Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

# Continuidade de atratores para uma família de equações parabólicas em domínios perturbados com condição de fronteira de Neumann

por

**Wesley Ferreira Lopes**

**Orientadora: Simone Mazzini Bruschi**

Brasília

2011

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

# Continuidade de atratores para uma família de equações parabólicas em domínios perturbados com condição de fronteira de Neumann

por

**Wesley Ferreira Lopes***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 26 de abril de 2011.

Comissão Examinadora:

---

Profª. Dra. Simone Mazzini Brushi - MAT/UnB (Orientadora)

---

Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira - EACH/USP - Membro

---

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB - Membro

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

*À minha família*

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por estar sempre presente. À minha família pelo incentivo e por me fazerem acreditar que os sonhos são possíveis. Agradeço também ao professor Célius Antônio Magalhães pelos conselhos e palavras de encorajamento. Também sou grato à Professora Simone Mazzini Bruschi por toda paciência e esforço desprendidos durante a orientação e a confiança depositada em mim. Finalmente, gostaria de agradecer aos colegas do curso pela descontração e os momentos de confraternização que certamente ficarão para sempre na memória.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

# Resumo

Neste trabalho estudamos a continuidade dos atratores para problemas parabólicos semilineares com condição de fronteira de Neumann. Veremos que se as perturbações nos domínios são tais que a convergência dos autovalores e autofunções do laplaciano com condição de fronteira de Neumann é garantida, teremos a semicontinuidade superior dos atratores. Além disso, se todo ponto de equilíbrio for hiperbólico, teremos a continuidade dos atratores.

**Palavras-chave**: Atratores; semicontinuidade inferior; semicontinuidade superior; Perturbação de domínios.

# Abstract

In this work we study the continuity of attractors for semilinear parabolic problems with Neumann boundary condition. We will see that if the perturbations on the domain are such that the convergence of eigenvalues and eigenfunctions of the Neumann Laplacian is granted, we have the upper semicontinuity of the attractors. Moreover, if every equilibrium point is hyperbolic, we have the continuity of the attractors.

**Keywords**: Attractors; Lower semi-continuity; Upper semi-continuity; Perturbation of the domain.

# Sumário

# Introdução

Este trabalho está baseado no artigo [1] e considera uma família de equações de reação-difusão da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega_\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ é uma família de domínios Lipschitz limitados em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. O caso Neumann não linear é tratado em [11], que prova a continuidade dos atratores para deformações $h(\Omega)$, onde $h$ é $C^1$ próxima da identidade. O caso onde temos condição de fronteira de Dirichlet é tratado em [12]. Nos casos Robin ou Neumann não linear não é tratada a continuidade de atratores, mas apenas de pontos de equilíbrio para perturbações mais gerais.

Neste trabalho, analisaremos como a dinâmica assintótica do problema (1) muda quando variamos o domínio. Estudaremos como o comportamento das propriedades espectrais do operador linear $-\Delta$, sob variação do domínio, determina o comportamento da dinâmica não linear de (1). Para isso, precisaremos que a não linearidade $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua em ambas as variáveis $(x,u)$ e $f \in C^2$. Além disso, $f$ deve satisfazer a seguinte hipótese de dissipatividade

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} < 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Foi mostrado em [6] que o problema (1) está bem posto em $W^{1,q}(\Omega_\varepsilon)$, $q > N$, sem qualquer restrição sobre o crescimento de $f$. Além disso, sob a hipótese (2), o problema (1) possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$, que é essencialmente independente de $q$ e que os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ são limitados em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, uniformemente em $\varepsilon$. Isto nos permite cortar a não linearidade $f$ de tal forma que ela se torne limitada e com derivadas limitadas até segunda ordem sem alterar os atratores. Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2$ satisfazendo (2) e existem constantes positivas $c_f$ e $\tilde{c}_f$ tais que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq c_f, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,u)\right| \leq \tilde{c}_f, \quad \forall\ (x,u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

O fato de a não linearidade $f$ ser globalmente Lipschitz nos permite estudar o problema no espaço $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Os atratores estarão em espaços mais regulares, como $W^{1,q}(\Omega_\varepsilon)$, para qualquer $1 < q < \infty$, mas suas propriedades de continuidade serão analisadas na topologia dos espaços $H^1$.

Vamos considerar $\Omega_\varepsilon$ como uma perturbação do domínio fixo $\Omega_0$ e assumiremos a seguinte condição:

$$\begin{cases} \text{Para cada } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ (\Omega_\varepsilon) \text{ é limitado e Lipschitz e} \\ \text{para todo } K \subset\subset \Omega_0,\ \text{existe } \varepsilon(K),\ \text{tal que } K \subset \Omega_\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(K) \end{cases} \tag{4}$$

Não há a hipótese que $|\Omega_\varepsilon \backslash \Omega_0| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, onde $|\Omega_\varepsilon \backslash \Omega_0|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega_\varepsilon \backslash \Omega_0$. Em geral, se $C$ for um conjunto, denotamos por $|C|$ a medida de Lebesgue do conjunto $C$.

Uma das principais dificuldades quando se trata de problemas de perturbação de domínios é que as soluções pertencem a espaços diferentes (dizemos $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0 \in H^1(\Omega_0)$) e portanto estimativas do tipo $u_\varepsilon - u_0$ devem ser claramente representadas. Neste trabalho vamos considerar, para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, o espaço

$$H^1_\varepsilon = H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0) \oplus H^1(\Omega_\varepsilon \backslash \overline{\Omega}_0) \oplus H^1(\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon), \tag{5}$$

ou seja, $H^1_\varepsilon = \{\phi \in L^2(\Omega_0 \cup \Omega_\varepsilon)$, tal que $\phi_{|\Omega_0 \cap \Omega_\varepsilon} \in H^1(\Omega_0 \cap \Omega_\varepsilon)$, $\phi_{|\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon} \in H^1(\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon)$, $\phi_{|\Omega_\varepsilon \backslash \overline{\Omega}_0} \in H^1(\Omega_\varepsilon \backslash \overline{\Omega}_0)\}$ com a norma

$$\|u\|^2_{H^1_\varepsilon} = \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon \backslash \overline{\Omega}_0)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon)}.$$

Se considerarmos a extensão por zero fora de $\Omega_0$ temos $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow H^1_\varepsilon$, com constante de imersão igual a 1 e estendendo por zero fora de $\Omega_\varepsilon$ temos $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow H^1_\varepsilon$, com constante de imersão também igual a 1. Assim, se $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, $u_0 \in H^1(\Omega_0)$ podemos escrever $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}$. Além disso, dizemos que $u_\varepsilon \to u_0$ em $H^1_\varepsilon$ se $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Se considerarmos a extensão por zero fora de $\Omega_\varepsilon$ ou $\Omega_0$, temos $L^2(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ e $L^2(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, para funções $V_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $V_0 \in L^2(\Omega_0)$, afirmações do tipo $V_\varepsilon \to V_0$ ou $V_\varepsilon \rightharpoonup V_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ farão sentido. Além disso, se temos um operador $T$ agindo sobre $L^2(\Omega_\varepsilon)$, podemos também considerar este operador agindo sobre $L^2(\Omega_0)$; basta ver qualquer elemento de $u_0 \in L^2(\Omega_0)$ como um elemento de $L^2(\Omega_\varepsilon)$: primeiramente fazendo a extensão por zero de $u_0$ fora de $\Omega_0$ e depois fazendo a restrição à $\Omega_\varepsilon$. Da mesma forma podemos fazer com operadores definidos em $u_0 \in L^2(\Omega_0)$.

Nesse trabalho, estudamos resultados que dão condições sobre o comportamento de $\Omega_\varepsilon$ quando $\varepsilon \to 0$ e sobre o problema não perturbado, (1) com $\varepsilon = 0$, que garantem a continuidade (semicontinuidade superior e inferior) dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ em $H^1_\varepsilon$ quando $\varepsilon \to 0$. Mais precisamente, mostraremos os seguintes resultados:

*i) A semicontinuidade superior dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ em $H^1_\varepsilon$*, que é obtida exigindo a convergência espectral em $H^1_\varepsilon$ do laplaciano de Neumann quando $\varepsilon \to 0$, ou seja, exigindo que os autovalores e as autofunções do operador de Laplace com condições de fronteira de Neumann se comportem continuamente em $H^1_\varepsilon$ quando $\varepsilon \to 0$.

*ii) A semicontinuidade inferior dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ em $H^1_\varepsilon$.* Uma vez que a semicontinuidade superior é obtida, a semicontinuidade inferior $H^1_\varepsilon$ é obtida exigindo que cada ponto de equilíbrio do problema não perturbado seja hiperbólico.

Por semicontinuidade superior dos atratores em $H^1_\varepsilon$ queremos dizer que

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Por semicontinuidade inferior dos atratores em $H^1_\varepsilon$ queremos dizer que

$$\sup_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \inf_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

É importante mencionar que não é exigida nenhuma condição geométrica sobre a perturbação $\Omega_\varepsilon$, além da hipótese geral (4). As condições exigidas sobre a perturbação é que os autovalores e as autofunções do laplaciano de Neumann se comportem continuamente quando $\varepsilon \to 0$. Em particular, uma vez que o laplaciano se comportar continuamente, na maneira descrita acima, os atratores de (1) serão semicontinuos superiormente. Além disso, se todos os pontos de equilíbrio do problema limite são hiperbólicos, então os atratores se comportarão continuamente. Dessa forma, podemos dizer que o comportamento da dinâmica não linear de (1) é ditada pelo comportamento do operador linear $\Delta$.

Na Seção 2.1 são dadas condições necessárias e suficientes para obter a convergência espectral dos operadores lineares sob a classe de perturbação de domínios satisfazendo (4), ver Proposição 2.1. Em seguida, veremos que exigindo apenas a convergência espectral dos operadores lineares, obtemos a convergência dos operadores resolventes (ver Proposição 2.2). Na Seção 2.2, provamos, usando a fórmula de variação das constantes e os resultados sobre semigrupos lineares da Seção 2.1, que a família de semigrupos não lineares $\{T_\varepsilon(t),\ t \geq 0\}$ asssociada à (1) é uniformemente contínua em $\varepsilon = 0$, em intervalos compactos de $(0, \infty)$. Ou seja, se $u_0^\varepsilon \in H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ com $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H_\varepsilon^1} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, então para $0 < r < R < \infty$ temos que

$$\sup_{r \leq t \leq R} \|T_\varepsilon(t)(u_\varepsilon) - T_0(t)(u_0)\|_{H_\varepsilon^1} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Nas Seções 2.3 e 2.4 estudamos a continuidade dos atratores. Finalmente, na Seção 2.5 damos um exemplo de perturbação de domínio onde as condições desse trabalho são aplicadas e um outro exemplo onde esses resultados não podem ser usados.

# Capítulo 1

# Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e estabelecemos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

## 1.1 Espaços funcionais e resultados básicos

**Espaços** $L^p$. Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ u \text{ mensurável e } \operatorname{supess}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{supess}_{x \in \Omega} |u(x)| \, .$$

Em particular, se $p = 2$, temos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, com o produto interno definido por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) dx.$$

A seguinte propriedade se encontra em [5].

**Lema 1.1 (Desigualdade de Hölder).** *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se*

$$\int_\Omega |uv|\, dt \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

*onde $1 \le p, q < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

No caso em que $p = 2$, a desigualdade de Hölder é conhecida, também, como desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Espaço das Distribuições**. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\Omega)$, cujo suporte é compacto contido em $\Omega$.

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, com a seguinte noção de convergência: uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se
*i)* *supp*$(\varphi_n - \varphi) \subset K$, onde $K$ é um compacto fixo de $\Omega$,
*ii)* a sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, juntamente com suas derivadas de todas as ordens, convergem uniformemente para $\varphi$ em $\Omega$.
Toda forma linear contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$ é por definição denominada uma distribuição sobre $\Omega$. O conjunto de todas as ditribuições sobre $\Omega$ é um espaço vetorial denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e é chamado espaço das distribuições sobre $\Omega$.

**Espaços de Sobolev**. Sejam $m > 0$ um inteiro e $1 \le p \le \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, 0 \le |\alpha| \le m\},$$

onde $\mathcal{D}^\alpha u$ é o operador derivação de ordem $\alpha$. Este espaço munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando} \quad 1 \le p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

é um espaço de Banach.

Evidentemente, na definição de $W^{m,p}(\Omega)$, as derivadas parciais são entendidas no sentido das distribuições, assim $\mathcal{D}^\alpha u$ é uma distribuição, tal que

$$\langle \mathcal{D}^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \mathcal{D}^\alpha \varphi, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Para $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$, cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx$$

e

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega \mathcal{D}^\alpha u(x)\mathcal{D}^\alpha v(x)dx.$$

Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado com $L^2(\Omega)$.

Representamos por $H_0^m(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma de $H^m(\Omega)$. Essencialmente, $H_0^m(\Omega)$ é o subespaço de $H^m(\Omega)$ das funções que se anulam na fronteira $\Gamma : \partial\Omega$.

Para a demonstração do seguinte resultado veja, por exemplo, [5].

**Lema 1.2 (Desigualdade de Poincaré).** *Seja $\Omega$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega),$$

*onde $C$ depende apenas de $\Omega$.*

*Em particular, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma induzida por $H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

**Observação 1.1.** *A melhor constante na desigualdade de Poincaré é caracterizada pelo seguinte princípio de minimalidade que envolve o quociente de Rayleigh*

$$\lambda_1 = \min_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_\Omega |\varphi|^2 dx}.$$

*Aqui, $\lambda_1$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta u$ em $H_0^1(\Omega)$ que possui uma sequência de autovalores $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.*

Para demostração dos seguintes resultados, veja [3].

**Lema 1.3 (Desigualdade de Gronwall 1).** *Sejam $a, b, \alpha, \beta$ constantes não negativas tais que $\alpha < 1$, $\beta < 1$ e $0 < t < T < \infty$. Então existe uma constante $M = M(b, \alpha, \beta, T) < \infty$ tal que para qualquer função integrável $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s)ds, \quad q.t.p.\ em\ [0,T],$$

*tem-se*

$$0 \le u(t) \le aMt^{-\alpha}, \quad q.t.p. \ em \ [0,T].$$

**Lema 1.4 (Desigualdade de Gronwall 2).** *Seja $\alpha : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e com primeira derivada não positiva e $\beta : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então para qualquer função integrável $\phi : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$0 \le \phi(t) \le \alpha(t) + \int_t^\tau \beta(s)\phi(s)ds,$$

*tem-se*

$$0 \le \phi(t) \le e^{\int_t^\tau \beta(s)ds}\alpha(t).$$

**Imersões de Sobolev**. Para demonstração do seguinte resultado veja [5].

**Teorema 1.1.** *Sejam $\Omega$ um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $\Omega$ de classe $C^m$ e $1 \le p < \infty$, então as seguintes imersões são contínuas:*

*(a)* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \le q \le \dfrac{np}{n-mp} = p^*$ *se* $mp < n$;

*(b)* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$ *e* $mp = n$.

**Operadores de Extensão**. Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $F(\Omega)$ um espaço vetorial normado cujos elementos são funções reais definidas em $\Omega$. Um operador de Extensão para $F(\Omega)$ é uma transformação linear limitada $E : F(\Omega) \to F(\mathbb{R}^n)$ tal que $(Ef)_{|\Omega} = f$ para todo $f \in F(\Omega)$. A limitação é expressa por

$$\|Ef\|_{F(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{F(\Omega)},$$

para toda $f \in F(\Omega)$ e alguma constante (constante de extensão) $C > 0$. Um exemplo de operador de extensão é aquele que estende as funções de $L^p(\Omega)$ para $\mathbb{R}^n$ como sendo nulas no complementar de $\Omega$. Assim,

$$\|Ef\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$. Neste caso, a constante de extensão é igual a 1.

**Partição da unidade**. Seja $\Gamma$ um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $U_1, U_2, \ldots, U_k$ conjuntos abertos tais que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Então existem funções $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$(i)$ $0 \le \theta_i \le 1$, $i = 0, 1, \ldots, k$ e $\displaystyle\sum_{i=0}^k \theta_i = 1$ em $\mathbb{R}^N$;

$(ii)_1$ supp $\theta_i$ é compacto e supp $\theta_i \subset U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

$(ii)_2$ supp $\theta_0 \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$.

Se $\Omega$ é aberto e limitado e $\Gamma = \partial\Omega$, então $\theta_{0|_\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$.

