Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Equações Quasilineares Multivalentes

por

Jefferson Abrantes dos Santos

Orientador: Professor José Valdo Abreu Gonçalves

Coorientador: Professor Claudianor Oliveira Alves

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações Quasilineares Multivalentes

por

Jefferson Abrantes dos Santos *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

10 de junho de 2011

Comissão Examinadora:

Professores

____

Claudianor Oliveira Alves - Coorientador - UFCG

____

Carlos Alberto P. dos Santos - UnB

____

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

____

Liliane de Almeida Maia - UnB

____

Marcelo Fernandes Furtado - UnB

*O autor foi bolsista do CNPq por um ano e oito meses.

Em memória do meu avô,

Durval Soares de Oliveira.

Agradecimentos

- A Deus por ter me dado saúde e força durante este trabalho.

- A minha Mãe Dilva Abrantes de Oliveira Santos, Zilma Ramalho Dantas (pelo enorme apoio me dado durante minha estadia em Brasília) e família (por ter me acolhido como um membro bem próximo da família) e todos os meus familiares.

- Aos meus orientadores Prof. Claudianor de Oliveira Alves (obrigado por ter confiado em meu trabalho, no momento em que aceitou me orientar no mestrado e em seguida no doutorado) e Prof. José Valdo Abreu Gonçalves (obrigado por ter confiado em meu trabalho no doutorado), pela belíssima orientação me dada durante o doutorado.

- Aos membros da comissão examinadora por aceitarem compor a banca e pelas valiosas sugestões dadas para este trabalho.

- Aos amigos da UnB pelo companherismo e prosa durante o intervalo do café.

- Aos Professores e Funcionários da UnB e do DME-UFCG, em especial os meus orientadores durante minha graduação da UFCG: Prof. Jaime Alves Barbosa Sobrinho, Prof.(a) Rosana Marques da Silva (sou muito grato a senhora, pois acreditou em meu trabalho ja na graduação e me guiou para o Bacharelado em Matemática) e Prof. Francisco Antonio Morais de Souza.

- Aos Professores Ali Tahzibi e Marcia Federson do ICMC-USP.

- A CAPES, CNPq e INCTMat pelo apoio financeiro dado a este trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência de solução não trivial para uma classe de problemas quasilineares multivalentes do tipo

$$\mathbb{L}(u) \in \partial_u F(x,u) \text{ em } \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio, $N \geq 2$ e $\partial_u F(x,u)$ é o gradiente generalizado de $F(x,t)$ com relação a variável t. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais para funcionais localmente Lipschitizianos e um Teorema de Concentração e Compacidade para Espaços de Orlicz.

Palavras Chaves: equações quasilineares, expoentes críticos, funcionais não diferenciáveis, concentração de compacidade, Orlicz-Sobolev

Abstract

In this work we study the existence of nontrivial solution for the following class of multivalued quasilinear problems

$$\mathbb{L}(u) \in \partial_u F(x,u) \text{ in } \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is an domain, $N \geq 2$ and $\partial_u F(x,u)$ is a generalized gradient of $F(x,t)$ with respect to t. The main tools utilized are Variational Methods for Locally Lipschitz Functional and a Concentration Compactness Theorem for Orlicz space.

Key Words: quasilinear equations, critical exponents, non-smooth functionals, concentration-compactness, Orlicz-Sobolev.

Conteúdo

Introdução 6

1 Múltiplas soluções para uma classe de equações elípticas multivalentes **18**

1.1 Estudo Espectral 19

1.2 Condição Palais Smale 26

1.3 Existência de três soluções 35

2 Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev **38**

2.1 N-função 38

2.2 O espaço de Orlicz 39

2.3 Condição Δ_2 46

2.4 Dualidade 51

2.5 Orlicz-Sobolev 58

2.6 Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev 59

2.7 Sobre o Espaço $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ 61

2.8 Estudo do espaço $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 62

3 Equação Quasilinear Multivalente em Domínio Limitado **63**

3.1 Preliminares 65

3.2 A geometria do Passo da Montanha e a condição (PS) 78

3.3 Convergência da sequência Palais-Smale 95

4 Equação Quasilinear Multivalente em $\mathbb{R}^N$ **113**

4.1 Sequência Palais-Smale 114

4.2 Convergência da sequência Palais-Smale 116
4.3 Existência de solução 120

A Funcionais Localmente Lipschitz **132**

B Regularidade de Funcionais Energia **136**

Bibliografia **144**

Notação

Definições e Notações Gerais

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^N = \big\{(x_1, ..., x_N); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N\big\}$;
- $|\ .\ |$ denota o modulo na reta e a norma euclidiana no $\mathbb{R}^N$;
- $|\ .\ |_S$ é a norma da soma em $\mathbb{R}^N$;
- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |\ x - x_0\ | < r\},\ r > 0$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto;
- $\partial\Omega$ fronteira de Ω;
- $|\ A\ |$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável a Lebesgue;
- $\overline{A}^{\|\cdot\|_*}$ é o fecho do conjunto A com relação a uma norma arbitrária $\|\ .\ \|_*$;
- $A \subset\subset \Omega$, o aberto A está compactamente contido em Ω, isto é $\overline{A} \subset \Omega$ é compacto;
- $A \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} B$, A está imerso continuamente em B;
- $A \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} B$, A está imerso compactamente em B;
- $[w = 0] = \{x; w(x) = 0\}$;
- $|\ .\ |_\infty$ é a norma usual do espaço $L^\infty(\Omega)$;
- $|\ .\ |_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$;

- $d_{\|\cdot\|_*}(x, A) = \inf\{\| x - y \|_*; y \in A\}$, onde $\| \, . \, \|_*$ é uma norma qualquer;
- $\langle u \rangle = \{\lambda u; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o espaço gerado pelo elemento u;
- $\text{supp}(u) = \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua qualquer;
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável;
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita N-mensurável, quando para qualquer função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$, a função composta $f(., u(.))$ é mensurável;
- χ_A é a função característica com relação ao conjunto A;
- $sgn(t) = \begin{cases} 1, \ t > 0 \\ 0, \ t = 0 \\ -1, \ t < 0; \end{cases}$
- $div\big(\overrightarrow{w}(x)\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x)$, onde $\overrightarrow{w}(x) = (w_1(x), ..., w_N(x))\,, x \in \mathbb{R}^N$;
- $p' = \dfrac{p}{p-1}$ é o expoente conjugado de $p > 1$.
- $f'_+(t)$ é a derivada lateral à direita de f, com relação a variável t,

Espaços de Funções

- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}$
- $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua com } \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ compacto}\}$;
- $L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \displaystyle\int_\Omega | \, u \, |^p \, dx < +\infty\Big\}, \ p \in [1, +\infty)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; existe } c > 0 \text{ tal que } \ | \, u(x) \, | \leq c \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é continuamente derivável } k \text{ vezes}\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$;
- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \displaystyle\int_A | \, u \, | \, dx < +\infty, \text{ para qualquer } A \subset\subset \mathbb{R}^N\Big\}$;

- X^* é o espaço dual de um espaço X;

Introdução

Em muitos problemas de equações quasilineares do tipo

$$\mathbb{L}(u) = f(x, u) \text{ em } \Omega, \tag{1}$$

onde $\mathbb{L}$ é um operador não necessariamente linear e $f(x, .)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para cada $x \in \Omega$ (sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio), somos levados a resolver uma equação do tipo

$$I'(u) = 0, \tag{2}$$

para algum funcional I de classe C^1 definido sobre um espaço de Banach X. Esta equação se reduz à possibilidade de obter pontos críticos para o funcional I. Na teoria de pontos críticos temos resultados bem conhecidos, tais como aqueles encontrados em Schwartz [52], Palais e Smale [48], Ambrosetti e Rabinowitz [11] e Benci e Rabinowitz [17]. Todos estes resultados têm por objetivo obter pontos críticos para um funcional de classe C^1.

Motivados por alguns problemas físicos, Chang [25], Cerami [24], Ambrosetti e Turner [12], Ambrosetti e Badiale [7], Costa e Gonçalves [27], Carl e Dietrich [22], Carl e Heikkila [23], Hu, Kourogenis e Papageorgiou [42], Bertone e Gonçalves [18], Radulescu e Gazzola [50], Alves, Bertone e Gonçalves [4], Halidias [41] , Alves, Gonçalves e Santos [6] além de outros, estudaram problemas do tipo (1), considerando $f(x, .)$ descontínua em $\mathbb{R}$. Mais precisamente estudaram um problema multivalente do tipo

$$\mathbb{L}(u) \in \partial_u F(x, u) \text{ em } \Omega, \tag{3}$$

onde $F(x, t) = \displaystyle\int_0^t f(x, s)ds$ e $\partial_t F(x, t)$ é o gradiente generalizado de $F(x, t)$ com relação a variável t.

Analogamente, como se faz na teoria clássica, para se obter solução para a equação (3) procura-se encontrar ponto crítico no contexto de análise convexa, para um determinado funcional I apenas localmente Lipschitz.

Neste trabalho, estudamos a existência de solução para uma classe de problemas do tipo (3) considerando o operador $\mathbb{L}$ da forma

$$\mathbb{L}(u) = \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u.$$

Estudamos no Capítulo 1 multiplicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u \in \partial_u F(x,u) \ \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular,

$$\Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x_i \partial^2 x_j},$$

e

$$\mathbf{B}u = \begin{cases} u, \text{ se } \alpha = 0 \\ (u, \Delta u), \text{ se } \alpha > 0. \end{cases}$$

com $\alpha \geq 0$ e $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Além disso,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds, \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

é uma função de Carathéodory, onde $f(x,t)$ é mensurável em Ω, para cada $t \in \mathbb{R}$ e localmente limitada sobre $\mathbb{R}$. Estamos interessados em estudar multiplicidade do problema (4), no caso em que

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t} = \mu_1 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde μ_1 é o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \mu u \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Considerando

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\text{inf ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right) \text{ e } \overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\text{sup ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right),$$

(funções definidas em Chang [25]), assuma sobre o problema (4) as seguintes condições:

(f_1) $f(x,0) = 0$ $q.t.p.$ $x \in \Omega$ e $\underline{f}, \overline{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções N-mensuráveis,

(f_2) (i) $\max\{\mid \underline{f}(x,t) - \mu_1 t \mid, \mid \overline{f}(x,t) - \mu_1 t \mid\} \stackrel{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ q.t.p. $x \in \Omega$;

(ii) $\mid f(x,t) - \mu_1 t \mid \leq h(x)$ $q.t.p.$ $x \in \Omega$, com $h \in L^2(\Omega)$,

onde

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\inf \mathrm{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right) \text{ e } \overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\sup \mathrm{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right).$$

Garantindo assim que $f(x,t)$ se comporte assintoticamente como a função $\mu_1 t$ no infinito, com um certo controle dado por $f_2(ii)$.

Além disso, considerando ϕ_1 a primeira auto função e μ_1, μ_2 o primeiro e o segundo auto valores de $(\alpha\Delta^2 + \beta\Delta, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, suponha sobre a função de Carathéodory

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds, \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

as seguintes condições:

(f_3) (i) $\left(F(x,t) - \frac{\mu_1}{2}t^2\right) \stackrel{|t|\to\infty}{\longrightarrow} F_\infty(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, onde $F_\infty \in L^1(\Omega)$ e

$$F_\infty(x) \geq 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

(ii) $\mid F(x,t) - \frac{\mu_1}{2}t^2 \mid \leq \widehat{h}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ e $\widehat{h} \in L^\infty(\Omega)$.

Estas condições garantem que a diferença entre $f(x,t)$ e $\mu_1 t$ não some área, ou melhor no infinito esta diferença convirga para uma função $F_\infty(x)$, com um controle dado por $f_3(ii)$.

(f_4) (i) $F(x,t) \leq \frac{\mu_2}{2}t^2$ q.t.p. $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$;

(ii) para algum $\delta > 0$

$$F(x,t) \leq \frac{m(x)t^2}{2}, \ \mid t \mid \leq \delta$$

onde

$$0 < m(x) < \mu_1 \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$

A condição (f_4), controla o crescimento global e local da primitiva de $f(x,t)$.

(f_5) $\displaystyle\int_\Omega \Big(F(x, t_\pm\phi_1) - F_\infty(x)\Big)dx > \frac{\mu_1(t_\pm)^2}{2}\int_\Omega \phi_1^2 dx$, para algum $t_- < 0 < t_+$.

Com esta condição, conseguimos aplicar o Teorema de Minimização devido a Mizoguchi [47].

O funcional energia associado ao problema (4), é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big(\alpha \int_\Omega |\, \Delta u \,|^2 \, dx - \beta \int_\Omega |\, \nabla u \,|^2 \, dx\Big) - \int_\Omega F(x,u)dx, \ u \in H,$$

onde $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Quando $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ e $f(x,t) = H(t-a)g(x,t)$, $g(x,t)$ sendo uma função contínua com relação a variável t, com $g(x,a) > 0$ e H a função de Heavside, o problema (4) se aplica na área de física de plasma. Neste caso, a solução deste problema pode representar a distribuição de temperatura de um gás, confinado em um cilindro de base circular com raio R e temperatura constante, sujeito a uma corrente elétrica que passa no interior deste cilindro. O parâmetro $a > 0$ representa a temperatura de descarga do gás (propriedade intrinsica do gás). Para maiores detalhes ver [9, 12].

Em [16] Bartolo, Benci e Fortunato provaram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_k u + g(u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde λ_k, $k \geq 1$ é um autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, têm pelo menos uma solução se g é suave e satisfaz

$$g(t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$G(t) \leq G_\infty, \ t \in \mathbb{R},$$

onde $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ e

$$g'(0) = \sup_{t\in\mathbb{R}} g'(t).$$

Em [35], Gonçalves e Miyagaki melhoraram o resultado acima considerando g contínua e satisfazendo as condições

$$g(t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$G(t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} G_\infty \in \mathbb{R},$$

e supondo que existe $m \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$m < 0, \ 2G(t) \leq mt^2, \ t \in \mathbb{R}, \ G_\infty \leq 0$$

ou

$$m > 0,\ 2G(t) \leq mt^2,\ t \in \mathbb{R},\ G_\infty \geq 0.$$

Em Gonçalves e Miyagaki [36] e Costa e Silva [28], os autores provaram resultados sobre multiplicidades de solução, mais exatamente a existência de duas soluções não-triviais. Em [37], Gonçalves e Miyagaki provaram a existência de três soluções não-triviais supondo

$$g(t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$G(t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$2G(t) \geq mt^2,\ \mid t \mid \leq \delta,$$

onde $\delta > 0$ e $m \in (0, \lambda_1]$,

$$2G(t) \geq (\lambda_1 - \lambda_2)t^2,\ t \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_\Omega \big(G(t_\pm \phi_1) - G_\infty\big)dx < 0,\ \text{para algum } t_- < 0 < t_+.$$

Em [43], Kourogenis e Papageorgiou utilizaram teoria do pontos críticos para funcionais não diferenciáveis, com o objetivo de obter três soluções para uma classe de problema resonante do tipo

$$\begin{cases} -div\big(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u\big) - \lambda_1 \mid u \mid^{p-2} u = f(x,u) \text{ q.t.p. em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Motivados pelos trabalhos [16], [35], [36], [28], [37] e [43] estudamos o problema (4). Neste problema generalizamos as hipotéses com relação a função $f(t) = \lambda_1 t - g(t)$ tratada nos trabalhos anteriores e percebemos que o operador do problema (4) generaliza os operadores já estudados por [16], [35], [36], [28] e [37]. Além disso, assim como em [43], trabalhamos com funcionais não diferenciáveis, mostrando o seguinte resultado:

Teorema 0.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira regular. Supondo as condições $(f_1) - (f_5)$, o problema (4) têm pelo menos três soluções não triviais $u_-, u_+, u_0 \in H^4(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ satisfazendo*

$$I(u_+) = \min\left\{I(v); v = t\phi_1 + w,\ t > 0,\ \int_\Omega \phi_1 w dx = 0\right\} < 0,$$

$$I(u_-) = \min\left\{I(v); v = t\phi_1 + w,\ t < 0,\ \int_\Omega \phi_1 w dx = 0\right\} < 0$$

e

$$I(u_0) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t)) > 0,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; H); \gamma(0) = 0 \ e\ \gamma(1) = t_+\phi_1\}.$$

Para provar a existência de pelo menos três soluções para o problema (4), mostramos que o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz. Através de uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha estabelecemos a existência de um ponto crítico $u_0 \in H$ para o funcional I. Para a obtenção dos outros dois pontos críticos, u_+ e u_-, utilizamos um resultado de minimização sobre convexos, desenvolvido por Mizoguchi [47].

Considerando agora $\mathbb{L}$ como sendo um operador não-linear da forma

$$\mathbb{L}(u) = -div\big(\phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u\big) - b(u)u,$$

onde $\phi, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas. Estabelecemos nos Capítulos 3 e 4 a existência de uma solução não-trivial para uma classe de problema do tipo

$$-div\big(\phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda\partial_u F(x,u) \text{ em } \Omega, \tag{5}$$

em que λ é um parâmetro positivo.

Esta equação aparece em vários ramos da física, por exemplo física de plasma, fluídos não-Newtonianos, elasticidade não-linear (ver [9, 12], [31] e [33]). No Capítulo 3, Ω é considerado um domínio limitado, já no Capítulo 4 consideramos $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sendo $\phi(t)$ uma função bem geral, para estudar esta classe de problemas, fazemos uma revisão no Capítulo 2 de alguns resultados envolvendo espaços de Orlicz ($L_\Phi(\Omega)$), Orlicz-Sobolev ($W^1L_\Phi(\Omega)$, $W_0^1L_\Phi(\Omega)$ e $D^{1,\Phi}(\Omega)$) e imersões entre estes espaços, a fim de facilitar o leitor no entendimento dos estudos feitos nos Capítulos 3 e 4. Durante o estudo feito nos Capítulos 3 e 4, tivemos a necessidade de um resultado tipo Brézis e Lieb para os espaços de Orlicz, por isso fomos motivados a demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.2 *(Brézis Lieb para N-funções) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ contínua, convexa, par e $\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{st - \Phi(s)\}.$$

Suponha

(i) $\Phi(t) = 0$ *se, e somente se,* $t = 0$*;*

(ii) $\lim_{t \to 0} \dfrac{\Phi(t)}{t} = 0$ *e* $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty$*;*

(iii) existem α *e* $t_1 \geq 0$ $(t_1 = 0$*, caso* $\mid \Omega \mid = +\infty)$*, tais que*

$$\frac{\Phi'_+(t)}{\Phi(t)} < \alpha, \ t \geq t_1;$$

(iv) Existem $\beta > 0$ *e* $t_2 \geq 0$ $(t_2 = 0$*, caso* $\mid \Omega \mid = +\infty)$*, tais que*

$$\frac{\widetilde{\Phi}'_+(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} < \beta, \ t \geq t_2.$$

Se (f_n) *é uma sequência limitada em* $L_\Phi(\Omega)$*, tal que*

$$f_n(x) \to f(x) \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$

então

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{em} \ L_\Phi(\Omega).$$

Considerando no problema (5) $\phi(t) = 1, \ b(t) = t^{2^*-2}$ e $f(x,t) = t^q H(t-a)$, onde H é a função de Heaviside e $0 \leq q < 2^* - 1$, Badiale e Tarantelo em [13] provaram existência e unicidade de uma solução positiva, para a equação

$$-\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u^q H(u-a) \text{ em } \Omega,$$

onde Ω é limitado com fronteira regular. No caso em que $\phi(t) = 1, \ b(t) = t^{2^*-2}$ e $f(x,t) = h(x) t^q H(t-a)$, com $0 \leq q < 2^* - 1$, Alves, Bertone e Gonçalves em [4] provaram resultados de existência e multiplicidade de solução para a equação

$$-\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda h(x) u^q H(u-a) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Esses resultados foram obtidos via métodos variacionais usando espaços de Sobolev. O problema (5) tem a sua origem no estudo de não existência de solução para o seguinte problema de Dirichlet

$$-\Delta u = u^{2^*-1} \text{ em } \Omega. \tag{6}$$

Por exemplo, quando Ω é um domínio estrelado, Pohozaev em [49] mostrou que a equação (6) não possui solução. Brézis e Niremberg [21] pertubaram o problema (6) e encontraram solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^{2^*-1} \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

com $q \in [1, 2^* - 1)$ e $\lambda > 0$. Para $q \in (0, 1)$, Ambrosetti, Brézis e Cerami [8] utilizando técnicas de sub e super solução e métodos variacionais, apresentaram resultados de multiplicidade e bifurcação com relação ao parâmetro λ. Além destes trabalhos citamos como referências, Guedda e Véron [39], Garciá Azorero e Peral Alonso [34], Ben-Naoum, Troesther e Willem [15], Silva e Xavier [54], Alves e Gonçalves [5], Ambrosetti, Garcia Azorero e Peral [10], Silva e Soares [53], Alves [2] além de outros. Mais recentemente, Fukagai, Ito e Narukawa [32] estabeleceram a existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas quasilinear do tipo

$$-div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) = b(u)u + \lambda f(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

onde $\phi(t)$, $b(t)$ e $f(x, t)$ são funções contínuas e $\lambda > \lambda_0 > 0$.

Motivados pelos trabalhos [13], [4] e [32], estudamos no Capítulo 3 o problema (5) pedindo agora que $f(x, t)$ seja mensurável para cada $t \in [0, +\infty)$ e localmente limitada para cada $x \in \Omega$. Sendo $\phi(t)$ uma função bem geral, utilizaremos métodos variacionais para funcionais localmente Lipschitz em espaços de Orlicz-Sobolev, adaptando alguns argumentos desenvolvidos em Fukagai, Ito e Narukawa [32].

Sejam $\varphi(s) = \phi(s)s$ e $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Com o objetivo de formular nosso resultado, introduziremos algumas hipóteses.

$S_1)$ $\phi \in C^1\big((0, +\infty)\big)$ e satisfaz

$$\phi(t) > 0, \ \big(\phi(t)t\big)' > 0, \ t > 0.$$

$S_2)$ Existem $l, m \in (1, N)$, satisfazendo

(i) $l \leq m < l^* = \dfrac{Nl}{N - l}$

(ii) $l \leq \dfrac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m,\ t > 0.$

Estas duas condições garantem que $\Phi(t)$ define uma N-função. Além disso, garante que $\Phi(t)$ está compreendida entre os polinômios $\Phi(1)t^l$ e $\Phi(1)t^m$.

Suponha que $b \in C\big((0,+\infty)\big)$ satisfaz

S_3) (i) $\lim\limits_{t\to 0^+} b(t)t = 0,$

(ii) $l^* \leq \dfrac{b(t)t^2}{B(t)} \leq m^*$, onde $m^* = \dfrac{Nm}{N-m}$,

onde

$$B(t) = \int_0^t b(s)sds,\ t \in \mathbb{R}.$$

S_4) Existem $b_0, b_1 > 0$ tais que

$$b_0 \leq \frac{B(t)}{\Phi_*(t)} \leq b_1,\ t > 0,$$

onde Φ_* é a função inversa da função

$$G_\Phi(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds,\ t > 0.$$

As condições (S_3) e (S_4) garantem que $B(t)$ têm crescimento crítico.

Agora introduziremos a seguir condições para o termo semilinear $f(x,t)$:

S_5) $f : \Omega \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é mensurável para cada $t \in [0,+\infty)$ e localmente limitada em $[0,+\infty)$, satisfazendo

$$f(x,0) = 0,\ x \in \Omega.$$

Definindo a função de Carathéodory

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds,\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

e as funções

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\inf \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right) \text{ e } \overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\sup \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right),\ t > 0 \text{ e } x \in \Omega,$$

com

$$\underline{f}(x,0) = \overline{f}(x,0) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

supomos que $\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)$ sejam N-mensuráveis e que $F(x,t)$ verifica as seguintes condições:

$S_6)$ $\mid F(x,t) \mid \leq \begin{cases} g(x)t^{r_0}, & t \in [0,1] \\ g(x)t^{r_1}, & t \geq 1 \text{ e } x \in \Omega, \end{cases}$

onde $g \in L^{\infty}(\Omega)$, $r_0 \in (\dfrac{mm^*}{l^*}, m^*)$ e $r_1 \in (m, l^*)$.

Com esta condição conseguimos comparar $F(x,t)$ com a N-função $\Phi_*(t)$, garantindo assim que o funcional energia esteja bem definido.

$S_7)$ Existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$, tal que

$$F(x,t) > K_0 > 0 \ x \in \Omega_0, \ t > 0.$$

Com esta condição conseguimos controlar o nível minimax.

$S_8)$ Existe $C > 0$ tal que

$$\mid f(x,t)t \mid \leq C \mid F(x,t) \mid \ \ x \in \Omega \text{ e } t > 0.$$

$S_9)$ Existe $\tau \in (m, l^*)$, satisfazendo

$$F(x,t) - \frac{1}{\tau}\underline{f}(x,t)t > 0, \ x \in \Omega \text{ e } t > 0.$$

A partir desta condição garantimos que a sequência de Palais Smale no nível minimax converge forte em $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

Teorema 0.3 *Seja Ω um domínio limitado e suponha $(S_1) - (S_9)$. Então para cada $\lambda > \lambda_0 > 0$, com $\lambda_0 = \lambda_0(N, S_N, l, m, b_1, \tau)$ (S_N é a melhor constante da desigualdade (2.24)), existem*

$$\rho(x) = \rho_\lambda(x) \in \partial_u F(x, u(x)) \ \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$

com $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$ e

$$u = u_\lambda \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \ \ com \ u \geq 0 \ \ e \ u \not\equiv 0,$$

satisfazendo

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega b(u)uv dx + \lambda \int_\Omega \rho v dx, \ \ v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

ou ainda

$$-div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda \partial_u F(x,u) \ \ em \ \Omega.$$

A demonstração do Teorema 3.1 consiste em mostrar que o funcional energia associado a equação (5), dado por

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \int_\Omega B(u)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \; u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

é localmente Lipschitziano, que $u = u_\lambda$ é um ponto crítico de I_λ, no sentido de que $0 \in \partial I_\lambda(u)$, onde ∂I_λ é o gradiente generalizado de I_λ. Para este fim, foi preciso mostrar o seguinte resultado:

Teorema 0.4 *Sejam Ω um domínio aberto com fronteira regular, Φ uma N-função verificando (S_1) e (S_2), $f(x,t)$ e $F(x,t)$ verificando as condições (S_5), (S_6) e (S_8). Então o funcional $J : L_{\Phi_*}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \; u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$$

e $F(x,.)$ são localmente Lipschitz e

$$\partial J(u) \subset \partial_u F(x,u) \; q.t.p. \; x \in \Omega.$$

Além disso, $\widehat{J} = J|_X \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, onde $X = D^{1,\Phi}(\Omega)$ ou $X = W^1 L_\Phi(\Omega)$, e

$$\partial \widehat{J}(u) = \partial J(u), u \in X.$$

No Capítulo 4, estabelecemos a existência de uma solução não-trivial para a equação multivalente

$$-div\big(\phi(|\nabla u|)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda \partial_u F(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{9}$$

através do seguinte resultado:

Teorema 0.5 *Suponha $(S_1) - (S_9)$, com $\Omega = \mathbb{R}^N$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Então para cada $\lambda > \lambda_0 > 0$, com $\lambda_0 = \lambda_0(N, S_N, l, m, b_1, \tau)$, existem*

$$\rho = \rho_\lambda \in \partial_u F(x,u) \; q.t.p. \; x \in \mathbb{R}^N,$$

com $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$u = u_\lambda \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \; com \; u \geq 0 \; e \; u \not\equiv 0,$$

satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u)uv dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho v dx = 0, \; v \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

ou ainda

$$-div\big(\phi(|\nabla u|)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda \partial_u F(x,u) \; em \; \mathbb{R}^N.$$

A demonstração do Teorema 0.5 consiste em provar que o funcional

$$\widehat{I}_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} B(u)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx, \ u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

é localmente Lipschitziano e que $u = u_\lambda$ é um ponto crítico de $\widehat{I}_\lambda$, isto é $0 \in \partial\widehat{I}_\lambda(u)$, onde $\partial\widehat{I}_\lambda$ é o gradiente generalizado de $\widehat{I}_\lambda$. Para este fim, considerando $c_\lambda > 0$ o nível minimax dado pelo Teorema generalizado do Passo da Montanha e $(u_n) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ a correspondente sequência $(PS)_{c_\lambda}$ associado a $\widehat{I}_\lambda$, provamos, utilizando Concentração de Compacidade, que existe $u = u_\lambda \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_n \to u \text{ em } L_{\Phi_*,loc}(\mathbb{R}^N).$$

Em domínio limitado (ver Capítulo 3), provamos que o funcional energia I_λ satisfaz a condição $(PS)_{c_\lambda}$. No entanto, para $\Omega = \mathbb{R}^N$, não conseguimos garantir que o funcional $\widehat{I}_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)_{c_\lambda}$. Desta forma, para justificar que u é ponto crítico do funcional $\widehat{I}_\lambda$, contornamos a falta de compacidade demonstrando o seguinte teorema:

Teorema 0.6 *Sejam $(X, \|\ .\ \|_X)$ e $(Y, \|\ .\ \|_Y)$ dois espaços de Banach, tais que $\overline{X}^{\|\cdot\|_Y} = Y$ e $X \underset{comp}{\hookrightarrow} Y$. Seja $J : Y \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitziano. Se*

(i) $J|_X \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$,

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ *em* X,

(iii) $\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ *em* X^*, *onde* $(\rho_n) \subset \partial J|_X(u_n)$,

devemos ter $\rho \in \partial J|_X(u)$.

Sendo u um ponto crítico concluímos através do Teorema 0.4, que u é solução do problema (9).

A grande contribuição deste trabalho, é pedi que $f(x,t)$ seja apenas localmente limitada em $\mathbb{R}$, para cada $x \in \Omega$. Podendo assim $f(x,.)$ ser descontínua por exemplo em uma quantidade enumerável de pontos. Com esta condição, foi necessário trabalhar com problemas multivalentes, como foi apresentado anteriormente. Consequentemente tivemos que desenvolver alguns resultados no contexto de análise convexa, para contorna as dificuldades encontradas.

Capítulo 1

Múltiplas soluções para uma classe de equações elípticas multivalentes

Neste capítulo estudamos multiplicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u \in \partial_u F(x,u) \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular e

$$\mathbf{B}u = \begin{cases} u, \ \text{se } \alpha = 0 \\ (u, \Delta u), \ \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

com $\alpha \geq 0$ e $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. No que segue suponha que μ_1 é o primeiro e μ_2 o segundo autovalores de $(\alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u, H)$. Considerando $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, localmente limitada sobre $\mathbb{R}$, com

$$f(x,0) = 0, \ x \in \Omega,$$

defina

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\inf \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right) \ \text{e} \ \overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\sup \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\right).$$

Para estas funções supomos que

(f_1) $\underline{f}, \overline{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são N-mensuráveis,

e

(f_2) (i) $\max\{| \underline{f}(x,t) - \mu_1 t |, | \overline{f}(x,t) - \mu_1 t |\} \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ q.t.p. $x \in \Omega$;

(ii) $| f(x,t) - \mu_1 t | \leq h(x)$ $q.t.p.$ $x \in \Omega$ onde $h \in L^2(\Omega)$.

Definindo $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, tem-se que $F(x,t)$ é uma função de Carathéodory. Para esta função, assumiremos as seguintes condições:

(f_3) (i) $\Big(F(x,t) - \dfrac{\mu_1}{2}t^2\Big) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} F_\infty(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, onde $F_\infty \in L^1(\Omega)$ e

$$F_\infty(x) \geq 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

(ii) $| F(x,t) - \dfrac{\mu_1}{2}t^2 | \leq \widehat{h}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ e $\widehat{h} \in L^\infty(\Omega)$,

(f_4) (i) $F(x,t) \leq \dfrac{\mu_2}{2}t^2$ q.t.p. $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$;

(ii) para algum $\delta > 0$

$$F(x,t) \leq \frac{m(x)t^2}{2}, \ | t | \leq \delta$$

onde

$$0 < m(x) < \mu_1 \ q.t.p. \ x \in \Omega$$

e

(f_5) $\displaystyle\int_\Omega \Big(F(x, t_\pm \phi_1) - F_\infty(x)\Big)dx > \frac{\mu_1 (t_\pm)^2}{2} \int_\Omega \phi_1^2 dx$, para algum $t_- < 0 < t_+$.

1.1 Estudo Espectral

Nessa seção vamos caracterizar todos os autovalores do problema

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \mu u \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Para isto, mostramos primeiro que o espaço

$$H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

munido da norma

$$\| u \|_H = \left(\alpha \int_\Omega | \Delta u |^2 \, dx - \beta \int_\Omega | \nabla u |^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

define um espaço de Hilbert.

Lema 1.1 *A aplicação* $(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$(u,v) = \alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ u, v \in H,$$

define um produto interno em H.

Demonstração. Considere os seguintes casos:

1° **caso:** $\alpha > 0$,

2° **caso:** $\alpha = 0$.

No que segue, consideraremos sempre o 1° caso, pois o 2° caso pode ser feito de forma análoga. Observe que

(i) $(u,v) = (v,u), \ u, v \in H$;

(ii) $(.,.)$ é bilinear;

(iii) $(u,u) \geq 0, \ (u,u) = 0$ se, e só se $u \equiv 0$.

Verificação de (iii)**:** Primeiro note que para $u, v \in H$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx.$$

Daí pela desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = -\int_\Omega u \Delta u dx \leq |u|_2 |\Delta u|_2, \ u \in H. \tag{1.3}$$

Gupta e Kwong [40], mostraram que

$$\lambda_1^2 = \inf_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\Delta u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}. \tag{1.4}$$

Assim, segue de (1.3)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\Delta u|^2 dx,$$

consequentemente

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \geq \lambda_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \ u \in H, \tag{1.5}$$

e portanto

$$(u,u) \geq (\alpha \lambda_1 - \beta) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 0,$$

isto justifica a condição $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$. Supondo $(u,u) = 0$, tem-se

$$0 = (u,u) \geq (\alpha\lambda_1 - \beta) \parallel u \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0,$$

donde $u \equiv 0$. Se $u = 0$, temos claramente $(u,u) = 0$. ■

Conclui-se do Lema 1.1 que H é um espaço pré-Hilbertiano. Será justificado agora que H é Hilbert.

