

Universidade de Brasília  
Instituto de Física

Dissertação de Mestrado

## **Transição de Fase no Modelo de Kuramoto**

Pedro Dias Pinto

Brasília, Março de 2011

# Transição de Fase no Modelo de Kuramoto

Pedro Dias Pinto

Orientador:

Fernando Albuquerque de Oliveira

Brasília, Março de 2011

# Transição de Fase no Modelo de Kuramoto

Por

Pedro Dias Pinto

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

**Fernando Albuquerque de Oliveira**

(Orientador) IF-UnB

**Luciano Calheiros Lapas**

UNILA

**Bernardo de Assunção Mello**

IF-UnB

**Annibal Dias de Figueiredo Neto**

(suplente) IF-UnB

Brasília, 25 de Março de 2011

**Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana**

Coordenador de Pós-Graduação

Instituto de Física

Universidade de Brasília

*La Nature est un temple où de vivants piliers  
Laissent parfois sortir de confuses paroles;  
L'homme y passe à travers des forêts de symboles  
Qui l'observent avec des regards familiers.  
Comme de longs échos qui de loin se confondent  
Dans une ténébreuse et profonde unité,  
Vaste comme la nuit et comme la clarté,  
Les parfums, les couleurs et les sons se répondent.*

Charles Baudelaire

# Agradecimentos

Aos meus pais, Paulo e Rosa (minha birutinha) por todo amor e apoio irrestrito oferecidos a mim, ao longo dos anos, à eles devo tudo que sou e por isso os dedico todas as minhas conquistas.

Ao prof. Fernando A. Oliveira pela paciente orientação, pelos ensinamentos, por me ajudar em todos os momentos que precisei e principalmente, pela amizade.

Ao prof. Luciano C. Lapas pela orientação inicial neste trabalho, pelas conversas sempre espirituosas sobre Física e sobre a vida. Ao prof. Rafael Morgado pelos auxílios em programação e o incentivo no aprendizado de novas técnicas e ao prof. Bernardo Mello pela disposição em avaliar esta dissertação e pelas sugestões oferecidas.

Aos amigos e colegas de grupo Luiz Fernando, Mirian Izawa e Felipe (ex-cabeludo nojento) pelos momentos de descontração e pelo apoio. Em especial agradeço ao Evandro (Vavá frango) por todas as dicas dadas, por ter sido meu guru na parte de programação e mestre Jedi, aprendi muito contigo!

À Paula (Invictral) e ao Tcharley (Escobar), meus primeiros amigos em Brasília, pessoas que foram fundamentais na minha adaptação inicial e que até hoje compartilham momentos divertidos comigo. À Isabel Leite, amiga mais “online” do que presente e talvez mais presente por esse motivo! Obrigado por aturar meus desabafos e por me “atrapalhar” nos momentos certos.

Aos amigos e colegas de sala Juliano e Dieime, pela convivência agradável, conversas e momentos alegres. À todos os outros amigos da pós graduação, dos três conjuntos de alunos, com os quais tenho contato quase diariamente e que mesmo não tendo contribuído diretamente com o trabalho, fazem parte do meu dia a dia e são companheiros de labuta.

E, por fim, à CAPES por ter financiado toda pesquisa durante o período do mestrado.

## Resumo

Uma vasta gama de fenômenos na natureza exhibe comportamento de sincronização. Muitas características de sincronização podem ser obtidas por meio de osciladores de fase acoplados. O estudo de osciladores acoplados foi impulsionado por Winfree e posteriormente simplificado por Kuramoto. Neste trabalho estuda-se a transição de fase no modelo de Kuramoto com e sem ruído, considerando as influências dos efeitos de tamanho finito e das distribuições de frequências naturais dos osciladores. Variando o número de osciladores interagentes, é verificada a maneira como propriedades importantes para caracterizar o regime sincronizado convergem para os valores teóricos obtidos no limite termodinâmico. É mostrado que o modo como as frequências naturais são distribuídas define o tipo de transição do modelo. O cálculo da flutuação do parâmetro de ordem na região de transição é proposto para obtenção do acoplamento crítico em grande grupos de osciladores interagentes; este método é útil pois permite estimar o acoplamento crítico de modelos cujas soluções analíticas não são possíveis.

## Abstract

A broad range of phenomena shows synchronization behavior. Many features of the synchronization can be obtained on phase coupled oscillators. The studying of coupled oscillators was started by Winfree and later simplified by Kuramoto. In this work is studied the phase transition in the Kuramoto's model with and without noise, considering influences from finite-size effects and natural frequencies distributions of the oscillators. By changing the number of interacting oscillators, it is verified how important properties that characterize synchronized states converge towards the theoretical values, which are obtained in the thermodynamical limit. It is also shown how natural frequencies distributions define the transition type of the model. It is proposed the use of the order parameter fluctuation calculation for obtaining the critical coupling on large groups of interacting oscillators; this method is useful since it allows an estimation of the critical coupling coefficient of models in which analytical solutions are not possible.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Sumário	viii
Lista de Figuras	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Introdução à sincronização</b>	<b>4</b>
2.1 Breve histórico . . . . .	4
2.2 Sincronização na natureza . . . . .	5
2.3 Definindo sincronização . . . . .	7
2.4 Modelagem matemática . . . . .	9
2.4.1 Conceitos sobre sistemas dinâmicos . . . . .	9
2.4.2 Método de redução de fase . . . . .	15
2.4.3 O modelo de Winfree . . . . .	19
<b>3 O modelo de Kuramoto</b>	<b>20</b>
3.1 Modelo de Kuramoto com interação global . . . . .	20
3.1.1 Acoplamento crítico para sincronização. . . . .	22



---

3.1.2	Comportamento inicial do parâmetro de ordem. . . . .	25
3.1.3	Resolução explícita para as distribuições de Lorentz e uniforme	26
<b>4</b>	<b>Modelo de Kuramoto com ruído</b>	<b>31</b>
4.1	O modelo de campo médio com forças de ruído branco . . . . .	31
4.1.1	Um exemplo de processo estocástico: o processo de Wiener . .	32
4.1.2	Limite contínuo para o modelo de Kuramoto . . . . .	33
4.2	Efeitos do ruído: análise de estabilidade . . . . .	35
4.2.1	Perturbação no estado incoerente . . . . .	36
4.2.2	Acoplamento crítico para o modelo com ruído . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Análise numérica do modelo de Kuramoto</b>	<b>43</b>
5.1	Introdução . . . . .	43
5.2	Efeitos de tamanho finito . . . . .	46
5.2.1	Estimativa para o acoplamento crítico $K_c$ . . . . .	48
5.2.2	Estimativa para o expoente crítico $\beta$ . . . . .	52
5.3	Flutuações do parâmetro de ordem . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Contribuição dos osciladores à deriva para o parâmetro de ordem</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Dedução da equação cinética</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

2.1	Desenho original de C. Huygens ilustrando seus experimentos com dois relógios de pêndulo pendurados em um suporte em comum . . .	5
2.2	Potencial de ação de um neurônio e diagrama da sinapse . . . . .	7
2.3	Diferentes tipos de pontos fixos nodais em um sistema dinâmico bi-dimensional. . . . .	12
2.4	Estabilidade do ponto fixo focal. . . . .	14
2.5	Mudança da estabilidade de um ponto focal com aparecimento de um ciclo limite estável. . . . .	15
2.6	Mapeamento do ciclo limite do oscilador de Van der Pol para o círculo unitário. . . . .	17
2.7	Representação esquemática de uma superfície isócrona na vizinhança de um ciclo limite. . . . .	18
3.1	Representação do parâmetro de ordem $r(t)$ . . . . .	21
3.2	Distribuição de Lorentz para diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	27
3.3	Comportamento do parâmetro de ordem $r$ em função do acoplamento para o modelo de Kuramoto com distribuição de Lorentz para as frequências naturais. . . . .	28
3.4	Comportamento da função dada na Eq. (3.32). A função $f(x)$ fornece o conjunto de soluções reais para o parâmetro de ordem. . . . .	29
3.5	Parâmetro de ordem em função do acoplamento para o modelo de Kuramoto com distribuição uniforme de frequências naturais. . . . .	30

---

5.1	Parâmetro de ordem em função do tempo abaixo e acima de $K_c$ . . .	44
5.2	Velocidade de fase de um oscilador $i$ em função do tempo abaixo e acima de $K_c$ . . . . .	44
5.3	Velocidade de fase $\dot{\theta}_i$ pela frequência natural $\omega_i$ . . . . .	45
5.4	Média do parâmetro de ordem $r$ em função do acoplamento $K$ para diferentes grupos de osciladores. Foi utilizada uma distribuição de Lorentz para as frequências naturais. . . . .	47
5.5	Média do parâmetro de ordem $r$ em função do acoplamento $K$ para diferentes grupos de osciladores. Foi utilizada uma distribuição uniforme para as frequências naturais. . . . .	47
5.6	Média da velocidade de fase do oscilador $i$ em função do acoplamento. Gráfico interno: parâmetro de ordem médio de cada grupo de osciladores. . . . .	50
5.7	Valores de $K_c$ para $N$ variando entre 3 e 100 osciladores. . . . .	51
5.8	Valores de $\beta$ para $N$ variando entre 250 e 5000 osciladores. . . . .	52
5.9	Variância do parâmetro de ordem de um grupo de osciladores com frequências naturais sorteadas de uma distribuição lorentziana. . . . .	54
5.10	Variância do parâmetro de ordem de um grupo de osciladores com frequências naturais uniformemente distribuídas em torno do zero. . . . .	55
5.11	Variância do parâmetro de ordem para o modelo de Kuramoto com ruído e frequências naturais sorteadas de uma distribuição lorentziana. . . . .	56
5.12	Variância do parâmetro de ordem para o modelo de Kuramoto com ruído e frequências naturais uniformemente distribuídas em torno do zero. . . . .	57

# Capítulo 1

## Introdução

A sincronização é um fenômeno cooperativo abundante na natureza. Durante séculos tem atraído a atenção de cientistas de todas as áreas devido a sua ocorrência em variados campos de estudo, como na biologia, química, física e sistemas sociais.

O exemplo simples de um concerto musical pode ilustrar a abrangência desse fenômeno. Cada membro de uma orquestra toca uma sequência de notas que, devidamente combinadas de acordo com a composição musical, pode despertar o sentimento da platéia. A dependência dessa execução ser harmoniosa ou um fiasco (desconsiderando os detalhes técnicos) está no exato momento em que cada músico emite som de seu instrumento. Os corações de todos os participantes do concerto estão batendo ritmicamente porque milhares de células sincronizam a sua atividade. O caráter emocional da música tem o efeito de acelerar ou desacelerar os batimentos cardíacos. O maestro ocupa lugar de destaque movendo os braços ritmicamente e os músicos sabem exatamente como interpretar esses movimentos e responder de maneira adequada. Milhares de neurônios do córtex visual precisam sincronizar suas atividades quase imediatamente enquanto o bastão descreve a sua trajetória no espaço. Essa informação é transmitida e processada através de alguns mecanismos notavelmente rápidos. Como ato final, após alguns segundos do término da música a multidão que ocupa o auditório começa aplaudir, no início incoerentemente, mas

logo em seguida os aplausos tornam-se perfeitamente sincronizados, mesmo existindo diferenças de intensidade nas palmas de cada participante e não uniformidade na distribuição das pessoas no auditório [1].

Apesar de presente na natureza de forma tão variada, como no exemplo anterior, o fenômeno de sincronização pode ser descrito de uma maneira unificada por meio de osciladores de fase acoplados. Dentre os modelos de osciladores de fase existentes, o modelo de Kuramoto destaca-se por ser simples o suficiente para ser matematicamente tratável, mas ainda suficientemente complexo para não ser trivial. Além de permitir compreender os fatores relevantes que levam o comportamento coletivo sincronizado, o modelo de Kuramoto também é flexível, de modo que pode ser adaptado a diferentes contextos. Esta dissertação tem como objetivo contribuir na investigação do problema de sincronização utilizando o modelo de Kuramoto de osciladores acoplados globalmente e está organizada como segue.

No Capítulo 2 é feita uma introdução à sincronização, relatando o contexto em que Huygens descobriu e fez a primeira descrição do fenômeno, bem como são citados exemplos da ocorrência de sincronização na natureza. Apresentam-se definições dos principais termos relacionados à sincronização utilizados na dissertação, conceitos importantes de sistemas dinâmicos e, por fim, é discutido o método de redução de fase que justifica os modelos de osciladores de fase, tais como o modelo de Winfree e o modelo de Kuramoto que é objeto de estudo deste trabalho.

No Capítulo 3 o modelo de Kuramoto de osciladores globalmente acoplados é exposto. Apresenta-se o desenvolvimento analítico originalmente feito por Kuramoto para encontrar o acoplamento crítico que dá início a sincronização. Por meio da expansão da distribuição de frequências naturais na região de transição, é determinado como o parâmetro de ordem comporta-se inicialmente e o seu expoente crítico na transição, que ressalta as características de campo médio do modelo. No final do Cap. 3 são utilizadas duas distribuições de probabilidade para as frequências naturais que permitem a obtenção explícita do parâmetro de ordem.

No Capítulo 4 analisam-se os efeitos de ruído branco no modelo de Kura-

moto. Inicialmente, apresenta-se o processo estocástico de Wiener como exemplo para demonstrar a possibilidade de descrever uma equação estocástica em termos da evolução de uma função de distribuição. É derivada então uma equação cinética para o modelo de Kuramoto com ruído no limite contínuo e feita a análise de estabilidade para encontrar o acoplamento crítico de transição. Obtém-se o acoplamento crítico do modelo com ruído explicitamente utilizando as mesmas distribuições de frequências naturais do Cap. 3.

No Capítulo 5 encontram-se os resultados deste trabalho. As equações do modelo de Kuramoto com e sem ruído são resolvidas numericamente utilizando as distribuições de Lorentz e uniforme para as frequências naturais. Os efeitos de tamanho finito no parâmetro de ordem são mostrados, comparando os resultados para cada distribuição. São obtidas estimativas numéricas para o acoplamento crítico e o expoente crítico de transição bem como é mostrado o comportamento destas grandezas com a variação do número de osciladores interagentes. Por fim, é proposto um método de encontrar o acoplamento crítico utilizando as flutuações do parâmetro de ordem na região de transição.

No Capítulo 6 as principais contribuições do trabalho são resumidas e discutidas. Apresentam-se também as perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Introdução à sincronização

### 2.1 Breve histórico

Medir precisamente o tempo sempre foi fundamental para ciência e tecnologia. No século XVII, época de intenso comércio marítimo, o problema da imprecisão dos relógios dificultava os cálculos de longitude em alto mar fazendo os navios sempre trilharem as mesmas rotas conhecidas e infestadas por piratas. Países como Espanha, Holanda, Inglaterra e Portugal ofereciam valiosos prêmios em dinheiro para quem encontrasse uma solução para esse problema.

O cientista holandês Christiaan Huygens, mais conhecido por seus estudos em ótica, foi também responsável por uma melhoria considerável nas medições de tempo com a invenção e aperfeiçoamento dos relógios de pêndulo. Certa vez em que estava enfermo, deitado na cama, Huygens resolveu observar dois relógios que acabara de construir e com os quais pretendia conquistar os prêmios oferecidos pelos países citados. Os relógios compartilhavam um mesmo suporte. Redundância em relógios marítimos era recomendável porque se um deles parasse ou entrasse em manutenção, o outro continuaria a marcar o tempo [2]. Observando seus relógios durante um certo período, Huygens percebeu que eles sincronizavam em anti-fase

sendo que inicialmente os pêndulos balançavam de outra forma. Intrigado com isso, ele passou vários dias perturbando deliberadamente os movimentos dos pêndulos, constatando seguidamente que após um certo tempo eles readquiriam sincronia, em oposição de fase.

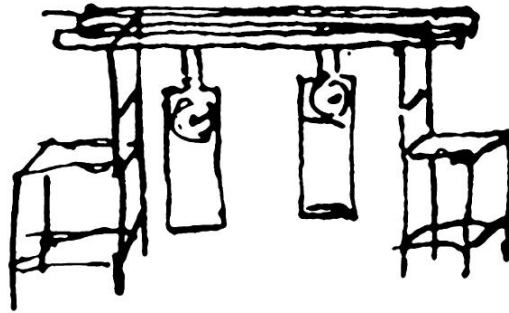


FIGURA 2.1: Desenho original de Christiaan Huygens ilustrando seus experimentos com dois relógios de pêndulo pendurados em um suporte em comum.

A primeira menção desta descoberta pode ser encontrada numa carta de Huygens para seu pai de 26 de Fevereiro de 1665, onde ele descreve o fenômeno como uma “*simpatia entre dois relógios*”, dizendo que a causa da sincronização era devida a transmissão de movimento entre os pêndulos por meio do suporte em comum [3].

## 2.2 Sincronização na natureza

Diversos exemplos na natureza podem ser citados para ilustrar a ocorrência de sincronização, dentre eles, um fenômeno bem abrangente são os ritmos circadianos. Na biologia, os ritmos circadianos são oscilações de variáveis biológicas em intervalos regulares de tempo, com duração aproximada de 24 horas, explicando a etimologia do termo que provém do latim *circa diem* e significa “cerca de um dia”. Todos os animais e plantas e provavelmente todos os organismos vivos mos-



tram algum tipo de variação rítmica fisiológica (taxa metabólica, produção de calor, floração etc.) que costuma estar associada com uma mudança ambiental rítmica.

