

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Existência e Multiplicidade de Soluções de um
Problema Elíptico Superlinear Indefinido.**

por

Maxwell Lizete da Silva

Brasília

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções de um Problema Elíptico Superlinear Indefinido.

por

Maxwell Lizete da Silva *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

16 de abril de 2010

Comissão Examinadora:

Prof. Elves A. B. Silva - MAT/UnB (Orientador)

Prof. José Valdo A. Gonçalves - IME/UFG (Membro)

Prof. Carlos Alberto P. dos Santos - MAT/UnB (Membro)

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki - MAT/UFV (Membro)

Prof. Everaldo S. Medeiros - MAT/UFPB (Membro)

*O autor foi bolsista do PICDT/CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Metade

*"Que a força do medo que tenho
Não me impeça de ver o que anseio
Que a morte de tudo em que acredito
Não me tape os ouvidos e a boca
Porque metade de mim é o que eu grito
Mas a outra metade é silêncio.
Que a música que ouço ao longe
Seja linda ainda que tristeza
Que a mulher que eu amo seja pra sempre amada
Mesmo que distante
Porque metade de mim é partida
Mas a outra metade é saudade.*

*Que as palavras que eu falo
Não sejam ouvidas como prece
e nem repetidas com fervor
Apenas respeitadas
Como a única coisa que resta
a um homem inundado de sentimentos
Porque metade de mim é o que ouço
Mas a outra metade é o que calo.*

*Que essa minha vontade de ir embora
Se transforme na calma e na paz que eu mereço
Que essa tensão que me corrói por dentro
Seja um dia recompensada
Porque metade de mim é o que eu penso
mas a outra metade é um vulcão.*

*Que o medo da solidão se afaste, e que o convívio comigo
mesmo se torne ao menos suportável.*

*Que o espelho reflita em meu rosto um doce sorriso
Que eu me lembro ter dado na infância
Por que metade de mim é a lembrança do que fui
A outra metade eu não sei.*

*Que não seja preciso mais do que uma simples alegria
Pra me fazer aquietar o espírito
E que o teu silêncio me fale cada vez mais
Porque metade de mim é abrigo
Mas a outra metade é cansaço.*

*Que a arte nos aponte uma resposta
Mesmo que ela não saiba
E que ninguém a tente complicar
Porque é preciso simplicidade pra fazê-la florescer
Porque metade de mim é platéia
E a outra metade é canção.*

*E que a minha loucura seja perdoada
Porque metade de mim é amor
E a outra metade também. "*

*"You hold the answers deep within your own
mind. Consciously, you've forgotten it.
That's the way the human mind works.
Whenever something is too unpleasant, too
shameful for us to entertain, we reject it. We
erase it from our memories.
But the imprint is always there. Nothing is
ever really forgotten"*

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida.

Agradeço à Neusa Alves da Silva(*in memoriun*), principal responsável por esta conquista.

Agradeço ao professor Elves, o orientador deste trabalho, pelas sugestões, ensinamentos e sua infindável paciência, digna dos contos bíblicos.

Agradeço aos meus amigos pelo carinho, alegria, estímulo e companheirismo. Fatores essenciais nesta vida.

Agradeço à professora Liliane e aos professores Marcelo Furtado, João Carlos, Raderson e Pedro Roitman que certamente contribuíram para a minha formação, desenvolvimento e realização deste trabalho.

Agradeço à Tânia Maria S. Sertão, da secretaria de pós-graduação, pela maneira simpática, carinhosa e eficiente com que resolve as burocracias da vida acadêmica.

Finalmente, agradeço aos professores do IME/UFG pela liberação para cursar o doutorado. Em particular, agradeço à professora Gisele e aos professores Maurílio, João Medrado e Ronaldo Garcia, pelo incentivo.

Resumo

Consideramos o problema semilinear $-\Delta u + m(x)u = a(x)f(u)$ em um domínio suave limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, sob as condições de Neumann na fronteira, quando $a \in C(\bar{\Omega})$ troca de sinal em Ω e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui crescimento superlinear subcrítico. Os resultados estão baseados no primeiro autovalor do operador $-\Delta + m$, sob as mesmas condições de fronteira. Inicialmente, utilizando o método de minimização com vínculo, estabelecemos a existência de uma solução positiva para o problema superlinear homogêneo no caso de perturbações adequadas do potencial m . Posteriormente, aplicamos o método de minimax e a teoria de Morse em dimensão infinita para demonstrar que o problema não homogêneo possui pelo menos três soluções não triviais. Um resultado de existência de três soluções para o problema perturbado também é apresentado.

Palavras chave: Teorema do passo da montanha; lema de Morse em dimensão infinita; não linearidade indefinida.

Abstract

We consider the semilinear problem $-\Delta u + m(x)u = a(x)f(u)$ on a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, under Neumann boundary conditions, when $a \in C(\bar{\Omega})$ changes sign in Ω and $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ has superlinear and subcritical growth. The results are based on the first eigenvalue for the operator $-\Delta + m$, under the same boundary conditions. Initially, using the constrained minimization method, we establish the existence of a positive solution for the homogeneous superlinear problem when we have a suitable perturbation of the potential function m . Posteriorly, applying the minimax method and the infinite dimensional Morse theory, we establish the existence of at least three nontrivial solutions for the nonhomogeneous problem. A result concerning the existence of three solution for the perturbed problem is also presented.

Keywords: Mountain pass theorem; infinite dimensional Morse lemma, indefinite nonlinearity.

Sumário

Introdução	1
1 Existência e Dependência de Soluções para o Problema Homogêneo	5
1.1 Introdução	5
1.2 Preliminares	8
1.3 Um Problema de Autovalor	11
1.4 Demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.4	15
1.5 Apêndice	21
1.5.1 Regularidade	21
1.5.2 Demonstração do Teorema 1.16	22
1.5.3 Demonstração do Teorema 1.17	24
1.5.4 Um problema de convergência fraca em $L^s(\Omega)$.	25
2 Existência, Multiplicidade e Dependência de Soluções para o Problema não Homogêneo	27
2.1 Introdução	27
2.2 Preliminares	30
2.2.1 A condição (PS) e a geometria do passo da montanha	32
2.2.2 Comportamento das soluções	34
2.3 Duas Soluções para (\mathcal{P}_m)	35
2.4 O Lema de Morse Generalizado	37
2.4.1 A função $h : B_\delta(0) \cap N \rightarrow N^\perp$	39
2.4.2 O índice de Morse	43
2.4.3 O comportamento local de J em u_1	46
2.5 Uma terceira solução [caso $\mathcal{M}(u_1) = 0$]	48
2.5.1 O enlace	50
2.6 Uma terceira solução [caso $\mathcal{M}(u_1) = 1$]	54
2.7 Dependência Contínua das Soluções	58
2.8 Apêndice	60
2.8.1 O Teorema de Brezis-Kato para Neumann	61
2.8.2 Regularidade das soluções	63

Introdução

Neste trabalho utilizamos métodos variacionais para estudar a existência, multiplicidade e dependência das soluções do problema elíptico semilinear

$$(\mathcal{P}_m) \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)f(u), & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, $m \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq \frac{N}{2}$, $a \in C(\bar{\Omega})$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é superlinear e possui crescimento subcrítico.

Nosso interesse principal é estudar o problema indefinido, isto é, aquele em que $a \in C(\bar{\Omega})$ satisfaz

(A₁) $\Omega_a^+ := \{x \in \Omega ; a(x) > 0\}$ e $\Omega_a^- := \{x \in \Omega ; a(x) < 0\}$ são não vazios.

Nos últimos anos vários autores dedicaram-se ao estudo de problemas elípticos com não linearidade de sinal indefinido (veja [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 24, 28] e suas referências). Resultados sobre a existência de uma solução positiva para (\mathcal{P}_m) , supondo que o potencial m é constante e negativo, podem ser encontrados em [6, 7, 8, 9, 10, 24]. Estudos para o Problema (\mathcal{P}_m) em que m não é necessariamente uma constante (relacionados aos do nosso trabalho) foram estabelecidos em [2, 10, 28]. A seguir faremos uma breve descrição dos problemas abordados em cada capítulo do nosso trabalho.

No Capítulo 1 voltamos a nossa atenção para o problema homogêneo

$$(\mathcal{PH}_m) \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^r, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$, estabelecendo a existência de uma solução positiva para $(\mathcal{PH}_{\hat{m}})$, quando $\hat{m} \in L^\sigma(\Omega)$ é uma perturbação da função m . Como visto na literatura, a existência

de solução para (\mathcal{P}_m) está fortemente relacionada ao problema de autovalor

$$(EP_m)_\lambda \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = \lambda u, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega. \end{cases}$$

Em relação ao Problema $(EP_m)_\lambda$, supomos

(A₂) O primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$, $\lambda_1(-\Delta + m)$, é nulo,

(A₃) $\int a(x)\varphi_1^{r+1} < 0$, onde $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção de $(EP_m)_\lambda$.

Observamos que neste trabalho verificamos que o primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$ é simples, isolado e que sua primeira autofunção não troca de sinal.

Considerando uma sequência $\{m_j\}_j \subset L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq \frac{N}{2}$, satisfazendo

(m) $m_j \rightharpoonup m$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$. Além disso, se $\sigma = \frac{N}{2}$, existe $k \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ tal que $|m_j| \leq k$ q.t.p. em Ω ,

enunciamos os resultados obtidos no Capítulo 1.

Teorema 1.1 *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e (m). Então existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que (\mathcal{PH}_{m_j}) possui uma solução positiva w_j para todo $j \geq j_1$.*

Teorema 1.2 *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e (m). Seja $\{w_j\}_j$ a sequência de soluções dada pelo Teorema 1.1. Então $\{w_j\}_j$ possui uma subsequência que converge fortemente em $H^1(\Omega)$ para uma solução de (\mathcal{PH}_m) . Como consequência imediata do Teorema 1.1, temos*

o **Corolário 1.3** *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e $\sigma \geq \frac{N}{2}$. Então existe $R > 0$ tal que $(\mathcal{PH}_{\hat{m}})$ possui uma solução positiva sempre que $\|m - \hat{m}\|_{L^\sigma(\Omega)} < R$.*

Por outro lado, se não tivermos informação da proximidade (na convergência fraca) em $L^\sigma(\Omega)$ da perturbação \hat{m} em relação a m , mas soubermos que o primeiro autovalor de $(EP_{\hat{m}})_\lambda$, $\lambda_1(-\Delta + \hat{m})$, está próximo de $\lambda_1(-\Delta + m)$, ainda podemos estabelecer a existência de uma solução para o problema perturbado:

Teorema 1.4 *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e $\sigma \geq \frac{N}{2}$. Dado $R > 0$ (ou $f_{\frac{N}{2}} \in L^{N/2}(\Omega)$ no caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$), existe $\mu > 0$ tal que, se $\hat{m} \in L^\sigma(\Omega)$, satisfaz*

(i) $\|m - \hat{m}\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq R$ ($|\hat{m}| \leq f_{\frac{N}{2}}$ q.t.p. em Ω no caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$),

(ii) $\int |\nabla \varphi_1|^2 + \hat{m}(x)\varphi_1^2 \leq \mu$,

(iii) $-\mu < \lambda_1(-\Delta + \hat{m}) < 0$,

então existe uma solução para $(\mathcal{PH}_{\hat{m}})$.

Para a demonstração dos resultados acima mencionados, utilizamos o método de minimização com vínculo. Devido a este fato, as soluções encontradas estão em $H^1(\Omega)$. Na realidade verificamos que estas soluções estão $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ou em $L^t(\Omega)$ para cada $1 \leq t < \infty$, conforme $m \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma > \frac{N}{2}$, ou $m \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, respectivamente.

Como um resultado preliminar, necessário para a demonstração dos teoremas enunciados, verificamos que o Problema $(EP_{m_j})_\lambda$, sob a condição (m) , satisfaz um resultado de continuidade para o primeiro e segundo autovalores e suas respectivas autofunções.

No Capítulo 2, definindo $F(s) := \int_0^s f(t)dt$, estudamos o Problema (\mathcal{P}_m) sob hipóteses mais gerais na não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f_1) \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)s - (p+1)F(s)}{s^2} = 0;$$

$$(f_2) \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s) - |s|^{p-1}s}{|s|^p} = 0, \text{ para algum } 1 < p < 2^* - 1;$$

$$(f_3) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s) - |s|^{r+1}}{|s|^{r+1}} = 0, \text{ para algum } 1 < r < 2^* - 1.$$

A hipótese (f_3) nos garante que (\mathcal{P}_m) possui solução trivial $u = 0$, uma vez que, neste caso, $f(0) = 0$. Tendo em vista este fato, neste trabalho, procuramos por soluções não triviais para (\mathcal{P}_m) . Inicialmente, utilizando hipóteses mais fracas, obtemos uma solução positiva e uma negativa para (\mathcal{P}_m) . Posteriormente, através de uma aplicação da teoria de Morse em dimensão infinita, asseguramos a existência de uma terceira solução não trivial para (\mathcal{P}_m) . Para o uso desta teoria, necessitamos de mais regularidade da função f , supondo

$$(f_4) \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } |f'(s)| \leq C(1 + |s|^{\alpha-1}) \text{ para algum } C > 0 \text{ e } 1 < \alpha < 2^* - 1.$$

Além disso, neste capítulo, admitimos que o potencial m satisfaz

$$(m_1) \quad m \in L^\sigma(\Omega) \text{ para algum } \sigma > N.$$

Como no Capítulo 1, nossos resultados estão apoiados no Problema $(EP_m)_\lambda$. Tendo em vista que permitimos que a não linearidade possua comportamentos distintos na origem e no infinito, consideramos a hipótese alternativa (para o caso $p \neq r$)

$$(A_4) \quad \int a(x)\varphi_1^{p+1} \neq 0.$$

Como principal resultado do Capítulo 2, temos o

Teorema 2.1 *Suponha $(A_1) - (A_4)$, $(f_1) - (f_4)$ e (m_1) . Então o Problema (\mathcal{P}_m) possui pelo menos três soluções não triviais.*

Finalmente, motivados pelos resultados obtidos no Capítulo 1 e adotando a seguinte versão da condição (m) :

(m_2) $m_j \rightarrow m$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$, para algum $\sigma > N$,

estabelecemos no Capítulo 2 um resultado de dependência contínua de soluções para (\mathcal{P}_{m_j}) .

Teorema 2.2 *Suponha $(A_1) - (A_4)$, $(f_1) - (f_4)$ e (m_2) . Então existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que (\mathcal{P}_{m_j}) possui pelo menos três soluções não triviais para cada $j \geq j_o$.*

Afrouzi [2], sob condições de Dirichlet na fronteira, dentre outros resultados, demonstrou o Teorema 1.1 para o caso em que $m_j \rightarrow m$ uniformemente em $C(\overline{\Omega})$. Em [28], Tehrani estabeleceu o Corolário 1.3 para o caso em que $m \in C(\overline{\Omega})$ e o Teorema 1.4 quando $m \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, sob a hipótese adicional $\int a(x)\varphi_{\widehat{m}}^{r+1} < 0$, onde $\varphi_{\widehat{m}} > 0$ é a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(-\Delta + \widehat{m})$. Finalmente, em [10], Berestycki, Capozzi-Dolceta e Nirenberg estabeleceram a existência de uma solução positiva para (\mathcal{PH}_m) no caso em que $m(x) = q(x) - \tau$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $\lambda_1(-\Delta + q) = 0$ e $\tau \geq 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno. Note que em tal caso $\lambda_1(-\Delta + m) = -\tau \leq 0$.

Como se pode notar, o Teorema 2.2 pode ser visto como uma extensão natural do Teorema 1.1, servindo de complementação aos resultados obtidos por [2, 10, 28].

Para a conveniência do leitor, os Capítulos 1 e 2 foram escritos para serem lidos de forma independente. Por esta razão, eles possuem introduções próprias e vários itens, hipóteses e lemas são comuns aos dois.

Existência e Dependência de Soluções para o Problema Homogêneo

1.1 Introdução

Neste capítulo consideramos o problema de dependência contínua de soluções positivas para o problema elíptico homogêneo

$$(\mathcal{PH}_m) \quad \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^r, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$, η é o vetor normal unitário exterior a $\partial \Omega$, $m \in L^\sigma(\Omega)$ para algum $\sigma \geq \frac{N}{2}$, e $a \in C(\bar{\Omega})$ é uma função que troca de sinal, isto é,

(A₁) $\Omega_a^+ := \{x \in \Omega ; a(x) > 0\}$ e $\Omega_a^- := \{x \in \Omega ; a(x) < 0\}$ são não vazios.

Nosso principal interesse é garantir a existência de uma solução para $(\mathcal{PH}_{\hat{m}})$ quando $\hat{m} \in L^\sigma(\Omega)$ é uma perturbação da função m . Mais especificamente, supomos a existência de uma sequência $\{m_j\}_j \subset L^\sigma(\Omega)$ satisfazendo

(m) $m_j \rightharpoonup m$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq \frac{N}{2}$. Se $\sigma = \frac{N}{2}$, então $|m_j| \leq k$ q.t.p. em Ω para alguma $k \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Objetivando tais resultados, estudamos o seguinte problema de autovalor

$$(EP_m)_\lambda \quad \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = \lambda u, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega. \end{cases}$$

Em particular mostramos que o primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$ é simples, isolado e que a primeira autofunção não troca de sinal. Além disto, considerando $(EP_{m_j})_\lambda$ sob a condição (m) , verificamos um resultado de continuidade para o primeiro e segundo autovalores e suas respectivas autofunções. Em seguida, estabelecemos a equivalência no espaço ortogonal à primeira autofunção de $(EP_{m_j})_\lambda$, entre a norma usual de $H^1(\Omega)$ e uma norma que depende de m_j .

Supondo que

(A₂) O primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$, $\lambda_1(-\Delta + m)$, é nulo,

(A₃) $\int a(x)\varphi_1^{r+1} < 0$, onde $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção de $(EP_m)_\lambda$,

a seguir enunciamos os resultados principais deste capítulo:

Teorema 1.1. *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e (m) . Então existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que (\mathcal{PH}_{m_j}) possui uma solução positiva w_j para todo $j \geq j_1$.*

Teorema 1.2. *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e (m) . Seja $\{w_j\}_j$ a sequência de soluções dada pelo Teorema 1.1. Então $\{w_j\}_j$ possui uma subsequência que converge fortemente em $H^1(\Omega)$ para uma solução de (\mathcal{PH}_m) .*

Corolário 1.3. *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3)$ e $\sigma \geq \frac{N}{2}$. Então existe $R > 0$ tal que $(P_{\hat{m}})$ possui uma solução sempre que $\|m - \hat{m}\|_{L^\sigma(\Omega)} < R$.*

Teorema 1.4. *Suponha $(A_1), (A_2)$ e (A_3) . Dado $R > 0$ (ou $f_{\frac{N}{2}} \in L^{N/2}(\Omega)$ no caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$), existe $\mu > 0$ tal que, se $\hat{m} \in L^\sigma(\Omega)$ satisfaz*

(i) $\|m - \hat{m}\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq R$ ($|\hat{m}| \leq f_{\frac{N}{2}}$ q.t.p. em Ω no caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$),

(ii) $\int |\nabla \varphi_1|^2 + \hat{m}(x)\varphi_1^2 \leq \mu$,

(iii) $-\mu < \lambda_1(-\Delta + \hat{m}) < 0$,

então existe uma solução positiva para $(\mathcal{PH}_{\hat{m}})$.

O método empregado aqui é variacional. Mais especificamente, utilizamos o método de minimização com vínculos. Observamos que devido as nossas hipóteses nas funções a e m , as soluções que encontramos estão em $H^1(\Omega)$. Diremos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva de (\mathcal{P}_m) se

$$\int \nabla u \nabla w + m(x)uw = \int a(x)u^p w, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Na realidade, através de um argumento de regularização (bootstrap), mostramos que tais soluções estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ou em $L^t(\Omega)$ para todo $1 \leq t < \infty$, conforme $m \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma > \frac{N}{2}$, ou $m \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, respectivamente.

Vários autores dedicaram-se ao estudo de problemas com linearidades de sinal indefinido (veja [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 24, 28] e suas referências). Em particular, se $m(x) \equiv -\mu$, onde μ é um parâmetro real, $a \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz (A_1) e $f \in C^1(\mathbb{R})$ possui comportamento superlinear na origem e no infinito, a existência de solução positiva para (\mathcal{P}_m) , sob as condições de Dirichlet, foi provada por vários autores [6, 7, 8, 9, 10] desde que $\mu > 0$ seja um valor suficientemente pequeno. Por outro lado, Ramos, Terracini e Troestler [24] estabeleceram a existência de solução não trivial para (\mathcal{P}_m) quando o parâmetro $\mu > 0$ é suficientemente grande.

Afrouzi [2], sob as condições de fronteira de Dirichlet, dentre outros resultados, demonstrou o Teorema 1.1 para o caso em que $m_j \rightarrow m$ uniformemente em $C(\bar{\Omega})$. Em [28], Tehrani estabeleceu o Corolário 1.3 para o caso em que $m \in C(\bar{\Omega})$ e o Teorema 1.4 quando $m \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ sob a hipótese adicional $\int a(x)\varphi_{\hat{m}}^{r+1} < 0$, onde $\varphi_{\hat{m}} > 0$ é a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(-\Delta + \hat{m})$. É importante mencionar que Tehrani [28] apresentou um exemplo mostrando que a condição (A_3) é necessária para a existência de solução no Teorema 1.1.

Finalmente, observamos que Berestycky, Capuzzo-Dolcetta e Nirenberg [10] provaram a existência de uma solução positiva para (\mathcal{PH}_m) no caso em que $m(x) = q(x) - \tau$, $q \in C(\bar{\Omega})$, $\lambda_1(-\Delta + q) = 0$ e $\tau \geq 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno. Note que em tal caso $\lambda_1(-\Delta + m) = -\tau \leq 0$.

Como aplicação dos Teoremas 1.1 e 1.2, podemos afirmar que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varphi(x) \cos(jx_N) u = a(x)u^r, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função não nula e $\int a(x) < 0$, possui pelo menos uma solução positiva u_j para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Além do mais, a menos de uma subsequência, $u_j \rightarrow u$ fortemente em $H^1(\Omega)$ onde $u > 0$ é uma solução para (\mathcal{P}_o) . Perceba que $m_j(x) := \varphi(x) \cos(jx_N)$, $j \in \mathbb{N}$ é tal que $m_j \in L^\infty(\Omega)$ e $m_j \rightarrow 0$ fracamente em $L^s(\Omega)$, para cada $s \geq \frac{N}{2}$. No entanto, a sequência $\{m_j\}_j$ não converge fortemente em nenhum $L^s(\Omega)$ (veja o Apêndice deste capítulo). Em particular, observamos que os resultados de [2] e [28] não se aplicam neste exemplo.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2 introduzimos a notação utilizada neste capítulo e alguns resultados preliminares. Na Seção 3, baseados nos argumentos de Manes-Micheletti [22] e de Figueiredo [15] para o problema de Dirichlet, apresentamos resultados de convergência para os autovalores e autofunções de $(EP_{m_j})_\lambda$ que obtemos ao supormos a condição (m) . A demonstração dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.4 é feita na Seção 4. No Apêndice provamos os Teoremas 1.16 e 1.17 (provenientes da Seção

3), e apresentamos resultados de regularidade para as soluções de (\mathcal{PH}_m) e $(EP_m)_\lambda$.

1.2 Preliminares

Nesta seção introduzimos as definições e resultados técnicos que serão usados nas seções seguintes. Inicialmente, relembremos o Princípio da Continuação Única Forte, devido a Jerison e Kenig [19], o qual garante que as soluções e a primeira autofunção que encontramos são positivas. Em seguida, no resultado principal desta seção, estabelecemos a convergência $\int m_j(x)v_j^2 \rightarrow \int m(x)v_o^2$ sob a hipótese (m) quando supomos que $v_j \rightarrow v_o$ fracamente em $H^1(\Omega)$.

