UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teoremas de Rigidez Tipo-Bernstein e a Estrutura de Subvariedades com Curvatura Média Constante.

por

Nilton Moura Barroso Neto

Brasília
2010

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teoremas de Rigidez Tipo-Bernstein e a Estrutura de Subvariedades com Curvatura Média Constante.

por

Nilton Moura Barroso Neto*

Orientadora: Prof^a. Wang Qiaoling

*O autor contou com o apoio financeiro parcial do CNPq.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teoremas de Rigidez Tipo-Bernstein e a Estrutura de Subvariedades com Curvatura Média Constante.

por

Nilton Moura Barroso Neto

Tese de Doutorado submetida ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática**.

Brasília, 31 de outubro de 2008

Banca Examinadora:

Prof^{a}. Wang Qiaoling - UnB
(Orientadora)

Xia Changyu - UnB

Pedro Roitman - UnB

Armando Mauro Vasquez Corro - UFG

Caio José Colletti Negreiros - Unicamp

Aos meus queridos pais e a minha querida Suélem.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Sérgio de Souza Barroso e Maria do Socorro Pinto Barroso, meus irmãos, Hugo e Vítor e a minha tia e madrinha Alice Nazaré T. Pinto por todo suporte e apoio durante esse período. Agradecimentos também à Dona Izaura, pelo suporte gastronômico;

Aos tios João e Neuza, Fátima e Francisco pela ajuda durante todo o período que passei em Brasília;

Agradecimento especial para minha querida Suélem, pela leitura do primeiro manuscrito e sugestões de correções;

À professora Wang pela orientação e paciência;

Ao professor Xia por seus importantes conselhos e sugestões na realização desse trabalho;

Ao professor Pedro Roitman, meu orientador durante o mestrado, pelo exemplo e apoio durante o início de minha vida como matemático;

A todos que de alguma forma colaboraram com esse trabalho;

Aos amigos da UnB. Não citarei nomes para evitar esquecer alguém. Aos demais amigos que, de uma forma ou de outra, participaram de cada etapa deste processo, amenizando-o e ajudando a torná-lo possível;

Aos membros da comissão examinadora por aceitarem compor a banca e por suas sugestões;

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela atenção, colaboração e harmonioso convívio;

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Seja M^n uma subvariedade imersa, completa e mínima de $\mathbb{R}^{n+m}$. Neste trabalho provamos que, sob certas condições sobre o crescimento da norma em L^2 do comprimento da segunda forma fundamental, temos que M é um plano afim. Fazemos isso de duas maneiras distintas. Consideramos primeiro o caso em que M é super-estável e tem fibrado normal plano. Após, estudamos o caso em que M tem fibrado normal arbitrário e satisfaz uma desigualdade tipo-estabilidade. Resultados similares são obtidos quando M tem curvatura média constante. Na segunda parte deste trabalho analizamos a estrutura de subvareidades com curvatura média constante segundo a parabolicidade ou não-parabolicidade dos seus fins.

Palavras-chaves: Subvariedade super-estável, mínima, curvatura média constante, parabólica, não-parabólica.

ABSTRACT

Let M^n be a complete immersed minimal submanifold in $\mathbb{R}^{n+d}$. In this work we prove under some condition on the growth in the L^2 norm of the length of its second fundamental form that M is an affine plane. This is done in two different ways. We consider first the case when M is super stable and has flat normal bundle. After that, we study the case when M has arbitrary normal bundle and satisfy some stability-type inequalities. Similar results are also proved when M has constant mean curvature. In the second part of this work we study the structure of constant mean curvature submanifolds by means of the parabolicity or nonparabolicity of its ends.

Key Words: Super stable submanifolds, minimal, constant mean curvature, parabolic, nonparabolic.

Sumário

Introdução **2**

1 Preliminares **12**

1.1 Imersões Isométricas 12

1.2 Fins e Teoremas Relacionados 21

2 Teoremas de Rigidez Tipo-Bernstein **27**

2.1 Subvariedades do Espaço Euclidiano com Fibrado Normal Plano 27

2.2 Subvariedades do Espaço Euclidiano com Fibrado Normal Arbitrário . . . 39

3 A Estrutura de Subvariedades Super-Estáveis com Curvatura Média Constante **54**

3.1 Caso Não-Parabólico 54

3.2 Caso Parabólico 67

Referências Bibliográficas **71**

Introdução

Considere uma imersão isométrica $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície abstrata no espaço euclidiano. Dizemos que S é uma superfície mínima se sua curvatura média H é identicamente nula.

A palavra mínima está intimamente relacionada ao famoso problema proposto por Lagrange em 1760 [22]: *Dada uma curva simples (sem auto-intersecções) e fechada C, encontrar a superfície de menor área que tem C como bordo.* Lagrange apresentou esse problema como uma mera aplicação de um novo método por ele desenvolvido que permitia determinar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades como comprimento, área, energia, etc. Para o caso das superfícies mínimas, o método de Lagrange, hoje conhecido como *Cálculo das Variações*, pode ser descrito da seguinte forma.

Seja $D \subset S$ um domínio relativamente compacto de S com bordo suave ∂D. Considere a família de imersões $i_t : \overline{D} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ onde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $i_0 = i$. Vale salientar que a existência de tal família $\{i_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, chamada uma variação de D, é garantida pelo teorema da função implícita. Dizemos que a variação fixa o bordo de D se $i_t(x) = i(x)$ para todo $x \in \partial D$ e todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. O campo de variação de i_t é definido como

$$E(x) = \frac{di_t(x)}{dt}|_{t=0}, \quad x \in \overline{D}. \tag{0.0.1}$$

Suponha que S é orientável. Uma variação é dita *normal* se $E(x) = f(x)\nu(x)$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $\operatorname{supp}(f) \subset D$ e ν é o vetor normal da imersão. Nas condições acima, se $\mathcal{A}(t)$ representa a área de i_t, pode-se verificar que

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt}|_{t=0} = -\int_M 2fH. \tag{0.0.2}$$

A partir da equação (0.0.2), podemos provar facilmente [7] que S é mínima se, e somente se, é um ponto crítico do funcional área para toda variação normal $f\nu$. Conclui-se daí que se existe uma superfície de área mínima, então $H = 0$. A recíproca, no entanto, não é verdadeira. Pelo que vimos, as superfícies com $H = 0$ são pontos críticos da função área, entretanto, não se pode garantir sequer que tal superfície seja um mínimo relativo para qualquer variação normal. De qualquer forma, o nome de superfícies mínimas aplicado às superfícies com $H = 0$ tornou-se aplamente difundido.

Em geral, encontrar exemplos de superfícies com $H = 0$ não é uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples quando S é o gráfico de uma função diferenciável $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto do plano, Lagrange provou que a condição $H = 0$ é equivalente à equação

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (0.0.3)$$

Claramente, os planos de $\mathbb{R}^3$, representados pela funções lineares $u(x, y) = ax + by + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, são soluções triviais da equação de Lagrange.

Somente dezesseis anos após Lagrange ter obtido sua famosa equação, Meusnier [30] obteve soluções não-triviais de (0.0.3). Meusnier considerou o caso em que S é uma superfície de revolução. Sob essa nova hipótese, a equação é simplificada consideravelmente e verifica-se que a curva geratriz de S deve ser uma catenária. Portanto, a menos de isometrias do espaço euclidiano, o catenóide é a única superfície mínima de revolução. Neste mesmo trabalho, Meusnier verificou que com a condição adicional que as curvas de nível $u(x, y) =$ const. fossem retas, o helicóide é solução de (0.0.3).

Durante muito tempo o catenóide e o helicóide foram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas. Mais tarde, novos exemplos de tais superfícies foram obtidos, e para mais detalhes sugerimos ao leitor, por exemplo, [7].

Apesar da aparente multiplicidade de soluções da equação de Lagrange, em 1916, Bernstein [4] provou o surpreedente resultado:

Teorema 0.1. *Se uma superfície mínima é gráfico de uma função suave $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então ela é um plano.*

Ou seja, o mero fato de u estar definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$ exclui todas as soluções não-triviais de (0.0.3).

O teorema de Bernstein pode ser considerado um marco na teoria de superfícies mínimas e, como veremos, tem inspirado uma enorme gama de novos resultados e promovido um grande desenolvimento matemático nessa área.

Considere agora o caso de uma hipersuperfície mínima do espaço euclidiano $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, se M é o gráfico de uma função diferenciável $u(x_1, ..., x_n)$ definida em um domínio aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, então pode-se verificar que u deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\left(1 + |\nabla u|^2\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \qquad (0.0.4)$$

Observe que no caso $n = 2$, reobtemos a equação de Lagrange.

Apenas na década de 60, devido aos esforços de Federer, Fleming, de Giorgi, Almgren, Simons e Giusti, foi obtida uma uma versão do teorema de Bernstein para dimensões mais altas.

Teorema 0.2. *Se uma hipersuperfície mínima $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}(n \leq 7)$ é gráfico de uma função suave $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então ela é um plano.*

Por outro lado, Bombieri, de Giorgi e Guisti em [5] encontraram contra-exemplos para o caso em que $n \geq 8$, encerrando de uma vez o questão da validade do teorema de Bernstein para dimensões maiores.

Existe uma relação bastante íntima entre o teorema de Bernstein e o conceito de estabilidade de uma imersão, que passaremos a introduzir agora.

Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície minimamente imersa, completa e orientável do espaço euclidiano. Seja $\{i_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ uma variação normal $f\nu$ de um domínio limitado $D \subset M$ que fixa ∂D. Se $|A|^2$ denota a norma ao quadrado da segunda forma fundamental de M na métrica induzida, a segunda variação da área é dada por

$$\frac{d^2\mathcal{A}(t)}{dt^2}|_{t=0} = \int_M \left(|\nabla f|^2 - f^2|A|^2\right), \qquad (0.0.5)$$

onde ∇ é o gradiente de f calculado também na métrica induzida.

Como mencionamos anteriormente, as superfícies mínimas não são necessariamente pontos de mínimo do funcional área. Aquelas que de fato cumprem a condição de minimizar a área para toda variação normal, isto é $\mathcal{A}''(0) \geq 0$, serão chamadas mínimas estáveis. Dessa forma dizemos que M é estável se

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2|A|^2 \qquad \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{0.0.6}$$

De certa forma, as superfícies mínimas estáveis podem ser consideradas como aquelas que de fato ocorrem na natureza. Tais superfícies aparecem em um outro contexto que permitem dar um significado mais intuitivo à palavra estável.

Considere a seguinte experiência. Seja C uma curva fechada feita de um arame bem fino. Mergulhando C em uma solução de água e sabão, obtemos uma fina película que tem C como bordo. É possível provar que tal película, que está em equilíbrio em relação à tensão superficial do líquido, é mínima. Além disso, a superfície assim obtida é estável no sentido da mecânica, pois após pequenas perturbações nas suas condições iniciais surgem forças que a trazem de volta a sua posição original. Podemos dizer que películas de sabão dão uma representação física aproximada de uma superfície mínima estável. A relação entre superfícies mínimas e películas de sabão motivaram o célebre problema de Plateau: *provar que para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe uma superfície que minimiza a área e tem C como bordo.* Observe que não há muita restrição em relação ao "formato" da curva C. Assim, a princípio, podemos obter superfícies com auto-intersecção ou não-orientáveis. Definir quais curvas são permitidas já é parte não-trivial do problema. Uma versão do problema de Plateau foi provada por Douglas e Radó em 1930. Desde então muitos avanços matemáticos foram alcançados na tentativa de obter generalizações desse resultado. Para maiores informações no assunto consultar [23].

Em [2] Barbosa e do Carmo provaram o seguinte teorema.

Teorema 0.3. *Seja $D \subset S$ uma região limitada de uma superfície mínima S e $G(D) \subset S^2(1)$ a imagem esférica de D pela aplicação normal de Gauss. Se área $N(D) < 2\pi$, então D é estável.*

Não é difícil verificar que a imagem esférica de um gráfico está contida em um hemisfério de $S^2(1)$. Assim, pelo teorema de Barbosa-do Carmo, gráficos mínimos são apenas exemplos de uma classe mais ampla de variedades : as mínimas estáveis. Esta pequena observação conduz imediatamente à questão de verificar se vale um teorema tipo-Bernstein para essa nova classe de superfícies. Uma resposta afirmativa para essa questão foi obtida em 1980 por do Carmo e Peng [9].

Teorema 0.4. *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa mínima e estável. Então M é um plano.*

Independentemente, Fisher-Colbrie e Schoen [17] mostraram que uma hipersupefície M minimamente imersa, completa e estável em uma variedade tridimensional N com curvatura escalar não-negativa deve ser conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao cilíndro $\mathbb{R} \times S^1$. Para o caso especial onde $N = \mathbb{R}^3$ eles provaram também que M é o plano.

Uma versão do resultado de do Carmo-Peng para dimensões maiores ($n \leq 7$) ainda é uma problema em aberto. Entretanto, nesta direção, Bérard [3] provou o seguinte.

Teorema 0.5. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ($n \leq 5$) uma hipersuperfície completa, mínima estável. Então, se $\int_M |A|^n < \infty$, M é um hiperplano.*

Em analogia ao caso bidimensional, a integral $\int_M |A|^n$ é chamada de curvatura escalar total de M. Portanto, Bérard provou que com a condição adicional que a curvatura escalar total é finita, o resultado de do Carmo-Peng pode ser extendido para dimensões menores que 6. Alguns anos mais tarde, Shen e Zhu generalizaram o teorema de Bérard para dimenções arbitrárias.

Por outro lado, em [10] do Carmo e Peng demonstraram o seguinte teorema.

Teorema 0.6. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, mínima estável. Suponha que*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |A|^2}{R^{2q+2}} = 0, \qquad q < \sqrt{\frac{2}{n}}. \tag{0.0.7}$$

Então M é um hiperplano.

Aqui $B_R(x)$ representa a bola geodésica de raio R centrada em um ponto $x \in M$ arbitrário. Logo, o teorema acima nos diz que sob certas condições no crescimento da norma em L^2 da segunda forma fundamental, uma conclusão semelhante à do teorema de do Carmo-Peng é válida.

Podemos estender a definição de estabilidade para o caso de hipersuperfícies com curvatura média constante. Nete caso, dizemos simplesmente que M é estável se (0.0.5) é válida. Quando M tem curvatura média constante do Carmo e Zhou [11] provaram o seguinte

Teorema 0.7. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \leq 6)$ uma hipersuperfície não-compacta, completa, estável com curvatura média constante H. Suponha que*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |\Phi|^2}{R^{2-\frac{2}{n}}} = 0. \tag{0.0.8}$$

Então M é um hiperplano.

O tensor Φ é definido como $\Phi = A - H\mathrm{Id}$, onde Id representa a matriz identidade. O operador Φ tem traço nulo e propriedades geométricas semelhantes às da segunda forma fundamental no caso em que $H = 0$. Por essa razão, esse é o operador natural a se considerar no caso de curvatura média constante.

Em 1997, Cao, Shen e Zhu [6] iniciaram uma nova e frutífera linha de resultados inspirados no teorema de Bernstein. Explicitamente, eles provaram o

Teorema 0.8. *Se M^n é uma hipersuperfície completa, mínima estável do espaço euclidiano, então M tem um único fim.*

De maneira imprecisa, um fim é uma componente conexa ilimitada de $M \backslash B_{R_0}(x)$, para algum $R_0 > 0$. Um plano, por exemplo, possui apenas um fim.

Antes de continuarmos essa pequena história sobre os principais resultados relacionados ao teorema de Bernstein, faremos uma pausa para introduzir um importante conceito: o índice de um operador elíptico em M.

Seja L um operador elíptico de segunda ordem em M. Associada a L temos a forma quadrática

$$I(f) = -\int_M fLf, \tag{0.0.9}$$

definida no espaço vetorial $C_0^\infty(D)$ das funções com suporte em um domínio limitado $D \subset M$. Para cada D definimos o índice de L em D, denotado por $\mathrm{ind}_L D$, como a dimensão do maior subespaço de $C_0^\infty(D)$ onde I é negativo definido. Agora, se $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

é uma exaustão de M por domínios limitados, isto é, $D_i \subset D_{i+1}$ e $\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i = M$, então a seqüência $\{\mathrm{ind}_L D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é não decrescente. Se o limite desta sequência existe, definimos

$$\mathrm{ind}_L M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{ind}_L D_i\right), \tag{0.0.10}$$

caso contrário dizemos que $\mathrm{ind}_L M = \infty$.

Não é difícil verificar que a definição acima não depende da escolha da família $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Observe ainda que M é estável se, e somente se, $\mathrm{ind}_{\triangle+|A|^2} M = 0$.

Após essas considerações, podemos voltar ao nosso assunto principal.

Li e Wang em [27] generalizaram o teorema de Shen-Zhu. Eles provaram que uma hipersuperfície mínima completa de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\mathrm{ind}_{\triangle+|A|^2} M < \infty$ deve ter um número finito de fins. Em um trabalho posterior [28], os mesmos autores generalizaram seus resultados para o caso de hipersuperfícies em variedades completas com curvatura escalar não-negativa.

Em 2008, Cheng, Cheung e Zhou [40] provaram uma versão desse último resultado para o caso de hipersuperfícies com curvatura média constante. Explicitamente temos o seguinte:

Teorema 0.9. *Seja N^{n+1} uma variedade reimanniana completa de geometria limitada e M^n uma hipersuperfície completa, não-compacta, fracamente estável com curvatura média constante H. Suponha que* $\inf Ric_N < -nH^2$ *e que*

$$Ric_N(X,X) + Ric_N(\nu,\nu) - K_N(X,\nu) \geq \frac{n^2(n-5)}{4} H^2, \quad |X| = 1. \tag{0.0.11}$$

Então M tem apenas um fim.

Uma variedade N tem geometria limitada se sua curvatura seccional satisfaz $K_N \leq \sigma^2$, $\sigma > 0$ e seu raio de injetividade $i_N(x) \geq i_0 > 0$. Além disso, dizemos que M é fracamente estável se vale (0.0.6) para toda função de suporte compacto satisfazendo $\int_M f = 0$.

Neste mesmo trabalho, Cheng, Cheung e Zhou estudaram também a estrutura de hipersuperfícies não-compactas com $H =$ cte segundo a parabolicidade ou não-parabolicidade dos seus fins. A classificação dos fins depende da existência ou não de funções de Green positivas para o laplaciano de funções. Uma variedade é dita não-parabólica se ela possui pelo menos um fim não-parabólico. Caso contrário ela é dita parabólica. Estudaremos esse assunto com maiores detalhes no capítulo 1 deste trabalho.

