uma equação de atualização para o termo desviador do tensor tensão, em função do estado tentativa, como:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \left(1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}\right) \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} . \quad (3.14)$$

Através desta equação, pode-se também determinar uma expressão para a atualização da equação equivalente de von Mises:

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}} = (1 - D_{n+1}) \tilde{q}^{trial} - 3G\Delta\gamma . \quad (3.15)$$

Substituindo a equação acima na Equação 3.9, pode-se então definir a equação de consistência plástica em função do D_{n+1} e $\Delta\gamma$, como:

$$\phi_{n+1}(D_{n+1}, \Delta\gamma) = \tilde{q}^{trial} - \frac{3G\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma) = 0 . \quad (3.16)$$

Da mesma forma, a Equação 3.8 pode ser re-escrita, considerando a energia liberada devido ao dano, $-Y$, como uma função do D_{n+1} e $\Delta\gamma$:

$$-Y(D_{n+1}, \Delta\gamma) = \frac{[(1 - D_{n+1})\tilde{q}^{trial} - 3G\Delta\gamma]^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} , \quad (3.17)$$

onde $\tilde{p}_{n+1} \equiv K \varepsilon_{v n+1}^{e trial}$. Desta forma, chega-se a um sistema de duas equações não-lineares, formado por 3.16 e 3.8, com características escalares.

Definindo agora, o conceito de integridade material como:

$$\omega \equiv 1 - D . \quad (3.18)$$

Assim, de posse da Equação 3.16 e do conceito de integridade material definido acima, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\omega_{n+1} \equiv 1 - D_{n+1} = \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} . \quad (3.19)$$

Novamente, combinando as Equações 3.16 e 3.17, a energia liberada devido ao dano pode ser re-escrita como uma função somente do multiplicador plástico, $\Delta\gamma$, como:

$$-Y(\Delta\gamma) = \frac{[\sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} . \quad (3.20)$$

Finalmente, combinando e manipulando matematicamente as Equações 3.19, 3.20 e 3.8, chega-se a uma equação não-linear, cuja variável é somente o chamado multiplicador plástico:

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega_{n+1}(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega_{n+1}(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{r} \right)^s = 0 . \quad (3.21)$$

Assim, o sistema não-linear de oito equações e oito incógnitas que inicialmente deveria ser solucionado dentro do chamado algoritmo de mapeamento de retorno, é então simplificado para uma única equação escalar. Após a resolução da mesma, e determinado o valor de $\Delta\gamma$, as outras variáveis do processo necessitam ser atualizadas, como: variável de dano, variável de endurecimento isotópico, as contribuições hidrostática e desviadoras do tensor tensão, entre outras. O algoritmo de atualização das tensões, para o modelo original de Lemaitre é convenientemente resumido na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de Lemaitre. De Souza Neto (2002).

(i) Determinar o estado tentativa: Dado o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e as variáveis de estado no pseudo-tempo t_n :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} & ; & & R_{n+1}^{trial} &= R_n & ; & & D_{n+1}^{trial} &= D_n \\ \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} & ; & & \tilde{p}_{n+1} &= K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial} & ; & & \tilde{q}_{n+1}^{trial} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|/(1-D_n)\end{aligned}$$

(ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\text{Se } \Phi^{trial} = \tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y^{trial}(R_{n+1}^{trial}) \leq 0 \text{ então}$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \text{ (passo elástico) e vá para (v)}$$

Caso contrário, vá para (iii)

(iii) Algoritmo de retorno (**passo plástico**): Resolver o sistema de equações abaixo para $\Delta\gamma$, usando o método de *Newton-Raphson*.

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s = 0$$

onde,

$$\omega(\Delta\gamma) = 1 - D_{n+1} = \frac{3G \cdot \Delta\gamma}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)}$$

$$-Y(\Delta\gamma) \equiv \frac{[\sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K}$$

(iv) Atualizar a outras variáveis de estado:

$$R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma$$

$$p_{n+1} = \omega(\Delta\gamma) \tilde{p}_{n+1} \quad ; \quad q_{n+1} = \omega(\Delta\gamma) \sigma_y(R_{n+1})$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \frac{1}{2G} \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \mathbf{I}$$

(v) Fim

3.1.2 Operador tangente consistente

Tomando como base a implementação implícita do modelo descrito acima em um desenvolvimento de elementos finitos, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração é requerido para se construir a chamada matriz de rigidez. Considerando um caso elástico, ou seja, quando o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no tempo t_{n+1} passa a ser simplesmente o operador elástico danificado, descrito por:

$$\widehat{\mathbb{D}}^e = \frac{1}{1-D} \mathbb{D} . \quad (3.22)$$

Por outro lado, em um caso elasto-plástico, ou seja, quando se assume a existência do fluxo plástico, o operador tangente, escrito por $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$ é definido como:

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} , \quad (3.23)$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pela algoritmo de retorno descrito acima. O procedimento para computação do modulo tangente consistente elasto-plástico para o modelo de Lemaitre, foi originalmente discutido por Benallal *et al.* (1988). Posteriormente, De Souza Neto *et al.* (2002) propôs uma expressão fechada para este operador $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$, que pode ser observada a seguir:

$$\mathbb{D}^{ep} = a \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + b \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{n+1} + c \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \otimes \mathbf{I} + d \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{n+1} + e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.24)$$

onde \mathbb{I} representa o tensor identidade de quarta ordem e $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}$ é o tensor desviador normalizado $\mathbf{S}_{n+1}/\|\mathbf{S}_{n+1}\|$. Os parâmetros a , b , c , d e e são definidos como:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2G\omega_{n+1}\sigma_y(R_{n+1})}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}}, \\ b &= 2G \left[a_1 H \omega_{n+1} + a_4 \sigma_y(R_{n+1}) - \frac{\omega_{n+1} \sigma_y(R_{n+1})}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \right], \\ c &= K \sqrt{2/3} [a_2 H \omega_{n+1} + a_3 \sigma_y(R_{n+1})], \\ d &= 2G \sqrt{2/3} \tilde{p}_{n+1} a_4, \\ e &= K(\omega_{n+1} + a_3 \tilde{p}_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

Com os termos a_1 , a_2 , a_3 e a_4 dados por:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{F'} \left[\frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_{n+1})} - \frac{1}{3G} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s \right], \\
 a_2 &= -\frac{s \tilde{p}_{n+1} [\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_{n+1})]}{3G S K F'} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^{s-1}, \\
 a_3 &= a_2 \omega', \\
 a_4 &= a_1 \omega' - \frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_{n+1})},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

e ainda F' e ω' definidos por:

$$\begin{aligned}
 F' &= \omega' - \frac{H}{3G} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s + \frac{s H \sigma_y(R_{n+1}) [\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_{n+1})]}{9G^2 S} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^{s-1}, \\
 \omega' &= \frac{3G + \omega_{n+1} H}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_{n+1})}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.2 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS

Neste item, serão descritos os procedimentos necessários para calibração e obtenção dos parâmetros materiais, requeridos para o modelo de Lemaitre. Tal calibração é feita com base em resultados experimentais obtidos para um ensaio clássico de tração em um corpo de prova cilíndrico liso, onde a curva força versus o deslocamento é então determinada. Utiliza-se, neste caso, um corpo de prova fabricado de alumínio 2024-T351, onde as propriedades materiais básicas são listadas a seguir:

Tabela 3.2. Propriedades materiais básicas para a liga de alumínio 2024-T351.

<i>Descrição</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de Elasticidade</i>	E	72.400[MPa]
<i>Coefficiente de Poisson</i>	ν	0.33
<i>Tensão de escoamento inicial</i>	σ_0	352.00 [MPa]

As dimensões do corpo de prova cilíndrico liso são apresentadas a seguir, bem como a discretização espacial do mesmo.

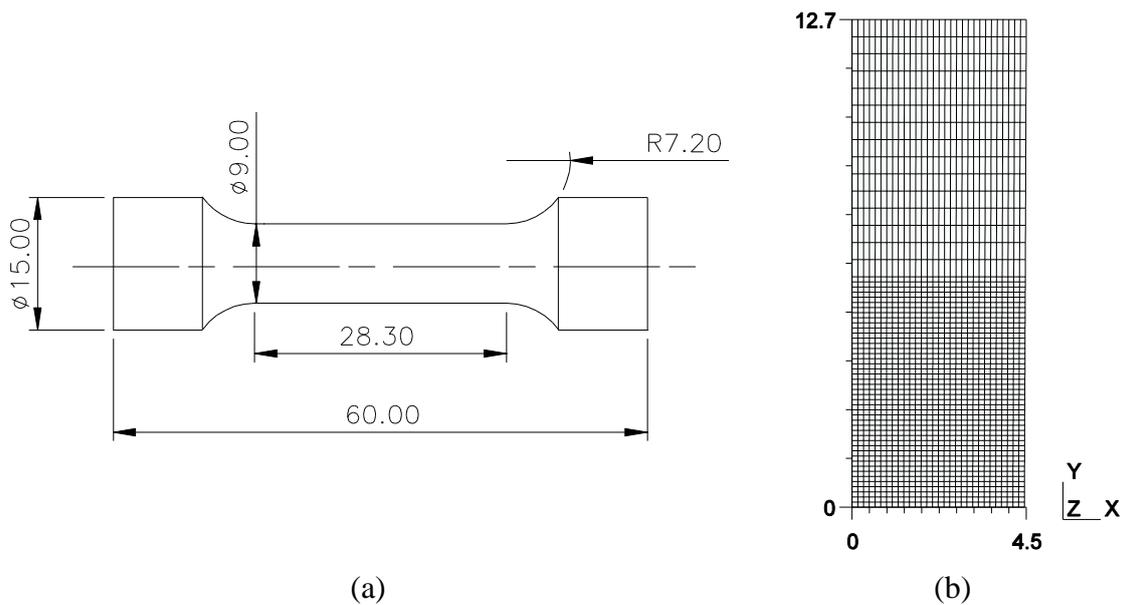


Figura 3.1. (a) Geometria do corpo de prova cilíndrico liso (dimensões em mm) e (b) discretização espacial da região de ensaio. Reproduzido de Teng (2008).

Na discretização da região de ensaio, elementos quadrilaterais de oito nós, com quarto pontos de Gauss, são adotados. Um total de 1800 elementos é usado, seguido de um total de 5581 nós. O tamanho da área de ensaio é igual a 25.4 mm. Devido à simetria do problema, somente 1/4 do corpo de prova é discretizado.

Considerando os procedimentos para início das simulações numéricas, é indispensável se obter agora as propriedades materiais, como: curva de encruamento do material, valor de dano crítico, bem como os parâmetros de dano (expoente e denominador de dano) requeridos na lei de evolução desta variável interna, segundo o modelo de Lemaitre. Assim, a estratégia empregada para se calibrar tais parâmetros materiais, inicia-se a partir de resultados experimentais para um corpo de prova cilíndrico liso, onde se determina o deslocamento experimental para a fratura do corpo de prova ($u_f = 6.65$ mm) juntamente com sua curva de reação (força versus deslocamento), e um método inverso de otimização de parâmetros. Na Figura 3.2, são mostradas as curvas de reação experimental e numérica, obtida através do modelo de Lemaitre e após a aplicação de um método inverso de identificação de parâmetros. Como se pode verificar, as curvas, experimental e numérica, apresentam-se com um nível de concordância bem satisfatório.

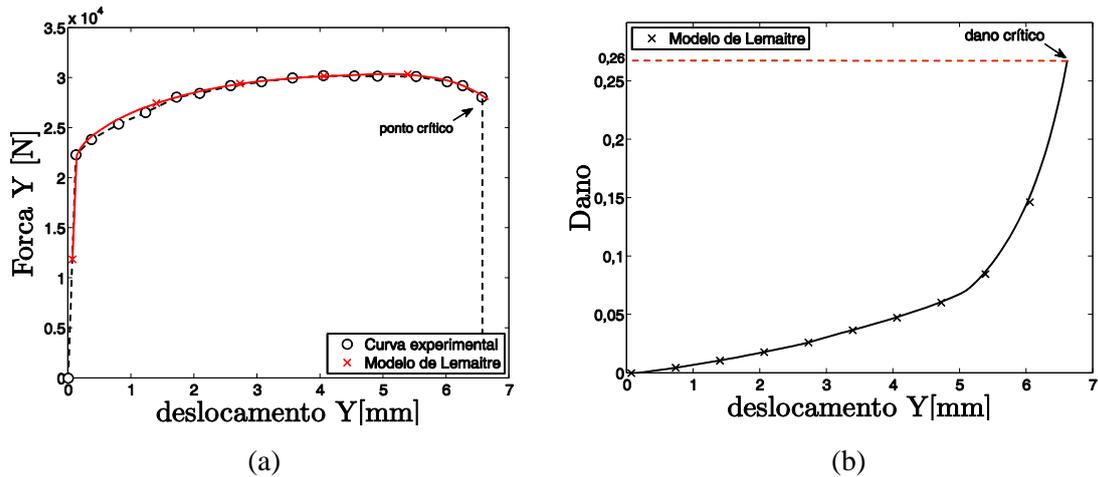


Figura 3.2. (a) Curva de reação obtida através do modelo de Lemaitre. (b) Parâmetro de dano crítico, calibrado para $u_f = 6.65$ mm.

Os resultados do procedimento de calibração para a curva de encruamento pode ser observado através da Figura 3.3. A curva de encruamento não-danificada determinada para o modelo de Lemaitre, apresenta-se com um crescimento mais assintótica do que a curva obtida para o modelo de von Mises (curva danificada).

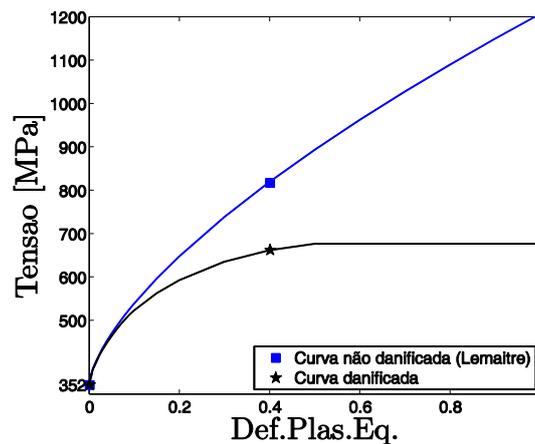


Figura 3.3. Curva de encruamento para o modelo de Lemaitre.

O valor crítico para a variável de dano foi também obtida a partir da simulação do corpo de prova liso. Todos os parâmetros materiais necessários para execução do modelo de dano são convenientemente listados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3. Parâmetros de dano calibrados para o modelo original de Lemaitre (alumínio 2024-T351).

Descrição	Símbolo	Valor
Expoente de dano	s	1
Denominador de dano	S	6 [MPa]
Dano crítico	D_c	0.26

É importante ressaltar que o corpo de prova utilizado no procedimento de calibração, também será utilizado para avaliação da capacidade preditiva do modelo de Lemaitre.

Considerando a capacidade de se descrever o comportamento mecânico, bem como a previsão da fratura dúctil, os corpos de prova destacados acima são discretizados espacialmente, levando em consideração um refinamento adequado da região ao redor da seção de ensaio. A Figura 3.5 apresenta a malha de elementos finitos determinada para as duas barras cilíndricas entalhadas, aonde somente 1/4 do problema é apresentado, devido a sua simetria. Em ambos os casos, um total de 1800 elementos quadrilaterais quadráticos, seguido de 5581 nós. O tamanho da área de ensaio é igual a 25.4 mm

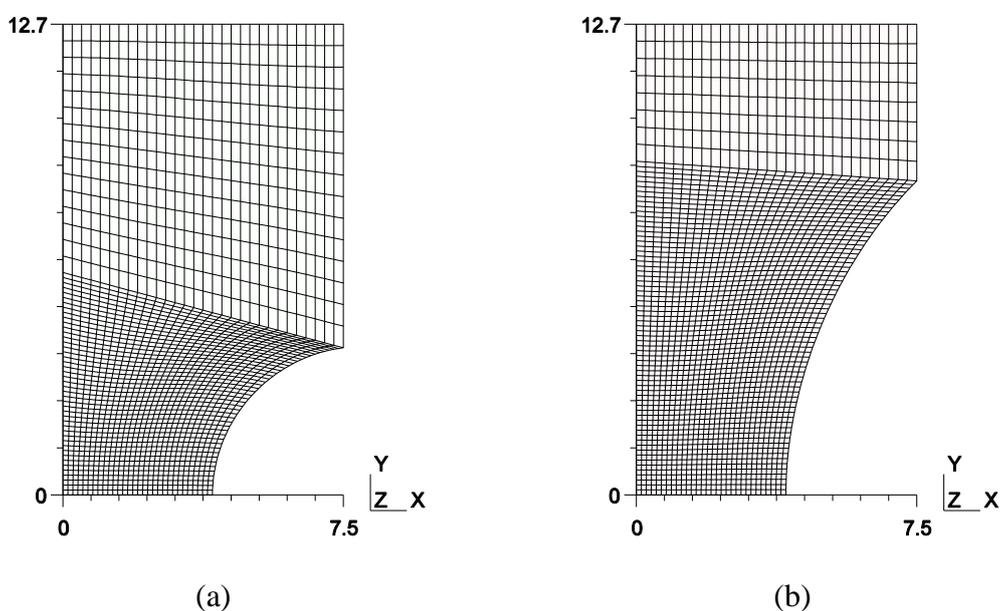


Figura 3.5. Malha de elementos finitos quadrilateral de oito nós. (a) barra cilíndrica entalhada $R = 4 \text{ mm}$, (b) barra cilíndrica entalhada $R = 12 \text{ mm}$.

Já para o corpo de prova “borboleta”, uma malha tridimensional de elementos finitos é utilizada, com 2432 elementos de vinte nós, seguindo de 12681 nós. Neste caso, é utilizada uma estratégia de integração reduzida com nove pontos de Gauss.

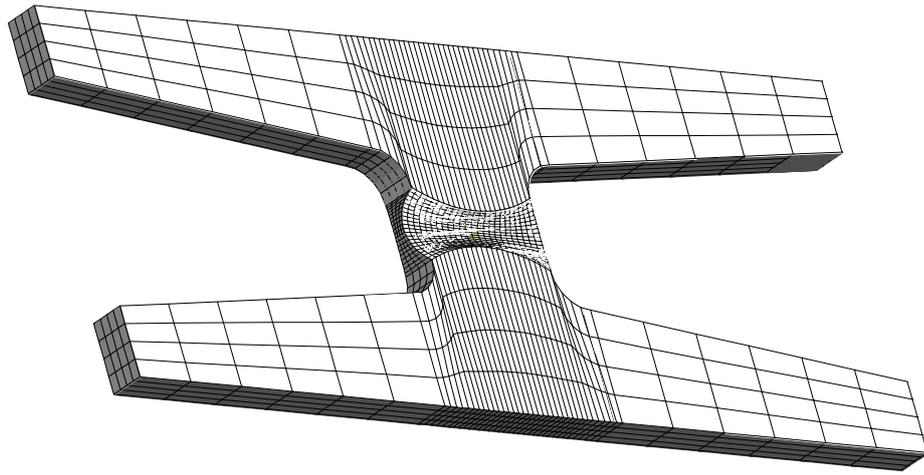


Figura 3.6. Malha tridimensional de elementos finitos de vinte nós.

3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Após os procedimentos de calibração dos parâmetros materiais necessários para utilização do modelo de Lemaitre, e que são apresentados na Tabela 3.3, neste parágrafo são descritas as etapas necessárias para realização das simulações numéricas, levando em consideração todos os corpos de prova discretizados previamente. A Figura 3.7 apresenta a configuração inicial dos testes realizados, levando em consideração o nível de triaxialidade de cada ensaio.

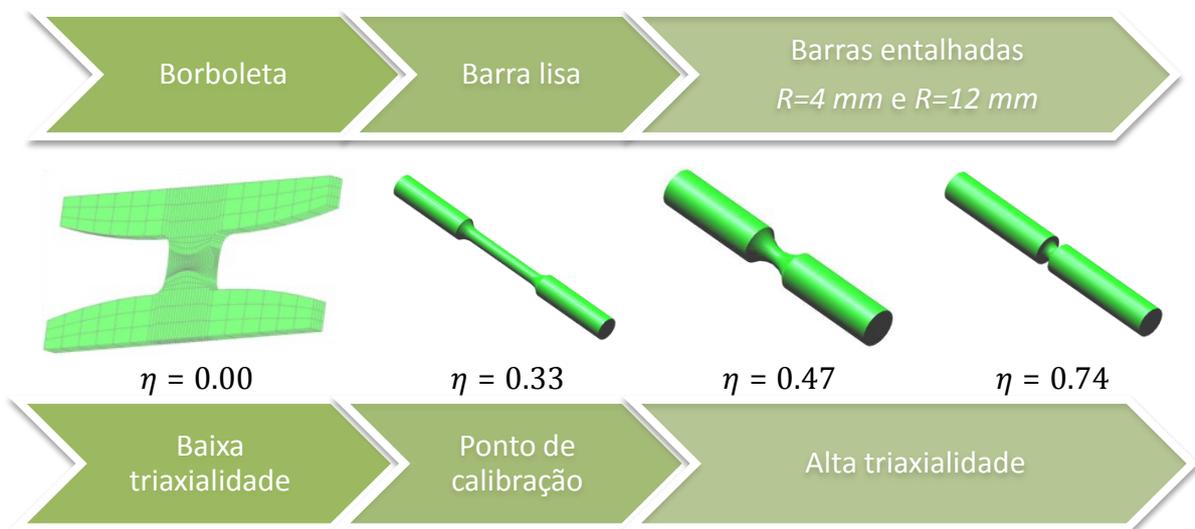
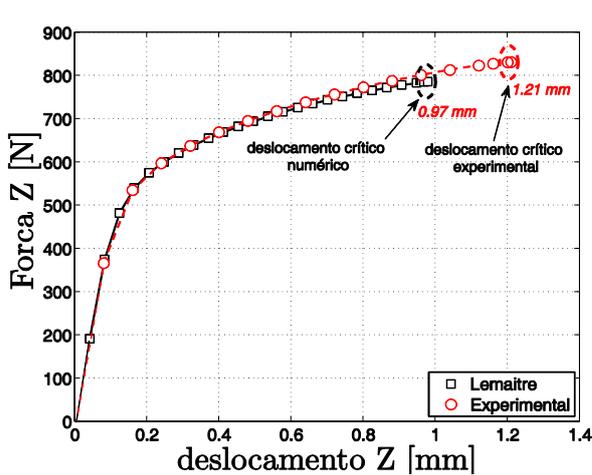


Figura 3.7. Quadro com a distribuição dos corpos de prova testados, de acordo com o nível de triaxialidade.