De agora em diante $\|\cdot\|_s$ representará a norma em $L^s(\Omega)$. Se $E \subset \Omega$ é um subconjunto próprio, a norma em $L^s(E)$ será representada por $\|\cdot\|_{L^s(E)}$. $|A|$ será a medida de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$. $B_\rho(x_o)$ será a bola aberta de raio $\rho > 0$ centrada em x_o .

Para verificar a positividade das soluções de (\mathcal{PH}_m) , faremos uso do Princípio da Continuação Única Forte [19] (PCUF).

Definição 1.5. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N e $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que a desigualdade diferencial*

$$|\Delta f(x)| \leq |c(x)f(x)|, \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad (1.1)$$

possui o PCUF no espaço de Sobolev $W_{loc}^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, se sempre que f pertencer a $H_{loc}^{2,q}(\Omega)$, satisfizer (1.1) em quase todo ponto de Ω , $f \in L_{loc}^2(\Omega)$ e, para algum $x_o \in \Omega$,

$$\int_{|x-x_o|<\epsilon} |f(x)|^2 dx = O(\epsilon^k), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, implicar $f \equiv 0$ em Ω .

Teorema 1.6. ([19]) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio (aberto e conexo) e $c \in L_{loc}^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Então a desigualdade diferencial (1.1) possui o PCUF em $W_{loc}^{2, \frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.*

A fim de aplicarmos o PCUF precisamos do resultado seguinte.

Teorema 1.7. ([16]) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio limitado e $c \in L_{loc}^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Suponha que $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ é tal que*

$$\int \nabla u \nabla v + c(x)uv = 0, \quad \forall v \in C_o^\infty(\Omega).$$

Se $u = 0$ em um conjunto E de medida positiva, então
$$\int_{|x-x_o|<\epsilon} |u(x)|^2 dx = O(\epsilon^k), \quad \epsilon \rightarrow 0$$
 para cada $k \in \mathbb{N}$, e quase todo ponto $x_o \in E$.

Observação 1.8. Se $u \geq 0$ é uma solução fraca de (\mathcal{PH}_m) , após regularização (veja o Apêndice deste capítulo), $u \in W^{2, \frac{2N}{N+2}}(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ para cada $t \geq 1$. Então, considerando $c(x) := a(x)u^{p-1} - m(x)$,

$$|\Delta u(x)| = |c(x)u(x)|$$

para quase todo ponto $x \in \Omega$, e $c \in L^{N/2}(\Omega)$. Se $|\{x \in \Omega ; u(x) = 0\}| > 0$, pelos Teoremas 1.7 e 1.6, $u \equiv 0$ em Ω . Portanto, se $u \geq 0$ é uma solução não trivial de (P_m) , então $u > 0$ q.t.p. em Ω . Enfatizamos que a mesma conclusão é válida se $\varphi \geq 0$ é a primeira autofunção de $(EP_m)_\lambda$.

Como consequência direta do Teorema da Imersão de Sobolev, temos:

Lema 1.9. Suponha (A_3) . Então existe $\beta > 0$ tal que

$$\int a(x)|\varphi_1 + w|^{r+1} < \frac{1}{2} \int a(x)\varphi_1^{r+1}, \quad \forall \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta.$$

A seguir, por uma questão de completude, apresentamos a demonstração de um resultado conhecido que também é baseado no Teorema da Imersão de Sobolev (veja Willem [31]).

Lema 1.10. [31] Suponha $k \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $\{\omega_j\}_j \subset H^1(\Omega)$. Se $\omega_j \rightharpoonup \omega_o$ fracamente em $H^1(\Omega)$, então

$$\int |k(x)(\omega_j^2 - \omega_o^2)| \rightarrow 0.$$

Demonstração: Tomando uma subsequência qualquer ainda denotada por $\{\omega_j\}_j$, pelo Teorema da Imersão de Sobolev, podemos supor que $\omega_j(x) \rightarrow \omega_o(x)$ q.t.p em Ω e $\|\omega_j^2 - \omega_o^2\|_{\frac{N}{N-2}} \leq M$ para algum $M > 0$. Assim $|\omega_j^2 - \omega_o^2| \rightarrow 0$ fracamente em $L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$. Como $k \in L^{N/2}(\Omega)$, $\int |k(x)| |\omega_j^2 - \omega_o^2| \rightarrow 0$. \square

Observação 1.11. Seja $T : H_o^1(\Omega) \rightarrow (H_o^1(\Omega))'$ definido por $\langle Tu, w \rangle = \int m(x)uw$. Então T é compacto sempre que $m \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. De fato, pela desigualdade de Hölder, e Teorema da Imersão de Sobolev

$$\|Tu\|_{H^1} = \sup_{\|w\|_{H^1}=1} |\langle Tu, w \rangle| \leq C\|u\|_{H^1}.$$

Seja $\Omega_M := \{x \in \Omega ; |m(x)| \geq M\}$. Dada $\{u_k\}_k \subset H_o^1(\Omega)$ com $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $H_o^1(\Omega)$, podemos supor que $u_k \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Se $\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |m(x)| |w| |u - u_k| &\leq \int_{\Omega_M} |m(x)| |w| |u - u_k| + M \int_{\Omega \setminus \Omega_M} |w| |u - u_k| \\ &\leq \|m\|_{L^{N/2}(\Omega_M)} \|w\|_{2^*} \|u - u_k\|_{2^*} + M \|w\|_2 \|u - u_k\|_2 \\ &\leq C \|m\|_{L^{N/2}(\Omega_M)} + M \|u - u_k\|_2. \end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, para $M > 0$ suficientemente grande,

$$\|Tu_k - Tu\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{\|w\|_{H^1(\Omega)}=1} \langle Tu_k - Tu, w \rangle \leq \epsilon + M \|u - u_k\|_2.$$

Portanto, concluímos que $Tu_k \rightarrow Tu$. □

Nosso resultado final desta seção é uma versão do Lema 1.10 quando a sequência $\{m_j\}_j$ satisfaz a hipótese (m).

Lema 1.12. *Suponha (m) e considere $\{\omega_j\}_j \subset H^1(\Omega)$. Se $\omega_j \rightharpoonup \omega_o$ fracamente em $H^1(\Omega)$, então*

$$\int m_j(x) \omega_j^2 \rightarrow \int m(x) \omega_o^2.$$

Demonstração: Dada uma subsequência qualquer, ainda denotada por $\{\omega_j\}$, escrevemos

$$\int m_j(x) \omega_j^2 - \int m(x) \omega_o^2 = \int m_j(x) (\omega_j^2 - \omega_o^2) + \int \omega_o^2 (m_j(x) - m(x)).$$

Como $m_j - m \rightharpoonup 0$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq \frac{N}{2}$, temos que $\int \omega_o^2 [m_j(x) - m(x)] \rightarrow 0$. Resta apenas verificarmos que $|\int m_j(x) (\omega_j^2 - \omega_o^2)| \rightarrow 0$. Para tal vamos considerar dois casos:

i) Se $\sigma = \frac{N}{2}$, pelo Lema 1.10, temos que

$$\int |m_j(x) (\omega_j^2 - \omega_o^2)| \leq \int |k(x)| |\omega_j^2 - \omega_o^2| \rightarrow 0.$$

ii) Se $\sigma > \frac{N}{2}$, como $\frac{2\sigma}{\sigma-1} < 2^*$, $\|\omega_j^2 - \omega_o^2\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \rightarrow 0$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\int |m_j(x) (\omega_j^2 - \omega_o^2)| \leq \|m_j\|_\sigma \|\omega_j^2 - \omega_o^2\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \rightarrow 0.$$

Isto encerra a demonstração de Lema 1.12. □

Observação 1.13. *Aplicando o mesmo argumento usado na demonstração do lema acima, temos que*

$$\int m_j(x)\omega_j z \rightarrow \int m(x)\omega z, \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Corolário 1.14. *Suponha (m) . Então, dado $\epsilon > 0$, existe $j_\epsilon > 0$ tal que*

$$\left| \int [m_j(x) - m(x)]\omega^2 \right| \leq \epsilon \|\omega\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \omega \in H^1(\Omega), \quad j \geq j_\epsilon.$$

1.3 Um Problema de Autovalor

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades básicas do problema de autovalor $(EP_m)_\lambda$. Inicialmente mostramos que o primeiro autovalor é simples, isolado e que sua autofunção associada não troca de sinal. Em seguida, sob a condição (m) , estabelecemos um resultado de continuidade para o primeiro e segundo autovalores de $(EP_{m_j})_\lambda$ e suas autofunções associadas. Finalizamos esta seção provando a equivalência uniforme entre a norma usual de $H^1(\Omega)$ no espaço ortogonal a primeira autofunção de $(EP_{m_j})_\lambda$ e uma norma que será definida em função do segundo autovalor do Problema $(EP_{m_j})_\lambda$.

De agora em diante vamos supor que as autofunções estão normalizadas em $L^2(\Omega)$. Tomando $Q_m(u) := \int |\nabla u|^2 + m(x)u^2$, diremos que φ está associada a λ sempre que $\int \varphi^2 = 1$ e $Q_m(\varphi) = \lambda$. Defina

$$\lambda_1 := \lambda_1(-\Delta + m) = \inf \{ Q_m(u) ; u \in H^1(\Omega), \|u\|_2 = 1 \}. \quad (1.2)$$

Observação 1.15. *Se $\varphi \in H^1(\Omega)$ é uma solução (normalizada) de $(EP_m)_\lambda$, então*

$$\int \nabla \varphi \nabla u + m(x)\varphi u = \lambda \int \varphi u, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Usando φ como função teste em (1.3), obtemos

$$\lambda = \lambda \int \varphi^2 = Q_m(\varphi) \geq \lambda_1. \quad (1.4)$$

Assim, qualquer autovalor de $(EP_m)_\lambda$ é maior ou igual a λ_1 . Além do mais, se existe uma solução não trivial φ de $(EP_m)_{\lambda_1}$, então λ_1 é o menor autovalor de $(EP_m)_\lambda$.

Em relação ao Problema $(EP_m)_\lambda$ temos o seguinte resultado do tipo Krein-Rutman:

Teorema 1.16. *Suponha $m \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Então (1.2) caracteriza o primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$. Além do mais, este primeiro autovalor é simples, isolado e podemos supor que a autofunção associada, φ_1 , é positiva.*

Para estabelecermos nosso segundo resultado, definimos

$$\lambda_2 := \lambda_2(-\Delta + m) = \inf \{Q_m(v) ; v \in V, \|v\|_2 = 1\}, \quad (1.5)$$

onde $V := \{v \in H^1(\Omega) ; \int \varphi_1 v = 0\}$. O próximo teorema mostra que λ_2 é o segundo autovalor de $(EP_m)_\lambda$.

Teorema 1.17. *Suponha $m \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Então (1.5) caracteriza o segundo autovalor de $(EP_m)_\lambda$. Além do mais, $\lambda_1 < \lambda_2$ e qualquer autofunção associada a λ_2 troca de sinal em Ω .*

As demonstrações dos Teoremas 1.16 e 1.17 estão no Apêndice deste capítulo.

Seja $\{m_j\}_j \subset L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ satisfazendo (m). Substituindo m por m_j na definição (1.2) obtemos o primeiro autovalor $\lambda_1^j := \lambda_1(-\Delta + m_j)$ de $(EP_{m_j})_\lambda$ e sua primeira autofunção $\varphi_{1,j}$. De modo similar, o segundo autovalor de $(EP_{m_j})_\lambda$ é dado por

$$\lambda_2^j := \lambda_2(-\Delta + m_j) = \inf \{Q_{m_j}(v) ; v \in V_j, \|v\|_2 = 1\},$$

onde $V_j = \{v \in H^1(\Omega) ; \int \varphi_{1,j} v = 0\}$. Além do mais, denotando por $\varphi_{2,j}$ as autofunções associadas a λ_2^j lembramos que $Q_{m_j}(\varphi_{1,j}) = \lambda_1^j$ e $Q_{m_j}(\varphi_{2,j}) = \lambda_2^j$.

O Resultado principal seção, lidando com a dependência para os dois primeiros autovalores e as duas primeiras autofunções é

Teorema 1.18. *Suponha (m). Então*

- (i) $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_1^j = \lambda_1$ e $\varphi_{1,j} \rightarrow \varphi_1$ fortemente em $H^1(\Omega)$;
- (ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_2^j = \lambda_2$ e $\varphi_{2,j} \rightarrow \varphi$ fortemente em $H^1(\Omega)$, onde φ é uma autofunção associada a λ_2 .

Demonstração: Note inicialmente que, por (m), $\int m_j(x)\varphi_1^2 \rightarrow \int m(x)\varphi_1^2$. Então, em vista de (1.2),

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_1^j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} Q_{m_j}(\varphi_1) = \lambda_1. \quad (1.6)$$

A seguir afirmamos que existe $M > 0$ tal que $\|\varphi_{1,j}\|_{H^1(\Omega)} < M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Na verdade, se este não é o caso, podemos supor que $\|\nabla \varphi_{1,j}\|_2 \rightarrow \infty$. Definindo $\omega_j := \frac{\varphi_{1,j}}{\|\nabla \varphi_{1,j}\|_2}$ e tomando uma subsequência se necessário, temos que $\omega_j \rightarrow 0$ fracamente em $H^1(\Omega)$ uma vez que $\|\varphi_{1,j}\|_2 \equiv 1$. Aplicando o Lema 1.12, $\int m_j(x)\omega_j^2 \rightarrow 0$. Devido a caracterização do primeiro autovalor dada por (1.2), temos que

$$\frac{\lambda_1^j}{\|\nabla \varphi_{1,j}\|_2^2} = 1 + \int m_j(x)\omega_j^2 \rightarrow 1.$$

Conseqüentemente $\lambda_1^j \rightarrow \infty$. Entretanto isto contradiz (1.6). A afirmação está demonstrada. Invocando a afirmação acima, podemos supor que $\varphi_{1,j} \rightarrow z$ fracamente em $H^1(\Omega)$ e $\varphi_{1,j} \rightarrow z$ fortemente em $L^2(\Omega)$. Do Lema 1.12,

$$\int m_j(x) \varphi_{1,j}^2 \rightarrow \int m(x) z^2. \quad (1.7)$$

Portanto, como $\liminf_{j \rightarrow \infty} \|\nabla \varphi_{1,j}\|_2^2 \geq \|\nabla z\|_2^2$,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \lambda_1^j = \liminf_{j \rightarrow \infty} Q_{m_j}(\varphi_{1,j}) \geq Q_m(z) \geq \lambda_1. \quad (1.8)$$

Por (1.6) e (1.8), $Q_m(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_1^j = \lambda_1$. Então, pelo Teorema 1.16, $z = \varphi_1$. Além do mais, de (1.7) temos que

$$\int |\nabla \varphi_{1,j}|^2 = \lambda_1^j - \int m_j(x) \varphi_{1,j}^2 \rightarrow \lambda_1 - \int m(x) \varphi_1^2 = \int |\nabla \varphi_1|^2$$

e, conseqüentemente, $\varphi_{1,j} \rightarrow \varphi_1$ fortemente em $H^1(\Omega)$. Isto conclui a verificação de (i).

Agora verificamos o item (ii). Como $Q_{m_j}(\varphi_{2,j}) = \lambda_2^j$, $\varphi_{1,j} \rightarrow \varphi_1$ fortemente em $H^1(\Omega)$ e $\{m_j\}_j$ satisfaz (m), temos que

$$\int \varphi_2 \varphi_{1,j} \rightarrow \int \varphi_2 \varphi_1 = 0; \quad (1.9)$$

$$Q_{m_j}(\varphi_2) \rightarrow Q_m(\varphi_2) = \lambda_2; \quad (1.10)$$

$$\int \nabla \varphi_{1,j} \nabla \varphi_2 + m_j(x) \varphi_{1,j} \varphi_2 \rightarrow \int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 + m(x) \varphi_1 \varphi_2; \quad (1.11)$$

onde φ_2 é uma autofunção associada a λ_2 . Definindo $v_j := \varphi_2 - t_j \varphi_{1,j}$ com $t_j := \int \varphi_2 \varphi_{1,j}$ e usando (1.9),

$$\|v_j\|_2^2 = \int \varphi_2^2 dx - t_j^2 \rightarrow 1. \quad (1.12)$$

Fazendo $w_j := \frac{v_j}{\|v_j\|_2}$, obtemos $\|w_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\int \varphi_{1,j} w_j = 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Logo $w_j \in V_j$ e, devido a (1.12) e a definição de λ_2^j ,

$$Q_{m_j}(\varphi_{2,j}) \leq Q_{m_j}(w_j) = \frac{Q_{m_j}(\varphi_2) - 2t_j \int (\nabla \varphi_2 \nabla \varphi_{1,j} + m_j(x) \varphi_2 \varphi_{1,j}) + t_j^2 \lambda_1^j}{\|v_j\|_2^2}.$$

Conseqüentemente, de (1.9) – (1.12) e do item (i),

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_2^j = \limsup_{j \rightarrow \infty} Q_{m_j}(\varphi_{2,j}) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} Q_{m_j}(w_j) = \lambda_2. \quad (1.13)$$

Argumentando como no item (i), podemos supor que a sequência $\{\varphi_{2,j}\}_j$ é limitada em $H^1(\Omega)$, $\varphi_{2,j} \rightharpoonup \varphi$ fracamente em $H^1(\Omega)$, com $\int \varphi^2 = 1$ e $\varphi \in V$. Asseguramos que φ é uma autofunção associada a λ_2 . Na verdade, invocando o Lema 1.12 mais uma vez,

$$\int m_j(x)\varphi_{2,j}^2 \longrightarrow \int m(x)\varphi^2. \quad (1.14)$$

Portanto

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} Q_{m_j}(\varphi_{2,j}) \geq Q_m(\varphi) \geq \lambda_2. \quad (1.15)$$

Logo, de (1.13) e (1.15),

$$\lambda_2^j \rightarrow \lambda_2, \quad Q_m(\varphi) = \lambda_2. \quad (1.16)$$

Como $\varphi \in V$ e $\int \varphi^2 = 1$, podemos aplicar o Teorema 1.17 para concluir que φ está associada a λ_2 . Finalmente, por (1.14) e (1.16),

$$\int |\nabla \varphi_{2,j}|^2 = \lambda_2^j - \int m_j \varphi_{2,j}^2 \longrightarrow \lambda_2 - \int m \varphi^2 = \int |\nabla \varphi|^2.$$

Consequentemente $\varphi_{2,j} \rightarrow \varphi$ fortemente em $H^1(\Omega)$. A demonstração do Teorema 1.18 está completa. \square

Observação 1.19. (i) Afrouzi [2] provou o Teorema 1.18 para o problema de Dirichlet supondo $\{m_j\}_j \subset C(\overline{\Omega})$ e $m_j \rightarrow m$ uniformemente em $\overline{\Omega}$.

(ii) Note que o Teorema 1.18 é válido se $m_j \rightarrow m$ fortemente em $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, já que a condição (m) é satisfeita trivialmente neste caso.

Dado $u \in H^1(\Omega)$, podemos escrever $u = t_j \varphi_{1,j} + v_j$, onde $t_j = \int u \varphi_{1,j} \in \mathbb{R}$ e $v_j = u - t_j \varphi_{1,j} \in V_j$. Definindo

$$\|v\|_{V_j}^2 = \int |\nabla v|^2 + m_j(x)v^2 \quad (1.17)$$

e lembrando que $\lambda_{2,j} \rightarrow \lambda_2 > 0$, não é difícil mostrar que $\|\cdot\|_{V_j}$ é equivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ em V_j se j é suficientemente grande. Na verdade, temos a seguinte equivalência uniforme entre a norma usual de $H^1(\Omega)$ e a norma dada por (1.17) em V_j .

Lema 1.20. *Suponha (m) e (A_2) . Então existem $j_o \in \mathbb{N}$ e constantes $A, B > 0$ tais que*

$$A\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{V_j}^2 \leq B\|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_j, \quad \forall j \geq j_o. \quad (1.18)$$

Demonstração: A existência de $B > 0$ segue da desigualdade de Hölder e da imersão de Sobolev. Logo, é suficiente mostrar a existência de $A > 0$ em (1.18). Argumentando

por contradição, suponha que exista uma sequência $\{v_j\}_j$, onde $v_j \in V_j$ para cada j , tal que $\|v_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \equiv 1$ e $\|v_j\|_{V_j}^2 < 1/j$. Então,

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\nabla v_j|^2 + m_j(x)v_j^2 \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{2,j} \int v_j^2.$$

Por (A_2) e os Teoremas 1.17 e 1.18, $\lambda_{2,j} \rightarrow \lambda_2 > 0$. Portanto, a menos de uma subsequência, $v_j \rightarrow 0$ fracamente em $H^1(\Omega)$. Aplicando o Lema 1.12, $\int m_j(x)v_j^2 \rightarrow 0$. Consequentemente $\int |\nabla v_j|^2 \rightarrow 0$ e $\|v_j\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$, contradizendo $\|v_j\|_{H^1(\Omega)} \equiv 1$. O lema está demonstrado. \square

Observação 1.21. Para uma referência futura, como $\lambda_2 > 0$,

$$\|v\|_{V_o} := \sqrt{\int |\nabla v|^2 + m(x)v^2}$$

é uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ em $V_o := V$. Além do mais,

$$\|u\| := \sqrt{t^2 + \|v\|_{V_o}^2}, \quad u = t\varphi_1 + v, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in V_o,$$

é uma norma equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$.

1.4 Demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.4

Nesta seção, usando a técnica de minimização com vínculo, apresentamos a demonstração do Teorema 1.1. Em seguida demonstramos os Teoremas 1.2 e 1.4.

Inicialmente definimos $J(u) = \int a(x)|u|^{r+1}$, $u \in H^1(\Omega)$ e

$$S_g := \{u \in H^1(\Omega) ; Q_g(u) = 1\},$$

para cada $g \in L^{N/2}(\Omega)$, onde $Q_g(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + g(x)u^2$. Note que $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que S_g é uma variedade de classe C^1 em $H^1(\Omega)$. Considerando o problema de maximização

$$\alpha_g := \sup_{u \in S_g} J(u),$$

obtemos

Lema 1.22. Suponha (A_1) e $g \in L^{N/2}(\Omega)$. Então $S_g \neq \emptyset$ e $\alpha_g > 0$.

Demonstração: Sejam $x_o \in \Omega$ e $\epsilon > 0$ tais que $\overline{B_\epsilon(x_o)} \subset \Omega^+$. Em vista da Observação

1.11, o operador $T_g : H_o^1(B_\epsilon(x_o)) \rightarrow H_o^1(B_\epsilon(x_o))$, definido por

$$\langle T_g(u), w \rangle = \int_{B_\epsilon(x_o)} (|g(x)| + 1)wu \, dx, \quad \forall w \in H_o^1(B_\epsilon(x_o)),$$

é compacto. Portanto o problema de autovalor com peso

$$\begin{cases} -\Delta w = \nu(|g(x)| + 1)w, & B_\epsilon(x_o), \\ w = 0, & \partial B_\epsilon(x_o), \end{cases}$$

possui uma sequência de autofunções $\{w_k\}_k \subset H_o^1(B_\epsilon(x_o))$ com seus correspondentes autovalores $\{\nu_k\}_k \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\nu_k \rightarrow \infty$. Escolhendo $\nu_k > 1$ temos que

$$Q_g(w_k) = \int [\nu_k(|g(x)| + 1) + g(x)]w_k^2 \geq \nu_k \int w_k^2 > 0.$$

Tomando $t_g > 0$ tal que $Q_g(t_g w_k) = 1$, concluímos que $S_g \neq \emptyset$. Além do mais, $\alpha_g > 0$, uma vez que $J(t_g w_k) = t_g^{r+1} \int_{B_\epsilon(x_o)} a(x)|w_k|^{r+1} > 0$. A demonstração do Lema 1.22 está completa. \square

A partir de agora, definimos $S_j := S_{m_j} \neq \emptyset$ e $\alpha_j := \alpha_{m_j} > 0$, para a sequência $\{m_j\}_j$ dada por (m). Além disto, como na Seção 3, consideramos $S_o := S_m$ e $\alpha_o := \alpha_m$.

No que se segue mostramos que existe uma função não negativa $u_j \in S_j$ tal que $J(u_j) = \alpha_j$. Em seguida, após um reescalonamento de u_j e usando o Teorema de Lagrange [15] e os Teoremas 1.6 e 1.7, obtemos uma solução de (P_{m_j}) .