## 1.2 Semigrupos

Seja $X$ um espaço de Banach e $B(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de $X$. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um $C_0$ semigrupo de operadores lineares e limitados de $X$ se:
*i)* $S(0) = I$, onde $I$ é o operador identidade de $X$;
*ii)* $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\ s, t \in \mathbb{R}^+$;
*iii)* $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall\ x \in X$.

**Definição 1.1.** *O gerador de um semigrupo $T(t)$ é definido por* $Ax = \lim_{t\downarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ *e o domínio de $A$ é $D(A) = \{x :$ o limite $\lim_{t\downarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ existe$\}$.*

Um exemplo de semigrupo é obtido através da função exponencial $E_A : \mathbb{R}^+ \to B(X)$ definida por $E_A(t)x = e^{tA}x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x$, com $A \in B(X)$. Assim, a família $\{E_A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz as condições da definição de $C_0$ semigrupo. Neste sentido, a definição de semigrupo generaliza a definição da função exponencial real ou $A \in B(\mathbb{R}^N)$.

Este fato é importante, pois a função $u(t) = S(t)u_0 = e^{tA}u_0$ é solução do seguinte problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{du}{dt} & = & Au \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right.$$

onde $A \in B(X)$ e $u_0$ é um elemento inicial dado.

Na teoria de semigrupos, a solução de um problema de valor inicial, como o dado acima, para um operador linear não limitado $A$ sobre um espaço de Banach $X$, é dada por $S(t)u_0$ se o operador $A$ gera o semigrupo.

Considere o problema de valor inicial semilinear

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), & \qquad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{array}\right. \tag{1.1}$$

onde $-A$ é o gerador de um $C_0$ semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, sobre um espaço de Banach $X$ e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em $t$ e satisfaz a condição de Lipschitz em $u$.

**Definição 1.2.** *Uma função $u : [t_0, T[\to X$ é uma solução clássica (forte) de (1.1) em $[t_0, T[$ se $u$ é contínua em $[t_0, T[$, continuamente diferenciável em $[t_0, T[$, $u(t) \in D(-A)$ para $t_0 < t < T$ e (1.1) é satisfeita em $[t_0, T[$.*

Na seção [6.1] de [4] é mostrado que se o problema (1.1) tem uma solução clássica $u$, então $u$ deve satisfazer

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, u(s))ds. \tag{1.2}$$

Esse resultado é conhecido como fórmula da variação das constantes.

**Definição 1.3.** *Uma solução contínua $u$ da equação integral* (1.2) *é chamada de solução fraca do problema de valor inicial* (1.1).

A seguir temos um resultado de existência e unicidade de solução fraca para o problema (1.1) e sua demonstração pode ser encontrada em [4]:

**Teorema 1.2.** *Seja $f : [t_0, T] \times X \to X$ uma função contínua em $t$ e uniformemente Lipschitz em $X$. Se $-A$ é o gerador de um $C_0$ semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, sobre $X$, então para cada $u_0 \in X$ o problema de valor inicial* (1.1) *tem uma única solução fraca $u \in C([t_0, T] : X)$. Além disso, a aplicação $\phi : X \to C([t_0, T] : X)$, definida por $\phi(u_0) = u$, é continuamente Lipschitz.*

**Caracterização dos geradores de semigrupos**. A seguir é enunciado o teorema de Hille-Yosida que caracteriza quando um dado operador, sobre um espaço de Banach, é gerador de um $C_0$ semigrupo. Também temos o teorema de Lumer-Phillips, que caracteriza geradores de $C_0$ semigrupos de contrações. Finalmente, apresentamos um resultado que nos permite estender o domínio de um semigrupo $S : \mathbb{R}^+ \to X$ para um setor contendo o eixo real não negativo. As demonstrações destes resultados podem ser consultadas em [4].

Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente de $A$, $\sigma(A)$ o espectro de $A$ e $R(\lambda : A)$ o operador resolvente de $A$.

**Teorema 1.3 (Hille-Yosida).** *Seja $X$ espaço de Banach. Para que um operador linear $A$, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em $X$ seja gerador de um $C_0$ semigrupo, é necessário e suficiente que*
*i) o operador $A$ seja fechado com domínio denso em $X$;*
*ii) existam $M$ e $w$ reais tais que, para cada real $\lambda > w$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para $n \in \mathbb{N}$*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

*Neste caso, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.*

Antes de enunciarmos o teorema de Lumer-Phillips faremos algumas considerações: Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$.

**Definição 1.4.** *Seja $X$ espaço de Banach e $X^*$ seu espaço dual. Para cada $x \in X$ o conjunto dualidade de $X$ é definido por*

$$F(x) = \left\{x^* : x^* \in X^* \ e \ \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

Observe que o Teorema de Hahn-Banach garante que esse conjunto não é vazio.

**Definição 1.5.** *Um operador linear $A$ é dissipativo se para cada $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

**Teorema 1.4 (Lumer-Phillips).** *Seja $A$ um operador linear com domínio denso em $X$.*
*i) Se $A$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, do operador $\lambda_0 I - A$ é $X$, então $A$ é o gerador de um $C_0$ semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, ou seja, $\|S(t)\| \leq 1$.*
*ii) Se $A$ é o gerador de um $C_0$ semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $A$ é dissipativo. Além disso, para cada $x \in D(A)$ e para cada $x^* \in F(x)$, tem-se $Re\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Tratamos de semigrupos cujo domínio era o eixo real não negativo. Agora, vamos considerar a possibilidade de estender o domínio para um setor que inclua o eixo real não negativo, de forma que a estrutura de semigrupo seja preservada.

**Definição 1.6.** *Seja $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < arg\ z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e para $z \in \Delta$ seja $S(z)$ um operador linear limitado. A família $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ é um semigrupo analítico em $\Delta$ se*
*i) $z \rightarrow S(z)$ é analítico em $\Delta$;*
*ii) $S(0) = I$ e $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} S(z)x = x$ para cada $x \in X$;*
*iii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ para quaisquer $z_1, z_2 \in \Delta$.*

*Um semigrupo $S(t)$ é dito analítico se este for analítico em algum setor contendo o eixo real não negativo. Claramente, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real não negativo é um $C_0$ semigrupo.*

O teorema a seguir nos possibilita estender um $C_0$ semigrupo à um semigrupo analítico.

**Teorema 1.5.** *Seja $A$ o gerador de um $C_0$ semigrupo $S(t)$ uniformente limitado e assuma que $0 \in \rho(A)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
*i) S(t) pode ser estendido à um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z : |arg\ z| < \delta\}$ e $\|S(z)\|$ é uniformente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Delta}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$, de $\Delta_\delta$.*
*ii) Existe uma constante $C$ tal que para cada $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$*

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|};$$

*iii) Existem $0 < \delta < \pi/2$ e $M > 0$ tais que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |arg\ \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \qquad e$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|},\ \forall\ \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0;$$

*iv) $S(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante $C$ tal que*

$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t},\ \forall\ t > 0.$$

**Potências fracionárias de operadores.** Seja $A : X \to X$ um operador linear fechado densamente definido tal que

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda : 0 < \omega < |arg\ \lambda| \leq \pi\} \cup V, \tag{1.3}$$

onde $V$ é uma vizinhaça do zero e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \text{para } \lambda \in \Sigma^+.$$

No caso onde $\omega < \pi/2$, ou seja, quando $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico $T(z)$, definimos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt, \quad \text{para } \alpha > 0$$

e $A^{-0} = I$, onde $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

**Definição 1.7.** *Seja $A$ satisfazendo a hipótese* (1.3) *com $\omega < \pi/2$. Então, para cada $\alpha > 0$,*

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}.$$

A seguir enunciaremos alguns resultados sobre potências fracionárias cujas demonstrações podem ser vistas na Seção 2.6 de [4].

**Lema 1.5.** *Para $\alpha, \beta \geq 0$ tem-se $A^{(\alpha+\beta)} = A^{\alpha} \cdot A^{\beta}$.*

**Teorema 1.6.** *Se $0 < \alpha < 1$, então existe uma constante $C_0 > 0$ tal que para cada $x \in D(A)$ e $\rho > 0$ tem-se*

$$\|A^{\alpha}x\| \leq C_0 \left(\rho^{\alpha} \|x\| + \rho^{\alpha-1} \|Ax\|\right)$$

*e*

$$\|A^{\alpha}x\| \leq 2C_0 \|x\|^{1-\alpha} \|Ax\|^{\alpha}.$$

**Teorema 1.7.** *Se $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico $T(t)$ e $0 \in \rho(A)$, então*

*(a) $T(t) : X \to D(A^{\alpha})$ para cada $t > 0$ e $\alpha \geq 0$;*

*(b) para cada $x \in D(A^{\alpha})$ tem-se $T(t)A^{\alpha}x = A^{\alpha}T(t)x$;*

*(c) para cada $t > 0$ o operador $A^{\alpha}T(t)$ é limitado e $\|A^{\alpha}T(t)\| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha}e^{-\delta t}$;*

*(d) se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{\alpha})$, então $\|T(t)x - x\| \leq C_{\alpha}t^{\alpha} \|A^{\alpha}x\|$.*

## 1.3 Comportamento assintótico

Seja $X$ um espaço métrico completo. Uma família de aplicações $T(t) : X \to X,\ t \geq 0$, é um $C^r$-semigrupo, $r \geq 0$, se $T(t)$ é um $C_0$ semigrupo e $T(t)x$ é contínua em $t, x$ com derivadas de Fréchet de ordem $r$ em $x$ para $(t, x) \in [0, \infty) \times X$.

Para cada $x \in X$, a órbita positiva, $\gamma^+(x)$, através de $x$ é definida como $\gamma^+(x) = \{T(t)x,\ t \geq 0\}$. Uma órbita negativa através de $x$ é uma função $\varphi(-\infty, 0] \to X$ tal que $\varphi(0) = x$ e, para cada $s \leq 0$, $T(t)\varphi(s) = \varphi(t + s)$ para $0 \leq t \leq -s$. Uma órbita completa sobre $x$ é uma função $\varphi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\varphi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\varphi(s) = \varphi(t + s)$ para $t \geq 0$.

Para cada $x \in X$, a órbita negativa através de $x$ é definida como a união de todas as órbitas negativas através de $x$, ou seja,

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t, x), \quad \text{onde}$$

$H(t, x) = \{y \in X :$ existe uma órbita negativa sobre $x$ definida por $\varphi(-\infty, 0] \to X$, com $\varphi(0) = x$ e $\varphi(-t) = y\}$.

Para cada $x \in X$, a órbita completa $\gamma(x)$ através de $x$ é definida como $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x)$. Para qualquer conjunto $B \subset X$, sejam $\gamma^+(B) = \cup_{x\in B}\gamma^+(x)$, $\gamma^-(B) = \cup_{x\in B}\gamma^-(x)$, $\gamma(B) = \cup_{x\in B}\gamma(x)$, respectivamente, a órbita positiva, órbita negativa e a órbita completa através de $B$.

Para cada $B \subset X$, definimos o conjunto $\omega$-limite de $B$ e o conjunto $\alpha$-limite de $B$ como

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} Cl \bigcup_{t\geq s} T(t)x, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s\geq 0} Cl \bigcup_{t\geq s} H(t,x),$$

onde $Cl(D)$ representa o fecho, $\overline{D}$, do conjunto $D$.

Um conjunto $B \subset X$ atrai um conjunto $C \subset X$ pelo semigrupo $T(t)$ se $\text{dist}(T(t)C, B) \to 0$ quando $t \to \infty$. Um conjunto $S \subset X$ é dito invariante se, para cada $x \in S$, existe uma órbita completa $\gamma(x)$ sobre $x$ tal que $\gamma(x) \subset S$. Temos que $S$ é invariante se, e somente se, $T(t)S = S$ para $t \geq 0$. Com efeito, $T(t)S \subset S$, para todo $t \geq 0$, e $S \subset T(t)S$. Os conjuntos $\omega$-limite e $\alpha$-limite são exemplos de conjuntos invariantes, como afirmam os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [2].

**Lema 1.6.** *Para cada $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai $B$, o conjunto $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se $B$ é conexo, então $\omega(B)$ também é conexo.*

*Se $\alpha(B)$ é compacto, $\gamma^-(B) = \cup_{t\geq 0} H(t,B)$, e dist$(H(t,B), \alpha(B)) \to 0$ quando $t \to \infty$, então $\alpha(B)$ é invariante. Além disso, se $H(t,B)$ é conexo para cada $t \geq 0$, então $\alpha(B)$ também é conexo.*

**Lema 1.7.** *Se $B$ é um subconjunto não-vazio de $X$ tal que $Cl\gamma^+(B)$ é compacto, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai $B$. Se $\gamma^-(B)$ é não-vazio e $Cl\gamma^-(B)$ é compacto, então $\alpha(B)$ é não-vazio, compacto e invariante.*

**Definição 1.8.** *Um $C^r$-semigrupo $T(t) : X \to X$ é assintoticamente suave se, para qualquer conjunto não vazio, fechado e limitado $B \subset X$ com $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai $B$.*

**Atratores e Sistemas gradiente**. Para um $C^r$-semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, um conjunto compacto e invariante $\mathcal{A}$ é dito ser um conjunto maximal, compacto e invariante se cada conjunto compacto e invariante pelo semigrupo está contido em $\mathcal{A}$. Um conjunto invariante $\mathcal{A}$ é dito ser um atrator global ou simplesmente um atrator se $A$ é um conjunto maximal e compacto que atrai cada conjunto limitado $B \subset X$. Em particular, $\omega(B)$ é compacto e está contido em $\mathcal{A}$.

Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um $C^r$-semigrupo sobre um espaço métrico completo $X$ e seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilibrio de $T(t)$, ou seja, $x \in \mathcal{E}$ se, e somente se,

$T(t)x = x$ para $t \geq 0$. Dizemos que um ponto de equilibrio $x$ é hiperbólico se o espectro $\sigma(DT(t)(x))$ não intersecta o círculo unitário centrado na origem em $\mathbb{C}$, onde $DT(t)x$ denota a derivada de Fréchet de $T(t)$ em $x$.

Se $x \in \mathcal{E}$, o conjunto instável de $x$ é $W^u(x) = \{y \in X : \ T(-t)y$ é definido para $t \geq 0$ e $T(-t)y \to x$ quando $t \to \infty\}$. Se $x$ é hiperbólico, então existe uma vizinhança $U$ de $x$ tal que $W^u_{loc}(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in W^u(x) : \ T(-t)y \in U, \ t \geq 0\}$ é uma subvariedade de $X$.

**Definição 1.9.** *Um $C^r$-semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$, é dito ser sistema gradiente se*
*i) Cada órbita positiva limitada é pré-compacta.*
*ii) Existe uma função de Liapunov para $T(t)$, ou seja, existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que*
*$ii)_1$ $V(X)$ é limitada inferiormente,*
*$ii)_2$ $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$,*
*$ii)_3$ $V(T(t)x)$ é não crescente em $t$ para cada $x \in X$,*
*$ii)_4$ se $x$ é tal que $T(t)x$ está definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $x$ é um ponto de equilíbrio.*

Para sistemas gradiente, valem os seguintes resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [2].

**Lema 1.8.** *Se $T(t)$ é um sistema gradiente, então, para cada $x \in X$, o conjunto $\omega$-limite $\omega(x)$ está contido em $\mathcal{E}$. Se $\gamma^-(x)$ é uma órbita pré-compacta, então o conjunto $\alpha$-limite $\alpha(x)$ está contido em $\mathcal{E}$.*

**Teorema 1.8.** *Se $T(t)$, $t \geq 0$, é um sistema gradiente, assintoticamente suave e $\mathcal{E}$ é limitado, então existe um atrator $\mathcal{A}$ para $T(t)$ e $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}) = \{y \in X : \ T(-t)y$ está definido para $t \geq 0$ e $T(-t)y \to \mathcal{E}$ quando $t \to \infty\}$. Se $X$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{A}$ é conexo. Além disso, se cada elemento de $\mathcal{E}$ é hiperbólico, então $\mathcal{E}$ é um conjunto finito e*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{E}} W^u(x). \tag{1.4}$$

# Capítulo 2

# Resultados gerais

Neste capítulo apresentaremos os principais reultados desse trabalho.

## 2.1 Comportamento dos operadores lineares

Nessa seção será analisado o comportamento dos operadores lineares.

