Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Gênero para HNN-extensões de Grupos Finitos

por

Vagner Rodrigues de Bessa

Brasília
Fevereiro de 2011

Agradecimentos

- À Deus por esta grande oportunidade;

- A todos meus amigos pelo apoio e incentivo, em especial Leo, Miguel, Magno e Tonires (sempre presentes nos momentos de descontração);

- A Flávia e a Luciana pela ajuda, apoio e paciência principalmente no período do exame de qualificação;

- A minha família pelo estímulo e apoio incondicional desde a primeira hora;

- Ao Prof. Pavel Zalesski pela paciência, pelos conselhos e por sua grande contribuição na minha formação;

- A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática;

- Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho encontramos uma limitação para a cardinalidade do gênero dos grupos $G = HNN(K, A, t, f)$, com relação à família de todos os grupos virtualmente livres, onde K é um grupo finito. Também encontramos condições sobre G para que a cardinalidade do gênero seja igual a 1. Para o caso *pro-p*, encontramos efetivamente a cardinalidade do gênero quando consideramos G uma HNN-extensão residualmente-p. Por fim, fazemos o mesmo estudo para os grupos da forma $G_1 \star_H G_2$, onde G_1 e G_2 são grupos nilpotentes finitamente gerados e o subgrupo amalgamado H é finito. Toda esta tese tem como pilar o trabalho [GZ], de F. Grunewald e P. Zalesski.

Palavras-chave: Gênero para HNN-extensão, grupo virtualmente livre, completamento profinito, produto livre amalgamado.

Abstract

In this work, we find a bound for the cardinality of genus of groups $G = HNN(K, A, t, f)$ with respect to the class of virtually free groups, where K is a finite group. We also find conditions on G for the cardinality of the genus to be equal 1. For the *pro-p* case we find effectively the cardinality of genus when we consider G to be residually-p HNN-extension. Finally, we do the same consideration for the groups of type $G_1 \star_H G_2$ where G_1 and G_2 are finitely generated nilpotent groups and the amalgamated subgroup H is finite. This work is inspired by the paper [GZ], of the F. Grunewald and P. Zalesskii.

Key words: Genus for HNN-extension, virtually free group, profinite completion, amalgamated free product.

Sumário

Introdução

Seja G um grupo e $\widehat{G}$ seu completamento profinito. No trabalho [GZ], F. Grunewald e P. Zalesski introduzem a notação de gênero para um grupo G com respeito a uma família $\mathcal{F}$ de grupos como o conjunto de classes de isomorfismos dos grupos que pertencem a esta família e que tem o mesmo completamento profinito, isto é,

$$g(\mathcal{F}, G) = IsoClasses(\left\{H \in \mathcal{F} \mid \widehat{G} \cong \widehat{H}\right\}).$$

No mesmo trabalho as seguintes questões são formuladas:

Problemas básicos:

PI Encontrar interessantes famílias $\mathcal{F}$ tal que a cardinalidade do conjunto $g(\mathcal{F}, G)$ é finita para todo $G \in \mathcal{F}$.

PII Encontrar grupos G em alguma família $\mathcal{F}$ tal que $g(\mathcal{F}, G)$ contém somente um elemento.

PIII Encontrar grupos G em interessantes famílias tal que a cardinalidade do conjunto $g(\mathcal{F}, G)$ é finita, mas contém mais que um elemento. Construir exemplos quando a cardinalidade de elementos do gênero é ilimitada.

PIV Encontrar algoritmos para determinar quando dois grupos finitamente apresentados (e pertencentes a uma família $\mathcal{F}$) tem completamentos profinitos isomorfos.

PV Encontrar algoritmos que determinem o número de elementos do gênero $g(\mathcal{F}, G)$.

Uma das motivações para este estudo tem sua origem a partir do trabalho de Grothedieck [G], onde ele introduz a noção de grupo fundamental algébrico $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ de uma variedade algébrica projetiva suave (connected smooth projective algebraic variety) X definida sobre o fecho algébrico dos números racionais. Denotamos este fecho algébrico por $\overline{\mathbb{Q}}$ e fixamos uma imersão de $\overline{\mathbb{Q}}$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Seja $X(\mathbb{C})$ a correspondente superfície de pontos complexos (manifold of complex points). Grothendieck define o grupo fundamental algébrico $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ de X e estabelece um isomorfismo contínuo

$$\pi_1\widehat{(X(\mathbb{C}))} \cong \pi_1^{\text{alg}}(X).$$

Aqui o grupo fundamental $\pi_1(X(\mathbb{C}))$ é finitamente apresentado enquanto que $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ é profinito. A construção de $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ é puramente algébrica, além do mais, existe um isomorfismo

$$\pi_1^{\text{alg}}(X^\sigma) \cong \pi_1^{\text{alg}}(X)$$

onde X^σ representa a conjugação da variedade X por qualquer elemento σ no grupo de Galois absoluto dos racionais.