Em 1729 o astrônomo francês Jean-Jacques D'ortous de Mairan, realizou experimentos com uma planta heliotrópica provando que apesar de serem modificáveis pelo ambiente, os ritmos circadianos tinham origem endógena, ou seja, não eram meras respostas passivas ao ambiente como supunha-se até então, mas sim, ritmos internos que entravam em sincronia com os ritmos externos do ambiente. Hoje em dia é conhecido, para o caso de mamíferos, que esses ritmos têm origem celular [4], em uma área cerebral denominada núcleo supraquiasmático, localizada no hipotálamo.

A natureza está repleta de populações de “osciladores naturais” que sincronizam seus ritmos para realizarem uma determinada atividade. Cada batida do coração, por exemplo, depende de uma região crucial chamada nódulo sino atrial, a qual tem um grupo de células independentes que geram seus ritmos elétricos próprios para enviarem sinais aos ventrículos, fazendo-os bombearem o sangue [5]. O marcapasso que controla a frequência cardíaca não é uma célula única mas sim, uma democracia celular que precisa disparar em uníssono para que o coração funcione corretamente.

O cérebro é composto de bilhões de neurônios acoplados em uma hierarquia de conectividade de redes complexas [6]. A maior parte dos neurônios do cérebro estão conectados com seus vizinhos mais próximos e a comunicação entre eles é feita por meio de trocas químicas e elétricas nas sinapses, Fig. (2.2), desencadeadas pelos disparos de potenciais de ação que caracterizam a atividade oscilatória no cérebro [7]. Estudos mostram que os neurônios se agrupam em áreas corticais funcionais e a sincronização dos disparos neuronais permite a eficiência de comunicação entre essas áreas [8]. Por outro lado, o excesso de atividade e sincronização de redes neurais foram associadas com disfunções e desordens no cérebro, tais como crises epiléticas [9] e doença de Parkinson [10].

No sudoeste da Ásia, em lugares como a Tailândia, Malásia ou Bornéu, os

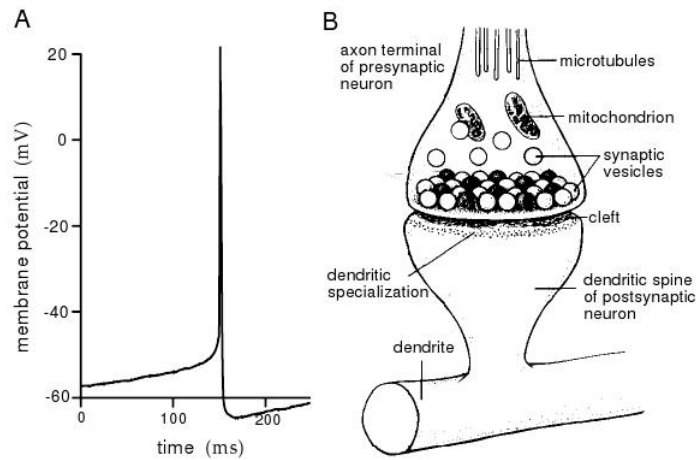


FIGURA 2.2: (A) Potencial de ação gravado intercelularmente. (B) Diagrama da sinapse, região entre neurônios onde acontece as trocas de informação químicas e elétricas. [11]

vagalumes têm um comportamento cooperativo muito interessante [12]. É possível ver durante a noite, milhares de vagalumes piscando em uníssono nas árvores ribeirinhas. O fenômeno começa com cada inseto emitindo luzes em seu próprio ritmo, um certo tempo depois, começam surgir bolsões de sincronia que se ampliam, formando uma nuvem de vaga-lumes piscando como se fossem um único e gigantesco inseto. Especificamente, são vagalumes machos que participam deste fenômeno, que tem por objetivo facilitar o acasalamento, pois, piscando em sincronia, conseguem chamar mais atenção das fêmeas.

## 2.3 Definindo sincronização

Nesta seção procura-se delimitar a noção de sincronização utilizada no trabalho. Não é o objetivo fornecer uma definição rigorosa pois os conceitos ficarão estabelecidos no desenvolvimento matemático posterior, mas, por agora, é necessário esclarecer alguns termos de uso corrente. De forma qualitativa, pode-se dizer que

a sincronização é um *ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido a sua interação fraca* [3].

Entende-se por *objetos oscilantes* elementos ativos e auto-sustentados, ou seja, objetos que possuem uma fonte de energia interna que é transformada em movimento oscilatório. Quando isolados, continuam a gerar seus ritmos próprios até esgotar essa fonte de energia. Matematicamente, esse tipo de oscilador é descrito como um sistema dinâmico autônomo e tem como característica principal oscilações estáveis a pequenas perturbações, determinadas unicamente pelos parâmetros do sistema e não de como ele foi acionado.

Osciladores auto-sustentados podem exibir *ritmos* de várias formas, de simples ondas senoidais a uma sequência de pulsos curtos. É conveniente caracterizar o ritmo pelo número de ciclos de oscilação por unidade de tempo, ou seja, pela “frequência cíclica” de oscilação  $f = 1/T$ . No tratamento teórico da sincronização, a frequência angular  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  é, geralmente, mais conveniente. A frequência pode ser alterada por causa de uma ação externa sobre o oscilador ou devido à sua interação com outro sistema. Para evitar ambiguidade, chama-se a frequência de um sistema autônomo isolado como “frequência natural”.

Podem haver diferentes formas de *interação* ou “acoplamento” entre dois osciladores, isso vai depender do tipo de objetos oscilantes que estão interagindo. Dois relógios de pêndulo podem interagir através da troca de vibrações em um suporte em comum, dois vagalumes interagem dentro de um “campo visual” assim como dois grilos ou cigarras podem interagir dentro de um “campo audível”. O requisito para que se trate de um problema de sincronização é que o acoplamento entre os sistemas seja fraco. A distinção da fronteira que separa uma interação fraca da forte não é simples, em termos gerais, pode-se dizer que a introdução do acoplamento não deve mudar qualitativamente o comportamento de cada um dos sistemas interagentes e não deve privar os sistemas de sua individualidade. Em particular, se um sistema cessa de oscilar, ele não pode impedir o segundo de manter seu ritmo próprio.

Um *ajuste de ritmos* acontece quando dois osciladores ou mais, acoplados, passam a oscilar com mesmo período. Este fenômeno é descrito geralmente em termos da coincidência de frequências e é chamado de “travamento”. Dois osciladores não idênticos, tendo suas frequências naturais  $f_1$  e  $f_2$ , acoplados, podem vir a oscilar com uma frequência igual, a depender de dois fatores: a “intensidade de acoplamento”, que descreve o quão fraco (forte) a interação se dá, e a “dessintonia de frequências”  $\Delta f = f_1 - f_2$ , que quantifica quão diferentes são os osciladores desacoplados. O ajuste desses dois fatores determina a possibilidade ou não de um sistema sincronizar.

## 2.4 Modelagem matemática

### 2.4.1 Conceitos sobre sistemas dinâmicos

A descrição matemática completa de um sistema requer que exista um conjunto de variáveis  $\{x_i\}$  que determinem unicamente o estado do sistema em qualquer instante de tempo [13]. Cada estado pode ser representado por um vetor  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  onde  $N$  é o número de variáveis independentes e, portanto, a dimensão do sistema. O conjunto de todos estados possíveis é então um *espaço de estados*  $N$ -dimensional.

A evolução de um sistema determinístico é descrita geralmente por um conjunto de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{h}(t)), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{p}$  representa o conjunto de parâmetros que regulam as propriedades ajustáveis do sistema, e  $\mathbf{h}(t)$  descreve os fatores externos que podem afetar a dinâmica do sistema e podem mudar no tempo independentemente do seu estado. Se esses fatores

estão ausentes, isto é, se  $\mathbf{h}(t) \equiv \text{constante}$ , o sistema é chamado *autônomo* o que salienta o fato de que sua dinâmica depende apenas do próprio estado do sistema. Isto não quer dizer que o sistema é fechado. De fato, os componentes do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  podem representar uma entrada e saída constante de energia e matéria. Todavia, o fato desses parâmetros não dependerem do tempo implica que as características do ambiente são mantidas constantes.

Para encontrar uma solução para equação (2.1) devemos especificar um estado do sistema em um dado tempo, por exemplo,  $t = 0$ ,  $\mathbf{x}(0)$  é uma condição inicial que define uma única trajetória no espaço de fase, consistindo de pontos  $\mathbf{x}(t)$  para todos valores de  $t$ .

O comportamento de um sistema dinâmico é normalmente caracterizado pela existência de *conjuntos invariantes* e o caso mais simples de um conjunto de invariantes é o de um *ponto fixo*. Um ponto fixo é um ponto específico no espaço de estado no qual o sistema para de se mover. Tal ponto é definido pela condição

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0, \quad (2.2)$$

de modo que o sistema se encontra em um estado estacionário no qual

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^* = \text{constante}. \quad (2.3)$$

Portanto, se for escolhido inicialmente um estado que coincida com o ponto fixo  $\mathbf{x}^*$ , o sistema permanecerá nesse estado indefinidamente. Se esse estado é realmente alcançado pelo sistema a partir de outras condições iniciais, depende da estabilidade do ponto fixo. Um ponto fixo estável é aquele para o qual as perturbações são atenuadas e a evolução do sistema restaura o estado de equilíbrio. Inversamente, em um ponto fixo instável, as perturbações crescerão no tempo e o sistema nunca retornará ao estado de equilíbrio.

Uma perturbação é um pequeno deslocamento nas coordenadas dado por  $\delta\mathbf{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N)$ . Se  $\mathbf{x}(t)$  é uma solução para Eq. (2.1), então a evolução do

sistema perturbado é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}] = \mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \mathbf{p}). \quad (2.4)$$

Linearizando, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathbb{J}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})] \cdot \delta\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbb{J}$  é a matriz jacobiana cujos componentes são

$$J_{ij}[\mathbf{F}(\mathbf{x})] = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

O primeiro termo em ambos lados da Eq. (2.5) cancelam-se de acordo com a Eq. (2.1). Assim, é obtida uma equação de evolução para perturbação

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{x} \approx \mathbb{J}[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p})] \cdot \delta\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

No caso que  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$  é um ponto fixo, então  $\mathbb{J}[\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})]$  é uma matriz constante, e as soluções para Eq. (2.7) têm a forma

$$\delta\mathbf{x}(t) \approx \delta\mathbf{x}(0) \exp(\mathbb{J}[\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})] \cdot t). \quad (2.8)$$

Se a perturbação inicial é paralela a um dos autovetores  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  da matriz  $\mathbb{J}[\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})]$ , a evolução desta perturbação deve ser

$$\delta\mathbf{x}(t) \approx \delta\mathbf{x}(0) \exp(\kappa_k t). \quad (2.9)$$

onde  $\kappa_k$  é o autovalor correspondente ao autovetor  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ . Se os autovetores formam uma base, qualquer perturbação pode ser decomposta em suas projeções sobre essa base. A evolução na vizinhança do ponto fixo é então determinada pelos autovalores  $\{\kappa_i\}$  da matriz jacobiana avaliada no ponto fixo, e a dinâmica é exponencial.

O ponto fixo é denominado de *nó* quando todos autovalores são reais. Cada autovetor define uma direção, e o sinal do autovalor associado indica se essa direção é

estável ou instável, ou seja, se as perturbações ao longo dessa direção irão aumentar ou diminuir. Quando todos autovalores são negativos, a magnitude de qualquer pequena perturbação de  $\mathbf{x}^*$  diminui com o tempo, conseqüentemente, o sistema é restaurado para o ponto fixo. Assim, o nó é, neste caso, estável. Se, por outro lado, pelo menos um dos autovalores é positivo, qualquer perturbação com uma projeção diferente de zero para o autovetor, correspondente a este autovalor, cresce com o tempo. Neste caso o nó é instável. A descrição dessas situações, no caso bidimensional, é apresentada na Fig. (2.3).

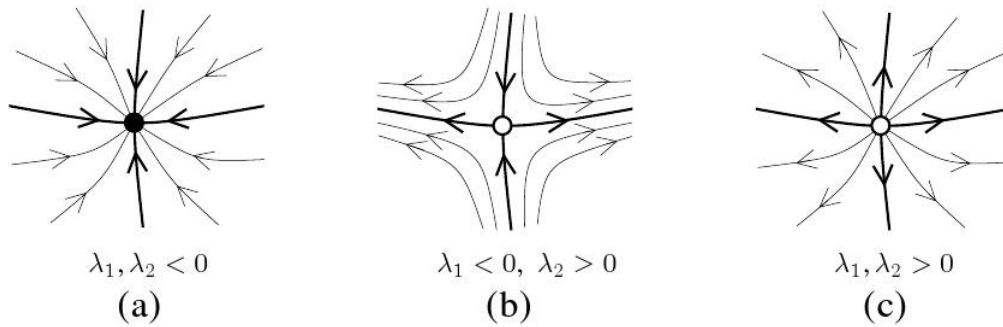


FIGURA 2.3: Diferentes tipos de pontos fixos nodais em um sistema dinâmico bidimensional. (a) Ambos autovalores do Jacobiano são negativos e o nó é estável. (b) Um dos autovalores é positivo e as trajetórias divergem na direção da variedade instável correspondente. (c) Ambos autovalores são positivos e as trajetórias divergem em todas as direções.

Também é possível que alguns dos autovalores formem pares de conjugados complexos. Em termos da Eq. (2.9), a presença de autovalores complexos significa que, além de se aproximar ou afastar do ponto fixo, a trajetória irá girar em torno dele com uma frequência igual à magnitude da parte imaginária do autovalor. Esse tipo de ponto fixo é referido como um ponto focal. Desde que todos os outros autovalores sejam negativos, a parte real do par de autovalores complexos decide a estabilidade do foco. Se a parte real for negativa, então o ponto focal é estável e

a trajetória o envolve em uma espiral dirigida para dentro. No caso de uma parte real positiva, a espiral é dirigida para o exterior e a trajetória afasta do ponto focal. Assim, o ponto focal é instável.

É claro que não só a posição mas também a estabilidade de um dado ponto fixo pode depender dos valores dos parâmetros  $p_1, p_2, \dots, p_M$ . Ao manipular um ou mais desses parâmetros pode-se alterar a estabilidade do ponto focal. Trata-se, por exemplo, do tipo de bifurcação que ocorre no caso do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + ax_2,\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde  $\dot{x}_j \equiv \partial x_j / \partial t$ . Para esse sistema existe apenas um ponto fixo na origem, que é estável se  $a < 0$  e instável se  $a > 0$ . O sistema tem, assim, uma bifurcação em  $a = 0$  onde a estabilidade do ponto fixo é trocada. No ponto crítico  $a = 0$ , o ponto fixo é neutramente estável e o sistema é conservativo. Para todas as condições iniciais, a trajetória no espaço de fase irá girar em torno do ponto focal sem colapsar nele ou se afastar. A amplitude dessa rotação é dada pelas condições iniciais, e é mantida no tempo. Na Fig. (2.4) são ilustrados os tipos de comportamentos discutidos anteriormente.

A existência de um ponto fixo está ligada à condição (2.2). Quando  $\mathbf{F}$  é uma função linear de  $\mathbf{x}$ , então (2.2) é um conjunto de  $N$  equações lineares com  $N$  incógnitas. Como tal, pode ter um número infinito de soluções (o que significa que todos os estados são pontos fixos), ter nenhum ou ter um único ponto fixo. Neste último caso, a Eq. (2.7) é exata, e a evolução de uma perturbação necessariamente segue uma lei exponencial. Assim, a menos que o sistema esteja em uma situação crítica de estabilidade neutra, ele só pode colapsar para um único estado estável, ou suas trajetórias crescerem indefinidamente.

Quantidades que crescem ao infinito normalmente não são fisicamente significativas. Por isso, as vezes é necessário incluir contribuições não-lineares. Não-linearidades podem reduzir drasticamente a tratabilidade do sistema, mas a presença



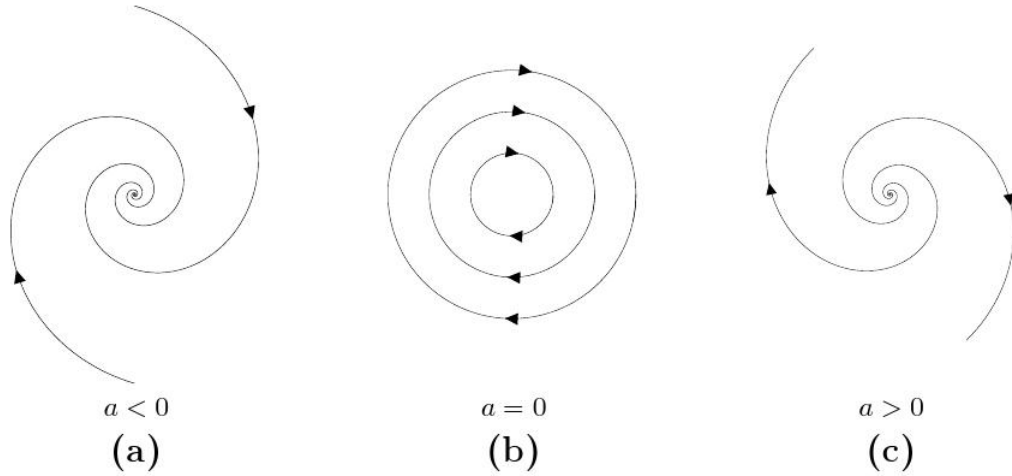


FIGURA 2.4: Estabilidade do ponto fixo focal de acordo com o parâmetro  $a$ . (a) ponto fixo estável. (b) ponto fixo neutramente estável. (c) ponto fixo instável.

de termos não-lineares também permite uma maior riqueza de comportamento [14].