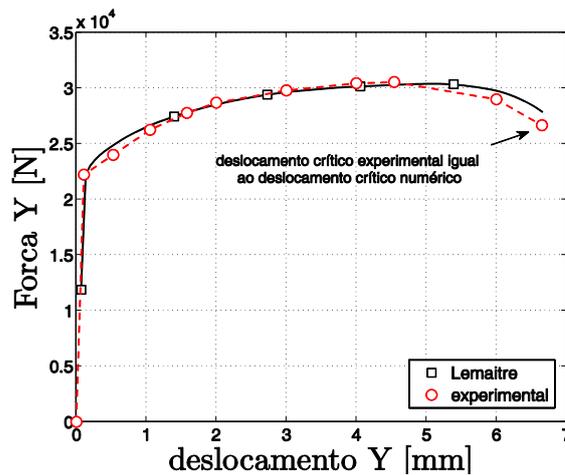
Observa-se que as simulações partem de uma condição de cisalhamento puro, $\eta = 0.00$, utilizando para isto um corpo de prova do tipo “borboleta”. A seguir,

utilizam-se corpos de prova do tipo barras cilíndricas sujeitas a carregamento de tração pura, e com diferentes níveis de triaxialidade. A triaxialidade, neste caso, é estabelecida de acordo com o nível de entalhe do corpo. Para a barra lisa, o nível de triaxialidade inicial é estabelecido em $\eta = 0.33$, já para as barras entalhadas, tem-se níveis de triaxialidade variando de $\eta = 0.47$ e $\eta = 0.74$, para entalhes de $R=4 \text{ mm}$ e $R=12 \text{ mm}$, respectivamente.

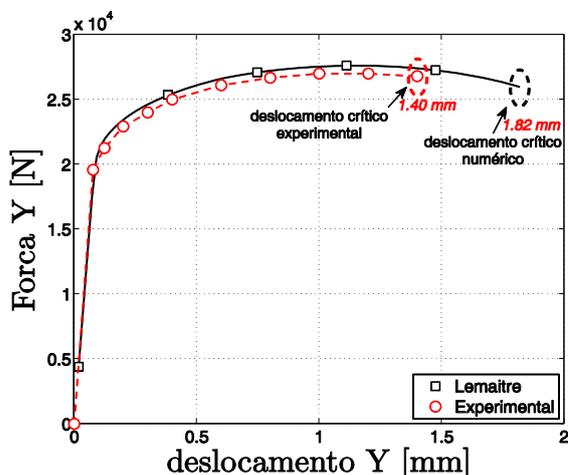
Para todos os corpos de prova, as simulações numéricas foram realizadas até o ponto onde a variável de dano atingisse o seu valor crítico, calibrado previamente ($D_c = 0.26$). Inicialmente, comparações entre as curvas de reação numéricas e experimentais são feitas, destacando o nível de deslocamento para a fratura obtido numericamente e experimentalmente. A Figura 3.8 apresenta as curvas “*força versus deslocamento*” para cada corpo de prova. Observa-se que de acordo com o modelo de Lemaitre, para a barra cilíndrica lisa, que possui um nível de triaxialidade de $\eta = 0.33$, o deslocamento crítico numericamente encontrado é exatamente igual ao experimentalmente medido, $u_f = 6.65 \text{ mm}$ (ver Figura 3.8b). Este resultado é justificado pelo fato deste corpo de prova ser utilizado aqui como referência para calibração de todos os parâmetros materiais (ver item 3.2). Analisando a curva encontrada para o corpo de prova “*borboleta*”, $\eta = 0.00$, verifica-se que o deslocamento crítico numérico é menor que o experimentalmente medido (ver Figura 3.8a). Nesta condição, o modelo de Lemaitre se comporta conservativo, prevendo assim o início da falha do material antes do experimentalmente observado. Já para os corpos de prova entalhados, em ambos os casos, o modelo de Lemaitre resulta em deslocamentos críticos maiores que os experimentalmente determinados (ver Figura 3.8c e 3.8d). Nesta condição, o modelo constitutivo prevê o início da falha do material, após o valor experimentalmente observado. Neste último caso, observa-se também que a diferença entre os resultados numéricos e experimentais se acentua para condições de triaxialidade mais elevada, variando de 23% de diferença quando se tem um entalhe de $R=12 \text{ mm}$ e $\eta = 0.47$ para 41.6% de diferença quando se tem um entalhe de $R=4 \text{ mm}$ e $\eta = 0.74$.



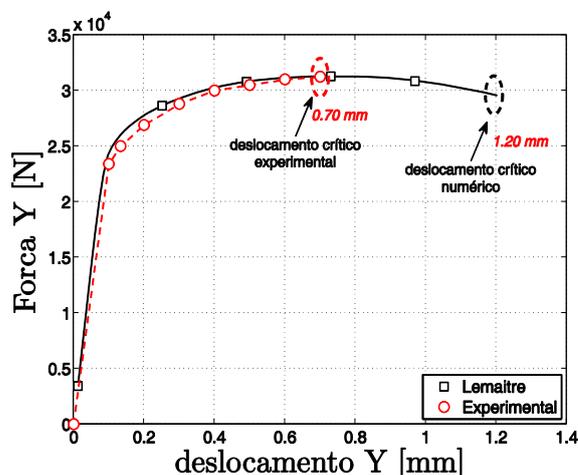
(a) $\eta = 0.00$



(b) $\eta = 0.33$



(c) $\eta = 0.47$



(d) $\eta = 0.74$

Figura 3.8. Curvas força versus deslocamento para diferentes corpos de prova e condições de carregamento aplicado.

Outra maneira de se avaliar a capacidade preditiva deste modelo, no que se refere à determinação numérica do nível de deslocamento para a fratura, é através da evolução da variável de dano. A Figura 3.9 apresenta a evolução desta variável interna para cada condição testada. Observa-se novamente que para a barra cilíndrica lisa, que foi utilizada aqui como ponto de calibração dos parâmetros materiais, o valor crítico de dano é atingido para um nível de deslocamento muito próximo ao experimentalmente observado (ver Figura 3.9b). Já para o corpo de prova “borboleta”, sujeito a cisalhamento puro, verifica-se que o dano crítico é atingido de forma prematura, ou seja, para um nível de deslocamento muito inferior ao experimental, indicando um

comportamento prematuro do modelo de Lemaitre, quando submetido a estas condições de carregamento (ver Figura 3.9a). Por outro lado, quando avaliados os resultados encontrados para as barras cilíndricas entalhadas, verifica-se que a variável de dano atinge seu ponto crítico para deslocamentos maiores que os experimentalmente avaliados. No caso da barra entalhada $R=12\text{ mm}$, observa-se uma diferença de 23% entre o deslocamento experimental e o numérico. Já no caso da barra entalhada $R=4\text{ mm}$, tem-se uma diferença mais acentuada, na ordem dos 41.6 % (ver Figura 3.9c e 3.9d).

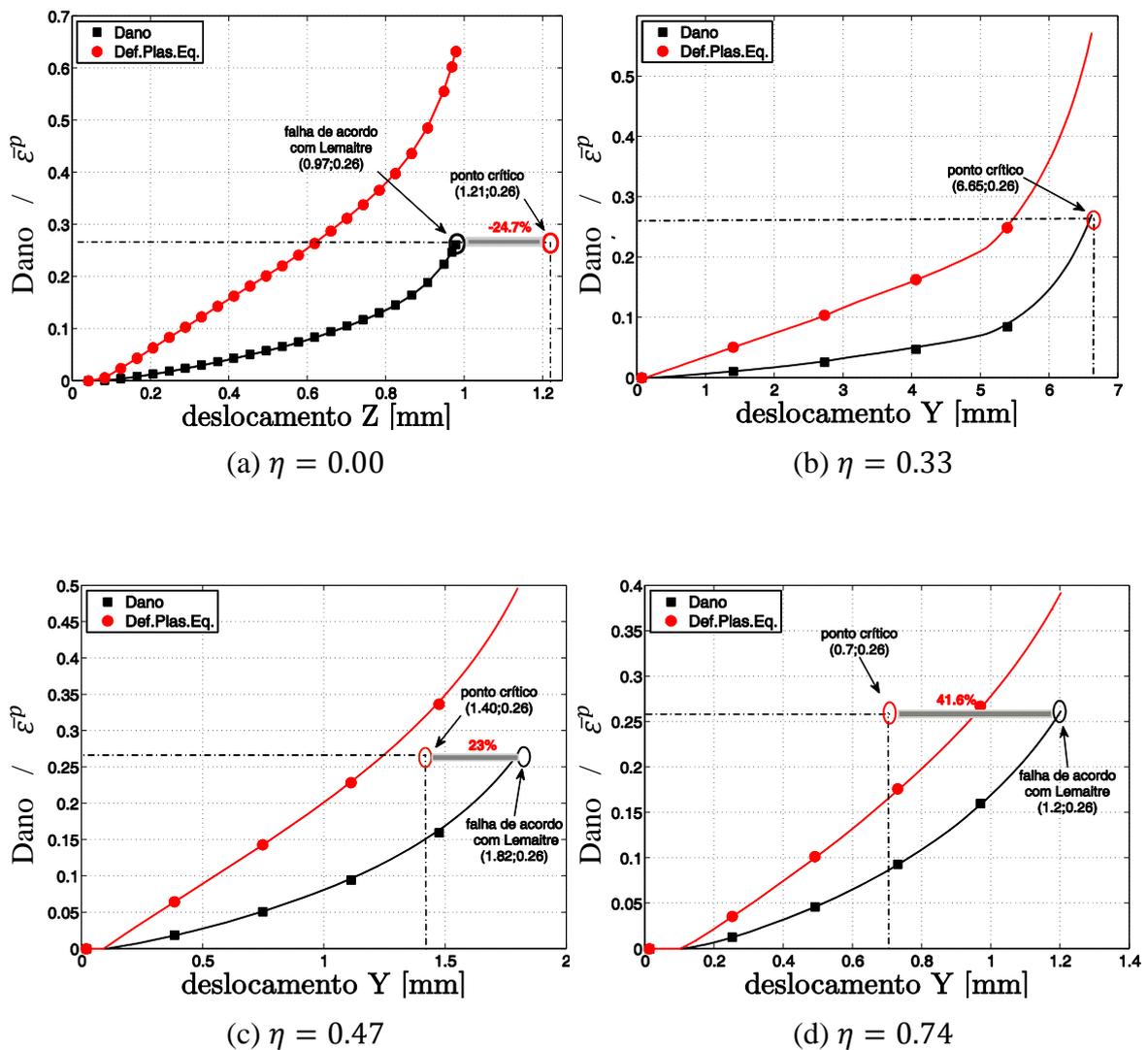


Figura 3.9. Evolução da variável de dano e da deformação plástica equivalente para diferentes corpos de prova e condições de carregamento aplicado.

Desta forma, pode-se concluir que a precisão do modelo de dano de Lemaitre, no que se refere à capacidade de se determinar o correto deslocamento para a fratura do material, está diretamente relacionada com a proximidade ou não do ponto de calibração. Para condições de carregamento avaliadas, próxima do ponto de calibração, ou seja, triaxialidade igual a $\eta = 0.33$, a capacidade preditiva do modelo é muito boa. Porém, para condições de carregamento afastadas do ponto de calibração, o modelo perde precisão, podendo prever a falha prematuramente, quando, por exemplo, se tem $\eta < 0.33$, ou prever o início da falha de forma tardia, $\eta > 0.33$. A Tabela 3.4 apresenta de forma resumida, os resultados encontrados para o deslocamento na fratura.

Tabela 3.4. Deslocamento para a fratura numérico e experimental.

Corpo de prova	Triaxialidade	Deslocamento experimental (1)	Deslocamento numérico (2)	Erro % (2)-(1)
Borboleta	0.00	1.21 mm	0.97 mm	-24,7%
Barra lisa	0.33	6.65 mm	6.65 mm	0%
Barra $R = 12\text{ mm}$	0.47	1.40 mm	1.82 mm	23%
Barra $R = 4\text{ mm}$	0.74	0.70 mm	1.20 mm	41,6%

Através da Figura 3.9, é possível também se verificar o comportamento da deformação plástica equivalente, em função do nível de triaxialidade aplicado. Observa-se que para a condição de cisalhamento puro, $\eta = 0.00$, o nível de deformação encontrado, para a fratura foi de $\varepsilon_f^p = 0.63$. Já para as barras cilíndricas, os valores críticos encontrados foram $\varepsilon_f^p = 0.57$, $\varepsilon_f^p = 0.49$ e $\varepsilon_f^p = 0.39$, para $\eta = 0.33$, $\eta = 0.47$ e $\eta = 0.74$, respectivamente. Desta forma, constata-se que de acordo com o modelo de Lemaitre, a deformação plástica equivalente sempre decresce com o aumento da triaxialidade. Observações experimentais mostram que (ver Bao, 2003) para a liga de alumínio 2024-T351, a deformação na fratura cresce inicialmente com o aumento da triaxialidade, quando se está na faixa de baixo nível de triaxialidade ($0 \leq \eta < 0.33$), e a mesma decresce com o aumento da triaxialidade, quando se tem altos níveis de triaxialidade ($\eta \geq 0.33$).

Outra forma de se avaliar a capacidade preditiva de um modelo constitutivo está na avaliação da sua capacidade de prever o correto local para início de uma trinca. Neste caso, o início da falha do material é estabelecido quando alguma região discretizada atinge o valor de dano crítico, calibrado previamente, e neste caso igual a $D_c = 0.26$. A Figura 3.10 apresenta o contorno da variável de dano ao longo da malha de elementos

finitos, para cada corpo de prova estudado. Através de observações experimentais (ver Bai, 2008), constata-se que o corpo de prova “borboleta” apresenta a borda da região de ensaio como ponto de início de uma trinca. Já para os corpos de prova cilíndricos, experimentalmente é observado (ver Bai, 2008) que a região central dos mesmos é o local de início da fratura dúctil. Avaliando assim, os resultados numéricos apresentados na Figura 3.10, constata-se que mesmo para condições de triaxialidade afastadas da condição de calibração, $\eta = 0.33$, o modelo de Lemaitre não perde a sua capacidade preditiva, no que se refere à determinação do correto local para início da falha.

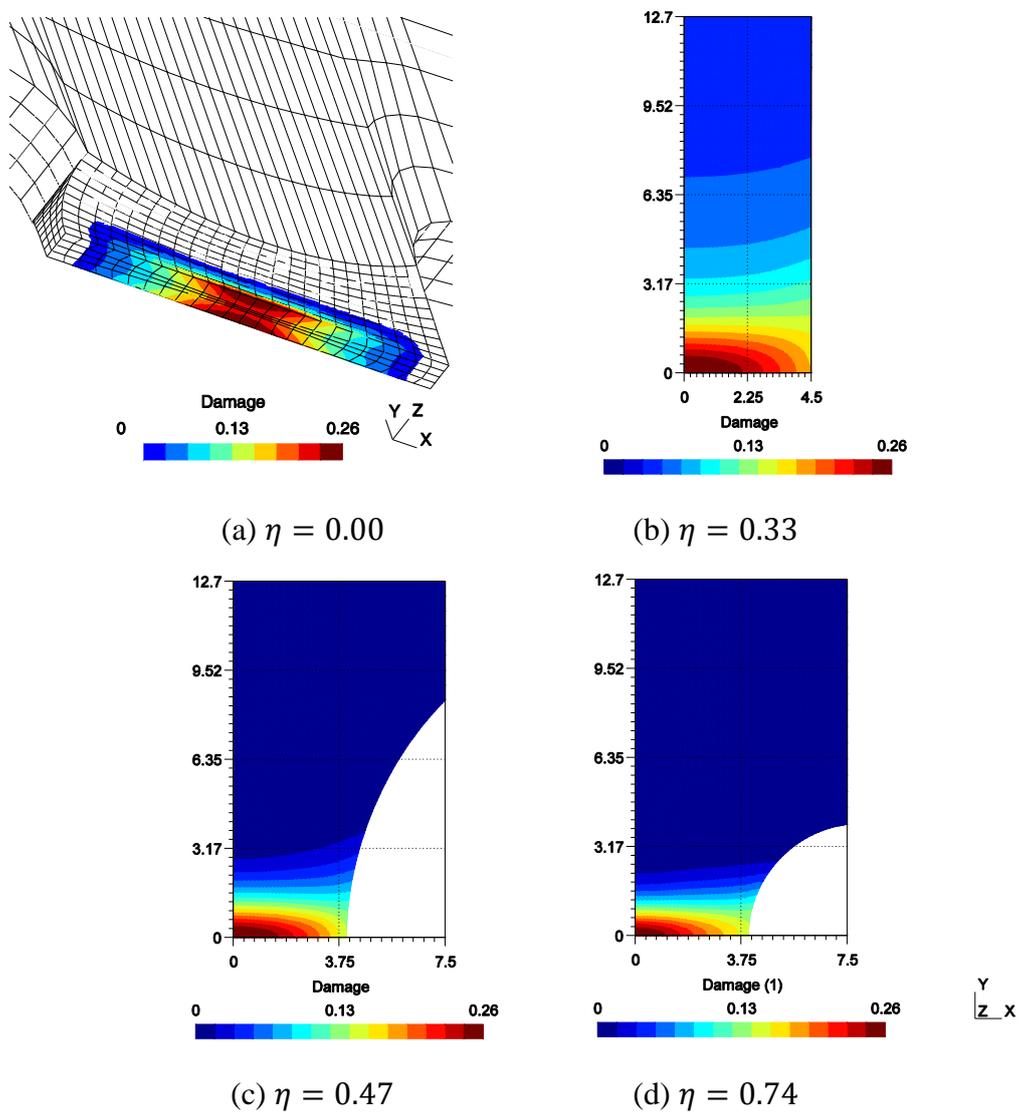


Figura 3.10. Contorno da variável de dano ao longo da malha de elementos finitos, para os diferentes corpos de prova avaliados.

4. APERFEIÇOAMENTO DO MODELO DE LEMAITRE PARA REDUÇÃO DA DEPENDÊNCIA DO PONTO DE CALIBRAÇÃO

Neste capítulo será proposta uma nova formulação para a lei de evolução de dano de Lemaitre, tendo como base a criação de uma chamada *função denominador de dano*, que será dependente do nível de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado, parâmetros estes definidor pelas Equações 2.133 e 2.135. Esta função, baseada em observações fenomenológicas, substituirá o denominador de dano, presente na lei de evolução original de Lemaitre, que por sua vez, é uma constante, calibrada com base em resultados experimentais, de um corpo de prova liso sujeito a tração pura. Com a criação desta função denominador de dano, pretende-se aumentar a precisão do modelo de dano de Lemaitre, no que se refere a capacidade de prever o correto nível de deslocamento que configure o início da fratura dúctil do material.

Como foi analisado no Capítulo 3, o modelo de Lemaitre perde sua precisão, no que se refere a capacidade preditiva, quando a condição de carregamento aplicada, apresenta-se afastada do ponto escolhido como condição de calibração dos parâmetros materiais, como curva de encruamento e parâmetros de dano (denominador e expoente de dano). Este modelo de dano pode então se comportar de maneira prematura, prevendo o início de uma trinca, anteriormente ao observado experimentalmente, quando a condição de carregamento aplicada apresenta um nível de triaxialidade menor que a do ponto de calibração escolhido. Já, quando a condição de carregamento estudada, apresenta um nível de triaxialidade maior que a do ponto de calibração, o modelo de dano pode então prever o início da falha do material de forma tardia, quando comparada as observações experimentais presentes na literatura. A Figura 4.1 apresenta o comportamento do modelo de dano de Lemaitre, de acordo com o nível de triaxialidade do histórico de carregamento aplicado e do ponto de calibração.

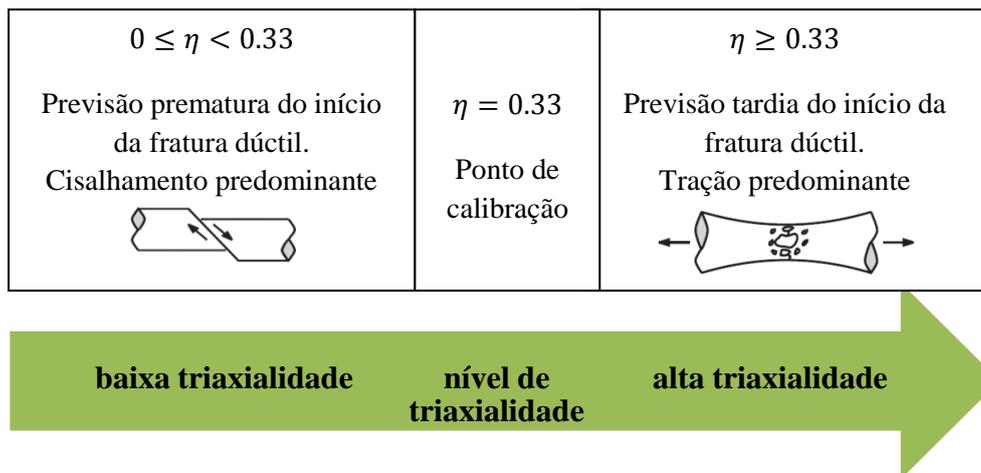


Figura 4.1. Comportamento do modelo de Lemaitre quanto da dependência do ponto de calibração

4.1. O EFEITO DO DENOMINADOR DE DANO NA PRECISÃO DO MODELO DE LEMAITRE

Através de comparações quantitativas entre resultados numéricos e experimentais, no capítulo anterior, mostrou-se a perda de precisão do modelo de dano de Lemaitre no que se refere a correta determinação do deslocamento para a fratura em materiais dúcteis. Porém, com base em observações do comportamento elasto-plástico destes materiais, constata-se que o chamado denominador de dano possui uma forte influência na lei de evolução da variável de dano, inicialmente postulada por Lemaitre. A imprecisão preditiva do modelo é reduzida, na medida em que se adotam valores específicos para o denominador de dano, de acordo com a condição de carregamento imposta, seja ela nas redondezas ou distante do ponto de calibração adotado.

