

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAVIDADES ACÚSTICAS  
BIDIMENSIONAIS COM APLICAÇÃO AO ESTUDO DE  
PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA  
BARRAGEM-RESERVATÓRIO**

**PAULO MARCELO VIEIRA RIBEIRO**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAVIDADES ACÚSTICAS  
BIDIMENSIONAIS COM APLICAÇÃO AO ESTUDO DE  
PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA  
BARRAGEM-RESERVATÓRIO**

**PAULO MARCELO VIEIRA RIBEIRO**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.TD - 004A/10  
BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2010**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAVIDADES ACÚSTICAS**  
**BIDIMENSIONAIS COM APLICAÇÃO AO ESTUDO DE**  
**PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA**  
**BARRAGEM-RESERVATÓRIO**

**PAULO MARCELO VIEIRA RIBEIRO**

**TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA**  
**CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA**  
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS**  
**NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (ENC-UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Ing. (FGA-UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D. (CTC/EMC-UFSC)**  
**(Examinador Externo)**

---

**Prof. Renato Pavanello, Dr. Ing. (DMC/FEM-UNICAMP)**  
**(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 04 DE AGOSTO DE 2010**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**RIBEIRO, PAULO MARCELO VIEIRA**

Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório [Distrito Federal] 2010.

xxi, 306p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2010). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Interação Barragem-Reservatório

2. Soluções Analíticas

3. Cavidades Acústicas

4. Massa Adicional

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

RIBEIRO, P. M. V. (2010). Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-004A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 306p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

TÍTULO: Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório.

GRAU: Doutor

ANO: 2010

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

Rua Deputado Moreira da Rocha nº 655, apto. 202, Meireles.

60.160-060 Fortaleza – CE – Brasil.

“Logic will get you from A to B. Imagination will take you everywhere”  
O raciocínio lógico o levará de A para B. A imaginação, para qualquer lugar.  
Albert Einstein

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família pelo apoio incondicional e incentivo fundamentais a conclusão desta etapa.

À Cecília, minha esposa, companheira em todos os momentos.

Aos amigos do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília.

Ao professor Lineu José Pedroso, pela orientação desta tese.

Aos professores do PECC, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Dedicado à Cecília, minha esposa,  
presente em todas as etapas  
desta tese.

## **RESUMO**

### **SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAVIDADES ACÚSTICAS BIDIMENSIONAIS COM APLICAÇÃO AO ESTUDO DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO**

**Autor: Paulo Marcelo Vieira Ribeiro**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, agosto de 2010**

Os efeitos de interação produzidos por um fluido são de fundamental importância na análise de sistemas acoplados. Soluções produzidas por este domínio podem ser obtidas analiticamente, no domínio da frequência, sendo dependentes desta variável e da função de deslocamentos atribuída a interface. Estes efeitos podem ser associados a um carregamento externo atuante na estrutura, que representa uma estratégia eficaz de solução do problema.

Neste trabalho serão verificadas duas alternativas para a solução de frequências e modos do sistema acoplado. A primeira consiste em um procedimento simplificado (Método Pseudo-Acoplado), contribuição desta tese, que depende da imposição de uma determinada deformada modal para construção da equação de frequências do modo associado. A segunda é uma abordagem exata, com a solução da equação diferencial envolvida (equação da viga), resultando em frequências e modos acoplados.

As cavidades serão resolvidas pelo método de separação de variáveis para condições de contorno diversas, que poderão representar fronteiras fechadas, abertas ou contornos móveis. A natureza analítica da solução irá permitir uma análise detalhada dos parâmetros envolvidos, permitindo uma maior compreensão do fenômeno de interação.

Os conceitos do procedimento proposto podem ser aplicados a geometrias estruturais complexas, desde que os parâmetros generalizados de um determinado modo de vibração sejam conhecidos. Assim, surge uma contribuição adicional desta tese, de caráter prático, que implica na definição de massas adicionais que dependem da flexibilidade da estrutura e da compressibilidade do fluido. Esta técnica permite a solução no domínio do tempo de problemas de interação barragem-reservatório, possibilitando a análise em códigos computacionais onde o fluido não pode ser discretizado.



## **ABSTRACT**

### **ANALYTICAL SOLUTIONS FOR BIDIMENSIONAL ACOUSTIC CAVITIES WITH APPLICATIONS TO DAM-RESERVOIR INTERACTION PROBLEMS**

**Author: Paulo Marcelo Vieira Ribeiro**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, August of 2010**

Fluid interaction effects play an important role in analysis of coupled systems. Solutions related to this domain can be achieved analytically, in the frequency domain, being dependent on this variable and the displacement function related to the corresponding fluid-structure interface. Dynamic pressure solution at the interface acts as an external load on the associated structure, leading to an efficient solution method for this type of problem.

This thesis presents two alternatives for free vibration analysis of beam-cavity systems. The first one is an original contribution of this research, entitled Pseudo-Coupled Method, representing a simplified approach, with an imposed deformation function applied to a generalized coordinate solution, providing corresponding frequencies for a given structural mode shape. The second one is an exact solution of the partial differential equation of motion governing the associated beam, resulting in frequencies and structural mode shapes.

Fluid domain solutions are achieved by means of the separation of variables method for different sets of boundary conditions, representing rigid, open and vibrating contours. The analytical nature of resulting expressions provides useful insights on the involved parameters, allowing a greater comprehension of the interaction phenomenon.

Described concepts can be extended to more complex geometries, requiring the previous knowledge of generalized parameters for a given mode shape. This conclusion leads to an additional contribution of this thesis, directed to practical applications, with corresponding added masses for structural systems which are dependent on the structural mode shape and fluid compressibility effects. As a result this technique allows time domain solution of dam-reservoir interaction problems using computer codes without fluid-structure capabilities.

## SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 - GENERALIDADES .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 - REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>4</b>
<b>1.2.1 - Vibroacústica (cavidades contendo fluidos gasosos) .....</b>	<b>4</b>
<b>1.2.2 - Interação fluido-estrutura (cavidades contendo fluidos densos) .....</b>	<b>7</b>
<b>1.3 - MOTIVAÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>1.4 - PROBLEMA ABORDADO E METODOLOGIA .....</b>	<b>15</b>
<b>1.5 - OBJETIVOS .....</b>	<b>16</b>
<b>1.6 - CONTRIBUIÇÕES DA TESE .....</b>	<b>17</b>
<b>1.7 - ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO .....</b>	<b>18</b>
<b>1.8 - DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DA TESE..</b>	<b>18</b>
<b>2 -SOLUÇÕES ANALÍTICAS EM CAVIDADES ACÚSTICAS COM CONTORNOS RÍGIDO-MÓVEIS E FLEXÍVEIS .....</b>	<b>21</b>
<b>2.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
<b>2.2 - HIPÓTESES BÁSICAS E EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA O DOMÍNIO DO FLUIDO .....</b>	<b>21</b>
<b>2.2.1 - Equação governante das pressões dinâmicas.....</b>	<b>22</b>
<b>2.3 - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E SOLUÇÃO GERAL .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3.1 - Solução geral .....</b>	<b>26</b>
<b>2.3.2 - Caso 1A (cavidade com contorno móvel-aberta e aberta-aberta).....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3 - Caso 2A (cavidade com contorno móvel-aberta e fechada-aberta) .....</b>	<b>42</b>
<b>2.3.4 - Solução específica para uma cavidade com comprimento infinito na direção horizontal (Caso 2A – infinito).....</b>	<b>51</b>
<b>2.3.5 - Caso 3A (cavidade com contorno móvel-aberta e fechada-fechada) .....</b>	<b>55</b>
<b>2.3.6 - Nota sobre cavidades com dois contornos móveis .....</b>	<b>65</b>
<b>2.3.7 - Resumo e análise das soluções gerais para os casos estudados .....</b>	<b>68</b>
<b>3 - ESTUDO DAS SOLUÇÕES DO DOMÍNIO DO FLUIDO .....</b>	<b>82</b>
<b>3.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>82</b>
<b>3.2 - INFLUÊNCIA DA SOLUÇÃO TRANSVERSAL .....</b>	<b>82</b>
<b>3.2.1 - Estudo dos valores críticos e modos associados .....</b>	<b>82</b>

3.2.2 - Estudo das propriedades de ortogonalidade.....	84
3.3 - ESTUDO DA SOLUÇÃO – CASO 1A .....	85
3.3.1 - Cavidade quadrada com contorno rígido-móvel.....	85
3.3.1.1 - Interpretação do fenômeno de valores críticos idênticos para diferentes valores dos índices $m$ e $n$ .....	104
3.3.2 - Cavidade retangular com contorno rígido-móvel .....	107
3.3.3 - Cavidade retangular com contorno governado por uma função senoidal .....	123
3.4 - ESTUDO DA SOLUÇÃO – CASO 3A .....	129
3.4.1 - Cavidade retangular com contorno rígido-móvel .....	129
3.4.2 - Cavidade retangular com contorno governado por uma função senoidal .....	130
3.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	133
4 - DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO PSEUDO-ACOPLADA .....	135
4.1 - INTRODUÇÃO .....	135
4.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O MODELO ESTRUTURAL.....	135
4.3 - SOLUÇÃO ANALÍTICA SIMPLIFICADA DO SISTEMA ACOPLADO..	138
4.4 - EQUAÇÃO DE FREQUÊNCIAS COM O MÉTODO PSEUDO ACOPLADO.....	141
4.4.1 - Caso 1A com fronteira governada por funções senoidais.....	141
4.4.2 - Caso 3A com fronteira governada por funções senoidais.....	150
4.4.3 - Caso 1C com fronteiras governadas por funções senoidais.....	153
4.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO PSEUDO-ACOPLADO ...	157
4.5.1 - Modelo numérico analisado.....	157
4.5.2 - Análise 01 (Caso 1A) .....	158
4.5.3 - Análise 02 (Caso 3A) .....	164
4.5.4 - Análise 03 (Caso 1C) .....	166
4.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	169
5 - SOLUÇÃO ACOPLADA EXATA .....	171
5.1 - INTRODUÇÃO .....	171
5.2 - APRESENTAÇÃO E HIPÓTESES DO PROBLEMA.....	171
5.2.1 - Estratégia de solução da cavidade acústica.....	172

5.2.2 - Equação de movimento da viga (apenas flexão) .....	172
5.3 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 3A.....	174
5.3.1 - Aplicação da condição de contorno da interface .....	176
5.3.2 - Resumo dos principais parâmetros.....	181
5.3.3 - Aplicação a uma viga bi-apoiada com cavidade preenchida .....	181
5.3.4 - Exemplo numérico.....	183
5.4 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 2A.....	189
5.4.1 - Resumo dos principais parâmetros.....	190
5.4.2 - Aplicação a uma viga engastada-livre com cavidade preenchida .....	190
5.4.3 - Exemplo numérico.....	192
5.5 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 2A COM COMPRIMENTO INFINITO NA DIREÇÃO LONGITUDINAL .....	203
5.5.1 - Aplicação da condição de contorno da interface .....	207
5.5.2 - Resumo dos principais parâmetros.....	210
5.5.3 - Aplicação a uma viga engastada-livre com cavidade preenchida.....	211
5.5.4 - Exemplo numérico.....	212
5.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	219
6 - SOLUÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	223
6.1 - INTRODUÇÃO .....	223
6.2 - RESPOSTA ESTRUTURAL PARA VIBRAÇÕES LIVRES.....	224
6.2.1 - Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada.....	225
6.2.2 - Frequências e modos das Análises 1 e 2 .....	226
6.2.3 - Parâmetros generalizados das Análises 1 e 2.....	228
6.2.4 - Frequências e modos das Análises 3 e 4 .....	230
6.2.5 - Parâmetros generalizados das Análises 3 e 4.....	232
6.2.6 - Comentários gerais sobre as análises apresentadas .....	233
6.2.7 - Efeitos de compressibilidade do fluido e o modo fundamental acoplado .....	234
6.3 - RESPOSTA ESTRUTURAL PARA VIBRAÇÕES FORÇADAS.....	235
6.3.1 - Resposta transiente dos modos para uma excitação harmônica .....	235
6.3.2 - Superposição modal das respostas individuais .....	244
6.3.3 - Construção de um modelo equivalente em elementos finitos .....	247
6.3.4 - Solução do problema para uma excitação sísmica .....	253

6.3.5 - Resposta a um registro sísmico real.....	261
6.4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	263
<b>7 - ESTUDO DA INTERAÇÃO BARRAGEM-RESERVATÓRIO.....</b>	<b>264</b>
7.1 - SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PROPOSTA .....	265
7.1.1 - Soluções analíticas para as pressões hidrodinâmicas.....	266
7.1.2 - Cálculo dos parâmetros generalizados do problema .....	268
7.1.3 - Solução da frequência do problema acoplado .....	269
7.1.4 - Sistema equivalente barragem-reservatório .....	270
7.2 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO .....	272
7.2.1 - Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada.....	273
7.2.2 - Cálculo da frequência fundamental acoplada .....	273
7.2.3 - Construção do modelo equivalente .....	274
7.2.4 - Análise transiente da estrutura desacoplada .....	275
7.2.4.1 - Equações de movimento (Solução 1) .....	275
7.2.4.2 - Efeito de amplificação da aceleração do solo.....	277
7.2.4.3 - Contribuição de modos superiores na resposta .....	279
7.2.4.4 - Considerações sobre a análise espectral .....	280
7.2.5 - Análise transiente da estrutura acoplada.....	282
7.2.5.1 - Equações de movimento (Solução 1) .....	282
7.2.5.2 - Validação dos modelos equivalentes (Solução 2) .....	283
7.2.5.3 - Compatibilidade de tensões dos modelos equivalentes (não-amortecido).....	285
7.2.5.4 - Compatibilidade de tensões dos modelos equivalentes (amortecido) .....	285
7.2.5.5 - Considerações sobre a análise espectral .....	286
7.3 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	290
<b>8 - CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS .....</b>	<b>292</b>
8.1 - SÍNTESE DA TESE E CONCLUSÕES .....	292
8.2 - VISÃO GLOBAL DAS CONTRIBUIÇÕES .....	294
8.3 - PERSPECTIVAS.....	295
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>297</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resumo das soluções para $\beta$ .....	30
Tabela 2.2 – Resumo das soluções para $P(x, y)$ - Caso 1A.....	40
Tabela 2.3 – Resumo das soluções para $P(x, y)$ - Caso 2A.....	50
Tabela 2.4 – Resumo das soluções para $P(x, y)$ - Caso 2A com $Lx \rightarrow \infty$ .....	55
Tabela 2.5 – Resumo das soluções para $P(x, y)$ - Caso 3A.....	64
Tabela 2.6 – Resumo das soluções gerais (condição de contorno móvel-aberta em $x$ ).....	69
Tabela 2.7 – Resumo das soluções gerais (cavidades com dois contornos móveis).....	74
Tabela 2.8 – Resumo das conclusões obtidas para a solução longitudinal $Rn$ .....	81
Tabela 3.1 – Ortogonalidade entre as funções $\phi$ e $S_n$ .....	85
Tabela 3.2 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ .....	100
Tabela 3.3 – Freqüências e modos (cavidade quadrada fechada-aberta e aberta-aberta)..	101
Tabela 3.4 – Comparação entre as soluções $Y_\eta$ e $Y_{10}$ para um dado valor de $\chi$ .....	103
Tabela 3.5 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ ( $r = 1/2$ ).....	113
Tabela 3.6 – Freqüências e modos (cavidade retangular fechada-aberta e aberta-aberta) $r = 1/2$ .....	114
Tabela 3.7 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ ( $r = 2$ ).....	115
Tabela 3.8 – Freqüências e modos (cavidade retangular fechada-aberta e aberta-aberta) $r = 2$ .....	116
Tabela 3.9 – Variação da função $Y$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ .....	122
Tabela 3.10 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ .....	126
Tabela 3.11 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ .....	127
Tabela 3.12 – Variação da função $f_1s_1/q$ para valores críticos de $\chi$ .....	128
Tabela 3.13 – Freqüências e modos da cavidade associados a valores críticos de $\chi$ .....	132
Tabela 4.1 – Valores da função $f(\chi, j, r)$ , com $r = 1$ , no limite onde $\chi \rightarrow 0$ .....	144
Tabela 4.2 – Valores da função $f(\chi, j, r)$ no limite onde $\chi \rightarrow 0$ .....	149
Tabela 4.3 – Características dos termos de massa generalizada do fluido em função de $j$	151
Tabela 4.4 – Propriedades geométricas e dos materiais utilizados no modelo.....	157
Tabela 4.5 – Soluções analítica e numéricas (Análise 01).....	159
Tabela 4.6 – Diferenças relativas entre as freqüências analisadas.....	160
Tabela 4.7 – Possíveis configurações para os modos de massa adicional.....	161

Tabela 4.8 – Divisão dos domínios para $j = 1$ e $m = 1$ .....	162
Tabela 4.9 – Divisão dos domínios para $j = 1$ e $m = 3$ .....	162
Tabela 4.10 – Soluções analítica e numéricas (Análise 02) .....	165
Tabela 4.11 – Diferenças relativas entre as frequências analisadas .....	166
Tabela 4.12 – Soluções analítica e numéricas (Análise 03) .....	167
Tabela 4.13 – Diferenças relativas entre as frequências analisadas .....	167
Tabela 4.14 – Variação dos modos acoplados em função de $\chi$ para $r = 1$ .....	168
Tabela 5.1 – Resumo da solução do Caso 3A .....	181
Tabela 5.2 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas.....	184
Tabela 5.3 –Frequências e modos desacoplados da estrutura e da cavidade.....	185
Tabela 5.4 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura .....	186
Tabela 5.5 – Tabela comparativa dos modos da estrutura e da cavidade .....	187
Tabela 5.6 – Resumo da solução do Caso 2A .....	190
Tabela 5.7 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas.....	193
Tabela 5.8 – Frequências acopladas obtidas pelo método pseudo-acoplado.....	194
Tabela 5.9 –Frequências e modos desacoplados da estrutura e da cavidade.....	195
Tabela 5.10 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura .....	196
Tabela 5.11 – Tabela comparativa dos modos da estrutura e da cavidade.....	197
Tabela 5.12 – Frequências e modos acoplados em função do parâmetro $r$ .....	198
Tabela 5.13 – Frequências e modos acoplados em função do parâmetro $\beta_1$ .....	200
Tabela 5.14 –Frequências desacopladas da estrutura .....	200
Tabela 5.15 – Frequências e modos acoplados em função dos parâmetros $\beta_1$ e $r$ .....	201
Tabela 5.16 – Resumo da solução do Caso 2A com $Lx \rightarrow \infty$ .....	210
Tabela 5.17 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas .....	213
Tabela 5.18 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas .....	214
Tabela 5.19 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura .....	215
Tabela 5.20 – Frequências e modos acoplados (comprimento longitudinal infinito) .....	216
Tabela 5.21 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas .....	217
Tabela 5.22 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura .....	218
Tabela 5.23 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas .....	218
Tabela 5.24 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura .....	219
Tabela 6.1 – Principais características das soluções em vibração livre.....	223
Tabela 6.2 – Propriedades geométricas e dos materiais .....	224
Tabela 6.3 –Frequências desacopladas das estruturas 1 e 2 .....	224

Tabela 6.4 – Resumo das análises realizadas .....	225
Tabela 6.5 – Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada .....	226
Tabela 6.6 – Soluções de frequências e modos acoplados (Análise 1) .....	226
Tabela 6.7 – Soluções de frequências e modos acoplados (Análise 2) .....	227
Tabela 6.8 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 1) .....	227
Tabela 6.9 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 2) .....	228
Tabela 6.10 – Parâmetros generalizados da estrutura acoplada (Análises 1 e 2) .....	229
Tabela 6.11 – Soluções de frequências e modos acoplados (Análise 3) .....	230
Tabela 6.12 – Soluções de frequências e modos acoplados (Análise 4) .....	231
Tabela 6.13 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 3) .....	231
Tabela 6.14 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 4) .....	231
Tabela 6.15 – Parâmetros generalizados da estrutura acoplada (Análises 3 e 4) .....	232
Tabela 6.16 – Principais características das análises realizadas ( $\beta$ constante) .....	234
Tabela 6.17 – Frequências acopladas do Caso 2A em função de $r$ .....	248
Tabela 6.18 – Frequências e modos obtidos no modelo numérico .....	249
Tabela 6.19 – Frequências acopladas do Caso 2A - incompressível .....	252
Tabela 6.20 – Frequências e modos obtidos no modelo numérico incompressível .....	253
Tabela 6.21 – Valores de $\beta$ associados aos dois primeiros modos do sistema .....	260
Tabela 6.22 – Valores de $X_n$ associados aos dois primeiros modos do sistema .....	260
Tabela 7.1 – Planilha de cálculo de massas adicionais (sistema equivalente) .....	271
Tabela 7.2 – Parâmetros generalizados do modo fundamental desacoplado .....	273
Tabela 7.3 – Frequências fundamentais para os diversos casos analisados .....	273
Tabela 7.4 – Massa generalizada adicional do modo fundamental .....	274
Tabela 7.5 – Planilha de cálculo das massas adicionais – Caso CF .....	274
Tabela 7.6 – Planilha de cálculo das massas adicionais – Caso IF .....	275
Tabela 7.7 – Frequências dos modelos equivalentes .....	275
Tabela 7.8 – Tensões principais da análise desacoplada .....	282
Tabela 7.9 – Tensões principais da análise acoplada .....	288
Tabela 7.10 – Tensões principais da análise estática equivalente - corrigida .....	289
Tabela 7.11 – Resumos das principais características das soluções propostas .....	291



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Experimento de vibração de um corpo submerso em um fluido.....	1
Figura 1.2 – Exemplos de compartimentos preenchidos por fluidos. ....	3
Figura 1.3 – Representação esquemática do problema: estrutura e cavidade associada.....	4
Figura 1.4 – Alternativas para solução de frequências e modos do problema acoplado.....	16
Figura 1.5 – Esquema de desenvolvimento do conteúdo da tese .....	18
Figura 2.1 – Representação esquemática da cavidade – Caso 1A.....	31
Figura 2.2 – Representação esquemática da cavidade – Caso 2A.....	42
Figura 2.3 – Representação esquemática da cavidade – Caso 3A.....	55
Figura 2.4 – Representação esquemática da cavidade com dois contornos móveis.....	65
Figura 2.5 – Variação da função $f_1$ para um comprimento $Lx = 1$ e $I\phi = 1$ .....	70
Figura 2.6 – Variação da função $f_1$ para um comprimento $Lx = 2$ e $I\phi = 1$ .....	71
Figura 2.7 – Variação da função $f_1$ ao longo de $x$ ( $Lx = 1$ e $I\phi = 1$ ) .....	71
Figura 2.8 – Variação da função $f_2$ ao longo de $\alpha n$ ( $Lx = 1$ ).....	72
Figura 2.9 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ e $\alpha n$ ( $Lx = 1, I\phi = 1$ ) .....	73
Figura 2.10 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ ( $Lx = 1, I\phi = 1$ ).....	73
Figura 2.11 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ para $\alpha n < 0$ ( $Lx = 1, I\phi = 1$ ).....	74
Figura 2.12 – Variação da função $g_1$ ao longo de $x$ ( $I\phi_1 = 1$ e $I\phi_2 = 0$ ).....	76
Figura 2.13 – Variação da função $g_2$ ao longo de $x$ ( $Lx = 1$ ) .....	77
Figura 2.14 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ ( $I\phi_1 = 1$ e $I\phi_2 = 0$ ).....	78
Figura 2.15 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ para $\alpha n < 0$ ( $I\phi_1 = 1$ e $I\phi_2 = 0$ )... ..	78
Figura 2.16 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ ( $I\phi_2 = I\phi_1 = 1$ ) .....	79
Figura 2.17 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ ( $I\phi_2 = -I\phi_1 = -1$ ) .....	79
Figura 2.18 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ para $\alpha n < 0$ ( $I\phi_2 = I\phi_1 = 1$ ) .....	80
Figura 2.19 – Variação da função $R_n$ ao longo de $x$ para $\alpha n < 0$ ( $I\phi_2 = -I\phi_1 = -1$ ) ..	80
Figura 3.1 – Variação da função $S_n$ ao longo de $Ly$ para uma série de valores de $n$ .....	87
Figura 3.2 – Variação da função $f_1/q$ ao longo de $\chi$ ( $n = 1$ ).....	91
Figura 3.3 – Variação da função $f_1/q$ ao longo de $\chi$ ( $n = 3$ ).....	91
Figura 3.4 – Variação da função $f_1/q$ ao longo de $\chi$ para $n = 5$ .....	92
Figura 3.5 – Variação da função $f_1/q$ ao longo de $\xi x$ para $n = 1$ .....	92
Figura 3.6 – Variação da função $f_1/q$ ao longo de $\xi x$ para $n = 1$ .....	93
Figura 3.7 – Variação da função $f_1s_1/q$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ ( $n = 1$ e $\chi = 0$ ).....	93

Figura 3.8 – Variação da função $f_{1s1/q}$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ ( $n = 1$ e $\chi = 0.9$ ).....	94
Figura 3.9 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ para $n = 1$ .....	94
Figura 3.10 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ para $n = 1$ .....	95
Figura 3.11 – Variação da função $f_{1s1/q}$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ ( $n = 1$ e $\chi = 1.79$ ).....	95
Figura 3.12 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ para $\chi = 0.5$ .....	96
Figura 3.13 – Variação da função $f_{1s1/q}$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ ( $n = 1,3,5$ e $\chi = 0.5$ ).....	96
Figura 3.14 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ para $\chi = 2.9$ .....	97
Figura 3.15 – Variação da função $f_{1s1/q}$ ao longo de $\xi x$ e $\xi y$ ( $n = 1,3,5$ e $\chi = 2.9$ ).....	97
Figura 3.16 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ para $n = 3$ .....	98
Figura 3.17 – Definição do conceito de núcleo ( $n = 3$ e $m = 5$ ).....	99
Figura 3.18 – Triângulos retângulos com mesma hipotenusa e catetos distintos.....	104
Figura 3.19 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $r = 1/2$ ) .....	108
Figura 3.20 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $r = 2$ ).....	109
Figura 3.21 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $r = 4$ ).....	109
Figura 3.22 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $\chi = 0$ ) .....	109
Figura 3.23 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $\chi = 0.9$ ).....	110
Figura 3.24 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\xi x$ ( $n = 1$ e $\chi \cong 1$ ) .....	110
Figura 3.25 – Variação da função $q$ ao longo de $\chi$ para $n = 1$ .....	111
Figura 3.26 – Mapa de frequências críticas para $r = 1/2$ .....	119
Figura 3.27 – Mapa de frequências críticas para $r = 1$ .....	119
Figura 3.28 – Mapa de frequências críticas para $r = 2$ .....	119
Figura 3.29 – Mapa de frequências críticas para $r = 10$ .....	120
Figura 3.30 – Variação da função $Y$ ao longo de $\xi x$ , em $\xi y = 0.5$ , para $r = 1/2$ .....	121
Figura 3.31 – Variação da função $Y$ ao longo de $\xi x$ , em $\xi y = 0.5$ , para $r = 1/10$ .....	122
Figura 3.32 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\chi$ , em $\xi x = 0$ , para $r = 1/2$ .....	124
Figura 3.33 – Variação da função $f_{1/q}$ ao longo de $\chi$ , em $\xi x = 0$ , para $r = 1$ .....	124
Figura 4.1 – Representação esquemática do modelo estrutural .....	136
Figura 4.2 – Variação de $f(\chi, j, r)$ ao longo de $\chi$ , com $r = 1$ , para $j = 1$ e $3$ .....	143
Figura 4.3 – Estudo paramétrico da equação de frequências para $j = 1$ e $r = 1$ .....	146
Figura 4.4 – Estudo paramétrico da equação de frequências para $j = 2$ e $r = 1$ .....	148
Figura 4.5 – Estudo paramétrico da equação de frequências para $j = 3$ e $r = 1$ .....	148
Figura 4.6 – Estudo paramétrico da equação de frequências para $j = 1$ e $r = 2$ .....	149
Figura 4.7 – Estudo paramétrico da equação de frequências para $j = 1$ e $r = 1/2$ .....	149