Lema 1.2 *H é completo.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência de Cauchy, isto é

$$\parallel u_n - u_m \parallel_H \overset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definindo-se

$$w_{nm} = u_n - u_m,$$

temos

$$\begin{cases} -\Delta w_{nm} = f_{nm} \in L^2(\Omega) \\ w_{nm} \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Usando Agnom, Douglas e Niremberg (ver [46]), existe $c > 0$ tal que

$$\parallel w_{nm} \parallel_{H^2(\Omega)} \leq c \mid f_{nm} \mid_2, \; n,m \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

De (1.5)

$$\parallel w_{nm} \parallel^2_H \geq \left(\alpha - \frac{\beta}{\lambda_1}\right) \mid \Delta w_{nm} \mid^2_2 = \mid f_{nm} \mid^2_2 .$$

Logo

$$\mid f_{nm} \mid_2 \overset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e por (1.6)

$$\parallel w_{nm} \parallel_{H^2(\Omega)} \overset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Assim para algum $u \in H^2(\Omega)$

$$u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } H^2(\Omega).$$

Da teoria do traço existe um operador $T : H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ linear e contínuo. Desde que $(u_n) \subset H$, tem-se que

$$T(u_n) = 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Segue da continuidade e linearidade de T

$$| T(u_n) - T(u) |_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \parallel u_n - u \parallel_{H^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

implicando que

$$| T(u) |_{L^2(\partial\Omega)} = 0,$$

ou seja, o traço de u é zero em $\partial\Omega$. Logo, $u \in H$. Consequentemente,

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } H,$$

como queríamos provar. ■

Veremos a seguir que o espaço H munido da norma $\parallel . \parallel_H$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$.

Lema 1.3 $H \underset{cont}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \underset{comp}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$.

Demonstração. De fato, foi visto durante a demonstração do Lema 1.1 que para cada $u \in H$

$$\parallel u \parallel_H^2 = (u, u) \geq (\alpha\lambda_1 - \beta) \parallel u \parallel_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Além disso, tem-se do Teorema de Rellich-Kondrachov (ver [46]) que

$$H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega),$$

provando o lema. ■

No que segue considere $\alpha > 0$. Mostraremos a existência de uma única solução para o problema variacional

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \xi(x) \text{ em } \Omega \\ u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $\xi \in L^2(\Omega)$.

Lema 1.4 *Se $u \in H$, satisfaz*

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \xi v dx, \ v \in H,$$

para algum $\xi \in L^2(\Omega)$, então $u \in H^4(\Omega)$ e

$$u = \Delta u = 0 \textit{ em } \partial\Omega.$$

Demonstração. De fato, desde que $\xi \in L^2(\Omega)$, existe um único $w \in H$ tal que

$$\begin{cases} \Delta w = \xi \text{ em } \Omega \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \xi v dx = \int_\Omega \Delta w v dx, \ v \in H,$$

segue das identidades de Green (ver [46])

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \beta \int_\Omega u \Delta v dx = \int_\Omega w \Delta v dx, \ v \in H,$$

ou seja

$$\alpha \int_\Omega \Big(\Delta u - \frac{1}{\alpha} w - \frac{\beta}{\alpha} u\Big) \Delta v dx = 0, \ v \in H. \tag{1.8}$$

Para cada $\varphi \in L^2(\Omega)$, existe um único $v \in H$ tal que

$$\begin{cases} \Delta v = \varphi \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Deste fato, tem-se de (1.8)

$$\alpha \int_\Omega \Big(\Delta u - \frac{1}{\alpha} w dx + \frac{\beta}{\alpha} u\Big) \varphi dx = 0, \ \varphi \in L^2(\Omega),$$

implicando

$$\Delta u = \frac{1}{\alpha} w + \frac{\beta}{\alpha} u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Uma vez que $w, u \in H_0^1(\Omega)$, podemos concluir que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Sabendo que

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{\alpha} w - \dfrac{\beta}{\alpha} u \text{ em } \Omega \\ u \in H, \end{cases}$$

com $\dfrac{1}{\alpha} w - \dfrac{\beta}{\alpha} u \in H^2(\Omega)$, conclui-se da teria de regularidade que $u \in H^4(\Omega)$. ■

Do Lema 1.4, observamos que uma **solução fraca** de (1.7) é um elemento $u \in H$ verificando

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \xi v dx, \ v \in H.$$

Lema 1.5 *O problema (1.7) têm uma única solução $u \in H$ para cada $\xi \in L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Segue imediatemnte do Teorema de Lax-Milgram (ver [19]). ■

Conclui-se do Lema 1.5, que o operador solução

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega) &\rightarrow H \\ \xi &\mapsto S(\xi) = u_\xi, \end{aligned}$$

está bem definido, onde u_ξ é solução de (1.7).

Lema 1.6 *O operador solução S é linear e satisfaz*

(i) para algum $c > 0$,

$$\| S(\xi) \|_H \leq c \mid \xi \mid_2, \;\; \xi \in L^2(\Omega),$$

(ii) $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é compacto,

(iii) S é simétrico em $L^2(\Omega)$, isto é

$$\int_\Omega S(\xi)\eta dx = \int_\Omega \xi S(\eta) dx, \;\; \xi, \eta \in L^2(\Omega).$$

Demonstração. Verifica-se de forma imediata que S é linear.

Verificação do item (i)**:** Para cada $\xi \in L^2(\Omega)$, com $\xi \neq 0$, observe que

$$\| S(\xi) \|_H^2 = \| u_\xi \|_H^2 = \int_\Omega u_\xi \xi dx,$$

segue da desigualdade de Hölder e do Lema 1.3

$$\| S(\xi) \|_H^2 \leq c \| u_\xi \|_H \mid \xi \mid_2 = c \| S(\xi) \|_H \mid \xi \mid_2,$$

para algum $c > 0$, donde

$$\| S(\xi) \|_H \leq c \mid \xi \mid_2 .$$

Verificação do item (ii)**:** Desde que $S : L^2(\Omega) \rightarrow H$ é linear, conclui-se do item (i) que S também é contínuo. Compondo S com o operador imersão $i : H \rightarrow L^2(\Omega)$, temos que $S = S \circ i$ é compacto.

Verificação do item (iii)**:** Segue imediatamente pela definição de solução. ■

Do Lema 1.6 e da teoria espectral, existem uma sequência ortonormal $(\phi_n) \subset L^2(\Omega)$ e uma sequência real $(\overline{\mu}_n) \subset \mathbb{R}^*$ tais que

$$S(\phi_n) = \overline{\mu}_n \phi_n \;\; \text{e} \;\; \overline{\mu}_n \overset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Note que $\overline{\mu}_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pois desde que

$$S(\phi_n) = \overline{\mu}_n \phi_n, \; n \in \mathbb{N},$$

temos

$$\overline{\mu}_n\Big(\alpha \int_\Omega \mid \Delta\phi_n \mid^2 dx - \beta \int_\Omega \mid \nabla\phi_n \mid^2 dx\Big) = \int_\Omega \phi_n^2 dx, \; n \in \mathbb{N}$$

sendo $\phi_n \not\equiv 0$, tem-se que

$$\overline{\mu}_n > 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Sabendo disto, conclui-se que

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2\phi_n + \beta\Delta\phi_n = \dfrac{1}{\overline{\mu}_n}\phi_n \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}\phi_n = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue considere $\mu_n = \dfrac{1}{\overline{\mu}_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.7 *Os autovalores do problema (1.2), satisfazem:*

(i) $\mu_n = \lambda_n(\alpha\lambda_n - \beta)$ $n \in \mathbb{N}$, *onde* (λ_n) *são os autovalores de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. *As correspondentes auto-funções* ϕ_n *do problema (1.2), são as mesmas auto-funções de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$*;*

(ii) $$\mu_1 = \inf_{v \neq 0, v \in H} \left(\frac{\alpha \displaystyle\int_\Omega \mid \Delta v \mid^2 dx - \beta \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \mid v \mid^2 dx} \right);$$

(iii) $\mu_1 \displaystyle\int_\Omega \mid v \mid^2 dx \leq \alpha \int_\Omega \mid \Delta v \mid^2 dx - \beta \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx, \; v \in H;$

(iv) $\mu_2 \displaystyle\int_\Omega \mid w \mid^2 dx \leq \alpha \int_\Omega \mid \Delta w \mid^2 dx - \beta \int_\Omega \mid \nabla w \mid^2 dx, \; w \in H,$ *com* $\displaystyle\int_\Omega w\phi_1 dx = 0.$

Demonstração. Verificação do item (i)**:** Suponha que μ seja um autovalor do problema

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2\phi + \beta\Delta\phi = \mu\phi \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2\phi + \beta\Delta\phi - \mu\phi = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\beta^2 + 4\mu\alpha > 0$, temos

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}\right) \circ \left(\Delta - \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}\right) \phi = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

implicando que $\lambda = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}$ é um autovalor para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\phi = \lambda\phi \text{ em } \Omega \\ \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Deste fato,

$$\mu = \alpha\lambda^2 - \lambda\beta,$$

onde λ é um autovalor de $\big(-\Delta, H_0^1(\Omega)\big)$. Os itens $(ii) - (iv)$ deixamos a cargo do leitor.

■

1.2 Condição Palais Smale

O objetivo desta seção é justificar que o funcional energia associado ao problema (1.1), dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2 - \int_\Omega F(x,u)dx, \ u \in H,$$

satisfaz a condição Palais Smale. Para isto, vamos mostrar primeiramente que $I \in Lip_{loc}(H, \mathbb{R})$. No que segue, consideraremos

$$Q(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2 \ \text{ e } \Psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \ u \in H.$$

Lema 1.8 *Suponha a condição $(f_2)(ii)$. Então $\Psi \in Lip_{loc}(H, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Fixe $w_0 \in H$ e $r > 0$. Dados $u, v \in B_R(w_0) \subset H$, temos

$$\begin{aligned} \mid \Psi(u) - \Psi(v) \mid &\leq \int_\Omega \mid F(x,u) - F(x,v) \mid dx \\ &\leq \int_\Omega \int_{\min\{u(x),v(x)\}}^{\max\{u(x),v(x)\}} \mid f(x,t) \mid dtdx \end{aligned}$$

logo por $(f_2)(ii)$,

$$\begin{aligned} \mid \Psi(u) - \Psi(v) \mid &\leq \int_\Omega \int_{\min\{u(x),v(x)\}}^{\max\{u(x),v(x)\}} (\mu_1 \mid t \mid + h(x))\, dtdx \\ &\leq \mu_1 \int_\Omega (\mid u \mid + \mid v \mid) \mid u - v \mid dx + \int_\Omega h(x) \mid u - v \mid dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e o Lema 1.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mid \Psi(u)-\Psi(v) \mid & \leq c\mu_1(\| u \|_H + \| v \|_H) \| u-v \|_H + c \mid h \mid_2 \| u-v \|_H \\
& \leq c\,(\mu_1 \| u-w_0 \|_H + 2 \| w_0 \|_H + \| v-w_0 \|_H + \mid h \mid_2) \| u-v \|_H \\
& = c(r, \| w_0 \|_H) \| u-v \|_H,
\end{aligned}
$$

onde

$$c(r, \| w_0 \|_H) = c\,(\mu_1 + 2r + 2 \| w_0 \|_H + \mid h \mid_2)\,.$$

Mostrando assim que $\Psi \in Lip_{loc}(H, \mathbb{R})$. ■

Desde que a derivada a Fréchet de Q é dada por

$$Q'(u)v = (u, v),\ \ u, v \in H,$$

temos que $Q \in C^1(H, \mathbb{R})$, e portanto $Q \in Lip_{loc}(H, \mathbb{R})$. Sabendo disto, conclui-se do Lema 1.8, que o funcional energia $I \in Lip_{loc}(H, \mathbb{R})$.

Lema 1.9 *Suponha* (f_1) *e* $(f_2)(ii)$*. Seja* $\widehat{\Psi} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\widehat{\Psi}(u) = \int_\Omega F(x, u)dx,\ \ u \in L^2(\Omega).$$

Então $\widehat{\Psi}$ *e* $F(x, .)$ *são localmente Lipschitz, e*

$$\partial\widehat{\Psi}(u) \subset \partial_u F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))]\ \ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Além disso,

$$\partial\widehat{\Psi}(u) = \partial\Psi(u),\ \ u \in H.$$

Demonstração. Confira Chang [25]. ■

Lema 1.10 *Suponha* (f_2) *e sejam* $u \in H$ *e* $v \in \partial\Psi(u)$*. Então*

$$\mid v(x) - \mu_1 u(x) \mid \leq h(x)\ \ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Além disso, se $(u_n) \subset H$ *é uma sequência verificando*

$$\mid u_n(x) \mid \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ \ q.t.p.\ x \in \Omega,$$

e $(v_n) \subset \partial\Psi(u_n)$*, temos que*

$$\mid v_n(x) - \mu_1 u_n(x) \mid \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ \ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Demonstração. Do Lemma 1.9

$$v(x) \in [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

assim

$$\underline{f}(x, u(x)) - \mu_1 u(x) \leq v(x) - \mu_1 u(x) \leq \overline{f}(x, u(x)) - \mu_1 u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

o que implica

$$| v(x) - \mu_1 u(x) | \leq \max\{| \underline{f}(x, u(x)) - \mu_1 u(x) |, | \overline{f}(x, u(x)) - \mu_1 u(x) |\} \tag{1.9}$$

em quase todo ponto $x \in \Omega$. Segue de $(f_2)(ii)$

$$| v(x) - \mu_1 u(x) | \leq h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

De (1.9) e $(f_2)(i)$

$$| v_n(x) - \mu_1 u_n(x) | \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 1.11 *Suponha (f_2), (f_3) e seja $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$c \neq -\int_\Omega F_\infty(x) dx.$$

Então

$$I \text{ satisfaz } (PS)_c.$$

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência $(PS)_c$, isto é,

$$I(u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c$$

e

$$m(u_n) = \| w_n \|_{H^*} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para alguma sequência $(w_n) \subset \partial I(u_n)$.

Afirmação 1.1 (u_n) *é limitado em H.*

Assumindo a Afirmação 1.1, temos a menos de subsequência que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H, \\ u_n &\overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) &\overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \end{aligned} \tag{1.10}$$

e

$$| u_n(x) | \leq \eta(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

para algum $\eta \in L^2(\Omega)$. Desde que $w_n \in \partial I(u_n)$, existe

$$v_n \in \partial\Psi(u_n) = \partial\widehat{\Psi}(u_n) \subset L^2(\Omega)^*,$$

(ver Lema 1.9) tal que

$$\langle w_n, v\rangle = \langle Q'(u_n), v\rangle - \langle v_n, v\rangle, \ n \in \mathbb{N} \text{ e } v \in H,$$

ou seja

$$\langle w_n, v\rangle = (u_n, v) - \int_\Omega v_n v dx, \ n \in \mathbb{N} \text{ e } v \in H. \tag{1.11}$$

Neste caso

$$\langle w_n, u_n - u\rangle = (u_n, u_n - u) - \int_\Omega v_n(u_n - u)dx, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Dado $\epsilon > 0$, tem-se pelo fato de (u_n) ser limitada em H que

$$| \langle w_n, u_n - u\rangle | \leq \| w_n \|_{H^*} \| u_n - u \|_H < \epsilon, \tag{1.13}$$

para n suficientemente grande. Por outro lado, do Lema 1.10 temos a desigualdade

$$\left| \int_\Omega v_n(u_n - u)dx \right| \leq \mu_1 \mid u_n \mid_2 \mid u_n - u \mid_2 + \mid h \mid_2 \mid u_n - u \mid_2 . \tag{1.14}$$

Sendo (u_n) limitada em H, tem-se que (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$. Deste fato, conclui-se de (1.10) e (1.14) que

$$\left| \int_\Omega v_n(u_n - u)dx \right| \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.15}$$

De (1.12), (1.13) e (1.15)

$$\alpha \int_\Omega \Delta u_n \Delta(u_n - u)dx - \beta \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde

$$\| u_n \|_H^2 \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \| u \|_H^2 .$$

Sendo H Hilbert, tal limite implica que

$$u_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } H,$$

mostrando que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$.

Verificação da Afirmação 1.1: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$u_n = t_n\phi_1 + \varphi_n,$$

onde $(t_n) \subset \mathbb{R}$ e $(\varphi_n) \subset H$ verifica

$$\int_\Omega \varphi_n\phi_1 dx = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

De (1.11)

$$\langle w_n, \varphi_n\rangle = \|\varphi_n\|_H^2 - \int_\Omega v_n\varphi_n dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\epsilon \|\varphi_n\|_H &\geq \|\varphi_n\|_H^2 - \int_\Omega v_n\varphi_n dx,\\ &= \|\varphi_n\|_H^2 - \int_\Omega \big(v_n\varphi_n - \mu_1 u_n\varphi_n\big)dx - \mu_1\int_\Omega u_n\varphi_n dx,\\ &= \|\varphi_n\|_H^2 - \int_\Omega \big(v_n - \mu_1 u_n\big)\varphi_n dx - \mu_1\int_\Omega \varphi_n^2 dx,\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Segue do Lema 1.10

$$\epsilon \|\varphi_n\|_H \geq \|\varphi_n\|_H^2 - \int_\Omega h \mid \varphi_n \mid dx - \mu_1\int_\Omega \varphi_n^2 dx,$$

e portanto pelo Lema 1.7,

$$\epsilon \|\varphi_n\|_H \geq \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|\varphi_n\|_H^2 - c \mid h\mid_2 \|\varphi_n\|_H,$$

para n suficientemente grande. Logo, (φ_n) é limitado em H. Suponha agora por contradição que

$$\|u_n\|_H \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Desde que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_H} = \frac{t_n\phi_1}{\|u_n\|_H} + \frac{\varphi_n}{\|u_n\|_H},$$

temos

$$\Big(\frac{t_n^2 \|\phi_1\|_H^2 + \|\varphi_n\|_H^2}{\|u_n\|_H^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos pelo fato de (φ_n) ser limitada em H que

$$\frac{\|t_n\phi_1\|_H}{\|u_n\|_H} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Consequentemente, existe $\widehat{u} \in H$ de maneira que

$$\frac{t_n\phi_1}{\| u_n \|_H} = -\frac{w_n}{\| u_n \|_H} + \frac{u_n}{\| u_n \|_H} \rightharpoonup \widehat{u} \in H,$$

a menos de subsequência. Como a dimensão do espaço gerado por ϕ_1 é finita, conclui-se que

$$\frac{t_n\phi_1}{\| u_n \|_H} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{u} \text{ em } H,$$

com $\widehat{u} = t_0\phi_1$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Deste fato

$$\frac{u_n}{\| u_n \|_H} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_0\phi_1 \text{ em } H.$$

Desde que $t_0\phi_1 > 0$ em Ω, pois $\| t_0\phi_1 \|_H = 1$,

$$| u_n(x) | \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{1.16}$$

Dado $\epsilon > 0$, temos para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} \epsilon \| \varphi_n \|_H &\geq \Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\Big) \| \varphi_n \|_H^2 - \int_\Omega (v_n - \mu_1 u_n)\varphi_n dx \\ &\geq \Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\Big) \| \varphi_n \|_H^2 - \Big(\int_\Omega | v_n - \mu_1 u_n |^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} | \varphi_n |_2, \end{aligned}$$

donde

$$\bigg(\epsilon + c\Big(\int_\Omega | v_n - \mu_1 u_n |^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg) \| \varphi_n \|_H \geq \Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\Big) \| \varphi_n \|_H^2 . \tag{1.17}$$

De (1.16) e Lema 1.10

- $| v_n(x) - \mu_1 u_n(x) |^2 \leq h^2(x) \in L^1(\Omega)$ q.t.p. $x \in \Omega$,

- $| v_n(x) - \mu_1 u_n(x) |^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ q.t.p. $x \in \Omega$,

o que implica pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega | v_n - \mu_1 u_n |^2 dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.18}$$

De (1.17) e (1.18)

$$2\epsilon \| \varphi_n \|_H \geq \Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\Big) \| \varphi_n \|_H^2,$$

para n suficientemente grande. Portanto,

$$\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } H. \tag{1.19}$$

Por (f_3)

- $F(x,u_n(x)) - \dfrac{\mu_1}{2} \mid u_n(x) \mid^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_\infty(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$,

- $\left| F(x,u_n(x)) - \dfrac{\mu_1}{2} u_n(x) \right|^2 \leq \widehat{h}(x) \in L^1(\Omega)$ q.t.p. $x \in \Omega$,

implicando pelo Teorema de Lebesgue que

$$\int_\Omega \Big(F(x,u_n) - \frac{\mu_1}{2} \mid u_n \mid^2 \Big) dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega F_\infty(x) dx. \tag{1.20}$$

Veja que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2} \parallel \varphi_n \parallel_H^2 + \frac{1}{2} t_n^2 \parallel \phi_1 \parallel_H^2 - \int_\Omega \Big(F(x,u_n) - \frac{\mu_1}{2} \mid u_n \mid^2 \Big) dx - \frac{\mu_1}{2} \int_\Omega \mid u_n \mid^2 dx, \\ &= -\int_\Omega \Big(F(x,u_n) - \frac{\mu_1}{2} \mid u_n \mid^2 \Big) dx, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos de (1.19) e (1.20) que

$$c = -\int_\Omega F_\infty(x) dx,$$

contradizendo a hipotése. Mostrando assim a Afirmação 1.1. ■

A seguir provaremos uma série de resultados, que serão úteis para a prova do teorema principal deste capítulo.

Lema 1.12 *Suponha* (f_1) *e* $(f_2)(ii)$. *Se* $u_0 \in H$ *é ponto crítico do funcional* I, *então* $u_0 \in H^4(\Omega)$ *é solução de (1.1), isto é existe* $\mu \in L^2(\Omega)$, *tal que*

$$\mu(x) \in \partial_u F(x,u) \ \textit{q.t.p.} \ x \in \Omega,$$

e

$$\alpha \int_\Omega \Delta u_0 \Delta v dx - \beta \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx = \int_\Omega \mu v dx, \ v \in H,$$

ou seja (ver Lema 1.4)

$$\begin{cases} \alpha \Delta^2 u_0 + \beta \Delta u_0 \in \partial_u F(x,u) \ \textit{em} \ \Omega \\ \mathbf{B} u_0 = 0 \ \textit{em} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Demonstração. Lembrando que

$$Q(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2, \ \Psi(u) = \int_\Omega F(x,u) dx, \ u \in H$$

e

$$\widehat{\Psi}(u) = \int_\Omega F(x,u) dx, \ u \in L^2(\Omega).$$

Desde que u_0 é ponto crítico de I, segue das propriedades (P_3) e (P_4) (ver Apêndice A) que

$$0 \in \partial I(u_0) = \partial Q(u_0) - \partial\Psi(u_0) = \big\{Q'(u_0)\big\} - \partial\Psi(u_0).$$

Logo

$$\langle 0, v\rangle = \langle Q'(u_0), v\rangle - \langle \mu, v\rangle,\ v \in H \subset L^2(\Omega),$$

para algum

$$\mu \in \partial\Psi(u_0) = \partial\widehat{\Psi}(u_0) \subset \big(L^2(\Omega)\big)^* \text{ (ver Lema 1.9).}$$

Usando o Teorema da Representação de Riesz para espaços de Lebesgue temos

$$0 = \alpha\int_\Omega \Delta u_0 \Delta v dx - \beta\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx - \int_\Omega \mu v dx,\ v \in H, \tag{1.22}$$

para algum $\mu \in L^2(\Omega)$. Daí u_0 é solução fraca da equação

$$\alpha\Delta^2 u_0 + \beta\Delta u_0 = \mu \text{ em } \Omega.$$

Desde que $u_0 \in H$ satisfaz (1.22) e $\mu \in L^2(\Omega)$, temos do Lema 1.4 que $u_0 \in H^4(\Omega)$ e

$$\mathbf{B}u_0 = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Deste fato

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u_0 + \beta\Delta u_0 \in \partial_u F(x, u_0) \text{ em } \Omega \\ \mathbf{B}u_0 = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 1.13 *Suponha (f_3) e (f_4). Então existem $a, b > 0$, tais que*

$$I(u) \geq a \parallel u \parallel_H^2 - b \parallel u \parallel_H^\sigma,\ u \in H,$$

para todo $\sigma \in (2, 2^*)$, com $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$ e $\sigma \in (2, +\infty)$, se $N = 1, 2$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos a seguinte afirmação.

Afirmação 1.2 *Para algum $c_\sigma > 0$,*

$$F(x,t) \leq \frac{m(x)}{2}t^2 + c_\sigma \mid t \mid^\sigma \ q.t.p.\ x \in \Omega \ e \ t \in \mathbb{R},$$

onde $\sigma \in (2, +\infty)$, se $N = 1, 2$ e $\sigma \in (2, 2^*)$, em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$.

De fato, de $(f_4)(ii)$

$$\left|\frac{F(x,t)-\frac{m(x)}{2}t^2\mu_1}{\mid t\mid^{\sigma}}\right| \leq \frac{\mid F(x,t)\mid}{\mid t\mid^{\sigma}}+\frac{\mu_1 t^2}{2\mid t\mid^{\sigma}} \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } t\in\mathbb{R},$$

segue de $(f_3)(ii)$

$$\left|\frac{F(x,t)-\frac{m(x)}{2}t^2\mu_1}{\mid t\mid^{\sigma}}\right| \leq \frac{\mu_1 t^2}{\mid t\mid^{\sigma}}+\frac{\parallel \widehat{h}\parallel_{\infty}}{\mid t\mid^{\sigma}} \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } t\in\ \mathbb{R}.$$

Sabendo disto, dado $\epsilon>0$, existe $t_0>0$ tal que

$$\left|F(x,t)-\frac{m(x)}{2}t^2\right| \leq \epsilon\mid t\mid^{\sigma} \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } \mid t\mid> t_0,$$

donde

$$F(x,t)\leq \frac{m(x)}{2}t^2+\epsilon\mid t\mid^{\sigma} \ \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } \mid t\mid> t_0. \tag{1.23}$$

Do item $(f_3)(ii)$, para algum $k_0>0$

$$F(x,t)\leq k_0 \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } \delta\leq\mid t\mid\leq t_0. \tag{1.24}$$

Sendo assim, fixe $c_0>0$ satisfazendo

$$\frac{k_0-\frac{m(x)t^2}{2}}{\mid t\mid^{\sigma}}\leq\frac{k_0+\frac{\|m\|_{\infty}t_0^2}{2}}{\delta^{\sigma}}\leq c_0 \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } \delta\leq\mid t\mid\leq t_0.$$

Segue de (1.24)

$$F(x,t)\leq \frac{m(x)}{2}t^2+c_0\mid t\mid^{\sigma} \ \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } \delta\leq\mid t\mid\leq t_0. \tag{1.25}$$

De $(f_4)(ii)$, (1.23) e (1.25)

$$F(x,t)\leq \frac{m(x)}{2}t^2+c_{\sigma}\mid t\mid^{\sigma} \ \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } t\in\mathbb{R},$$

onde $c_{\sigma}=c_0+\epsilon>0$, mostrando a Afirmação 1.2. Para cada $u\in H$, tem-se da Afirmação 1.2

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\parallel u\parallel_H^2-\int_{\Omega}F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\parallel u\parallel_H^2-\frac{1}{2}\int_{\Omega}mu^2dx-c_{\sigma}\int_{\Omega}\mid u\mid^{\sigma}dx \\ &\geq \frac{1}{2}\parallel u\parallel_H^2-\frac{1}{2}\parallel m\parallel_{\infty}\int_{\Omega}u^2dx-c_{\sigma}\int_{\Omega}\mid u\mid^{\sigma}dx \end{aligned}$$

donde segue-se do Lema 1.7

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\| m \|_\infty}{\mu_1}\Big) \| u \|_H^2 - c_\sigma \mid u \mid_\sigma^\sigma . \tag{1.26}$$

Das imersões de Sobolev sabemos que $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^\sigma(\Omega)$ e $H \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$, portanto

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\| m \|_\infty}{\mu_1}\Big) \| u \|_H^2 - \widehat{c}_\sigma \| u \|_H^\sigma .$$

Considerando

$$a = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\| m \|_\infty}{\mu_1}\Big) \text{ e } b = \widehat{c}_\sigma,$$

finalizamos a demonstração do lema. ■

1.3 Existência de três soluções

Agora estabeleceremos a existência de três soluções não triviais para o problema (1.1), através da demonstração do Teorema 0.1.

Demonstração do Teorema 0.1: Considere

$$\mathcal{C}^+ = \Big\{ t\phi_1 + w \in H; t \geq 0 \text{ e} \int_\Omega w\phi_1 dx = 0 \Big\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \Big\{ t\phi_1 + w \in H; t \leq 0 \text{ e} \int_\Omega w\phi_1 dx = 0 \Big\}.$$

1. Existência de u_+ e u_-.

Aplicaremos o Teorema de Mizoguchi (ver Apêndice A). Observe que

$$\mathcal{C}^+ \subset H \text{ é fechado, convexo com int } (\mathcal{C}^+) \neq \emptyset$$

e

$$\partial\mathcal{C}^+ = \Big\{ u \in H; \int_\Omega u\phi_1 dx = 0 \Big\}.$$

Utilizando (f_4) e o Lema 1.7 (iv), temos para cada $w \in \partial\mathcal{C}^+$

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2} \| w \|_H^2 - \int_\Omega F(x,w)dx \\ &\geq \frac{1}{2} \| w \|_H^2 - \frac{\mu_2}{2} \int_\Omega w^2 dx \geq 0, \ w \in \partial\mathcal{C}^+. \end{aligned}$$

Definindo

$$v_+ = t_+\phi_1 \in \mathcal{C}^+,$$

onde $t_+ > 0$ é dado por (f_5), temos

$$\begin{aligned} I(v_+) &= \frac{1}{2} \| v_+ \|_H^2 - \int_\Omega F(x, v_+)dx \\ &< \frac{1}{2} \| v_+ \|_H^2 - \int_\Omega F_\infty dx - \frac{1}{2} \| v_+ \|_H^2 \\ &= -\int_\Omega F_\infty dx < 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(v_+) < 0 \leq \inf_{\partial \mathcal{C}^+} I(v).$$

Agora se $u \in \mathcal{C}^+$, tem-se por $(f_3)(ii)$

$$\begin{aligned} I(t\phi_1 + w) &= \frac{1}{2}t^2 \| \phi_1 \|_H^2 + \frac{1}{2} \| w \|_H^2 - \int_\Omega F(x, t\phi_1 + w)dx \\ &\geq \frac{1}{2}t^2 \| \phi_1 \|_H^2 + \frac{1}{2} \| w \|_H^2 - \frac{\mu_1 t^2}{2} \int_\Omega \phi_1^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_\Omega w^2 dx - | \widehat{h} |_{L^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \| w \|_H^2 - \frac{\mu_1}{2} \int_\Omega w^2 dx - | \widehat{h} |_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

segue do Lema 1.7 (iv),

$$I(t\phi_1 + w) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \| w \|_H^2 - | \widehat{h} |_{L^1(\Omega)} .$$

Neste caso, o funcional I é limitado inferiormente em $\mathcal{C}^+$. Sabendo disto, defina

$$c^+ = \inf_{\mathcal{C}^+} I.$$

Desde que

$$I(v_+) < -\int_\Omega F_\infty(x)dx,$$

temos

$$c^+ < -\int_\Omega F_\infty(x)dx.$$

Segue do Lema 1.11,

$$I \text{ satisfaz } (PS)_{c^+}.$$

Sendo $\mathcal{C}^+$ fechado, tem-se que I satisfaz $(PS)_{c^+, \mathcal{C}^+}$. Pelo Teorema de Mizagouchi (ver Apêndice A), I têm um mínimo local $u_+ \in \text{int}(\mathcal{C}^+)$ e

$$I(u_+) = c_+ < 0.$$

Deste fato u_+ é um ponto crítico não trivial para o funcional I (ver Apêndice A), implicando do Lema 1.12 que $u_+ \in H^4(\Omega)$ e é uma solução não trivial do problema (1.1).

De modo análogo, mostra-se a existência de uma outra solução não trivial $u_- \in \text{int}(\mathcal{C}^-)$, tal que

$$I(u_-) = c_- < 0.$$

2. Existência de u_0.

Do Lema 1.13, temos para cada $u \in H$

$$I(u) \geq a\rho^2 - b\rho^\sigma, \text{ com } \rho = \| u \|_H .$$

Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, pode-se fixar um valor $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq a\rho^2 - b\rho^\sigma > \alpha > 0.$$

Vimos anteriormente que

$$I(u_+) < -\int_\Omega F_\infty dx \leq 0.$$

Neste caso

$$\max\{I(0), I(u_+)\} \leq 0 < \alpha < \inf_{\|u\|_H = \rho} I(u),$$

para algum $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Mostrando assim que o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha. Desde que

$$c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) > \alpha > 0 \geq -\int_\Omega F_\infty dx,$$

tem-se pelo Lema 1.11 que I satisfaz $(PS)_{c_0}$. Portanto, conclui-se do Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A) que $c_0 > 0$ é um valor crítico para I, consequentemente existe um ponto crítico não nulo $u_0 \in H$ com

$$I(u_0) = c_0 > 0.$$

Donde segue-se do Lema 1.12, que $u_0 \in H^4(\Omega)$ e é uma solução não trivial do problema (1.1).■

Capítulo 2

Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre espaços de Orlicz e Orlicz Sobolev. Apresentaremos algumas propriedades envolvendo estes espaços, imersões e resultados necessários para as aplicações posteriores. Veremos a seguir que os espaços de Orlicz são generalizações dos espaços de Lebesgue, assim como os espaços de Orlicz-Sobolev são generalizações dos espaços de Sobolev. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor as seguintes referências [38], [44] e [45].

2.1 N-função

Definição 2.1 *Diz-se que* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *é uma* ***N-função*** *se:*

(i) Φ *é uma função convexa e contínua;*

(ii) $\Phi(t) = 0$ *se, e só se,* $t = 0$*;*

(iii) $\dfrac{\Phi(t)}{t} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *e* $\dfrac{\Phi(t)}{t} \stackrel{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

(iv) Φ *é par* (*isto é* $\Phi(t) = \Phi(-t)$).

