Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma apresentação policíclica para o quadrado q-tensorial de um grupo policíclico.

Ivonildes Ribeiro Martins
Orientador: Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco

Brasília
03/2011

À minha amada e saudosa mãe, Eva.

Agradecimentos

Eis que chegou o momento de expressar sinceros agradecimentos a muitos e tantos adorados familiares e amigos, tanto aos “velhos” e queridos quanto aos que se revelaram ao longo desse tempo.

Bem sei que corro o risco de não dar conta desse “muitíssimo obrigado” como é merecido, porque será difícil exprimir a beleza do afeto que sinto por cada um.

Para maior percepção desse sentimento, devo contar que esta não foi uma caminhada breve, mas uma travessia que parecia sem fim, principalmente, pelas intercorrências pessoais de toda ordem que me atropelaram. Esses obstáculos, longe de obscurecerem o trajeto, aumentaram-lhe o brilho. E, ao invés de me deterem, impulsionaram-me com mais força.

Se o desafio era enorme, as motivações eram grandiosas. Motivações que contribuiram grandemente para que eu não desitisse antes de chegar ao final da jornada. Dessa forma, dedico algumas palavras àqueles que dela fazem parte direta ou indiretamente.

Agradeço a Deus por ter me sustentado e me abençoado todos os dias, me dando força e perseverança. Por me mostrar os caminho nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

Agradeço ao Prof. Noraí Romeu Rocco, meu orientador, pela sua dedicação, compreensão e paciência. Agradeço por seu apoio, encorajamento e excelente orientação em me mostrar o caminho a seguir. E por ser um exemplo de profissional e, acima de tudo, um exemplo de pessoa.

Agradeço aos meus pais, Eva e Braz, pela minha vida, pelo exemplo de dedicação e perseverança, pela compreensão, carinho e amor. Agradeço pois sempre me incentivaram a prosseguir na jornada, fazendo muito por mim não medindo sacrifícios, sempre repetindo palavras essenciais como, por exemplo, amor, fé, compreensão, alegria, dando-me a confiança necessária para realizar os meus sonhos.

Agradeço ao meu amado Welio, por estar sempre ao meu lado, me incentivando e apoiando. Agradeço pela confiança, amizade, companheirismo, motivação, paciência e dedicação e, sobretudo, por seu amor.

Agradeço a minha filha Maria Eduarda, que trouxe tanta luz e gosto para minha vida, um amor especial. Agradeço por ser a lição mais bonita e mais profunda que já vivi.

Agradeço aos meus irmãos, Josiel, Josineide, Josimar, Odiléia e Edilene, e a todos os meus sobrinhos, pelo amor e carinho, pelo incentivo e compreensão nos momentos difíceis e pela confiança que sempre depositaram em mim.

Agradeço a minha amiga Eunice, pela amizade, apoio e companheirismo em todos os momentos durante este curso.

Agradeço a todos os colegas do Departamento de Matemática que contribuíram de alguma forma ao longo do curso e que sempre serão lembrados com carinho. Agradeço a Janete e ao Franklin, um casal de amigos que sempre me incentivaram. Agradeço a Kelem, Anyelle, Manuela, Magno, Miguel, Evander, Anderson, Ricardo, Jhone, Rosângela, Tânia e tantos outros que lutaram comigo.

Agradeço aos professores, Irene Nakaoka, Ricardo Nunes, Sheila Campos e Marco Pellegrini, por aceitarem o convite para compor a banca, pelas correções e sugestões que contribuiram para a versão final deste trabalho.

Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática que contribuíram para minha formação. E a todos os funcionários pela cooperação.

Finalmente, agradeço ao CNPq e a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho descrevemos uma apresentação policíclica para o quadrado q-tensorial não abeliano $G \otimes^q G$ de um grupo G, onde q é um inteiro não negativo. Obtemos primeiramente uma apresentação para o grupo $\nu^q(G)$ e em seguida usamos a imersão do quadrado q-tensorial neste último grupo. A partir de uma apresentação policíclica consistente de G definimos uma extensão q-central G_q^* de G e provamos que esta definição nos dá uma apresentação policíclica de G_q^*. Usando métodos padrões para grupos policíclicos evoluimos dessa apresentação para uma apresentação policíclica consistente e provamos que o quadrado q-exterior $G \wedge^q G$, o segundo grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$, $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$, bem como o q-multiplicador $M^q(G)$ de um grupo G, são isomorfos a subgrupos de G_q^*. Isto permite calcular apresentações para esses grupos a partir da apresentação de G_q^*. A partir da apresentação policíclica encontrada para $G \wedge^q G$ definimos um grupo $\tau^q(G)$ dado por uma apresentação policíclica e provamos que $\tau^q(G) \cong \nu^q(G)/\Delta^q(G)$, onde $\Delta^q(G)$ é um conveniente subgrupo central em $\nu^q(G)$. Fazendo uma extensão q-central deste último grupo obtemos uma apresentação policíclica para o grupo $\nu^q(G)$ e, em seguida, para o quadrado q-tensorial de G. Adicionalmente, estabelecemos um método para decidir se um grupo policíclico é capaz módulo q. Os resultados desta tese estendem métodos existentes do caso $q = 0$ para todo inteiro não negativo q.

Palavras chaves: apresentações policíclicas, quadrado q-tensorial de grupos, extensões q-centrais de grupos, quadrado q-exterior de um grupo, q-multiplicador.

Abstract

In this work we compute a polycyclic presentation for the non-abelian q-tensor square $G \otimes^q G$ of a group G, where q is a non-negative integer. Firstly we obtain a presentation of the group $\nu^q(G)$ and then we use the embedding of the q-square tensor in this last group. From the consistent polycyclic presentation of G we define a q-central extension G_q^* of G and prove that this definition gives us a polycyclic presentation of G_q^*. Using standard methods for polycyclic groups, such a presentation evolves to a consistent polycyclic presentation and thus we prove that the q-exterior square $G \wedge^q G$, the second homology group with coefficients in $\mathbb{Z}_q$, $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$, and the q-multiplier $M^q(G)$, of a group G, are all isomorphic to certain subgroups of G_q^*. This provides us with presentations for these groups from the presentation of G_q^*. From the polycyclic presentation found for $G \wedge^q G$ we define a new group $\tau^q(G)$ given by a polycyclic presentation and prove that $\tau^q(G) \cong \nu^q(G)/\Delta^q(G)$, where $\Delta^q(G)$ is an appropriate central subgroup of $\nu^q(G)$. Finally, by mean of a convenient q-central extension of $\tau^q(G)$ we obtain a polycyclic presentation of $\nu^q(G)$, from which we get a presentation for the q-tensor square of G. Aditionally, we establish a method to decide whether a polycyclic group is capable modulo q. The results in this thesis extend existing methods from the case $q = 0$ to all non-negative integers q.

Keywords: polycyclic presentations, tensor q-square of groups, q-central extensions of groups, q-exterior square of group, q-multiplier.

Sumário

Introdução

O produto tensorial não abeliano dos grupos G e H, denotado por $G \otimes H$, introduzido por Brown e Loday em [5, 7], surgiu em aplicações na teoria de homotopia de uma generalização do Teorema de Van Kampen. Admitindo que cada grupo age sobre si mesmo por conjugação (${g_1}^g = g^{-1}g_1g$) e que cada um age sobre o outro, tal que a seguinte *condição de compatibilidade* seja satisfeita:

$$ {g_1}^{(h^g)} = \left(\left({g_1}^{g^{-1}} \right)^h \right)^g, \; {h_1}^{(g^h)} = \left(\left({h_1}^{h^{-1}} \right)^g \right)^h, $$

definimos $G \otimes H$ como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e definido pelas relações

$$ gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h); \tag{1} $$

$$ g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \tag{2} $$

para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Como a ação por conjugação de um grupo sobre si mesmo é sempre compatível, o quadrado tensorial $G \otimes G$ de um grupo G sempre é definido. Além disso, a aplicação comutador $G \times G \to G$ induz um homomorfismo de grupos $\kappa : G \otimes G \to G$, que leva $g \otimes h$ no comutador $[g, h] = g^{-1}g^h$; escrevendo $J_2(G) = Ker(\kappa)$, seu interesse topológico é a fórmula dada em [5, 7],

$$ \pi_3 SK(G, 1) = J_2(G), $$

onde $\pi_3 SK(G, 1)$ é o terceiro grupo homotópico de suspensão de um espaço de Eilenberg MacLane $SK(G, 1)$.

Assim, calcular uma apresentação para o quadrado tensorial foi um problema de muito interesse.

Para um grupo finito G, a definição nos dá uma apresentação finita do quadrado tensorial e, aplicando transformada de Tietze nessa apresentação, podemos obter uma apresentação simplificada de $G \otimes G$ e examiná-la para determinar o tipo de isomorfismo do quadrado tensorial. Em [4] Brown, Jonhson e Robertson calcularam o quadrado tensorial para todo os grupos não abelianos de ordem no máximo 30 usando esse método com o auxílio do GAP [41]. Porém, esse método não é eficiente devido a definição do quadrado tensorial ter $\mid G \mid^2$ geradores e $2 \mid G \mid^3$ relações, ficando assim limitado a grupos de ordem relativamente pequena.

Em [35], Rocco definiu o grupo $\nu(G)$ como sendo o grupo gerado por G, G^{φ}, onde G^{φ} é um grupo isomorfo a G pelo isomorfismo $\varphi : g \to g^{\varphi}$, dado pela seguinte apresentação:

$$\nu(G) = \left\langle G, G^{\varphi} | \, [g, h^{\varphi}]^k = \left[g^h, (h^k)^{\varphi}\right] = [g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \right\rangle.$$

Independentemente, houve investigações de $\nu(G)$ por Ellis e Leonard [16].

A motivação do estudo de $\nu(G)$ é, entre outras, que seu subgrupo $[G, G^{\varphi}] \lhd \nu(G)$ é isomorfo ao quadrado tensorial $G \otimes G$. Desse modo, calcular o quadrado tensorial de grupos envolve trabalhar com o comutador $[G, G^{\varphi}]$ calculando uma apresentação para o grupo $\nu(G)$.

Rocco [36] mostrou que para um grupo solúvel finito G, dado por sua apresentação policíclica, o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ é dado pela apresentação somente nos seus geradores policíclicos. Em [2], Morse e Blyth estenderam esse resultado para um grupo policíclico qualquer. Em [12], Eick e Nickel deram uma apresentação policíclica consistente para o quadrado tensorial de um grupo policíclico G a partir da apresentação consistente do grupo $\nu(G)$.

O produto q-tensorial de dois grupos H e G para o caso em que G e H são subgrupos normais de um grupo E, onde $q \geq 1$, foi definido por Ellis em [17], como sendo o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e $\widehat{k}$ definido pelas seguintes relações:

$$(g \otimes hh_1) = (g \otimes h)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{3}$$

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{4}$$

$$(g \otimes h)^{\widehat{k}} = (g^{k^q} \otimes h^{k^q}) \tag{5}$$

$$\widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left(k \otimes (k_1^{-i})\right)^{k^{q-1-i}} \widehat{k_1} \tag{6}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k_1}\right] = k^q \otimes {k_1}^q \tag{7}$$

$$\widehat{[g,h]} = (g \otimes h)^q \tag{8}$$

para todo $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$ e $k, k_1 \in G \cap H$. Se fizermos $G = H$ obtemos a definição do quadrado q-tensorial do grupo G. Temos por [6] a existência do homomorfismo de grupos $\mu : G \otimes^q G \to G$ dado por $(g \otimes h)^\mu = [g, h]$ e $\widehat{k}^\mu = k^q$. Definimos o produto q-exterior de um grupo G como o grupo

$$G \wedge^q G = \frac{G \otimes^q G}{\nabla^q(G)}$$

onde $\nabla^q(G) = \langle g \otimes g \rangle$ é o subgrupo diagonal de $G \otimes^q G$. Como $\nabla^q(G) \leq Ker\,(\mu)$ obtemos um homorfismo induzido $\eta : G \wedge^q G \to G$. Foi provado em [6] que o segundo grupo de homologia de um grupo G com coeficientes no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$ é dado por $H_2(G, \mathbb{Z}_q) = ker\,(\eta)$.

Generalizando o grupo $\nu(G)$ foi definido o grupo $\nu^q(G)$ em [9] como sendo o grupo gerado por G, G^φ e pelo conjunto de símbolos $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g} | g \in G\}$, sujeito às seguintes relações:

$$[g, h^\varphi]^k = \left[g^k, (h^k)^\varphi\right] \tag{9}$$

$$[g, h^\varphi]^{k^\varphi} = \left[g^k, (h^k)^\varphi\right] \tag{10}$$

$$(\widehat{k})^g = \widehat{k^g} \tag{11}$$

$$(\widehat{k})^{g^\varphi} = \widehat{k^g} \tag{12}$$

$$[g, h^\varphi]^{\widehat{k}} = \left[g^{k^q}, (h^{k^q})^\varphi\right] \tag{13}$$

$$\widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left[k, (k_1^{-i})^{\varphi}\right]^{k^{q-1-i}} \widehat{k}_1 \tag{14}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k}_1\right] = [k^q, ({k_1}^q)^{\varphi}] \tag{15}$$

$$\widehat{[g,h]} = [g, h^{\varphi}]^q \,. \tag{16}$$

para todo $g, g_1, h, h_1, k, k_1 \in G$.

De acordo com [9], o subgrupo $\Upsilon^q(G) = [G, G^{\varphi}]\,\mathfrak{G}$ de $\nu^q(G)$, onde $\mathfrak{G}$ é o subgrupo de $\nu^q(G)$ gerado por $\widehat{\mathcal{G}}$, é isomorfo ao quadrado q-tensorial de G. Assim sendo, calcular uma apresentação para $G \otimes^q G$ se reduz ao problema de calcular uma apresentação de $\nu^q(G)$. Resultados obtidos em [9] mostram que o grupo $\nu^q(G)$ é policíclico quando G é policíclico. Recentemente, Rocco e Bueno (veja [9]) provaram que as relações definidoras de $\nu^q(G)$, para grupos policíclicos, podem ser definidas apenas nos geradores policíclicos, exceto a relação (14). Entretanto, ainda era um problema encontrar uma apresentação do grupo $\nu^q(G)$ que simplificasse cálculos de subgrupos ou até mesmo de identificar o grupo $\nu^q(G)$ e, consequentemente, o quadrado q-tensorial, principalmente no caso em que o grupo G é infinto, sendo que a definição nos dá uma apresentação infinita de $\nu^q(G)$. Esta foi a motivação para o nosso trabalho, ou seja, encontrar uma apresentação policíclica para o grupo $\nu^q(G)$ de um grupo policíclico G.

Além disso, existem outros conceitos que estão relacionados ao quadrado q-tensorial como, por exemplo, o de extensão q-central universal. Dizemos que uma extensão E de G por A

$$1 \to A \to E \to G \to 1$$

é uma *extensão q-central* se: (i) $A \leq Z(E)$, isto é, central em E e (ii) $a^q = 1$ para todo $a \in A$. Uma tal extensão q-central é dita universal se para qualquer outra extensão q-central

$$1 \to A' \to E' \to G \to 1$$

existe um único morfismo de extensões

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

A existência e estrutura da extensão q-universal foi estudada em [6], sendo provado que uma extensão q-central universal é única se, e somente se, G é q-perfeito, isto é, gerado por comutadores e potências q-ésimas, e E é isomorfo ao quadrado q-exterior.

Passamos então a nos preocupar em determinar uma apresentação policíclica consistente para o grupo $G \otimes^q G$. Para isso, procedemos conforme [12] e calculamos uma apresentação policíclica consistente para o grupo $\nu^q(G)$ fazendo a seguinte construção:

A partir da apresentação consistente de $G = F/R$, onde F é o grupo livre nos geradores $g_1, ..., g_n$ sujeito aos relatores $r_1, ..., r_l$, que são obtidos das relações policíclicas consistentes do grupo G, definimos o grupo G_q^* como uma extensão q-central de G da seguinte maneira:

Definição 1. *Definimos o grupo G_q^* como o grupo gerado por $g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l$ sujeito às seguintes relações:*

(1) $r_i(g_1, ..., g_n)t_i^{-1}$ *para* $1 \leq i \leq l$,

(2) $[t_i, g_j]$ *para* $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq l$,

(3) $[t_i, t_j]$ *para* $1 \leq j < i \leq l$,

(4) t_i^q *para* $1 \leq i \leq l$.

Conforme provado no Lema 4.2, $G_q^* \cong F/R^q[R, F]$ e a apresentação da definição de G_q^* é policíclica (possivelmente inconsistente). Podemos, a partir da apresentação policíclica dada de G_q^*, obter uma apresentação consistente de G_q^* adaptando o método dado em [40].

O q-multiplicador de um grupo G foi definido por $M^q(G) := R/R^q[R, F]$. Além disso, resultados obtidos em [27] mostram que $H_2(G, \mathbb{Z}_q) \cong F'F^q \cap R/R^q[R, F]$ e $G \wedge^q G \cong F'F^q/R^q[R, F]$. Assim, de acordo com esses resultados segue diretamente do Lema 4.2 o seguinte corolário:

Corolário 1. *i)* $M^q(G) \cong T_q$;

ii) $H_2(G, \mathbb{Z}_q) \cong T_q \cap (G_q^*)'(G_q^*)^q$;

iii) $G \wedge^q G \cong (G_q^*)'(G_q^*)^q$;

onde T_q *é o subgrupo* q*-central de* G_q^* *gerado por* $\{t_1, ..., t_l\}$.

Consequentemente, a partir da apresentação policíclica consistente de G_q^* obtemos uma apresentação policíclica para o quadrado q-exterior de G, para o q-multiplicador e para o segundo grupo de homologia de G com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$.

Também, a partir da apresentação policíclica de G_q^* determinamos uma apresentação policíclica do centro q-exterior de G, conforme definido em [17] o *q-centro* de G é o subgrupo $Z_q(G)$ do centro $Z(G)$ consistindo de todos os elementos com ordem dividindo q. Dizemos que G é *q-capaz* se existe um grupo Q com $Z(Q) = Z_q(Q)$ e um isomorfismo $G \cong Q/Z(Q)$. Notemos que q-capabilidade implica capabilidade (ie, 0-capabilidade). O subgrupo

$$Z_q{}^{\wedge}(G) = \{g \in G \,|[g, x^{\varphi}] = 1 \in \Upsilon^q(G)/\Delta^q(G), \,\forall\, x \in G\}$$

é dito o *centro q-exterior* de G. Esse subgrupo é usado para decidir quando um grupo G é q-capaz, isto é, quando $Z_q{}^{\wedge}(G) = 1$.

Seguimos definindo um grupo $\tau^q(G)$ a partir da definição policíclica de G, da apresentação do quadrado q-exterior obtido no Corolário 1 e do conceito de uma q-biderivação, conforme Definição 2.1. A motivação para a definição de uma q-biderivação foi constatar que todos os resultados provados para o produto tensorial tinham as demonstrações simplificadas ao usarmos esta propriedade universal. Ao definir $\tau^q(G)$ provamos que tal apresentação é policíclica e a partir desta apresentação calculamos uma apresentação policíclica consistente e assim definimos $\tau^q(G)^*$. Também definimos o grupo $\mathfrak{E}^q(G)$ cuja apresentação policíclica é determinada a partir da apresentação de G_q^*, confira Lema 4.5, e provamos que $\nu^q(G) = \mathfrak{E}^q\left(\tau^q(G)\right)$. Obtemos assim uma apresentação policíclica para $\nu^q(G)$ e a partir desta apresentação determinamos uma apresentação policíclica para o quadrado q-tensorial de G.

Portanto, descrevemos um algoritmo para determinar uma apresentação policíclica para o q-multiplicador, o segundo grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$, o quadrado q-exterior e o quadrado q-tensorial de um grupo dado por sua apresentação policíclica. Adicionalmente, introduzimos um método para checar quando um grupo policíclico é q-capaz.

Seguindo essas definições, dividimos este trabalho do seguinte modo:

No Capítulo 1 introduzimos todos os conceitos e notações necessárias ao desenvolvimento subsequente do nosso trabalho.

No Capítulo 2 introduzimos o grupo $\eta^q(G,H)$, conforme definido em [9]. Apresentamos resultado provados por Rocco e Bueno e desenvolvemos alguns resultados relacionados a este grupo. Além disso, estendemos alguns resultados apresentados em [9]. Também definimos uma q-biderivação e provamos que tal aplicação é uma propriedade universal para o produto q-tensorial de dois grupos quaisquer. E definimos q-capabilidade via $\nu^q(G)$, um caso especial de $\eta^q(G,H)$ onde $G = H$.

No Capítulo 3 descrevemos resultados sobre apresentações do quadrado tensorial e do quadrado q-tensorial de grupos, motivação do nosso trabalho.

No Capítulo 4 desenvolvemos todas as construções relacionadas a determinação do algoritmo para a obtenção da apresentação policíclica do quadrado q-tensorial de grupos policíclicos. Além disso, para grupos q-perfeitos damos uma apresentação direta para o grupo $\nu^q(G)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos e principais propriedades da teoria de grupos que são necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Omitimos as demonstrações dos resultados apresentados aqui, indicando as referências onde elas podem ser encontradas.

1.1 Subgrupos comutadores

Sejam g_1, g_2, ..., g_n elementos de um grupo G. O *comutador* de g_1 e g_2 é o elemento $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$. O conjugado $g_1^{g_2} = g_2^{-1}g_1g_2$ de g_1 por g_2 é $g_1[g_1, g_2]$, e assim temos que $g_1g_2 = g_2g_1[g_1, g_2]$. Logo, g_1 e g_2 comutam se, e somente se, seu comutador é trivial. O comutador de peso $n \geq 2$, é definido recursivamente como $[g_1, g_2, ..., g_n] = [[g_1, ..., g_{n-1}], g_n]$. Suponha que H e K são subgrupos do grupo G. O *subgrupo comutador* de H e K é o subgrupo de G

$$[H, K] = \langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle .$$

Como $[h, k] = [k, h]^{-1}$, segue diretamente que $[H, K] = [K, H]$. Se H_1, H_2, ..., H_n são subgrupos do grupo G, então definimos $[H_1, H_2, ..., H_n] = [[H_1, ..., H_{n-1}], H_n]$. O subgrupo comutador de G é $[G, G]$, que é também chamado de *subgrupo derivado* de G e denotado por G'. O subgrupo derivado de G é trivial se, e somente se, G é abeliano.

Descreveremos agora algumas das principais propriedades de comutadores cujas demonstrações podem ser encontradas em [38].