Uma das primeiras contribuições para este assunto, ver Problema **PIII**, é de autoria de J. P. Serre em [S1], que construiu exemplos de variedades algébricas projetivas X_1, X_2 definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ que são conjugadas sobre o grupo de Galois absoluto de $\mathbb{Q}$. Serre provou que $\pi_1\widehat{(X_1(\mathbb{C}))}$ e $\pi_1\widehat{(X_2(\mathbb{C}))}$ são isomorfos mas $\pi_1(X_1(\mathbb{C}))$ e $\pi_1(X_2(\mathbb{C}))$ não são isomorfos (este exemplo veio diretamente da Geometria Algébrica). Observando no entanto que os grupos $\pi_1(X_1(\mathbb{C}))$ e $\pi_1(X_2(\mathbb{C}))$ são produtos semi-diretos $A \rtimes C_p$ de um grupo abeliano livre A de posto p e um grupo C_p de ordem p.

Outras importantes contribuições são de autoria de F.Grunewald, P. Pickel e D. Segal na série de trabalhos [GS1, GS2, GSc, GPS, GPS1]. Em particular eles provaram a finitude da cardinalidade do gênero para a família de todos os grupos policíclicos por finito. Observamos que o termo genus estudado como cardinalidade de um conjunto foi introduzido por Fritz Grunewald: ele faz um análogo da teoria de números clássica onde o gênero de uma forma quadrática integral é o conjunto de classes de equivalências integrais de uma forma quadrática integral que são $\widehat{\mathbb{Z}}$-equivalentes para uma forma dada.

Um grupo é denominado virtualmente livre se tem um subgrupo livre de índice finito. No trabalho [GZ], Grunewald e Zalesski usam a teoria de Bass-Serre de grupos agindo sobre árvores para provar que o gênero de um grupo virtualmente livre finitamente gerado G é finito, e mais, é limitado por um número $l(m, n)$ que depende do posto n do grupo livre de índice minimal. Segue do Teorema de Stallings que todo grupo virtualmente livre se decompõe como produto livre amalgamado ou HNN-extensão sobre um grupo finito, logo segue por Karras, Pietrowsky e Solitar que ele pode ser obtido como uma sequência de produtos livres amalgamados ou HNN-extensões com grupo base finito. O estudo do gênero em grupos que são produtos livres amalgamados, onde os subgrupos amalgamados são finitos, foi objeto de estudo do trabalho [GZ], de F. Grunewald e P. Zalesski. Uma investigação do mesmo, só que para HNN-extensões com grupo base finito é objeto de estudo desta tese.

Seja K um grupo finito e $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo entre subgrupos A e B de K. Defina $G := HNN(K, A, t, f)$ para o grupo dado pela apresentação:

$$G = \left\langle K, t \,|rel(K)\ , f(a) = a^t, \forall a \in A \right\rangle .$$

Observe que como K é um grupo finito, então G é um grupo residualmente finito (ver [RZ] Proposição 9.4.3). No Capítulo 2 desta tese, estudamos a cardinalidade do gênero para HNN-extensões com grupo base finito com respeito a classe de todos os grupos virtualmente livres. Em [GZ] Proposição 8.1, F. Grunewald e P. Zalesski mostraram que:

Teorema 0.1. ([*GZ*], *Proposição* 5.1) *Sejam $G = HNN(K, A, t, f)$ uma HNN-extensão com grupo base finito K e H um grupo virtualmente livre tal que $\widehat{G} \cong \widehat{H}$. Então H é isomorfo a uma HNN-extensão com grupo base isomorfo a K e subgrupo associado isomorfo a A.*

Portanto o cálculo do gênero para HNN-extensões na classe dos grupos virtualmente livres pode ser restringido ao cálculo na classe de todas as HNN-extensões com grupo base finito. Neste trabalho resolvemos os seguintes problemas propostos acima:

PII Encontramos condições em G para $|g(\mathcal{F}, G)| = 1$,

PII' Encontramos uma limitação para a cardinalidade $g(\mathcal{F}, G)$,

PIII Construímos exemplos.