Aplicando os Lemas 1.9 e 1.20, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para cada $j \geq j_o$, $\|\cdot\|_{V_j}$ satisfaz (1.18),

$$\int a(x)|\varphi_{1,j} + v|^{r+1} < \frac{1}{2} \int a(x)|\varphi_1|^{r+1} < 0, \quad \forall v \in V_j, \|v\|_{V_j}^2 < \delta. \quad (1.19)$$

Lema 1.23. *Suponha (A_1) , (A_2) , (A_3) e (m). Então existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \geq j_1$, podemos encontrar $u = u_j \in S_j$, $u_j \geq 0$ e $J(u_j) = \alpha_j > 0$.*

Demonstração: Inicialmente, por (m), (A_2) e o Teorema 1.18, obtemos $j_1 \geq j_o$ (j_o dado por (1.19)) tal que $|\lambda_{1,j}| < \delta/2$ para cada $j \geq j_1$. Considerando $j \geq j_1$ fixado, tomamos uma sequência $\{u_k\}_k \subset S_j$ tal que

$$J(u_k) \rightarrow \alpha_j > 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Usando a decomposição $H^1(\Omega) = \mathbb{R}\varphi_{1,j} \oplus V_j$, podemos escrever $u_k = t_k \varphi_{1,j} + v_k$, com $t_k = \int u_k \varphi_{1,j} \in \mathbb{R}$ e $v_k = u_k - t_k \varphi_{1,j} \in V_j$. Pelos Teorema 1.18 e Lema 1.20, existe $C > 0$

tal que

$$\|u_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 2[t_k^2 \|\varphi_{1,j}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_k\|_{H^1(\Omega)}^2] \leq C[t_k^2 + \|v_k\|_{V_j}^2]. \quad (1.21)$$

Temos também

$$1 = Q_{m_j}(u_k) = \|v_k\|_{V_j}^2 + \lambda_{1,j} t_k^2. \quad (1.22)$$

Afirmamos que $\{u_k\}_k$ é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$. De fato, em vista de (1.22) e (1.21), é suficiente mostrar que $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}$ é limitada. Argumentando por contradição e tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $|t_k| \rightarrow \infty$. Consequentemente, por (1.22),

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{v_k}{t_k} \right\|_{V_j}^2 \leq |\lambda_{1,j}| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Logo, utilizando (1.19) mais uma vez,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} |t_k|^{r+1} \int a(x) \left| \varphi_{1,j} + \frac{v_k}{t_k} \right|^{r+1} = -\infty.$$

Isto contradiz (1.20). A afirmação está demonstrada. Usando a afirmação acima, podemos supor que $t_k \rightarrow t \in \mathbb{R}$, $v_k \rightharpoonup v$ fracamente em V_j . Consequentemente, $u_k \rightharpoonup u = t\varphi_{1,j} + v$ fracamente $H^1(\Omega)$, e

$$0 < \alpha_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x) |u_k|^{r+1} = \int_{\Omega} a(x) |u|^{r+1} < \infty. \quad (1.23)$$

Resta verificarmos que $u \in S_j$. Aplicando o Lema 1.10, temos que

$$1 = \liminf_{k \rightarrow \infty} Q_{m_j}(u_k) \geq \int |\nabla u|^2 + m_j(x) u^2 = Q_{m_j}(u).$$

Afirmamos que $Q_{m_j}(u) = 1$. De fato, se $Q_{m_j}(u) = \|v\|_{V_j}^2 + \lambda_{1,j} t^2 \leq 0$, então $\|v\|_{V_j}^2 = 0$ se $t = 0$, ou $\|v/t\|_{V_j}^2 \leq |\lambda_{1,j}| < \delta/2$ se $t \neq 0$. Em ambos os casos, por (1.19), $J(u) \leq 0$. Isto contradiz (1.23). Portanto, podemos supor que $0 < Q_{m_j}(u) \leq 1$ e que existe $\rho_j \geq 1$ tal que $Q_{m_j}(\rho_j u) = 1$. Como $J(\rho_j u) = \rho_j^{r+1} J(u) = \rho_j^{r+1} \alpha_j$, temos que $\rho_j = 1$, $Q_{m_j}(u) = 1$ e $u \in S_j$. O que verifica a validade da afirmação. Finalmente, observando que J e Q_{m_j} são funcionais pares, podemos supor que $u \geq 0$. A demonstração do Lema 1.23 está completa.

□

Demonstração do Teorema 1.1: Pelo Teorema de Lagrange [15] e Lemas 1.22 e 1.23,

existe $j_1 \in \mathbb{N}$ e $u_j \in S_j$, $j \geq j_1$, tais que

$$\int \nabla u_j \nabla w + m_j(x) u_j w = \frac{1}{\alpha_j} \int a(x) |u_j|^{r-1} u_j w, \quad \forall w \in H^1(\Omega). \quad (1.24)$$

Isto é, $u_j \geq 0$ é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + m_j(x)u &= \frac{1}{\alpha_j} a(x)u^r, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta &= 0, & \partial \Omega. \end{cases}$$

Aplicando os Teoremas 1.6 e 1.7, obtemos $u_j > 0$. Tomando $\omega_j := \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{r-1}} u_j$, temos que $\omega_j > 0$ é uma solução fraca de (P_{m_j}) para cada $j \geq j_1$ (veja Observação 1.8). A demonstração do Teorema 1.1 está completa. \square

Para a demonstração do Teorema 1.2, necessitamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 1.24. *Suponha (A_1) , (A_2) , (A_3) , (m) . Então existem $M > 0$ e $j_2 \in \mathbb{N}$ tais que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M$, para todo $u \in S_j$ satisfazendo $J(u) = \alpha_j$ para todo $j \geq j_2$.*

Demonstração: Escrevendo $u = s\varphi_1 + v \in \mathbb{R}\varphi_1 \oplus V$, se $s \neq 0$,

$$0 < \alpha_j = J(u) = |s|^{r+1} \int a(x) \left| \varphi_1 + \frac{v}{s} \right|^{r+1}.$$

Pelo Lema 1.9, $\|v\|_{H^1(\Omega)} > \beta|s|$.

Aplicando a Observação 1.21, existe $C > 1$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\beta} \|\varphi_1\|_{H^1(\Omega)} + 1 \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|v\|_V. \quad (1.25)$$

Perceba que (1.25) é trivialmente satisfeita quando $s = 0$. Logo, pelo Corolário 1.14, dado $0 < \epsilon < \frac{1}{C}$, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} 1 = Q_{m_j}(u) &= \|v\|_V^2 + \int [m_j(x) - m(x)] u^2 \\ &\geq \|v\|_V^2 - \epsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{C} - \epsilon \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall j \geq j_2. \end{aligned}$$

A demonstração do Lema 1.24 está completa. \square

Demonstração do Teorema 1.2: Definindo $u_j := (\alpha_j)^{\frac{1}{r-1}} w_j$, onde $\{w_j\}_j$ é a sequência de soluções proveniente do Teorema 1.1, obtemos $u_j > 0$, $u_j \in S_j$ e $J(u_j) = \alpha_j$. Além disso, u_j satisfaz (1.24). Por (m) , Lema 1.24, Lema 1.12, Observação 1.13, Corolário

1.14 e tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } H^1(\Omega), \quad (1.26)$$

$$u_j \rightarrow u \quad \text{fortemente em } L^\tau(\Omega), 1 \leq \tau < 2^*, \quad (1.27)$$

$$\int m_j(x)u_j^2 \rightarrow \int m(x)u^2, \quad (1.28)$$

$$\int m_j(x)u_j\phi \rightarrow \int m(x)u\phi, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad (1.29)$$

$$\int [m_j(x) - m(x)]u_j^2 \rightarrow 0. \quad (1.30)$$

A seguir, considere o problema de maximização

$$\alpha_o := \sup_{Q_m(u)=1} J(u) > 0.$$

Utilizando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 1.23, encontramos uma solução $u_o \in S_o := \{u \in H^1(\Omega) ; Q_m(u) = 1\}$ tal que $\alpha_o = \int a(x)|u_o|^{r+1} < \infty$.

Afirmamos que $\alpha_j \rightarrow \alpha_o$. De fato, por (m), $Q_{m_j}(u_o) \rightarrow 1$. Logo, para j suficientemente grande existe $\{\theta_j\}_j \subset (0, \infty)$ tal que $Q_{m_j}(\theta_j u_o) = \theta_j^2 Q_{m_j}(u_o) \equiv 1$. Consequentemente

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j = 1$$

e $\theta_j u_o \in S_j$. Invocando a definição de α_j e esta última relação,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \alpha_j \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int a(x)|\theta_j u_o|^{r+1} = \liminf_{j \rightarrow \infty} |\theta_j|^{r+1} \alpha_o = \alpha_o > 0. \quad (1.31)$$

Por outro lado, por (1.30),

$$Q_m(u_j) = Q_{m_j}(u_j) + \int [m(x) - m_j(x)]u_j^2 = 1 + \int [m(x) - m_j(x)]u_j^2 \rightarrow 1.$$

Então, tomando $\beta_j > 0$ tal que $Q_m(\beta_j u_j) \equiv 1$, obtemos que $\beta_j \rightarrow 1$. Logo, pela definição de α_o , $\alpha_o \geq J(\beta_j u_j) = \beta_j^{r+1} \alpha_j$ e

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \alpha_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_o}{\beta_j^{r+1}} = \alpha_o. \quad (1.32)$$

Concluimos de (1.31) e (1.32) que $\alpha_j \rightarrow \alpha_o$. A Afirmação está demonstrada.

Pela afirmação acima e (1.27),

$$\alpha_o = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int a(x)|u_j|^{r+1} = \int a(x)|u|^{r+1} > 0. \quad (1.33)$$

Desta forma, $u \neq 0$ e, utilizando (1.24),(1.26), (1.27) e (1.29), obtemos

$$\int \nabla u \nabla \varphi + m(x)u\varphi = \frac{1}{\alpha_o} \int a(x)|u|^{r-1}u\varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Em particular $w_o := \alpha_o^{-1/(r-1)}u$ é uma solução para (\mathcal{PH}_m) . Por (1.24), (1.27), (1.28), (1.33) e identidade acima,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\nabla u_j|^2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_j} \int a(x)|u_j|^{r+1} - \int m_j(x)u_j^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha_o} \int a(x)|u|^{r+1} - \int m(x)u^2 = \int |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos que $u_j \rightarrow u$ fortemente em $H^1(\Omega)$ e $Q_m(u) = 1$. Deste modo, $u \in S_o = S_m$. Por (1.33), $J(u) = \alpha_o$ e

$$w_j := \left(\frac{1}{\alpha_j} \right)^{\frac{1}{r-1}} u_j \rightarrow w_o \text{ in } H^1(\Omega).$$

A demonstração do Teorema 1.2 está completa. \square

Demonstração do Teorema 1.4: Argumentando por contradição, supomos que existe $R > 0$ (ou $f_{\frac{N}{2}} \in L^{N/2}(\Omega)$ se $\sigma = N/2$) e uma seqüência $\{m_j\}_j \subset L^\sigma(\Omega)$ tais que

(i) $\|m - m_j\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq R$ (ou $|m_j| \leq f_{\frac{N}{2}}$ q.t.p. em Ω , se $\sigma = N/2$),

(ii) $\int |\nabla \varphi_1|^2 + m_j(x)\varphi_1^2 \leq 1/j$,

(iii) $-1/j < \lambda_1(-\Delta + m_j) < 0$,

e (\mathcal{PH}_{m_j}) não possui solução para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando um subseqüência se necessário, $m_j \rightharpoonup \hat{m}$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$. Então, por (A_2) , Teorema 1.18 e itens (ii) e (iii) acima,

$$\lambda_1(-\Delta + \hat{m}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_1(-\Delta + m_j) = 0,$$

$$0 \leq \int |\nabla \varphi_1|^2 + \hat{m}(x)\varphi_1^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\nabla \varphi_1|^2 + m_j(x)\varphi_1^2 \leq 0.$$

Logo, φ_1 é uma autofunção de $(EP_{\widehat{m}})_\lambda$ associada a $\lambda_1(-\Delta + \widehat{m}) = 0$. Consequentemente

$$\int \nabla \varphi_1 \nabla \omega + \widehat{m}(x) \varphi_1 \omega = 0 = \int \nabla \varphi_1 \nabla \omega + m(x) \varphi_1 \omega, \quad \forall \omega \in H^1(\Omega),$$

e

$$\int (\widehat{m}(x) - m(x)) \varphi_1 \omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1(\Omega).$$

Isto implica que $(\widehat{m} - m)\varphi_1 = 0$ q.t.p. em Ω . Como $\varphi_1 > 0$, $\widehat{m} \equiv m$. Portanto $m_j \rightarrow m$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$ e $\{m_j\}_j$ satisfaz a hipótese (m) . Por (A_1) , (A_2) , (A_3) e o Teorema 1.1, (\mathcal{PH}_{m_j}) possui uma solução para j suficientemente grande. Esta contradição conclui a demonstração do Teorema 1.4. \square

1.5 Apêndice

Nesta seção discutimos a regularidade das soluções fracas de $(EP_m)_\lambda$ e (\mathcal{PH}_m) . Em seguida provamos os teoremas que tratam de algumas propriedades dos autovalores e autofunções.

1.5.1 Regularidade

A fim de estabelecermos a regularidade das soluções de $(EP_m)_\lambda$ e (\mathcal{PH}_m) , faremos uso dos seguintes resultados. Para um estudo mais detalhado, veja também o apêndice do capítulo 2.

Lema 1.25. ([29] Lema 5.1) *Suponha $\partial\Omega \in C^1$, $b \in L^{N/2}(\Omega)$ e $\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= b(x)u, & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \alpha(x)u, & \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in L^t(\Omega)$ para cada $1 \leq t < \infty$.

Lema 1.26. [3] *Suponha $\partial\Omega \in C^2$, $h \in L^s(\Omega)$ e $g \in W^{1,s}(\Omega)$ para algum $s \in (\frac{N}{2}, \infty)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= h(x), & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= g(x), & \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in W^{2,s}(\Omega)$ e $\|u\|_{W^{2,s}(\Omega)} \leq C (\|h\|_{L^s(\Omega)} + \|g\|_{W^{1,s}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^s(\Omega)})$ para algum $C > 0$.

O Lema 1.26 que atribuímos a Agmon, Douglis e Nirenberg extraímos de [29], Lema 5.2.

Lema 1.27. *Sejam $m \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq N/2$, φ uma autofunção de $(EP_m)_\lambda$ e u uma solução fraca de (\mathcal{PH}_m) . Então $\varphi, u \in L^t(\Omega)$, para cada $1 \leq t < \infty$. Além do mais, $\varphi, u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \gamma < 1$, se $\sigma > \frac{N}{2}$. Se estamos no caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$, então $\varphi, u \in W^{2,s}(\Omega)$ para cada $s \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2})$.*

Demonstração: Sejam $b_1 := \lambda - m$ $b_2 := au^{r-1} - m$. Pelo Lema 1.25 temos que $\varphi, u \in L^t(\Omega)$ para cada $1 \leq t < \infty$. Considerando $\sigma > \frac{N}{2}$, para $h_1 := b_1\varphi$ e $h_2 := b_2u$, mostra-se que $h_i \in L^s(\Omega)$ para cada $s \in (\frac{N}{2}, \sigma)$, $i = 1, 2$. De fato, dado $s \in (\frac{N}{2}, \sigma)$, escolha $\alpha > \frac{\sigma}{\sigma-s}$ e $\theta > 1$ tais que $\frac{1}{\theta} + \frac{s}{\sigma} + \frac{1}{\alpha} = 1$. Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\|mu\|_s^s \leq |\Omega|^{\frac{1}{\theta}} \|m\|_\sigma^s \|u\|_{s\alpha}^s < \infty.$$

Como $au^r \in L^s(\Omega)$ e $s > N/2$, aplicamos o Lema 1.26 e o Teorema da Imersão de Sobolev para concluir que $\varphi, u \in W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \gamma < 1$.

No caso em que $\sigma = \frac{N}{2}$, dado $s \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2})$, escolhemos $\alpha > \frac{N}{N-2s}$ e $\theta > 1$ tais que $\frac{1}{\theta} + \frac{2s}{N} + \frac{1}{\alpha} = 1$. Pela desigualdade de Hölder, $mu \in L^s(\Omega)$. Aplicando o Lema 1.26, concluímos que $\varphi, u \in W^{2,s}(\Omega)$ para cada $s \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2})$. \square

Observação 1.28. *Se $\sigma > N$, então $h_i \in L^s(\Omega)$ para cada $s \in (N, \sigma)$. Repetindo os passos acima, $\varphi, u \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$.*

1.5.2 Demonstração do Teorema 1.16

Devido a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$|Q_m(u)| \leq (1 + C\|m\|_{\frac{N}{2}}) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (1.34)$$

Como consequência direta de (1.34), $\lambda_1 < \infty$. Agora seja $\{u_k\}_k \subset H^1(\Omega)$ uma sequência tal que $\int u_k^2 = 1$ e $Q_m(u_k) \rightarrow \lambda_1$. Afirmamos que $\{\|u_k\|_{H^1(\Omega)}\}_k$ é limitada. Caso contrário, a menos de subsequência, $\|\nabla u_k\|_2 \rightarrow \infty$. Definindo $w_k := \frac{u_k}{\|\nabla u_k\|_2}$ e utilizando a imersão de Sobolev mais uma vez, podemos supor que $w_k \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\Omega)$, uma vez que $\|u_k\|_2 \equiv 1$. Pelo Lema 1.10, $\int m(x)w_k^2 \rightarrow 0$. Deste modo, como

$$\frac{Q_m(u_k)}{\|\nabla u_k\|_2^2} = 1 + \int m(x)w_k^2, \quad (1.35)$$

$Q_m(u_k) \rightarrow \infty$. Mas, isto contradiz $\lambda_1 < \infty$. Então $\{u_k\}_k \subset H^1(\Omega)$ é limitada como afirmado. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_k \rightharpoonup \varphi_1$

fracamente em $H^1(\Omega)$, $\|\varphi_1\|_2 = 1$ e, pelo Lema 1.10,

$$\int m(x)u_k^2 \rightarrow \int m(x)\varphi_1^2.$$

Então, como $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u_k\|_2^2 \geq \|\nabla \varphi_1\|_2^2$,

$$\lambda_1 = \liminf_{k \rightarrow \infty} Q_m(u_k) \geq Q_m(\varphi_1).$$

Isto implica em $Q_m(\varphi_1) = \lambda_1$. A seguir verificaremos que φ_1 é uma solução fraca de $(EP_m)_{\lambda_1}$. Efetivamente, dado $u \in H^1(\Omega)$, para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno,

$$\frac{Q_m(\varphi_1 + tu)}{f(\varphi_1 + tu)^2} = \frac{\int |\nabla(\varphi_1 + tu)|^2 + m(x)(\varphi_1 + tu)^2}{f(\varphi_1 + tu)^2} \geq \lambda_1.$$

Consequentemente,

$$2t \int \nabla u \nabla \varphi_1 + m(x)u\varphi_1 + t^2 Q_m(u) \geq 2t\lambda_1 \int u\varphi_1 + t^2 \lambda_1 \int u^2. \quad (1.36)$$

Dividindo (1.36) por $2t$ e fazendo $t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow 0^-$ alternadamente), obtemos

$$\int \nabla u \nabla \varphi_1 + m(x)u\varphi_1 = \lambda_1 \int u\varphi_1, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.37)$$

Isto mostra que φ_1 é uma solução fraca de $(EP_m)_{\lambda_1}$. Assim como assinalado na Observação 1.15, isto também implica que λ_1 é o primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$. Devido a paridade de Q_m , podemos supor $\varphi_1 \geq 0$. Pela Observação 1.8, $\varphi_1 > 0$.

Finalmente verificamos que λ_1 é simples e que qualquer autofunção $v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ associada a λ_1 não troca de sinal. Uma simples verificação algébrica mostra que: para cada $A, B, X, Y \in \mathbb{R}$ onde $X, Y > 0$, temos a validade de apenas uma das seguintes opções

$$\frac{A+B}{X+Y} = \frac{A}{X} = \frac{B}{Y} \quad \text{ou} \quad \min \left\{ \frac{A}{X}, \frac{B}{Y} \right\} < \frac{A+B}{X+Y} < \max \left\{ \frac{A}{X}, \frac{B}{Y} \right\}.$$

Já que $\lambda_1 = \frac{Q_m(v)}{\int v^2} = \frac{Q_m(v^+) + Q_m(v^-)}{\int (v^+)^2 + \int (v^-)^2}$, se $v^+ := \max\{v, 0\} \geq 0$ e $v^- := \max\{-v, 0\} \geq 0$ são não triviais, temos que

$$(I) \quad \lambda_1 = \frac{Q_m(v^+)}{\int (v^+)^2} = \frac{Q_m(v^-)}{\int (v^-)^2} \quad \text{ou} \quad (II) \quad \lambda_1 > \min \left\{ \frac{Q_m(v^+)}{\int (v^+)^2}, \frac{Q_m(v^-)}{\int (v^-)^2} \right\}.$$

No caso I, concluímos que v^+ e v^- são (após normalização) autofunções associadas a λ_1 . Aplicando a Observação 1.8, mais uma vez, concluímos que $v^+ > 0$ e $v^- > 0$ em Ω , o que não é possível. Por outro lado, o caso II contradiz a definição de λ_1 . Isto mostra que v

não troca de sinal em Ω .

Agora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, devido a afirmação acima $(\varphi_1 + \alpha v)$ não troca de sinal em Ω . Definindo

$$A := \{\alpha \in \mathbb{R}; \varphi_1 \leq \alpha v \text{ q.t.p.}\} \quad e \quad B := \{\alpha \in \mathbb{R}; \varphi_1 \geq \alpha v \text{ q.t.p.}\},$$

não é difícil* verificar que A e B são subconjuntos fechados de \mathbb{R} . Como $A \cup B = \mathbb{R}$, existe $\alpha_o \in A \cap B$ e, conseqüentemente, $\varphi_1 = \alpha_o v$ q.t.p. em Ω . Portanto λ_1 é simples. Faremos a verificação que λ_1 é isolado durante a demonstração do Teorema 1.17. A demonstração do Teorema 1.16 está completa. \square

1.5.3 Demonstração do Teorema 1.17

Pela Definição 1.5, $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Um argumento similar ao utilizado na demonstração do Teorema 1.16 implica na existência de $\varphi_2 \in V$ associada a λ_2 . Para mostrarmos que $\lambda_1 < \lambda_2$, supomos por contradição que $\lambda_1 = \lambda_2$. Então, pelo Teorema 1.16, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi_1 = \alpha \varphi_2$. Mas isto contradiz $\int \varphi_1 \varphi_2 = 0$. Além do mais, está claro que a partir da definição de V , φ_2 troca de sinal em Ω .