Exemplos: As funções a seguir são exemplos de N-funções

1. $\Phi_1(t) =\mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$;

2. $\Phi_2(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$;

3. $\Phi_3(t) = e^{|t|}- \mid t \mid -1$, $t \in \mathbb{R}$;

4. $\Phi_4(t) = (1+ \mid t \mid) \ln(1+ \mid t \mid)- \mid t \mid, \ t \in \mathbb{R};$

5. $\Phi_5(t) = \mid t \mid^{p_0} + \mid t \mid^{p_1}, \ t \in \mathbb{R}$ e $p_0, p_1 \in (1, +\infty),$

6. $\Phi_6(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1, \ t \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 1;$

7. $\Phi_7(t) = |t|^p ln(1+ \mid t \mid), \ t \in \mathbb{R}$ e $p \in (1, +\infty).$

Lema 2.1 *$\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma N-função se pudermos representar Φ da seguinte forma*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

com $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(I) *φ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;*

(II) *$\varphi(t) = 0$ se, e só se $t = 0$;*

(III) $\varphi(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$

(IV) *$\varphi(t) > 0$, $t > 0$.*

2.2 O espaço de Orlicz

No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma N-função. O **espaço de Orlicz** $L_\Phi(\Omega)$ é definido por

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

Definição 2.2 *Definimos como **norma de Luxemburg** em $L_\Phi(\Omega)$ a aplicação $\| \, . \, \|_\Phi$: $L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\| \ u \ \|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \right\}, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 2.2 *Seja Φ uma N-função. Então,*

a. $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, *$\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$;*

b. $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, *$\beta \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$.*

Verificação do item $a.$**:** Desde que Φ é convexa,

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha \Phi(t), \ \alpha \in [0,1];$$

Verificação do item $b.$**:** Sem perda de generalidade suponha que $t > 0$ (já que Φ é par), logo

$$\begin{aligned}
\Phi(\beta t) &= \int_0^{\beta t} \varphi(s)ds \\
&= \int_0^{t} \varphi(s)ds + \int_t^{\beta t} \varphi(s)ds \\
&\geq \Phi(t) + \varphi(t)(\beta t - t) \\
&\geq \Phi(t) + \Phi(t)(\beta - 1) \\
&= \beta \Phi(t), \ \beta \in (1, +\infty) \text{ e } t > 0.
\end{aligned}$$

Observação 2.2.1 *Segue do Lema 2.2(a), que*

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 2.3 $\| \, . \, \|_\Phi$ *define uma norma sobre* $L_\Phi(\Omega)$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que a aplicação $\| \, . \, \|_\Phi$ está bem definida. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$ o conjunto

$$A = \Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\},$$

é diferente do vazio. De fato, dado $u \in L_\Phi(\Omega)$

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0.$$

Para $\widetilde{\lambda} > 0$ suficientemente grande tem-se do Lema 2.2 (a)

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\widetilde{\lambda}\lambda}\Big)dx \leq 1/\widetilde{\lambda} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1.$$

Assim, $\widetilde{\lambda}.\lambda \in A$, para $\widetilde{\lambda}$ suficientemente grande, e portanto $A \neq \emptyset$. Desde que A é limitado inferiormente, é imediato concluir que $\| \, . \, \|_\Phi$ está bem definida. Mostraremos agora que $\| \, . \, \|_\Phi$ satisfaz as propriedades de norma:

(i) $\| \, u \, \|_\Phi = 0$ se, e só se, $u = 0$.

Se $u = 0$, é imediato que $\| \, u \, \|_\Phi = 0$.

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável verificando

$$0 = \| u \|_{\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx \leq 1 \right\}.$$

Assim, existe $(\lambda_n) \subset (0, +\infty)$ verificando

$$\lambda_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} \| u \|_{\Phi} = 0$$

e

$$\int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) dx \leq 1, \; n \in \mathbb{N}.$$

Fixe $\lambda_u > 0$ de tal forma que

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda_u}\right) dx < +\infty.$$

Segue do Lema 2.2 (b)

$$\frac{\lambda_u}{\lambda_n} \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda_u}\right) dx \leq \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) dx \leq 1, \tag{2.1}$$

para n suficientemente grande, implicando que

$$\int_{\Omega} \Phi(u) dx = 0.$$

Desde que $\Phi(t) \geq 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\Phi\Big(u(x)\Big) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

mostrando que

$$u(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

(ii) $\| ku \|_{\Phi} = | k | \| u \|_{\Phi}, \; k \in \mathbb{R}$ e $u \in L_{\Phi}(\Omega)$.

Fixando $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} \| ku \|_{(\Phi)} &= \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{ku}{\lambda}\Big) dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{\lambda / k}\Big) dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \widehat{\lambda} k > 0; \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{\widehat{\lambda}}\Big) dx \leq 1 \right\} \\ &= k \| u \|_{\Phi} . \end{aligned}$$

O caso $k < 0$, é feito de forma análoga, pois Φ é uma função par.

(iii) $\| u+v \|_\Phi \leq \| u \|_\Phi + \| v \|_\Phi,\ u,v \in L_\Phi(\Omega)$.

Considere os seguintes conjuntos

$$A=\Big\{\lambda>0;\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda}\Big)dx\leq 1\Big\},$$

$$B=\Big\{\lambda>0;\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx\leq 1\Big\}$$

e

$$C=\Big\{\lambda>0;\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx\leq 1\Big\}.$$

Dados $\mu\in B$ e $\eta\in C$, temos pelo fato de Φ ser convexa

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\mu+\eta}\Big)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\mu}{\mu+\eta}\frac{u}{\mu}+\frac{\eta}{\mu+\eta}\frac{v}{\eta}\Big)dx\\ &\leq \frac{\mu}{\mu+\eta}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\mu}\Big)dx+\frac{\eta}{\mu+\eta}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\eta}\Big)\\ &\leq \frac{\mu}{\mu+\eta}+\frac{\eta}{\mu+\eta}\\ &= 1,\end{aligned}$$

donde $\mu+\eta\in A$. Logo $B+C\subset A$. Portanto

$$\inf A\leq \inf(B+C)=\inf B+\inf C,$$

e assim

$$\| u+v \|_\Phi \leq \| u \|_\Phi + \| v \|_\Phi,\ u,v \in L_\Phi(\Omega). \blacksquare$$

Lema 2.4 *Se $u\in L_\Phi(\Omega)$ é uma função não trivial, então*

$$\| u \|_\Phi=\min\Big\{\lambda>0;\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx\leq 1\Big\}.$$

Demonstração. De fato, seja $(\lambda_n)\subset(0,+\infty)$ uma sequência satisfazendo

$$\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \| u \|_\Phi$$

e

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big)dx\leq 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

Desde que

$$\Phi\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big)\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$$

e

$$\Phi\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi\Big(\frac{u}{\| u \|_\Phi}\Big) \text{ pontualmente em } \Omega,$$

segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\| u \|_\Phi}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big)dx \leq 1,$$

donde

$$\| u \|_\Phi \in \left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\right\},$$

e portanto

$$\| u \|_\Phi = \min\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\right\},$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 2.5 *Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $k_0 > 0$. Então*

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k_0}\Big)dx = 1,$$

se, e somente se, $\| u \|_\Phi = k_0$.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Desde que Φ é uma função par e não decrescente em $\mathbb{R}_+$

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k_0-\epsilon}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{| u |}{k_0-\epsilon}\Big)dx > \int_\Omega \Phi\Big(\frac{| u |}{k_0}\Big)dx = 1,$$

donde

$$\min\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u(x)}{\lambda}\Big)dx \leq 1\right\} = k_0,$$

ou seja

$$\| u \|_\Phi = k_0.$$

Reciprocamente, dado $\epsilon \in (0, \dfrac{k_0}{2})$, temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k_0-\epsilon}\right)dx > 1 \tag{2.2}$$

e

$$\Phi\left(\frac{| u |}{k_0-\epsilon}\right) \leq \Phi\left(\frac{2}{k_0} \mid u \mid\right) \in L^1(\Omega).$$

Desde que

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \Phi\left(\frac{| u |}{k_0-\epsilon}\right) = \Phi\left(\frac{| u |}{k_0}\right),$$

temos pelo Teorema de Lebesgue, (2.2) e do Lema 2.4 que

$$1 \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\Omega \Phi\left(\frac{|\, u \,|}{k_0 - \epsilon}\right) dx = \int_\Omega \Phi\left(\frac{|\, u \,|}{k_0}\right) dx \leq 1,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|\, u \,|}{k_0}\right) dx = 1.$$

como queriamos demonstrar. ■

Observação 2.2.2 *Considerando $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ a N-função dada por*

$$\Phi(t) = \frac{|\, t \,|^p}{p}, \; p \in (1, +\infty),$$

temos

$$L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$$

e

$$\|\, . \,\|_\Phi = p^{-\frac{1}{p}} \,|\, . \,|_p,$$

onde $|\, . \,|_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$. Conclui-se daí que os espaços de Orlicz são generalizações dos espaços de Lebesgue.

Proposição 2.1 *Se $|\, \Omega \,| < +\infty$, o operador identidade*

$$\begin{array}{rcl} i : L_\Phi(\Omega) & \to & L^1(\Omega) \\ u & \mapsto & i(u) = u, \end{array}$$

é linear e contínuo.

Demonstração. Dividiremos esta prova em dois casos:

1^0 **caso:** $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, temos pelo fato de Φ ser par que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\, u \,|}{\lambda}\Big) dx < +\infty, \tag{2.3}$$

para algum $\lambda > 0$.

Desde que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

dado $k = 1$, existe $R > 0$ tal que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq 1, \; \text{para } t \geq R,$$

donde

$$\Phi(|\ t\ |) \geq |\ t\ |,\ \ |\ t\ | \geq R. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4)

$$\begin{aligned}
\int_{[|u| \geq \lambda R]} \frac{|\ u\ |}{\lambda} dx &\leq \int_{[|u| \geq \lambda R]} \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{\lambda}\Big) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{\lambda}\Big) dx < +\infty,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\int_{[|u| \geq \lambda R]} |\ u\ |\ dx < +\infty,$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\ u\ |\ dx &= \int_{[|u| < \lambda R]} |\ u\ |\ dx + \int_{[|u| \geq \lambda R]} |\ u\ |\ dx \\
&\leq \lambda R\ |\ [|\ u\ | < \lambda R]\ | + \int_{[|u| \geq \lambda R]} |\ u\ |\ dx \\
&\leq \lambda R\ |\ \Omega\ | + \int_{[|u| \geq \lambda R]} |\ u\ |\ dx < +\infty,
\end{aligned}$$

implicando que $u \in L^1(\Omega)$. Logo, $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

2^0 **caso:** i é um operador linear limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\ u\ |) dx \leq \|\ u\ \|_\Phi,\ \text{ para }\ \|\ u\ \|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\Omega). \tag{2.5}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $\|\ u\ \|_\Phi \leq 1$. Segue do Lema 2.2 (a)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi(|\ u\ |) dx &= \int_{\Omega} \Phi\Big(\ \|\ u\ \|_\Phi \frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi}\Big) dx \\
&\leq \|\ u\ \|_\Phi \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi}\Big) dx,
\end{aligned}$$

e portanto pelo Lema 2.5

$$\int_{\Omega} \Phi(|\ u\ |) dx \leq \|\ u\ \|_\Phi,\ \|\ u\ \|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\Omega).$$

como queríamos mostrar.

De (2.4)

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mid u \mid dx &= \int_{[|u| \leq R]} \mid u \mid dx + \int_{[|u| > R]} \mid u \mid dx \\
&\leq R \mid \Omega \mid + \int_{[|u| > R]} \Phi(\mid u \mid) dx, \\
&\leq R \mid \Omega \mid + \int_{\Omega} \Phi(\mid u \mid) dx,
\end{aligned}
$$

implicando de (2.5)

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mid u \mid dx &= R \mid \Omega \mid + \parallel u \parallel_{\Phi} \\
&\leq R \mid \Omega \mid + 1 = C, \ \parallel u \parallel_{\Phi} \leq 1.
\end{aligned}
$$

Provando assim que

$$
\mid i(u) \mid_1 \leq C, \ \parallel u \parallel_{\Phi} \leq 1 \text{ e } u \in L_{\Phi}(\Omega).
$$

Do 1^0 e 2^0 caso, conclui-se a demontração desta proposição. ■

Observação 2.2.3 *Da Proposição 2.1 podemos concluir que o espaço $L_{\Phi}(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço $L^1(\Omega)$, para qualquer domínio limitado Ω.*

Lema 2.6 *Seja $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ tal que $\parallel u \parallel_{\Phi} \leq k$. Então*

$$
\int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big) dx \leq 1, \ u \in L_{\Phi}(\Omega).
$$

Demonstração. Supondo $u \neq 0$, basta observar que

$$
1 \geq \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{u}{\parallel u \parallel_{\Phi}}\Big) dx = \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{\mid u \mid}{\parallel u \parallel_{\Phi}}\Big) dx \geq \int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{\mid u \mid}{k}\Big) dx,
$$

para qualquer $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ tal que $\parallel u \parallel_{\Phi} \leq k$. ■

Proposição 2.2 *$L_{\Phi}(\Omega)$ munido da norma de Luxemburg $\parallel . \parallel_{\Phi}$, define um espaço de Banach.*

2.3 Condição Δ_2

O principal objetivo desta seção é justificar que o espaço de Orlicz será separável se, e somente se, a N-função associada a este espaço satisfizer uma condição denotada por Δ_2.

Definição 2.3 *Uma função* Φ *satisfaz a* ***condição*** Δ_2*, e escreve-se* $\Phi \in \Delta_2$*, se existirem* $k > 0$ *e* $t_0 \geq 0$*, tais que*

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0. \tag{2.6}$$

Observação 2.3.1 *Em relação ao espaço de Orlicz* $L_\Phi(\Omega)$ *para* $\mid \Omega \mid = +\infty$*, diremos que* $\Phi \in \Delta_2$ *quando* Φ *satisfizer a desigualdade (2.6) com* $t_0 = 0$*.*

Lema 2.7 *A função* Φ *satisfaz a condição* Δ_2 *se, e só se, para cada* $s > 1$*, existem* $k_s > 0$ *e* $t_0 \geq 0$ *satisfazendo*

$$\Phi(st) \leq k_s\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Demonstração. De fato, suponha que $\Phi \in \Delta_2$. Se $s \in (1, 2]$, temos

$$\Phi(st) \leq \Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Caso $s > 2$, fixe $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $s \leq 2^n$. Assim,

$$\Phi(st) \leq \Phi(2^n t) \leq k\Phi(2^{n-1}t) \leq k^n\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Reciprocamente, observe os seguintes casos:

1^0 **caso:** $s \geq 2$.

$$\Phi(2t) \leq \Phi(st) \leq k_s\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

2^0 **caso:** $s \in (1, 2)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$2 \leq s^n,$$

logo

$$\Phi(2t) \leq \Phi(s^n t) \leq k_s^n\Phi(t), \ t \geq t_0,$$

provando assim o lema. ■

Lema 2.8 *Seja* Φ *uma N-função, dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds.$$

As afirmações abaixo são equivalentes

(i) $\Phi \in \Delta_2$*;*

(ii) Existem $\alpha > 0$ *e* $t_0 \geq 0$ *verificando*

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \alpha, \ t \geq t_0.$$

Demonstração. Observe primeiramente que

$$\begin{aligned}\ln\Big(\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)}\Big) &= \ln\Phi(2t) - \ln\Phi(t)\\ &= \int_t^{2t}\big(\ln\Phi(s)\big)'_+ ds\\ &= \int_t^{2t}\frac{\Phi'_+(s)}{\Phi(s)}ds.\end{aligned}$$

Supondo que (ii) ocorre, temos

$$\begin{aligned}\ln\Big(\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)}\Big) &= \int_t^{2t}\frac{\varphi(s)}{\Phi(s)}ds\\ &< \alpha\int_t^{2t}\frac{1}{s}ds\\ &= \alpha(\ln 2t - \ln t)\\ &= \ln 2^\alpha, \ t \geq t_0,\end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} < 2^\alpha,$$

ou seja,

$$\Phi(2t) < 2^\alpha\Phi(t), \ t \geq t_0,$$

mostrando que Φ satisfaz Δ_2. Reciprocamente, suponha que $\Phi \in \Delta_2$. Assim, existem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ verificando

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \ t \geq t_0.$$

Para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}k\Phi(t) &\geq \Phi(2t) = \int_0^{2t}\varphi(s)ds\\ &> \int_t^{2t}\varphi(s)ds \geq t\varphi(t),\end{aligned}$$

donde

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < k, t \geq t_0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.3.2 *Dada uma N-função Φ que verifica Δ_2, existem $a, b > 0$, tais que*

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande. Ou seja, Φ vai para infinito abaixo de uma função polinômial. No entanto, o fato de Φ ser uma N-função que vai para o infinito abaixo de uma função polinômial, não garante que Φ satisfaz a condição Δ_2.

A seguir apresentaremos algumas funções que satisfazem e outras que não satisfazem a condição Δ_2:

1. $\Phi_1(t) = \dfrac{| t |^p}{p}$, $p \in (1, +\infty)$;

$$\Phi_1(2t) = k\Phi_1(t), \text{ com } k = 2^p.$$

2. $\Phi_2(t) = (1+ | t |) \ln(1+ | t |)- | t |$, satisfaz a condição Δ_2;

3. $\Phi_4(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1$, $\gamma \in \big(1, \dfrac{N}{N-2}\big)$, satisfaz a condição Δ_2;

4. $\Phi_5(t) = t^p ln(1 + t)$, $1 < p_0 < p < N - 1$, onde $p_0 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4N}}{2}$, satisfaz a condição Δ_2;

5. $\Phi_6(t) = e^{t^2} - 1$ e $\Phi_7(t) = e^{|t|} - | t | -1$, não satisfazem a condição Δ_2, pois as funções Φ_1 e Φ_2 vão mais rápido para o infinito que qualquer função polinômial.

Os resultados a seguir, mostram a importância de uma N-função Φ cumprir a condição Δ_2.

Proposição 2.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer e Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2. Então*

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega \Phi(u_n)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Suponha que

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

ou seja

$$\| u_n \|_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Neste caso, $\dfrac{1}{\| u_n \|_\Phi} > 1$, para n suficientemente grande. Deste fato, temos do Lema 2.2 (b) e do Lema 2.5

$$\frac{1}{\| u_n \|_\Phi} \int_\Omega \Phi\left(u_n\right) dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n}{\| u_n \|_\Phi}\right) dx = 1,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(u_n) dx \leq \| u_n \|_\Phi \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\int_\Omega \Phi(u_n) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.7}$$

Fixe $\epsilon \in (0,1)$. Do Lema 2.7 existe $t_0 \geq 0$, verificando

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx \leq \int_{[|u_n| \leq t_0]} \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx + K_\epsilon \int_{[|u_n| > t_0]} \Phi\left(| u_n |\right) dx. \tag{2.8}$$

É importante lembrar que no caso $| \Omega | = +\infty$, tem-se $t_0 = 0$. Deste fato, considere $| \Omega | < +\infty$. Afirmamos que

$$\int_{[|u_n| \leq t_0]} \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Com efeito, seja

$$y_n = \int_{[|u_n| \leq t_0]} \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dada uma subsequência (y_{n_k}) de (y_n), mostraremos agora que existe uma subsequência $(y_{n_{k_j}})$ tal que $y_{n_{k_j}} \to 0$. Desde que

$$\int_\Omega \Phi(u_{n_k}) dx \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

existe $(u_{n_{k_j}})$ tal que

$$\Phi(| u_{n_{k_j}}(x) |) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

donde

$$| u_{n_{k_j}}(x) | \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sabendo disto, temos

$$\Phi\left(\frac{u_{n_{k_j}}(x)}{\epsilon}\right) \chi_{[|u_{n_{k_j}}| \leq t_0]}(x) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Observando agora que

$$\Phi\left(\frac{u_{n_{k_j}}(x)}{\epsilon}\right)\chi_{[|u_{n_{k_j}}|\leq t_0]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_0}{\epsilon}\right) \in L^1(\Omega),$$

temos pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{[|u_{n_{k_j}}|\leq t_0]} \Phi\left(\frac{u_{n_{k_j}}}{\epsilon}\right) dx = \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_{n_{k_j}}}{\epsilon}\right)\chi_{[|u_{n_{k_j}}|\leq t_0]} dx \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste fato, conclui-se que

$$\int_{[|u_n|\leq t_0]} \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.9}$$

De (2.7)-(2.9)

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right) dx \leq 1,$$

para n suficientemente grande. Logo,

$$\| u_n \|_\Phi < \epsilon,$$

para n suficientemente grande. ■

Proposição 2.4 *(i) Quando* $|\Omega| < +\infty$, *tem-se que* $L_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Phi}$ *se, e só se,* Φ *satisfaz a condição* Δ_2.

(ii) Quando $|\Omega| = +\infty$, *tem-se que* $L_\Phi(\Omega) = \overline{B_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Phi}$ *se, e só se,* Φ *satisfaz a condição* Δ_2, *onde*

$$B_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; u \text{ é limitado com } supp(u) \text{ limitado}\}.$$

Proposição 2.5 *Se* $\Phi \in \Delta_2$, *então* $L_\Phi(\Omega)$ *é separável. Além disso*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Phi} = L_\Phi(\Omega).$$

2.4 Dualidade

Nesta seção veremos que o dual de um espaço de Orlicz pode ser associado a um outro espaço de Orlicz.

Considerando $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semicontínuo a direita e convexa, tem-se que

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio e convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 2.4 *Definimos como* ***função conjugada*** *de f, a função $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{f}(t)=\sup\{st-f(s); s\in\mathbb{R}\}.$$

Lema 2.9 *Seja*

$$\Lambda=\{(t,a)\in\mathbb{R}^2; a\geq\widetilde{f}(t)\}$$

e para cada $(t,a)\in\Lambda$ defina

$$A_{t,a}=\{(s,b)\in\mathbb{R}^2; b\geq st-a\}.$$

Então

$$epi(f)=\cap_{(t,a)\in\Lambda}A_{t,a}.$$

Lema 2.10 *Dado $t\in\mathbb{R}$, considerando*

$$A_t=\{(s,b); b\geq st-\widetilde{f}(t)\},$$

temos

$$epi(f)=\cap_{t\in\mathbb{R}}A_t=\cap_{(t,a)\in\Lambda}A_{t,a}.$$

Demonstração. De fato, basta observar que $\cap_{t\in\mathbb{R}}A_t=\cap_{(t,a)\in\Lambda}A_{t,a}$ ■

Lema 2.11 *A função conjugada de $\widetilde{f}$ (isto é $\widetilde{\widetilde{f}}$) é a função f, ou seja $f\equiv\widetilde{\widetilde{f}}$.*

Demonstração. De fato, para demonstrar isto mostraremos primeiro que

$$epi(f)=epi(\widetilde{\widetilde{f}}).$$

Para cada $(s,b)\in epi(f)=\cap_{t\in\mathbb{R}}A_t$ (onde A_t é o conjunto definido no Lema 2.10), tem-se que

$$b\geq st-\widetilde{f}(t),\ t\in\mathbb{R},$$

ou equivalentemente

$$b\geq\sup\{st-\widetilde{f}(t); t\in\mathbb{R}\}=\widetilde{\widetilde{f}}(s).$$

Deste fato, conclui-se que

$$epi(\widetilde{\widetilde{f}})=epi(f).$$

Sabendo disto, desde que $(s,\widetilde{\widetilde{f}}(s))\in epi(\widetilde{\widetilde{f}})$, temos $(s,\widetilde{\widetilde{f}}(s))\in epi(f)$ implicando que

$$\widetilde{\widetilde{f}}(s)\geq f(s). \tag{2.10}$$

Além disso, se $(s,f(s))\in epi(f)$, segue que $(s,f(s))\in epi(\widetilde{\widetilde{f}})$, consequentemente

$$\widetilde{\widetilde{f}}(s)\leq f(s). \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.10), $f\equiv\widetilde{\widetilde{f}}$. ■

Lema 2.12 *Se Φ é uma N-função, então $\widetilde{\Phi}$ também será uma N-função.*

Lema 2.13 *Considere Φ uma N-função dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds,$$

onde $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 2.1. Definindo

$$\psi(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; \varphi(t) \leq s\}$$

e

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)ds$$

segue que Ψ é uma N-função e $\Psi = \widetilde{\Phi}$.

Observação 2.4.1 *Das definições de Φ, Ψ, φ e ψ, conclui-se que*

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u)),\ u \in \mathbb{R}_+$$

e

$$v\psi(v) = \Phi(\psi(v)) + \Psi(v),\ v \in \mathbb{R}_+.$$

Teorema 2.5 *(**Desigualdade de Young**) Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugada. Então*

$$ts \leq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1

a). Seja

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty) \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\widetilde{\Phi}_1(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q,\ t \in \mathbb{R},$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

b). Considerando

$$\Phi_2(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1,\ t \in \mathbb{R},$$

tem-se que

$$\widetilde{\Phi}_2(t) = (1 + \mid t \mid) \ln(1 + \mid t \mid) - \mid t \mid,\ t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.6 *Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a sua função conjugada. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ e $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, então* *(i)* $uv \in L^1(\Omega)$;

(ii) $\displaystyle\int_\Omega uvdx \leq 2 \parallel u \parallel_\Phi \parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}}$.

Demonstração. Da desigualdade de Young (ver Teorema 2.5),

$$\frac{\mid u \mid}{\parallel u \parallel_\Phi} \frac{\mid v \mid}{\parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}}} \leq \Phi\Big(\frac{u}{\parallel u \parallel_\Phi}\Big) + \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}}}\Big),$$

donde segue-se do Lema 2.5

$$\frac{1}{\parallel u \parallel_\Phi \parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}}} \int_\Omega \mid uv \mid dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\parallel u \parallel_\Phi}\Big)dx + \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}}}\Big)dx = 2,$$

logo

$$\int_\Omega \mid uv \mid dx \leq 2 \parallel u \parallel_\Phi \parallel v \parallel_{\widetilde{\Phi}},$$

mostrando que $uv \in L^1(\Omega)$. ■

Observação 2.4.2 *Segue da Proposição 2.6, que* $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)^*$*, ou equivalentemente para cada* $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$*, definindo*

$$F(u) = \int_\Omega uvdx, \ u \in L_\Phi(\Omega),$$

temos $F \in L_\Phi(\Omega)^*$

O próximo teorema mostra que o dual do espaço $L_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

Teorema 2.6 $L_\Phi(\Omega)$ *é reflexivo se, e só se,* $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$*. Além disso, se* $\Phi \in \Delta_2$*,* $L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$*.*

Agora mostraremos um teorema, que generaliza um resultado devido a Brézis e Lieb.

Teorema 2.7 *(Brézis Lieb para N-funções) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto,* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *contínua, convexa, par e* $\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}}\{st - \Phi(s)\}.$$

Suponha

(i) $\Phi(t) = 0$ *se, e somente se,* $t = 0$*,*

(ii) $\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ *e* $\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$,

(iii) existem α *e* $t_1 \geq 0$ ($t_1 = 0$, *caso* $\mid \Omega \mid = +\infty$), *tais que*

$$\frac{\Phi'_+(t)}{\Phi(t)} < \alpha, \ t \geq t_1,$$

(iv) existem $\beta > 0$ *e* $t_2 \geq 0$ ($t_2 = 0$, *caso* $\mid \Omega \mid = +\infty$), *tais que*

$$\frac{\widetilde{\Phi}'_+(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} < \beta, \ t \geq t_2.$$

Se (f_n) *é uma sequência limitada em* $L_\Phi(\Omega)$, *verificando*

$$f_n(x) \to f(x) \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{em} \ L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração. Devemos mostrar que

$$\int_\Omega f_n \psi dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f \psi dx, \ \psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Primeiramente, dos itens (i) e (ii) tem-se que Φ é uma N-função. Deste fato, segue do Lema 2.12 que $\widetilde{\Phi}$ é uma N-função. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere

$$\Omega_n = \{x \in \Omega; \mid f_k - f \mid (x) \leq 1, \ k \geq n\}$$

e

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; f_k(x) \not\to f(x)\} \ (\mid \Omega_0 \mid = 0).$$

No que segue, iremos demonstrar alguns fatos que serão usados nesta demonstração.

(I) $f\psi \in L^1(\Omega)$, para qualquer $\psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Desde que

- $\mid f\psi \mid = \liminf_{n \to +\infty} \mid f_n \psi \mid$ q.t.p. em Ω

e

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \mid f_n \psi \mid dx \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \parallel f_n \parallel_\Phi \parallel \psi \parallel_{\widetilde{\Phi}} \leq c \parallel \psi \parallel_{\widetilde{\Phi}} < +\infty$, temos pelo Lema de Fatou

$$\int_{\Omega} | f\psi | \, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_{\Omega} | f_n \psi | \, dx < +\infty,$$

implicando que $| f\psi | \in L^1(\Omega)$.

(II) $\chi_{\Omega_n} \to \chi_{\Omega}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$

Note que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$.

Desde que

$$f_k(x) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

temos

$$f_k(x) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(x), \; x \in \Omega \setminus \Omega_0.$$

Dado $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$| f_n(x) - f(x) | \leq 1, \; n \geq n_0.$$

Deste fato, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ com $k \geq n \geq n_0$ temos

$$| f_k(x) - f(x) | \leq 1,$$

implicando $x \in \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$, e portanto

$$| \chi_{\Omega_n}(x) - \chi_{\Omega}(x) | = 0, \; n \geq n_0.$$

Consequentemente,

$$\chi_{\Omega_n}(x) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_{\Omega}(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

(III) Fixando $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_{\Omega} f_n \psi \chi_{\Omega_k} dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f \psi \chi_{\Omega_k} dx, \; \psi \in C_0(\Omega).$$

De fato, dado $\psi \in C_0(\Omega)$, tem-se que

$$| (f_n - f)\psi \chi_{\Omega_k}(x) | \leq | \psi |, \; n \geq k. \tag{2.12}$$

Segue de (iii), que

$$(f_n - f)\psi \chi_{\Omega_k} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13), temos pelo Teorema de Lebesgue que

$$\int_{\Omega}(f_n - f)\psi\chi_{\Omega_k}dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

implicando de (I)

$$\int_{\Omega} f_n\psi\chi_{\Omega_k}dx - \int_{\Omega} f\psi\chi_{\Omega_k}dx = o_n(1). \tag{2.14}$$

Dos itens (iii) e (iv), conclui-se do Lema 2.8 que Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2. Consequentemente, tem-se pelo Teorema 2.6 que $L_{\Phi}(\Omega)$ é reflexivo. Neste caso, sendo (f_n) limitada em $L_{\Phi}(\Omega)$, existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ e $g \in L_{\Phi}(\Omega)$ tais que

$$f_{n_j} \rightharpoonup g \text{ em } L_{\Phi}(\Omega),$$

ou equivalentemente

$$\int_{\Omega} f_{n_j}\psi dx \overset{n_j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} g\psi dx, \;\; \psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega). \tag{2.15}$$

Em particular

$$\int_{\Omega} f_{n_j}\psi\chi_{\Omega_k}dx \overset{n_j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} g\psi\chi_{\Omega_k}dx, \;\; \psi \in C_0(\Omega). \tag{2.16}$$

Passando ao limite de $n_j \to +\infty$ em (2.14), obtemos de (2.16)

$$\int_{\Omega_k} g\psi dx = \int_{\Omega_k} f\psi dx, \;\; \psi \in C_0(\Omega). \tag{2.17}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue é imediato observar que os limites abaixo ocorrem

$$\int_{\Omega_k} g\psi \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} g\psi dx$$

e

$$\int_{\Omega_k} f\psi \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f\psi dx,$$

para quaisquer $\psi \in C_0(\Omega)$. Sabendo disto, passando ao limite de $k \to +\infty$ em (2.17)

$$\int_{\Omega} g\psi dx = \int_{\Omega} f\psi dx, \;\; \psi \in C_0(\Omega).$$

Segue do Teorema de Du Bois Raymond (ver [46]) que $f = g \in L_{\Phi}(\Omega)$. Deste fato, tem-se de (2.15) que

$$\int_{\Omega} f_{n_j}\psi dx \overset{n_j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f\psi dx, \;\; \psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Dado $\psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, considere $y_n = \displaystyle\int_\Omega f_n \psi dx$. Para cada subsequência $(y_{n_j}) \subset (y_n)$, pelo que foi feito anteriormente, existe $(y_{n_{j_k}}) \subset (y_{n_j})$, tal que

$$y_{n_{j_k}} \overset{n_{j_k}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\psi dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega f_n \psi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\psi dx, \ \psi \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

como queriamos mostrar. ■

2.5 Orlicz-Sobolev

Foi visto que o espaço de Orlicz é uma generalização natural do espaço $L^p(\Omega)$. Deste fato nada mais natural que definir a partir deste espaço, o espaço de Orlicz-Sobolev. O espaço de Orlicz Sobolev é uma generalização do espaço de Sobolev. Os resultados que apresentaremos nesta e nas próximas seções podem ser encontrados nas seguintes referências [1], [38] e [45].

No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto qualquer.

Definição 2.8 *Dada Φ uma N-função, definimos o espaço de **Orlicz-Sobolev** $W^1L_\Phi(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial*

$$W^1L_\Phi(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad ; \quad \textit{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \textit{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \psi dx, \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \ e \ i \in \{1, ..., n\} \Big\},$$

de maneira geral

$$W^m L_\Phi(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad ; \quad \textit{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega), \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N), \ \textit{tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{|\alpha|_S} \int_\Omega g_\alpha \psi dx, \\ \textit{para quaisquer } \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \ e \ \mid \alpha \mid_S \leq m \Big\}.$$

Se $u \in W^1L_\Phi(\Omega)$, as funções f_i's são únicas. Desta forma, consideremos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Sobre o espaço $W^1L_\Phi(\Omega)$, temos a seguinte norma,

$$\| u \|_{1,\Phi} = \| u \|_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \| u \|_\Phi, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\Phi \right\}.$$

Lema 2.14 *A norma* $\| \,.\, \|_{1,\Phi}$ *é equivalente, a seguinte norma*

$$\| u \|_{W^1 L_\Phi(\Omega)} = \| u \|_\Phi + \||\, \nabla u \,|\|_\Phi, \;\; u \in W^1 L_\Phi(\Omega).$$

Observação 2.5.1 *A título de simplificação consideraremos aqui* $\||\, \nabla u \,|\|_\Phi = \| \nabla u \|_\Phi$.