Com base no problema **PII** provamos o seguinte

Teorema 0.2. *Seja $G = HNN(K, A, t, f)$, onde $f : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo e $\overline{N}_K(A)$ e $\overline{N}_K(B)$ denota a imagem natural de $N_K(A)$ e $N_K(B)$ em $Aut(A)$ e $Aut(B)$ respectivamente. Então a cardinalidade do gênero de G é igual a 1 se uma das seguintes condições abaixo for satisfeita:*

(i) A *e* B *são conjugados em* K *e* $Aut(A) = \overline{N}_K(A)$*,*

(ii) A *e* B *são conjugados em* K *e* $\tau_k \circ f \in \overline{N}_K(A)$*, para algum* $k \in K$*, onde* τ_k *é a imagem natural de* k *no grupo de automorfismos internos de* K*,*

(iii) $A \neq B$ *tal que* A *ou* B *é central em* K*,*

(iv) A *e* B *não são conjugados em* K *e* $f \in Aut(K)$*,*

(v) A *e* B *não são conjugados em* K *e* $\overline{N}_K(A) = Inn(A)$*,*

(vi) A *e* B *não são conjugados em* K *e* $\overline{N}_K(B) = Inn(B)$*.*

Este Teorema será provado na Seção 2.3, Teorema 2.29 e também é válido no caso pro-p, quando consideramos G um grupo residualmente-p, com demonstração análoga.

Na Seção 2.4 resolvemos o problema **PII'**. Nosso estudo é dividido em duas partes: Primeiro encontramos uma limitação para a cardinalidade do gênero em HNN-extensões onde os subgrupos associados são iguais (Teorema 2.31) e então mostramos que encontrar tal limitação no caso em que os subgrupos associados são conjugados em K é consequência imediata do caso anterior. Na segunda parte, assumimos que os subgrupos associados não são conjugados em K (ver Teorema 2.38).

Finalizamos o Capítulo 2 com o estudo de p-gênero, i.e. o gênero de $G = HNN(K, A, t, f)$ com respeito ao completamento pro-p, assumindo que K é um p-grupo finito. Mais precisamente, definimos:

$$g_p(\mathcal{F}, G) = IsoClasses(\left\{H \in \mathcal{F} \mid \widehat{G}_p \cong \widehat{H}_p\right\}),$$

onde $\widehat{G}_p$ é o completamento pro-p de G. Observamos que é necessário considerar a HNN-extensão G um grupo residualmente-p, desde que o homomorfismo natural de G no seu completamento pro-p, $\widehat{G}_p$ não é necessariamente injetivo. Na seção 2.6 resolvemos a versão pro-p do Problema **PIV** e calculamos efetivamente a cardinalidade do conjunto $g_p(\mathcal{F}, G)$ quando G é residualmente-p. Também mostramos o seguinte

Corolário 0.3. *Seja* $G = HNN(K, A, t, f)$ *onde* $f : A \longrightarrow B$ *é um isomorfismo entre subgrupos* A *e* B *de* K*. Suponha* $A = B$ *e* $n \not\equiv 0 \mod p$*, onde* $n = |f|$*. Seja* $G_1 = HNN(K, A, t_1, f_1)$ *uma HNN-extensão arbitrária. Então* $\widehat{(G_1)}_p \cong \widehat{G}_p$ *se, e somente se,* $G_1 \cong HNN(K, A, t_2, f_2)$ *tal que* $f_2 \in \overline{N}_G(A)$*.*

No trabalho [GZ], F. Grunewald e P. Zalesski mostraram a seguinte limitação para a cardinalidade do gênero em amalgamações onde os subgrupos amalgamados são finitos:

Teorema 0.4. ([*GZ*], *Teorema* 4.10) *Seja* $G = G_1 \star_H G_2$ *onde* G_1, G_2 *são grupos finitos e* H *um subgrupo comum a ambos. Então existe uma imersão*

$$\Gamma_\mu : g(\mathcal{F}, G) \longrightarrow \overline{Aut}_{G_2}(H) \setminus \overline{N}_G(H)/\overline{Aut}_{G_1}(H),$$

onde overline significa a imagem em $Aut(H)$ *e* $\mathcal{F}$ *é a família de todos os grupos virtualmente livres.*

Sejam G_1 e G_2 grupos nilpotentes finitamente gerados e H um subgrupo finito comum a ambos. Considere a família $\mathcal{P}$ de todas as amalgamações, isto é:

$$\mathcal{P} = \{G_1 \star_{H,\mu} G_2 \text{ tal que } \mu \in Inj(H, G_2)\},$$

onde $Inj(H, G_2)$ é o conjunto de todas as imersões de H em G_2. O Capítulo 3 desta tese trata do estudo da cardinalidade do gênero dos grupos $G \in \mathcal{P}$ com relação a família $\mathcal{P}$.