Uma extensão simples, mas importante, é obtida através da introdução de termos não-lineares nas Eqs. (2.10) da forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + ax_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Esse sistema também possui um único ponto fixo na origem e a análise de sua estabilidade gera os mesmos resultados para o sistema (2.10). No entanto, a expansão linear (2.7) deixa de ser válida longe do ponto fixo. Se essas equações forem escritas em coordenadas polares, as equações para a variável radial e angular podem ser desacopladas. A variável angular aumenta em uma taxa constante, e a equação para a coordenada radial  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  é

$$\dot{r} = ar - r^3.\tag{2.12}$$

Quando  $a < 0$ , a Eq. (2.12) tem apenas um ponto de equilíbrio estável em  $r = 0$ . No entanto, se  $a > 0$  essa equação tem outro ponto fixo  $r = \sqrt{a}$ , que é estável, e  $r = 0$  que é instável. Isto implica que a dinâmica do sistema irá convergir para um

círculo de raio  $r = \sqrt{a}$ , partindo de condições iniciais, tanto dentro como fora do círculo Fig. (2.5). Esse círculo é, portanto, um atrator, uma trajetória fechada ao longo da qual o sistema evolui permanentemente, com um período constante. Uma vez que todas as trajetórias convergem para ele em um limite de tempo infinito, isto é chamado de um *ciclo limite*.

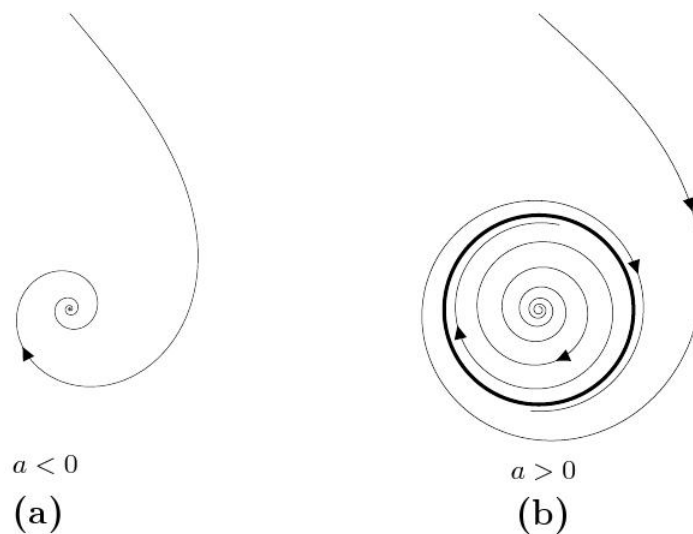


FIGURA 2.5: Mudança da estabilidade de um ponto focal com aparecimento de um ciclo limite estável no sistema (2.11). (a) O ponto fixo é estável para valores negativos assumidos por  $a$ . (b) quando  $a > 0$  a origem é instável, mas todas trajetórias de dentro e fora convergem para o ciclo limite de raio  $\sqrt{a}$ .

#### 2.4.2 Método de redução de fase

Sistemas dinâmicos podem ter qualquer número de graus de liberdade. Assim, um ciclo limite pode ser incorporado em um espaço de fase de qualquer dimensão, como resultado do acoplamento altamente não-linear entre as variáveis. O tratamento analítico desses sistemas é raramente possível.

Mesmo para os casos tratáveis, levar em conta as interações entre um grande número de elementos em oscilações de ciclo limite pode ser uma tarefa inútil. No entanto, o problema pode ser muito simplificado se apenas interações fracas são consideradas, de tal forma que desvios do ciclo limite são pequenos. Nesse caso, o número de graus de liberdade efetivos pode ser bastante reduzido. Dentro deste quadro, os modelos gerais podem ser construídos e as interações dos elementos oscilatórios podem ser estudadas; essa é a ideia geral do método de redução de fase.

O sistema de Equações (2.12) tem um ciclo limite estável com raio constante  $r = \sqrt{a}$ , enquanto a variável angular  $\theta(t)$  evolui de acordo com

$$\theta \propto t. \quad (2.13)$$

A evolução no espaço de estado consiste de rotações com velocidade angular constante. Para um valor fixo do parâmetro  $a$ , a trajetória no ciclo limite é totalmente descrita pela variável angular.

Na maioria dos sistemas de interesse um atrator periódico será muito mais complicado do que o atrator do sistema (2.12), envolvendo muitas variáveis que mudam em ritmos diferentes. No entanto, não importa o quão complicado um ciclo limite possa ser, ele será sempre uma curva fechada e, portanto, pode ser mapeado para um círculo. Assim, um sistema em um ciclo limite sempre pode ser descrito por uma única variável, chamada de *fase* da oscilação, de modo que ela aumenta linearmente com o tempo de 0 a  $2\pi$ , e é limitada a esse alcance. Assim, a fase descreve a evolução do sistema ao longo do atrator periódico.

A introdução das variáveis de fase implica a necessidade de encontrar um mapeamento que projeta o ciclo limite estável para um círculo, dado por  $\mathbf{x} \rightarrow \theta(\mathbf{x})$ . Além disso, cada ponto do ciclo limite deve ser mapeado para um ponto no círculo de tal forma que qualquer par de pontos sobre o ciclo limite, visitado com uma diferença constante de tempo, deve ser mapeado para um ponto no círculo, com uma diferença de fase constante. Isso leva à condição,

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x})}{\partial t} = \text{constante} = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.14)$$

onde  $T$  é o período do ciclo limite. Na Fig. (2.6), esse mapeamento é mostrado para o oscilador de Van der Pol.

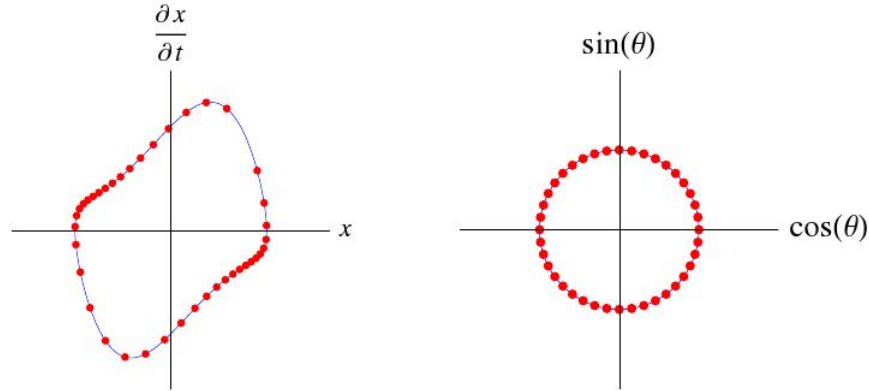


FIGURA 2.6: Mapeamento do ciclo limite do oscilador de Van der Pol para o círculo unitário. Pontos subsequentes no gráfico da esquerda são visitados em intervalos de tempo equivalentes. Pontos subsequentes no gráfico da direita correspondem a  $\exp(i\theta(t))$  para intervalos de fase equivalentes, de modo que  $\dot{\theta} = 2\pi/T$  [13].

Quando dois ou mais sistemas envolvidos em oscilações periódicas interagem entre si, é geralmente o caso em que cada um deles será empurrado para fora do ciclo limite em ocasião. Se as interações são fracas o suficiente, esses desvios do ciclo limite serão pequenos, e o sistema não vai deixar a bacia de atração do ciclo limite. Por este motivo, é importante que a definição de uma variável de fase não seja restrita ao ciclo limite, mas também seja válido em sua vizinhança.

Em geral, todos os pontos da bacia de atração podem ser identificados com um valor de fase determinado, de acordo com o lugar que ele vai situar no ciclo limite depois de passado um tempo infinito. Se  $\mathbf{x}_0(0)$  é um ponto sobre o ciclo limite, então  $\mathbf{x}_0(t)$  estará sobre o ciclo limite para qualquer tempo  $t$  e  $\theta(\mathbf{x}_0(t))$  é a fase de cada ponto no ciclo limite; definida até para um valor constante em  $[0, 2\pi)$ . Pode-se dizer, portanto, o mesmo de todos os pontos  $\mathbf{x}(t)$  na bacia de atração, de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}(t)| = 0 \quad (2.15)$$

e  $\theta(\mathbf{x}_0(t)) \equiv \theta(\mathbf{x}(t))$ . Cada ponto no ciclo limite, portanto, define uma *superfície isócrona*  $I(\theta)$  dos estados que coincidem com o ciclo limite depois de um tempo infinito, e a todos os pontos nessa superfície é atribuído o mesmo valor de fase, como mostrado na Fig. (2.7). Pequenas perturbações do atrator periódico podem assim ser contabilizadas como alterações no valor da fase da trajetória, de acordo com a superfície isócrona ao qual o estado perturbado pertence. Portanto, podemos reduzir o grau de liberdade efetivo de qualquer sistema de dimensão  $N$ , nas proximidades de um ciclo limite estável, com uma descrição unidimensional da dinâmica da fase. Este processo matemático é normalmente referido como *redução de fase*.

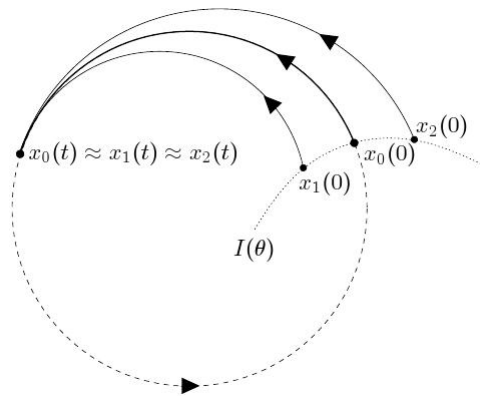


FIGURA 2.7: Representação esquemática de uma superfície isócrona na vizinhança de um ciclo limite. É atribuído o mesmo valor de fase a dois estados se a distância entre eles desaparece em um limite de tempo infinito [13].

Este tipo de formalismo é muito útil, na medida em que nos permite descrever uma enorme classe de sistemas por um modelo genérico envolvendo objetos matemáticos extremamente simples chamados de *osciladores de fase*, cuja dinâmica é dada por uma única variável. Por outro lado, os resultados encontrados para tais sistemas simples podem ser transferidos para a dinâmica de osciladores complexos cuja perturbações são pequenas o suficiente para permitir uma tal descrição de fase.

### 2.4.3 O modelo de Winfree

A ideia do método de redução de fase foi usada pioneiramente por Arthur T. Winfree para estudar o fenômeno de sincronização mútua de grandes grupos de osciladores biológicos. Ele formulou o problema considerando os elementos interagentes como osciladores de ciclo limite quase idênticos e assumindo que as interações entre eles fossem suficientemente fracas. Essas duas hipóteses permitiram uma grande simplificação matemática uma vez que foi possível utilizar a descrição em termos da variável de fase em vez de considerar todas as variáveis de estado do sistema.

Winfree propôs um modelo [15] no qual o efeito sobre a fase de cada oscilador é determinada pelo estado combinado de todos os osciladores, conceito conhecido na Física como uma aproximação de campo médio. Em seu modelo, a taxa de mudança de fase de um oscilador é determinada por uma combinação de sua frequência natural  $\omega_i$  com o estado coletivo de todos os osciladores. A sensibilidade de cada oscilador em relação ao ritmo coletivo é determinada por uma função  $Z$ , e sua contribuição para o ritmo coletivo é especificada por uma função  $X$ . Assim, cada oscilador tem uma equação descrevendo como sua fase muda no tempo:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

onde  $\theta_i$  é a fase do oscilador  $i$ ,  $\dot{\theta}_i$  é a taxa de mudança da fase do oscilador,  $\omega_i$  é a sua frequência natural e  $N$  é o número total de osciladores. Com algumas simulações numéricas e aproximações analíticas do modelo, Winfree constatou que os osciladores poderiam realmente sincronizar, passando de um estado totalmente incoerente, para uma formação espontânea de agregados de osciladores com mesma frequência. Isso, a partir de um certo limiar de acoplamento entre eles, limiar esse que dependia da dessintonia de frequências naturais.

## Capítulo 3

### O modelo de Kuramoto

#### 3.1 Modelo de Kuramoto com interação global

Yoshiki Kuramoto, intrigado pelos resultados de Winfree, começou a trabalhar com sincronização coletiva em 1975, utilizando as mesmas hipóteses do seu antecessor. Depois de uma intensiva formulação matemática, Kuramoto propôs um modelo [16] que consiste em uma população de  $N$  osciladores de fase acoplados,  $\theta_i(t)$ , tendo frequências naturais  $\{\omega_i\}$  distribuídas com uma dada densidade de probabilidade  $g(\omega)$  e cuja dinâmica é regida por

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

Diversas configurações para a matriz de acoplamento  $K_{ij}$  são possíveis, tais como acoplamentos dependentes da distância, acoplamentos aleatórios, entre primeiros vizinhos ou mesmo com retardo [1]. Em sua análise original, Kuramoto considerou um acoplamento de campo médio entre os osciladores, onde tem-se  $K_{ij} = K/N \geq 0$  na Eq. (3.1), i.e.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

O fator  $1/N$  é incorporado a fim de assegurar um “bom comportamento” do modelo no limite termodinâmico, quando  $N \rightarrow \infty$ . Além disso, é assumido que as frequências naturais  $\{\omega_i\}$  são distribuídas de acordo com uma densidade de probabilidade  $g(\omega)$  unimodal e simétrica com respeito a uma frequência média  $\Omega$ ,  $g(\Omega - \omega) = g(\Omega + \omega)$ .

Kuramoto definiu um parâmetro de ordem complexo para quantificar a coerência de fase

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (3.3)$$

onde o módulo do parâmetro de ordem  $r$  é uma medida da quantidade de comportamento coletivo no sistema e  $\psi$  é a fase média de todos osciladores. Uma boa maneira de visualizar o que significa isso é imaginar cada oscilador como um ponto movendo em torno de um círculo de raio unitário. Então, o parâmetro de ordem pode ser interpretado como uma seta apontando do centro deste círculo, como mostrado na Fig. (3.1).

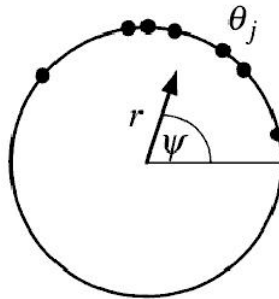


FIGURA 3.1: Representação do parâmetro de ordem  $r(t)$  que pode variar entre

$$0 \leq r(t) \leq 1 \text{ e da fase média } \psi(t).[17]$$

Os osciladores rotacionam de tal forma que se suas fases movem agrupadas em torno do círculo unitário, temos  $r \simeq 1$  e o sistema se comporta como um oscilador macroscópico. Por outro lado, se as fases estão distribuídas uniformemente em torno



do círculo  $r \simeq 0$ , os osciladores se comportam incoerentemente e nenhum ritmo macroscópico é observado.

O modelo pode ser escrito em termos do parâmetro de ordem e da fase média. Multiplicando a Eq. (3.3) por  $e^{-i\theta_i}$  obtém-se para a parte imaginária:  $r \sin(\psi - \theta_i) = 1/N \sum_j \sin(\theta_j - \theta_i)$ , substituindo esse resultado na Eq. (3.2),

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

encontra-se uma equação desacoplada que evidencia que a fase de cada oscilador é atraída pela fase média e a intensidade de acoplamento é proporcional a magnitude do parâmetro de ordem. Isso simplifica enormemente a forma de pensar sobre o problema da sincronização.

### 3.1.1 Acoplamento crítico para sincronização.

É possível obter uma estimativa analítica do ponto crítico de transição para sincronização. Para isso, Kuramoto levou em consideração as soluções estacionárias onde  $r(t)$  é constante e  $\psi(t)$  rotaciona uniformemente em torno do círculo unitário com frequência  $\Omega$ . Escolhendo um referencial adequado que rotaciona com a mesma frequência  $\Omega$  da fase média e fixando-a na origem, de modo que  $\psi = 0$ , a Eq (3.4) reduz para

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

Isto corresponde a um estado em que o parâmetro de ordem  $r$  é completamente estacionário. A Eq (3.5) admite duas soluções, dependendo do tamanho das frequências naturais  $|\omega_i|$ , relativamente ao fator  $Kr$ . Como  $\sin \theta_i \leq 1$ , constata-se que os osciladores com frequências naturais  $|\omega_i| \leq Kr$  podem ter uma solução estática  $\dot{\theta}_i = 0$  quando

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i \quad (3.6)$$

Esses osciladores são chamados *travados* já que suas fases evoluem coerentemente seguindo uma frequência  $\Omega$  bem definida no sistema de referência original. Por outro lado, se  $|\omega_i| > Kr$  os osciladores correspondentes estão à *deriva* rotacionando em torno do círculo unitário de maneira irregular.

Mesmo com esses osciladores à deriva, ainda é necessário assumir que  $r$  e  $\psi$  são constantes para encontrar as soluções de estado estacionário. Para isso, admite-se que a *distribuição* dos osciladores em torno do círculo seja independente do tempo, mesmo que os osciladores estejam movendo individualmente. Para assegurar que a distribuição permaneça constante no tempo, impõe-se que ela seja inversamente proporcional a velocidade de fase dos osciladores. Assim, a densidade de osciladores é definida como sendo uma função da frequência natural  $\omega$  e da posição angular  $\theta$  sobre o círculo unitário

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{\dot{\theta}} = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (3.7)$$

onde  $\rho(\theta, \omega)d\theta$  fornece a fração de osciladores com frequência natural  $\omega$  que são encontrados entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ .  $C$  é uma constante que pode ser encontrada por meio da normalização:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|\omega - Kr \sin \theta|}, \quad (3.8)$$

obtendo

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}. \quad (3.9)$$

Para calcular o parâmetro de ordem  $r$  deve-se levar em consideração os dois grupos distintos de osciladores: aqueles que são de frequência travada e aqueles que estão à deriva. Assumindo  $\psi = 0$ , obtém-se da Eq. (3.3)  $r = 1/N \sum_j e^{i\theta_j} = \langle e^{i\theta} \rangle$ . A última média pode ser decomposta nas duas contribuições seguintes

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{trav.} + \langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} \quad (3.10)$$

Primeiro, é calculado as contribuições para  $r$  devido aos osciladores à deriva. Para isso, integra-se a distribuição  $\rho(\theta, \omega)$  sobre todo o círculo e para todos osciladores que não estão com frequência travada  $|\omega| > Kr$ , i.e.