A Figura 4.2 apresenta a evolução da variável de dano para os mesmos corpos de prova analisados no capítulo 3. Neste caso, usa-se como referencia o valor inicialmente calibrado para o denominador de dano (ver Tabela 3.3) e também um novo valor, determinado de forma que o valor de dano crítico seja atingindo no mesmo instante em que se aplica o deslocamento experimentalmente observado para a fratura. Para a condição de cisalhamento puro, há a necessidade de se aplicar um denominador de dano maior que o calibrado anteriormente. Com este aumento no denominador, a taxa de evolução do dano é reduzida, fazendo com que o modelo deixe de prever a iniciação da fratura de forma prematura. Já para os corpos de prova entalhados, o comportamento é

exatamente o contrário. Há a necessidade, neste caso, de se reduzir o valor do denominador de dano, causando assim, um aumento na taxa de evolução da variável de dano, fazendo com que o modelo deixe de prever o início da falha de forma tardia.

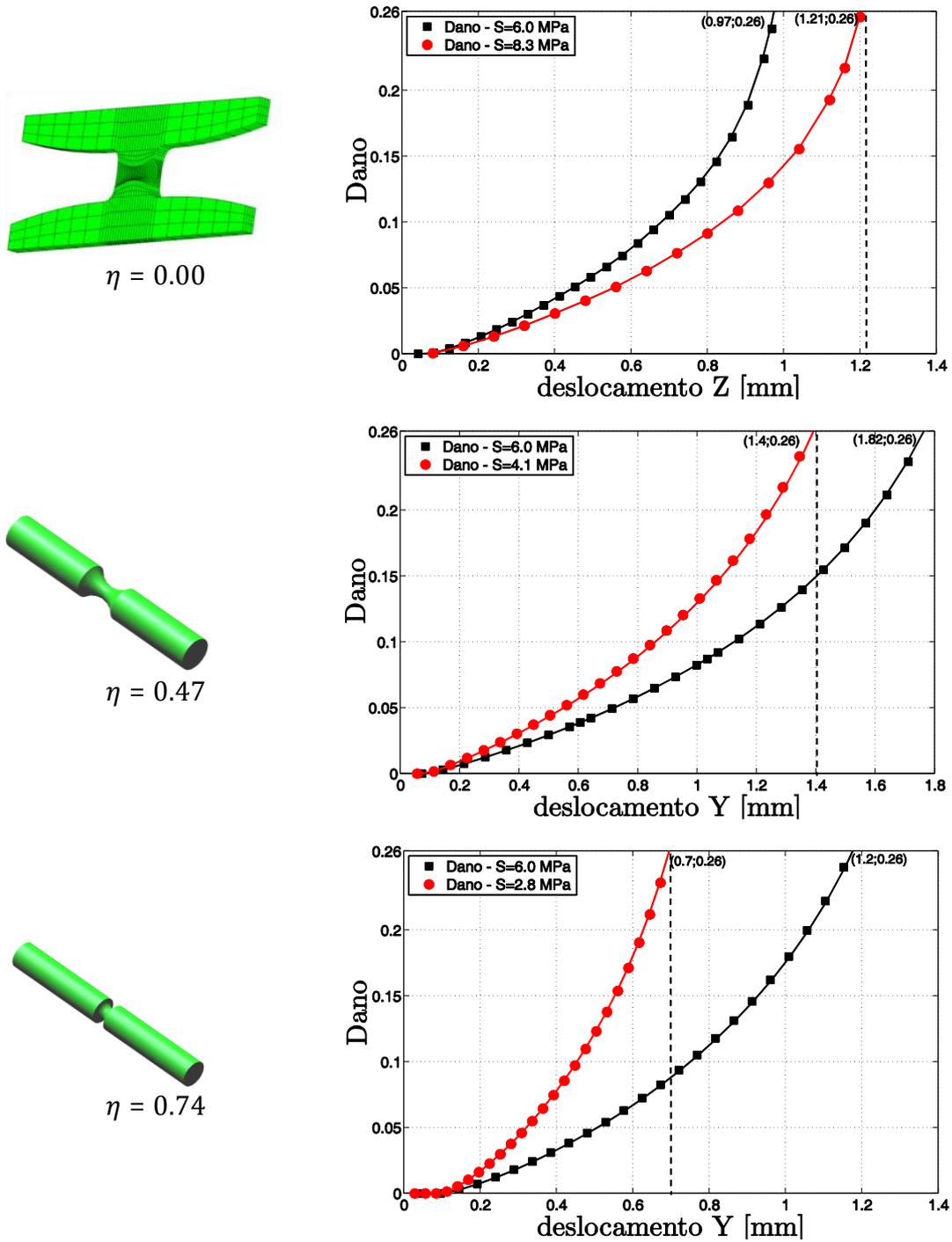


Figura 4.2. Evolução da variável de dano para S calibrado tradicionalmente e S calibrado para cada condição de carregamento.

Assim, mostra-se que este denominador de dano, na verdade, possui uma forte dependência da razão de triaxialidade e, portanto não pode ser considerado um valor constante para qualquer condição aplicada. A Figura 4.3, mostra a relação entre o denominador de dano e razão de triaxialidade. Este comportamento sugere um aperfeiçoamento na lei de evolução da variável de dano, proposta inicialmente por Lemaitre. Há a tendência de se substituir o valor constante calibrado para o denominador de dano, por uma função denominador de dano, que seja capaz de detectar a condição de carregamento aplicada e determinar um valor otimizado para o denominador.

A criação de uma função denominador de dano pode resultar também, na necessidade de se utilizar mais de um ponto de calibração para se definir a correta relação entre o denominador e a razão de triaxialidade.

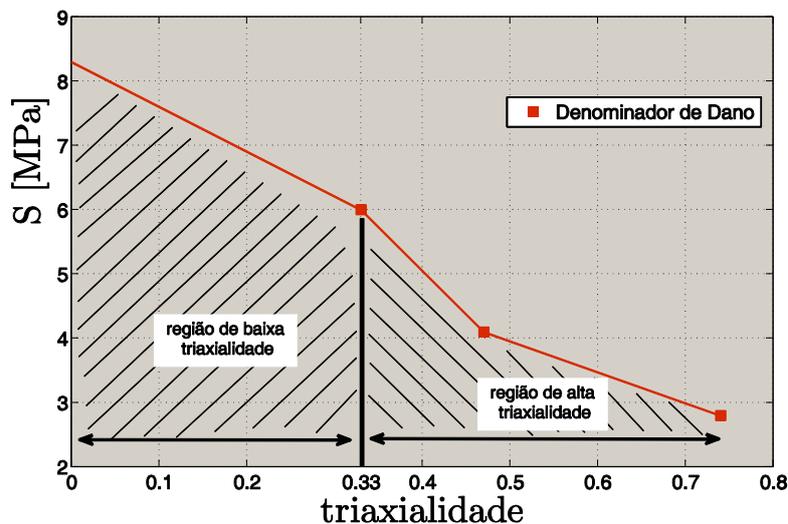


Figura 4.3. Relação de dependência entre o denominador de dano e a razão de triaxialidade.

4.2. A FUNÇÃO DENOMINADOR DE DANO

Através da Figura 4.3, observa-se que o denominador de dano decresce com o aumento da triaxialidade, independente da região estudada. Assim, na tentativa de se criar uma função que retrate tal característica e necessite de um menor número de pontos de calibração para ser definida, as regiões de alta e baixa triaxialidade serão estudadas separadamente.

4.2.1. Região de alta triaxialidade: Tração predominante ($\eta \geq 0.33$)

Assim, para a região de alta triaxialidade, é sugerida uma função onde se utilize somente os parâmetros materiais calibrados tradicionalmente, ou seja, através dos resultados experimentais obtidos com base em um ensaio de tração pura em um corpo de prova cilíndrico liso. A seguinte expressão é então fenomenologicamente sugerida, como:

$$S(\eta) = \frac{a}{3|\eta|}, \quad (4.1)$$

onde $S(\eta)$ representa a função denominador de dano para a região de alta triaxialidade, η é a razão de triaxialidade e a representa o parâmetro material a ser calibrado, ou ainda, representa o valor do denominador de dano calibrado através de um corpo de prova cilíndrico liso ou $\eta = 0.33$. A Equação 4.1 pode ser melhor escrita e interpretada por:

$$S(\eta) = \frac{S_{0.33}}{3|\eta|}, \quad (4.2)$$

onde $S_{0.33}$ representa o denominador de dano calibrado tradicionalmente através do corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura.

4.2.2. Região de baixa triaxialidade: Cisalhamento predominante ($0 \leq \eta < 0.33$)

Para a região de baixa triaxialidade, sugere-se utilizar a condição de cisalhamento puro, $\eta = 0.0$, como um segundo ponto de calibração. Assim, a seguinte equação fenomenológica pode ser definida:

$$\tilde{S}(\xi) = b(1 - \xi^2), \quad (4.3)$$

onde $\tilde{S}(\xi)$ representa a função denominador de dano para a região de baixa triaxialidade, ξ é o terceiro invariante normalizado do tensor desviador e b representa um parâmetro material a ser calibrado, ou ainda, é o valor do denominador de dano, calibrado para condição de cisalhamento puro.

O terceiro invariante normalizado é determinado através da equação, a seguir:

$$\xi = \frac{(27/2) \det \mathbf{S}}{q^3}, \quad (4.4)$$

onde \mathbf{S} representa o tensor das tensões de desvio e q é a tensão equivalente de von Mises, que é definida por $q = \sqrt{(3/2)\mathbf{S}:\mathbf{S}}$. Novamente, a Equação 4.3 pode ser melhor interpretada quando escrita como:

$$\tilde{S}(\xi) = S_{0,0}(1 - \xi^2), \quad (4.5)$$

onde $S_{0,0}$ representa o denominador de dano calibrado através de um ensaio sob cisalhamento puro.

Para que a função denominador de dano seja, agora, aplicável a toda faixa de razão de triaxialidade, as equações 4.2 e 4.5 precisam ser acopladas, mantendo o comportamento já observado. A função denominador de dano resultante será então dependente, tanto da razão de triaxialidade, quanto do terceiro invariante normalizado. A expressão a seguir, representa o acoplamento do comportamento do denominador de dano, dentro das regiões de baixa e alta triaxialidade.

$$S(\eta, \xi) = \frac{S_{0,33}}{3|\eta| + \frac{S_{0,33}}{S_{0,0}}(1 - \xi^2)}. \quad (4.6)$$

A função denominador de dano requer dois pontos de calibração para sua correta definição. Há necessidade de se determinar os valores otimizados de S para um carregamento de cisalhamento puro, $S_{0,0}$ e para um carregamento de tração puro em um corpo de prova cilíndrico liso, $S_{0,33}$.

Esta função assumirá valores da seguinte forma: em condições de cisalhamento puro, tem-se o par razão de triaxialidade e terceiro invariante normalizado, ambos iguais a zero. Assim, substituindo estes valores na Equação 4.6, obtém-se exatamente o valor de $S_{0,0}$. Por outro lado, em condições de alta triaxialidade, o denominador de dano assumirá valores menores ou iguais a $S_{0,33}$. Graficamente, a função pode ser representada através da Figura 4.4, dentro do espaço denominador de dano, razão de triaxialidade e terceiro invariante normalizado.

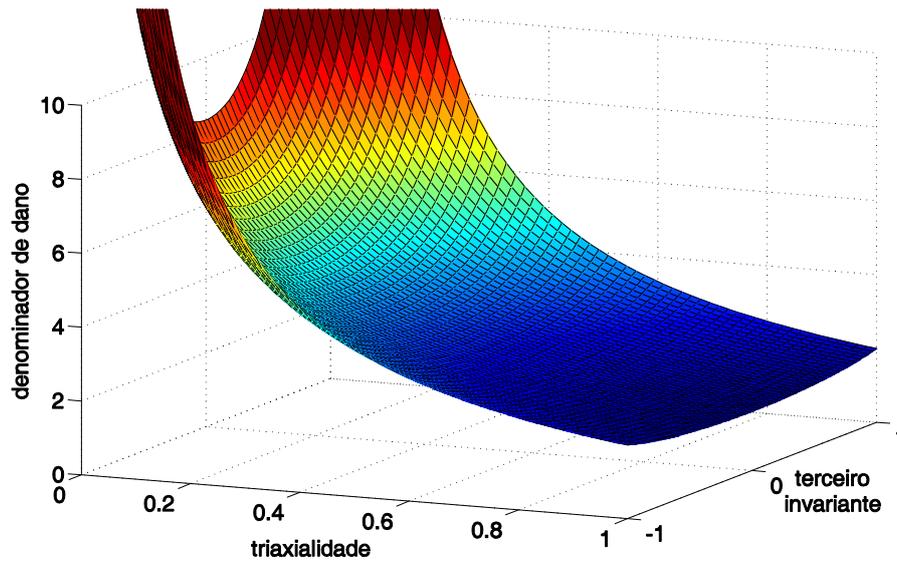


Figura 4.4. Comportamento gráfico da função denominador de dano.

Para um estado plano de tensão, o comportamento da função denominador pode ser dado através da Figura 4.5. Neste caso, observa-se também o decréscimo do valor numérico do denominador, com o aumento do nível de triaxialidade. Este comportamento pode ser também comparado com o verificado na Figura 4.3, onde se tem os valores do denominador de dano obtidos através de um procedimento de calibração.

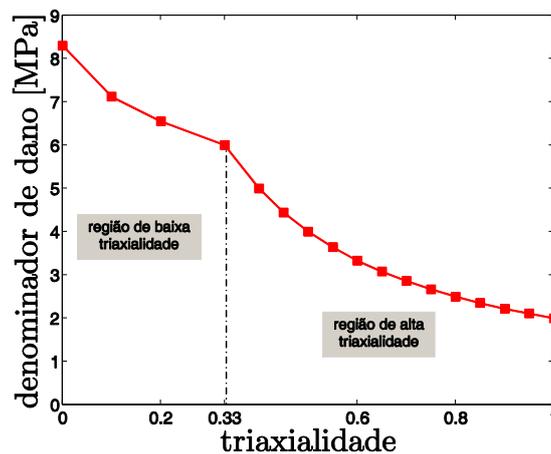


Figura 4.5. Função denominador de dano. Projeção para estado plano de tensão.

A Tabela 4.2 apresenta uma comparação entre os valores para o denominador, obtidos através da curva calibrada (Figura 4.3) e da curva obtida através da nova função denominador, sugerida (Figura 4.5). Nesta comparação, têm-se os valores calibrados e

sugeridos muito próximos, garantindo assim um bom comportamento para a lei de evolução do dano.

Tabela 4.1. Comparação entre os valores de S determinados através de calibração e através da função denominador.

Corpo de prova	η	ξ	S (calibrado)	S (função 4.6)
Borboleta	0.00	0.0	8.3	8,3
Barra lisa	0.33	1.0	6.0	6.0
Barra entalhada, $R=12\text{ mm}$	0.47	1.0	4.1	4.2
Barra entalhada, $R=4\text{ mm}$	0.74	1.0	2.8	2.7

4.3. ACOPLAMENTO DA FUNÇÃO DENOMINADOR E EVOLUÇÃO DO DANO

A lei de evolução do dano para o modelo original de Lemaitre é descrita através da Equação 2.124 ou em função da taxa da deformação plástica equivalente, de acordo com a Equação 2.129. Desta forma, introduzindo a função denominador de dano $S(\eta, \xi)$, como descrita anteriormente, nesta lei de evolução, no lugar da constante material S , tem-se:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left[\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right]^s, \quad (4.7)$$

onde $S(\eta, \xi)$ representam a função denominador de dano, definida de acordo com a Equação 4.6. O parâmetro s é o chamado expoente de dano, no qual geralmente é igual a unidade para a maioria dos materiais dúcteis.

Com esta modificação aplicada ao modelo de dano original de Lemaitre e assumindo novamente a abordagem da existência de um potencial de dissipação único dado pela decomposição aditiva dos potenciais de endurecimento Ψ^p e dano Ψ^d , e definido inicialmente pela Equação 2.119, a nova contribuição no potencial devido ao dano passará a ser escrito na forma:

$$\Psi^d = \frac{S(\eta, \xi)}{(1 - D)(s + 1)} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1}. \quad (4.8)$$

Esta expressão é obtida, assumindo a integração da Equação 4.7 em função da força termodinâmica associado ao dano, Y . Substituindo a Equação 4.8 na expressa da decomposição aditiva do potencial de dissipação (ver Equação 2.119), tem-se agora:

$$\Psi = \Psi^p + \Psi^d = \Phi + \frac{S(\eta, \xi)}{(1-D)(s+1)} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1}, \quad (4.9)$$

com Φ definida por:

$$\Phi(\sigma, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathcal{S})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)). \quad (4.10)$$

É importante destacar que o efeito do chamado endurecimento cinemático, no comportamento mecânico do material é então desprezada, devido ao fato de que somente carregamentos monotônicos são aplicados para as simulações numéricas dos corpos de prova selecionados. Assim, o modelo constitutivo de dano de Lemaitre, com a chamada função denominador de dano, pode ser escrito resumidamente de acordo com a Tabela 4.1.

Tabela 4.2. Modelo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e a função denominador de dano.

<p>(i) Decomposição aditiva da deformação:</p> $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ <p>(ii) Potencial de estado ou potencial termodinâmico:</p> $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, D) = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(r)$ <p>com as forças termodinâmicas definidas por:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad ; \quad Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D} \quad ; \quad R = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r)}{\partial r}$ <p>(iii) Potencial complementar de dissipação ou potencial de fluxo:</p> $\Psi = \Psi^p + \Psi^d = \Phi + \frac{S(\eta, \xi)}{(1-D)(s+1)} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1},$ <p>com:</p> $\Phi(\sigma, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathcal{S})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)),$ <p>a lei de fluxo plástico e a evolução das variáveis internas r e D definidas por:</p> $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad ; \quad \dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$ <p>(iv) Condição de complementaridade:</p> $\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0.$
--

4.4. DEFINIÇÃO DA LEI DE FLUXO PLÁSTICO: MODELO ASSOCIATIVO E NÃO-ASSOCIATIVO

A determinação da lei de fluxo plástico para o modelo modificado de Lemaitre, como proposto acima, parte da definição do uso da plasticidade associativa ou não-associativa, como será visto a seguir.

4.4.1. Modelo associativo modificado de Lemaitre

Para os modelos associativos, a chamada função de escoamento do material é então adotada como potencial de fluxo ou potencial de dissipação, assim:

$$\Psi \equiv \Phi . \quad (4.11)$$

Nestes casos, a associatividade implica em definir que o taxa de crescimento da deformação plástica é um tensor normal a superfície de escoamento, dentro do espaço das tensões principais. Assim, as equações de evolução para a deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, variáveis interna de endurecimento isotrópico r e dano D , são obtidas de acordo como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1-D)\|\boldsymbol{S}\|} , \\ \dot{r} &= -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \dot{\gamma} , \\ \dot{D} &= \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi^p}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Assim, o modelo associativo modificado de Lemaitre com endurecimento e dano isotrópicos e com a chamada função denominador de dano pode ser resumidamente escrito de acordo com a Tabela 4.3.

Tabela 4.3. Modelo associativo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e com a função denominador de dano.

(i) Decomposição aditiva da deformação:	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
(ii) Lei elástica com dano acoplado:	$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}^e$
(iii) Função de escoamento:	$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\boldsymbol{S})}}{(1 - D)} - (\sigma_0 + R(r))$
(iv) Lei de fluxo plástico e evolução de r e D :	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1 - D)\ \boldsymbol{S}\ }$ $\dot{r} = \dot{\gamma}$ $\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s$
com:	$-Y = \frac{1}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3}(1 - \nu)q^2 + 3(1 - 2\nu)p^2 \right]$ $S(\eta, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3 \eta + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)}$
e:	$\eta = p/q \quad ; \quad \xi = 27 \det \boldsymbol{S} / 2q^3$
(v) Condição de complementaridade:	$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma}\Phi = 0.$

4.4.2. Modelo não-associativo modificado de Lemaitre

De acordo com a chamada plasticidade não associativa, a taxa de deformação plástica não é mais um tensor normal a superfície de escoamento, e a função de escoamento não pode ser adotada simplesmente como potencial de fluxo. Assim, a evolução da deformação plástica passar a ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.13)$$

onde Ψ representa o potencial de dissipação definido de acordo com a Equação 4.9. Efetuando a derivada do potencial de dissipação com relação ao tensor tensão, tem-se:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{1}{1-D} \right) \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right], \quad (4.14)$$

onde $\partial S(\eta, \xi)/\partial \boldsymbol{\sigma}$ representa a derivada da função denominador de dano em relação ao tensor tensão que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = - \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right]^2} \left(3 \frac{\eta}{|\eta|} \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - 2\xi \frac{S_{0.33}}{S_{0.00}} \frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right). \quad (4.15)$$

O termo $\partial \eta/\partial \boldsymbol{\sigma}$ representa a derivada da razão de triaxialidade em relação ao tensor tensão que, por sua vez, é definida como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2q} \mathbf{I} - \frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S}. \quad (4.16)$$

Já o termo $\partial \xi/\partial \boldsymbol{\sigma}$ representa a derivada do terceiro invariante normalizado do tensor desviador \mathbf{S} , em relação ao tensor tensão, escrito por:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\xi \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{r} - \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{q} \right), \quad (4.17)$$

onde $(\partial r/\partial \boldsymbol{\sigma})$ e $(\partial q/\partial \boldsymbol{\sigma})$ representam as derivadas, respectivamente, do terceiro invariante normalizado e da tensão equivalente de von Mises, em relação ao tensor tensão, que são determinadas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}}, \\ \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{9}{2r^2} \frac{\partial \det \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $(\partial \det \mathbf{S}/\partial \boldsymbol{\sigma})$ representa a derivada do determinante do tensor desviador \mathbf{S} em relação ao tensor tensão, que pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \det \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} - I_1 \mathbf{S}, \quad (4.19)$$

onde o tensor de segunda ordem \mathbf{M} é definido como sendo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}^2 \mathbf{I}, \quad (4.20)$$

e o termo I_1 representa o primeiro invariante do tensor tensão, que é igual ao traço do mesmo.