Teorema 2.9 $W^1 L_\Phi(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Teorema 2.10 *Supondo* Φ *uma N-função satisfazendo a condição* Δ_2*, temos*

1. $W^1 L_\Phi(\Omega)$ *é separável;*

2. *Para cada* $T \in W^1 L_\Phi(\Omega)^*$ *existem* $\{v_i\}_{i=0}^N \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$*, tais que*

$$T(u) = \int_\Omega u v_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i dx;$$

3. $W^1 L_\Phi(\Omega)$ *é reflexivo.*

2.6 Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Estabeleceremos agora algumas imersões entre os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

Definição 2.11 *Sejam* Φ_1 *e* Φ_2 *duas N-funções. Diz-se que* Φ_2 ***cresce estritamente mais lento*** *que* Φ_1*, e escreve-se* $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$*, quando para todo* $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 2.12 *Se* $|\, \Omega \,| < \infty$ *e* $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$*, então*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Lema 2.15 *Seja* Φ *uma N-função satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{2.18}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau = +\infty. \tag{2.19}$$

Então a função $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *dada por*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}} d\tau, \tag{2.20}$$

é bijetiva e sua inversa Φ_**, extendida em toda reta de forma que* Φ_* *seja uma função par, é uma N-função.*

Observação 2.6.1 *Suponha* $\Phi(t) =\mid t\mid^p$. *Se* Φ *satisfaz as hipotéses do Lema 2.15, então* $p \in [1, N)$. *Neste caso,*

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} \mid t \mid^{p^*}, t \in \mathbb{R},$$

para $p \in [1, N)$.

Primeiramente, note que a inversa de Φ em $\mathbb{R}_+$ é dada por

$$\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}.$$

Deste fato, temos

$$\frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} = \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{1+\frac{1}{N}}} = t^{\frac{N-p(N+1)}{pN}}.$$

Considerando $\alpha = \dfrac{N-p(N+1)}{pN}$, note que

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \text{ se, e somente se, } \alpha > -1,$$

ou seja

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \text{ se, e somente se, } p < N. \tag{2.21}$$

Além disso,

$$\int_1^\infty t^\alpha dt = +\infty \text{ se, e somente se, } p \leq N. \tag{2.22}$$

De (2.21) e (2.22), podemos concluir que Φ satisfaz as hipotéses do Lema 2.15 se, e somente se, $p < N$. Observe agora que, para $p < N$

$$\Phi_*^{-1}(t) = \frac{pN}{N-p} t^{\frac{N-p}{Np}},$$

e portanto

$$\Phi_*(t) = \frac{N-p}{Np} \mid t \mid^{\frac{Np}{N-p}},\ t \in \mathbb{R}.$$

Desde que $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, temos

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} \mid t \mid^{p^*}, t \in \mathbb{R}.$$

No que segue considere Ω um domínio **adimissível**, isto é um domínio onde ocorram as imersões de Sobolev

$$W^{1,1}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ q \in [1, \frac{N}{N-1}].$$

Teorema 2.13 *Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipotéses do Lema 2.15. Se Φ_*^{-1} é dada por*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds, \ t \geq 0,$$

então

$$W^1 L_\Phi(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Além disso, se $| \Omega | < +\infty$ e Ψ é uma N-função crescendo estritamente mais lento que Φ_*, então

$$W^1 L_\Phi(\Omega) \underset{comp}{\hookrightarrow} L_\Psi(\Omega).$$

Observação 2.6.2 *Devido a N-função Φ_* ser a função limite para uma imersão compacta, diz-se que Φ_* é uma* ***função de crescimento crítico*** *de Φ.*

2.7 Sobre o Espaço $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

No que segue, seja Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2. Defina $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma

$$\| u \|_{W_0^1 L_\Phi(\Omega)} = \| \nabla u \|_\Phi + \| u \|_\Phi .$$

Com relação ao espaço $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.7 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponha Ω um domínio limitado. Existe $K_0 > 0$, tal que*

$$\| u \|_\Phi \leq K_0 \| \nabla u \|_\Phi, \ u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega).$$

Tem-se da Desigualdade de Poincaré, que a norma $\| \nabla u \|_\Phi$ é equivalente a norma $\| u \|_{W_0^1 L_\Phi(\Omega)}$. Deste fato assumiremos $\| \nabla u \|_\Phi$, como sendo a norma do espaço $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Sendo $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ um subespaço fechado de $W^1 L_\Phi(\Omega)$ e $W^1 L_\Phi(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo (já que $\Phi \in \Delta_2$, ver Teorema 2.10 e Lema 3.8), tem-se da teoria analise funcional que $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo. Devido a Donaldson e Trudinger [30] existe uma constante $\gamma = \gamma(N)$, tal que

$$\| u \|_{\Phi_*} \leq \gamma \| \nabla u \|_\Phi, \ u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \tag{2.23}$$

ou melhor, o espaço $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

2.8 Estudo do espaço $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$

Considerando Φ uma N-função verificando (Δ_2), o espaço $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ é definido como sendo o completamento do $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação a norma

$$\| u \|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)} = \| u \|_{\Phi_*} + \| \nabla u \|_{\Phi} .$$

É imediato verificar que

$$D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N).$$

Lema 2.16 *Existe $S_N > 0$, tal que*

$$\| u \|_{\Phi_*} \leq S_N \| \nabla u \|_{\Phi}, \ u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N). \tag{2.24}$$

Demonstração. Por Donaldson e Trudinger [30], existe $S_N > 0$ tal que

$$\| u \|_{\Phi_*} \leq S_N \| \nabla u \|_{\Phi}, \ u \in W_0^1 L_{\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular

$$\| u \|_{\Phi_*} \leq S_N \| \nabla u \|_{\Phi}, \ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.25}$$

Segue da definição de $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, que para cada $u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\| \varphi_n - u \|_{\Phi_*} + \| \nabla(\varphi_n - u) \|_{\Phi} = \| \varphi_n - u \|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste fato,

$$\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$| \nabla \varphi_n | \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} | \nabla u | \ \text{ em } L_{\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Daí, passando ao limite de $n \to +\infty$ obtemos que

$$\| u \|_{\Phi_*} \leq S_N \| \nabla u \|_{\Phi}, \ u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

como queriamos demonstrar. ∎

Segue do Lema 2.16, que a norma $\| u \|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)}$ é equivalente a norma $\| \nabla u \|_{\Phi}$. Por este fato, assumiremos aqui como a norma de $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, a norma $\| \nabla u \|_{\Phi}$. Sendo $L_{\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e $L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$ espaços de Banach, conclui-se que $D^{1,\Phi}(\Omega)$ é Banach. É importante observar que para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tem-se

$$D^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^1 L_{\Phi}(\Omega).$$

Capítulo 3

Equação Quasilinear Multivalente em Domínio Limitado

Nosso objetivo central consiste em estabelecer uma solução não trivial para o problema quasilinear

$$\begin{cases} -div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda \partial_u F(x,u) \text{ em } \Omega \\ u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 2$, $\phi, b : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são funções contínuas, λ é um parâmetro positivo, $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,t)dx$, com $f : \Omega \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mensurável para cada $t \in [0,+\infty)$ e $f(x,.) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.

No que segue considere

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \big(\inf \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\big) \text{ e } \overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \big(\sup \text{ess}_{|s-t|<\epsilon} f(x,s)\big)\,,\ t > 0 \text{ e } x \in \Omega$$

e

$$\underline{f}(x,0) = \overline{f}(x,0) = 0, \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

suponha que $\underline{f}, \overline{f}$ sejam funções N-mensuráveis. Com o objetivo de estabelecer uma solução não trivial para o problema (3.1), provaremos neste capítulo o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira regular e suponha:*

$S_1)$ $\phi \in C^1\big((0,+\infty)\big)$ *satisfaz*

$$\phi(t) > 0,\ \big(\phi(t)t\big)' > 0,\ t > 0,$$

$S_2)$ *existem* $l, m \in (1, N)$, *satisfazendo*

$$(i)\ l \le m < l^* = \frac{Nl}{N-l}$$

$$(ii)\ l \le \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \le m,\ t > 0,$$

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds,\ t \in \mathbb{R},$$

$S_3)$ $b \in C\big((0, +\infty)\big)$ *e satisfaz*

$$(i)\ \lim_{t \to 0^+} b(t)t = 0,$$

$$(ii)\ l^* \le \frac{b(t)t^2}{B(t)} \le m^*,\ \textit{onde}\ m^* = \frac{Nm}{N-m},$$

onde

$$B(t) = \int_0^t b(s)sds,\ t \ge 0,$$

$S_4)$ *existem* $b_0, b_1 > 0$ *tais que*

$$b_0 \le \frac{B(t)}{\Phi_*(t)} \le b_1,\ t > 0,$$

onde Φ_* *é a função inversa da função*

$$G_\Phi(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds,\ t > 0,$$

$S_5)$ $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é mensurável para cada* $t \in [0, +\infty)$ *e localmente limitada em* $[0, +\infty)$, *satisfazendo*

$$f(x, 0) = 0,\ x \in \Omega.$$

Sobre $F(x,t)$ *considere as seguintes condições:*

$$S_6)\ \mid F(x,t) \mid \le \begin{cases} g(x)t^{r_0},\ t \in [0,1] \\ g(x)t^{r_1},\ t \ge 1\ e\ x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $g \in L^\infty(\Omega)$, $r_0 \in (\dfrac{mm^*}{l^*}, m^*)$ *e* $r_1 \in (m, l^*)$,

$S_7)$ *existe um conjunto aberto* $\Omega_0 \subset \Omega$, *tal que*

$$F(x,t) > K_0 > 0\ x \in \Omega_0,\ t > 0,$$

$S_8)$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\mid f(x,t)t \mid \le C \mid F(x,t) \mid\ \ x \in \Omega,$$

$S_9)$ *existe* $\tau \in (m, l^*)$ *satisfazendo*

$$F(x,t) - \frac{1}{\tau}\underline{f}(x,t)t < 0, \ x \in \Omega \ e \ t > 0.$$

Então para $\lambda > 0$ *suficientemente grande, existem*

$$\rho = \rho_\lambda \in \partial_u F(x,u) \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$

com $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$ *e*

$$u = u_\lambda \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \ com \ u \geq 0 \ e \ u \not\equiv 0,$$

satisfazendo

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega b(u)uvdx + \lambda \int_\Omega \rho v dx, \ v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

ou ainda

$$-div\big(\phi(|\nabla u|)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda \partial_u F(x,u) \ em \ \Omega.$$

3.1 Preliminares

Veremos a seguir que as funções Φ, $\widetilde{\Phi}$ (a função conjugada de Φ), Φ_* (a função de crescimento crítico de Φ) e $\widetilde{\Phi}_*$ (a função conjugada de Φ_*) são N-funções.

Lema 3.1 *Assumindo* (S_1) *e* (S_2), *conclui-se que* Φ, $\widetilde{\Phi}$, Φ_* *e* $\widetilde{\Phi}_*$ *são N-funções.*

Demonstração. Lembrando que $\Phi(t)$ é dado por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds, \ t \in \mathbb{R},$$

defina $\varphi(s) = \phi(s)s$. Segue de (S_1) que φ satisfaz os itens (I),(II) e (IV) do Lema 2.1. Sendo assim para mostrarmos que Φ é uma N-função, basta mostrarmos que φ satisfaz o item (III) do Lema 2.1. De (S_2), tem-se que

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m, \ t \geq 0,$$

donde

$$\frac{l}{t} \leq \frac{d}{dt}(\ln \Phi(t)) \leq \frac{m}{t}, \ t > 0,$$

implicando que

$$l\int_1^s \frac{1}{t}dt \leq \ln \Phi(s) - \ln \Phi(1) \leq m\int_1^s \frac{1}{t}dt, \ s \geq 1,$$

ou seja

$$\Phi(1)s^l \leq \Phi(s) \leq \Phi(1)s^m, \ s \geq 1.$$

Neste caso, temos de (S_2)

$$\varphi(s) = \phi(s)s \geq l\frac{\Phi(s)}{s} \geq l\Phi(1)s^{l-1},$$

o que implica

$$\varphi(s) \stackrel{|t|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ou seja, φ satisfaz o item (III) do Lema 2.1.

De modo análogo, mostra-se que Φ_* é uma N-função. Deste fato, segue do Lema 2.13 que $\widetilde{\Phi}$ e $\widetilde{\Phi}_*$ são N-funções. ■

A seguir será mostrado alguns exemplos de funções que satisfazem as hipotéses (S_1) e (S_2):

(i) $\Phi_1(t) =| t |^{p_0} + | t |^{p_1}$, $1 < p_0 < p_1 < N$ e $p_1 \in (p_0, p_0^*)$.

Verificação de (S_1)**:** Note que $\Phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, com

$$\phi_1(t) = t^{-1}\Phi_1'(t) = p_0t^{p_0-2} + p_1t^{p_1-2} > 0, \ t > 0$$

e

$$\big(\phi_1(t)t\big)' = (p_0-1)p_0t^{p_0-2} + (p_1-1)p_1t^{p_1-2} > 0, \ t > 0.$$

Verificação de (S_2)**:** Primeiramente observe que

$$\frac{\phi_1(t)t^2}{\Phi_1(t)} = \frac{p_0t^{p_0} + p_1t^{p_1}}{t^{p_0} + t^{p_1}} \leq p_1\frac{t^{p_0} + t^{p_1}}{t^{p_0} + t^{p_1}} = p_1, \ t > 0. \tag{3.2}$$

Além disso, é imediato observar que

$$\frac{\phi_1(t)t^2}{\Phi_1(t)} \geq p_0, \ t > 0. \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3)

$$l \leq \frac{\phi_1(t)t^2}{\Phi_1(t)} \leq m,$$

onde

$$l = p_0 < p_1 = m$$

e $l, m \in (1, N)$.

(ii) $\Phi_2(t) = (1+t^2)^\gamma - 1,\ \gamma \in \big(1, \dfrac{N}{N-2}\big)$.

Observe que

$$\phi_2(t)t = \Phi_2'(t) = \gamma(1+t^2)^{\gamma-1}2t = 2\gamma t(1+t^2)^{\gamma-1},\ t>0.$$

Verificação de (S_1)**:** Note que $\phi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, além disso

$$\phi_2(t) = t^{-1}\Phi_2'(t) = 2\gamma(1+t^2)^{\gamma-1} > 0,\ t>0$$

e

$$\big(\phi_2(t)t\big)' = 2\gamma(1+t^2)^{\gamma-2}\big(1+(2\gamma-1)t^2\big) > 0,\ t>0,$$

para $\gamma > 1$.

Verificação de (S_2)**:** Observe agora que

$$\frac{\phi_2(t)t^2}{\Phi_2(t)} = \frac{2\gamma t^2(1+t^2)^{\gamma-1}}{(1+t^2)^\gamma - 1},\ t>0.$$

Considerando $z = 1+t^2$ e

$$f(z) = \frac{2\gamma(z-1)z^{\gamma-1}}{z^\gamma - 1},\ z>1,$$

segue da regra de L'Hospital

$$\lim_{z\to 1^+} f(z) = \lim_{z\to 1^+} \frac{2\gamma(\gamma-1)z^{\gamma-2}(z-1) + 2\gamma z^{\gamma-1}}{\gamma z^{\gamma-1}} = 2 \tag{3.4}$$

e

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) = \lim_{z\to+\infty}\Big(\frac{2\gamma z^\gamma}{z^\gamma-1} - \frac{2\gamma z^{\gamma-1}}{z^\gamma - 1}\Big) = 2\gamma. \tag{3.5}$$

Note que

$$f'(z) = \frac{2\gamma z^{\gamma-2}(z^\gamma - \gamma z + \gamma - 1)}{(z^\gamma-1)^2},\ z>1.$$

Afirmamos que $f'(z) > 0$. De fato, considerando

$$h(z) = z^\gamma - \gamma z + \gamma - 1,$$

tem-se que $h(1) = 0$ e

$$h'(z) = \gamma z^{\gamma-1} - \gamma > 0,\ z>1,$$

implicando que h é crescente, e portanto

$$h(z) > 0,\ z>1,$$

mostrando assim que $f'(z) > 0$. Segue daí que f é crescente para $z > 1$. Deste fato, segue de (3.4) e (3.5) que

$$2 \leq f(z) \leq 2\gamma,\ \gamma \in \big(1, \frac{N}{N-2}\big) \text{ e } z > 1,$$

isto é

$$2 \leq \frac{\phi_2(t)t^2}{\Phi_2(t)} \leq 2\gamma,\ \gamma \in (1, \frac{N}{N-2})\ e\ t > 0.$$

(iii) $\Phi_3(t) = t^p ln(1+t),\ 1 < p_0 < p < N-1$, onde $p_0 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4N}}{2}$.

Observe que

$$t\phi_3(t) = \Phi_3'(t) = pt^{p-1}ln(1+t) + \frac{t^p}{t+1},$$

logo

$$t^2\phi_3(t) = pt^p ln(1+t) + \frac{t^{p+1}}{t+1},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{t^2\phi_3(t)}{\Phi_3(t)} &= \frac{pt^p ln(1+t)}{t^p ln(1+t)} + \frac{t^{p+1}}{t^p(t+1)ln(1+t)} \\ &= p + \frac{t}{(1+t)ln(1+t)},\ t > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Verificação de (S_1)**:** Note que $\phi_3 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, com

$$\phi_3(t) = pt^{(p-2)}ln(1+t) + \frac{t^{p-1}}{t+1} > 0,\ t > 0$$

e

$$\begin{aligned} \big(\phi_3(t)t\big)' &= p(p-1)t^{(p-2)}ln(1+t) + \frac{pt^{p-1}}{1+t} \\ &\quad + \frac{pt^{p-1}(t+1) - t^p}{(t+1)^2} \\ &= p(p-1)t^{p-2}ln(1+t) + \frac{pt^{p-1}}{1+t} \\ &\quad + \frac{pt^{(p-1)}}{1+t} - \frac{t^p}{(t+1)^2} \\ &= p(p-1)t^{p-2}ln(1+t) + \frac{2pt^p(t+1) - 1}{(t+1)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \big(\phi_3(t)t\big)' &= p(p-1)t^{p-2}ln(1+t) + \frac{t^p\big(2pt + (2p-1)\big)}{(t+1)^2} \\ &> 0,\ p > 1. \end{aligned}$$

Verificação de (S_2)**:** Considerando $z = ln(1+t)$, temos $e^z = 1+t$. Sabendo disto, defina

$$\eta(z) = \frac{e^z - 1}{ze^z}.$$

Utilizando a regra de L'Hospital tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to+\infty} \eta(z) &= \lim_{z\to+\infty} \frac{e^z-1}{ze^z} \\ &= \lim_{z\to+\infty} \frac{e^z}{e^z + ze^z} = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to0^+} \eta(z) &= \lim_{z\to0^+} \frac{e^z-1}{ze^z} \\ &= \lim_{z\to0^+} \frac{e^z}{ze^z + e^z} = 1, \end{aligned} \tag{3.8}$$

além disso

$$\eta'(z) = \frac{1+z-e^z}{z^2e^z}, \ z > 0.$$

Definindo agora $\psi(z) = 1 + z - e^z$, temos $\psi(0) = 0$ e

$$\psi'(z) = 1 - e^z < 0, \ z > 0.$$

Logo, $\psi(z) < 0$ para $z > 0$, consequentemente

$$\eta'(z) < 0, \ z > 0.$$

Segue de (3.7) e (3.8)

$$0 < \eta(z) < 1, \ z > 0,$$

isto é

$$0 < \frac{t}{(1+t)ln(1+t)} < 1, \ t > 0. \tag{3.9}$$

De (3.6) e (3.9)

$$p \leq \frac{t^2\phi_3(t)}{\Phi_3(t)} \leq p+1, \ t > 0.$$

Para finalizarmos, basta mostrar que

$$p + 1 < p^* = \frac{pN}{N-p},$$

para $p > p_0 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4N}}{2}$, além disso $p_0 < N-1$.

Para isto, observe que

$$p^2 + p - N > 0, \ \ p > p_0,$$

e portanto

$$Np - p^2 + N - p < Np,$$

donde

$$p + 1 < \frac{Np}{N - p}.$$

Note que $p_0 < N - 1$. De fato, pois equivalentemente temos

$$1 + 4N < 4N^2 - 4N + 1$$

ou seja $N > 2$.

Assumindo as hipotéses (S_1) e (S_2), mostraremos agora uma série de resultados envolvendo as N-funções Φ, $\widetilde{\Phi}$, Φ_* e $\widetilde{\Phi}_*$. Os lemas que serão apresentados a seguir podem ser encontrados em [32]. Com o intuito de ajudar o leitor apresentamos as suas demonstrações, uma vez que em [32] não encontramos os detalhes da demonstração.

Lema 3.2 *Sejam*

$$\zeta_0(t) = \min\{t^l, t^m\} \ \textit{e}\ \zeta_1(t) = \max\{t^l, t^m\}, \ \ t \geq 0.$$

Então

$$\zeta_0(r)\Phi(t) \leq \Phi(rt) \leq \zeta_1(r)\Phi(t), \ \ r, t \geq 0 \tag{3.10}$$

e

$$\zeta_0(\| u \|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(| u |)dx \leq \zeta_1(\| u \|_\Phi), \ \ u \in L_\Phi(\Omega). \tag{3.11}$$

Demonstração. Dado $r > 0$, considere os seguintes casos:

1^0 **caso:** $s \geq 1$.

Desde que

$$\frac{d}{ds}\big(ln\Phi(rs)\big) = \frac{\phi(rs)r^2 s}{\Phi(rs)},$$

temos de (S_2)

$$\frac{l}{s} \leq \frac{d}{ds}\big(ln\Phi(rs)\big) \leq \frac{m}{s},$$

donde

$$l\int_1^t \frac{1}{s}ds \leq \int_1^t \frac{d}{ds}[ln\Phi(rs)]ds \leq m\int_1^t \frac{1}{s}ds, \ \ t \geq 1,$$

implicando

$$ln(t^l) \leq ln\Phi(rt) - ln\Phi(r) \leq ln(t^m),$$

ou seja

$$ln(t^l) \leq ln\frac{\Phi(rt)}{\Phi(r)} \leq ln(t^m).$$

Assim, segue da monotocidade da função logarítmica

$$t^l \leq \frac{\Phi(rt)}{\Phi(r)} \leq t^m,\ t \geq 1,$$

mostrando que

$$\Phi(r)t^l \leq \Phi(rt) \leq \Phi(r)t^m,\ t \geq 1 \text{ e } r > 0. \tag{3.12}$$

2^0 **caso:** $s \in (0,1]$.

Neste caso

$$l\int_t^1 \frac{1}{s}ds \leq \int_t^1 \frac{d}{ds}\big(ln\Phi(rs)\big)ds \leq m\int_t^1 \frac{1}{s}ds,$$

implicando

$$ln(t^l) \geq ln\Big(\frac{\Phi(rt)}{\Phi(r)}\Big) \geq ln(t^m).$$

Usando novamente a monotocidade da função logarítmica

$$\Phi(r)t^m \leq \Phi(rt) \leq \Phi(r)t^l,\ t \in (0,1] \text{ e } r > 0. \tag{3.13}$$

De (3.12) e (3.13)

$$\Phi(r)\zeta_0(t) \leq \Phi(rt) \leq \Phi(r)\zeta_1(t),\ t, r > 0. \tag{3.14}$$

Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, considere

$$r = \frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi} \text{ e } t = \|\ u\ \|_\Phi\ .$$

Segue de (3.14)

$$\Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi}\Big)\zeta_0(\|\ u\ \|_\Phi) \leq \Phi(|\ u\ |) \leq \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi}\Big)\zeta_1(\|\ u\ \|_\Phi),$$

logo pelo Lema 2.5

$$\zeta_0(\|\ u\ \|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)dx \leq \zeta_1(\|\ u\ \|_\Phi),\ u \in L_\Phi(\Omega),$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 3.3 *Sejam*

$$\zeta_2(t)=\min\{t^{l^*},t^{m^*}\}\ \textit{e}\ \zeta_3(t)=\max\{t^{l^*},t^{m^*}\},\ \ t\geq 0.$$

Então

$$\zeta_2(\rho)\Phi_*(t)\leq \Phi_*(\rho t)\leq \zeta_3(\rho)\Phi_*(t),\ \ \rho,t\geq 0 \tag{3.15}$$

e

$$\zeta_2(\| u\|_{\Phi_*})\leq \int_\Omega \Phi_*(|u|)dx\leq \zeta_3(\| u\|_{\Phi_*}),\ \ u\in L_{\Phi_*}(\Omega). \tag{3.16}$$

Demonstração. Dados $\kappa,\sigma>0$, considere $t,r_0,r_1>0$ satisfazendo

$$\kappa=\Phi(t)\ \text{e}\ \sigma=\zeta_0(r_0)=\zeta_1(r_1).$$

De (3.10)

$$\begin{cases}\zeta_0(r_0)\Phi(t)\leq \Phi(r_0t)\\ \Phi(r_1t)\leq \zeta_1(r_1)\Phi(t)\end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases}\sigma\kappa\leq \Phi\big(\zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)\big)\\ \Phi\big(\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)\big)\leq \kappa\sigma,\end{cases}$$

o que implica

$$\begin{cases}\Phi^{-1}(\sigma\kappa)\leq \zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)\\ \zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)\leq \Phi^{-1}(\kappa\sigma).\end{cases}$$

Portanto

$$\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)\leq \Phi^{-1}(\kappa\sigma)\leq \zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa),\ \ \sigma,\kappa>0.$$

Sendo assim

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)}{(\sigma\kappa)^{\frac{N+1}{N}}}\leq \frac{\Phi^{-1}(\kappa\sigma)}{(\sigma\kappa)^{\frac{N+1}{N}}}\leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\kappa)}{(\sigma\kappa)^{\frac{N+1}{N}}},\ \ \sigma,\kappa>0.$$

Integrando de 0 à t com relação a variável κ, temos

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{N+1}{N}}}\int_0^t\frac{\Phi^{-1}(\kappa)}{\kappa^{\frac{N+1}{N}}}d\kappa\leq \int_0^t\frac{\Phi^{-1}(\kappa\sigma)}{(\sigma\kappa)^{\frac{N+1}{N}}}d\kappa\leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{N+1}{N}}}\int_0^t\frac{\Phi^{-1}(\kappa)}{\kappa^{\frac{N+1}{N}}}d\kappa.$$

ou seja

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{N+1}{N}-1}}\Phi_*^{-1}(t)\leq \int_0^{t\sigma}\frac{\Phi^{-1}(r)}{r^{\frac{N+1}{N}}}dr\leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{N+1}{N}-1}}\Phi_*^{-1}(t). \tag{3.17}$$

Veja agora que

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{N+1}{N}-1}} &= \max\left\{\sigma^{\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{N}\right)},\sigma^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)}\right\}\\ &= \max\left\{\sigma^{\frac{N-l}{lN}},\sigma^{\frac{N-m}{Nm}}\right\}\\ &= \max\left\{\sigma^{\frac{1}{l^*}},\sigma^{\frac{1}{m^*}}\right\}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

De modo análogo mostra-se que

$$\frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{N}}} = \min\Big\{\sigma^{\frac{1}{l^*}}, \sigma^{\frac{1}{m^*}}\Big\}. \tag{3.19}$$

De (3.17), (3.18) e (3.19)

$$\zeta_3^{-1}(\sigma)\Phi_*^{-1}(t) \leq \Phi_*^{-1}(t\sigma) \leq \zeta_2^{-1}(\sigma)\Phi_*^{-1}(t), \tag{3.20}$$

para $t, \sigma > 0$ quaisquer. Fixe, $s, r_1, r_2 > 0$ e $t, \sigma > 0$ verificando

$$t = \Phi_*(s) \text{ e } \sigma = \zeta_2(r_1) = \zeta_3(r_2).$$

Segue de (3.20)

$$\begin{cases} r_2 s \leq \Phi_*^{-1}\big(\Phi_*(s)\zeta_3(r_2)\big) \\ \Phi_*^{-1}\big(\zeta_2(r_1)\Phi_*(s)\big) \leq r_1 s, \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} \Phi_*(r_2 s) \leq \Phi_*(s)\zeta_3(r_2) \\ \zeta_2(r_1)\Phi_*(s)\big) \leq \Phi_*(r_1 s). \end{cases}$$

Logo

$$\Phi_*(s)\zeta_2(r) \leq \Phi_*(rs) \leq \Phi_*(s)\zeta_3(r),\ r, s \geq 0.$$

Em particular, para

$$s = \frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_\Phi} \text{ e } r = \|\ u\ \|_{\Phi_*},\ u \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

temos

$$\Phi_*\Big(\frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_{\Phi_*}}\Big)\zeta_2(\|\ u\ \|_{\Phi_*}) \leq \Phi_*\Big(\frac{|\ u\ |}{\|\ u\ \|_{\Phi_*}}\Big)\zeta_3(\|\ u\ \|_{\Phi_*}),\ u \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 3.4 *A função $\Phi_*(t)$ cresce mais rapidamente que $\Phi(t)$ no infinito, isto é, para cada $k > 0$*

$$\frac{\Phi(kt)}{\Phi_*(t)} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. De (3.10) e (3.15), temos para cada $k > 0$

$$0 \leq \frac{\Phi(kt)}{\Phi_*(t)} \leq \frac{\Phi(k)\zeta_1(t)}{\Phi_*(1)\zeta_2(t)},\ t > 0$$

donde

$$0 \leq \frac{\Phi(kt)}{\Phi_*(t)} \leq C_0 \frac{\max\{t^l, t^m\}}{\min\{t^{l^*, t^{m^*}}\}} = C_0 \frac{t^m}{t^{l^*}},$$

para t suficientemente grande, com

$$C_0 = C_0(k) = \frac{\Phi(k)}{\Phi_*(1)}.$$

Logo

$$0 \leq \frac{\Phi(kt)}{\Phi_*(t)} \leq C_0(k)\frac{1}{t^{l^*-m}} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando que

$$\frac{\Phi(kt)}{\Phi_*(t)} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para qualquer $k > 0$. ■

Observação 3.1.1 *Desde que* $\mid \Omega \mid< +\infty$, *temos do Teorema 2.12 e Lema 3.4*

$$L_{\Phi_*}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_\Phi(\Omega).$$

Lema 3.5 *(i) (3.10) é equivalente a*

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m, \;\; t > 0.$$

(ii) (3.15) é equivalente a

$$l^* \leq \frac{\Phi_*'(t)t}{\Phi_*(t)} \leq m^*, \;\; t > 0.$$

Demonstração. Verificação de (i): De (3.10)

$$\zeta_0(r)\Phi(t) \leq \Phi(tr) \leq \zeta_1(r)\Phi(t), \;\; r,t \geq 0$$

e

$$\zeta_0(1)\Phi(t) = \Phi(t) = \zeta_1(1)\Phi(t), \;\; t \geq 0.$$

Deste fato

$$\frac{\zeta_0(r)-\zeta_0(1)}{r-1}\Phi(t) \leq \frac{t\big(\Phi(tr)-\Phi(t)\big)}{tr-t} \leq \frac{\zeta_1(r)-\zeta_1(1)}{r-1}\Phi(t),$$

para $r > 1$ e $t > 0$. Passando ao limite de $r \to 1^+$, tem-se que

$$\zeta_{0+}'(1)\Phi(t) \leq t\Phi'(t) \leq \zeta_{1+}'(1)\Phi(t),$$

logo

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m,$$

ou seja

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m, \ t > 0.$$

Reciprocamente, temos do Lema 3.2 a desigualdade (3.10).

Verificação de (ii)**:** De modo análogo ao feito anteriormente mostra-se esta equivalência. ■

Lema 3.6 *Sejam* $\widetilde{\Phi}$ *o complementar de* Φ*,*

$$\zeta_4(s) = \min\{s^{\frac{l}{l-1}}, s^{\frac{m}{m-1}}\} \ e \ \zeta_5(s) = \max\{s^{\frac{l}{l-1}}, s^{\frac{m}{m-1}}\}, \ s \geq 0.$$

Então

$$\frac{m}{m-1}\widetilde{\Phi}(s) \leq s\widetilde{\Phi}'(s) \leq \frac{l}{l-1}\widetilde{\Phi}(s), \ s \geq 0, \tag{3.21}$$

$$\zeta_4(r)\widetilde{\Phi}(s) \leq \widetilde{\Phi}(rs) \leq \zeta_5(r)\widetilde{\Phi}(s), \ r, s \geq 0 \tag{3.22}$$

e

$$\zeta_4(\| u \|_{\Phi}) \leq \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}(| u |)dx \leq \zeta_5(\| u \|_{\widetilde{\Phi}}), \ u \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega). \tag{3.23}$$

Demonstração. Foi visto no Capítulo 2 que $\widetilde{\widetilde{\Phi}} = \Phi$ e $\widetilde{\Phi}(t) = \sup\{st - \Phi(t); s \in \mathbb{R}\}$. Sabendo disto afirmamos que

$$\Phi\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big) = \widetilde{\Phi}'(s)s - \widetilde{\Phi}(s), \ s \geq 0. \tag{3.24}$$

Com efeito, desde que Φ é convexa, para cada $t > 0$

$$\frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{s - t} \geq \Phi'(t), \ s > t,$$

donde

$$\Phi(s) \geq \Phi'(t)(s - t) + \Phi(t), \ s > t,$$

ou seja

$$\phi(t)t^2 - \Phi(t) \geq \phi(t)ts - \Phi(s), \ s \geq t \geq 0. \tag{3.25}$$

Além disso

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(s)}{t - s} \leq \Phi'(t), \ 0 < s < t,$$

mostrando que

$$\phi(t)t^2 - \Phi(t) \geq \phi(t)ts - \Phi(s), \ 0 \leq s \leq t. \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26)

$$\phi(t)t^2 - \Phi(t) \geq \phi(t)st - \Phi(s), \ t, s \geq 0.$$

Portanto

$$\widetilde{\Phi}\big(\Phi'(t)\big) = \phi(t)t^2 - \Phi(t). \tag{3.27}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\Phi(\widetilde{\Phi}(s)) &= \widetilde{\widetilde{\Phi}}\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big) = \max_{t\geq 0}\{\widetilde{\phi}(s)ts - \widetilde{\Phi}(t)\}\\ &= \widetilde{\phi}(s)s^2 - \widetilde{\Phi}(s) = \widetilde{\Phi}'(s)s - \widetilde{\Phi}(s),\ s \geq 0,\end{aligned}$$

mostrando (3.24). Derivando (3.24) com relação a s, obtemos

$$\Phi'\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big)\widetilde{\Phi}''(s) = \widetilde{\Phi}''(s)s,$$

sendo $\widetilde{\Phi}'' > 0$ (pois $\widetilde{\Phi}$ é convexa), tem-se

$$\Phi'(\widetilde{\Phi}'(s)) = s. \tag{3.28}$$

Desde que

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m,\ t > 0,$$

para $t = \widetilde{\Phi}'(s)$, ficamos com

$$l \leq \frac{\phi\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big)\widetilde{\Phi}'(s)^2}{\Phi(\widetilde{\Phi}'(s))} \leq m,\ s > 0,$$

ou seja

$$l\Phi\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big) \leq s\widetilde{\Phi}'(s) \leq m\Phi\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big),\ s > 0. \tag{3.29}$$

De (3.24) e (3.29)

$$l\big(\widetilde{\Phi}'(s)s - \widetilde{\Phi}(s)\big) \leq s\widetilde{\Phi}'(s) \leq m\big(\widetilde{\Phi}'(s)s - \widetilde{\Phi}(s)\big).$$

Assim

$$\frac{s\widetilde{\Phi}'(s)}{\widetilde{\Phi}(s)} \leq \frac{l}{l-1} \text{ e } \frac{\widetilde{\Phi}'(s)s}{\widetilde{\Phi}(s)} \geq \frac{m}{m-1},\ s > 0,$$

implicando

$$\frac{m}{m-1}\widetilde{\Phi}(s) \leq s\widetilde{\Phi}'(s) \leq \frac{l}{l-1}\widetilde{\Phi}(s),\ s \geq 0.$$

De modo análogo, mostra-se (3.22) e (3.23). ∎

Lema 3.7 *Sejam $\widetilde{\Phi}_*$ o complementar de Φ_*,*

$$\zeta_6(s) = \min\{s^{\frac{l^*}{l^*-1}}, s^{\frac{m^*}{m^*-1}}\} \text{ e } \zeta_7(s) = \max\{s^{\frac{l^*}{l^*-1}}, s^{\frac{m^*}{m^*-1}}\},\ s \geq 0.$$

Então

$$\frac{m^*}{m^*-1}\widetilde{\Phi}_*(s) \leq \widetilde{\Phi}_*'(s)s \leq \frac{l^*}{l^*-1}\widetilde{\Phi}_*(s),\ s \geq 0, \tag{3.30}$$

$$\zeta_6(r)\widetilde{\Phi}_*(s) \leq \widetilde{\Phi}_*(rs) \leq \zeta_7(r)\widetilde{\Phi}_*(s),\ r,s \geq 0 \tag{3.31}$$

e

$$\zeta_6(\| u \|_{\widetilde{\Phi}_*}) \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}_*(| u |)dx \leq \zeta_7(\| u \|_{\widetilde{\Phi}_*}),\ u \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega). \tag{3.32}$$

Demonstração. Basta repetir os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Lema 3.6. ■

Lema 3.8 $\Phi, \Phi_*, \widetilde{\Phi}$ *e* $\widetilde{\Phi}_*$ *satisfazem a condição* Δ_2 *e as seguintes desigualdades*

$$\Phi_*(t) \geq P_0 t^{m^*},\ t \in [0,1], \tag{3.33}$$

$$\Phi_*(t) \geq P_0 t^{l^*},\ t \in [1,+\infty), \tag{3.34}$$

$$\widetilde{\Phi}_*(t) \leq P_1 t^{\frac{m^*}{m^*-1}},\ t \in [0,1] \tag{3.35}$$

e

$$\widetilde{\Phi}_*(t) \leq P_1 t^{\frac{l^*}{l^*-1}},\ t \in [1,+\infty], \tag{3.36}$$

onde $P_0 = \Phi_*(1)$ *e* $P_1 = \widetilde{\Phi}_*(1)$.