### 2.1.1 Caracterização da convergência espectral

Estudaremos vários resultados sobre o comportamento espectral de operadores do tipo $-\Delta + V$, onde $V$ é um potencial, com condições de fronteira de Neumann para uma família de domínios $\Omega_\varepsilon$. Estamos interessados em obter condições necessárias e suficientes para garantir que os autovalores e autofunções se comportem continuamente quando o domínio sofre uma perturbação satisfazendo (4).

Os potenciais também podem depender de $\varepsilon$ e, neste caso, consideramos a dependência e o comportamento deles quando $\varepsilon \to 0$ na seguinte definição:

**Definição 2.1.** *Uma família de potenciais $\{V_\varepsilon : \ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$ é dita admissível se $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\sup\limits_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \le C < \infty$ e $V_\varepsilon \to V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\varepsilon u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde $\{V_\varepsilon : \ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível. Denotamos por $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$, para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, o conjunto dos autovalores, ordenados e contando a multiciplidade, do operador $-\Delta + V_\varepsilon$ com condições de fronteira de Neumann em $\Omega_\varepsilon$ e por $\{\phi_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ uma correspondente família completa de autofunções ortonormalizada.

Dizemos que o espectro se comporta continuamente em $\varepsilon = 0$, se para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos que $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_n^0$ quando $\varepsilon \to 0$ e as projeções espectrais convergem em $H_\varepsilon^1$, ou seja, dadas as projeções $P_a^\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^N) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$, pondo $P_a^\varepsilon(\psi) = \sum_{i=1}^n (\phi_i^\varepsilon, \psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \phi_i^\varepsilon$ com $a \notin \{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ e $\lambda_n^0 < a < \lambda_{n+1}^0$, temos que

$$\sup\left\{ \left\| P_a^\varepsilon(\psi) - P_a^0(\psi) \right\|_{H_\varepsilon^1}, \ \psi \in L^2(\mathbb{R}^N), \ \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

A convergência das projeções espectrais é equivalente à: para cada sequência $\varepsilon_k \to 0$ existe uma subsequência, que também será denotada por $\varepsilon_k$, e um sistema completo ortonormal de autofunções do problema limite $\{\phi_n^0\}_{n=1}^\infty$ tal que $\|\phi_n^{\varepsilon_k} - \phi_n^0\|_{H_{\varepsilon_k}^1} \to 0$ quando $k \to \infty$.

A condição (4) implica a existência de uma sequência não crescente de números reais $\rho_\varepsilon$, com $\rho_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, tal que para

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 : \ dist(x, \partial\Omega_0) > \rho_\varepsilon\}, \tag{2.1}$$

tem-se $K_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. A família de conjuntos abertos $\{K_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ pode ser vista como uma perturbação interior suave de $\Omega_0$. Em particular, como o domínio $\Omega_0$ é Lipschitz, segue que a família $K_\varepsilon$ é uniformemente Lipschitz em $\varepsilon$. Isso implica a existência de operadores de extensão $E_\varepsilon : H^1(K_\varepsilon) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, que também são operadores de extensão de $L^2(K_\varepsilon) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, e as normas $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(K_\varepsilon), H^1(\mathbb{R}^N))}$ e $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(K_\varepsilon), L^2(\mathbb{R}^N))}$ são uniformemente limitadas em $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

**Observação 2.1.** *Não foi excluída a possibilidade de $\rho_\varepsilon = 0$ e portanto $K_\varepsilon = \Omega_0$. Esse será o caso onde $\Omega_\varepsilon$ é uma perturbação exterior do domínio, ou seja, $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$.*

Para caracterizar quando o espectro se comporta continuamente consideramos

$$\tau_\varepsilon = \inf_{\substack{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) \\ \phi = 0 \text{ em } K_\varepsilon}} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^2}. \tag{2.2}$$

Em particular, quando $\Omega_\varepsilon \backslash \overline{K}_\varepsilon$ é suave, $\tau_\varepsilon$ é o primeiro autovalor do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \tau u & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \backslash \overline{K}_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial K_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Temos a seguinte caracterização

**Proposição 2.1.** *Assuma que a família de domínios* $\{\Omega_\varepsilon\}_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ *satisfaça* (4). *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$(i)$ *O espectro de* $-\Delta+V_\varepsilon$ *se comporta continuamente quando* $\varepsilon \to 0$ *para qualquer família admissível de potenciais* $\{V_\varepsilon,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$.

$(ii)$ $\tau_\varepsilon \to \infty$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

$(iii)$ *Para qualquer família de funções* $\psi_\varepsilon$ *com* $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, *teremos que* $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash\overline{K}_\varepsilon)} \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

$(iv)$ *Para qualquer família de funções* $\psi_\varepsilon$ *com* $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, *existe uma sequência* $\psi_{\varepsilon_k}$ *e uma função* $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ *tal que* $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ *em* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *e para qualquer* $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *teremos que*

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi \to \int_{\Omega_0} \nabla\psi_0\nabla\chi.$$

*Além disso, se alguma das quatro afirmações acima for verdadeira, então*

$(v)$ $|\Omega_\varepsilon\backslash K_\varepsilon| \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

**Observação 2.2.** *As afirmações* $(ii)-(iv)$ *são independentes do potencial* $V_\varepsilon$. *Assim, considerando* $V_\varepsilon = 0$, *temos que* $(i)$ *é equivalente ao fato do espectro de* $-\Delta$ *se comportar continuamente quando* $\varepsilon \to 0$.

*Mostraremos que* $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (v)$, $(ii)+(v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$, $(iii)+(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii)$ *e* $(iv)+(v) \Rightarrow (i)$.

**Demonstração:**
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Se existe uma uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ com $\tau_{\varepsilon_k}$ limitado, então, pela definição de $\tau_\varepsilon$, obtemos uma sequência de funções com norma $L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash\overline{K}_{\varepsilon_k})$ igual a 1 e norma $H^1(\Omega_\varepsilon)$ limitada, contradizendo $(iii)$.

$(ii) \Rightarrow (v)$: Pela definição de $K_{\varepsilon_k}$, temos que $|\Omega_0\backslash K_{\varepsilon_k}| \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Assim, basta mostrarmos que $|\Omega_{\varepsilon_k}\backslash\Omega_0| \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Suponha, por contradição, que existam $\eta > 0$ e uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ tais que $|\Omega_{\varepsilon_k}\backslash\Omega_0| \geq \eta$. Seja $\rho = \rho(\eta)$ suficientemente pequeno tal que $\left|\{x \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega_0 :\ dist(x,\Omega_0) \leq \rho\}\right| \leq \eta/2$. Portanto, $\left|\Omega^\rho_{\varepsilon_k}\right| = |\{x \in \Omega_{\varepsilon_k} :\ dist(x,\Omega_0) \geq \rho\}| \geq \eta/2$. Seja $\gamma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\gamma \in C_0^\infty(\Omega_0)$ tal que $\gamma(x) = 0$ se $x \in \Omega_0$ e $\gamma(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega_0$ e $dist(x,\Omega_0) \geq \rho$. Assim, $\gamma \in H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$, $\|\nabla\gamma\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C$ e $\|\gamma\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \geq \left|\Omega^\rho_{\varepsilon_k}\right|^{\frac{1}{2}} \geq (\eta/2)^{\frac{1}{2}}$. Logo $\tau_{\varepsilon_k}$ é limitado, contradizendo $(ii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\phi_{\varepsilon_k}$ e constantes $C_1$ e $C_2$ independentes de $\varepsilon_k$ tais que $\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C_1$ e $\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)} \geq C_2 > 0$. Considere $\psi_{\varepsilon_k} = E_{\varepsilon_k}\left(\phi_{\varepsilon_k|K_{\varepsilon_k}}\right)$ o operador extensão de $\phi_{\varepsilon_k}$ restrito à $K_{\varepsilon_k}$. Assim, $\psi_{\varepsilon_k} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(K_{\varepsilon_k})} \leq C_3C_1$, onde $C_3$ é a constante da aplicação $E_{\varepsilon_k}$, que independente de $\varepsilon_k$, pois $K_{\varepsilon_k}$ é um domínio uniformente Lipschitz. Além disso, pela desigualdade de Hölder ($p = N/2$ e $q = 2N/(N-2)$), $N \geq 3$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} &= \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} |1\cdot\psi_{\varepsilon_k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} \left(|1|^2\right)^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} \left(|\psi_{\varepsilon_k}|^2\right)^{\frac{N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} 1\right]^{\frac{1}{N}} \left[\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} |\psi_{\varepsilon_k}|^{\frac{2N}{N-2}}\right]^{\frac{N-2}{2N}} \\
&= \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}} \\
&\leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}} \\
&\leq C_4\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^{2N/(N-2)}(K_{\varepsilon_k})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}},
\end{aligned}
$$

onde $C_4$ é a constante da aplicação $E_{\varepsilon_k}$ independente de $\varepsilon_k$.

Agora, fazendo $m = 1$, $p = 2$ e $n = N$ no Teorema 1.1 das imersões de Sobolev, tem-se que $H^1(K_{\varepsilon_k}) \hookrightarrow L^{2N/(N-2)}(K_{\varepsilon_k})$. Assim

$$
\begin{aligned}
\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} &\leq C_4\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^{2N/(N-2)}(K_{\varepsilon_k})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}} \\
&\leq C_4M\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}} \\
&\leq C_4MC_1\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{N}},
\end{aligned}
$$

onde $M$ é a constante de imersão que independe de $\varepsilon_k$, pois a família de domínios $K_{\varepsilon_k}$ é uniformemente Lipschitz.

Analogamente, usando a desigualdade de Hölder (com $q = p/(p-1)$) e as imersões de Sobolev (com $m = 1$, $p = 2$, $n = N$ e $mp > N$ no Teorema 1.1), obtemos

$$
\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} \leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^{2p}(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \leq C_5\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}
$$

para $N = 1, 2$, onde $p$ pode ser escolhido arbitrariamente grande na última desigualdade e $C_5$ é uma constante independente de $\varepsilon_k$. Assim, existem $\theta > 0$ e $C > 0$

independente de $\varepsilon_k$ tais que

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} \leq C|\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k}|^{\theta} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon_k \to 0.$$

Considere $\chi_{\varepsilon_k} = \phi_{\varepsilon_k} - \psi_{\varepsilon_k}$. Então $\chi_{\varepsilon_k} = 0$ em $K_{\varepsilon_k}$ e $\|\chi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C_6$ independentemente de $\varepsilon_k$. Além disso,

$$\|\chi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} \geq \|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} - \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} \geq C_2/2,$$

desde que $\varepsilon_k$ seja suficientemente pequeno. Logo $\tau_{\varepsilon_k}$ é limitado, contradizendo $(ii)$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Se $\psi_{\varepsilon_k}$ é uma sequência tal que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C$, então $\psi_{\varepsilon_k}$ possui uma subsequência, também denotada por $\psi_{\varepsilon_k}$, tal que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$, fracamente em $H^1(K)$ e fortemente em $L^2(K)$, para alguma $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ e qualquer $K \subset\subset \Omega_0$. Na verdade, vamos provar que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Com um argumento similar ao usado em $(ii) \Rightarrow (iii)$, temos que existem $\rho > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta)} \leq C|K_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta|^{\rho}$, para $0 < \varepsilon_k < \delta$ e alguma constante $C$ independente de $k$ e $\delta$. Considere $\eta > 0$ e escolha $\delta$ suficientemente pequeno tal que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$, $\varepsilon_k < \delta$, e $\|\psi_0\|_{L^2(\Omega_0\backslash K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$. Assim,

$$\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(K_\delta)} + \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\backslash K_\delta)}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\backslash K_\delta)} &\leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} + \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta)} + \|\psi_0\|_{L^2(\Omega_0\backslash K_\delta)} \\
&\leq \frac{\eta}{2} + \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})}.
\end{aligned}$$

Por $(iii)$ e pela convergência de $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ em $L^2(K_\delta)$, escolhemos $\varepsilon_k > 0$ tal que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_{\varepsilon_k})} \leq \frac{\eta}{4}$ e $\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$. Assim,

$$\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \eta.$$

Portanto $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Considere $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e seja $\eta > 0$. Por $(v)$, escolha $\delta > 0$ tal que

$$\|\chi\|_{H^1((\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0)\backslash \overline{K}_\delta)} \leq \eta.$$

Então, para $0 < \varepsilon_k < \delta$, temos que

$$\left|\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi - \int_{\Omega_0} \nabla\psi_0\nabla\chi\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\left(\int_{K_\delta} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi\right) - \left(\int_{K_\delta} \nabla\psi_0\nabla\chi + \int_{\Omega_0\backslash K_\delta} \nabla\psi_0\nabla\chi\right)\right| \\
&= \left|\int_{K_\delta} \left(\nabla\psi_{\varepsilon_k} - \nabla\psi_0\right)\nabla\chi + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi - \int_{\Omega_0\backslash K_\delta} \nabla\psi_0\nabla\chi\right| \\
&\leq \left|\int_{K_\delta} \left(\nabla\psi_{\varepsilon_k} - \nabla\psi_0\right)\nabla\chi\right| + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\backslash K_\delta} \left|\nabla\psi_{\varepsilon_k}\right|\left|\nabla\chi\right| + \int_{\Omega_0\backslash K_\delta} \left|\nabla\psi_0\right|\left|\nabla\chi\right| \\
&\leq \left|\int_{K_\delta} \left(\nabla\psi_{\varepsilon_k} - \nabla\psi_0\right)\nabla\chi\right| + 2C\eta \to 2C\eta \quad \text{quando } \varepsilon_k \to 0,
\end{aligned}$$

pois $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ fracamente em $H^1(K_\delta)$ e portanto $\nabla\psi_{\varepsilon_k} \to \nabla\psi_0$ em $L^2(K_\delta)$.

Como $\eta > 0$ é arbitrário, temos que $\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi \to \int_{\Omega_0} \nabla\psi_0\nabla\chi$ e assim $(iii) + (v) \Rightarrow (iv)$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Se $\psi_\varepsilon$ é uma família de funções tal que $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, então, existe uma sequência $\psi_{\varepsilon_k}$ e uma função $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ tal que $\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Portanto,

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash\overline{K}_{\varepsilon_k})} \leq \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash\overline{K}_{\varepsilon_k})} + \|\psi_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash\overline{K}_{\varepsilon_k})} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon_k \to 0,$$

pois $\psi_0$ é fixo e $\left|\Omega_\varepsilon\backslash\overline{K}_{\varepsilon_k}\right| \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e $a > 0$ tal que $\tau_{\varepsilon_k} < a$. Pela definição de $\tau_{\varepsilon_k}$, podemos obter funções $\phi_{\varepsilon_k}$ tais que $\phi_{\varepsilon_k} = 0$ em $K_{\varepsilon_k}$, $\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} = 1$ e $\|\nabla\phi_{\varepsilon_k}\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq a$.