Substituindo os resultados acima, na Equação 4.15 e após algumas manipulações matemática, determina-se que:

$$\frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \sigma} = -(a\mathbf{S} - b\mathbf{M} + c\mathbf{I}), \quad (4.21)$$

onde se tem os termos a , b e c definidor como:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} 6\xi^2 I_1\right), \\ b &= \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \frac{27\xi^2}{r^3}\right), \\ c &= \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(3 \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{2q}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado que $\partial\Phi/\partial\sigma$ pode ser retirado da Equação 4.12(a) e substituindo tal expressão juntamente com a Equação 4.21 na Equação 4.14, que defini a evolução da deformação plástica para o modelo modificado não associativo de Lemaitre, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}}{(1-D)\|\mathbf{S}\|} \right. \\ \left. - \left[(a\mathbf{S} - b\mathbf{M} + c\mathbf{I}) \left(\frac{1}{1-D}\right) \left(\frac{s}{s+1}\right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)}\right)^{s+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observa-se que a diferença entre as Equações 4.12(a) e 4.23 representa a introdução da não-associatividade na taxa de evolução da deformação plástica. A evolução da variável interna associada ao endurecimento isotrópico e ao dano podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \dot{\gamma} , \\ \dot{D} &= \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s .\end{aligned}\tag{4.24}$$

Desta forma, o modelo de dano modificado de Lemaitre, considerando a não associatividade, pode ser resumidamente escrito de acordo com a Tabela 4.4.

Tabela 4.4. Modelo não-associativo modificado de Lemaitre com dano e endurecimento isotrópicos e com função denominador de dano.

<p>(i) Decomposição aditiva da deformação:</p> $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ <p>(ii) Lei elástica com dano acoplado:</p> $\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ <p>(iii) Função de escoamento:</p> $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\boldsymbol{S})}}{(1 - D)} - (\sigma_0 + R(r))$ <p>(iv) Lei de fluxo plástico e evolução de r e D:</p> $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1 - D)\ \boldsymbol{S}\ } - \left[(a\boldsymbol{S} - b\boldsymbol{M} + c\boldsymbol{I}) \left(\frac{1}{1 - D} \right) \left(\frac{s}{s + 1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right] \right\}$ $\dot{r} = \dot{\gamma}$ $\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s$ <p>com:</p> $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{S}^2 \boldsymbol{I}$ $-Y = \frac{1}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3} (1 - \nu) q^2 + 3(1 - 2\nu) p^2 \right]$ $S(\eta, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3 \eta + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2)}$ <p>e:</p> $\eta = p/q \quad ; \quad \xi = 27 \det \boldsymbol{S} / 2q^3$ <p>(v) Condição de complementaridade:</p> $\dot{\gamma} \geq 0 , \quad \Phi \leq 0 , \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 .$
--

4.5. DISSIPACÃO MECÂNICA

Nesta seção será verificada a obediência do modelo modificado de Lemaitre, no que se refere à dissipação mecânica intrínseca, ou seja, a obediência a segunda lei da termodinâmica, como descrito pela Equação 2.115. Levando, novamente em consideração, a definição das forças termodinâmicas associadas a cada variável interna, constata-se que a dissipação mecânica devido à plasticidade e ao dano, ambos tem que ser positivas (ver Equação 2.116). Para se demonstrar tal propriedade, tomar-se-á uso do modelo constitutivo proposto acima (ver Simo *et al.*, 1990).

4.5.1. Casos puramente elástico e elasto-plástico.

Neste caso, pode-se definir a dissipação mecânica como sendo:

$$\mathcal{D}_{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - R\dot{r} \geq 0 , \quad (4.25)$$

onde o termo $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ representa o trabalho plástico e pode ser também escrito como uma função da tensão equivalente de von Mises e a deformação plástica equivalente (ver Equação 2.126). Desta forma, a expressão acima pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{D}_{mec} = q\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p - R\dot{r} \geq 0 . \quad (4.26)$$

Para um material elasto-plástico, tem-se que a taxa de crescimento da variável interna associada ao endurecimento isotrópico e da deformação plástica equivalente são expressas por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{\gamma} , \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p &= \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, substituindo a taxas definidas acima (Equação 4.27) na Equação 4.26, tem-se que:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma}(q - R) \geq 0 . \quad (4.28)$$

A Equação 4.28 pode ser agora manipulada matematicamente no sentido de se somar e subtrair a chamada tensão de escoamento do material. Após tal manipulação e rearranjo da expressão, encontra-se que:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma}(q - \sigma_y - R + \sigma_y) \geq 0 . \quad (4.29)$$

Sabendo que $\Phi = q - \sigma_y - R$, tem-se finalmente que a dissipação mecânica pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma}\Phi + \dot{\gamma}\sigma_y \geq 0 . \quad (4.30)$$

Em um caso puramente elástico, onde se tem que $\Phi < 0$, obedecendo às condições de Kuhn-Tucker (ver Equação 2.125), onde também $\dot{\gamma}\Phi = 0$, necessariamente o chamado multiplicado plástico é igual a zero, $\dot{\gamma} = 0$. Assim, neste caso, a dissipação mecânica é nula:

$$\mathcal{D}_{mec} = 0 . \quad (4.31)$$

Por outro lado, considerando um caso elasto-plástico onde se tem que $\Phi = 0$, e necessariamente $\dot{\gamma}\Phi = 0$, a dissipação mecânica passa a ser expressa por:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma}\sigma_y \geq 0 . \quad (4.30)$$

Como, neste caso, de acordo com as condições de Kuhn-Tucker $\dot{\gamma} > 0$ e necessariamente σ_y sendo uma propriedade do material e assumindo valores positivos, garante-se então uma dissipação mecânica positiva.

4.5.2. Caso Lemaitre aperfeiçoado: plasticidade associativa.

Considerando agora o modelo associativo e aperfeiçoado de Lemaitre, como descrito na Tabela 4.3, tem que a dissipação mecânica é representada por uma contribuição plástica e outra devido ao dano:

$$\mathcal{D}_{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - R\dot{r} - Y\dot{D} \geq 0 . \quad (4.31)$$

Representando novamente o trabalho plástico como uma função da tensão equivalente de von Mises e da taxa de crescimento da deformação plástica equivalente (ver Equação 2.126), tem-se:

$$\mathcal{D}_{mec} = q\dot{\bar{\epsilon}}^p - R\dot{r} - Y\dot{D} \geq 0 . \quad (4.32)$$

Sabendo que para o modelo de Lemaitre aperfeiçoado $\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}/(1 - D)$ e substituindo a Equação 4.24 na expressão acima, tem-se agora que:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma} \left[\frac{q}{1 - D} - R - Y \frac{1}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \right] \geq 0 . \quad (4.33)$$

Manipulando matematicamente a Equação 4.33, ao se somar e subtrair o termo σ_y e se reagrupando os termos, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mec} &= \dot{\gamma} \left[\left(\frac{q}{1 - D} - R - \sigma_y \right) + \sigma_y - Y \frac{1}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \right] \geq 0 , \\ \mathcal{D}_{mec} &= \dot{\gamma} \Phi + \dot{\gamma} \sigma_y - Y \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Da Equação 4.34, pode se observar a contribuição plástica e devido ao dano na dissipação mecânica, como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mec}^p &= \dot{\gamma} \Phi + \dot{\gamma} \sigma_y \geq 0 , \\ \mathcal{D}_{mec}^D &= -Y \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como já mostrado anteriormente, a contribuição plástica é necessariamente positiva. Analisando agora, a contribuição devido ao dano, observa-se que, de acordo com a Tabela 4.3, o valor de $-Y$ também é necessariamente positivo, pois é representado por uma função quadrática positiva (ver Equação 2.107). Já a taxa do dano \dot{D} também deve ser uma função não negativa, visto que a chamada função denominador de dano assume somente valores positivos. Isso significa que a variável de dano somente leva em consideração a degradação progressiva de materiais, não sendo possível nenhum tipo de recuperação de energia.

4.5.3. Caso Lemaitre aperfeiçoado: plasticidade não-associativa.

Neste caso, assumindo-se que a dissipação mecânica é escrita de acordo com a Equação 4.32, e a evolução das variáveis internas é definida como mostrado nas Equações 4.23 e 4.24. Assim, tem-se que:

$$\mathcal{D}_{mec} = q \dot{\epsilon}^p - R \dot{\gamma} - Y \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \geq 0 . \quad (4.36)$$

A evolução da deformação plástica equivalente, neste caso, é determinada como se segue:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \beta , \quad (4.37)$$

onde β é definido como sendo:

$$\beta = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{1-D} \right) \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \\ + \frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \sigma} : \frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \sigma} \left[\left(\frac{1}{1-D} \right) \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right]^2 \end{array} \right\}} . \quad (4.38)$$

Como os termos Φ , $S(\eta, \xi)$ e $(-Y)$ assume somente valores positivos, assim $\beta > 0$. Substituindo a Equação 4.37 em 4.36, e manipulando o resultado matematicamente, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mec} &= \dot{\gamma} \left[q\beta - R - Y \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \right] \geq 0 , \\ \mathcal{D}_{mec} &= \beta \dot{\gamma} \Phi + \beta \dot{\gamma} \sigma_y - Y \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Desta forma, verifica-se que como $\beta \dot{\gamma} \Phi = 0$ e $\beta \dot{\gamma} \sigma_y > 0$, a dissipação plástica, para o modelo não-associativo, é sempre positiva. Como já mostrado anteriormente, a dissipação devido ao dano pode assumir valores maiores ou iguais a zero. Portanto, a dissipação mecânica, neste caso, nunca pode ser negativa.

5. ALGORITMO IMPLÍCITO PARA O MODELO APERFEIÇOADO DE LEMAITRE

Neste capítulo será abordada a estratégia numérica usada para integração do modelo aperfeiçoado de Lemaitre. Novamente, como descrito no Capítulo 3, a estratégia numérica é baseada em um código acadêmico implícito de elementos finitos e usa-se a chamada metodologia da *decomposição do operador* para integração do modelo constitutivo aperfeiçoado. Como foi descrito no Capítulo 4, será apresentada a estratégia numérica para o modelo associativo, tentando manter o chamado preditor elástico com apenas uma equação não linear, tendo como variável o multiplicador plástico, $\Delta\gamma$. Já para o modelo não-associativo, a estratégia numérica aplicada será baseada na resolução de um sistema não-linear com três equações, sendo uma tensorial para o tensor tensão, σ , e outras duas escalares para o multiplicador plástico e para a variável isotrópica de dano ($\Delta\gamma, D$).

5.1 MODELO ASSOCIATIVO APERFEIÇOADO: Estratégia numérica.

O chamado modelo de dano isotrópico aperfeiçoado de Lemaitre pode ser resumidamente analisado, de acordo com a Tabela 4.3. A mesma apresenta a variável de dano de Lemaitre com a chamada função denominador de dano e considera que o potencial de dissipação plástico é igual à função de escoamento do material, $\Psi \equiv \Phi$. Nas etapas a seguir, serão apresentados os passos para integração implícita do presente modelo, tendo como base a metodologia da *decomposição do operador* (ver Simo *et al.*, 1998).

5.1.1 Lei de fluxo plástico e evolução das variáveis interna r e D .

A lei de fluxo plástico para o modelo associativo e aperfeiçoado de Lemaitre, bem como a evolução das variáveis internas relacionadas ao endurecimento e dano isotrópicos podem ser determinadas através da derivada do potencial de dissipação (Equação 4.12) com relação a respectivamente: tensor de Cauchy, força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico e energia livre associada ao dano. As mesmas podem ser matematicamente representadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}}{(1-D)\|\mathbf{S}\|} , \\
\dot{r} &= \dot{\gamma} , \\
\dot{D} &= \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s ,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $S(\eta, \xi)$ representa a função denominador de dano que é definida pela Equação 4.6. Aplicando a chamada discretização implícita de Euler (Simo e Hughes, 1998) e após algumas manipulações matemáticas, o corretor plástico é então representado pelo seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^{trial} - \frac{3G\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma) &= 0 , \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1-D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} &= \mathbf{0} , \\
D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s &= 0 .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Considerando a co-linearidade entre os termos $(\mathbf{S}_{n+1}/\|\mathbf{S}_{n+1}\|)$ e $(\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}/\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|)$ e substituindo o segundo na Equação 5.2b, pode-se então escrever a equação de atualização das tensões em função do chamado estado tentativa e das variáveis $\Delta\gamma$ e D_{n+1} , de acordo com o que se segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1-D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} = \mathbf{0} . \tag{5.3}$$

Da equação residual acima e considerando ainda a decomposição aditiva do tensor das deformações elásticas tentativa em uma parte desviadora e outra hidrostática ($\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \varepsilon_v^e \mathbf{I}$), tem-se que:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \left(1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}} \right) \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} , \tag{5.4}$$

$$p_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{p}_{n+1}^{trial} = (1 - D_{n+1}) K \varepsilon_{v\,n+1}^{e\,trial} .$$

Como as contribuições desviadora e hidrostática do tensor tensão podem ser escritas como funções do estado tentativa, da variável isotrópica de dano e do multiplicador plástico no chamado pseudo-tempo t_{n+1} , o corretor plástico definido

inicialmente pela Equação 5.2, pode ser reescrito como um sistema de duas equações não-lineares escalares, tendo como variáveis o multiplicador plástico e o dano isotrópico.

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{trial} - \frac{3G\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma) &= 0 , \\ D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s &= 0 , \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a força termodinâmica associada ao dano também pode ser reescrita como uma função do estado tentativa, do multiplicador plástico e do dano no pseudo-tempo t_{n+1} :

$$-Y(D_{n+1}, \Delta\gamma) = \frac{[(1 - D_{n+1})\tilde{q}^{trial} - 3G\Delta\gamma]^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} . \quad (5.6)$$

Analisando a chamada função denominador de dano, pode-se então substituindo a Equação 5.4a na Equação 4.4 discretizada e assim concluir que o terceiro invariante normalizado no pseudo-tempo t_{n+1} é igual ao estado tentativa.

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{trial} = \tilde{\xi}_{n+1}^{trial} . \quad (5.7)$$

Da mesma forma, sabendo que a triaxialidade é definida pela razão entre a pressão hidrostática e a tensão equivalente de von Mises, tem-se da Equação 5.4 que:

$$\eta_{n+1} = \left(\frac{1 - D_{n+1}}{1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right) \tilde{\eta}_{n+1}^{trial} . \quad (5.8)$$

Considerando que os termos $(1 - D_{n+1})$ e $(1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}})$ sejam sempre positivos, a Equação 5.8 pode ser também escrita como:

$$|\eta_{n+1}| = \left(\frac{1 - D_{n+1}}{1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right) |\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}| . \quad (5.9)$$

Usando novamente a definição de integridade material (ver Equações 3.18 e 3.19), a força termodinâmica associada ao dano pode continuar sendo definida pela Equação 3.20. Assim, o corretor plástico definido pelo sistema de equações não-lineares

(Equação 5.5), pode ser agora reescrito como uma única equação não-linear tendo como variável o multiplicador plástico.

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega_{n+1}(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega_{n+1}(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S(\Delta\gamma)} \right)^s = 0 , \quad (5.10)$$

onde a função denominador de dano é escrita como:

$$S(\Delta\gamma) = \frac{S_{0.33}}{3 \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right) |\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi_{n+1}^{trial^2})} . \quad (5.11)$$

A integridade material neste caso, é escrita em função do estado tentativa e do multiplicador plástico, como sendo:

$$\omega_{n+1} = \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} . \quad (5.12)$$

De forma resumida, a estratégia de integração numérica implícita para o modelo associativo aperfeiçoado de Lemaitre pode ser apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo associativo aperfeiçoado de Lemaitre.

(i) Estado elástico tentativa: Dado o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e as variáveis internas no pseudo-tempo t_n :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad R_{n+1}^{trial} = R_n \quad ; \quad D_{n+1}^{trial} = D_n \\ \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad ; \quad \tilde{p}_{n+1} = K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial} \quad ; \quad \tilde{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|/(1-D_n)\end{aligned}$$

(ii) Checar admissibilidade plástica:

$$\text{Se } \Phi^{trial} = \tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y^{trial}(R_{n+1}^{trial}) \leq 0, \text{ então}$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \text{ (passo elástico) e vá para (v)}$$

Senão, vá para (iii)

(iii) Mapeamento de retorno (**passo plástico**): Resolver a equação abaixo para $\Delta\gamma$, usando o método de *Newton-Raphson*.

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y(\Delta\gamma)}{S(\Delta\gamma)} \right)^s = 0$$

onde,

$$\omega(\Delta\gamma) = \frac{3G \cdot \Delta\gamma}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)}$$

$$-Y(\Delta\gamma) \equiv \frac{[\sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K}$$

$$S(\Delta\gamma) = \frac{S_{0.33}}{3 \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}}} \right) \left| \frac{\tilde{p}_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \right| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \left\{ 1 - \left[\frac{(27/2) \det \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial^3}} \right]^2 \right\}}$$

(iv) Atualizar as outras variáveis:

$$\begin{aligned}R_{n+1} &= R_n + \Delta\gamma \quad ; \quad D_{n+1} = 1 - \omega(\Delta\gamma) \\ p_{n+1} &= \omega(\Delta\gamma) \tilde{p}_{n+1} \quad ; \quad q_{n+1} = \omega(\Delta\gamma) \sigma_y(R_{n+1}) \\ \mathbf{S}_{n+1} &= \frac{q_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \frac{1}{2G} \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial} \mathbf{I}\end{aligned}$$

(v) Sair

5.1.2 Operador tangente consistente.

Para o modelo associativo e aperfeiçoado de Lemaitre, o operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito de acordo com a equação a seguir:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{dp_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} \otimes \mathbf{I} , \quad (5.13)$$

ou ainda:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{dp_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}} \mathbf{I} \otimes \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} , \quad (5.14)$$

onde a derivada da contribuição desviadora e volumétrica do tensor deformação, com relação ao tensor deformação tentativa pode ser escrito como:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} , \quad (5.15)$$

$$\mathbf{I} \otimes \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} .$$

As derivadas das contribuições desviadora e hidrostática do tensor tensão são determinadas através da diferenciação da Equação 5.4, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}} = & \left[\frac{6G^2\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}} \left(\frac{1}{\tilde{q}^{trial}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}\|} - 1 \right) + 2G(1 - D_{n+1}) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \\ & - \frac{dD_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}} - \frac{3G}{\tilde{q}^{trial}} \frac{d\Delta\gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}} , \end{aligned} \quad (5.16)$$

e,

$$\frac{dp_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}} = K(1 - D_{n+1}) - \frac{dD_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}} K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} . \quad (5.17)$$

Assim, a derivada da variável de dano com relação a contribuição desviadora e volumétrica do tensor das deformações tentativa pode ser determinada através da diferenciação da Equação 5.12. Sabendo que a integridade material, ω , é dada pela Equação 3.18:

$$\frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} = -\frac{3G}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} \left(1 + \frac{H \Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} \right) \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}}, \quad (5.18)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} = & -\frac{3G}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} \left(1 + \frac{H \Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)} \right) \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} \\ & + \frac{6G^2 \Delta\gamma}{[\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]^2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e trial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e trial}\|} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e trial}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por sua vez, a derivada do multiplicador plástico com relação a contribuição desviadora e hidrostática do tensor das deformações tentativa é dada pela diferenciação da Equação 5.10, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} = & \frac{1}{\left[\frac{1}{\omega_{n+1}} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^s \right]} \left\{ - \left[1 - \frac{\Delta\gamma}{\omega_{n+1}^2} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^s \right] \frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta\gamma s}{\omega_{n+1} S(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^{s-1} \left[\frac{d(-Y)}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} - \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right) \frac{dS(\Delta\gamma)}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} = & \frac{1}{\left[\frac{1}{\omega_{n+1}} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^s \right]} \left\{ - \left[1 - \frac{\Delta\gamma}{\omega_{n+1}^2} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^s \right] \frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta\gamma s}{\omega_{n+1} S(\Delta\gamma)} \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right)^{s-1} \left[\frac{d(-Y)}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} - \left(\frac{-Y}{S(\Delta\gamma)} \right) \frac{dS(\Delta\gamma)}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

É importante destacar que:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} = & -\frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}}, \\ \frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} = & -\frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

A derivada da força termodinâmica associada ao dano em termos do tensor deformação tentativa é dado pela diferenciação da Equação 5.6:

$$\frac{d(-Y)}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} = \frac{[\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]}{3G} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} + K\varepsilon_{v n+1}^{e trial}, \quad (5.23)$$

$$\frac{d(-Y)}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} = \frac{[\tilde{q}^{trial} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]}{3G} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}}.$$

E finalmente, a derivada da função denominador de dano em relação ao tensor das deformações tentativa é determinado através da diferenciação da Equação 5.11:

$$\frac{dS(\Delta\gamma)}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} = m \left\{ \frac{3|\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}|}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \left[\frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} - \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right. \right. \quad (5.24)$$

$$\left. \left. \left(\frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} - \frac{3G}{\tilde{q}^{trial}} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{v n+1}^{e trial}} \right) \right] + 3K \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right) \frac{\tilde{p}_{n+1}}{|\tilde{q}^{trial}| |\tilde{p}_{n+1}|}, \right.$$

e,

$$\frac{dS(\Delta\gamma)}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} = m \left\{ \frac{3|\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}|}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \left[\frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} - \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right. \right. \quad (5.25)$$

$$\left. \left. \left(\frac{d\omega_{n+1}}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} - \frac{3G}{\tilde{q}^{trial}} \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{d n+1}^{e trial}} \right) \right] - \left(\frac{\omega_{n+1} 6G |\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}|}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right)$$

$$\left[\frac{\tilde{q}^{trial}}{|\tilde{q}^{trial}|} + \frac{G \Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial^2} \left(\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}} \right)} \right] \otimes \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\varepsilon_{d n+1}^{e trial}}{\|\varepsilon_{d n+1}^{e trial}\|} : d\varepsilon_{d n+1}^{e trial},$$

onde m é definido como sendo:

$$m = - \frac{S_{0.33}}{\left[3 \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}} \right) |\tilde{\eta}_{n+1}^{trial}| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi_{n+1}^{trial^2}) \right]^2}. \quad (5.26)$$

5.2 MODELO NÃO-ASSOCIATIVO APREFEIÇOADO: Estratégia numérica.

De acordo com a Tabela 4.4, o chamado modelo não-associativo de Lemaitre pode então ser resumidamente apresentado. Neste caso, o potencial de dissipação é então definido pela Equação 4.9 e a lei de fluxo plástico é determinada como sendo a derivada deste potencial em relação ao tensor tensão. Nas etapas a seguir, serão apresentados os passos para integração implícita do presente modelo, tendo também, como base a metodologia da *decomposição do operador* (ver Simo *et al.*, 1998).