Por enquanto enunciamos o interessante resultado

Teorema 0.10. *Seja N^{n+1} uma variedade riemanniana completa e M uma hipersuperfície completa não-compacta, fracamente estável com curvatura média constante H. Se M é não-parabólica e*

$$Ric_N(X,X) + Ric_N(\nu,\nu) - K_N(X,\nu) \geq \frac{n^2(n-5)}{4}H^2, \quad |X| = 1 \tag{0.0.12}$$

então M tem um único fim não-parabólico.

Para o caso parabólico Cheng, Cheung e Zhou provaram o

Teorema 0.11. *Seja N^{n+1} uma variedade riemanniana de geometria limitada e M^n uma hipersuperfície completa, não-compacta, fracamente estável com curvatura média constante H. Se $K_N \geq -H^2$ e M é parabólica, então M é totalmente umbílica e tem curvatura seccional não-negativa. Mais ainda, uma das duas situações abaixo deve ocorrer:*

1. *M tem um único fim; ou*

2. *$M = \mathbb{R} \times P$, onde P é uma variedade compacta de curvatura seccional não negativa.*

Motivada por um teorema de Spruck [35], Wang [41] introduziu a noção estabilidade para o caso de subvariedades do espaço euclidiano. Precisamente temos a seguinte definição.

Definição 0.1. *Uma subvariedade $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ é super-estável se $ind_{\triangle+|A|^2} = 0$.*

A patir dessa definição, Wang provou o teorema abaixo, generalizando o já mencionado resultado de Shen e Zhu para codimensões arbitrárias.

Teorema 0.12. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade completa, mínima super-estável. Então, se $\int_M |A|^n < \infty$, M é um plano afim.*

Feito esse breve apanhado sobre os principais problemas que motivaram esta tese, podemos agora mencionar quais os principais resultados e como está estruturado o presente trabalho.

No capítulo 1 estabelecemos de maneira clara e formal todos os fatos, definições e resultados clássicos que serão utilizados durante o texto. Em particular, trataremos rapidamente da teoria das imersões isométricas e discutiremos em detalhes os conceitos deixados de maneira imprecisa nesta introdução.

No capítulo 2, à luz da definição de Wang, generalizamos para codimensões arbitrárias os teoremas (0.6) e (0.7) sob dois aspectos distintos.

Primeiramente, consideramos subvariedades com fibrado normal plano. Verificamos que essa é uma condição natural que permite reobter os resultados mencionados. Observe que no caso de uma hipersuperfície ($m = 1$) o fibrado normal de M é trivialmente plano e a definição de Wang coincide com a definição clássica de estabilidade.

Posteriormente, supomos a validade de desigualdades tipo-estabilidade mais fortes que (0.0.6) e retiramos a condição de fibrado normal plano. Os igredientes necessários para tais generalizações são fornecidos por Xin [38]. Neste trabalho, Xin provou um teorema tipo Barbosa-do Carmo para codimensões mais altas que indica a condição geométrica necessária para a validade das desigualdades que usamos em nossos resultados. Usando essas mesmas idéias, provamos também um teorema semelhante para hipersuperfícies do espaço hiperbólico.

Por fim, fornecemos uma nova demonstração do teorema (0.7), que apesar da sua absoluta simplicidade, permite generalizá-lo para dimensões arbitrárias. Este mesmo resultado nos permitirá provar um interessante teorema de rigidez para o caso de subvariedades tipo-espaço com curvatura média constante em um espaço de Lorentz.

No capítulo 3, generalizamos os resultados de Cheung, Cheng e Zhou para codimensões quaisquer. Neste caso, provamos certas estimativas para a curvatura de M. Tais estimativas, aliadas à alguns teoremas clássicos sobre a teoria de funções harmônicas em variedades riemannianas, são os principais igredientes envolvidos nesse resultado.

Para finalizar esse pequeno texto introdutório, informamos ao leitor como estão organizadas as equações e os teoremas desse trabalho. As equações são numeradas de acordo com o capítulo, seção e ordem de aparição no texto respectivamente. Assim, (1.2.13) refere-se à décima terceira equação numerada da segunda seção do primeiro capítulo. Por sua vez, os teoremas, corolários, etc. estão numerados de acordo com o capítulo e ordem de aparição. Por exemplo, a proposição 2.1 corresponde à primeira proposição do capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo será feito um rápido estudos dos principais resultados da teoria de imersões isométricas. Tais resultados serão usados extensivamente durante todo o trabalho. Também serão definidos, de maneira precisa, todos os objetos matemáticos envolvidos em nossos resultados.

Assumimos que todas as variedades consideradas neste trabalho são orientáveis.

1.1 Imersões Isométricas

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e $f : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de M em uma variedade riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$. Dizemos que f é uma imersão isométrica se

$$g_x(u, v) = \overline{g}_{f(x)} \left(df_x(u), df_x(v) \right), \tag{1.1.1}$$

para todo $x \in M$ e $u, v \in T_xM$. Portanto, f é uma imersão isométrica se a métrica original de M coincide com a métrica induzida pela imersão f.

É uma consequência do teorema da função inversa que toda imersão é localmente um mergulho. Assim, para cada $x \in M$ podemos encontrar uma pequena vizinhança U de x, tal que a sua imagem $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. É usual fazer-se a identificação $f(U) \approx U$ pois, além da considerável simplificação de notação, para a geometria local de M tudo se passa como se tivéssemos, de fato, $M \subset \overline{M}$ com a métrica induzida.

Dessa forma, o espaço tangente de $\overline{M}$ se decompõe na soma direta $T_x\overline{M} = T_xM \oplus N_xM$, onde identificamos $df_x(T_xM) = T_xM$ e N_xM é o complemento ortogonal de T_xM

em $T_x\overline{M}$ segundo a métrica de $\overline{M}$. N_xM é chamado de fibrado normal de M em x e cada seção ν do fibrado NM é dito um campo normal a M.

Seja $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+m}\}$ um referencial ortonormal adaptado a M definido em uma vizinhança possivelmente menor $V \subseteq U$. A partir de agora estabelecemos a seguinte convenção para o domínio de variação dos índices:

$$1 \leq i, j, k, ... \leq n;$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, ... \leq n+m;$$

$$1 \leq A, B, C, ... \leq n+m.$$

Tal convenção será adotada livremente durante todo o trabalho.

Seja $\{\omega^A\}$ o correferencial asociado. Neste caso as equações de estrutura [34] de $\overline{M}$ são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\omega^A &=& \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad \omega_A^B = -\omega_B^A \\ d\omega_A^B &=& \omega_A^E \wedge \omega_E^B - \frac{1}{2}\overline{R}_{ACD}^B \omega^C \wedge \omega^D, \end{array} \right. \tag{1.1.2}$$

onde $\overline{R}_{ACD}^B$ e $\{\omega_A^B\}$ são, respectivamente, as componentes do tensor curvatura e as formas de conexão de $\overline{M}$. Nas equações acima e nas que se seguirão, usamos a regra de Einstein para somas: *os índices repetidos em cima e em baixo são somados segundo a nossa convenção.*

Agora, observe que a restrição $\omega^\alpha|_M = 0$. De fato,

$$\left(f^*\omega^\alpha\right)_x (v) = \left(\omega^\alpha\right)_{f(x)} (df_x(v)) = 0 \quad \forall x \in M, \ \forall v \in T_xM, \tag{1.1.3}$$

uma vez que $df_x(v)$ é um vetor tangente a M e ω^α pertence ao fibrado conormal N^*M.

Assim, por (1.1.2) temos que

$$0 = d\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha. \tag{1.1.4}$$

Portanto, pelo lema de Cartan [8], segue que

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{1.1.5}$$

Podemos agora definir a segunda forma fundamental de M como o tensor misto dado por

$$A = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha. \tag{1.1.6}$$

Observação 1.1. *Como temos o isomorfismo de fibrados* $Hom(N^*M, T^*M \otimes T^*M) \approx T^*M \otimes T^*M \otimes NM$*, podemos pensar na segunda forma fundamental de* M *em termos de uma aplicação linear* $B : N^*M \to T^*M \otimes T^*M$ *dada por*

$$B(\omega^\beta) := A^\beta = h^\alpha_{ij}\omega^i \otimes \omega^j \langle \omega^\beta, e_\alpha \rangle = h^\beta_{ij}\omega^i \otimes \omega^j,$$

onde a notação $\langle \, , \rangle$ *representa o pareamento entre* TM *e* T^*M*. Às vezes* B *é chamada de aplicação de Weingarten.*

A curvatura média de M é definida como a média do traço de A. Dessa forma, temos que

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\left(\sum_i h^\alpha_{ii}\right) e_\alpha = H^\alpha e_\alpha. \tag{1.1.7}$$

Definição 1.1. *Dizemos que* M *tem curvatura média constante se*

$$H := \sqrt{\sum_\alpha (H^\alpha)^2} = cte.$$

Dizemos ainda que M *é mínima se* $H = 0$*, i.e., se o vetor curvatura média de* M *é identicamente nulo.*

De (1.1.2) obtemos as equações de estrutura de M

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\omega^i & = & \omega^j \wedge \omega^i_j \\ d\omega^j_i & = & \omega^p_i \wedge \omega^j_p - \frac{1}{2}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{array} \right. \tag{1.1.8}$$

onde R^j_{ikl} são as componentes do tensor curvatura de M

Por (1.1.8), (1.1.2) e (1.1.5) temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l &= d\omega^j_i - \omega^p_i \wedge \omega^j_p \\ &= \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j - \frac{1}{2}\overline{R}^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l \\ &= -\left(\sum_\alpha h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} + \frac{1}{2}\overline{R}^j_{ijk}\right)\omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

donde derivamos imediatamente a equação de Gauss:

$$R^j_{ikl} - \overline{R}^j_{ikl} = \sum_\alpha \left(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}\right). \tag{1.1.9}$$

Observação 1.2. *Note que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j &= \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j<i} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \sum_{i<j} a_{ji}\omega^j \wedge \omega^i \\
&= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})\, \omega^i \wedge \omega^j .
\end{aligned}$$

Particularmente, se $a_{ij} = -a_{ji}$, *então*

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega^j = \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$$

Temos ainda as equações de estrutura do fibrado normal de M

$$\begin{cases} d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta \\ d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma - \frac{1}{2} {R^\perp}^\beta_{\alpha ij}\omega^i \wedge \omega^j . \end{cases} \tag{1.1.10}$$

As componentes do tensor de curvatura normal ${R^\perp}^\beta_{\alpha ij}$ mantém uma relação semelhante a (1.1.9) com a curvatura do ambiente $\overline{M}$. Passamos agora ao cálculo de tal expressão, classicamente conhecida como equação de Ricci.

Por (1.1.10), (1.1.2) e (1.1.5) temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}{R^\perp}^\beta_{\alpha ij}\omega^i \wedge \omega^j &= d\omega^\beta_\alpha - \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma \\
&= \omega^k_\alpha \wedge \omega^\beta_k - \frac{1}{2}\overline{R}^\beta_{\alpha ij}\omega^i \wedge \omega^j \\
&= -\left(\sum_k h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj} + \frac{1}{2}\overline{R}^\beta_{\alpha ij}\right)\omega^i \wedge \omega^j .
\end{aligned}$$

Logo,

$${R^\perp}^\beta_{\alpha ij} - \overline{R}^\beta_{\alpha ij} = \sum_k \left(h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{kj}h^\beta_{ki}\right). \tag{1.1.11}$$

Veremos, a partir de agora, o motivo pelo qual $\{\omega^B_A\}$ são chamadas de formas de conexão. Para isso introduzimos a definição abaixo. No que se segue, $\Gamma(\cdot)$ representa o conjunto das secções dos respectivos fibrados.

Definição 1.2. *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação* $\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^* \otimes TM)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\nabla(X_1 + X_2) = \nabla X_1 + \nabla X_2, \quad \forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$;

2. $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$ e $\forall f \in C^\infty(M)$.

Pode-se provar que a equação

$$\nabla e_A = \omega_A^B \otimes e_B, \tag{1.1.12}$$

define uma conexão ∇ em $\overline{M}$.

Uma variedade possui infinitas conexões. Entretanto, dada uma variedade riemanianna $(\overline{M}, \overline{g})$, existe uma única conexão que é simétrica e que preserva a métrica de $\overline{M}$ (num sentido que precisaremos mais tarde). Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita ou riemanniana de $\overline{M}$. Ocorre que as formas $\{\omega_A^B\}$ determinam, pela expressão (1.1.12), a conexão riemanniama de $\overline{M}$. Daí a razão pela qual são chamadas de formas de conexão.

Seja ∇ a conexão de Riemann de TM. A conexão riemanniana induzida em $T^*\overline{M}$, que denotamos por $\widetilde{\nabla}$, é definida pela expressão

$$\langle \widetilde{\nabla}\omega, X\rangle = d\langle X, \omega\rangle - \langle \nabla X, \omega\rangle. \tag{1.1.13}$$

Assim, se $\{\tilde{\omega}_A^B\}$ são as formas de conexão de $T^*\overline{M}$, ou seja $\widetilde{\nabla}\omega^A = \tilde{\omega}_B^A \otimes \omega^B$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_B^A &= \langle \widetilde{\nabla}\omega^A, e_B\rangle \\
&= d\delta_B^A - \langle \nabla e_B, \omega^A\rangle \\
&= -\langle \omega_B^C \otimes e_C, \omega^A\rangle \\
&= -\omega_B^C \omega^A(e_C) = \omega_B^C \delta_C^A = -\omega_B^A.
\end{aligned}$$

Finalmente, induzimos uma conexão em $T^*\overline{M} \otimes T\overline{M}$ pela seginte equação:

$$\widehat{\nabla}(\omega \otimes X) = \widetilde{\nabla}\omega \otimes X + \omega \otimes \nabla X. \tag{1.1.14}$$

Seguindo a notação de [33], a partir desse momento, usaremos o mesmo símbolo ∇ para denotar todas as conexões consideradas.

Agora podemos definir pecisamente em que sentido a conexão $\{\omega_A^B\}$ preserva a métrica. Se o tensor métrico de $\overline{M}$ é dado por $\overline{g} = \overline{g}_{AB}\omega^A \otimes \omega^B$, de (1.1.14) temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\overline{g} &= d\overline{g}_{AB} \otimes \omega^A \otimes \omega^B + \overline{g}_{AB}\nabla\omega^A \otimes \omega^B + \overline{g}_{AB}\omega^A \otimes \nabla\omega^B \\
&= d\overline{g}_{AB} \otimes \omega^A \otimes \omega^B - \overline{g}_{AB}\omega_C^A \otimes \omega^C \otimes \omega^B - \overline{g}_{AB}\omega_C^B \otimes \omega^A \otimes \omega^C \\
&= \left(d\overline{g}_{AB} - \overline{g}_{CB}\omega_A^C - \overline{g}_{AC}\omega_B^C\right) \otimes \omega^A \otimes \omega^B
\end{aligned}$$

Como escolhemos o referencial ortonormal, temos que $g_{AB} = \delta_{AB}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\nabla\overline{g} &= \left(d\delta_{AB} - \delta_{CB}\omega_A^C - \delta_{AC}\omega_B^C\right) \otimes \omega^A \otimes \omega^B \\
&= \left(-\omega_A^B - \omega_B^A\right) \otimes \omega^A \otimes \omega^B \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como M tem a métrica induzida de $\overline{M}$, não é difícil verificar que as formas $\{\omega_i^j\}$ e $\{\omega_\alpha^\beta\}$ definem as conexões riemannianas de TM e NM respectivamente.

Observação 1.3. *De maneira geral, as métricas g_{ij} e $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$ de TM e T^*M respectivamente, induzem uma métrica riemanniana no fibrado*

$$T_s^r(M) = \overbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}^{s \text{ vezes}} \otimes \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{r \text{ vezes}}.$$

Tal métrica, que ainda denotamos por g, é definida pela fórmula

$$g(t,s) = g^{i_1k_1}\ldots g^{i_sk_s} g_{j_1l_1}\ldots g_{j_rl_r} t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r} s_{k_1\ldots k_s}^{l_1\ldots l_r},$$

onde $t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}$ e $s_{k_1\ldots k_s}^{l_1\ldots l_r}$ são as componentes dos tensores t e s. Pode-se demonstrar que a conexão definida por (1.1.14) preserva essa métrica.

Feitas essas considerações, estamos prontos para prosseguirmos com nosso trabalho. Vale salientar que a teoria de conexões em fibrados vetoriais é basante vasta e abrangente. O leitor interessado pode obter mais informações sobre o assunto no belíssimo livro [15].

Derivando a segunda forma fundamental obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla A &= \left(dh_{ij}^\alpha - h_{lj}^\alpha\omega_i^l - h_{il}^\alpha\omega_j^l + h_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha\right) \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha \\
&= \left(\frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial x^k} - h_{lj}^\alpha\omega_i^l(e_k) - h_{il}^\alpha\omega_j^l(e_k) + h_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha(e_k)\right)\omega^k \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha \\
&= h_{ijk}^\alpha\omega^k \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha.
\end{aligned}$$

Diferenciando exteriormente (1.1.5) e usando (1.1.8) vem

$$\begin{aligned} d\omega_i^\alpha &= dh_{ij}^\alpha \wedge \omega^j + h_{ij}^\alpha d\omega^j \\ &= \frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial x^k}\omega^k \wedge \omega^j + h_{ij}^\alpha \omega^l \wedge \omega_l^j \\ &= \frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial x^k}\omega^k \wedge \omega^j + h_{ij}^\alpha \omega^l \wedge \omega_l^j(e_k)\omega^k \\ &= \left(\frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial x^k} - h_{il}^\alpha \omega_j^l(e_k)\right)\omega^k \wedge \omega^j \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação (1.1.2) implica que o lado esquerdo da expressão acima é dado por

$$\begin{aligned} d\omega_i^\alpha &= \omega_i^l \wedge \omega_l^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^\alpha \omega^k \wedge \omega^j \\ &= \omega_i^l(e_k)\omega^k \wedge \left(h_{lj}^\alpha \omega^j\right) + h_{ij}^\beta \omega^j \wedge \left(\omega_\beta^\alpha(e_k)\omega_k\right) - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^\alpha \omega^k \wedge \omega^j \\ &= \left(h_{lj}^\alpha \omega_i^l(e_k) - h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha(e_k) - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^\alpha\right)\omega^k \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Juntando tudo obtemos

$$\left(\frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial x^k} - h_{il}^\alpha \omega_j^l(e_k) - h_{lj}^\alpha \omega_i^l(e_k) + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha(e_k) + \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^\alpha\right)\omega^k \wedge \omega^j = 0,$$

donde obtemos a equação de Codazzi

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = \overline{R}_{ijk}^\alpha. \tag{1.1.15}$$

A equação de Codazzi juntamente com as fórmulas de Gauss e Ricci constituem as equações fundamentais de uma imersão isométrica e serão utilizadas com bastante frequência durante nosso trabalho.