Proposição 1.1. *O subgrupo derivado G' é normal em G e o quociente G/G' é abeliano. Se N é normal em G então G/N é abeliano se, e somente se, $G' \subseteq N$.*

Portanto G/G' é o maior quociente abeliano de G.

Proposição 1.2. *Suponha que H_1, K_1, H_2 e K_2 são subgrupos de G tais que $H_1 \subseteq H_2$ e $K_1 \subseteq K_2$. Então $[H_1, K_1] \subseteq [H_2, K_2]$.*

Proposição 1.3. *Se $f : G \to Q$ é um homomorfismo de grupos, então para todos subgrupos H e K de G temos que $[(H)f, (K)f] = ([H, K])\, f$.*

Corolário 1.4. *Suponha que N é um subgrupo normal de G e $\bar{\ }$ o homomorfismo natural de G a G/N. Então $\left[\overline{H}, \overline{K}\right] = \overline{[H, K]}$.*

Proposição 1.5. *Se H e K são subgrupos normais de G então $[H, K]$ é normal em G e $[H, K] \subseteq H \cap K$.*

Proposição 1.6. *Sejam G um grupo e g_1, g_2, $g_3 \in G$. Valem às seguintes propriedades:*

1. $[g_1, g_2] = [g_1, g_2^{-1}]^{-g_2} = [g_1^{-1}, g_2]^{-g_1}$;

2. $[g_1 g_2, g_3] = [g_1, g_3]^{g_2}[g_2, g_3] = [g_1, g_3][g_1, g_3, g_2][g_2, g_3]$;

3. $[g_1, g_2 g_3] = [g_1, g_3][g_1, g_2]^{g_3} = [g_1, g_3][g_1, g_2][g_1, g_2, g_3]$;

4. $[g_1, g_2^{-1}, g_3]^{g_2}[g_2, g_3^{-1}, g_1]^{g_3}[g_3, g_1^{-1}, g_2]^{g_1} = 1$;

Definimos a *série derivada* de G que é obtida tomando sucessivos subgrupos derivados. Ou seja, $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$, $G^{(2)} = (G')'$, e em geral

$$G^{(i+1)} = \left[G^{(i)}, G^{(i)}\right].$$

A *série central inferior* de G é definida tomando sucessivos subgrupos comutadores com G. Assim, $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = G' = G^{(1)}$, e, em geral,

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

Pela Proposição 1.5, todos os termos da série derivada e série central inferior são normais em G. Além disso, $G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^2 \supseteq ...$ e $\gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \gamma_3(G) \supseteq ....$

Seja G um grupo. Dizemos que G é *solúvel* se $G^{(i)} = 1$ para algum $i \geq 0$, onde $G^{(i)}$ são os termos da série derivada. Se G é solúvel, então o menor valor de i para o qual $G^{(i)} = 1$ é chamado o *comprimento derivado* de G. Grupos de ordem 1 têm comprimento derivado 0. Grupos abelianos não triviais têm comprimento derivado 1.

O comprimento derivado de G é 2 se, e somente se, G' é abeliano e não trivial. Um grupo com comprimento derivado no máximo 2 é dito *metabeliano*.

Um grupo G é denominado *nilpotente* se algum termo da série central inferior é trivial. Nesse caso, o menor inteiro c tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$ é chamado *classe de nilpotência* ou simplesmente *classe* de G. Grupos triviais têm classe de nilpotência 0 e grupos abelianos não triviais têm classe 1.

As seguintes propriedades para grupos nilpotentes e solúveis não serão demonstradas, mas suas demonstrações podem ser encontradas em [38].

Proposição 1.7. *Subgrupos e quocientes de grupos solúveis são solúveis. Subgrupos e quocientes de grupos nilpotentes são nilpotentes.*

Proposição 1.8. *Se N é um subgrupo normal de G com N e G/N solúveis, então G é solúvel.*

Neste ponto, grupos nipotentes diferem de grupos solúveis. A proposição anterior é falsa para grupos nilpotentes. Por exemplo, sejam S_3 o grupo simétrico de ordem 6 e A_3 o subgrupo alternado de S_3. Como A_3 é gerado pelo 3-ciclo $(1,2,3)$ segue que A_3 e S_3/A_3 são abelianos e portanto nilpotentes. Agora $[(1,2,3),(1,2)] = (1,2,3)$, ou seja, $A_3 = S_3' = [A_3, S_3]$. Segue facilmente que $A_3 = \gamma_i(G)$ para todo $i \geq 2$. Portanto, S_3 não é nilpotente mas S_3 é solúvel, logo obtemos um exemplo de um grupo solúvel que não é nilpotente. Porém, todo grupo nilpotente.

O subgrupo $Z(G) = \{z \in G | [z,g] = 1 \forall g \in G\}$ de G é dito *o centro* do grupo G e o denotaremos por $Z(G)$.

Os *quocientes* da série derivada de um grupo G são os grupos $G^{(i)}/G^{(i+1)}$. Esses grupos são abelianos. Os quocientes da série central inferior de G são os grupos $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, que também são abelianos. Na verdade, $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ é um subgrupo do centro de $G/\gamma_{i+1}(G)$.

1.2 Grupos livres e apresentações de grupos

Nesta seção apresentamos os conceitos de grupos livres e apresentações de grupos bem como algumas de suas propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [24] e [26].

Definição 1.9. *Um grupo F é dito livre sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que*

$$(x)\theta' = (x)\theta \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. A cardinalidade de X é chamada de posto de F.

Existem outras formas de expressar a propriedade (1.1). Por exemplo, podemos dizer que θ' estende θ ou, denotando por $i : X \to F$ a inclusão de X em F, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $i\theta' = \theta$. Observemos que a composição de funções é feita da esquerda para a direita.

Sejam G um grupo e X um subconjunto não vazio de G, denotamos por $\langle X \rangle$ o subconjunto de G gerado por X. Se $X = \{a_1, ..., a_n\}$ gera G, então escrevemos simplesmente $G = \langle a_1, .., a_n \rangle$.

Proposição 1.10. *1. Se F é livre sobre X então X gera F;*

2. Grupos livres de mesmo posto são isomorfos;

3. Grupos livres de postos diferentes não são isomorfos;

4. Existe um grupo livre de qualquer posto.

Denotaremos por $F(X)$ o grupo livre sobre X.

Teorema 1.11. *Um grupo F é livre sobre X se, e somente se,*

(i) X gera F e

(*ii*) *não existe relação não trivial entre os elementos de* X*, ou seja, se* $n \in \mathbb{N}$*,* $x = x_1 ... x_n$ *onde para todo* i*,* $x_i \in X$ *ou* $x_i^{-1} \in X$*, e* $x_i x_{i+1} \neq 1$ *para todo* i *com* $1 \leq i \leq n-1$*, então* $x \neq 1$*.*

Teorema 1.12 (Nielsen-Schreier)**.** *Todo subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se* F *é um grupo livre de posto finito* r *e* H *é um subgrupo de* F *tal que o índice é finito,* $[F : H] = n$*, então o posto de* H *é igual a* $(r-1)n+1$*.*

Observação 1.13. *Se escrevermos "grupo abeliano" no lugar da palavra "grupo" na Definição 1.9 obtemos a definição de grupo abeliano livre.*

Teorema 1.14. *Um grupo abeliano livre de posto* r *é a soma direta de* r *grupos cíclicos infinitos.*

Sejam X um conjunto, $F = F(X)$ o grupo livre gerado por X, R um conjunto de F, N o fecho normal de R em F que denotamos por $\langle R \rangle^F$ e G o grupo quociente F/N.

Definição 1.15. *Com esta notação escreveremos* $G = \langle X | R \rangle$*, e dizemos que esta é uma apresentação de* G*. Os elementos de* X *são chamados geradores, e os elementos de* R *de relatores. Um grupo* G *é dito finitamente apresentado se este tem uma tal apresentação com* X *e* R *finitos.*

Observação 1.16. *Para cada* $r \in R$ *a equação* $r = 1$ *é chamada de relação definidora de* G*.*

Teorema 1.17. *Todo grupo tem uma apresentação, e todo grupo finito tem uma apresentação finita.*

Teorema 1.18 (Teste da substituição)**.** *Suponha que são dados uma apresentação* $G = \langle X | R \rangle$*, um grupo* H *e uma função* $\theta : X \to H$*. Então* θ *se estende a um homomorfismo* $\theta' : G \to H$ *se, e somente se, para todo* $x \in X$ *e* $r \in R$*, o resultado da substituição de* x *por* $(x)\theta$ *em* r *dá a identidade de* H*.*

Observe que, quando tal homomorfismo existir ele deve ser único. Além disso, ele é um epimorfismo se, e somente se, $\{(x)\theta | x \in X\}$ gera H.

Teorema 1.19. *Sejam $G = \langle X|R \rangle$ e $H = \langle Y|S \rangle$ duas apresentações, então o produto direto $G \times H$ tem a apresentação:*

$$\langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle$$

Definição 1.20. *Se $G = \langle X|R \rangle$ e $H = \langle Y|S \rangle$ então o grupo $\langle X, Y|R, S \rangle$ é chamado de produto livre de G e H, e é denotado por $G * H$.*

Proposição 1.21. *Seja $G*H$ o produto livre dos grupos G e H. O subgrupo comutador $[G, H]$ de $G * H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $\{[g, h] | g \in G, h \in H, g, h \neq 1\}$.*

Proposição 1.22. *Sejam G, H e K grupos e $\alpha : G \to H$, $\beta : G \to K$ homomorfismos com α sobrejetor tais que $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$, então, existe um homomorfismo $\gamma : H \to K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$. Além disso, γ é sobrejetor se β o for.*

$$\begin{tikzcd}
Ker(\beta) \arrow[dr] & & H \arrow[dd, dotted, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
Ker(\alpha) \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & K
\end{tikzcd}$$

Definição 1.23 (Transformações de Tietze, [26])**.** *Consideremos o grupo G dado pela apresentação $G = \langle a, b, c, ... | P, Q, R, ... \rangle$. As seguintes operações com os geradores e relatores de G são chamadas de Transformações de Tietze:*

1. *Se as palavras S, T,... são deriváveis de P, Q, R, ... então adicionamos S, T,... nas relações definidoras de G;*

2. *Se alguns dos relatores, digamos S, T, ... listados nas relações definidoras P, Q, R,... são deriváveis de outras, então delete S, T, ... das relações definidoras;*

3. *Se K, M,... são quaisquer palavras em a, b, c,... então adicione os símbolos x, y,... aos geradores de G e ajunte as relações $x = K$, $y = M$,... às relações definidoras;*

4. *Se alguma das relações definidoras de G é da forma $p = V$, $q = W$,..., onde p, q,... são geradores e V, W,... são palavras nos geradores diferentes de p, q,... então delete, p, q,... dos geradores e os troque por V, W,... nas relações definidoras e delete $p = V$, $q = W$,... das relações definidoras.*

H. Tietze mostrou que dada uma apresentação $G = \langle a, b, c, ...|P, Q, R, ...\rangle$ para um grupo G, qualquer outra apresentação de G pode ser obtida por repetidas aplicações dos itens acima.

Além disso usaremos o seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [34].

Teorema 1.24 (B. H. Neumann)**.** *Se X é um conjunto qualquer de geradores de um grupo finitamente apresentado G. Então, G tem uma apresentação finita $G =< X_0|r_1, ..., r_l >$, onde $X_0 \subseteq X$.*

1.3 Grupos policíclicos

O estudo sistemático de grupos policíclicos foi iniciado por Hirsh em duas publicações [19, 20] e continuada em três outros artigos [21, 22, 23]. Recentemente grupos policíclicos têm atraído atenção por que eles formam uma classe de grupos para os quais muitos problemas podem ser resolvidos algoritmicamente [39]. Esta classe de grupos inclui a classe de grupos solúveis finitos e a classe de grupos nilpotentes finitamente gerados. Nesta seção, sumarizamos a teoria básica para grupos policíclicos. Resultados sobre grupos policíclicos podem ser encontrados nos trabalhos citados acima assim como em [13] e [40].

1.3.1 Propriedades básicas

Um grupo G é chamado *policíclico* se ele possui uma cadeia finita

$$G = G_1 \geq G_2 \geq ... \geq G_n \geq G_{n+1} = 1$$

de subgrupos tal que cada G_{i+1} é normal em G_i (série subnormal), e G_i/G_{i+1} é cíclico para todo $1 \leq i \leq n$. Tal cadeia de subgrupos é chamada uma *série policíclica* de G de comprimento n.

A seguinte proposição sumariza algumas propriedades de grupos policíclicos que podem ser encontradas em [39] e [40].

Proposição 1.25. (*i*) *Subgrupos e quocientes de grupos policíclicos são policíclicos.*

(*ii*) *Grupos policíclicos são finitamente gerados.*

(*iii*) *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Se N e G/N são policíclicos então G é policíclico.*

(*iv*) *Todo grupo abeliano finitamente gerado é policíclico.*

(*v*) *Todo grupo nilpotente finitamente gerado é policíclico.*

(*vi*) *Grupos policíclicos são solúveis.*

Pelas partes (*ii*) e (*vi*) do teorema acima, apenas grupos solúveis finitamente gerados podem ser policíclicos mas existem grupos solúveis finitamente gerados que não são policíclicos conforme [39] e [40].

O seguinte teorema mostra que um grupo solúvel tal que todo subgupo é finitamente gerado é policíclico.

Teorema 1.26. *Um grupo G é policíclico se, e somente se, é solúvel e todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

Proposição 1.27. *Se G é um grupo policíclico com uma série policíclica de comprimento n, então G pode ser gerado por n elementos.*

Proposição 1.28. *Se G tem uma série policíclica de comprimento n, então todo subgrupo de G pode ser gerado por n ou menos elementos.*

Proposição 1.29. *Suponha que K e H são sugrupos de um grupo policíclico G. Se $H \subseteq K$ e $H = K^g$, para algum $g \in G$, então $H = K$.*

Seja G um grupo policíclico. Nem toda série policíclica de G tem o mesmo comprimento. Além disso, o número de quocientes infinitos em uma série policíclica é o mesmo para toda série. Esse numero é chamado *número de Hirsch* de G. É possível escolher a série policíclica de modo que todos os fatores infinitos venham após os fatores finitos. Veja Proposição 2 no Capítulo 1 de [39].

1.3.2 Sequência policíclica

Seja G um grupo policíclico com uma série policíclica $G = G_1 \supseteq ... \supseteq G_{n+1} = 1$. Como G_i/G_{i+1} é cíclico, existem elementos $x_i \in G$, tais que $G_i/G_{i+1} = \langle x_i G_{i+1} \rangle$ para todo índice i.

Definição 1.30. *A sequência dos elementos $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tais que $G_i/G_{i+1} = \langle x_i G_{i+1} \rangle$ para $1 \leq i \leq n$ é chamada uma sequência policíclica para G.*

Para grupos solúveis finitos, o termo AG-sistema foi introduzido por Jürgensen em 1970, veja [25]. Note que na definição acima a ordem é importante e cada subsequência $X_i = \{x_i, ..., x_n\}$ é uma sequência policíclica para o subgrupo G_i (esse recurso é usado frequentemente para argumentos de indução e métodos algorítmicos). Em particular, G é gerado pelos elementos da sequência X. Além disso, a série policíclica $G = G_1 \supseteq ... \supseteq G_{n+1} = 1$ é unicamente determinada por X.

Definição 1.31. *Seja X uma sequência policíclica para um grupo policíclico G. A sequência $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$ definida por $r_i = [G_i : G_{i+1}]$, o índice de G_{i+1} em G_i, $r_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é chamada sequência de ordens relativas para X. Denotamos por $I(X) = \{i \in \{1, ..., n\} \,|\, r_i$ é finito $\}$ o conjunto de índices tal que r_i é finito.*

Observe que em $R(X)$ a ordem também é importante. Além disso, a sequência $R(X)$ e o conjunto $I(X)$ dependem apenas da série policíclica $G = G_1 \supseteq ... \supseteq G_{n+1} = 1$ de X. Assim, se Y é outra sequência policíclica para G definindo a mesma série policíclica que X, então $R(X) = R(Y)$ e $I(X) = I(Y)$.

A ordem relativa exibe algumas informações básicas sobre o grupo G. Por exemplo, o grupo G é finito se, e somente se, $I(X) = \{1, ..., n\}$, ou seja, r_i é finito para todo $1 \leq i \leq n$.

Podemos provar que dado um grupo policíclico com uma sequência policíclica $X = \{x_1, ..., x_n\}$ e ordem relativa $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$ qualquer que seja $g \in G$ pode ser escrito unicamente da forma $g = x_1^{e_1} ... x_n^{e_n}$ para $0 \leq e_i \leq r_i$. Tal expressão é chamada *forma normal* de g com respeito a X.

Podemos descrever relações para G em seus geradores X. Essas relações são o passo fundamental para uma apresentação policíclica para G.

Proposição 1.32. *Seja X uma sequência policíclica para um grupo policíclico G com ordens relativas $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$. Então, para cada $i \in I(X)$, $x_i^{r_i} \in G_{i+1}$ e, para todo $0 \leq j < i \leq n$, $x_i^{x_j} \in G_{j+1}$. Em particular, esses elementos possuem as seguintes formas normais em G:*

$$x_i^{r_i} = x_{i+1}^{\alpha_{ii+1}} ....x_n^{\alpha_{in}} \text{ para } i \in I(X);$$

$$x_j^{-1} x_i x_j = x_{j+1}^{\beta_{iji+1}} ....x_n^{\beta_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n;$$

$$x_j x_i x_j^{-1} = x_{j+1}^{\gamma_{iji+1}} ....x_n^{\gamma_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n,\ j \notin I(X).$$

1.3.3 Apresentações policíclicas e consitência

Definição 1.33. *Uma apresentação $\langle x_1, ..., x_n | R \rangle$ é chamada de uma apresentação policíclica se existem uma sequência $S = \{s_1, ..., s_n\}$ com $s_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e inteiros α_{ik}, β_{ijk} e γ_{ijk} tais que R consiste das seguintes relações:*

$$x_i^{s_i} = x_{i+1}^{\alpha_{ii+1}} ....x_n^{\alpha_{in}} \text{ para } 1 \leq i \leq n,\ s_i < \infty,$$

$$x_j^{-1} x_i x_j = x_{j+1}^{\beta_{iji+1}} ....x_n^{\beta_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n,$$

$$x_j x_i x_j^{-1} = x_{j+1}^{\gamma_{iji+1}} ....x_n^{\gamma_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n.$$

Essas relações são chamadas de relações policíclicas e S é chamado de sequência de expoentes de potências da apresentação.

Todo grupo policíclico tem uma sequência policíclica X que induz um conjunto completo de relações policíclicas, veja Proposição 1.32. Neste caso, S é igual a sequência de ordens relativas para X, ou seja, $S = R(X)$. Em resumo obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.34. *Toda sequência policíclica determina uma (única) apresentação policíclica. Assim, todo grupo policíclico pode ser definido por uma apresentação policíclica.*

Reciprocamente, toda apresentação policíclica define um grupo policíclico.

Teorema 1.35. *Sejam $\langle x_1, ..., x_n | R\rangle$ uma apresentação policíclica e G um grupo definido por esta apresentação. Então, G é policíclico e $X = \{x_1, ..., x_n\}$ é uma sequência policíclica para G. Além disso, se a sequência de ordens relativas de X é dada por $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$, então, $r_i \leq s_i$ para todo $i \in I(X)$.*

As apresentações policíclicas em que os expoentes de potências S e ordens relativas $R(X)$ coincidem, desempenham um papel central na teoria algorítmica dos grupos policíclicos. De fato, cálculos com grupos policíclicos são usualmente realizados com tais apresentações.

Definição 1.36. *Uma apresentação policíclica $\langle X|S\rangle$ com expoentes de potências S é chamada de consistente (ou confluente) se $S = R(X)$.*

Teorema 1.37. *Toda sequência policíclica determina uma apresentação policíclica consistente. Assim, todo grupo policíclico pode ser definido por uma apresentação policíclica consistente.*

Coleta é um método que usamos para determinar a forma normal para um elemento em um grupo dado por uma apresentação policíclica consistente.

O sistema de coleta pode ser também aplicado em um contexto mais geral no caso de apresentações policíclicas arbitrárias. Para isso, consideraremos um grupo G definido por uma apresentação policíclica $\langle X|R\rangle$ com expoentes de potências S.

Lema 1.38. *Seja G um grupo definido por uma apresentação policíclica $\langle X|R\rangle$ com expoentes de potências S. Para todo elemento $g \in G$ existe uma palavra representando g da forma $w(g) = x_1^{e_1}...x_n^{e_n}$ com $e_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq e_i < s_i$ se $s_i \neq \infty$.*

Definição 1.39. *As palavras da forma $x_1^{e_1}...x_n^{e_n}$ consideradas no Lema 1.38 são chamadas de palavras coletadas.*

Se a apresentação considerada é consistente, então $R(X) = S$ e a palavra coletada coincide com a forma normal com respeito a X. Neste caso, existe uma única palavra coletada para cada elemento no grupo G.

Descreveremos agora um método para obter uma palavra coletada que representa um elemento qualquer de um grupo policiclicamente apresentado. Para isso, consideraremos G um grupo definido por uma apresentação policíclica $\langle x_1, ..., x_n | R\rangle$ com expoentes de potências S e as relações policíclicas em R serão denotadas por

$$x_i^{s_i} = R_{ii} \text{ onde } R_{ii} = x_{i+1}^{\alpha_{ii+1}}....x_n^{\alpha_{in}} \text{ para } 1 \leq i \leq n,\ s_i < \infty,$$

$$x_j^{-1}x_ix_j = R_{ij}^{++} \text{ onde } R_{ij}^{++} = x_{j+1}^{\beta_{iji+1}}....x_n^{\beta_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n,$$

$$x_jx_ix_j^{-1} = R_{ij}^{+-} \text{ onde } R_{ij}^{+-} = x_{j+1}^{\gamma_{iji+1}}....x_n^{\gamma_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n.$$

Para obter uma forma coletada de uma palavra w podemos utilizar o *sistema de coleta da esquerda para a direita* que consiste no seguinte método:

1. Se w é uma palavra coletada nada se tem a fazer. Caso contrário passe para 2.

2. Se $s_i < \infty$ e x_i^{-1} ocorre em w substitua x_i^{-1} por $x_i^{s_i-1}(R_{ii})^{-1}$.

3. Seja $1 \leq j_0 \leq n$ o menor índice j_0 tal que x_{j_0} ou $x_{j_0}^{-1}$ ocorre em w para $s_{j_0} = \infty$.

   3.1. Se x_{j_0} ou $x_{j_0}^{-1}$ está a esquerda de todos os demais x_i´s que ocorrem em w, com $j_0 < i$, então passe para o passo 4. Senão passe para o passo 3.2.