Figura 4.8 – Variação de $f(\chi, j, r, n)$ ao longo de $\chi$ , com $r = 1$ , para $j = 1$ e $3$ .....	152
Figura 4.9 – Variação de $f(\chi, j, r, n)$ ao longo de $\chi$ , com $r = 1$ , para $j = 2$ e $4$ .....	152
Figura 4.10 – Variação de $f(\chi, j, r)$ ao longo de $\chi$ , com $r = 1$ e $j = 1$ .....	156
Figura 4.11 – Variação de $f(\chi, j, r)$ ao longo de $\chi$ , com $r = 1$ e $j = 2$ .....	156
Figura 4.12 – Representação esquemática da cavidade (a) e da estrutura (b) .....	158
Figura 4.13 – Domínios das soluções para $j = 1$ e $r = 1$ .....	163
Figura 5.1 – Representação esquemática do problema .....	171
Figura 5.2 – Variação do determinante de $\mathcal{R}$ ao longo de $\chi$ .....	184
Figura 5.3 – Deformada modal do quinto modo e função aproximada .....	189
Figura 5.4 – Variação do determinante de $\mathcal{R}$ ao longo de $\chi$ .....	193
Figura 5.5 – Explicação do fenômeno de frequências idênticas independente de $r$ .....	202
Figura 5.6 – Variação do determinante de $\mathcal{R}$ ao longo de $\chi$ para $n_0 = 1$ .....	213
Figura 5.7 – Variação da solução pseudo-acoplada com $n_0 = 1$ ao longo de $\chi$ .....	214
Figura 5.8 – Variação da solução pseudo-acoplada ao longo de $\chi$ (parte real) .....	215
Figura 6.1 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de $c$ ) .....	228
Figura 6.2 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de $f_2$ ) .....	232
Figura 6.3 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de $c$ ) .....	233
Figura 6.4 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação senoidal) .....	236
Figura 6.5 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação senoidal) .....	237
Figura 6.6 – Amplitudes da resposta dinâmica .....	238
Figura 6.7 – Resposta de deslocamentos (excitação harmônica composta) .....	239
Figura 6.8 – Resposta para uma excitação harmônica composta com $A_1/A_2 = 5$ .....	240
Figura 6.9 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação cossenoidal) .....	241
Figura 6.10 – Amplitudes da resposta dinâmica em função de $\omega_1$ (excitação cossenoidal) .....	242
Figura 6.11 – Amplitudes da resposta dinâmica em função de $\omega_1$ (excitação senoidal) ..	243
Figura 6.12 – Resposta de deslocamentos (excitação harmônica composta) .....	243
Figura 6.13 – Modelo de elementos finitos utilizado na análise .....	248
Figura 6.14 – Soluções analíticas (2 modos) e numéricas de deslocamentos .....	250
Figura 6.15 – Soluções analíticas (1 modo) e numéricas de deslocamentos .....	251
Figura 6.16 – Soluções analíticas e numéricas de deslocamentos (excitação composta) .	252
Figura 6.17 – Representação esquemática do problema de excitação sísmica .....	254
Figura 6.18 – Respostas de deslocamentos (a) e acelerações relativas (b) .....	258

Figura 6.19 – Soluções analíticas e numéricas de deslocamentos.....	259
Figura 6.20 – Resposta analítica de deslocamentos relativos (múltiplas frequências).....	261
Figura 6.21 – Registro completo (a) e janela de tempo (b) do terremoto El Centro .....	261
Figura 6.22 – Resposta de deslocamentos relativos (El Centro – Análise 4).....	262
Figura 6.23 – Espectro de frequências da excitação (El Centro).....	262
Figura 7.1 – Esquema e estratégias de solução dos problemas acoplados .....	264
Figura 7.2 – Esquema de solução do problema de interação barragem-reservatório .....	266
Figura 7.3 – Sistema equivalente barragem-reservatório .....	272
Figura 7.4 – Geometria da barragem (a) e malha de elementos finitos (b) .....	272
Figura 7.5 – Resultados numéricos de deslocamentos relativos (crista) para os sistemas não-amortecido (a) e amortecido (b) .....	277
Figura 7.6 – Deslocamentos (a) e acelerações relativas (b) da crista da barragem no modo fundamental .....	277
Figura 7.7 – Comparativo entre acelerações relativa (amortecido; crista) e do solo.....	278
Figura 7.8 – Tensões principais máximas para uma aceleração constante (a) e em $t = 2.56s$ (b) .....	278
Figura 7.9 – Tensões principais mínimas para uma aceleração constante (a) e em $t = 2.56s$ (b) .....	279
Figura 7.10 – Comparativo entre acelerações relativas (amortecidas) com 1 e 5 modos..	279
Figura 7.11 – Tensões principais máximas ( $Pa$ ) considerando 5 modos (a) e 1 modo (b) $t = 2.48s$ .....	280
Figura 7.12 – Espectro de deslocamentos (a) e deslocamentos da crista da barragem (b) .....	281
Figura 7.13 – Resposta de deslocamentos relativos não-amortecidos. Casos CF (a) e IF (b) .....	284
Figura 7.14 – Resposta de acelerações relativas não-amortecidas. Casos CF (a) e IF (b) .....	284
Figura 7.15 – Resposta de deslocamentos relativos amortecidos. Soluções 1 (a) e 2 (b).....	285
Figura 7.16 – Tensões principais máximas do modelo acoplado (a) e Caso CF (b) .....	285
Figura 7.17 – Tensões principais máximas do modelo acoplado (a) e Caso CF (b) .....	286
Figura 7.18 – Deslocamentos amortecidos da crista da barragem. Casos CF (a) e IF (b).	287

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

$\bar{A}$	- amplitude máxima dos deslocamentos do contorno móvel
$\tilde{C}$	- amortecimento generalizado
$C_{ij}$	- matriz das constantes da solução exata
$CF$	- fluido compressível e fronteira flexível
$CR$	- fluido compressível e fronteira rígida
$\mathcal{D}$	- amplitude do espectro de deslocamentos
$EI(y)$	- rigidez a flexão da estrutura
$F(x)$	- solução longitudinal das pressões dinâmicas independente do tempo
$F$	- espessura da viga
$\tilde{F}$	- força generalizada
$G(x)$	- solução transversal das pressões dinâmicas independente do tempo
$H$	- altura da viga
$IF$	- fluido incompressível e fronteira flexível
$IR$	- fluido incompressível e fronteira rígida
$K$	- rigidez da estrutura
$\tilde{K}$	- rigidez generalizada
$L_x$	- comprimento longitudinal da cavidade
$L_y$	- comprimento transversal da cavidade
$\tilde{L}_n$	- fator de excitação sísmico
$\tilde{M}$	- massa generalizada
$\tilde{M}_{fluido}$	- massa generalizada produzida pelo fluido
$\tilde{M}_{total}$	- massa generalizada total (estrutura acrescida dos efeitos do fluido)
$M(y)$	- momentos fletores
$\tilde{N}$	- fator de excitação sísmico adicional produzido pelo fluido
$P(x, y)$	- componente das pressões dinâmicas independente do tempo
$P_{norm.}$	- pressão dinâmica normalizada
$Q(y, t)$	- carregamento externo distribuído ao longo da estrutura
$\mathcal{R}_{ij}$	- matriz dos coeficientes da solução exata
$S_i$	- área de influência do nó $i$ da interface do modelo numérico
$T$	- período de vibração da estrutura

$U_1(y)$	- componente de $u_1(y, t)$ independente do tempo
$U_2(y)$	- componente de $u_2(y, t)$ independente do tempo
$\mathcal{V}(y)$	- esforços cortantes
$X(t)$	- coordenada generalizada da estrutura
$\mathcal{b}$	- rigidez volumétrica do fluido
$c$	- velocidade do som no fluido
$c_j$	- constantes da função de deslocamentos da solução exata
$\bar{f}_r$	- massa do fluido proporcional à aceleração relativa estrutura
$\bar{f}_g$	- massa do fluido proporcional à aceleração do solo
$\beta_1$	- relação entre frequências da estrutura e da cavidade (transversal)
$\beta_2$	- relação entre massas do fluido e da estrutura
$j$	- índice associado ao modo de vibração da estrutura no vácuo
$m$	- massa da estrutura
$m$	- número inteiro associado às ressonâncias da cavidade
$m_s(y)$	- distribuição de massa ao longo da altura da barragem
$m_f(y)$	- efeito inercial do fluido ao longo da altura da barragem
$m^j$	- massa associada ao nó $j$ do modelo numérico
$\bar{m}^i$	- massa adicional associado ao nó $i$ da interface do modelo numérico
$n$	- índice de solução ou somatório
$p(x, y, t)$	- função de pressões dinâmicas
$p_{ef}$	- excitação efetiva produzida pelo sismo ( $-m\ddot{u}_g(t)$ )
$q_n(t)$	- coordenada generalizada correspondente a um dado modo $n$
$q(y)$	- distribuição de forças sísmicas equivalentes ao longo da estrutura
$r$	- relação entre $L_x$ e $L_y$
$u(y, t)$	- função de deslocamentos do contorno móvel
$u_1(y, t)$	- função de deslocamentos da parte da viga em contato com o fluido
$u_2(y, t)$	- função de deslocamentos da parte da viga sem contato com o fluido
$u_g$	- componente de deslocamento do solo
$u_r$	- componente de deslocamento relativo da estrutura
$u_t$	- componente de deslocamento total da estrutura ( $u_r + u_g$ )
$v(y, t)$	- função de deslocamentos da estrutura
$\alpha$	- constante arbitrária

$\beta$	- constante de separação
$\beta_n$	- relação entre a frequência de excitação e a frequência natural $\omega_n$
$\beta_{ij}$	- relação entre a frequência de excitação $j$ e a frequência natural $\omega_i$
$\gamma$	- constante de separação
$\delta$	- constante de separação
$\kappa$	- constante positiva, negativa ou nula
$\lambda$	- parâmetro de compressibilidade do fluido
$\mu(y)$	- massa por unidade de comprimento da estrutura
$\xi$	- taxa de amortecimento
$\xi_x$	- relação entre $x$ e $L_x$
$\xi_y$	- relação entre $y$ e $L_y$
$\rho_f$	- densidade do fluido
$\rho_s$	- densidade da estrutura
$\bar{\rho}$	- relação entre densidades do fluido e da estrutura
$\phi(y)$	- função de deslocamentos normalizada do contorno móvel
$\phi_r^j$	- deslocamento modal resultante do nó $j$ associado ao modelo numérico
$\phi_r^i$	- deslocamento modal resultante do nó $i$ da interface do modelo numérico
$\phi_x^j$	- deslocamento modal em $x$ do nó $j$ associado ao modelo numérico
$\phi_x^i$	- deslocamento modal em $x$ do nó $i$ da interface do modelo numérico
$\phi_y^j$	- deslocamento modal em $y$ do nó $j$ associado ao modelo numérico
$\varphi$	- parâmetro da solução exata do problema acoplado
$\varphi_x^i$	- fator de correção dos deslocamentos associado ao nó $i$ da interface
$\chi$	- número associado à primeira frequência transversal da cavidade
$\chi_{crítico}$	- valores de $\chi$ correspondentes as ressonância da cavidade
$\omega$	- frequência de oscilação
$\omega_{crítico}$	- frequências correspondentes as ressonâncias da cavidade
$\omega_{v\u00e1cuo}^j$	- frequência da estrutura no vácuo para um dado modo $j$
$\omega_{cav.}^1$	- primeira frequência transversal da cavidade desacoplada
$\omega_b$	- frequência base
$\bar{\omega}_n$	- frequência da excitação aplicada

# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 - GENERALIDADES

Os problemas de interação entre um fluido e uma estrutura são de grande interesse em um vasto número de aplicações práticas da engenharia. Nestes casos, o movimento destes dois subsistemas não é independente, sendo governado por condições dinâmicas de contato entre os meios. Um exemplo simples desta interação pode ser verificado pelo movimento de um corpo em contato com um fluido. Axisa (2007) apresenta um experimento elementar (Figura 1.1) que permite obter conclusões imediatas, consistindo no movimento de uma mão submersa em um recipiente contendo água. Nota-se que o fluido resiste ao movimento, entretanto não o impede. A magnitude das forças resistivas é diretamente influenciada pela frequência e amplitude da oscilação.

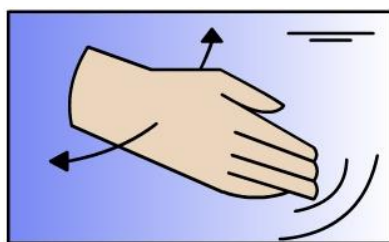


Figura 1.1 – Experimento de vibração de um corpo submerso em um fluido

Dentre as categorias de interação destaca-se, por sua simplicidade, a interação entre a estrutura e um fluido acústico (Bathe, 1998). Por meio de diversos mecanismos as estruturas são capazes de radiar, transmitir e responder às ondas sonoras (Filippi, 1998). Os instrumentos musicais constituem exemplos práticos, onde ondas sonoras são radiadas ao meio por mecanismos de vibrações induzidas. Um aspecto recíproco deste fenômeno é a vibração de uma estrutura por meio de uma onda incidente. Os ossos do ouvido humano, por exemplo, respondem ao receber ondas acústicas do meio externo, produzindo movimentos que excitam os nervos auditivos e permitem a percepção do som. É evidente que os dois fenômenos podem ocorrer simultaneamente. Neste caso, as ondas sonoras excitam a estrutura, que por sua vez produz um segundo campo acústico, caracterizando um fenômeno de transmissão. É por este motivo que torna-se possível escutar ruídos externos no interior de uma sala. O campo de estudo dedicado a fenômenos desta natureza é conhecido como Vibroacústica ou Acústica Estrutural (Fahy, 2007).



O contato inevitável do meio acústico (ar, água, etc.) com estruturas produzidas pelo homem torna a interação acústico-estrutural relevante na análise dinâmica de muitos sistemas físicos (Davis, 2008).

De acordo com Fahy (2007) existem diversos casos onde a interação entre uma estrutura vibrante e um fluido é capaz de influenciar a magnitude, as frequências, e até mesmo a estabilidade de um sistema estrutural. Alguns exemplos incluem: barragens, chaminés, tubos de troca de calor, navios e seus propulsores, plataformas “off-shore”, aeronaves e cabos de transmissão. Este mesmo autor explica que os efeitos práticos da ação de um fluido sobre uma estrutura incluem a modificação: das frequências naturais (por forças inerciais ou elásticas) e do amortecimento (por radiação de energia sonora). Portanto, estes efeitos influenciam a resposta dinâmica e, conseqüentemente, a radiação de energia. É evidente que os efeitos produzidos pelo fluido serão mais intensos em estruturas em contato com fluidos densos, pois as forças de interação geralmente são proporcionais à densidade do fluido. Os problemas acústicos e estruturais podem ser resolvidos de forma independente à medida que os efeitos de acoplamento tornam-se menos significativos. Entretanto, em casos específicos, até mesmo o ar pode exercer forças significativas de interação.

Em muitas aplicações práticas surge o problema de fluidos contidos em compartimentos (Figura 1.2). Trata-se de um campo de estudo de grande interesse na engenharia, em particular devido ao conforto acústico em cabines de passageiros em aeronaves e automóveis, por exemplo. Adicionalmente, pode-se citar o caso de reatores nucleares resfriados a água, tanques propulsores de foguetes, domos de sonar submersos e reservatórios. (Fahy, 2001). Este autor explica que, embora os sistemas reais apresentem formas complexas, o tratamento de geometrias simplificadas fornece a base para um entendimento qualitativo e o desenvolvimento de soluções alternativas. Este campo de estudo é geralmente definido como elasticidade acústica ou problema acoplado acústico-estrutural (Hong et al., 1995 e Dowell et al., 1977).

O tratamento analítico de problemas acoplados apresenta como maior vantagem a identificação de parâmetros adimensionais que permitem a interpretação física das soluções. Entretanto, para modelos mais complexos uma solução deste tipo muitas vezes

não é possível. Problemas de interação fluido-estrutura já foram resolvidos por vários métodos, incluindo abordagens analíticas, semi-analíticas e numéricas. As soluções analíticas são aplicadas a poucos casos específicos, enquanto as soluções numéricas lidam com casos mais gerais. Entretanto, a implementação numérica requer tempo na construção de modelos e em processamento computacional. Adicionalmente torna-se difícil explicar os efeitos qualitativos do fluido no sistema acoplado. Desta forma, os procedimentos analíticos apresentam a sua importância na solução de casos mais simples, podendo ser utilizados na validação de soluções numéricas (Amabili, 1996).

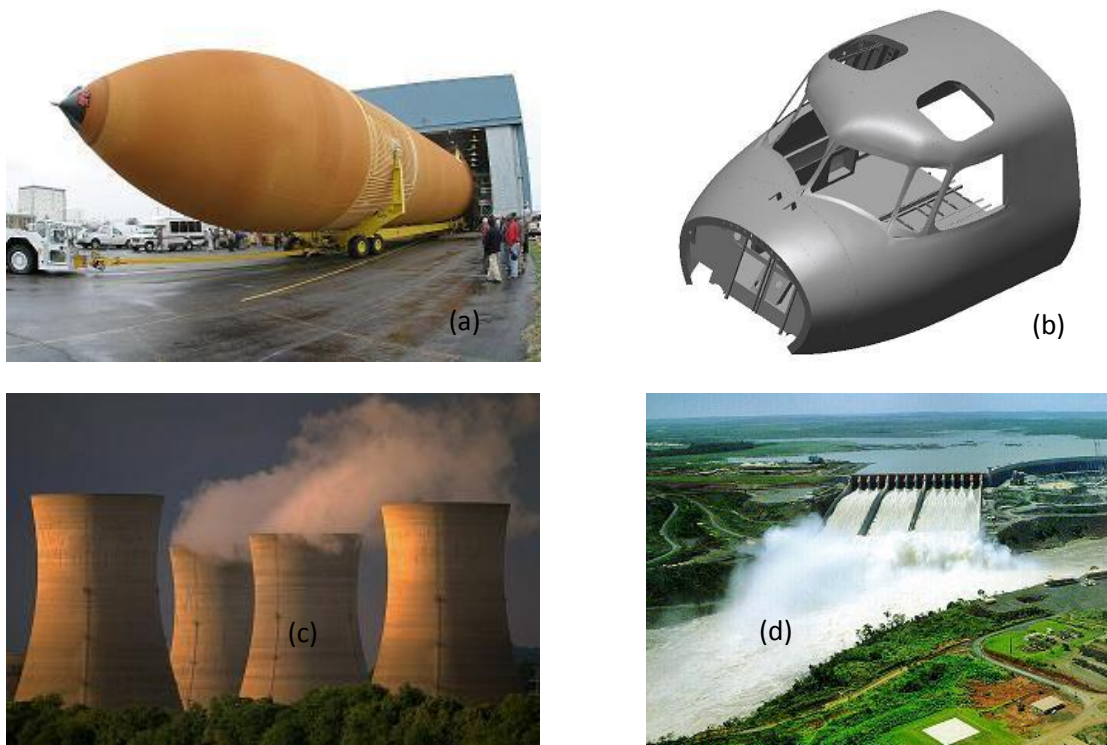


Figura 1.2 – Exemplos de compartimentos preenchidos por fluidos.

(a) tanque propulsor (NASA), (b) cabine de aeronave (NEOMETRIXTECH), (c) torre de resfriamento (USNEWS), (d) barragem de concreto (ULTRAFLUX)

Um caso de grande interesse na engenharia de barragens, e que será objeto deste estudo, surge durante a interação dinâmica entre a barragem e o reservatório durante um sismo. Trata-se de um fenômeno de natureza acoplada, onde o movimento da estrutura produz solicitações no fluido, que por sua vez interage produzindo pressões hidrodinâmicas sobre a estrutura. Caso o fluido seja considerado acústico, o problema será tratado como uma interação acústico-estrutural, onde a barragem irá representar uma parede flexível e o reservatório será associado a um compartimento acústico. As várias condições de contorno apresentadas na Figura 1.3 poderão ser investigadas ao longo destes estudos.

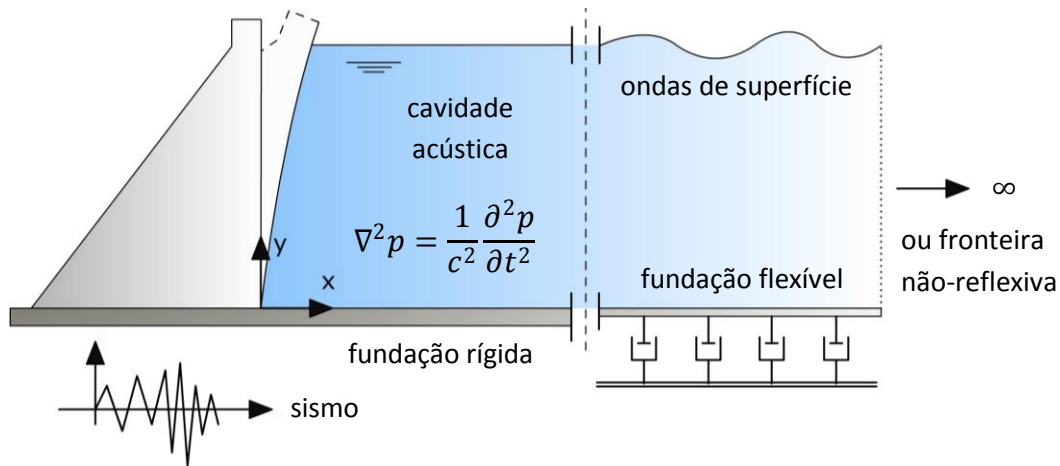


Figura 1.3 – Representação esquemática do problema: estrutura (barragem) e cavidade associada (reservatório)

## 1.2 - REVISÃO DA LITERATURA

A análise da interação entre um fluido e uma estrutura já foi objetivo de diversos estudos. Na metade do século dezanove foram realizados alguns experimentos, que demonstravam a radiação do som por meio das vibrações de um sino, contido em um recipiente de vidro. À medida que o ar era parcialmente retirado do recipiente, o som produzido pelo sino tornava-se cada vez mais fraco. Uma variação do experimento consistia em substituir o fluido do recipiente por hélio, ao invés de ar. Desta forma, o som produzido torna-se ainda menos intenso (Rayleigh, 1945).

É conveniente destacar que o desenvolvimento científico deste campo de pesquisa permite dividi-lo em duas categorias. A Vibroacústica é relacionada ao estudo de cavidades onde o fluido em questão é um gás. Desta forma, são estudados problemas de radiação e transmissão do som, fuselagens aeronáuticas, conforto acústico em cabines, etc. Na Fluido-Estrutura enquadram-se os problemas de cavidades preenchidas, ou parcialmente preenchidas por fluidos densos, como a água, por exemplo. Algumas aplicações incluem: reservatórios, tubos de troca de calor e vasos de reatores nucleares (Davis, 2008).

### 1.2.1 - Vibroacústica (cavidades contendo fluidos gasosos)

Esta categoria envolve os problemas vibroacústicos clássicos, onde o fluido em questão apresenta baixa densidade. Textos de referência podem ser encontrados nos trabalhos de Rayleigh (1945), Morse e Ingard (1986), Junger e Feit (1993), Howe (1998) e Fahy (2007).

Uma das primeiras explicações para este fenômeno de interação foi a produzida por Stokes (1868): “Quando um corpo é movimentado periodicamente de forma lenta em um fluido, este apresenta um comportamento incompressível, acompanhando o movimento do corpo. Entretanto, à medida que a velocidade deste movimento aumenta, implicando em uma diminuição do período de vibração, a condensação e a rarefação do fluido, que inicialmente era insensível, passam a se tornar significativas, com a produção de ondas sonoras geradas pelo fluxo. Para um dado período, tamanho, forma e modo de vibração do corpo, o fluido irá se aproximar de um comportamento incompressível à medida que ocorra o incremento da velocidade de propagação do som no meio.”

Os estudos de uma cavidade acústica associada a uma placa partiram do interesse na estabilidade e excitação de painéis por ruídos aerodinâmicos (Pan et al., 1990). A resposta analítica do sistema painel-cavidade tridimensional foi inicialmente investigada por Dowell e Voss (1963). Neste estudo foram consideradas amplitudes de movimento pequenas, de forma que as equações linearizadas de fluxo pudessem ser utilizadas. O objetivo do estudo era determinar os efeitos aerodinâmicos de instabilidade em aeronaves.

Lyon (1963) investigou uma cavidade acústica rígida, contendo um painel flexível, considerando que a frequência crítica do painel era superior a primeira frequência de ressonância da cavidade, propondo um procedimento para redução do ruído.

Pretlove (1965) deu continuidade ao estudo das cavidades acústicas fechadas, verificando os efeitos do acoplamento nas frequências e modos de vibração do painel. Soluções analíticas foram obtidas com a utilização de modos acústicos aproximados. Este autor concluiu que existem duas categorias distintas de sistemas painel-cavidade. No primeiro tipo a ação da cavidade sobre o comportamento dinâmico do painel é desprezível. No segundo tipo modificações consideráveis são encontradas nos modos e frequências de vibração do sistema. Pretlove (1966) estudou a resposta forçada deste tipo de sistema, chegando a conclusão de que os efeitos de acoplamento tornam-se significativos em painéis delgados acoplados à cavidades curtas.

Guy e Bhattacharya (1973) estudaram os efeitos de uma cavidade finita na vibração e transmissão de ondas acústicas por um painel acoplado. Fenômenos típicos do sistema painel-cavidade (como ressonância, por exemplo) foram identificados. Técnicas gráficas

foram aplicadas para a solução de frequências de interesse, além da comparação entre soluções analíticas e experimentais.

Gerges e Fahy (1976) analisaram a resposta de velocidade de uma viga cilíndrica contida em uma câmara de reverberação, verificando a vibração induzida pelo campo acústico e a radiação sonora emitida por esta estrutura. Este estudo permite aplicação a reatores nucleares resfriados a gás, além de viabilizar o estudo de câmaras de reverberação nas situações em que um experimento de excitação direta não é possível.

Gerges e Fahy (1977) investigaram a resposta de cascas cilíndricas esbeltas submetidas a excitações internas de natureza acústica, utilizando um modelo teórico para estimar o nível de vibração em situações abaixo da frequência de corte (“cut-off”). Estes resultados foram posteriormente validados via experimentos.

Dowell *et al.* (1977) utilizou a técnica de expansão do campo acústico e dos deslocamentos estruturais em termos dos seus modos de vibração desacoplados para a solução do problema acoplado. Neste trabalho foi apresentada uma discussão sobre a teoria geral da elasticidade acústica, incluindo o efeito de uma parede absorvente. Um método computacional foi proposto e utilizado para a solução de frequências naturais de cavidades múltiplas conectadas. Fórmulas simplificadas foram desenvolvidas e os resultados teóricos foram comparados a experimentos, revelando uma boa concordância. Utilizando um procedimento semelhante Pan e Bies (1990) estudaram os efeitos produzidos por um painel em uma cavidade tridimensional retangular. De acordo com Hong e Kim (1995a), ambos os procedimentos permitem a solução do problema de frequências acopladas, embora a matemática envolvida seja um tanto complexa. Estes últimos autores propuseram um procedimento para a análise de vibrações livres de sistemas com acoplamento acústico-estrutural, onde as equações são resolvidas pelo método de expansão modal utilizando os modos desacoplados dos subsistemas. Neste método um sistema de equações é definido para a solução dos valores próprios do sistema acoplado, onde a precisão dos resultados é diretamente relacionada ao número de equações envolvidas. Hong e Kim (1995b) apresentam a segunda parte do trabalho, onde o procedimento anterior é aplicado à solução de problemas em duas e três dimensões.

O avanço tecnológico, produzindo computadores com maior capacidade de processamento e memória, permitiu a solução de problemas acústicos complexos, envolvendo geometrias arbitrárias, permitindo a utilização de modelos numéricos nas análises e eliminando, ou diminuindo, a necessidade de protótipos para a análise das características vibroacústicas de sistemas, tais como: salas de teatro, cinemas e cabines automotivas (Gerges, 2000).

O setor automotivo demonstra grande interesse por estudos nesta área e dentre os trabalhos mais recentes, de âmbito nacional, pode-se citar os Galli (1995) e Pavan (2008), que investigaram cabines de automóveis utilizando o Método dos Elementos Finitos. O primeiro autor estudou problemas bidimensionais, envolvendo aplicações a cavidades com contornos rígidos, móveis e flexíveis. O segundo autor estudou problemas tridimensionais, incluindo aplicações a cavidades cúbicas e hexaédricas.

### **1.2.2 - Interação fluido-estrutura (cavidades contendo fluidos densos)**

Esta categoria de problema foi inicialmente abordada de forma analítica, na maioria das vezes associada a resultados experimentais. Trabalhos clássicos incluem os textos de Lamb (1945), Westergaard (1933), Abramson (1967), Gibert (1988), Blevins (1990) e tantos outros.

Rayleigh (1945) calculou o aumento da inércia de um disco rígido vibrando em contato com um fluido. Lamb (1921) determinou as frequências naturais de uma placa circular rígida, engastada em uma parede infinita em contato com a água, utilizando a abordagem de modos de vibração pré-definidos. Powell e Roberts (1923) validaram por meio de experimentos os resultados obtidos por Lamb. McLachlan (1932) analisou os efeitos de interação em placas circulares com bordos livres.