5.2.1 Lei de fluxo plástico e evolução das variáveis interna r e D .

Neste caso, a lei de fluxo plástico e evolução das variáveis internas associadas ao endurecimento isotrópico e dano podem ser determinadas através da derivada do potencial de dissipação em relação ao tensor tensão e forças termodinâmicas associadas. A Equação 5.27 apresenta matematicamente tais variáveis.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-D)} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} - \left[(a\mathbf{S} - b\mathbf{M} + c\mathbf{I}) \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right] \right\}, \quad (5.27)$$

$$\dot{r} = \dot{\gamma},$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s,$$

onde o tensor \mathbf{M} e os escalares a , b e c são definidos de acordo com as Equações 4.20 e 4.22, respectivamente. Aplicando novamente a discretização implícita de Euler (Simo e Hughes, 1998) e após algumas manipulações matemáticas, o corretor plástico, neste caso, é então representado pelo seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma) = 0 , \\
& \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} \\
& - \Delta\gamma \mathbb{D} : \left[(a\mathbf{S}_{n+1} - b\mathbf{M}_{n+1} + c\mathbf{I}) \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1})} \right)^{s+1} \right] = \mathbf{0} , \\
& D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s = 0 .
\end{aligned} \tag{5.28}$$

A Equação 5.28b pode ser decomposta em uma parte desviadora e outra hidrostática, de acordo com o que se segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{n+1} &= \left(1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}} \right) \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma h(-Y, S) [(a\mathbf{S}_{n+1} - b\mathbf{M}_{n+1})] , \\
p_{n+1}\mathbf{I} &= [(1 - D_{n+1})\tilde{p}_{n+1}^{trial} + K c \Delta\gamma h(-Y, S)] \mathbf{I} ,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

onde $h(-Y, S)$ é uma função representada por:

$$h(-Y, S) = \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1})} \right)^{s+1} . \tag{5.30}$$

Os termos $-Y$ e $S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1})$ são então escritos como:

$$\begin{aligned}
-Y &= \frac{q_{n+1}^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{p_{n+1}^2}{2K(1 - D_{n+1})^2} , \\
S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1}) &= \frac{S_{0.33}}{3 \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \left(1 - \left[\frac{(27/2) \det \mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}^3} \right]^2 \right)} ,
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde a tensão equivalente de von Mises é determinada com $q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}_{n+1}\|$. Neste caso, o sistema de equações não-lineares não pode ser simplificado e, portanto, o mesmo deverá ser resolvido de acordo com a abordagem de Newton-Raphson, tendo como variáveis o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, o multiplicador plástico e a variável isotrópica de dano. A Tabela 5.2 apresenta a estratégia de integração numérica implícita para o modelo não-associativo aperfeiçoado de Lemaitre.

Tabela 5.2. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo não-associativo aperfeiçoado de Lemaitre.

(i) Estado elástico tentativa: Dado o incremento de deformação $\Delta \varepsilon$ e as variáveis internas no pseudo-tempo t_n :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad R_{n+1}^{trial} = R_n \quad ; \quad D_{n+1}^{trial} = D_n \\ \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} &= 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad ; \quad \tilde{p}_{n+1} = K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \quad ; \quad \tilde{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\| / (1 - D_n) \end{aligned}$$

(ii) Checar a admissibilidade plástica:

$$\text{Se } \Phi^{trial} = \tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_y^{trial}(R_{n+1}^{trial}) \leq 0, \text{ então}$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \text{ (passo elástico) e vá para (v)}$$

Senão, vá para (iii)

(iii) Mapeamento de retorno (*passo plástico*): Resolver o sistema de equações abaixo para $\Delta \gamma$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e D_{n+1} usando o método de Newton-Raphson.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta \gamma) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} + \Delta \gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} - \Delta \gamma h(-Y, S) \mathbb{D} : (a \mathbf{S}_{n+1} - b \mathbf{M}_{n+1} + c \mathbf{I}) = \mathbf{0} \\ D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s = 0 \end{array} \right.$$

onde,

$$h(-Y, S) = \left(\frac{s}{s+1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1})} \right)^{s+1}$$

$$-Y = \frac{\tilde{q}_{n+1}^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K}$$

$$S(\eta_{n+1}, \xi_{n+1}) = \frac{S_{0.33}}{3 \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \left(1 - \left[\frac{(27/2) \det \mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}^3} \right]^2 \right)}$$

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_{n+1}^2 \mathbf{I}$$

$$a = \frac{S_{0.33}}{\left[3 \left| \eta_{n+1} \right| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi_{n+1}^2) \right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} 6 \xi_{n+1}^2 \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2 \right)$$

continuação:

$$b = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta_{n+1}| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi_{n+1}^2)\right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \frac{27\xi_{n+1}^2}{r_{n+1}^3} \right)$$

$$c = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta_{n+1}| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi_{n+1}^2)\right]^2} \left(3 \frac{\eta_{n+1}}{|\eta_{n+1}|} \frac{1}{2q_{n+1}} \right)$$

(iv) Atualizar as outras variáveis internas:

$$R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \frac{1}{2G} \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e \text{ trial}} \mathbf{I}$$

(v) Sair

De acordo com o método de Newton-Raphson, a estratégia para resolução do sistema descrito pela Equação 5.28, parte da linearização do mesmo, onde a derivada parcial de cada equação residual necessita ser determinada. A expressão a seguir, representa o sistema não-linear (Equação 5.28) escrito na forma linearizada:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial res_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial res_D}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\Delta\gamma \\ \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} res_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, D_{n+1}) \\ res_{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, D_{n+1}) \\ res_D(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, D_{n+1}) \end{bmatrix}^k, \quad (5.32)$$

onde os termos $(\partial res_x / \partial x)$ representam as derivadas parciais de cada equação de resíduo, em relação a cada variáveis do sistema não-linear. Os termos $res_{\Delta\gamma}$, $res_{\boldsymbol{\sigma}}$ e res_D representam as equações de resíduo para o multiplicador plástico, tensor tensão e variável isotrópica de dano, respectivamente, e são definidos de acordo com as Equações 5.28a, 5.28b e 5.28c. Já os termos $\delta\Delta\gamma$, $\delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e δD_{n+1} representam os incrementos das variáveis do sistema dentro da iteração $k + 1$. A Tabela 5.3 descreve de forma esquemática o algoritmo para resolução do sistema acima, através do método de Newton-Raphson.

Tabela 5.3. Algoritmo de Newton-Raphson para resolução do sistema não-linear.

- (i) Inicializar o contador k , bem como os valores iniciais sugeridos para as variáveis do problema $\Delta\gamma^{(0)} = 0$, $\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_n$ e $D_{n+1}^{(0)} = D_n$. Determinar as equações de resíduo, de acordo com os valores sugeridos:

$$\begin{bmatrix} res_{\Delta\gamma} \\ res_{\sigma} \\ res_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma) \\ \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} - \Delta\gamma h \mathbb{D} : (a\mathbf{S}_{n+1} - b\mathbf{M}_{n+1} + c\mathbf{I}) \\ D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s \end{bmatrix}$$

- (ii) Aplicar as iterações de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_D}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_D}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\Delta\gamma \\ \delta\sigma_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} res_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, \sigma_{n+1}, D_{n+1}) \\ res_{\sigma}(\Delta\gamma, \sigma_{n+1}, D_{n+1}) \\ res_D(\Delta\gamma, \sigma_{n+1}, D_{n+1}) \end{bmatrix}^k$$

Determinar novos valores para $\Delta\gamma$, σ_{n+1} e D_{n+1} :

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma^k + \delta\Delta\gamma^{k+1}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^k + \delta\sigma_{n+1}^{k+1}$$

$$D_{n+1} = D_{n+1}^k + \delta D_{n+1}^{k+1}$$

Atualizar outras variáveis de estado:

$$R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbb{D}^{-1} : \sigma_{n+1}$$

- (iii) Verificar a convergência:

$$\tilde{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y(R_n + \Delta\gamma)$$

Se $|\tilde{\Phi}| \leq \text{Tolerância}$, então: ir para item (iv).

Caso contrário, retornar ao item (ii).

- (iv) Fim.

5.2.2 Operador tangente consistente

Para o modelo não-associativo e aperfeiçoado de Lemaitre, a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito de acordo com o que se segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_D}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_D}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta\gamma \\ d\sigma_{n+1} \\ dD_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Invertendo o sistema linearizado acima, pode-se então escrever que:

$$\begin{bmatrix} d\Delta\gamma \\ d\sigma_{n+1} \\ dD_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial res_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial res_D}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial res_D}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (5.35)$$

As derivadas parciais das equações de resíduo, em relação às variáveis do problema são expressas por:

$$\frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = -H, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{1}{(1 - D_{n+1})} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} : \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = -\frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}_{n+1}\|, \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} - h(-Y, S) \mathbb{D}: (a\mathbf{S}_{n+1} - b\mathbf{M}_{n+1} + c\mathbf{I}), \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial res_{\sigma}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 3G\Delta\gamma \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{1}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} - \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial^2}} \otimes \frac{\partial \tilde{q}_{n+1}^{trial}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ &\quad - \Delta\gamma \frac{\partial h}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes (2G a \mathbf{S}_{n+1} - 2G b \mathbf{M}_{n+1} + K c \mathbf{I}) \\ &\quad - \Delta\gamma h 2G \left(\frac{\partial a}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes \mathbf{S}_{n+1} + a \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} - \frac{\partial b}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes \mathbf{M}_{n+1} - b \frac{\partial \mathbf{M}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ &\quad - \Delta\gamma h K \left(\frac{\partial c}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes \mathbf{I} \right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial res_{\sigma}}{\partial D_{n+1}} = -\mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e trial}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial res_D}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial res_D}{\partial \sigma_{n+1}} = -\frac{\Delta\gamma s}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s-1} \left[\frac{\partial(-Y)}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{1}{S(\eta, \xi)} - \frac{(-Y)}{S(\eta, \xi)^2} \frac{\partial S(\eta, \xi)}{\partial \sigma_{n+1}} \right], \quad (5.43)$$

e,

$$\frac{\partial res_D}{\partial D_{n+1}} = 1 + \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s. \quad (5.44)$$

Já os termos C_{11} , C_{13} , C_{31} e C_{33} representam escalares. C_{12} , C_{21} , C_{23} e C_{32} representam tensores de segunda ordem e C_{22} representa um tensor de quarta ordem. Assim, a partir da Equação 5.34, pode-se escrever que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = (1 - D_{n+1})\mathbb{C}_{22}:\mathbb{D} , \quad (5.45)$$

onde a operação $(\mathbb{C}_{22}:\mathbb{D})$ representa a composição entre o tensor de quarta ordem \mathbb{C}_{22} e o tensor de quarta ordem \mathbb{D} , dado pela matriz de elasticidade.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para se testar a robustez do modelo de Lemaitre aperfeiçoado, neste capítulo são apresentados resultados comparativos entre a nova proposição, o modelo original e dados experimentalmente disponíveis na literatura. Para isto, dois tipos de materiais são testados (liga de alumínio 2024-T351 e aço 1045), utilizando corpos de prova que resultem em diferentes níveis de triaxialidade, como: corpo de prova do tipo “borboleta”, onde se podem simular condições de cisalhamento puro e combinações de carregamento, como tração seguida de cisalhamento em diferentes níveis, avaliando assim a faixa de baixa triaxialidade, $0 \leq \eta < 0.33$; corpos de prova cilíndricos lisos e entalhados, proporcionando uma avaliação na faixa de alta triaxialidade, $\eta \geq 0.33$. Os resultados experimentais utilizados neste trabalho foram retirados da literatura disponível, tendo como principais referências os trabalhos desenvolvidos por Bai *et al.* (2007) e Bai (2008).

6.1. GEOMETRIA E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Com o objetivo de se avaliar o desempenho da nova formulação proposta, neste item são detalhados a geometria dos corpos de prova para dos dois tipos de materiais utilizados, bem como a discretização espacial dos mesmos.

6.1.1. Geometria dos corpos de prova

Como descrito anteriormente, dois tipos de materiais foram utilizados para fabricação dos corpos de prova aqui testados. Para a liga de alumínio 2024-T351, utiliza-se um corpo de prova do tipo “borboleta” para simulação de estados de tensão dentro da faixa de baixa triaxialidade ($0 \leq \eta < 0.33$). Para a faixa de alta triaxialidade ($\eta \geq 0.33$), utilizam-se dois corpos cilíndricos entalhados ($R = 4 \text{ mm}$ e $R = 12 \text{ mm}$) e um corpo cilíndrico liso. Já para o aço 1045, na condição de alta triaxialidade, utilizam-se dois corpos de prova cilíndricos, sendo um liso e outro entalhado ($R = 10.5 \text{ mm}$) e utiliza-se, também, o corpo de prova do tipo “borboleta” para a condição de baixa triaxialidade. Assim, a Figura 6.1 apresenta as geometrias e dimensões dos corpos de prova do tipo “borboleta” e cilíndrico liso, utilizados em ambos os materiais. Já as Figuras 6.2 e 6.3 apresentam as geometrias e dimensões para os corpos de prova entalhados, utilizados para o aço e para a liga de alumínio, respectivamente.

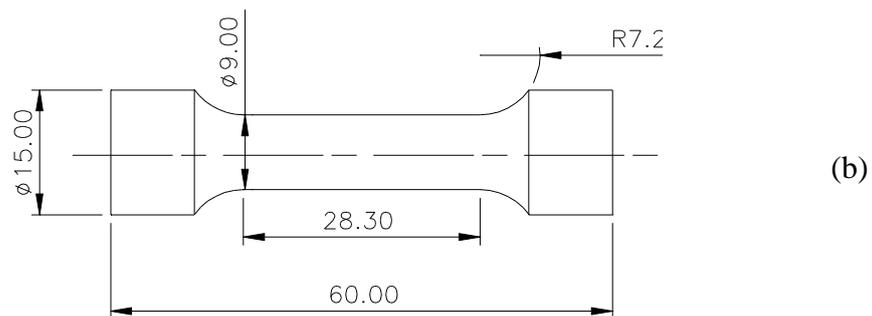
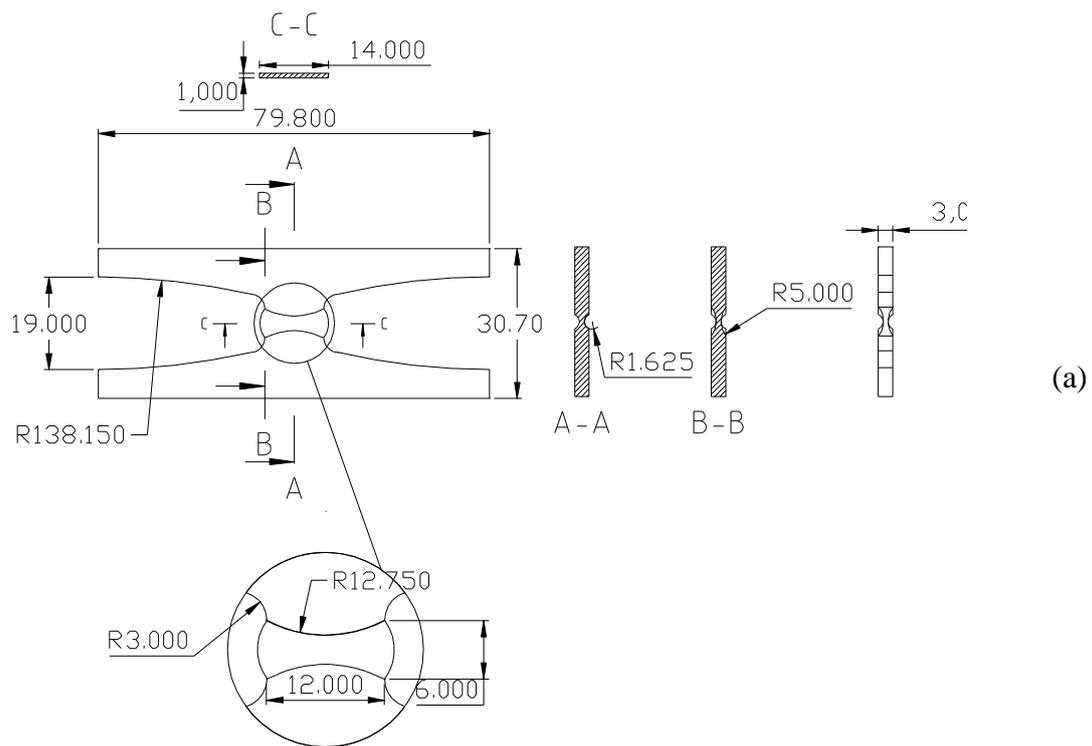


Figura 6.1. Corpos de prova (a) borboleta e (b) cilíndrico liso, utilizados em ambos os materiais (Bai, 2008).

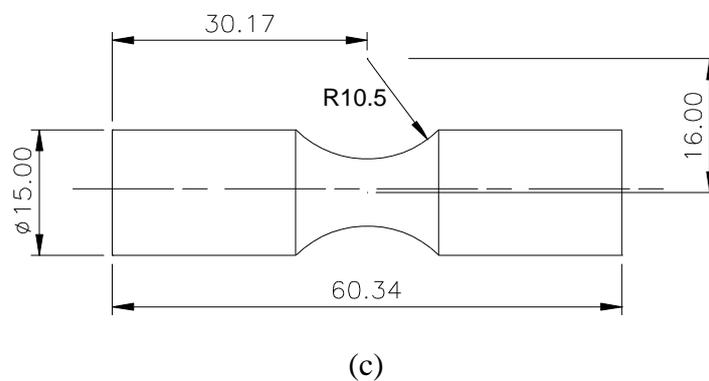


Figura 6.2. Corpo de prova cilíndrico entalhado, utilizado para o aço 1045 (Bai, 2008).

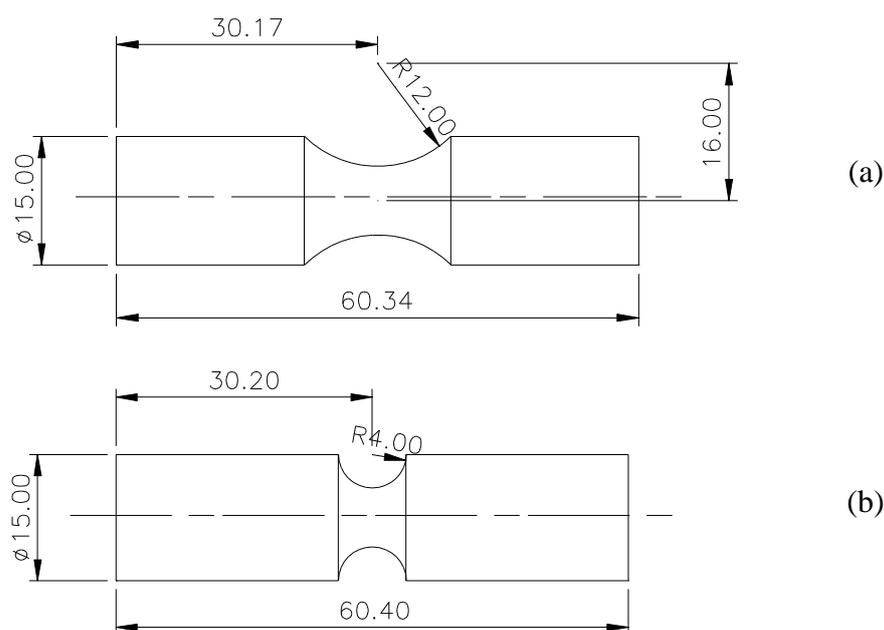


Figura 6.3. Corpos de prova cilíndricos entalhados, utilizado para a liga de alumínio 2024-T351 (Bai, 2008).

6.1.2. Discretização espacial dos corpos de prova

Para se testar a robustez no modelo proposto, o mesmo foi então implementado em um desenvolvimento acadêmico de elementos finitos, denominado por HYPLAS (ver De Souza Neto, 2008). Este desenvolvimento acadêmico foi inicialmente escrito em linguagem FORTRAN 77 e posteriormente expandido para resolução de problemas tridimensionais em linguagem FORTRAN 90. Os corpos de prova utilizados neste trabalho foram então discretizados, tendo como ferramenta computacional um programa comercial chamado GID na versão 10.0. Inicialmente diferentes níveis de discretização foram estudados e testados no intuito de se garantir um menor efeito da dependência da malha na precisão dos resultados numéricos. Contudo, somente os níveis ótimos de discretização são apresentados neste trabalho. Para o corpo de prova do tipo “borboleta” uma malha tridimensional de elementos finitos foi utilizada, com 2432 elementos de vinte nós, seguindo de 12681 nós, como apresentado na Figura 6.4. Neste caso, é utilizada uma estratégia de integração reduzida com nove pontos de Gauss.

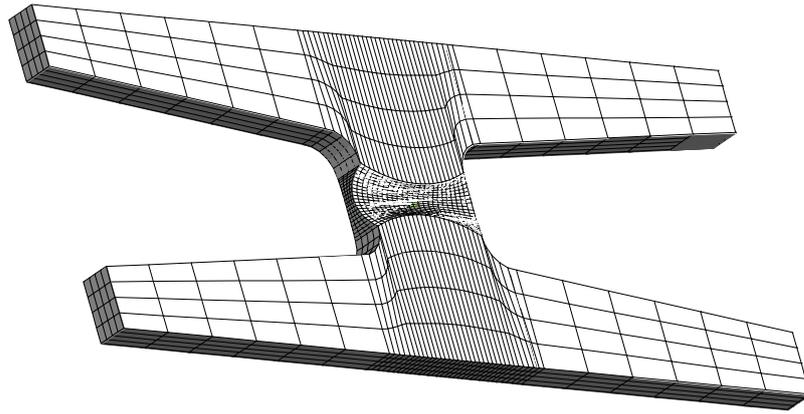


Figura 6.4. Malha tridimensional de elementos finitos de vinte nós. Corpo de prova do tipo “borboleta”.