Demonstração. A condição Δ_2 para estas funções segue imediatamente dos itens (3.10), (3.15), (3.22) e (3.31). ■

Lema 3.9 *Seja* Φ *uma N-função satisfazendo as condições* (S_1) *e* (S_2). *Então*

(i) $\widetilde{\Phi}\big(\phi(s)s\big) = \phi(s)s^2 - \Phi(s) \leq \Phi(2s),\ s \geq 0;$

(ii) $\widetilde{\Phi}\Big(\dfrac{\Phi(s)}{s}\Big) \leq \Phi(s),\ s > 0;$

(iii) $\widetilde{\Phi}_*\Big(\dfrac{\Phi_*(s)}{s}\Big) \leq \Phi_*(s),\ s > 0.$

Demonstração. Durante a demonstração do Lema 3.6, foi mostrado em (3.24) a seguinte igualdade

$$\Phi\big(\widetilde{\Phi}'(s)\big) = \widetilde{\Phi}'(s)s - \widetilde{\Phi}(s),\ s > 0,$$

logo

$$\widetilde{\Phi}(\Phi'(s)) = \Phi'(s)s - \Phi(s),\ s > 0.$$

Assim

$$\widetilde{\Phi}\big(\phi(s)s\big) \leq \phi(s)s^2 \leq \int_s^{2s} t\phi(t)dt \leq \int_0^{2s} t\phi(t)dt = \Phi(2s),\ s \geq 0,$$

mostrando (i). Note que

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\Phi(t)}{t}\Big) = \frac{\phi(t)t^2 - \Phi(t)}{t^2} = \phi(t) - \frac{\Phi(t)}{t^2},\ t > 0. \tag{3.37}$$

De (S_1)

$$\frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \geq l > 1,\ t > 0,$$

donde

$$\phi(t)t^2 \geq \Phi(t),\ t > 0,$$

implicando

$$\phi(t) - \frac{\Phi(t)}{t^2} \geq 0,$$

logo de (3.37)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\Phi(t)}{t}\Big) \geq 0,\ t > 0.$$

Mostrando que $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ é uma função monótona não-decrescente. Sabendo disto, temos

$$\frac{\Phi(s)}{s}t - \Phi(t) \leq 0,\ t \geq s > 0. \tag{3.38}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}\Big(\frac{\Phi(s)}{s}\Big) &= \max_{t\geq 0}\left\{t\frac{\Phi(s)}{s} - \Phi(t)\right\}\\ &= \max_{s\geq t>0}\left\{t\frac{\Phi(s)}{s} - \Phi(t)\right\},\end{aligned}$$

pois para $t \geq s$ tem-se de (3.38)

$$t\frac{\Phi(s)}{s} - \Phi(t) \leq 0.$$

Deste fato

$$\widetilde{\Phi}\Big(\frac{\Phi(s)}{s}\Big) \leq \frac{s\Phi(s)}{s} = \Phi(s),\ s > 0,$$

mostrando (ii).

A prova do item (iii) é análogo ao feito no item (ii). ■

3.2 A geometria do Passo da Montanha e a condição (PS)

Associado ao problema (3.1) temos o funcional energia $I_\lambda : W_0^1L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \int_\Omega B(u)dx - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx,\ u \in W_0^1L_\Phi(\Omega).$$

Sejam $J_1, J_2, J_3 : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por

$$J_1(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx, \;\; J_2(u) = \int_\Omega B(u)dx \text{ e } J_3(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Segue do Lema B.1 (ver Apêndice B) que $J_1, J_2 \in C^1\big(W_0^1 L_\Phi(\Omega), \mathbb{R}\big)$, consequentemente $J_1, J_2 \in Lip_{loc}\big(W_0^1 L_\Phi(\Omega), \mathbb{R}\big)$ (ver definição em Apêndice A). Sabendo disto, para justificar que $I_\lambda : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional Localmente Lipschitz, basta mostrar que $J_3 \in Lip_{loc}\big(W_0^1 L_\Phi(\Omega), \mathbb{R}\big)$. Faremos isto no próximo lema.

No que segue, assuma que

$$b(t) = f(x,t) = 0, \;\; \text{para } t < 0.$$

Lema 3.10 *O funcional*

$$J_3(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \;\; u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

é localmente Lipschitz. Além disso, $F(x,.) \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, para cada* $x \in \Omega$.

Demonstração. Dado $w_0 \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ e $k > 0$, observe que para cada $u, v \in B_k(w_0) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mid J_3(u) - J_3(v) \mid &= \Big| \int_\Omega F(x,u) - F(x,v)dx \Big| \\
&= \Big| \int_\Omega \Big(\int_0^u f(x,t)dt - \int_0^v f(x,t)dt \Big) dx \Big| \\
&\leq \int_\Omega \int_{\min\{u,v\}}^{\max\{u,v\}} \mid f(x,t) \mid dtdx,
\end{aligned}$$

segue de (S_6) e (S_8)

$$\begin{aligned}
\mid J_3(u) - J_3(v) \mid &\leq \int_\Omega \int_{\min\{u,v\}}^{\max\{u,v\}} \big(cg(x)t^{r_0 - 1}\chi_{[0,1]}(t) + cg(x)t^{r_1-1}\chi_{[1,+\infty]}(t) \big) dtdx \\
&\leq C \int_\Omega g(x)\big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_0-1} \chi_{[0,1]}(\mid u \mid + \mid v \mid) \mid u - v \mid dx \\
&\quad + C \int_\Omega g(x)(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_1-1}\chi_{[1,+\infty]}(\mid u \mid + \mid v \mid) \mid u - v \mid dx \\
&= C \Big(\int_{[|u|+|v| \leq 1]} g(x)\big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_0-1} \mid u - v \mid dx \\
&\quad + \int_{[|u|+|v| \geq 1]} g(x)\big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_1-1} \mid u - v \mid dx \Big) \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Afirmação 3.1

(i) $g(x)\big(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}(x) \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$

(ii) $g(x)\big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}(x) \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$

(iii) $\| \big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_0-1} g\chi_{[|u|+|v|\geq 1]} \|_{\widetilde{\Phi}_*} \leq k_0 \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}, \ k_0 > 0$

(iv) $\| \big(\mid u \mid + \mid v \mid \big)^{r_1-1} g\chi_{[|u|+|v|\geq 1]} \|_{\widetilde{\Phi}_*} \leq C_0\Big[\zeta_6^{-1}\big(\zeta_3(\| u \|_{\widetilde{\Phi}_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}$
$+\zeta_3(\| v \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\big)\Big], \ C_0 > 0.$

Assumindo a Afirmação 3.1, segue de (3.39)

$$\begin{aligned}
\mid J_3(u) - J_3(v) \mid \ &\leq \ C \, \| \, g(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]} \, \|_{\widetilde{\Phi}_*} \| \, u - v \, \|_{\Phi_*} \\
&\quad + C \, \| \, g(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]} \, \|_{\widetilde{\Phi}_*} \| \, u - v \, \|_{\Phi_*} \\
&\leq \ Ck_0 \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1} + \lambda C C_0 \zeta_6^{-1}\Big(\zeta_3(\| \, u \, \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}} \\
&\quad + \zeta_3(\| \, v \, \|_{\phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big) \, \| \, u - v \, \|_{\Phi_*} \\
&\leq \ M\Big[\, \| \, u \, \|_{\Phi_*}^{r_0-1} + \| \, v \, \|_{\Phi_*}^{r_0-1} + \zeta_6^{-1}\big(\zeta_3(\| \, u \, \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}} \\
&\quad + \zeta_3(\| \, v \, \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\big)\Big] \, \| \, u - v \, \|_{\Phi_*},
\end{aligned}$$

o que implica de (2.23)

$$\begin{aligned}
\mid J_3(u) - J_3(v) \mid \ &\leq \ M_N\Big(\, \| \, \nabla u \, \|_{\Phi}^{r_0-1} + \| \, \nabla v \, \|_{\Phi}^{r_0-1} + \zeta_6^{-1}\big(\zeta_3(\| \, \nabla u \, \|_{\Phi})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}} \\
&\quad + \zeta_3(\| \, \nabla v \, \|_{\Phi})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\big)\Big) \, \| \, \nabla(u - v) \, \|_{\Phi} \\
&\leq \ C_N(R, w_0) \, \| \, \nabla(u - v) \, \|_{\Phi}, \ u, v \in B_R(w_0),
\end{aligned}$$

onde $C_N(R, w_0) = M_N\Big(R^{r_0-1} + \| \, \nabla w_0 \, \|_{\Phi} + \zeta_6^{-1}\big(\zeta_3(R + \| \, \nabla w_0 \, \|_{\Phi})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\big)\Big).$

Provaremos agora a Afirmação 3.1.

Verificação de (i) **e** (iii)**:** Seja $k \in \mathbb{R}$ qualquer. Da desigualdade (3.31)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}}{k \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big)dx \ &= \ \int_{[|u|+|v|\leq 1]} \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}}{k \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\Big)dx \\
&\leq \ \int_{[|u|+|v|\leq 1]} \zeta_7(g(x))\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}}{k \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\Big)dx,
\end{aligned}$$

donde segue de (3.35), para k suficientemente grande, que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}}{k \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big)dx \leq P_1 \int_{[|u|+|v|\leq 1]} \zeta_7(g(x))\Big(\frac{(\mid u \mid + \mid v \mid)^{r_0-1}}{k \, \||\, u \mid + \mid v \,|\||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\Big)^{\frac{m^*}{m^*-1}}dx$$

implicando da desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_0-1}}{k\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big)dx \leq P_1 M\left(\int_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big(\frac{|\ u\ |+|\ v\ |}{k^{\frac{1}{r_0-1}}\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}}\Big)^{m^*}dx\right)^{\frac{m^*-1}{r_0-1}},$$

para k suficientemente grande, onde

$$M=\Big(\int_{[|u|+|v|\leq 1]}\zeta_7(g(x))^{\frac{r_0-1}{r_0-m^*}}dx\Big)^{\frac{r_0-m^*}{r_0-1}}.$$

Segue agora de (3.33)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_0-1}}{k\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big)dx \leq \frac{P_1}{P_0}M\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{|\ u\ |+|\ v\ |}{k^{\frac{1}{r_0-1}}\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}}\Big)dx,$$

para k suficientemente grande, o que implica de (3.15)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_0-1}}{k\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}^{r_0-1}}\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\Big)dx \leq C_1\zeta_3\Big(\frac{1}{k^{\frac{1}{r_0-1}}}\Big)\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{|\ u\ |+|\ v\ |}{|||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}}\Big)dx \leq 1,$$

para k suficientemente grande. Mostrando assim que

$$\|\ (|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_0-1}g\chi_{[|u|+|v|\leq 1]}\ \|_{\widetilde{\Phi}_*}\leq k_0\ |||\ u\ |+|\ v\ |||_{\Phi_*}^{r_0-1},$$

para algum k_0 suficientemente grande.

Verificação de (ii) **e** (iv)**:** Primeiramente, mostraremos (ii). Da desigualdade (3.31), tem-se que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx \leq \int_{[|u|+|v|\geq 1]}\zeta_7(g)\widetilde{\Phi}_*\big((|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_1-1}\big)dx$$

donde segue de (3.36)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx \leq \int_\Omega \zeta_7(g)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{\frac{l^*(r_1-1)}{l^*-1}}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx \leq C_0\Big(\int_{[|u|+|v|\geq 1]}(|\ u\ |+|\ v\ |)^{l^*}dx\Big)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}},$$

onde

$$C_0=\Big(\int_\Omega \zeta_7(g)^{\frac{l^*-1}{l^*-r_1}}\Big)^{\frac{l^*-r_1}{l^*-1}},$$

logo por (3.34)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(x)(|\ u\ |+|\ v\ |)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx \leq \frac{C_0}{P_0}\Big(\int_\Omega \Phi_*(|\ u\ |+|\ v\ |)dx\Big)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}.$$

Segue da convexidade de Φ_*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(x)(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx &\leq C_2\Big(\Big(\int_\Omega \Phi_*(|\,u\,|)dx\Big)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}+\Big(\int_\Omega \Phi_*(|\,v\,|)dx\Big)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big)\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

mostrando assim (ii).

Observe agora que de (3.32), temos

$$\begin{aligned}\|\,g(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\,\|_{\widetilde{\Phi}_*} &\leq \zeta_6^{-1}\Big(\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(g(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\big)dx\Big),\\ &\leq \zeta_6^{-1}\Big(\int_{[|u|+|v|\geq 1]} \zeta_7(g)\widetilde{\Phi}_*\big((|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\big)dx\Big),\end{aligned}$$

implicando de (3.35)

$$\|\,g(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\,\|_{\widetilde{\Phi}_*}\leq \zeta_6^{-1}\Big(\int_{[|u|+|v|\geq 1]} \zeta_7(g)(|\,u\,|+|\,v\,|)^{\frac{l^*(r_1-1)}{l^*-1}}dx\Big).$$

Usando a desigualdade de Hölder e (3.33), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}\|\,g(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\,\|_{\widetilde{\Phi}_*} &\leq \zeta_6^{-1}\Big(C_3\Big[\int_{[|u|+|v|\geq 1]}(|\,u\,|+|\,v\,|)^{l^*}dx\Big]^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big),\\ &\leq \zeta_6^{-1}\Big(C_3\Big[\int_\Omega \Phi_*(|\,u\,|+|\,v\,|)dx\Big]^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big),\end{aligned}$$

a qual juntamente com a convexidade de Φ_*, implica em

$$\begin{aligned}\|\,g(|\,u\,|+|\,v\,|)^{r_1-1}\chi_{[|u|+|v|\geq 1]}\,\|_{\widetilde{\Phi}_*} &\leq \zeta_6^{-1}\Big(C_3\Big[\int_\Omega \Phi_*(|\,u\,|)dx\Big]^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}+\Big[\int_\Omega \Phi_*(|\,v\,|)dx\Big]^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big)\\ &\leq \zeta_6^{-1}\Big(C_3\zeta_3(\|\,u\,\|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}+C_3\zeta_3(\|\,v\,\|_{\Phi_*})^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}\Big),\end{aligned}$$

mostrando (iv).

Mostraremos agora que $F(x,.)\in Lip_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, para cada $x\in\Omega$. Com efeito, para cada $t_0\in\mathbb{R}$ e $r>0$, sejam $s_1,s_2\in(t_0-r,t_0+r)$. De forma análoga ao feito em (3.39), temos para cada $x\in\Omega$

$$\begin{aligned}|\,F(x,s_1)-F(x,s_2)\,| &\leq g(x)\left((|\,s_1\,|+|\,s_2\,|)^{r_0}+(|\,s_1\,|+|\,s_2\,|)^{r_1}\right)|\,s_1-s_2\,|\\ &\leq g(x)\left((2r+2t_0)^{r_0}+(2r+2t_0)^{r_1}\right)|\,s_1-s_2\,|\\ &= K(x,t_0,r)\,|\,s_1-s_2\,|,\end{aligned}$$

onde $K(x,t_0,r)=g(x)\left((2r+2t_0)^{r_0}+(2r+2t_0)^{r_1}\right)$. ■

Lema 3.11 *Existem $M_0, M_1 > 0$, verificando*

$$\int_\Omega F(x,u)dx \leq M_0\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_0}{m^*}} + M_1\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1}{l^*}}, \tag{3.40}$$

para qualquer $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$.

Demonstração. Observe primeiramente que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &= \int_{[u\geq 1]} F(x,u)dx + \int_{[0\leq u\leq 1]} F(x,u)dx\\ &\leq C\int_{[u\geq 1]} g(x) \mid u \mid^{r_1} dx + C\int_{[0\leq u\leq 1]} g(x) \mid u \mid^{r_0} dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &\leq C\Big(\int_\Omega \mid g(x) \mid^{\left(\frac{l^*}{r_1}\right)'} dx\Big)^{\frac{1}{\left(\frac{l^*}{r_1}\right)'}}\Big(\int_{[u\geq 1]} \mid u \mid^{l^*} dx\Big)^{\frac{r_1}{l^*}}\\ &+C\Big(\int_\Omega \mid g(x) \mid^{\left(\frac{m^*}{r_0}\right)'} dx\Big)^{\frac{1}{\left(\frac{m^*}{r_0}\right)'}}\Big(\int_{[0\leq u\leq 1]} \mid u \mid^{m^*} dx\Big)^{\frac{r_0}{m^*}}\end{aligned}$$

o que implica de (3.33) e (3.34)

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &\leq \frac{C_1}{P_0}\Big(\int_{[u\geq 1]} \Phi_*(u)dx\Big)^{\frac{r_1}{l^*}} + \frac{C_2}{P_0}\Big(\int_{[0\leq u\leq 1]} \Phi_*(u)dx\Big)^{\frac{r_0}{m^*}}\\ &\leq M_0\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_0}{m^*}} + M_1\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1}{l^*}},\end{aligned}$$

para qualquer $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$. ■

Mostraremos nos próximos lemas, que o funcional I_λ satisfaz as hipotéses do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ver Apêndice A).

Lema 3.12 *Para $\lambda > 0$, existem $\alpha, s_0 > 0$ tais que*

$$I_\lambda(u) > \alpha > 0,\ u \in W_0^1 L_\Phi\big(\Omega\big),\ \textit{com}\ \| \nabla u \|_\Phi = s,$$

para $s \in (0, s_0)$.

Demonstração. Seja $u \in W_0^1 L_\Phi\big(\Omega\big)$. Observe que

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - B(u) - \lambda F(x,u)dx\\ &\geq \zeta_0(\| \nabla u \|_\Phi) - b_1\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*}) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx.\end{aligned}$$

Segue do Lema 3.11 (ver Apêndice B),

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \zeta_0(\| \nabla u \|_\Phi) - b_1\zeta_3(\| u \|_{\Phi_*}) - \lambda M_0 \zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_0}{m^*}} - \lambda M_1 \zeta_3(\| u \|_{\Phi_*})^{\frac{r_1}{l^*}} \\ &\geq \zeta_0(\| \nabla u \|_\Phi) - b_1\zeta_3(K_0 \| \nabla u \|_\Phi) - \lambda M_0 \zeta_3(K_0 \| \nabla u \|_\Phi)^{\frac{r_0}{m^*}} - \lambda M_1 \zeta_3(K_0 \| \nabla u \|_\Phi)^{\frac{r_1}{l^*}}, \end{aligned}$$

donde

$$I_\lambda(u) \geq s^m - b_1(K_0 s)^{l^*} - \lambda M_0 (K_0 s)^{\frac{r_0 l^*}{m^*}} - \lambda M_1 (K_0 s)^{r_1},$$

para $\| \nabla u \|_\Phi = s < \min\left\{1, \dfrac{1}{K_0}\right\}$. Assim

$$I_\lambda(u) \geq s^m - (b_1 K_0)^{l^*} s^{l^*} - \lambda M_0 K_0^{\frac{r_0 l^*}{m^*}} s^{\frac{r_0 l^*}{m^*}} - \lambda M_1 K_0^{r_1} s^{r_1}, \tag{3.41}$$

para $\| \nabla u \|_\Phi = s < \min\left\{1, \dfrac{1}{K_0}\right\}$. Lembrando que

$$m < l^*, \; m < \frac{l^* r_0}{m^*} \text{ e } m < r_1,$$

segue de (3.41) que existem $\alpha, s_0 > 0$, verificando

$$I_\lambda(u) > \alpha > 0, \text{ para } \| \nabla u \|_\Phi = s \in (0, s_0),$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 3.13 *Sejam $\Omega_0 \subset \Omega$ um conjunto aberto satisfazendo (S_7) e $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que*

(i) $u_0 \geq 0, \; u_0 \not\equiv 0$;

(ii) $supp(u_0) \subset \Omega_0$.

Então, existe $t_0 = t_0(u_0) > 0$ tal que

$$I_\lambda(t_0 u_0) < 0.$$

Demonstração. Para cada $t > 0$, observe que

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu_0) &= \int_\Omega \Big(\Phi(t \mid \nabla u_0 \mid) - B(tu_0) - \lambda F(x, tu_0) \Big) dx \\ &\leq \zeta_1(t) \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_0 \mid) dx - b_0 \int_\Omega \Phi_*(tu_0) dx - \lambda \int_\Omega F(x, tu_0) dx \\ &\leq \zeta_1(t) \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_0 \mid) dx - b_0 \zeta_2(t) \int_\Omega \Phi_*(u_0) dx - \lambda \int_\Omega F(x, tu_0) dx, \end{aligned}$$

donde segue de (S_7)

$$I_\lambda(tu_0) \leq C_1 t^m - C_2 t^{l^*}, \; t \geq 1,$$

onde

$$C_1 = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_0 \mid)dx \text{ e } C_2 = b_0 \int_\Omega \Phi_*(\mid u_0 \mid).$$

Desde que $m < l^*$, concluimos que

$$I_\lambda(t_0 u_0) < 0,$$

para t_0 suficientemente grande. ■

Segue dos Lemas 3.12 à 3.13 que existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ verificando

$$I_\lambda(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c_\lambda \text{ e } m(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

isto é, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ (ver definição em Apêndice A). Verificaremos, através dos próximos resultados, que esta sequência $(PS)_c$ é limitada em $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Lema 3.14 $\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],\ \ x \in \Omega$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver Chang [25]. ■

Devido a descontinuidade apresentada no termo semi-linear do problema (3.1), foi preciso desenvolver o resultado a seguir, o qual acreditamos ser novo no contexto de espaços de Orlicz.

Teorema 3.2 *Sejam* Ω *um domínio aberto com fronteira suave,* Φ *uma N-função verificando* (S_1) *e* (S_2)*. Suponha ainda que* $f(x,t)$ *e* $F(x,t)$ *verificam as condições* (S_5), (S_6) *e* (S_8)*. Então o funcional* $J : L_{\Phi_*}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,\ \ u \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

é localmente Lipschitz e

$$\partial J(u) \subset \partial_u F(x,u) \ \ q.t.p.\ \ x \in \Omega.$$

Além disso, $\widehat{J} = J|_X \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *, onde* $X = D^{1,\Phi}(\Omega)$ *ou* $X = W^1 L_\Phi(\Omega)$*, e*

$$\partial \widehat{J}(u) = \partial J(u), u \in X.$$

Demonstração. Mostra-se de forma análoga ao feito na demonstração do Lema 3.10 que $J \in Lip_{loc}(L_{\Phi_*}(\Omega), \mathbb{R})$. Dados $u, v \in L_{\Phi_*}(\Omega)$, sejam $(\mu_n) \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ e $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$, com

$$\mu_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L_{\Phi_*}(\Omega) \text{ e } \delta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

verificando

$$\begin{aligned} J^0(u;v) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{J(u+\mu_n+\delta_n v)-J(u+\mu_n)}{\delta_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\delta_n}\int_\Omega \big(F(x,u+\mu_n+\delta_n v)-F(x,u+\mu_n)\big). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Mostraremos agora que

$$J^0(u;v) \le \int_\Omega F^0\left((x,u);v\right)dx.$$

Com efeito, definindo

$$F_n(v) = \frac{F(x,u+\mu_n+\delta_n v)-F(x,u+\mu_n)}{\delta_n},\ x\in\Omega,\ n\in\mathbb{N},$$

$$\theta_1(x) = \min\{u(x)+\mu_n(x), u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)\}\ x\in\Omega,\ n\in\mathbb{N}$$

e

$$\theta_2(x) = \max\{u(x)+\mu_n(x), u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)\}\ x\in\Omega,\ n\in\mathbb{N},$$

temos

$$F_n(v(x)) = \frac{1}{\delta_n}\int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x,t)dt,\ x\in\Omega,\ n\in\mathbb{N}.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, tem-se de (S_6) e (S_8)

$$\begin{aligned} \mid F_n(v)\mid &\le \frac{1}{\delta_n}\Big|\int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x,t)dt\Big| \\ &\le Cg(x)(2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{r_0-1}\mid v\mid\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|\le 1]} \\ &\quad +Cg(x)(2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{r_1-1}\mid v\mid\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|>1]},\ n\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde segue da desigualdade de Young (ver Teorema 2.5) que

$$\begin{aligned} \mid F_n(v)\mid &\le \widetilde{\Phi}_*\big(Cg[2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid]^{r_0-1}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|\le 1]}\big)+2\Phi_*(\mid v\mid) \\ &\quad +\widetilde{\Phi}_*\big(Cg(x)[2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid]^{r_1-1}\big)\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|>1]}, \end{aligned}$$

o que implica de (3.30), (3.34) e (3.35)

$$\begin{aligned} \mid F_n(v)\mid &\le \zeta_7(Cg(x))\widetilde{\Phi}_*\big((2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{r_0-1}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|\le 1]}\big), \\ &\le 2\Phi_*(\mid v\mid)+\zeta_7(Cg(x))\widetilde{\Phi}_*\big((2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{r_1-1}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|>1]}\big) \\ &\le P_1\zeta_7(Cg(x))(2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{\frac{m^*(r_0-1)}{m^*-1}}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|\ge 1]} \\ &\quad +P_1\zeta_7(Cg(x))(2\mid u\mid+2\mid\mu_n\mid+\mid v\mid)^{\frac{l^*(r_1-1)}{l^*-1}}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|>1]}+2\Phi_*(\mid v\mid). \end{aligned}$$

Utilizando agora a desigualdade de Young para os espaços de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}| F_n(v) | \ &\leq \ C_1\zeta_7(Cg)^{\frac{m^*-1}{m^*-r_0}} + (2\mid u\mid +2\mid v\mid + \mid \mu_n\mid)^{m^*}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|\leq 1]} \\ &+C_2\zeta_7(Cg)^{\frac{l^*-1}{l^*-r_0}} + (2\mid u\mid +2\mid v\mid + \mid \mu_n\mid)^{l^*}\chi_{[2|u|+2|\mu_n|+|v|>1]} + 2\Phi_*(\mid v\mid),\end{aligned}$$

donde segue de (3.32), (3.33) e da convexidade de Φ_*, que

$$| F_n(v) |\leq \xi(x) + C_1\Phi_*(\mid u\mid) + C_2\Phi_*(\mid \mu_n\mid) + C_3\Phi_*(\mid v\mid),\ n\in\mathbb{N}, \tag{3.43}$$

onde $\xi\in L^\infty(\Omega)$. Desde que

$$\mu_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L_{\Phi_*}(\Omega),$$

temos

$$\Phi_*(\mid \mu_n\mid) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^1(\Omega),$$

e portanto da teoria de medida e integração

$$\Phi_*(\mid \mu_n\mid)(x)\leq \mu(x) \text{ q.t.p. } x\in\Omega \text{ e } n\in\mathbb{N}, \tag{3.44}$$

para algum $\mu\in L^1(\Omega)$. De (3.43) e (3.44)

$$| F_n(v) |\leq \xi(x) + C_1\Phi_*(\mid u\mid) + C_2\Phi_*(\mid v\mid) + C_3\mu \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

com $\xi(x) + C_1\Phi_*(\mid u\mid) + C_2\Phi_*(\mid v\mid) + C_3\mu\in L^1(\Omega)$. Deste fato, temos pelo Lema de Fatou

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega F_n(v)dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} F_n(v)dx,$$

donde segue-se, da definição de $F^0((x,u);v)$, que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega F_n(v)dx \leq \int_\Omega F^0((x,u);v)dx. \tag{3.45}$$

De (3.42) e (3.45)

$$J^0(u;v)\leq \int_\Omega F^0\left((x,u);v\right)dx,$$

como queriamos mostrar. Sabendo disto, usando a Observação A.0.2 (ver Apêndice A), ficamos com

$$J^0(u;v)\leq \int_\Omega \max\{\langle\xi, v(x)\rangle; \xi\in\partial_u F((x,u);v)\}dx,$$

implicando do Lema 3.14

$$J^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u)vdx + \int_{[v>0]} \overline{f}(x,u)vdx. \tag{3.46}$$

Verificaremos agora que

$$\partial J(u) \subset \partial_u F(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sabe-se que $\partial J(u) \subset (L_{\Phi_*}(\Omega))^*$. Além disso, pelo Teorema 2.6 tem-se que $(L_{\Phi_*}(\Omega))^* = L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. Assim, dado um funcional $\widehat{\psi} \in \partial J(u)$, existe uma função $\psi \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$, satisfazendo

$$\langle \widehat{\psi}, v \rangle = \int_\Omega \psi v dx, \ v \in L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Afim de simplificarmos a notação, indentificaremos o funcional $\widehat{\psi}$ com a função ψ. Visto isto dado $\psi \in \partial J(u)$ afirmamos que

$$\psi(x) \geq \underline{f}(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Com efeito, suponhamos que exista $A \subset \Omega$, $\mid A \mid > 0$, com

$$\psi(x) < \underline{f}(x,u) \text{ q.t.p. } x \in A.$$

Neste caso

$$\int_A \psi(x)dx < \int_A \underline{f}(x,u)dx. \tag{3.47}$$

Considerando $\overline{v} = -\chi_A$, temos $\overline{v} \in L_{\Phi_*}(\Omega)$, além disso de (3.46)

$$-\int_A \psi dx \;\; = \;\; \int_\Omega \psi \overline{v} dx \leq J^0(u, \overline{v}) \leq \int_\Omega \underline{f}(x,u)\overline{v}dx = -\int_A \underline{f}(x,u)dx,$$

donde

$$\int_A \psi dx \geq \int_A \underline{f}(x,u)dx,$$

contradizendo (3.47). Provando assim que

$$\underline{f}(x,u) \leq \psi(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.48}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\psi(x) \leq \overline{f}(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.49}$$

De (3.48) e (3.49), conclui-se que

$$\underline{f}(x,u) \leq \psi(x) \leq \overline{f}(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

implicando pelo Lema 3.14

$$\psi(x) \in \partial_u F(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Portanto

$$\partial J(u) \subset \partial_u F(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Suponha que X seja igual a $D^{1,\Phi}(\Omega)$ ou igual a $W^{1,\Phi}(\Omega)$. De forma análoga ao feito na demonstração do Lema 3.10, mostra-se que $\widehat{J} = J|_X \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$. Neste caso, observe que

$$X \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega)$$

e

$$C_0^\infty(\Omega) \subset X \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$$

(ver Capítulo 2). Desde que $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\Phi_*}} = L_{\Phi_*}(\Omega)$ (ver Proposição 2.5), tem-se

$$\overline{X}^{\|\cdot\|_{\Phi_*}} = L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Visto isto, segue do Teorema A.3 (ver Apêndice A)

$$\partial\widehat{J}(u) = \partial J(u), \; u \in X,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.15 *Para cada* $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$,

$$\partial J_3(u) \subset \partial F_u(x,u) \; q.t.p. \; x \in \Omega.$$

Consequentemente dado $\rho \in \partial J_3(u)$, *tem-se que* $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$,

$$| \rho(x) | \leq \max\{| \underline{f}(x,u) |, | \overline{f}(x,u) |\} \; q.t.p. \; x \in \Omega$$

e

$$\rho(x) = 0, \; x \in [u \leq 0].$$

Demonstração. Desde que Ω é um domínio limitado, temos

$$D^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^1 L_\Phi(\Omega).$$

Deste fato, segue do Teorema 3.2 que para cada $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

$$\partial J_3(u) \subset \partial_u F(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sabendo disto, para cada $\rho \in \partial J_3(u)$ temos pelo Lema 3.14

$$\underline{f}(x,u) \leq \rho(x) \leq \overline{f}(x,u) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

donde segue-se que

$$\mid \rho(x) \mid \leq \max\{\mid \underline{f}(x,u) \mid, \mid \overline{f}(x,u) \mid\} \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Além disso, conclui-se pelo fato de $(L_{\Phi_*}(\Omega))^* = L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$, que $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. Recordando que

$$f(x,u) = 0, \ x \in [u \leq 0],$$

temos

$$\underline{f}(x,u) = \overline{f}(x,u) = 0, \ x \in [u \leq 0],$$

implicando pelo Lema 3.14 que

$$\rho(x) = 0, \ x \in [u \leq 0],$$

como queriamos demonstrar. ■

Lema 3.16 *Dado qualquer* $\tau > 0$ *e* $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$*, temos*

$$\Big| \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{\tau}\langle \rho, u\rangle \Big| \leq M_1 \Big(\int_\Omega \Phi_*(u)dx \Big)^{\frac{r_0}{m^*}} + M_2 \Big(\int_\Omega \Phi_*(u)dx \Big)^{\frac{r_1}{l^*}},$$

para cada $\rho \in \partial J_3(u)$.