De forma paralela a este desenvolvimento surgia o estudo analítico mais detalhado da interação bidimensional barragem-reservatório. Foi Westergaard (1933) quem primeiro verificou a interação dinâmica existente entre uma barragem de concreto gravidade e o reservatório adjacente, propondo uma solução analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas produzido pelo movimento de corpo rígido em direção ao fluido. As seguintes hipóteses foram consideradas: reservatório de profundidade constante e com extensão infinita na direção longitudinal, efeitos de ondas de superfície livre desprezados,

fluido linearmente compressível, e barragem rígida infinitamente longa com face de montante vertical. Este estudo inspirou o conceito de massa adicional, onde uma massa extra é mobilizada pelo movimento de corpo rígido da barragem. Este procedimento tradicional de análise ficou conhecido como Método Pseudo-Estático ou Método do Coeficiente Sísmico (USBR, 1976).

Brahtz e Heilbron (1933), em discussão ao artigo original de Westergaard (1933), apresentaram uma solução alternativa para reservatórios de comprimento finito. Estes autores demonstram que a diferença entre os resultados (domínio finito e infinito) torna-se desprezível (menor que 5%) para uma relação entre o comprimento e a profundidade maior do que dois, no caso de um reservatório fixo em relação ao movimento do solo, e maior do que três, no caso de um reservatório que acompanha o movimento do solo. Adicionalmente, estes autores propuseram uma modificação que incluía os efeitos de flexibilidade da barragem. Este procedimento consistia em inicialmente calcular os efeitos hidrodinâmicos e de inércia devido ao movimento de corpo rígido. Estas ações eram aplicadas à barragem para o cálculo dos deslocamentos. Então, o deslocamento total era composto pelo movimento da base acrescido da deflexão estrutural. As forças hidrodinâmicas e de inércia eram recalculadas com base nestes novos deslocamentos, podendo o processo ser repetido caso uma maior precisão fosse necessária.

Hoskins e Jacobsen (1934) estudaram os efeitos produzidos pelo fluido em um reservatório finito, em um experimento que consistia em um tanque associado a um pistão submetido a uma força de impacto. Os resultados experimentais da força adicional produzida pelo fluido foram comparados a uma solução analítica, semelhante a expressão obtida por Westergaard. Esta expressão representava uma solução geral, reduzindo a solução de Westergaard a um caso limite.

Zangar (1952) investigou a distribuição de pressões hidrodinâmicas para várias inclinações do paramento de montante, sem a consideração da compressibilidade do fluido. Este autor concluiu que barragens onde a face de montante apresenta um trecho reto, maior ou igual que a metade da altura total, apresentam uma distribuição de pressões hidrodinâmicas praticamente igual a de um paramento completamente vertical.

Os estudos de Westergaard (1933) incluíam a compressibilidade do fluido, produzindo uma massa adicional dependente da frequência de excitação do movimento do solo. Entretanto, Kotsubo (1959) demonstrou que esta solução era válida apenas para frequências de excitação menores que a frequência natural do reservatório.

Bustamante *et al.*(1963) investigou os efeitos do comprimento do reservatório finito para uma grande faixa de excitações, e concluiu que este parâmetro apresentava influência importante apenas em barragens de altura elevada. Este mesmo autor verificou os efeitos produzidos pelas ondas de superfície em função da profundidade do reservatório e da frequência de excitação, concluindo que esta condição contribuía de forma pouco significativa na resposta.

Chopra (1966) apresentou um estudo onde o problema foi dividido em duas soluções desacopladas: resposta sísmica da barragem ignorando os efeitos de interação com o fluido (Caso I) e pressões hidrodinâmicas produzidas por uma barragem rígida durante um terremoto (Caso II). Desta forma, a resposta completa da barragem poderia ser obtida nas situações em que os efeitos de interação fossem pequenos, resultando em uma solução dada pela combinação dos Casos I e II.

A hipótese de um fluido incompressível simplifica em grande parte o fenômeno de interação. Este tipo de solução modifica a natureza do problema hidrodinâmico. De acordo com Chopra (1966), uma excitação do tipo sísmica consiste em uma vasta gama de frequências, e a resposta mais significativa das pressões hidrodinâmicas será dada pela aproximação entre os valores próprios de vibração do sistema e as frequências de excitação do sismo. Assim, a não-consideração da compressibilidade do fluido pode conduzir a erros inaceitáveis na resposta dinâmica da estrutura.

Chopra (1967) e Bustamante *et al.*(1963) estudaram os efeitos da compressibilidade do fluido em uma barragem rígida. Estes autores concluíram que a solução torna-se independente da frequência de excitação quando a compressibilidade é desprezada, dependendo apenas da aceleração do solo para um instante de tempo qualquer, e que os erros resultantes desta abordagem na resposta de forças atuantes ao longo do tempo tornam-se significativos a medida que a profundidade do reservatório aumenta. Chopra



(1967) também concluiu que a abordagem do tipo massa adicional não é válida para excitações de origem sísmica.

Em 1967, um terremoto de magnitude 6.5 ocorrido na Índia produziu danos na barragem de Koyna, que havia sido calculada de acordo com o procedimento tradicional (pseudo-estático). A barragem, projetada com um coeficiente sísmico de  $0.05g$ , apresentou fissuras importantes nos paramentos de montante e jusante, em locais próximos a mudanças de inclinação. Uma ruptura brusca não ocorreu, e nenhum vazamento foi detectado, entretanto os danos foram severos, levando a construção de contrafortes nos paramentos de jusante (CEE, 1990). Este acontecimento motivou um estudo mais detalhado da interação dinâmica existente neste tipo de problema e gerou dúvidas quanto à validade do procedimento tradicional de projeto (Chopra e Chakrabarti, 1971).

Chopra (1970) investigou a resposta de barragens de concreto gravidade, quando submetidas a excitações horizontais de origem sísmica. O problema foi simplificado a uma análise linear de um sistema bidimensional, com a resposta da barragem sendo aproximada pelo modo fundamental de vibração. Quatro situações foram estudadas: barragem desacoplada, sistema barragem-reservatório sem interação, sistema barragem-reservatório com interação, e sistema barragem-reservatório com interação e sem efeitos de compressibilidade. Este autor concluiu que os efeitos de interação entre a barragem e o reservatório, além dos efeitos de compressibilidade do fluido, não podem ser desprezados. Desta forma, verificou que o procedimento tradicional de corpo rígido em direção a um fluido incompressível pode produzir erros significativos.

Chopra (1978) apresentou um procedimento analítico simplificado, onde os efeitos de interação e a compressibilidade do fluido foram incluídos na análise. Este procedimento ficou conhecido como Método Pseudo-Dinâmico (Leclerc *et al.*, 2003), que consiste em uma análise simplificada do espectro de resposta, determinando a resposta da estrutura no modo fundamental de vibração para um movimento horizontal do terreno.

Chwang (1978) apresentou uma solução exata para a distribuição de pressões hidrodinâmicas em barragens rígidas com várias inclinações do paramento de montante, sem a inclusão dos efeitos de compressibilidade do reservatório. Alterações pouco significativas foram encontradas para paramentos praticamente verticais. Este trabalho teve

seqüência dada por Liu (1986), que obteve a solução exata para uma barragem rígida com paramento inclinado associada a um reservatório triangular.

Rashed (1983) investigou analiticamente e numericamente problemas de interação fluido-estrutura, determinando freqüências e modos de vibração do problema acoplado. Soluções em duas e três dimensões foram desenvolvidas e aplicadas a problemas de interação barragem-reservatório sob ação de excitações de origem sísmica.

Fenves e Chopra (1984) estudaram o problema bidimensional onde foi considerada a interação barragem-reservatório-fundação, incluindo os efeitos de absorção de ondas no fundo do reservatório. Estes autores desenvolveram um procedimento simplificado para a análise preliminar de barragens de concreto gravidade, considerando o modo fundamental de vibração. A flexibilidade da fundação e os efeitos de absorção dos sedimentos representam refinamentos em relação ao método proposto por Chopra (1978). Estes autores concluíram que tanto os efeitos de absorção de ondas, como a interação com a fundação, tendem a diminuir os efeitos produzidos pelo sismo. Fenves e Chopra (1985) acrescentaram uma correção estática ao procedimento anterior para a inclusão dos efeitos dos modos mais altos de vibração.

Lee e Tsai (1991) determinaram a solução analítica, no domínio do tempo, de uma barragem associada a um reservatório infinito. Os efeitos de ondas de superfície não foram considerados. Estes autores apresentaram os resultados da análise transiente do sistema submetido a funções de excitação do tipo rampa e sísmica. Entretanto, características dinâmicas do sistema acoplado, tais como freqüências e modos de vibração não foram discutidos.

Weber (1994) investigou modelos analíticos bidimensionais e tridimensionais de barragens rígidas, incluindo os efeitos de absorção de ondas no fundo do reservatório e da compressibilidade do fluido. Soluções para canais de formato retangular e semicircular também foram apresentadas.

Bouaanani *et al.* (2003) apresentou uma solução analítica fechada para as pressões hidrodinâmicas, incluindo uma condição de absorção de ondas no fundo do reservatório.

Esta solução inclui um procedimento para a determinação dos autovalores do sistema acoplado barragem-reservatório.

Ribeiro (2006) propôs um procedimento analítico para a solução do campo de tensões em barragens de concreto gravidade. Este método permite a solução pseudo-estática e pseudo-dinâmica simplificada, baseada nas equações do Método da Gravidade (USBR, 1976).

Silva (2007) estudou analiticamente e comparou numericamente casos de interação dinâmica barragem-reservatório. Este autor utilizou a técnica de separação de variáveis para a solução analítica das pressões hidrodinâmicas em barragens rígidas e flexíveis, aceleradas em fluidos compressíveis e incompressíveis. Adicionalmente, propôs um amortecedor para a superfície de truncamento em reservatório infinitos. A solução obtida para a barragem flexível em um fluido compressível representa exatamente a solução obtida por Chopra (1978).

De acordo com Silva (2007), na análise do sistema barragem-reservatório é usual tratar uma das dimensões do reservatório com extensão infinita, onde as pressões são nulas. Nestes casos as soluções analíticas devem satisfazer a condição de radiação no infinito, como a indicada por Sommerfeld (1947).

Numerosas investigações também foram realizadas utilizando procedimentos semi-analíticos. Avilés e Li (1998) analisaram as pressões hidrodinâmicas em paramentos inclinados, compostos por uma ou duas inclinações, incluindo os efeitos de compressibilidade e viscosidade do fluido. O problema de análise no domínio do tempo da interação barragem-reservatório foi estudado em duas e três dimensões. Podem-se citar os trabalhos de Tsai e Lee (1990), Tsai *et al.* (1990), Tsai e Lee (1991). Recentemente, Shang-ming *et al.* (2008) apresentou uma solução semi-analítica para o sistema bidimensional barragem-reservatório no domínio da frequência, incluindo os efeitos de absorção de ondas no fundo do reservatório.

Observa-se que a busca por soluções analíticas ou semi-analíticas motivou o desenvolvimento dos trabalhos apresentados anteriormente. Entretanto, destacam-se também os estudos relacionados a métodos numéricos. Por meio do Método dos Elementos Finitos a solução no domínio da frequência foi obtida por: Saini *et al.*(1978), Chopra e

Chakrabarti (1981), Hall e Chopra (1982), Fenves e Chopra (1985), Lofti *et al.*(1987), dentre outros. Este problema também foi abordado no domínio do tempo, incluindo os trabalhos de Sharan (1987) e Tsai *et al.* (1990). Para esta última solução é conveniente utilizar uma condição de radiação ao infinito (Sommerfeld, 1947), para representação da transmissão de ondas no limite do reservatório (Küçükarslan, 2003). Aplicações envolvendo o Método dos Elementos de Contorno no domínio da frequência foram desenvolvidas por Humar e Jablonski (1988), e Medina e Dominguez (1989). No domínio do tempo soluções foram desenvolvidas por Antes e von Storff (1987), e Wept *et al.*(1988). No âmbito nacional destaca-se o trabalho de Araújo (1995), que utilizou o Método dos Elementos Finitos para análise de barragens de gravidade de concreto, desde a sua fase construtiva até o início das operações.

Uma das maiores dificuldades encontradas na aplicação do Método dos Elementos Finitos, assim como em outras técnicas de discretização, ocorre devido à longa extensão do domínio do fluido. Desta forma, condições de truncamento são estabelecidas utilizando condições de absorção adequadas. A não-imposição destas superfícies resulta em custos computacionais proibitivos em uma análise tridimensional do reservatório (Pani e Bhattacharyya, 2008). Nesta linha de pesquisa destacam-se as investigações conduzidas por: Sharan (1985), Bayliss e Turkel (1979), Humar e Roufaiel (1983).

Destacam-se também os trabalhos envolvendo soluções analíticas de vibrações de uma coluna flexível em contato com um fluido. Goto e Toki (1965) estudaram as características vibratórias de colunas de pontes submetidas a excitações de origem sísmica. Liaw e Chopra (1973) investigaram o comportamento dinâmico de torres axissimétricas parcialmente submersas, concluindo que a interação aumenta o período de vibração e diminui a taxa de amortecimento modal. Concluíram que a abordagem clássica de massa adicional produz uma boa aproximação para a resposta do modo fundamental. Zhu *et al.*(1989) analisou as características da vibração acoplada entre uma coluna e um fluido, incluindo os efeitos de ondas de superfície e a compressibilidade da água. Estes trabalhos demonstram que as ondas de superfície exercem influência importante no comportamento de torres esbeltas, enquanto o efeito de compressibilidade é mais importante para estruturas curtas e espessas, onde a relação entre altura e largura é pequena. Um estudo mais detalhado das características dinâmicas do problema, incluindo uma investigação detalhada dos efeitos da compressibilidade, ondas de superfície e esbeltez é apresentado por Xing *et*

*al.*(1997). Getelina (2002) estudo um problema semelhante, porém sem a inclusão dos efeitos de ondas de superfície. Donin (2003) deu continuidade a estes estudos, incluindo estes efeitos e truncando a série relacionada às pressões hidrodinâmicas no trigésimo termo. O cálculo dos autovalores foi obtido a partir de um determinante de uma matriz simbólica de oitava ordem, cujos elementos eram somas parciais das séries envolvidas.

Outro problema de grande interesse surge durante o estudo de comportas associadas à estrutura da barragem, destinadas ao controle do fluxo de água. Durante a interação dinâmica estes elementos são submetidos a esforços hidrodinâmicos, produzidos pelo movimento do solo, por exemplo. Trata-se de uma temática pouco estudada e que recentemente foi investigada por Pani e Bhattacharyya (2008).

Dentre os trabalhos envolvendo a interação dinâmica barragem-reservatório em território nacional destacam-se: Araújo (1995), Pedroso e Souza Junior (2003), Souza Junior (2006), Ribeiro (2006), Ribeiro e Pedroso (2007), Silva (2007), Souza Júnior *et al.* (2006), Silva e Pedroso (2006a), Silva e Pedroso (2006b) , Silva *et al.* (2007) Ribeiro *et al.*( 2009). Adicionalmente, podem-se citar numerosos trabalhos aplicados ao estudo da interação fluido-estrutura, envolvendo outros tipos de estruturas, tais como: Galli (1995), Ahmida (1996), Pavanello e Almeida (1996), Gonçalves e Ramos (1996), Martini (1996), Paula (2003), Awruch (2005), Sanches (2006), Gonçalves *et al.*(2006) e Pavan (2008).

O Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura, da Universidade de Brasília, tem ao longo dos últimos anos desenvolvido e sistematizado metodologias que permitem a análise de problemas envolvendo a interação fluido-estrutura. Dentre os estudos realizados em cavidades acústicas merecem destaque: Pedroso (1996), Barbosa (1998), Morais (2000), Pedroso (2000), Pedroso (2003), Souza Júnior e Pedroso (2004), Souza Júnior *et al.* (2006), Souza (2007), Souza e Pedroso (2008), Barbosa e Pedroso (2008), Oliveira Júnior e Pedroso (2008a), Oliveira Júnior e Pedroso (2008b).

### **1.3 - MOTIVAÇÃO**

Problemas envolvendo interação dinâmica entre estruturas e meios acústicos possuem vasta aplicação na indústria. Numerosos estudos foram desenvolvidos, destinados aos setores naval, aeronáutico, aeroespacial, automobilístico, nuclear, etc.

Na engenharia de barragens esta categoria de problema pode representar adequadamente a interação dinâmica existente quando o sistema barragem-reservatório é submetido a ação de um sismo. Desta forma, ocorre não só a interação entre o maciço e o fluido contido, como também a interação entre os elementos constituintes deste sistema e o reservatório, tais como: comportas, píeres, adutoras e torres de tomada d'água, por exemplo.

A iniciativa do governo brasileiro com o Programa de Aceleração do Crescimento – PAC (envolvendo a construção de novas usinas hidrelétricas), a participação crescente de empreiteiras nacionais construindo obras deste tipo em zonas sísmicas (região norte em direção aos Andes, por exemplo, ou mesmo em outros países localizados nesta cordilheira), a crescente conscientização da necessidade do projeto sismo-resistente (com a primeira norma aprovada em 2006), e a carência de estudos desta natureza em território nacional fortalecem a importância deste estudo.

#### **1.4 - PROBLEMA ABORDADO E METODOLOGIA**

Os efeitos de interação produzidos pelo fluido são de fundamental importância na análise do sistema acoplado. Soluções produzidas por este domínio podem ser obtidas analiticamente, no domínio da frequência  $\omega$ , sendo dependentes desta variável e da função de deslocamentos  $\phi(y)$  atribuída a interface. Estes efeitos podem ser associados a um carregamento externo  $P(0, y)$  atuante na estrutura, que representa uma estratégia eficaz de solução do problema. Neste trabalho serão verificadas duas alternativas para a solução de frequências e modos do sistema acoplado (ilustradas na Figura 1.4). A primeira consiste em um procedimento simplificado (método pseudo-acoplado), contribuição desta tese, que depende da imposição de uma determinada deformada modal para construção da equação de frequências do modo associado. A segunda é uma abordagem exata, com a solução da equação diferencial envolvida (equação da viga), resultando em frequências e modos acoplados.

As cavidades serão resolvidas pelo método de separação de variáveis para condições de contorno diversas, que poderão representar fronteiras fechadas, abertas ou contornos móveis. A natureza analítica da solução irá permitir uma análise mais detalhada dos parâmetros envolvidos, permitindo uma maior compreensão do fenômeno de interação.

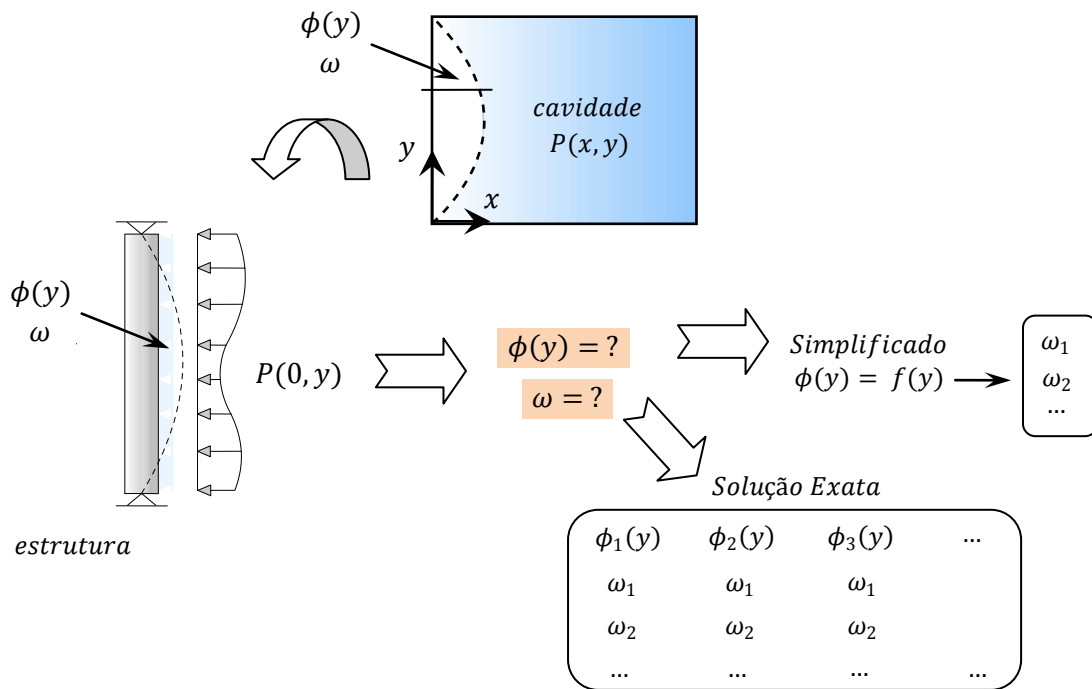


Figura 1.4 – Alternativas para solução de frequências e modos do problema acoplado

Inicialmente será adotada a abordagem de modos desacoplados para a estrutura acoplada. Desta forma, a solução do problema será simplificada. Entretanto, como nem sempre este comportamento será satisfeito, um procedimento exato será desenvolvido, e os modos resultantes desta nova solução serão comparados aos do procedimento anterior. Soluções numéricas envolvendo o Método dos Elementos Finitos serão utilizadas para validar as abordagens propostas.

O caso de interação bidimensional barragem-reservatório representa uma situação específica contida nas análises anteriores. Portanto, estudos envolvendo este caso particular irão permitir o desenvolvimento de metodologias para a solução desta categoria de problema.

## 1.5 - OBJETIVOS

Em resumo, pretende-se:

1. Resolver analiticamente as frequências e modos de vibração do problema acoplado;
2. Determinar a resposta dinâmica do sistema acústico-estrutural;
3. Aplicar este procedimento à interação dinâmica barragem-reservatório.

## 1.6 - CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Os problemas de interação fluido-estrutura envolvendo paredes flexíveis associadas a uma cavidade bidimensional já foram resolvidos por diversas abordagens. Entretanto, em boa parte destas soluções as operações matemáticas envolvem um alto grau de complexidade. A própria natureza do problema, que exige a solução de dois domínios, limita a possibilidade de soluções exatas a poucos casos específicos, que geralmente implicam no uso de computadores para solução das equações envolvidas.

O que se propõe neste trabalho é uma metodologia original, denominada Método Pseudo-Acoplado, que utiliza a solução da estrutura em coordenadas generalizadas combinada com a solução de pressões da cavidade. Este procedimento produz uma equação de frequências, que pode ser resolvida para um determinado modo de vibração imposto na interface. É o modo imposto que caracteriza a natureza simplificada deste método, que apesar desta limitação resulta em equações simples e com parâmetros bem definidos. O estudo do fenômeno de acoplamento por esta metodologia é também um dos pontos marcantes deste trabalho, sendo possível devido a ábacos de análise do problema, que identificam regiões de interesse. Além disso, o procedimento apresenta caráter geral, podendo ser aplicado a geometrias tridimensionais e diversas condições de contorno da estrutura e da cavidade.

A solução exata do problema acoplado também é possível, e foi abordada nesta tese, com a avaliação de três casos específicos. Destaca-se a contribuição relacionada a construção de soluções de casos não estudados, que podem ser avaliados por meio de uma estratégia proposta. A aplicação de superposição modal envolvendo modos exatos, para solução de problemas transientes, também tem um caráter inovador, apesar de ter sido abordada em inúmeros trabalhos por procedimentos alternativos.

Os conceitos do procedimento proposto podem ser aplicados a geometrias estruturais complexas, desde que os parâmetros generalizados de um determinado modo de vibração sejam conhecidos. Assim, surge uma contribuição adicional desta tese, de caráter prático, que implica na definição de massas adicionais que dependem da flexibilidade da estrutura e da compressibilidade do fluido. Esta técnica permite a solução no domínio do tempo de problemas de interação barragem-reservatório, possibilitando a análise em códigos computacionais onde o fluido não pode ser discretizado.



## 1.7 - ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO

Os problemas estudados neste trabalho envolvem casos onde não existe escoamento do fluido (meio acústico). Assumem-se pequenos deslocamentos, com o fluido suposto invíscido, homogêneo e linearmente compressível. O movimento é definido como irrotacional. Os efeitos de ondas de superfície e fronteira absorvente não serão considerados nas análises.

Apenas a interação bidimensional entre o meio acústico e a estrutura será analisada. Supõem-se uma fundação infinitamente rígida em todos os casos, e o sistema sem dissipação de energia. A parede móvel em contato com a cavidade é tratada como flexível, definida por uma função contínua e integrável de deslocamentos, podendo eventualmente ser considerada rígida.

As excitações aplicadas à estrutura podem ser forças localizadas em pontos arbitrários ou de origem sísmica. A solução da resposta dinâmica é realizada por meio de superposição modal.

## 1.8 - DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este trabalho encontra-se dividido em oito capítulos, seguindo uma seqüência lógica de desenvolvimento do conteúdo esquematizada na Figura 1.5.



Figura 1.5 – Esquema de desenvolvimento do conteúdo da tese

O primeiro capítulo apresenta generalidades em relação ao problema estudado, demonstrando a importância do fenômeno de interação fluido-estrutura. Uma revisão bibliográfica sucinta é realizada, ajudando a identificar pontos de uma eventual contribuição. Neste capítulo é descrita a problemática da tese, seguida pelas contribuições desta pesquisa.

No segundo capítulo é apresentado o desenvolvimento matemático da cavidade preenchida por fluido. Todas as condições de contorno possíveis em uma cavidade bidimensional são estudadas, com uma ou duas das extremidades representando um contorno móvel, que poderá ser considerado rígido ou flexível. Nove casos são avaliados, incluindo o caso específico da interação dinâmica barragem-reservatório. Este não é o capítulo correspondente à solução acoplada, pois até este ponto nenhuma propriedade da estrutura será incluída no desenvolvimento. Trata-se apenas da solução do campo de pressões hidrodinâmicas para uma excitação harmônica da fronteira vibrante.

No terceiro capítulo é realizada a análise dos parâmetros envolvidos em alguns dos casos do capítulo anterior. As análises incluem: cavidades quadradas com contorno rígido-móvel, cavidades retangulares com contorno rígido-móvel e cavidades retangulares com contorno flexível. Em alguns casos será avaliada a situação onde uma das dimensões da cavidade tende ao infinito. Estas análises irão permitir a construção de soluções simplificadas para cada caso específico e irão auxiliar na compreensão das possíveis configurações de pressões hidrodinâmicas no fenômeno de interação.

O quarto capítulo apresenta a técnica de solução pseudo-acoplada, onde a deformada da estrutura no vácuo é utilizada para a solução do problema acoplado. O objetivo principal é associar a solução de pressões hidrodinâmicas na interface a um carregamento externo que será aplicado à estrutura. O emprego de uma deformada conhecida na fronteira facilita em grande parte o problema. É evidente que a suposição de deformada acoplada igual a deformada no vácuo não é totalmente válida. Porém, este tipo de simplificação produz uma solução com apenas uma incógnita, resultando em soluções analíticas práticas para as frequências acopladas. Esta solução é denominada equação de frequências, pois permite a obtenção de uma série de frequências acopladas para um dado modo de vibração. Estes valores podem ser substituídos nas soluções do segundo capítulo, para obtenção dos modos correspondentes ao fluido. Com a frequência acoplada a massa adicional é obtida, e a

equação do equilíbrio dinâmico do sistema estrutural estabelecida, possibilitando a solução para excitações arbitrárias.

No quinto capítulo é desenvolvida a técnica de solução dos autovalores e autovetores do problema acoplado. Neste caso nenhuma simplificação será adotada. Esta metodologia permite uma análise mais detalhada do problema de interação, identificando situações onde a presença do fluido altera os modos de vibração da estrutura no vácuo. Resultados deste procedimento são comparados à solução do capítulo anterior, permitindo estabelecer domínios de validade da solução aproximada.

O sexto capítulo apresenta exemplos de aplicação de sistemas submetidos a excitações arbitrárias. Tanto a solução exata, como o procedimento pseudo-acoplado são utilizados, com a resposta dinâmica obtida por superposição modal. Uma interpretação física detalhada do problema de excitação dos apoios é realizada, identificando a importância das componentes translacional e relativa do movimento, além da contribuição de modos superiores na análise do problema.

O sétimo capítulo descreve o processo de transição dos conhecimentos acadêmicos para o mundo real. Aqui as técnicas utilizadas para a obtenção da massa adicional são aplicadas ao problema de interação barragens-reservatório, produzindo soluções analíticas simplificadas. Adicionalmente, é apresentada uma técnica que permite adicionar massas fictícias ao modelo numérico, reproduzindo as características de interação do problema acoplado. Soluções no domínio do tempo e com a utilização de espectros de resposta serão abordadas. A principal dificuldade deste capítulo envolve a obtenção dos parâmetros generalizados de uma geometria mais complexa, que é o caso de uma barragem. Com estes parâmetros e a massa adicional é possível estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico do problema, tornando a solução independente de um pacote computacional de elementos finitos e permitindo a solução analítica para uma excitação arbitrária.

O oitavo capítulo finaliza o trabalho, apresentando as principais conclusões obtidas e contribuições do trabalho, além das perspectivas para as próximas investigações.