Agora mostramos que φ_2 é uma solução fraca de $(EP_m)_\lambda$. Dado $u \in H^1(\Omega)$, escrevemos $u = t\varphi_1 + v$, onde $t = \int \varphi_1 u \in \mathbb{R}$ e $v = u - t\varphi_1 \in V$. Argumentando como na verificação de (1.37),

$$\int \nabla v \nabla \varphi_2 + m(x)v\varphi_2 = \lambda_2 \int v\varphi_2, \quad \forall v \in V. \quad (1.38)$$

Observe que $\int \varphi_1 \varphi_2 = 0$. Logo, devido a (1.37) e (1.38), temos que

$$\begin{aligned} \int \nabla u \nabla \varphi_2 + m(x)u\varphi_2 &= t \int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 + m(x)\varphi_1\varphi_2 + \int \nabla v \nabla \varphi_2 + m(x)v\varphi_2 \\ &= \lambda_1 \int t\varphi_1\varphi_2 + \lambda_2 \int v\varphi_2 = \lambda_2 \int u\varphi_2, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Assim, λ_2 é um autovalor de $(EP_m)_\lambda$, sendo φ_2 uma autofunção associada. Nosso passo final é verificarmos que $(EP_m)_\lambda$ não possui solução se $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Caso contrário, seja φ

*seja $\{\alpha_n\}_n \subset A$ tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$. Se $\alpha \notin A$ então $|\{x; \varphi_1(x) - \alpha v(x) > 0\}| > 0$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que $E_\epsilon = \{x; \varphi_1(x) - \alpha v(x) > \epsilon\}$ tem medida positiva. Para tal $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, como $\alpha_n \in A$, temos em E_ϵ ,

$$\int_{E_\epsilon} (\alpha_n - \alpha)v \geq \int_{E_\epsilon} (\alpha_n v - \varphi_1) + \epsilon|E_\epsilon| \geq \epsilon|E_\epsilon|.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, concluímos que $|E_\epsilon| = 0$. Esta contradição implica que $\alpha \in A$.

uma autofunção (normalizada) de $(EP_m)_\lambda$ com $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Então

$$\lambda \int \varphi \varphi_1 = \int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi + m(x) \varphi_1 \varphi = \lambda_1 \int \varphi \varphi_1.$$

Como $(\lambda_1 - \lambda) \neq 0$, $\int \varphi \varphi_1 = 0$. Assim $\varphi \in V$. Entretanto, isto contradiz a definição de λ_2 , uma vez que $\lambda = \lambda \int \varphi^2 = Q_m(\varphi) < \lambda_2$. A demonstração do Teorema 1.17 está completa. \square

1.5.4 Um problema de convergência fraca em $L^s(\Omega)$.

Nesta subseção, para $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ não trivial, verificamos que o problema apresentado na introdução deste capítulo:

$$\begin{cases} -\Delta u + \varphi(x) \cos(jx_N) u = a(x)u^r, & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $a \in C(\bar{\Omega})$ troca de sinal em Ω e $\int a(x) < 0$, satisfaz as hipóteses dos Teoremas 1.1 e 1.2. Note que neste caso $m \equiv 0$ e $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$. Inicialmente, mostramos que $m_j(x) := \varphi(x) \cos(jx_N) \rightharpoonup 0$ fracamente em $L^s(\Omega)$, $s > 1$, o que nos permite aplicar os Teoremas 1.1 e 1.2. Em seguida mostramos que $\|m_j\|_{L^s(\Omega)} \not\rightarrow 0$, para todo $s > 1$.

De fato, para verificarmos a primeira afirmação, basta que

$$\int_{\Omega} m_j v \rightarrow 0, \quad \forall v \in L^{\frac{s}{s-1}}(\Omega).$$

Utilizando argumentos de densidade, vamos supor que $v \in C_o^\infty(\Omega)$. Definindo o campo $F_j(x) = \left(0, \dots, 0, v(x)\varphi(x) \frac{\sin(jx_N)}{j}\right)$ em \mathbb{R}^N onde só a última componente é não nula e aplicando o teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \text{Div}(F_j) dx = \int_{\partial \Omega} F_j \cdot \eta dS_x = 0,$$

pois $\varphi \equiv 0$ sobre $\partial \Omega$. Desta forma

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x) \cos(jx_N) dx = -\frac{1}{j} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_N} [v(x)\varphi(x)] \sin(jx_N) dx \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

uma vez que $v\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ e $\frac{1}{j} \rightarrow 0$. Resta mostrarmos que $\|m_j\|_{L^s(\Omega)} \not\rightarrow 0$, para todo $s > 1$. Como $|\varphi| \not\equiv 0$, seja $\bar{x} \in \Omega$ tal que $|\varphi(\bar{x})| > 0$. Por continuidade, existem $c > 0$ e

$a_i < b_i, i = 1, \dots, N$ tais que

$$|\varphi(x)| > a \quad \forall x \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \subset \Omega.$$

Então, considerando $D := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ e $C := a^s \prod_{n=1}^{n=N-1} (b_n - a_n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x) \cos(jx_N)|^s dx &> a^s \int_D |\cos(jx_N)|^s dx \\ &= C \int_{a_N}^{b_N} |\cos(jx_N)|^s dx_N = \frac{C}{j} \int_{ja_N}^{jb_N} |\cos y|^s dy. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, vamos supor $0 < a_N < b_N$. Logo $j(b_N - a_N) \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Definindo

$$k_j := \inf_{k \in \mathbb{N}} \{k ; ja_N \leq k\pi\} \quad e \quad \bar{k}_j := \sup_{k \in \mathbb{N}} \{k ; jb_N \geq k\pi\},$$

podemos escrever $ja_N = k_j\pi + r_j$, com $0 \leq r_j < \pi$ e $jb_N = \bar{k}_j\pi + \bar{r}_j$, com $0 \leq \bar{r}_j < \pi$. Deste modo, $(k_j\pi, \bar{k}_j\pi) \subset (ja_N, jb_N)$, e $\frac{\bar{k}_j - k_j}{j} \rightarrow \frac{b_N - a_N}{\pi}$, quando $j \rightarrow \infty$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{C}{j} \int_{ja_N}^{jb_N} |\cos y|^s dy &\geq \frac{C}{j} \int_{k_j\pi}^{\bar{k}_j\pi} |\cos y|^s dy = \frac{C}{j} \sum_{i=k_j}^{\bar{k}_j-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\cos y|^s dy \\ &= \frac{C}{j} \sum_{i=k_j}^{\bar{k}_j-1} \int_0^{\pi} |\cos(z - i\pi)|^s dz = \frac{C}{j} \sum_{i=k_j}^{\bar{k}_j-1} \int_0^{\pi} |\cos z|^s dz \\ &= \frac{C(\bar{k}_j - k_j - 1)}{j} \int_0^{\pi} |\cos z|^s dz \rightarrow \frac{C(b_N - a_N)}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos z|^s dz \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|m_j\|_{L^s(\Omega)}^s \geq \frac{C(b_N - a_N)}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos z|^s dz > 0, \quad \forall s > 1.$$

Existência, Multiplicidade e Dependência de Soluções para o Problema não Homogêneo

2.1 Introdução

Neste capítulo aplicamos métodos variacionais a fim de estudarmos a multiplicidade de soluções para o problema indefinido

$$(\mathcal{P}_m) \begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)f(u), & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ é um domínio suave e limitado e $a \in C(\overline{\Omega})$ troca de sinal, isto é,

(A_1) $\Omega_a^+ := \{x \in \Omega ; a(x) > 0\}$, $\Omega_a^- := \{x \in \Omega ; a(x) < 0\}$ são não vazios.

Sobre o potencial $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ supomos

(m_1) $m \in L^\sigma(\Omega)$ para algum $\sigma > N$.

Além do mais, definindo $F(s) := \int_0^s f(t)dt$, admitimos que f satisfaz as seguintes hipóteses.

$$(f_1) \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)s - (p+1)F(s)}{s^2} = 0;$$

$$(f_2) \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s) - |s|^{p-1}s}{|s|^p} = 0, \text{ para algum } 1 < p < 2^* - 1;$$

$$(f_3) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s) - |s|^{r+1}}{|s|^{r+1}} = 0, \text{ para algum } 1 < r < 2^* - 1;$$

$$(f_4) f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } |f'(s)| \leq C(1 + |s|^{\alpha-1}) \text{ para algum } C > 0 \text{ e } 1 < \alpha < 2^* - 1.$$

Faremos agora um breve comentário sobre as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. As hipóteses $(f_1) - (f_3)$ implicam que f possui comportamento superlinear na origem e no infinito. Um exemplo de função satisfazendo $(f_1) - (f_3)$ é $f(s) = s|s|^{p-1} + g(s)$ com $\frac{g(s)}{s} \rightarrow 0$ quando $|s| \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow 0$. Vale mencionar que (f_1) e (f_2) são independentes. De fato, estendendo $h_1(s) := \sqrt{s}$ de forma ímpar, temos que h_1 satisfaz (f_1) mas não satisfaz (f_2) . Por outro lado, tomando $q \in (1, p)$, $h_2(s) := s|s|^{p-1} + s|s|^{q-1}$ satisfaz (f_2) mas não satisfaz (f_1) . Finalmente, notamos que sob a condição (f_4) , o funcional associado ao problema é de classe C^2 em $H^1(\Omega)$.

Observando que (f_3) implica $f(0) = 0$, temos que o Problema (\mathcal{P}_m) possui a solução trivial $u \equiv 0$. Nosso objetivo neste capítulo é estabelecer a existência de três soluções não triviais para (\mathcal{P}_m) . Inicialmente, através de uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha, obtemos a existência de uma solução positiva e de uma negativa. Em seguida, inspirados por [30], utilizamos a teoria de Morse em dimensão infinita para assegurar a existência de uma terceira solução não trivial para (\mathcal{P}_m) .

Como já visto na literatura (veja [2, 10, 28]), resultados de existência para (\mathcal{P}_m) estão fortemente relacionados ao problema de autovalor

$$(EP_m)_\lambda \begin{cases} -\Delta\varphi + m(x)\varphi = \lambda u, & \Omega, \\ \partial\varphi/\partial\eta = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Lembramos que o primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$ é simples, isolado e que a autofunção associada φ_1 não troca de sinal em Ω (veja Seção 3 do Capítulo 1). Considerando $\varphi_1 > 0$ normalizada em $L^2(\Omega)$ e r, p dados por (f_2) e (f_3) , supomos

(A_2) O primeiro autovalor de $(EP_m)_\lambda$ é nulo;

$$(A_3) \int a(x)\varphi_1^{r+1} < 0;$$

$$(A_4) \int a(x)\varphi_1^{p+1} \neq 0.$$

Podemos agora enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponha $(A_1) - (A_4)$ e $(f_1) - (f_4)$. Então o Problema (\mathcal{P}_m) possui pelo menos três soluções não triviais.*

Durante a demonstração do Teorema 2.1 estabelecemos a existência de uma solução positiva e uma solução negativa para (\mathcal{P}_m) . Na realidade, veremos na **Seção 2** que a

existência de tais soluções pode ser obtida se considerarmos no lugar de (m_1) e (f_4) as hipóteses mais fracas:

$$(m_1)' \quad m \in L^\sigma(\Omega) \text{ para algum } \sigma > \frac{N}{2},$$

$$(f_4)' \quad f \in C(\mathbb{R}).$$

Motivados pelos resultados obtidos no Capítulo 1 (veja também [25]), consideramos a existência de soluções quando temos uma perturbação do potencial m . Mais especificamente, admitimos a existência de uma sequência $\{m_j\}_j \subset L^\sigma(\Omega), \sigma > N$, satisfazendo

$$(m_2) \quad m_j \rightharpoonup m \text{ fracamente em } L^\sigma(\Omega).$$

Teorema 2.2. *Suponha $(A_1) - (A_4), (f_1) - (f_4)$ e (m_2) . Então existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que (\mathcal{P}_{m_j}) possui pelo menos três soluções não triviais para cada $j \geq j_o$.*

Como aplicação do Teorema 2.2, podemos afirmar que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varphi(x) \cos(jx_N) u = a(x)f(u), & \Omega, \\ \partial u / \partial \eta = 0, & \partial \Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ é uma função não nula, $\int a(x) < 0$ e f satisfaz $(f_1) - (f_4)$, possui pelo menos três soluções não triviais para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Perceba que $m_j(x) := \varphi(x) \cos(jx_N), j \in \mathbb{N}$ é tal que $m_j \in L^\infty(\Omega)$ e $m_j \rightharpoonup 0$ fracamente em $L^s(\Omega)$, para cada $s \geq \frac{N}{2}$. No entanto, a sequência $\{m_j\}_j$ não converge fortemente em nenhum $L^s(\Omega)$ (veja o Apêndice do Capítulo 1). Em particular, observamos que os resultados de [2] e [28] não se aplicam neste exemplo.

O Teorema 2.2 é uma extensão natural do Teorema 1.1 o qual contribui com os resultados obtidos em [2, 10, 28]. A organização deste capítulo é como se segue: na seção 2 estabelecemos alguns resultados preliminares. Na Seção 3 encontramos duas soluções não triviais u_1 e u_2 de (\mathcal{P}_m) . Na Seção 4 estabelecemos o Lema de Morse Generalizado, estudamos as propriedades dos conjuntos de nível e caminhos sobre estes conjuntos de nível. Na Seção 5, iniciamos a demonstração do Teorema 2.1. Para tal construímos um enlace especial e encontramos uma terceira solução para o Problema (\mathcal{P}_m) no caso em que $\mathcal{M}(u_1)$, o índice de Morse de u_1 , é igual a zero. Repetimos o mesmo argumento na Seção 6 para o caso em que $\mathcal{M}(u_1) = 1$, concluindo portanto a demonstração do Teorema 2.1. Na Seção 7, demonstramos o Teorema 2.2 estabelecendo um resultado de dependência contínua de soluções para (\mathcal{P}_{m_j}) . Finalizamos este capítulo na Seção 8 com um apêndice que trata da regularidade e comportamento das soluções encontradas.

2.2 Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns resultados preliminares que serão empregados na demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2. Inicialmente lembramos que o funcional associado a (\mathcal{P}_m) é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + m(x)u^2 - \int a(x)F(u), \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Em vista da regularidade de m , das condições (f_2) e $(f_4)'$, $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. As soluções fracas de (\mathcal{P}_m) são pontos críticos do funcional acima.

Com o objetivo de analisar o comportamento de J próximo à origem e verificar a condição de Palais-Smale (PS) (veja [23] para a definição), vamos decompor $H^1(\Omega)$ como uma soma direta de dois subespaços apropriados: definindo

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) ; \int \varphi_1 v = 0 \right\},$$

temos que $H^1(\Omega) = \mathbb{R}\varphi_1 \oplus V$. De fato, dado $u \in H^1(\Omega)$, podemos escrever $u = t\varphi_1 + v$ onde $t = \int u\varphi_1$ e $v = (u - t\varphi_1) \in V$. Supondo $(m_1)'$ e considerando

$$\langle v, w \rangle_V := \int \nabla v \nabla w + m(x)vw, \quad \forall v, w \in V,$$

é possível verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ é um produto interno em V , devido a validade de (A_2) e do fato de λ_1 ser simples e isolado implicam que o segundo auto valor de $(EP)_m$, λ_2 , é positivo (veja Seção 3 do Capítulo 1). Considerando $\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v \rangle_V}$, $v \in V$, a norma associada em V , temos

Lema 2.3. *Suponha $(m_1)'$ e (A_2) . Então existem $a_1, a_2 > 0$ tais que*

$$a_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_V \leq a_2\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V.$$

Demonstração. A segunda desigualdade no Lema 2.3 é consequência imediata da desigualdade de Hölder e da imersão de Sobolev. Portanto, é suficiente mostrar a existência da constante $a_1 > 0$. Argumentando por contradição, suponha que exista uma sequência $\{v_n\}_n \subset V$ tal que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \equiv 1$ e $\|v_n\|_V^2 < \frac{1}{n}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $v_n \rightharpoonup v_o$ fracamente em $H^1(\Omega)$ e que $v_n \rightarrow v_o$ fortemente em $L^2(\Omega)$.

Conseqüentemente, como $\lambda_2 > 0$ e

$$\lambda_2 \int v_n^2 \leq \int |\nabla v_n|^2 + m(x)v_n^2 < \frac{1}{n}, \quad (2.1)$$

temos que $v_o = 0$. Logo, fazendo uso da continuidade do funcional $H(v) := \int m(x)v^2$ na topologia fraca de $H^1(\Omega)$ (veja [31]) concluímos que $\int m(x)v_n^2 \rightarrow 0$. Este fato e a segunda desigualdade em (2.1) implicam que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Mas isto contradiz a identidade $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \equiv 1$. A demonstração está completa. \square

Observação 2.4. *O Lema 2.3 também implica na equivalência entre a norma*

$$\|u\| := \sqrt{t^2 + \|v\|_V^2}, \quad u = t\varphi_1 + v, \quad \text{com } t \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V,$$

e a norma usual do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. De fato, como uma aplicação direta deste lema, temos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{a_1} \right) \|u\|.$$

Por outro lado, afirmamos que existe $C > 0$ tal que $C\|u\| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$. Caso contrário, dado $n \in \mathbb{N}$, encontraríamos $u_n = t_n\varphi_1 + v_n$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \mathbb{R}$, $v_n \in V$ tal que $\|u_n\|^2 \equiv 1$ e $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 < \frac{1}{n}$. Utilizando esta última desigualdade, obtemos

$$t_n = \int u_n \varphi_1 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = \|u_n - t_n \varphi_1\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Aplicando o Lema 2.3 mais uma vez, concluímos que $\|v_n\|_V \rightarrow 0$. Segue que $\|u_n\| = \sqrt{t_n^2 + \|v_n\|_V^2} \rightarrow 0$. Isto contradiz a identidade $\|u_n\| \equiv 1$. A equivalência entre $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ está demonstrada.

Uma das conseqüências do Lema 2.3 é o

Lema 2.5. ([25]) *Suponha (A_2) , (A_3) e $(m_1)'$. Então existe $\beta > 0$ tal que*

$$\int a(x)|u|^{r+1} \leq \frac{|t|^{r+1}}{2} \int a\varphi_1^{r+1} < 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $v \in V$ e $\|v\|_V \leq \beta|t|$.

Observe que em função de (A_2) e da decomposição $H^1(\Omega) = \mathbb{R}\varphi_1 \oplus V$, temos que

$$\int |\nabla u|^2 + m(x)u^2 = \|v\|_V^2, \quad (2.2)$$

para $u = t\varphi_1 + v$.

Concluimos esta seção apresentando duas estimativas que serão utilizadas na verificação de que o funcional associado ao Problema (\mathcal{P}_m) satisfaz a condição (PS) : dado $\epsilon > 0$, combinamos as hipóteses (f_1) e $(f_4)'$, a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a Observação 2.4 para obtermos $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \int a(x) \left[\frac{f(u)u}{p+1} - F(u) \right] \right| \leq C_\epsilon + \epsilon \|u\|^2, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (2.3)$$

De maneira análoga, por (f_2) e $(f_4)'$,

$$|a(x)(f(u) - u|u|^{p-1})| \leq C_\epsilon + \epsilon |u|^p, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (2.4)$$

2.2.1 A condição (PS) e a geometria do passo da montanha

O Objetivo principal desta subseção é a verificação de que o funcional J associado ao problema (\mathcal{P}_m) , satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha [4].

Visando a verificação da condição (PS) , estabelecemos

Lema 2.6. *Suponha $(m_1)'$, (A_2) , (A_4) , (f_1) , (f_2) e $(f_4)'$. Então toda sequência $\{u_n\}_n \subset H^1(\Omega)$ satisfazendo $K := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |J(u_n)|, \|J'(u_n)\| \} < \infty$, é limitada.*

Demonstração. Escreva $u_n = t_n \varphi_1 + v_n$ com $t_n \in \mathbb{R}$ e $v_n \in V$. Argumentando por contradição, supomos que $\{u_n\}_n \subset H^1(\Omega)$ não é limitada. Tomando uma subsequência se necessário, admitimos que $\|u_n\| \rightarrow \infty$.

Utilizando a hipótese do lema, a definição do funcional J e a relação (2.2), encontramos $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{p-1}{2(p+1)} \|v_n\|_V^2 + \int a(x) \left[\frac{f(u_n)u_n}{p+1} - F(u_n) \right] = J(u_n) - \frac{1}{p+1} J'(u_n)u_n \leq C_1(1 + \|u_n\|).$$

A seguir, dado $\epsilon > 0$, aplicamos a desigualdade (2.3) para obter $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\|v_n\|_V^2 \leq C_\epsilon + C_1(1 + \|u_n\|) + \epsilon \|u_n\|^2.$$

Como $\|u_n\| \rightarrow \infty$, obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|v_n\|_V}{\|u_n\|} \right)^2 \leq \epsilon$. Sendo $\epsilon > 0$ escolhido de maneira arbitrária, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|v_n\|_V}{\|u_n\|} \right)^2 = 0$. Consequentemente, $|t_n| \rightarrow \infty$ e $\left\| \frac{v_n}{t_n} \right\|_V \rightarrow 0$. Uma aplicação direta destes limites nos permite escrever

$$\int \frac{a(x)|u_n|^{p-1}u_n \varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} = \int a(x) \left| \varphi_1 + \frac{v_n}{t_n} \right|^{p-1} \left(\varphi_1 + \frac{v_n}{t_n} \right) \varphi_1 \longrightarrow \int a(x) \varphi_1^{p+1}. \quad (2.5)$$

Além disso, utilizando (2.4), dado $\epsilon_1 > 0$ obtemos $C_{\epsilon_1} > 0$ tal que

$$\left| \int \frac{a(x)[f(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n]}{|t_n|^{p-1}t_n} \varphi_1 \right| \leq \epsilon_1 \int \left| \varphi_1 + \frac{v_n}{t_n} \right|^p \varphi_1 + \int \frac{C_{\epsilon_1} \varphi_1}{|t_n|^p} \rightarrow \epsilon_1 \int \varphi_1^{p+1}.$$

Portanto, como $\epsilon_1 > 0$ pode ser escolhido suficientemente pequeno,

$$\int \frac{a(x)[f(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n]}{|t_n|^{p-1}t_n} \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

As relações, (2.5) e (2.6), e o fato de que $|t_n| \rightarrow \infty$ nos fornecem

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J'(u_n) \varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left\{ \frac{a(x)|u_n|^{p-1}u_n \varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} - \frac{a(x)[f(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n]}{|t_n|^{p-1}t_n} \varphi_1 \right\} = \int a(x) \varphi_1^{p+1}.$$

Mas, isto contradiz (A_4) . A demonstração do Lema 2.6 está completa. \square

Uma das consequência do Lema 2.6 e de f possuir crescimento subcrítico é o

Corolário 2.7. *Suponha $(m_1)', (A_2), (A_4), (f_1), (f_2)$ e $(f_4)'$. Então o funcional J satisfaz a condição (PS).*

Demonstração. Veja [23] ou os argumentos usados no Lemma 1.20 de [31]. \square

Estabelecemos agora a Geometria do Passo da Montanha para o funcional J .

Lema 2.8. *Suponha $(m_1)', (A_1), (A_2), (A_3), (f_2), (f_3)$ e $(f_4)'$. Então existem $\bar{\alpha}, \rho_o > 0$, e $e \in H^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho_o$ tais que*

(i) $J(u) \geq 2\bar{\alpha}\|u\|^{r+1}$ para cada $0 \leq \|u\| \leq \rho_o$,

(ii) $J(e) < 0$.

Demonstração: Para a verificação de (i), escrevemos $u = t\varphi_1 + v, v \in V, t \in \mathbb{R}$ e observamos que $\|u\|^2 = t^2 + \|v\|_V^2$. Usando $\beta > 0$ proveniente do Lema 2.5, consideramos os dois possíveis casos:

Caso 1: $\|v\|_V \leq \beta|t|$. Neste caso, $|t| \geq \frac{\|u\|}{\sqrt{1+\beta^2}}$. Usando o Lema 2.5 e (A_3) ,

$$\frac{1}{r+1} \int a(x)|u|^{r+1} \leq \frac{\|u\|^{r+1}}{2(1+\beta^2)^{\frac{r+1}{2}}} =: -D\|u\|^{r+1}.$$

De $(f_2), (f_3), (f_4)'$ e da imersão de Sobolev, dado $\epsilon \in (0, D)$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \int a(x) \left[\frac{|u|^{r+1}}{r+1} - F(u) \right] \right| \leq \epsilon \|u\|^{r+1} + C_\epsilon \|u\|^{2*}.$$

Logo, por (2.2) e $r + 1 < 2^*$, existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|v\|_V^2 - \frac{1}{r+1} \int a(x) |u|^{r+1} + \int a(x) \left[\frac{|u|^{r+1}}{r+1} - F(u) \right] \\ &\geq (D - \epsilon - C_\epsilon \|u\|^{2^*-r-1}) \|u\|^{r+1} \\ &\geq \frac{D-\epsilon}{2} \|u\|^{r+1}, \quad \forall 0 \leq \|u\| \leq \rho_1. \end{aligned}$$

Caso 2: $\|v\|_V > \beta|t|$. Neste caso,

$$\|v\|_V^2 \geq \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \|u\|^2. \quad (2.7)$$

De (f_2) , (f_3) e $(f_4)'$, encontramos $C > 0$ tal que $|\int a(x)F(u)| \leq C [\|u\|^{r+1} + \|u\|^{2^*}]$. Portanto, (2.2) e (2.7), $2 < r + 1 < 2^*$, existe $\rho_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)} \|u\|^2 - C \|u\|^{r+1} - C \|u\|^{2^*} \\ &\geq \|u\|^2 \left[\frac{\beta^2}{4(1+\beta^2)} \right] \geq \frac{D-\epsilon}{2} \|u\|^{r+1} \quad \forall 0 \leq \|u\| \leq \rho_2, \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho_o < \min\{\rho_1, \rho_2\}$, a verificação do item (i) está completa.