Durante toda a tese usamos a seguinte notação. Para um subgrupo A do grupo K escrevemos $N_K(A)$ para representar o normalizador de A no grupo K e denotamos por $\overline{N}_K(A)$ a imagem (pela restrição) de $N_K(A)$ no grupo de automorfismos $Aut(A)$. Usamos a abreviação padrão x^g para $g^{-1}xg$. Dado um elemento $k \in K$ denotamos por τ_k o automorfismo interno induzido por k no grupo $Inn(K)$ de todos os automorfismos internos de K.

Referências Bibliográficas

[BG] M.R. Bridson and F.J. Grunewald. *Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups.* Ann. Math **160** (2004) 359–373.

[C] Z.M. Chatzidakis, *Some remarks on profinite HNN-extensions.* Israel Journal of Mathematics, **85** (1994) 11–18.

[D] W. Dicks, *Groups, Trees and Projective Modules* Lecture Notes in Mathematics, No. 790, Springer-Verlag, 1980.

[G] A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer, Berlin, 1971.

[GPS] F.J. Grunewald, P.F. Pickel, D. Segal. *Finiteness theorems for polycyclic groups.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1 (1979), no. 3, 575–578.

[GPS1] Grunewald, F. J.; Pickel, P. F.; Segal, D. Polycyclic groups with isomorphic finite quotients. Ann. of Math. (2) 111 (1980), no. 1, 155–195.

[GS1] Grunewald, Fritz; Segal, *Daniel On polycyclic groups with isomorphic finite quotients.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 84 (1978), no. 2, 235–246.

[GS2] Grunewald, Fritz J.; Segal, Daniel *A note on arithmetic groups.* Bull. London Math. Soc. 10 (1978), no. 3, 297–302.

[GSc] Grunewald, Fritz J.; Scharlau, Rudolf *A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class* 2. Journal of Algebra 58 (1979), no. 1, 162–175.

[GZ] F. Grunewald and P. Zalesskii, *Genus for groups.* Journal of Algebra 326 (2011), 130–168.

[K] A.G. Kurosh, The theory of groups. Vol. II. Translated from the Russian and edited by K. A. Hirsch. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1956. 308 pp.

[KPS] A. Karrass, A. Pietrovski and D. Solitar, *Finite and infinite cyclic extensions of free groups*, J.Australian Math.Soc. **16** (1973) 458–466.

[LS] R.C Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial group theory.* Reprint of the 1977 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. 339 pp.

[MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar. *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations.* Second revised edition. Dover Publications, Inc., New York, 1976.

[RZ] L. Ribes, P.A. Zalesskii, *Profinite groups.* Springer-Verlag, **40**, Berlin (2000).

[RZ1] L. Ribes, P.A. Zalesskii, *Pro-p Trees and Applications.* New Horizons in pro-p Groups, **PM 184**, (2000) 75-119. Springer-Verlag, **40**, Berlin (2000).

[S] Trees J-P. Serre, *Trees.* Springer-Verlag, (1980).

[S1] J-P. Serre, *Exemples de variéetés projectives conjuguées non homomomorphes.* C. R. Acad. Sci. Paris **258**, (1964), 4194–4196.

[Z] P. A. Zalesslii, *Profinite groups that act on trees and do not have free nonabelian pro-p-subgroups.* Math. USSR Sbornik **69** (1991) 57-67.

[ZM] P.A. Zalesskii and O.V. Melnikov, *Fundamental groups of graphs of profinite groups,* Algebra i Analiz **1** (1989); translated in: Leningrad Math. J. **1** (1990), 921–940.

[ZM1] P.A. Zalesskii and O.V. Melnikov, *Subgroups of profinite groups acting on trees,* Math. USSR Sbornik **63** (1989) 405-424.