## **2 - SOLUÇÕES ANALÍTICAS EM CAVIDADES ACÚSTICAS COM CONTORNOS RÍGIDO-MÓVEIS E FLEXÍVEIS**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo serão apresentadas as hipóteses básicas e a equação governante das pressões dinâmicas no fluido, o desenvolvimento matemático e as soluções gerais e específicas deste problema. O estudo deste domínio isolado irá permitir a avaliação dos efeitos decorrentes do movimento de um contorno rígido ou flexível em direção a este subsistema. A interação fluido-estrutura, envolvendo os dois domínios, ainda não será abordada, pois nenhuma propriedade da estrutura será inserida no desenvolvimento matemático. O comportamento dinâmico do domínio fluido é diretamente influenciado pelos deslocamentos produzidos na fronteira entre os dois subsistemas. As soluções que serão apresentadas tratam estes deslocamentos como funções a serem definidas. Estas serão determinadas posteriormente na solução do sistema acoplado. Entretanto, faz-se necessário um estudo preliminar dos subsistemas fluido e estrutura, para posterior construção de soluções acopladas, tendo em vista que as soluções isoladas destes subsistemas não representam corretamente o fenômeno envolvido. Numerosos exemplos envolvendo diversos tipos de cavidades bidimensionais serão estudados, assim como o caso particular envolvido na interação dinâmica barragem-reservatório. Em seguida as formulações apresentadas serão validadas e os resultados obtidos avaliados.

### **2.2 - HIPÓTESES BÁSICAS E EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA O DOMÍNIO DO FLUIDO**

As hipóteses básicas deste problema são as que conduzem ao tratamento deste domínio como um fluido acústico. De acordo com Bathe (1998) a interação fluido-estrutura pode ser classificada em três categorias distintas: o fluido acústico, o fluido incompressível de Navier-Stokes e o fluido compressível de Navier-Stokes. Este mesmo autor indica que o modelo acústico representa o modelo mais simples de interação, devido a uma série de simplificações impostas, tais como: fluido invíscido e pequenos deslocamentos das partículas. Com estas considerações, assume-se que o fluido transmite apenas ondas de pressão. Algumas aplicações desta teoria incluem: propagação de ondas de pressão em tubulações e ondas sonoras propagando-se entre meios fluido-sólido. Soluções para este

tipo de problema foram estudadas em trabalhos clássicos, tais como o de Westergaard (1933), que propôs uma solução analítica para a distribuição de pressões hidrodinâmicas em uma barragem rígida submetida a ações sísmicas. A consideração do domínio fluido em situações práticas geralmente exige a avaliação de contornos irregulares de geometrias complicadas. O tratamento matemático deste problema pode ser simplificado com a utilização de formas geométricas básicas, de contornos regulares. Adicionalmente, considera-se que o contínuo pode ser representado de forma bi-dimensional. As seguintes hipóteses básicas são feitas para a solução deste problema (baseadas nas proposições de Chopra, 1970 e Rashed, 1983):

1. O fluido é homogêneo, invíscido e linearmente compressível;
2. O movimento do fluido é suposto irrotacional;
3. Os deslocamentos e suas derivadas espaciais são pequenos;
4. Os efeitos de ondas de superfície livre são desprezíveis;
5. O movimento da interface fluido-estrutura é bidimensional (o mesmo para qualquer plano vertical perpendicular ao eixo da estrutura);
6. A interface fluido-estrutura é vertical;
7. A profundidade do domínio fluido é constante;
8. Os deslocamentos da interface são representados por funções contínuas integráveis;

### 2.2.1 - Equação governante das pressões dinâmicas

As hipóteses mencionadas anteriormente conduzem a uma distribuição de pressões dinâmicas  $p(x, y, t)$ , em excesso das pressões estáticas, dada por:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

que corresponde a equação da onda em duas dimensões. Onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

corresponde ao operador laplaciano bidimensional e  $c = \sqrt{\mathcal{K}/\rho_f}$  representa a velocidade do som no fluido, onde  $\mathcal{K}$  representa a rigidez volumétrica do fluido (bulk modulus) e  $\rho_f$  a sua densidade.

No caso de um fluido incompressível, onde a rigidez volumétrica torna-se infinitamente grande e conseqüentemente  $c \rightarrow \infty$ , a Equação (2.1) passa a assumir a seguinte forma:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2.3)$$

que corresponde a equação de Laplace para as pressões dinâmicas em um fluido incompressível. É evidente que a Equação (2.3) é um caso particular da Equação (2.1).

### 2.3 - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E SOLUÇÃO GERAL

A solução da Equação (2.1) pode ser obtida por meio da técnica de separação de variáveis. Este procedimento é utilizado em uma vasta gama de equações da física matemática. O fundamento envolvido nesta técnica é a representação da solução por meio de funções independentes para cada variável. Portanto assume-se que a função pode ser separada, resultando em:

$$p(x, y, t) = F(x)G(y)T(t) \quad (2.4)$$

A substituição da Equação (2.4) em (2.1) resulta em:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} G(y)T(t) + F(x) \frac{d^2 G(y)}{dy^2} T(t) = \frac{1}{c^2} F(x)G(y) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (2.5)$$

que pode ser simplificada com a introdução da seguinte notação:

$$F''(x)G(y)T(t) + F(x)G''(y)T(t) = \frac{1}{c^2} F(x)G(y)\ddot{T}(t) \quad (2.6)$$

onde os apóstrofos indicam diferenciação em relação à coordenada espacial e os pontos em relação à variável temporal. A divisão da Equação (2.6) por  $F(x)G(y)T(t)$  resulta em:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (2.7)$$

A Equação (2.7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (2.8)$$

A análise da Equação (2.8) indica que o lado esquerdo da equação depende apenas da variável  $y$ , ao passo que o lado direito depende das variáveis  $x$  e  $t$ . Para que esta equação seja satisfeita para qualquer valor de  $x$ ,  $y$  e  $t$ , é necessário que ambos os lados sejam iguais a uma constante arbitrária  $\beta$ , que pode assumir um valor nulo, positivo ou negativo. Portanto:

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \beta \quad (2.9)$$

Desta última expressão podem ser derivadas três equações diferenciais ordinárias:

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \beta \quad (2.10)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \beta + \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \gamma \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \left[ \frac{F''(x)}{F(x)} - \beta \right] = \delta \quad (2.12)$$

onde  $\gamma$  e  $\delta$  representam constantes de separação arbitrárias. Das Equações (2.11) e (2.12) pode-se obter a seguinte relação:

$$\gamma = \beta + \frac{1}{c^2} \delta \quad (2.13)$$

As soluções combinadas das equações diferenciais ordinárias (2.10), (2.11) e (2.12) fornecem a solução completa para a Equação (2.1). Entretanto, serão necessárias duas constantes para cada uma das equações diferenciais, resultando em um total de seis constantes desconhecidas.

Uma solução mais simples e independente do tempo para o problema pode ser obtida com a consideração da hipótese de oscilações harmônicas no tempo, com frequência  $\omega$ . Desta forma, assume-se que a função relacionada ao tempo seja dada por:

$$T(t) = e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

A substituição de (2.14) em (2.4) fornece:

$$p(x, y, t) = F(x)G(y)e^{-i\omega t} \quad (2.15)$$

A expressão acima pode ser substituída em (2.6), resultando em:

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = -\frac{\omega^2}{c^2}F(x)G(y) \quad (2.16)$$

Utilizando a notação  $P(x, y) = F(x)G(y)$  e substituindo-a em (2.16), obtém-se:

$$\nabla^2 P + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P = 0 \quad (2.17)$$

que representa a equação diferencial clássica de Helmholtz, ou equação da onda reduzida. Nesta equação o problema torna-se independente do tempo. Entretanto, a solução completa continua sendo dada por:

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{-i\omega t} \quad (2.18)$$

A hipótese de propagação de ondas harmônicas no tempo permite estabelecer uma importante relação entre as constantes de separação nas direções  $x$  e  $y$ . A substituição de (2.14) em (2.12) fornece:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 = \delta \quad (2.19)$$

A substituição de (2.19) em (2.9) estabelece:



$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{\omega^2}{c^2} = \beta \quad (2.20)$$

Portanto:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \beta - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.21)$$

Desta última expressão pode-se concluir que:

$$\gamma = \beta - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.22)$$

A Equação (2.22) indica que a consideração de propagação de ondas harmônicas no tempo proporciona uma constante de separação na direção  $x$  que depende apenas da frequência de propagação das ondas ( $\omega$ ), da velocidade do som no fluido ( $c$ ) e da constante de separação na direção  $y$  ( $\beta$ ).

### 2.3.1 - Solução geral

A solução da Equação (2.17) pode ser estabelecida por meio das soluções das equações diferenciais ordinárias (2.20) e (2.21). As constantes de separação  $\gamma$  e  $\beta$  podem assumir um valor nulo, positivo ou negativo. Entretanto, dependendo do valor escolhido a solução não apresentará significado físico. Inicialmente será feita a avaliação da constante  $\beta$ . A Equação (2.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G''(y) + G(y)\beta = 0 \quad (2.23)$$

Para  $\beta = 0$ , a solução da Equação (2.23) é do tipo:

$$G(y) = C_1 + C_2y \quad (2.24)$$

Substituindo  $\beta = 0$  em (2.21) obtém-se:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -\alpha^2 \quad (2.25)$$

$$F''(x) + \alpha^2 F(x) = 0 \quad (2.26)$$

onde  $\alpha$  representa uma constante arbitrária. Portanto, a solução de (2.26) será do tipo:

$$F(x) = C_3 e^{i\alpha x} + C_4 e^{-i\alpha x} \quad (2.27)$$

onde  $i$  representa o número imaginário. Esta expressão pode ser simplificada com a utilização das identidades de Euler, que estabelecem:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.28)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.29)$$

Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27), obtém-se:

$$F(x) = C_3 [\cos(\alpha x) + i \operatorname{sen}(\alpha x)] + C_4 [\cos(\alpha x) - i \operatorname{sen}(\alpha x)] \quad (2.30)$$

$$F(x) = (C_3 + C_4)\cos(\alpha x) + i(C_3 - C_4)\operatorname{sen}(\alpha x) \quad (2.31)$$

A Equação (2.31) pode ser simplificada com a utilização das constantes  $C_3$  e  $C_4$  representadas em termos de suas componentes reais e imaginárias. Portanto:

$$C_3 = C_{3R} + iC_{3i} \quad (2.32)$$

$$C_4 = C_{4R} + iC_{4i} \quad (2.33)$$

Substituindo estas expressões em (2.31), obtém-se:

$$F(x) = (C_{3R} + C_{4R})\cos(\alpha x) + i(C_{3i} + C_{4i})\cos(\alpha x) + i(C_{3R} - C_{4R})\operatorname{sen}(\alpha x) - (C_{3i} - C_{4i})\operatorname{sen}(\alpha x) \quad (2.34)$$

A Equação (2.34) pode ser reescrita em termos das componentes reais e imaginárias. Portanto:

$$F(x) = (C_{3R} + C_{4R})\cos(\alpha x) - (C_{3i} - C_{4i})\text{sen}(\alpha x) + i[(C_{3i} + C_{4i})\cos(\alpha x) + (C_{3R} - C_{4R})\text{sen}(\alpha x)] \quad (2.35)$$

Para que a solução de pressões seja um número real é necessário que o termo imaginário assumira um valor nulo. Portanto, o termo entre colchetes da Equação (2.35) deverá ser nulo para qualquer valor de  $y$ . Então:

$$C_{3i} = -C_{4i} = C_I \quad e \quad C_{3R} = C_{4R} = C_R \quad (2.36)$$

Estas relações podem ser substituídas em (2.32) e (2.33). Desta forma, para pressões reais, as constantes  $C_3$  e  $C_4$  deverão formar o par conjugado complexo dado por:

$$C_3 = C_R + iC_I \quad e \quad C_4 = C_R - iC_I \quad (2.37)$$

Portanto, a Equação (2.35) assume a seguinte forma:

$$F(x) = 2C_R\cos(\alpha x) - 2C_I\text{sen}(\alpha x) \quad (2.38)$$

que pode ser reescrita com  $A = 2C_R$  e  $B = -2C_I$ . Então:

$$F(x) = A \cos(\alpha x) + B \text{sen}(\alpha x) \quad (2.39)$$

onde  $A$  e  $B$  representam constantes reais. Observa-se que as simplificações utilizando as identidades de Euler somente serão válidas para constantes  $C_3$  e  $C_4$  não nulas formando um par conjugado complexo. Para  $C_3 = 0$  ou  $C_4 = 0$  a resposta irá apresentar uma parte real e outra imaginária.

Outra opção consiste em considerar a constante  $\beta$  com um valor negativo. Portanto, tomando  $\beta = -\kappa^2$  e substituindo esta expressão em (2.23), obtém-se:

$$G''(y) - G(y)\kappa^2 = 0 \quad (2.40)$$

resultando na seguinte solução:

$$G(y) = C_1 e^{\kappa \cdot y} + C_2 e^{-\kappa \cdot y} \quad (2.41)$$

Substituindo  $\beta = -\kappa^2$  em (2.21) obtém-se:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\left[\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] = -\alpha^2 \quad (2.42)$$

$$F''(x) + \alpha^2 F(x) = 0 \quad (2.43)$$

onde  $\alpha$  indica uma constante arbitrária. A solução de (2.43) é obtida com (2.27) ou (2.39).

Resta agora assumir a constante  $\beta$  com um valor positivo. Portanto, tomando  $\beta = \kappa^2$  e substituindo esta expressão em (2.23), obtém-se:

$$G''(y) + G(y)\kappa^2 = 0 \quad (2.44)$$

resultando na seguinte solução:

$$G(y) = C_1 e^{i\kappa \cdot y} + C_2 e^{-i\kappa \cdot y} \quad (2.45)$$

que pode ser simplificada com a utilização das identidades de Euler para:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) + B \sen(\kappa y) \quad (2.46)$$

onde  $A$  e  $B$  representam constantes reais. Substituindo  $\beta = \kappa^2$  em (2.21) obtém-se:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right] = -\alpha \quad (2.47)$$

onde observa-se que a constante arbitrária  $\alpha$  poderá ser positiva ou negativa. Portanto:

$$F''(x) + \alpha F(x) = 0 \quad (2.48)$$

cuja solução é dada por:

$$F(x) = C_3 e^{i\sqrt{\alpha}x} + C_4 e^{-i\sqrt{\alpha}x} \quad (2.49)$$

que pode ser simplificada utilizando as identidades de Euler para:

$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha}x) + D \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.50)$$

onde  $C$  e  $D$  representam constantes reais.

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das soluções para os possíveis valores de  $\beta$ .

Tabela 2.1 – Resumo das soluções para  $\beta$

	$\alpha$	$G(y)$	$F(x)$
$\beta = 0$	$\frac{\omega}{c}$	$C_1 + C_2 y$	$C_3 e^{i\alpha x} + C_4 e^{-i\alpha x}$ $ou^2$ $A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$
$\beta = -\kappa^2$	$\sqrt{\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}$	$C_1 e^{\kappa \cdot y} + C_2 e^{-\kappa \cdot y}$	$C_3 e^{i\alpha x} + C_4 e^{-i\alpha x}$ $ou^2$ $A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$
$\beta = \kappa^2$	$\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2$	$C_1 e^{i\kappa \cdot y} + C_2 e^{-i\kappa \cdot y}$ $ou^1$ $A \cos(\kappa y) + B \sin(\kappa y)$	$C_3 e^{i\sqrt{\alpha}x} + C_4 e^{-i\sqrt{\alpha}x}$ $ou^2$ $C \cos(\sqrt{\alpha} x) + D \sin(\sqrt{\alpha} x)$

<sup>1</sup> apenas para o caso onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são não nulas e formam um par conjugado complexo.

<sup>2</sup> apenas para o caso onde as constantes  $C_3$  e  $C_4$  são não nulas e formam um par conjugado complexo.

A escolha de uma das soluções indicadas na Tabela 2.1 irá depender das condições de contorno definidas no problema. Soluções específicas serão apresentadas a seguir.

### 2.3.2 - Caso 1A (cavidade com contorno móvel-aberta e aberta-aberta)

Neste caso assume-se que a cavidade bidimensional apresenta as seguintes condições de contorno nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente: contorno móvel-aberta e aberta-aberta. A

condição contorno móvel implica na imposição de uma interface fluido-estrutura (rígida ou flexível), ao passo que a condição aberta implica em pressão nula na borda do domínio. A Figura 2.1 ilustra o domínio analisado e as condições de contorno adotadas.

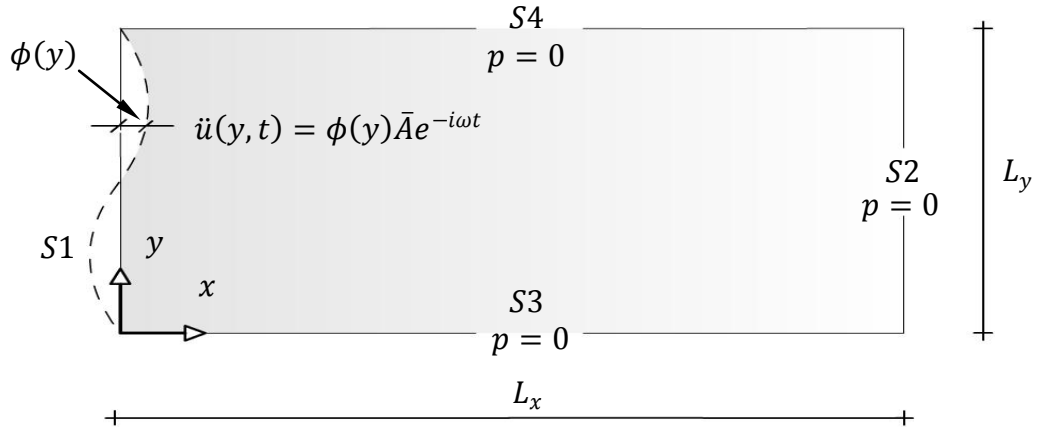


Figura 2.1 – Representação esquemática da cavidade – Caso 1A

Para a solução deste problema será conveniente representar as pressões dinâmicas por meio da Equação (2.18). Portanto:

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{-i\omega t} \quad (2.51)$$

Adicionalmente assume-se que o contorno móvel apresenta um movimento vibratório na direção horizontal, de características harmônicas, relacionado ao seu ponto de maior amplitude  $\bar{A}$  por meio de uma função normalizada contínua e integrável  $\phi(y)$ , resultando em uma aceleração horizontal distribuída ao longo da interface dada por:

$$\ddot{u}(y, t) = \phi(y)\bar{A}e^{-i\omega t} \quad (2.52)$$

As Equações (2.51) e (2.52) podem ser substituídas na condição de contorno da fronteira. Então:

$$S1 \rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \ddot{u} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} e^{-i\omega t} = -\rho_f \phi(y)\bar{A}e^{-i\omega t} \quad (2.54)$$

Portanto:

$$S1 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.55)$$

onde nota-se que a condição de contorno independe do tempo. As condições de contorno remanescentes são facilmente estabelecidas, pois indicam que a pressão deve ser nula. Portanto,  $P(x, y) = F(x)G(y)$  deverá ser nulo nestas superfícies, de forma a evitar a solução trivial. Então:

$$S2 \rightarrow p(L_x, y, t) = 0 \therefore F(L_x)G(y) = 0 \quad (2.56)$$

$$S3 \rightarrow p(x, 0, t) = 0 \therefore F(x)G(0) = 0 \quad (2.57)$$

$$S4 \rightarrow p(x, L_y, t) = 0 \therefore F(x)G(L_y) = 0 \quad (2.58)$$

Tanto  $F(x)$  como  $G(y)$  não podem ser nulos, pois caso contrário a solução será trivial. Assim as Equações (2.56), (2.57) e (2.58) resultam em:

$$F(L_x) = 0 \quad ; \quad G(0) = 0 \quad ; \quad G(L_y) = 0 \quad (2.59)$$

As Equações (2.55) e (2.59) estabelecem as quatro condições de contorno necessárias para a solução do problema. A Tabela 2.1 será utilizada como guia para a escolha das soluções de  $F(x)$  e  $G(y)$ . Para  $\beta = 0$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = C_1 + C_2 y \quad (2.60)$$

Utilizando as condições de contorno (2.59), obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad e \quad C_2 = 0 \quad (2.61)$$

que resulta na solução trivial, ou seja:  $G(y) = 0$  e  $p(x, y, t) = 0$ . Este tipo de solução não interessa ao problema, portanto um novo valor de  $\beta$  será estudado.

Para  $\beta = -\kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = C_1 e^{\kappa \cdot y} + C_2 e^{-\kappa \cdot y} \quad (2.62)$$

Utilizando as condições de contorno (2.59), obtém-se:

$$G(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \therefore \quad C_2 = -C_1 \quad (2.63)$$

$$G(L_y) = C_1 e^{\kappa \cdot L_y} + C_2 e^{-\kappa \cdot L_y} = 0 \quad (2.64)$$

A substituição de (2.63) em (2.64) resulta em:

$$C_1 [e^{\kappa \cdot L_y} - e^{-\kappa \cdot L_y}] = 0 \quad (2.65)$$

A Equação (2.65) admite duas soluções:  $C_1 = 0$  ou  $\kappa = 0$ . Para a primeira opção  $C_2 = 0$  e a solução é trivial, com  $G(y) = 0$ . Para a segunda opção  $\beta = 0$ , resultando na solução estudada anteriormente, que também é trivial.

Para  $\beta = \kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) + B \sin(\kappa y) \quad (2.66)$$

Utilizando as condições de contorno (2.59), obtém-se:

$$G(0) = A = 0 \quad (2.67)$$

$$G(L_y) = B \sin(\kappa L_y) = 0 \quad (2.68)$$

A Equação (2.68) apresenta duas possíveis soluções:  $B = 0$  ou  $\sin(\kappa L_y) = 0$ . A primeira opção é descartada, pois resulta na solução trivial, com  $G(y) = 0$ . A segunda opção resulta na seguinte solução:

$$\kappa L_y = n\pi \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.69)$$



Da Equação (2.69) pode-se concluir que:

$$\kappa = \frac{n\pi}{L_y} \quad n = 1,2,3 \dots \quad (2.70)$$

Portanto,  $\beta = \kappa^2$  produz uma solução válida para o problema, dada por:

$$G(y) = B \text{sen}(\kappa y) \quad (2.71)$$

Resta agora verificar a solução para  $F(x)$ . A Tabela 2.1 indica que a solução correspondente é dada por:

$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha} x) + D \text{sen}(\sqrt{\alpha} x) \quad (2.72)$$

Utilizando as condições de contorno (2.59), obtém-se:

$$F(L_x) = C \cos(\sqrt{\alpha} L_x) + D \text{sen}(\sqrt{\alpha} L_x) = 0 \quad (2.73)$$

$$C = -D \tan(\sqrt{\alpha} L_x) \quad (2.74)$$

Substituindo (2.74) em (2.72):

$$F(x) = D [\text{sen}(\sqrt{\alpha} x) - \tan(\sqrt{\alpha} L_x) \cos(\sqrt{\alpha} x)] \quad (2.75)$$

O valor da constante de separação  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad n = 1,2,3 \dots \quad (2.76)$$

onde existem infinitos valores de  $\kappa$  e  $\alpha$ . Para cada valor de  $n$  existe uma solução correspondente para  $G(y)$  e para  $F(x)$ . Portanto:

$$P_n(x, y) = E_n [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y) \quad (2.77)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$  e  $E_n$  representa uma constante remanescente. A solução completa é dada pela soma das soluções para cada valor de  $n$ . Portanto:

$$P(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y) \quad (2.78)$$

A constante remanescente  $E_n$  será obtida com a aplicação da condição de contorno (2.55). Então:

$$S1 \rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.79)$$

A derivada parcial de (2.78) em relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ \sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} x) + \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \text{sen}(\kappa_n y) \quad (2.80)$$

Aplicando a condição de contorno (2.79) em (2.80), obtém-se:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\kappa_n y) = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.81)$$

Para a solução de (2.81) torna-se necessária a utilização da propriedade de ortogonalidade da função seno. Sabe-se que:

$$\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \rightarrow \quad m \neq n \quad (2.82)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.81) por  $\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$  e substituindo  $\kappa_n$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \quad (2.83)$$

A integração em  $y$  em ambos os lados da Equação (2.83) resulta em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy \quad (2.84)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade (2.82) em (2.84), obtém-se:

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \left[ \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (2.85)$$

Lembrando que:

$$\int_0^{L_y} \left[ \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \left\{ \frac{y}{2} - \left[ \text{sen}\left(\frac{2n\pi y}{L_y}\right) \right] \frac{L_y}{4n\pi} \right\} \Big|_{y=0}^{y=L_y} \quad (2.86)$$

$$\int_0^{L_y} \left[ \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \frac{L_y}{2} - \text{sen}(2n\pi) \frac{L_y}{4n\pi} \quad (2.87)$$

e que  $\text{sen}(2n\pi) = 0$  para  $n = 1, 2, 3 \dots$ , a Equação (2.87) se reduz a:

$$\int_0^{L_y} \left[ \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \frac{L_y}{2} \quad (2.88)$$

A substituição de (2.87) em (2.85) resulta em:

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \frac{L_y}{2} = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (2.89)$$

Portanto:

$$E_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}(\kappa_n y) dy \quad (2.90)$$

A Equação (2.90) pode ser substituída em (2.78) resultando em:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) \quad (2.91)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$

A Equação (2.91) corresponde à solução do campo de pressões dinâmicas de uma cavidade bidimensional retangular, aberta em três lados e com um contorno móvel, submetido a um movimento vibratório harmônico de acordo com  $\phi(y)$ . Esta equação pode ser substituída em (2.51) para avaliação da resposta  $p(x, y, t)$ . Um caso particular desta equação consiste em  $\phi(y) = 1$ . Neste caso, assume-se que o contorno móvel vibra com todos os pontos da interface possuindo a mesma amplitude, semelhante a uma parede rígida. Desta forma, a Equação (2.91) se reduz a:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) \quad (2.92)$$

Lembrando que:

$$\int_0^{L_y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = -\frac{L_y}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \Big|_{y=0}^{y=L_y} = -\frac{L_y}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \quad (2.93)$$

Da expressão acima é possível observar que esta poderá assumir os seguintes valores:

$$\int_0^{L_y} \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy = -\frac{L_y}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \begin{cases} 0 & \rightarrow n = \text{par} \\ \frac{2L_y}{n\pi} & \rightarrow n = \text{ímpar} \end{cases} \quad (2.94)$$

Portanto, a Equação (2.92) apresentará valor nulo para  $n = \text{par}$  e desta forma apenas os valores de  $n = \text{ímpar}$  irão interessar ao problema quando  $\phi(y) = 1$ . Então:

$$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\alpha_n}} \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \text{sen}(\kappa_n y) \quad (2.95)$$

onde  $n = 1, 3, 5, \dots$

A Equação (2.95) corresponde à solução do problema anterior com a consideração de um contorno rígido-móvel vibrando harmonicamente. Outra condição de interesse consiste na situação em que a relação  $r$  entre os comprimentos  $L_x$  e  $L_y$  se aproxima de zero.

A Equação (2.76) pode-se ser reescrita em função do comprimento  $L_y$ , resultando em:

$$\alpha_n = \frac{1}{L_y^2} \left[ \left( \frac{\omega L_y}{c} \right)^2 - (n\pi)^2 \right] = \frac{\tilde{\alpha}_n}{L_y^2} \quad (2.96)$$

Esta última expressão pode ser substituída em (2.95):

$$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J \frac{\text{sen}(\kappa_n y)}{n} \quad (2.97)$$

onde  $J$  é definido por:

$$J(\tilde{\alpha}_n, x/L_x, r) = \frac{[\text{sen}(r\sqrt{\tilde{\alpha}_n} x/L_x) - \tan(r\sqrt{\tilde{\alpha}_n}) \cos(r\sqrt{\tilde{\alpha}_n} x/L_x)]}{\sqrt{\tilde{\alpha}_n}} \quad (2.98)$$

A Equação (2.98) sofre simplificações importantes quando  $r \rightarrow 0$ . O seno de ângulos muito pequenos é aproximadamente o valor do próprio ângulo. O mesmo ocorre para a função tangente, já que esta pode ser representada por uma relação entre as funções seno e cosseno. E o cosseno de ângulos muito pequenos será aproximadamente 1. Desta forma, a expressão (2.98) poderá ser eliminada do somatório de (2.97), que será dada por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A}L_y}{\pi} r(x/L_x - 1) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (2.99)$$

O somatório contido na Equação (2.99) representa uma série convergente, com valor definido por (obtido com auxílio do software Maple 12):

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \equiv \frac{1}{4} i \left\{ -\ln \left[ \frac{-1 - e^{\frac{i\pi y}{L_y}}}{e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1} \right] + \ln \left[ \frac{1 + e^{\frac{i\pi y}{L_y}}}{e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1} \right] \right\} \quad (2.100)$$

A equação acima pode ser simplificada com a utilização das seguintes propriedades matemáticas envolvendo logaritmos:

$$\ln(-1) = i\pi \quad (2.101)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad ; \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (2.102)$$

Portanto, a Equação (2.100) poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \equiv \frac{1}{4} i \left\{ \begin{array}{l} -\ln \left[ -1 \left( 1 + e^{\frac{i\pi y}{L_y}} \right) \right] + \ln \left( e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1 \right) \\ + \ln \left( 1 + e^{\frac{i\pi y}{L_y}} \right) - \ln \left( e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1 \right) \end{array} \right\} \quad (2.103)$$

que poderá ser simplificada para a seguinte forma:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \equiv \frac{1}{4} i \left\{ \begin{array}{l} -i\pi - \ln \left( 1 + e^{\frac{i\pi y}{L_y}} \right) + \ln \left( e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1 \right) \\ + \ln \left( 1 + e^{\frac{i\pi y}{L_y}} \right) - \ln \left( e^{\frac{i\pi y}{L_y}} - 1 \right) \end{array} \right\} \quad (2.104)$$

resultando em:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \equiv -\frac{1}{4} i^2 \pi = \frac{\pi}{4} \quad (2.105)$$

Portanto, substituindo (2.105) em (2.99):

$$\lim_{r \rightarrow 0} P(x, y) = -\rho_f \bar{A} L_y r(x/L_x - 1) \quad \therefore \quad P(x) = -\rho_f \bar{A} L_x (x/L_x - 1) \quad (2.106)$$

que corresponde a uma solução unidimensional, com função definida pela equação de uma reta, com amplitude máxima na interface  $x = 0$ , diminuindo à medida que  $x$  se aproxima de  $L_x$ . Em  $x = L_x$  a pressão é nula, correspondendo à condição de contorno imposta nesta posição.