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (3.11)$$

Da Eq. (3.7) é visto que  $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$  e  $g$  é definida também de modo que  $g(-\omega) = g(\omega)$ . Estas simetrias fazem a integral para valores positivos de  $\omega$  cancelar com a de valores negativos (veja Apêndice A para detalhes) de modo que

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} = 0. \quad (3.12)$$

Portanto, os osciladores à deriva cancelam um ao outro suas contribuições e somente os osciladores travados contribuem para o parâmetro de ordem. Isto é intuitivamente plausível porque não existem valores de  $\theta$  nem sentidos de rotação preferenciais.

Agora, é preciso resolver apenas a contribuição dos osciladores travados. Primeiro, sabe-se da Eq. (3.6) que  $\sin \theta_i = \omega_i / Kr$ . Então, uma vez que  $g(\omega)$  é centrada no zero e definida para ser constante, as fases  $\theta_i$  dos osciladores travados também serão simetricamente centradas no zero, significando  $\langle \sin \theta \rangle_{trav.} = 0$ . Assim, é somente necessário calcular a parte cosseno da exponencial complexa

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{trav.} = \langle \cos \theta \rangle_{trav.} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos[\theta(\omega)] g(\omega) d\omega, \quad (3.13)$$

onde  $\theta(\omega)$  é definido pela Eq. (3.6). Usando a Eq. (3.6) para mudar a variável de  $\omega$  para  $\theta$

$$r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.14)$$

Essa equação define soluções que satisfazem a restrição inicial do parâmetro de ordem ser constante.

Primeiro,  $r = 0$  é uma solução trivial. Isso corresponde ao estado completamente incoerente, onde não existe sincronização. As soluções correspondendo a  $0 < r < 1$  são estados em que um conjunto de osciladores, não o sistema totalmente, possui frequência travada. Dividindo a Eq. (3.14) por  $r$ ,

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.15)$$

Fazendo  $r \rightarrow 0^+$  nessa equação, encontra-se o ponto crítico  $K_c$  no qual o parâmetro de ordem cresce do zero. Então, a Eq. (3.15) se torna

$$1 = K_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(0) d\theta = K_c g(0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = K_c g(0) \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

Assim,

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (3.17)$$

Este é o valor do acoplamento crítico necessário para produzir um estado parcialmente sincronizado.

### 3.1.2 Comportamento inicial do parâmetro de ordem.

Agora que é conhecido o ponto em que o parâmetro de ordem começa a crescer do zero, é interessante saber a forma como ele aumenta para  $K > K_c$ . Para descobrir como  $r$  se comporta nas proximidades de  $K_c$  pode-se expandir  $g(Kr \sin \theta)$  na Eq. (3.15) em torno de  $r = 0$ :

$$g(Kr \sin \theta) \approx g(0) + g'(0)Kr \sin \theta + \frac{1}{2}g''(0)(Kr \sin \theta)^2. \quad (3.18)$$

Como  $g(\omega)$  tem um máximo no zero,  $g'(0) = 0$ , assim

$$g(Kr \sin \theta) \approx g(0) + \frac{1}{2}g''(0)(Kr \sin \theta)^2. \quad (3.19)$$

Substituindo esse resultado de volta na Eq. (3.15),

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left[ g(0) + \frac{1}{2} g''(0) (Kr \sin \theta)^2 \right] d\theta \quad (3.20)$$

Resolvendo a integral e fazendo uso da Eq. (3.17) obtém-se

$$1 = K \left[ \frac{\pi}{2} g(0) + \frac{\pi K^3 r^2 g''(0)}{16} \right] = \frac{K}{K_c} + \frac{\pi K^3 r^2 g''(0)}{16}. \quad (3.21)$$

Agora, multiplicando os dois lados por  $K_c$  e assumindo  $K \approx K_c$ , então  $K^3 \approx K_c^3$

$$K_c = K + K_c \frac{\pi K_c^3 r^2 g''(0)}{16}. \quad (3.22)$$

Finalmente, pode-se resolver para o parâmetro de ordem  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0) K_c^4} (K - K_c)^{1/2}}. \quad (3.23)$$

Assim, próximo do ponto crítico,  $r \sim (K - K_c)^{1/2}$  o parâmetro de ordem é proporcional a raiz quadrada da distância de  $K_c$  evidenciando o caráter de campo médio da teoria.

### 3.1.3 Resolução explícita para as distribuições de Lorentz e uniforme

O modelo de Kuramoto tem uma dependência importante sobre como as frequências naturais estão distribuídas, já que a dessintonia de frequências tem um papel chave para definir a possibilidade de sincronização. Para alguns casos especiais de distribuições de probabilidade é possível resolver explicitamente para  $r(K)$ . Em sua análise original, Kuramoto usou uma distribuição Lorentziana, definida como

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (3.24)$$

onde  $\gamma$  é uma constante que especifica a largura da distribuição como é visto na Fig.(3.2). Substituindo a distribuição de Lorentz na Eq. (3.15) é obtida uma integral solúvel. O resultado final para o parâmetro de ordem é

$$r = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{K}}, \quad (3.25)$$

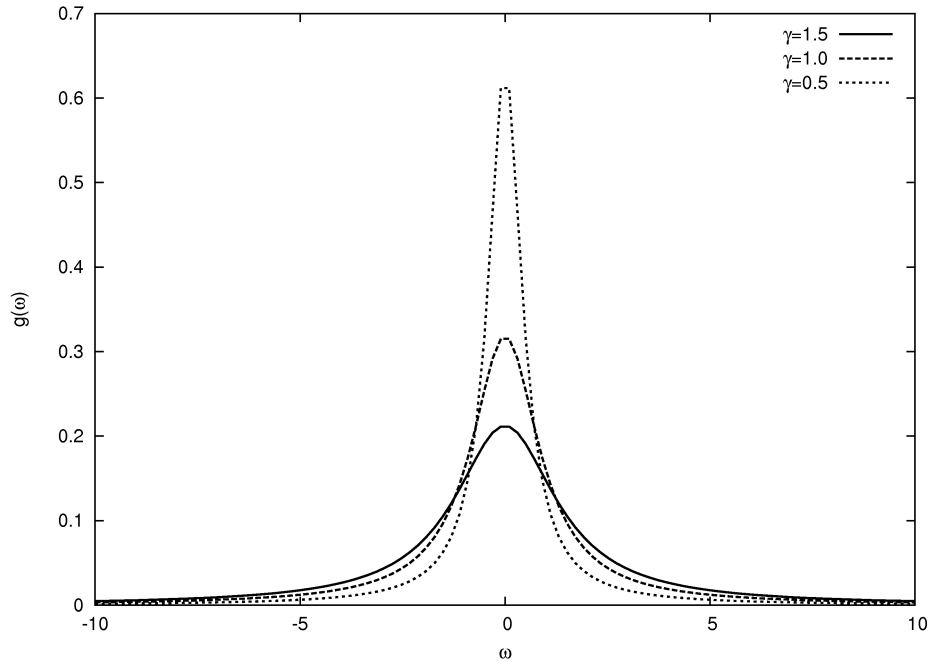


FIGURA 3.2: Distribuição de Lorentz para diferentes valores de  $\gamma$ . É possível notar que a medida que  $\gamma$  aumenta a distribuição se torna mais larga.

ou, visto que é conhecida a expressão para  $K_c$

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} = \frac{2}{\pi \frac{1}{\pi\gamma}} = 2\gamma, \quad (3.26)$$

pode-se encontrar para  $r$

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (3.27)$$

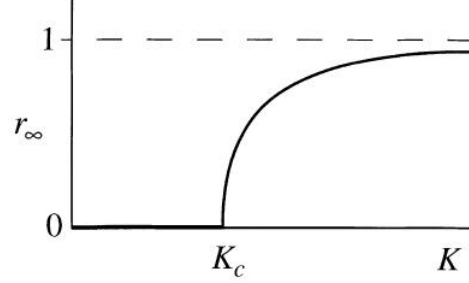


FIGURA 3.3: Comportamento do parâmetro de ordem  $r$  em função do acoplamento  $K$ . Abaixo de  $K_c$  a única solução estável é  $r = 0$  e representa o estado completamente incoerente. Quando o acoplamento atinge um valor crítico  $K_c$  surge uma solução diferente de zero e a medida que  $K$  aumenta para o infinito  $r$  tende a 1. Isto representa o estado completamente coerente onde as fases de todos osciladores estão travadas. [17]

Considerando agora uma distribuição uniforme, tal que:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} & , \text{ para } |\omega| \leq \gamma, \\ 0 & , \text{ para } |\omega| > \gamma. \end{cases} \quad (3.28)$$

É possível usar a Eq.(3.13) em um regime totalmente travado e substituindo esta distribuição, obter

$$r = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K^2 r^2}} d\omega$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2 r^2}} + \frac{Kr}{2\gamma} \arcsin\left(\frac{\gamma}{Kr}\right). \quad (3.29)$$

A Eq. (3.29) fornece implicitamente a dependência de  $r$  sobre  $K$ . Uma solução existe somente para  $Kr \geq \gamma$ . O valor correspondente para o acoplamento crítico é

$$K_c = \frac{4\gamma}{\pi} \quad (3.30)$$

Pode-se reescrever a Eq. (3.29) em termos de  $K_c$  na forma,

$$\frac{K_c}{K} = f\left(\frac{\gamma}{Kr}\right) \quad (3.31)$$

e, definindo  $x \equiv \gamma/Kr$ , o lado direito da Eq. (3.31) é dado por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]. \quad (3.32)$$

A Fig. (3.4) mostra  $f(x)$  em função de  $x$ . No intervalo  $0 \leq x \leq 1$  o valor máximo de  $f(x)$  ocorre em  $f(1) = 1$  e corresponde ao valor mínimo de  $r$  que se dá em  $K = K_c$ . Para valores de  $K > K_c$  a Eq. (3.31) tem soluções para  $r = r(K)$  reais e finitas.

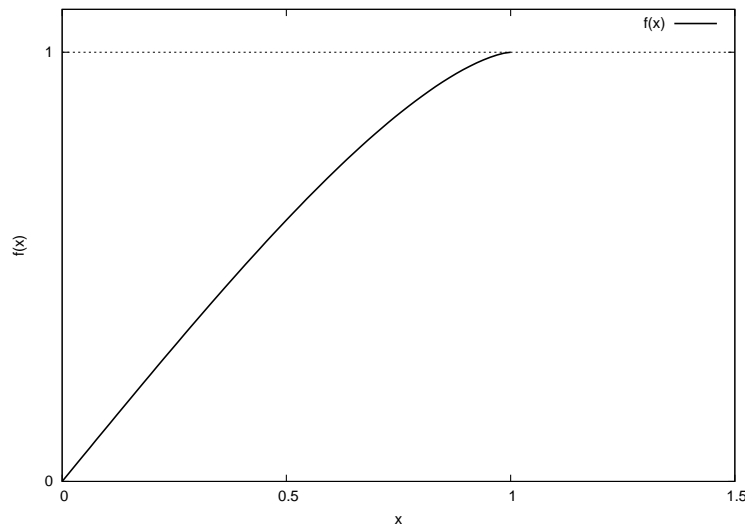


FIGURA 3.4: Comportamento da função dada na Eq. (3.32). A função  $f(x)$  fornece o conjunto de soluções reais para o parâmetro de ordem.

Na Fig (3.5) é mostrado o parâmetro de ordem em função da constante de acoplamento. Os resultados são obtidos a partir do conjunto de soluções representadas por  $f(x)$  na Fig. (3.4). Nota-se que a transição é de primeira ordem e o valor mínimo de  $r$  corresponde ao valor de  $K = K_c$  que se se dá em  $x = 1$ , então  $\gamma = K_c r_c$  ou



$$r_c = \frac{\pi}{4} \quad (3.33)$$

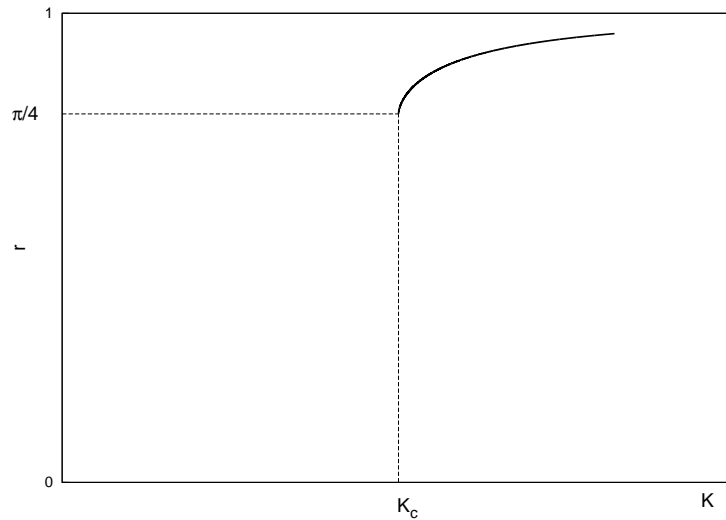


FIGURA 3.5: Parâmetro de ordem em função do acoplamento para o modelo de Kuramoto com distribuição uniforme de frequências naturais. Diferentemente do que acontece para uma distribuição de Lorentz, a passagem do estado incoerente para o início da sincronização acontece de forma abrupta caracterizando uma transição de primeira ordem.

## Capítulo 4

# Modelo de Kuramoto com ruído

### 4.1 O modelo de campo médio com forças de ruído branco

O objetivo principal nesta seção é encontrar uma equação que descreva a evolução da função de distribuição de osciladores na presença de ruído. Isto irá providenciar o ponto de partida para analisar como o modelo de Kuramoto se comporta quando um ruído externo é adicionado. Inicia-se então acrescentando o termo  $\xi$  nas equações de Kuramoto na forma discreta:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \xi_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (4.1)$$

ou, em termos do parâmetro de ordem

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \xi_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad (4.2)$$

onde o termo de ruído  $\xi_i(t)$  é definido de modo que

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$\langle \xi_i(s) \xi_j(t) \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(s - t). \quad (4.4)$$

A primeira condição significa que a média temporal do ruído agindo sobre o oscilador  $i$  é zero, e a segunda condição requer que os termos de ruído para osciladores diferentes ou diferentes tempos sejam não correlacionados. A intensidade de ruído é dada pelo parâmetro  $D$ .

No âmbito de uma análise numérica, essas equações de Kuramoto na forma discreta são suficientes, uma vez que o termo de ruído  $\xi$  pode ser simulado com um gerador aleatório, mas, para o desenvolvimento analítico, é necessário determinar uma equação contínua que forneça a evolução da função de distribuição de osciladores. De forma ilustrativa, antes de prosseguir, é discutido como exemplo, um tipo de processo estocástico que pode ser descrito por meio da evolução de uma distribuição de probabilidades.

#### 4.1.1 Um exemplo de processo estocástico: o processo de Wiener

O processo de Wiener é um tipo particular de processo de Markov, muito utilizado na física para descrever o movimento de uma partícula que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares [18]. Matematicamente este processo é descrito pela equação

$$X(t + dt) = X(t) + \sqrt{\mu^2 dt} N(0, 1), \quad (4.5)$$

onde  $\mu$  define a intensidade de ruído no sistema e  $N(0, 1)$  representa um número aleatório escolhido de uma distribuição Gaussiana de média 0 e variância 1. Essa equação significa que a variável de processo  $X(t)$  associada a um certo valor de posição  $x(t)$  no tempo  $t$  determina  $X(t + dt)$  como uma variável aleatória normalmente distribuída com média  $x(t)$  e variância  $\mu^2 dt$ , ou seja, o valor imediatamente posterior da posição só depende do estado atual do sistema.

Outra maneira igualmente válida de descrever o processo de Wiener é considerar a variável de processo  $X(t)$  definida por sua distribuição de probabilidade associada  $\rho(x, t)$ . Seus dois argumentos,  $x$  e  $t$ , referem-se as duas formas diferentes

que  $X(t)$  pode variar: no tempo  $t$  e no valor de  $x$  para cada tempo [18]. Esta distribuição é definida de modo que  $\rho(x, t)dx$  fornece a probabilidade de encontrar uma partícula entre  $x$  e  $x + dx$  no tempo  $t$  e satisfaz a equação de difusão clássica

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.6)$$

A Eq. (4.6) é matematicamente equivalente a equação dinâmica estocástica (4.5). Enquanto uma governa a variável aleatória  $X(t)$  a outra forma governa a distribuição de probabilidade  $\rho(x, t)$ . Então, olhar para um processo estocástico em termos da evolução de uma função de distribuição passa a ser a forma mais útil quando toma-se o limite contínuo para o modelo de Kuramoto.

#### 4.1.2 Limite contínuo para o modelo de Kuramoto

Quando ruído é incluído ao sistema, torna-se útil levar o número de osciladores ao infinito pois isto possibilita o desenvolvimento analítico [19]. Uma vez que há um número infinito de osciladores, em vez de acompanhar a fase de cada oscilador individualmente é conveniente descrever o sistema em termos de uma função de distribuição que fornece a densidade de osciladores em diferentes posições do círculo unitário.