   3.2. Mova toda ocorrência de x_{j_0} para a esquerda de x_i, para $j_0 < i$, substituindo $x_ix_{j_0}$ por $x_{j_0}R_{ij_0}^{++}$ e se $s_{j_0} = \infty$ substitua $x_ix_{j_0}^{-1}$ por $x_{j_0}^{-1}R_{ij_0}^{+-}$.

4. Se a palavra que representa w obtida é uma palavra coletada o processo termina. Caso contrário passe para 5.

5. Se $s_{j_0} < \infty$ e tivermos $x_{j_0}^m$ na palavra que representa w.

   5.1. Se $m < s_{j_0}$ então passe para o passo 6. Senão passe para o passo 5.2.

   5.2 Se $m \geq s_{j_0}$ então, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $m = qs_{j_0} + r$ onde $0 \leq r < s_{j_0}$. Assim, substitua $x_{j_0}^m$ por $x^r(R_{j_0j_0})^q$.

6. Se a palavra que representa w obtida é uma palavra coletada o processo termina. Caso contrário passe para 7.

7. Considere j_1 o menor índice de $\{1, ..., n\}$ maior que j_0 tal que x_{j_1} ou $x_{j_1}^{-1}$ ocorre em w.

8. Agora defina $j_0 := j_1$. Volte para o passo 3.1.

Analogamente podemos descrever um *sistema de coleta da direita para a esquerda.*

1.3.4 Teorema de Consistência

Podemos checar quando uma dada apresentação policíclica é consistente ou modificar uma dada apresentação policíclica para uma apresentação policíclia consistente usando o seguinte método eficaz dado em [33].

Para isso, consideremos G um grupo dado por uma apresentação policíclica nos geradores $\{x_1, ..., x_n\}$ e relações

$$x_i^{s_i} = x_{i+1}^{\alpha_{ii+1}} ....x_n^{\alpha_{in}} \text{ para } 1 \leq i \leq n,\ 1 < s_i < \infty,$$

$$x_j^{-1}x_ix_j = x_{j+1}^{\beta_{iji+1}} ....x_n^{\beta_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n,$$

$$x_jx_ix_j^{-1} = x_{j+1}^{\gamma_{iji+1}} ....x_n^{\gamma_{ijn}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n.$$

Teorema 1.40 (Checando a Consistência). *Uma apresentação policíclica nos geradores $\{x_1, ..., x_n\}$ é consistente se, e somente se, as seguintes palavras são coletadas para a palavra vazia*

$$(x_k[[x_jx_i]])^{-1}\,[[x_kx_j]]x_i \ \textit{para } 1 \leq i < j < k \leq n,$$

$$\left([[x_j^{s_j}]]x_i\right)^{-1} x_j^{s_j-1}[[x_jx_i]] \ \textit{para } 1 \leq i < j \leq n,\ j \in I,$$

$$(x_j[[x_i^{s_i}]])^{-1}\,[[x_jx_i]]x_i^{s_i-1} \ \textit{para } 1 \leq i < j \leq n,\ i \in I,$$

$$(x_i[[x_i^{s_i}]])^{-1}\,[[x_i^{s_i}]]x_i \ \textit{para } i \in I,$$

$$x_j^{-1}[[x_jx_i^{-1}]]x_i \ \textit{para } 1 \leq i < j \leq n,\ j \notin I.$$

Onde $[[x_jx_i]]$ indica que a palavra x_jx_i deve ser coletada primeiro.

1.4 O produto tensorial usual de módulos

Consideremos R um anel com identidade 1, não necessariamente comutativo.

Definição 1.41. *Um grupo abeliano (aditivo) M é dito um R-módulo à esquerda se existe uma função $R \times M \to M$, onde $(r, m) \to rm$, tal que para todo m, $m' \in M$, r, $r' \in R$ temos:*

(i) $r(m + m') = rm + rm'$;

(ii) $(r + r')m = rm + r'm$;

(iii) $(rr')m = r(r'm)$;

(iv) $1m = m$.

Analogamente podemos definir um R-módulo à direita, considerando ação a direita de R sobre M. Se R é comutativo, todo R-módulo à direita M pode ser considerado um R-módulo à esquerda definindo $rm = mr$, $\forall m \in M, r \in R$.

Definição 1.42. *Se M é um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo, então uma função R-biaditiva é uma aplicação $f : M \times N \to G$ tal que para todo m, $m' \in M$, n, $n' \in N$ e $r \in R$ vale:*

(i) $(m + n, n')f = (m, n)f + (m, n')f$;

(ii) $(m, n + n')f = (m, n)f + (m, n')f$;

(iii) $(mr, n)f = (m, rn)f$;

Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Definimos um produto tensorial de M e N da seguinte forma:

Definição 1.43. *Um produto tensorial de M e N é um grupo abeliano T junto com uma função R-biaditiva ϕ tais que, para todo grupo abeliano G e toda função R-biaditiva $f : M \times N \to G$, existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : T \to G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Se M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Denotamos o produto tensorial abeliano de M e N por $M \otimes_R N$.

Proposição 1.44. *i) Se M e N são grupos abelianos finitamente gerados com M ou N finito então $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ é finito.*
ii) Se p e q são números primos entre si então $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$ é o grupo trivial.

1.5 Sequências exatas

Uma sequência de homomorfismos de grupos

$$...G_{i-1} \stackrel{f_{i-1}}{\to} G_i \stackrel{f_i}{\to} G_{i+1} \stackrel{f_{i+1}}{\to} ...$$

é *exata* em G_i se $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$. A sequência é dita *exata* quando for exata em cada G_i. Em particular

(a) $1 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B$ é exata se, e somente se, α é injetora.

(b) $B \stackrel{\beta}{\to} C \to 1$ é exata se, e somente se, β é sobrejetora.

(c) $1 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B \stackrel{\beta}{\to} C \to 1$ é exata se, e somente se, α é injetora, β sobrejetora e induz um isomorfismo de $B/Im(\alpha)$ sobre C.

Uma sequência exata do tipo (c) é dita uma *sequência exata curta* e uma *extensão* de A por C.

Definição 1.45. *Dada uma extensão $1 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B \stackrel{\beta}{\to} C \to 1$ de A por C dizemos que:*

(i) A extensão cinde se existe um homomorfismo $\gamma : C \to B$ tal que $\gamma\beta = Id_C$.

(ii) A extensão é central se $Im(\alpha)$ é um subgrupo central de B.

1.6 Módulos cruzados e módulos q-cruzados

Definição 1.46. *Um módulo cruzado é um homomorfismo de grupos $\mu : M \to G$ junto com uma ação de G sobre M satisfazendo às seguintes condições:*

$(MC1)$ $(m^g)\mu = g^{-1}(m)\mu\, g,\ g \in G,\ m \in M$

$(MC2)$ $(m_1)^{(m)\mu} = m^{-1}m_1 m,\ m, m_1 \in M.$

Uma extensão central $1 \to A \to E \to G \to 1$ é um exemplo de um G-módulo cruzado com ação de G sobre E dada por $m^g = \widetilde{g}m\widetilde{g}^{-1}$ onde $g \in G$ e $m \in E$ e $\widetilde{g}$ é qualquer elemento na pré-imagem de g.

Definição 1.47. *Dado um inteiro não negativo q, um G-módulo q-cruzado é um módulo cruzado $\mu : M \to G$ tal que*

$$a^q = 1\ \forall a \in Ker(\mu).$$

Um *morfismo* de G-módulos q-cruzados $(\mu : M \to G) \to (\mu' : M' \to G)$ é um homomorfismo G-invariante $\phi : M \to M'$ tal que $m^{\phi\mu'} = m^{\mu}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\phi"] & G \\ & M' \arrow[u, "\mu'"'] \end{tikzcd}$$

Definição 1.48. *Uma extensão*

$$A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$$

é dita q-central se, $A \leq Z(G)$ e $a^q = 1$ para todo $a \in A$.

Uma extensão q-central $1 \to A \to E \to G \to 1$ é um exemplo de um G-módulo q-cruzado com ação de G sobre E dada por $m^g = \widetilde{g}m\widetilde{g}^{-1}$ onde $g \in G$ e $m \in E$ e $\widetilde{g}$ é qualquer elemento na pré-imagem de g.

Definição 1.49. *Uma extensão q-central de G*

$$A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$$

é dita universal se para qualquer outra extensão q-central

$$A' \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow G$$

existe um único morfismo de extensões

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ A' \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads] & G \end{tikzcd}$$

Definição 1.50. *Um objeto P em uma categoria $\mathcal{C}$ é dito projetivo se para qualquer diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"] & B \end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}$ com f um epimorfismo, existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted] \\ A \arrow[r, two heads, "f"] & B \end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}$.

Assim, o termo *G-módulo q-cruzado projetivo* significa um objeto projetivo na categoria dos G-módulos q-cruzados.

Denotaremo o subgrupo de G gerado pelas potências q-ésimas dos elementos de G por G^q , especificamente

$$G^q =< g^q | g \in G > .$$

Definição 1.51. *Um grupo G é dito q-perfeito se $G = G'G^q$, onde G' é o subgrupo comutador de G.*

A extensão q-central universal de um grupo q-perfeito é um exemplo de um G-módulo q-cruzado projetivo. O conceito de módulo q-cruzado projetivo naturalmente generaliza a noção de extensões q-centrais universais.

1.7 O produto tensorial não abeliano de grupos

Uma ação de um grupo G sobre um grupo H é um homomorfismo $\theta : G \to Aut(H)$ de um grupo G no grupo dos automorfismos de H, $Aut(H)$. Escrevemos $(h)g\theta$ como h^g, representando assim uma ação à direita de H. Se θ é o homomorfismo trivial dizemos que G age trivialmente sobre H ou que H é G-trivial.

Sejam G e H dois grupos que agem um sobre o outro à direita,

$$\begin{array}{ccc} G \times H \to G & \qquad & H \times G \to H \\ (g,h) \to g^h & & (h,g) \to h^g \end{array}$$

e sobre si mesmo por conjugação, desta forma temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H. Dizemos que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$,

$$g^{h^{g_1}} = g^{g_1^{-1} h g_1}, h^{g^{h_1}} = h^{h_1^{-1} g h}. \tag{1.2}$$

Se G e H atuam um sobre o outro compativelmente, o produto tensorial não abeliano de G e H, como introduzido por Brown e Loday em [5] e [7], denotado por $G \otimes H$, generaliza o produto tensorial usual dos grupos abelianizados, $G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$ conforme definição abaixo.

Definição 1.52. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro e sobre si mesmo por conjugação. O produto tensorial, $G \otimes H$, de G e H é definido como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ sujeito às seguintes relações:*

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{1.3}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{1.4}$$

para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Uma vez que a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (1.2), o *quadrado tensorial* não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G sempre é definido.

Definição 1.53. *Seja L um grupo. Uma função $\phi : G \times H \to L$ é chamada uma biderivação se para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$*

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h)\phi \tag{1.5}$$

$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1})\phi \tag{1.6}$$

Claramente uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi' : G \otimes H \to L$ tal que $(g \otimes h)\phi' = (g, h)\phi$.

Proposição 1.54. (i) *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que*

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g, \qquad (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h$$

para todo $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$. Consequentemente temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p$$

onde $g \in G$, $h \in H$ e $p \in G * H$.

(ii) *Se as ações de G sobre H e de H sobre G são triviais então $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$.*

(iii) *Existe um único isomorfismo $\varsigma : G \otimes H \to H \otimes G$.*

Proposição 1.55. (a) *Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \to G$, $\lambda' : G \otimes H \to H$ tais que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$, $(g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h$;*

(b) *Os homomorfismos λ, λ' com as ações dadas na Proposição 1.54 (i) são módulos cruzados.*

Agora vamos nos restringir ao quadrado tensorial não abeliano de grupos.

Consideremos um grupo G agindo sobre si mesmo por conjugação. Claramente a função comutador $G \times G \to G$, $(g,h) \to [g,h]$ induz um homomorfismo de grupos $\kappa : G \otimes G \to G$ tal que $(g \otimes h)\kappa = [g,h]$ para todo $g, h \in G$. Seja $J_2(G) = Ker(\kappa)$. Usando as propriedades de módulo cruzado podemos provar que $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$ assim, G age trivialmente sobre $J_2(G)$.

Seja $\nabla(G)$ o subgrupo central do quadrado tensorial gerado pelos elementos $g \otimes g$ para todo $g \in G$. Definimos o *quadrado exterior* de G como o quociente

$$G \wedge G = \frac{G \otimes G}{\nabla(G)}.$$

Como $\nabla(G) \subseteq J_2(G)$ existe um homomorfismo induzido $\kappa' : G \wedge G \to G'$ tal que $(g \wedge h)\kappa' = [g,h]$, onde $g \wedge h$ é a imagem de $g \otimes h$ sobre o quadrado exterior $G \wedge G$.

Considerando $\Gamma(G)$ o *funtor quadrático de Whitehead* (cf. [43]), resultados obtidos em [4] mostram a existência do diagrama comutativo com linhas exatas e extensões centrais como colunas

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
H_3(G) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \Gamma(G^{ab}) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & J_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
H_3(G) \arrow[r] & \Gamma(G^{ab}) \arrow[r] & G \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & G \wedge G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa'"'] & 1 \\
 & & G' \arrow[r, "="'] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
\tag{I}
$$

1.8 O grupo $\nu(G)$

Buscando dar um tratamento grupo-teorético do estudo sobre o quadrado tensorial não abeliano de grupos, valendo-se das propriedades de comutadores Rocco (cf. [36]) introduziu um operador ν na classe de grupos. Definido a seguir.

Definição 1.56. *Sejam G um grupo arbitrário e G^{φ} isomorfo a G através do isomorfismo $\varphi : g \to g^{\varphi}$, para todo $g \in G$. Definimos o grupo*

$$\nu(G) = \left\langle G, G^{\varphi} | [g, h^{\varphi}]^k = [g^k, (h^k)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}}, g, h, k \in G \right\rangle \tag{1.7}$$

Consideremos o seguinte subgrupo de $\nu(G)$:

$$\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ é dada pelos seguintes resultados:

Proposição 1.57 ([36]). *(i) $\Upsilon(G) \cong G \otimes G$, através do isomorfismo $g \otimes h \to [g, h^{\varphi}]$, $\forall g, h \in G$.*

(ii) $\nu(G) \cong (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^{\varphi}$.

Proposição 1.58 ([35]). *Para todo $g, g_1, h, h_1 \in G$ temos* *(i)* $[g^{-1}, h^{\varphi}]^{g} = [g, h^{\varphi}]^{-1} = [g, (h^{-1})^{\varphi}]^{h}$;

(ii) $[g, h^{\varphi}]^{-1}[g_1, h_1^{\varphi}][g, h^{\varphi}] = [g_1, h_1^{\varphi}]^{[g,h]} = [g_1, h_1^{\varphi}]^{g^{-1}g^{h}} = [g_1, h_1^{\varphi}]^{h^{-g}h}$;

(iii) $[g^{-1}g^{h}, h_1^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{h_1}$;

(iv) $[g_1, (h^{-g}h)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-g_1}[g, h^{\varphi}]$;

(v) $[[g, h^{\varphi}], [g_1, h_1^{\varphi}]] = \left[g^{-1}g^{h}, (h_1^{-g_1}h_1)^{\varphi}\right]$.

Outras propriedades para o grupo $\nu(G)$, e em particular para $G \otimes G$, serão dadas na Seção 2.2, já que $\nu(G)$ é um caso particular de $\eta^{q}(G, H)$ para $q = 0$ e $G = H = L$.

Nakaoka em [32] introduziu o operador η que generaliza o operador ν para o caso de dois grupos G e H que agem um sobre o outro de maneira compatível. Considerando H^{φ} uma cópia isomorfica de H, onde $\varphi : h \to h^{\varphi}$, $\forall h \in H$, então

$$\eta(G,H) = \left\langle G, H^{\varphi} | [g, h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}], [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}], \forall g, g_1 \in G, h, h_1 \in H \right\rangle.$$

Observamos que se $G = H$ e a ação é a conjugação, então $\eta(G, H) = \nu(G)$.

Proposição 1.59 ([32]). *(i)* $[G, H^{\varphi}] \cong G \otimes H$;

(ii) $\eta(G, H) \cong ([G, H^{\varphi}] \rtimes G) \rtimes H$.

1.9 O q-multiplicador de um grupo

Seja $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$ o segundo grupo de homologia do grupo G com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$. A fórmula de Hopf para o segundo grupo de homologia inteiro,

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \cong \frac{R \cap F'}{[F, R]},$$

junto com a sequência exata curta dos coeficientes:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times q} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_q$$

nos dá a fórmula:

$$H_2(G, \mathbb{Z}_q) \cong \frac{R \cap F'F^{q}}{R^{q}[R, F]} \tag{1.8}$$

onde,

$$R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$$

é uma apresentação livre qualquer de G.

Definição 1.60. *Definimos o q-multiplicador de um grupo G, denotado por $M^q(G)$, como o grupo quociente*

$$M^q(G) = \frac{R}{R^q[R,F]}.$$

1.10 Produto q-tensorial

Sejam G e H subgrupos normais de um grupo E. Seguindo Ellis [17], definimos o produto q-tensorial de G e H, $G \otimes^q H$, para $q \geq 1$, como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e $\widehat{k}$ para $g \in G$, $h \in H$, $k \in G \cap H$, sujeito às seguintes relações para $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$, $k, k_1 \in G \cap H$:

$$(g \otimes hh_1) = (g \otimes h)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{1.9}$$

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{1.10}$$

$$(g \otimes h)^{\widehat{k}} = (g^{k^q} \otimes h^{k^q}) \tag{1.11}$$

$$\widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left(k \otimes (k_1^{-i})\right)^{k^{q-1-i}} \widehat{k}_1 \tag{1.12}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k}_1\right] = k^q \otimes {k_1}^q \tag{1.13}$$

$$\widehat{[g,h]} = (g \otimes h)^q \tag{1.14}$$

Para $q = 0$ definimos o produto q-tensorial $G \otimes^0 H$ como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ satisfazendo as relações (1.9) e (1.11), que se reduz ao produto tensorial não abeliano conforme Definição 1.52.

Observação 1.61. *As relações (1.9) à (1.14) podem ser vistas como abstrações das identidades de potências e comutadores.*

Definição 1.62. *O produto q-exterior de G e H, denotado por $G \wedge^q H$, é definido como o quociente de $G \otimes^q H$ pelo subgrupo normal gerado pelos elementos da forma $k \otimes k$, onde $k \in G \cap H$.*

Sejam G e H subgrupos normais de um grupo E. Denotaremos o subgrupo de E gerado pelos comutadores $[g, h]$ e pelas q-ésimas potências k^q para $g \in G$, $h \in H$ e $k \in G \cap H$ por $G\#^q H$.

Teorema 1.63 ([17])**.** *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo E, e $q \geq 0$, então:*

(i) O homomorfismo

$$\begin{aligned} \delta : G \otimes^q H &\to G \\ g \otimes h &\mapsto [g, h] \\ \widehat{k} &\mapsto k^q \end{aligned}$$

é um E-módulo q-cruzado com E-ação dada por:

$$\begin{cases} (g \otimes h)^x = g^x \otimes h^x \\ \quad (\widehat{k})^x = \widehat{k^x} \end{cases}$$

(ii) Se $[G, H] = 1$, então $G \otimes^q H \cong (G/G\#^q H) \otimes_{\mathbb{Z}} (H/G\#^q H)$

Observação 1.64. *Para $G = H = E$ obtemos uma ação de G sobre o quadrado q-tensorial $G \otimes^q G$ e em particular para o quadrado q-exterior $G \wedge^q G$ dada por*

$$\begin{cases} (g \wedge h)^x = g^x \wedge h^x \\ \quad (\widehat{k})^x = \widehat{k^x} \end{cases}$$

A seguinte proposição relaciona a apresentação do quadrado exterior de um grupo G com uma apresentação F/R de G.

Proposição 1.65. *Seja F/R uma apresentação livre para o grupo G. Então,*

$$G \wedge^q G \cong \frac{F' F^q}{[F, R] R^q}.$$

Como consequência direta dessa proposição, usando a fórmula (1.8), obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.66. *Para qualquer grupo G existe um isomorfismo*

$$H_2(G, \mathbb{Z}_q) \cong Ker(G \wedge^q G \to G).$$

Proposição 1.67. *Seja $\delta : M \to G$ um G-módulo q-cruzado projetivo e seja F/R uma apresentação livre de G com $\lambda : F \to G$ epimorfismo natural. Então existe um isomorfismo*

$$M'M^q \overset{\cong}{\to} F'F^q/F\#^q R$$

dado por $[m, m']^\delta = [f, f']F\#^q R$ e $(m^q)^\delta = f^q F\#^q R$, onde $(m)^\delta = (f)^\lambda$.

Neste trabalho restringiremos a nossa atenção ao quadrado q-tensorial que é definido considerando $G = H$ na definição do produto q-tensorial.

Capítulo 2

Os grupos $\eta^q(G, H)$ e $\nu^q(G)$

Neste capítulo faremos uma breve abordagem sobre os grupos $\eta^q(G, H)$ e $\nu^q(G)$. Apresentamos novos resultados que foram obtidos a partir do estudo das propriedades do grupo $\eta^q(G, H)$ generalizando resultados obtidos em [9].

O grupo $\eta^q(G, H)$, definido recentemente por Bueno e Rocco em [9], generaliza o grupo $\eta(G, H)$, definido por Nakaoka em [32]. A importância desse grupo é, entre outras, que ele possui um subgrupo isomorfo ao produto q-tensorial de dois grupos quaisquer. Nosso interesse principal é o caso em que $G = H$ que, neste caso, é denotado por $\nu^q(G)$ (como definido em [9]) para o qual daremos uma apresentação policíclica no Capítulo 4 deste trabalho.

Começaremos definindo uma aplicação que denominaremos q-biderivação que é, como provaremos, uma propriedade universal para o quadrado q-tensorial. Além disso, na nossa construção do Capítulo 4, a construção de uma q-biderivação irá nos auxiliar significantemente.

2.1 q-biderivação

A propriedade universal do produto tensorial não abeliano é uma ferramenta muito útil para definir homomorfismo do produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ sobre um outro grupo qualquer L, desde que esteja definida uma biderivação de $G \times H \to L$. Pensando nesta vantagem surgiu a seguinte questão: para o produto q-tensorial teríamos uma tal propriedade universal? Desse modo, uma candidata para tal propriedade universal surgiu como segue na Definição 2.1 e provamos na Proposição 2.2 que a q-biderivação é uma boa candidata.