A pressão na interface em (2.106) é dada por (2.107):

$$P(0) = \rho_f \bar{A} L_x \quad (2.107)$$

Esta última expressão depende apenas da densidade do fluido, da aceleração do contorno rígido-móvel e do comprimento longitudinal da cavidade, sendo diretamente proporcional a todos estes parâmetros.

A Tabela 2.2 apresenta um resumo das soluções encontradas:

Tabela 2.2 – Resumo das soluções para  $P(x, y)$  - Caso 1A

<i>Condição</i>	<i>Solução</i>	<i>Aplicação</i>
<i>geral</i>	$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y)$	<i>cavidade bidimensional com contorno móvel arbitrário</i>
$\phi = 1$	$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\alpha_n}} [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y)$	<i>cavidade bidimensional com contorno rígido – móvel (pistão 2D)</i>
$\phi = 1$ $r \rightarrow 0$	$P(x) = -\rho_f \bar{A} L_x (x/L_x - 1)$	<i>cavidade bidimensional com contorno rígido – móvel e <math>r \rightarrow 0</math></i>

$$\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2 \quad ; \quad \kappa_n = n\pi/L_y$$

Na Tabela 2.2 pode ser verificada a presença do radical  $\sqrt{\alpha_n}$  no denominador das soluções geral e particular para  $\phi = 1$ . O termo  $\alpha_n$  irá assumir valor nulo quando:

$$\omega = \frac{n\pi c}{L_y} \quad n = 1,2,3 \dots \quad (2.108)$$

que correspondem aos valores próprios da cavidade na direção vertical (aberta-aberta). Portanto, quando  $\omega$  for igual a uma das frequências naturais na direção  $y$  a solução para um determinado  $n$  não será possível (divisão por zero). O seguinte limite será estabelecido para os termos dependentes de  $n$  quando  $\alpha_n \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \right\} = x - L_x \quad (2.109)$$

O termo  $\alpha_n$  poderá ser positivo ou negativo. A partir da solução geral é possível a construção de uma solução composta por duas partes: uma para cada condição. Para  $\alpha_n$  negativo ( $\omega < n\pi c/L_y$ ) é interessante estabelecer as seguintes expressões:

$$\hat{\alpha}_n = \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad n = 1,2,3 \dots \quad (2.110)$$

$$\text{sen}(ia) = i \sinh(a) ; \quad \cos(ia) = \cosh(a) ; \quad \tan(ia) = i \tanh(a) \quad (2.111)$$

Desta forma, a solução geral pode ser reescrita com o auxílio das relações entre funções trigonométricas e hiperbólicas (2.111), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} P(x,y) = & -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \\ & - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y) \\ & + \\ & -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}(\kappa_n y) dy [\sinh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x) \\ & - \tanh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} L_x) \cosh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y) \end{aligned} \quad (2.112)$$



Pode-se observar que a primeira parte da solução é válida de  $n = 1$  até  $n = n_0 - 1$ , onde  $n_0$  é o menor valor de  $n$  para o qual  $\omega < n\pi c/L_y$ . A segunda parte da solução é válida de  $n = n_0$  em diante. Caso  $\omega$  seja menor que  $\pi c/L_y$ , então  $n_0 = 1$  e apenas a segunda parte da solução estará presente. Para  $\omega$  maior que  $\pi c/L_y$ , as duas soluções estarão presentes. A primeira parte da solução é composta por funções trigonométricas, ao passo que a segunda parte é representada por funções hiperbólicas. As duas partes representam respostas reais de pressão.

### 2.3.3 - Caso 2A (cavidade com contorno móvel-aberta e fechada-aberta)

Neste caso assume-se que a cavidade bidimensional apresenta as seguintes condições de contorno nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente: contorno móvel-aberta e fechada-aberta. A Figura 2.2 ilustra o domínio analisado e as condições de contorno adotadas.

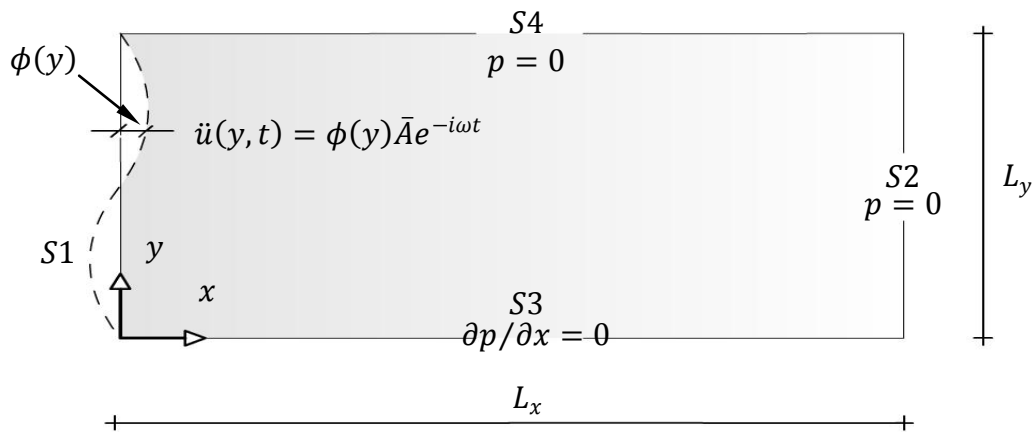


Figura 2.2 – Representação esquemática da cavidade – Caso 2A

Uma particularidade deste problema em relação ao caso anterior é o fato de a direção  $y$  apresentar condição de contorno fechada-aberta, o que levará a uma constante  $E_n$  desenvolvida em série de cossenos. As condições de contorno do problema são dadas por:

$$S1 \rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.113)$$

$$S2 \rightarrow p(L_x, y, t) = 0 \quad \therefore F(L_x) = 0 \quad (2.114)$$

$$S3 \rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \therefore G'(0) = 0 \quad (2.115)$$

$$S4 \rightarrow p(x, L_y, t) = 0 \therefore G(L_y) = 0 \quad (2.116)$$

Inicialmente é estabelecida a solução para  $G(y)$ . Para  $\beta = 0$  esta função é dada por:

$$G(y) = C_1 + C_2 y \quad (2.117)$$

Utilizando as condições de contorno (2.115) e (2.116), obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = 0 \quad (2.118)$$

que resulta na solução trivial, ou seja:  $G(y) = 0$  e  $p(x, y, t) = 0$ . Este tipo de solução não interessa ao problema, portanto um novo valor de  $\beta$  será estudado.

Para  $\beta = -\kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = C_1 e^{\kappa \cdot y} + C_2 e^{-\kappa \cdot y} \quad (2.119)$$

Utilizando a condição de contorno (2.115), obtém-se:

$$G'(0) = C_1 \kappa - C_2 \kappa = 0 \therefore C_1 = C_2 \quad (2.120)$$

Substituindo esta última expressão em (2.119):

$$G(y) = C_1 (e^{\kappa \cdot y} + e^{-\kappa \cdot y}) \quad (2.121)$$

Aplicando a condição de contorno (2.116) em (2.121):

$$G(L_y) = C_1 (e^{\kappa \cdot L_y} + e^{-\kappa \cdot L_y}) = 0 \quad (2.122)$$

Então, existem duas opções para a solução de (2.122):  $C_1 = 0$  ou  $(e^{\kappa \cdot L_y} + e^{-\kappa \cdot L_y}) = 0$ . A primeira opção resulta na solução trivial, pois  $C_1 = C_2 = 0$ . A segunda resulta em:

$$\frac{e^{\kappa \cdot L_y}}{e^{-\kappa \cdot L_y}} = -1 \quad (2.123)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$e^{2\kappa \cdot L_y} = -1 \quad (2.124)$$

Esta equação é facilmente resolvida com o auxílio de (2.101). Portanto:

$$2\kappa L_y = i\pi \quad \therefore \quad \kappa = \frac{i\pi}{2L_y} \quad (2.125)$$

Assim,  $\kappa$  é definido por uma constante de separação complexa. Entretanto, inicialmente foi feita a suposição de que  $\beta = -\kappa^2$ , resultando em um número negativo. A substituição de (2.125) na expressão de  $\beta$  resulta em:

$$\beta = -\left(\frac{i\pi}{2L_y}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2L_y}\right)^2 \quad (2.126)$$

que indica um número positivo, contrariando a suposição inicialmente feita para  $\beta$ . Desta forma, pode-se concluir que esta não é uma solução válida para o problema.

Para  $\beta = \kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) + B \sin(\kappa y) \quad (2.127)$$

Aplicando a condição de contorno (2.115) em (2.127):

$$G'(0) = B\kappa = 0 \quad \therefore \quad B = 0 \quad (2.128)$$

A substituição de (2.128) em (2.127) resulta em:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) \quad (2.129)$$

Aplicando a condição de contorno (2.116) em (2.129):

$$G(L_y) = A \cos(\kappa L_y) = 0 \quad (2.130)$$

Portanto, como  $A = 0$  resulta na solução trivial, a solução possível para (2.130) é dada por:

$$\cos(\kappa L_y) = 0 \quad (2.131)$$

Assim, a constante de separação  $k$ , que é solução de (2.131), será dada por:

$$\kappa = \frac{(2n - 1)\pi}{2L_y} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.132)$$

Portanto,  $\beta = \kappa^2$  produz uma solução válida para o problema, dada por (2.129) e (2.132). Resta agora verificar a solução para  $F(x)$ . A Tabela 2.1 indica que a solução correspondente é dada por:

$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha}x) + D \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.133)$$

Aplicando a condição de contorno (2.114) em (2.133):

$$\begin{aligned} F(L_x) &= C \cos(\sqrt{\alpha} L_x) + D \sin(\sqrt{\alpha} L_x) = 0 \\ C \cos(\sqrt{\alpha} L_x) &= -D \sin(\sqrt{\alpha} L_x) \end{aligned} \quad (2.134)$$

Portanto:

$$C = -D \tan(\sqrt{\alpha} L_x) \quad (2.135)$$

Substituindo esta última expressão em (2.133):

$$F(x) = D [\sin(\sqrt{\alpha}x) - \tan(\sqrt{\alpha}L_x) \cos(\sqrt{\alpha}x)] \quad (2.136)$$

que corresponde a uma solução idêntica a encontrada em (2.75), já que as mesmas condições de contorno foram mantidas na direção  $x$ .

O valor da constante de separação  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha_n = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \right]^2 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.137)$$

onde existem infinitos valores de  $\kappa$  e  $\alpha$ . Para cada valor de  $n$  existe uma solução correspondente para  $G(y)$  e para  $F(x)$ . Portanto:

$$P_n(x, y) = E_n \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.138)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$  e  $E_n$  representa uma constante remanescente. A solução completa é dada pela soma das soluções para cada valor de  $n$ . Portanto:

$$P(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.139)$$

O valor de  $E_n$  será obtido com a aplicação da condição de contorno (2.113). A derivada parcial de (2.139) em relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ \frac{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} x) + \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x)}{\sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x)} \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.140)$$

Portanto:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\kappa_n y) = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.141)$$

Para a solução de (2.141) torna-se necessária a utilização da propriedade de ortogonalidade da função cosseno. Sabe-se que:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \rightarrow \quad m \neq n \quad (2.142)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.141) por  $\cos \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_y} y \right]$  e substituindo  $\kappa_n$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_y} y \right] \\ & = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_y} y \right] \end{aligned} \quad (2.143)$$

A integração em  $y$  em ambos os lados da Equação (2.143) resulta em:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_y} y \right] dy \\ & = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_y} y \right] dy \end{aligned} \quad (2.144)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade (2.142) em (2.144), obtém-se:

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \left\{ \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \right\}^2 dy = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] dy \quad (2.145)$$

Lembrando que:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_y} \left\{ \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \right\}^2 dy = \left\{ \frac{y}{2} + \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi}{L_y} y \right] \frac{L_y}{2(2n-1)\pi} \right\} \Big|_{y=0}^{y=L_y} \\ & \int_0^{L_y} \left\{ \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \right\}^2 dy = \frac{L_y}{2} + \operatorname{sen}[(2n-1)\pi] \frac{L_y}{2(2n-1)\pi} \end{aligned} \quad (2.146)$$

e que  $\operatorname{sen}[(2n-1)\pi] = 0$  para  $n = 1, 2, 3 \dots$ , a Equação (2.146) se reduz a:

$$\int_0^{L_y} \left\{ \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] \right\}^2 dy = \frac{L_y}{2} \quad (2.147)$$

A substituição de (2.147) em (2.145) resulta em:

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \frac{L_y}{2} = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] dy \quad (2.148)$$

Portanto:

$$E_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (2.149)$$

A Equação (2.149) pode ser substituída em (2.139) resultando em:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.150)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$

A Equação (2.150) corresponde à solução do campo de pressões dinâmicas de uma cavidade bidimensional retangular, fechada-aberta na direção  $y$ , e com uma extremidade aberta e um contorno móvel flexível na direção  $x$ , submetido a um movimento vibratório harmônico de acordo com  $\phi$ . Esta equação pode ser substituída em (2.51) para avaliação da resposta  $p(x, y, t)$ . Um caso particular desta equação consiste em  $\phi(y) = 1$ . Neste caso assume-se que o contorno móvel vibra com todos os pontos da interface possuindo a mesma amplitude, semelhante a uma parede rígida. Neste caso a Equação (2.150) fica reduzida a:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \cos(\kappa_n y) dy \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.151)$$

Lembrando que:

$$\int_0^{L_y} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} y \right] dy = \frac{2L_y}{(2n-1)\pi} \text{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \quad (2.152)$$

O termo trigonométrico de (2.152) pode ser substituído por:

$$\operatorname{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right] = (-1)^{n+1} \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.153)$$

Então, substituindo (2.153) em (2.152):

$$\int_0^{L_y} \cos(\kappa_n y) dy = \frac{2L_y}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1} \quad (2.154)$$

A substituição de (2.154) em (2.151) resulta em:

$$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y) \quad (2.155)$$

A Equação (2.155) corresponde à solução do problema anterior com a consideração de um contorno rígido-móvel vibrando harmonicamente.

A Tabela 2.3 apresenta um resumo das soluções encontradas, onde pode ser verificada a presença do radical  $\sqrt{\alpha_n}$  no denominador das soluções geral e particular para  $\phi = 1$ . O termo  $\alpha_n$  irá assumir valor nulo quando:

$$\omega = \frac{(2n-1)\pi c}{2L_y} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.156)$$

que correspondem aos valores próprios da cavidade na direção vertical (fechada-aberta). Portanto, quando  $\omega$  for igual a uma das frequências naturais na direção  $y$  a solução para um determinado  $n$  não será possível (divisão por zero). O seguinte limite será estabelecido para os termos dependentes de  $n$  quando  $\alpha_n \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \right\} = x - L_x \quad (2.157)$$



Tabela 2.3 – Resumo das soluções para  $P(x, y)$  - Caso 2A

Condição	Solução	Aplicação
<i>geral</i>	$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y)$	<i>cavidade bidimensional com contorno móvel arbitrário</i>
$\phi = 1$	$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y)$	<i>cavidade bidimensional com contorno rígido – móvel (pistão 2D)</i>

$$\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2 \quad ; \quad \kappa_n = (2n-1)\pi/2L_y$$

O termo  $\alpha_n$  poderá ser positivo ou negativo. A partir da solução geral é possível a construção de uma solução composta por duas partes: uma para cada condição. Para  $\alpha_n$  negativo ( $\omega < (2n-1)\pi c/2L_y$ ) é interessante estabelecer a seguinte expressão:

$$\hat{\alpha}_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \right]^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.158)$$

Desta forma, a solução geral pode ser reescrita com o auxílio das relações (2.111), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 P(x, y) = & -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \\
 & - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y) \\
 & + \\
 & -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{senh}(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x) \\
 & - \tanh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} L_x) \cosh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x)] \cos(\kappa_n y)
 \end{aligned} \quad (2.159)$$

Pode-se observar que a primeira parte da solução é válida de  $n = 1$  até  $n = n_0 - 1$ , onde  $n_0$  é o menor valor de  $n$  para o qual  $\omega < (2n-1)\pi c/2L_y$ . A segunda parte da solução é

válida de  $n = n_0$  em diante. Caso  $\omega$  seja menor que  $\pi c/2L_y$ , então  $n_0 = 1$  e apenas a segunda parte da solução estará presente. Para  $\omega$  maior que  $\pi c/2L_y$ , as duas soluções estarão presentes. A primeira parte da solução é composta por funções trigonométricas, ao passo que a segunda parte é representada por funções hiperbólicas. As duas partes representam respostas reais de pressão.

### 2.3.4 - Solução específica para uma cavidade com comprimento infinito na direção horizontal (Caso 2A – infinito)

Neste caso assume-se que a cavidade apresenta comprimento infinito na direção horizontal. Ou seja:  $L_x \rightarrow \infty$ . Trata-se de um caso particular da análise anterior, muito estudado na interação dinâmica barragem-reservatório. As condições de contorno do problema são dadas por:

$$S1 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.160)$$

$$S2 \rightarrow p(L_x, y, t) = 0 \quad \therefore F(L_x) = 0 \quad \text{para } L_x \rightarrow \infty \quad (2.161)$$

$$S3 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \therefore G'(0) = 0 \quad (2.162)$$

$$S4 \rightarrow p(x, L_y, t) = 0 \quad \therefore G(L_y) = 0 \quad (2.163)$$

Pode-se observar que as condições de contorno deste problema permanecem as mesmas do caso anterior, a exceção de (2.161), que indica um comprimento  $L_x$  infinito. Portanto, esta suposição sendo feita na solução para um comprimento finito deverá resultar no caso específico desejado. Para aplicação deste procedimento são estabelecidas as seguintes relações:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1 \quad (2.164)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.165)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.166)$$

Então, substituindo  $L_x \rightarrow \infty$  na segunda solução de (2.159) e lembrando que esta equação também é geral para  $n < n_0$  (tendo apenas seus termos hiperbólicos alterados para funções trigonométricas) resulta em:

$$P(x, y)|_{L_x \rightarrow \infty} = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.167)$$

onde  $\kappa_n$  é dado por (2.132) e  $\hat{\alpha}_n$  é dado por (2.158). Esta equação corresponde à solução do campo de pressões dinâmicas de uma cavidade bidimensional retangular infinita na direção horizontal, fechada-aberta na direção  $y$ , e com uma extremidade aberta e um contorno móvel flexível na direção  $x$ , submetido a um movimento vibratório harmônico arbitrário  $\phi$ . De forma semelhante ao caso anterior, verifica-se que a expressão (2.167) não será definida quando  $\hat{\alpha}_n$  assumir um valor nulo. Esta situação irá ocorrer quando a frequência  $\omega$  for igual a um dos valores próprios da cavidade na direção vertical (fechada-aberta). Os seguintes limites serão estabelecidos para os termos dependentes de  $n$  quando  $\hat{\alpha}_n \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\hat{\alpha}_n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \right\} = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} i \quad (2.168)$$

Verifica-se que  $\hat{\alpha}_n$  poderá ser positivo ou negativo. Portanto, a expressão (2.167) pode ser reescrita de forma análoga à expressão (2.159):

$$P(x, y)|_{L_x \rightarrow \infty} = -i \left\{ \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ e^{-i\sqrt{\alpha_n} x} \right] \cos(\kappa_n y) \right\} + \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.169)$$

Pode-se observar que a primeira parte da solução é válida de  $n = 1$  até  $n = n_0 - 1$ , onde  $n_0$  é o menor valor de  $n$  para o qual  $\omega < (2n - 1)\pi c/2L_y$ . A segunda parte da solução é válida de  $n = n_0$  em diante. Caso  $\omega$  seja menor que  $\pi c/2L_y$ , então  $n_0 = 1$  e apenas a segunda parte da solução estará presente. Para  $\omega$  maior que  $\pi c/2L_y$ , as duas soluções estarão presentes. A primeira parte da solução representa uma resposta com componentes reais e imaginárias, ao passo que a segunda parte indica apenas respostas reais de pressão.

É interessante observar as diferenças existentes entre as Equações (2.159) e (2.169). A primeira solução sempre produzirá respostas reais de pressão, tanto para a parte trigonométrica, como para a parte hiperbólica. Já a Equação (2.169) poderá produzir respostas complexas de pressão. De fato, basta que  $\omega$  seja maior que  $\pi c/2L_y$  para que esta solução passe a apresentar componentes imaginárias. A segunda solução de (2.169) indica apenas um termo entre colchetes relacionado à solução na direção  $x$ , dado por:

$$\left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \quad (2.170)$$

Portanto, pode-se concluir que neste tipo de solução a função  $F(x)$  é do tipo:

$$F(x) = C_4 e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \quad (2.171)$$

que pode ser reescrita, lembrando que  $\hat{\alpha}_n = -\alpha$ . Então:

$$F(x) = C_4 e^{-i\sqrt{\alpha} x} \quad (2.172)$$

A Equação (2.172) corresponde à solução dada pela Tabela 2.1 para  $\beta = \kappa^2$ . Verifica-se que a constante  $C_3$  assume valor nulo neste tipo de solução. A condição necessária para que as respostas de pressão sejam reais exige que tanto  $C_3$ , como  $C_4$ , sejam não nulas, e formem um par conjugado complexo. Desta forma, utilizando a identidade de Euler (2.29), a expressão (2.172) assume a seguinte forma:

$$\frac{F(x)}{C_4} = e^{-i\sqrt{\alpha} x} = \cos(\sqrt{\alpha} x) - i \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha} x) \quad (2.173)$$

que pode ser substituída na primeira parte da solução (2.169), indicando a presença de uma componente imaginária para  $\omega$  maior que  $\pi c/2L_y$  ( $n_0 > 1$ ). Portanto, a solução para um comprimento horizontal infinito irá apresentar respostas imaginárias de pressão quando esta condição for satisfeita.

A segunda parte da solução (2.169) representa exatamente o campo de pressões hidrodinâmicas obtido por Silva (2007), para uma barragem flexível na interface de um fluido compressível. Para esta comparação é conveniente introduzir as seguintes notações adotadas por este autor:

$$\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \rightarrow \lambda_n \quad (2.174)$$

$$\mu_n = \lambda_n L_y = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (2.175)$$

$$I_{j,n} = \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (2.176)$$

que podem ser substituídas na segunda parte da solução (2.169), resultando em:

$$P(x, y) = 2\rho_f \bar{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{\mu_n^2 - \left(\frac{\omega L_y}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{\mu_n^2 - \left(\frac{\omega L_y}{c}\right)^2} \frac{x}{L_y}} \cos\left(\mu_n \frac{y}{L_y}\right) \quad (2.177)$$

A Equação (2.177) representa uma solução geral idêntica à solução dada por (2.169), sendo válida inclusive para  $n < n_0$ , onde ocorre a presença de termos imaginários. Caso seja considerada a hipótese de um contorno rígido-móvel, onde  $\phi(y) = 1$ , a Equação (2.177) irá assumir a seguinte forma:

$$P(x, y) = 2\rho_f \bar{A} L_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n \sqrt{\mu_n^2 - \left(\frac{\omega L_y}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{\mu_n^2 - \left(\frac{\omega L_y}{c}\right)^2} \frac{x}{L_y}} \cos\left(\mu_n \frac{y}{L_y}\right) \quad (2.178)$$

A Equação (2.178) corresponde à mesma expressão obtida por Silva (2007) para uma barragem rígida na interface de um fluido compressível. Esta expressão, de forma semelhante a (2.177), também irá apresentar componentes imaginárias de pressão para  $\omega$  maior que  $\pi c/2L_y$  ( $n_0 > 1$ ).

A Tabela 2.4 apresenta um resumo das soluções encontradas.

Tabela 2.4 – Resumo das soluções para  $P(x, y)$  - Caso 2A com  $L_x \rightarrow \infty$

Condição	Solução	Aplicação
geral	$P(x, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \cos(\kappa_n y)$	cavidade bidimensional com contorno móvel arbitrário
$\phi = 1$	$P(x, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\kappa_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}} \left[ e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \right] \cos(\kappa_n y)$	cavidade bidimensional com contorno rígido – móvel (pistão 2D)

$$\hat{\alpha}_n = (\kappa_n)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad ; \quad \kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_y}$$

### 2.3.5 - Caso 3A (cavidade com contorno móvel-aberta e fechada-fechada)

Neste caso assume-se que a cavidade bidimensional apresenta as seguintes condições de contorno nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente: contorno móvel-aberta e fechada-fechada. A Figura 2.3 ilustra o domínio analisado e as condições de contorno adotadas.

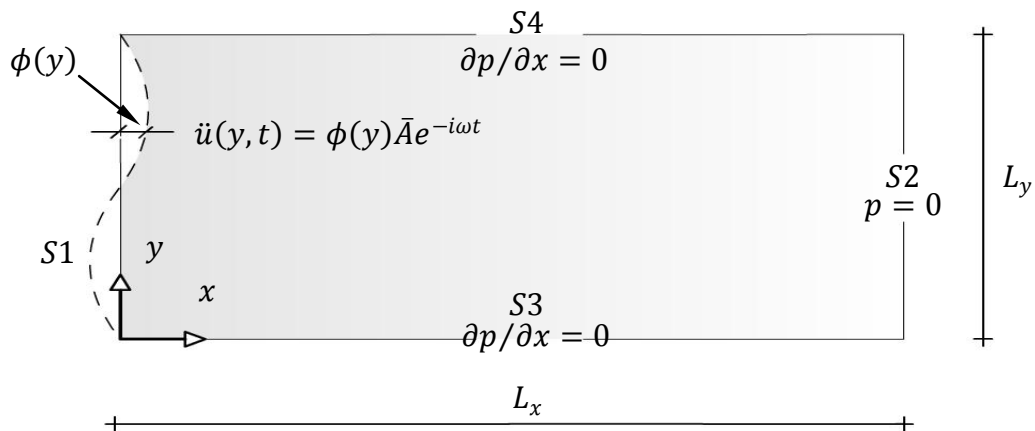


Figura 2.3 – Representação esquemática da cavidade – Caso 3A

As condições de contorno do problema serão dadas por:

$$S1 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.179)$$

$$S2 \rightarrow p(L_x, y, t) = 0 \quad \therefore F(L_x) = 0 \quad (2.180)$$

$$S3 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \therefore G'(0) = 0 \quad (2.181)$$

$$S4 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0 \quad \therefore G'(L_y) = 0 \quad (2.182)$$

Inicialmente é estabelecida a solução para  $G(y)$ . Para  $\beta = 0$  esta função é dada por:

$$G(y) = C_1 + C_2 y \quad (2.183)$$

A aplicação das condições de contorno (2.181) e (2.182) em (2.183), resulta em:

$$G'(0) = G'(L_y) = C_2 = 0 \quad (2.184)$$

Portanto, a solução de  $G(y)$  para  $\beta = 0$  será dada por:

$$G(y) = C_1 \quad (2.185)$$

Da Tabela 2.1 pode-se observar que a solução correspondente para  $F(x)$  é dada por:

$$F(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad (2.186)$$

Aplicando a condição de contorno (2.180) na equação acima:

$$\begin{aligned} F(L_x) &= A \cos(\alpha L_x) + B \sin(\alpha L_x) = 0 \\ A &= -B \tan(\alpha L_x) \end{aligned} \quad (2.187)$$

Substituindo (2.187) em (2.186):

$$F(x) = B [\text{sen}(\alpha x) - \tan(\alpha L_x) \cos(\alpha x)] \quad (2.188)$$

Portanto, a solução completa do problema para  $\beta = 0$  será dada por:

$$P(x) = B [\text{sen}(\alpha x) - \tan(\alpha L_x) \cos(\alpha x)] C_1 \quad (2.189)$$

que pode ser reescrita com uma constante equivalente  $\bar{C} = BC_1$ . Assim:

$$P(x) = \bar{C} [\text{sen}(\alpha x) - \tan(\alpha L_x) \cos(\alpha x)] \quad (2.190)$$

onde a constante remanescente  $\bar{C}$  é obtida com a aplicação da condição de contorno dada pela Equação (2.179). Então:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right| = \bar{C} [\alpha \cos(\alpha x) + \tan(\alpha L_x) \alpha \text{sen}(\alpha x)] \quad (2.191)$$

Portanto:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{C} \alpha = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad \therefore \quad \bar{C} = -\frac{1}{\alpha} \rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.192)$$

Entretanto, a definição prévia de  $\bar{C} = BC_1$ , onde tanto  $B$ , como  $C_1$  são constantes, implica em  $\phi(y)$  assumindo valor constante. Um valor unitário resulta em todos os pontos com mesma aceleração  $\bar{A}$ . Portanto:

$$\bar{C} = -\frac{\rho_f \bar{A}}{\alpha} \quad (2.193)$$

Substituindo esta última expressão em (2.190) resulta em:

$$P(x) = -\frac{\rho_f \bar{A}}{\alpha} [\text{sen}(\alpha x) - \tan(\alpha L_x) \cos(\alpha x)] \quad (2.194)$$



A Equação (2.194) corresponde a solução do pistão unidimensional (pistão-fechado). Esta expressão é válida para o problema quando  $\beta = 0$ .