Agora, sejam $\{i_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ uma família a 1 parâmetro de imersões $M \hookrightarrow \overline{M}$ com a propriedade que $i_0 = i$ e $I : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \overline{M}$ uma aplicação diferenciável definida por $I(t, x) = i_t(x)$. Neste caso dizemos que $\{i_t\}$ é uma variação de $i : M \to \overline{M}$.

A variação $\{i_t\}$ induz um campo de vetores em $\overline{M}$ definido ao longo da imagem de M. Este campo, que denotaremos por V, pode ser construido da seguinte forma. Seja $\frac{\partial}{\partial t}$ o vetor tangente canônico a $(-\epsilon, \epsilon)$ em $(-\epsilon, \epsilon) \times M$ (com a estrutura produto). Definimos

$$V(x) = dI(\frac{\partial}{\partial t}(0, x)). \tag{1.1.16}$$

O campo V, assim definido, se divide em suas componentes tangente $V^\top$ e normal $V^\perp$. Se M tem forma de volume induzida θ, como $V^\top$ é um campo tangente sobre M, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 1.1. *Suponha que M é compacta. Seja $\mathcal{A}(t)$ a área induzida de $i_t(M)$. Então $\mathcal{A}(t) \in C^\infty$ e*

$$\mathcal{A}'(0) = -\int_M g(V^\perp, \overrightarrow{H}) + \int_{\partial M} \theta_{V^\top}, \tag{1.1.17}$$

onde $\theta_{V^\top}$ representa a (n-1)-forma em ∂M obtida pela contração da forma de volume θ pelo vetor tangente $V^\top$.

Demonstração: Para uma demonstração em coordenadas locais sugerimos [16]. Uma prova global do resultado pode também ser encontrada em [1]. A abordagem global é particularmente útil no calculo da segunda variação do volume que passaremos a tratar agora.

■

Observe que se considerarmos variações que fixam o bordo de M, isto é, $i_t(x) = i(x)$ para todo $x \in \partial M$, então a equação (1.1.17) fica

$$\mathcal{A}'(0) = -\int_M g(V^\perp, \overrightarrow{H}),$$

donde vemos que as subvariedades mínimas são pontos críticos de $\mathcal{A}(t)$.

Sejam $\nu \in NM$ e $\{e_i\}$ uma base ortonormal qualquer de TM. Definimos a aplicação $\overline{Rc} : NM \to NM$ dada por

$$\overline{Rc}(\nu) = \sum_i \left(\overline{R}_{e_i,\nu} e_i\right)^\perp,$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$.

Teorema 1.2. *Seja $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ uma subvariedade compacta minimamente imersa e $\{i_t\}$ uma variação de M tal que $i_t(\partial M) = i(\partial M)$. Então*

$$\mathcal{A}''(0) = \int_M \left\{|\nabla V^\perp|^2 - g(\overline{Rc}(V^\perp), V^\perp) - |B(V^\perp)|^2\right\}. \tag{1.1.18}$$

Demonstração: Veja [19].

■

Considere, sem perda de generalidade, um referencial ortonormal adaptado $\{e_A\}$ em uma vizinhança de $x \in M$ tal que

$$\omega_A^B(x) = 0.$$

Assim, se escolhemos uma variação normal $V = fe_\alpha$ com $f \in C_0^\infty(M)$, temos que

$$|\nabla V^\perp|^2 = |df \otimes e_\alpha|^2 = |\frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^i \otimes e_\alpha|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 = |\nabla f|^2,$$

$$g(\overline{Rc}(V^\perp), V^\perp) = \sum_i g(\overline{R}_{e_i, fe_\alpha}e_i, fe_\alpha) = f^2 Ric_N(e_\alpha, e_\alpha)$$

e

$$|B(V^\perp)|^2 = f^2|A^\alpha|^2.$$

Substituindo as expressões acima na equação (1.1.18), vem

$$\mathcal{A}''(0) = \int_M \left\{|\nabla f|^2 - f^2 Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) - f^2|A^\alpha|^2\right\}.$$

Portanto, se M é um ponto de mínimo do funcional volume, temos que

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 \left\{Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) + |A^\alpha|^2\right\}.$$

Usamos essa última equação como o pano de fundo que motiva a definição de variedade super-estável. Precisamente estabelecemos o seguinte.

Definição 1.3. *Uma subvariedade imersa $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ é dita super-estável se*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 \left\{\sum_\alpha Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) + |A|^2\right\}, \tag{1.1.19}$$

para toda função $f \in C_0^\infty(M)$. Aqui $|A|^2 = \sum_\alpha |A^\alpha|^2$ é o comprimento da segunda forma fundamental de M e $\{e_\alpha\}$ são direções normais unitárias tais que $Ger\{e_\alpha\} = NM$.

Observe que no caso em que $N = \mathbb{R}^{n+m}$ reobtemos a definição de Wang [41]. Ainda, se $m = 1$, a definição coincide com a inequação clássica de estabilidade para hipersuperfícies.

Definição 1.4. *Dizemos que uma subvariedade* $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ *é fracamente super-estável se vale (1.1.19) para toda* $f \in C_0^\infty(M)$ *com a propriedade adicional que*

$$\int_M f = 0.$$

Obviamente toda subvariedade super-estável é também uma subvariedade fracamente super-estável. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Considere, por exemplo, a imersão totalmente geodésica $S^2 \subset S^3$, isto é, pensamos em S^2 como o "equador" de S^3. A inequação de super-estabilidade se escreve como

$$\int_{S^2} |\nabla f|^2 \geq 2 \int_{S^2} f^2.$$

Como S^2 é compacto se escolhemos $f \equiv 1$ obtemos uma contradição. Portanto, a imersão não é super-estável, mas é fracamente super-estável pois se f tem média 0, isto é,

$$\int_{S^2} f = 0,$$

como $\lambda_1(S^2) = 2$, pela deigualdade de Poincaré vale

$$\int_{S^2} |\nabla f|^2 \geq 2 \int_{S^2} f^2.$$

1.2 Fins e Teoremas Relacionados

Começamos formalizando a definição de fins em variedades riemannianas.

Definição 1.5. *Seja* M *uma variedade riemanniana completa. Um fim* E *com respeito a um compacto* $\Omega \subset M$ *é uma componente conexa ilimitada de* $M \backslash \Omega$*. O número de fins de* M *relativamente ao compacto* Ω*, que denotamos por* $N_\Omega(M)$*, é o número de fins de* $M \backslash \Omega$*.*

É claro que se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ então temos que $N_{\Omega_1}(M) \leq N_{\Omega_2}(M)$. Seja $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma exaustão compacta de M, isto é,

$$D_i \subset D_{i+1}$$

e

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i = M.$$

Dessa forma, a seqüência $\{N_{\Omega_i}(M)\}_{i\in\mathbb{N}}$ é não decrescente. Se tal seqüência é ilimitada, dizemos que M tem infinitos fins. Caso contrário, M tem finitos fins e definimos o número de fins de M como

$$N(M) = \max_{i\in\mathbb{N}} N_{\Omega_i}(M).$$

Não é difícil verificar que a definição acima não depende da escolha de $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. De fato, pelo que vimos acima, deve haver algum $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N(M) = N_{\Omega_{i_0}}(M)$. Portanto, para todo $\Omega_i \supset \Omega_{i_0}$ temos que

$$N_{\Omega_i}(M) \leq \max_{i\in\mathbb{N}} N_{\Omega_i}(M) = N(M) = N_{\Omega_{i_0}}(M) \leq N_{\Omega_i}(M).$$

Concluímos que $N(M) = N_{\Omega_i}(M)$. Logo, para fins práticos, podemos sempre assumir que $M\backslash\overline{B}_{R_0}(x)$ tem $N(M)$ fins para algum $R_0 > 0$ suficientemente grande. Aqui $\overline{B}_{R_0}(x)$ é a bola geodésica fechada de raio R_0 centrada em um pondo arbitrário $x \in M$.

Sejam M uma variedade compacta com bordo ∂M e Δ o laplaciano de funções em M. A teoria de equações diferenciais parciais elípticas garante a existência de uma função $G : M \times M\backslash D \to \mathbb{R}$, onde $D = \{(x, x)|x \in M\}$, tal que

$$f(x) = -\int_M G(x, y)\Delta f(y)dy, \tag{1.2.1}$$

para toda função suave $f : M \to \mathbb{R}$ com condições de fronteira de Dirichlet

$$f|_{\partial M} = 0.$$

Mais ainda, temos que $G(x, y) = 0$ para $y \in \partial M$ e $x \in M\backslash\partial M$. Como G e f satisfazem a condição de fronteira de Dirichlet, integrando por partes (1.2.1) vem

$$f(x) = -\int_M \Delta_y G(x, y)f(y)dy, \tag{1.2.2}$$

donde

$$\Delta_y G(x, y) = -\delta_x(y), \tag{1.2.3}$$

Lembramos que o funcional linear $\delta_x : C_0^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é definido como

$$\langle\delta_x, f\rangle = \int_M \delta_x(y)f(y)dy = f(x).$$

Se substituimos $f(x) = G(z,x)$ em (1.2.2) temos

$$\begin{aligned} G(z,x) &= -\int_M \Delta_y G(x,y)G(z,y)dy \\ &= -\int_M G(x,y)\Delta_y G(z,y)dy \\ &= G(x,z). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Substituindo $f(x) = \Delta_x G(z,x)$ em (1.2.2) vem

$$\Delta_x G(z,x) = -\int_M \Delta_y G(x,y)\Delta_y(z,y)dy.$$

Como o lado direito é simétrico em x e z obtemos que

$$\Delta_x G(z,x) = \Delta_z G(x,z).$$

Finalmente , por (1.2.4), concluimos que

$$\Delta_x G(z,x) = \Delta_z G(z,x),$$

donde (1.2.2) pode ser reescrita como

$$\Delta_x \int_M G(x,y)f(y)dy = \int_M \Delta_x G(x,y)f(y)dy = -f(x). \tag{1.2.5}$$

Uma função $G : M \times M \backslash D \to \mathbb{R}$ com as propriedades acima e satisfazendo (1.2.3), (1.2.4) e (1.2.5) é chamada de função de Green. Ela permite obter soluções explícitas para o problema de Dirichlet. Quando M é não-compacta sem bordo, gostariamos de obter uma função de Green para funções de suporte compacto em M. Uma primeira demonstração para este fato foi dada por Malgrange [30]. Mais recentemente, Peter Li e Tam [26] obteram uma demonstração construtiva do resultado. Explicitamente temos o seguinte.

Teorema 1.3. *Seja M uma variedade completa sem bordo. Existe uma função suave $G : M\times M\backslash D \to \mathbb{R}$ satisfazendo (1.2.3), (1.2.4) e (1.2.5). Mais ainda, G pode ser tomada positiva se, e somente se, existe uma função super-harmônica positiva f em $M\backslash B_{R_0}(x)$ com a propriedade*

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) < \inf_{x\in\partial B_{R_0}(x)} f(x). \tag{1.2.6}$$

Demonstração: Sugerimos [26].

■

Enfim, podemos definir o importante conceito de variedades parabólicas e não-parabólicas.

Definição 1.6. *Dizemos que uma variedade completa M é parabólica se ela não admite uma função de Green positiva. Caso contrário ela é dita não-parabólica.*

Seja E um fim de M. Definimos o seu bordo ∂E como $\partial \overline{B}_x(R_0) \cap \overline{E}$.

Definição 1.7. *Um fim E é dito parabólico se ele não admite uma função harmônica positiva $f : E \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

1. $f|_{\partial E} = 1$;
2. $\inf\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in E}} f(x) < 1$.

Caso contrário, dizemos que E é não-parabólico e a função f é dita uma função barreira de E.

Note que se E é um fim não-parabólico de M, podemos extender a função barreira f como sendo identicamente 1 em $\left(M \backslash \overline{B}_{R_0}(x)\right) \backslash E$. Dessa maneira, construimos uma função harmônica positiva $g : M \to \mathbb{R}$ que cumpre a condição (1.2.6), donde M possui uma função de Green positiva. Portanto, M é não-parabólica se, e somente se, possui pelo menos um fim não-parabólico. Entretanto, nada impede que uma variedade não-parabólica possua muitos fins parabólicos.

Vale mencionar que um fim é não-parabólico se, e somente se, possui uma função de Green positiva com condições de fronteira de Neuman. As idéias para provar esse fato são semelhantes àquelas envolvidas na demonstração do teorema 1.3 em uma variedade com bordo e para funções com condições de Newman em ∂E.

Como um antídoto para a complicada definição 1.7, a proposição abaixo fornece um critério que permite verificar a não-parabolicidade de um fim. Tal resultado foi provado pela primeira vez por Cao, Shen e Zhu.

Proposição 1.1. *Seja E um fim de uma variedade riemanniana completa. Suponha que, para algum $\eta \geq 1$ e $C > 0$, vale em E a seguinte desigualdade tipo-Sobolev*

$$\left(\int_E |u|^{2\eta}\right)^{\eta} \leq C \int_E |\nabla u|^2, \qquad \forall u \in C_0^\infty(E). \tag{1.2.7}$$

Então E tem volume finito ou é não-parabólico.

Demonstração: Veja [6].

■

Nesse mesmo espírito temos a

Proposição 1.2. *Seja E um fim de uma variedade riemanniana completa. Suponha que, para algum $\eta > 1$ e $C > 0$, vale em E a seguinte desigualdade tipo-Sobolev*

$$\left(\int_E |u|^{2\eta}\right)^{\eta} \leq C \int_E |\nabla u|^2, \qquad \forall u \in C_0^\infty(E). \tag{1.2.8}$$

Então existe um constante $C_1 = C_1(C, \eta)$, tal que o volume da bola geodésica de raio R contrada em $x \in M$, denotado por $V_x(R)$, satisfaz

$$V_x(R) \geq C_1 R^{\frac{2\eta}{\eta-1}}.$$

Demonstração: Sugerimos [24].

■

Combinando as proposições acima, obtemos como corolário que se vale (1.2.8) com $\eta > 1$, então E deve ser não-parabólico. Quando $\eta = 1$, obtemos a desigualdade de Poincaré, e neste caso pode haver fins de volume finito.

Como aplicação do que vimos, seja M uma subvariedade mínima do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$. Em [31] Michael e Simon verificaram que vale a seguinte desigualdade em M

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leq \int_M |\nabla u|^2, \tag{1.2.9}$$

donde clonclui-se que todos os fins de M são não-parabólicos.

Em geral uma estimativa do número de fins de uma variedade não é uma tarefa simples. Entretanto, se definimos

$$\mathcal{H}_D^0(M) = \left\{ u : M \to \mathbb{R} |\, \Delta u = 0, |u| \leq K \ \ e \ \int_M |\nabla u|^2 < \infty \right\},$$

em [25] Peter Li e Tam provaram o famoso resultado as seguir, estabelecendo uma interessante relação entre o número de fins não-parabólicos e a teoria de funções harmônicas em variedades.

Teorema 1.4. *Seja M uma variedade riemanniana completa. Então o número de fins não-parabólicos de M é limitado superiormente por dim$\mathcal{H}_D^0(M)$.*

Por outro lado, em 1997, Cao, Shen e Zhu [6] provaram que se M é uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{R}^m$ então $\dim \mathcal{H}_D^0(M) = 1$. Observando a validade da desigualdade (1.2.9) em M, eles concluiram o

Teorema 1.5. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ uma subvariedade completa minimamente imersa. Então ela possui um único fim não-parabólico.*

Desde então, o teorema 1.4 tem sido uma importante ferramenta utilizada ostensivamente no estudo da estrutura de variedades. Como exemplos desses avanços temos os resultados obtidos por Cao, Shen e Zhu [6] e Peter Li e Wang [27] [28], sobre os quais já comentamos durante a introdução desse trabalho.

Capítulo 2

Teoremas de Rigidez Tipo-Bernstein

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teoremas tipo-Bernstein que generalizam os resultados (0.1) e (0.2), obtidos por do Carmo e Peng [9] e do Carmo e Zhou [11] respectivamente, para subvariedades do espaço euclidiano com codimensões e dimensões arbitrárias. Dividimos o presente capítulo em duas seções distintas. Primeiramente consideramos o caso de subvariedades com fibrado normal plano. Na segunda parte assumimos a validade de uma desigualdade tipo-estabilidade mais forte que a inequação de super-estabilidade clássica. Como veremos, tais relações permitem um generalização dos resultados acima sem a hipótese $R^{\perp} \equiv 0$. Além disso, damos um nova demonstração para o caso $H = cte$ que permite provar a validade do teorema (0.2) para dimensões arbitrárias. Por fim, inspirados nas técnicas utilizadas, provamos um resultado para hipersuperfícies do espaço hiperbólico e um teorema para subvariedades tipo-espaço em uma variedade pseudo-riemanniana com curvatura nula.

2.1 Subvariedades do Espaço Euclidiano com Fibrado Normal Plano

Nesta seção demonstraremos a existência de estimativas tipo-Kato semelhantes àquelas obtidas em [9] para o caso de hipersuperfícies. Conforme veremos a seguir, tais relações permitem obter de maneira imediata generalizações dos resultados mencionados acima para codimensões maiores.

Sejam M^n uma subvariedade imersa em $\mathbb{R}^{n+m}$ e $\{e_A\}$ um referencial ortonormal adaptado em uma vizinhança U de $x \in M$. Se M tem fibrado normal plano, pela equação de Ricci (1.1.11) temos que

$$\sum_k \left(h^{\alpha}_{ki} h^{\beta}_{kj} - h^{\alpha}_{kj} h^{\beta}_{ki} \right) = 0.$$

Pela observação 1.1 e por linearidade podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} 0 &= g\left((A^{\xi}A^{\eta} - A^{\eta}A^{\xi})(X), Y\right) \\ &= g\left(\left[A^{\xi}, A^{\eta}\right](X), Y\right), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi, \eta \in NM$.