Matematicamente, a função de distribuição  $\rho(\theta, \omega, t)$  é definida similarmente a  $\rho(x, t)$  na subseção prévia, mas agora  $\rho(\theta, \omega, t)d\theta$  fornece a fração de osciladores com frequência natural  $\omega$  que situam entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  no tempo  $t$ . Ela é normalizada de modo que

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta, \omega, t)d\theta = 1 \quad (4.7)$$

para todos os valores de  $t$  e  $\omega$ .

Agora, para encontrar uma equação que descreve a evolução dessa distribuição, primeiro escreve-se a equação de Kuramoto com ruído (4.1) na forma

$$d\theta_i = \left( \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \right) dt + \sqrt{\mu^2 dt} N(0, 1), i = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

Para simplificar a notação, define-se

$$v_i \equiv \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (4.9)$$

de modo que  $v_i$  é a velocidade angular instantânea do oscilador  $i$  na ausência de ruído. Então, a Eq. (4.8) se torna

$$d\theta_i = v_i dt + \sqrt{\mu^2 dt} N(0, 1), i = 1, \dots, N. \quad (4.10)$$

Agora, fazendo uso da identidade

$$\int f(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial t} d\theta = \left\langle \frac{df(\theta)}{dt} \right\rangle. \quad (4.11)$$

Que surge da Hipótese Ergótica [20], expandindo  $df$  até a segunda ordem

$$df = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{(d\theta)^2}{2}, \quad (4.12)$$

e substituindo a Eq. (4.10) desconsiderando termos da ordem de  $(dt)^2$ , obtém-se

$$df = \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( v dt + \sqrt{\mu^2 dt} N(0, 1) \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\mu^2 dt}{2} N^2(0, 1). \quad (4.13)$$

Agora pode-se substituir essa equação na Eq. (4.11) e notando que  $\left\langle \sqrt{\mu^2 dt} N(0, 1) \right\rangle = \left\langle \sqrt{\mu^2 dt} \right\rangle \langle N(0, 1) \rangle = 0$  (considerando que a média de  $N(0, 1)$  é zero por definição) e  $\langle N^2(0, 1) \rangle = 1$  (desde que a média do quadrado é igual a variância quando a média é zero) resulta

$$\int f(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial t} d\theta = \left\langle \frac{df}{d\theta} v + \frac{\mu^2}{2} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right\rangle. \quad (4.14)$$

É possível expressar o lado direito dessa equação como uma integração sobre o espaço de fase

$$\int f(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial t} d\theta = \int \left( \frac{df}{d\theta} v + \frac{\mu^2}{2} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) \rho d\theta. \quad (4.15)$$

Integrando o lado direito por partes e desprezando os termos de superfície (uma vez que o contorno é periódico)

$$\int f(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial t} d\theta = \int f(\theta) \left( -\frac{\partial \rho}{\partial \theta} v + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \right) d\theta. \quad (4.16)$$

Dessa equação, considerando que  $f$  é uma função arbitrária, obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v). \quad (4.17)$$

Essa é a conhecida equação de Fokker-Planck e pode ser escrita na forma [21]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v), \quad (4.18)$$

com  $D = \mu^2/2$ . Ambos  $D$  e  $\mu^2$  são parâmetros que descrevem a quantidade de ruído no sistema.

Essa equação informa como a função de distribuição de osciladores  $\rho(\theta, \omega, t)$  evolui no tempo, e é completamente equivalente a equação discreta do modelo de Kuramoto com ruído Eq. (4.1). Comparando com a Eq. (4.6) do processo estocástico de Wiener, percebe-se que o primeiro termo é de caráter difusivo e tem o efeito de espalhar as fases dos osciladores enquanto que o segundo termo vem da condição de continuidade e tenta sincronizar os osciladores por meio da alteração na velocidade  $v$ . O método geral usado para dedução desta equação é apresentado no Apêndice B.

## 4.2 Efeitos do ruído: análise de estabilidade

Nesta seção é investigado como o modelo de Kuramoto com ruído se comporta, focando especificamente em como o estado incoerente evolui no tempo e em

que situações ele é instável. O estado incoerente é definido de modo que os osciladores estão distribuídos igualmente em torno do círculo unitário, ou seja,  $r = 0$ ; isto corresponde ao sistema completamente dessincronizado. Estuda-se a estabilidade deste estado adicionando uma perturbação de primeira ordem e notando se o sistema retorna para o estado incoerente (neste caso ele é estável) ou começa mostrar outro tipo de comportamento (neste caso ele é instável). Encontrar situações nas quais o estado incoerente torna-se instável é o mesmo que encontrar as situações em que o sistema começa sincronizar. Será visto que isto acontece quando o acoplamento atinge um valor crítico  $K_c$  como no modelo sem a presença de ruído [19].

#### 4.2.1 Perturbação no estado incoerente

O primeiro passo para estudar a estabilidade do sistema é adicionar uma pequena perturbação  $\eta$  ao estado incoerente  $\rho(\theta, \omega, t) = 1/2\pi$  [21]. Considera-se que essa perturbação seja uma função arbitrária de  $\theta$ ,  $\omega$  e  $t$ , e sua intensidade é especificada com o parâmetro  $\epsilon \ll 1$

$$\rho(\theta, \omega, t) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta(\theta, \omega, t). \quad (4.19)$$

Uma vez que a função de distribuição ainda deve ser normalizada, impõe-se que

$$\int_0^{2\pi} \eta(\theta, \omega, t) d\theta = 0, \quad (4.20)$$

pois o termo  $1/2\pi$  da distribuição resulta em  $\int_0^{2\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = 1$ . Agora, substituindo esta distribuição perturbada dentro da equação de Fokker-Planck (4.18) é encontrada a aproximação de primeira ordem  $O(\epsilon)$  sobre como a perturbação  $\eta$  evolui no tempo

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} = \epsilon D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) v \right]. \quad (4.21)$$

Para calcular o efeito da perturbação na velocidade angular instantânea  $v$  do termo

entre colchetes, lembrando que de (4.9) pode-se escrever

$$v_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad (4.22)$$

é necessário usar o parâmetro de ordem (3.3) em sua forma contínua

$$re^{i\psi} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (4.23)$$

Então, substituindo a distribuição perturbada

$$re^{i\psi} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \left[ \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right] g(\omega) d\omega d\theta, \quad (4.24)$$

pode-se simplificar notando que a integral do termo  $e^{i\theta}/2\pi$  sobre  $\theta$  é zero, de forma que

$$re^{i\psi} = \epsilon \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \eta(\theta, \omega, t) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (4.25)$$

Dessa equação, nota-se que  $r$  é simplesmente  $O(\epsilon)$ . Então, é possível escrever o parâmetro de ordem do sistema perturbado como  $r = \epsilon r_1$  e a Eq. (4.22) se torna

$$v = \omega + \epsilon Kr_1 \sin(\psi - \theta). \quad (4.26)$$

Desenvolvendo o último termo da Eq. (4.21)

$$-\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) v \right] = - \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) \right], \quad (4.27)$$

Calculando  $\partial v / \partial \theta$  de (4.26) e substituindo  $v$

$$- \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) (-\epsilon Kr_1 \cos(\psi - \theta)) - (\omega + \epsilon Kr_1 \sin(\psi - \theta)) \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial \theta}. \quad (4.28)$$

Finalmente, considerando somente os termos da ordem de  $O(\epsilon)$   $-\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) v \right] = \epsilon \frac{K}{2\pi} r_1 \cos(\psi - \theta) - \epsilon \omega \frac{\partial \eta}{\partial \theta}$ . (4.29) Substituindo este resultado na Eq. (4.21) e dividindo todos os termos por  $\epsilon$ , encontra-se

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - \omega \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{K}{2\pi} r_1 \cos(\psi - \theta). \quad (4.30)$$

Esta é a equação final que descreve a evolução da perturbação  $\eta$ . Ela será usada para encontrar as condições nas quais  $\eta$  extingue (aumenta), caso em que o estado incoerente é estável (instável).



### 4.2.2 Acoplamento crítico para o modelo com ruído

O acoplamento crítico pode ser encontrado estudando o comportamento da perturbação  $\eta$ . Para analisar a Eq. (4.30) é conveniente usar os métodos de Fourier. Uma vez que  $\eta(\theta, \omega, t)$  é real e tem período de  $2\pi$  em  $\theta$ , busca-se soluções da forma

$$\eta(\theta, \omega, t) = c(\omega, t)e^{i\theta} + c^*(\omega, t)e^{-i\theta} + \eta^\perp(\theta, \omega, t), \quad (4.31)$$

onde  $c$  é o primeiro coeficiente de Fourier da expansão em  $\eta$  e o asterisco denota o conjugado complexo. O termo  $\eta^\perp$  contém todos harmônicos superiores. Soluções dessa forma são escolhidas já que somente os primeiros harmônicos de  $\eta$  são importantes na expressão para  $r$ , como será mostrado logo abaixo. O termo  $c_0$  não foi considerado porque  $\eta$  tem média zero de acordo com a Eq. (4.20).

Pode-se confirmar que  $r$  depende somente sobre o primeiro harmônico [19] substituindo a série de Fourier em (4.25):

$$\begin{aligned} r_1 e^{i\psi} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\omega, t) e^{in\theta} \right) g(\omega) d\omega d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n(\omega, t) \left( \int_0^{2\pi} e^{i(1+n)\theta} d\theta \right) g(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n(\omega, t) 2\pi \delta_{n,-1} g(\omega) d\omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c_{-1}(\omega, t) g(\omega) d\omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c^*(\omega, t) g(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde foi usado  $c_{-1} = c^*$  pelo fato de  $\eta$  ser real. Esse resultado significa que é possível resolver  $r(t)$  considerando somente o primeiro harmônico de  $\eta$ .

Fazendo uso do resultado anterior é possível expressar o último termo da equação de evolução (4.30) em termos de  $c$  e  $c^*$ . Notando primeiro que

$$r_1 \cos(\psi - \theta) = \text{Re}[r_1 e^{i\psi} e^{-i\theta}] \quad (4.33)$$

pode-se substituir a Eq. (4.32) e usando o fato de que  $\text{Re}(f) = (f + f^*)/2$ ,

$$r_1 \cos(\psi - \theta) = \pi \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} c^*(\omega, t) g(\omega) d\omega \right) e^{-i\theta} + \left( \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, t) g(\omega) d\omega \right) e^{i\theta} \right]. \quad (4.34)$$

Agora, escreve-se a equação de evolução (4.30) em termos de  $c$  e  $c^*$  usando as Eqs. (4.31) e (4.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta} + \eta^\perp] &= D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta} + \eta^\perp] - \omega \frac{\partial}{\partial \theta} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta} + \eta^\perp] \\ &\quad + \frac{K}{2\pi} \pi \left[ e^{-i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} c^* g(\nu) d\nu + e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} c g(\nu) d\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Tomando as derivadas e reagrupando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} &e^{i\theta} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + Dc + i\omega c - \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c g(\nu) d\nu \right] \\ &+ e^{-i\theta} \left[ \frac{\partial c^*}{\partial t} + Dc^* - i\omega c^* - \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c^* g(\nu) d\nu \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2} + \omega \frac{\partial \eta^\perp}{\partial \theta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como esta equação deve ser satisfeita para todos valores de  $\theta$ , cada termo entre parênteses precisa ser igual a zero. O segundo termo não fornece nenhuma informação nova pois é apenas o conjugado complexo do primeiro, de modo que desse resultado é possível tirar duas equações, a primeira que diz respeito ao harmônico fundamental e a segunda que contém todos harmônicos superiores

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -(D + i\omega)c + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\nu, t) g(\nu) d\nu \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2} - \omega \frac{\partial \eta^\perp}{\partial \theta}. \quad (4.38)$$

O objetivo aqui é encontrar o acoplamento crítico no qual o parâmetro de ordem começa crescer do zero. Como visto anteriormente, apenas o harmônico

fundamental é suficiente para determinar  $r$ . Para estudar a evolução deste harmônico supõe-se soluções separáveis para Eq. (4.37) da forma

$$c(\omega, t) = b(\omega)e^{\lambda t}, \quad (4.39)$$

onde o autovalor  $\lambda$  informa como  $c$  evolui no tempo. O operador linear  $L$  que descreve o lado direito da Eq (4.37) é dado por

$$Lc = -(D + i\omega)c + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\nu, t)g(\nu)d\nu. \quad (4.40)$$

Para resolver para  $\lambda$ , utiliza-se a equação de autovalor

$$(L - \lambda I)c = (L - \lambda I)be^{\lambda t} = 0, \quad (4.41)$$

onde  $I$  é o operador identidade e  $b$  deve ser diferente de zero. Dividindo por  $e^{\lambda t}$

$$\lambda b = Lb = -(D + i\omega)b + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\nu)g(\nu)d\nu. \quad (4.42)$$

Uma vez que a integral na Eq (4.42) é apenas alguma constante, pode-se definir

$$C \equiv \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\nu)g(\nu)d\nu, \quad (4.43)$$

e resolver para  $b$ , obtendo

$$b(\omega) = \frac{C}{\lambda + D + i\omega}. \quad (4.44)$$

Em seguida, é usado um argumento de auto-consistência, substituindo esta equação na Eq. (4.43)

$$C = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cg(\nu)}{\lambda + D + i\nu} d\nu. \quad (4.45)$$

Não considera-se  $C = 0$  como solução porque isto implica que  $c(\omega, t) = 0$ , não sendo uma auto-função válida. Então,

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\nu)}{\lambda + D + i\nu} d\nu \quad (4.46)$$

É possível simplificar essa equação, multiplicando e dividindo o integrando na Eq. (4.46) pelo conjugado complexo do denominador, obtendo

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda + D - i\nu}{(\lambda + D)^2 + \nu^2} g(\nu) d\nu, \quad (4.47)$$

como a parte imaginária é uma função ímpar de  $\nu$ , a integral resultará em zero, assim

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda + D}{(\lambda + D)^2 + \nu^2} g(\nu) d\nu. \quad (4.48)$$

Essa equação mostra como o autovalor  $\lambda$  depende em  $K$ ,  $D$ , e  $g(\omega)$ .

O autovalor  $\lambda$  informa sobre a estabilidade de  $c$  [veja Eq. (4.39)] e, por sua vez, a estabilidade de  $r$ . Se  $\lambda > 0$ , então  $c$  aumenta exponencialmente no tempo, e da Eq (4.32) é possível ver que  $r$  cresce exponencialmente, significando que o estado incoerente é instável. Se  $\lambda < 0$ ,  $c$  decai e  $r$  reduz a zero, significando que o estado incoerente é estável. Nota-se que qualquer autovalor  $\lambda$  deve satisfazer  $\lambda > -D$  para que o lado direito seja positivo, isto resulta em um fato interessante: sem o ruído,  $D = 0$  o sistema somente pode ser neutramente estável,  $\lambda = 0$ , ou instável.

Para o sistema com ruído  $D > 0$ , o modo fundamental de  $\eta$  pode ser estável, então, o ponto crítico que fornece o limiar para instabilidade do estado incoerente é encontrado fazendo  $\lambda = 0$  na Eq. (4.48). Isto fornece o acoplamento crítico  $K_c$  na presença de ruído

$$K_c = 2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{D^2 + \nu^2} g(\nu) d\nu \right]^{-1}. \quad (4.49)$$

Assim como no caso sem ruído, pode-se resolver explicitamente para  $K_c$  em alguns casos particulares de distribuições de probabilidades. Considerando uma distribuição de Lorentz  $g(\omega) = \gamma/\pi(\gamma^2 + \omega^2)$ , como mostrada no capítulo anterior, e substituindo na Eq. (4.48) chega-se ao autovalor

$$\lambda = \frac{K}{2} - D - \gamma, \quad (4.50)$$

e, por sua vez, fazendo  $\lambda = 0$ , o acoplamento crítico é obtido

$$K_c = 2(D + \gamma) = \mu^2 + 2\gamma. \quad (4.51)$$

Para uma distribuição uniforme de frequências naturais  $g(\omega) = 1/2\gamma$  com  $-\gamma \leq \omega \leq \gamma$  e  $g(\omega) = 0$  para qualquer outro valor, a integração da Eq. (4.48) produz o autovalor

$$\lambda = \gamma \cot \frac{2\gamma}{K} - D, \quad (4.52)$$

e, fazendo  $\lambda = 0$  obtém-se

$$K_c = \frac{2\gamma}{\arctan \frac{\gamma}{D}}. \quad (4.53)$$

## Capítulo 5

# Análise numérica do modelo de Kuramoto

### 5.1 Introdução

A integração numérica da Equação de Kuramoto sem ruído (3.4) e com ruído, Eq.(4.2) foi feita por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem com tamanho de passo  $\Delta t = 0,01$ . As fases iniciais foram escolhidas aleatoriamente em um intervalo de 0 a  $2\pi$  no círculo unitário e em cada simulação as frequências naturais tiveram seus valores sorteados de acordo com uma distribuição de probabilidades. Foram utilizadas as distribuições de Lorentz (3.24) e uniforme (3.28). O programa foi posto a rodar até terem sido eliminados os comportamentos transientes e ao final foram gravadas as propriedades do sistema que forneceram a quantidade de sincronização ocorrida.

Na Fig.(5.1) é mostrado o comportamento do parâmetro de ordem de um conjunto de 3.500 osciladores com suas frequências naturais sorteadas de uma distribuição de Lorentz. Foi fixado o acoplamento e computado o valor do parâmetro de ordem para cada passo de tempo. Observa-se na Fig.(5.1 a) que antes do acoplamento crítico (no caso  $K_c = 1,0$ ) o parâmetro de ordem oscila nas proximidades de zero, o que indica que nenhum comportamento coletivo é estabelecido. Depois do acoplamento crítico Fig.(5.1 b), o parâmetro de ordem cresce rapidamente no tempo

e fica oscilando em torno de um valor fixo, indicando que um grupo de osciladores entrou em sincronia.