Já para os corpos de prova cilíndricos, ambas as regiões de ensaio foram discretizadas com elementos quadriláteros de oito nós, com quatro pontos de Gauss. Um total de 1800 elementos foram usados, seguido de 5581 nós. O tamanho da área de ensaio para os corpos de prova de alumínio é igual a 25.4 mm , já para os de aço a área de ensaio é igual a 20.5 mm . Devido à simetria do problema, somente 1/4 dos corpos de prova foram discretizados e resolvidos como um problema bidimensional. As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam tais malhas de elementos finitos para, respectivamente, a liga de alumínio e para o aço.

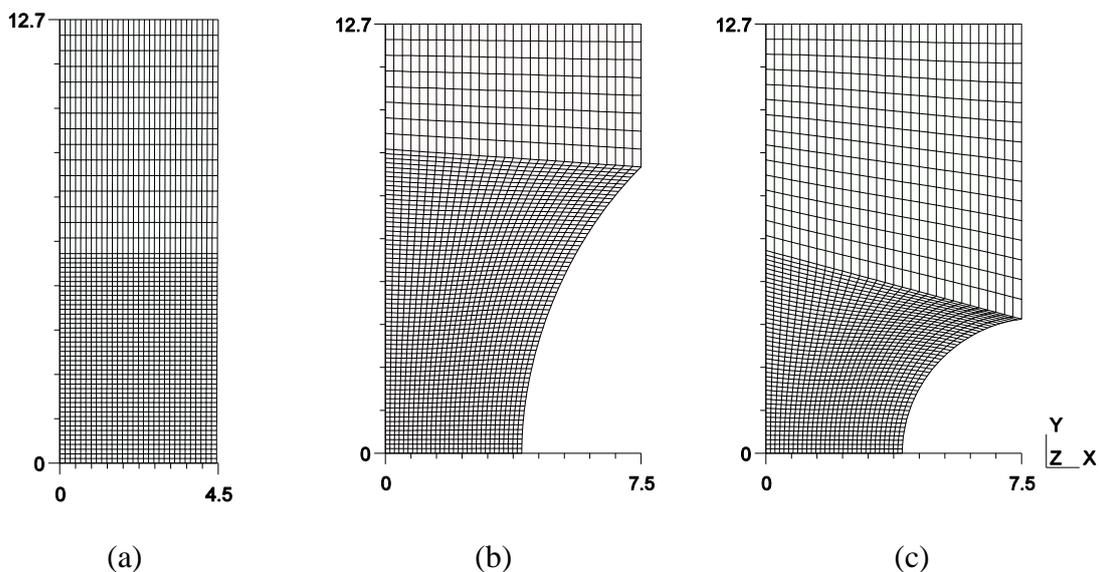


Figura 6.5. Malha de elementos finitos para os corpos cilíndricos (Al 2024-T351)

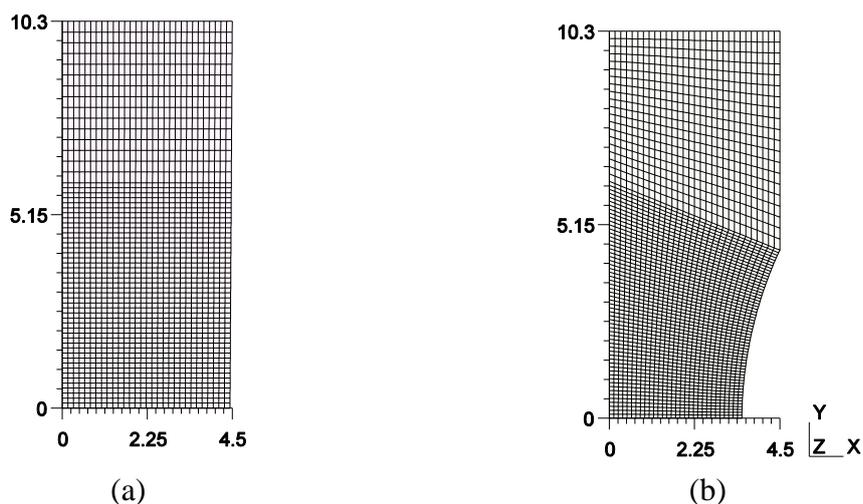


Figura 6.6. Malha de elementos finitos para os corpos cilíndricos (aço 1045)

6.2. CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS

Nesta etapa são descritos os procedimentos necessários para determinação dos parâmetros materiais requeridos para utilização do modelo aperfeiçoado proposto anteriormente e também para o modelo original de Lemaitre. Para o modelo original, utiliza-se tradicionalmente como condição de calibração, o estado de tensão gerado através do ensaio de tração em um corpo de prova cilíndrico liso. Nesta condição, determinam-se a curva de encruamento do material, os parâmetros de dano como expoente de dano e denominador de dano e o chamado dano crítico.

Já para o modelo aperfeiçoado, são requeridos dois pontos de calibração para determinação de todos os parâmetros materiais: um em alta triaxialidade e outro em baixa triaxialidade. Desta forma, toma-se como condição de calibração em alta triaxialidade o ponto tradicionalmente já utilizado pelo modelo original de Lemaitre (corpo de prova cilíndrico liso, sujeito a tração pura) e como condição de calibração em baixa triaxialidade, o corpo de prova do tipo “*borboleta*”, sujeito a cisalhamento puro. Para o primeiro ponto de calibração, determinam-se a curva de encruamento $\sigma_y(R)$, o expoente de dano s , o denominador de dano para alta triaxialidade $S_{0,33}$ e o parâmetro de dano crítico D_c . Para o segundo ponto de calibração, determina-se o denominador de dano para baixa triaxialidade $S_{0,00}$, de maneira a garantir que o valor de dano crítico calibrado anteriormente, seja atingido somente para um deslocamento numérico muito próximo do experimentalmente observado. A Figura 6.7 representa, esquematicamente, os pontos de calibração distribuídos ao longo da curva deformação plástica equivalente versus nível de triaxialidade.

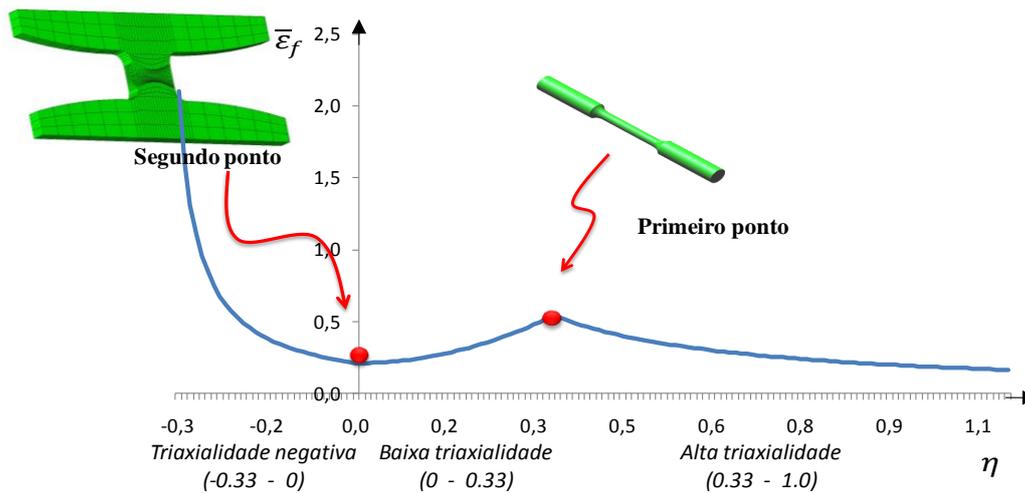


Figura 6.7. Pontos de calibração para o novo modelo proposto.

O procedimento usado para determinação dos parâmetros materiais, parte do princípio da utilização de uma metodologia inversa de otimização, onde no início do processo, tem-se como base os resultados de um ensaio experimental para um corpo de prova cilíndrico liso, sujeito a tração pura. Desde então, utilizando o método inverso de otimização, faz-se com que a curva de reação (força versus deslocamento) obtida numericamente, seja o mais próxima possível da curva de reação obtida experimentalmente. Obedecida tal condição, assume-se então o conjunto de parâmetros materiais utilizados ao final do processo, como sendo os parâmetros de entrada para o modelo constitutivo. Os dados experimentais utilizados foram retirados da literatura (Bai, 2008).

Para a calibração utilizando o ponto em cisalhamento puro, assume-se também, os resultados experimentais para curva de reação, como condição referência. Neste caso, utilizam-se todos os parâmetros materiais obtidos na calibração anterior (alta triaxialidade) e modifica-se somente o chamado denominador de dano, de forma a se determinar a menor diferença entre a curva de reação numericamente determinada e a experimental disponível na literatura (Bai, 2008).

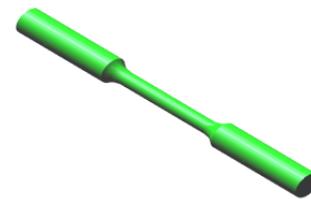
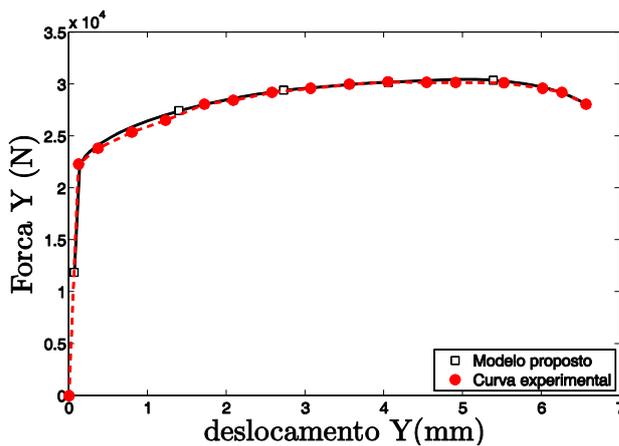
6.2.1. Calibração para a liga de alumínio 2024-T351

Adotando o procedimento de calibração descrito anteriormente e utilizando os corpos de prova discretizados, de acordo com as Figuras 6.4 e 6.5a, os parâmetros materiais são então resumidamente apresentados na Tabela 6.1.

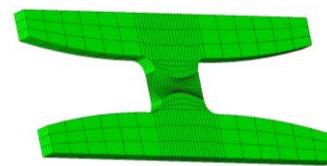
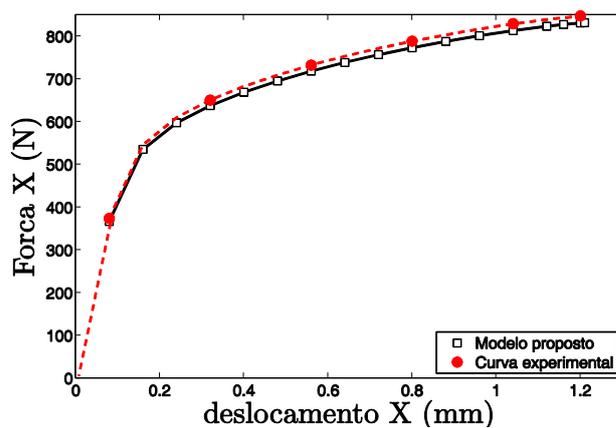
Tabela 6.1. Propriedades materiais para a liga de alumínio 2024-T351.

Descrição	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	E	72.400[MPa]
Coefficiente de Poisson	ν	0.33
Tensão de escoamento inicial	σ_{y_0}	352.00 [MPa]
Curva de encruamento	$\sigma_y(R)$	$908. (0.0058 + R)^{0.1742}$
Dano crítico	D_c	0.26
Expoente de dano	s	1
Denominador de dano (alta triaxialidade)	$S_{0.33}$	6 [MPa]
Denominador de dano (baixa triaxialidade)	$S_{0.00}$	8.25 [MPa]

Após a aplicação do método de otimização inversa, o seguinte ajuste entre as curvas de reação numérica e experimental foi obtido, para as duas condições de calibração.



Tração pura
(a)



Cisalhamento puro
(b)

Figura 6.8. Ajuste entre as curva de reação numérica e experimental obtida após o procedimento de otimização (liga Al 2024-T351)

6.2.2. Calibração para o aço 1045

Da mesma forma, para o aço 1045, utilizam-se os corpos de prova discretizados de acordo com as Figuras 6.4 e 6.6a. Após, novamente, a aplicação de um método de otimização inversa, os parâmetros materiais contidos na Tabela 6.2 são então determinados, e o ajuste entre as curvas de reação numérica e experimental, para os dois pontos de calibração, são apresentados na Figura 6.9.

Tabela 6.2. Propriedades materiais para o aço 1045.

Descrição	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	E	220.000 [MPa]
Coefficiente de Poisson	ν	0.33
Tensão de escoamento inicial	σ_{y_0}	830.00 [MPa]
Curva de encruamento	$\sigma_y(R)$	$500(1 - e^{-0.4R})$
Dano crítico	D_c	0.26
Expoente de dano	s	1
Denominador de dano (alta triaxialidade)	$S_{0.33}$	5.90 [MPa]
Denominador de dano (baixa triaxialidade)	$S_{0.00}$	8.20 [MPa]

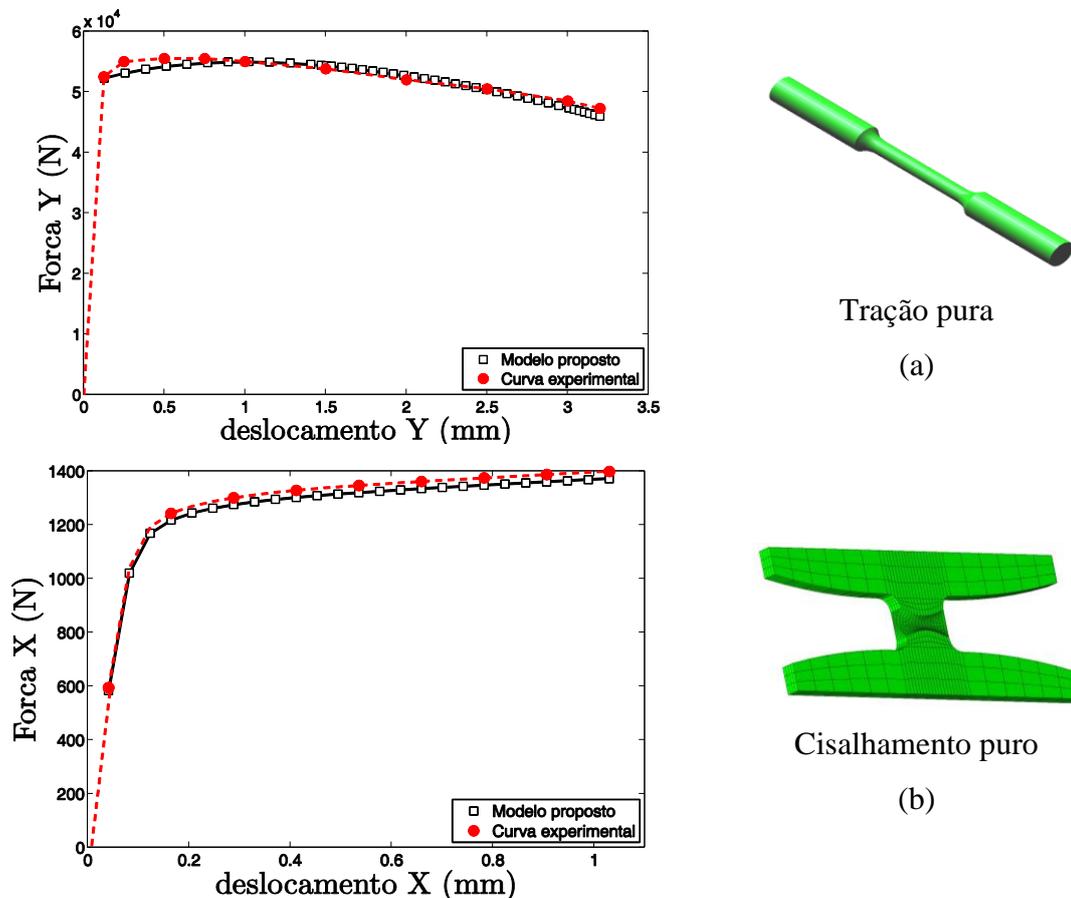


Figura 6.9. Ajuste entre as curva de reação numérica e experimental obtida após o procedimento de otimização (aço 1045)

6.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Neste item, são apresentados os resultados numéricos obtidos para o novo modelo proposto. Como critério de análise do desempenho da nova formulação, com a chamada função denominador de dano acoplada, em cada simulação numérica, são comparados os níveis de deslocamento para fratura, obtidos experimentalmente e numericamente, tendo como base a nova formulação e da formulação original de Lemaitre. Como uma segunda análise, são avaliados os níveis de deformação plástica na fratura, comparando os resultados numéricos com as curvas de fratura calibradas tridimensionalmente por Bai (2008). Por fim, a capacidade preditiva da nova formulação é então medida através da indicação do potencial local para iniciação da fratura dúctil. Esta previsão de início da falha é então dada pela indicação, na malha de elementos finitos, do local de máximo valor de dano. As simulações numéricas são feitas até o instante em que o modelo analisado atinge o valor de dano crítico calibrado previamente.

6.3.1. Resultados numéricos para a liga de alumínio 2024-T351

Como primeira análise, são apresentadas, através da Figura 6.10, as curvas de reação determinadas numericamente através da nova formulação, do modelo original e experimentalmente, utilizando o corpo de prova do tipo borboleta, sujeito a cisalhamento puro (Figura 6.10a), o corpo de prova cilíndricos liso (Figura 6.10b) e os corpos de prova cilíndricos entalhados $R = 12 \text{ mm}$ (Figura 6.10c) e $R = 4 \text{ mm}$ (Figura 6.10d), ambos sujeitos a tração pura.

Pode-se então verificar, que com a introdução da função denominador de dano, o deslocamento numérico na fratura, obtido através da nova formulação, passa a estar mais próximo do deslocamento experimentalmente observado, considerando todos os corpos de prova aqui avaliados. Verifica-se que para o modelo original de Lemaitre, para as condições de carga que resultando em alta triaxialidade ($\eta \geq 0.33$), o modelo prevê o início da fratura de maneira tardia (corpos de prova cilíndricos entalhados), já para a condição de cisalhamento puro ($\eta = 0$) que resulta em baixa triaxialidade, o modelo passa a prever o início da fratura de maneira prematura. Contudo, com a nova formulação, a capacidade preditiva passa a ser mais uniforme, fazendo com que o modelo agora seja menos sensível a relação condição de uso versus condição de calibração.

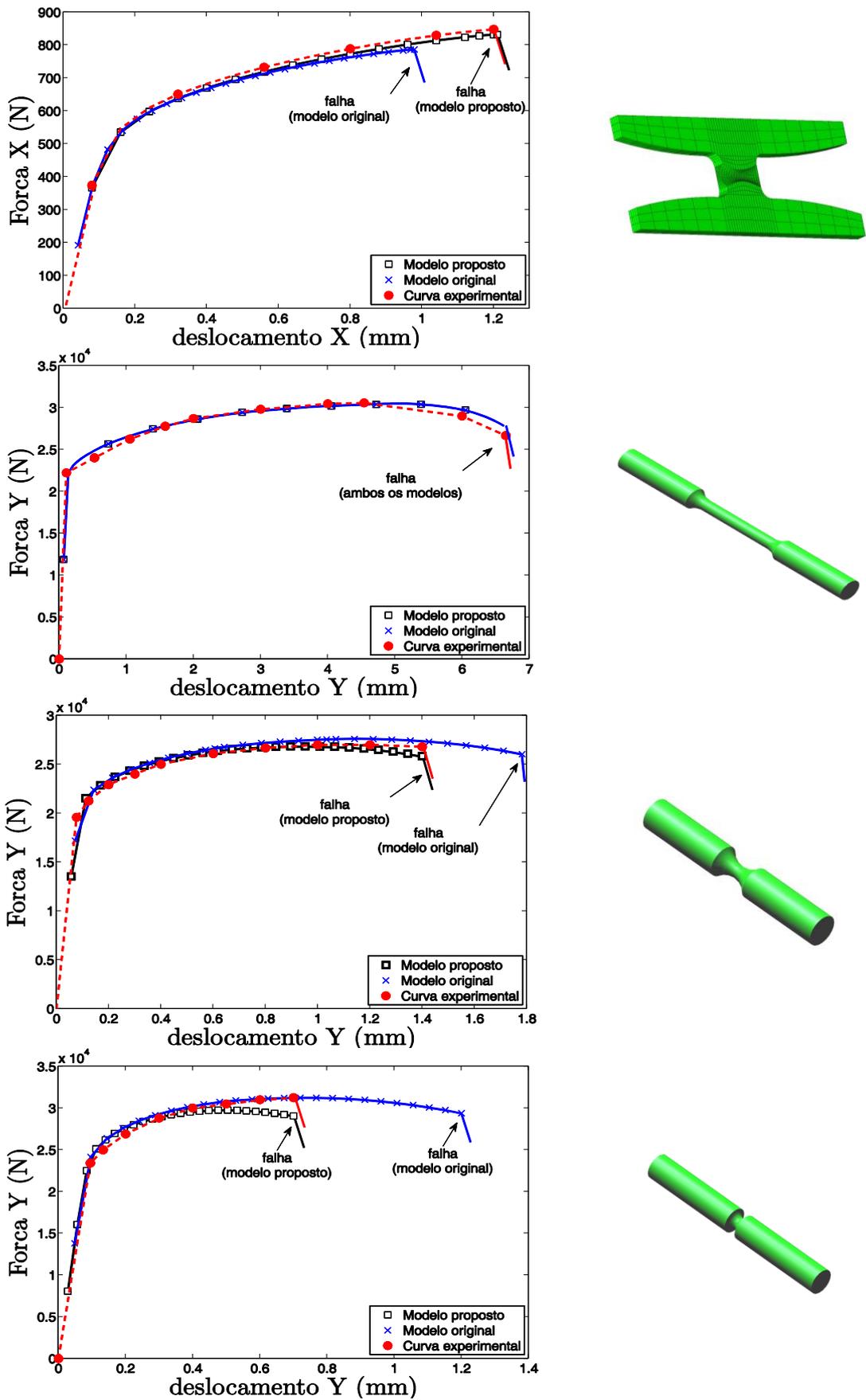


Figura 6.10. Curvas força versus deslocamento para a liga de alumínio 2024-T351.