Concluimos que $\left[A^{\xi}, A^{\eta}\right] = 0$.

Portanto, por um resultado de álgebra linear, existe uma base de T_xM que diagonaliza simultaneamente todas as formas fundamentais A^{α}, associadas a cada vetor normal e_{α}. Logo, podemos assumir que

$$A^{\alpha}(e_i, e_j) = k^{\alpha}_i \delta^i_j.$$

Considere a família de operadores $\Phi^{\alpha} = \mathrm{Id}H^{\alpha} - A^{\alpha}$. Por definição, temos que

$$\phi^{\alpha}_{ij} = \Phi^{\alpha}(e_i, e_j) = \mu^{\alpha}_i \delta^i_j \tag{2.1.1}$$

onde,

$$\mu^{\alpha}_i = H^{\alpha} - k^{\alpha}_i.$$

Observação 2.1. *Quando M tem vetor curvatura média paralelo, isto é $\nabla^{\perp}\overrightarrow{H} = 0$, os tensores Φ^{α} têm as mesmas propriedades da segunda forma fundamental de M no caso $H = 0$, isto é, são tensores simétricos, tipo codazzi ($\phi^{\alpha}_{ijk} = \phi^{\alpha}_{ikj}$) e têm traço nulo.*

Definição 2.1. *Dizemos que uma imersão $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ é totalmente umbílica se $\Phi = 0$.*

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave em M. Temos que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\omega^i$$

e

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^k_i(e_j)\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \omega^i \otimes \omega^j := f_{ij}\omega^i \otimes \omega^j,$$

onde $\{\omega^A\}$ é o correferencial associado e $\{\omega^B_A\}$ são as formas de conexão.

Definição 2.2. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, definimos o laplaciano de f como o traço de $\nabla^2 f$, isto é,*

$$\Delta f = \sum_i f_{ii}.$$

Observação 2.2. *A definição acima pode ser estendida imediatamente para o caso de um tensor $t \in T_s^r(M)$. De maneira geral, se*

$$t = t_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_r} \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_s} \otimes e_{l_1} \otimes \ldots \otimes e_{l_r},$$

temos que

$$\nabla^2 t = t_{k_1 \ldots k_s ij}^{l_1, \ldots, l_r} \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_s} \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{l_1} \otimes \ldots \otimes e_{l_r}.$$

Daí, definimos que

$$\Delta t = \sum_i t_{k_1 \ldots k_s ii}^{l_1 \ldots l_r}.$$

No caso em que o vetor curvatura média é paralelo, em [13], Cheng e Yau verificaram que

$$\frac{1}{2} \triangle |\Phi^\alpha|^2 = \sum_{i,j,k,\alpha} (\phi_{ijk}^\alpha)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha)^2, \tag{2.1.2}$$

onde ϕ_{ijk}^α são os coeficientes da derivada covariante do tensor simétrico Φ^α e R_{ijij} é o tensor de curvatura riemanniana.

Pela fórmula de Gauss (1.1.9), temos que o último termo na equação acima é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha} R_{ijij} (\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} (H^\beta - \mu_i^\beta)(H^\beta - \mu_j^\beta)(\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} \mu_i^\beta \mu_j^\beta (\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} H^\beta (\mu_i^\beta + \mu_j^\beta)(\mu_1^\alpha - \mu_j^\alpha)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} (H^\beta)^2 (\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Agora daremos uma estimativa para cada termo dessa última expressão.

Lembrando que $\sum_i \mu_i^\alpha = 0$, pela desigualdade de Holder, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu_i^\beta\mu_j^\beta(\mu_i^\alpha-\mu_j^\alpha)^2 &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu_i^\beta\mu_j^\beta(\mu_i^\alpha)^2+\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu_i^\beta\mu_j^\beta(\mu_j^\alpha)^2-2\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu_i^\beta\mu_j^\beta\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha\right\}\\
&= -\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu_i^\beta\mu_j^\beta\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha\\
&= -\sum_{i,j}\left\{\left(\sum_\alpha\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha\right)\left(\sum_\beta\mu_i^\beta\mu_j^\beta\right)\right\}\\
&= -\sum_{i,j}\left\{\left(\sum_\alpha\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha\right)^2\right\}\\
&\geq -\sum_{i,j}\left(\sum_\alpha(\mu_i^\alpha)^2\sum_\alpha(\mu_j^\alpha)^2\right)\\
&= -|A|^4, \qquad (2.1.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}(H^\beta)^2(\mu_i^\alpha-\mu_j^\alpha)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}(H^\beta)^2\left\{(\mu_i^\alpha)^2-2\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha+(\mu_j^\alpha)^2\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_j\left(\sum_\beta(H^\beta)^2\sum_{j,\alpha}(\mu_i^\alpha)^2\right)+\sum_i\left(\sum_\beta(H^\beta)^2\sum_{j,\alpha}(\mu_j^\alpha)^2\right)\right\}\\
&= nH^2|\Phi|^2 \qquad (2.1.4)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}H^\beta(\mu_i^\beta+\mu_j^\beta)(\mu_1^\alpha-\mu_j^\alpha)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}H^\beta(\mu_i^\beta+\mu_j^\beta)\left\{(\mu_i^\alpha)^2-2\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha+(\mu_j^\alpha)^2\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}H^\beta\Big\{\mu_i^\beta(\mu_i^\alpha)^2+\mu_j^\beta(\mu_i^\alpha)^2+\mu_i^\beta(\mu_j^\alpha)^2-2\mu_i^\beta\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha\\
&\qquad -2\mu_j^\beta\mu_i^\alpha\mu_j^\alpha+\mu_j^\beta(\mu_j^\alpha)^2\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}H^\beta\left\{\mu_i^\beta(\mu_i^\alpha)^2+\mu_j^\beta(\mu_j^\alpha)^2\right\}\\
&= n\sum_{i,\alpha,\beta}H^\beta\mu_i^\beta(\mu_i^\alpha)^2 \qquad (2.1.5)
\end{aligned}
$$

Demonstraremos a seguir um importante lema.

Lema 2.1. *Seja* $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ *uma subvariedade com vetor curvatura média paralelo e com fibrado normal plano. Neste caso temos que*

$$|\nabla\Phi|^2 - |\nabla|\Phi||^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado é bastante semelhante à do lema 2.3, por esse motivo omitimos os seus detalhes aqui.

∎

Observação 2.3. *Em [37], Xin provou o lema acima para o caso* $H = 0$*. Precisamente, ele verificou o seguinte: seja* $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ *uma subvariedade minimamente imersa e orientável. Se* A *é a segunda forma fundamental de* M *então vale*

$$|\nabla A|^2 - |\nabla|A||^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2.$$

Agora mais um lema.

Lema 2.2. *Sejam* $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *operadores lineares simétricos tais que* $trA = trB = 0$ *e* $[A, B] = 0$*, isto é, podem ser diagonalizados simultaneamente. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(trA^2)(trB^2)^{\frac{1}{2}} \leq trA^2B \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(trA^2)(trB^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Veja [32].

∎

Pelo lema acima, podemos estimar (2.1.5) como

$$\begin{aligned}
n\sum_{i,\alpha,\beta}\mu_i^\beta(\mu_i^\alpha)^2 &= n\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{H}^\beta tr(\Phi^\beta(\Phi^\alpha)^2) \\
&\leq \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_\alpha \mathrm{tr}(\Phi^\alpha)^2\sum_\beta H^\beta(\mathrm{tr}(\Phi^\beta)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2\sum_\beta H^\beta|\Phi^\beta| \\
&\leq \frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2\left(\sum_\beta|\Phi^\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_\beta(H^\beta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas acima e o lema 2.1, a equação (2.1.2) se reescreve como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= \sum_{i,j,k,\alpha}(\phi^\alpha_{ijk})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}H^\beta(\mu^\beta_i+\mu^\beta_j)(\mu^\alpha_1-\mu^\alpha_j)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}\mu^\beta_i\mu^\beta_j(\mu^\alpha_i-\mu^\alpha_i)^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}(H^\beta)^2(\mu^\alpha_i-\mu^\alpha_j)^2 \\
&\geq \left(\frac{2}{n}+1\right)|\nabla|\Phi||^2-|\Phi|^4-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3H+nH^2|\Phi|^2,
\end{aligned}$$

Pela identidade

$$\Delta|\Phi|^2 = 2|\Phi|\Delta|\Phi| + 2|\nabla|\Phi|^2|^2,$$

obtemos finalmente a seguinte desigualdade tipo-Kato

$$|\Phi|\triangle|\Phi| + |\Phi|^4 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3H - nH^2|\Phi|^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2. \tag{2.1.6}$$

Estamos prontos para enunciar nosso primeiro teorema

Teorema 2.1. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade completa, mínima e super-estável do espaço euclidiano com fibrado normal plano. Suponha que*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\int_{B_R(p_0)}|A|^2}{R^{2+2q}} = 0, \qquad q < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Então M é um plano afim.

Demonstração: Introduzindo $f|A|^{1+q}$ na inequação de super-estabilidade (1.1.19) temos que

$$\begin{aligned}
\int_M f^2|A|^{4+2q} &\leq \int_M |\nabla(f|A|^{1+q})|^2 \\
&= \int_M g\left(|A|^{1+q}\nabla f + (1+q)f|A|^q\nabla|A|, |A|^{1+q}\nabla f + (1+q)f|A|^q\nabla|A|\right) \\
&= (1+q)^2\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2f^2 + \int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2 \\
&\quad +2(1+q)\int_M f|A|^{2q+1}g(\nabla f,\nabla|A|).
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Multiplicando (2.1.6) por $|A|^{2q}f^2$ e integrando em M vem:

$$\frac{2}{n}\int_M |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 \leq \int_M |A|^{2q+1}f^2\Delta|A| + \int_M |A|^{2q+4}f^2. \tag{2.1.8}$$

Pelo teorema da integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{2q+1} f^2 \Delta |A| &= -\int_M g(\nabla\left(|A|^{2q+1} f^2\right), \nabla |A|) \\ &= -(2q+1)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 \\ &\quad -2\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|).\end{aligned}$$

Substituindo em (2.1.8) segue que

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 &\leq \int_M |A|^{2q+1} f^2 \Delta |A| + \int_M |A|^{2q+4} f^2 \\ &= -(2q+1)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 - 2\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|) \\ &\quad + \int_M |A|^{2q+4} f^2,\end{aligned}$$

donde, após simplificação dos termos semelhantes vem

$$\left(\frac{2}{n} + 2q + 1\right)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 \leq \int_M |A|^{2q+4} f^2 - 2\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|). \quad (2.1.9)$$

Agora, nosso objetivo é eliminar o termo que contém $g(\nabla f, \nabla |A|)$ em (2.1.7). Com este intuito, multiplicamos (2.1.9) por $(1+q)$ obtendo

$$\begin{aligned}(1+q)\left(\frac{2}{n} + 2q + 1\right)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 &\leq -2(1+q)\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|) \\ &\quad +(1+q)\int_M |A|^{2q+4} f^2. \quad (2.1.10)\end{aligned}$$

Agora, somando (2.1.7) e (2.1.10) e simplificando vem:

$$(1+q)\left(\frac{2}{n} + q\right)\int_m |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 \leq q\int_M |A|^{2q+4} f^2 + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2. \quad (2.1.11)$$

Temos que

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0$$

Fazendo $a = f|\nabla |A||$ e $b = |A||\nabla f|$, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz calculamos

$$\begin{aligned}
\int_M 2f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|) &\leq \int_M 2f|A|^{2q+1}|\nabla f||\nabla |A|| \\
&= \int_M |A|^{2q} (\overbrace{f|\nabla A|}^{a} \underbrace{|A||\nabla f|}_{b}) \\
&\leq \int_M |A|^{2q} \left(\epsilon f^2 |\nabla A|^2 + \frac{1}{\epsilon} |A|^2 |\nabla f|^2 \right) \\
&= \epsilon \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.1.7) segue que

$$\begin{aligned}
\int_M f^2 |A|^{2q+4} &\leq (1+q)^2 \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 + \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 \\
&\quad + (1+q) \int_M 2f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla |A|) \\
&\leq (1+q)^2 \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 + \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 + \\
&\quad (q+1)\epsilon \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 + \frac{q+1}{\epsilon} \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 \\
&= (1+q)(1+q+\epsilon) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+q}{\epsilon}\right) \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2. \qquad (2.1.12)
\end{aligned}$$

Introduzindo (2.1.12) em (2.1.11) e simplificando temos finalmente que

$$\begin{aligned}
\int_M f^2 |A|^{2q+4} &\leq (1+q)(1+q+\epsilon) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+q}{\epsilon}\right) \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 \\
&\leq (1+q+\epsilon) \left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} \left\{ q \int_M |A|^{2q+4} f^2 + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \right\} \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+q}{\epsilon}\right) \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$B \int_M f^2 |A|^{2q+4} \leq C \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2, \qquad (2.1.13)$$

onde,

$$B = 1 - (1+q+\epsilon) \left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} q;$$

$$C = (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n}+q\right)^{-1} + 1 + \frac{1+q}{\epsilon}.$$

Observe que se $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ temos

$$\frac{(1+q)q}{\left(\frac{2}{n}+q\right)} < 1.$$

Portanto, para todo $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $B > 0$. Para este ϵ obtemos

$$\int_M |A|^{2q+4} f^2 \leq C_1 \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2, \tag{2.1.14}$$

onde $C_1 = C_1(n, q) > 0$ é uma constante.

Agora lembre da desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{\delta^s a^s}{s} + \frac{\delta^{-t} b^t}{t}, \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1,$$

onde $\delta > 0$ é arbitrário e $1 < t, s < +\infty$.

Seja $p \in (0, 2+2q)$ um número a ser determinado. Usando a desigualdede acima temos:

$$\begin{aligned}
|A|^{2q+2}|\nabla f|^2 &= f^2 \left(|A|^{2q+2} \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) \\
&= f^2 \left(|A|^{2q+2-p} |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) \\
&\leq f^2 \left(\frac{\delta^s}{s} |A|^{s(2q+2-p)} + \frac{\delta^{-t}}{t} \left(|A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right)^t \right).
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc}
 & & & & pt & = & 2 \\
2sq & + & 2s & - & ps & = & 4+2q \\
 & & \frac{1}{t} & + & \frac{1}{s} & = & 1
\end{array} \right.$$

obtemos

$$p = \frac{2}{1+q}, \qquad s = \frac{q+1}{q}, \qquad t = 1+q.$$

Usando esses valores e substituindo (2.1.15) em (2.1.14) vem:

$$\int_M |A|^{2q+4} f^2 \leq C_1 \frac{q\delta^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} \int_M |A|^{2q+4} f^2 + C_1 \frac{\delta^{1+q}}{1+q} \int_M |A|^2 \frac{|\nabla f|^{2q+2}}{f^{2q+2}},$$

donde
$$\left(1 - C_1 \frac{q\delta^{\frac{q+1}{q}}}{q+1}\right) \int_M |A|^{2q+4} f^2 \geq C_1 \frac{\delta^{1+q}}{1+q} \int_M |A|^2 \frac{|\nabla f|^{2q+2}}{f^{2q+2}}.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno de maneira que
$$1 - C_1 \frac{q\delta^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} > 0,$$
temos
$$\int_M |A|^{2q+4} f^2 \leq C_2 \int_M |A|^2 \frac{|\nabla f|^{2q+2}}{f^{2q+2}}, \tag{2.1.16}$$
onde C_2 é uma nova constante positiva.

Agora, trocando em (2.1.16) f por f^{1+q} temos finalmente
$$\begin{aligned} \int_M |A|^{2q+4} f^{2q+2} &\leq C_2 \int_M |A|^2 \frac{\left(|\nabla\left(f^{1+q}\right)|^2\right)^{1+q}}{f^{2q(1+q)}} \\ &= C_2(1+q)^{2(1+q)} \int_M |A|^2 \frac{f^{2q(q+1)}|\nabla f|^{2q+2}}{f^{2q(q+1)}} \\ &= C_3 \int_M |A|^2 |\nabla f|^{2q+2}. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Considere a função distância $r(x) = d(x, p_0)$ a partir de um ponto fixo $p_0 \in M$. Fixando números R e $\theta \in (0,1)$, considere $f \in C_0^\infty(M)$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } r(x) \leq \theta R \\ \frac{R - r(x)}{(1-\theta)R}, & \text{se } \theta R \leq r(x) \leq R \\ 0, & \text{se } r(x) \geq R \end{cases}$$

Então, lembrando que $|\nabla r| \leq 1$ e substituindo f em (2.1.17) temos que
$$\begin{aligned} \int_{B_{\theta R}(p_0)} |A|^{2q+4} f^{2q+2} &\leq \int_M |A|^{2q+4} f^{2q+2} \\ &\leq C_3 \int_M |A|^2 |\nabla f|^{2q+2} \\ &= C_3 \frac{\int_{B_R(p_0)} |A|^2}{((1+\theta)R)^{2q+2}}. \end{aligned}$$

Fazendo $R \to +\infty$ temos, por hipótese, que o termo à direita é zero. Logo,
$$\int_M |A|^{2q+4} = 0,$$
o que implica $|A| = 0$, isto é, M é um plano afim.

■

Agora passamos a tratar o caso $\overrightarrow{H}$ é paralelo. Antes observamos que

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \sum_{\alpha,i,j} (\phi_{ij}^\alpha)^2 \\ &= \sum_{\alpha,i,j} (H^\alpha \delta_{ij} - h_{ij}^\alpha)^2 \\ &= \sum_{\alpha,i,j} \left\{ \delta_{ij}(H^\alpha)^2 - 2\delta_{ij} h_{ij}^\alpha H^\alpha + (h_{ij}^\alpha)^2 \right\} \\ &= n\sum_\alpha (H^\alpha)^2 - 2\sum_\alpha \left(H^\alpha \sum_i h_{ii}^\alpha \right) + \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 \\ &= |A|^2 - nH^2. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Teorema 2.2. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ $(n \leq 6)$ uma subvariedade completa, não-compacta, super-estável com vetor curvatura média paralelo e fibrado normal plano. Suponha que*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\int_{B_R(p_0)} |\Phi|^2}{R^{2-\frac{2}{n}}} = 0.$$

Então M é um plano afim.