Pela desigualdade de Hölder ($p = \infty$ e $q = 1$), obtemos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\left|\phi_{\varepsilon_k}\right|^2 \leq \|V_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla \phi_{\varepsilon_k}|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k} |\phi_{\varepsilon_k}|^2 \leq a + \|V_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq \tilde{a},$$

para alguma constante $\tilde{a} > 0$ independente de $\varepsilon_k$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{a} < \lambda_n^0 < \lambda_{n+1}^0$. Denote por $\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}$ as primeiras $n$ autofunções e considere o subespaço linear $[\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}] \subset H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$. Pela convergência espectral, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\varepsilon_k$, e autofunções do problema limite $\phi_1^0, \ldots, \phi_n^0$ tais que $\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Portanto

$$\left\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0\right\|^2_{H^1_{\varepsilon_k}} = \left\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0\right\|^2_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k} \cap \Omega_0)} + \|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k} \backslash \overline{\Omega}_0)} + \left\|\phi_i^0\right\|^2_{H^1(\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_{\varepsilon_k})} \to 0$$

quando $\varepsilon_k \to 0$. Em particular, $\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k} \backslash \overline{\Omega}_0)} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Assim,

$$\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{L^2\left((\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}) \cap (\Omega_{\varepsilon_k} \backslash \overline{\Omega}_0)\right)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_k \to 0. \tag{2.3}$$

Além disso, $\left|(\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}) \cap \overline{\Omega}_0\right| \leq \left|\overline{\Omega}_0 \backslash K_{\varepsilon_k}\right| \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$ e $\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|_{H^1_{\varepsilon_k}}$ é limitada, pois $\phi_i^{\varepsilon_k}$ é convergente. Logo,

$$\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{L^2\left((\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}) \cap \overline{\Omega}_0\right)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_k \to 0. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) segue que

$$\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k})} = \|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{L^2\left((\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}) \cap \overline{\Omega}_0\right)} + \|\phi_i^{\varepsilon_k}\|^2_{L^2\left((\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}) \cap (\Omega_{\varepsilon_k} \backslash \overline{\Omega}_0)\right)} \to 0$$

quando $\varepsilon_k \to 0$. Pela desigualdade de Hölder ($p = q = 2$), segue que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k} \phi_{\varepsilon_k} = \int_{\Omega_{\varepsilon_k} \backslash K_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k} \phi_{\varepsilon_k} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_k \to 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Assim, $[\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]$ é um sistema quase ortonormal em $L^2(\Omega_{\varepsilon_k})$. Pela caracterização min-max dos autovalores, temos que

$$\lambda_{n+1}^{\varepsilon_k} \leq \max_{\phi \in [\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]} \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla \phi|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k} |\phi|^2}{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi|^2}.$$

Como $\phi \in [\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]$, podemos escrever $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta \phi_{\varepsilon_k}$. Logo, $\nabla \phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta \nabla \phi_{\varepsilon_k}$ e portanto

$$|\nabla \phi|^2 = \langle \nabla \phi, \nabla \phi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left\langle \nabla \phi_i^{\varepsilon_k}, \nabla \phi_j^{\varepsilon_k} \right\rangle + 2\beta \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\langle \nabla \phi_i^{\varepsilon_k}, \nabla \phi_{\varepsilon_k} \right\rangle + \beta^2 |\nabla \phi_{\varepsilon_k}|^2$$

e

$$|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \phi_i^{\varepsilon_k} \phi_j^{\varepsilon_k} + 2\beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} \phi_{\varepsilon_k} + \beta^2 \phi_{\varepsilon_k}^2.$$

Além disso, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que $\Delta\phi_i^{\varepsilon_k} + V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}$.

$(a)$ Calculando o produto interno em $L^2(\Omega_{\varepsilon_k})$ por $\phi_j^{\varepsilon_k}$ obtemos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \Delta\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k},$$

e portanto

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_j^{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\delta_{i,j}. \tag{2.5}$$

$(b)$ Calculando o produto interno em $L^2(\Omega_{\varepsilon_k})$ por $\phi_{\varepsilon_k}$ obtemos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \Delta\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k},$$

e portanto

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k}o(1), \tag{2.6}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que $[\phi_1^{\varepsilon_k}, \ldots, \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]$ é um sistema quase ortonormal.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_j^{\varepsilon_k} + 2\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_{\varepsilon_k} \\ &+ \beta^2\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_{\varepsilon_k}|^2\end{aligned} \tag{2.7}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} + 2\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} \\ &+ \beta^2\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}{\phi_{\varepsilon_k}}^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Somando (2.7) com (2.8) e usando (2.5) juntamente com (2.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k} |\phi|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \left( \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_j^{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} \right) \\
&+ 2\beta \left[ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left( \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\phi_{\varepsilon_k} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} \right) \right] \\
&+ \beta^2 \left( \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_{\varepsilon_k}|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}{\phi_{\varepsilon_k}}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2\lambda_i^{\varepsilon_k} + 2\beta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\varepsilon_k} o(1) + \beta^2\tilde{a}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi|^2 &= \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \left( \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_j^{\varepsilon_k} + 2\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} + \beta^2\phi_{\varepsilon_k}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + 2\beta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\varepsilon_k} o(1) + \beta^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \beta^2 + o(1).
\end{aligned}
$$

Como $\lambda_i^{\varepsilon_k} \leq \lambda_n^{\varepsilon_k}$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_n^{\varepsilon_k} \to \lambda_n^0$ quando $\varepsilon_k \to 0$ e $\tilde{a} < \lambda_n^0$, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}^{\varepsilon_k} &\leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 \lambda_i^{\varepsilon_k} + 2\beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\varepsilon_k} o(1) + \beta^2 \tilde{a}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 \left(\lambda_n^0 + o(1)\right) + o(1) + \beta^2 \lambda_n^0}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&= \frac{\lambda_n^0 \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \beta^2\right) + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&\leq \lambda_n^0 + o(1),
\end{aligned}$$

contradizendo a continuidade dada por $(i)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n^0 < \lambda_{n+1}^0$ e considere a família de autofunções $\{\phi_1^0, \ldots, \phi_n^0\}$. Vamos denotar por $E$ o operador extensão de $H^1(\Omega_0)$ à $H^1(\mathbb{R}^N)$ e por $\mathcal{R}_\varepsilon$ o operador restrição à $\Omega_\varepsilon$. Assim, para $i = 1, \ldots, n$, construímos a função $\xi_i^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon E \phi_i^0$. Como $(iv) \Rightarrow (v)$, segue que $|\Omega_\varepsilon \backslash \Omega_0| \leq |\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\xi_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|E\phi_i^0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_E \|\phi_i^0\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&\leq M,
\end{aligned}$$

onde $C_E$ é a constante da aplicação $E$. Logo, $\xi_i^\varepsilon$ é limitada em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ e portanto $\|\xi_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \backslash \Omega_0)} \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, quando $\varepsilon \to 0$.

Pela caracterização min-max dos autovalores obtemos que $\lambda_i^\varepsilon \leq \lambda_i^0 + o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$. Assim, podemos obter uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e números $\kappa_i \leq \lambda_i^0$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $\lambda_i^{\varepsilon_k} \to \kappa_i$. Como $\phi_i^{\varepsilon_k}$, $i = 1, \ldots, n$, é uma sequência limitada em $H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$, então, por $(iv)$, podemos obter uma subsequência, também denotada por $\phi_i^{\varepsilon_k}$, e funções $\xi_i^0 \in H^1(\Omega_0)$ tais que $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \chi \to \int_{\Omega_0} \nabla \xi_i^0 \nabla \chi, \quad i = 1, \ldots, n,$$

para qualquer $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como $\phi_i^{\varepsilon_k}$ é autofunção, segue que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\chi + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\chi = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\chi \quad i = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_0} \nabla\xi_i^0\nabla\chi + \int_{\Omega_0} V_0\xi_i^0\chi = \kappa_i\int_{\Omega_0} \xi_i^0\chi \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

pois

$$(a) \quad \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}\phi_i^{\varepsilon_k}\chi - \int_{\Omega_0} V_0\xi_i^0\chi = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} V_{\varepsilon_k}(\phi_i^{\varepsilon_k} - \xi_i^0)\chi + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} \xi_i^0(V_{\varepsilon_k} - V_0)\chi \to 0,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, já que $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $V_{\varepsilon_k} \to V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $V_{\varepsilon_k}$ é uniformente limitado em $L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})$;

$$(b) \qquad \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\chi - \kappa_i\int_{\Omega_0} \xi_i^0\chi = (\lambda_i^{\varepsilon_k} - \kappa_i)\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\chi + \kappa_i\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} (\phi_i^{\varepsilon_k} - \xi_i^0)\chi \to 0,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, já que $\lambda_i^{\varepsilon_k} \to \kappa_i$, $\phi_i^{\varepsilon_k}$ é limitada em $H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ e $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

De (2.9) segue que $\kappa_i$ e $\xi_i^0$ são, respectivamente, autovalor e autofunção do problema limite. Como $\kappa_i \leq \lambda_i^0$, temos que $\kappa_i = \lambda_i^0$ para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, temos que $\int_{\Omega_0} \xi_i^0\xi_j^0 = \delta_{ij}$, e assim $\{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\}$ é um sistema ortonormal de autofunções associado à $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$.

A convergência em $H^1_{\varepsilon_k}$ é obtida da seguinte forma: para $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 = \lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 \to \lambda_i^0\int_{\Omega_0} \left|\xi_i^0\right|^2 - \int_{\Omega_0} V_0\left|\xi_i^0\right|^2 = \int_{\Omega_0} \left|\nabla\xi_i^0\right|^2,$$

pois

$(a)$ Temos que

$$\lambda_i^{\varepsilon_k}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \lambda_i^0\int_{\Omega_0} \left|\xi_i^0\right|^2 = (\lambda_i^{\varepsilon_k} - \lambda_i^0)\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 + \lambda_i^0\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} \left(|\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \left|\xi_i^0\right|^2\right) \to 0,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, já que $\lambda_i^{\varepsilon_k} \to \lambda_i^0$, $\phi_i^{\varepsilon_k}$ é limitada em $H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ e $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$;

$(b)$ Temos que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \int_{\Omega_0} V_0\left|\xi_i^0\right|^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} V_{\varepsilon_k}\left(|\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \left|\xi_i^0\right|^2\right) + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0} \left|\xi_i^0\right|^2(V_{\varepsilon_k} - V_0) \to 0,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, já que $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $V_{\varepsilon_k} \to V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $V_{\varepsilon_k}$ é uniformente limitado em $L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})$.

Finalmente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\phi_i^{\varepsilon_k} - \nabla\xi_i^0\right|^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 + \int_{\Omega_0} \left|\nabla\xi_i^0\right|^2 - 2\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\xi_i^0 \to 0,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, pois

$(a)$ Temos que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 \to \int_{\Omega_0} \left|\nabla\xi_i^0\right|^2 \quad \text{quando } \varepsilon_k \to 0;$$

$(b)$ Definindo $\tilde{\xi}_i^0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ como sendo uma extensão de $\xi_i^0$, obtemos que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\xi_i^0 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\nabla\tilde{\xi}_i^0 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\left(\nabla\xi_i^0 - \nabla\tilde{\xi}_i^0\right) \to \int_{\Omega_0} \left|\nabla\xi_i^0\right|^2,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, já que

$$\left|\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\left(\nabla\xi_i^0 - \nabla\tilde{\xi}_i^0\right)\right| \leq \|\nabla\phi_i^{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})}\left\|\nabla\xi_i^0 - \nabla\tilde{\xi}_i^0\right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \to 0 \ \text{ quando } \varepsilon_k \to 0.$$

Assim, o espectro de $-\Delta + V_{\varepsilon_k}$ se comporta continuamente com relação a $\varepsilon$. ∎

### 2.1.2 Convergência dos operadores resolventes

Nessa seção será analisado o comportamento dos operadores resolventes.

**Definição 2.2.** *Uma família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é dita admissível se satisfizer* (4) *e alguma das condições* $(i) - (iv)$ *da Proposição* 2.1.

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.2.** *Suponha que a família de potenciais $\{V_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ e a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ são admissíveis. Suponha ainda que $0 \notin \sigma(-\Delta + V_0)$. Então, para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, $0 \notin \sigma(-\Delta + V_\varepsilon)$ e existe uma constante $C$, independente de $\varepsilon$, tal que*

$$\left\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1}g_\varepsilon\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon). \tag{2.10}$$

*Além disso, se $g_\varepsilon \to g_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\left\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1}g_\varepsilon - (-\Delta + V_0)^{-1}g_0\right\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0. \tag{2.11}$$

**Demonstração:** Mostraremos primeiramente (2.10). Pela continuidade do espectro de $-\Delta+V_0$ dada pela Proposição 2.1, temos que $0 \notin \sigma(-\Delta+V_\varepsilon)$ para $\varepsilon$ suficientemente pequeno. Assim, o operador $-\Delta + V_\varepsilon$ é inversível e portanto, para cada $g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + V_\varepsilon w_\varepsilon = g_\varepsilon & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.12}$$

possui uma única solução $w_\varepsilon = (-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Vamos mostrar primeiramente que se $\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, independentemente de $\varepsilon$, então $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitada em $\varepsilon$. De fato, suponha por contradição, que exista uma subsequência, ainda denotada por $\{w_\varepsilon\}$, tal que $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$. Considere $\tilde{w}_\varepsilon = \dfrac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}$. Logo, $\|\tilde{w}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$. Então

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w}_\varepsilon + V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon = \dfrac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \tilde{w}_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.13}$$

Multiplicando essa equação por $\tilde{w}_\varepsilon$ e integrando, obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |\tilde{w}_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} \tilde{w}_\varepsilon.$$

Como $V_\varepsilon$ é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\|\tilde{w}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$, $g_\varepsilon$ é uniformemente limitada em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$, segue que (por Hölder)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |\tilde{w}_\varepsilon|^2 \leq M \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} \tilde{w}_\varepsilon \to 0 \ \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

onde $M > 0$ independe de $\varepsilon$. Assim,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 \leq \tilde{C},$$

com $\tilde{C}$ independente de $\varepsilon$. Agora, aplicando $(iv)$ da Proposição 2.1, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\tilde{w}_\varepsilon$, e $\tilde{w}_0 \in L^2(\Omega_0)$ tais que $\tilde{w}_\varepsilon \to \tilde{w}_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Em particular, temos que $\|\tilde{w}_0\|_{L^2(\Omega_0)} = 1$. Além disso,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{w}_\varepsilon \nabla \chi \to \int_{\Omega_0} \nabla \tilde{w}_0 \nabla \chi,$$

para qualquer $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $\xi \in H^1(\Omega_0)$ e considere $\hat{\xi}$ uma extensão de $\xi$ à $\mathbb{R}^N$. Multiplicando a equação (2.13) por $\tilde{\xi}_\varepsilon = \hat{\xi}_{|\Omega_\varepsilon} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e integrando obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{w}_\varepsilon \nabla \tilde{\xi}_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} \tilde{\xi}_\varepsilon.$$

Agora, passando o limite quando $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\int_{\Omega_0} \nabla \tilde{w}_0 \nabla \xi + \int_{\Omega_0} V_0 \tilde{w}_0 \xi = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon - \int_{\Omega_0} V_0 \tilde{w}_0 \xi &= \int_{\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon - \int_{\Omega_0 \backslash K_\varepsilon} V_0 \tilde{w}_0 \xi + \left( \int_{K_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \xi - \int_{K_\varepsilon} V_0 \tilde{w}_0 \xi \right) \\ &= J_1 - J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Estimaremos separadamente cada parcela acima. Por Hölder ($p = \infty$ e $q = 1$), segue que

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon \leq \|V_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \left\| \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)} \\ &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon} \tilde{w}_\varepsilon \tilde{\xi}_\varepsilon \\ &\leq C \|\tilde{w}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)} \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)} \\ &= C \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos Hölder com ($p = q = 2$). Além disso, $\tilde{\xi}_\varepsilon$ é uniformemente limitada e $|\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Para $J_2$ temos que

$$J_2 = \int_{\Omega_0 \backslash K_\varepsilon} V_0 \tilde{w}_0 \xi \to 0 \ \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

pois $V_0 \tilde{w}_0 \xi$ é fixo e $|\Omega_0 \backslash K_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Para $J_3$, note que

$$J_3 = \int_{K_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon \xi - \int_{K_\varepsilon} V_0 \tilde{w}_0 \xi = \int_{K_\varepsilon} V_\varepsilon \left( \tilde{w}_\varepsilon - \tilde{w}_0 \right) \xi + \int_{K_\varepsilon} \tilde{w}_0 \left( V_\varepsilon - V_0 \right) \xi \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$, já que $V_\varepsilon$ é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\tilde{w}_\varepsilon \to \tilde{w}_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $V_\varepsilon \to V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pelas estimativas de $J_1$, $J_2$ e $J_3$ segue o resultado desejado.

Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{w}_0 + V_0\tilde{w}_0 = 0 & \text{em} \quad \Omega_0, \\ \dfrac{\partial \tilde{w}_0}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Como $0 \notin \sigma(-\Delta+V_0)$, temos que $\tilde{w}_0 = 0$, contradizendo o fato de que $\|\tilde{w}_0\|_{L^2(\Omega_0)} = 1$.

Agora, vamos mostrar que $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitada em $\varepsilon$. De fato, temos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 = -\int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |w_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon w_\varepsilon.$$

Pela desigualdade de Hölder e o fato de que $V_\varepsilon$ é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $g_\varepsilon$ uniformente limitada em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ uniformemente limitada, segue o resultado desejado.