A Tabela 6.3 apresenta os valores de deslocamento numérico e experimental para tais simulações realizadas. Verifica-se que a diferença entre o deslocamento numérico e experimental, considerando o modelo original de Lemaitre, é de aproximadamente 17%, 27% e 68%, para respectivamente, o corpo de prova do tipo borboleta (cisalhamento puro), entalhado $R = 12 \text{ mm}$ (tração pura) e entalhado $R = 4 \text{ mm}$ (tração pura). Com a nova formulação e a redução da dependência da condição de calibração, em ambos os casos a diferença entre os resultados numéricos e os valores experimentalmente observados se reduz para aproximadamente 1%.

Tabela 6.3. Análise comparativa entre os deslocamentos experimentais e numéricos (liga de alumínio 2025-T351)

Corpo de prova	η	Deslocamento na fratura (mm)			
		experimental	Modelo analisado		
			original	associativo	Não-associativo
Borboleta	0.00	1.18	0.97	1.20	1.21
Cilíndrico liso	0.33	6.65	6.65	6.65	6.66
Entalhado $R = 12 \text{ mm}$	0.47	1.40	1.78	1.41	1.42
Entalhado $R = 4 \text{ mm}$	0.74	0.70	1.18	0.71	0.71

Outra forma de se estudar o desempenho da nova formulação, está na análise da evolução do parâmetro de dano. A Figura 6.11 apresenta a evolução deste parâmetro, considerando o modelo original de Lemaitre e a nova formulação. A condição preditiva ideal, neste caso, é de que o parâmetro de dano crítico só pode ser atingido para um deslocamento próximo do experimentalmente observado. De acordo com a Figura 6.11a, verifica-se que o modelo original de Lemaitre prevê o início da fratura, em condições de baixo nível de triaxialidade, prematuramente, ou seja, para um deslocamento numérico muito menor que o experimentalmente observado. Porém, em condições de alta triaxialidade, como mostrado pelas Figuras 6.11c e 6.11d, este modelo passa a prever o início da fratura de maneira tardia, ou seja, para níveis de deslocamento numérico muito maior que o experimentalmente observado. Com a introdução da

função denominador de dano, ambos as formulações associativa e não-associativa prevêm o início da fratura muito próximo da condição ideal.

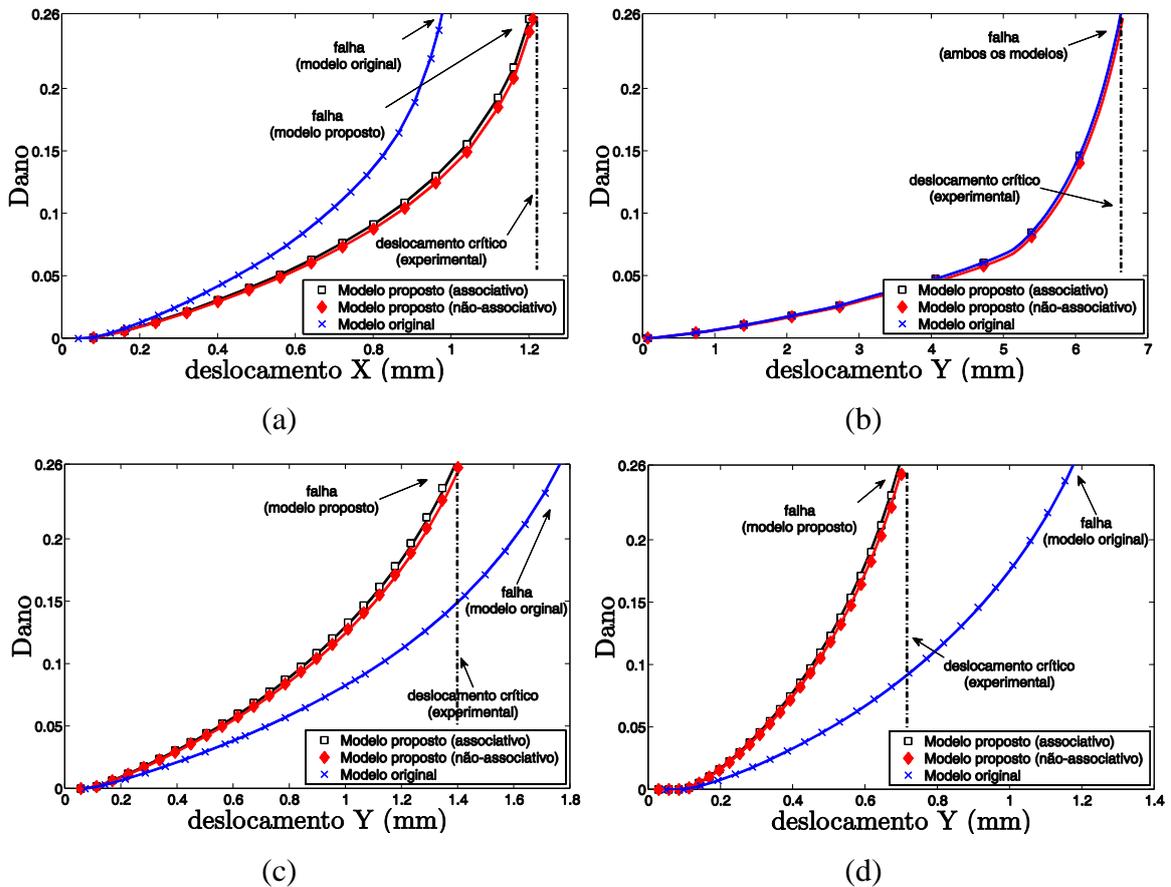


Figura 6.11. Evolução do dano para o modelo original e proposto, considerando os diferentes corpos de prova analisados (liga de alumínio 2024-T351)

A capacidade preditiva de um modelo constitutivo é medida também, através da determinação do correto local para início de uma trinca dúctil. Desta forma, a Figura 6.12 apresenta o contorno do parâmetro de dano, para cada corpo de prova analisado, considerando o modelo original e o aperfeiçoado de Lemaitre. Observa-se que, neste caso, a capacidade preditiva, no que se refere a determinação do correto local para início de uma trinca, não é dependente da condição de calibração dos parâmetros materiais. De acordo com observações experimentais (ver Bai, 2008), para o corpo de prova do tipo borboleta sujeito a cisalhamento puro, o início da fratura se dá nas paredes da seção crítica do mesmo e se propaga em direção ao centro. O que pode ser comprovado pela capacidade preditiva de ambos os modelos constitutivos analisados.

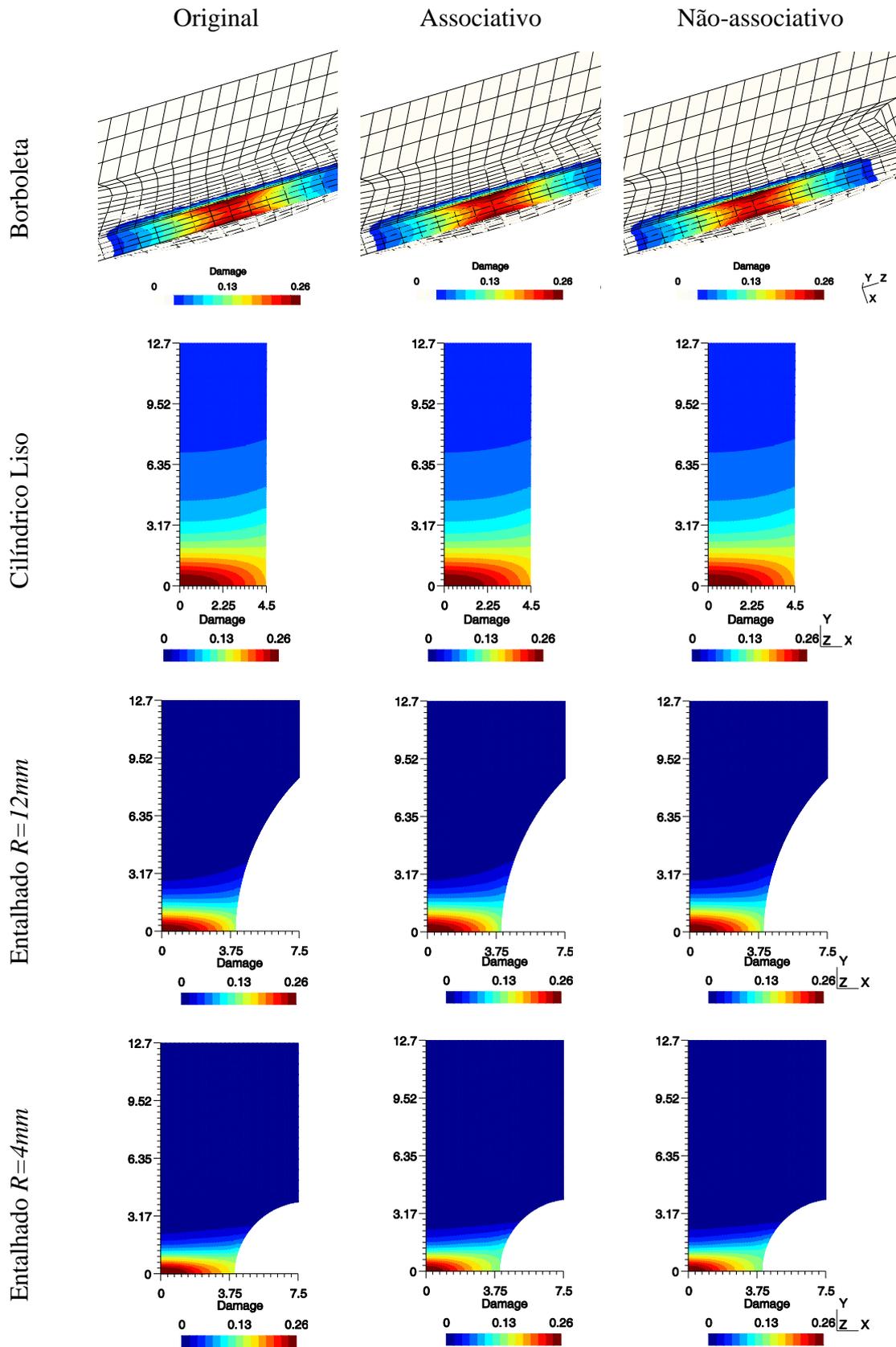


Figura 6.12. Contorno do parâmetro de dano para os três modelos analisados (liga de alumínio 2024-T351)

Já para os corpos de prova cilíndricos lisos e entalhados, observações experimentais (ver Bai, 2008) mostram que o início da fratura se dá no centro do mesmo e se propaga para as bordas do corpo. Este comportamento pode ser também verificado através da capacidade preditiva dos modelos analisados (ver Figura 6.12).

6.3.2. Resultados numéricos para o aço 1045

Para se ratificar o desempenho da nova formulação, no que se refere a redução da dependência do ponto de calibração e uniformidade na capacidade de se determinar o correto momento e local para início da fratura de um material dúctil, analisa-se o desempenho da nova formulação em corpos de prova fabricados com aço 1045. Diferentemente da liga de alumínio 2024-T351, para alguns autores (ver Reis *et al.*, 2011; Malcher *et al.*, 2011) o aço é um material dúctil fracamente dependente do nível de triaxialidade. Neste caso, utilizam-se resultados experimentais disponíveis na literatura (ver Bai, 2008), considerando um corpo de prova do tipo borboleta, também sujeito a cisalhamento puro, um corpo de prova cilíndrico liso e outro entalhado ($R = 10.5 \text{ mm}$) sujeitos a tração pura. Com estes resultados, pode-se então, analisar o desempenho do modelo tanto na região de baixa como na de alta triaxialidade.

A Figura 6.13 apresenta resultados para a curva força versus deslocamento. Observa-se novamente que o modelo original de Lemaitre prevê de maneira prematura o início da fratura, quando se tem baixos níveis de triaxialidade (cisalhamento puro). Já para altos níveis de triaxialidade, o mesmo passa a prever o início da fratura de forma tardia (tração pura – corpo de prova entalhado). Assim, conclui-se que independentemente do material estudado, a capacidade preditiva do modelo original de Lemaitre, no que se refere a determinação do correto momento do início da fratura, é fortemente dependente da condição de calibração, ou seja, é fortemente dependente da relação carregamento externo aplicado versus condição de calibração. Observa-se também, que com a adição da função denominador de dano, o novo modelo proposto passou então a prever o momento da falha do material, próximo do experimentalmente observado.

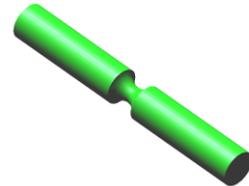
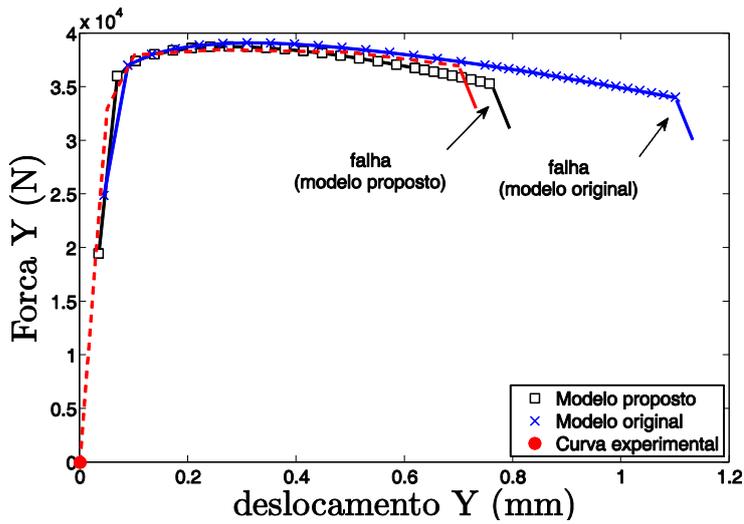
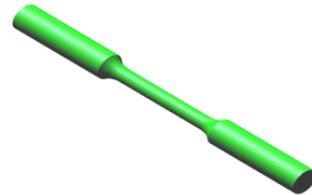
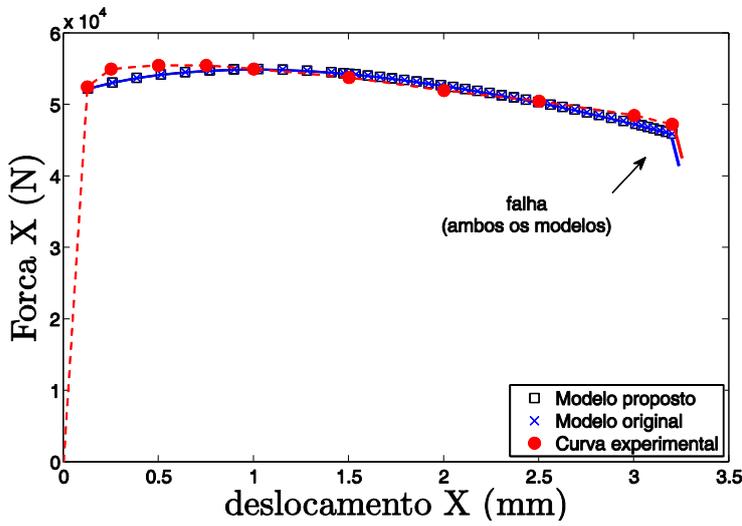
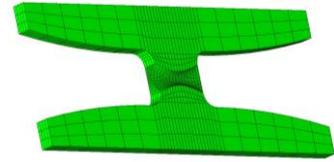
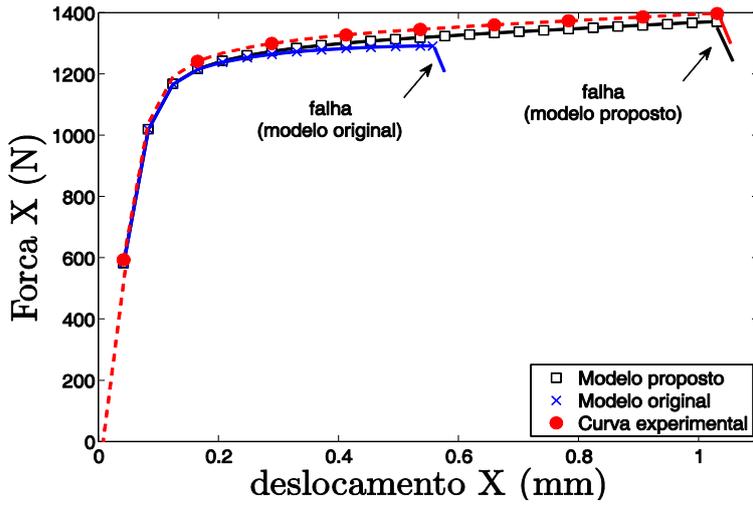


Figura 6.13. Curvas força versus deslocamento para o aço 1045.

A Tabela 6.4 contém os valores de deslocamento na fratura obtidos experimentalmente (ver Bai, 2008), através do modelo original de Lemaitre e da nova proposição.

Tabela 6.4. Análise comparativa entre os deslocamentos experimentais e numéricos (aço 1045)

Corpo de prova	η	Deslocamento na fratura (mm)			
		experimental	Modelo analisado		
			original	associativo	Não-associativo
Borboleta	0.00	1.03	0.55	1.05	1.05
Cilíndrico liso	0.33	3.2	3.2	3.2	3.3
Entalhado $R = 10.5 \text{ mm}$	0.45	0.70	1.09	0.72	0.72

Observa-se também que a diferença entre os deslocamentos na fratura determinados através do modelo original de Lemaitre e os experimentalmente observados, variam de 47% a 55% para, respectivamente, o corpo de prova do tipo borboleta, sujeito a cisalhamento puro e o cilíndrico entalhado $R = 10.5 \text{ mm}$, sujeito a tração pura. Para a nova formulação, esta diferença se reduz para aproximadamente 2%, em ambos os casos estudados. O que mostra a robustez do novo modelo, no que se refere à capacidade de previsão da fratura, neste tipo de material.

Novamente, utiliza-se a evolução do parâmetro de dano para análise do desempenho dos modelos. A Figura 6.14 apresenta a evolução deste parâmetro em função do deslocamento aplicado. Mostra-se então que o modelo original de Lemaitre funciona prematuramente para regiões de baixo nível de triaxialidade (cisalhamento puro) e funciona de maneira tardia para as regiões de alto nível de triaxialidade (tração pura). Já com a adição da função denominador de dano, na lei de evolução do dano originalmente proposta por Lemaitre, a capacidade de determinação do correto momento para início da fratura passa a ser fracamente dependente da relação entre a condição real de uso do modelo e a condição de calibração aplicada.

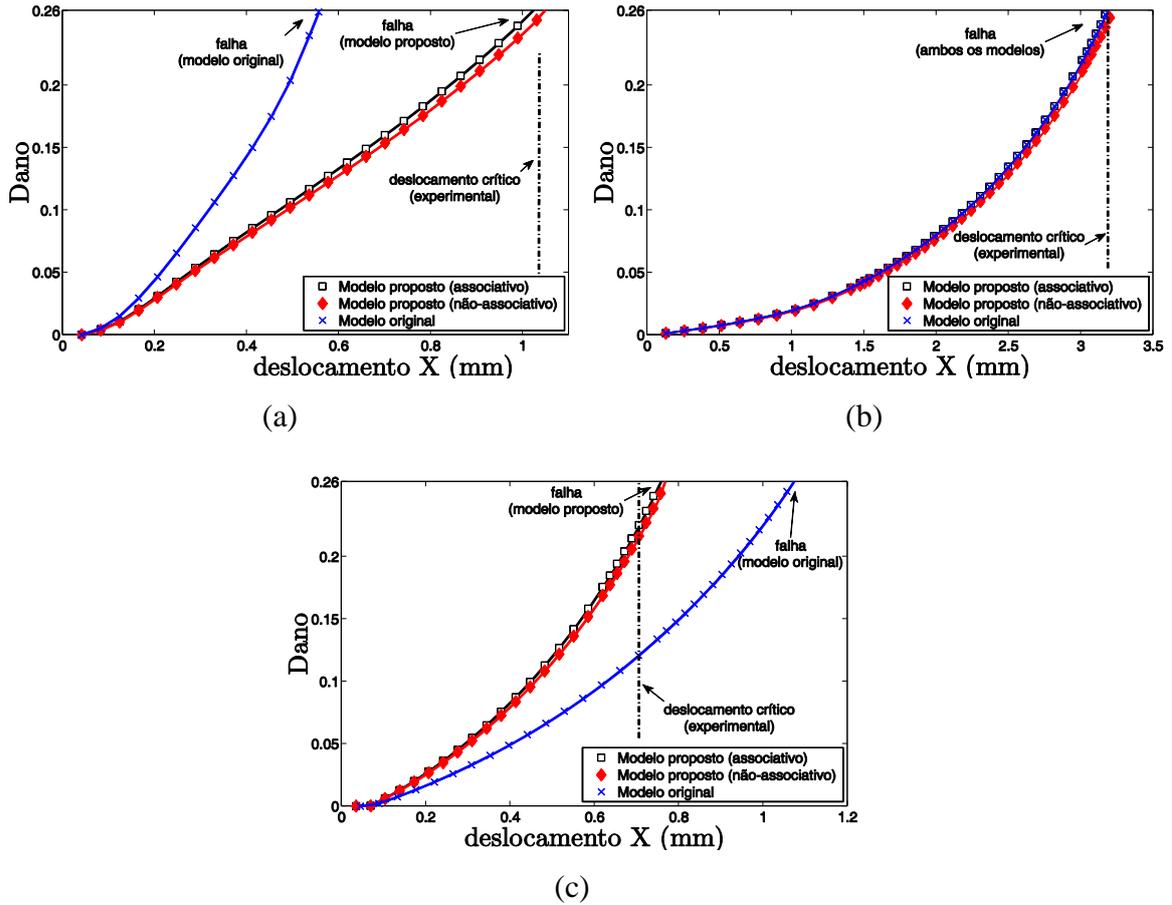


Figura 6.14. Evolução do dano para o modelo original e proposto, considerando os diferentes corpos de prova analisados (aço 1045)

Finalmente, a Figura 6.15 apresenta o contorno da variável de dano para os três modelos aqui analisados, considerando os três corpos de prova. Verifica-se, mais uma vez, que a capacidade de determinação do correto local para início da fratura dúctil, não é dependente da condição de calibração dos parâmetros materiais. De acordo com dados experimentais disponíveis na literatura (ver Bai, 2008), para o corpo de prova do tipo borboleta sujeito a cisalhamento puro, a fratura se inicia na borda da seção crítica e se propaga para o centro do corpo, o que pode ser reproduzido através da análise dos resultados dos três modelos. Já para o corpo de prova cilíndrico entalhado $R = 10.5 \text{ mm}$, dados experimentais mostram que a falha se inicia no centro do mesmo e se propaga em direção a borda do corpo, o que novamente foi determinado pelos modelos original e modificado de Lemaitre.