Para a verificação do item (ii), consideramos $x_o \in \Omega_a^+$ e $r_o > 0$ tais que a bola aberta do \mathbb{R}^N : $\mathcal{B}_{r_o}(x_o)$, satisfaz $\mathcal{B}_{r_o}(x_o) \subset \subset \Omega_a^+$. Seja $u_o \in C_0^\infty(\mathcal{B}_{r_o}(x_o))$, $u_o \geq 0$ e $u_o \not\equiv 0$. Por (f_2) e $(f_4)'$,

$$F(s) \geq C_1 s^{p+1} - C_2, \quad \forall s \geq 0,$$

onde $C_1, C_2 > 0$. Tomando $d := \inf_{x \in \mathcal{B}_{r_o}(x_o)} a(x) > 0$,

$$\begin{aligned} J(\theta u_o) &\leq \frac{\theta^2}{2} \int |\nabla u_o|^2 + m(x) u_o^2 - \int_{\mathcal{B}_{r_o}(x_o)} a(x) [C_1 |\theta u_o|^{p+1} - C_2] \\ &\leq M\theta^2 + C_3 - C_4 \theta^{p+1} \|u_o\|_{p+1}^{p+1} \longrightarrow -\infty, \end{aligned}$$

quando $\theta \rightarrow \infty$, uma vez que $p > 1$. Isto nos fornece (ii). A demonstração do Lema 2.8 está completa. \square

2.2.2 Comportamento das soluções

Para finalizar esta seção apresentamos resultados a respeito do comportamento e regularidade das soluções de (\mathcal{P}_m) , cuja as demonstrações se encontram no Apêndice deste capítulo. O primeiro trata-se de uma versão do teorema de Brezis-Kato [12] para o problema de Neumann. Em seguida, apresentamos um resultado sobre o comportamento

das soluções nos espaços $L^q(\Omega)$ e finalizamos lidando com a regularidade das soluções.

Teorema 2.9. *Sejam $b \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que g é uma função de Carathéodory e $|g(x, s)| \leq b(x)(1 + |s|)$ q.t.p. em Ω . Se $u \in H^1(\Omega)$ é um solução fraca não negativa de*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = g(x, u), & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

Corolário 2.10. *Seja $u = u_b$ a solução do problema (\mathcal{P}) considerada pelo Teorema 2.9. Então, dado $1 \leq q < \infty$, $\|u\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0$, sempre que $\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} \rightarrow 0$.*

Proposição 2.11. [3] *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado e $g \in L^p(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$(\mathcal{P}_g) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = g(x), & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

- i) Se $p > \frac{N}{2}$, $u \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ se $\|g\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$.
- ii) Se $p > N$, $u \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, $\|u\|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ se $\|g\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$.
- iii) Se $p = \frac{N}{2}$, $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2, \frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

2.3 Duas Soluções para (\mathcal{P}_m)

Nesta seção mostramos a existência de uma solução positiva e uma negativa para o Problema (\mathcal{P}_m) . Para tal usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Brezis-Nirenberg (veja [10]).

Teorema 2.12. [10] *Sejam E um espaço de Banach, $Q : E \rightarrow E$ uma função contínua e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo $(PS)_c$, $J(0) = 0$ e*

- (J_1) existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $J(u) \geq \alpha$ se $\|u\|_E = \rho$,
- (J_2) existe $e \in E$ com $\|e\|_E > \rho$ tal que $J(e) \leq 0$,
- (J_3) $Q(0) = 0$, $Q(e) = e$ e $J(Q(u)) \leq J(u)$, $\forall u \in E$.

Então J possui um ponto crítico $u \in \overline{Q(E)}$ tal que $J(u) = c$,

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

e $\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], E) ; \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$.

Através deste teorema, mostramos a existência de duas soluções para (\mathcal{P}_m) . Mais especificamente, provamos o seguinte resultado

Teorema 2.13. *Suponha $(m_1)', (A_1) - (A_4), (f_1) - (f_3)$ e $(f_4)'$. Então o Problema (\mathcal{P}_m) possui uma solução não negativa u_1 e uma solução não positiva u_2 em $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, supondo (f_4) temos que $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ em Ω .*

Demonstração do Teorema 2.13. Para tal demonstração definimos f_+, f_- por

$$f_+(t) := \begin{cases} f(t) & \text{se } t \geq 0 \\ -f(-t) & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad f_-(t) := \begin{cases} -f(-t) & \text{se } t \geq 0 \\ f(t) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo é encontrar pontos críticos para o funcional par

$$J_i(u) := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + m(x)u^2 - \int a(x)F_i(u), \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

onde $F_i(s) := \int_0^s f_i(t)dt, i = +, -$. Note que f_i satisfaz as condições $(f_1) - (f_3)$ e $(f_4)'$.

Do Corolário 2.7 e do Lema 2.8, sabemos que J_+, J_- satisfazem as hipóteses do Teorema 2.12 para $Q_+(u) := |u|$ e $Q_-(u) = -|u|$, respectivamente. Mais especificamente, aplicando o Lema 2.8 encontramos $e_1 \geq 0$ e $e_2 \leq 0$ tais que

$$c_1 := \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \max_{s \in [0,1]} J_+(\gamma(y)) \quad e \quad c_2 := \inf_{\gamma \in \Gamma_2} \max_{s \in [0,1]} J_-(\gamma(y)), \quad (2.8)$$

onde

$$\Gamma_k := \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\Omega)) ; \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_k\}, \quad k = 1, 2, \quad (2.9)$$

são valores críticos de J e existem pontos críticos não triviais $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ tais que $u_1 \geq 0, u_2 \leq 0$ e $c_k = J(u_k), k = 1, 2$.

Em se tratando da regularidade de u_1, u_2 , devido as hipóteses (f_2) e $(f_4)'$,

$$\bar{d}_k := \frac{(1 - m(x))u_k + a(x)f(u_k)}{1 + |u_k|} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega).$$

Aplicando o Teorema 2.9, temos que $u_k \in L^r(\Omega)$ para cada $r \geq 1$. Assim $((1 - m(x))u_k + a(x)f(u_k)) \in L^{\sigma'}(\Omega)$ para cada $\sigma' \in (\frac{N}{2}, \sigma)$. Pela Proposição 2.11(veja o Apêndice deste capítulo), $u_k \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$.

Supondo a condição (f_4) ao invés de $(f_4)'$, afirmamos que $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ em Ω . De

fato, considere

$$d_k(x) = \begin{cases} m(x) - a(x) \frac{f(u_k(x))}{u_k(x)}, & \text{se } u_k(x) \neq 0 \\ m(x), & \text{se } u_k(x) = 0 \end{cases}, \quad k = 1, 2.$$

Por $(m_1)'$ e (f_4) temos que $d_k \in L^{\sigma'}(\Omega)$ para cada $\sigma' \in (\frac{N}{2}, \sigma)$. Pelos Teoremas 1.7 e 1.6 e Observação 1.8 do Capítulo 1, $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ q.t.p. em Ω . Utilizando uma desigualdade do tipo Harnack devida a Stampacchia (Teorema 7.1 de [26]) e o fato que u_1 e u_2 são contínuas, concluímos que $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ em Ω no sentido clássico. \square

Observação 2.14. *Se supormos (m_1) ao invés de $(m_1)'$ então $((1 - m(x))u_k + a(x)f(u_k)) \in L^{\sigma'}(\Omega)$ para cada $\sigma' \in (N, \sigma)$. Usando a Proposição 2.11, $u_k \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, pelo Lema de Hopf para funções $C^1(\bar{\Omega})$ (veja [15]) temos que $|u_k| > 0$ em $\bar{\Omega}$.*

2.4 O Lema de Morse Generalizado

Nesta seção com o intuito de obtermos um terceiro ponto crítico para J através de um enlace (*linking*) especial, enunciamos uma ferramenta fundamental para o nosso trabalho:

Lema 2.15. *(Lema de Morse Generalizado [13]) Sejam U uma vizinhança da origem $\mathbf{0}$ no espaço de Hilbert H e $I \in C^2(U, \mathbb{R})$. Suponha que $\mathbf{0}$ é o único ponto crítico de I e denote por $A := I''(\mathbf{0})$ com núcleo N e espectro $\sigma(A)$. Se $0 \notin \sigma(A)$ ou 0 é um ponto isolado de $\sigma(A)$, então existe uma bola aberta $B_\delta(\mathbf{0})$ centrada na origem $\mathbf{0}$, um homeomorfismo local Φ que preserva a origem definido em $B_\delta(\mathbf{0})$, uma aplicação C^1 , $h : B_\delta(\mathbf{0}) \cap N \rightarrow N^\perp$, com $h(\mathbf{0}) = 0$ tais que*

$$I \circ \Phi(\mathbf{0} + z + y) = \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle_H + I(\mathbf{0} + h(y) + y), \quad \forall u = z + y \in B_\delta(\mathbf{0})$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é o produto interno em H , $y = P(u)$ e $z = P_\perp(u)$ são as projeções ortogonais de u sobre os subespaços N e N^\perp , respectivamente.

Observação 2.16. *A função $h : B_\delta(\mathbf{0}) \cap N \rightarrow N^\perp$ pode ser caracterizada da seguinte maneira: dado $y \in B_\delta(\mathbf{0}) \cap N$, então $z = h(y)$ é a única solução do problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} I(\mathbf{0} + y + z) = 0 \\ z \in N^\perp. \end{cases}$$

Para maiores detalhes, veja a demonstração do Teorema 5.1 do capítulo 1 de [13].

Note que podemos escrever

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int G(x, u), \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $G(x, s) := \int_0^s g(x, t) dt$ e $g(x, s) := a(x)f(s) + (1 - m(x))s$. É sabido que (f_3) implica em $f(0) = 0$. Além do mais, por (f_3) , (f_4) e da expansão de Taylor de $F(s)$ em uma vizinhança da origem,

$$f'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F''(0)s^2 + o(s^2)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^2} = 0.$$

Assim $f'_i(0) = 0$ e $J_i \in C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, $i = +, -$. Novamente, como acima, podemos escrever

$$J_i(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int G_i(x, u), \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $G_i(x, u) := F_i(x, u) + (1 - m(x))\frac{u^2}{2}$, para $i = +, -$. Considerando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $H^1(\Omega)$ e $g'(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} g(x, s)$,

$$J''(u_1)(u, z) = \langle u, z \rangle - \int g'(x, u_1)uz, \quad \forall u, z \in H^1(\Omega).$$

Seja $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ definido por $J''(u_1)(u, z) = \langle Au, z \rangle$. Então $A = I - K$ onde K é tal que $\langle Ku, z \rangle = \int g'(x, u_1)uz$. Observe que K é um operador compacto em vista de (m_1) , (f_4) e da regularidade de u_1 (veja seção anterior). De agora em diante, por simplicidade, utilizamos as seguintes notações,

$$A := J''(u_1), \quad N := \text{Kern}(A), \quad \sigma(A) := \text{espectro de } A.$$

Além disso, note que $H^1(\Omega) = N \oplus N^\perp$. Pela Observação 2.14, $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ em $\bar{\Omega}$. Sem perda de generalidade, supomos que estes pontos críticos são isolados.

Aplicando o Lema 2.15 sobre o funcional $I(u) = J(u_1 + u)$ obtemos $\delta > 0$, um homeomorfismo $\Phi : B_\delta(u_1) \rightarrow \Phi(B_\delta(u_1))$ que preserva u_1 e uma aplicação C^1 tal que $h : B_\delta(0) \cap N \rightarrow N^\perp$ com $h(0) = 0$ tais que

$$J \circ \Phi(u_1 + y + z) = \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J(u_1 + y + h(y)), \quad (2.10)$$

$$\forall (y, z) \in N \oplus N^\perp \quad \text{com} \quad \|y\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{H^1(\Omega)} < \delta.$$

De maneira análoga, aplicando o Lema 2.15 a $I(u) = J_+(u_1 + u)$ obtemos $\delta_+ > 0$, um homeomorfismo $\Phi_+ : B_\delta(u_1) \rightarrow \Phi_+(B_\delta(u_1))$ que preserva u_1 e uma aplicação C^1 tal que $h_+ : B_\delta(0) \cap N \rightarrow N^\perp$ com $h_+(0) = 0$ tais que

$$\begin{aligned} J_+ \circ \Phi_+(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J_+(u_1 + y + h_+(y)), \\ \forall (y, z) \in N \oplus N^\perp \quad \text{onde} \quad \|y\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{H^1(\Omega)} &< \delta_+. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De agora em diante, cada vez que δ, h, Φ aparecerem, eles serão provenientes de (2.10). O mesmo vale para δ_+, h_+, Φ_+ .

2.4.1 A função $h : B_\delta(0) \cap N \rightarrow N^\perp$

Nesta seção, caracterizamos $h : B_\delta(0) \cap N \rightarrow N^\perp$ como sendo a solução de um problema elíptico. Em seguida analisamos o comportamento de $h(y)$ quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Tomando $y \in N := \text{Kern}(A)$, temos que

$$\int \nabla y \nabla w + yw = \int g'(x, u_1) y w, \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

isto é, y é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta y + y = g'(x, u_1) y, & \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $y \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$. De fato, de (f_4) , (m_1) e da regularidade de u_1 ,

$$|g'(x, u_1)| \leq c(1 + |m(x)|) \in L^\sigma(\Omega), \sigma > N.$$

Aplicando o Teorema 2.9, temos que $y \in L^r(\Omega)$ para cada $r \geq 1$ o que mostra que $g'(x, u_1)y \in L^{\sigma'}(\Omega)$, para cada $\sigma' \in (N, \sigma)$. Usando a Proposição 2.11 concluímos que $y \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. A afirmação está demonstrada.

Já que $A = I - K$ onde K é compacto, pela alternativa de Fredholm [11], N tem dimensão finita. Considere P a projeção ortogonal de $H^1(\Omega)$ sobre o núcleo N . Então

$$P(w) := \sum_{i=1}^k \langle w, w_i \rangle w_i, \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

onde $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortonormal de N . Note que, em vista da afirmação acima

$w_i \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\leq i \leq k$.

Para estudarmos as propriedades de h vamos necessitar da seguinte estimativa, baseada em (f_4) e na regularidade de u_1 ,

$$|g(x, u_1 + s_1 + s_2) - g(x, u_1)| \leq c[1 + |m(x)||s_1 + s_2| + |s_1 + s_2|^\alpha] \quad (2.12)$$

para cada $x \in \Omega$ e $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$. Devido a (2.12) e a afirmação acima,

$$\int \left| \frac{g(x, u_1 + y + z) - g(x, u_1)}{1 + |z|} \right|^{\frac{N}{2}} \leq C \int \left[1 + |m(x)|^{\frac{N}{2}} + |z|^{(\alpha-1)\frac{N}{2}} \right] < \infty, \quad (2.13)$$

para cada $z \in H^1(\Omega)$, uma vez que $(\alpha - 1)\frac{N}{2} < 2^*$. Portanto, para cada $y \in N \cap B_\delta(0)$,

$$T(v) := \int (g(x, u_1 + y + h(y)) - g(x, u_1))v, \quad v \in H^1(\Omega),$$

é um operador linear contínuo. Consequentemente, para cada $y \in N \cap B_\delta(0)$, existe um único $\omega = \omega(y) \in H^1(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = g(x, u_1 + y + h(y)) - g(x, u_1), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Neste momento estamos prontos para caracterizarmos a função h da seguinte forma:

Lema 2.17. *Suponha $(m_1), (f_1) - (f_4)$ e $(A_1) - (A_4)$. Sejam $\delta > 0, h$ e N dados por (2.10). Então, para cada $y \in B_\delta(0) \cap N$,*

$$h(y) = \omega - P(\omega),$$

onde $\omega := \omega(y) \in H^1(\Omega)$ é a única solução do problema (2.14).

Demonstração. Da Observação 2.16, sabemos que para cada $y \in B_\delta(0) \cap N$, $z = h(y)$ é a única solução do problema

$$\frac{\partial}{\partial z} J(u_1 + y + z) = 0, \quad z \in N^\perp.$$

Como

$$\begin{aligned} J(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \left[\|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + \langle u_1, y + z \rangle - \int G(x, u_1 + y + z), \quad \forall z \in N^\perp, \end{aligned}$$

para $z = h(y)$, temos

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial z}(u_1 + y + z), \bar{z} \right\rangle = \langle u_1 + z, \bar{z} \rangle - \int g(x, u_1 + y + z) \bar{z} = 0, \quad \forall \bar{z} \in N^\perp.$$

Por (2.14) e pelo fato de u_1 ser solução de (\mathcal{P}_m) , obtemos

$$\begin{aligned} \langle h(y), \bar{z} \rangle &= -\langle u_1, \bar{z} \rangle + \int g(x, u_1 + y + h(y)) \bar{z} \\ &= \int [g(x, u_1 + y + h(y)) - g(x, u_1)] \bar{z} \\ &= \langle \omega, \bar{z} \rangle \\ &= \langle \omega - P(\omega), \bar{z} \rangle, \quad \forall \bar{z} \in N^\perp. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Uma vez que $h(y) \in N^\perp$, concluímos que $h(y) = \omega - P(\omega)$. O Lema 2.17 está demonstrado.

□

Lema 2.18. *Suponha $(m_1), (f_1) - (f_4)$ e $(A_1) - (A_4)$. Sejam $\delta > 0, h$ e N dados por (2.10).*

Então, para $y \in B_\delta(0) \cap N$,

(i) $h(y) \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, para algum $\lambda \in (0, 1)$,

(ii) $\|h(y)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Demonstração. Pelo Lema 2.17, $h(y) = \omega - P(\omega)$. Logo $h(y)$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta h(y) + h(y) = g(u_1 + y + h(y)) - g(u_1) - \varphi(y), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial h(y)}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi(y) := \sum_{i=1}^k \beta_i(y) g'(x, u_1) w_i$ e

$$\beta_i(y) := \int [g(x, u_1 + y + h(y)) - g(x, u_1)] w_i. \tag{2.16}$$

Da continuidade de h e do fato que $h(0) = 0$, segue que $\|h(y)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Logo pela estimativa (2.12), Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a imersão de Sobolev, $\beta_i(y) \rightarrow 0$ quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Assim podemos supor que $|\beta_i(y)| \leq M$ para todo $y \in B_\delta(0) \cap N$. Devido a regularidade $y \in B_\delta(0) \cap N$ e o fato de N ser de dimensão finita, podemos supor que y é uniformemente limitado em $\bar{\Omega}$. Este fato e a regularidade u_1 e w_i , juntamente com a hipótese (f_4) , permitem encontrar $C > 0$ tal que

$$|\varphi(y)| \leq C(1 + |m|) \in L^\sigma(\Omega), \quad \forall y \in B_\delta(0) \cap N. \tag{2.17}$$

Tomando $\bar{g}(x, y) := g(x, u_1 + y + h(y)) - g(x, u_1) - \varphi(y)$, a estimativa acima juntamente

com (2.13) mostram que $\frac{\bar{g}(x,y)}{1+|h(y)|} \in L^{N/2}(\Omega)$. Aplicando mais uma vez o Teorema 2.9, $h(y) \in L^{\sigma'}(\Omega)$ para cada $\sigma' \in [1, \infty)$. Isto nos permite afirmar que $\bar{g} \in L^{\sigma'}(\Omega)$ para cada $\sigma' \in (N, \sigma)$. De fato, por (2.12) e (2.17) basta verificarmos que $|mh(y)| \in L^{\sigma'}(\Omega)$. Mas este fato é consequência direta da desigualdade de Hölder, uma vez que

$$\int |m(x)h(y)|^{\sigma'} \leq \|m\|_{L^{\sigma}(\Omega)}^{\sigma'} \|h(y)\|_{L^{\frac{\sigma\sigma'}{\sigma-\sigma'}}(\Omega)}^{\sigma'} < \infty$$

e $h(y) \in L^{\frac{\sigma\sigma'}{\sigma-\sigma'}}(\Omega)$. A afirmação está demonstrada.

Tendo em vista a afirmação acima, pela Proposição 2.11, $h(y) \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$. Isto conclui a verificação do item (i).

A seguir, apresentamos a verificação do item (ii). Em vista da Proposição 2.11, basta mostrarmos que existe $\sigma' > N$ tal que $\|\bar{g}(\cdot, y(\cdot))\|_{L^{\sigma'}(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Como estamos trabalhando em espaços métricos, vamos mostrar que $\|\bar{g}(\cdot, y_k(\cdot))\|_{L^{\sigma'}(\Omega)} \rightarrow 0$, sempre que $\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Usando mais uma vez a continuidade de h em $H^1(\Omega)$, se $\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$, então podemos supor que $h(y_k) \rightarrow 0$ em $H^1(\Omega)$, $h(y_k) \rightarrow 0$ em $L^q(\Omega)$, $h(y_k) \rightarrow 0$ q.t.p. em Ω e $|h(y_k)| \leq \psi_q \in L^q(\Omega)$ q.t.p. em Ω , $1 \leq q \leq 2^*$. Portanto, de (2.13), (2.16) e (2.17), $\left| \frac{\bar{g}(x,y_k)}{1+|h(y_k)|} \right| \rightarrow 0$ q.t.p. em Ω e

$$\left| \frac{\bar{g}(x,y_k)}{1+|h(y_k)|} \right| \leq C (1 + |m| + |\psi_{N/2(\alpha-1)}|^{(\alpha-1)}) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega).$$

Consequentemente, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica em $\left\| \frac{\bar{g}(x,y_k)}{1+|h(y_k)|} \right\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Pelo Corolário 2.10, com $b_k := \frac{|\bar{g}(x,y_k)|}{1+|h(y_k)|}$, temos que $\|h(y_k)\|_{L^{\bar{\sigma}}(\Omega)} \rightarrow 0$ para cada $\bar{\sigma} \geq 1$. Da definição de \bar{g} , (2.12) e desigualdade de Young, para cada $\sigma' \in (N, \sigma)$, não é difícil verificar que

$$|\bar{g}(x,y_k)|^{\sigma'} \leq C \left(1 + |m(x)|^{\sigma'} + \frac{\sigma'}{\sigma} |m(x)|^{\sigma'} + \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} |h(y_k)|^{\frac{\sigma\sigma'}{\sigma-\sigma'}} + |h(y_k)|^{\alpha\sigma'} \right).$$

Então, utilizando o fato que $h(y_k) \rightarrow 0$ em $L^{\frac{\sigma\sigma'}{\sigma-\sigma'}}(\Omega)$ e $L^{\alpha\sigma'}(\Omega)$, aplicando mais uma vez o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que $\|\bar{g}(x,y_k)\|_{L^{\sigma'}(\Omega)} \rightarrow 0$ para cada $\sigma' \in (N, \sigma)$, o que encerra a demonstração do Lema 2.18. \square

2.4.2 O índice de Morse

Discutimos aqui algumas propriedades que obtemos de acordo com o valor do índice de Morse dos pontos críticos do funcional J , estabelecidos pelo Teorema do Passo da Montanha.

Lembramos que o índice de Morse de J em u_1 , denotado por $\mathcal{M}(u_1)$, é definido como a dimensão maximal dos subespaços de $H^1(\Omega)$, onde $A = J''(u_1) = J''_+(u_1)$ é negativa definida.

Denotando por $J^c := \{u \in H^1(\Omega) ; J(u) \leq c\}$ enunciamos uma versão do resultado que caracteriza os pontos crítico do tipo passo da montanha devido [18].

Lema 2.19. ([30]) *Seja \mathcal{V} uma vizinhança arbitrária de u_1 . Então*

$$[J^c_+ \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$$

e não é conexo por caminhos.