Para  $\beta = -\kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = C_1 e^{\kappa \cdot y} + C_2 e^{-\kappa \cdot y} \quad (2.195)$$

Aplicando a condição de contorno (2.181) em (2.195):

$$G'(0) = \kappa[C_1 - C_2] = 0 \quad (2.196)$$

A equação acima admite duas soluções:  $\kappa = 0$  ou  $C_1 = C_2$ . A primeira resulta na solução obtida anteriormente, dada por (2.194). Portanto, fazendo  $C_1 = C_2$  e substituindo esta expressão em (2.195):

$$G(y) = C_1 [e^{\kappa \cdot y} + e^{-\kappa \cdot y}] \quad \therefore \quad G'(y) = C_1 \kappa [e^{\kappa \cdot y} - e^{-\kappa \cdot y}] \quad (2.197)$$

Aplicando a condição de contorno (2.182) em (2.197):

$$G'(L_y) = C_1 \kappa [e^{\kappa \cdot L_y} - e^{-\kappa \cdot L_y}] = 0 \quad (2.198)$$

A Equação (2.198) admite duas soluções:  $C_1 = 0$  ou  $\kappa = 0$ . Para a primeira opção  $C_2 = 0$  e a solução é trivial. Para a segunda opção  $\beta = 0$ , resultando na solução anterior (2.194).

Para  $\beta = \kappa^2$  a solução de  $G(y)$  é dada por:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) + B \sin(\kappa y) \quad (2.199)$$

Aplicando a condição de contorno (2.181) em (2.199):

$$G'(0) = B \kappa = 0 \quad \therefore \quad B = 0 \quad (2.200)$$

Aplicando (2.200) e a condição de contorno (2.182) na derivada de (2.199):

$$G'(L_y) = -A \kappa \sin(\kappa L_y) = 0 \quad (2.201)$$

A equação acima deverá apresentar  $A \neq 0$ , para que a solução seja não trivial. Para  $\kappa = 0$ , a solução é válida, e corresponde a (2.194), encontrada anteriormente. Outra opção consiste em:

$$\sin(\kappa L_y) = 0 \quad (2.202)$$

Portanto:

$$\kappa L_y = n\pi \quad n = 0,1,2,3 \dots \quad (2.203)$$

onde verifica-se que o índice  $n$  tem início em zero, pois  $\kappa = 0$  também é solução do problema. Desta forma:

$$\kappa = \frac{n\pi}{L_y} \quad n = 0,1,2,3 \dots \quad (2.204)$$

Portanto,  $\beta = \kappa^2$  produz uma solução válida para o problema, dada por:

$$G(y) = A \cos(\kappa y) \quad (2.205)$$

Resta agora verificar a solução para  $F(x)$ . A Tabela 2.1 indica que a solução correspondente é dada por:

$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha} x) + D \sen(\sqrt{\alpha} x) \quad (2.206)$$

Aplicando a condição de contorno (2.180) em (2.206):

$$\begin{aligned} F(L_x) &= C \cos(\sqrt{\alpha} L_x) + D \sen(\sqrt{\alpha} L_x) = 0 \\ C &= -D \tan(\sqrt{\alpha} L_x) \end{aligned} \quad (2.207)$$

Substituindo esta última expressão em (2.206):

$$F(x) = D [\text{sen}(\sqrt{\alpha} x) - \tan(\sqrt{\alpha} L_x) \cos(\sqrt{\alpha} x)] \quad (2.208)$$

que corresponde a uma solução idêntica às encontradas em (2.75) e (2.136), já que as mesmas condições de contorno foram mantidas na direção  $x$ .

O valor da constante de separação  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha_n = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad n = 0,1,2,3 \dots \quad (2.209)$$

onde existem infinitos valores de  $\kappa$  e  $\alpha$ . Para cada valor de  $n$  existe uma solução correspondente para  $G(y)$  e para  $F(x)$ . Portanto:

$$P_n(x, y) = E_n [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y) \quad (2.210)$$

onde  $n = 0,1,2,3 \dots$  e  $E_n$  representa uma constante remanescente. A solução completa é dada pela soma das soluções para cada valor de  $n$ . Portanto:

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y) \quad (2.211)$$

O valor de  $E_n$  será obtido com a aplicação da condição de contorno (2.179). A derivada parcial de (2.211) em relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[ \frac{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} x) + \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x)}{\sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right] \cos(\kappa_n y) \quad (2.212)$$

Portanto:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\kappa_n y) = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \quad (2.213)$$

Para a solução de (2.213) torna-se necessária a utilização da propriedade de ortogonalidade da função cosseno, dada por (2.142).

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.213) por  $\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$  e substituindo  $\kappa_n$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) = -\rho_f \phi(y) \bar{A} \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \quad (2.214)$$

A integração em  $y$  em ambos os lados da Equação (2.214) resulta em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy \quad (2.215)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade (2.142) em (2.215), obtém-se:

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \int_0^{L_y} \left[ \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (2.216)$$

Lembrando que:

$$\int_0^{L_y} \left[ \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = L_y \quad p/ \ n = 0 \quad (2.217)$$

$$\int_0^{L_y} \left[ \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \left\{ \frac{y}{2} + \frac{\text{sen}\left(\frac{2n\pi y}{L_y}\right) L_y}{4n\pi} \right\} \Big|_{y=0}^{y=L_y} \quad p/ \ n > 0 \quad (2.218)$$

Então:

$$\int_0^{L_y} \left[ \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \frac{L_y}{2} + \frac{\text{sen}(2n\pi) L_y}{4n\pi} \quad p/ \ n > 0 \quad (2.219)$$

Entretanto,  $\text{sen}(2n\pi) = 0$  para  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Desta forma, (2.219) se reduz a:

$$\int_0^{L_y} \left[ \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy = \frac{L_y}{2} \quad p/ n > 0 \quad (2.220)$$

Substituindo (2.217) e (2.220) em (2.216):

$$\begin{aligned} E_0 \sqrt{\alpha_0} L_y &= -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) dy \quad p/ n = 0 \\ E_n \sqrt{\alpha_n} \frac{L_y}{2} &= -\rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad p/ n > 0 \end{aligned} \quad (2.221)$$

Assim, a constante remanescente  $E_n$  será dada por:

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_0}} \int_0^{L_y} \phi(y) dy \quad p/ n = 0 \\ E_n &= -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad p/ n > 0 \end{aligned} \quad (2.222)$$

Portanto, a solução para  $\beta = \kappa^2$  será dada pela substituição de (2.222) em (2.211). Então, a resposta das pressões dinâmicas será dada por:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_0}} \int_0^{L_y} \phi(y) dy \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x) \right] \\ &\quad - \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \left[ \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \right. \\ &\quad \left. - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x) \right] \cos(\kappa_n y) \end{aligned} \quad (2.223)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$

A Equação (2.223) corresponde à solução do campo de pressões dinâmicas de uma cavidade bidimensional retangular, fechada-fechada na direção  $y$ , e com uma extremidade aberta e um contorno móvel flexível na direção  $x$ , submetido a um movimento vibratório harmônico de acordo com  $\phi$ . Esta equação pode ser substituída em (2.51) para avaliação da resposta  $p(x, y, t)$ . Um caso particular desta equação consiste em  $\phi(y) = 1$ . Neste caso

assume-se que o contorno móvel vibra com todos os pontos da interface possuindo a mesma amplitude, semelhante a uma parede rígida. Para esta simplificação é interessante observar que:

$$\int_0^{L_y} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \frac{L_y}{n\pi} \Big|_{y=0}^{y=L_y} = \operatorname{sen}(n\pi) \frac{L_y}{n\pi} \quad (2.224)$$

Entretanto,  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$  para  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Desta forma, (2.224) se reduz a:

$$\int_0^{L_y} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = 0 \quad (2.225)$$

Portanto, para  $\phi(y) = 1$ , a segunda parte da solução (2.223) é nula, resultando em:

$$P(x) = -\frac{\rho_f \bar{A}}{\sqrt{\alpha_0}} [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)] \quad (2.226)$$

que corresponde exatamente à expressão (2.194), pois de (2.209) resulta que:

$$\sqrt{\alpha_0} = \omega/c \quad (2.227)$$

Desta forma, pode-se concluir que a solução para  $\phi(y) = 1$  é dada pela equação do pistão unidimensional (pistão-aberto). Não é necessário estabelecer um limite para  $r \rightarrow 0$ , pois neste tipo de problema a solução com um contorno rígido-móvel é independente da direção vertical. A Tabela 2.5 apresenta um resumo das soluções encontradas. Observa-se que a solução não é definida para  $\alpha_n = 0$ .

O seguinte limite será estabelecido para os termos dependentes de  $n$  quando  $\alpha_n \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} [\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \right\} = x - L_x \quad (2.228)$$

A solução para este problema também pode ser dividida (de forma semelhante aos casos anteriores) em duas partes: uma representando funções onde  $\alpha_n > 0$  e outra representando

funções onde  $\alpha_n < 0$ . Para  $\alpha_n$  negativo ( $\omega < n\pi c/L_y$ ) é interessante estabelecer a seguinte expressão:

$$\hat{\alpha}_n = \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.229)$$

Tabela 2.5 – Resumo das soluções para  $P(x, y)$  - Caso 3A

Condição	Solução	Aplicação
geral	$P(x, y) = -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_0}} \int_0^{L_y} \phi(y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)] - \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y)$	cavidade bidimensional com contorno móvel arbitrário
$\phi = 1$	$P(x) = -\frac{\rho_f \bar{A}}{\sqrt{\alpha_0}} [\text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)]$	cavidade unidimensional ou bidimensional com contorno rígido – móvel (pistão 1D ou 2D)

$$\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2 \quad ; \quad \kappa_n = n\pi/L_y$$

Desta forma, a solução geral pode ser reescrita com o auxílio das relações (2.111), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 P(x, y) = & -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_0}} \int_0^{L_y} \phi(y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)] \\
 & - \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y) \\
 & + \\
 & - \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{senh}(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x) - \tanh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} L_x) \cosh(\sqrt{\hat{\alpha}_n} x)] \cos(\kappa_n y)
 \end{aligned} \quad (2.230)$$

Pode-se observar que a primeira parte da solução é válida de  $n = 1$  até  $n = n_0 - 1$ , onde  $n_0$  é o menor valor de  $n$  para o qual  $\omega < n\pi c/L_y$ . A segunda parte da solução é válida de  $n = n_0$  em diante. Caso  $\omega$  seja menor que  $\pi c/L_y$ , então  $n_0 = 1$  e apenas a segunda parte da solução estará presente. Para  $\omega$  maior que  $\pi c/L_y$ , as duas soluções estarão presentes. As duas partes representam respostas reais de pressão.

### 2.3.6 - Nota sobre cavidades com dois contornos móveis

Um caso de grande interesse surge durante a interação de duas paredes rígidas ou flexíveis com a cavidade adjacente, com aplicações práticas envolvendo reservatórios e comportas, por exemplo. Neste caso, são definidas duas funções de deslocamentos da interface,  $\phi_1(y)$  e  $\phi_2(y)$ , relacionadas, respectivamente, aos contornos móveis localizados nas extremidades esquerda e direita. A Figura 2.4 ilustra este problema.

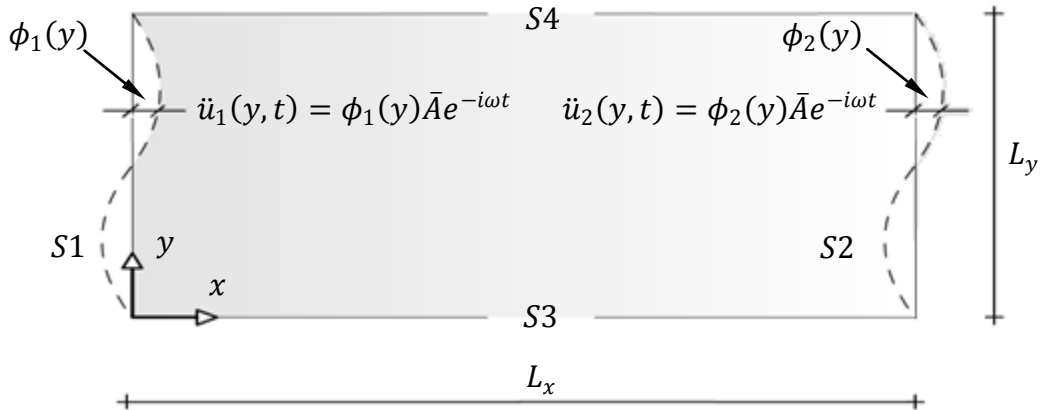


Figura 2.4 – Representação esquemática da cavidade com dois contornos móveis

Para uma cavidade aberta-aberta na direção transversal a solução não-trivial está relacionada a  $\beta = \kappa^2$ . Assim, a solução  $G(y)$  será definida por:

$$G(y) = B \text{sen}(\kappa y) \quad (2.231)$$

onde:

$$\kappa = \frac{n\pi}{L_y} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.232)$$

A solução correspondente na direção longitudinal,  $F(x)$ , é definida por:



$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha} x) + D \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha} x) \quad (2.233)$$

onde o valor da constante de separação  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.234)$$

Portanto, a solução completa será definida por:

$$P(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n \cos(\sqrt{\alpha_n} x) + F_n \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) \quad (2.235)$$

Esta última expressão indica a presença de duas constantes remanescentes,  $E_n$  e  $F_n$ , que serão obtidas com a aplicação das condições de contorno em  $S_1$  e  $S_2$ , definidas respectivamente por:

$$S1 \rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \phi_1(y) \bar{A} \quad (2.236)$$

$$S2 \rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L_x} = -\rho_f \phi_2(y) \bar{A} \quad (2.237)$$

Então:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} [F_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} x) - E_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) \quad (2.238)$$

Substituindo  $x = 0$  na expressão acima e aplicando a condição de contorno (2.236):

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\kappa_n y) = -\rho_f \phi_1(y) \bar{A} \quad (2.239)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade da função seno nesta última expressão:

$$F_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi_1(y) \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy \quad (2.240)$$

Substituindo  $x = L_x$  na expressão (2.238) e aplicando a condição de contorno (2.237):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x) - E_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) = -\rho_f \phi_2(y) \bar{A} \quad (2.241)$$

O somatório da expressão anterior pode ser expandido em duas partes. Então:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [F_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) - \sum_{n=1}^{\infty} [E_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)] \operatorname{sen}(\kappa_n y) \\ = -\rho_f \phi_2(y) \bar{A} \end{aligned} \quad (2.242)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade da função seno nesta última expressão:

$$\begin{aligned} E_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x) \frac{L_y}{2} \\ = F_n \sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x) \frac{L_y}{2} + \rho_f \bar{A} \int_0^{L_y} \phi_2(y) \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy \end{aligned} \quad (2.243)$$

Definindo:

$$I_{\phi_1} = \int_0^{L_y} \phi_1(y) \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy \quad ; \quad I_{\phi_2} = \int_0^{L_y} \phi_2(y) \operatorname{sen}(\kappa_n y) dy \quad (2.244)$$

Substituindo (2.240) em (2.243) e utilizando as relações indicadas em (2.244):

$$E_n \sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x) \frac{L_y}{2} = -\rho_f \bar{A} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x) I_{\phi_1} + \rho_f \bar{A} I_{\phi_2} \quad (2.245)$$

Então:

$$E_n = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_n}} \left[ \frac{I_{\phi_2}}{\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} - \frac{I_{\phi_1}}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right] \quad (2.246)$$

Substituindo (2.240) e (2.246) em (2.235):

$$P(x, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \left\{ \left[ \frac{I_{\phi_2}}{\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} - \frac{I_{\phi_1}}{\text{tan}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right] \cos(\sqrt{\alpha_n} x) - I_{\phi_1} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \right\} \text{sen}(\kappa_n y) \quad (2.247)$$

A Equação (2.247) corresponde à solução do campo de pressões dinâmicas de uma cavidade bidimensional retangular, aberta na direção transversal e com dois contornos móveis, submetidos a movimentos vibratórios harmônicos de acordo com  $\phi_1(y)$  e  $\phi_2(y)$ . Para  $I_{\phi_2} = 0$  esta expressão assume as características de uma cavidade fechada em S2.

Soluções para cavidades com outras condições de contorno na direção transversal também podem ser obtidas de forma semelhante. É interessante notar que as alterações irão incluir apenas as funções  $G(y)$ , que serão utilizadas na obtenção das constantes  $E_n$  e  $F_n$ . Assim, para uma cavidade fechada-aberta na direção transversal resulta:

$$P(x, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \left\{ \left[ \frac{I_{\phi_2}}{\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} - \frac{I_{\phi_1}}{\text{tan}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right] \cos(\sqrt{\alpha_n} x) - I_{\phi_1} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \right\} \cos(\kappa_n y) \quad (2.248)$$

onde:

$$\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.249)$$

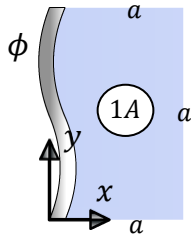
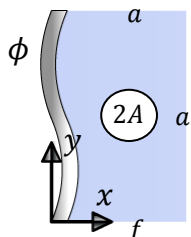
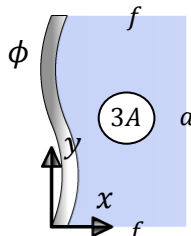
$$I_{\phi_1} = \int_0^{L_y} \phi_1(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad ; \quad I_{\phi_2} = \int_0^{L_y} \phi_2(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (2.250)$$

### 2.3.7 - Resumo e análise das soluções gerais para os casos estudados

A partir das soluções gerais obtidas para cada caso específico é possível a construção de tabelas que identificam termos em comum e facilitam a aplicação destas equações. A

Tabela 2.6 apresenta um resumo das soluções gerais obtidas para cavidades com condição de contorno móvel-aberta na direção horizontal.

Tabela 2.6 – Resumo das soluções gerais (condição de contorno móvel-aberta em  $x$ )

Cavidade	$R_n$	$S_n$	$\kappa_n$
	$I_\phi \frac{\text{sen}[\sqrt{\alpha_n}(x - L_x)]}{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)}$	$\text{sen}(\kappa_n y)$	$\frac{n\pi}{L_y}$ $n = 1, 2, 3 \dots$
		$\text{cos}(\kappa_n y)$	$\frac{(2n-1)\pi}{2L_y}$ $n = 1, 2, 3 \dots$
		$\text{cos}(\kappa_n y)$	$\frac{n\pi}{L_y}$ $n = 0, 1, 2 \dots$

$\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2$       a = aberta    f = fechada

Desta forma, as pressões dinâmicas  $P(x, y)$  serão dadas pela seguinte expressão:

$$P(x, y) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \tag{2.251}$$

onde:

$$P_0 = -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y} R_0 S_0 \quad ; \quad P_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} R_n S_n \tag{2.252}$$

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \phi(y) S_n dy \tag{2.253}$$

Nos casos 1A e 2A o termo  $P_0$  é nulo.

A Tabela 2.6 indica que a solução  $R_n$  está relacionada a direção horizontal, enquanto  $S_n$  corresponde a solução na direção vertical. O primeiro termo representa as características de um problema acoplado unidimensional na direção  $x$ . O segundo termo representa as características de uma cavidade unidimensional na direção  $y$ , com uma constante relacionada à deformada adotada para o contorno móvel  $\phi(y)$ . Em todas as soluções a resposta de pressões  $P_n$  não será definida para  $\omega = \kappa_n c$ , resultando em um valor nulo no denominador da solução  $R_n$ . Estas frequências correspondem exatamente aos valores próprios da cavidade unidimensional na direção vertical. O limite de  $R_n$  para  $\alpha_n \rightarrow 0$  é definido nas soluções 1A, 2A e 3A, com valor igual a  $x - L_x$ . A solução  $R_n$  será composta por funções trigonométricas para  $\alpha_n > 0$ . Para valores de  $\alpha_n$  menores que zero esta solução será representada por funções hiperbólicas. Em ambos os casos as funções resultantes irão representar componentes reais de pressão dinâmica.

A solução  $R_n$  para uma cavidade contorno móvel-aberta em  $x$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R_n = I_\phi \frac{\text{sen}[\sqrt{\alpha_n}(x - L_x)]}{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)} = \frac{f_1(I_\phi, \alpha_n, x, L_x)}{f_2(\alpha_n, L_x)} \quad (2.254)$$

É interessante observar que o numerador  $f_1$  na expressão acima indica a variação das pressões dinâmicas ao longo da direção horizontal. O denominador  $f_2$  indica um fator de amplitude. Na expressão (2.254) pode-se adotar um comprimento arbitrário  $L_x$  para verificação do comportamento do numerador em função dos parâmetros  $x$  e  $\alpha_n$ . As Figuras 2.5 e 2.6 ilustram os resultados obtidos para valores de  $\alpha_n > 0$ .

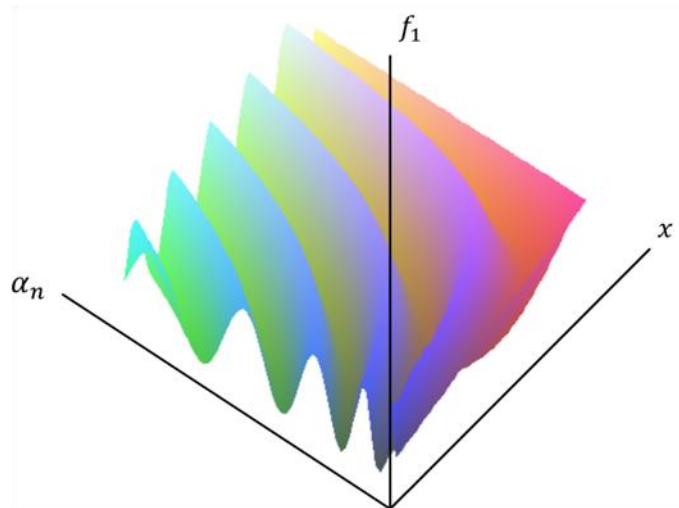


Figura 2.5 – Variação da função  $f_1$  para um comprimento  $L_x = 1$  e  $I_\phi = 1$

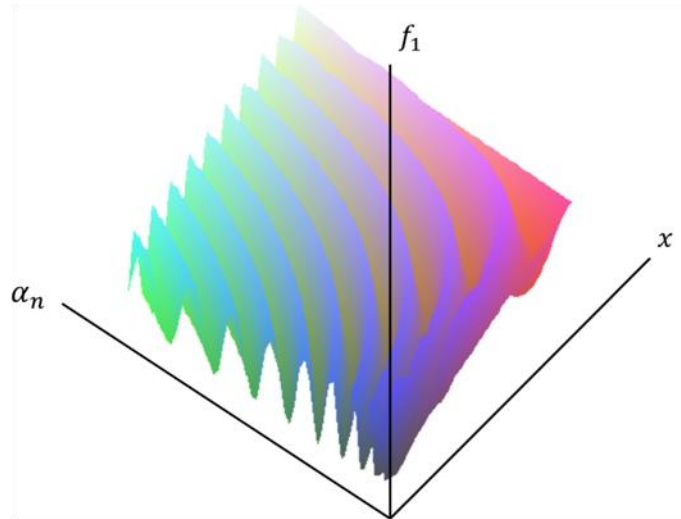


Figura 2.6 – Variação da função  $f_1$  para um comprimento  $L_x = 2$  e  $I_\phi = 1$

A análise das Figuras 2.5 e 2.6 indica que o parâmetro  $\alpha_n$  exerce influência na configuração das curvas longitudinais, aumentando a frequência de distribuição com o incremento deste parâmetro. Adicionalmente, pode-se observar que um aumento no comprimento  $L_x$  implica em um acréscimo no número de curvas para um determinado valor de  $\alpha_n$ . É interessante verificar a variação de  $f_1$  ao longo de  $x$  para uma série de valores de  $\alpha_n$ . A Figura 2.7 ilustra os resultados obtidos para  $L_x = 1$  e  $I_\phi = 1$ .

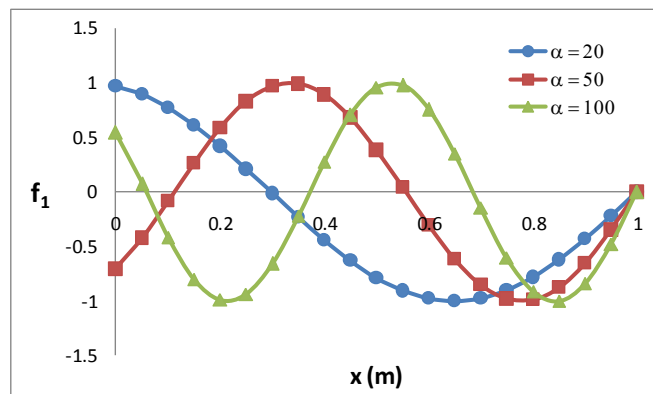


Figura 2.7 – Variação da função  $f_1$  ao longo de  $x$  ( $L_x = 1$  e  $I_\phi = 1$ )

A análise da Figura 2.7 indica que todas as curvas apresentam valor nulo na extremidade  $x = L_x$ . Este valor é resultado da condição de contorno imposta, que implica em pressão nula nesta posição. Observa-se também que o número de ciclos aumenta com o incremento de  $\alpha_n$ , com amplitudes oscilando entre  $-1$  e  $1$ . O valor inicial da função para  $x = 0$  é variável, podendo ser positivo, negativo ou nulo. Estas curvas representam as funções sem os efeitos de amplitude relacionados a  $f_2$ . Entretanto, para cada valor de  $\alpha_n$  e  $L_x$  existe um

valor correspondente desta função. Desta forma, as amplitudes não serão as mesmas para cada curva, e irão sofrer influência direta deste parâmetro. A Figura 2.8 ilustra a variação de  $f_2$  ao longo de  $\alpha_n$ , para um comprimento  $L_x = 1$ .

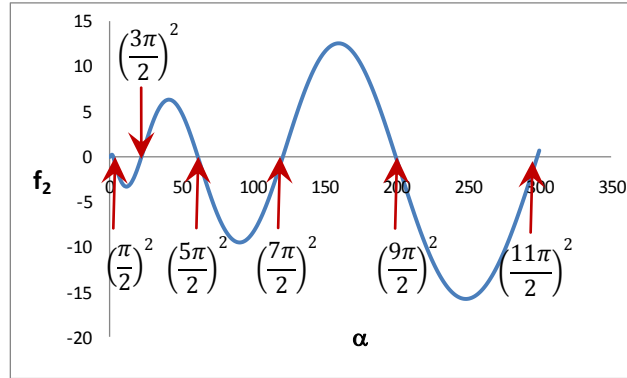


Figura 2.8 – Variação da função  $f_2$  ao longo de  $\alpha_n$  ( $L_x = 1$ )

Na Figura 2.8 pode-se observar que a curva  $f_2$  intercepta diversas vezes o eixo horizontal, sendo cada ponto de interseção definido por:

$$\alpha_{crítico} = \left[ \frac{(2m - 1)\pi}{2L_x} \right]^2 \quad p/ \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.255)$$

Estes pontos definem valores de  $\alpha_n$  onde a função  $f_2$  apresenta valor nulo. Desta forma, o valor de  $R_n$  não será definido, resultando em uma divisão por zero. Entretanto, é interessante estudar os limites da função  $R_n$  para valores de  $\alpha_n$  próximos a estes valores. Então:

$$\lim_{f_2 \rightarrow 0} \frac{f_1}{f_2} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad (2.256)$$

Da Equação (2.256) pode-se concluir que a amplitude da função  $R_n$  tenderá ao infinito para valores de  $\alpha_n$  próximos aos pontos críticos de  $f_2$ . Portanto, a forma da curva  $R_n$  será semelhante à curva  $f_1$  (Figura 2.7), com valor de amplitude que irá depender da proximidade de um dos pontos críticos definidos por (2.255). A Figura 2.9 ilustra a variação de  $R_n$  para um comprimento  $L_x = 1$ . É interessante observar neste gráfico que as maiores amplitudes ocorrem exatamente nos pontos críticos (representados pela interseção da curva  $f_2$  com o eixo  $\alpha_n$ ).