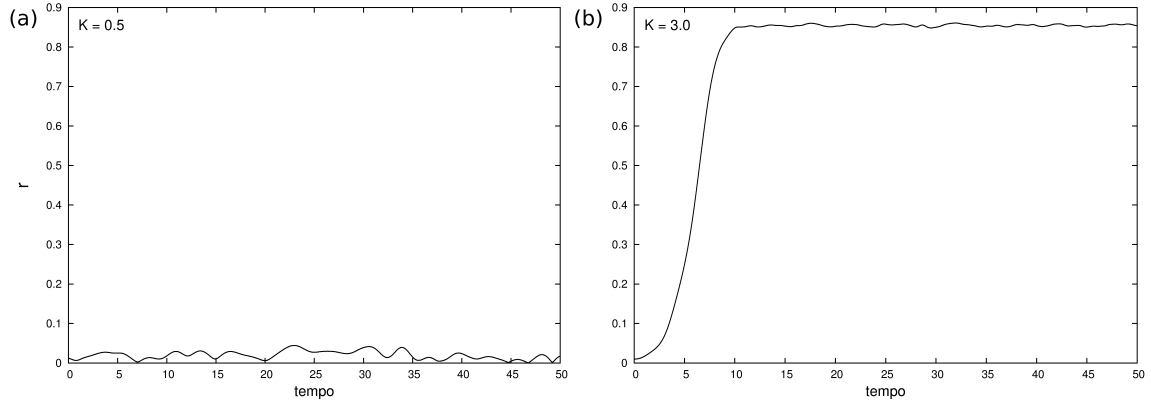


FIGURA 5.1: Parâmetro de ordem em função do tempo abaixo ( $K = 0,5$ ) e acima ( $K = 3,0$ ) de  $K_c$

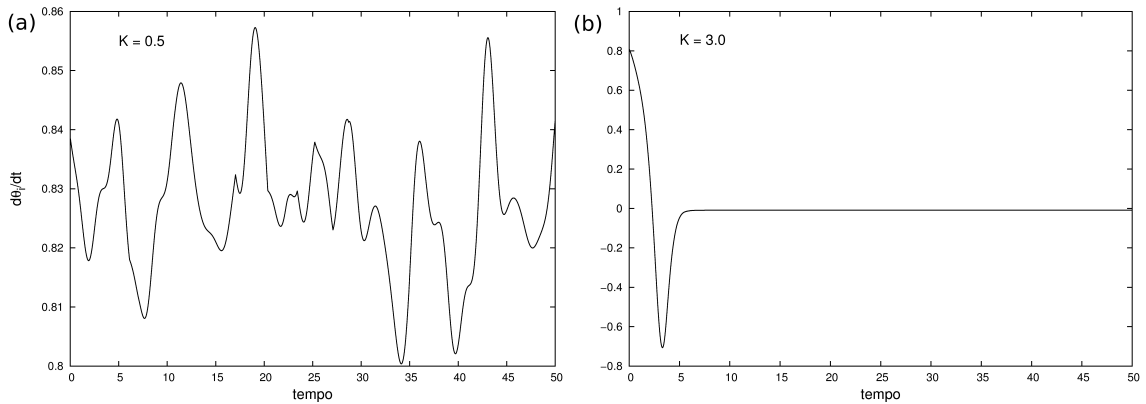


FIGURA 5.2: Velocidade de fase de um oscilador  $i$  em função do tempo abaixo ( $K = 0,5$ ) e acima ( $K = 3,0$ ) de  $K_c$

A Fig.(5.2) mostra o comportamento da velocidade de fase de um dos osciladores do conjunto anterior. Foi fixado o acoplamento e computado o valor da velocidade de fase pra cada passo de tempo. É possível observar que antes do acoplamento crítico Fig.(5.2 a), o oscilador  $i$  está à deriva no círculo unitário, movendo-se com velocidade variante no tempo. Depois do acoplamento crítico Fig.(5.2 b), a velocidade de fase varia inicialmente e logo em seguida cai para zero, evidenciando

o travamento de fase.

No final da Seção (2.3) foi discutido a importância da dessintonia de frequências naturais [22] como fator limitante para o comportamento sincronizado. Na sequência de gráficos da Fig.(5.3) é possível constatar essa relação entre a dessintonia de frequências com a intensidade de acoplamento para determinar a quantidade de osciladores sincronizados no modelo de Kuramoto.

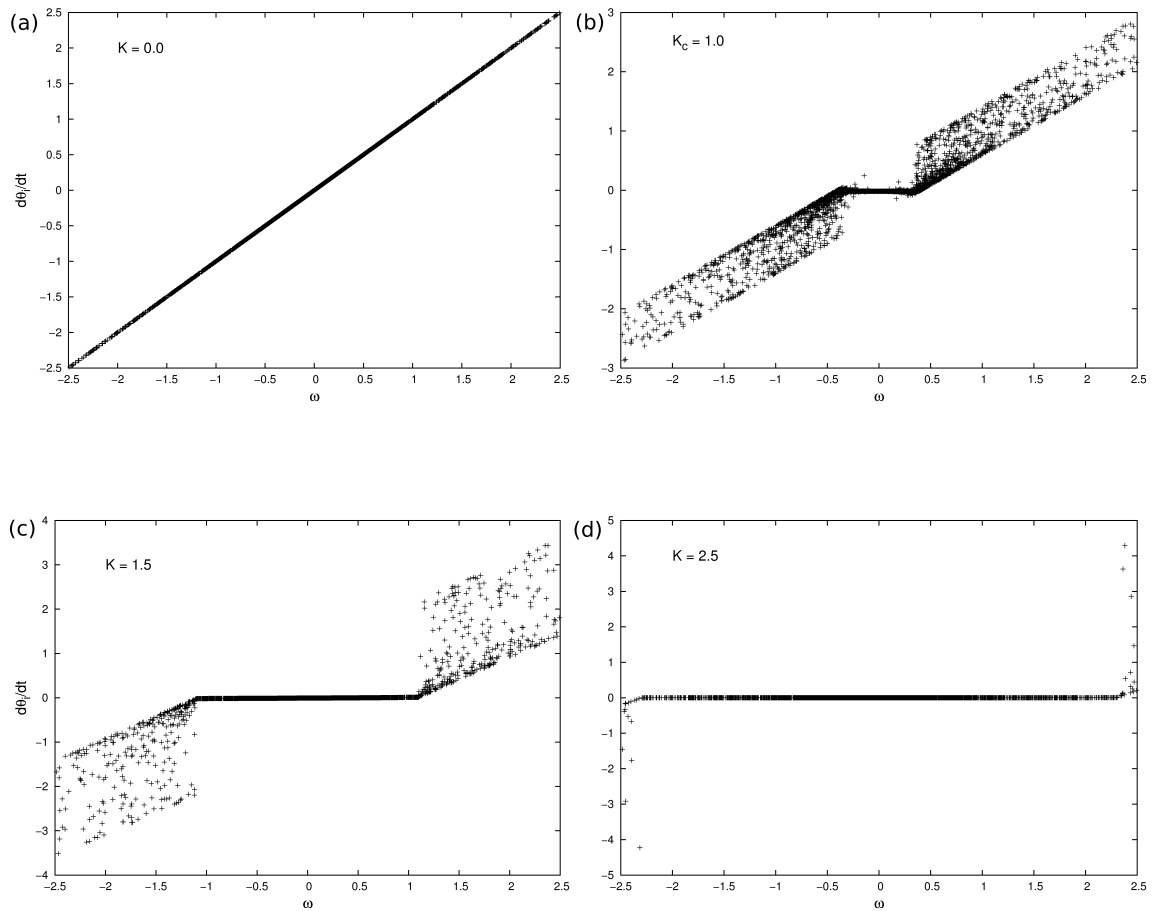


FIGURA 5.3: Velocidade de fase  $\dot{\theta}_i$  pela frequência natural  $\omega_i$ . Com o aumento do acoplamento  $K$  cada vez mais osciladores com frequências naturais afastadas do zero sincronizam evidenciando o efeito da dessintonia de frequências.

A velocidade de fase e a frequência natural de cada um dos 3.500 osciladores simulados é mostrada. Inicialmente, os osciladores estão desacoplados ( $K = 0, 0$ ) e as velocidades de fase de cada um deles correspondem as suas frequências naturais,



como visto na Fig.(5.3 a). A medida que  $K$  aumenta, as velocidades de fase variam até que no acoplamento crítico ( $K_c = 1$ ), o primeiro grupo de osciladores entra no regime sincronizado Fig.(5.3 b). Na Subseção (3.1.1) foi visto que a equação de Kuramoto pode ter uma solução estática  $\dot{\theta}_i = 0$ , dada pela Eq.(3.6) desde que seja satisfeita a condição  $|\omega_i| \leq Kr$ . Isto é observado na sequência de gráficos das Figs.(5.3 c) e (5.3 d), quando o acoplamento aumenta ( $K = 1, 5$ ) e depois ( $K = 2, 5$ ) cada vez mais osciladores, com frequências naturais de módulo maior, entram em sincronia.

## 5.2 Efeitos de tamanho finito

Os cálculos analíticos feitos nos Capítulos 3 e 4 levam em consideração o limite termodinâmico, quando o número de osciladores  $N$  é levado ao infinito. Tratando-se de resoluções numéricas do modelo, é possível observar efeitos de tamanho finito que surgem, geralmente, devido as limitações computacionais de reproduzir uma quantidade de interações suficientes para serem consideradas equivalentes ao limite termodinâmico. Nesta seção, são mostrados os efeitos de tamanho finito em algumas grandezas importantes no estudo da sincronização.

Foram utilizados dois tipos de distribuição de frequências naturais para efeito de comparação da influência das distribuições na transição para sincronização. O parâmetro de ordem foi computado ao final do tempo de relaxação para cada  $K$  e em seguida foi feito uma média de 60 simulações.

A Fig. (5.4) mostra o parâmetro de ordem em função da constante de acoplamento  $K$ . Os resultados foram obtidos da integração numérica da equação de Kuramoto utilizando frequências naturais selecionadas aleatoriamente de uma distribuição de Lorentz com parâmetro  $\gamma = 0,5$ . Usando esse parâmetro de distribuição no resultado (3.26) obtém-se para o acoplamento crítico  $K_c = 1,0$ . A medida que  $N$  cresce, observa-se uma melhor concordância com o valor obtido analiticamente.

A Fig. (5.5) mostra o parâmetro de ordem em função do acoplamento

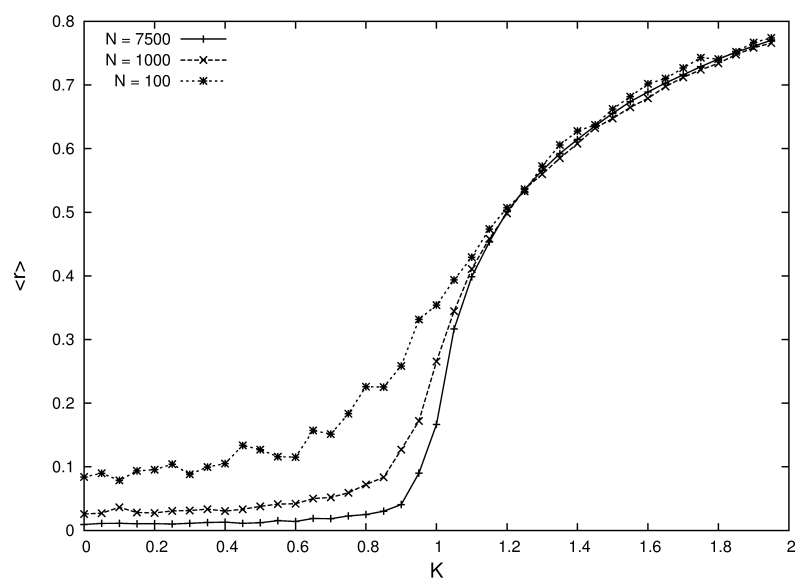


FIGURA 5.4: Média do parâmetro de ordem  $r$  em função do acoplamento  $K$  para diferentes grupos de osciladores. Foi utilizada uma distribuição de Lorentz para as frequências naturais.

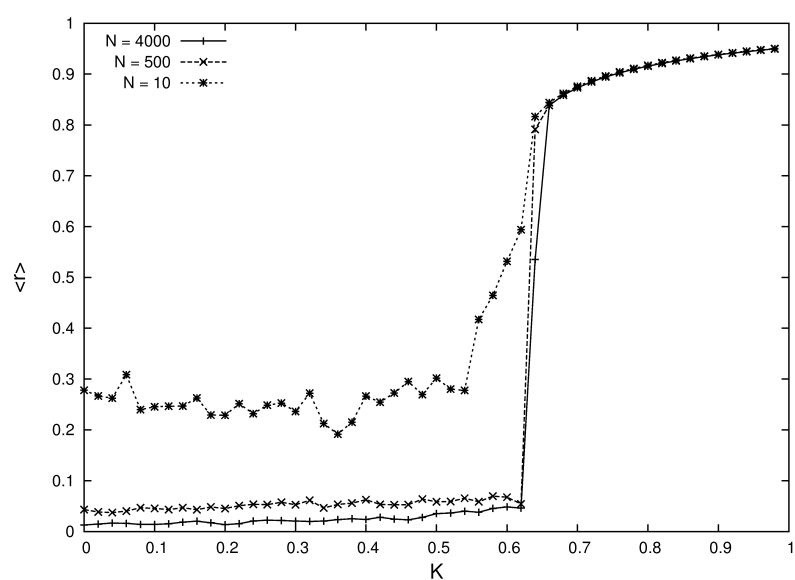
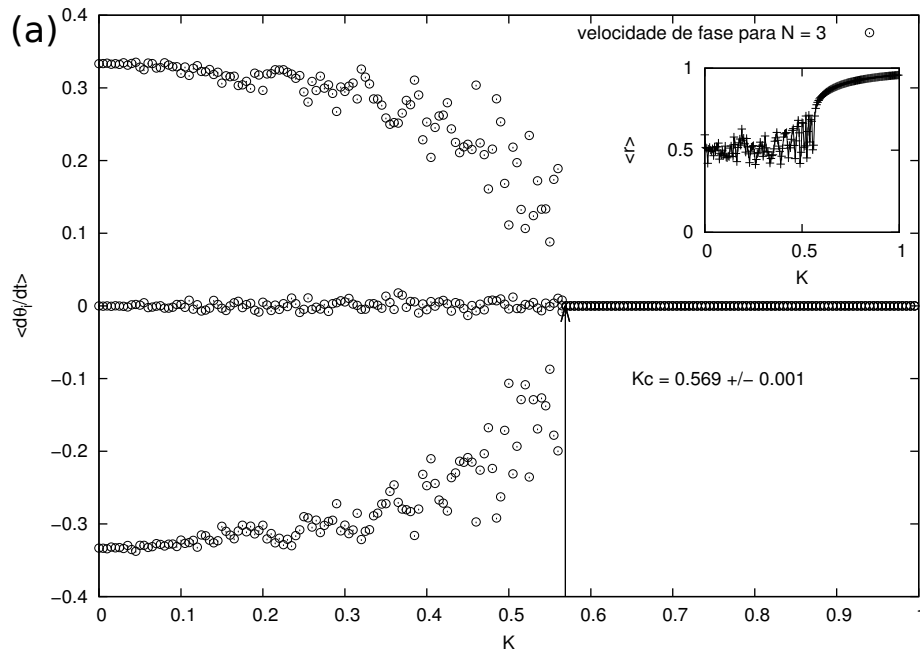


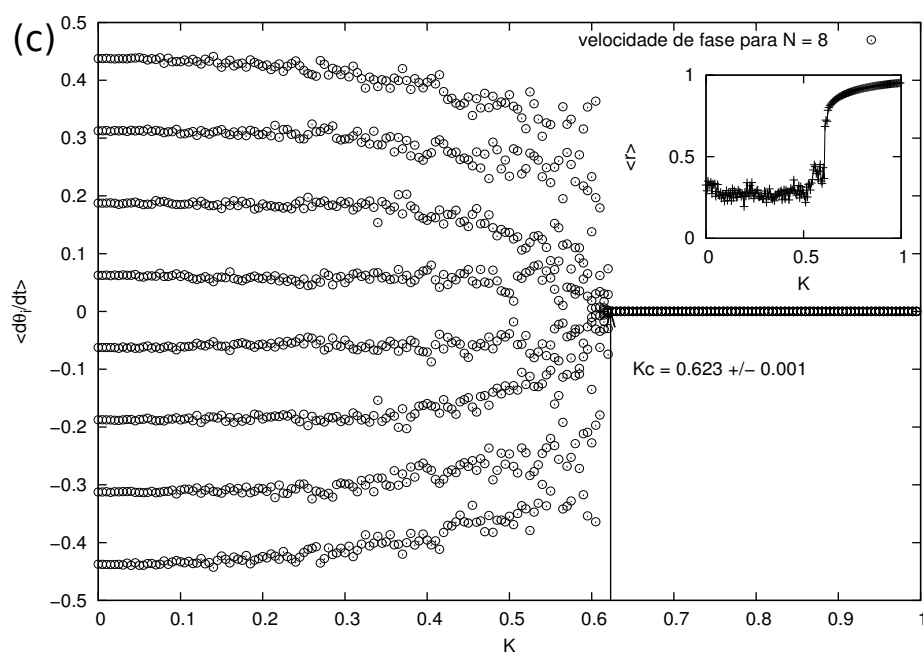
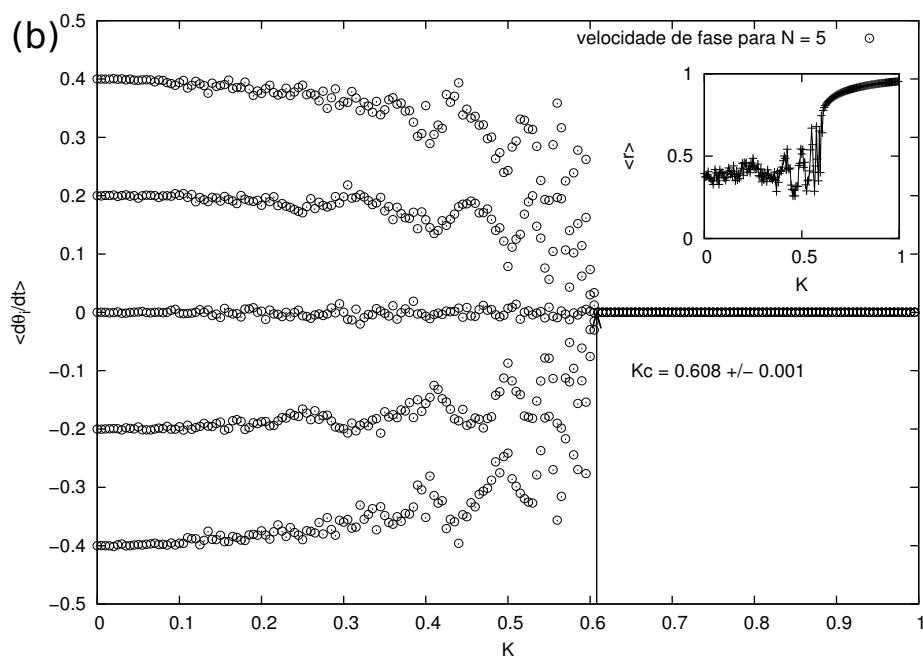
FIGURA 5.5: Média do parâmetro de ordem  $r$  em função do acoplamento  $K$  para diferentes grupos de osciladores. Foi utilizada uma distribuição uniforme para as frequências naturais.

para uma distribuição uniforme de frequências naturais. Pode-se notar uma sensível diferença de comportamento do parâmetro de ordem em comparação com a Fig. (5.4). A transição para o início da sincronização é abrupta comparada ao caso de uma distribuição de Lorentz e o valor analítico do acoplamento crítico é aproximado com uma quantidade menor de osciladores. Para este exemplo também foi usado um parâmetro de distribuição  $\gamma = 0,5$ , então do resultado (3.30) é obtido para o acoplamento crítico  $K_c \approx 0,637$ .