Demonstração: A demonstração do resultado acima é bastante semelhante à do teorema 2.1. Por essa razão mencionaremos aqui apenas os principais pontos onde o argumento é diferente daquele que usamos acima.

Primeiramente, observe que por (2.1.18) a inequação de super-estabilidade se reescreve como

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 \left\{ |\Phi|^2 + nH^2 \right\}.$$

Procedendo da mesma forma como no teorema 2.1 e levando em conta os termos com H em (2.1.6) obtemos a seguinte expressão:

$$\int_M f^2 |\Phi|^{2q+2} \left\{ A|\Phi|^2 + B|\Phi| + C \right\} \leq D \int_M |\Phi|^{2q+2} |\nabla f|^2,$$

onde

$$A = 1 - (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} q,$$

$$B = (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} (1+q)\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H,$$

$$C = \left(1 + (1 + q + \epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1}(2 + q)\right)nH^2,$$

$$D = (1 + q + \epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} + 1 + \frac{1 + q}{\epsilon}.$$

Agora calculamos.

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC \;=\; & \big\{n^4q^4 + 2n^4(\epsilon + 2)q^3 + n^2(n^2\epsilon^2 + 6n^2\epsilon + 6n^2 - 16n + 16)q^2 \\ & 2n\left[n^3\epsilon^2 + (3n^2 - 8n + 8)n\epsilon + 2(n^3 - 4n^2 - 4n + 8)\right]q \\ & +n(n-2)^2\epsilon^2 + (2n^2(n-2)^2 + 16n - 16n^2)\epsilon \\ & +\left[n^2(n-2)^2\epsilon + 2n(n^3 - 4n^2 - 4n + 8)\epsilon \right. \\ & \left. +n^4 - 4n^3 - 12n^2 + 16\right]\big\}\frac{nH^2}{(n-1)(nq+2)^2}. \end{aligned}$$

Considere os termos sem ϵ entre as chaves:

$$\begin{aligned} g(n,q) \;=\; & n^4q^4 + 4n^4q^3 + n^2(6n^2 - 16n + 16)q^2 \\ & +4n(n^3 - 4n^2 - 4n + 8)q + n^4 - 4n^3 - 12n^2 + 16. \end{aligned}$$

Tomando $q = -\frac{1}{n}$ temos

$$g\left(n, -\frac{1}{n}\right) = (n-1)(n^3 - 7n^2 + 3n - 1).$$

É fácil verificar que $g\left(n, -\frac{1}{n}\right) < 0$ quando $n \leq 6$. Neste caso, podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno al que $B^2 - 4AC < 0$.

Observe que a nossa escolha $q = -\frac{1}{n}$ faz $A > 0$.

Usando a inequação de Young como no teorema 2.1

$$\int_M f^2|\Phi|^{2q+2}\left\{\overline{A}|\Phi|^2 + B|\Phi| + C\right\} \leq D\frac{\delta^{-(1+q)}}{1+q}\int_M \frac{|\Phi|^2|\nabla f|^{2+2q}}{f^{2q}},$$

where $\overline{A} = A - D\frac{q\delta^{\frac{q+1}{q}}}{q+1}$

Escolhendo $\delta > 0$ convenientemente, de forma que $\overline{A} > 0$ e $B^2 - 4\overline{A}C < 0$ podemos reescrever a expressão acima como

$$\int_M f^2|\Phi|^{2+2q} \leq C\int_M \frac{|\Phi|^2|\nabla f|^{2+2q}}{f^{2q}}.$$

onde $C = C(n,q) > 0$ é uma constante.

O restante da demonstração segue exatamente como no caso H=0. Dessa forma, obtemos

$$\int_M |\Phi|^{2q+2} = 0.$$

Concluimos que $|\Phi| = 0$, isto é, M é totalmente umbílica. Como M é não-compacta, por hipótese, temos que M deve ser um plano.

■

2.2 Subvariedades do Espaço Euclidiano com Fibrado Normal Arbitrário

Começamos com um importante lema.

Lema 2.3. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade do espaço euclidiano tal que $\nabla^\perp \overrightarrow{H} = 0$. Neste caso temos que*

$$|\nabla\Phi|^2 - |\nabla|\Phi||^2 \geq \frac{2}{nm}|\nabla|\Phi||^2.$$

Demonstração: Suponha que $|\Phi|(x) \neq 0$. Escolhemos, em uma vizinhança U de $x \in M$, um refencial ortonormal $\{e_A\}$ adaptado à M, tal que

$$\omega_A^B(x) = 0.$$

Temos que

$$\nabla|\Phi|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k} 2\phi_{ij}^\alpha \phi_{ijk}^\alpha \omega^k = \sum_\alpha \left(\sum_{i,j.k} 2\phi_{ij}^\alpha \phi_{ijk}^\alpha \omega^k \right) = \sum_\alpha \nabla|\Phi^\alpha|^2.$$

Daí, usando que $2ab \leq a^2 + b^2$ vem

$$\begin{aligned} |\nabla|\Phi|^2|^2 &= \sum_{\alpha,\beta} \nabla|\Phi^\alpha|^2.\nabla|\Phi^\beta|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(|\nabla|\Phi^\alpha|^2|^2 + |\nabla|\Phi^\beta|^2|^2) \\ &= m\sum_\alpha |\nabla|\Phi^\alpha|^2|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla|\Phi||^2 = \frac{|\nabla|\Phi|^2|^2}{4|\Phi|^2} \leq \frac{m\sum\limits_\alpha |\nabla|\Phi^\alpha|^2|^2}{4\sum\limits_\alpha |\Phi^\alpha|^2}. \tag{2.2.1}$$

Como $|\Phi| \neq 0$, existem índices, digamos γ, k e l tais que $\phi_{kl}^\gamma \neq 0$. Considere o vetor de $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ definido por

$$(\phi_{kl}^1, \ldots, \phi_{kl}^m).$$

É claro que podemos encontrar uma matriz $U \in O(m)$ e $z = (z^1, \ldots, z^m)$ tais que

$$z^\alpha \neq 0 \ \text{ para todo } \ 1 \leq \alpha \leq m,$$

e

$$U_\alpha^\beta \phi_{kl}^\alpha = z^\beta.$$

O novo referencial $\{\tilde{e}_A\}$ definido como

$$\tilde{e}_i = e_i \quad , \quad \tilde{e}_\alpha = U_\alpha^\beta e_\beta,$$

tem as mesmas propriedades do referencial anterior.

De fato, por (1.1.12) temos

$$\nabla \tilde{e}_\alpha = \nabla U_\alpha^\beta e_\beta = dU_\alpha^\beta \otimes e_\beta + U_\alpha^\beta \nabla e_\beta = U_\alpha^\beta \nabla e_\beta = U_\alpha^\beta \omega_\beta^A \otimes e_A,$$

donde conclui-se que $\widetilde{\omega}_A^B(x) = 0$.

Neste novo referencial temos que

$$|\widetilde{\Phi}^\alpha|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (\tilde{\phi}_{ij}^\alpha)^2 \geq (\tilde{\phi}_{kl}^\alpha)^2 > 0.$$

Logo, podemos sempre assumir que $|\Phi^\alpha| \neq 0$ para qualquer α.

Seja $1 \leq \gamma \leq m$ tal que

$$\frac{|\nabla|\Phi^\gamma|^2|^2}{|\Phi^\gamma|^2} = \max_\alpha \left\{ \frac{\nabla|\Phi^\alpha|^2|^2}{|\Phi^\alpha|^2} \right\}.$$

Então, por (2.2.1) vem

$$|\nabla|\Phi|^2|^2 \leq \frac{m|\nabla|\Phi^\gamma|^2|^2}{4|\Phi^\gamma|^2}.$$

Sem perda de generalidade, podemos encontrar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ que diagonaliza A^γ, isto é, $h^\gamma_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
|\nabla|\Phi^\gamma|^2|^2 &= \left|2\sum_{i,j}\phi^\gamma_{ij}\phi^\gamma_{ijk}\omega^k\right|^2 \\
&= 4\sum_k\left(\sum_i \phi^\gamma_{ii}\phi^\gamma_{iik}\right)^2 \\
&\leq 4\sum_k\left(\sum_i(\phi^\gamma_{ii})^2\right)\left(\sum_i(\phi^\gamma_{iik})^2\right) \\
&= 4\sum_i(\phi^\gamma_{ii})^2\sum_{ik}(\phi^\gamma_{iik})^2 \\
&= 4|\Phi^\gamma|^2\sum_{ik}(\phi^\gamma_{iik})^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\nabla|\Phi||^2 &\leq \frac{m|\nabla|\Phi^\gamma|^2|^2}{4|\Phi^\gamma|^2} \\
&= m\sum_{i,k}(\phi^\gamma_{iik})^2 \\
&= m\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^\gamma_{iik})^2 + m\sum_i(\phi^\gamma_{iii})^2. \qquad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Como $\sum_i \phi^\gamma_{ii} = 0$, temos que

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi^\gamma_{jji} + \phi^\gamma_{iii} = 0.$$

Daí

$$\left(\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi^\gamma_{jji}\right)^2 = (\phi^\gamma_{iii})^2. \qquad (2.2.3)$$

Substituindo em (2.2.2) vem

$$\begin{aligned}
|\nabla|\Phi||^2 &= m\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^{\gamma}_{iik})^2 + m\sum_{i}(\phi^{\gamma}_{iii})^2\\
&= m\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^{\gamma}_{iik})^2 + m\sum_{i}\left(\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}\phi^{\gamma}_{jji}\right)^2\\
&\leq m\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^{\gamma}_{iik})^2 + m\sum_{i}\left(\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}1\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}(\phi^{\gamma}_{jji})^2\right)\\
&= m\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^{\gamma}_{iik})^2 + (n-1)m\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{jji})^2\\
&= nm\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}(\phi^{\gamma}_{iik})^2.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\sum_{\alpha,i\neq k}(\phi^{\alpha}_{iik})^2 \geq \frac{1}{nm}|\nabla|\Phi||^2. \tag{2.2.4}$$

Neste referencial temos que

$$|\nabla|\Phi|^2|^2 = \left|2\sum_{\alpha,i,j}\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\omega^k\right|^2 = 4\sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk},$$

isto é,

$$|\nabla|\Phi||^2 = \frac{|\nabla|\Phi|^2|^2}{4|\Phi|^2} = \frac{\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk}}{\displaystyle\sum_{\beta,s,t}\left(\phi^{\beta}_{st}\right)^2}.$$

Dessa forma, pela equação de Codazzi (1.1.15) obtemos

$$
\begin{aligned}
|\nabla|\Phi||^2 - |\nabla|\Phi|^2|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(\phi^{\alpha}_{ijk}\right)^2 - \frac{\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk}}{\displaystyle\sum_{\beta,s,t}\left(\phi^{\beta}_{st}\right)^2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\beta,s,t}(\phi^{\beta}_{st})^2\sum_{\alpha,i,j,k}(\phi^{\alpha}_{ijk})^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk}}{|\Phi|^2}\\
&= \frac{\displaystyle 2\sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\left\{(\phi^{\beta}_{st})^2(\phi^{\alpha}_{ijk})^2 - \phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk}\right\}}{2|\Phi|^2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\alpha\beta,i,j,s,t,k}\left\{(\phi^{\beta}_{st})^2(\phi^{\alpha}_{ijk})^2 + (\phi^{\alpha}_{ij})^2(\phi^{\beta}_{stk})^2 - 2\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\alpha}_{ijk}\phi^{\beta}_{st}\phi^{\beta}_{stk}\right\}}{2|\Phi|^2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,i,j,s,t,k}\left(\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\beta}_{stk} - \phi^{\beta}_{st}\phi^{\alpha}_{ijk}\right)^2}{2|\Phi|^2}\\
&\geq \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\alpha,i,j,k,s,t\\ s\neq t}}\left(\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\gamma}_{stk} - \phi^{\gamma}_{st}\phi^{\alpha}_{ijk}\right)^2 + \sum_{\substack{\beta,i,j,k,s,t\\ i\neq j}}\left(\phi^{\gamma}_{ij}\phi^{\beta}_{stk} - \phi^{\beta}_{st}\phi^{\gamma}_{ijk}\right)^2}{2|\Phi|^2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\alpha,i,j,k,s,t\\ s\neq t}}(\phi^{\alpha}_{ij}\phi^{\gamma}_{stk})^2 + \sum_{\substack{\beta,i,j,k,s,t\\ i\neq j}}(\phi^{\beta}_{st}\phi^{\gamma}_{ijk})^2}{2|\Phi|^2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\alpha,i,j}(\phi^{\alpha}_{ij})^2\sum_{\substack{s,t,k\\ s\neq t}}(\phi^{\gamma}_{stk})^2 + \sum_{\beta,s,t}(\phi^{\beta}_{st})^2\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{ijk})^2}{2|\Phi|^2}\\
&= \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{ijk})^2\\
&= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{iji})^2 + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{ijj})^2 + \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\\ k\neq j}}(\phi^{\gamma}_{ijk})^2\\
&\geq 2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\phi^{\gamma}_{iij})^2. \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2.2.4) em (2.2.5) obtemos finalmente

$$|\nabla\Phi|^2 - |\nabla|\Phi||^2 \geq \frac{2}{nm}|\nabla|\Phi||^2.$$

Pela arbitrariedade de $x \in M$ concluimos o afirmado.

■

Em [33], Simons provou a seguinte estimativa para subvariedades mínimas do espaço euclidiano

$$\Delta|A|^2 \geq -3|A|^2 + 2|\nabla A|^2.$$

Pelo lema 2.3 obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\Delta|A|^2 &= 2|A|\Delta|A| + 2|\nabla|A||^2 \\ &\geq 2\left(\frac{2}{nm}+1\right) - 3|A|^4.\end{aligned}$$

donde

$$|A|\triangle|A| \geq \frac{2}{nm}|\nabla|A||^2 - \frac{3}{2}|A|^4. \qquad (2.2.6)$$

Agora enunciamos nosso resultado

Teorema 2.3. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade completa e mínima do espaço euclidiano. Suponha que valha em M a seguinte desigualdade.*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq k \int_M f^2|A|^2, \qquad \forall f \in C_0^\infty(M), \qquad (2.2.7)$$

onde $k > \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{mn}\right)$. Se

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\int_{B_R(p_0)}|A|^2}{R^{2+2q}} = 0, \qquad q < \frac{2k-3+\sqrt{4k^2 - k\left(6 - \frac{12}{mn}\right)}}{3}$$

Então M é um plano afim.

Demonstração: Introduzindo $f|A|^{1+q}$ na inequação (2.2.7) temos que

$$\begin{aligned}k\int_M f^2|A|^{4+2q} &\leq \int_M |\nabla(f|A|^{1+q})|^2 \\ &= (1+q)^2\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2 f^2 + \int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2 \\ &\quad +2(1+q)\int_M f|A|^{2q+1}g(\nabla f, \nabla|A|) \qquad (2.2.8)\end{aligned}$$

Multiplicando (2.2.6) por $|A|^{2q}f^2$ e integrando em M, vem:

$$\frac{2}{nm}\int_M |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 \leq \int_M |A|^{2q+1}f^2\triangle|A| + \frac{3}{2}\int_M |A|^{2q+4}f^2.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{2q+1} f^2 \triangle |A| &= -\int_M g(\nabla\left(|A|^{2q+1} f^2\right), \nabla|A|)\\ &= -(2q+1)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla|A||^2\\ &\quad -2\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla|A|).\end{aligned}$$

temos, após multiplicação por $(1+q)$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}(1+q)\left(\frac{2}{nm}+2q+1\right)\int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla|A||^2 &\leq \frac{3}{2}(1+q)\int_M |A|^{2q+4} f^2 \\ &\quad -2(1+q)\int_M f|A|^{2q+1} g(\nabla f, \nabla|A|).\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Agora, somando (2.2.8) e (2.2.9) e simplificando vem:

$$\begin{aligned}(1+q)\left(\frac{2}{nm}+q\right)\int_m |A|^{2q} f^2 |\nabla|A||^2 &\leq \left(\frac{3}{2}(q+1)-k\right)\int_M |A|^{2q+4} f^2 \\ &\quad +\int_M |A|^{2+2q}|\nabla f|^2.\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Considere o termo $\int_M 2|A|^{2q+1} f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle$ em (2.2.8). Usando que

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}, \quad \forall\epsilon > 0$$

com $a = f|\nabla|A||$ e $b = |A||\nabla f|$, obtem-se facilmente que a inequação (2.2.8) se reescreve como

$$k\int_M f^2|A|^{2q+4} \leq (1+q)(1+q+\epsilon)\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2 f^2 + \left(1+\frac{1+q}{\epsilon}\right)\int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2. \tag{2.2.11}$$

Introduzindo (2.2.10) em (2.2.11) e simplificando temos finalmente que

$$B\int_M f^2|A|^{2q+4} \leq C\int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2, \tag{2.2.12}$$

onde,

$$B = k - (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{nm}+q\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}(q+1)-k\right)$$

$$C = (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{nm}+q\right)^{-1} + 1 + \frac{1+q}{\epsilon}.$$

A parte sem ϵ de B é dada por

$$p(q) = \frac{-3nmq^2 + (4knm - 6nm)q + 4k + 2mnk - 3mn}{2+qnm}.$$

A condição $p > 0$ implica

$$q < \frac{2k - 3 + \sqrt{4k^2 - k\left(6 - \frac{12}{mn}\right)}}{3},$$

e a hipótese $k > \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{nm}\right)$ garante que a parte sob a raiz é positiva.

Neste caso, podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que (2.2.12) se reescreve como

$$\int_M f^2|A|^{2q+4} \leq C_1 \int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2,$$

onde C_1 é uma constante positiva

O restante da demosntração segue exatamente como a do teorema 2.1

■

Como no caso de hipersuperfícies, podemos definir a noção de aplicação de Gauss para subvariedades do espaço Euclidiano. Nese caso temos uma aplicação $\gamma : M \to G_{n,m}$, onde $G_{n,m}$ é a grassmanniana de m-planos orientados em $\mathbb{R}^{n+m}$. A partir da aplicação γ, Xin [39] provou que sob certa condição geométrica, vale uma desigualdade tipo-Sobolev como (2.2.7) em M. Explicitamente temos a

Proposição 2.1 (Xin [39])**.** *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade mínima do espaço euclidiano. Se a imagem da aplicação de Gauss $\gamma(M)$ está contida em uma bola geodésica de raio $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ em $G_{n,m}$, então temos*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq 2\int_M f^2|A|^2,$$

para toda função $f \in C_0^\infty(M)$.