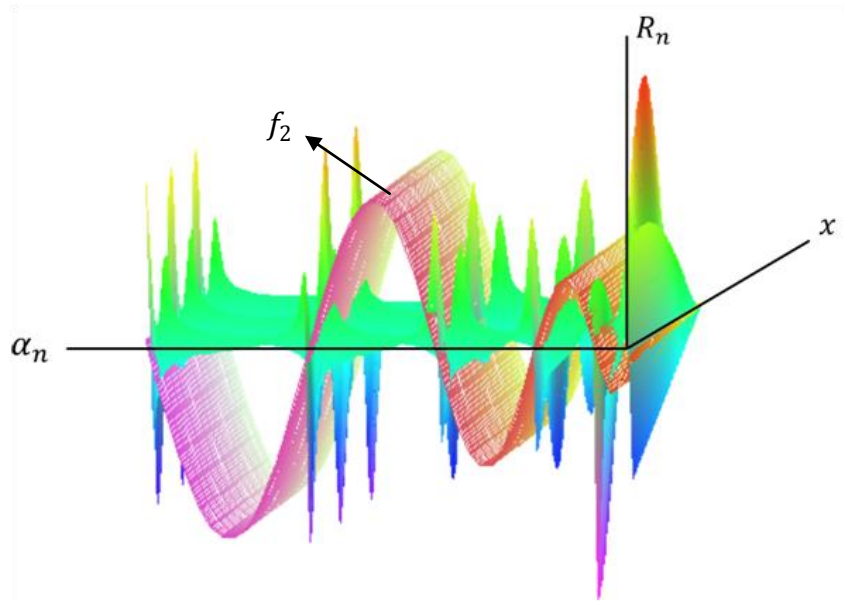


Figura 2.9 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  e  $\alpha_n$  ( $L_x = 1, I_\phi = 1$ )

Outra forma de representação consiste no gráfico da função  $R_n$  para os mesmos valores de  $\alpha_n$  estudados na Figura 2.7. Desta forma pode-se avaliar o efeito da amplitude  $f_2$  em cada uma destas curvas. A Figura 2.10 ilustra os resultados obtidos, onde é possível verificar que a curva com  $\alpha_n = 20$  apresentou maior amplitude. Nota-se também que as curvas conservam suas características quando comparadas a Figura 2.7, tendo apenas suas magnitudes modificadas.

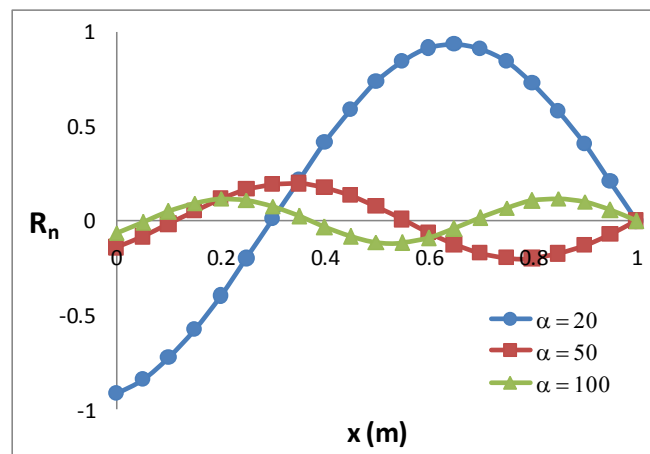


Figura 2.10 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  ( $L_x = 1, I_\phi = 1$ )

A função  $R_n$  também pode ser estudada para valores de  $\alpha_n < 0$ . A Figura 2.11 ilustra os resultados obtidos para um comprimento  $L_x = 1$ . É interessante observar que o limite  $\alpha_n \rightarrow 0$  representa uma função de 1º grau definida por  $x - L_x$ . A função  $R_n$  passa a



representar uma assíntota horizontal, com menores amplitudes, à medida que o valor de  $\alpha_n$  diminui. Desta forma, pode-se concluir que a influência de parcelas com pequenos valores de  $\alpha_n$  na resposta de pressões dinâmicas é infinitamente pequena.

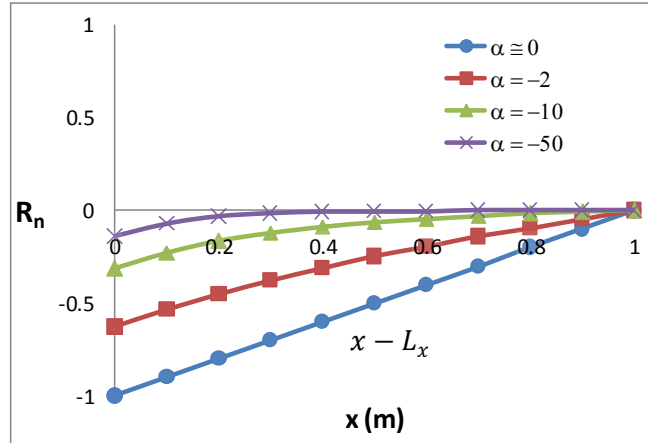


Figura 2.11 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  para  $\alpha_n < 0$  ( $L_x = 1, I_\phi = 1$ )

A Tabela 2.7 apresenta um resumo das soluções gerais obtidas para cavidades com dois contornos móveis, classificadas em  $B$  ( $\phi_2 = 0$ , fechada) e  $C$  ( $\phi_2 \neq 0$ , fronteira móvel).

Tabela 2.7 – Resumo das soluções gerais (cavidades com dois contornos móveis)

Cavidade	$R_n$	$S_n$	$\kappa_n$
		$\text{sen}(\kappa_n y)$	$\frac{n\pi}{L_y}$ $n = 1, 2, 3 \dots$
	$I_{\phi_1} \left\{ \frac{\cos[\sqrt{\alpha_n}(L_x - x)]}{\sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right\}$ $- I_{\phi_2} \left\{ \frac{\cos[\sqrt{\alpha_n} x]}{\sqrt{\alpha_n} \text{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \right\}$	$\text{cos}(\kappa_n y)$	$\frac{(2n - 1)\pi}{2L_y}$ $n = 1, 2, 3 \dots$
		$\text{cos}(\kappa_n y)$	$\frac{n\pi}{L_y}$ $n = 0, 1, 2 \dots$

$$\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2$$

a = aberta f = fechada

As pressões dinâmicas  $P(x, y)$  serão dadas pela seguinte expressão:

$$P(x, y) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (2.257)$$

onde:

$$P_0 = -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y} R_0 S_0 \quad (2.258)$$

$$P_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} R_n S_n \quad (2.259)$$

Verifica-se que o termo  $P_0$  é nulo nos dois primeiros casos. Os valores de  $I_{\phi_1}$  e  $I_{\phi_2}$  são definidos por:

$$I_{\phi_1} = \int_0^{L_y} \phi_1(y) S_n dy \quad ; \quad I_{\phi_2} = \int_0^{L_y} \phi_2(y) S_n dy \quad (2.260)$$

Para  $\phi_2(y) = 0$  a solução corresponde a uma cavidade fechada em  $S_2$ , com  $I_{\phi_2} = 0$ . Desta forma, os resultados apresentados na Tabela 2.7 envolvem expressões válidas para cavidades com dois contornos móveis, ou com um contorno móvel e uma parede rígida.

A Tabela 2.7 indica que a solução  $R_n$  está relacionada a direção horizontal, enquanto  $S_n$  corresponde a solução na direção vertical. Em todas as soluções a resposta de pressões  $P_n$  não será definida para  $\omega = \kappa_n c$ , resultando em um valor nulo no denominador da solução  $R_n$ . Estas frequências correspondem exatamente aos valores próprios da cavidade unidimensional na direção vertical. O limite de  $R_n$  para  $\alpha_n \rightarrow 0$  é infinito em todas as soluções do tipo  $B$ , podendo ser positivo ou negativo, dependendo da aproximação (esquerda ou direita). A solução  $R_n$  será composta por funções trigonométricas para  $\alpha_n > 0$ . Para valores de  $\alpha_n$  menores que zero esta solução será representada por funções hiperbólicas. Em ambos os casos as funções resultantes irão representar componentes reais de pressão dinâmica.

A solução  $R_n$  para uma cavidade com dois contornos móveis é dada por:

$$R_n = \frac{I_{\phi 1} \{ \cos[\sqrt{\alpha_n}(L_x - x)] \} - I_{\phi 2} \{ \cos[\sqrt{\alpha_n}x] \}}{\sqrt{\alpha_n} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} L_x)} = \frac{g_1(I_{\phi 1}, I_{\phi 2}, \alpha_n, x, L_x)}{g_2(\alpha_n, L_x)} \quad (2.261)$$

De forma semelhante ao que ocorre em uma cavidade contorno móvel-aberta em  $x$ , o numerador na expressão acima indica a variação das pressões hidrodinâmicas ao longo da direção horizontal. O denominador indica um fator de amplitude. Um estudo detalhado destes dois termos será feito a seguir.

A variação de  $g_1$  ao longo de  $x$  para uma série de valores de  $\alpha_n$ , com  $I_{\phi 1} = 1$  e  $I_{\phi 2} = 0$  (contorno rígido), encontra-se ilustrada na Figura 2.12, para um comprimento  $L_x = 1$ .

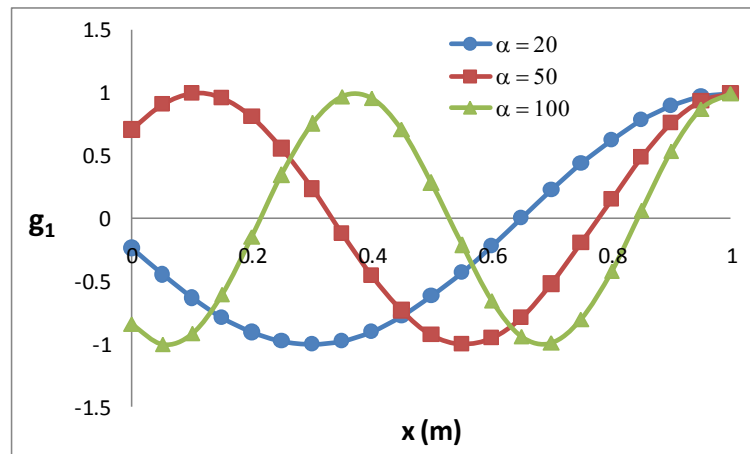


Figura 2.12 – Variação da função  $g_1$  ao longo de  $x$  ( $I_{\phi 1} = 1$  e  $I_{\phi 2} = 0$ )

A análise da Figura 2.12 indica que todas as curvas apresentam valor unitário e inclinação nula na extremidade  $x = L_x$ . Estas características são resultado da condição de contorno imposta,  $I_{\phi 2} = 0$ , resultando em uma cavidade fechada em  $S_2$ , que implica em derivada em relação a  $x$  igual a zero nesta posição. Observa-se também que o número de ciclos aumenta com o incremento de  $\alpha_n$ , com amplitudes oscilando entre  $-1$  e  $1$ . O valor inicial da função para  $x = 0$  é variável, podendo ser positivo, negativo ou nulo. Estas curvas representam as funções sem os efeitos de amplitude relacionados a  $g_2$ . Entretanto, para cada valor de  $\alpha_n$  e  $L_x$  irá existir um valor correspondente desta função. Desta forma, as amplitudes não serão as mesmas para cada curva, e irão sofrer influência direta deste parâmetro. A Figura 2.13 ilustra a variação de  $g_2$  ao longo de  $\alpha_n$ , para um comprimento  $L_x = 1$ .

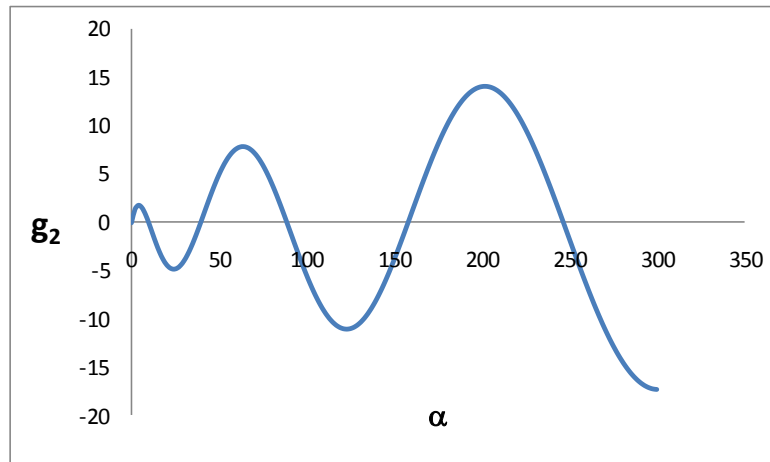


Figura 2.13 – Variação da função  $g_2$  ao longo de  $x$  ( $L_x = 1$ )

Na Figura 2.13 pode-se observar que a curva  $g_2$  intercepta diversas vezes o eixo horizontal, sendo cada ponto de interseção definido por:

$$\alpha_{crítico} = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \quad p/ \quad m = 1,2,3, \dots \quad (2.262)$$

Estes pontos definem valores de  $\alpha_n$  onde a função  $g_2$  apresenta valor nulo. Assim, o valor de  $R_n$  não será definido, resultando em uma divisão por zero. De forma semelhante ao caso anterior (contorno móvel-aberta), a função  $R_n$  irá atingir os seguintes limites para valores de  $\alpha_n$  próximos a estes valores:

$$\lim_{g_2 \rightarrow 0} \frac{g_1}{g_2} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad (2.263)$$

Da Equação (2.263) pode-se concluir que a amplitude da função  $R_n$  tenderá ao infinito para valores de  $\alpha_n$  próximos aos pontos críticos de  $g_2$ . Portanto, a forma da curva  $R_n$  será semelhante a curva  $g_1$ , com valor de amplitude que irá depender da proximidade de um dos pontos críticos definidos por (2.262). A Figura 2.14 ilustra o gráfico da função  $R_n$  para os mesmos valores de  $\alpha_n$  estudados na Figura 2.12. Desta forma pode-se avaliar o efeito da amplitude  $g_2$ . Nota-se que as curvas desta figura conservam suas características quando comparadas a Figura 2.12, tendo apenas suas magnitudes modificadas. Esta função também pode ser estudada para valores de  $\alpha_n < 0$ . A Figura 2.15 ilustra estes resultados para um comprimento  $L_x = 1$ .

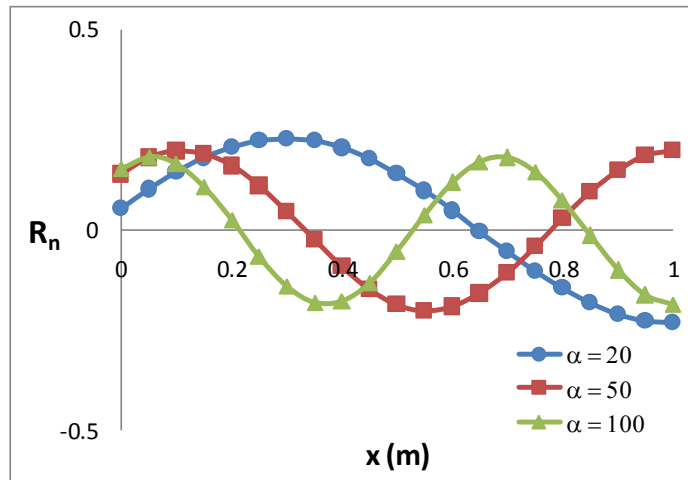


Figura 2.14 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  ( $I_{\phi_1} = 1$  e  $I_{\phi_2} = 0$ )

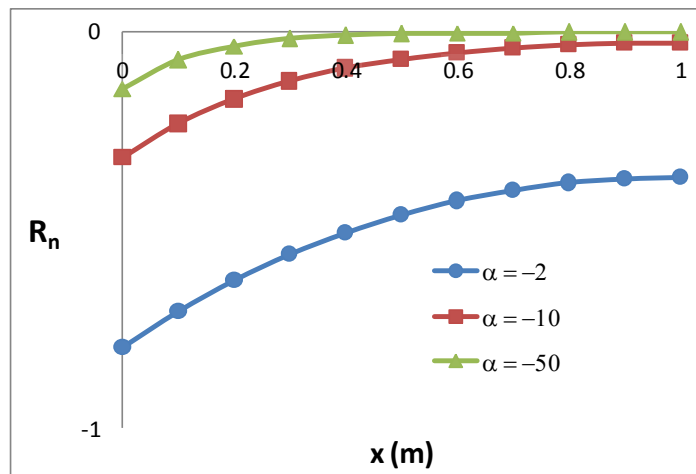


Figura 2.15 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  para  $\alpha_n < 0$  ( $I_{\phi_1} = 1$  e  $I_{\phi_2} = 0$ )

A análise da Figura 2.15 indica que a função  $R_n$  passa a representar uma assíntota horizontal, com menores amplitudes, à medida que o valor de  $\alpha_n$  diminui. Desta forma, pode-se concluir que a influência de parcelas com pequenos valores de  $\alpha_n$  na resposta de pressões dinâmicas é infinitamente pequena. É interessante observar que o limite  $\alpha_n \rightarrow 0$  é indefinido, com a função  $g_2$  assumindo amplitude infinita. Esta observação indica que este limite também corresponde a um ponto crítico da função  $g_2$ .

É interessante avaliar o comportamento da Equação (2.261) para valores de  $I_{\phi_2} \neq 0$  (cavidades com dois contornos móveis). Neste caso, pode-se assumir  $I_{\phi_2} = I_{\phi_1}$  ou  $I_{\phi_2} = -I_{\phi_1}$ . As Figuras 2.16 e 2.17 ilustram estes resultados para  $L_x = 1$ , com valores de  $\alpha_n > 0$ . Observa-se que a inclinação não é nula nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L_x$ .

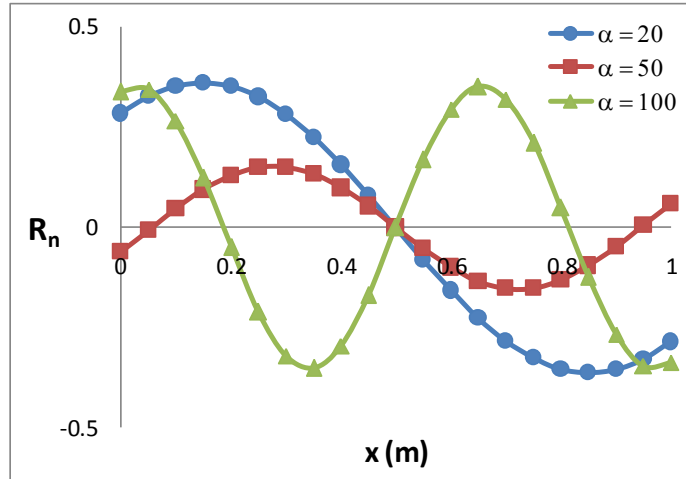


Figura 2.16 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  ( $I_{\phi_2} = I_{\phi_1} = 1$ )

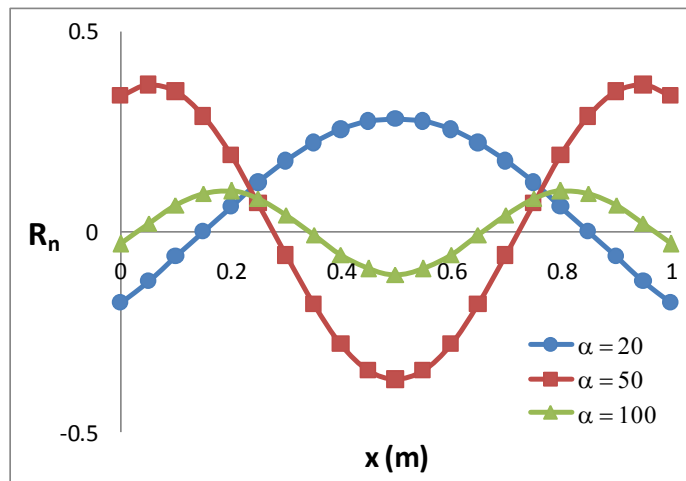


Figura 2.17 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  ( $I_{\phi_2} = -I_{\phi_1} = -1$ )

Os seguintes limites da função  $R_n$  são estabelecidos quando  $\alpha_n \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} R_n = \begin{cases} I_{\phi_1}x - \frac{I_{\phi_1}}{2}L_x & \rightarrow I_{\phi_2} = I_{\phi_1} \\ \pm\infty & \rightarrow I_{\phi_2} = -I_{\phi_1} \end{cases} \quad (2.264)$$

Portanto, a expressão (2.264) indica que a função  $R_n$  é governada pela equação de uma reta quando  $I_{\phi_2} = I_{\phi_1}$ . Para  $I_{\phi_2} = -I_{\phi_1}$  o limite é definido por um valor infinito, estabelecendo um ponto crítico da função  $g_2$  idêntico ao observado para uma cavidade fechada em  $S_2$  ( $I_{\phi_2} = 0$ ). A Figura 2.18 ilustra os resultados para  $L_x = 1$  e  $I_{\phi_2} = I_{\phi_1}$ , com valores de  $\alpha_n < 0$ . Verifica-se que todas as curvas apresentam interseção em  $L_x/2$ , com tendência de linearização para  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

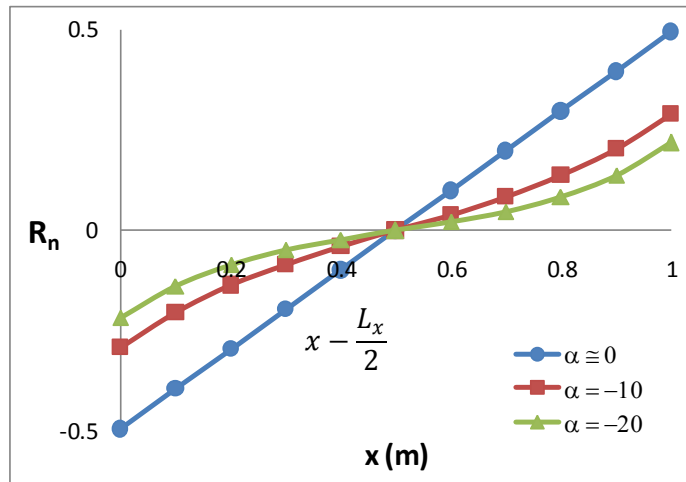


Figura 2.18 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  para  $\alpha_n < 0$  ( $I_{\phi_2} = I_{\phi_1} = 1$ )

A Figura 2.19 ilustra os resultados para  $L_x = 1$  e  $I_{\phi_2} = -I_{\phi_1}$ , com valores de  $\alpha_n < 0$ .

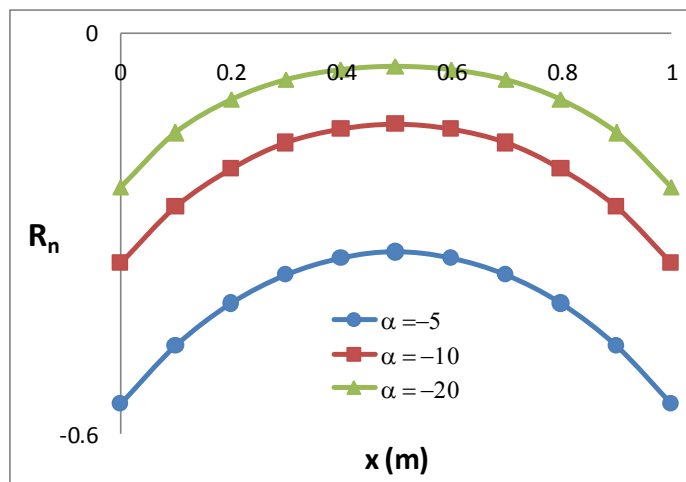
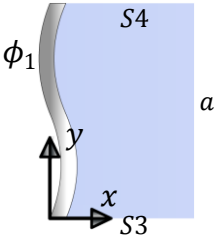
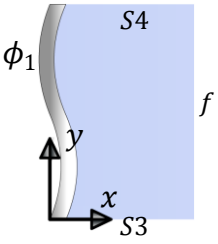
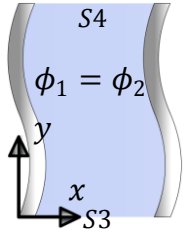
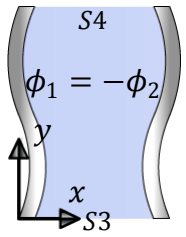


Figura 2.19 – Variação da função  $R_n$  ao longo de  $x$  para  $\alpha_n < 0$  ( $I_{\phi_2} = -I_{\phi_1} = -1$ )

É interessante notar que as Figuras 2.16 e 2.18 são anti-simétricas em relação à metade do comprimento longitudinal, enquanto as Figuras 2.17 e 2.19 são simétricas em relação a esta mesma posição. Além disso, estas figuras apresentam semelhanças, no intervalo de 0 a  $L_x/2$  com, respectivamente, soluções de cavidades abertas e fechadas em  $S_2$ . Assim, observa-se que em  $x = L_x/2$  as Figuras 2.16 e 2.18 apresentam solução  $R_n = 0$ , enquanto as Figuras 2.17 e 2.19 apresentam inclinação nula nesta posição.

As conclusões obtidas na direção longitudinal,  $R_n$ , para todas as cavidades estudadas, encontram-se resumidas na Tabela 2.8.

Tabela 2.8 – Resumo das conclusões obtidas para a solução longitudinal  $R_n$

Cavidade	$\alpha_{crítico}$	$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} R_n$	Particularidade
	$\left[ \frac{(2m-1)\pi}{2L_x} \right]^2 \quad p/ \quad m = 1, 2, 3, \dots$	$x - L_x$	$P(L_x, y) = 0$
	$\left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \quad p/ \quad m = 1, 2, 3, \dots$	$\pm \infty$	$\frac{\partial P}{\partial x} \Big _{x=L_x} = 0$
		$I_{\phi_1} \left( x - \frac{L_x}{2} \right)$	$P \left( \frac{L_x}{2}, y \right) = 0$
		$\pm \infty$	$\frac{\partial P}{\partial x} \Big _{x=\frac{L_x}{2}} = 0$

a = aberta    f = fechada

As análises apresentadas até o momento foram dedicadas apenas às soluções longitudinais  $R_n$ . No capítulo seguinte as soluções transversais  $S_n$  serão analisadas para cada caso específico e combinadas com a solução longitudinal, tornando possível a análise completa dos parâmetros envolvidos nas cavidades estudadas.



## 3 - ESTUDO DAS SOLUÇÕES DO DOMÍNIO DO FLUIDO

### 3.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram deduzidas as soluções gerais e específicas para o domínio do fluido, envolvendo fronteiras móveis e diversas condições de contorno. Estas soluções foram em seguida categorizadas de acordo com a função  $R_n$ , relacionada a direção longitudinal. Um breve estudo do comportamento das pressões dinâmicas nesta direção foi apresentado, sem a preocupação em estudar a influência da solução na direção transversal ( $S_n$ ). Neste capítulo estes efeitos serão analisados, assim como o campo de pressões resultante, composto pela solução nas duas direções  $P(x, y)$ . Assim, pretende-se avaliar as principais características de cada caso específico, verificando a influência de diversos parâmetros, tais como: frequência ( $\omega$ ), função de deslocamentos da interface ( $\phi$ ), comprimentos da cavidade ( $L_x$  e  $L_y$ ) e número de termos envolvidos na série ( $n$ ).

### 3.2 - INFLUÊNCIA DA SOLUÇÃO TRANSVERSAL

Neste item serão apresentados o mecanismo de formação dos valores críticos do sistema acoplado, os modos críticos associados e as propriedades de ortogonalidade envolvidas entre a função transversal  $S_n(y)$  e a função de deslocamentos da interface  $\phi(y)$ .