Definiremos uma q-biderivação para o caso em que G e H são subgrupos normais de um grupo E. Porém, poderíamos definir uma q-biderivação para módulos cruzados, assim como o produto q-tensorial de módulos cruzados foi definido por Conduché e Rodríguez-Fernández em [10].

Definição 2.1. *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo E e L um grupo qualquer. Dizemos que uma aplicação $\lambda : G\times H\times(G\cap H) \to L$ é uma q-biderivação se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

$$(gg_1, h, k)\lambda = (g^{g_1}, h^{g_1}, 1)\lambda(g_1, h, k)\lambda \tag{2.1}$$

$$(g, hh_1, k)\lambda = (g, h_1, 1)\lambda(g^{h_1}, h^{h_1}, k)\lambda \tag{2.2}$$

$$((1, 1, k)\lambda)^{-1}(g, h, 1)\lambda(1, 1, k)\lambda = (g^{k^q}, h^{k^q}, 1)\lambda \tag{2.3}$$

$$(1, 1, kk_1)\lambda = (1, 1, k)\lambda \prod_{i=1}^{q-1}\left\{(k, (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}}, 1)\lambda\right\}(1, 1, k_1)\lambda \tag{2.4}$$

$$[(1, 1, k)\lambda, (1, 1, k_1)\lambda] = (k^q, k_1^q, 1)\lambda \tag{2.5}$$

$$(1, 1, [g, h])\lambda = ((g, h, 1)\lambda)^q \tag{2.6}$$

para todo $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$ e $k, k_1 \in G \cap H$.

Proposição 2.2. *Sejam G, H subgrupos normais de um grupo E e $\widetilde{\lambda} : G \times H \times (G \cap H) \to L$ uma q-biderivação, onde L é um grupo qualquer. Então, existe um único homomorfismo $\lambda : G \otimes^q H \to L$ tal que*

$$(g \otimes h)\lambda = (g, h, 1)\widetilde{\lambda}$$

$$(\widehat{k})\lambda = (1, 1, k)\widetilde{\lambda}$$

onde $g \in G$, $h \in H$ e $k \in G \cap H$.

Demonstração. Considere $K = G \cap H$ e $X = \left\{ g \otimes h,\ \widehat{k} | g \in G, h \in H, k \in K \right\}$. Defina $\theta : X \to L$ dada por $(g \otimes h)\theta = (g, h, 1)\widetilde{\lambda}$ e $(\widehat{k})\theta = (1, 1, k)\widetilde{\lambda}$.

Por construção, θ é consistente com as relações definidoras de $G \otimes^q H$. Veja, por exemplo, a Relação (1.12):

$$r = \widehat{k}^{-1}\widehat{kk_1}\widehat{k_1}^{-1}\left(\prod_{i=1}^{q-1}\left(k \otimes (k_1^{-i})\right)^{k^{q-1-i}}\right)^{-1}$$

Agora,

$$\left(\left(\widehat{k}\right)\theta\right)^{-1}\left(\widehat{kk_1}\right)\theta\left(\left(\widehat{k_1}\right)\theta\right)^{-1}\left(\prod_{i=1}^{q-1}\left\{\left(k \otimes (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}}\right)\theta\right\}\right)^{-1}$$

$$= \left((1,1,k)\widetilde{\lambda}\right)^{-1}(1,1,kk_1)\,\widetilde{\lambda}\left((1,1,k_1)\,\widetilde{\lambda}\right)^{-1}\left(\prod_{i=1}^{q-1}\left\{\left(k, (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}}, 1\right)\widetilde{\lambda}\right\}\right)^{-1}$$

por (2.4) temos

$$= \left((1,1,k)\widetilde{\lambda}\right)^{-1}\left((1,1,k)\widetilde{\lambda}\prod_{i=1}^{q-1}\left\{(k, (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}}, 1)\widetilde{\lambda}\right\}(1,1,k_1)\widetilde{\lambda}\right)\widetilde{\lambda}\left((1,1,k_1)\,\widetilde{\lambda}\right)^{-1}$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{q-1}\left\{\left(k, (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}}, 1\right)\widetilde{\lambda}\right\}\right)^{-1} = 1_L$$

Assim sendo, pelo teste da substituição, existe um único homomorfismo $\lambda : G \otimes^q H \to L$ tal que $(g \otimes h)\lambda = (g \otimes h)\theta = (g, h, 1)\widetilde{\lambda}$ e $(\widehat{k})\lambda = (\widehat{k})\theta = (1, 1, k)\widetilde{\lambda}$. □

2.2 $\eta^q(G, H)$ e $\nu^q(G)$

Em [9], Bueno e Rocco estenderam o operador η para $q \geq 0$, definindo o grupo $\eta^q(G, H)$, que também foi definido em [17] sob outra abordagem.

Assumimos que G e H são subgrupos normais de um grupo L e que todas ações são dadas por conjugação em L. Para $q \geq 1$ sejam $\mathcal{K} = G \cap H$ e $\widehat{\mathcal{K}} = \left\{\widehat{k} | k \in \mathcal{K}\right\}$ um conjunto de símbolos, um para cada elemento de $\mathcal{K}$ (para $q = 0$, colocamos $\widehat{\mathcal{K}} = \emptyset$, o conjunto vazio). Seja $F(\widehat{\mathcal{K}})$ o grupo livre sobre $\widehat{\mathcal{K}}$ e $\eta(G, H) * F(\widehat{\mathcal{K}})$ o produto livre de $\eta(G, H)$ e $F(\widehat{\mathcal{K}})$. Como G e H^φ estão imersos sobre $\eta(G, H)$, devemos identificar os elementos de G (respectivamente de H^φ) com suas respectivas imagens em $\eta(G, H) * F(\widehat{\mathcal{K}})$.

Seja J o fecho normal em $\eta(G,H) * F(\widehat{\mathcal{K}})$ dos seguintes elementos, para $\widehat{k}, \widehat{k_1}, \widehat{kk_1} \in \widehat{\mathcal{K}}$, $g \in G$ e $h \in H$:

$$g^{-1}\widehat{k}g(\widehat{k^g})^{-1}; \tag{2.7}$$

$$(h^{\varphi})^{-1}\widehat{k}h^{\varphi}(\widehat{k^h})^{-1}; \tag{2.8}$$

$$(\widehat{k})^{-1}\left[g, h^{\varphi}\right]\widehat{k}\left[g^{k^q}, (h^{k^q})^{\varphi}\right]^{-1}; \tag{2.9}$$

$$(\widehat{k})^{-1}\widehat{kk_1}(\widehat{k_1})^{-1}\left(\prod_{i=1}^{q-1}\left[k, (k_1^{-i})^{\varphi}\right]^{k^{q-1-i}}\right)^{-1}; \tag{2.10}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k_1}\right]\left[k^q, ({k_1}^q)^{\varphi}\right]^{-1}; \tag{2.11}$$

$$\widehat{[g,h]}\left[g, h^{\varphi}\right]^{-q}. \tag{2.12}$$

Definição 2.3. *O grupo $\eta^q(G,H)$ é definido como o grupo fator*

$$\eta^q(G,H) := (\eta(G,H) * F(\mathcal{K}))/J.$$

Observação 2.4. *Note que para $q = 0$ o conjunto das relações (2.7) a (2.12) é vazio; neste caso $\left(\eta(G,H) * F(\widehat{\mathcal{K}})\right)/J \cong \eta(G,H)$. Além disso, para $G = H = L$, denotamos $\eta^q(G,G)$ por $\nu^q(G)$. Note que, para $q = 0$, $\nu^q(G) = \nu(G)$.*

Portanto, o grupo $\eta^q(G,H)$ tem a seguinte apresentação: $\eta^q(G,H) = \left\langle G, H^{\varphi}, \widehat{\mathcal{K}} \mid S, R\right\rangle$, com $S = \{S_1, S_2\}$, e $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$, onde:

$$S_1 : [g, h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}] \tag{2.13}$$

$$S_2 : [g, h^{\varphi}]^{{h_1}^{\varphi}} = \left[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}\right] \tag{2.14}$$

$$R_1 : \widehat{k}^g = \widehat{k^g} \tag{2.15}$$

$$R_2 : \widehat{k}^{h^\varphi} = \widehat{k^h} \tag{2.16}$$

$$R_3 : [g, h^\varphi]^{\widehat{k}} = \left[g^{k^q}, (h^{k^q})^\varphi\right] \tag{2.17}$$

$$R_4 : \widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left[k, (k_1^{-i})^\varphi\right]^{k^{q-1-i}} \widehat{k}_1 \tag{2.18}$$

$$R_5 : \left[\widehat{k}, \widehat{k_1}\right] = [k^q, ({k_1}^q)^\varphi] \tag{2.19}$$

$$R_6 : \widehat{[g,h]} = [g, h^\varphi]^q \tag{2.20}$$

$\forall g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H$ e $k, k_1 \in \mathcal{K}$.

Agora se K denota o subgrupo normal de $\eta^q(G,H)$ gerado pela imagem de $\widehat{\mathcal{K}}$, pela Relação (2.17), K normaliza o subgrupo $T = [G, H^\varphi]$ e, então, $\Upsilon^q(G,H) = [G, H^\varphi]K$ é um subgrupo normal de $\eta^q(G,H)$.

Observação 2.5. *Para $G = H = L$ então $\mathcal{K} = G$ e neste caso denotaremos $\widehat{\mathcal{K}}$ por $\widehat{\mathcal{G}}$, ou seja, $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g} \mid g \in G\}$. Também denotaremos o subgupo gerado por $\widehat{\mathcal{G}}$ por $\mathfrak{G}$. Nesse caso, $T = [G, G^\varphi]$ e o subgrupo $\Upsilon^q(G,G) = [G, G^\varphi]\mathfrak{G}$ normal de $\nu^q(G)$ é denotado por $\Upsilon^q(G)$.*

Existe um epimorfismo $\rho : \eta^q(G,H) \to GH$, $g \mapsto g$, $h^\varphi \mapsto h$, $\widehat{k} \mapsto k^q$. Por outro lado, a inclusão de G sobre $\eta(G,H)$ induz um homomorfismo $i : G \to \eta^q(G,H)$. Temos que, $g^{i\rho} = g$ e, logo i é injetiva. Analogamente, a inclusão de H^φ sobre $\eta(G,H)$ induz um homomorfismo $j : H^\varphi \to \eta^q(G,H)$. Assim, os elementos $g \in G$ e $h^\varphi \in H^\varphi$ são identificados com suas respectivas imagens g^i e $(h^\varphi)^j$ em $\eta^q(G,H)$, para maiores detalhes veja [9].

O seguinte resultado, provado por Bueno e Rocco em [9], relaciona $\eta^q(G,H)$ ao produto q-tensorial, $G \otimes^q H$, o qual generaliza o resultado de Rocco (cf. proposição 1.57 (i)).

Teorema 2.6 ([9])**.** *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo L e q um inteiro não negativo. Então vale o isomorfismo:*

$$\Upsilon^q(G,H) \cong G \otimes^q H. \tag{2.21}$$

Denotaremos o subgrupo central de $\eta^q(G,H)$ gerado pelos elementos $[k,k^\varphi]$, com $k\in\mathcal{K}=G\cap H$, por $\Delta^q(G,H)$, ou seja

$$\Delta^q(G,H)=\langle [k,k^\varphi] | k\in\mathcal{K}\rangle\,.$$

Para $G=H=L$ denotaremos $\Delta^q(G,H)$ por $\Delta^q(G)$ e, neste caso, se $q=0$, $\Delta^q(G)$ é denotado por $\Delta(G)$.

O quociente de $\eta^q(G,H)$ por $\Delta^q(G,H)$ será denotado por $\tau^q(G,H)$ mais especificamente

$$\tau^q(G,H)=\frac{\eta^q(G,H)}{\Delta^q(G,H)}.$$

Para $G=H=L$ denotaremos $\tau^q(G,H)$ por $\tau^q(G)$.

Observe que o subgrupo de $\tau^q(G,H)$ correspondente a $\Upsilon^q(G,H)$, pelo Teorema 2.6, é isomorfo ao produto q-exterior (veja Definição 1.62),

$$G\wedge^q H\cong\frac{\Upsilon^q(G,H)}{\Delta^q(G,H)}.$$

No seguinte teorema as ações por conjugação de G e H^φ sobre $\Upsilon^q(G,H)$ são induzidas pelas relações de $\eta^q(G,H)$. Para maiores detalhes confira [9].

Teorema 2.7 ([9])**.** $\eta^q(G,H)=H^\varphi\ltimes(G\ltimes\Upsilon^q(G,H))$.

Fazendo as adaptações sugeridas em [9], obtemos o seguinte lema que é uma consequência básica das relações definidoras de $\eta^q(G,H)$:

Lema 2.8 ([9])**.** *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo L e $q\geq 0$. Então, as seguintes relações valem em $\eta^q(G,H)$, para todo $g,g_1\in G$, $h,h_1\in H$ e $k,k_1\in\mathcal{K}$.*

i) $[g,h^\varphi]^{[g_1,h_1^\varphi]}=[g,h^\varphi]^{[g_1,h_1]}$;

ii) $[g,h^\varphi,k^\varphi]=[g,h,k^\varphi]=[g,h^\varphi,k]=[[g,h]^\varphi,k]$. *Além disso, se $g\in\mathcal{K}$ então* $[[g,h]^\varphi,k]=[g^\varphi,h^\varphi,k]=[g^\varphi,h,x^\varphi]=[g^\varphi,h,x]$;

iii) *Se $k\in\mathcal{K}'$ (ou $k_1\in\mathcal{K}'$) então* $[k,k_1^\varphi][k_1,k^\varphi]=1$;

iv) $[\widehat{k},[g,h^\varphi]]=[\widehat{k},[g,h]]$;

v) $(\widehat{k})^{k_1}=\widehat{k}[k^q,k_1^\varphi]$;

vi) *Se* $[k, k_1] = 1$ *então* $[k, k_1^\varphi]$ *e* $[k_1, k^\varphi]$ *são elementos centrais de* $\eta^q(G, H)$*, de mesma ordem finita dividindo* q*. Além disso, se* k *e* k_1 *são elementos de torção com ordem* $o(k)$*,* $o(k_1)$*, respectivamente, então a ordem de* $[k, k_1^\varphi]$ *divide o* $mdc(q, o(k), o(k_1))$*.*

vii) $[k, k^\varphi]$ *é central em* $\eta^q(G, H)$*, para todo* $k \in \mathcal{K}$*;*

viii) $[k, k_1^\varphi][k_1, k^\varphi]$ *é central em* $\eta^q(G, H)$*;*

ix) $[k, k^\varphi] = 1$*, para todo* $k \in \mathcal{K}'$*;*

x) *Se* $[k, g] = 1 = [k, h]$ *então* $[g, h, k^\varphi] = [[g, h]^\varphi, k]$*.*

xi) $[\widehat{k}, [g, h^\varphi]] = [k^q, [g, h^\varphi]] = [(k^q)^\varphi, [g, h^\varphi]]$*.*

Demonstração. Vamos mostrar apenas (xi). Para as demais afirmações confira ([9], Lema 2.4).

De fato, $[\widehat{k}, [g, h^\varphi]] = [g, h^\varphi]^{-\widehat{k}}[g, h^\varphi]$

por (2.17) $\quad = [g^{k^q}, (h^{k^q})^\varphi]^{-1}[g, h^\varphi]$

por (2.13) $\quad = [g, h^\varphi]^{-k^q}[g, h^\varphi] = [k^q, [g, h^\varphi]]$

por (2.14) $\quad = [g, h^\varphi]^{-(k^q)^\varphi}[g, h^\varphi] = [(k^q)^\varphi, [g, h^\varphi]]$. □

Fazendo as adaptações sugeridas em [9] obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.9 ([9])**.** *Sejam* G *e* H *subgrupos normais do grupo* L*. Se* L *é abeliano então* $\Upsilon^q(G, H)$ *é central em* $\eta^q(G, H)$*.*

Considere $\kappa : \nu(G) \to \nu^q(G)$ o homomorfismo induzido pelas inclusões $i : G \to \eta^q(G, H)$ e $j : H^\varphi \to \eta^q(G, H)$ e denote por κ' a restrição de κ no subgrupo $\Upsilon(G) = [G, G^\varphi] \leq \nu(G)$. Bueno e Rocco provaram a existência das extensões centrais dadas na próxima proposição.

Proposição 2.10 ([9])**.** *Seja* $q \geq 1$*. Existem sequências exatas*

$$\nu(G) \xrightarrow{\kappa} \nu^q(G) \to G/G' \to 1; \tag{2.22}$$

$$\Upsilon(G) \xrightarrow{\kappa'} \Upsilon^q(G) \to G/G' \to 1; \tag{2.23}$$

De acordo com essa proposição, segue o seguinte resultado (veja [9]).

Teorema 2.11 (veja [9]). *Seja G um grupo qualquer e q um inteiro não negativo.*

i) Se G é um π-grupo finito (π um conjunto de primos) então $\nu^q(G)$ é um π-grupo finito.

ii) Se G é nilpotente de classe c então $\nu^q(G)$ é nilpotente de classe no máximo $c+1$.

iii) Se G é solúvel de comprimento derivado l então $\nu^q(G)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l+1$.

iv) Se G é policíclico então $\nu^q(G)$ é policíclico.

Seguindo o Teorema 2.11 (iv), se G é policíclico então $\nu^q(G)$ é policíclico. Logo, surge a seguinte questão: "Como obter uma apresentação policíclica para $\nu^q(G)$, sendo G policíclico?". Será dada uma resposta para essa questão no Capítulo 4 deste trabalho.

Suponha que os grupos G e H são subgrupos normais de L e agem um sobre o outro via conjugação de L. Sejam p e q inteiros não negativos, com $p \geq 1$.

Estendendo a aplicação κ, dada na Proposição 2.10, definimos a aplicação $\tilde{\delta} : \eta^{pq}(G,H) \mapsto \eta^p(G,H)$ dada por $(g)\delta = g$, $(h^\varphi)\delta = h^\varphi$ e $(\widehat{k})\delta = \widehat{k^q}$, para todo $g \in G$, $h \in H$ e $k \in \mathcal{K}$, que é compatível com as relações definidoras de $\eta^p(G,H)$, confira [10]. Obtemos assim um homomorfismo $\delta : \eta^{pq}(G,H) \mapsto \eta^p(G,H)$. Seja $\delta' = \delta \mid_{\Upsilon^{pq}(G,H)}: \Upsilon^{pq}(G,H) \mapsto \Upsilon^p(G,H)$. Obtemos então, uma generalização da Proposição 2.10 e do Teorema 1.22 de [10].

Teorema 2.12. *Seja $p \geq 1$. Existem sequências exatas*

$$\eta^{pq}(G,H) \xrightarrow{\delta} \eta^p(G,H) \to \frac{G \cap H}{G\#^q H} \to 1; \tag{2.24}$$

$$\Upsilon^{pq}(G,H) \xrightarrow{\delta'} \Upsilon^p(G,H) \to \frac{G \cap H}{G\#^q H} \to 1; \tag{2.25}$$

onde, $G\#^q H$ denota o subgrupo de L gerado pelos comutadores $[g,h]$ e pelas q-ésimas potências k^q para $g \in G$, $h \in H$ e $k \in \mathcal{K} = G \cap H$.

Demonstração. De acordo com a definição de δ a imagem de δ é dada por $Im(\delta) = \left\langle g, h^{\varphi}, \widehat{k^q} | g \in G,\ h \in H \text{ e } k \in \mathcal{K} \right\rangle$. Segue diretamente do Lema 2.8 que $Im(\delta)$ é um subgrupo normal de $\eta^p(G,H)$. Agora $\eta^p(G,H)/Im(\delta)$ é, pelas Relações (2.18) e (2.19), gerado pelas classes laterais $\widehat{k} \in \widehat{\mathcal{K}}$ com as relações $\widehat{kk_1} = \widehat{k}\widehat{k_1}$ e mais, como $\widehat{k^q} \in Im(\delta)$ para todo $k \in \mathcal{K}$, segue que $(\widehat{k})^q = 1$ módulo a imagem de δ. Isso prova (2.24). A sequência (2.25) é um caso particular de ([17], Teorema 6(ii)). $\square$

Em particular para $q = 0$ obtemos as sequências:

$$\eta(G,H) \stackrel{\delta}{\to} \eta^p(G,H) \to G \cap H/[G,H] \to 1; \tag{2.26}$$

$$\Upsilon(G,H) \stackrel{\delta'}{\to} \Upsilon^p(G,H) \to G \cap H/[G,H] \to 1; \tag{2.27}$$

Consequentemente temos o seguinte resultado:

Teorema 2.13. *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo L e q um inteiro não negativo.*

i) Se G e H são grupos finitos então $\eta^q(G,H)$ é um grupo finito.

ii) Se G e H são solúveis então $\eta^q(G,H)$ é solúvel.

iii) Se G e H são policíclicos então $\eta^q(G,H)$ é policíclico.

Demonstração. (i) Se G e H são grupos finitos então $\eta(G,H)$ é um grupo finito, (cf. [30]). Assim, por (2.26) $\eta^q(G,H)$ também é um grupo finito. (ii) Se G e H são solúveis sabemos que $\eta(G,H)$ é solúvel, (veja [30]), consequentemente, temos que $\eta^q(G,H)$ é solúvel.
(iii) De acordo com [28], se G e H são policíclicos então $\Upsilon(G,H)$ é policíclico. Pelo isomorfismo dado no Teorema 1.59 temos que, $\eta(G,H)$ é policíclico. Segue de (2.26) que $\eta^q(G,H)$ é policíclico. $\square$

Generalizando a sequência dada na Proposição 10 de [17], obtemos o seguinte resultado, onde $\Gamma(G)$ denota o funtor quadrático de Whitehead (cf. [43]).

Proposição 2.14. *Seja $q \geq 0$. Existe uma sequência exata*

$$\Gamma(G \cap H/G\#^q H) \stackrel{\alpha}{\to} \Upsilon^q(G,H) \to \frac{\Upsilon^q(G,H)}{\Delta^q(G,H)} \to 1; \tag{2.28}$$

onde $\big(\gamma(\bar{k})\big)\,\alpha = [k, k^{\varphi}]$ *para* $\bar{k} = kG\#^q H$.

Baseados na sequência (2.28) podemos então enunciar o seguinte resultado.

Proposição 2.15. *Se $G \cap H = G\#^q H$, então temos o seguinte isomorfismo,*

$$\Upsilon^q(G,H) \cong \frac{\Upsilon^q(G,H)}{\Delta^q(G,H)}.$$

Em particular, se G e H são grupos policíclicos, então $\Delta^q(G,H)$ é trivial.