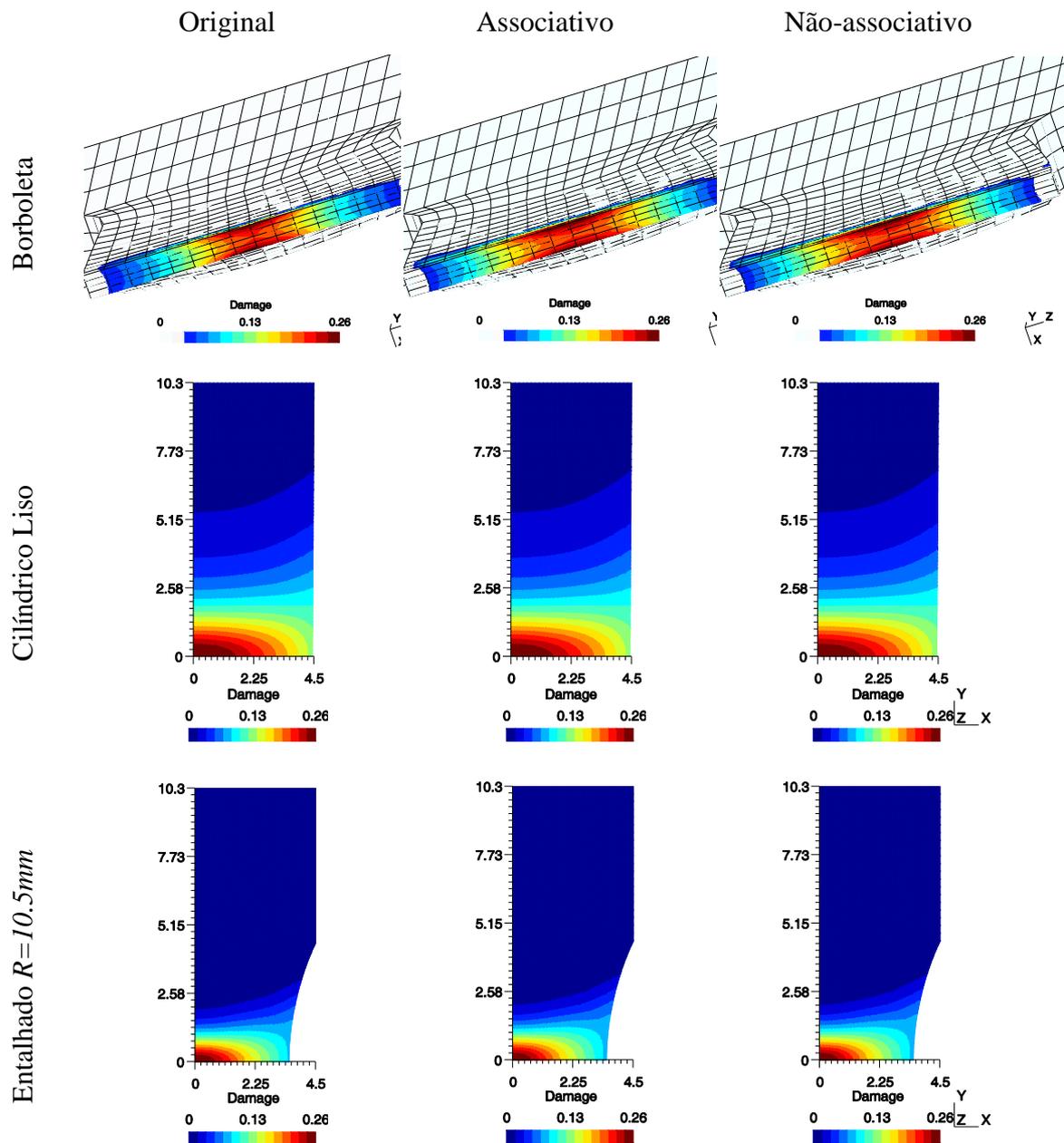


Figura 6.15. Contorno do parâmetro de dano para os três modelos analisados (aço 1045)

6.3.3. Curva de fratura: Deformação plástica equivalente versus triaxialidade

Como última análise, o nível de deformação plástica equivalente, no momento do início da fratura, é então avaliado. Assim, inicialmente, de acordo com Bao (2004), o nível de deformação plástica na fratura é um parâmetro que pode ser medido, como uma

função do nível de triaxialidade. Posteriormente, Bai (2008) propôs a criação da chamada superfície de fratura, onde o nível de deformação plástica passaria a ser uma função tanto da triaxialidade, como do terceiro invariante do tensor de desvio. A Figura 6.16 representa a projeção da superfície de fratura de Bai (2008) no espaço da deformação plástica equivalente e da triaxialidade. De acordo com os estudos de Bai (2008), para a liga de alumínio (ver Figura 6.16a), o nível de deformação plástica equivalente cresce com o aumento da triaxialidade, dentro da região de baixa triaxialidade. Já na região de alta triaxialidade, a deformação plástica decresce com o aumento do nível de triaxialidade. Contudo, para os dados encontrados através do modelo original de Lemaitre e através do novo modelo (associativo), verifica-se que o nível de deformação plástica equivalente na fratura, sempre decresce com o aumento da triaxialidade, independente da região estudada. Porém, para os resultados obtidos segundo a nova proposição (não-associativa), observa-se um comportamento semelhante ao descrito por Bai (2008).

Para o aço 1045, observações experimentais descritas por Bai (2008) mostram que a deformação plástica equivalente sempre decresce com o aumento da triaxialidade. Assim, este comportamento pode ser verificado para todos os modelos estudado (ver Figura 6.16b), sendo que o nível de deformação plástica determinado segundo a nova proposição (não-associativa) se encontra mais próximo dos valores calibrados por Bai (2008).

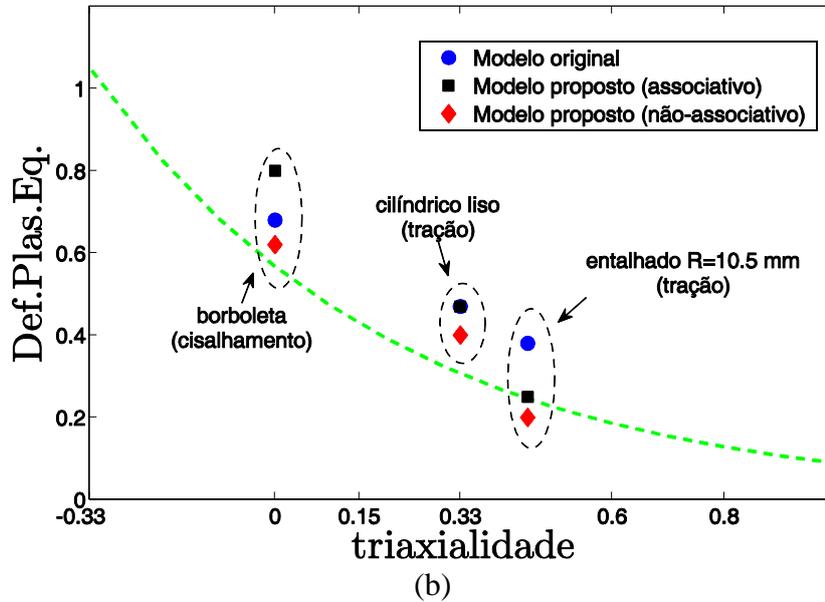
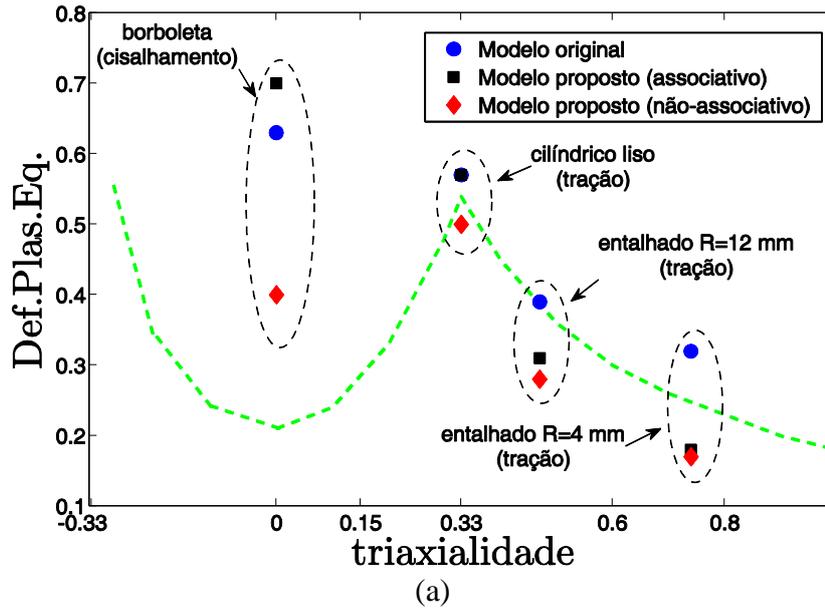


Figura 6.16. Curva de fratura no espaço da deformação plástica equivalente versus nível de triaxialidade. (a) liga de alumínio 2024-T351 e (b) aço 1045

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS

7.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho, buscou-se desenvolver uma nova formulação constitutiva para determinação do início da fratura em materiais dúcteis, aplicada a largas faixas de triaxialidade. Para isto, utilizou-se como base, o modelo de dano de Lemaitre, com endurecimento e dano isotrópicos. Inicialmente, mostrou-se que a capacidade preditiva dos modelos com dano acoplado é fortemente dependentes da condição de calibração. Demonstrou-se também, através de comparações entre resultados numéricos e experimentais, que o modelo original de Lemaitre é capaz de prever com precisão o início da falha de um material, somente para condições de carregamento aplicado, próximo da condição de calibração utilizada para determinação dos parâmetros materiais. Verificou-se que dentro da chamada região de baixa triaxialidade, ou seja, para condições de carregamento cisalhante predominante, o modelo previa o início da fratura de maneira prematura, ou seja, para alongamentos menores do que os determinados experimentalmente. Já para a região de alta triaxialidade, ou seja, para condições de carregamento de tração predominante, o modelo previa a fratura do material de maneira tardia, ou seja, para alongamentos maiores que os observados experimentalmente.

Assim, buscou-se reduzir a dependência da condição de calibração do modelo original de Lemaitre, através da modificação de sua lei de evolução do dano. Buscou-se adicionar a esta lei de evolução, uma chamada “*função denominador de dano*”, $S(\eta, \xi)$, que agora passaria a ser a função dependente da razão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado, necessitando portanto, de dois pontos de calibração para determinação de todos os parâmetros materiais. Um primeiro ponto dentro da região de alta triaxialidade e outro dentro da região de baixa triaxialidade foram então escolhidos como condição de calibração da nova proposição. Através do primeiro ponto de calibração, a lei de encruamento do material, $\sigma_y(R)$, o valor de dano crítico, D_c , o expoente de dano, s , e o denominador de dano em alta triaxialidade, $S_{0,33}$, são então determinados. Já para o segundo ponto de calibração, somente o valor do denominador de dano em baixa triaxialidade, $S_{0,00}$, é determinado. Em ambos os casos, utilizou-se uma técnica de otimização inversa para determinação de tais parâmetros. Tal técnica assume que a curva de reação (força versus deslocamento) numericamente determinada

tem que ser o mais próxima possível da curva experimentalmente medida, minimizando assim a chamada função objetiva. A partir desta condição, os parâmetros materiais para uma liga de alumínio 2024-T351 e para o aço 1045 foram determinados.

Utilizou-se para representar os testes numéricos na região de baixa triaxialidade, o chamado corpo de prova “borboleta”, sujeito a cisalhamento puro. Já para a região de alta triaxialidade, utilizaram-se corpos de prova cilíndricos lisos e entalhados. Os testes numéricos foram realizados até a condição em que algum ponto dentro do corpo de prova estudado atingisse o valor de dano crítico, calibrado previamente. Na análise do nível de deslocamento na fratura, constatou-se que a nova formulação passou a registrar valores muito próximos aos experimentalmente observados. A Tabela 7.1 representa o ganho percentual determinado para cada condição simulada. Para a liga de alumínio 2024-T351, constatou-se uma redução, na condição mais desfavorável, de 68.5% para menos de 2%. Já para o aço 1045, verificou-se uma redução no erro de 55.7% para menos de 3%.

Tabela 7.1. Ganho percentual na determinação do nível de deslocamento requerido para a fratura

Material	Corpo de prova	Diferença percentual entre deslocamento experimental e o numérico		
		original	associativo	não-associativo
Alumínio 2024-T351	Borboleta	-17.8%	1.7%	2.5%
	Cilíndrico liso	0%	0%	0%
	Entalhado R12	27.2%	0.7%	0.7%
	Entalhado R4	68.5%	1.4%	1.4%
Aço 1045	Borboleta	-46.6%	1.9%	1.9%
	Cilíndrico liso	0%	0%	0%
	Entalhado R10	55.7%	2.8%	2.8%

Ao se analisar a capacidade preditiva do modelo, no que se refere à capacidade de se determinar o local potencial para início de uma trinca dúctil, observou-se que a relação entre o carregamento aplicado e a condição de calibração dos parâmetros materiais, não influencia no comportamento da formulação constitutiva. Em ambos os materiais e corpos de prova analisados, tanto o modelo original de Lemaitre e a nova

proposição foram capazes de determinar, de acordo com observações experimentais, o correto local para início da fratura dúctil.

Analisando o nível de deformação plástica na fratura, a nova proposição (não-associativa) foi capaz de prever valores mais próximos do calibrado e sugerido por Bai (2008), comparado aos valores determinados através do modelo original de Lemaitre. A Tabela 7.2 apresenta os valores de deformação plástica equivalente na fratura calculados segundo cada formulação e os valores sugeridos por Bai, através da calibração da chamada superfície de fratura.

Tabela 7.2. Valores de deformação plástica equivalente na fratura

Material	Corpo de prova	Nível de deformação plástica na fratura			
		Bai (2008)	original	associativo	não-associativo
Alumínio 2024-T351	Borboleta	0.21	0.63	0.70	0.40
	<i>Cilíndrico liso</i>	<i>0.54</i>	<i>0.57</i>	<i>0.57</i>	<i>0.50</i>
	Entalhado R12	0.36	0.39	0.31	0.28
	Entalhado R4	0.23	0.32	0.18	0.17
Aço 1045	Borboleta	0.56	0.68	0.80	0.62
	<i>Cilíndrico liso</i>	<i>0.32</i>	<i>0.47</i>	<i>0.47</i>	<i>0.40</i>
	Entalhado R10	0.25	0.38	0.25	0.20

Desta forma, com base nos resultados encontrados, pode-se concluir que o modelo aperfeiçoado de Lemaitre pode ser agora calibrado através de dois ensaios mecânicos convencionais, o primeiro de tração predominante e o segundo de carregamento cisalhante predominante, e, por conseguinte utilizado para determinação do correto momento o local do início da fratura dúctil, em largas faixas de triaxialidade. O mesmo demonstrou grande desempenho tanto nas regiões de baixa como na de alta triaxialidade, independente do tipo de material de engenharia utilizado.

7.2. RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros, os seguintes pontos são então sugeridos como evolução do estudo da fratura dúctil em materiais metálicos.

- 1) Sugere-se a expansão desta formulação para a região de triaxialidade negativa, ou seja, para condições de carregamento compressivo, tendo como ponto de partida, a variação do modelo de Lemaitre que leva em consideração o efeito do fechamento da trinca (Lemaitre, 2005);
- 2) A avaliação da capacidade preditiva desta nova proposição em materiais diferentes dos aqui testados é de grande importância para ratificação das conclusões obtidas. Recomendam-se testes em novas ligas aeronáuticas que sejam fortemente dependentes do chamado nível de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado;
- 3) Recomenda-se a introdução do chamado efeito do endurecimento cinemático na nova formulação, possibilitando a avaliação do modelo em condições de carregamento complexo e não proporcional, como: carregamento de tração seguido de compressão, carregamento de tração seguido de cisalhamento, reversão de carregamento cisalhante, etc.;
- 4) Com a introdução do efeito do endurecimento cinemático, sugere-se a análise da nova formulação em condições de carregamento cíclico, possibilitando assim a verificação dos laços de histerese e junção da mecânica do dano com os conceitos da fadiga dos materiais, principalmente condições de fadiga de baixo ciclo, onde o nível de deformação plástica localizado é bastante acentuado;
- 5) Por fim, sugere-se a avaliação da nova proposição em materiais frágeis, ou seja, em materiais que apresentam um regime plástico reduzido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade Pires, F. M. (2005). Issues on the finite element modelling of degradation and prediction of failure in finitely straining ductile materials. Swansea, School of Engineering, University of Wales. Ph.D.
- Bai, Y. (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.
- Bao, Y., Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*. 46 (81):81-98.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I. (1988). An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:731-740.
- Bonet, J., Wood, R.D. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Ed.: Cambridge.
- Chaboche, J.L. (1984). Anisotropic Creep Damage in the Framework of Continuum Damage Mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 79: 309–319.
- Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K., (2006). A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility. *International Journal of Fracture*, 137:51–75.
- Chadwick, P. (1999). *Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems*. Dover Publications; 2 Expanded edition.
- Cockcroft, M., & Latham, D. (1968). Ductility and workability of metals. *J. Inst. Metals* , pp. 33-39.
- Coleman, B.D., & Gurtin, M.E. 1967. Thermodynamics with Internal State Variables. *J. Chemical Physics*, 47(2), 597–613.
- De Souza Neto, E.A., Peric D., Owen, D.R.J., (1994). A model for elasto-plastic damage at finite strains: computational issues and applications. *Engineering Computations*, 11:3: 257-281.
- De Souza Neto, E.A., Peric, D., Owen, D.R.J. (1998). Continuum modelling and numerical simulation of material damage at finite strains. *Archive for Computer Methods in Engineering*, 5:311-384.
- De Souza Neto, E.A. (2002). A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. *Comm. Num. Meth. Engng.*, 18:541–554.

- De Souza Neto, E.A., Perić, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. John Wiley & Sons Ltd.
- Doghri, I., (1995). Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3403-3431.
- Gurson, A.L. (1977). Continuum Theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 99:2-15.
- Holzapfel, G.A. 2000. *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. London: John Wiley & Sons.
- Johnson, G.R, Cook, W.H. (1985). Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(1):31–48.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers.
- Kestin, J. and J. Bataille (1977). Irreversible thermodynamics of continua and internal variables. *Proceedings of the International Symposium on Continuum Models of Discrete Systems*, University of Waterloo Press: 39–67.
- Khan, A. S., Huang, S. (1995). *Continuum Theory of Plasticity*. Ed.: Jhon Wiley.
- Krajčinović, D., Fonseka, G.U. (1981). The Continuous Damage Theory of Brittle Materials – Part 1: General Theory. *J. Appl. Mech.*, 48, 809–815.
- Lemaitre, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology - Trans. of the ASME*, 107:83–89.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Univ. Press.
- Lemaitre, J., Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics*, Springer.
- Malcher, L. ; Andrade Pires, F.M. ; César de Sá, J.M.A., 2011, An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. *International Journal of Plasticity*.
- McClintock, F. A. (1968). A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes. *J. Appl. Mech.*, 35, 363–371.
- Murakami, S. and N. Ohno (1981). A continuum theory of creep and creep damage. *Proceedings of 3rd IUTAM Symposium on Creep in Structures*. A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst. Leicester, England, Springer-Verlag: 422–444.

- Onat, E.T., & Leckie, F.A. 1988. Representation of Mechanical Behavior in the Presence of Changing Internal Structure. *J. Appl. Mech.*, 55, 1–10.
- Oyane, M., Shima, S., & Tabata, T. 1980. Considerations of basic equations, and their application in the forming of metal powders and porous metals. *J. Mech. Work. Tech.*, 1, 325–341.
- Peric, D., Owen, D.R.J., & Honnor, M.E. (1992). A Model for Finite Strain Elasto-Plasticity Based on Logarithmic Strains: Computational Issues. *Comp. Meth. Appl. Mech Engng.*, 94:35–61.
- Reis, F.J.P.; Malcher, L. ; Andrade Pires, F.M. ; César de Sá, J.M.A., 2010, A modified GTN model for the prediction of ductile fracture at low stress triaxialities. *International Journal of Structural Integrity*.
- Rice, J. R., Tracey, D., M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:201–217.
- Saanouni, K. and J. L. Chaboche (2007). Computational damage mechanics: Application to metal forming simulation. *Comprehensive Structural Integrity*. I. Milne, R. O. Ritchie and B. Karihaloo, Elsevier Science Ltd. 2: 321-376.
- Saanouni, K., K. Nesnas and Y. Hammi (2000). "Damage modeling in metal forming processes." *International Journal of Damage Mechanics* 9(3): 196-240.
- Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998). *Computational Inelasticity*. New York: Springer-Verlag.
- Spencer, A. J. M. (2004). *Continuum Mechanics*. Dover Publications; Dover Ed edition.
- Stoughton, T., B., Toon, J., W. (2011). A new approach for failure criterion for sheet metals. *International Journal of Plasticity*, vol 27, 440-459.
- Teng, X. (2008). Numerical prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:2020–2041.
- Truesdell, C. (1969). *Rational thermodynamics*. New York, USA, McGraw-Hill.
- Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.* 32:157–169.