Agora, mostraremos (2.11): Pela convergência fraca de $g_\varepsilon$, temos que $g_\varepsilon$ é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, por (2.10), obtemos que $\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitada em $\varepsilon$. Vamos mostrar que se $u_\varepsilon = (-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon$ e $u_0 = (-\Delta + V_0)^{-1} g_0$, então $u_\varepsilon \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u_0$, fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, usando $(iv)$ da Proposição 2.1, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $u_\varepsilon$, e uma função $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ tal que $u_\varepsilon \to \psi_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para qualquer $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \chi \to \int_{\Omega_0} \nabla \psi_0 \nabla \chi.$$

Como $-\Delta u_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon = g_\varepsilon$, segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \chi + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon u_\varepsilon \chi = \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon \chi.$$

Passando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla \psi_0 \nabla \chi + \int_{\Omega_0} V_0 \psi_0 \chi = \int_{\Omega_0} g_0 \chi.$$

Assim, $-\Delta\psi_0 + V_0\psi_0 = g_0$. Pela unicidade da solução, temos $\psi_0 = u_0$, conforme queriamos mostrar.

Agora, com um argumento similar ao que foi feito na prova de que $(iv) \Rightarrow (i)$ na Proposição 2.1, obtemos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \to \int_{\Omega_0} g_0 u_0 - \int_{\Omega_0} V_0 |u_0|^2 = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0|^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u_0|^2 \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Assim, segue que $u_\varepsilon \to u_0$ em $H^1_\varepsilon$. ∎

### 2.1.3 Convergência dos semigrupos lineares

Pela continuidade do espectro de $-\Delta + V_\varepsilon$, obtemos estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares que serão utilizadas na análise da dinâmica não linear.

Vamos considerar que os operadores $A_\varepsilon = -\Delta + V_\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, geram semigrupos analíticos $e^{A_\varepsilon t}$ em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Note que o semigrupo linear $e^{A_\varepsilon t}$ atua sobre funções definidas em $\Omega_\varepsilon$. Vamos estimar expressões do tipo $e^{A_\varepsilon t} u_0$, onde $u_0 \in L^2(\Omega_0)$. Isso significa dizer que estendemos a função $u_0$ por zero fora de $\Omega_0$ e depois restringimos à $\Omega_\varepsilon$. Dessa forma, podemos dizer que $u_0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e fazer a aplicação $e^{A_\varepsilon t} u_0$. Esse mesmo argumento também é usado para fazer a aplicação $e^{A_0 t} u_\varepsilon$.

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.3.** *Suponha que a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ e a família de potenciais $\{V_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ são admissíveis. Seja $a > 0$ tal que $\lambda_n^0 < a < \lambda_{n+1}^0$ e considere a projeção espectral $P_a^\varepsilon$ sob o espaço linear gerado pelas primeiras $n$ autofunções definida na Seção 2.1.1. Seja $b$ tal que $b < \lambda_1^0$. Então, existe um número $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ e uma função $\theta(\varepsilon)$, com $\theta(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, tal que*

$$\left\| e^{A_\varepsilon t} u_\varepsilon - e^{A_0 t} u_\varepsilon \right\|_{H^1_\varepsilon} \leq M\theta(\varepsilon) t^{-\gamma} e^{-bt} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.15}$$

*e*

$$\left\| e^{A_\varepsilon t} \left(I - P_a^\varepsilon\right) u_\varepsilon - e^{A_0 t} \left(I - P_a^0\right) u_\varepsilon \right\|_{H^1_\varepsilon} \leq M\theta(\varepsilon) t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{2.16}$$

*para $u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $t > 0$.*

**Demonstração:** Vamos provar a desigualdade (2.16). De fato, pelo Teorema 1.7 com $\alpha = 1/2$ e $\delta = a$, podemos escolher $M > 0$ independente de $\varepsilon$ tal que

$$\left\| e^{A_\varepsilon t} \left(I - P_a^\varepsilon\right) u_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M t^{-\frac{1}{2}} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \ u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon), \ t > 0, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Vamos separar as estimativas em dois casos: $t \in (0, \delta]$ ou $t > \delta$, onde $\delta > 0$ é um parâmetro pequeno. No primeiro caso, para qualquer $t \in (0, \delta]$, escolha $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|e^{A_\varepsilon t}\left(I-P_a^\varepsilon\right)u_\varepsilon-e^{A_0 t}\left(I-P_a^0\right)u_\varepsilon\right\|_{H_\varepsilon^1} &\leq 2Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\\ &\leq 2M\delta^{\gamma-\frac{1}{2}}t^{-\gamma}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Antes de mostrar o segundo caso, precisaremos do seguinte resultado: sempre podemos escolher um número $l=l(\delta)$, tal que se $z\geq l$, então

$$z^{1/2}e^{-zt}\leq \delta t^{-\gamma}e^{-at} \tag{2.18}$$

para todo $t\geq\delta$. De fato, mostraremos que dado $\delta>0$, existe $l(\delta)>0$ tal que $z^{1/2}e^{-zt}t^{\gamma}e^{at}<\delta$ sempre que $t\geq\delta$ e $z\geq l(\delta)$. Com efeito, para todo $\delta>0$ seja $\tilde{l}(\delta/2)$ tal que $z^{1/2}\leq e^{\frac{\delta}{2}z}$ para todo $z\geq\tilde{l}(\delta/2)$. Assim, desde que $t^\gamma<e^t$ para todo $t\geq\delta$ e $1/2<\gamma<1$, temos que

$$\begin{aligned}z^{1/2}e^{-zt}t^{\gamma}e^{at} &\leq e^{\frac{\delta}{2}z}e^{-zt}e^{t}e^{at}\\ &= e^{\frac{\delta}{2}z}e^{-z\frac{t}{2}}e^{-z\frac{t}{2}}e^{(a+1)t}\\ &= e^{z(\delta/2-t/2)}e^{t(a+1-z/2)}\\ &\leq e^{t(a+1-z/2)}.\end{aligned}$$

Como para $z$ suficientemente grande, $a+1-z/2<0$, segue que

$$e^{t(a+1-z/2)}\leq e^{\delta(a+1-z/2)},$$

onde usamos o fato de que $t\geq\delta$.

Assim, fazendo $z\geq\max\left\{\tilde{l}(\delta/2),2\left(-\frac{ln\delta}{\delta}+a+1\right)\right\}$, segue o resultado desejado.

Além disso, como $\lambda_k^\varepsilon\overset{\varepsilon\to 0}{\to}\lambda_k^0$ e $\lambda_k^0\overset{k\to+\infty}{\to}+\infty$, existe $N=N(\delta)>n$ tal que $\lambda_k^\varepsilon\geq l(\delta)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda_{N(\delta)}^0<\lambda_{N(\delta)+1}^0$.

Assim, pela decomposição espectral dos semigrupos lineares, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{A_\varepsilon t}(I - P_\varepsilon^a)u_\varepsilon - e^{A_0 t}(I - P_0^a)u_\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
\leq \ & \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t}(u_\varepsilon, \phi_k^0)\phi_k^0 \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
& + \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^0 t}(u_\varepsilon, \phi_k^0)\phi_k^0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} \\
= \ & I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Analisando $I_2$, temos que

$$\begin{aligned}
I_2^2 &= \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \left\| A_\varepsilon^{1/2} \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\
&= \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)A_\varepsilon^{1/2}\phi_k^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\
&= \left\langle \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)A_\varepsilon^{1/2}\phi_k^\varepsilon, \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)A_\varepsilon^{1/2}\phi_k^\varepsilon \right\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&= \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \sum_{j=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}e^{-\lambda_j^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)(u_\varepsilon, \phi_j^\varepsilon)\left\langle A_\varepsilon^{1/2}\phi_k^\varepsilon, A_\varepsilon^{1/2}\phi_j^\varepsilon \right\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&= \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \sum_{j=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}e^{-\lambda_j^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)(u_\varepsilon, \phi_j^\varepsilon)\left\langle A_\varepsilon\phi_k^\varepsilon, \phi_j^\varepsilon \right\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&= \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-2\lambda_k^\varepsilon t}\left|(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\right|^2\lambda_k^\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que $\left\langle A_\varepsilon \phi_k^\varepsilon, \phi_j^\varepsilon \right\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \delta_{kj}\lambda_k^\varepsilon$. Agora, usando (2.18), segue que

$$I_2^2 = \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \lambda_k^\varepsilon e^{-2\lambda_k^\varepsilon t} |(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)|^2 \leq (\delta t^{-\gamma} e^{-at})^2 \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

e portanto

$$I_2 \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Analogamente, obtemos

$$I_3^2 = \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \lambda_k^0 e^{-2\lambda_k^0 t} (\left|u_\varepsilon, \phi_k^0)\right|^2 \leq (\delta t^{-\gamma} e^{-at})^2 \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

e portanto

$$I_3 \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Agora, estimaremos $I_1$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} (u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon) \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (u_\varepsilon, \phi_k^0) \phi_k^0 \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\leq \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t})(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} + \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} ((u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon - (u_\varepsilon, \phi_k^0)\phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} ((\lambda_k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + 1) \left| e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t} \right| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\quad + \sum_{i=r}^{k(\delta)} e^{-\mu_i t} \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} ((u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon - (u_\varepsilon, \phi_k^0)\phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1},
\end{aligned}$$

onde foi considerado o autovalor $\mu_i$ contando sua multiplicidade.

Agora, pela convergência dos autovalores e das projeções espectrais, existe $\varepsilon_1(\delta) \in (0, \varepsilon_0)$ tal que

$$\sum_{k=n+1}^{N(\delta)} ((\lambda_k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + 1) \left| e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} ((\lambda_k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + 1) t e^{-\overline{\lambda} t} \left| \lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0 \right| \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at},$$

para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\delta))$, onde na penúltima desigualdade foi usado o Teorema do Valor Médio e na última desigualdade usamos a convergência dos autovalores e o fato de que $\overline{\lambda}$ está entre $\lambda_k^\varepsilon$ e $\lambda_k^0$, ou seja, $\overline{\lambda} \geq \lambda_{n+1}^0 > a$ e portanto $e^{-\overline{\lambda}t} < e^{-at}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=r}^{k(\delta)} e^{-\mu_i t} \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} ((u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon - (u_\varepsilon, \phi_k^0)\phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
= &\sum_{i=r}^{k(\delta)} e^{-\mu_i t} \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \{(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)(\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0) + (u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0)\phi_k^0\} \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\leq \sum_{i=r}^{k(\delta)} e^{-\mu_i t} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \left[ \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left\|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\right\|_{H_\varepsilon^1} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left\|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\right\|_{H_\varepsilon^1} \right] \\
&\leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \delta \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq C\delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\delta)),
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a desigualdade de Cauchy-Shwartz e na segunda usamos a convergência das autofunções e o fato de que $\mu_i \geq \lambda_{n+1}^0$ para todo $i = 1, \ldots, k(\delta)$.

Pelas estimativas $I_1, I_2$ e $I_3$, segue que

$$\left\| e^{A_\varepsilon t} \left(I - P_a^\varepsilon\right) u_\varepsilon - e^{A_0 t} \left(I - P_a^0\right) u_\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} \leq C\delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{2.20}$$

para $t > \delta$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\delta))$.

Finalmente, como $\delta > 0$ é arbitrário, as desigualdades (2.17) e (2.20) provam o resultado.

A demonstração da desigualdade (2.15) dessa proposição é similar a (2.16), basta trocar $a$ por $b$ e fazer $P_a^\varepsilon = P_a^0 = 0$. ■

## 2.2 Semicontinuidade superior dos atratores e do conjunto de equilíbrio

Nesta seção veremos que os atratores e os pontos de equilíbrio, soluções do problema elíptico não linear, são semicontínuos superiormente. Para isso, a continuidade dos semigrupos não lineares (denotados por $T_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$) é obtida através da continuidade dos semigrupos lineares via fórmula da variação das constantes dada por (1.2).

Mostraremos o seguinte resultado:

**Proposição 2.4.** *Suponha que a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível. Então, existem $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, uma função $c(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, e uma constante $M$ satisfazendo*

$$\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - T_0(t, u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \leq Mc(\varepsilon)t^{-\gamma}, \ t \in (0, \tau], \ \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq R, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2.21)$$

*onde $M = M(\tau, R)$.*

*Além disso, os atratores são semicontínuos superiormente para $\varepsilon$ em $\varepsilon = 0$ em $H^1_\varepsilon$, ou seja,*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \left[ \inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \left\{ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \right\} \right] \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0. \quad (2.22)$$

*Também, se $\mathcal{E}_\varepsilon$ é o conjunto dos pontos de equilíbrio de (1), $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, então*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon} \left[ \inf_{u_0 \in \mathcal{E}_0} \left\{ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \right\} \right] \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0. \quad (2.23)$$

**Observação 2.3.** *Nessa seção e no restante desse trabalho, denotaremos por $F$ e $F'$ os operadores de Nemitsky de $f$ e $\frac{\partial f}{\partial u}$, respectivamente, ou seja,*

$$F(u)(x) = f(x, u(x)) \quad e \quad F'(u)(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)).$$

**Demonstração:** Primeiramente, verificaremos (2.21). Os semigrupos não lineares $T_\varepsilon(t)$ são dados pela fórmula da variação das constantes

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) = e^{A_\varepsilon t}u_\varepsilon + \int_0^t e^{A_\varepsilon (t-s)}F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon))ds, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0). \quad (2.24)$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon)-T_0(t,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} &\leq \left\|e^{A_\varepsilon t}u_\varepsilon - e^{A_0 t}u_\varepsilon\right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&+ \int_0^t \left\|e^{A_\varepsilon(t-s)}F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon)) - e^{A_0(t-s)}F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon))\right\|_{H^1_\varepsilon} ds \\
&+ \int_0^t \left\|e^{A_0(t-s)}\left(F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon)) - F(T_0(s,u_\varepsilon))\right)\right\|_{H^1_\varepsilon} ds,
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Pela Proposição 2.3 e pelo Teorema 1.7 segue que

$$
\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon)-T_0(t,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} &\leq M\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}e^{-bt}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&+ M\theta(\varepsilon)\int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-b(t-s)}\|F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&+ M\int_0^t (t-s)^{-1/2}e^{-b(t-s)}C\|T_\varepsilon(s,u_\varepsilon)-T_0(s,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} ds,
\end{aligned}
$$

onde $C>0$ é a constante de Lipschitz de $F$.

No caso em que $V_\varepsilon = 0$, temos que os autovalores do operador $A_\varepsilon = -\Delta$ são positivos. Logo, $b>0$ e portanto $e^{-bt} \leq 1$. Além disso, como $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq R$, segue que

$$M\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}e^{-bt}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{M}\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Por (3), segue que $F$ é uma função limitada em $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Fazendo a mudança de variável $r = t-s$, obtemos

$$
\begin{aligned}
M\theta(\varepsilon)\int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-b(t-s)}\|F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds &\leq C_1\theta(\varepsilon)\int_0^t (t-s)^{-\gamma} ds \\
= C_1\theta(\varepsilon)\int_0^t r^{-\gamma} dr &= C_1\theta(\varepsilon)\frac{t^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \\
= C_1\theta(\varepsilon)\frac{t.t^{-\gamma}}{-\gamma+1} &\leq C_1\theta(\varepsilon)\frac{\tau}{-\gamma+1}t^{-\gamma} \\
&= \tilde{M}_1\theta(\varepsilon)t^{-\gamma},
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que $t \leq \tau$. Portanto,

$$M\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}e^{-bt}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + M\theta(\varepsilon)\int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-b(t-s)}\|F(T_\varepsilon(s,u_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \leq M_2\theta(\varepsilon)t^{-\gamma},$$

onde $M_2 = M(\tau, R)$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - T_0(t,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} &\leq M_2\theta(\varepsilon)t^{-\gamma} \\ &+ M\int_0^t (t-s)^{-1/2}e^{-b(t-s)}\|T_\varepsilon(s,u_\varepsilon) - T_0(s,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Gronwall 1 (Lema 1.3), com $v(s) = \|T_\varepsilon(s,u_\varepsilon) - T_0(s,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} e^{-b(t-s)}$, $\beta = 1/2$ e $\alpha = \gamma$, obtemos (2.21).

Agora provaremos (2.22). Primeiramente observamos que

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon}\left[\inf_{u_0\in\mathcal{A}_0}\left\{\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}\right\}\right] \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0$$

se, e somente se, dado $\eta_1 > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\inf_{u_0\in\mathcal{A}_0}\left\{\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}\right\} \leq \eta_1, \quad \text{para todo } u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon,$$

sempre que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Mas essa afirmação ocorre se, e somente se, dado $\eta_2 > 0$, existe $\tilde{u}_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1_\varepsilon} \leq \eta_1 + \eta_2$. Mostraremos agora que essa última afirmação é satisfeita, e portanto, fica provado (2.22).