Segue diretamente da Proposição 2.15 que se G é um grupo policíclico q-perfeito (veja Definição 1.51), então $\Delta^q(G) = 1$. Observe que $G\#^q G = G'G^q$.

Além disso, para grupos q-perfeitos ainda temos o seguinte resultado.

Proposição 2.16 ([9]). *Se G é q-perfeito então $\Upsilon^q(G)/\Delta^q(G)$ é a única extensão q-central universal de G, a menos de isomorfismos.*

Agora restringiremos nossa atenção a $\nu^q(G)$ e iremos citar alguns resultados relacionados a este grupo. Como estamos interessados na apresentação do quadrado q-tensorial de um grupo G, e este é isomorfo a um subgrupo de $\nu^q(G)$, é muito importante para o desenvolvimento do nosso trabalho a menção de tais resultados.

O segundo grupo de homologia do grupo G com coeficiente no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$, $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$, pode ser identificado com uma seção do grupo $\nu^q(G)$, veja [9]. Para isso consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \rho : \nu^q(G) &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g \\ g^{\varphi} &\longmapsto g \\ \widehat{k} &\longmapsto k^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho' = \rho\,|_{\Upsilon^q(G)} : \Upsilon^q(G) &\longrightarrow G \\ [g_1, g_2^{\varphi}] &\longmapsto [g_1, g_2] \\ \widehat{k} &\longmapsto k^q \end{aligned}$$

Agora consideremos os seguintes subgrupos:

$$\theta^q(G) = Ker(\rho); \tag{2.29}$$

$$\mu^q(G) = Ker(\rho') = \Upsilon^q(G) \cap \theta^q(G); \tag{2.30}$$

e conforme definido

$$\Delta^q(G) = \langle [g, g^{\varphi}] \mid g \in G \rangle \leq \mu^q(G) \tag{2.31}$$

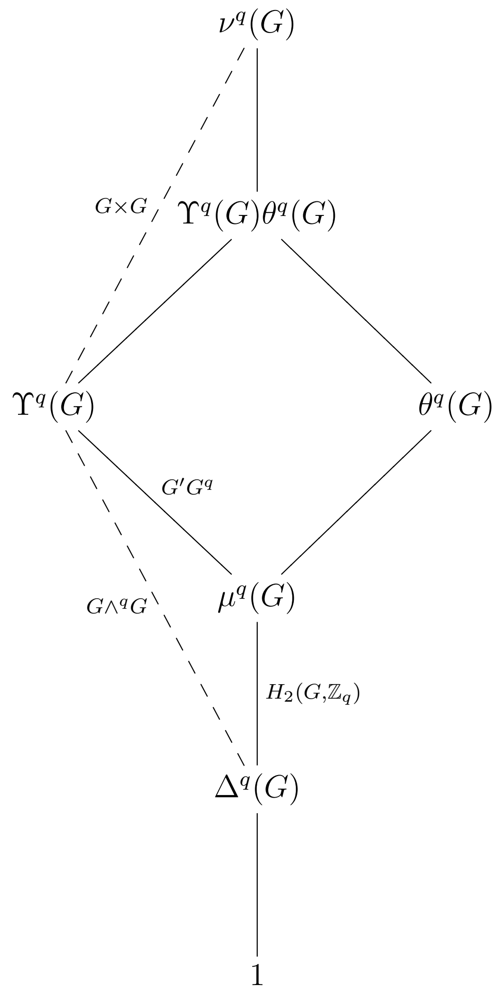
Como, $\theta^q(G) \lhd \nu^q(G)$, segue que $\theta^q(G)\Upsilon^q(G)$ é um subgrupo de $\nu^q(G)$.

Também temos que:

$$\Upsilon^q(G)/\mu^q(G) \cong Im(\rho') = G'G^q \tag{2.32}$$

Teorema 2.17 ([9]). *Seja $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$ o segundo grupo de homologia do grupo G com coeficiente no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$. Então $\mu^q(G)/\Delta^q(G) \cong H_2(G, \mathbb{Z}_q)$.*

Com os resultados e notações apresentados acima, foi obtido o seguinte diagrama, (cf. [9]).



2.3 Grupos capazes e q-capazes

Denotaremos o centro de um grupo G por $Z(G)$.

Definição 2.18. *Sejam G um grupo e q um inteiro não negativo. Definimos o q-centro de G, denotado por $Z_q(G)$, como o subgrupo do centro de G formado pelos elementos cuja ordem divide q, ou seja*

$$Z_q(G) = \{g \in Z(G) | g^q = 1\}.$$

Dizemos que um grupo G é *q-capaz* se existe um grupo Q tal que $Z(Q) = Z_q(Q)$ e um isomorfismo $G \cong Q/Z(Q)$. Logo, de acordo com a definição, um grupo G é q-capaz se G é o grupo de automorfismos internos de algum grupo Q.

Para $q = 0$ diremos que o grupo G é *capaz* e $Z_0(G)$ é simplesmente o centro de G. Assim, se um grupo G é q-capaz então G é capaz.

Usando o isomorfismo dado no Teorema 2.6 definiremos o centro q-tensorial e o centro q-exterior de um grupo G via $\nu^q(G)$ e $\tau^q(G)$.

Definição 2.19. *Sejam G um grupo e q um inteiro não negativo. Definimos o centro q-exterior de G como o subgrupo central de G dado por*

$$Z_q^{\wedge}(G) = \{g \in G | [g, x^{\varphi}] = 1 \in \tau^q(G) \text{ para todo } x \in G\}.$$

Quando $q = 0$ dizemos que $Z_q^{\wedge}(G)$ é simplesmente o centro exterior e o denotamos por $Z^{\wedge}(G)$.

O centro exterior é precisamente o grupo denotado por $Z^*(G)$ em [1] e denomidado o *epicentro* de G.

Definição 2.20. *Sejam G um grupo e q um inteiro não negativo. Definimos o centro q-tensorial de G como o subgrupo central de G dado por*

$$Z_q^{\otimes}(G) = \{g \in G | [g, x^{\varphi}] = 1 \in \nu^q(G), \text{ para todo } x \in G\}.$$

Quando $q = 0$ dizemos que $Z_q^{\otimes}(G)$ é simplesmente o centro tensorial e o denotamos por $Z^{\otimes}(G)$.

O centro tensorial pode ser caracterizado como o maior subgrupo A tal que $(G/A) \otimes (G/A) \cong G \otimes G$, veja [17].

O centro q-exterior é usado para decidir quando um grupo G é q-capaz conforme teorema a seguir.

Teorema 2.21. *Seja G um grupo e q um inteiro não negativo. O grupo G é q-capaz se, e somente se, o centro q-exterior de G é trivial ou seja, $Z_q^{\wedge}(G) = 1$.*

Capítulo 3

Sobre apresentações do quadrado tensorial não abeliano e do quadrado q-tensorial de um grupo.

Neste capítulo iremos descrever alguns resultados relevantes quanto à apresentação do quadrado tensorial não abeliano de um grupo G e do quadrado q-tensorial de G, onde G é um grupo dado. Como vimos na Seção 1.8 o quadrado tensorial é isomorfo a um subgrupo do grupo $\nu(G)$, enquanto o quadrado q-tensorial é isomorfo a um subgrupo do grupo $\nu^q(G)$, veja Seção 2.2. Como os grupos $\nu(G)$ e $\nu^q(G)$ são grupos com apresentações melhores de trabalhar, a questão de calcular uma apresentação para $G \otimes G$ e $G \otimes^q G$ foi melhorada, ou seja, para calcular uma apresentação para esses grupo basta calcular uma apresentação para $\nu(G)$ e $\nu^q(G)$ e então calcular uma apresentação para seus subgrupos $[G, G^\varphi] \cong G \otimes G$ e $\Upsilon^q(G) \cong G \otimes^q G$ de $\nu(G)$ e de $\nu^q(G)$, respectivamente.

3.1 Apresentação para o grupo $\nu(G)$

Devido ao seu interesse topológico, calcular uma apresentação para o quadrado tensorial foi um problema muito estudado nessas duas últimas décadas. Brown, Jonhson e Robertson iniciaram esta questão em [4] para grupos finitos. Entre os pontos principais dessa investigação incluia: dar uma descrição de $G \otimes G$ simplificada e de fácil identificação, determinar a estrutura do quadrado tensorial a partir da estrutura de G e calcular homomorfismos de $G \otimes G$ tendo apenas ação por conjugação de G para trabalhar e descobrir qual grupo seria obtido.

Para um grupo finito G, a definição nos dá uma apresentação finita de $G \otimes G$ e podemos aplicar Tranformada de Tietze para essa apresentação e obter uma apresentação simplificada de $G \otimes G$. Esse foi o ponto principal em [4], onde foram obtidos o quadrado tensorial para grupos de ordem no máximo 30. Porém, o método não é muito eficiente já que temos uma apresentação do quadrado tensorial com $\mid G \mid^2$ geradores e $2 \mid G \mid^3$ relações. Agora, se observarmos a definição de $\nu(G)$ temos que se a apresentação de G é $G = \langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$ então a apresentação de $\nu(G)$ tem $2 \mid \mathcal{G} \mid$ geradores e $2 \mid \mathcal{R} \mid + 2 \mid G \mid^3$ relações, mais simples que a de $G \otimes G$.

Rocco em 1994 (veja [35]) partiu da hipótese que G era um grupo solúvel finito e provou o seguinte teorema, um resultado muito relevante.

Teorema 3.1. *Sejam G e G^{φ} grupos solúveis finitos distintos isomorfos com geradores policíclicos $\{a_1, ..., a_n\}$ e $\{b_1, ..., b_n\}$ respectivamente, onde $\varphi : G \to G^{\varphi}$ é um isomorfismo tal que $a_i \mapsto b_i$, $1 \leq i \leq n$. Seja $\delta(G)$ um grupo dado pela apresesentação*

$$\delta(G) = \left\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n | G\text{-}rel., G^{\varphi}\text{-}rel., [a_i, b_j^{\varphi}]^{a_k} = [a_i^{a_k}, b_j^{b_k}] = [a_i, b_j]^{b_k}, 1 \leq i, j, k \leq n \right\rangle.$$

Então $\delta(G) \cong \nu(G)$. Além disso, o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ é gerado por $\{[a_i, b_j] | 1 \leq i, j \leq n\}$.

Observe que a partir desse resultado obtemos que a apresentação de $\nu(G)$ tem $2n$ geradores e $2 \mid \mathcal{R} \mid + 2n^3$ relações, onde n é o número de geradores policíclicos de G.

Definição 3.2. *Sejam G um grupo e $G = G_n \trianglerighteq ... \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_0 = 1$ uma série subnormal para G. Se $\mathcal{T}_i$ denota um tranversal para G_{i-1} em G_i e $\mathcal{G}_i$ denota o levantamento de um conjunto gerador de G_i/G_{i-1} para $\mathcal{T}_i$. Fazendo*

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} \mathcal{G}_i & se\ G_i/G_{i-1}\ \text{é abeliano}, \\ \mathcal{T}_i & caso\ contrário. \end{cases}$$

então o conjunto $\mathcal{L}_G$ relativa a série subnormal $G = G_n \trianglerighteq ... \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_0 = 1$ é definido como

$$\mathcal{L}_G = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i.$$

Note que para qualquer grupo abeliano G, $\mathcal{L}_G$ é igual a G relativa a série subnormal $G \trianglerighteq 1$. Se G é um grupo policíclico com alguma série policíclica $G = G_n \trianglerighteq ... \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_0 = 1$ e sequência de geradores policíclicos associados $\wp$, então $\mathcal{L}_G$ relativa a esta série é $\wp$.

Teorema 3.3 ([2]). *Seja G um grupo com apresentação finita $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$ e S uma série subnormal de G. Então $\nu(G)$ tem a seguinte apresentação:*

$$\begin{aligned} \nu(G) = \langle \mathcal{G}, \mathcal{G}^{\varphi} | \mathcal{R}, \mathcal{R}^{\varphi}, [g, h^{\varphi}]^k = [g^k, (h^k)^{\varphi}], [g, h^{\varphi}]^{k\varphi} = [g^k, (h^k)^{\varphi}] \\ \forall g, h \in \mathcal{G}, k \in \mathcal{L}_G \text{ relativo a } S \rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

O seguinte resultado encontrado em [2] é uma generalização do Teorema 3.1 para um grupo policíclico qualquer. Observe que mesmo para o caso em G é infinito esse teorema nos dá uma apresentação finita de $\nu(G)$ o que não seria possível obter a partir da definição de $\nu(G)$.

Teorema 3.4. *Seja G um grupo policíclico com uma sequência de geradores policíclicos $\{g_1, ..., g_n\}$. Então o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$, é gerado por*

$$[G, G^{\varphi}] = \left\langle [g_i, g_i^{\varphi}], [g_i^{\delta}, (g_j^{\varphi})^{\epsilon}], [g_i, g_j^{\varphi}][g_j, g_i^{\varphi}] \right\rangle$$

enquanto $[G, G^{\varphi}]_{\tau(G)}$, como subgrupo de $\tau(G) = \nu(G)/\Delta(G)$, é gerado por

$$[G, G^{\varphi}]_{\tau(G)} = \left\langle [g_i^{\delta}, (g_j^{\varphi})^{\epsilon}], [g_j^{\epsilon}, (g_i^{\varphi})^{\delta}] \right\rangle$$

para $1 \leq i < j \leq n$, $i \neq j$ onde

$$\delta = \begin{cases} 1 & se \quad | g_i | < \infty, \\ \pm 1 & se \quad | g_i | = \infty, \end{cases} \qquad e \qquad \epsilon = \begin{cases} 1 & se \quad | g_j^{\varphi} | < \infty, \\ \pm 1 & se \quad | g_j^{\varphi} | = \infty. \end{cases}$$

A partir deste resultado podemos calcular o produto tensorial não abeliano do grupo diedral infinito

$$D_{\infty} = \left\langle a, b | a^2, b^a = b^{-1} \right\rangle$$

que é dado por

$$D_{\infty} \otimes D_{\infty} = C_2 \times C_2 \times C_2 \times \mathbb{Z}$$

onde C_n é o grupo cíclico de ordem n, para maiores detalhes veja [2].

Como resultado, foi obtido por Blyth e Morse em [2], um algoritmo para o cálculo do quadrado tensorial não abeliano de um grupo policíclico $G = \langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$ com sequência de geradores policíclicos $\wp$, da seguinte maneira:

Algoritmo 3.5. *(1) Construa uma apresentação finita para $\nu(G)$ a partir de $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ e $\wp$ usando (3.1).*

(2) Calcule uma apresentação policíclica consistente para $\nu(G)$.

(3) Use métodos padrões para grupos policíclicos e obtenha uma apresentação para o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ do grupo policíclico $\nu(G)$. E assim obtemos uma apresentação policíclica para $G \otimes G$.

3.2 Apresentação para o grupo $\nu^q(G)$

Devido a complexidade das relações definidoras de $\nu^q(G)$, apenas recentemente o problema de encontrar uma apresentação simplificada para $\nu^q(G)$, e particularmente para $G \otimes^q G$, teve algum avanço, apesar desse grupo ter sido definido em 1995 com uma outra abordagem. Em [9], Bueno e Rocco descreveram uma apresentação para o grupo $\nu^q(G)$ de um grupo policíclico G, apresentação bem relevante, porém, a Relação (2.18) não pôde ser reduzida nos geradores policíclicos como as demais. Assim sendo, se G é um grupo infinito o grupo $\nu^q(G)$ continua com uma apresentação infinita dada pela definição de $\nu^q(G)$. Por outro lado, na apresentação dada em [9] os geradores e as relações de $\nu^q(G)$ foram reduzidos significantemente, facilitando os cálculos do grupo $\nu^q(G)$ conforme o seguinte teorema e, utilizando tal resultado, foi dada uma tabela com alguns exemplos computacionais com o auxílio do GAP, [41]. Para maiores detalhes confira [9].

Teorema 3.6 ([9])**.** *Sejam G um grupo policíclico com geradores policíclicos $\{g_1, ..., g_n\}$ e $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g} | g \in G\}$. Para $q \geq 2$, seja $\delta^q(G)$ o grupo dado pela seguinte apresentação:*

$$\delta^q(G) := \langle g_1, ..., g_n, {g_1}^{\varphi}, ..., {g_n}^{\varphi}, \widehat{\mathcal{G}} | G\text{-}rel.,\ G^{\varphi}\text{-}rel.,\ [g_i, {g_j}^{\varphi}]^{g_k^{\gamma}} = \left[{g_i}^{g_k^{\gamma}}, ({g_j}^{g_k^{\gamma}})^{\varphi}\right] =$$

$$= \left[g_i, g_j^{\varphi}\right]^{(g_k^{\gamma})^{\varphi}}, \widehat{g}_i^{g_k^{\gamma}} = \widehat{({g_i}^{g_k^{\gamma}})}, \widehat{g}_i^{(g_k^{\gamma})^{\varphi}} = \widehat{({g_i}^{g_k^{\gamma}})}, [g_i, {g_j}^{\varphi}]^{\widehat{g_k^{\gamma}}} = \left[{g_i}^{{g_k}^{\gamma q}}, ({g_j}^{{g_k}^{\gamma q}})^{\varphi}\right],$$

$$\widehat{gh} = \widehat{g} \prod_{i=1}^{q-1} \left[g, (h^{-i})^{\varphi}\right]^{g^{q-1-i}} \widehat{h}, \left[\widehat{g_i^{\alpha}}, \widehat{g_j^{\beta}}\right] = \left[{g_i}^{\alpha q}, ({g_j}^{\beta q})^{\varphi}\right],$$

$$\widehat{[g_i^{\alpha}, g_j^{\alpha}]} = \left[g_i^{\alpha}, (g_j^{\beta})^{\varphi}\right]^q, 1 \leq i, j, k \leq n, \forall \widehat{gh}, \widehat{g}, \widehat{h} \in G\rangle,$$

onde

$$\alpha = \begin{cases} 1 & se\ o(g_i) < \infty, \\ \pm 1 & se\ o(g_i) = \infty, \end{cases} \beta = \begin{cases} 1 & se\ o(g_j) < \infty, \\ \pm 1 & se\ o(g_j) = \infty, \end{cases} \gamma = \begin{cases} 1 & se\ o(g_k) < \infty, \\ \pm 1 & se\ o(g_k) = \infty. \end{cases}$$

Então, $\delta^q(G) \cong \nu^q(G)$ *e o subgrupo* $[G, G^\varphi]$ *de* $\nu^q(G)$ *é gerado pelos elementos* $[g_i, g_i^\varphi]$, $[g_i, g_j^\varphi][g_j, g_i^\varphi]$ *e* $[g_i^\alpha, (g_j^\varphi)^\beta]$, *para* $1 \leq i < j \leq n$.

Corolário 3.7 ([9]). *Sejam* G *um grupo policíclico com geradores policíclicos* $\{g_1, ..., g_n\}$. *Então,*

i) $\Upsilon^q(G)$ *é gerado por*

$$\Upsilon^q(G) = \langle [g_i, g_j^\varphi], [g_i, g_j^\varphi][g_j, g_i^\varphi], [g_i^\alpha, (g_j^\varphi)^\beta], \widehat{g_k} \rangle,$$

onde

$$\alpha = \begin{cases} 1 & se\ o(g_i) < \infty \\ \pm 1 & se\ o(g_i) = \infty \end{cases}, \beta = \begin{cases} 1 & se\ o(g_j) < \infty \\ \pm 1 & se\ o(g_j) = \infty \end{cases},$$

para $1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n$.

ii) $\Delta^q(G)$ *é gerado pelo conjunto*

$$\left\{ [g_i, g_i^\varphi], [g_i, g_j^\varphi][g_j, g_i^\varphi],\ para\ 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Para grupos cíclicos Bueno e Rocco [9] obtiveram um resultado satisfatório no cálculo da apresentação do quadrado q-tensorial.

Teorema 3.8. *Sejam* C_n *(respectivamente* C_∞*) o grupo cíclico de ordem* n *(respectivamente* ∞*),* $q \geq 0$ *e* $d = mdc(n, q)$. *Então,*

$$C_\infty \otimes^q C_\infty \cong C_\infty \times C_q;$$

$$C_n \otimes^q C_n \cong \begin{cases} C_n \times C_d, & se\ d\ é\ ímpar; \\ C_n \times C_d, & se\ d\ é\ par\ com\quad 4 \mid n\ ou\ 4 \mid q; \\ C_{2n} \times C_{d/2}, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Capítulo 4

Apresentação policíclica para o quadrado q-tensorial de um grupo policíclico

4.1 Extensões q-centrais

Nesta seção descreveremos um método para calcular uma apresentação policíclica consistente para certas extensões q-centrais de um grupo policíclico dado por uma apresentação policíclica consistente. Nosso método é uma generalização do método apresentado em [12].

Sejam G um grupo policíclico definido por uma apresentação policíclica consistente F_n/R, onde F_n é o grupo livre nos geradores $g_1, ..., g_n$ e H um grupo finitamente apresentado definido por uma apresentação finita F_m/S, onde F_m é o grupo livre nos geradores $f_1, ..., f_m$. Suponha que $\xi : H \to G$ é um epimorfismo e denote o núcleo de ξ por K/S, assim, $G \cong F_m/K$. Definimos

$$G_q^* := \frac{F_n}{R^q[F_n, R]}$$

e

$$\mathfrak{E}^q(G) := \frac{F_m}{K^q[K, F_m]S}$$

que por construção são extensões q-centrais de G.

Proposição 4.1. *Com essa notação $\pi : G_q^* \to G$ é um G-módulo q-cruzado projetivo.*

Demonstração. Como G_q^* é uma extensão q-central de G segue que $\pi : G_q^* \to G$ é um G-módulo q-cruzado, resta provar que é projetivo.

Suponha que $\alpha : X \to G$ e $\beta : Y \to G$ são G-módulos q-cruzados e $\psi : \pi \to \beta$ e $\eta : \alpha \to \beta$ são morfismos de G-módulos q-cruzados. Então temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[dr] & & \\
& F_n \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr] \arrow[dddl, bend right, "\mu"'] & \\
& G_q^* \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddl, dotted, "\bar{\mu}"'] & G \arrow[d, equal] \\
& Y \arrow[r, "\beta"] & G \\
X \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "\alpha"] & G \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Para que $\pi : G_q^* \to G$ seja uma G-módulo q-cruzado projetivo, deve existir um morfismo $\bar{\mu} : \pi \to \alpha$ tal que $\bar{\mu}\eta = \psi$; Agora um morfismo $\bar{\mu} : \pi \to \alpha$ é um homomorfismo de grupos (que denotaremos pela mesma letra que representa o morfismo) $\bar{\mu} : G_q^* \to X$, G-invariante (ie $((g^*)^g)\,\bar{\mu} = ((g^*)\bar{\mu})^g$) tal que $\bar{\mu}\alpha = \pi$.