Demonstração. Sejam $\tau > 0$ e $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Dado $\rho \in \partial J_3(u)$, observe que

$$\Big| \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{\tau}\langle \rho, u\rangle \Big| = \Big| \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{\tau} \int_\Omega \rho(x) u dx \Big|, \tag{3.50}$$

pois

$$\partial J_3(u) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega).$$

Assim

$$\Big|\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{\tau}\langle\rho,u\rangle\Big| \;\leq\; \int_\Omega |\,F(x,u)\,|\,dx+\frac{1}{\tau}\int_\Omega |\,\rho(x)\,||\,u\,|\,dx,$$

o que implica de (S_8) e Lema 3.15

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{\tau}\langle\rho,u\rangle\Big| &\leq \int_\Omega |\,F(x,u)\,|\,dx+\frac{C}{\tau}\int_\Omega |\,F(x,u)\,|\,dx\\ &\leq \left(1+\frac{C}{\tau}\right)\int_\Omega |\,F(x,u)\,|\,dx,\end{aligned}$$

daí por (S_6)

$$\Big|\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{\tau}\langle\rho,u\rangle\Big|\leq C_\tau\Big(\int_\Omega |\,g\,||\,u\,|^{r_0}\,\chi_{[|u|\leq 1]}dx+\int_\Omega |\,g\,||\,u\,|^{r_1}\,\chi_{[|u|\geq 1]}dx\Big).$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{\tau}\langle\rho,u\rangle\Big| &\leq C_\tau\Big[\Big(\int_\Omega |\,g\,|^{\frac{m^*}{m^*-r_0}}\Big)^{\frac{m^*-r_0}{m^*}}\Big(\int_{[|u|\leq 1]} |\,u\,|^{m^*}\Big)^{\frac{r_0}{m^*}}\\ &+\Big(\int_\Omega |\,g\,|^{\frac{l^*}{l^*-r_1}}\Big)^{\frac{l^*-r_1}{l^*}}\Big(\int_{[|u|\geq 1]} |\,u\,|^{l^*}\Big)^{\frac{r_1}{l^*}}\Big],\end{aligned}$$

obtendo

$$\Big|\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{\tau}\langle\rho,u\rangle\Big|\leq M_1\Big(\int_\Omega \Phi_*(u)dx\Big)^{\frac{r_0}{m^*}}+M_2\Big(\int_\Omega \Phi_*(u)dx\Big)^{\frac{r_1}{l^*}},$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 3.17 *Se $(u_n)\subset W_0^1L_\Phi(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_c$ para I_λ, então (u_n) é limitada em $W_0^1L_\Phi(\Omega)$.*

Demonstração. Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, tem-se

$$I_\lambda(u_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c_\lambda \text{ e } m(u_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

com

$$m(u_n)=\min\{\|\,\xi\,\|_{W_0^1L_\Phi(\Omega)^*};\xi\in\partial I_\lambda(u_n)\}.$$

Considere $w_n\in\partial I_\lambda(u_n)$ verificando

$$\|\,w_n\,\|_{W_0^1L_\Phi(\Omega)^*}=m(u_n).$$

Recordando que $I_\lambda=J_1-J_2-\lambda J_3$, e sendo $J_1,J_2\in C^1(X,\mathbb{R})$, temos (ver propriedades (P_3) e (P_4) em Apêndice A)

$$\begin{aligned}\partial I_\lambda(u_n) &= \partial J_1(u_n)-\partial J_2(u_n)-\partial\left(\lambda J_3\right)(u_n)\\ &= \{J_1'(u_n)\}-\{J_2'(u_n)\}-\lambda\partial J_3(u_n).\end{aligned}$$

Sabendo disto, tem-se pelo Lema B.1 (ver Apêndice B)

$$\langle w_n, u_n\rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega b(u_n)u_n^2 dx - \lambda\langle \rho_n, u_n\rangle,$$

para algum $\rho_n \in \partial J_3(u_n)$. Deste fato, para cada $\tau \in (m, l^*)$, temos de (S_2) e (S_3)

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle &= \int_\Omega \Big(\Phi(|\nabla u_n|) - \frac{1}{\tau}\phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\Big)dx \\ &\quad - \int_\Omega \Big(B(u_n) - \frac{1}{\tau}b(u_n)u_n^2\Big)dx - \lambda\Big(\int_\Omega F(x,u_n)dx - \frac{1}{\tau}\langle \rho_n, u_n\rangle\Big) \\ &\geq \Big(1 - \frac{m}{\tau}\Big)\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)dx - \Big(1 - \frac{l^*}{\tau}\Big)\int_\Omega B(u_n)dx \\ &\quad -\lambda\Big|\int_\Omega F(x,u_n)dx - \frac{1}{\tau}\langle \rho_n, u_n\rangle\Big|. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando o Lema 3.16, (S_2), (S_4) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle &\geq \Big(1 - \frac{m}{\tau}\Big)\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)dx - \Big(1 - \frac{l^*}{\tau}\Big)\int_\Omega B(u_n)dx \\ &\quad -M_1\Big(\int_\Omega \Phi_*(u_n)dx\Big)^{\frac{r_0}{m^*}} - M_2\Big(\int_\Omega \Phi_*(u_n)dx\Big)^{\frac{r_1}{l^*}} \\ &\geq \Big(1 - \frac{m}{\tau}\Big)\zeta_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \Big(\frac{l^*}{\tau} - 1\Big) b_0 \int_\Omega \Phi_*(u_n)dx \\ &\quad -M_1\Big(\int_\Omega \Phi_*(u_n)dx\Big)^{\frac{r_0}{m^*}} - M_2\Big(\int_\Omega \Phi_*(u_n)dx\Big)^{\frac{r_1}{l^*}}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Desde que

$$0 < \frac{r_0}{m^*} < 1 \text{ e } 0 < \frac{r_1}{l^*} < 1,$$

temos que a função

$$h(t) = \Big(\frac{l^*}{\tau} - 1\Big) b_0 t - \lambda M_1 t^{\frac{r_0}{m^*}} - \lambda M_2 t^{\frac{r_1}{l^*}},\ t \geq 0$$

é limitada inferiormente em $\mathbb{R}_+$, já que $h(t)$ é contínua e $h(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Sendo assim, podemos definir

$$h_0 = \inf_{t\geq 0} h(t) > -\infty. \tag{3.53}$$

De (3.52) e (3.53)

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle \geq \Big(1 - \frac{m}{\tau}\Big)\zeta_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + h_0. \tag{3.54}$$

Por outro lado, desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle \leq C_1 + C_2\,\|\nabla u_n\|_\Phi, \tag{3.55}$$

para n suficientemente grande. Tem-se de (3.54) e (3.55)

$$\Big(1-\frac{m}{\tau}\Big)\,\zeta_0(\parallel \nabla u_n \parallel_\Phi)+h_0 \leq C_1 + C_2 \parallel u_n \parallel_\Phi,$$

para n suficientemente grande. Mostrando assim que a sequência (u_n) é limitada. ■

Corolário 3.1 *As sequências*

$$\{\parallel u_n \parallel_{\Phi_*}\},\ \Big\{\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n\ |)dx\Big\}\ e\ \Big\{\int_\Omega \Phi_*(|\ u_n\ |)dx\Big\}$$

são limitadas.

Demonstração. Sendo (u_n) limitada, este corolário segue imediatamente das desigualdades (2.23), (3.11) e (3.16). ■

Foi visto através dos Lemas 3.12 e 3.13 que o funcional I_λ possui geometria do passo da montanha. Agora verificaremos que a família de funcionais $(I_\lambda)_\lambda$, possui a seguinte propriedade:

Lema 3.18 *Seja $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ considerada no Lema 3.13. Então*

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0) \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Consequentemente,

$$c_\lambda \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1} I_\lambda\big(\gamma(t)\big),$$

$$\Gamma = \Big\{\gamma \in C\big([0,1];W_0^1L_\Phi(\Omega)\big);\gamma(0)=0\ e\ \gamma(1)=t_0u_0\Big\},$$

e $t_0>0$ é a constante obtida no Lema 3.13.

Demonstração. Para cada $\lambda>0$, temos de (S_7)

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu_0) &= \int_\Omega \Phi(t\mid \nabla u_0 \mid)dx - \int_\Omega B(tu_0)dx - \lambda\int_\Omega F(x,tu_0)dx \\ &\leq \int_\Omega \Phi(t\mid \nabla u_0 \mid)dx - \int_\Omega B(tu_0)dx \\ &\leq \zeta_1(t)\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_0\ |)dx - b_0\zeta_2(t)\int_\Omega \Phi_*(u_0)dx. \end{aligned}$$

Assim

$$I_\lambda(tu_0) \leq k_1\zeta_1(t) - k_2\zeta_2(t), \tag{3.56}$$

onde

$$k_1 = \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_0\ |)dx \text{ e } k_2 = b_0 \int_\Omega \Phi_*(u_0)dx.$$

Mostrando que

$$I_\lambda(tu_0) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Considerando

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0) = I_\lambda(t_\lambda u_0), \tag{3.57}$$

obtemos do Lema 3.12 que $I_\lambda(t_\lambda u_0) > 0$. Seja (λ_n) uma sequência, verificando

$$\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Afirmamos que (t_{λ_n}) é uma sequência limitada. Com efeito, suponha que (t_{λ_n}) não seja limitada, isto é, que a menos de subsequência

$$t_{\lambda_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Por (3.56),

$$\begin{aligned} 0 < \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n}(tu_0) &= I_{\lambda_n,a}(t_{\lambda_n}u_0) \leq c_1\zeta_1(t_{\lambda_n}) - c_2\zeta_2(t_{\lambda_n}) \\ &= c_1 t_{\lambda_n}^m - c_2 t_{\lambda_n}^{m^*} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, (t_{λ_n}) é limitado. Suponha agora que $t_{\lambda_n} > k_0 > 0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 < \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n}(tu_0) &= I_{\lambda_n,a}(t_{\lambda_n}u_0) \\ &= \int_\Omega \Big(\Phi(|\ \nabla t_{\lambda_n}u_0\ |) - B(t_{\lambda_n}u_0) - \lambda_n F(x, t_{\lambda_n}u_0)\Big)dx \\ &\leq \zeta_1(t_{\lambda_n}) \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_0\ |)dx - b_0\zeta_2(t_{\lambda_n}) \int_\Omega \Phi_*(u_0)dx - \lambda_n \int_\Omega F(x, t_{\lambda_n}u_0)dx \\ &\leq K_1 \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_0\ |)dx - K_2 \int_\Omega \Phi_*(u_0)dx - \lambda_n \int_{\overline{\Omega}_0} F(x, t_{\lambda_n}u_0)dx \end{aligned}$$

implicando de (S_7) que

$$0 < \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n}(tu_0) \leq K_1 \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_0\ |)dx - K_2 \int_\Omega \Phi_*(u_0)dx - \lambda_n K_0 \mid \overline{\Omega}_0 \mid,$$

logo

$$0 < \max_{t\geq 0} I_{\lambda_n}(tu_0) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

o que é uma contradição. Portanto,

$$t_{\lambda_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde seque-se de (3.57)

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0) \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou ainda

$$c_\lambda \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queriamos mostrar. ■

3.3 Convergência da sequência Palais-Smale

Seja (u_n) a sequência $(PS)_c$ obtida nas seções anteriores. Vimos através do Lema 3.17, que (u_n) é limitada em $W_0^1L_\Phi(\Omega)$. Segue do fato de $W_0^1L_\Phi(\Omega)$ ser um espaço reflexivo os seguintes limites

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^1L_\Phi(\Omega), \tag{3.58}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L_{\Phi_*}(\Omega), \tag{3.59}$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),\ i \in \{1, ..., N\}, \tag{3.60}$$

a menos de subsequência.

Considerando

$$K(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N); supp(u) \text{ é compacto em } \mathbb{R}^N\}$$

e

$$BC(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N); \mid u \mid_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \mid u(x) \mid < +\infty\},$$

definamos $C_0(\mathbb{R}^N)$ como sendo o fecho do espaço $K(\mathbb{R}^N)$ com relação a norma uniforme do espaço $BC(\mathbb{R}^N)$. Seja

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) = \text{o espaço das medidas finitas sobre } \mathbb{R}^N,$$

munido da norma

$$\parallel \mu \parallel_{\mathcal{M}} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} ud\mu; u \in C_0(\mathbb{R}^N), \mid u \mid_\infty = 1\right\}.$$

Tem-se de uma versão do Teorema da Representação de Riesz, que o dual do espaço $C_0(\mathbb{R}^N)$ pode ser indentificado de maneira única com o espaço $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Definição 3.3 *Diz-se que uma sequência de medidas* (μ_n) *converge fraco para* μ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$*, isto é*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

quando

$$\int_{\mathbb{R}^N} ud\mu_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} ud\mu, \; u \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 3.4 *Uma sequência de medidas finitas em* $\mathbb{R}^N$*, possui subsequência convergente.*

Demonstração. Confira Willem [55]. ■

Para $n \in \mathbb{N}$, considere $\widehat{\mu}_n, \widehat{\nu}_n : C_0(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ funcionais dados por

$$\langle \widehat{\mu}_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)vdx \text{ e } \langle \widehat{\nu}_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u_n)vdx, \; v \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Perceba que estamos estendendo a função u_n para $\mathbb{R}^N$, da seguinte forma:

$$u_n(x) = \begin{cases} u_n(x), \; x \in \Omega \\ 0, \; c.c. \end{cases}$$

Note que $\widehat{\mu}_n, \widehat{\nu}_n$ são funcionais lineares contínuos. Segue do Corolário 3.1, que existem $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\mu}_n, v\rangle| &\leq |v|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \\ &\leq k_1 |v|_\infty, \; n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\nu}_n, v\rangle| &\leq |v|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u_n)dx \\ &\leq k_2 |v|_\infty, \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sendo assim as sequências $(\widehat{\mu}_n)$ e $(\widehat{\nu}_n)$ são limitadas sobre o espaço dual de $C_0(\mathbb{R}^N)$. Segue do Teorema 3.4, que existem $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$\Phi(|\nabla u_n|) \rightharpoonup \mu \text{ e } \Phi_*(u_n) \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{3.61}$$

a menos de subsequência. Além destas convergências, temos ainda

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_\Phi(\Omega), \tag{3.62}$$

e

$$u_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.63}$$

Visto estas convergências, caminharemos agora com o objetivo de justificar que $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ é uma solução não-trivial do problema (3.1). Para isto, mostraremos a seguir alguns lemas, com a finalidade de mostrar que o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Lema 3.19 *(i) Existem*

- *um conjunto enumerável J;*
- *uma família $\{x_j\}_{j\in J}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^N$;*
- *uma família de constantes $\{\nu_j\}_{j\in J}$, $\nu_j \geq 0$, tais que*

$$\nu = \Phi_*(| u |) + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde δ_{x_j} é a medida de Dirac concentrada no ponto x_j.

(ii) Além disso

$$\mu \geq \Phi(| \nabla u |) + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

para algum $\{\mu_j\}_{j\in J}$, $\mu_j \geq 0$, satisfazendo

$$\nu_j \leq \max\{S_N^{l^*} \mu_j^{\frac{l^*}{l}}, S_N^{m^*} \mu_j^{\frac{m^*}{l}}, S_N^{l^*} \mu_j^{\frac{l^*}{m}}, S_N^{m^*} \mu_j^{\frac{m^*}{m}}\},$$

para todo $j \in J$.

Demonstração. Confira Fukagai et al [32]. ■

Lema 3.20 *Fixado $\lambda > 0$, a sequência $(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n)$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$, onde $(\rho_n) \subset \partial J_3(u_n)$.*

Demonstração. Segue de (S_3) e (S_4)

$$b(t)t^2 \leq m^* B(t) \leq b_1 m^* \Phi_*(t), t \geq 0.$$

Deste fato do Lema 3.9 (iii), temos

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*(b(u_n)u_n)dx \leq \zeta_7(b_1 m^*) \int_\Omega \Phi_*(u_n)dx \leq c_0,$$

para algum $c_0 > 0$, pois (u_n) é limitada em $L_{\Phi_*}(\Omega)$. Sendo assim, conclui-se do Lema 3.3 que a sequência $(b(u_n)u_n)$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. Mostraremos agora que (ρ_n) é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. Usando o Lema 3.15, (S_6) e (S_8)

$$\begin{aligned} \mid \rho_n \mid \ \leq \ & Cg(x) \mid u_n(x) \mid^{r_0-1} \chi_{[|u_n|\leq 1]}(x) \\ & + Cg(x) \mid u_n(x) \mid^{r_1-1} \chi_{[|u_n|\geq 1]}(x), \ x \in \Omega, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Foi visto na demonstração do Lema 3.10, que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_* \left(g(x) \mid v \mid^{r_0-1} \chi_{[|v|\leq 1]} \right) dx \leq C_1 \left(\int_\Omega \Phi_*(\mid v \mid) dx \right)^{\frac{r_0-1}{m^*-1}}, \ v \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

e

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_* \left(g(x) \mid v \mid^{r_1-1} \chi_{[|v|\geq 1]} \right) dx \leq C_2 \left(\int_\Omega \Phi_*(\mid v \mid) dx \right)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}}, \ v \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

para algum $C_1, C_2 > 0$. Consequentemente por (3.64)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*(\mid \rho_n \mid) dx \leq \widehat{C}_1 \left(\int_\Omega \Phi_*(u_n) dx \right)^{\frac{m^*-1}{r_0-1}} + \widehat{C}_2 \left(\int_\Omega \Phi_*(u_n) dx \right)^{\frac{r_1-1}{l^*-1}} \leq C_0, \ n \in \mathbb{N},$$

para algum $C_0 > 0$. Mostrando assim que (ρ_n) é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$.

Portanto, para cada $\lambda > 0$ fixo, conclui-se que a sequência $(b(u_n)u_n + \lambda \rho_n)$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. ■

Lema 3.21 *Seja J o conjunto enumerável obtido no Lema 3.19. Então o subconjunto*

$$\widetilde{J} = \{ j \in J; \nu_j > 0 \},$$

é finito.

Demonstração. Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

- $0 \leq \psi \leq 1$,
- $\psi(x) = \begin{cases} 1, & \mid x \mid \leq 1 \\ 0, & \mid x \mid \geq 2. \end{cases}$

Fixando x_j, para algum $j \in \widetilde{J}$, defina para cada $\epsilon > 0$

$$\psi_\epsilon(x) = \psi\Big(\frac{x - x_j}{\epsilon} \Big), \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Note que a sequência $(\psi_\epsilon u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado em $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, para cada $\epsilon > 0$ fixo. Desde que

$$m(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

temos de (S_3) e (S_8)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla(\psi_\epsilon u_n)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n^2\psi_\epsilon dx+\lambda\langle\rho_n,u_n\psi_\epsilon\rangle+o_n(1)\\ &\leq b_1m^*\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(u_n)\psi_\epsilon dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n u_n\psi_\epsilon dx+o_n(1)\\ &= b_1m^*\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(u_n)\psi_\epsilon dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|\rho_n u_n\psi_\epsilon|\,dx,\end{aligned}$$

consequentemente pelo Lema 3.15 e (S_8),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla(\psi_\epsilon u_n)dx &\leq b_1m^*\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(u_n)\psi_\epsilon dx+\lambda C\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u_n)|\,\psi_\epsilon dx\\ &\quad +o_n(1).\end{aligned}\tag{3.65}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u_n)|\,\psi_\epsilon dx\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u)|\,\psi_\epsilon dx.$$

Desde que

- $\big(\,|F(x,u_n)|\,\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$ (mostra-se de forma análoga ao feito na demonstração do Lema 3.20),
- $|F(x,u_n)|\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|F(x,u)|$ q.t.p. $x\in\mathbb{R}^N$,

temos por Brézis e Lieb para N-funções, desenvolvido no Capítulo 2

$$|F(x,u_n)|\rightharpoonup|F(x,u)|\ \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N),$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u_n)|\,\psi_\epsilon dx\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u)|\,\psi_\epsilon dx,$$

já que $\psi_\epsilon\in L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, de (3.65)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla u_n\nabla(\psi_\epsilon u_n)dx &\leq b_1m^*\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(u_n)\psi_\epsilon dx\\ &\quad +\lambda C\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,u)|\,\psi_\epsilon dx+o_n(1).\end{aligned}\tag{3.66}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla(\psi_\epsilon u_n)dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,\psi_\epsilon dx\\ &\quad +\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\\ &\geq l\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla u_n|)\psi_\epsilon dx\\ &\quad +\int_{\mathbb{R}^N}u_n\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Do Lema 3.9(i), conclui-se que a sequência $\big(\phi(|\ \nabla u_n\ |)\ |\ \nabla u_n\ |\ \big)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$, e assim a sequência $\big(\phi(|\ \nabla u_n\ |)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}\big)_{n\in\mathbb{R}}$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$, para cada $i\in\{1,...,N\}$. Logo

$$\phi\left(|\ \nabla u_n\ |\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\rightharpoonup w_i \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N), \tag{3.68}$$

a menos de subsequência, para algum $w_i\in L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$. Sejam $f_n^i, f^i: L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ dois funcionais lineares contínuos dados por

$$\langle f_n^i,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}u_n dx \text{ e } \langle f^i,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}u dx,\ \varphi\in L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N),$$

onde $i\in\{1,...,N\}$ e $n\in\mathbb{N}$. Para cada $i\in\{1,...,N\}$, temos

$$\begin{aligned}|\ \langle f_n^i-f^i,\varphi\rangle\ | &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}(u_n-u)dx\right|\\ &\leq \left\|\varphi\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\right\|_{\widetilde{\Phi}}\|\ u_n-u\ \|_{\Phi},\end{aligned}$$

donde

$$|\ \langle f_n^i-f^i,\varphi\rangle\ |\leq\left|\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\right|_\infty\|\ \varphi\ \|_{\widetilde{\Phi}}\|\ u_n-u\ \|_{\Phi},$$

o que implica de (3.62)

$$\begin{aligned}\|\ f_n^i-f^i\ \|_{L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)^*} &= \sup\{|\ \langle f_n^i-f^i,\varphi\rangle\ |;\|\ \varphi\ \|_{\widetilde{\Phi}}=1,\ \varphi\in L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)\}\\ &\leq \left|\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\right|_\infty\|\ u_n-u\ \|_{\Phi}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

mostrando que

$$f_n^i\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)^*. \tag{3.69}$$

De (3.68) e (3.69)

$$\langle f_n^i,\phi(|\ \nabla u_n\ |)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\rangle\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\langle f^i,w_i\rangle,$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\ \nabla u_n\ |)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}u_n dx\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^N}w_i\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}u dx,\ i\in\{1,...,N\}. \tag{3.70}$$

Considerando $w=(w_1,...,w_N)$, tem-se

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(u_n\phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon-uw\nabla\psi_\epsilon\big)dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(u_n\phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n-uw\big)\nabla\psi_\epsilon dx\Big|\\ &\leq \sum_{i=1}^N\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(u_n\phi(|\ \nabla u_n\ |)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-w_i u\big)\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}dx\Big|\end{aligned}$$

donde segue de (3.70) que

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} \big(u_n \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon - uw\nabla\psi_\epsilon\big)dx\Big| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.71}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)u_n \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} uw\nabla\psi_\epsilon dx = o_n(1). \tag{3.72}$$

De (3.67) e (3.72)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla(\psi_\epsilon u_n)dx \geq l\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)\psi_\epsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} uw\nabla\psi_\epsilon dx + o_n(1). \tag{3.73}$$

Agora de (3.66) e (3.73)

$$\begin{aligned} l\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)\psi_\epsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} uw\nabla\psi_\epsilon \quad &\leq \quad b_1 m^* \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(|u_n|)\psi_\epsilon dx \\ &\quad + \lambda C \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,u)|\psi_\epsilon dx + o_n(1), \end{aligned} \tag{3.74}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} l\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)\psi_\epsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} uw\nabla\psi_\epsilon dx \quad &\leq \quad b_1 m^* \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(|u_n|)\psi_\epsilon dx + o_n(1) \\ &\quad + \lambda C \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,u)|\psi_\epsilon dx. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos de (3.61)

$$l\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} (w\nabla\psi_\epsilon)udx \leq b_1 m^* \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\nu + \lambda C\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,u)|\psi_\epsilon dx + o_n(1) \tag{3.76}$$

Do Lema 3.20, existe $\eta \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$b(u_n)u_n + \lambda\rho_n \rightharpoonup \eta \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N). \tag{3.77}$$

Assim, passando ao limite de $n \to +\infty$ na seguinte igualdade

$$o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} (b(u_n)u_n + \lambda\rho_n)vdx, \; v \in W_0^1 L_\Phi(\mathbb{R}^N),$$

temos de (3.68) e (3.77)

$$\int_{\mathbb{R}^N} w\nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} \eta v dx = 0, \; v \in W_0^1 L_\Phi(\mathbb{R}^N).$$

Em particular para $v = u\psi_\epsilon$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} w\nabla(u\psi_\epsilon)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \eta u\psi_\epsilon = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(w\nabla\psi_\epsilon)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta u\psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon w\nabla u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\eta u - w\nabla u)\psi_\epsilon dx. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Desde que

- $\mid (\eta u - w\nabla u)\psi_\epsilon \mid \leq \mid \eta \mid\mid u \mid + \mid w \mid\mid \nabla u \mid \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- $(\eta u - w\nabla u)\psi_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$,

temos pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\eta u - w\nabla u)\psi_\epsilon dx \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

de onde concluímos por (3.78)

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(w\nabla\psi_\epsilon)dx \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.79}$$

Sabendo que

- $\mid F(x,u)\psi_\epsilon \mid \leq \mid F(x,u) \mid \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- $\mid F(x,u) \mid \psi_\epsilon(x) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$,

temos do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid F(x,u) \mid \psi_\epsilon(x)dx \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.80}$$

Considerando

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_j\}, \end{cases}$$

temos

$$\psi_\epsilon(x) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \psi(x) \text{ pontualmente em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso

$$\psi_\epsilon(x) \leq \chi_{B_1(x_j)}(x),$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Sabendo disto, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\mu \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \psi d\mu = \mu(\{x_j\}) = \mu_j, \tag{3.81}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\nu \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \psi d\nu = \nu_j.$$

Passando ao limite de $\epsilon \to 0$ em (3.76), obtemos de (3.78) à (3.81)

$$l\mu_j \leq b_1 m^* \nu_j,\ j \in \widetilde{J}, \tag{3.82}$$

donde segue do Lema 3.19 que

$$l\mu_j \leq c_1 \mu_j^\alpha,$$

para algum α verificando

$$1 < \alpha \in \left\{\frac{l^*}{l}, \frac{m^*}{l}, \frac{l^*}{m}, \frac{m^*}{m}\right\}$$

e $c_1 > 0$. Deste fato,

$$0 < l \leq c_1 \mu_j^{\alpha-1},\ j \in \widetilde{J}.$$

Mostrando assim que

$$\mu_j \geq c_0,\ j \in \widetilde{J}, \tag{3.83}$$

para algum $c_0 > 0$. De (3.82) e (3.83)

$$\nu_j \geq \widehat{c}_0,\ j \in \widetilde{J}, \tag{3.84}$$

para algum $\widehat{c}_0 > 0$.

Podemos concluir agora que J é finito, pois do contrário, teriamos

$$\sum_{j\in\widetilde{J}} \nu_j > \sum_{j\in\widetilde{J}} \widehat{c}_0 = +\infty,$$

contradizendo o fato de ν ser uma medida finita. ■

Verificaremos a seguir que na verdade o conjunto $\widetilde{J}$ é vazio, para $\lambda > 0$ suficientemente grande, fato este não percebido em [32].

Lema 3.22 *$\widetilde{J}$ é vazio, para $\lambda > 0$ suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ a sequência $(PS)_c$, obtida nas seções anteriores e $(w_n) \subset \partial I_\lambda(u_n)$ tal que $\| w_n \|_{W_0^1 L_\Phi(\Omega)^*} = m(u_n)$. Para cada $\tau \in (m, l^*)$, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle &= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx - \frac{1}{\tau}\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{\tau}\int_\Omega b(u_n)u_n^2 dx - \int_\Omega B(u_n)dx + \frac{1}{\tau}\int_\Omega \rho_n u_n dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx - \frac{1}{\tau}\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{\tau}\int_\Omega b(u_n)u_n^2 dx - \int_\Omega B(u_n)dx + \frac{1}{\tau}\int_{[u_n>0]} \rho_n u_n dx \\
&\quad - \int_{[u_n>0]} F(x,u_n)dx + \frac{1}{\tau}\int_{[u_n\le 0]} \rho_n u_n dx - \int_{[u_n\le 0]} F(x,u_n)dx
\end{aligned}$$

onde $\rho_n \in \partial J_3(u_n)$, implicando do Lema 3.15

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle &\ge \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx - \frac{1}{\tau}\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{\tau}\int_\Omega b(u_n)u_n^2 dx - \int_\Omega B(u_n)dx + \frac{1}{\tau}\int_{[u_n>0]} \underline{f}(x,u_n)u_n dx \\
&\quad - \int_{[u_n>0]} F(x,u_n)dx.
\end{aligned}$$

Segue de (S_2), (S_3) e (S_9) que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle \ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx + \left(\frac{l^*}{\tau} - 1\right)\int_\Omega B(u_n)dx,$$

donde

$$\begin{aligned}
c_\lambda + o_n(1) &\ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx + b_0\left(\frac{l^*}{\tau} - 1\right)\int_\Omega \Phi_*(u_n)dx \\
&\ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx,\ \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi(x) = 1,\ x \in \overline{\Omega}$. Neste caso, tem-se que

$$c_\lambda + o_n(1) \ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\mid \nabla u_n \mid)\varphi dx,\ \lambda > 0.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos de (3.61)

$$c_\lambda \ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu \ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\mu(\overline{\Omega}),\ \lambda > 0.$$

Com efeito, suponha agora que o conjunto $\widetilde{J}$ seja diferente do vazio. Assim, para algum $j \in \widetilde{J}$

$$c_\lambda \ge \left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\mu_j,\ \lambda > 0.$$

Vimos no Lema 3.21 que

$$\mu_i > c_0,\ \ i \in J,$$

podemos concluir que

$$c_\lambda \geq \left(1 - \frac{m}{\tau}\right) c_0 > 0,$$

contradizendo o Lema 3.18. Logo $\widetilde{J} = \emptyset$, como queriamos mostrar. ■

De um certo modo, concluiremos através do próximo lema que existe uma compacidade entre os espaços $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ e $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

Lema 3.23 *A sequência (u_n) converge fortemente para u em $L_{\Phi_*}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\xi(x) = 1$, para $x \in \Omega$. Neste caso, de (3.61) temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi_*(u_n)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u_n)\xi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \xi d\nu.$$

Segue do Lema 3.19(i) e Lema 3.22

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi_*(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u)\xi dx = \int_\Omega \Phi_*(u)dx. \tag{3.85}$$

Lembrando que Φ_* é uma função convexa, segue de um resultado devido a Brezis e Lieb [20] que

$$\int_\Omega \big(\Phi_*(|\ u_n\ |) - \Phi_*(|\ u_n - u\ |) - \Phi_*(|\ u\ |)\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.86}$$

De (3.85) e (3.86)

$$\int_\Omega \Phi_*(|\ u_n - u\ |)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a menos de subsequência. Deste fato, podemos concluir do Lema 3.3 que (u_n) converge fortemente para u em $L_{\Phi_*}(\Omega)$. ■

Lema 3.24 *Seja $(u_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ a sequência $(PS)_c$ obtida anteriormente. Então*

$$\int_\Omega \big(\phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n - \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u\big)\big(\nabla u_n - \nabla u\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Defina $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dada por

$$T(x) = \Phi(|\ x\ |),\ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

As seguintes propriedades envolvendo a função T ocorrem:

(i) $T \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$.

(ii) T é convexa.

Sabendo disto, tem-se

$$(\nabla T(x) - \nabla T(y))\,(x-y) \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}^N,$$

donde

$$(\phi(\mid x \mid)x - \phi(\mid y \mid)y)\,(x-y) \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}^N, \tag{3.87}$$

em particular

$$(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u)\,(\nabla u_n - \nabla u) \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \big(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big)(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &= \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx \end{aligned} \tag{3.88}$$

Seja $(w_n) \subset \partial I_\lambda(u_n)$ tal que $\parallel w_n \parallel_{W_0^1 L_\Phi(\Omega)^*} = m(u_n)$. Desde que $(u_n - u)$ é limitado em $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, temos

$$\langle w_n, u_n - u\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim

$$o_n(1) = \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega \big(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n\big)(u_n - u)dx. \tag{3.89}$$

Dos Lemas 3.20 e 3.23, tem-se que

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \big(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n\big)(u_n - u)dx\Big| &\leq \parallel b(u_n)u_n + \lambda\rho_n \parallel_{\widetilde{\Phi}_*} \parallel u_n - u \parallel_{\Phi_*} \\ &\leq k \parallel u_n - u \parallel_{\Phi_*} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{3.90}$$

De (3.89) e (3.90)

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.91}$$

Desde que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

a menos de subsequência (ver convergência (3.60)) e $\phi(|\nabla u|)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ para cada $i \in \{1, ..., N\}$, temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ i \in \{1, ..., N\},$$

donde segue-se que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\big(\nabla u_n - \nabla u\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.92}$$

Agora de (3.88), (3.91) e (3.92)

$$\int_\Omega \big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)\big(\nabla u_n - \nabla u\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 3.25 *Sejam $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico e $(v_n) \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência verificando*

$$\big(\beta(v_n) - \beta(v)\big)(v_n - v) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ em\ \mathbb{R},$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$. Então

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \ em\ \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Este resultado é devido a Dal Maso e Murat [29]. ■

Lema 3.26

$$\nabla u_k(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x)\ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Demonstração. Seja $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a aplicação dada por

$$\beta(x) = \phi(|\nabla x|)\nabla x,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Na demonstração do Lema 3.24 em (3.87), vimos que

$$\Big(\phi(|x|)y - \phi(|x|)y\Big)(x - y) \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Deste fato β é um operador monotônico. Mostraremos agora que β é um operador estritamente monotônico, isto é

$$\Big(\phi(|x|)y - \phi(|x|)y\Big)(x - y) > 0,\ x \neq y.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy, temos

$$\begin{aligned}\Big(\phi(|x|)y - \phi(|x|)y\Big)(x - y) \ &\geq\ \phi(|x|)\,|x|\,(|x| - |y|) \\ &\quad +\phi(|y|)\,|y|\,(|y| - |x|). \end{aligned}\tag{3.93}$$

Considere agora os seguintes casos

1^0 **caso:** $\mid x \mid < \mid y \mid$.