Como $\cup\mathcal{A}_\varepsilon$ é limitado em $L^\infty$ e $\mathcal{A}_0$ é um atrator que atrai conjuntos limitados, então $\mathcal{A}_0$ atrai $\cup\mathcal{A}_\varepsilon$ pelo semigrupo $T_0$. Assim, dado $\theta > 0$, existe $k > 0$ tal que $\mathrm{dist}(T_0(t,u_\varepsilon),\mathcal{A}_0) < \theta$, $\forall\ t \geq k$ e $\forall\ u_\varepsilon \in \cup\mathcal{A}_\varepsilon$. Portanto, dado $\eta > 0$, existe $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0(u_\varepsilon) \in \mathcal{A}_0$ tal que $\|T_0(k,u_\varepsilon) - \tilde{u}_0\|_{H^1_\varepsilon} < \theta + \eta$. Se $\tilde{u}_\varepsilon = T_\varepsilon(-k,u_\varepsilon)$, então, pela invariância do conjunto atrator, tem-se que $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Pela equação (2.21), com $t = k$, segue que

$$\|T_\varepsilon(k,\tilde{u}_\varepsilon) - T_0(k,\tilde{u}_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \leq Mc(\varepsilon)k^{-\gamma}.$$

Assim, como $u_\varepsilon = T_\varepsilon(k,\tilde{u}_\varepsilon)$, então

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1_\varepsilon} &\leq \|T_\varepsilon(k,\tilde{u}_\varepsilon) - T_0(k,\tilde{u}_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} + \|T_0(k,\tilde{u}_\varepsilon) - \tilde{u}_0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &\leq Mc(\varepsilon)k^{-\gamma} + \theta + \eta.\end{aligned}$$

Agora mostraremos (2.23). Analogamente ao que foi feito na prova de (2.22), segue que

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon}\left[\inf_{u_0\in\mathcal{E}_0}\left\{\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}\right\}\right] \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0,$$

se, e somente se, para qualquer $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon$ existe $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0(u_\varepsilon) \in \mathcal{E}_0$ tal que $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Pela semicontinuidade dos atratores dada por (2.22), para qualquer $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon$, existe $\tilde{u}_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Agora, basta mostrar que $\tilde{u}_0 \in \mathcal{E}_0$. Com efeito, para qualquer $t > 0$, temos que $\|u_\varepsilon - T_0(t, \tilde{u}_0)\|_{H^1_\varepsilon} \to \|\tilde{u}_0 - T_0(t, \tilde{u}_0)\|_{H^1(\Omega_0)}$. Além disso, para cada $\tau > 0$ fixo e para qualquer $t \in (0, \tau)$ temos que

$$\|u_\varepsilon - T_0(t, \tilde{u}_0)\|_{H^1_\varepsilon} = \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - T_0(t, \tilde{u}_0)\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

onde usamos (2.21) e o fato de que $u_\varepsilon$ é ponto de equilíbrio. Assim, para cada $t > 0$, $\tilde{u}_0 = T_0(t, \tilde{u}_0)$ e portanto $\tilde{u}_0 \in \mathcal{E}_0$. ■

## 2.3 Continuidade do conjunto de equilíbrio, variedades instáveis e atratores

Para obter a semicontinuidade inferior dos atratores em $H^1_\varepsilon$, precisamos garantir a semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$. Nesta seção provaremos, para os tipos de perturbações consideradas e assumindo que os pontos de equilíbrio do problema limite são todos hiperbólicos, que o conjunto $\mathcal{E}_\varepsilon$ é finito e possui cardinalidade constante, ou seja, $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_1^\varepsilon, \ldots, u_m^\varepsilon\}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Além disso, $\mathcal{E}_\varepsilon$ se comporta continuamente com respeito à $\varepsilon$ em $H^1_\varepsilon$, ou seja,

$$\max_{1\leq k\leq m} \left\{ \|u_k^\varepsilon - u_k^0\|_{H^1_\varepsilon} \right\} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

### 2.3.1 Continuidade do conjunto de equilíbrio

Considere a família de problemas elípticos

$$(P)_\varepsilon \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

para cada $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Mostraremos o seguinte resultado:

**Proposição 2.5.** *Suponha que a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível. Assuma que o problema $(P)_0$ tem uma solução $u^0$ e que zero não esteja no espectro do operador $\Delta + F'(\cdot, u^0(\cdot))I : H^2_n(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$, onde $H^2_n(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$. Considere o operador extensão $E : H^1(\Omega_0) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ e seja*

$u^{0,\varepsilon} = E(u^0)_{|\Omega_\varepsilon} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. *Então, existem* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que o problema* $(P)_\varepsilon$ *tem apenas uma solução,* $u_\varepsilon$*, em* $\left\{w_\varepsilon : \|w_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta\right\}$ *para* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*. Além disso,*

$$\left\|u_\varepsilon - u^0\right\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0.$$

**Demonstração:** Defina os operadores $\Theta_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$, pondo $\Theta_\varepsilon(z_\varepsilon) = (-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}(F(z_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})z_\varepsilon)$. Pela Proposição 2.2, estes operadores estão bem definidos desde que $0 \notin \sigma(\Delta + F'(u^0)I)$. Note, também, que $v_\varepsilon$ é um ponto fixo de $\Theta_\varepsilon$ se, e somente se, $v_\varepsilon$ é uma solução de $(P)_\varepsilon$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) &= v_\varepsilon \\
&\Leftrightarrow F(v_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})v_\varepsilon = (-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)v_\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \Delta v_\varepsilon + F(v_\varepsilon) = 0
\end{aligned}$$

Mostraremos que existem $\delta, \varepsilon_0 > 0$ tais que os operadores $\Theta_\varepsilon$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, são contrações estritas da bola $B_\delta(u^{0,\varepsilon}) = \left\{v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \|v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta\right\}$ nela mesma. Para isso, provamos primeiramente que dado $\rho > 0$, existem $\delta, \varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\|\Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) - \Theta_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \rho\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

para quaisquer $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) - \Theta_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
\leq\ &\|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),H^1(\Omega_\varepsilon))}\|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) - F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
\leq\ &C\|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) - F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde foi usada a Proposição 2.2 para obter que $\|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq C$ para alguma constante $C$ independente de $\varepsilon$. Antes de continuar, precisaremos do seguinte resultado

**Lema 2.1.** *Existe uma constante* $C$ *tal que para todo* $z_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$*,* $\delta > 0$ *e quaisquer* $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(z_\varepsilon)$ *, tem-se*

$$\left\|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) - F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + \delta^{2/N}\right)\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

*onde* $\tau_\varepsilon$ *é dado por* (2.2).

Usando o resultado desse lema, obtemos que

$$\|\Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) - \Theta_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + \delta^{2/N} \right) \|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

para alguma constante $C_1 > 0$ independente de $\varepsilon$.

Agora, dado $\rho > 0$, escolha $\varepsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos tais que $C_1 \frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} \leq \frac{\rho}{2}$ e $C_1 \delta^{2/N} < \frac{\rho}{2}$. Daí, $\|\Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) - \Theta_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \rho \|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Afim de mostrar que $\Theta_\varepsilon$ é uma contração da bola $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ nela mesma, provaremos primeiramente que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} + \|u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &= \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} + \|u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_0)}. \end{aligned}$$

Mas $\|u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_0)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Logo, basta mostrar que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, se $w_\varepsilon = \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}$, então $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + F'(u^{0,\varepsilon}) w_\varepsilon = F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon}) u^{0,\varepsilon} & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

e $u^0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^0 + F'(u^0) u^0 = F(u^0) + F'(u^0) u^0 & \text{em} \quad \Omega_0, \\ \dfrac{\partial u^0}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Mas, por (2.11), com $V_\varepsilon = F'(u^{0,\varepsilon})$, $V_0 = F'(u^0)$, $g_\varepsilon = F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon}) u^{0,\varepsilon}$ e $g_0 = F(u^0) + F'(u^0) u^0$, obtemos que $\|w_\varepsilon - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Finalmente, para mostrar que $\Theta_\varepsilon$ é uma contração da bola $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ nela mesma, note que

$$\begin{aligned} \|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \rho\delta + \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

para qualquer $v_\varepsilon \in B_\delta(u^{0,\varepsilon})$. Escolhendo $\varepsilon$ suficientemente pequeno, segue que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq (1-\rho)\delta$, e assim $\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$. Isto conclui a prova da proposição. ■

**Prova do Lema** 2.1. Note que, para cada $x$

$$\left| f(v_\varepsilon(x)) - f(w_\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(z_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)) \right| \leq C\gamma_{\varepsilon,\delta}(x) \left| v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x) \right|,$$

onde

$$\gamma_{\varepsilon,\delta}(x) = \min\{1, |v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| + |w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)|\}.$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio segue que, para cada $x$

$$f(v_\varepsilon(x)) - f(w_\varepsilon(x)) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{z}_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)),$$

para algum $\tilde{z}_\varepsilon(x)$ entre $v_\varepsilon(x)$ e $w_\varepsilon(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} & \left| f(v_\varepsilon(x)) - f(w_\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(z_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)) \right| \\ = & \left| (\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{z}_\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(z_\varepsilon(x)))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)) \right| \end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x$, existe $\hat{z}_\varepsilon(x)$ entre $\tilde{z}_\varepsilon(x)$ e $z_\varepsilon(x)$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| (\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{z}_\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(z_\varepsilon(x)))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)) \right| \\ = & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{z}_\varepsilon(x))(\tilde{z}_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)) \right| \\ \leq & \; C \, |\tilde{z}_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| \, |v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)|, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ é uniformemente limitada (ver (3)). Como $\tilde{z}_\varepsilon(x)$ está entre $v_\varepsilon(x)$ e $w_\varepsilon(x)$ para cada $x$, tem-se que $\tilde{z}_\varepsilon(x) = \lambda w_\varepsilon(x) + (1-\lambda)v_\varepsilon(x)$ para algum $\lambda = \lambda(x) \in [0,1]$. Assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| &= |\lambda w_\varepsilon(x) + (1-\lambda)v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| \\ &= |\lambda(w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)) + (1-\lambda)(v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))| \\ &\leq \lambda |w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| + (1-\lambda)|v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| \\ &\leq |w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)| + |v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)|, \end{aligned}$$

de onde segue a afirmação desejada.

Por definição, temos que $\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Além disso,

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|v_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|w_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq 2\delta,$$

para quaisquer $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(u^{0,\varepsilon})$. Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{\varepsilon,\delta}(x)|^p dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{\varepsilon,\delta}(x)|^{p-2}|\gamma_{\varepsilon,\delta}(x)|^2 dx \\
&\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^{p-2}_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq (2\delta)^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq (2\delta)^{2/p} \leq 2(\delta)^{2/p}, \qquad 2 \leq p < \infty.$$

Agora, se $\varphi_\varepsilon = v_\varepsilon - w_\varepsilon$ e $\tilde{\varphi}_\varepsilon = E_\varepsilon(\varphi_{\varepsilon_{|K_\varepsilon}})_{|\Omega_\varepsilon}$, então

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= \|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus K_\varepsilon)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\nabla\varphi_\varepsilon - \nabla\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus K_\varepsilon)} \\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\left(\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C_1\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\left(\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(K_\varepsilon)}\right) \\
&\leq C_1\frac{2}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $E_\varepsilon : H^1(K_\varepsilon) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitado com constante independente de $\varepsilon$ e $\tau_\varepsilon$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ com condições de fronteira de Dirichlet em $\partial K_\varepsilon$ e condições de fronteira de Neumann em $\partial\Omega_\varepsilon$. Agora, usando Hölder ($p = \infty$, $q = 1$) e o resultado anterior, obtemos que

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Usando Hölder ($p = N/2$ e $q = N/(N-2)$) e as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^N(\Omega_\varepsilon)}\|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^N(\Omega_\varepsilon)}C\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2N/(N-2)}(K_\varepsilon)} \\
&\leq 2(\delta)^{2/N}C_2\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^N(\Omega_\varepsilon)}\|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_1\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + 2C_2\delta^{2/N}\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq C_3\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + \delta^{2/N}\right)\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Isto conclui prova do Lema 2.1.

Uma consequência imediata da Proposição 2.5 é

**Corolário.** *Suponha que todas as condições da Proposição* 2.5 *são satisfeitas. Assuma também que o problema* $(P)_0$ *tenha exatamente* $m$ *soluções* $u_1^0, \dots, u_m^0$, *sendo todas hiperbólicas, ou seja, zero não pertence ao espectro do operador* $\Delta + F'(u_k^0)I : H_n^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$, $k = 1, \dots, m$. *Então, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que o problema* $(P)_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *tem exatamente* $m$ *soluções* $u_1^\varepsilon, \dots, u_m^\varepsilon$. *Além disso, temos que*

$$\left\|u_k^\varepsilon - u_k^0\right\|_{H_\varepsilon^1} \to 0 \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0.$$

**Demonstração:** Pela Proposição 2.4, para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, segue que qualquer solução $u^\varepsilon$ de $(P)_\varepsilon$ está em uma vizinhança de $u_k^0$ para algum $k = 1, \dots, m$. Pela Proposição 2.5, em uma vizinhança de $u_k^0$, $k = 1, \dots, m$, existe apenas uma solução de $(P)_\varepsilon$ que converge para $u_k^0$ em $H_\varepsilon^1$. ■

### 2.3.2 Continuidade das variedades instáveis

Nessa seção mostraremos que as variedades instáveis locais de $u_k^\varepsilon$, para cada $k = 1, \dots, m$ fixo, são contínuas em $H_\varepsilon^1$ quando $\varepsilon \to 0$. Para simplificar a notação usaremos $u^\varepsilon$ para representar $u_k^\varepsilon$.

Temos o seguinte resultado

**Proposição 2.6.** *Assuma que* $u^0$ *é uma solução de* $(P)_0$ *e que zero não esteja no espectro do operador* $\Delta + \dfrac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u^0(\cdot))I : H_n^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$. *Então, existem*

*$\delta, \varepsilon_0 > 0$ tais que $u^\varepsilon$, solução de $(P)_\varepsilon$, tem uma variedade instável local $W^u_{loc}(u^\varepsilon) \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e se denotarmos*

$$W^u_\delta(u^\varepsilon) = \left\{ w \in W^u_{loc}(u^\varepsilon) : \|w - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta \right\}, \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

*então $W^u_\delta(u^\varepsilon) \to W^u_\delta(u^0)$ em $H^1_\varepsilon$ quando $\varepsilon \to 0$, ou seja,*

$$\sup_{w_\varepsilon \in W^u_\delta(u^\varepsilon)} \inf_{w_0 \in W^u_\delta(u^0)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{H^1_\varepsilon} + \sup_{w_0 \in W^u_\delta(u^0)} \inf_{w_\varepsilon \in W^u_\delta(u^\varepsilon)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \ \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

**Demonstração:** Pela Proposição 2.5, temos que $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^\varepsilon_1} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Pela Proposição 2.1, segue que o espectro do operador $\Delta + F'(u^\varepsilon)$ se comporta continuamente quando $\varepsilon \to 0$. De fato, basta mostrarmos que o potencial $V_\varepsilon = F'(u^\varepsilon)$ é admissível:

$(i)$ Como $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ é limitada e $u^\varepsilon$ é limitado, segue que

$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \|F'(u^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C < \infty.$$

$(ii)$ Para cada $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(u^\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(u^0(x)) \right] \psi dx \right| \ \leq \ & \left| \int_{K_\varepsilon} \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(u^\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(u^0(x)) \right] \psi dx \right| \\ & + \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial u}(u^\varepsilon(x)) \psi dx \right| \\ & + \left| \int_{\Omega_0 \setminus K_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial u}(u^0(x)) \psi dx \right| \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial u}$ é limitada e $u^\varepsilon$ é limitado, segue que as duas últimas parcelas da desigualdade acima convergem para zero quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ entre $u^\varepsilon(x)$ e $u^0(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_\varepsilon} \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(u^\varepsilon(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(u^0(x)) \right] \psi dx \right| \ &= \ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\tilde{u}^\varepsilon(x))(u^\varepsilon(x) - u^0(x)) \psi dx \right| \\ &\leq \ \tilde{C} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(K_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Na última desigualdade acima usamos a desigualdade de Hölder e o fato de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ é limitada. Portanto, $F'(u^\varepsilon) \to F'(u^0)$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Considerando $u$ como solução do problema (1) e fazendo $w = u - u^\varepsilon$, segue que $w_t = u_t$ e $\Delta u = \Delta w + \Delta u^\varepsilon = \Delta w - F(u^\varepsilon)$. Substituindo em (1), obtemos que