### 5.2.1 Estimativa para o acoplamento crítico $K_c$

Uma distribuição uniforme de frequências naturais permite visualizar alguns aspectos interessantes do modelo de Kuramoto. Utilizando poucos osciladores é possível verificar claramente como acontece o travamento de fase e o acoplamento crítico de transição.





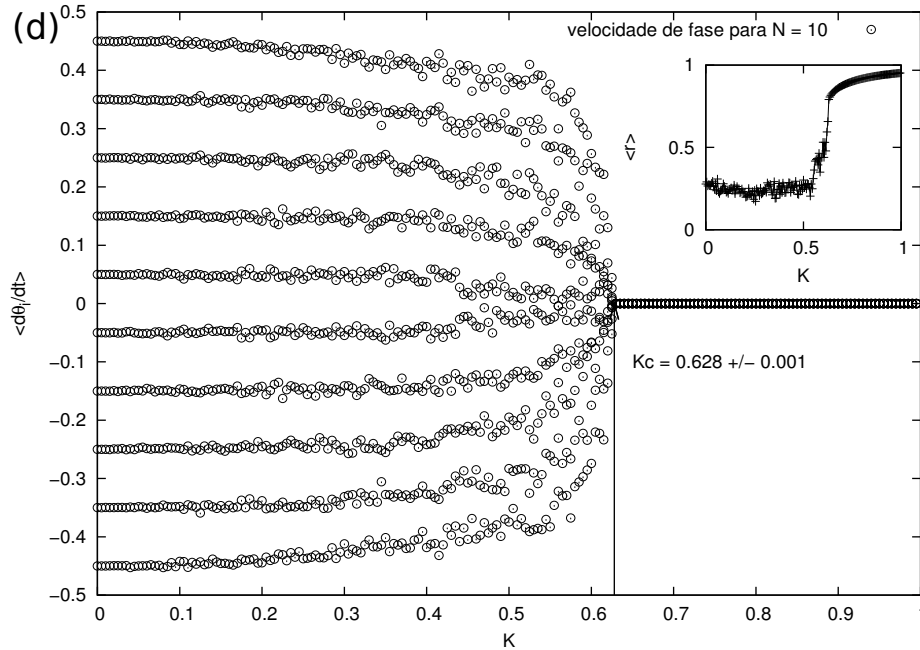


FIGURA 5.6: Média da velocidade de fase do oscilador  $i$  em função do acoplamento.

Gráfico interno: parâmetro de ordem médio de cada grupo de osciladores.

Na Figura (5.6) é mostrada a média da velocidade de fase para cada oscilador em função da constante de acoplamento  $K$  para quatro valores diferentes de  $N$ . A média foi calculada considerando 60 simulações e as frequências naturais dos osciladores da sequência de gráficos foram obtidas da distribuição igualmente espaçada em torno do zero, dada por

$$\omega_i = -\gamma + \frac{\gamma}{N}(2i - 1). \quad (5.1)$$

Inicialmente, com o acoplamento  $K = 0$ , a velocidade de fase de cada oscilador tem o mesmo valor da sua frequência natural, como é visto da Eq. (3.4). À medida que o acoplamento entre os osciladores aumenta, os mesmos vão ajustando suas fases de oscilação até chegar a um acoplamento crítico no qual a frequência de sincronização é alcançada e as fases deixam de variar em relação a fase média do sistema, o que estabelece o travamento de fase. Nos gráficos internos da Fig. (5.6) observa-se o comportamento cada vez menos irregular do parâmetro de ordem, reduzindo as

flutuações antes do acoplamento crítico, com o aumento do número de osciladores.

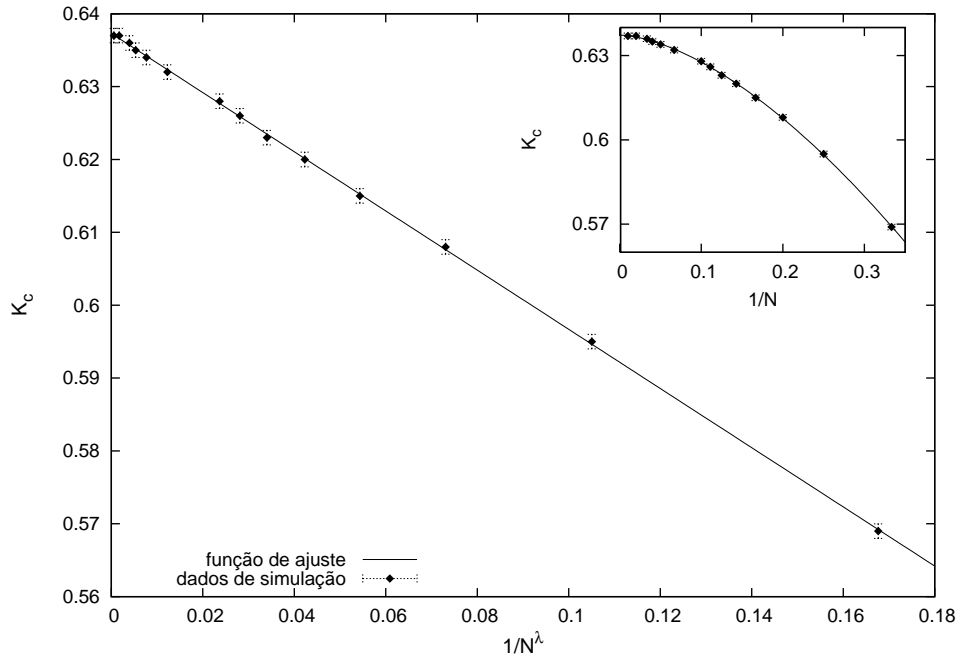


FIGURA 5.7: Valores de  $K_c$  para  $N$  variando entre 3 e 100 osciladores.

A Fig. (5.7) mostra os valores de acoplamento crítico computados para cada conjunto de osciladores com valores de  $N$  situando entre 3 e 100. Foi utilizada a função  $K_c(N) = K_{c_0} + \alpha/N^\lambda$  para ajustar os dados e estimar o acoplamento crítico teórico  $K_{c_0}$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Notou-se que o sistema alcançou o valor aproximado do expoente crítico teórico a partir de  $N = 50$ , mantendo esse valor com o aumento de  $N$ . O ajuste dos dados forneceu o valor estimado para o acoplamento teórico de  $K_{c_0} = 0,6373 \pm 0,0001$  e os valores  $\lambda \approx 1,6254$ ,  $\alpha \approx -0,4061$  para os parâmetros.

### 5.2.2 Estimativa para o expoente crítico $\beta$

Na Subseção (3.1.2) foi encontrado que o parâmetro de ordem nas proximidades do acoplamento crítico cresce na forma  $r \sim (K - K_c)^{1/2}$ . No caso de um sistema finito, foi visto que o parâmetro de ordem  $r(N)$  depende do número de osciladores e, por sua vez, o acoplamento crítico e o valor do expoente crítico de transição também. Assim, foi usada a expressão  $r \sim (K - K_c)^\beta$  para obter o valor  $\beta(N)$  em diferentes tamanhos de grupos de osciladores interagentes com frequências naturais sorteadas de uma distribuição de Lorentz.

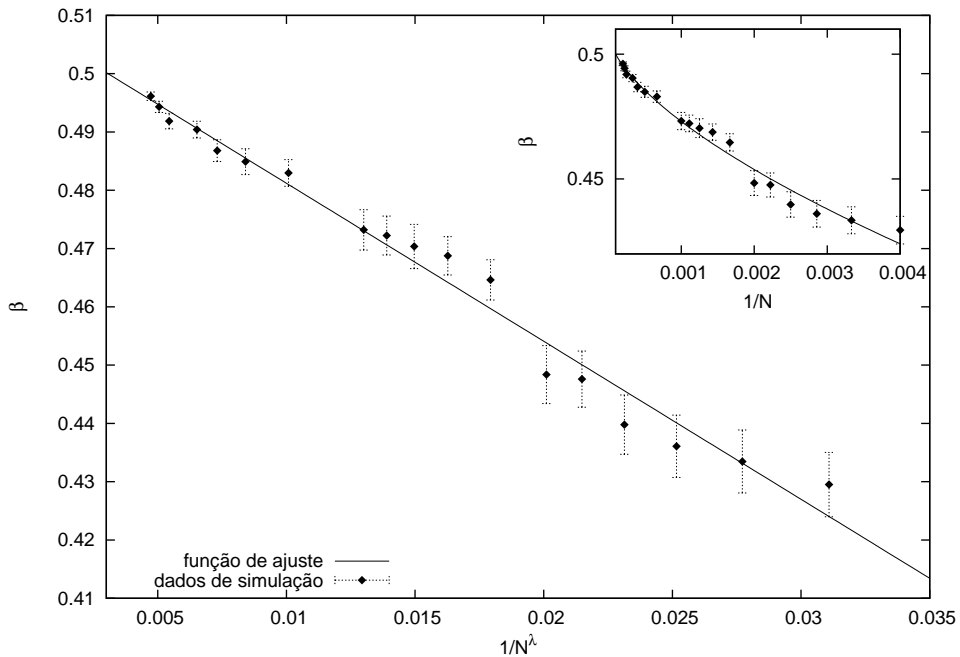


FIGURA 5.8: Valores de  $\beta$  para  $N$  variando entre 250 e 5000 osciladores.

Na Fig. (5.8) é mostrado o escalonamento para tamanho finito do expoente  $\beta$ . Utilizou-se a expressão  $\beta(N) = \beta_0 + \alpha/N^\lambda$  para ajustar os dados, assim foi possível estimar a correspondência do valor do expoente crítico teórico por meio do parâmetro  $\beta_0$ . O ajuste dos dados forneceu o valor  $\beta_0 = 0,5083 \pm 0,0058$  para o

expoente crítico do parâmetro de ordem quando  $N \rightarrow \infty$  e  $\lambda \approx 0,6286$ ,  $\alpha \approx -2,7109$  para os valores dos parâmetros.

### 5.3 Flutuações do parâmetro de ordem

Quando o número de osciladores do sistema tratado é muito grande, torna-se computacionalmente custoso acompanhar individualmente as velocidades de fase de todos os osciladores que estão interagindo para descobrir o acoplamento crítico que dá início à sincronização. O parâmetro de ordem, sendo uma grandeza obtida da fase de oscilação média do sistema, torna-se útil na tarefa de identificar o ponto que inicia a transição do regime desordenado para o regime síncrono.

A teoria de transição de fase indica que as flutuações no parâmetro de ordem do sistema tornam-se significativas no ponto de transição. Então, por meio desta informação, pode-se determinar o acoplamento crítico para o modelo de Kuramoto mais facilmente, mesmo quando a quantidade de osciladores interagentes é grande.

Nas Figs.(5.9) a (5.12) é mostrada a variância do parâmetro de ordem em função de  $K$ . A variância é dada por

$$\langle (\Delta r(K))^2 \rangle = \langle (r(K) - \langle r(K) \rangle)^2 \rangle. \quad (5.2)$$

Os cálculos foram feitos para grupos de 7000 osciladores acoplados com frequências naturais sorteadas das distribuições de Lorentz e uniforme. Os dados apresentados resultam da média de 40 simulações.

Nas Figs.(5.9) e (5.11) a variância do parâmetro de ordem foi calculada para o modelo de Kuramoto com frequências naturais selecionadas de uma distribuição Lorentziana com parâmetro  $\gamma = 0,5$ . A Fig.(5.9) corresponde as flutuações para o modelo de Kuramoto sem ruído. Foi obtido para o acoplamento crítico do modelo sem ruído o valor  $K_c = 1,012 \pm 0,001$  sendo que o valor teórico é  $K_c = 1,0$ . Na Fig.(5.11) é mostrada a flutuação do parâmetro de ordem para o modelo de Kuramoto com ruído dado pela Eq. (4.2). Foi utilizado o valor  $D = 0,25$  para o parâmetro



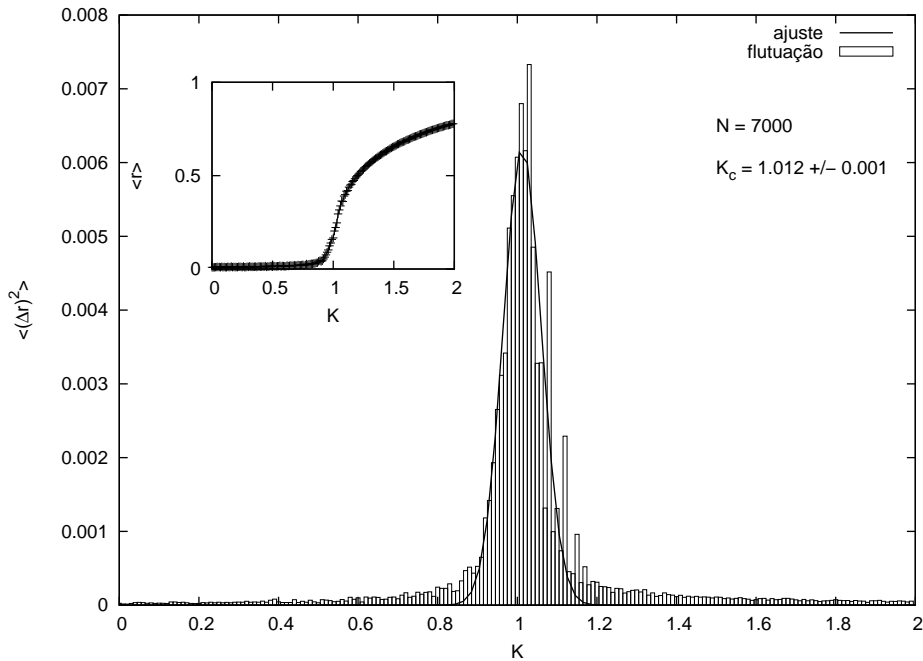


FIGURA 5.9: Variância do parâmetro de ordem de um grupo de osciladores com frequências naturais sorteadas de uma distribuição lorentziana. Gráfico interno: parâmetro de ordem médio do conjunto de osciladores.

que descreve a quantidade de ruído no sistema, isso fornece, a partir da Eq. (4.51), o valor de  $K_c = 1,5$  para o acoplamento crítico. O valor obtido das simulações por meio da flutuação do parâmetro de ordem  $K_c = 1,508 \pm 0,001$  concorda bem com o teórico. Foi utilizada uma distribuição gaussiana para fazer o ajuste dos dados de flutuação e por meio do valor médio do pico foi obtido o acoplamento crítico.