Sabendo que $\mathcal{M}(u_1) \in \{0, 1\}$ (veja Hofer [18]), vamos analisar estes dois possíveis casos.

Se $\mathcal{M}(u_1) = 0$,

$$\langle Au, u \rangle = \int |\nabla u|^2 + m(x)u^2 - a(x)f'(u_1)u^2 \geq 0, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Afirmamos que existe $u_o \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $\langle Au_o, u_o \rangle = 0$. Caso contrário,

$$J''(u_1)(u, u) > 0, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Mas, isto mostra que u_1 é um ponto de mínimo local estrito de J , o que contradiz o Lemma 2.19, uma vez que a expansão de Taylor para J implica em

$$J(u_1 + h) = J(u_1) + J''(u_1)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

De fato, basta verificarmos que existe $d > 0$ tal que $J''(u_1)(u, u) > d\|u\|^2$, para cada $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Caso contrário, a menos de subsequência, existe uma sequência unitária $\{u_n\}_n \subset H^1(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u_o$ fracamente em $H^1(\Omega)$ e $\langle Au_n, u_n \rangle = \langle u_n, u_n \rangle - \langle Ku_n, u_n \rangle \rightarrow 0$. Como $\langle Ku_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Ku_o, u_o \rangle$, temos que $u_o \neq 0$, já que $\|u_n\| \equiv 1$. Logo, $\langle Au_o, u_o \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle = 0$, o que contradiz $J''(u_1)(u, u) > 0$ em $H^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Concluimos portanto pela existência de $u_o \neq 0$ tal que $\langle Au_o, u_o \rangle = 0$. Pela teoria espectral

para operadores do tipo $I - K$, onde K é compacto, temos que o primeiro autovalor de $A = I - K$ é

$$\inf_{u \neq 0} \langle Au, u \rangle = 0.$$

O que mostra que $N \neq \{0\}$. Por outro lado, fazendo

$$m_o(x) := m(x) - a(x)f(u_1(x))$$

temos que $\lambda_1(-\Delta + m_o) = 0$, onde $\lambda_1(-\Delta + m_o)$ é o primeiro autovalor de $(EP)_{m_o}$. Como $\lambda_1(-\Delta + m_o)$ é simples, a dimensão de N é 1. Além do mais, como o segundo autovalor $\lambda_2(-\Delta + m_o)$ é positivo,

$$\|z\|_o := \sqrt{\langle Az, z \rangle} \text{ é uma norma equivalente a } \|z\|_{H^1(\Omega)} \text{ em } N^\perp. \quad (2.18)$$

Veja Capítulo 1 para maiores detalhes neste sentido.

Se estamos no caso em que $\mathcal{M}(u_1) = 1$, $\langle Au, u \rangle < 0$ para algum $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, o que implica em $\lambda_1(-\Delta + m_o) < 0$. A simplicidade de $\lambda_1(-\Delta + m_o)$ permite escrever $N^\perp = W^+ \oplus W^-$, onde W^- é o autoespaço (unidimensional) associado a $\lambda_1(-\Delta + m_o)$ no qual A é negativa definida. Considere $w_o^- \in W^-$ tal que

$$\{w^- \in W^- ; \|w^-\|_{H^1(\Omega)} = \delta_+\} = \{-w_o^-, w_o^-\}.$$

Neste momento uma ordem em W^- é necessária: dizemos que $w^- \geq 0$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $w^- = \lambda w_o^-$.

Seja \mathcal{U}_1 a seguinte vizinhança de u_1 :

$$\mathcal{U}_1 := \{\Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-) ; \|w^+\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_+, \|w^-\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_+ \text{ e } \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta'\}, \quad (2.19)$$

onde $\delta' \in (0, \delta_+)$ é tal que

$$|J_+(u_1 + y + h_+(y)) - c_1| \leq -\frac{\langle Aw_o^-, w_o^- \rangle}{2}, \quad \forall \|y\| \leq \delta'. \quad (2.20)$$

Tomando $\delta_+ > 0$ menor se necessário, devido ao Lema 2.15 podemos supor que

$$J_+ \circ \Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-) = \frac{1}{2} [\langle Aw^+, w^+ \rangle + \langle Aw^-, w^- \rangle] + J_+(u_1 + y + h_+(y)), \quad (2.21)$$

sempre que $\|w^\pm\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_+$ e $\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta'$. Após estes ajustes, podemos tornar o Lema 2.19 mais preciso.

Lema 2.20. *Suponha $\mathcal{M}(u_1) = 1$ e considere \mathcal{U}_1 dada por (2.19). Então o conjunto $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$ possui exatamente duas componentes conexas por caminhos. Uma delas contém $\Phi_+(u_1 + w_o^-)$ e a outra contém $\Phi_+(u_1 - w_o^-)$*

Demonstração. Pelo Lema 2.19, basta mostrarmos que qualquer ponto de $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$ pode ser ligado a $\Phi_+(u_1 + w_o^-)$ ou $\Phi_+(u_1 - w_o^-)$ por um caminho em $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$.

Dado $\Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-) \in [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$, suponha que $w^- > 0$. Vamos mostrar que $\Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-)$ está na mesma componente de $\Phi_+(u_1 + w_o^-)$. Para tal considere

$$\begin{aligned} p_1(t) &:= \Phi_+(u_1 + y + (1-t)w^+ + w^-), & t \in [0, 1], \\ p_2(t) &:= \Phi_+(u_1 + y + (1-t)w^- + tw_o^-), & t \in [0, 1], \\ p_3(t) &:= \Phi_+(u_1 + (1-t)y + w_o^-), & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Note que

$$p([0, 1]) := p_1([0, 1]) \cup p_2([0, 1]) \cup p_3([0, 1])$$

liga $\Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-)$ a $\Phi_+(u_1 + w_o^-)$ e $p([0, 1]) \subset \mathcal{U}_1 \setminus \{u_1\}$. Resta verificarmos que $J_+(p(t)) \leq c_1$ para todo $t \in [0, 1]$. Quando estamos sobre p_1 , usamos (2.21) e o fato que $(1-t)^2 \langle Aw^+, w^+ \rangle \leq \langle Aw^+, w^+ \rangle$, para cada $t \in [0, 1]$ para concluirmos que $J_+(p_1(t)) \leq J_+(p_1(0)) \leq c_1$, para cada $t \in [0, 1]$. Sobre p_2 , considere $0 < \lambda \leq 1$ tal que $w^- = \lambda w_o^-$. Já que $((1-t)\lambda + t)^2 \geq \lambda^2$ para cada $t \in [0, 1]$, temos que

$$\langle A((1-t)w^- + tw_o^-), ((1-t)w^- + tw_o^-) \rangle \leq \lambda^2 \langle Aw_o^-, w_o^- \rangle = \langle Aw^-, w^- \rangle.$$

Portanto, por (2.21), $J_+(p_2(t)) \leq J_+(p_2(0)) \leq c_1$, para cada $t \in [0, 1]$. Sobre p_3 , $\|(1-t)y\| \leq \delta'$, (2.20) e (2.21) implicam em

$$J_+(p_3(t)) = \frac{1}{2} \langle A(w_o^-), (w_o^-) \rangle + J_+(u_1 + (1-t)y + h_+((1-t)y)) \leq c_1.$$

De modo similar, se $w^- < 0$ podemos mostrar que $\Phi_+(u_1 + y + w^+ + w^-)$ está na mesma componente de $\Phi_+(u_1 - w_o^-)$.

Finalizamos esta demonstração verificando que o caso $w^- = 0$ não ocorre. Caso contrário, se $\Phi_+(u_1 + y + w^+) \in [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$, por (2.21), o caminho $\bar{p}(t) := \Phi_+(u_1 + y + w^+ + (2t-1)w_o^-)$ é tal que

$$\begin{aligned} J_+(\bar{p}(t)) &= \frac{1}{2} [\langle Aw^+, w^+ \rangle + (2t-1)^2 \langle Aw_o^-, w_o^- \rangle] + J_+(u_1 + y + h_+(y)) \\ &\leq J_+ \circ \Phi_+(u_1 + y + w^+) \leq c_1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Assim \bar{p} é tal que $\bar{p}(0)$ está na mesma componente de $\Phi_+(u_1 - w_o^-)$ e $\bar{p}(1)$ está na mesma componente de $\Phi_+(u_1 + w_o^-)$. Em vista dos dois casos acima, $w^- > 0$ e $w^- < 0$, concluímos que $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_1$ é conexo por caminhos. Mas isto contradiz o Lema 2.19. A demonstração do Lema 2.20 está completa. \square

Observação 2.21. *Note que se $\mathcal{M}(u_1) = 1$, então $J_+ \circ \Phi_+(u_1 + y + w^+) > c_1$ para cada $\|w^+\| < \delta_+$ e $0 < \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta'$. Em particular, se $w^+ = 0$, $J_+(u_1 + y + h_+(y)) > c_1$ para cada $y \in N$ com $0 < \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta'$.*

2.4.3 O comportamento local de J em u_1

Baseados no valor do índice de Morse $\mathcal{M}(u_1)$, estudamos o comportamento local de J em uma vizinhança de u_1 . Mais precisamente, mostramos que $y \mapsto J(u_1 + y + h(y))$, $y \in N$, é tal que $y = 0$ é um ponto de máximo ou mínimo local isolado.

Com o intuito de estabelecermos tal resultado, iniciamos com o

Lema 2.22. *Sejam $\delta_+ > 0$, h_+ , Φ_+ dados por (2.11). Então existe $\delta_{+1} \in (0, \delta_+)$ tal que*

(i) *Se $\mathcal{M}(u_1) = 0$, então $J_+(u_1 + y + h_+(y)) < c_1$ para cada $0 < \|y\| \leq \delta_{+1}$.*

(ii) *Se $\mathcal{M}(u_1) = 1$, então $J_+(u_1 + y + h_+(y)) > c_1$ para cada $0 < \|y\| \leq \delta_{+1}$.*

Demonstração. A verificação do item (ii) segue da Observação 2.21. No caso em que $\mathcal{M}(u_1) = 0$, sabemos que u_1 é ponto crítico degenerado e $\dim(N) = 1$. Seja $R : B_{\delta_+}(0) \cap N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $R(y) = J_+(u_1 + y + h_+(y))$. Afirmamos que $y = 0$ é um ponto crítico isolado e máximo local de R . De fato, dado $\bar{y} \in N$, sabemos que

$$R'(y)\bar{y} = J'_+(u_1 + y + h_+(y))\bar{y} + J'_+(u_1 + y + h_+(y))h'_+(y)\bar{y}.$$

Lembrando que $\bar{z} := h'_+(y)\bar{y} \in N^\perp$ e $H^1(\Omega) = N \oplus N^\perp$, escrevemos

$$J'_+(u_1 + y + h_+(y))(0 \oplus \bar{z}) = \left. \frac{\partial J_+}{\partial z}(u_1 + y + z) \right|_{z=h_+(y)} \bar{z}.$$

Como $z := h_+(y)$ é a única solução de $\frac{\partial J_+}{\partial z}(u_1 + y + z) = 0$, para $z \in N^\perp$,

$$R'(y)\bar{y} = J'_+(u_1 + y + h_+(y))\bar{y},$$

para cada $y \in B_{\delta_+}(0) \cap N$.

Pelo que vimos acima, podemos afirmar: $y = 0$ é um ponto crítico isolado de R . Caso contrário, existe outro ponto crítico y_1 arbitrariamente próximo de $y = 0$. Mas isto implica que para cada $u = y_o + z_o \in N \oplus N^\perp$,

$$\begin{aligned} J'_+(u_1 + y_1 + h_+(y_1))u &= J'_+(u_1 + y_1 + h_+(y_1))y_o + J'_+(u_1 + y_1 + h_+(y_1))z_o \\ &= R'(y_1)y_o + \frac{\partial J_+}{\partial z}(u_1 + y_1 + h_+(y_1))z_o = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.18, $u_1 + y_1 + h_+(y_1)$ é um ponto crítico de J que está arbitrariamente próximo de u_1 . Além disso, como $y_1 \in N$ e $h(y_1) \in N^\perp$, $y_1 + h_+(y_1) \neq 0$. Consequentemente, $u_1 + y_1 + h_+(y_1) \neq u_1$, o que contraria nossa hipótese de u_1 ser um ponto crítico isolado. Concluímos pela existência de $\delta_{+1} \in (0, \delta_+)$ tal que $y = 0$ é o único ponto crítico de R para cada $\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_{+1}$. Resta verificarmos que $y = 0$ é um máximo local (estrito).

Como $\dim(N) = 1$, sem perda de generalidade vamos supor que $N = \text{span}\{\mathcal{K}_o\}$, $\|\mathcal{K}_o\|_{H^1(\Omega)} = 1$. Tomando $\delta_{+1} > 0$ menor se necessário, podemos supor a validade do Lema 2.15 em

$$\mathcal{U}_o := \{\Phi_+(u_1 + t\mathcal{K}_o + z) ; |t| \leq \delta_{+1}, \|z\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_{+1}\}. \quad (2.22)$$

Se $y = 0$ é um mínimo local de R , então $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o = \emptyset$, uma vez que $y = 0$ é ponto crítico isolado de R , $\mathcal{M}(u_1) = 0$ e vale a decomposição do funcional J fornecida pelo Lema 2.15. Mas isto contraria o Lema 2.19.

Portanto, basta mostrarmos que $y = 0$ não é ponto de sela. Sem perda de generalidade, vamos supor que $R(t\mathcal{K}_o) < c_1 < R(-t\mathcal{K}_o)$ para cada $0 < t \leq \delta_{+1}$. Dado $\Phi_+(u_1 + y + z) \in [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$, observamos que (2.11) implica que y não pode estar no segmento de reta que liga 0 até $-\delta_{+1}\mathcal{K}_o$. Além do mais, por (2.11), os caminhos $p_1(s) := \Phi_+(u_1 + y + (1-s)z)$, $s \in [0, 1]$ e $p_2(s) := \Phi_+(u_1 + (1-s)y + s\delta_{+1}\mathcal{K}_o)$, $s \in [0, 1]$ são tais que

$$\begin{aligned} J_+(p_1(s)) &= \frac{(1-s)^2}{2} \langle Az, z \rangle + J_+(u_1 + y + h_+(y)) \leq J_+(p_1(1)) \leq c_1, \quad \forall s \in [0, 1], \\ J_+(p_2(s)) &= R((1-s)y + s\delta_{+1}\mathcal{K}_o) \leq c_1, \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Desta forma, qualquer ponto de $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$ está na mesma componente de $\Phi_+(u_1 + \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$, o que contradiz o Lema 2.19. O item (i) está verificado. A demonstração do Lema 2.22 está completa. \square

Corolário 2.23. *Sejam $\delta > 0, h, \Phi$ dados por (2.10). Então existe $0 < \delta_1 < \min\{\delta, \delta_{+1}\}$ tal que*

(i) Se $\mathcal{M}(u_1) = 0$, então $J(u_1 + y + h(y)) < J(u_1) = c_1$ para cada $0 < \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_1$.

(ii) Se $\mathcal{M}(u_1) = 1$, então $J(u_1 + y + h(y)) > J(u_1) = c_1$ para cada $0 < \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_1$.

Demonstração. Já que $u_1 \in C^1(\bar{\Omega})$ é uma solução de (\mathcal{P}_m) , pelo Lema de Hopf para funções C^1 (veja [15]), $u_1 > 0$ em $\bar{\Omega}$. Pelo Lema 2.18, $\|y + h(y)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ quando $\|y\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Logo, existe $0 < \delta_1 < \min\{\delta, \delta_{+1}\}$ tal que $u_1 + y + h(y) > 0$ em $\bar{\Omega}$, sempre que $\|y\|_{H^1(\Omega)} < \delta_1$. Assim, da Observação 2.16

$$\frac{\partial J_+}{\partial z}(u_1 + y + h(y)) = \frac{\partial J}{\partial z}(u_1 + y + h(y)) = 0.$$

Invocando a unicidade de h_+ temos que $h_+(y) = h(y)$, sempre que $\|y\|_{H^1(\Omega)} < \delta_1$. Portanto $J(u_1 + y + h(y)) = J_+(u_1 + y + h_+(y))$. Aplicando o Lema 2.22 concluímos a demonstração do Corolário 2.23. \square

2.5 Uma terceira solução [caso $\mathcal{M}(u_1) = 0$]

Garantimos aqui a existência de um terceiro ponto crítico u_3 tal que $J(u_3) > \max\{c_1, c_2\}$, onde c_1, c_2 são valores críticos associados a u_1, u_2 , respectivamente. Considere $N = \text{span}\{\mathcal{K}_o\}$ com $\|\mathcal{K}_o\|_{H^1(\Omega)} = 1$, a bola em N^\perp , $B_\rho^\perp := \{z \in N^\perp ; \|z\|_{H^1(\Omega)} < \rho\}$ e a esfera $S_\rho^\perp := \{z \in N^\perp ; \|z\|_{H^1(\Omega)} = \rho\}$.

Lema 2.24. *Suponha $\mathcal{M}(u_1) = 0$. Existem $\rho > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$J(u_1 + z) > c_1, \quad \forall z \in B_\rho^\perp \setminus \{0\}, \quad (2.23)$$

$$J(u_1 + z) \geq c_1 + \epsilon, \quad \forall z \in S_\rho^\perp. \quad (2.24)$$

Demonstração. Inicialmente de (2.18) e da expansão de Taylor para J em uma vizinhança de u_1 garantimos a existência de $\rho > 0$ e $a_o > 0$ tais que

$$\begin{aligned} J(u_1 + z) &= J(u_1) + \langle J'(u_1), z \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_1)z, z \rangle + o(\|z\|_o^2) \\ &= c_1 + \|z\|_o^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{o(\|z\|_o^2)}{\|z\|_o^2} \right) \\ &\geq c_1 + a_o \|z\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall 0 < \|z\|_{H^1(\Omega)} < \rho, \quad z \in N^\perp. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos fornece (2.23) e (2.24). O lema está demonstrado. \square

Corolário 2.25. *Suponha $\mathcal{M}(u_1) = 0$ e considere \mathcal{U}_o dada por (2.22). Então*

$$[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o \neq \emptyset$$

possui exatamente duas componentes conexas por caminhos. Uma dessas componentes contém $\Phi_+(u_1 - \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$ e a outra contém $\Phi_+(u_1 + \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$. Além do mais, podemos supor que existe $\hat{\delta}_{+1} \in (0, \delta_{+1})$ tal que $A^\pm := u_1 \pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o + h(\pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o)$ está na mesma componente que $\Phi_+(u_1 \pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o)$.

Demonstração. Em vista do Lema 2.19, basta mostrarmos que qualquer ponto de $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$ pode ser ligado $\Phi_+(u_1 - \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$ ou $\Phi_+(u_1 + \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$ por um caminho em $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$. De fato, se $\Phi_+(u_1 + t\mathcal{K}_o + z) \in [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$, então $t \neq 0$ e os caminhos

$$p_1(s) := \Phi_+(u_1 + t\mathcal{K}_o + (1-s)z), \quad s \in [0, 1]$$

e

$$p_2(s) := \begin{cases} \Phi_+(u_1 + [(1-s)t + s\delta_{+1}]\mathcal{K}_o), & \text{if } t > 0 \\ \Phi_+(u_1 + [(1-s)t - s\delta_{+1}]\mathcal{K}_o), & \text{if } t < 0 \end{cases}, \quad s \in [0, 1]$$

ligam $\Phi_+(u_1 + t\mathcal{K}_o + z)$ a $\Phi_+(u_1 - \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$ ou $\Phi_+(u_1 + \delta_{+1}\mathcal{K}_o)$, em $\mathcal{U}_o \setminus \{u_1\}$, conforme $t < 0$ ou $t > 0$. Sobre o primeiro caminho, em vista do Lema 2.15, $J_+(p_1(s)) \leq J_+(p_1(0)) \leq c_1$, para cada $s \in [0, 1]$. Pelo Lema 2.22,

$$J_+(p_2(s)) = J_+(u_1 + [(1-s)t \pm s\delta_{+1}]\mathcal{K}_o + h_+([(1-s)t \pm s\delta_{+1}]\mathcal{K}_o)) \leq c_1,$$

para cada $s \in [0, 1]$ e $\pm t > 0$. Isto mostra que $[J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o$ tem exatamente duas componentes conexas por caminhos. Seja $\hat{\delta}_{+1} \in (0, \delta_{+1})$ tal que

$$u_1 \pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o + h(\pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o) \in [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o.$$

Afirmamos que $A^- = u_1 - \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o + h(-\hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o)$ e $A^+ = u_1 + \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o + h(\hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o)$ estão em componentes conexas por caminhos distintas. Argumentando por contradição, suponha que este fato não ocorra. Considere o caminho

$$\gamma_o : [0, 1] \rightarrow [J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}] \cap \mathcal{U}_o \tag{2.25}$$

sobre a componente que contém os dois pontos acima, de forma que

$$\gamma_o(0) = A^- \quad \text{e} \quad \gamma_o(1) = A^+.$$

Seja $D : [0, 1] \rightarrow N$ uma função contínua definida por

$$D(t) := P(\gamma_o(t) - u_1),$$

onde P é a projeção ortogonal sobre N . Logo, como $D(0) = -\hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o$ e $D(1) = \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o$, o teorema do valor intermediário assegura a existência de $t_o \in (0, 1)$ tal que $D(t_o) = 0$. Como $\gamma_o(t) \neq u_1$ para cada $t \in [0, 1]$, segue que existe $z \in N^\perp \setminus \{0\}$ tal que $\gamma_o(t_o) - u_1 = z$. Assim, pelo Lema 2.24, $J(\gamma_o(t_o)) = J(u_1 + z) > c_1$. Isto contradiz (2.25) e encerra a demonstração do Corolário 2.25. \square

2.5.1 O enlace

Construímos aqui um enlace que irá nos proporcionar um terceiro ponto crítico para J . Já sabemos da Seção 2 que J_\pm satisfaz a Geometria do Passo da Montanha. Sem perda de generalidade, vamos supor que $c_2 = J(u_2) \leq J(u_1) = c_1$. Na definição Γ_k ($k=1,2$) dada em (2.9), podemos escolher $e_1, e_2 \in C_o^\infty(\Omega)$ não triviais com suportes disjuntos tais que $e_1 \geq 0$, $e_2 \leq 0$, $J_+(e_1) < 0$ e $J_-(e_2) < 0$. Sabendo que $J(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ para cada $u \neq 0$ pertencente ao espaço gerado por e_1 e e_2 , podemos considerar $\gamma^* \in C([0, 1], H^1(\Omega))$ ligando e_1 a e_2 tal que $J(\gamma^*(t)) < 0$ para cada $t \in [0, 1]$. Acompanhe a construção de γ^* , assim dos caminhos que estão por vir, observando a Figura 2.1 abaixo.

Tomando $\hat{\delta}_{+1}$ definido no Corolário 2.25, escolha $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$A^\pm = \left(u_1 \pm \hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o + h_+(\pm\hat{\delta}_{+1}\mathcal{K}_o) \right) \notin B_{\hat{\delta}}(u_1).$$

Aplicando uma versão do Lema de Deformação (veja [18, 30]) podemos supor a existência de um caminho γ_1 ligando 0 a A^- em $J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}$ tal que $J_+(\gamma_1(s)) < c_1, \forall s \in [0, 1]$.

De maneira análoga existe γ_2 em $J_+^{c_1} \setminus \{u_1\}$ que une A^+ a e_1 satisfazendo $J_+(\gamma_2(s)) < c_1, \forall s \in [0, 1]$. Considere agora

$$\gamma_3(s) := (u_1 + s\mathcal{K}_o + h_+(s\mathcal{K}_o)), \quad -\hat{\delta}_{+1} \leq s \leq \hat{\delta}_{+1},$$

o caminho em $J_+^{c_1}$ que liga A^- a A^+ e passa por u_1 uma única vez. Ao conectarmos os caminhos γ_1, γ_2 e γ_3 , obtemos o caminho $\gamma^+ \in \Gamma_1$ que passa por u_1 uma única vez. Além do mais, como J_+ é par, podemos supor que $\gamma^+ \geq 0$.