De (S_1), tem-se que $\phi(t)t$ é estritamente crescente, deste fato segue de (3.93)

$$\begin{aligned}\Big(\phi(\mid x \mid)y - \phi(\mid x \mid)y\Big)(x-y) \quad &> \quad \phi(\mid x \mid) \mid x \mid (\mid x \mid - \mid y \mid) \\ &\quad +\phi(\mid x \mid) \mid x \mid (\mid y \mid - \mid x \mid) = 0\end{aligned}$$

2^0 **caso:** $\mid x \mid > \mid y \mid$.

Basta utilizar a mesma ideia do 1^0 caso.

3^0 **caso:** $\mid x \mid = \mid y \mid$.

Sendo $x \neq y$, tem-se da desigualdade de Cauchy

$$xy > \mid x \mid\mid y \mid = \mid x \mid^2,$$

donde segue-se que

$$\Big(\phi(\mid x \mid)y - \phi(\mid x \mid)y\Big)(x-y) \geq 2\phi(\mid x \mid) \mid x \mid^2 - 2\phi(\mid x \mid)xy > 0.$$

Através do 1^0, 2^0 e 3^0 caso, conclui-se que o operador β é estritamente monotônico. Utilizando o Lema 3.24

$$\big(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big)\big(\nabla u_n - \nabla u\big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

ou seja

$$\big(\beta(\nabla u_k) - \beta(\nabla u), \nabla u_k - \nabla u\big) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Logo pelo Lema 3.25

$$\nabla u_k(x) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

como queriamos demonstrar. ■

Lema 3.27 *O funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para $\lambda > 0$ suficientemente grande.*

Demonstração. Começamos a demonstração destacando os seguintes fatos:

(i) $\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) \leq C_1\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 + C_2\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2, \; n \in \mathbb{N}.$

De fato, basta utilizar (S_2), a convexidade e a monotocidade de Φ.

(ii) $\Phi(|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Segue de imediato do Lema 3.26.

(iii) $C_1\phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2 + C_2\phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \in L^1(\Omega),\ n \in \mathbb{N}$.

Já que $\phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|, \phi(|\nabla u|) |\nabla u| \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e $|\nabla u_n|, |\nabla u| \in L_\Phi(\Omega)$.

(iv) $\left(\phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2$ q.t.p. em Ω.

Segue imediatamente do Lema 3.26.

(v) $\displaystyle\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2\, dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2\, dx$.

Note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2\, dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{3.94}$$

De fato, já foi visto que a sequência $(\phi(|\nabla u_n|)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i})$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, para cada $i \in \{1, ..., N\}$. Do Lema 3.26 tem-se

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sabendo disto, temos de uma versão do Brézis e Lieb para N-funções, apresentada no Capítulo 2

$$\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \phi(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Daí, mostra-se que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla u dx. \tag{3.95}$$

Durante a demonstração do Lema 3.24 em (3.91), mostrou-se a seguinte convergência

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.96}$$

De (3.94)-(3.96) tem-se (iii). Utilizando o Teorema Generalizado de Lebesgue, temos de $(i) - (v)$

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue-se do Lema 3.11

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

e consequentemente que o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

Lema 3.28 *Dado $\varphi \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx$$

e

$$\int_\Omega b(u_n)u_n\varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u)u\varphi dx.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\varphi| \leq \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||\nabla\varphi| \in L^1(\Omega). \tag{3.97}$$

Já foi visto anteriormente que $(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|)$ é uma sequência limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, além disso

$$\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(|\nabla u|)|\nabla u| \ \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.98}$$

Deste fato, temos por Brézis Lieb para N-funções (resultado desenvolvido neste trabalho no Capítulo 2) que

$$\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| \rightharpoonup \phi(|\nabla u|)|\nabla u| \ \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\psi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u|\psi dx, \ \psi \in L_\Phi(\Omega).$$

Em particular

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||\nabla\varphi| dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla\varphi| dx. \tag{3.99}$$

Do Lema 3.26

$$\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\varphi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.100}$$

De (3.97)-(3.100), temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

para qualquer $\varphi \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Observe agora que, para cada $\varphi \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

$$|b(u_n)u_n\varphi| \leq b(u_n)|u_n||\varphi| \in L^1(\Omega), \ n \in \mathbb{N},$$

já que $b(u_n) \mid u_n \mid \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$ e $\mid \varphi \mid \in L_{\Phi_*}(\Omega)$. Vimos através do Lema 3.20 que $\big(b(u_n) \mid u_n \mid\big)$ é limitado em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$, além disso da convergência (3.63)

$$b(u_n) \mid u_n \mid \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b(u) \mid u \mid \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Neste caso, temos pelo Teorema 2.7 (versão do Brézis e Lieb para N-funções)

$$\int_\Omega b(u_n) \mid u_n \mid \psi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u) \mid u \mid \psi dx, \ \psi \in L_{\Phi_*}(\Omega),$$

em particular

$$\int_\Omega b(u_n) \mid u_n \mid \varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u) \mid u \mid \varphi dx, \ \varphi \in W_0^1 L_\Phi(\Omega).$$

Utilizando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\int_\Omega b(u_n) u_n \varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u) u \varphi dx, \ \varphi \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

finalizando assim a demonstração deste lema. ■

Demonstraremos a seguir o teorema principal deste capítulo, enunciado no início deste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.1: Dos Lemas 3.12 e 3.13, temos do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ver Apêndice A), que existe uma sequência $(PS)_c$, $(u_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, satisfazendo

$$m(u_n) \to 0 \text{ e } I_\lambda(u_n) \to c_\lambda. \tag{3.101}$$

Desde que I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para $\lambda > 0$ suficientemente grande (ver Lema 3.27)

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_\lambda \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

para algum $u_\lambda \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Considerando

$$\| w_n \|_{W_0^1 L_\Phi(\Omega)^*} = m(u_n), \ w_n \in \partial I_\lambda(u_n),$$

temos para cada $v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

$$\langle w_n, v \rangle = \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega b(u_n) u_n v dx - \lambda \langle \rho_n, v \rangle, \tag{3.102}$$

onde $\rho_n \in \partial J_3(u_n)$. Neste caso

$$\begin{aligned}\langle \rho_n, v\rangle &= o_n(1) + \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v dx + \frac{1}{\lambda}\int_\Omega b(u_n)u_n v dx\\ &\leq o_n(1) + \frac{1}{\lambda} \| \phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n| \|_{\widetilde{\Phi}} \| \nabla v \|_\Phi + \frac{1}{\lambda} \| b(u_n)u_n \|_{\widetilde{\Phi}_*} \| v \|_{\Phi_*}\\ &\leq k_\lambda^1 + k_\lambda^2 \| \nabla v \|_\Phi + k_\lambda^3 \| \nabla v \|_\Phi,\ v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, donde segue-se que a sequência $(\rho_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)^*$ é limitada. Portanto

$$\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho_\lambda \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega), \tag{3.103}$$

a menos de subsequência. Segue do fato de

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_\lambda \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

que $\rho_\lambda \in \partial J_3(u_\lambda)$ (ver propriedade (P_5) do Apêndice A). Temos do Lema 3.15 que $\rho_\lambda \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$ e

$$\rho_\lambda(x) \in \partial_u F(x, u_\lambda) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.104}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ em (3.102), obtemos do Lema 3.28, (3.101) e (3.103) que

$$0 = \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla v dx - \int_\Omega b(u_\lambda)u_\lambda v dx - \lambda \int_\Omega \rho_\lambda v dx,\ v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega).$$

Sendo assim, basta mostrarmos que $u_\lambda \geq 0$ e $u_\lambda \neq 0$. Primeiramente, note que u_λ é não-nula, pois $I(u_\lambda) = c_\lambda > 0$. Agora mostraremos que $u_\lambda \geq 0$. Seja

$$u_\lambda^-(x) = \max\{-u_\lambda(x), 0\},\ x \in \Omega.$$

Observando que $u_\lambda^- \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, temos

$$0 = \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla u_\lambda^- dx - \int_\Omega \big(b(u_\lambda)u_\lambda + \lambda\rho\big)u_\lambda^- dx,$$

donde

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla u_\lambda^- = \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda^-|) |\nabla u_\lambda^-|^2 dx\\ &\geq l \int_\Omega \Phi(|\nabla u_\lambda^-|)dx \geq l\zeta_0(\| \nabla u_\lambda \|_\Phi),\end{aligned}$$

mostrando que $\| \nabla u_\lambda^- \|_\Phi = 0$, donde $u_\lambda^- \equiv 0$.■

Capítulo 4

Equação Quasilinear Multivalente em $\mathbb{R}^N$

O objetivo central deste capítulo é estabelecer uma existência de solução não-trivial para a equação quasilinear multivalente

$$-div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda\partial_u F(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

para isto provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Suponha* $(S_1)-(S_9)$, *com* $\Omega = \mathbb{R}^N$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* Ω_0 *limitado. Então para cada* $\lambda > 0$ *suficientemente grande, existem*

$$\rho(x) = \rho_\lambda(x) \in \partial_u F(x,u) q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N,$$

com $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$u = u_\lambda \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\ \ com\ u \geq 0\ e\ u \not\equiv 0,$$

satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u)uvdx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \rho v dx = 0,\ \ v \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

ou ainda

$$-div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) - b(u)u \in \lambda\partial_u F_a(x,u)\ \ em\ \mathbb{R}^N.$$

Associado a equação (4.1), temos o funcional energia

$$\widehat{I}_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \{\Phi(\mid \nabla u \mid) - B(u) - \lambda F(x,u)\}\, dx,$$

onde $\Phi(t)$, $B(t)$ e $F(x,t)$ são primitivas das funções $\phi(t)t$, $b(t)t$ e $f(x,t)$ respectivamente. Sendo ϕ uma função definida de uma forma bem geral, difinimos o funcional energia $\widehat{I}_\lambda$ sobre o espaço de Orlicz-Sobolev $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$.

De (S_1) e (S_2), segue do Lema 3.1, que Φ, $\widetilde{\Phi}$, Φ_* e $\widetilde{\Phi}_*$ são N-funções. Todos os lemas obtidos na Seção 3.1 (ver Capítulo 3), podem ser refeitos para o caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. Por isto quando mencionados, estamos considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$. Assim como feito no Capítulo 3, consideraremos aqui

$$b(t) = f(x,t) = 0, \text{ para } t < 0, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

4.1 Sequência Palais-Smale

A finalidade desta seção, é estabelecer a existência de uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$, com relação ao funcional

$$\widehat{I}_\lambda(u) = \widehat{J}_1(u) - \widehat{J}_2(u) - \lambda \widehat{J}_3(u), \ u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

onde

$$\widehat{J}_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx, \ \widehat{J}_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} B(u)dx \text{ e } \widehat{J}_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx.$$

Com relação a estes funcionais temos os seguintes resultados:

Lema 4.1 *Os funcionais $\widehat{J}_1, \widehat{J}_2 : D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$\widehat{J}_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx \ \text{ e } \ \widehat{J}_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} B(u)dx.$$

são continuamente diferenciáveis a Fréchet sobre $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, suas derivadas $J_1'(u), J_2'(u) : D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, são dadas por:

$$\langle J_1'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx \ \text{ e } \ \langle J_2'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{b}(u)uvdx,$$

para quaisquer $u, v \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. A prova deste lema, é feita de forma análoga ao que foi feito na demonstração no Lema B.1. ■

Lema 4.2 *O funcional*

$$\widehat{J}_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx, \ u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

é localmente Lipschitz. Além disso, $F(x,.) \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Demonstração. A prova deste lema, é feita de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 3.10. ■

Os lemas enunciados a seguir, são demonstrados de forma análoga ao feito no Capítulo 3, por isso omitimos suas demonstrações.

Lema 4.3 *Para cada $u \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\partial J_3(u) \subset \partial F_u(x,u) \ \text{q.t.p.} \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente dado $\rho \in \partial J_3(u)$, tem-se que $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$,

$$\mid \rho(x) \mid \leq \max\{\mid \underline{f}(x,u) \mid, \mid \overline{f}(x,u) \mid\} \ \text{q.t.p.} \ x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\rho(x) = 0, \ x \in [u \leq 0].$$

Lema 4.4 *Seja $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ considerada no Lema 3.13. Então*

$$\max_{t \geq 0} \widehat{I}_\lambda(tu_0) \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Consequentemente,

$$c_\lambda \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \widehat{I}_\lambda\big(\gamma(t)\big),$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1]; D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\big); \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = t_0 u_0\},$$

e $t_0 > 0$ é a constante obtida no Lema 3.13.

Dos Lemas 4.1 e 4.2, conclui-se que o funcional $\widehat{I}_{\lambda,a} \in Lip_{loc}\big(D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R}\big)$. De forma análoga ao feito na Seção 3.2 do Capítulo 3, mostra-se que o funcional $\widehat{I}_\lambda$ possui geometria do passo da montanha. Deste fato, segue do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ver Apêndice A) que existe uma sequência $(u_n) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\widehat{I}_\lambda(u_n) \to c_\lambda \text{ e } m(u_n) \to 0. \tag{4.2}$$

Novamente seguindo as mesmas ideias feitas anteriormente, mostra-se que esta sequência $(PS)_{c_\lambda}$ é limitada em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$. Tendo em vista que a sequência (u_n) é limitada, segue que as sequências

$$\{\| u_n \|_{\Phi_*}\}, \ \Big\{\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\mid \nabla u_n \mid) dx\Big\} \text{ e } \Big\{\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(\mid u_n \mid) dx\Big\} \tag{4.3}$$

são limitadas.

4.2 Convergência da sequência Palais-Smale

Seja $(u_n) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ a sequência $(PS)_{c_\lambda}$, obtida na seção anterior. Foi visto que a sequência (u_n) é limitada em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Daí, segue do fato de $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ ser um espaço reflexivo que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \tag{4.4}$$

a menos de subsequência. O principal objetivo desta seção, é mostrar que

$$\nabla u_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

a menos de subsequência. Apartir da convergência fraca (4.4), temos as seguintes convergências

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_{\Phi}(\mathbb{R}^N), \tag{4.6}$$

para cada $i \in \{1, ..., N\}$ e

$$u_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.7}$$

Visto que as sequências em (4.3) são limitadas em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\Phi(|\nabla u_n|) \rightharpoonup \mu \text{ e } \Phi_*(u_n) \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{4.8}$$

a menos de subsequência.

Lema 4.5 *Seja J o conjunto enumerável obtido no Lema 3.19. Então o subconjunto*

$$\widehat{J} = \{j \in J; \nu_j > 0\},$$

é vazio.

Demonstração. Fukagai, Ito e Narukawa [32], provaram que o conjunto enumerável $\widehat{J}$ é finito. De forma análoga ao feito no Lema 3.22, mostra-se que $\widehat{J}$ é vazio. ■

Lema 4.6 *A sequência (u_n) converge fortemente a menos de subsequência para u em $L_{\Phi_*}(B_R(0))$ para qualquer $R > 0$.*

Demonstração. Dados $R, \epsilon > 0$, considere $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_R(0) \\ 0, & x \in B^c_{R+\epsilon}(0), \end{cases}$$

com $0 \leq \varphi_\epsilon \leq 1$. Veja que

$$\int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx = \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)\varphi_\epsilon dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u_n)\varphi_\epsilon dx,$$

donde segue-se de (4.8) que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon d\nu.$$

Sendo $\widehat{J}$ vazio tem-se do Lema 3.19

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon \Phi_*(u)dx. \tag{4.9}$$

Desde que

$$\Phi_*(u)\varphi_\epsilon \leq \Phi_*(u) \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \epsilon > 0$$

e

$$\Phi_*(u)\varphi_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \Phi_*(u)\chi_{B_R(0)} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u)\varphi_\epsilon dx \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(u)\chi_{B_R(0)}dx = \int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx. \tag{4.10}$$

De (4.9) e (4.10)

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx \leq \int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx. \tag{4.11}$$

Segue de (4.7) que

$$\Phi_*(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi_*(u) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Deste fato, temos pelo Lema de Fatou que

$$\int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx. \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12)

$$\int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx \leq \int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx.$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n)dx = \int_{B_R(0)} \Phi_*(u)dx, \tag{4.13}$$

para $R > 0$ qualquer. Por Brézis e Lieb [20],

$$\int_{B_R(0)} \left(\Phi_*(u_n) - \Phi_*(u_n - u) - \Phi_*(u)\right) dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.14}$$

De (4.13) e (4.14)

$$\int_{B_R(0)} \Phi_*(u_n - u) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo para qualquer $R > 0$,

$$u_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_{\Phi_*}(B_R(0)),$$

a menos de subsequência. ■

Lema 4.7 *Fixado $\lambda > 0$, a sequência $(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n)$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$, onde $(\rho_n) \subset \partial\widehat{J}_3(u_n)$.*

Demonstração. Prova-se de forma análoga ao feito no Lema 3.20. ■

Lema 4.8 *Para cada $R > 0$,*

$$\int_{B_R(0)} \Big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_n|)\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a menos de subsequência.

Demonstração. Dado $R > 0$, considere $\xi = \xi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo

(i) $0 \leq \xi \leq 1$;

(ii) $\xi \equiv 1$ em $B_R(0)$;

(iii) supp(ξ)$\subset B_{2R}(0)$.

Foi visto durante a demonstração do Lema 3.24 que

$$\Big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u) \geq 0, \text{ sobre } \mathbb{R}^N,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste fato,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{B_R(0)} \Big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|u|)\nabla u\Big)(\nabla u - \nabla u)dx \\
&\leq \int_{B_{2R}(0)} \Big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx \\
&= \int_{B_{2R}(0)} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx \\
&\quad - \int_{B_{2R}(0)} \phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Desde que $\{(u_n - u)\xi\}$ é uma sequência limitada em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_{B_{2R}(0)} \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla[(u_n-u)\xi]dx \\ &\quad - \int_{B_{2R}(0)} \Big(b(u_n)u_n(u_n-u)\xi + \lambda\rho_n(u_n-u)\xi\Big)dx \\ &= \int_{B_{2R}(0)} \xi\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla(u_n-u)dx + \int_{B_{2R}(0)} (u_n-u)\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n\nabla\xi dx \\ &\quad - \int_{B_{2R}(0)} \Big(b(u_n)u_n(u_n-u)\xi + \lambda\rho_n(u_n-u)\xi\Big)dx. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Segue da desigualdade de Hölder para Orlicz e do Lema 3.20 que

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_{2R}(0)} \big(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n\big)(u_n-u)\xi dx\right| &\leq \Big(2 \parallel b(u_n) + \lambda\rho_n \parallel_{\widetilde{\Phi}_*}\Big) \parallel u_n - u \parallel_{\Phi_*,B_{2R}(0)} \\ &\leq k \parallel u_n - u \parallel_{\Phi_*,B_{2R}(0)} \end{aligned}$$

donde segue-se do Lema 4.6 que

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} \big(b(u_n)u_n + \lambda\rho_n\big)(u_n-u)\xi dx\right| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.17}$$

Observe agora que

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} (u_n-u)\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n\nabla\xi dx\right| \leq 2 \parallel \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \parallel_{\widetilde{\Phi}}\parallel u_n - u \parallel_{\Phi_*,B_{2R}(0)} .$$

Sendo $(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid)$ limitado em $L_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$, tem-se do Lema 4.6

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} (u_n-u)\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n\nabla\xi dx\right| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.18}$$

De (4.16)-(4.18)

$$\int_{B_{2R}(0)} \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n\nabla(u_n-u)\xi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.19}$$

Lembrando que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ em } L_\Phi(\mathbb{R}^N),\ i \in \{1,...,N\},$$

a menos de subequência, temos

$$\int_{B_{2R}(0)} \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\nabla(u_n-u)\xi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.20}$$

De (4.15), (4.19) e (4.20)

$$\int_{B_R(0)} \Big(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid u \mid)\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a menos de subsequência. ■

Corolário 4.1 *Seja (u_n) a sequência de Palais-Smale obtida em (4.2). Então*

$$\nabla u_n(x) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \ q.t.p. \ x \in \mathbb{R}^N$$

a menos de subsequência.

Demonstração. Repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração do Lema 3.26, mostra-se que existe uma subsequência $(u_n^1) \subset (u_n)$ tal que

$$\nabla u_n^1(x) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p } x \in B_1(0).$$

Utilizando o mesmo procedimento, existe $(u_n^2) \subset (u_n^1)$ tal que

$$\nabla u_n^2(x) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p } x \in B_2(0).$$

Seguindo esta ideia, vai existir $(u_n^{i+1}) \subset (u_n^i)$ tal que

$$\nabla u_n^{i+1}(x) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p } x \in B_i(0).$$

Considerando

$$u_k(x) = u_k^k(x), \ x \in \mathbb{R}^N,$$

temos

$$\nabla u_k(x) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x) \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^N,$$

como queríamos demonstrar. ■

4.3 Existência de solução

Nosso objetivo agora é justificar que u é uma solução não-trivial da equação (4.1). Para isto mostraremos que $0 \in \partial\widehat{I_\lambda}(u)$, isto é, que u é um ponto crítico não trivial para o funcional energia $\widehat{I_\lambda}$.

Lema 4.9 *Dado $\xi \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla \xi dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \xi dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n \xi dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} b(u)u\xi dx.$$

Demonstração. A demonstração deste lema, é feita de forma análoga ao feito no Lema 3.28. ■

O resultado que provaremos a seguir foi de fundamental importância para contornar a falta de compacidade.

Teorema 4.2 *Sejam* $(X, \| \,.\, \|_X)$ *e* $(Y, \| \,.\, \|_Y)$ *dois espaços de Banach, tais que* $\overline{X}^{\|\cdot\|_Y} = Y$ *e* $X \underset{comp}{\hookrightarrow} Y$ *e* $J : Y \to \mathbb{R}$ *um funcional* $Lip_{loc}(Y, \mathbb{R})$*. Supondo*

(i) $J|_X \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$,

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ *em* X,

(iii) $\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ *em* X^*, *onde* $(\rho_n) \subset \partial J|_X(u_n)$,

temos $\rho \in \partial J|_X(u)$.

Demonstração. Do Teorema A.3 (ver Apêndice A)

$$\partial J|_X(v) = \partial J(v), \ v \in X.$$

Em particular,

$$\partial J|_X(u_n) = \partial J(u_n), \ n \in \mathbb{N},$$

donde segue-se da propriedade (P_6) (ver Apêndice A) que

$$J|_X^0(u_n; v) = J^0(u_n; v) \ n \in \mathbb{N}, \ v \in X. \tag{4.21}$$

Sabendo que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X,$$

segue da imersão compacta entre X e Y, que

$$u_n \to u \text{ em } Y.$$

Desde fato, passando ao limite superior de $n \to +\infty$ em (4.21), temos pela propriedade (P_7) (ver Apêndice A)

$$\limsup_{n \to +\infty} J^0(u_n; v) \leq J^0(u; v), \ v \in X. \tag{4.22}$$

Lembrando que

$$\langle \rho_n, v \rangle \leq J|_X^0(u_n; v) \ n \in \mathbb{N} \text{ e } v \in X,$$

temos

$$\langle \rho_n, v \rangle \leq J^0(u_n; v) \ n \in \mathbb{N} \text{ e } v \in X.$$

Passando ao limite superior de $n \to +\infty$, obtemos pelo fato de $\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ em X que

$$\langle \rho, v \rangle \leq \limsup_{n \to +\infty} J^0(u_n; v), \ v \in X,$$

implicando de (4.22)

$$\langle \rho, v \rangle \leq J^0(u; v) = J|_X^0(u; v), \ v \in X,$$

mostrando assim que $\rho \in \partial J|_X(u)$, como queriamos demonstrar. ■

Defina a seguinte medida

$$\widetilde{\mu}(B) = \int_B g dx, \ B \subset \mathbb{R}^N \text{ mensurável},$$

onde $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ foi dado em (S_6). No lema a seguir considere

$$L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_{\mathbb{R}^N} v d\widetilde{\mu} < +\infty \right\}.$$

Sabe-se da teoria de medida e integração que $L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$, munido da norma

$$| \ v \ |_{r_1, \widetilde{\mu}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} | \ v \ |^{r_1} \ d\widetilde{\mu} \right)^{\frac{1}{r_1}},$$

é um espaço de Banach. Além disso,

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{|.|_{r_1, \tilde{\mu}}} = L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N),$$

ver [51].

Lema 4.10 $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \underset{comp}{\hookrightarrow} L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Seja $(v_n) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$v_n \rightharpoonup 0 \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos agora que

$$v_n \to 0 \text{ em } L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N).$$

Feito isto, desde que $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, conclui-se através da teoria de análise funcional que o operador

$$\begin{aligned} i : D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \ &\to \ L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N) \\ w \ &\mapsto \ i(w) = w, \end{aligned}$$

é compacto, isto é $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, note que $(v_n) \subset L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, utilizando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} &= \int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} gdx = \int_{[|v_n|\leq 1]} | v_n |^{r_1} gdx + \int_{[|v_n|\geq 1]} | v_n |^{r_1} gdx \\ &\leq \int_{[|v_n|\leq 1]} gdx + \left(\int_{[|v_n|\geq 1]} | v_n |^{l^*} dx\right)^{\frac{r_1}{l^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{r_1}{l^*} = 1$. Implicando de (3.34) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} \leq c_0 + c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(v_n)dx\right)^{\frac{r_1}{l^*}} < +\infty, \tag{4.23}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(v_n) \subset L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$.

Para cada $R > 0$, observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx \\ &= \int_{[|v_n|\leq 1]\cap(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} | v_n |^{r_1} gdx + \int_{[|v_n\geq 1|]\cap(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} | v_n |^{r_1} gdx \\ &\quad + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx,\end{aligned}$$

donde segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} gdx + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx \\ &\quad + \left(\int_{[|v_n|\geq 1]\cap(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} | v_n |^{l^*} dx\right)^{\frac{r_1}{l^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} g^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

implicando novamente de (3.34)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} gdx + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(v_n)dx\right)^{\frac{r_1}{l^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} g^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Sendo (v_n) limitada em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, tem-se que (v_n) é limitada em $L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$. Deste fato

$$\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} gdx + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx + c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} g^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{4.24}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$, com $c_0 > 0$.

Afirmação 4.1 *Valem as seguintes convergências* *(i)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} gdx \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *e* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} g^{\alpha}dx \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

(ii) $\displaystyle\int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Assumindo a Afirmação 4.1, segue de (4.24) e do item (i) que dado $\epsilon > 0$, existe um $R_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} < \frac{\epsilon}{2} + \int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} gdx,$$

donde segue de (ii) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} | v_n |^{r_1} d\widetilde{\mu} < \epsilon,\ n \geq n_0,$$

mostrando que

$$v_n \to 0 \text{ em } L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N).$$

Sendo assim, resta mostrar a Afirmação 4.1.

Verificação de (i)**:** Mostra-se utilizando resultados básicos de medida e integração.

Verificação de (ii)**:** Seja (v_{n_k}) uma subsequência de (v_n), então

$$v_{n_k} \rightharpoonup 0 \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

donde

$$v_{n_k} \overset{n_k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L_{\Phi}(B_R(0)),$$

consequentemente

$$v_{n_k} \overset{n_k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Segue da teoria de medida e integração que existe uma subsequência $(v_{n_{k_j}}) \subset (v_{n_k})$ tal que

$$v_{n_{k_j}}(x) \to 0 \text{ q.t.p. } x \in B_R(0).$$

Desde que (v_n) é limitada em $L_{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$, conclui-se que (v_n) é limitada em $L^{\frac{l^*}{r_1}}(B_R(0))$. De fato,

$$\int_{B_R(0)} | v_n |^{\frac{l^*}{r_1}} dx \leq | B_R(0) | + \int_{[|v_n|\geq 1]\cap B_R(0)} | v_n |^{\frac{l^*}{r_1}} dx,$$

implicando da desigualdade de Hölder e item (3.34) do Lema 3.8

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} | v_n |^{\frac{l^*}{r_1}} dx &\leq | B_R(0) | + | B_R(0) |^{\frac{r_1-1}{r_1}} \left(\int_{[|v_n|\geq 1]\cap B_R(0)} | v_n |^{l^*} dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq | B_R(0) | + | B_R(0) |^{\frac{r_1-1}{r_1}} \left(\int_{B_R(0)} \Phi_*(v_n)dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq c, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Daí, tem-se por Brézis e Lieb que

$$| v_{n_{k_j}} |^{r_1} \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{\frac{l^*}{r_1}}(B_R(0)),$$

isto é

$$\int_{B_R(0)} | v_{n_{k_j}} |^{r_1} \varphi dx \overset{n_{k_j} \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \; \varphi \in L^{\alpha}(B_R(0)),$$

em particular

$$\int_{B_R(0)} | v_{n_{k_j}} |^{r_1} g dx \overset{n_{k_j} \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo

$$\int_{B_R(0)} | v_n |^{r_1} g dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 4.11 $\overline{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)}^{|.|_{r_1,\tilde{\mu}}} = L_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De fato, já que

$$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \subset L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\overline{C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)}^{|v|_{r_1,\tilde{\mu}}} = L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N),$$

temos

$$\overline{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)}^{|.|_{r_1,\tilde{\mu}}} = L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N),$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 4.12 *Seja* $J : L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, *o funcional dado por*

$$J(v) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v) dx, \; v \in L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N).$$

Então $J \in Lip_{loc}(L_{\widetilde{\mu}}^{r_1}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. De (S_6), conclui-se que J está bem definido. Dado $w \in L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$, $R > 0$ e $v_1, v_2 \in B_R(w) \subset L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
|J(v_1) - J(v_2)| &\leq c_0 \int_{[|v_1|+|v_2|\leq 1]} g(| v_1 | + | v_2 |)^{r_0-1} | v_1 - v_2 | \, dx \\
&\quad + c_0 \int_{[|v_1|+|v_2|\geq 1]} g(| v_1 | + | v_2 |)^{r_0-1} | v_1 - v_2 | \, dx \\
&\quad \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^N} g \, | v_1 - v_2 | \, dx \\
&\quad + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} g(| v_1 | + | v_2 |)^{r_1-1} | v_1 - v_2 | \, dx \\
&= c_0 \int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{1}{r_1}} \left(g^{\frac{r_1-1}{r_1}} | v_1 - v_2 | \right) dx \\
&\quad + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{1}{r_1}} \left(g^{\frac{1}{r_1}} (| v_1 | + | v_2 |) \right)^{r_1-1} | v_1 - v_2 | \, dx.
\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{J}_3|_{L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)}(v_1) - \widehat{J}_3|_{L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N)}(v_2) \right| &\leq c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} g dx \right)^{\frac{r_1-1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g \, | v_1 - v_2 |^{r_1} \, dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\quad + c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(| v_1 | + | v_2 |)^{r_1} dx \right)^{\frac{r_1-1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g \, | v_1 - v_2 |^{r_1} \, dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \left(c_1 + c_2 \left(| v_1 |_{r_1,\widetilde{\mu}} + | v_2 |_{r_1,\widetilde{\mu}} \right)^{r_1-1} \right) | v_1 - v_2 |_{r_1,\widetilde{\mu}} \\
&\leq \left(c_1 + c_2 \left(2R^{r_1-1} + 2 \, | w |_{r_1,\widetilde{\mu}} \right)^{r_1-1} \right) | v_1 - v_2 |_{r_1,\widetilde{\mu}} \\
&= K \, | v_1 - v_2 |_{r_1,\widetilde{\mu}},
\end{aligned}$$

onde

$$K = K(R, | w |_{r_1,\widetilde{\mu}}) = \left(c_1 + c_2 \left(2R^{r_1-1} + 2 \, | w |_{r_1,\widetilde{\mu}} \right)^{r_1-1} \right).$$

Portanto, $J \in Lip_{loc}\left(L^{r_1}_{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R} \right)$. ■

Lema 4.13 *Sejam $(u_n) \subset D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_c$ associado ao funcional $\widehat{I}_{\lambda,a}$, tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$(\rho_n) \subset \partial \widehat{J}_3(u_n) \text{ com } \rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)^*.$$

Então, $\rho \in \partial \widehat{J}_3(u)$.

Demonstração. Observando que $J|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)} = \widehat{J}_3$, este lema segue imediatamente do Teorema 4.2 e dos Lemas 4.10, 4.11 e 4.12, ■

Demonstraremos agora o principal teorema deste capítulo, enunciado no início deste capítulo.

Demonstração do Teorema 0.5: Considerando

$$\| w_n \|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)^*} = m(u_n), \ w_n \in \partial \widehat{I}_\lambda(u_n),$$

temos para cada $v \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle w_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u_n |)\nabla u_n \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n v dx - \lambda\langle \rho_n, v\rangle, \tag{4.25}$$

onde $\rho_n \in \widehat{J}_3(u_n)$. Veja que

$$\begin{aligned} \lambda\langle \rho_n, v\rangle &= -\langle w_n, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u_n |)\nabla u_n \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n v dx \\ &\leq \| w_n \|_{D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)^*} \| \nabla v \|_\Phi + \| \phi(| \nabla u_n |)\nabla u_n \|_{\widetilde{\Phi}} \| \nabla v \|_\Phi \\ &\quad + \| v \|_{\Phi_*} \| b(u_n)u_n \|_{\widetilde{\Phi}_*}, \end{aligned}$$

donde segue pelo fato de (w_n) ser limitado em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, $(\phi(| \nabla u_n |) | \nabla u_n |)$ ser limitado em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ e $(b(u_n)u_n)$ em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$, que (ρ_n) é limitada em $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)^*$. Desde que $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ é separável, temos

$$\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \text{ em } D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)^*,$$

a menos de subsequência. Segue do Teorema 4.13, que $\rho \in \partial \widehat{J}_3(u)$. Consequentemente, do Lema 4.3 $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\rho(x) \in \partial_u F(x, u) \ q.t.p. \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.26}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ em (4.25), obtemos do Lema 4.9

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u |)\nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u)uv dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho v dx, \ v \in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que u é solução do problema (4.1). Deste fato, resta mostrar que $u \geq 0$ e $u \not\equiv 0$. Para $v = u^-$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u |)\nabla u \nabla u^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(u)uu^- dx - \lambda\langle \rho, u^-\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u^- |) | \nabla u^- |^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^- dx, \end{aligned}$$

onde $\rho \in L_{\widetilde{\Phi}_*}(\mathbb{R}^N)$. Do Lema 4.3 e (4.26)

$$\rho \equiv 0 \text{ em } [u \leq 0].$$

Portanto,

$$0=\int_{\mathbb{R}^N}\phi(\mid \nabla u^- \mid)\mid \nabla u^- \mid^2 dx \geq C_1\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(\mid \nabla u^- \mid)dx \geq C_1\zeta_0(\parallel \nabla u^- \parallel_\Phi),$$

donde $\parallel \nabla u^- \parallel_\Phi = 0$, ou seja $u^- \equiv 0$. Neste caso, $u \geq 0$.