Portanto, a proposição acima dá um significado geométrico bastante interessante para nosso resultado.

Observação 2.4. *Escolhendo $k = \frac{3}{2}$ no teorema 2.3, verificamos que*

$$\frac{2k - 3 + \sqrt{4k^2 - k\left(6 - \frac{12}{mn}\right)}}{3} = \sqrt{\frac{2}{nm}}.$$

Em particular, quando $m = 1$ reobtemos o resultado de do Carmo-Peng [9].

Agora estudaremos o caso de subvariedades com curvatura média constante. Como mencionamos anteriormente, nossa abordagem será um pouco diferente daquela que vinhamos adotando até o presente momento. Antes introduzimos alguma notação.

Seja Δ o laplaciano de funções em uma variedade riemanianna completa e $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor de Δ, definido por

$$\lambda_1(M) = \inf_i \lambda_1(\Omega_i),$$

onde $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma exaustão compacta de M e $\lambda_1(\Omega_i)$ é o primeiro autovalor de Dirichlet de Δ em Ω_i.

Além disso, se $B_R(x)$ é a bola geodésica de raio R, dizemos que M tem crescimento de volume polinomial se

$$V_x(R) := \mathrm{Vol}\,(B_R(x)) \leq CR^k, \qquad k \geq 0.$$

Feitas essas considerações, podemos enunciar o seguinte

Teorema 2.4 (Cheng e Yau). *Seja M uma variedade riemanniana completa não-compacta. Se M tem crescimento de volume polinomial, então $\lambda_1(M) = 0$.*

Demonstração: Veja [14]

■

Esses são os igredientes necessários para provarmos nosso resultado.

Teorema 2.5. *Seja $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ uma subvariedade completa não-compacta com curvatura média constante H em uma variedade riemanniana N. Suponha que existem $\epsilon > 0, a > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \epsilon \int_M f^2 |A|^a, \qquad \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{2.2.13}$$

Então, se

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |A|^b}{R^l} = 0, \qquad l > 0,$$

temos que $H = 0$, isto é, M é mínima.

Demonstração: Usando que

$$\sum_{p=1}^{n} a_p^2 \geq \frac{\left(\sum_{p=1}^{n} a_p\right)^2}{n}, \tag{2.2.14}$$

temos

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 \\ &\geq \sum_{\alpha,i} (h_{ii}^\alpha)^2 \\ &\geq \sum_{\alpha} \frac{(\sum_i h_{ii}^\alpha)^2}{n} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{(\sum_i nH^\alpha)^2}{n} \\ &= n\sum_{\alpha} (H^\alpha)^2 = nH^2. \end{aligned}$$

Suponha que $H \neq 0$. Neste caso

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R\to+\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |A|^b}{R^l} \\ &\geq (nH)^{\frac{b}{2}} \lim_{R\to+\infty} \frac{\int_{B_R(x)} 1}{R^l} \\ &= (nH)^{\frac{b}{2}} \lim_{R\to+\infty} \frac{V_x(R)}{R^l}, \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{V_x(R)}{R^l} = 0.$$

Logo, o volume de M tem crescimento polinomial. Pelo teorema 2.4 concluimos que $\lambda_1(M) = 0$.

Por (2.2.13) temos que

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \epsilon \int_M f^2 |A|^a \geq \epsilon (nH)^{\frac{a}{2}} \int_M f^2, \qquad \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Daí

$$\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} \geq \epsilon (nH)^{\frac{a}{2}}, \qquad \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{2.2.15}$$

Usando a caracterização variacional do primeiro autovalor e (2.2.15) concluimos que

$$0 = \lambda_1(M) = \inf_{f \in C_0^\infty(M)} \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} \geq \epsilon(nH)^{\frac{a}{2}} > 0$$

Portanto, devemos ter $H = 0$ o que prova o afirmado.

■

Como corolário desse último teorema, obtemos uma interessante generalização do teorema de do Carmo-Zhou (0.6) para o caso de curvatura média constante.

Corolário 2.1. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade completa do espaço euclidiano com curvatura média constante H. Suponha que valha em M a seguinte desigualdade.*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq k \int_M f^2 |A|^2, \qquad \forall f \in C_0^\infty(M), \tag{2.2.16}$$

onde $k > \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{mn}\right)$. Se

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |A|^2}{R^{2+2q}} = 0, \qquad q \in \left(-1, \frac{2k - 3 + \sqrt{4k^2 - k\left(6 - \frac{12}{mn}\right)}}{3}\right)$$

Então M é um plano afim.

Demonstração: Pelo teorema 2.5 devemos ter $H = 0$ e o resultado segue pelo teorema 2.3.

■

A partir das técnicas utilizadas até o presente momento, provamos dois novos resultados. Começamos com um teorema para hipersuperfícies do espaço hiperbólico.

Teorema 2.6. *Seja $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma subvariedade completa e mínima do espaço hiperbólico. Suponha que*

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\int_{B_R(x)} |A|^2}{R^{2q+2}} = 0, \qquad , q < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Se vale em M a seguinte desigualdade

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 \left(|A|^2 + \alpha\right), \qquad \forall f \in C_0^\infty(M), \tag{2.2.17}$$

onde $\alpha > \frac{n^2(q+1)^2}{2+2nq+n}$. Então M é uma hipersuperfície totalmente geodésica.

Demonstração: Neste caso, vale a seguinte desigualdade [33]

$$|A|\triangle|\Phi| + |A|^4 + n|A|^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2. \tag{2.2.18}$$

Introduzindo $f|A|^{1+q}$ na inequação (2.2.17) temos que

$$\begin{aligned}\int_M f^2|A|^{4+2q} + \alpha\int_M f^2|A|^{2+2q} &\leq \int_M |\nabla(f|A|^{1+q})|^2 \\ &= (1+q)^2\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2 f^2 + \int_M |A|^{2q+2}|\nabla f|^2 \\ &\quad +2(1+q)\int_M |A|^{2q+1}f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle. \end{aligned}\tag{2.2.19}$$

Multiplicando (2.2.18) por $|A|^{2q}f^2$ e integrando em M vem:

$$\frac{2}{n}\int_M |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 \leq n\int_M f^2|A|^{2q+2} + \int_M |A|^{2q+1}f^2\triangle|A| + \int_M |A|^{2q+4}f^2.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{2q+1}f^2\triangle|A| &= -\int_M \langle\nabla\left(|A|^{2q+1}f^2\right), \nabla|A|\rangle \\ &= -(2q+1)\int_M |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 - 2\int_M |A|^{2q+1}f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle,\end{aligned}$$

temos, após multiplicação por $(1+q)$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}(1+q)\left(\frac{2}{n} + 2q + 1\right)\int_M |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 &\leq -2(1+q)\int_M |A|^{2q+1}f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle \\ &\quad +(1+q)\int_M |A|^{2q+4}f^2 \\ &\quad +n(q+1)\int_M f^2|A|^{2q+2}. \end{aligned}\tag{2.2.20}$$

Agora, somando (2.2.19) e (2.2.20) e simplificando vem:

$$\begin{aligned}(1+q)\left(\frac{2}{n} + q\right)\int_m |A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 &\leq q\int_M |A|^{2q+4}f^2 + \int_M |A|^{2+2q}|\nabla f|^2 \\ &\quad + (n(q+1) - \alpha)\int_M |A|^{2q+2}f^2. \end{aligned}\tag{2.2.21}$$

Considere o termo $\int_M 2|A|^{2q+1}f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle$ em (2.2.19). Usando que

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}, \quad \forall\epsilon > 0$$

com $a = f|\nabla|A|$ e $b = |A||\nabla f|$, obtem-se facilmente que a inequação de super-estabilidade (2.2.19) se reescreve como

$$\begin{aligned} \alpha \int_M |A|^{2q+2} f^2 + \int_M f^2 |A|^{2q+4} \ \leq \ & (1+q)(1+q+\epsilon) \int_M |A|^{2q} |\nabla|A||^2 f^2 \\ & + \left(1 + \frac{1+q}{\epsilon}\right) \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Introduzindo (2.2.21) em (2.2.22) e simplificando temos finalmente que

$$\int_M f^2 |A|^{2q+2} \left\{ B|A|^2 + C \right\} \leq D \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2, \tag{2.2.23}$$

onde,

$$B = 1 - (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} q;$$

$$C = \alpha - (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} (n(q+1) - \alpha);$$

$$D = (1+q+\epsilon)\left(\frac{2}{n} + q\right)^{-1} + 1 + \frac{1+q}{\epsilon}.$$

Tomando $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ verifica-se facilmente que

$$\frac{(q+1)q}{\frac{2}{n} + q} < 1. \tag{2.2.24}$$

Agora, observe que a parte sem ϵ em C é dada por

$$p(\alpha) = \alpha - \frac{(1+q)(n(1+q) - \alpha)}{\left(\frac{2}{n} + q\right)}. \tag{2.2.25}$$

e que a condição $\alpha > \frac{n^2(q+1)^2}{2+2nq+n}$ implica $p(\alpha) > 0$.

Portanto, nas condições acima, podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que (2.2.23) se reescreve como

$$\int_M |A|^{2q+2} f^2 \leq C_1 \int_M |A|^{2q+2} |\nabla f|^2, \tag{2.2.26}$$

onde C_1 e uma constante positiva.

O restante segue exatamente como nos casos tratados anteriormente.

■

Passamos agora para uma segunda aplicação. Estudamos o caso de uma subvariedade tipo-espaço em uma variedade pseudo-riemanniana com curvatura constante. Mais precisamente temos o seguinte.

Considere $N_m^{n+m}(c)$, uma variedade pseudo-riemanniana com curvatura constante c e índice m. Sejam ainda $M^n \subset N_m^{n+m}(c)$ uma subvariedade tipo-espaço, $\{e_A\}$ um referencial lorentziano ortonormal adaptado à M e $\{\omega^A\}$ o corefencial associado.

Neste caso a métrica de N_m^{n+m} é dada por

$$ds_N^2 = \sum_A \epsilon_A \omega^A,$$

onde convencionamos que $\epsilon_i = 1$ e $\epsilon_\alpha = -1$.

Temos ainda que as equações de estrutura de N_m^{n+m} são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\omega^A & = & \epsilon_B \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad \omega_A^B = -\omega_B^A \\ d\omega_A^B & = & \epsilon_E \omega_A^E \wedge \omega_E^B - \frac{1}{2}\epsilon_C \epsilon_D R_{ACD}^B \omega^C \wedge \omega^D \\ R_{ACD}^B & = & c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{CB}). \end{array} \right. \tag{2.2.27}$$

A métrica *riemanniana* induzida em M é dada por $ds_M^2 = \sum_i (\omega^i)^2$. Como $\omega^\alpha|_M = 0$, pelo teorema de Cartan, segue que $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$, onde $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$. A segunda forma fundamental de M é o tensor misto definido como

$$A = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha.$$

Analogamente ao caso riemanniano, definimos a curvatura média de M como

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\left(\sum_i h_{ii}^\alpha\right) e_\alpha = H^\alpha e_\alpha. \tag{2.2.28}$$

Seja

$$S^2 = \sum_{\alpha,i,j} \left(h_{ij}^\alpha\right)^2.$$

Neste caso verificamos facilmente que

$$\begin{aligned} S^2 = \sum_{\alpha} (S^{\alpha})^2 &= \sum_{\alpha} \sum_{i} \left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2 \\ &\geq \sum_{\alpha} \sum_{i} (h_{ii}^{\alpha})^2 \\ &\geq \sum_{\alpha} \frac{\left(\sum_i (h_{ii}^{\alpha}\right)^2}{n} \\ &= n \sum_{\alpha} (H^{\alpha})^2 = nH^2. \end{aligned}$$

A partir das notações estabelecidas acima, podemos enunciar o seguinte teorema, provado por Ishihara.

Teorema 2.7. *Seja M uma subvariedade tipo-espaço isometricamente imersa em $N_m^{n+m}(c)$. Se $H = 0$ então a imersão é totalmente geodésica e M é uma forma espacial de curvatura c.*

Demonstração: Veja [21]

∎

Repetindo a demonstração do teorema 2.5 e combinando com o teorema acima, podemos obter o seguinte resultado para o caso de subvariedades com curvatura média constante.

Corolário 2.2. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}_m^{n+m}$ uma subvariedade tipo-espaço, completa, com curvatura média constante H. Suponha que existe um $\epsilon > 0$ tal que*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \epsilon \int_M f^2 S^2, \qquad \forall f \in C_0^{\infty}(M)$$

Se

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\int_{B_R(x)} S^2}{R^l} = 0, \qquad l > 0,$$

então $|A| = 0$, isto é, M é um plano afim.

Capítulo 3

A Estrutura de Subvariedades Super-Estáveis com Curvatura Média Constante

Neste capítulo estudamos a estrutura de subvariedades super-estáveis com curvatura média constante segundo a sua parabolicidade ou não-parabolicidade de seus fins. Os resultados do presente capítulo seguem as idéias de [40], generalizando os resultados obtidos pelos seus autores para codimensões arbitrárias.

3.1 Caso Não-Parabólico

Nesta seção trataremos apenas o caso de variedades não-parabólicas. Inicialmente provamos algumas estimativas para a curvatura de M. Vale recordar que seguiremos neste capítulo as mesmas notações estabelecidas nas preliminares desse trabalho.

Proposição 3.1. *Seja $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade completa do espaço euclidiano com cuvatura média constante H. Se $\{e_A\}$ é um referencial ortonormal adaptado à M, considere a família de operadores de traço nulo $\Phi^\alpha = A^\alpha - H^\alpha Id$. Nessas condições temos que*

$$Ric_M(e_n) \geq (n-1)H^2 - (n-2)H|\Phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \frac{n-1}{n}|\Phi|^2$$

Demonstração: Seja $\{e_A\}$ um referencial ortonormal adaptado à M. Então, pela equação de Gauss (1.1.9) temos que

$$\mathrm{K}_M(e_n, e_i) = R^i_{nin} = \sum_\alpha \left\{ h^\alpha_{nn} h^\alpha_{ii} - (h^\alpha_{in})^2 \right\},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(e_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{K}_M(e_i, e_n) \\
&= \sum_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} h^\alpha_{nn} h^\alpha_{ii} - (h^\alpha_{in})^2 \right\} \\
&= \sum_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} h^\alpha_{nn} h^\alpha_{ii} - (h^\alpha_{in})^2 + (h^\alpha_{nn})^2 - (h^\alpha_{nn})^2 \right\} \\
&= \sum_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{n} h^\alpha_{nn} h^\alpha_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} (h^\alpha_{in})^2 - (h^\alpha_{nn})^2 \right\} \\
&= \sum_\alpha \left\{ n h^\alpha_{nn} H^\alpha - (\sum_{i=1}^{n} h^\alpha_{in})^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, devemos apenas estimar $\sum_\alpha \left\{ n h^\alpha_{nn} H^\alpha - (\sum_{i=1}^{n} h^\alpha_{in})^2 \right\}$.

Observe que

$$\sum_i \phi_{ii} = 0,$$

Daí, usando (2.2.14) vem que

$$(\phi^\alpha_{nn})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \phi^\alpha_{ii} \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{ii})^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\Phi^\alpha|^2 = \sum_{i,j} (\phi^\alpha_{ij})^2 &\geq (\phi^\alpha_{nn})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{ii})^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{in})^2 \\
&\geq (\phi^\alpha_{nn})^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \phi^\alpha_{ii} \right)^2}{n-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{in})^2 \\
&= (\phi^\alpha_{nn})^2 + \frac{(\phi^\alpha_{nn})^2}{n-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{in})^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1} \left\{ (\phi^\alpha_{nn})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\phi^\alpha_{in})^2 \right\}, \qquad (3.1.1)
\end{aligned}$$

pois,

$$\min\left\{\frac{n}{n-1}, 2\right\} = \frac{n}{n-1}$$

A partir de (3.1.1) concluimos que

$$\frac{n-1}{n}|\Phi^\alpha|^2 \geq (\phi^\alpha_{nn})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\phi^\alpha_{in})^2 \geq (\phi^\alpha_{nn})^2,$$

donde,

$$|\phi^\alpha_{nn}| \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi^\alpha|. \tag{3.1.2}$$

Observando que

$$\phi^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ij} \text{ se } i \neq j$$

e

$$\phi^\alpha_{ii} = h^\alpha_{ii} + H^\alpha,$$

de (3.1.1) e (3.1.2) obtemos,

$$\begin{aligned} nh^\alpha_{nn}H^\alpha - \sum_{i=1}^{n}(h^\alpha_{ni})^2 &= n\phi^\alpha_{nn}H^\alpha + n(H^\alpha)^2 - (\phi^\alpha_{nn})^2 - 2\phi^\alpha_{nn}H^\alpha - (H^\alpha)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(\phi^\alpha_{ni})^2 \\ &= (n-1)(H^\alpha)^2 + (n-2)\phi^\alpha_{nn}H^\alpha - \left\{(\phi^\alpha_{nn})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\phi^\alpha_{ni})^2\right\} \\ &\geq (n-1)(H^\alpha)^2 + (n-2)\phi^\alpha_{nn}H^\alpha - \frac{n-1}{n}|\Phi^\alpha|^2 \\ &\geq (n-1)(H^\alpha)^2 - (n-2)\phi^\alpha_{nn}|H^\alpha| - \frac{n-1}{n}|\Phi^\alpha|^2 \\ &\geq (n-1)(H^\alpha)^2 - (n-2)|\Phi^\alpha|^2|H^\alpha|\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ &\quad -\frac{n-1}{n}|\Phi^\alpha|^2. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Agora, escolhendo um referencial tal que

$$e_{n+1} = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|},$$

por (3.1.3) temos

$$\begin{aligned} \sum_\alpha\left\{nh^\alpha_{nn}H^\alpha - (\sum_{i=1}^{n}h^\alpha_{in})^2\right\} &= nh^\alpha_{nn}H^{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(h^{n+1}_{in})^2 - \sum_{\alpha=n+2}^{n+m}\sum_{i=1}^{n}(h^\alpha_{in})^2 \\ &\geq (n-1)H^2 - \frac{n-1}{n}|\Phi^{n+1}|^2 - \sum_{\alpha=n+2}^{n+m}\sum_{i=1}^{n}(h^\alpha_{in})^2 \\ &\quad -(n-2)|\Phi^{n+1}|^2H\sqrt{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Neste referencial temos que $H^\alpha = 0$ para $\alpha = n+2, ..., n+m$. Logo, por (3.1.1) vem

$$\sum_{i=1}^{n}(h_{in}^\alpha)^2 \leq \frac{n-1}{n}|\Phi^\alpha|^2 \quad , \alpha = n+2, ..., n+m. \tag{3.1.5}$$