Utilizando um argumento similar, existe $\gamma^- \in \Gamma_2$, $\gamma^- \leq 0$, isto é, γ^- não passa por $u_1 > 0$ ligando e_2 a 0 tal que $J(\gamma^-) \leq c_1$. Aqui usamos o fato que $c_2 = J(u_2) \leq J(u_1) = c_1$ e que os funcionais truncados coincidem com J quando avaliados em seus respectivos pontos críticos. Isto é $J_+(u_1) = J(u_1)$ e $J_-(u_2) = J(u_2)$.

Conectando γ^+ , γ^- e γ^* , obtemos $\bar{\gamma}$, um caminho fechado que identificamos com uma aplicação $\varphi : \mathcal{S}^1 \rightarrow H^1(\Omega)$ de forma que

$$\varphi(\mathcal{S}^1) = \bar{\gamma}([0, 1]) = \gamma^+([0, 1]) \cup \gamma^-([0, 1]) \cup \gamma^*([0, 1]),$$

onde $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ é a esfera unidimensional (a circunferência).

Sejam $P \in \bar{\gamma}([0, 1])$ e Q dois elementos de $H^1(\Omega)$ tais que P está ‘próximo’ de Q e o segmento de reta que os liga $\mathcal{R} \subset H^1(\Omega)$ é tal que $J(\mathcal{R}) < 0$ e $\mathcal{R} \cap \bar{\gamma}([0, 1]) = \{Q\}$.

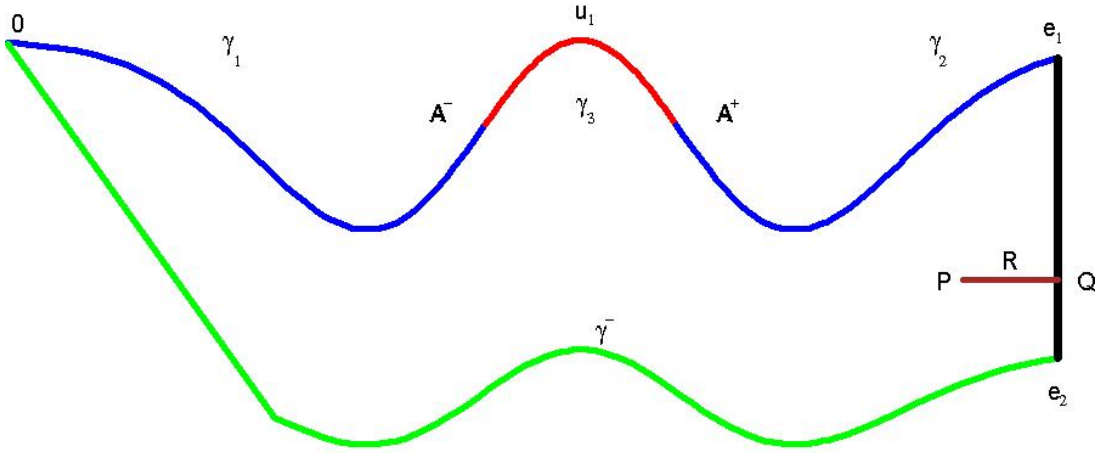


Figura 2.1: Enlace

Considere $p : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$ uma parametrização de \mathcal{S}^1 satisfazendo $p(-1) = p(1) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Seja $r : [0, 1] \times \{0\} \subset \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ uma parametrização de \mathcal{R} . Defina

$$\Psi := \left\{ \psi \in C(\mathcal{B}^2, H^1(\Omega)) ; \psi|_{\partial\mathcal{B}^2} = \varphi, \psi|_{[0,1] \times \{0\}} = r \right\}$$

e

$$c_3 = \inf_{\psi \in \Psi} \sup_{\theta \in \mathcal{B}^2} J(\psi(\theta)), \quad (2.26)$$

onde $\mathcal{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é a bola fechada bidimensional.

Seja $\epsilon > 0$ e $\rho > 0$ dados por (2.23) e (2.24). Considere

$$\{u_1 + S_\rho^\perp\} := \{u_1 + z ; z \in N^\perp, \|z\|_{H^1(\Omega)} = \rho\}.$$

É sabido que se $c_3 > \max\{c_1, c_2\}$, então o princípio minimax pode ser aplicado para mostrar que c_3 é um valor crítico de J . Em vista do Lema 2.24, para obtermos tal estimativa é suficiente mostrarmos o seguinte resultado

Lema 2.26. *Se $\psi \in \Psi$ então $\psi(\mathcal{B}^2) \cap \{u_1 + S_\rho^\perp\} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Argumentando por contradição, suponha que existe $\psi_o \in \Psi$ satisfazendo

$$\psi_o(\mathcal{B}^2) \cap \{u_1 + S_\rho^\perp\} = \emptyset. \quad (2.27)$$

Defina a homotopia $F_t : B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1) \rightarrow H^1(\Omega)$ por

$$F_t(z, s) := u_1 + z - \psi_o(tp(s)), \quad \forall (z, s) \in B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Vamos calcular o grau $d(F_t, B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1), 0)$. Afirmamos inicialmente que F_t não se anula sobre a fronteira

$$\partial(B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1)) = S_\rho^\perp(0) \times [-1, 1] \cup \bar{B}_\rho^\perp(0) \times \{-1, 1\}.$$

De fato, se $(z, s) \in S_\rho^\perp(0) \times [-1, 1]$, sabemos que $tp(s) \in \mathcal{B}^2$ para cada $t \in [0, 1]$. Devido nossa hipótese (2.27), $F_t(z, s) \neq 0$ sobre $S_\rho^\perp(0) \times [-1, 1]$. Por outro lado, se $(z, s) \in \bar{B}_\rho^\perp(0) \times \{-1, 1\}$, então $s = \pm 1$ e

$$\psi_o(tp(\pm 1)) = \psi_o((t, 0)) = r(t) \in \mathcal{R}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como $J(\mathcal{R}) < 0$, (2.23) implica $\psi_o(tp(\pm 1)) \notin [u_1 + \bar{B}_\rho^\perp(0)]$. Portanto F_t não se anula sobre $\bar{B}_\rho^\perp(0) \times \{-1, 1\}$. A afirmação está provada.

Utilizando a invariância do grau por homotopias,

$$d(F_1, B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1), 0) = d(F_0, B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1), 0). \quad (2.28)$$

Se $t = 0$,

$$d(F_0, B_\rho^\perp(0) \times (-1, 1), 0) = 0, \quad (2.29)$$

uma vez que $F_0(z, s) = u_1 + z - \psi_o(0)$, $\psi_o(0) \in \mathcal{R}$ onde $J(\mathcal{R}) < 0$ e $J(u_1 + z) \geq c_1$ por (2.23).

Por outro lado, se $t = 1$, $\psi_o(p(s)) = \varphi(p(s))$ e

$$F_1(z, s) = u_1 + z - \varphi(p(s)).$$

Lembrando que $\varphi(S^1) = \gamma^+([0, 1]) \cup \gamma^-([0, 1]) \cup \gamma^*([0, 1])$, onde $\gamma^-([0, 1]) \cup \gamma^*([0, 1]) \subset J^{c_1} \setminus \{u_1\}$, $\gamma^+([0, 1]) = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_3([-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}]) \cup \gamma_2([0, 1])$ e $\gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1]) \subset J^{c_1} \setminus \{u_1\}$. Além do mais, $F_1(z_o, s_o) = 0 \Leftrightarrow u_1 + z_o = \varphi(p(s_o))$. Logo, pelo Lemma 2.24, $z_o = 0$, isto é, $\varphi(p(s_o)) = u_1$. Assim, pela propriedade de excisão, precisamos considerar

apenas $s \in [-1, 1]$ tal que $\varphi(p(s)) \in \gamma_3([- \hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}])$. A menos de uma reparametrização,

$$d(F_1, B_\rho^\perp \times (-1, 1), 0) = d(F_1, B_\rho^\perp \times (-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}), 0).$$

Neste caso,

$$F_1(z, s) = u_1 + z - \varphi(p(s)) = u_1 + z - [u_1 + s\mathcal{K}_o + h(s\mathcal{K}_o)] = z - s\mathcal{K}_o - h(s\mathcal{K}_o).$$

Já que $\mathcal{K}_o \in N$, $z, h(s\mathcal{K}_o) \in N^\perp$ e $h(0) = 0$, temos que $F_1(z, s) = 0$ se, e somente se, $(z, s) = (0, 0)$.

Definindo uma nova homotopia

$$E_t(z, s) = z - s\mathcal{K}_o - th(s\mathcal{K}_o), \quad t \in [0, 1], \quad (z, s) \in B_\rho^\perp \times (-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1})$$

sabemos que E_t não se anula sobre a fronteira $\partial \left(B_\rho^\perp \times (-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}) \right)$. Utilizando mais uma vez a invariância por homotopias e o fato que $E_0(z, s) = z - s\mathcal{K}_o$,

$$\begin{aligned} d(F_1, B_\rho^\perp \times (-1, 1), 0) &= d(E_0, B_\rho^\perp \times (-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}), 0) \\ &= d \left(Id|_{N^\perp}, B_\rho^\perp, 0 \right) d \left(-\mathcal{K}_o Id|_{\mathbb{R}}, (-\hat{\delta}_{+1}, \hat{\delta}_{+1}), 0 \right) \quad (2.30) \\ &= (1) \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

Isto juntamente com (2.29) contradizem (2.28). A demonstração do Lema 2.26 está completa. \square

2.6 Uma terceira solução [caso $\mathcal{M}(u_1) = 1$]

Nesta seção, utilizando as notações da seção anterior, fazemos pequenas modificações sobre o caso $\mathcal{M}(u_1) = 0$ a fim de garantir a existência de uma terceira solução de (\mathcal{P}_m) quando $\mathcal{M}(u_1) = 1$. Escrevemos, como já feito anteriormente, $N^\perp = W^+ \oplus W^-$ onde W^- é o espaço (unidimensional) onde A é negativa definida e W^+ onde A é positiva definida. Durante a demonstração do Corolário 2.23, vimos que $h_+(y) = h(y)$ e $u_1 + y + h_+(y) > 0$ sempre que $\|y\|_{H^1(\Omega)}$ é suficientemente pequeno. Desta forma, devido ao Lema 2.15, se $\|y\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|z\|_{H^1(\Omega)}$ são suficientemente pequenos,

$$\begin{aligned} J_+ \circ \Phi_+(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J_+(u_1 + y + h_+(y)) \\ &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J(u_1 + y + h(y)) = J \circ \Phi(u_1 + y + z). \end{aligned}$$

Seja $r > 0$ tal que $\Phi(U) \subset B_r(u_1)$, onde U, Φ são dados pelo Lemma 2.15. Considere $0 < \rho_o < \rho_1 < r$ tais que

$$\Phi(\bar{B}_{\rho_o}(u_1)) \subset B_{\rho_1}(u_1) \subset \bar{B}_{\rho_1}(u_1) \subset B_r(u_1). \quad (2.31)$$

Denotamos por $B_\rho^+ := \{z \in W^+ ; \|z\|_{H^1(\Omega)} < \rho\}$ a bola aberta em W^+ centrada na origem e de raio $\rho > 0$ juntamente com sua fronteira $\partial B_\rho^+ := \{z \in W^+ ; \|z\|_{H^1(\Omega)} = \rho\}$. Analogamente $B_\rho^N := \{y \in N ; \|y\|_{H^1(\Omega)} < \rho\}$ e $\partial B_\rho^N := \{y \in N ; \|y\|_{H^1(\Omega)} = \rho\}$. Sejam

$$D_\rho := \{u_1 + y + z ; y \in \bar{B}_\rho^N \text{ e } z \in \bar{B}_\rho^+\} = u_1 + \bar{B}_\rho^N \times \bar{B}_\rho^+,$$

$$\partial D_\rho := \{u_1 + y + z \in D_\rho ; y \in \partial B_\rho^N \text{ ou } z \in \partial B_\rho^+\}.$$

Fixe $\rho > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$D_\rho \subset \bar{B}_{\rho_o}(u_1) \quad (2.32)$$

e, em vista do Corolário 2.23,

$$\begin{aligned} J \circ \Phi(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J(u_1 + y + h(y)) > c_1, & \forall u_1 + y + z \in D_\rho \setminus \{u_1\} \\ J \circ \Phi(u_1 + y + z) &> c_1 + \epsilon_\rho, & \forall u_1 + y + z \in \partial D_\rho. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A existência de $\epsilon_\rho > 0$ é devida a compacidade de ∂B_ρ^N e ao fato que $\langle Az, z \rangle$ é positiva definida em $\partial B_\rho^+ \subset W^+$.

Para $w_o^- \in W^-$ obtido no Lema 2.20, redefinimos γ_3 da seção anterior como sendo

$\gamma_3(s) = \Phi(u_1 + sw_o^-)$, $s \in [-\delta_1, \delta_2]$, onde $\delta_1, \delta_2 > 0$ são tais que

$$\gamma_3(s) = \Phi(u_1 + sw_o^-) \subset B_{\rho_1}(u_1), \forall s \in [\delta_1, \delta_2]. \quad (2.34)$$

Do mesmo modo, consideramos γ_1 e γ_2 da seção anterior como sendo os caminhos que ligam 0 a $\Phi(u_1 - \delta_1 w_o^-)$ e $\Phi(u_1 + \delta_2 w_o^-)$ a e_1 , respectivamente, de forma que $J(\gamma_k(t)) < c_1, t \in [0, 1], k = 1, 2$. Repetindo o mesmo processo, consideramos \mathcal{R} , como o segmento de reta ligando Q a P , definimos c_3 do mesmo modo que em (2.26) e sem perda de generalidade, vamos supor que

$$\mathcal{R} \subset (H^1(\Omega) \setminus B_{\rho_1}(u_1)). \quad (2.35)$$

Nosso objetivo é mostrar que o valor minimax c_3 é estritamente maior que c_1 . Para isto, tendo em vista (2.33), é suficiente mostrar que

$$\psi(\mathcal{B}^2) \cap \Phi(\partial D_\rho) \neq \emptyset, \forall \psi \in \Psi. \quad (2.36)$$

Devido a dificuldade de verificarmos diretamente (2.36), vamos definir uma contração apropriada e demonstrar um resultado equivalente. Para tal, seja $\pi : u_1 + H^1(\Omega) \rightarrow B_{\rho_1}(u_1)$ definida por

$$\pi(u_1 + z) := \begin{cases} u_1 + z, & \|z\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_1 \\ u_1 + \rho_1 \frac{z}{\|z\|_{H^1(\Omega)}}, & \|z\|_{H^1(\Omega)} > \rho_1. \end{cases}$$

Note que a contração π é a aplicação identidade em $\bar{B}_{\rho_1}(u_1)$. Além disso, se $\pi(u_1 + z) \in B_{\rho_1}(u_1)$, então $u_1 + z \in B_{\rho_1}(u_1)$.

Lema 2.27. $\psi(\mathcal{B}^2) \cap \Phi(\partial D_\rho) \neq \emptyset$ se, e somente se, $[\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi(\mathcal{B}^2)] \cap \partial D_\rho \neq \emptyset$, para cada $\psi \in \Psi$.

Demonstração. Suponha que $\psi(\mathcal{B}^2) \cap \Phi(\partial D_\rho) \neq \emptyset$. Sejam $u_1 + y + z \in \partial D_\rho$ e $x \in \mathcal{B}^2$ tais que $\Phi(u_1 + y + z) = \psi(x)$. Por (2.31) e (2.32), $\Phi(u_1 + y + z) \in \Phi(D_\rho) \subset B_{\rho_1}(u_1)$. Logo, como π é o operador identidade em $B_{\rho_1}(u_1)$,

$$\Phi(u_1 + y + z) = \pi \circ \Phi(u_1 + y + z) = \pi \circ \psi(x) \in B_r(u_1),$$

ou seja, $u_1 + y + z = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi(x)$. Portanto $\partial D_\rho \cap (\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi)(\mathcal{B}^2) \neq \emptyset$.

Por outro lado, $\partial D_\rho \cap (\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi)(\mathcal{B}^2) \neq \emptyset$ implica na existência de $u_1 + y + z \in \partial D_\rho$ e $x \in \mathcal{B}^2$ tais que $u_1 + y + z = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi(x)$. Ou seja, $\Phi(u_1 + y + z) = \pi \circ \psi(x)$. Utilizando mais uma vez (2.31) e (2.32), $\Phi(u_1 + y + z) \in B_{\rho_1}(u_1)$. Logo, $\psi(x) \in B_{\rho_1}(u_1)$. Da igualdade

$\Phi(u_1 + y + z) = \pi \circ \psi(x) = \psi(x)$, concluímos que $\Phi(\partial D_\rho) \cap \psi(\mathcal{B}^2) \neq \emptyset$. O Lema 2.27 está demonstrado \square

Agora estabelecemos a existência de uma terceira solução u_3 , utilizando (2.33) e mostrando a validade de (2.36). Tendo em vista o Lemma 2.27, basta mostrarmos o seguinte resultado

Lema 2.28. $\partial D_\rho \cap (\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi)(\mathcal{B}^2) \neq \emptyset$ para toda $\psi \in \Psi$.

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $\psi_o \in \Psi$ tal que

$$\partial D_\rho \cap (\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi_o)(\mathcal{B}^2) = \emptyset. \quad (2.37)$$

Denotando $\Omega_\rho := u_1 + B_\rho^N \times B_\rho^+ \times (-1, 1)$, considere $F_t : \Omega_\rho \rightarrow H^1(\Omega)$ definida por

$$F_t(y, z, s) = u_1 + y + z - \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi_o(tp(s)).$$

Note que como $\psi_o(\mathcal{B}^2)$ tem dimensão finita, para $\theta_t(s) := [\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi_o(tp(s))]$, as projeções

$$P_{W^+}(\theta_t(s)), P_{W^-}(\theta_t(s)), P_N(\theta_t(s))$$

são operadores compactos. Fazendo

$$F_t(y, z, s) = u_1 + y + z - P_{W^+}(\theta_t(s)) - P_{W^-}(\theta_t(s)) - P_N(\theta_t(s))$$

podemos escrever F_t como um operador do tipo (identidade)-(compacto). A seguir, assim como na demonstração do Lema 2.27 vamos calcular o grau $d(F_t, \Omega_\rho, 0)$ e obtermos uma contradição.

Afirmamos que $F_t \neq 0$ sobre $\partial\Omega_\rho = \partial D_\rho \times [-1, 1] \cup D_\rho \times \{-1, 1\}$ para todo $t \in [0, 1]$. Dado $s \in [-1, 1]$ temos que $tp(s) \in \mathcal{B}^2$. Logo nossa hipótese (2.37) impede que F_t se anule sobre $\partial D_\rho \times [-1, 1]$.

Por outro lado, se $u_1 + y + z \in D_\rho$ e $s \in \{-1, 1\}$ não podemos ter

$$u_1 + y + z = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi(tp(s)),$$

uma vez que (2.31) e (2.32) implicam em $\Phi(u_1 + y + z) \in B_{\rho_1}(u_1)$ e (2.35) implica em $\pi(tp(s)) \subset \pi(\mathcal{R}) \subset \partial B_{\rho_1}(u_1)$. Isto conclui a verificação da afirmação. Utilizando a invariância do grau por homotopias temos que

$$d(F_o, \Omega_\rho, 0) = d(F_1, \Omega_\rho, 0). \quad (2.38)$$

Utilizando novamente (2.31), (2.32) e (2.35) temos que

$$F_o(y, z, s) = u_1 + y + z - \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi(0) \neq 0 \quad \text{em } \bar{\Omega}_\rho,$$

uma vez que $\Phi(\bar{\Omega}_\rho) \subset B_{\rho_1}(u_1)$ e $\pi(\psi(0)) \subset \pi(\mathcal{R}) \subset \partial B_{\rho_1}(u_1)$. Portanto

$$d(F_o, \Omega_\rho, 0) = 0 \tag{2.39}$$

Por outro lado, $F_1(y, z, s) = u_1 + y + z - \Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi_o(p(s))$ onde, por definição $\psi_o(p(s)) = \varphi(p(s))$. Agindo da mesma maneira que na seção anterior, consideramos

$$\bar{\gamma}([0, 1]) = \gamma^+([0, 1]) \cup \gamma^*([0, 1]) \cup \gamma^-([0, 1])$$

onde $\gamma^+([0, 1]) = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_3([-\delta_1, \delta_2]) \cup \gamma_2([0, 1])$ e apenas γ_3 passa por u_1 . Sem perda de generalidade, podemos supor que $\bar{\gamma}(0) = u_1$. Como $\psi_o(p(s)) = \bar{\gamma}(s)$, se $F_1 = 0$ então $u_1 + y + z = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \bar{\gamma}(s)$. Novamente, usando o fato que π é a identidade em $\bar{B}_{\rho_1}(u_1)$ e que $\Phi(u_1 + y + z) \in B_{\rho_1}(u_1)$, temos que

$$\Phi(u_1 + y + z) = \pi \circ \bar{\gamma}(s) = \bar{\gamma}(s).$$

Como $J(\bar{\gamma}) \leq c_1$ e $J \circ \Phi(u_1 + y + z) > c_1$ se $u_1 + y + z \in D_\rho \setminus \{u_1\}$, temos que $(y, z) = (0, 0)$. Assim $u_1 = \Phi(u_1 + y + z) = \bar{\gamma}(s)$ o que implica em $s = 0$. Desta forma, $F_t(y, z, s) \neq 0$ em $\Omega_\rho \setminus \{u_1 + B_\rho^N \times B_\rho^+ \times (-1, 1) ; s \notin (-\delta_1, \delta_2)\}$. Pela propriedade de excisão,

$$d(F_1, \Omega_\rho, 0) = d(F_1, B_\rho^N \times B_\rho^+ \times (-\delta_1, \delta_2), 0).$$

No entanto, devido nossa escolha de δ_1, δ_2 e a menos de uma reparametrização,

$$\Phi^{-1} \circ \pi \circ \psi_o(p(s)) = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \gamma_3(s) = \Phi^{-1} \circ \pi \circ \Phi(u_1 + sw_o^-) = \Phi^{-1} \circ \Phi(u_1 + sw_o^-) = u_1 + sw_o^-,$$

para todo $s \in [-\delta_1, \delta_2]$. Assim $F_1(y, z, s) = y + z - sw_o^-$ e

$$\begin{aligned} d(F_1, \Omega_\rho, 0) &= d(I_N \times I_{W^+} \times -I_{W^-}, B_\rho^N \times B_\rho^+ \times (-\delta_1, \delta_2), 0) \\ &= (1)(1)(-1) = -1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Como (2.39) e (2.40) contrariam (2.38), o lema está demonstrado. \square

2.7 Dependência Contínua das Soluções

Nesta seção demonstramos o Teorema 2.2, mostrando que o funcional associado ao Problema (\mathcal{P}_{m_j}) ,

$$J_j(u) := \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int G_j(x, u),$$

onde $G_j(x, u) := a(x)F(u) + (1 - m_j(x))\frac{u^2}{2}$ satisfaz uniformemente as hipóteses do Teorema 2.1 para todo $j \geq j_o$, e um certo $j_o \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Note inicialmente que podemos escrever

$$J_j(u) = J(u) + \frac{1}{2} \int (m_j(x) - m(x))u^2. \quad (2.41)$$

A fim de mostrarmos a Geometria do Passo da Montanha e a condição (PS) para J_j , apresentamos o seguinte lema

Lema 2.29. ([25] ou Seção 2 do Capítulo 1) *Suponha (A_2) e que $m_j \rightarrow m$ fracamente em $L^\sigma(\Omega)$, $\sigma > \frac{N}{2}$. Seja $\{u_j\}_j \subset H^1(\Omega)$.*

i) Se $u_j \rightarrow u$ fracamente em $H^1(\Omega)$, então $\int m_j(x)u_j^2 \rightarrow \int m(x)u^2$.

ii) Dado $\epsilon > 0$, existe $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int [m_j(x) - m(x)]u^2 \right| \leq \epsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \forall j \geq j_\epsilon.$$

O lema a seguir é o passo principal para a validade de (PS) do funcional J_j .