Mostraremos agora que $u \not\equiv 0$, para λ suficientemente grande. Com efeito, considere

$$M=\min\left\{ l^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} S_N^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} (b_1 m^*)^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} ; \alpha\in\{l,m\},\ \beta\in\{l^*,m^*\}\right\},$$

onde S_N é a melhor constante da desigualdade

$$\parallel u \parallel_{\Phi_*} \leq S_N \parallel \nabla u \parallel_\Phi,\ v\in D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Do Lema 4.4

$$c_\lambda \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sendo assim, para $\lambda>0$ suficientemente grande

$$0<c_\lambda<\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{l^*}\right)M. \tag{4.27}$$

Note que a sequência

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\mid \nabla u_n \mid^2 dx\right\},$$

é limitada, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\mid \nabla u_n \mid^2 dx \leq m\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \leq m\zeta_1(\parallel \nabla u_n \parallel_\Phi)\leq c,\ n\in\mathbb{N}.$$

Sabendo disto, defina

$$K_\lambda=\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\mid \nabla u_n \mid^2 dx.$$

Afirmamos agora que $u=u_\lambda\not\equiv 0$, para $\lambda>0$ suficientemente grande. Com efeito, suponha por contradição que $u_\lambda\equiv 0$ para $\lambda>0$ suficientemente grande. Neste caso, segue a seguinte afirmação.

Afirmação 4.2 *(i)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

(ii) $\langle \rho_n, u_n\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

Verificação de (i)**:** Observando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{r_0} g\chi_{[0\leq u_n\leq 1]}dx + C\int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n \mid^{r_1} gdx,$$

segue do Lema 4.10 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{r_0} g\chi_{[0\leq u_n\leq 1]}dx + o_n(1), \tag{4.28}$$

a menos de subsequência. Desde que

$$u_n^{r_0} g\chi_{[0\leq u_n\leq 1]} \leq g \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n(x)^{r_0} g(x)\chi_{[0\leq u_n(x)\leq 1]}(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x\in\mathbb{R}^N,$$

temos pelo Teorema de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{r_0} g\chi_{[0\leq u_n\leq 1]}dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.29}$$

Passando ao limite de $n\to+\infty$ em (4.28), obtemos de (4.29)

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a menos de subsequência.

Verificação de (ii)**:** Segue do Lema 4.3 e do item (S_8)

$$\mid \langle \rho_n, u_n\rangle \mid \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \mid F(x,u_n)dx \mid dx.$$

Assim, do item (i)

$$\mid \langle \rho_n, u_n\rangle \mid \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Concluindo assim a Afirmação 4.2.

Passando agora ao limite de $n\to+\infty$ em (4.25), obtemos da Afirmação 4.2 que

$$0 = K_\lambda - \limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n^2dx,$$

ou seja

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n^2dx = K_\lambda,\ \ \lambda>0.$$

Note que $K_\lambda \neq 0$, para qualquer $\lambda > 0$. Com efeito, suponha que $K_\lambda = 0$, para algum $\lambda > 0$. Assim

$$\begin{aligned}\widehat{I}_{\lambda,a}(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} B(u_n)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx \\ &\leq \frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx,\end{aligned}$$

passando ao limite superior de $n \to +\infty$, obtemos da Afirmação 4.2

$$0 < c_\lambda \leq \frac{1}{l}K_\lambda = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $K_\lambda \neq 0$ para qualquer $\lambda > 0$. Note também que

$$K_\lambda \geq M > 0,\ \ \lambda > 0.$$

De fato, observando que

$$\|\nabla u_n\|_\Phi \leq \zeta_0^{-1}\left(\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx\right)$$

e

$$\|u_n\|_{\Phi_*} \geq \zeta_3^{-1}\left(\frac{1}{b_1 m^*}\int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n^2 dx\right),\ n\in\mathbb{N},$$

temos

$$\zeta_3^{-1}\left(\frac{1}{b_1 m^*}\int_{\mathbb{R}^N} b(u_n)u_n^2 dx\right) \leq \|u_n\|_{\Phi_*} \leq S_N\,\|\nabla u_n\|_\Phi \leq S_N\zeta_0^{-1}\left(\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx\right).$$

Passando ao limite superior de $n \to +\infty$, obtemos

$$\zeta_3^{-1}\left(\frac{K_\lambda}{b_1 m^*}\right) \leq S_N \zeta_0^{-1}\left(\frac{K_\lambda}{l}\right),$$

ou seja

$$\max\left\{\left(\frac{K_\lambda}{b_1 m^*}\right)^{\frac{1}{l^*}}, \left(\frac{K_\lambda}{b_1 m^*}\right)^{\frac{1}{m^*}}\right\} \leq S_N \min\left\{\left(\frac{K_\lambda}{l}\right)^{\frac{1}{l}}, \left(\frac{K_\lambda}{l}\right)^{\frac{1}{m}}\right\},$$

donde

$$\left(\frac{K_\lambda}{b_1 m^*}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq S_N\left(\frac{K_\lambda}{l}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \beta\in\{m^*,l^*\} \text{ e } \alpha\in\{m,l\},$$

logo

$$K_\lambda \geq S_N^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}}\, l^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(b_1 m^*)^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}},$$

ou seja

$$K_\lambda \geq M > 0, \tag{4.30}$$

onde $M = S_N^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} l^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} (b_1 m^*)^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$, com $\beta \in \{m^*, l^*\}$ e $\alpha \in \{m, l\}$. Desde que

$$I_\lambda(u_n) \geq \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(| \nabla u_n |) | \nabla u_n |^2 \, dx - \frac{1}{l^*} \int_{\mathbb{R}^N} b(u_n) u_n^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx,$$

passando ao limite superior de $n \to +\infty$, obtemos da Afirmação 4.2 e (4.30) que

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l^*} \right) K_\lambda \geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l^*} \right) M,$$

contradizendo a desigualdade (4.27). Deste fato, conclui-se finalmente que $u = u_\lambda \not\equiv 0$, para $\lambda > 0$ suficientemente grande.$\blacksquare$

O leitor atento percebeu que no Capítulo 3, onde trabalhamos com domínio limitado, conseguimos mostrar que o funcional energia satisfaz a condição de Palais Smale. Agora que o domínio é o $\mathbb{R}^N$, não conseguimos mais mostrar que o funcional energia satisfaz a condição de Palais Smale. Para contornar isto mostramos uma imersão compacta entre os espaços de Orlicz-Sobolev $D^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e os espaços de Lebesgue com peso $L_g^{r_1}(\mathbb{R}^N)$.

Apêndice A

Funcionais Localmente Lipschitz

Relembremos alguns conceitos e resultados da teoria de pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz, desenvolvido por Chang [25], e baseada em análise convexa e no cálculo subdiferencial de Clarke [26].

Seja X um espaço de Banach real e $I : X \to \mathbb{R}$ um **funcional localmente Lipschitz** ($I \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$) isto é: dado $u \in X$ existe uma vizinhança $V = V_u \subset X$ e uma constante $K = K_V > 0$ tal que

$$| I(v_2) - I(v_1) | \leq K \parallel v_2 - v_1 \parallel_X, \ v_i \in V, \ i = 1, 2.$$

A **derivada direcional** de I em u na direção de $v \in X$ é definida por:

$$I^0(u;v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}.$$

Segue que $I^0(u;.)$ é **subaditivo** e **positivamente homogêneo**, isto é

$$I^0(u; v_1 + v_2) \leq I^0(u; v_1) + I^0(u; v_2)$$

e

$$I^0(u; \lambda v) = \lambda I^0(u; v),$$

para $u, v, v_1, v_2 \in X$ e $\lambda > 0$. Usando estas notações, temos

$$\begin{aligned} | I^0(u; v_1) - I^0(u; v_2) | &\leq I^0(u; v_1 - v_2) \\ &\leq K \parallel v_1 - v_2 \parallel_X, \end{aligned}$$

para algum $K = K_u > 0$. Daí $I^0(u; .)$ é contínua e como também convexa sua **subdiferencial** em $z \in X$ é dada por

$$\partial I^0(u; z) = \left\{\mu \in X^*; I^0(u; v) \geq I^0(u; z) + \langle \mu, v - z\rangle,\ v \in X\right\},$$

onde $\langle ., . \rangle$ é a dualidade entre X^* e X. O **gradiente generalizado** de I em u é o conjunto

$$\partial I(u) = \left\{\mu \in X^*; \langle \mu, v\rangle \leq I^0(u; v),\ v \in X\right\}.$$

Desde que $I^0(u; 0) = 0$, $\partial I(u)$ é o subdiferencial de $I^0(u; 0)$.
As seguintes propriedades valem:

P_1). $\partial I(u) \subset X^*$ é convexo, não vazio e compacto na topologia fraca-$*$,

P_2). $m(u) = \min\left\{ \parallel \mu \parallel_{X^*}; \mu \in \partial I(u)\right\}$;

P_3). $\partial I(u) = \left\{I'(u)\right\}$, se $I \in C^1(X; \mathbb{R})$.

P_4). Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(I + J)(u) = \partial I(u) + \partial J(u),\ u \in X.$$

P_5). A função ∂I é fechado fraco-$*$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset (X, X^*)$ é uma sequência tal que $\xi_j \in \partial I(x_j)$, além disso

$$x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ em } X \text{ e } \xi_j \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ em } X^*,$$

então $\xi \in \partial I(x)$.

P_6). Sejam $I, J \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, para cada $u \in X$ tem-se que

$$\partial I(u) \subset \partial J(u) \text{ se e só se } I^0(u; v) \leq J^0(u; v),\ v \in X.$$

P_7). $I^0(u; v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é

$$\limsup_{n\to+\infty} I^0(u_n; v_n) \leq I^0(u, v),$$

onde (u_n, v_n) converge forte para (u, v) em $X \times X$.

Um vetor $u_0 \in X$ é **ponto crítico** de I se

$$0 \in \partial I(u_0).$$

Um número $c \in \mathbb{R}$ é **valor crítico** de I se existe um ponto crítico u_0 tal que

$$I(u_0) = c.$$

Observação A.0.1 *Se $I \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$ e $u_0 \in X$ é um mínimo local de I, então u_0 é ponto crítico de I.*

Observação A.0.2 *Para cada $u, v \in X$,*

$$I^0(u;v) = \max\{\langle \mu, v\rangle; \mu \in \partial I(u)\}.$$

Definição A.1 *Diz-se que uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma **sequência de Palais-Smale no nível** c para o funcional I, e escreve-se $(PS)_c$, quando*

$$I(u_n) \to c \text{ e } m(u_n) \to 0.$$

Definição A.2 *Diz-se que um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a **condição de Palais-Smale no nível** c, e escreve-se $(PS)_c$, quando para toda sequência (u_n) $(PS)_c$, existir uma subsequência de (u_n) que convirga forte em X.*

Teorema A.3 *(Regra da Cadeia) Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz definido sobre o espaço de Banach Y. Se X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y e X é um subespaço denso em Y, temos*

$$\partial g|_X(u) = \partial g(u) \;\; u \in X.$$

Definição A.4 *Sejam $\mathcal{C} \subset X$ convexo e $I \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$. Diz-se que I satisfaz $(PS)_{c,\mathcal{C}}$ se: dada uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{C}$ tal que*

$$I(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c \text{ e } m(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então (u_n) têm subsequência convergente em $\mathcal{C}$.

Teorema A.5 ***(Mizoguchi)*** *Seja $I \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$ limitado inferiormente em um convexo fechado com interior não-vazio ($int(\mathcal{C}) \neq \emptyset$) e faça*

$$c = \inf_{u \in \mathcal{C}} I(u).$$

Suponha que

$$I(\widetilde{u}) < \inf_{\partial \mathcal{C}} I(u), \text{ para algum } \widetilde{u} \in int(\mathcal{C}).$$

Então I admite mínimo local $u \in int(\mathcal{C})$, desde que

$$I \text{ satisfaz } (PS)_{c,\mathcal{C}}.$$

Demonstração. Confira Mizoguchi [47]. ■

Teorema A.6 ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Sejam X um espaço de Banach real e $I \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$. Suponha que existam $\rho, r > 0$ e $e \in X$, com $\| e \|_X > r$ tais que*

$$I(e) \leq 0 \text{ e } \inf_{\|u\|_X = r} I(u) \geq \rho.$$

Sejam

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \big\{\gamma \in C([0,1]; X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\big\}.$$

Então

$$c \geq \rho,$$

e existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c \text{ e } m(u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Além disso, se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico para I.

Demonstração. Confira Chang [25]. ■

Apêndice B

Regularidade de Funcionais Energia

Reservamos este espaço para justificar que os funcionais J_1 e J_2 definidos no Capítulo 3 são de classe C^1 em $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Lema B.1 *Os funcionais $J_1, J_2 : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$J_1(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx \text{ e } J_2(u) = \int_\Omega B(u)dx.$$

são continuamente diferenciáveis a Fréchet sobre $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Além disso, suas derivadas $J_1'(u), J_2'(u) : W_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, são dadas por:

$$\langle J_1'(u), v\rangle = \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla v dx \text{ e } \langle J_2'(u), v\rangle = \int_\Omega \overline{b}(u)uvdx,$$

para quaisquer $u, v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Demonstração. Para provarmos este lema, mostraremos a seguir os seguintes fatos.

- J_1 e J_2 são funcionais contínuos.

  Seja $(u_n) \subset W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, tal que

$$u_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega), \tag{B.1}$$

isto é

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid)dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste fato segue da teoria de medida e integração, que existe $\eta \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) \leq \eta \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{B.2}$$

Observe que

$$\begin{aligned} | J_1(u_n) - J_1(u) | &= \Big| \int_\Omega \big(\Phi(| \nabla u_n |) - \Phi(| \nabla u |)\big) dx \Big| \\ &\leq \int_\Omega | \Phi(| \nabla u_n |) - \Phi(| \nabla u |) | \, dx, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Tem-se de (B.2)

$$\begin{aligned} | \Phi(| \nabla u_n |) - \Phi(| \nabla u |) | &\leq c_1 \Phi(| \nabla u_n - \nabla u |) + c_2 \Phi(| \nabla u |) \\ &\leq c_1 \eta + c_2 \Phi(| \nabla u |) \in L_1(\Omega). \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.26

$$| \Phi(| \nabla u_n |) - \Phi(| \nabla u |) | \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Daí temos pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega | \Phi(| \nabla u_n |) - \Phi(| \nabla u |) | \, dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue-se de (B.3)

$$| J_1(u_n) - J_1(u) | \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando a continuidade de J_1. De (B.1), temos

$$u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_{\Phi_*}(\Omega),$$

consequentemente

$$\int_\Omega \Phi_*(u_n - u) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim existe $\eta_* \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi_*(u_n - u) \leq \eta_* \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{B.4}$$

Neste caso

$$\begin{aligned} | B(u_n) - B(u) | &\leq c_1 \Phi_*(u_n) + c_1 \Phi_*(u) \\ &\leq c_1 \Phi_*(u_n - u) + c_2 \Phi_*(u) \\ &\leq c_1 \eta_* + c_2 \Phi_*(u) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Além disso, conclui-se de (3.63) que

$$| B(u_n) - B(u) | \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Sabendo disto, temos pelo Teorema de Lebesgue que

$$| J_1(u_n) - J_2(u) | \leq \int_\Omega | B(u_n) - B(u) | \, dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando a continuidade de J_2.

- J_1 possui derivada a Gâteux.

Primeiramente afirmamos:

Afirmação B.1 *Para cada* $w = (w_1, ..., w_N) \in \mathbb{R}^N$, *temos*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\Phi(| w |)\big) = \phi(| w |)w_i,$$

onde $w = (w_1, ..., w_N)$.

Esta afirmação segue do Teorema da Regra da Cadeia para o espaço euclidiano. Da Afirmação B.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\big(\Phi(| w |)\big) &= \nabla\Phi(| w |)v \\ &= \phi(| w |)wv, \;\; w, v \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{B.5}$$

em particular

$$\frac{\partial}{\partial \nabla v}\big(\Phi(| \nabla u |)\big) = \phi(| \nabla u |)\nabla u \nabla v, \;\; u, v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

e portanto segue da definição de derivada direcional que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla v |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} = \phi(| \nabla u |)\nabla u \nabla v, \tag{B.6}$$

para quaisquer $u, v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Fixado $x \in \Omega$ e $| t | \in (0, 1)$, existe pelo Teorema do Valor Médio $\theta(x) \in (0, 1)$ verificando

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla v |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} \right| &= \frac{1}{| t |} \frac{\partial \Phi(| \, . \, |)}{\partial \,(t\nabla v)} \,(\nabla u + \theta(x) t \nabla v) \\ &= | \, \phi(| \nabla u + \theta(x)t\nabla v |)(\nabla u + \theta(x)t\nabla v)\nabla v \, | \\ &\leq \phi(| \nabla u + \theta(x)t\nabla v |) \, | \nabla u + \theta(x)t\nabla v || \nabla v | \end{aligned}$$

segue da monotonicidade de $\phi(t)t$ que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla v |) - \Phi(\nabla u)}{t} \right| &\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla v |)(| \nabla u | + | \nabla v |) \, | \nabla v | \\ &\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla v |)(| \nabla u | + | \nabla v |)^2 \\ &\leq m\Phi(| \nabla u | + | \nabla v |) \in L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{B.7}$$

De $(B.6)$ e $(B.7)$, conclui-se pelo Teorema de Lebesgue

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial v}(u) &= \lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t}\\ &= \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla v dx,\end{aligned}$$

para qualquer $u, v \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$, mostrando assim que o funcional $J_1 : W_0^1L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ possui derivada a Gâteux.

- J_2 possui derivada a Gâteux.

  Lembre que

$$B(s) = \int_0^s b(t)tdt,\ \ s \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que

$$B'(s) = b(s)s,\ \ s \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $u, v \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}\frac{B(u+tv)-B(u)}{t} &= \frac{b\big(\theta_t(x)\big)\theta_t(x)}{t}(u+tv-u)\\ &= b\big(\theta_t(x)\big)\theta_t(x)v,\ \ t\in\mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N,\end{aligned} \tag{B.8}$$

onde

$$\theta_t(x) \in [\min\{u+tv, u\}, \max\{u+tv, u\}].$$

Seja $(t_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência, tal que $t_n \to 0$. De (S_3) e (S_4)

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_*\big(b\big(\theta_{t_n}(x)\big)\theta_{t_n}(x)\big) &\le \widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{b_1 m^*\Phi_*(|\theta_{t_n}(x)|)}{|\theta_{t_n}(x)|}\Big)\\ &\le c_0\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{\Phi_*(|\theta_{t_n}|)}{|\theta_{t_n}|}\Big),\end{aligned}$$

segue do Lema 3.9 que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_*\Big(b\big(\theta_{t_n}(x)\big)\theta_{t_n}(x)\Big) &\le c_0\Phi_*(|\theta_{t_n}(x)|) \le c_0\Phi_*(|u|+|v|)\\ &\le c_1\Phi_*(|u|) + c_2\Phi_*(|v|),\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Justificando assim que a sequência $\big(b\big(\theta_{t_n}(x)\big)\theta_{t_n}(x)\big)$ é limitado em $L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$. De (B.8), conclui-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $x \mapsto b(\theta_{t_n}(x))\theta_{t_n}(x)$ é mensurável. Sabendo disto, desde que

$$b(\theta_{t_n}(x))\theta_{t_n}(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b\big(u(x)\big)u(x) \text{ pontualmente em } \Omega,$$

segue pelo Teorema 2.7 (Brézis e Lieb para N-funções)

$$b(\theta_{t_n})\theta_{t_n} \rightharpoonup b(u)u \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega),$$

e assim

$$\int_\Omega b(\theta_{t_n})\theta_{t_n} v dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u)uvdx,\ v \in W_0^1L_\Phi(\Omega).$$

Donde segue que

$$\int_\Omega \frac{B(u+tv)-B(u)}{t}dx \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega b(u)uvdx,$$

para qualquer $u, v \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$. Mostrando assim, que a derivada a derivada a Gâteux existe e é dado por:

$$\frac{\partial J_2}{\partial v}(u) = \int_\Omega b(u)uvdx,\ u, v \in W_0^1L_\Phi(\Omega).$$

- As derivadas a Gâteux $\dfrac{\partial J_1}{\partial v}(.)$ e $\dfrac{\partial J_2}{\partial v}(.)$ são contínuas.

Primeiramente mostraremos a continuidade de $\dfrac{\partial J_1}{\partial v}(.)$. Seja $(u_n) \subset W_0^1L_\Phi(\Omega)$ uma sequência convergente em $W_0^1L_\Phi(\Omega)$, isto é

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } W_0^1L_\Phi(\Omega),$$

para algum $u \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$. Veja que, para cada $v \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial J_1}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial J_1}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx\right| \\ &\le \int_\Omega |\big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)\nabla v|\, dx \\ &\le \|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}} \|\nabla v\|_\Phi . \qquad \text{(B.9)}\end{aligned}$$

Afirmação B.2 $\|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Para mostrarmos esta afirmação, basta mostrarmos que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\big(\,|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|\,\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Temos de (B.2)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}\big(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid\big) &\leq c_1\widetilde{\Phi}\big(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid\big) \\
&\quad + c_2\widetilde{\Phi}\big(\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid\big) \\
&\leq c_1\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + c_2\Phi(\mid \nabla u \mid) \\
&\leq c_1\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + c_2\Phi(\mid \nabla u \mid) \\
&\leq c_1\eta + c_2\Phi(\mid \nabla u \mid) \in L^1(\Omega),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

para n suficientemente grande. Segue do Lema 3.26

$$\widetilde{\Phi}\big(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid\big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{B.11}$$

De (B.10) e (B.11), tem-se pelo Teorema de Lebesgue que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\big(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando a Afirmação B.2. Conclui-se de (B.10) e da Afirmação B.2, que a aplicação $\dfrac{\partial J_1}{\partial v}(.)$ é contínua, para cada $v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ fixado. Mostraremos agora a continuidade de J_2. Observe que, para cada $v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_2}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial J_2}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega (b(u_n)v - b(u)uv)dx\right| \\
&\leq \| b(u_n)u_n - b(u)u \|_{\widetilde{\Phi}_*} \| v \|_{\Phi_*},
\end{aligned} \tag{B.12}$$

onde (u_n) é uma sequência de $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ tal que

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } W_0^1 L_\Phi(\Omega).$$

Afirmação B.3 $\| b(u_n)u_n - b(u)u \|_{\widetilde{\Phi}_*} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Para mostrarmos esta afirmação, basta mostrarmos que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}_*\big(b(u_n)u_n - b(u)u\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_*\big(b(u_n)u_n - b(u)u\big) &\leq c_1\widetilde{\Phi}_*\big(b(u_n)u_n\big) + c_2\widetilde{\Phi}_*\big(b(u)u\big) \\
&\leq c_1\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{B(u_n)}{u_n}\Big) + c_2\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{B(u)}{u}\Big),
\end{aligned}$$

donde segue do item (iii) do Lema 3.9 e da desigualdade (B.4)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_*\big(b(u_n)u_n - b(u)u\big) &\leq c_1\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{\Phi_*(u_n)}{u_n}\Big) + c_2\widetilde{\Phi}_*\Big(\frac{\Phi_*(u)}{u}\Big)\\
&\leq c_1\Phi_*(u_n) + c_2\Phi_*(u)\\
&\leq c_1\Phi_*(u_n - u) + c_2\Phi_*(u)\\
&\leq c_1\Phi_*(u_n - u) + c_2\Phi_*(u)\\
&\leq c_1\eta_* + c_2\Phi_*(u) \in L^1(\Omega),\ n \in \mathbb{N}. \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Note que

$$\widetilde{\Phi}_*\big(b(u_n)u_n - b(u)\big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \qquad \text{(B.14)}$$

De (B.13) e (B.14)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\big(b(u_n)u_n - b(u)u\big)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando assim a Afirmação B.3. Conclui-se de (B.12) e da Afirmação B.3 que o funcional $\dfrac{\partial J_2}{\partial v}(.)$ é contínua, para cada $v \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$ fixado.

- As aplicações $\dfrac{\partial J_1}{\partial(.)}(u)$ e $\dfrac{\partial J_2}{\partial(.)}(u)$ são lineares e contínuas.

Primeiramente mostraremos a linearidade e continuidade de $\dfrac{\partial J_1}{\partial(.)}(u)$. Fixe $u \in W_0^1L_\Phi(\Omega)$. Seja $(v_n) \subset W_0^1L_\Phi(\Omega)$ uma sequência tal que

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ em } W_0L_\Phi(\Omega). \qquad \text{(B.15)}$$

De (B.15)

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial J_1}{\partial v_n}(u) - \frac{\partial J_1}{\partial v}(u)\Big| &= \Big|\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla v_n - \nabla v)dx\Big|\\
&\leq \|\phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}}\|\nabla v_n - \nabla v\|_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Mostrando a continuidade de $\dfrac{\partial J_1}{\partial(.)}(u)$. É imediato observar que $\dfrac{\partial J_1}{\partial(.)}(u)$ é uma aplicação linear. Mostraremos agora a linearidade e continuidade de $\dfrac{\partial J_2}{\partial(.)}(u)$. Fixe $u \in W_0L_\Phi(\Omega)$. É imediato observar que $\dfrac{\partial J_2}{\partial(.)}(u)$ é uma aplicação linear. Suponha que $(v_n) \subset W_0^1L_\Phi(\Omega)$ seja uma sequência convergente, isto é

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ em } W_0L_\Phi(\Omega),$$

segue daí que

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ em } L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Deste fato

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_2}{\partial v_n}(u) - \frac{\partial J_2}{\partial v}(u)\right| &\leq \int_\Omega \mid b(u)u(v_n - v) \mid dx \\
&\leq \; \| \, b(u)u \, \|_{\widetilde{\Phi}_*} \| \, v_n - v \, \|_{\Phi_*} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

mostrando assim a continuidade de $\dfrac{\partial J_2}{\partial(.)}(u)$.

De todos estes fatos, conclui-se que $J_1, J_2 \in C^1(W_0^1 L_\Phi(\Omega))$. $\blacksquare$

Bibliografia

[1] Adams, R. A. & Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces*, second edition, Elsevier Science, Oxford 2003.

[2] Alves, C. O., *Existence of positive solutions for a problem with lack compactness involving the p-Laplacian*, Nonlinear Analysis 51 (2002) 1187-1106.

[3] Alves, C. O. & Bertone, A. M. , *A discontinuos problem involving the p-laplacian operador and critical exponent in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2003(2003), No. 42, pp. 1–10.

[4] Alves, C. O., Bertone, A. M. & Gonçalves, J. V., *A Variational Approach to Discontinuos Problems with Critical Sobolev Exponents*, J. Math. Anal. App. 265, 103-127 (2002).

[5] Alves, C. O. & Gonçalves, J. V., *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. 32 (1998), 53-70.

[6] Alves, C. O., Gonçalves J. V. & Santos, J. A., *On multiple solutions for multi-valued elliptic equations under Navier boundary conditions*, Journal of Convex Analysis, preprint (2011).

[7] Ambrosetti, A. & Badiale, M., *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. 140 (1989), 363-373.

[8] Ambrosetti, A., Brézis, H. & Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[9] Ambrosetti, A., Calahorrano, M. & Dobarro, F., *Global branching for discontinuous problems*, Comm. Math. Univ. Carolinae 31 (1990) 213-222.

[10] Ambrosetti, A., Garcia Azorero, J. & Peral Alonso, I.,*Elliptic variational problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Special essue in celebration of Jack K. Hale's 70th birthday, Part 1 (Atlanta, Lisbon, 1998), J. Differential Equations 168 (2000), 10-32.

[11] Ambrosetti, A & Rabinowtz, P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 149 (1973), 349-381.

[12] Ambrosetti, A. & Turner, R. E. L. *Some discontinuous variational problems*, Differential Integral Equations 1 (1988) 341-349.

[13] Badiale, M. & Tarantello, G., *Existence and Multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities*, Nonlinear Anal. 29 (1997), 639-677.

[14] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library Edition Published 1995.

[15] Ben-Naoum, A. K., Troesther, C. & Willem, M., *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains*, Nonlinear Anal. 26 (1996), 823-833.

[16] Bartolo, P., Benci, V. & Fortunato, P., *Abstract critical point theorems and applications to nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal., 7 (1983), 961-1012.

[17] Benci, V. & Rabinowtz, P.H.,*Critical point theory for indefinite functionals*, Ivent. Math. (1979), 241-273.

[18] Bertone, A. M. & Gonçalves, J. V., *Discontinuous elliptic problems in $\mathbf{R}^N$ RN: lower and upper solutions and variational principles*, Discrete Contin. Dynam. Systems 6 (2000), no. 2, 315-328.

[19] Brezis, H., *Analyse Functionelle*, Masson, Paris, 1983.

[20] Brezis, H. & Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functinals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486-490.

[21] Brézis, H. & Niremberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev expoents*, Comm. pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[22] Carl, S. & Dietrich, H., *The weak upper and lower solution method for elliptic equations with generalized subdifferentiable perturbations*, Appl. Anal. 56 (1995), 263-278.

[23] Carl, S. & Heikkila S., *Elliptic equtions with discontinuous nonlinearities in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. 31 (1998), 217-227.

[24] Cerami, G., *Metodi variazionalli nello studio di problemi al contorno con parte nonlineare discontinua*, Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1983), 336-357.

[25] Chang, K. C., *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations.* J. math. Analysis Aplic. 1981, 80, 102-129.

[26] Clarke, F. H., *Optimization and Nonsmooth analysis.* SIAM, Philadelphia, 1990.

[27] Costa, D. G. & Gonçalves, J.V. *Critical point theory for nondifferentiable functionals and applications*, J. Math. Anal. Applic. 153, 470-485.

[28] Costa, D. & Silva, E. A. B., *Existence of solution for a class of resonant elliptic problems*, J. Math. Anal. Appl. 175 (1993), pp. 411–424.

[29] Dal Maso, G. & Murat, F., *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. 31 (1998), 405-412.

[30] Donaldson, T. K. & Trudinger, N. S., *Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems*, Journal of Functional Analysis 8, 52-75 (1971).

[31] Fuchs, M. & Osmolovski, V., *Variational integrals on Orlicz–Sobolev spaces.* Z. Anal. Anwendungen 17, 393–415 (1998) 6.

[32] Fukagai, N., Ito, M. & Narukawa, K., *Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Equations with Critical Orlicz-Sobolev Nonlinearity on* R^N. Funckcialaj Ekvacioj, 49 (2006) 235-267 .

[33] Fukagai, N. & Narukawa, K., *Nonlinear eigenvalue problem for a model equation of an elastic surface.* Hiroshima Math. J. 25, 19–41 (1995) 8.

[34] Gárcia Azorero, J. & Peral Alonso, I., *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent on with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991). 877-895.

[35] Gonçalves, J. V. & Miyagaki, O., *Existence of nontrivial solutions for semilinear elliptic equations at resonance*, Houston J. Math., 16 (1990), 583-594.

[36] Gonçalves, J. V. & Miyagaki, O., *Multiple nontrivial solutions of semilinear strongly resonant elliptic equations*, Nonlinear. Anal. Appl., 19 (1992), 43-52.

[37] Gonçalves, J. V. & Miyagaki, O., *Three solutions for a strongly resonant elliptic problem*, Nonlinear Anal. 24 (1995), 265-272.

[38] Gossez, J. P., *Orlicz Spaces, Orlicz-Sobolev spaces and Strongly Nonlinear Elliptic Problems*, Trabalho de Matemática N$^{\underline{o}}$103, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 1976.

[39] Guedda, M. & Váron, L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 879-902.

[40] Gupta, C. P. & Kwong, Y. G., *Biharmonic eigen-value problems and L^p estimates*, J. Math. & Math. sci., 13 (1990), 469-480.

[41] Halidias, N., *Elliptic problems with discontinuities*, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002) 13-27.

[42] Hu, S., Kourogenis, N. & Papageorgiou, N. S., *Nonlinear elliptic eigenvalue problems with discontinuities*, J. Math. Anal. Appl. 233 (1999), 406-424.

[43] Kourogenis, N. & Papageorgiou, N. *Three Nontrivial Solutions for a Quasilinear Elliptic Differrential Equation at Resonance with Discontinuous Right Hand Side*, J. Math. Analysis Applic., 238 (1999), 477-490.

[44] Kranosel'skii, M. A. & Rutickii, Ja. B., *Convex Function and Orlicz Spaces*, Translated from the first Russian edition by L. F. Boron P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[45] Kufner, A., John, O. & Fucik, S., *Function Space*, Noordhoff Internetional Publishing, 1977.

[46] Medeiros, L. A. J. & Miranda, M. A. M., *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*, Rio de Janeiro, UFRJ-IM, 2000.

[47] Mizoguchi, N., *Existence of nontrivial solutions of partial differential equations with discontinuous nonlinearities*, Nonlinear Anal. 16 (1991) 1025-1034.

[48] Palais, R. S. & Smale, S., *A generalized Morse Theory,* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 165-171.

[49] Pohozaev, S. L., *Eingenfunctions for the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math, Dokl, 6 (1965), 1408-1411.

[50] Radulescu, V. & Gazzola, F., *A nonsmoth point theory approach to some nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Differ. Integral Equ. (2000) 13 (1-3), 47-60.

[51] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New-York (1987).

[52] Schwartz, J., *Generalizing the Ljusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1969), 307-315.

[53] Silva, E. A. B. & Soares, S.H.M., *Quasilinear Dirichlet problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonlinear Anal. 43 (2001), 1-20.

[54] Silva, E. A. B. & Xavier, M. S., *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), 341-358.

[55] Willem, M., *Minimax Theorem*, Birkhauser, 1996.