Além disso, certamente temos

$$|\Phi|^2 = \sum_\alpha |\Phi^\alpha|^2 \geq |\Phi^{n+1}|^2. \tag{3.1.6}$$

Substituindo (3.1.5) e (3.1.6) em (3.1.4) conclumos

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \left\{ n h_{nn}^\alpha H^\alpha - (\sum_{i=1}^{n} h_{in}^\alpha)^2 \right\} \quad &\geq \quad (n-1)H^2 - \frac{n-1}{n}|\Phi^{n+1}|^2 - \frac{n-1}{n}\sum_{\alpha=n+2}^{n+m}|\Phi^\alpha|^2 \\
&\qquad -(n-2)|\Phi|^2 H\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\
&= \quad (n-1)H^2 - (n-2)|\Phi|^2 H\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\
&\qquad -\frac{n-1}{n}|\Phi|^2.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

■

Observação 3.1. *Veja que poderiamos ter enunciado este lema de uma forma puramente algébrica; a desigualdade (3.1.7) é válida para qualquer família de matrizes com as propriedades mencionadas . Preferimos escrever o lema como feito acima no intuito de dar um significado mais geométrico para os nossos cálculos.*

Corolário 3.1. *Nas condições do lema anterior*

$$|A|^2 + \sum_\alpha \left(nH^\alpha h_{nn}^\alpha - \sum_{i=1}^{n}(h_{in}^\alpha)^2 \right) \geq \frac{n^2(5-n)H^2}{4}.$$

Se n=2, vale a igualdade se, e somente se, M é totalmente umbílica:

Demonstração: Lembre que conforme (2.1.18) temos

$$|A|^2 = |\Phi|^2 + nH^2.$$

Portanto, pelo lema anterior

$$
\begin{aligned}
|A|^2 + \sum_\alpha \left(nH\alpha h^\alpha_{nn} - \sum_{i=1}^n (h^\alpha_{in})^2 \right) &\geq \frac{|\Phi|^2}{n} + (2n-1)H^2 - (n-2)|\Phi|^2 H \sqrt{\frac{n-1}{n}} \\
&= \left(\frac{|\Phi|^2}{\sqrt{n}} - \frac{(n-2)\sqrt{n-1}}{2} H \right)^2 + \frac{n^2(5-n)}{4} H^2 \\
&\geq \frac{n^2(5-n)}{4} H^2. \qquad (3.1.8)
\end{aligned}
$$

Agora, quando vale a igualdade em (3.1.8), devemos ter

$$
\frac{|\Phi|}{\sqrt{n}} - \frac{(n-2)\sqrt{n-1}}{2} H = 0.
$$

Se $n = 2$, cloncluimos que $|\Phi| = 0$.

Reciprocamente, se $A^\alpha = H^\alpha Id$, obtemos a igualdade em (3.1.8).

■

Lema 3.1. *Seja M^n uma subvariedade com curvatura média constante em N^{n+d}. Suponha que $u : M \to R$ é uma função harmônica em M. Se $\varphi \in C_0^\infty(M)$ é tal que $\varphi|\nabla u|$ satisfaz a inequação de super-estabilidade (1.1.19), então*

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla \varphi|^2 |\nabla u|^2 \geq & \int_M \varphi |\nabla u| \left\{ \frac{1}{n}|\Phi|^2 - \sqrt{\frac{n-1}{n}}(n-2)H|\Phi| + (2n-1)H^2 + \right. \\
& \left. + Ric_N\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \left[Ric_N(e_\alpha) - K_N\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, e_\alpha\right)\right] \right\} \\
& + \int_M \frac{1}{n-1} \varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Começamos lembrando a fórmula de Bochner para funções harmônicas, provada pela primeira vez por Yau [42].

$$
\triangle |\nabla u|^2 \geq \mathrm{Ric}_M(\nabla u) + \frac{n}{2(n-1)} \frac{|\nabla |\nabla u|^2|^2}{|\nabla u|^2}. \qquad (3.1.9)
$$

Como $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ temos

$$
|\nabla |\nabla u|^2|^2 = 4|\nabla u|^2 |\nabla |\nabla u||^2.
$$

Substituindo em (3.1.9) vem

$$\triangle|\nabla u|^2 \geq \mathrm{Ric}_M(\nabla u) + \frac{2n}{(n-1)}|\nabla|\nabla u||^2|\nabla u|^2.$$

Utilizando a identidade

$$\frac{1}{2}\triangle|\nabla u|^2 = |\nabla u|\triangle|\nabla u| + |\nabla|\nabla u||^2,$$

obtemos finalmente que

$$|\nabla u|\triangle|\nabla u| \geq \mathrm{Ric}_M(\nabla u) + \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2. \tag{3.1.10}$$

Agora, seja $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Substituindo $f = \varphi|\nabla u|$ na inequação de super-estabilidade, pelo teorema da divergência e pela equação (3.1.10) vemos que

$$\begin{aligned}
\int_M \varphi^2|\nabla u|^2\left(|\Phi|^2 + \sum_\alpha \mathrm{Ric}_N(e_\alpha) + nH^2\right) &\leq \int_M |\nabla(\varphi|\nabla u|)|^2 \\
&= \int_M \left\{|\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 + 2\langle\nabla\varphi|\nabla u|, \varphi\nabla|\nabla u|\rangle\right. \\
&\qquad \left. + \varphi^2|\nabla|\nabla u||\right\} \\
&= \int_M \left\{|\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 - \varphi^2|\nabla u|\triangle|\nabla u|\right\} \\
&\leq \int_M \left\{|\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 - \frac{1}{n-1}\varphi^2|\nabla|\nabla u||^2\right. \\
&\qquad \left. -\varphi^2|\nabla u|^2\mathrm{Ric}_M\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right\}. \qquad (3.1.11)
\end{aligned}$$

Pela fórmula de Gauss temos que

$$K_M(e_1, e_i) - K_N(e_1, e_i) = \sum_\alpha \left\{h_{11}^\alpha h_{ii}^\alpha - (h_{1i}^\alpha)^2\right\}$$

Calculamos.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(e_1) &= \sum_{i=2}^n K_N(e_1, e_i) + \sum_\alpha \left\{\sum_{i=2}^n \left[h_{11}^\alpha h_{ii}^\alpha - (h_{1i}^\alpha)^2\right]\right\} \\
&= \mathrm{Ric}_N(e_1) - \sum_\alpha K_N(e_1, e_\alpha) + \sum_\alpha \left\{h_{11}^\alpha \sum_{i=2}^n h_{ii}^\alpha - \sum_{i=2}^n (h_{1i}^\alpha)^2\right\} \\
&= \mathrm{Ric}_N(e_1) - \sum_\alpha K_N(e_1, e_\alpha) + \sum_\alpha \left\{h_{11}^\alpha\left(nH^\alpha - h_{11}^\alpha\right) - \sum_{i=2}^n (h_{1i}^\alpha)^2\right\} \\
&= \mathrm{Ric}_N(e_1) - \sum_\alpha K_N(e_1, e_\alpha) + \sum_\alpha \left\{nh_{11}^\alpha H^\alpha - \sum_{i=1}^n (h_{1i}^\alpha)^2\right\}. \qquad (3.1.12)
\end{aligned}$$

Agora, escolhemos um referencial tal que $e_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Substituindo (3.1.12) em (3.1.11) temos

$$\begin{aligned}\int_M \varphi^2|\nabla u|^2\left(|\Phi|^2+\sum_\alpha \mathrm{Ric}_N(e_\alpha)+nH^2\right) &\leq \int_M |\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 - \frac{1}{n-1}\int_M \varphi^2|\nabla|\nabla u|^2\\ &-\int_M \varphi^2|\nabla u|^2\left\{\mathrm{Ric}_N(e_1)-\sum_\alpha K_N(e_1,e_\alpha)\right.\\ &\left.+\sum_\alpha\left(nh_{11}^\alpha H^\alpha+\sum_i (h_{1i}^\alpha)^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

Finalmente, pela proposição 3.1

$$\begin{aligned}\int_M \left(|\Phi|^2+\sum_\alpha \mathrm{Ric}_N(e_\alpha)+nH^2\right)\varphi|\nabla u|^2 &\leq \int_M |\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 - \frac{1}{n-1}\int_M \varphi^2|\nabla|\nabla u|^2 +\\ &-\int_M \varphi^2|\nabla u|^2\left\{\mathrm{Ric}_N(e_1)-\sum_\alpha K_N(e_1,e_\alpha)\right.\\ &+(n-1)H^2-\frac{n-1}{n}|\Phi|^2\\ &\left.-(n-2)|\Phi|^2H\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right\},\end{aligned}$$

donde conclui-se o desejado.

■

Provaremos agora um resultado clássico.

Lema 3.2. *Sejam N^{n+m} uma variedade completa, simplesmente conexa com curvatura seccional não-positiva e $M^n \subset N^m$ uma subvariedade completa e mínima. Se $n \geq 3$ então M tem apenas fins não-parabólicos.*

Demonstração: Nas hipóteses acima, seque de [20] que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C\int_M |\nabla f|, \quad \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{3.1.13}$$

Observe que

$$\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} = \int_M \left(|f|^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left\{\left(\int_M g^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\}^{\frac{n}{n-1}}, \tag{3.1.14}$$

onde

$$g = |f|^{\frac{2(n-1)}{n-2}}.$$

Portanto

$$|\nabla g| = \frac{2(n-1)}{n-2}|f|^{\frac{n}{n-2}}|\nabla f|.$$

Substituindo em (3.1.14) e usando (3.1.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} &= \left\{ \left(\int_M g^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leq C \left(\int_M |\nabla g| \right)^{\frac{n}{n-1}} \\
&= \widetilde{C} \left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-2}} |\nabla f| \right)^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leq \widetilde{C} \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \left(\int_M |\nabla f|^2 \right)^{\frac{n}{2(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Daí obtemos a seguinte desigualdade de Sobolev

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \widetilde{C} \int_M |\nabla f|^2,$$

Se $n \geq 3$ temos que $\frac{n}{n-2} > 1$. Obtemos o pedido diretamente da proposição 1.2.

■

Seja

$$\mathcal{H}_D^0(M) = \left\{ u : M \to R | \Delta u = 0, |u| \leq K \ e \ \int_M |\nabla u|^2 < +\infty \right\}$$

Estamos prontos para provar o seguinte resultado

Proposição 3.2. *Seja $M^n \subset N^{n+m}$ uma subvariedade não-compacta fracamente super-estável com curvatura média constante H. Se, para todo $x \in M$ temos*

$$Ric_N(X) + \sum_\alpha [Ric_N(e_\alpha) - K_N(X, e_\alpha)] \geq \frac{n^2(n-5)}{4} H^2, \quad X \in T_xM, \ |X| = 1,$$

então se $u \in \mathcal{H}_D^0(M)$ temos que $u =$cte.

Demonstração: Por contradição, suponha que podemos encontrar $u \in \mathcal{H}_D^0(M)$ não constante. Então existe $x \in M$ tal que $|\nabla u| \neq 0$. Por continuidade, podemos garantir que $\forall a > 0$ temos

$$\int_{B_a(x)} |\nabla u| > 0.$$

Afirmamos que $\int_M |\nabla u| = +\infty$.

De fato, pelo teorema da divergência e usando a hipótese sobre a limitação de u temos que

$$\int_{B_R(x)} |\nabla u|^2 = \int_{\partial B_R(x)} u\langle \nabla u, \vec{r}\rangle \leq C \int_{\partial B_R(x)} |\nabla u|,$$

onde $\overrightarrow{r}$ é o vetor normal exterior de $B_R(x)$.

Como u tem energia de Dirichlet finita, i.e., $\int_M |\nabla u|^2 < +\infty$, para $R > 1$ vem que

$$0 < C_0 = \int_{B_1(x)} |\nabla u|^2 \leq \int_{B_R(x)} |\nabla u|^2 \leq C \int_{\partial B_R(x)} |\nabla u|,$$

portanto,

$$\int_{\partial B_R(x)} |\nabla u| \geq C_1 > 0.$$

Pela fórmula de coarea [12]

$$\int_{B_R(x)} |\nabla u| = \int_0^R \int_{\partial B_R(x)} |\nabla u| \geq C_1 R.$$

Fazendo $R \to +\infty$ provamos o que haviamos afirmado.

Para $R > a$ considere as seguintes funções em $C_0^\infty(M)$.

$$\varphi_1(a,R) = \begin{cases} 1, & \text{em } B_a(x) \\ \frac{a+R-r(x)}{R}, & \text{em } B_{a+R}(x) \backslash B_a(x) \\ 0, & \text{em } M \backslash B_{a+R}(x) \end{cases}$$

e

$$\varphi_2(a,R) = \begin{cases} 0, & \text{em } B_{a+R}(x) \\ \frac{a+R-r(z)}{R}, & \text{em } B_{a+2R}(x) \backslash B_{a+R}(x) \\ -1, & \text{em } B_{a+2R+b}(x) \backslash B_{a+2R}(x) \\ \frac{r(z)-(a+3R+b)}{R}, & \text{em } B_{a+3R+b}(x) \backslash B_{a+2R+b}(x) \\ 0, & \text{em } M \backslash B_{a+3R+b}(x) \end{cases},$$

onde $b > 0$ é um número a ser determinado e $r(z) = d(x,z)$.

Definindo

$$\psi(t,a,R) = \varphi_1(a,R) + t\varphi_2(a,R) \quad t \in [0,1]$$

e lembrando que $-1 \leq \varphi_2 \leq 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_M \psi(1,a,R)|\nabla u| &= \int_M \{\varphi_1(a,R) + \varphi_2(a,R)\}\,|\nabla u| \\ &= \int_{B_a(x)} |\nabla u| + \int_{B_{a+R}(x)\setminus B_a(x)} \frac{a+R-r(x)}{R}|\nabla u| + \int_M \varphi_2(a,R)|\nabla u| \\ &\leq \int_{B_{a+R}(x)} |\nabla u| - \int_{B_{a+2R+b}(x)\setminus B_{a+2r}(x)} |\nabla u| \qquad (3.1.15)\end{aligned}$$

Pela afirmação já provada, dados a e R fixos podemos escolher b suficientemente grande de maneira que o termo à direita em (3.1.15) torna-se maior, em módulo, do que o termo à esquerda. Dessa forma

$$\int_M \psi(1,a,R)|\nabla u| < 0.$$

Além disso,

$$\int_M \psi(0,a,R)|\nabla u| \geq \int_{B_a(x)} \psi(0,a,R)|\nabla u| \geq \int_{B_a(x)} |\nabla u| > 0.$$

Portanto, por continuidade, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\int_M \psi(t_o,a,R)|\nabla u| = 0$. Como M é fracamente super-estável em N, temos que a equação (1.1.19) vale para $f = \psi(t_o,a,R)|\nabla u|$.

A hipótese sobre a curvatura implica que

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{n}|\Phi|^2 - \sqrt{\tfrac{n-1}{n}}(n-2)H|\Phi| + (2n-1)H^2 + \mathrm{Ric}_N\left(\tfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \\ &\quad + \sum_\alpha \left[\mathrm{Ric}_N(e_\alpha) - K_N\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, e_\alpha\right)\right] \\ &\geq \tfrac{1}{n}|\Phi|^2 - \sqrt{\tfrac{n-1}{n}}(n-2)H|\Phi| + \tfrac{(n-1)(n-2)^2}{4}H^2 \\ &= \left(\tfrac{|\Phi|}{\sqrt{n}} - \tfrac{\sqrt{n-1}(n-2)H}{4}\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Logo, pelo lema 3.1 temos que

$$\frac{1}{n-1}\int_M \psi^2(t_o,a,R)|\nabla|\nabla u|^2 \leq \int_M |\nabla\psi(t_0,a,R)|^2|\nabla u|^2. \qquad (3.1.16)$$

Agora, lembrando que $|\nabla r| = 1$, calculamos

$$\begin{aligned}|\nabla\psi(t_0,a,R)|^2 &= \langle \nabla\varphi_1(a,R) + t\nabla\varphi_2(a,R), \nabla\varphi_1(a,R) + t\nabla\varphi_2(a,R)\rangle \\ &= |\nabla\varphi_1(a,R)|^2 + 2t\langle\nabla\varphi_1(a,R), \nabla\varphi_2(a,R)\rangle + t^2|\nabla\varphi_2(a,R)|^2 \\ &= |\nabla\varphi_1(a,R)|^2 + t^2|\nabla\varphi_2(a,R)|^2,\end{aligned}$$

pois, por definição, $\langle \nabla\varphi_1(a,R), \nabla\varphi_2(a,R)\rangle = 0$.

Dado $\epsilon > 0$, existe R suficientemente grande tal que $\frac{1}{R^2}\int_M |\nabla u|^2 < \epsilon$. Daí, observando-e que $\psi(t_o,a,R) = 1$ em $B_a(x)$, por (3.1.16) vem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\int_{B_a(x)} |\nabla|\nabla u||^2 &\leq \int_M \psi(t_0,a,R)|\nabla|\nabla u|^2 \\
&\leq \int_M |\nabla\psi(t_0,a,R)|^2|\nabla u|^2 \\
&= \frac{1}{R^2}\Bigg(\int_{B_{a+R}(x)\backslash B_a(x)} |\nabla u|^2 + t_0^2\int_{B_{a+3R+b}(x)\backslash B_{a+2R+b}(x)} |\nabla u| \\
&\qquad + t_0^2\int_{B_{a+2R}(x)\backslash B_{a+R}(x)} |\nabla u|^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{R^2}\Bigg(\int_{B_{a+2R}(x)\backslash B_a(x)} |\nabla u|^2 + \int_{B_{a+3R+b}(x)\backslash B_{a+2R+b}(x)} |\nabla u|^2\Bigg) \\
&\leq \frac{1}{R^2}\int_M |\nabla u|^2 < \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos que $|\nabla|\nabla u|| = 0$, donde $|\nabla u| = k =$ cte. Se $k \neq 0$, temos que $u : M \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica limitada e não-constante em M, isto é, M é uma variedade não-parabólica.