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w - F(u^\varepsilon) + F(u). \\ &= \Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w + u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w. \end{aligned}$$

Assim, $w$ é solução de

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w + u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.26}$$

Vamos denotar por $\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ os autovalores de $(\Delta + F'(u^\varepsilon)I)$ e por $\{\phi_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ um correspondente sistema ortonormal de autofunções. Se $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ são positivos e $\lambda_{n+1}^0, \lambda_{n+2}^0, \ldots$ são negativos, seja $\beta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\lambda_1^\varepsilon \geq \ldots \geq \lambda_n^\varepsilon \geq \beta > 0 > -\beta \geq \lambda_{n+1}^\varepsilon \geq \lambda_{n+2}^\varepsilon \geq \ldots,$$

para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Seja $W_\varepsilon = [\phi_1^\varepsilon, \ldots, \phi_n^\varepsilon]$ e

$$W_\varepsilon^\perp = \left\{ \psi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi = 0, \ \forall \phi \in W_\varepsilon \right\}.$$

Considere $P^\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$ a projeção ortogonal sobre $W_\varepsilon$, dada por

$$P^\varepsilon \psi = \sum_{i=1}^\infty \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \psi \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon.$$

Se $\psi \in W_\varepsilon$, então $\psi = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon$ e

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left( \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i^\varepsilon) \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_i^\varepsilon \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Como $\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i^0$, $1 \leq i < \infty$, temos um isomorfismo $T_\varepsilon : W_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$, dado por

$$T_\varepsilon(\psi) = \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_1^\varepsilon, \ldots, \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_n^\varepsilon \right).$$

Assim, $T_\varepsilon$ é limitado e com inversa $T_\varepsilon^{-1}$ também limitada. Além disso, as normas de $T_\varepsilon$ e de $T_\varepsilon^{-1}$ são uniformemente limitadas para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Agora vamos decompor a equação (2.26) da seguinte forma: se $w$ é uma solução de (2.26), temos que

$$w = \sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon + z,$$

onde $v_i = \int_{\Omega_\varepsilon} w\phi_i^\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i = \frac{dv_i}{dt} &= \int_{\Omega_\varepsilon} w_t \phi_i^\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta + F'(u^\varepsilon)I) w \phi_i^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w\right] \phi_i^\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{n} v_j \Delta \phi_j^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} v_j F'(u^\varepsilon)\phi_j^\varepsilon + (\Delta + F'(u^\varepsilon)I)z\right] \phi_i^\varepsilon \\
&+ \int_{\Omega_\varepsilon} \left[F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w\right] \phi_i^\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{n} v_j \lambda_j^\varepsilon \phi_j^\varepsilon\right] \phi_i^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[(\Delta + F'(u^\varepsilon)I)z\right] \phi_i^\varepsilon \\
&+ \int_{\Omega_\varepsilon} \left[F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w\right] \phi_i^\varepsilon \\
&= \lambda_i^\varepsilon v_i + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w\right] \phi_i^\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\Delta\phi_i^\varepsilon + F'(u^\varepsilon)\phi_i^\varepsilon = \lambda_i^\varepsilon \phi_i^\varepsilon$, $\{\phi_i^\varepsilon\}_{i=1}^n$ forma um sistema ortonormal e $z \in W_\varepsilon^\perp$.

Além disso, temos que

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta \phi_i^\varepsilon + \Delta z$$

e

$$F'(u^\varepsilon)w = \sum_{i=1}^{n} v_i F'(u^\varepsilon)\phi_i^\varepsilon + F'(u^\varepsilon)z.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
z_t &= w_t - \sum_{i=1}^{n} \dot{v}_i \phi_i^\varepsilon \\
&= \Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
&- \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i^\varepsilon v_i + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \right] \phi_i^\varepsilon \right\} \phi_i^\varepsilon \\
&= \Delta z + F'(u^\varepsilon)z + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
&+ \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta \phi_i^\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} v_i F'(u^\varepsilon)\phi_i^\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\varepsilon v_i \phi_i^\varepsilon \\
&- \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \right] \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon \\
&= \Delta z + F'(u^\varepsilon)z + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
&- \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \right] \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Vamos escrever $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ e $H_\varepsilon(v,z) = (H_1(v,z), \ldots, H_n(v,z))^\top$, onde

$$
H_j^\varepsilon(v,z) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ F\left( \sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon \right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon) \left( \sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon + z \right) \right] \phi_j^\varepsilon,
$$

e

$$
G_\varepsilon(v,z) = F\left( \sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon \right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon) \left( \sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon + z \right) - \sum_{i=1}^{n} H_i(v,z)\phi_i^\varepsilon .
$$

Assim, temos que $H_\varepsilon(0,0) = 0$ e $G_\varepsilon(0,0) = 0$. Pelo Lema 2.1, dado $\rho > 0$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\|v\|_{\mathbb{R}^n} + \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$ e $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, então

$$
\begin{aligned}
&\|H_\varepsilon(v,z)\|_{\mathbb{R}^n} < \rho, \\
&\|G_\varepsilon(v,z)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < \rho, \\
&\|H_\varepsilon(v,z) - H_\varepsilon(\tilde{v},\tilde{z})\|_{\mathbb{R}^n} < \rho(\|v-\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} + \|z-\tilde{z}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}), \\
&\|G_\varepsilon(v,z) - G_\varepsilon(\tilde{v},\tilde{z})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < \rho(\|v-\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} + \|z-\tilde{z}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

O fato de poder escolher $\delta$ e $\rho$ uniformemente para $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ satisfazendo as desigualdades acima será importante para obter que as variedades instáveis locais estão definidas em uma vizinhança do ponto de equilíbrio $u^\varepsilon$ uniformemente para $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Podemos estender $H_\varepsilon$ e $G_\varepsilon$ fora da bola $B_\delta(u^\varepsilon)$ de tal forma que as desigualdades de (2.27) continuam sendo satisfeitas para quaisquer $v \in \mathbb{R}^n$ e $z \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Denote por $A_\varepsilon = (\Delta + F'(u^\varepsilon)I)_{|_{W_\varepsilon^\perp}}$ e $B_\varepsilon = \text{diag}(\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \lambda_n^\varepsilon)$. Assim, $A_\varepsilon$ possui uma quantidade infinita de autovalores negativos e $B_\varepsilon$ possui uma quantidade finita de autovalores positivos. Agora, podemos reescrever a equação (2.26) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= B_\varepsilon v + H_\varepsilon(v, z), \\ \dot{z} &= A_\varepsilon v + G_\varepsilon(v, z), \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $H_\varepsilon$ e $G_\varepsilon$ satisfazem (2.27) para quaisquer $v \in \mathbb{R}^n$ e $z \in W_\varepsilon^\perp$.

Além disso, existem $M \geq 1$ e $\beta > 0$ independentes de $\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, tais que

$$\begin{aligned} &\left\| e^{A_\varepsilon t} z \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M e^{-\beta t} \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad t \geq 0, \\ &\left\| e^{A_\varepsilon t} z \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M t^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \|z\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad t \geq 0, \\ &\left\| e^{B_\varepsilon t} z \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq M e^{\beta t} \|v\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \leq 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Mostraremos agora que para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe uma variedade instável para $u^\varepsilon$, dada por

$$S^\varepsilon = \left\{ (v, z) : z = \sigma_\varepsilon^*(v), v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

onde $\sigma_\varepsilon^* : \mathbb{R}^n \to W_\varepsilon^\perp$ é limitada e Lipschitz. Além disso,

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon^*(v) - \sigma_0^*(v)\|_{H_\varepsilon^1} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Vamos mostrar primeiramente a existência de uma variedade invariante. De fato, dados $D > 0$, $\Delta > 0$ e $0 < \theta < 1$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) \leq D, \\ &\rho M^2 \Gamma(\tfrac{1}{2}) \sqrt{2} (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} \leq \Delta, \\ &\beta - \rho M (1 + \Delta) \geq \frac{\beta}{2}, \\ &\rho M \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[ \beta^{-\frac{1}{2}} + \frac{1 + \Delta}{\beta - \rho M (1 + \Delta)} \right] \leq \theta < 1, \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$, para todo $a \in \mathbb{R}^+$.

Seja $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to W_\varepsilon^\perp$ tal que

$$|||\sigma_\varepsilon||| \overset{\text{def}}{=} \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq D, \quad \|\sigma_\varepsilon(v) - \sigma_\varepsilon(\tilde{v})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n}. \tag{2.31}$$

Seja $v_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\eta,\sigma_\varepsilon)$ a solução de

$$\frac{dv_\varepsilon}{dt} = B_\varepsilon v_\varepsilon + H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)), \quad t < \tau,\ v_\varepsilon(\tau) = \eta, \tag{2.32}$$

e defina

$$\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))ds. \tag{2.33}$$

Assim, usando (2.27) e as estimativas dos semigrupos, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(.)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\|e^{A_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = \beta(\tau - s)$, obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} ds = \beta^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr = \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Daí,

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(.)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq D. \tag{2.34}$$

Suponha que $\sigma_\varepsilon$ e $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ satisfazem (2.31), $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^n$ e considere $v_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\eta,\sigma_\varepsilon)$, $\tilde{v}_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\tilde{\eta},\tilde{\sigma}_\varepsilon)$. Então, pela fórmula da variação das constantes (1.2), segue que

$$v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t) = e^{B_\varepsilon(t-\tau)}(\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^{t} e^{B_\varepsilon(\tau-s)}[H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)) - H_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))]ds.$$

Assim, usando as estimativas dos semigrupos (2.29) e (2.27), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \\
&+\int_t^\tau Me^{\beta(t-s)}\rho\left(\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}+\|\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)-\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right)ds \\
&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}ds \\
&+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)-\sigma_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds \\
&+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|\sigma_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)-\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds \\
&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}ds \\
&+\rho M\Delta\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}ds+\rho M\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds \\
&= Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M(1+\Delta)\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}ds \\
&+\rho M\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds.
\end{aligned}$$

Se $\phi(t)=e^{-\beta(t-\tau)}\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, então

$$\phi(t)\leq M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||+M\rho(1+\Delta)\int_t^\tau\phi(s)ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall 2 (Lema 1.4), com

$$\alpha(t)=M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$

e $v(s)=\rho M(1+\Delta)$, segue que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq e^{\int_t^\tau\rho M(1+\Delta)ds}\left(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right) \\
&= e^{-\rho M(1+\Delta)(t-\tau)}\left(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq e^{-\rho M(1+\Delta)(t-\tau)}M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}e^{\beta(t-\tau)} \\
&+e^{-\rho M(1+\Delta)(t-\tau)}\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||.
\end{aligned}$$

Como $\beta > 0$ e $t \leq \tau$, segue que $e^{\beta(t-\tau)} \leq 1$, e assim

$$\int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds = \beta^{-1}(1 - e^{\beta(t-\tau)}) \leq \beta^{-1}.$$

Portanto,

$$\|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq e^{-\rho M(1+\Delta)(t-\tau)} \left[ M\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} + \rho M \beta^{-1} \,|||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right]. \tag{2.35}$$

Mostraremos agora que $\Phi$ é uma contração. De fato, usando (2.29) e (2.31) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
\leq \;& \int_{-\infty}^\tau M(\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)) - G_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
\leq \;& \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \left( \|\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon) - \tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} \right) ds \\
\leq \;& \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \left[ (1+\Delta)\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon||| \right] ds,
\end{aligned}$$

Usando a estimativa de $\|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ dada em (2.35), obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
\leq \;& \rho M^2(1+\Delta)\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} e^{-\rho M(1+\Delta)(s-\tau)} ds \\
& + \rho^2 M^2 (1+\Delta)\beta^{-1} \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \,|||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon|||\, e^{-\rho M(1+\Delta)(s-\tau)} ds \\
& + \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \,|||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon|||\, ds \\
= \;& P_1 + P_2 + P_3.
\end{aligned}$$

Vamos agora estimar cada uma dessas três parcelas. Como $\beta - \rho M(1+\Delta) \geq \beta/2$, segue que $-(\beta - \rho M(1+\Delta)) \leq -\beta/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
P_1 &= \rho M^2(1+\Delta)\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-[\beta - \rho M(1+\Delta)](\tau-s)} ds \\
&\leq \rho M^2(1+\Delta)\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}(\tau-s)} ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{\beta}{2}(\tau - s)$, segue que

$$\int_{-\infty}^\tau (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}(\tau-s)} ds = \sqrt{2}\beta^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\beta^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$P_1 \le \rho M^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Vamos estimar $P_2$. Temos que

$$P_2 = \rho^2 M^2(1+\Delta)\beta^{-1}\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-[\beta-\rho M(1+\Delta)](\tau-s)}ds.$$

Fazendo a mudança de variável $r=[\beta-\rho M(1+\Delta)](\tau-s)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-[\beta-\rho M(1+\Delta)](\tau-s)}ds &= [\beta-\rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\beta-\rho M(1+\Delta)}[\beta-\rho M(1+\Delta)]^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\beta-\rho M(1+\Delta)}\beta^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P_2 &\le \rho^2M^2(1+\Delta)\beta^{-1}\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\beta-\rho M(1+\Delta)}\beta^{\frac{1}{2}}\\
&= \rho M\Gamma(\tfrac{1}{2})\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,\frac{\rho M(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}}{\beta-\rho M(1+\Delta)}\\
&\le \rho M\Gamma(\tfrac{1}{2})\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,\frac{\rho M^2\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{2}(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}}{\beta-\rho M(1+\Delta)}\\
&\le \rho M\Gamma(\tfrac{1}{2})\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,\frac{\Delta+1}{\beta-\rho M(1+\Delta)},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que $\rho M^2\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{2}(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}} \le \Delta < \Delta+1$ e $M \ge 1$. Finalmente, fazendo a mudança de variável $r=\beta(\tau-s)$, obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}ds = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\beta^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$P_3 \le \rho M\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\beta^{-\frac{1}{2}}\,|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,.$$

A partir dessas estimativas concluimos que

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \rho M \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\beta^{-\frac{1}{2}} + \frac{1+\Delta}{\beta - \rho M(1+\Delta)}\right] |||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$

$$+\rho M^2\sqrt{2}(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Seja

$$I_\sigma(\varepsilon) = \rho M \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\beta^{-\frac{1}{2}} + \frac{1+\Delta}{\beta - \rho M(1+\Delta)}\right]$$

e

$$I_\eta(\varepsilon) = \rho M^2\sqrt{2}(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}.$$

Por (2.30), dado $\theta < 1$, existe $\rho_0 > 0$ tal que, para $\rho \leq \rho_0$, $I_\sigma(\varepsilon) \leq \theta$ e $I_\eta(\varepsilon) \leq \Delta$. Assim,

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \Delta\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} + \theta\,|||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma}_\varepsilon|||\,. \tag{2.36}$$

Segue das desigualdades (2.34) e (2.36) que $\Phi$ é uma contração $\Phi : C^* \to C^*$, onde $C^*$ representa a classe de funções que satisfazem (2.31). Portanto, $\Phi$ tem um único ponto fixo $\sigma_n^* = \Phi(\sigma_n^*)$ nesta classe.

Mostraremos agora que $S^\varepsilon = \{(v, \sigma_\varepsilon^*(v)) : v \in \mathbb{R}^n\}$ é uma variedade invariante para (2.28). Seja $(v_0, z_0) \in S^\varepsilon$, $z_0 = \sigma_\varepsilon^*(v_0)$ e denote por $v_\varepsilon^*(t)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = B_\varepsilon + H_\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon^*(v)), \quad v(0) = v_0.$$

Então $(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva sobre $S^\varepsilon$.

Seja $z^*(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)}G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)))ds$. Temos que $z^*(t)$ é solução de $\dot{z} = A_\varepsilon z + G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$. Além disso,

$$z^*(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)}G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)))ds = \Phi(\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)),$$

logo $z^*(t_0) = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t_0)) = z_0$ e $z^*(t)$ permanece limitada quando $\to -\infty$. Portanto $(v_\varepsilon^*(s), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)))$ é uma solução do problema (2.28) com condição inicial $(v_0, z_0)$. Assim, provamos a invariância da variedade.