Nas Figs.(5.10) e (5.12) a variância do parâmetro de ordem foi calculada para o modelo de Kuramoto com frequências naturais selecionadas de uma distribuição uniforme com parâmetro  $\gamma = 0,5$ . O acoplamento crítico dos osciladores com distribuição uniforme foi obtido diretamente dos dados de simulação devido ao comportamento abrupto da flutuação na transição de fase. A Fig.(5.10) mostra a flutuação para o caso sem ruído que fornece o acoplamento crítico  $K_c = 0,637 \pm 0,001$

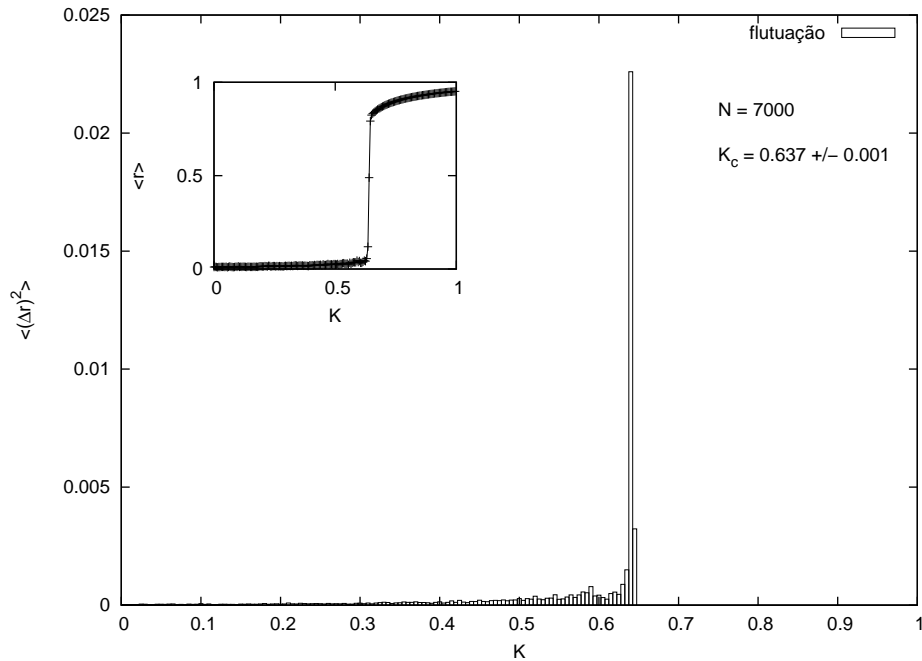


FIGURA 5.10: Variância do parâmetro de ordem de um grupo de osciladores com frequências naturais uniformemente distribuídas em torno do zero. Gráfico interno: parâmetro de ordem médio do conjunto de osciladores.

sendo que o valor teórico obtido da Eq.(3.30) é  $K_c \approx 0,637$ . A Fig.(5.12) mostra as flutuações do parâmetro de ordem para o modelo com ruído. A partir da Eq.(4.53) utilizando o parâmetro de ruído  $D = 0,25$ , obtem-se o valor teórico para o acoplamento crítico  $K_c \approx 0,903$ . Os cálculos numéricos a partir da flutuação forneceram  $K_c = 0,900 \pm 0,005$  que, tendo em vista a margem de erro, está de acordo com o valor teórico.

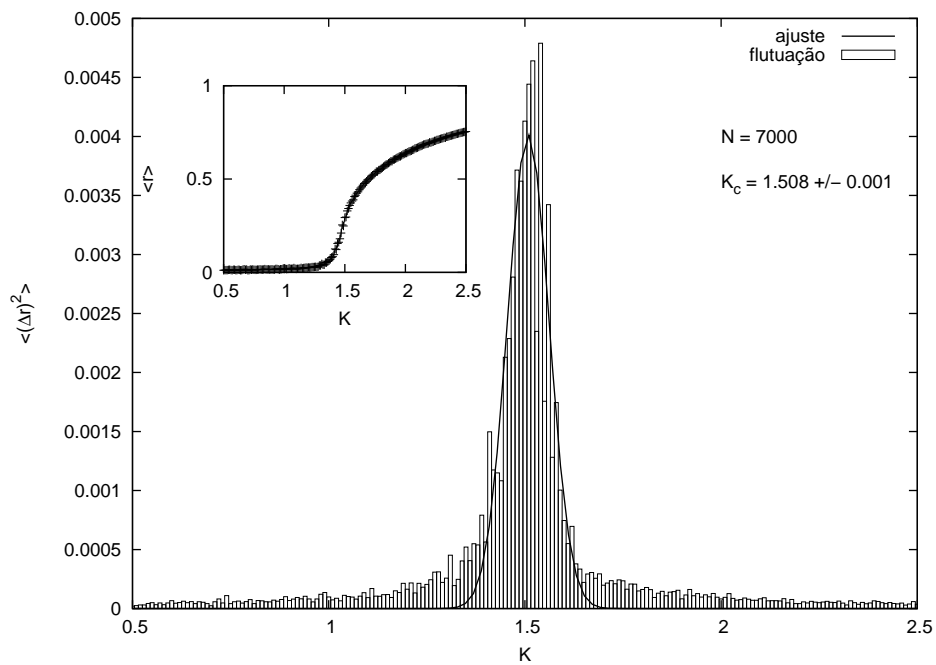


FIGURA 5.11: Variância do parâmetro de ordem para o modelo de Kuramoto com ruído e frequências naturais sorteadas de uma distribuição lorentziana. Gráfico interno: parâmetro de ordem médio do conjunto de osciladores.

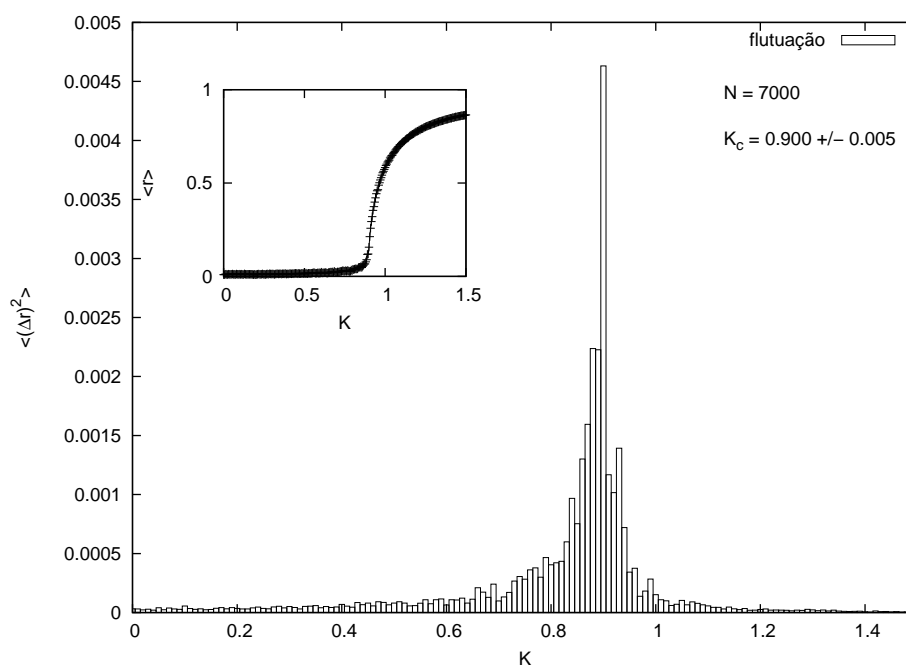


FIGURA 5.12: Variância do parâmetro de ordem para o modelo de Kuramoto com ruído e frequências naturais uniformemente distribuídas em torno do zero. Gráfico interno: parâmetro de ordem médio do conjunto de osciladores.

## Capítulo 6

### Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação foi abordado o modelo de Kuramoto de osciladores globalmente acoplados. Foram utilizados dois tipos de distribuições de probabilidades para as frequências naturais e acrescentado ruído branco ao sistema para análise das influências destes fatores na transição para o regime sincronizado.

A influência do número finito de osciladores foi notada comparando o parâmetro de ordem para diferentes conjuntos de osciladores interagentes. Para entender o comportamento do modelo com a variação de  $N$ , propriedades importantes como o acoplamento crítico e o expoente crítico do parâmetro de ordem foram escalonadas por uma equação que permitiu estimar os valores teóricos do modelo no limite termodinâmico, quando  $N \rightarrow \infty$ .

Utilizando uma distribuição uniforme em torno do zero para as frequências naturais, o acoplamento crítico do modelo foi calculado para pequenos grupos de osciladores. Notou-se uma abrupta transição para sincronização deste modelo e foi verificado também que o acoplamento crítico obtido nas simulações rapidamente alcança o valor do acoplamento teórico do modelo, mesmo com um número de osciladores pequeno,  $N = 50$ . O expoente crítico do parâmetro de ordem teórico foi estimado para o modelo com frequências naturais distribuídas segundo uma Lorentziana utilizando a mesma equação para o escalonamento do acoplamento crítico.

Foi verificado ainda que o tipo de transição é caracterizado pela forma como

---

as frequências naturais são distribuídas. Para o caso de um grupo de osciladores com frequências naturais distribuídas segundo uma Lorentziana, quando o acoplamento crítico é atingido, o parâmetro de ordem teórico cresce a partir do zero continuamente como numa transição de segunda ordem. No caso de um grupo de osciladores com frequências naturais distribuídas uniformemente, o parâmetro de ordem tem um salto descontínuo no acoplamento crítico caracterizando uma transição de primeira ordem.

Os cálculos das flutuações do parâmetro de ordem na região de transição possibilitaram a obtenção do acoplamento crítico do modelo de Kuramoto para um grande número de osciladores interagentes. Para o conjunto de osciladores com frequências naturais distribuídas de acordo com uma Lorentziana, o acoplamento crítico foi obtido ajustando os dados da simulação por meio de uma gaussiana. No caso do conjunto de osciladores com frequências naturais uniformemente distribuídas, a flutuação pode ser obtida diretamente dos dados devido ao seu comportamento abrupto na transição. Os valores de  $K_c$  obtidos dos dados de flutuação estão de acordo com os valores teóricos, demonstrando ser um método eficiente para estimar o acoplamento crítico em modelos que não são passíveis de resolução analítica.

Como perspectiva do trabalho, pode-se citar a análise numérica da transição do modelo de Kuramoto para outras distribuições de frequências naturais a fim de melhor compreender os fatores que caracterizam o tipo de transição. Pretende-se testar o método do cálculo de flutuação para obter o acoplamento crítico de modelos não solúveis analiticamente como, por exemplo, modelos de Kuramoto com retardo de interação e acoplamentos dependentes da distância e estrutura da rede de osciladores que são usados para descrever sincronização de neurônios.

## Apêndice A

### Contribuição dos osciladores à deriva para o parâmetro de ordem

A Eq. (3.11) fornece a contribuição dos osciladores a deriva para o parâmetro de ordem  $r$ :

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (\text{A.1})$$

e pode ser decomposta em

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{-Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{Kr}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (\text{A.2})$$

O primeiro termo da Eq. (A.2) pode ser escrito como

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\infty}^{Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, -\omega) g(-\omega) d\omega d\theta. \quad (\text{A.3})$$

Agora, fazendo a mudança de variável  $\theta' = \theta - \pi$  e usando o fato que  $g(-\omega) = g(\omega)$  obtém-se

$$- \int_{-2\pi}^0 \int_{\infty}^{Kr} e^{i\theta'} e^{i\pi} \rho(\theta' + \pi, -\omega) g(\omega) d\omega d\theta'. \quad (\text{A.4})$$

Invertendo o intervalo da integral de  $\omega$  e substituindo  $e^{i\pi} = -1$ , mantém-se o sinal do termo. Sabendo que  $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$  a integral simplifica-se para

$$- \int_{-2\pi}^0 \int_{Kr}^{\infty} e^{i\theta'} \rho(\theta', \omega) g(\omega) d\omega d\theta'. \quad (\text{A.5})$$

Devido às condições periódicas de contorno, pode-se deslocar o intervalo de  $\theta'$  sem qualquer mudança, o que leva, finalmente, a

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \int_{Kr}^{\infty} e^{i\theta'} \rho(\theta', \omega) g(\omega) d\omega d\theta'. \quad (\text{A.6})$$

Esse é exatamente o negativo do segundo termo na Eq. (A.2), de modo que eles se cancelam resultando

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriv.} = 0. \quad (\text{A.7})$$



## Apêndice B

### Dedução da equação cinética

Na subseção (4.1.1) foi apresentado duas formas matemáticas alternativas, mas equivalentes, de descrição do processo de Wiener: uma em termos da variável aleatória  $X(t)$  com a equação diferencial estocástica  $dX = \sqrt{\delta^2 dt} N_t(0, 1)$ , que a define, e a outra em termos da densidade de probabilidade  $\rho(x, t)$  e sua equação diferencial parcial de definição

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\delta^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (\text{B.1})$$

Todos processos estocásticos contínuos de Markov, tem uma descrição dual similar. Cada par de variáveis de processo é governado por duas equações diferenciais estocásticas da forma forma geral

$$dV = a(X, V)dt + \sqrt{b^2(X, V)dt} N_t(0, 1) \quad (\text{B.2})$$

e

$$dX = V dt, \quad (\text{B.3})$$

onde as funções  $a(X, V)$  e  $b(X, V)$  são gerais o suficiente pra englobar muitos casos.

O ponto chave para encontrar uma equação diferencial que governa a equivalente densidade de probabilidade  $\rho(x, v, t)$  é a identidade

$$\int \int f(x, v) \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dv = \left\langle \frac{df(X, V)}{dt} \right\rangle, \quad (\text{B.4})$$

onde  $f(X, V)$  é uma função suave de  $X$  e  $V$ . Agora

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \frac{(dV)^2}{2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} V dt + \frac{\partial f}{\partial V} \left[ a dt + \sqrt{b^2 dt} N_t(0, 1) \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{b^2 dt}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde foram desprezados os termos menores que  $dt$ . Substituindo este resultado em (B.4) obtém-se

$$\int \int f \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dv = \left\langle V \frac{\partial f}{\partial X} + a \frac{\partial f}{\partial V} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right\rangle \quad (\text{B.6})$$

desde que  $\left\langle \sqrt{b^2(X, V)} N_t(0, 1) \right\rangle = \left\langle \sqrt{b^2(X(t), V(t))} \right\rangle \left\langle N_t^{t+dt}(0, 1) \right\rangle = 0$ . Expressando o lado direito de (B.6) como uma integração sobre o espaço de fase,

$$\int \int f \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dv = \int \int \left[ v \frac{\partial f}{\partial v} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \rho dx dv, \quad (\text{B.7})$$

ao integrar o lado direito por partes e desprezando os termos de superfície (no infinito), obtém-se

$$\int \int f(x, v) \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dv = \int \int f(x, v) \left[ -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v} (a \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (b^2 \rho) \right] dx dv. \quad (\text{B.8})$$

Esta equação é válida para uma função arbitrária  $f(x, v)$  se e somente se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial v} (a \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (b^2 \rho), \quad (\text{B.9})$$

sendo essa a equação cinética para as funções arbitrárias que caracterizam  $a(x, v)$  e  $b^2(x, v)$  [18].

# Referências Bibliográficas

- [1] J.A. Acebrón, LL Bonilla, C.J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*, 77(1):137–185, 2005. [1](#), [3.1](#)
- [2] L.H.A. Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2002. [2.1](#)
- [3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. 2001. [2.1](#), [2.3](#)
- [4] S. Yamaguchi, H. Isejima, T. Matsuo, R. Okura, K. Yagita, M. Kobayashi, and H. Okamura. Synchronization of cellular clocks in the suprachiasmatic nucleus. *Science*, 302(5649):1408, 2003. [2.2](#)
- [5] D. Di Bernardo, M.G. Signorini, and S. Cerutti. A model of two nonlinear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *International journal of Bifurcation and Chaos*, 8:1975–1986, 1998. [2.2](#)
- [6] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153, 2008. [2.2](#)
- [7] G. Buzsaki. *Rhythms of the Brain*. Oxford University Press, USA, 2006. [2.2](#)
- [8] D.S. Bassett, A. Meyer-Lindenberg, S. Achard, T. Duke, and E. Bullmore. Adaptive reconfiguration of fractal small-world human brain functional networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(51):19518, 2006. [2.2](#)

- [9] CJ Stam et al. Nonlinear dynamical analysis of EEG and MEG: review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116(10):2266–2301, 2005. [2.2](#)
- [10] P. Tass, MG Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.J. Freund. Detection of n: m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. *Physical Review Letters*, 81(15):3291–3294, 1998. [2.2](#)
- [11] P. Dayan, L.F. Abbott, and L. Abbott. *Theoretical neuroscience: Computational and mathematical modeling of neural systems*, volume 39. MIT press Cambridge, MA:, 2001. [2.2](#)
- [12] S.H. Strogatz. *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Hyperion, 2003. [2.2](#)
- [13] S. Gil. *Complex self-organized dynamics in oscillator networks and methods of its control*. PhD thesis, Universitätsbibliothek, 2010. [2.4.1](#), [2.6](#), [2.7](#)
- [14] S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Pr, 1994. [2.4.1](#)
- [15] ATJ Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Theor. Biol*, 16:15–42, 1967. [2.4.3](#)
- [16] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Dover Pubns, 2003. [3.1](#)
- [17] S.H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1–20, 2000. [3.1](#), [3.3](#)
- [18] D.S. Lemons and P. Langevin. *An introduction to stochastic processes in physics: containing "On the theory of Brownian motion" by Paul Langevin, translated by Anthony Gythiel*. Johns Hopkins Univ Pr, 2002. [4.1.1](#), [4.1.1](#), [B](#)

- 
- [19] B.C. Daniels. Synchronization of globally coupled nonlinear oscillators: the rich behavior of the Kuramoto model. *Delaware, OH: Ohio Wesleyan Physics Department, Delaware: OH*, 2005. [4.1.2](#), [4.2](#), [4.2.2](#)
- [20] L. C. Lapas. Difusão anômala e termodinâmica de nanopartículas. *Tese (Doutorado em Física)-Universidade de Brasília, Brasília*, 2008. [4.1.2](#)
- [21] S.H. Strogatz and R.E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 63(3):613–635, 1991. [4.1.2](#), [4.2.1](#)
- [22] P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, and O. Popovych. Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators. *Physical review letters*, 96(5):54102, 2006. [5.1](#)