Por outro lado, como provado por Grigor'yan [18] e Varopoulos [36], se uma variedade é não-parabólica então devemos ter

$$\int_r^\infty \frac{tdt}{\mathrm{Vol}(B_t(x))} < \infty.$$

Consequentemente, o volume de M tem crescimento pelo menos quadrático, isto é,

$$\int_M |\nabla u|^2 = k^2\mathrm{Vol}(M) = \infty.$$

Portanto, devemos ter $|\nabla u| = 0$, isto é, $u =$ cte.

■

Agora estamos em posição de estabelecer o

Teorema 3.1. *Seja N^{n+m} uma variedade completa, simplesmente conexa com curvatura seccional não-positiva. Se $M^n \subset N^{n+m}$ $(n \geq 3)$ é uma subvariedade completa, não-compacta, fracamente super-estável com curvatura média constante H tal que para todo $x \in M$ vale*

$$Ric_N(X) + \sum_\alpha [Ric_N(e_\alpha) - K_N(X, e_\alpha)] \geq \frac{n^2(n-5)}{4} H^2, \quad X \in T_x M, \ |X| = 1,$$

então ela possui um único fim.

Demonstração: Observe que, pelo lema 3.2, todos os fins de M são não-parabólicos. A proposição 3.2 garante que $\dim(\mathcal{H}_0^D(M)) = 1$. Portanto, pelo teorema 1.4 de Li e Wang, temos que M possui um único fim não-parabólico, donde concluimos o afirmado.

■

Definição 3.1. *Dizemos que uma variedade N tem geometria limitada se sua curvatura seccional satisfaz $K_N \leq \sigma^2$, $\sigma > 0$ e seu raio de injetividade $i_N(x) \geq i_0 > 0$.*

E agora mais um lema clássico.

Lema 3.3. *Sejam N uma variedade riemanniana completa com geometria limitada e $M \subset N$ uma subvariedade completa, não-compacta. Assuma que o vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ de M satisfaz $|\overrightarrow{H}| \leq H_0 < \infty$. Então cada fim de M tem volume infinito.*

Demonstração: Segue de [6] que existe uma constante positiva c_0 tal que, para qualquer $x \in M$, o volume de $B_1(x)$ é maior ou igual que c_0. Seja E um fim de M com volume finito. Neste caso podemos encontrar $T > 0$ tal que

$$\mathrm{Vol}(E) < Tc_0.$$

Escolha pontos $x \in E$ e $y \in \partial E$ tais que $d(x, y) = d(x, \partial E) \geq 2T$. Seja $\gamma : [0, 2T] \to \mathbb{R}$ uma gedésica minimizante ligando y até x. Neste caso as bolas geodésicas $B_1(\gamma(0)), B_1(\gamma(2)), \ldots, B_1(\gamma(2(T-1))$ são disjuntas e estão contidas em E. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(E) &\geq \sum_{i=0}^{T-1} \mathrm{vol}(B_1(\gamma(2i)) \\ &\geq Tc_0 \end{aligned}$$

Obtemos uma contradição, o que prova a infinitude de $\mathrm{vol}(E)$.

■

Como aplicação dos resultados acima podemos provar o seguinte.

Teorema 3.2. *Seja* N^{n+m} *uma variedade riemanniana completa com geometria limitada.* $M^n \subset N^{n+m}$ *é uma subvariedade completa, não-compacta com curvatura média constante* H. *Suponha que* M *é super-estável e que, para todo* $x \in M$, *vale*

$$Ric_N(X) + \sum_\alpha [Ric_N(e_\alpha) - K_N(X, e_\alpha)] \geq \frac{n^2(n-5)}{4} H^2, \quad X \in T_xM, \ |X| = 1.$$

Então, se $\inf Ric_N > -\frac{n}{m} H^2$, M *possui um único fim.*

Demonstração: Pelo lema anterior, todos os fins de M têm volume infinito.

Como M é super-estável, dado um fim E, temos que

$$\begin{aligned} \int_E |\nabla f|^2 &\geq \int_E f^2 \left\{ |\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2 \right\} \\ &\geq (m \inf Ric_N + nH^2) \int_E f^2 \\ &\geq C \int_E f^2, \end{aligned}$$

para toda $f \in C_0^\infty(M)$.

Portanto, combinando a proposição 1.1 e o lema 3.3, vemos que todos os fins de M são não-parabólicos. O resultado segue pela proposição 3.2.

■

Nos teoremas acima, se assumimos que M é não-parabólica, podemos retirar as hipóteses sobre a variedade N. Neste caso, obtemos apenas limitação para o número de fins não-parabólicos. De fato, uma análise mais cuidadosa do método uilizado acima, demonstra facilmente que as condições mais restritivas sobre a geometria de N são necessárias apenas para garantir que todo fim de M é não-parabólico. Excluídas essas condições, ainda podemos utilizar a proposição 3.1 para estimar o número de fins não-parabólicos de M.

Neste caso, os resultados acima podem ser reescritos como

Corolário 3.2. *Seja N^{n+m} uma variedade completa. Se $M^n \subset N^{n+m}$ é uma subvariedade completa, não-parabólica, não-compacta, fracamente super-estável com curvatura média constante H tal que para todo $x \in M$ vale*

$$Ric_N(X) + \sum_{\alpha}[Ric_N(e_\alpha) - K_N(X, e_\alpha)] \geq \frac{n^2(n-5)}{4}H^2, \quad X \in T_xM, \ |X| = 1,$$

então ela possui um único fim não-parabólico.

Corolário 3.3. *Sejam N^{n+m} uma variedade riemanniana completa e $M^n \subset N^{n+m}$ é uma subvariedade completa, não-parabólica, não-compacta com curvatura média constante H. Suponha que M é super-estável e que, para todo $x \in M$, vale*

$$Ric_N(X) + \sum_{\alpha}[Ric_N(e_\alpha) - K_N(X, e_\alpha)] \geq \frac{n^2(n-5)}{4}H^2, \quad X \in T_xM, \ |X| = 1.$$

Então, se $\inf Ric_N > -\frac{n}{m}H^2$, M possui um único fim não-parabólico.

3.2 Caso Parabólico

Passemos agora a tratar o caso em que M é uma variedade parabólica. Começamos com o seguinte:

Proposição 3.3. *Seja M^n uma variedade parabólica tal que $Vol(M) = +\infty$. Considere o operador em M definido por $L = \triangle + q(x)$ onde $q : M \to R$ é uma função continua. Suponha que $q(x) \geq 0$ e não identicamente nula. Então, para toda $\psi \in C_0^\infty(M)$ com $\int_M \psi = 0$ temos que*

$$-\int_M \psi L\psi < 0.$$

Demonstração: Veja [40].

∎

Agora podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Seja $M^n \subset N^{n+m}$ uma subvariedade parabólica, fracamente super-estável com curvatura média constante H tal que $Vol(M) = +\infty$. Então, se a curvatura seccional de N satisfaz $K_N \geq -\dfrac{n}{(n+m-1)m}H^2$ temos que*

1. *M é totalmente umbílica em N;*

2. $\sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) = -nH^2$*;*

3. *A curvatura escalar de M, S_M, é não negativa.*

Demonstração: Fixado um referencial ortonormal $\{e_\alpha\}$ de NM, considere o operador em M definido por $L = \triangle + q(x)$ onde

$$q(x) = |\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2.$$

Pela hipótese sobre a curvatura de N temos que $Ric_N \geq -\frac{n}{m}H^2$. Portanto,

$$q(x) = |\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2 \geq |\Phi|^2 \geq 0.$$

Como M é fracamente super-estável em N temos que para todo $\psi \in C_0^\infty(M)$ com $\int_M \psi = 0$ vale que

$$\begin{aligned} -\int_M \psi L\psi &= -\int_M \left\{\psi\triangle\psi + |\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2\right\} \\ &= \int_M \left\{|\nabla\psi|^2 - \left(|\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2\right)\right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela proposição acima vemos que

$$|\Phi|^2 + \sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2 \equiv 0,$$

ou seja, $|\Phi| = 0$. Consequentemente M é totalmente umbílica e

$$\sum_\alpha Ric_N(e_\alpha) + nH^2 \equiv 0.$$

Isto prova os dois primeiros ítens.

Como $|\Phi| = 0$ temos que

$$h_{ij}^\alpha = 0, \ \ i \neq j$$

e

$$h_{ii}^\alpha = H^\alpha, \ \ i = 1, ..., n.$$

Daí, pela fórmula de Gauss

$$K_M(e_i, e_j) - K_N(e_i, e_j) = \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha = \sum_\alpha (H^\alpha)^2 = H^2. \tag{3.2.1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(e_i) &= \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} K_N(e_i, e_j) + (n-1)H^2 \\ &= \mathrm{Ric}_N(e_i) - \sum_\alpha K_N(e_i, e_\alpha) + (n-1)H^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}_N(e_i) - \sum_\alpha \sum_i K_N(e_i, e_\alpha) + n(n-1)H^2 \\ &\geq -\frac{n^2}{m}H^2 - \sum_\alpha \left(K_N(e_1, e_\alpha) + ... + K_N(e_n, e_\alpha)\right) + n(n-1)H^2 \\ &= -\frac{n^2}{m}H^2 - \sum_\alpha \left(\mathrm{Ric}_N(e_\alpha) - \sum_{\substack{\beta \\ \beta\neq\alpha}} K_N(e_\beta, e_\alpha)\right) + n(n-1)H^2 \\ &= -\frac{n^2}{m}H^2 - \sum_\alpha \mathrm{Ric}_N(e_\alpha) - \sum_\alpha \sum_{\substack{\beta \\ \beta\neq\alpha}} K_N(e_\beta, e_\alpha) + n(n-1)H^2 \\ &\geq -\frac{n^2}{m}H^2 + nH^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \beta\neq\alpha}} K_N(e_\beta, e_\alpha) + n(n-1)H^2 \\ &\geq \left(-\frac{n^2}{m} + n^2 - \frac{n(m-1)}{n+m-1}\right)H^2 \\ &= \frac{m^2(n^2-n) + m(n^3-2n^2+n) + (n^2-n^3)}{(n+m-1)d}H^2 \\ &= \frac{f(m)}{(n+m-1)m}H^2, \end{aligned}$$

onde f é o polinômio

$$f(m) = m^2(n^2-n) + m(n^3-2n^2+n) + (n^2-n^3).$$

Agora observe que $m = 1$ (caso de uma hipersuperfície) é solução de $f(m) = 0$. Portanto, temos que $f(m) > 0$ para $m = 2, 3, ...$ Concluimos então que

$$S_M \geq 0.$$

■

Lembramos mais um resultado já bem conhecido

Proposição 3.5. *Seja M^n uma variedade completa tal que $Ric_M \geq 0$. Então ou M tem um único fim ou é isométrica ao cilíndro $M = \mathbb{R} \times N$ com a métrica produto, onde N é uma variedade compacta cm curvatura de Ricci não-negativa.*

Demonstração: Veja [24], capítulo 7.

■

Finalmente temos o

Teorema 3.3. *Seja N^{n+m} uma variedade de geometria limitada. $M^n \subset N^{n+m}$ uma subvariedade parabólica, não-compacta, fracamente super-estável com curvatura média constante H. Se a curvatura seccional de N satisfaz $K_N \geq -\frac{n}{(n+m-1)d}H^2$ então M é totalmente umbílica em N e tem curvatura escalar não-negativa. Mais ainda, ou*

1. *M tem um único fim; ou*
2. *$M = R \times P$ onde P é uma variedade compacta com curvatura de Ricci não-negativa.*

Demonstração: Como M tem geometria limitada, temos que Vol$M = +\infty$ e a primeira parte do teorema segue da proposição 3.4. Agora, por (3.2.1) e como $K_N \geq -\frac{n}{(n+m-1)m}H^2$ temos que

$$\begin{aligned} K_M(e_i, e_j) &= K_N(e_i, e_j) + H^2 \\ &\geq \left(\frac{(n+m-1)d - n}{(n+m-1)d} \right) H^2 \\ &= \left(\frac{m^2 + (n-1)m - n}{(n+m-1)d} \right) H^2. \end{aligned}$$

Novamente, o polinômio no numerador tem zero em $m = 1$ e é estritamente positivo para $m \geq 2$. Concluimos que $K_M \geq 0$.

Portanto, pela proposição 3.5, ou M tem exatamente um fim ou é isométrica a $M = R \times P$ onde P é uma variedade compacta com $Ric_P \geq 0$.

■

Referências Bibliográficas

[1] W. Ambrose, *Higher Order Grassmann Bundles*, Topology **3**, suplemento **2** (1965), 199-238;

[2] J. L. Barbosa e M. do Carmo, *On the Size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^3$, A.M.S. Summer Institute on Differential Geometry 1973 e American J. of Math. **98** (1976), 512-528;

[3] P. Bérard, *Remarques sur L'équation de J. Simons*, Differential Geometry (A Symposium in Honor of M. do Carmo on his 60th Birthday), Pitman Moographs Surveys Pure Appl. Math. **52** Longman Sci. Tech., Harlow, (1991)45-57;

[4] S. Bernstein, *Sur un Théorème de Géometrie et ses Application aux Équations Dérivées Partielles du Type Elliptique*, Comm. Soc. Mathém. Kharkov **15** (1915-1917), 38-45;

[5] E. Bombieri, E de Giorgi e E. Guisti, *Minimal Cones and The Bernstein Problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268;

[6] H. Cao, Y. Shen, S. Zhu, *The Structure of Stable Minimal Hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{n+1}$. Math. Res. Let. **4**, (1997) 637-644;

[7] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey (1976);

[8] M. do Carmo. *O Método do Referencial Móvel*. Publicações em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (2009).

[9] M. do Carmo e C. K. Peng. *Stable Complete Minimal Hypersurfaces*, Proc. Beijing Symp. Differential Equations and Differential Geometry **3** (1980), 1349-1358;

[10] M. do Carmo e C. K. Peng *Stable Complete Minimal Hypersurfaces*, Proc. Beijing Symp. Differential Equations and Differential Geometry **3** (1980), 1349-1358;

[11] M. do Carmo e D. Zhou; *Berstein-type Theorems in Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*; An. Acad. Bras. Ci., (2000), **32** (3);

[12] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press **2**, (1984);

[13] S.Y. Cheng e S. T. Yau, *Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*, Math. Ann. **255** (1997), 195-204;

[14] S.Y. Cheng e S. T. Yau, *Differential Equations on Riemannian Manifolds and their Geometric Applications*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 333-354;

[15] S. S. Chern, W. H. Chen e K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry.* Series in University Mathematics-Vol 1. World Scientific (2000);

[16] L. P. Eisenhart, *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press (1949);

[17] D. Fisher-Colbrie e R. Schoen, *The Structure of Complete Stable Minimal Surfaces in 3-manifolds of Non-negative Scalar Curvature*, Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 199-211;

[18] A. Grygor'yan, *On the Existence of a Green Function on a Manifold*, Uspechi matem. nauk, **38** (1983), 161-162;

[19] R. Herman, *Second Variation for Minimal Submanifolds*, J. Math. Mech. **16** (1966), 473-491;

[20] D. Hoffman e J. Spruck, *Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Riemannian Submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 715-727;

[21] T. Ishihara. *Maximal Spacelike Submanifolds of a Pseudoreimannian Space of Constant Curvature*, Michigan Math. J. **35** (1988), 345-352;

[22] J. L. Lagrange, *Essai D'une nouvelle Méthodo pour Determiner les Maxima e les Minima des Formulaes Intégrales Indéfinies*, Miscellanea Taurinensia, **Tome II**, (1760-1761), 172-195;

[23] B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973;

[24] P. Li, *Harmonic Functions and Applications to Complete Manifolds*, XIV Escola de Gemoetria Diferencial em Homanagem a S. S. Chern, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006;

[25] P. Li e L. F. Tam, *Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds*; J. Diff. Geom. **35** (1992), 359-383;

[26] P. Li e L. F. Tam, *Symmetric Green's Functions on Complete Manifolds*, Amer. J. Math **109** (1987), 1129-1154;

[27] P. Li e J. P. Wang, *Minimal Hypersurfaces with Finite index*; Math. Res. Letters **9** (2002), 95-103;

[28] P. Li e J. P. Wang, *Stable Minimal Hypersurfaces in a Nonnegatively Curved Manifold*; J. Reine. Angew Math. (to appear);

[29] B. Malgrange, *Existence e Aprproximations des Solutions des Solutions der Équations aux Dérivées PArtielles et des Équations de Convolution*, Annales de L'inst. Fourier **6** (1955), 271-355;

[30] J. B. M. C. Meusnier, *Memoir sur la Coubure des Surfaces*, Mémoire des Savants Étrangers **10** (1785), 477-510;

[31] J. H. Michael e L. Simon, *Sobole and Mean-Value Inequalities on Generalized Submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 361-379;

[32] W. Santos, *Submanifolds with Parallel Mean Curvature Vector in Spheres*; Tonôku Math. J. **46** (1994), 403-415.

[33] J. Simons.; *Minimal Varieties in Riemmanian Manifolds*; Ann. Math.; (2) **88**, (1968), 62-105;

[34] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, INC., **Vol II**, Houston, Texas (1999);

[35] Spruck, J.; *On Stable Complete Minimal Hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$; Amer. J. Math.; **120**, (1998), 103-116;

[36] N. Varopoulos, *Potential Theory and Diffusion on a Riemannian Manifold*; Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund; Vol I, II; Madsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, Calif. (1983), 821-837;

[37] Y. Xin, *Bernstein Type Theorems Without Graphic Conditions*, Asian J. Math. **9** (2005), 31-34;

[38] Y. Xin, *A Rigidity Theorem for Space-Like Graph of Higher Codimension*, Manuscripta math. **103** (2000), 103-202;

[39] Y. Xin e L. Yang, *Curvature Estimates for Minimal Submanifolds of Higher Codimension*, Chin. Ann. Math., **30B(4)** (2009), 379-396;

[40] D. Zhou, Xu Cheng e C. Leung-fu; *The Structure of Constant Mean Curvature Hypersurfaces*, Tonoku Math. J. **2**, Volume 60, Number 1 (2008), 101-121;

[41] Q. Wang, *On Minimal Submanifolds in an Euclidean Space*; Math Nachr. **261/262**, (2003), 176-180,

[42] S. T. Yau, *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry*, Indiana Math. J. **25** (1976), 659-670.