Mostraremos agora que

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H^1_\varepsilon} = |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Segue da Proposição 2.3 que

$$\begin{aligned}
& \|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H_\varepsilon^1} \\
= & \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{A_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - e^{A_0(\tau-s)} G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0)) \right\|_{H_\varepsilon^1} ds \\
\leq & \int_{-\infty}^{\tau} \left\| \left( e^{A_\varepsilon(\tau-s)} - e^{A_0(\tau-s)} \right) G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) \right\|_{H_\varepsilon^1} ds \\
& + \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{A_0(\tau-s)} \left( G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0)) \right) \right\|_{H_\varepsilon^1} ds \\
\leq & \; M\theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau - s)^{-\gamma} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
& + M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \\
= & \; R_1 + R_2
\end{aligned}$$

Vamos estimar a primeira parcela acima: fazendo a mudança de variável $r = \beta(\tau - s)$, obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau - s)^{-\gamma} ds = \beta^{\gamma-1} \int_0^{\infty} r^{-\gamma} e^{-r} dr = \beta^{\gamma-1} \Gamma(1 - \gamma).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
R_1 & \leq \rho M\theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau - s)^{-\gamma} ds \\
& \leq \rho M\theta(\varepsilon) \Gamma(1 - \gamma) \beta^{\gamma-1} \\
& = o(1).
\end{aligned}$$

Para estimar $R_2$, note que

$$
\begin{aligned}
& \|G_\varepsilon(v_\varepsilon,\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_0(v_0,\sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\leq\ & \|G_\varepsilon(v_\varepsilon,\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_\varepsilon(v_0,\sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|G_\varepsilon(v_0,\sigma_0^*(v_0)) - G_0(v_0,\sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\leq\ & \rho\left(\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon) - \sigma_0^*(v_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) + o(1) \\
\leq\ & o(1) + \rho\left(\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon) - \sigma_\varepsilon^*(v_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\sigma_\varepsilon^*(v_0) - \sigma_0^*(v_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \\
\leq\ & o(1) + \rho\left(\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \Delta\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||\right) \\
=\ & o(1) + \rho\left((1+\Delta)\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||\right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
R_2 \ \leq\ & \rho M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}\left[o(1) + (1+\Delta)\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||\right] ds \\
\leq\ & o(1) + \rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} ds \\
& +\rho M\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
=\ & o(1) + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
& +\rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} ds.
\end{aligned}
$$

De $R_1$ e $R_2$ segue que

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H^1_\varepsilon} \ \leq\ & o(1) + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
& +\rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}\|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos estimar $\|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}$: temos que

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left\|e^{B_\varepsilon(t-\tau)}(\eta) - e^{B_0(t-\tau)}(\eta)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad + \int_t^\tau \left\|e^{B_\varepsilon(t-\tau)} H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - H_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\right\|_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq o(1) + \int_t^\tau \left\|\left(e^{B_\varepsilon(t-\tau)} - e^{B_0(t-\tau)}\right) H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\right\|_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\quad + \int_t^\tau \left\|e^{B_0(t-\tau)} \left[H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - H_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\right]\right\|_{\mathbb{R}^n} ds.
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_t^\tau \left\|\left(e^{B_\varepsilon(t-\tau)} - e^{B_0(t-\tau)}\right) H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\right\|_{\mathbb{R}^n} ds \leq \rho \int_t^\tau \left\|e^{B_\varepsilon(t-\tau)} - e^{B_0(t-\tau)}\right\|_{\mathbb{R}^n} ds \leq o(1).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\|H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - H_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{\mathbb{R}^n} \\
\leq\ & \|H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - H_\varepsilon(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{\mathbb{R}^n} + \|H_\varepsilon(v_0, \sigma_0^*(v_0)) - H_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{\mathbb{R}^n} \\
\leq\ & \rho\left(\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon) - \sigma_0^*(v_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) + o(1) \\
\leq\ & o(1) + \rho\left((1+\Delta)\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq o(1) + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\quad + \rho M[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||] \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds \\
&\leq \rho M \beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||] + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds = \beta^{-1}[1-e^{\beta(t-\tau)}] \leq \beta^{-1}$.

Se $\phi(t) = e^{-\beta(t-\tau)}\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n}$, então

$$\phi(t) \leq \rho M\beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||]e^{-\beta(t-\tau)} + \rho M(1+\Delta)\int_t^\tau \phi(s)ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall 2 (Lema 1.4), com

$$\alpha(t) = \rho M\beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||]e^{-\beta(t-\tau)} \quad \text{e} \quad v(s) = \rho M(1+\Delta),$$

segue que

$$\phi(t) \leq e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)}\rho M\beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||]e^{-\beta(t-\tau)}.$$

Portanto,

$$\|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho M\beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||]e^{-\rho M(1+\Delta)(t-\tau)}.$$

Usando essa estimativa, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H^1_\varepsilon} \\
\leq\ & o(1) + \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\,|||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
& + \rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^\tau e^{-\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n}ds \\
\leq\ & o(1) + \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\,|||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
& + \rho^2M^2(1+\Delta)\beta^{-1}[o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||]\int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-[\beta-\rho M(1+\Delta)](\tau-s)}ds.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas feitas anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H_\varepsilon^1} &\leq o(1) + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{1}{2})\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
&\quad + \rho M \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\Delta + 1}{\beta - \rho M(1+\Delta)}\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
&= o(1) + \rho M \Gamma(\tfrac{1}{2}) \left[ \beta^{-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta + 1}{\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \\
&\leq o(1) + \theta\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||
\end{aligned}$$

Tomando o supremo na desigualdade acima, obtemos

$$|||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \leq o(1) + \theta\, |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||\,.$$

Portanto,

$$|||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \leq \frac{o(1)}{1-\theta} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

■

O seguinte resultado é consequência imediata da Proposição 2.6:

**Corolário.** *Suponha que todas as condições da Proposição* 2.6 *são satisfeitas e que o problema* $(P)_0$ *possui exatamente* $m$ *soluções* $u_1^0, \ldots, u_m^0$*, sendo todas hiperbólicas. Então, existem* $\delta, \varepsilon_0 > 0$ *suficientemente pequenos tais que o problema* $(P)_\varepsilon$*,* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$*, possui exatamente* $m$ *soluções* $u_1^\varepsilon, \ldots, u_m^\varepsilon$*. Além disso, as variedades instáveis locais* $W_\delta^u(u_k^\varepsilon)$*,* $k = 1, \ldots, m$*, comportam continuamente em* $H_\varepsilon^1$ *quando* $\varepsilon \to 0$*.*

## 2.4 Continuidade dos Atratores

Nessa seção mostraremos a continuidade dos atratores.

**Teorema 2.1.** *Suponha que a família de domínios* $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ *seja admissível e que todos os pontos de equilíbrio do problema não perturbado* $(P)_0$ *sejam hiperbólicos. Então, os atratores* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *comportam continuamente em* $H_\varepsilon^1$ *quando* $\varepsilon \to 0$*, ou seja,*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_\varepsilon^1} + \sup_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \inf_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_\varepsilon^1} \to 0 \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0.$$

**Demonstração:** Na Proposição 2.4 foi mostrado a semicontinuidade superior dos atratores. Assim, basta provarmos a semicontinuidade inferior. De fato, pela caracterização do atrator dada em (1.4), se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, então $u_0$ está na variedade instável de algum $u_k^0$, $k = 1, \ldots, m$. Considere $\delta > 0$ obtido na Proposição 2.6 e escolha $\tau > 0$ de forma que $w_0 = T_0(-\tau, u_0) \in W_\delta^u(u_k^0)$. Pela continuidade das variedades instáveis, existe uma sequência $w_\varepsilon \in W_\delta^u(u_k^\varepsilon)$ que converge para $w_0$ em $H_\varepsilon^1$ quando $\varepsilon \to 0$. Como a família de semigrupos não lineares é contínua em $H_\varepsilon^1$, ver (2.21), segue que $\mathcal{A}_\varepsilon \ni T_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon) \to T_0(\tau, w_0) = u_0$ em $H_\varepsilon^1$ quando $\varepsilon \to 0$. ■

## 2.5 Exemplos

Nesta seção serão dados dois exemplos de perturbações de domínio. No primeiro exemplo mostraremos que a condição $(ii)$ da Proposição 2.1 é satisfeita, e portanto todos os resultados desse trabalho são válidos. No segundo exemplo, enunciaremos um exemplo onde os resultados desse trabalho não podem ser aplicados.

### 2.5.1 Uma $C^0$ perturbação do domínio

Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio Lipschitz tal que para cada $\xi \in \partial\Omega_0$ existem $\tilde{Q}_\delta^\xi$, um quadrado de lado $2\delta$ e centro $\xi$, e um movimento rígido $T_\xi : \tilde{Q}_\delta^\xi \to Q_\delta^0$, onde $Q_\delta^0 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \delta, i = 1 \ldots N\}$, tais que

$$T_\xi(\Omega_0 \cap \tilde{Q}_\delta^\xi) = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N < f_0(x') \text{ e } f_0(0) = 0, |x_i| < \delta, i = 1 \ldots N-1\}$$

para alguma função Lipschitz $f_0$ e

$$A = T_\xi(\Omega_\varepsilon \cap \tilde{Q}_\delta^\xi) = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N < f_\varepsilon(x') \text{ e } |x_i| < \delta, i = 1 \ldots N-1\},$$

onde $f_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i| < \delta\}$.

Além disso, como $K_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon \cap \Omega_0$, temos que

$$T_\xi(\partial K_\varepsilon \cap \tilde{Q}_\delta^\xi) = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N < g_\varepsilon(x') \text{ e } |x_i| < \delta, i = 1 \ldots N-1\}$$

para alguma função $g_\varepsilon$ tal que $g_\varepsilon < f_0$, $g_\varepsilon < f_\varepsilon$ e $g_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i| < \delta\}$.

Seja

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon,\delta} &= T_\xi((\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \cap \tilde{Q}_\delta^\xi) \\ &= \{x = (x', x_N) : |x_i| < \delta, g_\varepsilon(x') < x_N < f_\varepsilon(x')\}. \end{aligned}$$

Dada $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, seja $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \circ T_\xi^{-1} : A \to \mathbb{R}$. Assim,

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq \int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_N} \right|^2 dx_N dx'.$$

Mas para $x'$ fixo, aplicando a desigualdade de Poincaré para dimensão 1, obtemos que

$$\int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_N} \right|^2 dx_N \geq \frac{1}{|f_\varepsilon(x') - g_\varepsilon(x')|^2} \int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} |\tilde{u}_\varepsilon|^2 dx_N.$$

Assim,

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq \frac{1}{\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|^2_{L^\infty(R_{\varepsilon,\delta})}} \|\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})}.$$

Como $f_\varepsilon, g_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i'| < \delta\}$, existe $k_\varepsilon \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$, tal que

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq k_\varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})}. \tag{2.37}$$

Desde que $\partial\Omega_0$ é compacto, existe um número finito de $\xi^j \in \partial\Omega_0$, $j = 1, \ldots, k$, tal que $\partial\Omega_0$ é coberta por conjuntos $(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \cap \tilde{Q}^\xi_\delta$. Para cada conjunto $R_{\varepsilon,\delta}$ temos (2.37). Utilizando a partição da unidade subordinada a cobertura finita, obtemos para $u_\varepsilon$ em $\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)} \geq C k_\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon \backslash K_\varepsilon)}$$

para alguma constante $C$ independente de $\varepsilon$. Portanto a condição $(ii)$ da Proposição 2.1 é satisfeita e os resultados desse trabalho podem ser aplicados.

A única exigência sobre $f_\varepsilon$ foi a convergência uniforme $f_\varepsilon \to f_0$. Em particular, podem ser consideradas perturbações com comportamento bem oscilante. Por exemplo

$$f_\varepsilon(x') = f_0(x') + \varepsilon F\left(\frac{x_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{\varepsilon^{\alpha_{N-1}}}\right),$$

onde $F : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ é uma função suave limitada e $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}$.

### 2.5.2 Uma perturbação do tipo Dumbbell

Um domínio de Dumbbell consiste em um par de domínios disjuntos $\Omega_L$ e $\Omega_R$ que são ligados por um canal fino $R_\varepsilon$. Usualmente, a forma desse canal é dada por (por exemplo em $\mathbb{R}^2$)

$$R_\varepsilon = \{(x, y) : x \in (0, L), 0 < y < \varepsilon g_\varepsilon(x)\},$$

onde $g_\varepsilon \to g_0$ uniformemente em $[0, L]$ e $g_0$ é uma função suave estritamente positiva.

O problema não perturbado é dado por $\Omega_0 = \Omega_L \cup \Omega_R$ e o domínio de Dumbbell é dado por $\Omega_\varepsilon = \Omega_L \cup R_\varepsilon \cup \Omega_R$. Assim, $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$ e daí podemos tomar $K_\varepsilon = \Omega_0$. Em termos do comportamento espectral, os resultados em ([7], [8], [10]) mostram que existe uma contribuição do espectro do operador laplaciano proveniente do canal fino. Ou seja, os autovalores e as autofunções do domínio de Dumbbell convergem, quando $\varepsilon \to 0$, para os autovalores e autofunções do domínio não perturbado $\Omega_0 = \Omega_L \cup \Omega_R$ e para os autovalores e autofunções de um problema proveniente do canal:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{g_0}(g_0 u_x)_x = \mu u, & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, & u(L) = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Além disso, sabe-se que os autovalores de

$$\begin{cases} -\Delta u = \tau u, & x \in R_\varepsilon, \\ u = 0, & \partial R_\varepsilon \cap \partial(\Omega_L \cup \Omega_R), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial R_\varepsilon \backslash \partial(\Omega_L \cup \Omega_R) \end{cases} \tag{2.39}$$

convergem para os autovalores de (2.38), ver ([7], [8], [9]).

Em particular, a condição $(ii)$ da Proposição 2.1 não é satisfeita e assim os resultados desse trabalho não podem ser aplicados. Mas em [1] é feito uma adaptação no domínio de Dumbbell de forma que todos os resultados desse trabalho possam ser aplicados.

# Apêndice

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\varepsilon u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.40}$$

ou

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\varepsilon u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.41}$$

Multiplicando por $u$ e integrando, obtemos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (-\Delta u)u + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |u|^2 = \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2.$$

**Afirmação 1.** $\displaystyle\int_{\Omega_\epsilon} (-\Delta u)u = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2.$

De fato, considere o campo $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_{x_i} u e_i$ e o vetor normal $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i e_i$. Assim,

$$\text{div}F = \sum_{i=1}^{N} (u_{x_i x_i} u + u_{x_i} u_{x_i}) = (\Delta u)u + |\nabla u|^2$$

e

$$F.n = \sum_{i=1}^{N} a_i u_{x_i} u = u\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int \text{div}F = \int F.n,$$

segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u)u + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\epsilon} u\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ ou $u = 0$, segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u)u + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = 0.$$

Daí,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (-\Delta u)u = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2.$$

# Referências Bibliográficas


[1] J.M. Arrieta, A.N. Carvalho, *Spectral convergence and nolinear dynamics of reaction-diffusion equations under pertubations of the domain,* J. Differential Equations 199 (2004) 143-178.

[2] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of Dissipative Systems,* in: Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[3] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer, Berlin, 1981.

[4] Pazy, A, *Semigrups of linear operators and applications to partial differential equations.* (Applied mathematical sciences), Vol.44, Springer, Berlin, 1983.

[5] Brézis, H. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.* Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984.

[6] J.M. Arrieta, A.N. Carvalho, A. Rodriguez-Bernal, *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary condition.* Uniform bounds, Comm. Partial Differential Equations 25 (1&2) (2000) 1-37.

[7] J.M. Arrieta, *Spectral behavior of Schrödinger operators under perturbations of the domain,* Ph.D. Thesis, CDSNS School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta GA, 1991.

[8] J.M. Arrieta, *Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain,* J. Diferential Equations 118 (1995) 54-103.

[9] J.K. Hale, G. Raugel, *Reaction-diffusion equations on thin domains,* J. Math. Pures Appl. 71 (1992) 33-95.

[10] S. Jimbo, *The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary conditions,* J. Differential Equations 77 (1989) 322-350.

[11] A.L. Pereira, M.C. Pereira, *Continuity of attractors for a reaction-difusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain,* J. Differential Equations 239 (2007) 343-370.

[12] E.A. Abreu, A.N. Carvalho, *Attractors for semilinear parabolic problems with Dirichlet boundary conditions in varying domains,* Revista Matemática contemporânea, Vol.27, (2004) 37-51.