Agora como F_n é livre como grupo então F_n é projetivo, assim, existe um homomorfismo $\mu : F_n \to X$ tq $\mu\eta = \theta\psi$. Mostraremos que esse homomorfismo é fatorado em $\bar{\mu} : G_q^* \to X$.

Se $r \in R$ então a imagem de r é a identidade em G, assim $(r)\mu \in Ker(\alpha)$ e, consequentemente, $R^q[R, F_n] \leq Ker(\mu)$. Logo, μ se fatora em $\bar{\mu}$ tal que $\theta\bar{\mu} = \mu$.

$$\begin{tikzcd}
Ker(\mu) \arrow[dr] & & G_q^* \arrow[dd, dotted, "\bar{\mu}"] \\
& F_n \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "\mu"] & \\
R^q[R, F_n] \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & X
\end{tikzcd}$$

Agora, $\bar{\mu}\alpha = \pi$ como

$$
\begin{aligned}
\theta\bar{\mu} &= \mu \\
(\theta\bar{\mu})\,\alpha &= \mu\alpha \\
\theta\,(\bar{\mu}\alpha) &= \theta\pi \\
\bar{\mu}\alpha &= \pi
\end{aligned}
$$

e $\bar{\mu}$ é G-invariante. De fato

$$
\begin{aligned}
\left((f[R,F_n]R^q)^{gR}\right)\bar{\mu} &= (f^g[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu} \\
&= (g^{-1}[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu}\,(f[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu}\,(g[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu} \\
&= ((f[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu})^{((g[R,F_n]R^q)\bar{\mu})\alpha} \\
&= ((f[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu})^{(g[R,F_n]R^q)\pi} \\
&= ((f[R,F_n]R^q)\,\bar{\mu})^{gR}
\end{aligned}
$$

Logo $\bar{\mu}$ é um morfismo de G-módulos q-cruzados e mais $\bar{\mu}\eta = \psi$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\theta\bar{\mu} &= \mu \\
(\theta\bar{\mu})\eta &= (\mu)\eta \\
\theta\bar{\mu}\eta &= \theta\psi \\
\bar{\mu}\eta &= \psi
\end{aligned}
$$

Assim, $\pi : G_q^* \to G$ é um G-módulo q-cruzado projetivo. $\square$

4.1.1 Uma apresentação policíclica consistente para G_q^*

As relações de uma apresentação consistente F_n/R tem a forma:

$$
\begin{aligned}
g_i^{e_i} &= g_{i+1}^{\alpha_{i,i+1}}...g_n^{\alpha_{i,n}} \text{ para } i \in I, \\
g_j^{-1}g_ig_j &= g_{j+1}^{\beta_{i,j,j+1}}...g_n^{\beta_{i,j,n}} \text{ para } j < i, \\
g_jg_ig_j^{-1} &= g_{j+1}^{\gamma_{i,j,j+1}}...g_n^{\gamma_{i,j,n}} \text{ para } j < i \text{ e } j \notin I.
\end{aligned}
$$

Para algum $I \subseteq \{1, ..., n\}$, certos expoentes $e_i \in \mathbb{N}$ para $i \in I$, $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j,k}$, $\gamma_{i,j,k} \in \mathbb{Z}$ e para todo i, j e k. Para simplificar a notação, escreveremos as relações de G como relatores da forma $r_1, ..., r_l$. Assim, todo relator r_j é uma palavra nos geradores $g_1, ..., g_n$; isto é, $r_j = r_j(g_1, ..., g_n)$.

Introduziremos l novos geradores $t_1, ..., t_l$ e definimos o grupo $\epsilon(G)$ como o grupo gerado por $g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l$ sujeito aos seguintes relatores:

(1) $r_i(g_1, ..., g_n)t_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq l$,

(2) $[t_i, g_j]$ para $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq l$,

(3) $[t_i, t_j]$ para $1 \leq j < i \leq l$,

(4) t_i^q para $1 \leq i \leq l$.

Denotaremos o subgrupo q-central de $\epsilon(G)$ gerado por $\{t_1, ..., t_l\}$ por T_q. Segue diretamente desses relatores que $\epsilon(G)$ é uma extensão q-central de G por T_q. O seguinte lema afirma que $\epsilon(G) = G_q^*$.

Lema 4.2. *Seja G um grupo policíclico definido por uma apresentação consistente F_n/R como dado acima. Usando a notação anterior obtemos o seguinte resultado.*

(i) $\epsilon(G) \cong F_n/R^q[R, F_n]$, $T_q \cong R/R^q[R, F_n]$ e $\epsilon(G)/T_q \cong G$.

(ii) $\epsilon(G)$ é definido por uma apresentação policíclica (possivelmente inconsistente).

Demonstração. i) Segue de (1) que $\epsilon(G)/T_q \cong G$, por (2), (3) e (4) T_q é um subgrupo q-central. Assim, resta provar que $\epsilon(G) \cong F_n/R^q[R, F_n]$ e segue diretamente que $T_q \cong R/R^q[R, F]$. Defina $\sigma : F_n \to \epsilon(G)$ dada por $(g_i)^\sigma = g_i$, por (1) segue que σ é um epimorfismo e como $\epsilon(G)$ é uma extensão q-central de G segue que

$$R^q[R, F_n] \leq Ker(\sigma) \leq R.$$

Resta mostrar que $Ker(\sigma) \leq R^q[R, F_n]$. Considere $X = \{g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l\}$ e defina $\widetilde{\delta} : X \to \dfrac{F_n}{R^q[F_n, R]}$ por $g_i^{\widetilde{\delta}} = g_i R^q[F_n, R]$, $t_i^{\widetilde{\delta}} = r_i R^q[F_n, R]$. Pelo teste da substituição existe um homomorfismo $\delta : \epsilon(G) \to \dfrac{F_n}{R^q[F_n, R]}$ que é um epimorfismo. Como consequência, temos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
R^q[R, F_n] \arrow[dr, hook] & & \epsilon(G) \arrow[dd, two heads] \\
& F_n \arrow[ur, two heads, "\sigma"] \arrow[dr, two heads] & \\
Ker(\sigma) \arrow[ur, hook] \arrow[uu, hook, dotted] & & \frac{F_n}{R^q[F,R]}
\end{tikzcd}
$$

ou seja, $Ker(\sigma) \leq R^q[R, F_n] \leq Ker(\sigma)$ e $\epsilon(G) \cong \dfrac{F_n}{R^q[F_n, R]}$, como queríamos provar.
$ii)$ Segue diretamente da definição de $\epsilon(G)$. $\square$

A partir de agora denotaremos $\epsilon(G)$ por G_q^*.

Agora determinaremos uma apresentação policíclica consistente para G_q^* a partir da apresentação policíclica possivelmente inconsistente obtida acima. Usamos o método descrito na Seção **??** que é uma adaptação do método descrito por Sims em [40] e por Eick e Nickel em [12] . Para nosso propósito avaliamos as seguintes relações consistentes em G_q^*:

$$g_k(g_j g_i) = (g_k g_j) g_i \text{ para } k > j > i,$$

$$(g_j^{e_j}) g_i = g_j^{e_j - 1}(g_j g_i) \text{ para } j > i,\ j \in I,$$

$$g_j(g_i^{e_i}) = (g_j g_i) g_i^{e_i - 1} \text{ para } j > i,\ i \in I,$$

$$(g_i^{e_i}) g_i = g_i(g_i^{e_i}) \text{ para } i \in I,$$

$$g_j = (g_j g_i^{-1}) g_i, \text{ para } j > i,\ i \notin I.$$

Essas relações de consistência podem ser avaliadas na apresentação policíclica consistente de G_q^* usando sistema de coleta da esquerda para a direita. Como G é dado por uma apresentação policíclica consistente e T_q é q-central em G_q^* segue que toda relação de consistência produz um equação da forma

$$t_1^{a_{i1}} \ldots t_l^{a_{il}} = 1 \text{ para } a_{ij} \in \mathbb{Z}, \text{ com } \mid a_{ij} \mid < q.$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\epsilon l} & \ldots & a_{\epsilon l} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\epsilon \times l}.$$

Se $\epsilon < l$, então complete A para que ela se torne uma matriz $l \times l$ adicionando $l - \epsilon$ linhas nulas em A. Usando um algoritmo da forma normal de Smith, podemos calcular matrizes P e Q tais que $A = PDQ$, onde D é uma matriz diagonal com entradas $d_1, ..., d_l \in \mathbb{N}$.

Uma apresentação consistente para G_q^* pode ser obtida a partir de D usando o isomorfismo $Q^{-1} = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}$. Essa apresentação tem geradores $g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l$ e relatores definidores da forma

(1) $r_i(g_1, ..., g_n)t_1^{q_{i1}}...t_l^{q_{il}}$ para $1 \leq i \leq l$,

(2) $[t_i, g_j]$ para $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq l$,

(3) $[t_i, t_j]$ para $1 \leq j < i \leq l$,

(4) $t_i^{d_i}$ para $1 \leq i \leq l$ com $d_i \mid q$.

Note que pode acontecer que $d_i = 1$ para algum $i \in \{1, ..., l\}$. Neste caso, o gerador correspondente t_i é redundante e pode ser eliminado dessa apresentação.

Para ilustrar esses resultados daremos os seguintes exemplos que serão usados nas próximas seções.

Exemplo 4.3. *Seja* $S_3 = \langle g_1, g_2 | g_1^2 = 1, g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1}, g_2^3 \rangle$. *De acordo com a definição*

$$(S_3)_2^* = \left\langle g_1, g_2, t_1, t_2, t_3 | g_1^2 = t_1, g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1}t_2, g_2^3 = t_3, t_1^2, t_2^2, t_3^2\, (t_1, t_2, t_3 \textit{ centrais }) \right\rangle.$$

Resta agora checar a consistência desta apresentação. As relações não triviais de consistência que temos que considerar são as seguintes:

$$(g_2^3)g_1 = g_2^2(g_2g_1);$$

Temos pelas relações definidoras que $(g_2^3)g_1 = t_3g_1 = g_1t_3$;
Por outro lado, $g_2^2(g_2g_1) = g_2g_1g_2^{-1}t_2 = g_1(g_2^{g_1})^2g_2^{-1}t_2 = g_1g_2^{-3}t_2 = g_1t_2t_3$. *Segue que* $t_2 = 1$. *Além disso, as seguintes relações seguem das relações definidoras de* $(S_3)_2^*$.

$$g_2(g_1^2) = (g_2g_1)g_1;$$

$$(g_1^2)g_1 = g_1(g_1^2);$$

$$(g_2^3)g_2 = g_2(g_2^3).$$

Portanto, obtemos $t_2 = 1$. *Assim, uma apresentação policíclica consistente para* $(S_3)_2^*$ *é dada por*

$$(S_3)_2^* = \left\langle g_1, g_2, t_1, t_3 | g_1^2 = t_1, g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1}, g_2^3 = t_3, t_1^2, t_3^2, (t_1, t_3 \text{ centrais }) \right\rangle.$$

Exemplo 4.4. *Considere o grupo diedral infinito dado pela apresentação policíclica consistente*

$$D_\infty = \left\langle g_1, g_2 | g_1^2, g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1} \right\rangle.$$

De acordo com a apresentação dada acima

$$(D_\infty)_q^* = \left\langle g_1, g_2, t_1, t_2 | g_1^2 = t_1, g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1}t_2, t_1^q, t_2^q, (t_1, t_2 \text{ centrais }) \right\rangle.$$

Analisando as relações de consistência obtemos que essa apresentação é policíclica consistente.

4.1.2 Uma apresentação policíclica para $\mathfrak{E}^q(G)$

Nosso próximo objetivo é calcular uma apresentação policíclica consistente para $\mathfrak{E}^q(G)$ como introduzido no início da Seção 4.1. Relembramos que G é definido por uma apresentação policíclica consistente F_n/R nos geradores $g_1, ..., g_n$. Seja H definido por uma apresentação finita F_m/S, onde F_m é livre nos geradores $f_1, ..., f_m$. Suponha que $\xi : H \to G$ com $(f_i)\xi = w_i$ define um epimorfismo com núcleo K/S. Então $G = F_n/R \cong F_m/K$ e por definição $\mathfrak{E}^q(G) = F_m/[K, F_m]SK^q$.

Como primeiro passo para nosso objetivo determinamos uma apresentação policíclica consistente para G_q^* nos geradores $g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l$ como na seção anterior. Esta apresentação pode ser usada para determinar uma apresentação policíclica consistente para $\mathfrak{E}^q(G)$ conforme o próximo resultado.

Lema 4.5. *Defina* $\varsigma : F_m \to G_q^*$ *por* $(f_i)\varsigma = w_i$ *para* $1 \leq i \leq m$. *Então*

i) $Ker(\varsigma) = [K, F_m]K^q$;

ii) $\mathfrak{E}^q(G) \cong Im(\varsigma)/(S)\varsigma$.

Demonstração. $i)$ Primeiro note que $F_m/Ker(\varsigma) \cong Im(\varsigma) \leq G_q^*$ e $Im(\varsigma)$ cobre $G \cong G_q^*/T_q$, já que $G =< w_1, ..., w_m >$. Assim, $F_m/Ker(\varsigma)$ é uma extensão q-central de $G = F_m/K$, logo $[K, F_m]K^q \leq Ker(\varsigma)$. Por outro lado, $F_m/[K, F_m]K^q$ é uma extensão policíclica q-central de G e como, por construção, G_q^* é a maior extensão q-central de G, segue que G_q^* contém $F_m/[K, F_m]K^q$ como um subquociente via ς. Assim $Ker(\varsigma) = [F_m, K]K^q$.
$ii)$ Por (i) $Im(\varsigma) \cong \dfrac{F_m}{[F_m, K]K^q}$ e, por definição, $\mathfrak{C}^q(G) = \dfrac{F_m}{S[F_m, K]K^q}$, agora $(S)\varsigma = \dfrac{S[K, F_m]K^q}{[K, F_m]K^q}$, consequentemente, $\dfrac{Im(\varsigma)}{(S)\varsigma} = \mathfrak{C}^q(G)$. □

Desse modo, para determinar a apresentação de $\mathfrak{C}^q(G)$ basta determinar geradores para os subgrupos $Im(\varsigma)$ e $(S)\varsigma$ de G_q^*, já que métodos padrões para grupos policíclicos podem ser usados para construir uma apresentação policíclica consistente para o quociente $Im(\varsigma)/(S)\varsigma$, veja [40], Capítulo 8, ou [11]. Claramente, um conjunto de geradores para $Im(\varsigma)$ é dado por $w_1, ..., w_m$.

Seja $s_1, ..., s_k$ um conjunto de relações definidoras para o grupo finitamente apresentado $H = F_m/S$. Então, $(S)\varsigma$ é gerado por $(s_1)\varsigma, ..., (s_k)\varsigma$ como um subgrupo, já que $(S)\varsigma \leq T_q$ é central em G_q^*. Logo, geradores para $(S)\varsigma$ podem ser determinados avaliando os relatores $s_1, ..., s_h$ em G_q^*.

4.2 Uma apresentação para o q-multiplicador, para $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$ e para o quadrado q-exterior de um grupo policíclico G

Suponha que um grupo policíclico G é dado por sua apresentação policíclica consistente F_n/R. Usaremos resultados obtidos na Seção 4.1.1 para determinar uma apresentação policíclica consistente para o q-multiplicador de G, para o segundo grupo de homologia de G com coeficientes no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$ e para o quadrado q-exterior de G.

Continuaremos usando a notação da Seção 4.1; em particular seja $G_q^* = F_n/[R, F_n]R^q$ e $T_q = R/[R, F_n]R^q$. Note que uma apresentação policíclica consistente de G_q^* que exibe

T_q pode ser facilmente calculada usando o Lema 4.2.

Também aplicaremos vários métodos padrões para grupos definidos por uma apresentação policíclica; como referência veja [13]. Em particular, exploramos o fato que podemos calcular subgrupos e grupos quocientes definidos pelos geradores e podemos determinar geradores para o subgrupo derivado e interseções de subgrupos.

4.2.1 O q-multiplicador de G e o segundo grupo de homologia de G com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$

De acordo com a Definição 1.60 o q-multiplicador de G é dado por $M^q(G) = R/R^q[R, F_n]$. Assim, segue diretamente do Lema 4.2 que $M^q(G) = T_q$. Portanto, uma apresentação policíclica consistente para $M^q(G)$ pode ser calculada a partir da apresentação de G_q^*. De acordo com este resultado obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.6. *Seja $G = D_{2n}$ o grupo diedral de ordem $2n$. Segue que,*

1) Se $mdc(q, n) = 1$ então $M^q(D_{2n}) = C_q \times C_q$.

2) Se $mdc(q, n) = q$ então $M^q(D_{2n}) = \begin{cases} C_q \times C_q, & \text{se } q \text{ é ímpar;} \\ C_q \times C_q \times C_2, & \text{se } q \text{ é par.} \end{cases}$

Demonstração. Temos que $D_{2n} = \langle g_1, g_2 | g_1^2 = 1, g_1^{-1} g_2 g_1 = g_2^{-1}, g_2^n = 1 \rangle$, logo, $(D_{2n})_q^* = \langle g_1, g_2, t_1, t_2, t_3 | g_1^2 = t_1, g_1^{-1} g_2 g_1 = g_2^{-1} t_2, g_2^n = t_3, t_1^q, t_2^q, t_3^q, (t_i\text{-centrais}) \rangle$. Para testar a consistência da apresentação de $(D_{2n})_q^*$ temos que avaliar as seguintes relações:

$$(g_2^n) g_1 = g_2^{n-1}(g_2 g_3);$$

$$g_2(g_1^2) = (g_2 g_1) g_1$$

$$(g_1^2) g_1 = g_1(g_1^2)$$

$$(g_2^n) g_2 = g_2(g_2^n)$$

Avaliando essas relações obtemos uma única equação dada por

$$t_2^n t_3^{-2} = 1.$$

1) Se $mdc(q,n) = 1$ então $t_2^n = t_3^2$ implica que $t_2 \in < t_3 >$, assim t_2 pode ser retirado da apresentação de $(D_{2n})_q^*$ e

$$M^q(D_{2n}) = C_q \times C_q.$$

2) Se $mdc(n,q) = q$ então q divide n e como $t_2^q = 1$ segue que $t_2^n = 1$ o que implica que $t_3^2 = 1$ assim temos que a ordem de t_3 divide 2, $o(t_3) \mid 2$, então $o(t_3) = 1$ ou 2. E, consequentemente, $o(t_3)$ divide $mdc(2,q)$, mas,

$$mdc(q,2) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \text{ é ímpar, assim } o(t_3) = 1 \text{ e } M_q(G) = C_q \times C_q; \\ 2 & \text{se } q \text{ é par, assim } o(t_3) = 2 \text{ e } M^q(G) = C_q \times C_q \times C_2. \end{cases}$$

□

Agora, $H(G, \mathbb{Z}_q) = R \cap F_n' F_n^q / R^q[R, F_n]$, veja (1.8), consequentemente podemos calcular uma apresentação policíclica consistente para o segundo grupo de homologia em G com coeficientes no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$ a partir da apresentação de G_q^*.

Observação 4.7. $H_2(G, \mathbb{Z}_q) = (G_q^*)'(G_q^*)^q \cap T_q$.

4.2.2 O quadrado q-exterior

Considere $\pi : G_q^* \to G$, o epimorfismo natural, para cada $g \in G$ seja $\widetilde{g}$ uma pré-imagem arbitrária de g sobre esse epimorfismo. Temos pela Proposição 1.67 que $\beta : G \wedge^q G \to (G_q^*)'(G_q^*)^q$ tal que $g \wedge h \to [\widetilde{g}, \widetilde{h}]$ e $\widehat{k} \to \widetilde{k}^q$ é um isomorfismo.

Como $(G_q^*)'(G_q^*)^q$ é um subgrupo do grupo policíclico G_q^* dado por uma apresentação consistente podemos determinar uma apresentação policíclica para esse subgrupo usando métodos padrões para apresentações policíclicas. Pelo isomorfismo dado acima, obtemos uma apresentação para $G \wedge^q G$.

Podemos determinar uma apresentação de $G \wedge^q G$ a partir dos geradores policíclicos de G como elementos de G_q^* conforme provado no próximo resultado.

Proposição 4.8. *O subgrupo $(G_q^*)'(G_q^*)^q$ de G_q^* é gerado pelo conjunto*

$$\langle [g_i, g_j], g_k^q | 1 \leq i < j \leq, 1 \leq k \leq n. \rangle$$

Demonstração. Temos que $G_q^* = \langle g_1, ..., g_n, t_1, ..., t_l | r_i = t_i, (t_i \ q\text{-centrais}\ )\rangle$. Como a apresentação de G_q^* é policíclica então,

$$(G_q^*)' = \langle [g_i, g_j], [g_n, t_k], [t_{i_0}, t_{j_0}] | 1 \leq i < j \leq n; 1 \leq k \leq l; 1 \leq i_0 < j_0 \leq l\rangle$$

(veja [35]); Assim,

$$(G_q^*)' = \langle [g_i, g_j] | 1 \leq i < j \leq n\rangle \,,$$

já que os t_i's são centrais. Logo $(G_q^*)'(G_q^*)^q = \langle [g_i, g_j], g^q | 1 \leq i < j \leq n, g \in G\rangle$. Temos que mostrar que g^q é uma palavra nos comutadores $[g_i, g_j]$ e nas q-ésimas potências dos geradores de G, g_i^q. Vamos provar por indução sobre o número de geradores policíclicos de G. Para isso, observe que a palavra $(ab)^q$ em G pode ser coletada de modo que satisfaça a igualdade $(ab)^q = a^q \prod_{i=1}^{q-1} \left\{ \left[a, b^{-i}\right]^{b^{q-1-i}} \right\} b^q$.