Lema 2.30. *Suponha (m_2) , (A_2) , (A_4) , (f_1) , (f_2) e $(f_4)'$. Então existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq j_o$ fixado, se $\{u_n\}_n \subset H^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |J_j(u_n)|, \|J'_j(u_n)\| \} < \infty,$$

então $\{u_n\}_n \subset H^1(\Omega)$ é limitada.

Demonstração.

Seja $u_n = t_n \varphi_1 + v_n$ onde $t_n \in \mathbb{R}$ e $v_n \in V$.

Por (2.41) e pelo Lemma 2.29, dado $\epsilon_o > 0$, existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} J_j(u_{j,n}) - \frac{1}{p+1} J'_j(u_{j,n})u_{j,n} &= J(u_{j,n}) - \frac{1}{p+1} J'(u_{j,n})u_{j,n} + \frac{p-1}{2(p+1)} \int (m_j(x) - m(x))u_{j,n}^2 \\ &\geq J(u_{j,n}) - \frac{1}{p+1} J'(u_{j,n})u_{j,n} - \epsilon_o \|u_{j,n}\|^2, \quad \forall j \geq j_o. \end{aligned}$$

A seguir, considerando (2.2) a Observação 2.4 e a hipótese do lema, utilizamos (2.3)

para obter $C_o > 0$ tal que

$$\begin{aligned} K_j(1 + \|u_n\|) &\geq J_j(u_n) - \frac{1}{p+1} J'_j(u_n)u_n \\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)} \|v_n\|_V^2 - C_{\epsilon_o} - \epsilon_o \|u_n\|^2 - \epsilon_o \|u_n\|^2 \\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)} \|v_n\|_V^2 - 2\epsilon_o \|u_n\|^2 - C_o. \end{aligned}$$

Fixando $j \geq j_o$, agimos como na demonstração do Lema 2.6, isto é, vamos supor que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente

$$|t_n| \rightarrow \infty \quad e \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{v_n}{t_n} \right\|_V^2 \leq \frac{4(p+1)\epsilon_o}{p-1}. \quad (2.42)$$

Tomando $\epsilon_o > 0$ menor se necessário e seguindo mais uma vez as ideias do Lema 2.6, [usando (2.42)] podemos supor que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int \frac{a(x)|u_n|^{p-1}u_n\varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} - \int a(x)\varphi_1^{p+1} \right| < \frac{1}{2} \left| \int a(x)\varphi_1^{p+1} \right|. \quad (2.43)$$

Além disso assim como no Lema 2.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{a(x)[f(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n]}{|t_n|^{p-1}t_n} \varphi_1 = 0. \quad (2.44)$$

Já que $K < \infty$, (2.42), (2.43) e (2.44) implicam em

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J'_j(u_n)\varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|t_n|^{p-1}} \int \nabla \left(\varphi_1 + \frac{v_n}{t_n} \right) \nabla \varphi_1 + m_j(x) \left(\varphi_1 + \frac{v_n}{t_n} \right) \varphi_1 + \int a(x) \frac{f(u_n)\varphi_1}{t_n|t_n|^{p-1}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int a(x) \frac{f(u_n)\varphi_1}{t_n|t_n|^{p-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int \frac{a(x)|u_n|^{p-1}u_n\varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} - \int \frac{a(x)[f(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n]}{|t_n|^{p-1}t_n} \varphi_1 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\int \frac{a(x)|u_n|^{p-1}u_n\varphi_1}{|t_n|^{p-1}t_n} - \int a(x)\varphi_1^{p+1} \right) + \int a(x)\varphi_1^{p+1} \right] \neq 0, \end{aligned}$$

o que contradiz (A_4) . Logo $\{u_n\}_n$ é limitada em $H^1(\Omega)$. A demonstração do Lema 2.30 está completa \square

Uma consequência do Lema 2.30 e do fato de nossa não linearidade ser subcrítica é o

Corolário 2.31. *Suponha $(m_2), (A_2), (A_4), (f_1), (f_2)$ e $(f_4)'$. Então existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que o funcional J_j satisfaz (PS) para cada $j \geq j_o$.*

A seguir verificamos que J_j satisfaz uniformemente a Geometria do Passo da Montanha desde que j seja suficientemente grande.

Lema 2.32. *Suponha $(A_1), (A_2), (A_3), (f_2), (f_3), (f_4)'$ e (m_2) . Então existe $j_o \in \mathbb{N}$, tal que*

(i) $J_j(u) \geq \bar{\alpha} \|u\|^{r+1}$ para todo $\|u\| = \rho_o$ e $j \geq j_1$;

(ii) $J_j(e) < 0$ para todo $j \geq j_1$.

onde $\bar{\alpha}, \rho_o > 0$, e $e \in H^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho_o$ são provenientes do Lema 2.8.

Demonstração. Fixando $\epsilon_o > 0$ suficientemente pequeno, por (2.41) e pelos Lemas 2.8 e 2.29 obtemos $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} J_j(u) &\geq 2\bar{\alpha} \|u\|^{r+1} - \frac{\epsilon_1}{2} \|u\|^2 \geq \bar{\alpha} \|u\|^{r+1}, \quad \forall \|u\| = \rho_o, \forall j \geq j_1. \\ J_j(e) &\leq J(e) + \frac{\epsilon}{2} \|e\|^2 \leq \frac{1}{2} J(e) < 0, \quad \forall j \geq j_1. \end{aligned}$$

Portanto concluímos que J_j possui a Geometria do Passo da Montanha uniformemente para $j \geq j_1$. \square

Observação 2.33. *Já que existe um caminho $\gamma^* : [0, 1] \rightarrow H^1(\Omega)$ ligando $e_1 \geq 0$ a $e_2 \leq 0$ tal que $J(\gamma(t)) < 0$, para todo $t \in [0, 1]$, utilizando a compacidade do conjunto $\gamma([0, 1])$, podemos supor que*

$$J_j(\gamma^*(t)) = J(\gamma(t)) + \frac{1}{2} \int (m_j(x) - m(x)) (\gamma^*)^2(t) < 0 \quad \text{para todo } t \in [0, 1], \forall j \geq j_1.$$

Demonstração do Teorema 2.2.

Do Corolário 2.31 e Lema 2.32, ao aplicarmos o Teorema 2.12 obtemos duas soluções $u_1^j \geq 0$ e $u_2^j \leq 0$ de (\mathcal{P}_{m_j}) para cada $j \geq j_o$ e j_o suficientemente grande. Supondo $J_j(u_2^j) \leq J_j(u_1^j)$ e que u_1^j é um ponto crítico isolado, definimos $A_j := J_j''(u_1^j)$. Argumentando com nas Seções 4, 5 e 6, obtemos uma terceira solução u_3^j para (\mathcal{P}_{m_j}) .

2.8 Apêndice

Nesta seção lidamos com a regularidade das soluções fracas do problema de Neumann. Apresentamos uma versão (ao nosso ver bem conhecida) do teorema de Brezis-Kato [12],

para este problema, juntamente com estimativas a priori das soluções. Observamos que, em toda esta seção, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado.

2.8.1 O Teorema de Brezis-Kato para Neumann

Inicialmente consideramos o problema

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = g(x, u), & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Teorema 2.9 *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de (\mathcal{P}) . Se $b \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que $|g(x, s)| \leq b(x)(1 + |s|)$ q.t.p. em Ω , então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.*

Demonstração. Dadas duas constantes $s \geq 0$ e $L > 1$, definimos $\varphi := \varphi_{s,L} = uw^2$, onde $w = \min\{|u|^s, L\}$. Note que

$$\nabla\varphi = w^2\nabla u + 2s[|u|^{2s}\nabla u]\mathcal{X}_{\{x \in \Omega; |u|^s < L\}},$$

onde \mathcal{X}_A é a função indicadora do conjunto A . Além disso, $\varphi \in H^1(\Omega)$, para cada $s \geq 0$ e $L > 1$. Utilizando a formulação fraca de (\mathcal{P}) ,

$$\int |\nabla u|^2 w^2 + 2s \int_{\{x; |u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 + \int u^2 w^2 = \int g(x, u) \varphi \leq \int b(x)(1 + |u|) |u| w^2.$$

Pela definição de w e sabendo que $L > 1$, temos a desigualdade* $(1 + |u|)|u|w^2 \leq 1 + 2|u|^2w^2$. Portanto,

$$\int |\nabla u|^2 w^2 + 2s \int_{\{x; |u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 + \int u^2 w^2 \leq \int b(x) + 2 \int b(x) |u|^2 w^2. \quad (2.45)$$

Temos também que

$$|\nabla uw|^2 = |\nabla u|^2 w^2 + 2s|u|^{2s} |\nabla u|^2 \mathcal{X}_{\{x; |u|^s < L\}} + s^2 |u|^{2s} |\nabla u|^2 \mathcal{X}_{\{x; |u|^s < L\}}. \quad (2.46)$$

*Se $|u| \leq 1$ então $(1 + |u|)|u|w^2 = |u|^{2s+1} + |u|^{2s+2} \leq 1 + 2|u|^2|u|^{2s} = 1 + 2|u|^2w^2$. Por outro lado, se $|u| > 1$, então $|u| < |u|^2$ e $(1 + |u|)|u|w^2 \leq 2|u|^2w^2 \leq 1 + 2|u|^2w^2$.

Desta forma, por (2.45), (2.46), desigualdade de Hölder e teorema da imersão de Sobolev

$$\begin{aligned}
\int |\nabla [uw]|^2 + \int u^2 w^2 &= \int |\nabla u|^2 w^2 + \int_{\{x; |u|^s < L\}} 2s|u|^{2s} |\nabla u|^2 + s^2 \int_{\{x; |u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 + \int u^2 w^2 \\
&\leq (1 + s/2) \left(\int |\nabla u|^2 w^2 + 2s \int_{\{x; |u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 + \int u^2 w^2 \right) \\
&\leq (1 + s/2) \left(\int b(x) + 2 \int b(x) |u|^2 w^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Portanto, dado $R > 0$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\|uw\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq (1 + s/2) \left(\int b(x) + 2R \int_{|b| < R} |u|^2 w^2 + \int_{|b| > R} b(x) |u|^2 w^2 \right) \\
&\leq (1 + s/2) \left(\|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} |\Omega|^{1 - \frac{2}{N}} + 2R \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}^{2s+2} + \|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\{|b| > R\})} \|uw\|_{L^{2^*(\Omega)}(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq (1 + s/2) \left(\|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} |\Omega|^{1 - \frac{2}{N}} + 2R \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}^{2s+2} + C_* \|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\{|b| > R\})} \|uw\|_{H^1(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $R = R(s) > 0$ suficientemente grande tal que $\|b\|_{L^{N/2}(\{|b| > R\})} < \frac{1}{C_*(2+s)}$, temos que para cada $L > 1$,

$$\|u \min\{|u|^s, L\}\|_{H^1(\Omega)}^2 (1 - C_*(1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\{|b| > R\})}) \leq (1 + s/2) \left(C + 2R \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}^{2s+2} \right).$$

Fazendo $L \rightarrow \infty$, pelo lema de Fatou,

$$\| |u|^{s+1} \|_{H^1(\Omega)}^2 (1 - C_*(1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\{|b| > R\})}) \leq (1 + s/2) (C + 2R \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}^{2s+2}).$$

Logo,

$$\| |u|^{s+1} \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (2 + s) (C + 2R \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}^{2s+2}).$$

Concluimos que, se $u \in L^{2(s+1)}(\Omega)$ então $|u|^{s+1} \in H^1(\Omega)$ e conseqüentemente $u \in L^{2^*(s+1)}(\Omega)$. Considerando, $s_o := \frac{2}{N-2}$, o processo iterativo acima implica que $u \in L^{2(s_j+1)}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, onde $s_j := \frac{N}{N-2} s_{j-1} + \frac{2}{N-2}$. Note que $s_j > \left(\frac{N}{N-2}\right)^j s_o$, $j \in \mathbb{N}$. A demonstração do Teorema 2.9 está completa. \square

Observe que se $u = u_b$ é uma solução de (\mathcal{P}) , então $\|u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $\|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \rightarrow 0$. Na realidade, como uma aplicação imediata do lema acima temos o

Corolário 2.10 *Seja $u = u_b$ uma solução do problema (\mathcal{P}) , associada à função $b \in L^{N/2}(\Omega)$. Suponha $\|b\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \rightarrow 0$. Então, $u_b \rightarrow 0$ em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.*

Demonstração. De fato, seja $u = u_b \in H^1(\Omega)$, uma solução do problema (\mathcal{P}) . Suponha que $b \rightarrow 0$ em $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Vamos mostrar que $\|u^{s+1}\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ para cada $s \geq 0$. Na verdade, pelo que vimos durante a demonstração do Teorema 2.9, a equação (2.47) nos

fornece

$$\begin{aligned} \|u \min\{|u|^s, L\}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq (1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} \left(|\Omega|^{1-2/N} + 2 \|u \min\{|u|^s, L\}\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq (1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} \left(|\Omega|^{1-2/N} + 2C_* \|u \min\{|u|^s, L\}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Como $\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} \rightarrow 0$, supondo que $\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} < \frac{1}{C_*(2+s)}$ podemos escrever

$$[1 - C_*(2+s)\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)}] \|u \min\{|u|^s, L\}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} |\Omega|^{1-2/N}.$$

Fazendo novamente $L \rightarrow \infty$, obtemos

$$[1 - C_*(2+s)\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)}] \|u^{s+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + s/2) \|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} |\Omega|^{1-2/N}.$$

Portanto $\|u^{s+1}\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ sempre que $\|b\|_{L^{N/2}(\Omega)} \rightarrow 0$. Isto conclui a demonstração deste corolário. \square

2.8.2 Regularidade das soluções

Estudamos aqui algumas propriedades de operadores lineares fechados em $L^p(\Omega)$. Utilizamos estimativas a priori para estabelecer a regularidade e o comportamento de soluções fracas dos problemas (\mathcal{P}_m) e $(EP_m)_\lambda$.

Seja $L : C_\eta^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ o operador linear definido por $Lu = -\Delta u + u$, onde

$$C_\eta^2(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C^2(\bar{\Omega}) ; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Dado $p \in (1, \infty)$ por um argumento de densidade, podemos estender o domínio de L a um subconjunto apropriado de $L^p(\Omega)$. De fato, podemos definir $L : W_\eta^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por $Lu = -\Delta u + u$, onde

$$W_\eta^{2,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

é o fecho de $C_\eta^2(\bar{\Omega})$ tomado sob a norma $\|\cdot\|_{W^{2,p}(\Omega)}$. Note que $\|Lu\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{p-1} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ para todo $u \in W_\eta^{2,p}(\Omega)$, ou seja L é contínuo. Além do mais, por uma bem conhecida estimativa a priori, devida a Agmon Douglis e Nirenberg (veja Teorema 15.2 de [3]),

apresentamos a seguinte versão encontrada em [14]:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C [\|Lu\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}], \quad \forall u \in W_\eta^{2,p}(\Omega), \quad (2.48)$$

onde $C > 0$ não depende de u .

De agora em diante, e antes de apresentarmos algumas propriedades do operador linear L , supomos que $p \geq \frac{N}{2}$.

Lema 2.34. *Se $p \geq \frac{N}{2}$, então a formula seguinte é válida:*

$$\int [-\Delta u + u]\varphi = \int \nabla u \nabla \varphi + u\varphi, \quad \forall u, \varphi \in W_\eta^{2,p}(\Omega).$$

Demonstração. Pelo Teorema das Imersões de Sobolev (veja [1, 14]) temos que as seguintes imersões são contínuas:

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,\frac{N}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q < \infty, \quad (2.49)$$

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,\frac{N}{2}}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega), \quad p \geq \frac{N}{2}. \quad (2.50)$$

Dados $u, \varphi \in W_\eta^{2,p}(\Omega)$, considere $\{u_k\}_k, \{\varphi_k\}_k \subset C_\eta^2(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ e $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $W^{2,p}(\Omega)$. Desta forma, pela continuidade de L e (2.49)

$$\begin{aligned} |\int [-\Delta u + u]\varphi - [-\Delta u_k + u_k]\varphi_k| &\leq \int |Lu_k| |\varphi_k - \varphi| + |Lu_k - Lu| |\varphi| \\ &\leq \|Lu_k\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi_k - \varphi\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} + \|Lu_k - Lu\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \\ &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como o Teorema de Green é válido para $u_k, \varphi_k \in C_\eta^2(\bar{\Omega})$, a relação (2.50) nos fornece

$$\int [-\Delta u + u]\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int [-\Delta u_k + u_k]\varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \nabla u_k \nabla \varphi_k + u_k \varphi_k = \int \nabla u \nabla \varphi + u\varphi.$$

A demonstração deste lema está completa. \square

Lema 2.35. [14] *Sejam $p \geq \frac{N}{2}$ e $L : W_\eta^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ o operador linear definido acima. Então L é um operador injetivo e fechado em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_n \subset W_\eta^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $Lu_n \rightarrow a$ em $L^p(\Omega)$. Por (2.48), $\{u_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$. Então $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $W^{2,p}(\Omega)$ e $\bar{u} \in W_\eta^{2,p}(\Omega)$. Estes fatos implicam que $u = \bar{u} \in W_\eta^{2,p}(\Omega)$ e $Lu = a$, uma vez que L é contínuo. Portanto $L : W_\eta^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é um operador fechado em $L^p(\Omega)$.

Agora, seja $u \in N(L)$, onde $N(L)$ é o núcleo de L . Por definição $\|-\Delta u + u\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Logo, pelo Lemma 2.34,

$$0 = \int [-\Delta u + u]u = \int |\nabla u|^2 + u^2.$$

Assim, $N(L) = \{0\}$, e a demonstração está completa. \square

Apresentamos a seguir uma versão da estimativa (2.48) :

Lema 2.36. [14] *Sejam $p \geq \frac{N}{2}$ e $L : W_\eta^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ definido acima. Então*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_\eta^{2,p}(\Omega).$$

Demonstração. Suponha por contradição que exista $\{u_n\}_n \subset W_\eta^{2,p}(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \equiv 1$ e $\|Lu_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Tomando uma subsequência se necessário, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{2,p}(\Omega)$. Como a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para cada $p \geq 1$, podemos supor que $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^p(\Omega)$. Do Lema 2.35, temos que $Lu = 0$ e $u = 0$. Portanto, por (2.48), $\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \rightarrow 0$. Isto contradiz $\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \equiv 1$. A demonstração está completa. \square

Agora consideramos o problema linear

$$(\mathcal{P}_g) \begin{cases} -\Delta u + u = g(x), & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

Teorema 2.37. *Se $g \in L^p(\Omega)$, $p \geq \frac{N}{2}$, então o Problema (\mathcal{P}_g) possui uma única solução $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disto, se $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (\mathcal{P}_g) , então $u = \bar{u}$.*

Demonstração. Seja $\{g_n\}_n \subset C_o^\infty(\Omega)$ uma sequência tal que $\|g - g_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Pelo Teorema 6.31 de [17] (veja observação deste teorema na página 130), existe uma única solução $u_n \in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$ do Problema (\mathcal{P}_{g_n}) . Pelo Lema 2.36,

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|g_n - g_m\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Assim $u_n \rightarrow \bar{u}$ fortemente em $W^{2,p}(\Omega)$ para algum $\bar{u} \in W_\eta^{2,p}(\Omega)$. Mostramos agora que \bar{u} satisfaz a formulação fraca de (\mathcal{P}_g) . Como $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$, dado $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \int \nabla \bar{u} \nabla \varphi + \bar{u} \varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \varphi \\ &= \int g \varphi. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Portanto, levando em conta que $C^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$ (veja [17] pag 155), \bar{u} é uma solução fraca de (\mathcal{P}_g) . A unicidade segue da unicidade de soluções em $H^1(\Omega)$. \square

Finalmente, estamos aptos para demonstrar a Proposição 2.11, enunciada na Seção 2.2.

- Proposição 2.11**[3] *Sejam $g \in L^p(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de (\mathcal{P}_g) . Então*
- i) Se $p > \frac{N}{2}$, $u \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ se $\|g\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$.*
 - ii) Se $p > N$, $u \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Além do mais, $\|u\|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ se $\|g\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$.*
 - iii) Se $p = \frac{N}{2}$, $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.*

Demonstração. *Do Teorema 2.37 $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Pelo Teorema da Imersão de Sobolev, no caso em que $p > \frac{N}{m}$,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}).$$

Se $p > \frac{N}{2}$, tomamos $j = 0$ e $m = 2$, para concluir que $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$. No caso em que $p > N$, tomamos $j = 1$ e $m = 1$, para obter que $C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$. Já que o Lema 2.36 implica em $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \rightarrow 0$, a demonstração dos itens i) e ii) está concluída. O item iii) segue imediatamente. Uma vez que $\frac{N}{2} > \frac{2N}{N+2}$. A proposição está demonstrada. \square

Referências Bibliográficas

- [1] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev spaces*, second edition, Academic Press (2003)
- [2] G.A. Afrouzi, *Existence of positive solutions on indefinite superlinear elliptic equations*, Applied Math. Computation **157**, 841–848, (2004).
- [3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*, Comm. Pure Applied Math. **XII**, 623–727, (1959).
- [4] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Func. Anal. **141**(1973), 349-381.
- [5] S. Alama, M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire **13**, 95-115, (1996).
- [6] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. **1**, 439-475, (1993).
- [7] S. Alama, G. Tarantello, *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign*, J. Funct. Anal. **141**, 159-215, (1996).
- [8] M. Badiale, E. Nabana, *A remark on multiplicity of solutions for semi-linear elliptic problems with indefinite nonlinearity*, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. I Math. **323**, 151–156, no. 2, (1996).
- [9] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, *Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **4**, 59-78, (1994).

-
- [10] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA 2, No 4, 553–572, (1995).
- [11] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Linguori editore 2002.
- [12] H. Brezis, T. Kato, *Remarks on Schrodinger operator with singular complex potentias*, Jour. Math. Pures Appl. **58**(1979), 137–151.
- [13] K.C. Chang, *Infinite dimensional Morse theory*, PNDE 6, Birkhäuse (1993).
- [14] D. deFigueiredo, *Equações elípticas não lineares*, 11º Colóquio de matemática, Poços de Caldas, IMPA (1977).
- [15] D. deFigueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*. Differential equations(São Paulo, 1981), 34-87. Lecture Notes in Mathematics 957. Springer-Verlag, Berlin-New York 1982.
- [16] D. deFigueiredo, J. P. Gossez, *Strict monotonicity of the eigenvalues and unique continuation*, Comm. Partial Differential Equations 17, no. 1-2, 339–346, (1992).
- [17] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer (2000).
- [18] H. Hofer *A note on topological degree at a critical point of mountain pass type*, Proc. Am. Math. Soc., Vol **90**(1984), 309-315.
- [19] D. Jerison, C.E. Kenig, *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators*, Annals of Mathematics **121**, 463-494, (1985)
- [20] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis: A first course*, Hindustan Book Agency, New Delhi, India (2004)
- [21] Z. Liu, Z. Q. Wang, *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition*, Advanced Nonlinear Studies, **4**(2004), 561-572.
- [22] M. Manes, A. M. Micheletti, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine*, Bolletino U.M.I 7, 285-301, (1973).
- [23] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical points theory with applications to differential equations*, CBMS Number 65, AMS Providence, Rhode Island (1986).

-
- [24] M. Ramos, S. Terracini, C. Troestler, *Superlinear indefinite elliptic problems and Pohozaev type identities*, J. Funct. Anal. **159**, 596-628, (1998).
- [25] E.A.B. Silva, M. L. Silva, *Continuous dependence of solutions for indefinite semilinear elliptic problems*, To appear.
- [26] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire de Mathématiques Supérieures-ÉTE, Université de Montreal (1965).
- [27] A. Szulkin, M. Willem, *Eigenvalue problems with indefinite weight*, Studia Math. **135**, 191-201, (1999).
- [28] H. Tehrani, *On indefinite superlinear elliptic equations*, Cal. Var. **4**, 139-153, (1996).
- [29] Xu-Jia Wang, *Neumann Problems of Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent*. J. Diff. Eq., **93**, 283-310, (1991).
- [30] Z.Q. Wang, *On a superlinear elliptic equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **8**(1991), 43-57.
- [31] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Basel, 1996.