Para $n = 1$, $g = g_1^{\alpha} t$ para todo $g \in G_q^*$, onde $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $t \in T_q$. Portanto,

$$\begin{aligned} g^q &= (g_1^{\alpha} t \epsilon)^q \\ &= (g_1^{\alpha})^q t^q \\ &= (g_1^q)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Agora suponha que o resultado é verdadeiro para todo grupo policíclico $n-1$ gerado. E seja $g \in G_q^*$. Então, $g = g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n} t$ então,

$$\begin{aligned} g^q &= (g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n} t)^q \\ &= (g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n})^q t^q \\ &= \left(g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right)^q \prod_{i=1}^{q-1} \left\{ \left[g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, (g_n^{\alpha_n})^{-i}\right]^{\left(g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right)^{q-1-i}} \right\} (g_n^{\alpha_n})^q. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução o elemento $\left(g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right)^q$ é uma palavra nos comutadores e q-ésimas potências dos geradores $g_1, ..., g_{n-1}$;

Por outro lado, $\prod_{i=1}^{q-1} \left\{ \left[g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, (g_n^{\alpha_n})^{-i}\right]^{\left(g_1^{\alpha_1} ... g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right)^{q-1-i}} \right\}$ é um elemento de $(G_q^*)'$ logo, é uma palavra nos comutadores $[g_i, g_j]$ e como $(g_n^{\alpha_n})^q = (g_n^q)^{\alpha_n}$ segue o resultado.

□

Para outras aplicações colocamos a seguinte observação.

Observação 4.9.

(*i*) *Como vimos, G age naturalmente sobre $G \wedge^q G$ via $(g \wedge h)^k = g^k \wedge h^k$, $\widehat{k}^g = \widehat{k^g}$ para $g, h, k \in G$, Observação 1.64. Essa ação é compatível com β e $(g \wedge h)^k$ corresponde a $[\widetilde{g}, \widetilde{h}]^k = [\widetilde{g^k}, \widetilde{h^k}]$ enquanto $\widehat{k}^g$ corresponde a $(\widetilde{k}^q)^g = \widetilde{k^g}^q$. A imagem de w^k de $w \in G \wedge^q G$ é obtida escrevendo w como um produto de q-ésimas potências e comutadores e então calculando a ação de k sobre cada fator.*

ii) *Por construção, a aplicação $\lambda : G \times G \times G \to (G_q^*)'(G_q^*)^q : (g, h, k) \mapsto [\widetilde{g}, \widetilde{h}]\widetilde{k}^q$ é uma q-biderivação, veja Definição 2.1. Aplicando β ela corresponde à q-biderivação $\lambda : G \times G \times G \to G \wedge^q G : (g, h, k) \mapsto (g \wedge h)\widehat{k}$.*

Note que podemos determinar a imagem da ação de G e a imagem da q-biderivação λ na apresentação policíclica de $G \wedge^q G$ usando a Observação 4.9.

Exemplo 4.10 (Continuação do Exemplo 4.3). *Determinaremos $S_3 \wedge^2 S_3$ identificando-o como o subgrupo $((S_3)_2^*)' \, ((S_3)_2^*)^2 = \langle [g_1, g_2], g_1^2, g_2^2 \rangle = \langle w | w^6 \rangle \cong C_6$ onde $w = g_2^2 t_1$.*

a) A imagem da ação natural de $(g_1 \wedge g_2)^{g_1}$ na apresentação policíclica consistente de $S_3 \wedge^2 S_3$ pela observação anterior corresponde ao elemento $[g_1, g_2]^{g_1}$ de $((S_3)_2^*)' \, ((S_3)_2^*)^2$. Por sua vez, usando as relações de $((S_3)_2^*)' \, ((S_3)_2^*)^2$, avaliando esse elemento obtemos:

$$g_1^{-1}[g_1, g_2]g_1 = g_1^{-1} g_2^2 g_1 = g_2^2 = w^4.$$

b) A imagem de $(g_1, g_2, g_1)\lambda$ na apresentação policíclica consistente de $S_3 \wedge^2 S_3$ pela observação anterior corresponde ao elemento $[g_1, g_2]g_1^2$ de $((S_3)_2^*)' \, ((S_3)_2^*)^2$ e assim, usando as relações de $((S_3)_2^*)' \, ((S_3)_2^*)^2$, avaliamos esse elemento obtemos

$$[g_1, g_2]g_1^2 = g_2^2 t_1 = w.$$

Exemplo 4.11 (Continuação do Exemplo 4.4). *Determinaremos $D_\infty \wedge^2 D_\infty$ identificando-o como o subgrupo $((D_\infty)_2^*)' \, ((D_\infty)_2^*)^2 = \langle [g_1, g_2], g_1^2, g_2^2 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 | w_1^2, [w_1, w_2], [w_1, w_3], w_2^2, [w_2, w_3] \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_\infty$ onde $w_1 = g_2^2, w_2 = t_1, w_3 = t_2$.*

a) Analogamente a imagem da ação natural de $(g_1 \wedge g_2)^{g_1}$ *na apresentação policíclica consistente de* $D_\infty \wedge^2 D_\infty$ *pela observação anterior corresponde ao elemento* $[g_1, g_2]^{g_1}$ *de* $((D_\infty)_2^*)' \, ((D_\infty)_2^*)^2$ *que é*

$$g_1^{-1}[g_1, g_2]g_1 = g_1^{-1}g_2^2t_2g_1 = g_2^{-1}t_2 = w_1^{-1}w_3.$$

b) E a imagem de $(g_1, g_2, g_1)\lambda$ *na apresentação policíclica consistente de* $D_\infty \wedge^2 D_\infty$ *corresponde ao elemento* $[g_1, g_2]g_1^2$ *de* $((D_\infty)_2^*)' \, ((D_\infty)_2^*)^2$*, obtemos*

$$[g_1, g_2]g_1^2 = g_2^2t_2t_1 = w_1w_2w_3.$$

4.3 O q-epicentro e q-capabilidade

Como vimos na Seção 2.3 um grupo G é dito q-capaz se existe um grupo Q tal que $Z(Q) = Z_q(Q)$ e $G \cong Q/Z(Q)$, onde $Z_q(Q)$ é o q-centro (Definição 2.18). Pelo Teorema 2.21 um grupo G é q-capaz se, e somente se, $Z_q^\wedge(G) = 1$.

Nosso próximo resultado mostra que podemos facilmente determinar o centro q-exterior de um grupo policíclico G dado por uma apresentação policíclica usando uma apresentação policíclica consistente para G_q^* e métodos padrões para grupos policíclicos.

Teorema 4.12. *Sejam G um grupo policíclico e $\pi : G_q^* \to G$ um epimorfismo natural. Então, $Z_q^\wedge(G) = \left(Z(G_q^*)\right)\pi$.*

Demonstração. Para todo $g \in G$ seja $\widetilde{g}$ uma pré-imagem de g em G_q^* sobre π, isto é, $(\widetilde{g})\pi = g$. Agora, $[\widetilde{g}, \widetilde{a}] = 1$ para $a \in G$ se, e só se, $[x, \widetilde{g}] = 1$ para todo $x \in G_q^*$. De fato, dado $x \in G_q^*$ então $x^\pi \in G$ e por hipótese $[\widetilde{g}, \widetilde{x^\pi}] = 1$. Por outro lado, $\left(\widetilde{x^\pi}\right)^\pi = x^\pi$. Assim, $\left(\widetilde{x^\pi}\right)^{-1} x \in Ker(\pi) \leq Z(G_q^*)$. Portanto temos que
$1 = [\widetilde{x^\pi}^{-1}x, \widetilde{g}] = [\widetilde{x^\pi}^{-1}, \widetilde{g}]^x[x, \widetilde{g}] = [\widetilde{x^\pi}, \widetilde{g}]^{-(\widetilde{x^\pi})^{-1}x}[x, \widetilde{g}] = [\widetilde{x^\pi}, \widetilde{g}][x, \widetilde{g}] = [x, \widetilde{g}]$.

Reciprocamente, dado $a \in G$, temos que $\widetilde{a} \in G_q^*$. Por hipótese $[x, \widetilde{g}] = 1$ para todo $x \in G_q^*$, em particular para $x = \widetilde{a}$ assim, $[\widetilde{a}, \widetilde{g}] = 1 \; \forall a \in G$.

Agora, como $\beta : G \wedge^q G \to (G_q^*)'(G_q^*)^q$, dado por $(g \wedge h)\beta = [\widetilde{g}, \widetilde{h}]$ e $(\widehat{k})\beta = \widetilde{k}^q$ é um isomorfismo temos:

$$Z_q^\wedge(G) = \{g \in G | 1 = g \wedge a \in G \wedge^q G \;\; \forall \;\; a \in G\}$$

$$= \{g \in G | [\widetilde{g}, \widetilde{a}] = 1 \ \forall \ a \in G\} \text{ (usando } \beta)$$
$$= \left\{g \in G | [\widetilde{g}, x] = 1 \ \forall \ x \in G_q^*\right\}$$
$$= \left\{g \in G | \widetilde{g} \in Z(G_q^*)\right\}$$
$$= \left(Z(G_q^*)\right) \pi.$$

□

Assim, pelo Teorema 4.12, o centro q-exterior de um grupo G dado por uma apresentação policíclica pode ser facilmente determinado: Primeiro determinamos uma apresentação policíclica para G_q^* e seu correspondente epimorfismo natural π usando métodos da Seção 4.1.1, então calculamos o centro $Z(G_q^*)$ usando métodos padrões para grupos policiclicamente apresentados e, finalmente, aplicamos π para obter $Z_q^\wedge(G) = \left(Z(G_q^*)\right) \pi$.

Exemplo 4.13 (Continuação do Exemplo 4.3)**.** *Segue da apresentação policíclica de* $(S_3)_q^*$ *que o subgrupo* $Z\left((S_3)_2^*\right) = \langle t_1, t_3 \rangle$*. Assim* $Z_q^\wedge(S_3) = 1$ *e* S_3 *é* 2*-capaz. De fato, o grupo* $Q = \langle a, b | a^4 = 1, a^{-1}ba = b^{-1}, b^3 = 1 \rangle$ *tem centro* $Z(Q) =< a^2 >= Z_2(Q)$ *com ordem 2 e* $S_3 \cong Q/Z(Q)$*.*

Exemplo 4.14 (Continuação do Exemplo 4.4)**.** *Segue da apresentação policíclica de* $(D_\infty)_q^*$ *que o subgrupo* $Z_q\left((D_\infty)_2^*\right) = \langle t_1, t_2 \rangle$*. Assim* $Z_q^\wedge(D_\infty) = 1$ *e* D_∞ *é* 2*-capaz. De fato, o grupo* $Q = \langle a, b | a^4 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ *tem centro* $Z(Q) =< a^2 >= Z_2(Q)$ *com ordem 2 e* $D_\infty \cong Q/Z(Q)$*.*

4.4 O quadrado q-tensorial

Suponha que um grupo policíclico G é dado por uma apresentação policíclica consistente F_n/R. Nesta seção descreveremos um método efetivo para calcular uma apresentação policíclica para seu quadrado q-tensorial $G \otimes^q G$.

Usaremos que $G \otimes^q G$ está imerso no grupo $\nu^q(G)$. Descreveremos um método para calcular uma apresentação policíclica consistente para $\nu^q(G)$ e determinar uma apresentação para $G \otimes^q G$ como subgrupo de $\nu^q(G)$. Iniciaremos calculando uma apresentação para $\nu^q(G)/\Delta^q(G)$.

4.4.1 Uma apresentação consistente para $\nu^q(G)/\Delta^q(G)$

Seja F_n/R uma apresentação policíclica consistente para o grupo policíclico G nos geradores $g_1, ..., g_n$ e relatores $r_1, ..., r_l$ com conjunto de índice I. Usando as ideias da Seção 4.2, podemos determinar uma apresentação policíclica consistente F_r/U para $G \wedge^q G$ nos geradores $w_1, ..., w_r$ e relatores $u_1, ..., u_s$, digamos. Agora iremos determinar uma apresentação policíclica consistente para $\nu^q(G)/\Delta^q(G)$ a partir desta apresentação de $G \wedge^q G$.

Podemos, conforme Observação 4.9, determinar a imagem da q-biderivação $\lambda : G \times G \times G \to G \wedge^q G$: $(g, h, 1) \mapsto (g \wedge h)$ e $(1, 1, k) \mapsto \widehat{k}$ na apresentação policíclica consistente obtida para $G \wedge^q G$. Analogamente, podemos construir a ação natural de G sobre a apresentação policíclica determinada de $G \wedge^q G$ como definido por $(g \wedge h)^x = g^x \wedge h^x$, $\widehat{k}^x = \widehat{k^x}$ usando a Observação 4.9.

Definição 4.15. *Com esta notação definimos o grupo $\tau^q(G)$ como o grupo gerado por $g_1, ..., g_n, g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi, w_1 ..., w_r$ sujeito às seguintes relações definidoras*

(1) $r_i(g_1, ..., g_n) = 1$ *para* $1 \leq i \leq l$,

(2) $r_i(g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi) = 1$ *para* $1 \leq i \leq l$,

(3) $u_i(w_1, ..., w_r) = 1$ *para* $1 \leq i \leq s$,

(4) $g_i^{-1} g_j^\varphi g_i = g_j^\varphi \left\{(g_i, g_j, 1)\lambda\right\}^{-1}$ *para* $1 \leq i, j \leq n$,
$g_i g_j^\varphi g_i^{-1} = g_j^\varphi \left\{(g_i^{-1}, g_j, 1)\lambda\right\}^{-1}$ *para* $1 \leq i, j \leq n$ $i \notin I$

(5) $g_j^{-1} w_i g_j = w_i^{g_j}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$
$g_j w_i g_j^{-1} = w_i^{g_j^{-1}}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, $j \notin I$
$g_j^{-\varphi} w_i g_j^\varphi = w_i^{g_j}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$
$g_j^\varphi w_i g_j^{-\varphi} = w_i^{g_j^{-1}}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, $j \notin I$.

Note que podemos calcular o lado direito das relações (4) e (5) como palavras em $w_1, ..., w_r$ pela Observação 4.9.

Teorema 4.16. *Seja $W = \langle w_1, ..., w_r \rangle \leq \tau^q(G)$.*

(i) W é normal em $\tau^q(G)$ com $\tau^q(G)/W \cong G \times G$

(ii) A apresentação de $\tau^q(G)$ é uma apresentação policíclica consistente.

(iii) $W \cong G \wedge^q G$.

(iv) $\psi : \nu^q(G) \to \tau^q(G)$ *definido por* $(g_i)\psi = g_i$, $(g_i^\varphi)\psi = g_i^\varphi$ *e* $(\widehat{k})\psi = (1, 1, k)\lambda$ *para* $1 \leq i \leq n$ *e* $k \in G$ *estende a um homomorfismo bem definido com núcleo* $\Delta^q(G)$.

Demonstração. Em princípio, vamos analisar as relações de $\tau^q(G)$ com mais detalhes. As relações em (5) nos dizem que W é um subgrupo normal de $\tau^q(G)$. As relações $(1), (2)$ e (4) implicam que $\tau^q(G)/W \cong G \times G^\varphi$. Além disso, as relações em (3) mostram que W é um fator de $G \wedge^q G$. Assim, $\tau^q(G)$ satisfaz a sequência exata

$$G \wedge^q G \to \tau^q(G) \to G \times G^\varphi \to 1.$$

Agora, as relações em (5) implicam que $G \times G^\varphi$ age por conjugação sobre W como $G \times G$ age naturalmente sobre $G \wedge^q G$. Em particular, obtemos que $[w, g] = w^{-1}w^g$ e analogamente $[w, h^\varphi] = w^{-1}w^{h^\varphi}$ para toda palavra w em $w_1, ..., w_r$, toda palavra g em $g_1, ..., g_n$ e toda palavra h^φ em $g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi$. Além disso, a definição de q-biderivação e as relações em (4) implicam que $[g, h^\varphi] = (g, h, 1)\lambda$ para toda palavra g em $g_1, ..., g_n$ e toda palavra h^φ em $g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi$.

$i)$ Segue diretamente das considerações anteriores.

$ii)$ As relações (1)-(5) têm a forma de uma apresentação policíclica. Logo, resta checar a consistência dessa apresentação. Toda relação consistente nos geradores $g_1, ..., g_n$ é satisfeita já que a relação (1) vem de uma relação policíclica consistente de G. Analogamente, as relações em (2) e (3) dizem que toda relação de consistência nos geradores $g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi$ e $w_1, ..., w_r$ são satisfeitas. Além disso, se uma relação de consistência envolve um gerador de $w_1, ..., w_r$, então ela é satisfeita, já que $G \times G^\varphi$ age sobre W como $G \times G$ age naturalmente sobre $G \wedge^q G$. Resta considerar as relações de consistência em $g_1, ..., g_n, g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi$ envolvendo geradores g_i e g_j^φ. Elas são:

$$g_k^\varphi(g_j g_i) = (g_k^\varphi g_j)g_i \text{ para } j > i;$$

$$g_k^\varphi(g_j^\varphi g_i) = (g_k^\varphi g_j^\varphi)g_i \text{ para } k > j;$$

$$((g_j^\varphi)^{e_j})g_i = (g_j^\varphi)^{e_j - 1}(g_j^\varphi g_i) \text{ para } j \in I;$$

$$g_j^{\varphi}(g_i^{e_i}) = (g_j^{\varphi} g_i) g_i^{e_i - 1} \text{ para } i \in I;$$

$$g_j^{\varphi} = (g_j^{\varphi} g_i^{-1}) g_i \text{ para } i \notin I.$$

Considere a primeira dessas relações de consistência como um exemplo. Suponha que $g_i^{-1} g_j g_i = r_{ij}(g_1, ..., g_n) = r_{ij}$ nas relações de G e usando que λ é uma q-biderivação.

$$\begin{aligned}
g_k^{\varphi}(g_j g_i) &= (g_j g_i)(g_k^{\varphi})^{g_j g_i} \\
&= (g_i r_{ij}) \left(g_k^{\varphi} \left((g_j g_i, g_k, 1) \lambda \right)^{-1} \right), \\
(g_k^{\varphi} g_j) g_i &= \left(g_j g_k^{\varphi} \left((g_j, g_k, 1) \lambda \right)^{-1} \right) g_i \\
&= g_j g_k^{\varphi} g_i \left(\left((g_j, g_k, 1) \lambda \right)^{-1} \right)^{g_i} \\
&= g_j g_i (g_k^{\varphi})^{g_i} \left((g_j, g_k, 1) \lambda^{g_i} \right)^{-1} \\
&= g_i r_{ij} g_k^{\varphi} \left((g_i, g_k, 1) \lambda \right)^{-1} \left(\left(g_j^{g_i}, g_k^{g_i}, 1 \right) \lambda \right)^{-1} \\
&= g_i r_{ij} g_k^{\varphi} \left(\left(g_j^{g_i}, g_k^{g_i}, 1 \right) \lambda \left(g_i, g_k, 1 \right) \lambda \right)^{-1} \\
&= g_i r_{ij} g_k^{\varphi} \left((g_j g_i, g_k, 1) \lambda \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Podemos checar usando cálculos análogos que todas outras relações de consistência são também satisfeitas. Assim, obtemos que $\tau^q(G)$ é dado por uma apresentação policíclica consistente.

iii) Segue de (*ii*) e da teoria de apresentações policíclicas (veja, [13] Seção 8.3) que o subgrupo W tem uma apresentação policíclica consistente nos geradores $w_1, ..., w_r$ e relações $u_1, ..., u_s$. Logo $W \cong G \wedge^q G$.

iv) Como λ é uma q-biderivação todas as relações de $\nu^q(G)$ valem em $\tau^q(G)$. Desse modo, $\psi : \nu^q(G) \to \tau^q(G)$ é um homomorfismo sobrejetor já que $g_i, g_j^{\varphi} \in Im(\psi)$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ e se $w_i \in W \cong G \wedge^q G$, w_i é o produto de comutadores e q-ésimas potências logo $w_i \in Im(\psi)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Assim, $Im(\psi) = \tau^q(G)$. E mais $([g, h^{\varphi}])\psi = [g, h^{\varphi}] = (g, h, 1)\lambda$ e $(\widehat{k})\psi = (1, 1, k)\lambda$ para todas palavras g em $g_1, ..., g_n$ e h^{φ} em $g_1^{\varphi}, ..., g_n^{\varphi}$ e $k \in G$. Assim sendo, a aplicação induzida por ψ sobre o subgrupo $\Upsilon^q(G)$ coincide com $\delta : \Upsilon^q(G) \to G \wedge^q G$ por construção. Obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Upsilon^q(G) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \nu^q(G) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & G \times G^{\varphi} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 1 \\
1 \arrow[r] & W \arrow[r] & \tau^q(G) \arrow[r] & G \times G^{\varphi} \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Segue que $Ker(\psi) \leq \Upsilon^q(G)$ e consequentemente $Ker(\psi) = Ker(\delta) = \Delta^q(G)$. $\square$

Exemplo 4.17 (Continuação do Exemplo 4.3). *De acordo com este resultado, a seguinte apresentação policíclica é uma apresentação de $\tau^2(S_3) = \nu^2(S_3)/\Delta^2(S_3)$ que é o grupo gerado por $g_1, g_2, g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, w$ sujeito às seguintes relações:*

(1) $g_1^2 = 1,\ g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1},\ g_2^3,$

(2) $(g_1^{\varphi})^2 = 1,\ (g_1^{\varphi})^{-1}g_2^{\varphi}g_1^{\varphi} = (g_2^{\varphi})^{-1},\ (g_2^{\varphi})^3,$

(3) $w^6 = 1,$

(4) $g_1^{-1}g_1^{\varphi}g_1 = g_1^{\varphi},$
$g_1^{-1}g_2^{\varphi}g_1 = g_2^{\varphi}w^2,$
$g_2^{-1}g_1^{\varphi}g_2 = g_1^{\varphi}w^4,$
$g_2^{-1}g_2^{\varphi}g_2 = g_2^{\varphi},$

(5) $g_1^{-1}wg_1 = w^5,$
$g_2^{-1}wg_2 = w,$
$(g_1^{\varphi})^{-1}wg_1^{\varphi} = w^5,$
$(g_2^{\varphi})^{-1}wg_2\varphi = w.$

Exemplo 4.18 (Continuação do Exemplo 4.4). *De acordo com este resultado, a seguinte apresentação policíclica é uma apresentação de $\tau^2(D_\infty) = \nu^2(D_\infty)/\Delta^2(D_\infty)$ que é o grupo gerado por $g_1, g_2, g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, w_1, w_2, w_3$ sujeitos às seguintes relações:*

(1) $g_1^2 = 1,\ g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1},$

(2) $(g_1^{\varphi})^2 = 1,\ (g_1^{\varphi})^{-1}g_2^{\varphi}g_1^{\varphi} = (g_2^{\varphi})^{-1},$

(3) $w_1^{-1}w_2w_1 = w_2,\ w_2^2,$
$w_1^{-1}w_3w_1 = w_3,\ w_3^2,$
$w_2^{-1}w_3w_2 = w_3,$

(4) $g_1^{-1}g_1^{\varphi}g_1 = g_1^{\varphi}$,
$g_1^{-1}g_2^{\varphi}g_1 = g_2^{\varphi}w_1^{-1}w_3$,
$g_2^{-1}g_1^{\varphi}g_2 = g_1^{\varphi}w_1w_3$,
$g_2^{-1}g_2^{\varphi}g_2 = g_2^{\varphi}$,
$g_2g_1^{\varphi}g_2^{-1} = g_1^{\varphi}w_1^{-1}w_3$,
$g_2g_2^{\varphi}g_2^{-1} = g_2^{\varphi}$,

(5) $g_1^{-1}w_1g_1 = w_1^{-1}$, $g_1^{-1}w_2g_1 = w_2$, $g_1^{-1}w_1g_1 = w_3$,
$g_2^{-1}w_1g_2 = w_1$, $g_2^{-1}w_2g_2 = w_2$, $g_2^{-1}w_3g_2 = w_3$,
$g_2w_1g_2^{-1} = w_1$, $g_2w_2g_2^{-1} = w_2$, $g_2w_3g_2^{-1} = w_3$,
$(g_1^{\varphi})^{-1}w_1g_1^{\varphi} = w_1^{-1}$, $(g_1^{\varphi})^{-1}w_2g_1^{\varphi} = w_2$, $(g_1^{\varphi})^{-1}w_1g_1^{\varphi} = w_3$,
$(g_2^{\varphi})^{-1}w_1g_2^{\varphi} = w_1$, $(g_2^{\varphi})^{-1}w_2(g_2^{\varphi}) = w_2$, $(g_2^{\varphi})^{-1}w_3(g_2^{\varphi}) = w_3$,
$g_2^{\varphi}w_1(g_2^{\varphi})^{-1} = w_1$, $g_2^{\varphi}w_2(g_2^{\varphi})^{-1} = w_2$, $g_2^{\varphi}w_3(g_2^{\varphi})^{-1} = w_3$.

4.4.2 Uma apresentação policíclica para $\nu^q(G)$

Agora estamos numa situação em que os métodos da Seção 4.1, em particular, Seção 4.1.2, podem ser aplicados. Usamos a apresentação policíclica consistente de $\tau^q(G)$ no lugar de F_n/R e a apresentação finita de $\nu^q(G)$ no lugar de F_m/S. Note que o epimorfismo $\psi : \nu^q(G) \to \tau^q(G)$ tem a forma requerida da Seção 4.1.2. Obtemos o seguinte.

Teorema 4.19. $\nu^q(G) = \mathfrak{E}^q(\tau^q(G))$.

Demonstração. Temos $\tau^q(G) = F_n/R$, $\nu^q(G) = F_m/S$ e o epimorfismo $\psi : \nu^q(G) \to \tau^q(G)$ com núcleo $Ker(\psi) = K/S$. Por definição $\mathfrak{E}^q(\tau^q(G)) \cong F_m/K^q[K, F_m]S$. Pelo Teorema 4.16 o grupo $\nu^q(G)$ é uma extensão q-central de $\tau^q(G)$. Assim, $[K, F_m]K^q \leq S$. Como pelo Lema 4.5, $\mathfrak{E}^q(\tau^q(G)) = F_m/K^q[K, F_m]S$ então $\mathfrak{E}^q(\tau^q(G)) = F_m/S = \nu^q(G)$ como desejado. $\square$

Observe que usamos uma apresentação finita de $\nu^q(G)$, que garantimos finitude só para G finito. Por outro lado, o epimorfismo $\psi : \nu^q(G) \to \tau^q(G)$ independe da finitude da apresentação de $\nu^q(G)$, sendo assim, podemos considerar esse epimorfismo. Sendo G um grupo policíclico infinito temos que $\nu^q(G)$ tem uma apresentação infinita, digamos F/S, onde o grupo F é um grupo livre sobre o conjunto de geradores de $\nu^q(G)$, que denotaremos por X, de posto infinito e S é o fecho normal das relações $((2.13) - (2.20))$. Por outro lado, $\nu^q(G)$ é policíclico (conforme Teorema 2.11) e tem uma apresentação finita $\langle X_0 | S_0 \rangle$, onde $X_0 \subseteq X$ e o fecho de S_0, $\bar{S_0} = S$. Então podemos usar os resultados obtidos no Lema 4.5, e basta provar que a imagem de ς é gerada pelo conjunto $g_1, ..., g_n, g_1^{\varphi}, ..., g_n^{\varphi}, \widehat{g_i}, ..., \widehat{g_n}$ e que $(S)\varsigma$ é gerado pelas relações definidoras de $\nu^q(G)$ avaliadas apenas nos geradores policíclicos de G.

Proposição 4.20. *Considere o subgrupo L de $(\tau^q(G))_q^*$ dado por*

$$L = \langle g_1, ..., g_n, g_1^{\varphi}, ..., g_n^{\varphi}, (1, 1, g_1)\lambda, ..., (1, 1, g_n)\lambda \rangle .$$

Então $Im(\varsigma) = L$, além disso $(S)\varsigma$ é gerado pelas relações definidoras de $\nu^q(G)$ nos geradores policíclicos de G e G^{φ} em $(\tau^q(G))_q^*$.

Demonstração. Para que $Im(\varsigma) = L$ basta mostrar que $(1, 1, k)\lambda \in L$ para todo $k \in G$. Vamos provar por indução sobre o número de geradores policíclicos de G. Para $n = 1$ então $G =< g_1 >$ e $k = g_1^{\alpha}$, para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$. Assim, $(1, 1, k)\lambda = (1, 1, g_1^{\alpha})\lambda$, por indução sobre α temos que para $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}(1, 1, k)\lambda &= (1, 1, g_1^2)\lambda \\ &= \underbrace{(1, 1, g_1)\lambda}_{\in L} \underbrace{\prod_{i=1}^{q-1} \left(((g_1, g_1^{-i}, 1)\lambda)^{g_1^{q-1-i}} \right)}_{=[g_1, g_1^{-i\varphi}] \in L} \underbrace{(1, 1, g_1)\lambda}_{\in L} \in L.\end{aligned}$$

Se vale para $\alpha - 1$ então

$$\begin{aligned}(1, 1, k)\lambda &= (1, 1, g_1^{\alpha})\lambda \\ &= (1, 1, g_1)\lambda \prod_{i=1}^{q-1} \left(\left((g_1, g_1^{-i(n-1)}, 1)\lambda \right)^{g_1^{q-1-i}} \right) (1, 1, g_1^{n-1})\lambda \in L.\end{aligned}$$

Assim, para $n = 1$, $(1, 1, k)\lambda \in L$.

Agora suponha que vale para $n - 1$, então se $k = g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n}$, segue que

$$(1, 1, k)\lambda = (1, 1, g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n})\lambda$$

$$= (1, 1, g_1^{\alpha_1})\lambda \prod_{i=1}^{q-1} \left(((g_1^{\alpha_1}, (g_2^{\alpha_2}...g_n^{\alpha_n})^{-i}, 1)\lambda)^{(g_1^{\alpha_1})^{q-1-i}} \right) (1, 1, g_2^{\alpha_2}...g_n^{\alpha_n})\lambda \in L \text{ por}$$

indução. Logo $Im(\varsigma) = L$. □

Portanto, calcular uma apresentação policíclica consistente de $\nu^q(G)$ é uma aplicação direta do algoritmo na Seção 4.1.2. Em resumo, nesse algoritmo obtemos uma apresentação policíclica consistente para $\tau^q(G)$, estende-a adicionando novos geradores (q-centrais) t_i para cada relator r_i de $\tau^q(G)$ trocando cada relator r_i por $r_i t_i^{-1}$. Em seguida, avalia-se as relações de consistência e os relatores de $\nu^q(G)$ nesta nova apresentação e aplica-se o Lema 4.5(b).

O seguinte resultado pode ser usado para reduzir o número de novos geradores adicionados e o número de relatores avaliados nesse processo.

Lema 4.21. *É redundante adicionar novos geradores correspondentes às relações em (1) e (2) da definição de $\tau^q(G)$. Se esses geradores não são introduzidos, então é redundante avaliar os relatores (1) e (2) na definição de $\nu^q(G)$.*

Demonstração. Os relatores em (1) e (2) da definição de $\nu^q(G)$ coincide com os relatores (1) e (2) da definição de $\tau^q(G)$. Portanto, se acrescentarmos novos geradores para os relatores em (1) e (2) da definição de $\tau^q(G)$ e, em seguida, avaliar os relatores em (1) e (2) da definição de $\nu^q(G)$, obtemos os geradores correspondentes como resultado. Por sua vez, vale dizer que os geradores correspondentes são eliminados no processo de construção do quociente descrito no Lema 4.5(b). Assim, o resultado segue. □

Exemplo 4.22 (Continuação do Exemplo 4.3). *Determinamos uma apresentação policíclica de $\nu^2(S_3)$ como uma extensão central $\mathfrak{E}^2(\tau^2(S_3))$ de $\tau^q(S_3)$. São muitos os cálculos para obter tal apresentação e omitimos detalhes aqui. Obtemos uma apresentação policíclica para $\nu^2(S_3)$ nos geradores $g_1, g_2, g_1^\varphi, g_2^\varphi, w, t$ e relações definidoras dadas por:*

(1) $g_1^2 = 1$, $g_1^{-1} g_2 g_1 = g_2^{-1}$, g_2^3,

(2) $(g_1^\varphi)^2 = 1$, $(g_1^\varphi)^{-1} g_2^\varphi g_1^\varphi = (g_2^\varphi)^{-1}$, $(g_2^\varphi)^3$,

(3) $w^6 = t$, t^2, *t-central,*

(4) $g_1^{-1}g_1^{\varphi}g_1 = g_1^{\varphi}w^6,$
$g_1^{-1}g_2^{\varphi}g_1 = g_2^{\varphi}w^8,$
$g_2^{-1}g_1^{\varphi}g_2 = g_1^{\varphi}w^4,$
$g_2^{-1}g_2^{\varphi}g_2 = g_2^{\varphi},$

(5) $g_1^{-1}wg_1 = w^5,$
$g_2^{-1}wg_2 = w,$
$g_1^{-1}wg_1 = w^5,$
$g_2^{-1}wg_2 = w.$

Obtemos que $S_3 \otimes^2 S_3 \cong < w > \leq \nu^2(S_3)$ *e assim* $S_3 \otimes^2 S_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$. *Além disso, obtemos que* $\Delta^2(S_3) \cong \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 4.23. *Também calculamos uma apresentação policíclica para* $\nu^3(D_\infty)$ *que é dada a seguir: O grupo* $\nu^3(D_\infty)$ *é gerado por* g_1, g_2, $g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}$, w_1, w_2 *sujeitos às seguintes relações:*

(1) $g_1^2 = 1$, $g_1^{-1}g_2g_1 = g_2^{-1},$

(2) $(g_1^{\varphi})^2 = 1$, $(g_1^{\varphi})^{-1}g_2^{\varphi}g_1^{\varphi} = (g_2^{\varphi})^{-1},$

(3) w_1^2, $w_1^{-1}w_2w_1 = w_2^{-1},$

(4) $g_1^{-1}g_1^{\varphi}g_1 = g_1^{\varphi},$
$g_1^{-1}g_2^{\varphi}g_1 = g_2^{\varphi}w_2^{-2},$
$g_2^{-1}g_1^{\varphi}g_2 = g_1^{\varphi}w_2^{2},$
$g_2^{-1}g_2^{\varphi}g_2 = g_2^{\varphi},$
$g_2g_1^{\varphi}g_2^{-1} = g_1^{\varphi}w_2^{-2},$
$g_2g_2^{\varphi}g_2^{-1} = g_2^{\varphi},$

(5) $g_1^{-1}w_1g_1 = w_1,$ $\quad$ $g_1^{-1}w_2g_1 = w_2^{-1},$
$g_2^{-1}w_1g_2 = w_1w_2^2,$ $\quad$ $g_2^{-1}w_2g_2 = w_2,$
$g_2w_1g_2^{-1} = w_1w_2^{-2},$ $\quad$ $g_2w_2g_2^{-1} = w_2,$
$(g_1^{\varphi})^{-1}w_1g_1^{\varphi} = w_1,$ $\quad$ $(g_1^{\varphi})^{-1}w_2g_1^{\varphi} = w_2^{-1},$
$(g_2^{\varphi})^{-1}w_1g_2^{\varphi} = w_1w_2^2,$ $\quad$ $(g_2^{\varphi})^{-1}w_2(g_2^{\varphi}) = w_2,$
$g_2^{\varphi}w_1(g_2^{\varphi})^{-1} = w_1w_2^{-2},$ $\quad$ $g_2^{\varphi}w_2(g_2^{\varphi})^{-1} = w_2.$

E de acordo com esta apresentação obtemos que, $D_\infty \otimes^3 D_\infty \cong D_\infty$.

O cálculo da apresentação de $\nu^q(G)$ fica relativamente simples para o caso em que G é um grupo q-perfeito conforme o teorema a seguir. Continuaremos usando a mesma notação, mais especificamente:

Sejam F_n/R uma apresentação policíclica consistente para o grupo policíclico G nos geradores $g_1, ..., g_n$ e relatores $r_1, ..., r_l$ com conjunto de índice I, F_r/U uma apresentação policíclica consistente para $G \wedge^q G$ nos geradores $w_1, ..., w_r$ e relatores $u_1, ..., u_s$, determinada de acordo com a Seção 4.2. Determinamos a imagem da q-biderivação $\lambda : G \times G \times G \to G \wedge^q G$: $(g, h, 1) \mapsto (g \wedge h)$ e $(1, 1, k) \mapsto \widehat{k}$ na apresentação policíclica consistente obtida para $G \wedge^q G$ e construímos a ação natural de G sobre a apresentação policíclica determinada de $G \wedge^q G$ como definido por $(g \wedge h)^x = g^x \wedge h^x$, $\widehat{k}^x = \widehat{k^x}$, conforme Observação 4.9.

Teorema 4.24. *Seja G um grupo policíclico dado por esta notação. Se G é q-perfeito então o grupo $\nu^q(G)$ é o grupo gerado por $g_1, ..., g_n, g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi$, $w_1..., w_r$ sujeito às seguintes relações definidoras*

(1) $r_i(g_1, ..., g_n) = 1$ *para* $1 \leq i \leq l$,

(2) $r_i(g_1^\varphi, ..., g_n^\varphi) = 1$ *para* $1 \leq i \leq l$,

(3) $u_i(w_1, ..., w_r) = 1$ *para* $1 \leq i \leq s$,

(4) $g_i^{-1} g_j^\varphi g_i = g_j^\varphi \left\{(g_i, g_j, 1)\lambda\right\}^{-1}$ *para* $1 \leq i, j \leq n$,
$g_i g_j^\varphi g_i^{-1} = g_j^\varphi \left\{(g_i^{-1}, g_j, 1)\lambda\right\}^{-1}$ *para* $1 \leq i, j \leq n$ $i \notin I$

(5) $g_j^{-1} w_i g_j = w_i^{g_j}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$
$g_j w_i g_j^{-1} = w_i^{g_j^{-1}}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, $j \notin I$
$g_j^{-\varphi} w_i g_j^\varphi = w_i^{g_j}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$
$g_j^\varphi w_i g_j^{-\varphi} = w_i^{g_j^{-1}}$, *para* $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, $j \notin I$.

Demonstração. De fato, de acordo com a Definição 4.15 esta apresentação é a mesma de $\tau^q(G)$. Pelo Teorema 4.16 $\tau^q(G) \cong \nu^q(G)/\Delta^q(G)$. Se G é q-perfeito então, temos que $\Delta^q(G) = 1$ assim $\tau^q(G) \cong \nu^q(G)$ e consequentemente a apresentação dada é de $\nu^q(G)$. $\square$

Resumimos nosso método para calcular uma apresentação policíclica consistente para $G \otimes^q G$ a partir de uma apresentação policíclica consistente de G como segue.

Algoritmo 4.25. *a) Determine uma apresentação policíclica consistente para $G \wedge^q G$.*

b) Determine uma apresentação policíclica consistente para $\tau^q(G)$.

c) Determine uma apresentação policíclica consistente para $\nu^q(G)$.

d) Determine uma apresentação policíclica consistente para o subgrupo $\Upsilon^q(G)$ de $\nu^q(G)$.

O passo (a) é obtido por uma aplicação direta do método de extensão central da Seção 4.1. Se $G = F_n/R$ é uma apresentação policíclica consistente de G, então calculamos uma apresentação policíclica consistente para $G_q^* = F_n/[F_n, R^q]R^q$ e obtemos $G \wedge^q G$ identificando-o com $(G_q^*)'(G_q^*)^q$. O passo (b) é então uma aplicação direta do método desenvolovido na Seção 4.4.1. O passo (c) é obtido por outra aplicação do método de extensão central da Seção 4.1 para calcular $\mathfrak{E}^q(\tau^q(G))$, que pelo Teorema 4.19 é isomorfo a $\nu^q(G)$. O passo (d) é uma aplicação de métodos padrões para grupos policiclicamente apresentados.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] F. R. Beyl, J. Tappe, *Groups Extensions, Representations and the Schur Multiplicator*, Lecture Notes in Math., vol. 958, Springer-Verlag, 1982.

[2] R. D. Blyth and R. F. Morse, *Computing the nonabelian tensor squares of polycyclic groups*, J. Algebra **321**, (2009), 2139–2148.

[3] R. D. Blyth, P. Moravec and R.F. Morse, *On the nonabelian tensor squares of free nilpotent groups of finite rank*, Computational group theory and the theory of groups, Contemp. Math., **470**, Amer. Soc., Providence, RI (2008), 27–43.

[4] R. Brown, D.L. Johnson, and E.F. Robertson, *Some Computation of non-abelian tensor products of groups*, J. Algebra **111** (1987), 177–202.

[5] R. Brown and J.-L. Loday, *Excision homotopique en base dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris S.I Math. **298** (1984), No. 15, 353–356.

[6] R. Brown, *q-perfect Groups and Universal q-central Extensions*, Publ. Mat., **34** (1990), 291–297.

[7] R. Brown and J.-L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology **26** (1987), no. 3, 311–335.

[8] T. P. Bueno, *O quadrado q-tensorial de grupos: Uma abordagem via construção relacionada*, Tese de Doutorado, UnB, Brasília (2006).

[9] T. P. Bueno and N. R. Rocco,*The q-tensor square of groups*, to appear " J. Group Theory".

[10] D. Conduché and C. Rodríguez-Fernández,*Non-abelian and exterior products modulo q and universal q-central relative extension*, J. of Pure and Applied Algebra **78** (1992), 139–160.

[11] B. Eick, *Algorithms for polycyclic groups*, Habilitationsschrift, Universitä Kassel, 2001. J. Algebra 320 (2008), 927–944

[12] B. Eick and W. Nickel, *Computing the Schur multiplicator and the nonabelian tensor square of a polycyclic group*, J. Algebra 320 (2008), 927–944

[13] B. Eick, D. Holt and E.A. O'Brien, *Handbook of computational group theory*, Discrete Math. Appl., CRC Press, 2005.

[14] B. Eick and W. Nickel, *Polycyclic- Computing with polycyclic groups*, version 2.2, a refered GAP 4 package, see [41], available at http://www.icm.tu-bs.de/ag_algebra/software/eick/polycyclic, 2007.

[15] G. Ellis and C. Rodríguez-Fernández, *An exterior product for the homology of groups with integral coefficients modulo p*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 30, nº 4 (1989), 339–343.

[16] G. Ellis and F. Leonard, *Computing Schur multipliers and tensor products of finite groups*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, **95(2)** (1995), 137–147.

[17] G. Ellis, *Tensor products and q-crossed modules*, J. London Math. Soc., **2(51)** nº 2, (1995), 243–258.

[18] G. Ellis, *The nonabelian tensor product of finite groups is finite*, J. Algebra 111, (1987), 203–205.

[19] K.A. Hirsh, *On infinite soluble groups (I)*, Proceedings of the London Mathematical Society, **44**(2),(1938), 53–60.

[20] K.A. Hirsh, *On infinite soluble groups (II)*, Proceedings of the London Mathematical Society, **44**(2),(1938), 336–414.

[21] K.A. Hirsh, *On infinite soluble groups (III)*, Journal of the London Mathematical Society, **49**(2),(1946), 184–94.

[22] K.A. Hirsh, *On infinite soluble groups (IV)*, Journal of the London Mathematical Society, **27**,(1952) 81–85.

[23] K.A. Hirsh, *On infinite soluble groups (V)*, Journal of the London Mathematical Society, **29**,(1954), 250–251.

[24] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, London Math. Soc., Student Texts 15, Second Edition, 1997.

[25] H.Jürgensen, *Calculation with the elements of a finite group given by generators and defining relations*, In J. Leech (ed.), Computational problems in abstract Algebra, Oxford: Pergamon, 47–57.

[26] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Second Edition, Dover Publications, New York, 1976.

[27] A.McDermoth, *The Nonabelian Tensor Products of Groups: Computations and Structural Results*, PhD Thesis, Nat. Univ. Ireland, Gallway, April 1998.

[28] P. Moravec,*The nonabelian tensor product of polycyclic groups is polycyclic*, J. Group Theory **10**, (2007), 795–798.

[29] P. Moravec,*The exponents of nonabelian tensor products of groups*, J. Pure Appl. Algebra **212**, (2008), 1840–1848.

[30] I. Nakaoka, *Non-abelian tensor products of solvable groups*, J. Group Theory **3** (2000), 157–167.

[31] I. Nakaoka, *Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1994.

[32] I. Nakaoka, *Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1998.

[33] W. Nickel, *Central extensions of polycyclic groups*, Doctoral Thesis, Australian National University, 1993.

[34] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer, 1991.

[35] N. R. Rocco, *A presentation for crossed embedding of finite solvable groups*, Comm. Algebra, 22(6):1975–1998, 1994.

[36] N. R. Rocco, *On a construction related to the nonabelian tensor square of group*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.), 22(1):63–79, 1991.

[37] J. J. Rotman, *An Introduction to homological Algebra*, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1979.

[38] J. J. Rotman, *An Introduction to the theory of groups*, Fourth Edition, Springer, 1999.

[39] D. Segal, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press., 1990.

[40] C. C. Sims, *Computation with finitely presented groups*, Cambridge Univesity Press, Cambridge, 1994.

[41] The GAP group, *GAP-Groups, Algorithms an programming*, version 4.4, available at http://www.gap-system.org, 2005.

[42] M. P. Visscher, *On the nilpotency class and solvability length of non-abelian tensor products of groups*, Arch. Math. (Basel) **73** (1999), 161–171.

[43] J. H. C. Whitehead, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 51–110.