#### 3.2.1 - Estudo dos valores críticos e modos associados

A análise das soluções longitudinais apresentadas no capítulo anterior indica a presença do termo  $\alpha_n$ , cujo valor é definido por:

$$\alpha_n = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (\kappa_n)^2 \quad (3.1)$$

Assim, a solução transversal é independente, com valores definidos de  $\kappa_n$ . Entretanto, o mesmo não ocorre em (3.1), que apresenta uma relação de dependência com a constante de separação na direção transversal. Esta relação, combinada com os valores de  $\alpha_{crítico}$  da Tabela 2.8, estabelece as frequências  $\omega$  associadas às ressonâncias do sistema. Esta última expressão pode ser reescrita, resultando em:

$$\omega_{crítico} = \begin{cases} \sqrt{\left[\frac{(2m-1)\pi c}{2L_x}\right]^2 + (\kappa_n c)^2} & \text{fronteira móvel – aberta em } x \\ \sqrt{\left(\frac{m\pi c}{L_x}\right)^2 + (\kappa_n c)^2} & \text{fronteira móvel – fechada ou fronteira} \\ & \text{móvel – fronteira móvel em } x \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $m = 1, 2, 3 \dots$

A expressão (3.2) indica que as ressonâncias estão associadas à combinação entre as frequências da direção transversal ( $\kappa_n c$ ) e as frequências críticas da direção longitudinal, que são equivalentes aos valores de uma cavidade unidimensional fechada-aberta ou fechada-fechada. Portanto, observa-se que as frequências críticas do sistema correspondem aos valores próprios de uma cavidade equivalente, onde os contornos móveis são substituídos por paredes rígidas.

A ocorrência das frequências indicadas em (3.2) implica em uma amplitude infinita para um conjunto de valores de  $m$  e  $n$ . O limite onde  $\omega \rightarrow \omega_{crítico}$  (ou  $\alpha \rightarrow \alpha_{crítico}$ ) define as seguintes soluções longitudinais  $\bar{R}_n$  (normalizadas pela amplitude):

$$\begin{aligned} \bar{R}_n &= \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right] && \text{fronteira móvel – aberta em } x \\ \bar{R}_n &= \cos \left( \frac{m\pi x}{L_x} \right) && \text{fronteira móvel – fechada ou fronteira} \\ &&& \text{móvel – fronteira móvel em } x \end{aligned} \quad (3.3)$$

As duas funções longitudinais indicadas em (3.3) correspondem, respectivamente, a soluções unidimensionais de cavidades fechada-aberta e fechada-fechada. A amplitude infinita produzida por estas soluções torna a participação dos índices  $m$  e  $n$  dominante na resposta de pressões. Assim, em todas as soluções este limite estabelece uma configuração crítica de pressões  $\bar{P}(x, y)$ , normalizada pela amplitude, definida por:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, y) &= \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right] S_n(y) && \text{fronteira móvel – aberta em } x \\ \bar{P}(x, y) &= \cos \left( \frac{m\pi x}{L_x} \right) S_n(y) && \text{fronteira móvel – fechada ou fronteira} \\ &&& \text{móvel – fronteira móvel em } x \end{aligned} \quad (3.4)$$

que correspondem aos modos de uma cavidade equivalente, onde os contornos móveis são substituídos por paredes rígidas.

### 3.2.2 - Estudo das propriedades de ortogonalidade entre $\phi(y)$ e $S_n(y)$

A função trigonométrica  $S_n(y)$  pode ser representada por um seno, ou por um cosseno. As propriedades de ortogonalidade destas funções podem ser aplicadas para eliminar, ou simplificar, o somatório existente na solução de pressões do capítulo anterior. Vale lembrar que as expressões do Capítulo 2 definem o seguinte termo:

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \phi(y) S_n(y) dy \quad (3.5)$$

Portanto, a combinação das funções que definem  $\phi(y)$  e  $S_n(y)$  poderá resultar em condições de ortogonalidade da Equação (3.5). Um caso clássico é o representado pelos modos de vibração de uma viga bi-apoiada, cuja função de deslocamentos é dada por:

$$\phi(y) = \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \quad p/ j = 1,2,3, \dots \quad (3.6)$$

Considerando, por exemplo, uma cavidade aberta-aberta na direção transversal, a solução de (3.5), com função de deslocamentos definida por (3.6), será representada por:

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = \begin{cases} 0 \rightarrow n \neq j \\ \frac{L_y}{2} \rightarrow n = j \end{cases} \quad (3.7)$$

Assim, verifica-se que o somatório da solução representada por (3.7) será nulo para valores de  $n \neq j$ , restando apenas o termo onde  $n = j$ . Portanto, soluções de pressão dadas por expressões onde o somatório é eliminado são obtidas quando a função (3.6) encontra-se associada a uma cavidade aberta na direção transversal. Este caso específico resulta na forma mais simples de abordagem do problema e será desenvolvido neste capítulo. A função (3.6) pode ser aplicada a outras condições de contorno da direção transversal, resultando em simplificações do somatório. A Tabela 3.1 ilustra estes resultados.

Tabela 3.1 – Ortogonalidade entre as funções  $\phi(y)$  e  $S_n(y)$

$\phi(y)$	$S_n(y)$	$I_\phi$	Características da série
$\text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right)$ Viga Bi-apoiada	$\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) n = 1,2,3, \dots$ <i>aberta – aberta</i>	$0 \rightarrow n \neq j$	Somatório nulo para $n \neq j$
		$\frac{L_y}{2} \rightarrow n = j$	
	$\text{cos}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) n = 1,2,3, \dots$ <i>fechada – fechada</i>	$0 \rightarrow n = j$	Somatório nulo para $n = j$ Somatório não nulo: Se $j$ par, $n = 1,3, \dots$ Se $j$ ímpar, $n = 2,4, \dots$
	$\text{cos}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L_y}\right] = 1,2,3, \dots$ <i>fechada – aberta</i>	$\frac{jL_y [1 - \text{cos}(j\pi)\text{cos}(n\pi)]}{\pi(j^2 - n^2)}$ $n \neq j$	Somatório não nulo para qualquer combinação de $n$ e $j$

### 3.3 - ESTUDO DA SOLUÇÃO – CASO 1A

A expressão geral que governa este caso é dada pela Equação (2.91). Portanto:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \text{sen}(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \text{cos}(\sqrt{\alpha_n} x)] \text{sen}(\kappa_n y) \quad (3.8)$$

onde  $n = 1,2,3 \dots$ ,  $\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2$  e  $\kappa_n = n\pi/L_y$

Um estudo detalhado de casos específicos desta cavidade será apresentado a seguir.

#### 3.3.1 - Cavidade quadrada com contorno rígido-móvel ( $\phi = 1$ )

Para este caso específico adotam-se comprimentos iguais nas direções longitudinal e transversal. Adicionalmente o contorno é considerado rígido-móvel, com todos os pontos

apresentando mesma amplitude. Desta forma, a Equação (3.8) fica reduzida a expressão apresentada em (2.95), onde é possível observar uma função que varia tanto em  $x$ , como em  $y$ . Um estudo inicial consiste em verificar as características das funções longitudinal ( $R_n$ ) e transversal ( $S_n$ ), que neste caso serão definidas por:

$$R_n = I_\phi \frac{\text{sen}[\sqrt{\alpha_n}(x - L_x)]}{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \quad (3.9)$$

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = \begin{cases} 0 & p/ \ n \ \text{par} \\ \frac{2L_y}{n\pi} & p/ \ n \ \text{ímpar} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$S_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.11)$$

Portanto, da Equação (3.10) pode-se concluir que a solução para  $n$  par será nula, já que o campo de pressões hidrodinâmicas é definido neste caso por:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} R_n S_n \quad (3.12)$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$

As características da Equação (3.9) foram estudadas no capítulo anterior, e indicam que funções trigonométricas serão desenvolvidas para valores de  $\alpha_n > 0$ . Também foi verificado que quanto maior for o valor deste parâmetro, maior será o número de ciclos desenvolvidos na direção longitudinal. Para valores de  $\alpha_n < 0$  a resposta se dá em termos de funções hiperbólicas, perdendo a influência na resposta de pressões hidrodinâmicas à medida que este valor diminui. Esta equação pode ser reescrita para os índices  $n$  não nulos, resultando em:

$$R_n = \frac{2L_y}{n\pi} \frac{\text{sen}[\sqrt{\alpha_n}(x - L_x)]}{\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \quad p/ \ n \ \text{ímpar} \quad (3.13)$$

A Figura 3.1 ilustra a variação da função  $S_n$ , distribuída ao longo de um comprimento  $L_y$ , para uma série de valores de  $n$ . Pode-se observar um aumento no número de ciclos com o incremento deste parâmetro.

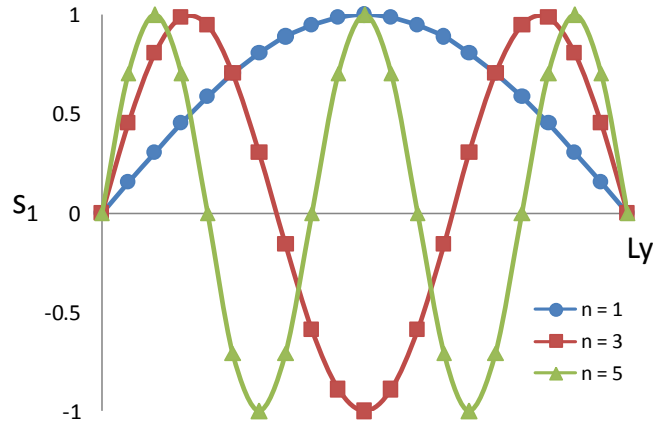


Figura 3.1 – Variação da função  $S_n$  ao longo de  $L_y$  para uma série de valores de  $n$

As Equações (3.11), (3.12) e (3.13) podem ser combinadas, resultando em:

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\text{sen}[\sqrt{\alpha_n}(x - L_x)] \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)}{n\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \\
 &= -\frac{4\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{f_1(\alpha_n, x, L_x) s_1(n, y, L_y)}{n\sqrt{\alpha_n} \cos(\sqrt{\alpha_n} L_x)}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde numerador do termo contido no somatório indica a variação das pressões hidrodinâmicas, ao passo que o termo do denominador indica um fator de amplitude desta distribuição. É interessante observar que para um valor fixo de  $x$  a função  $f_1$  assume as características de um termo de amplitude. O mesmo ocorre para um valor fixo de  $y$ , com a função  $s_1$  representando um termo multiplicador da resposta. Portanto, este tipo de raciocínio permite interpretar o problema, para um dado valor de  $n$ , de duas formas distintas. A primeira consiste na função  $s_1$  distribuída ao longo do eixo longitudinal, tendo sua amplitude modificada ao longo de  $x$ . A segunda consiste na função  $f_1$  distribuída ao longo do eixo transversal, tendo sua amplitude modificada ao longo de  $y$ . É evidente que a combinação de todas as soluções possíveis para cada  $n$  irá definir o campo de pressões

hidrodinâmicas. Deve-se observar que o campo de pressões para cada valor de  $n$  será dado pela composição de duas funções seno, distribuídas longitudinalmente e transversalmente, com amplitudes que irão depender do valor deste índice. Para o estudo do campo de pressões hidrodinâmicas definido por (3.14) é conveniente adotar a frequência  $\omega$  como sendo um múltiplo da primeira frequência da cavidade na direção transversal. Portanto:

$$\omega = \frac{\chi\pi c}{L_y} \quad (3.15)$$

onde  $\chi$  representa um número arbitrário. A substituição desta expressão em  $\alpha_n$  resulta em:

$$\alpha_n = \left(\frac{\chi\pi}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 (\chi^2 - n^2) \quad (3.16)$$

A Equação (3.16) também pode ser escrita em função do parâmetro de compressibilidade ( $\lambda$ ), definido por:

$$\lambda = \frac{\omega L_y}{c} = \chi\pi \quad (3.17)$$

Como será mostrado mais adiante, o fator  $\chi$  influenciará a resposta em termos de pressão, em função de sua proximidade com as frequências naturais da cavidade correspondente. Portanto, substituindo (3.17) em (3.16):

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{L_y}\right)^2 [(\lambda)^2 - (n\pi)^2] \quad (3.18)$$

As expressões (3.16) ou (3.18) podem ser utilizadas para a solução do problema. Deve-se observar que  $\lambda = 0$  implica em  $\chi = 0$ . Para  $\lambda = n\pi$ , o termo  $\chi$  será igual a  $n$ .

A substituição de (3.16) em (3.14) resulta na seguinte expressão:

$$P(x, y) = -\frac{4\rho_f \bar{A} L_y}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{f_1(n, \chi, L_x, L_y, x) s_1(n, y, L_y)}{q(n, \chi, L_x, L_y)} \quad (3.19)$$

onde tanto o numerador, como o denominador contidos no somatório são adimensionais. Este último termo indica um fator de amplitude  $q(n, \chi, L_x, L_y)$  definido por:

$$q(n, \chi, L_x, L_y) = n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi r \sqrt{\chi^2 - n^2} \right] \quad (3.20)$$

onde  $r = L_x/L_y$ . Para uma cavidade quadrada,  $r = 1$ , e a expressão (3.20) fica reduzida a:

$$q(n, \chi) = n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} \right] \quad (3.21)$$

Da expressão (3.21) pode-se concluir que  $q(n, \chi)$  irá resultar em um número imaginário para valores de  $\chi < n$ . Entretanto, nestes casos a função  $f_1$  também irá produzir uma solução complexa, transformando a relação  $f_1/q$  em um número real. Portanto, é conveniente trabalhar com esta última relação, tendo em vista que os resultados serão sempre reais para quaisquer valores de  $\chi$  e  $n$ . Assim, esta relação irá definir um fator de amplitude variável ao longo do eixo  $x$ , que será aplicado às funções transversais  $s_1$ . Desta forma, para  $n = 1$ , por exemplo, a solução será dada por uma curva  $\text{sen}(\pi y/L_y)$ , com amplitude variando ao longo do eixo longitudinal. Para  $n = 3$ , a solução será dada por uma curva  $\text{sen}(3\pi y/L_y)$ , com amplitude variável ao longo do eixo  $x$ . E assim, sucessivamente. Um estudo detalhado da relação  $f_1/q$  será feito a seguir.

Para uma cavidade quadrada a relação  $f_1/q$  pode ser simplificada para:

$$\frac{f_1(n, \chi, L, x)}{q(n, \chi)} = \frac{\text{sen} \left[ \frac{\pi}{L} \sqrt{\chi^2 - n^2} (x - L) \right]}{n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} \right]} \quad (3.22)$$

que é função de quatro variáveis:  $n, \chi, L$  e  $x$ . É interessante observar que no numerador existe a relação  $(x - L)/L$ , indicando que a posição longitudinal pode ser representada proporcionalmente ao comprimento. Esta equação pode ser reescrita de uma maneira mais elegante, com a utilização de um fator  $\xi_x = x/L$ , que irá variar de 0 a 1. Então:

$$\frac{f_1(n, \chi, \xi_x)}{q(n, \chi)} = \frac{\text{sen} \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} (\xi_x - 1) \right]}{n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} \right]} \quad (3.23)$$



que reduz o problema a apenas três variáveis. Para valores fixos de dois parâmetros, pode-se estudar a influência da terceira variável. Verifica-se que o denominador desta expressão apresenta uma função cosseno, que levará a amplitude ao infinito sempre que o valor desta função trigonométrica se aproximar de zero. Portanto, estes valores críticos serão dados quando:

$$\pi\sqrt{\chi^2 - n^2} = \frac{m\pi}{2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.24)$$

onde  $m$  é um número inteiro que conduz a um valor singular do denominador de (3.23). Da Equação (3.24) resultam os valores críticos de  $\chi$ :

$$\chi_{crítico} = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.25)$$

Esta última expressão indica que cada valor de  $n$  encontra-se associado a infinitos valores críticos de  $\chi$ , que levarão a resposta ao infinito. O primeiro valor será dado para  $n = 1$  e  $m = 1$ , resultando em  $\chi_{crítico} \cong 1.1180$ . Para  $n = 3$ , o primeiro valor será igual a  $\chi_{crítico} \cong 3.0414$ . Desta forma, pode-se observar que os valores críticos para um dado  $n$  surgem logo após o valor deste índice, continuando para os próximos valores de  $m$ .

Outra observação importante consiste no fato de que os valores críticos dados por (3.25) correspondem às frequências naturais de uma cavidade quadrada, fechada-aberta na direção longitudinal e aberta-aberta na direção transversal. Estes resultados são facilmente representados por meio da substituição de (3.15) em (3.25). Portanto:

$$\omega = \frac{\pi c}{L} \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.26)$$

Deve-se notar que a Equação (3.26) não representa toda a gama de frequências da cavidade fechada-aberta e aberta-aberta (que inclui os valores pares do índice  $n$ ). Entretanto, todas as frequências dadas por esta última equação estão incluídas na solução de valores próprios da cavidade equivalente (onde contorno móvel é substituído por uma parede rígida).

As Figuras 3.2 a 3.4 ilustram a variação da relação  $f_1/q$  em função de  $\chi$ , para valores de  $n = 1, 3$  e  $5$ . Posições do fator  $\xi_x = 0$  e  $0.7$  foram escolhidas para representar as diferenças relacionadas ao longo do eixo longitudinal.

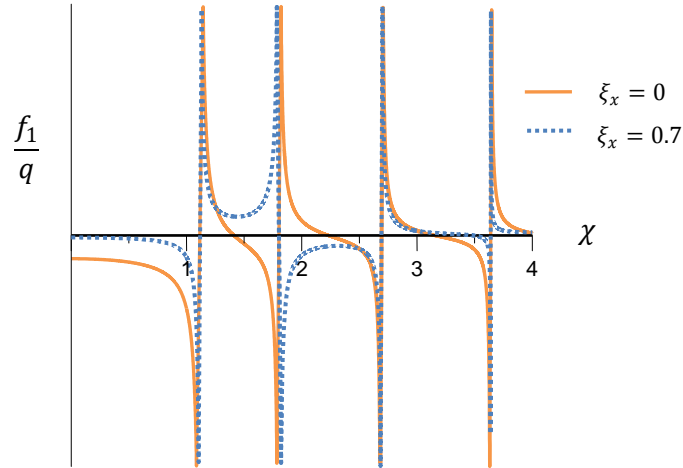


Figura 3.2 – Variação da função  $f_1/q$  em função de  $\chi$  ( $n = 1$ )

A análise da Figura 3.2 indica que o parâmetro  $f_1/q$  apresenta um comportamento sem pontos críticos no intervalo de  $\chi = 0$  a  $1$ . Esta figura também indica que a partir de  $\chi = 1$  começam a surgir os pontos de pico relacionados aos valores dados por (3.25). O primeiro ocorre em  $\chi_{crítico} \cong 1.1180$ . O segundo em  $\chi_{crítico} \cong 1.8028$ , e assim sucessivamente. Todos os valores críticos estão relacionados a  $n = 1$ . É interessante observar que as curvas se comportam tanto com valores positivos, como negativos.

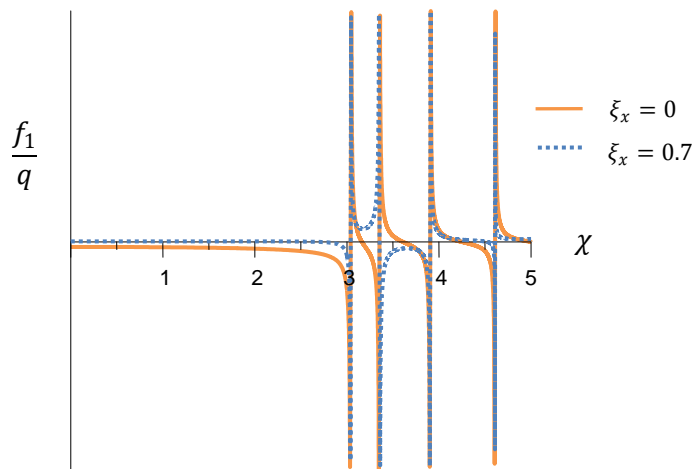


Figura 3.3 – Variação da função  $f_1/q$  em função de  $\chi$  ( $n = 3$ )

A análise da Figura 3.3 indica um comportamento sem valores de pico até  $\chi = 3$ . Até este ponto o comportamento das curvas é praticamente uma reta, com valores próximos de zero, aumentando à medida que  $\chi$  se aproxima de 3. Porém, a partir daí começam a surgir os valores críticos, com o primeiro sendo dado por  $\chi_{crítico} \cong 3.0414$ , o segundo correspondendo a  $\chi_{crítico} \cong 3.3541$ , e assim sucessivamente. Todos os valores críticos estão relacionados a  $n = 3$ . A Figura 3.4 indica um comportamento semelhante, sem valores de pico até  $\chi = 5$ . A partir deste ponto começam a surgir os valores críticos, com o primeiro definido por  $\chi_{crítico} \cong 5.0249$ , o segundo correspondendo a  $\chi_{crítico} \cong 5.2202$ , e assim sucessivamente. Todos os valores críticos estão relacionados a  $n = 5$ .

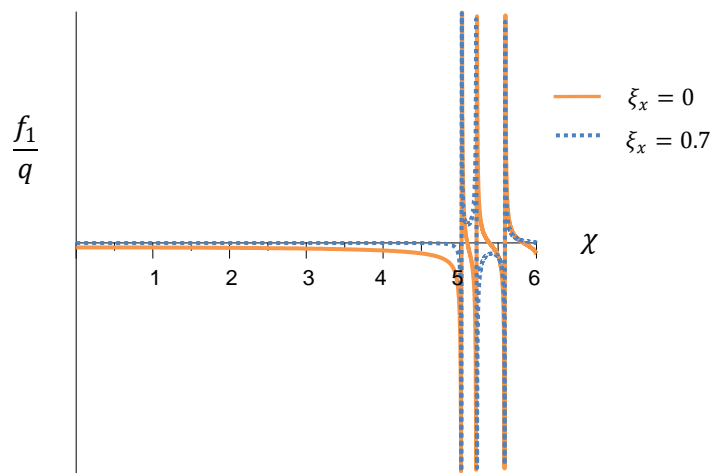


Figura 3.4 – Variação da função  $f_1/q$  em função de  $\chi$  para  $n = 5$

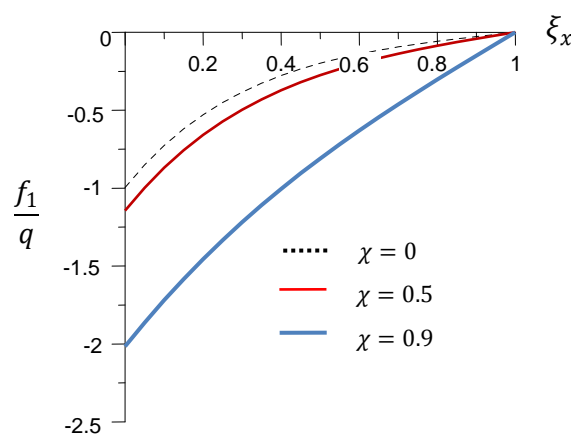


Figura 3.5 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$

Outra forma de representação da relação  $f_1/q$  consiste em fixar valores de  $\chi$  e  $n$ , para estudo da distribuição ao longo do eixo longitudinal  $\xi_x$ . A Figura 3.5 ilustra os resultados

obtidos para  $n = 1$ , onde é feita uma variação de  $\chi = 0$  a  $0.9$ . Pode-se observar que o aumento de  $\chi$  implica em maiores valores da relação  $f_1/q$ . A Figura 3.6 apresenta os resultados obtidos para valores de  $\chi$  próximos a  $1$ . Observa-se uma tendência de linearização das curvas à medida que o valor de  $\chi$  se aproxima de  $1$ . A função para  $\chi = 1$  não é definida, mas o seu limite é estabelecido por (3.27).

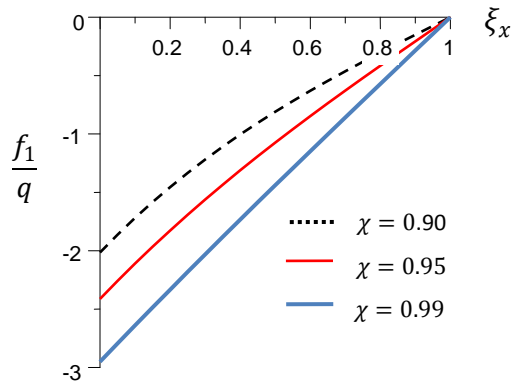


Figura 3.6 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$

$$\lim_{\chi \rightarrow n} \frac{f_1}{q} = \frac{\pi \xi_x - \pi}{n} \quad (3.27)$$

Esta última expressão indica exatamente a equação de uma reta, com valor igual a  $-\pi$  para  $\xi_x = 0$ . A solução correspondente a  $n = 1$ , durante este intervalo, pode ser obtida com a composição das soluções longitudinal e transversal. As Figuras 3.7 e 3.8 apresentam o desenvolvimento desta solução para  $\chi = 0$  e  $\chi = 0.9$ .

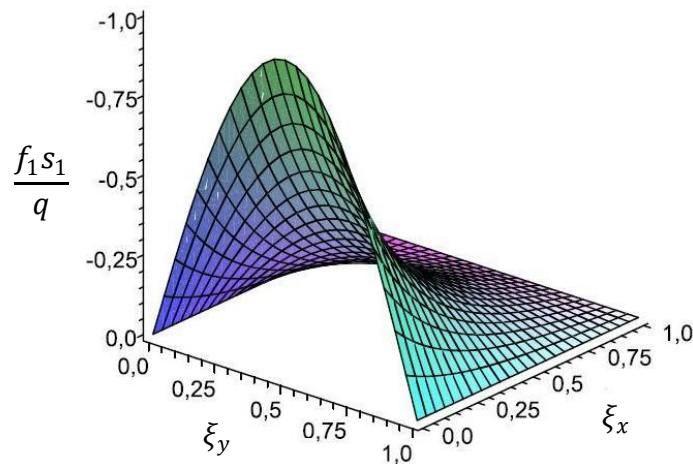


Figura 3.7 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$  para  $n = 1$  e  $\chi = 0$

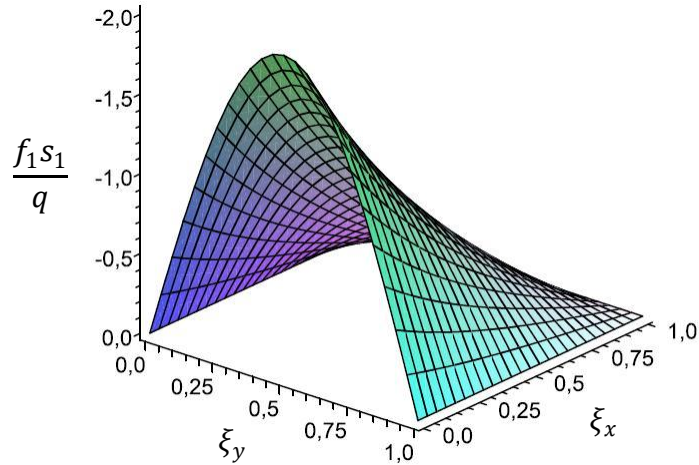


Figura 3.8 – Variação da função  $f_1 s_1 / q$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$  para  $n = 1$  e  $\chi = 0.9$

A análise para  $n = 1$  e  $\chi = 1$  a 1.1180 ajuda a entender o comportamento das curvas próximo ao primeiro ponto crítico. A Figura 3.9 apresenta os resultados obtidos para este intervalo. Observa-se um grande aumento do fator de amplitude para pequenas variações de  $\chi$ . Para  $\chi_{crítico} \cong 1.12$  a relação  $f_1/q$  atinge um valor infinito. A comparação entre as curvas deste intervalo e as obtidas no intervalo anterior indica uma tendência de inclinação nula em  $\xi_x = 0$ , à medida que o valor de  $\chi$  se aproxima do ponto crítico.

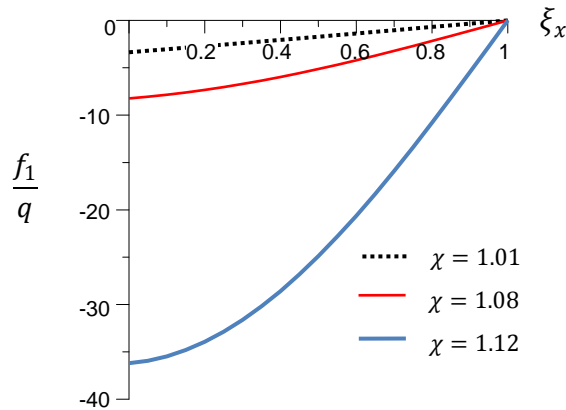


Figura 3.9 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$

O próximo intervalo de interesse consiste na variação entre dois pontos críticos. Pode-se adotar um limite inferior ligeiramente maior que  $\chi_{crítico} \cong 1.1180$ . E um limite superior ligeiramente menor que  $\chi_{crítico} \cong 1.8028$ . A Figura 3.10 apresenta os resultados obtidos para este intervalo. Observa-se que logo após o primeiro ponto crítico ocorre uma inversão brusca de sinal, com a curva mantendo a mesma configuração do intervalo anterior. Em seguida, tem início a formação de uma segunda concavidade. Nas proximidades do

segundo ponto crítico as duas concavidades ficam completamente definidas, atingindo suas amplitudes máximas. Para  $\chi_{crítico} \cong 1.8028$  a relação  $f_1/q$  atinge um valor infinito.

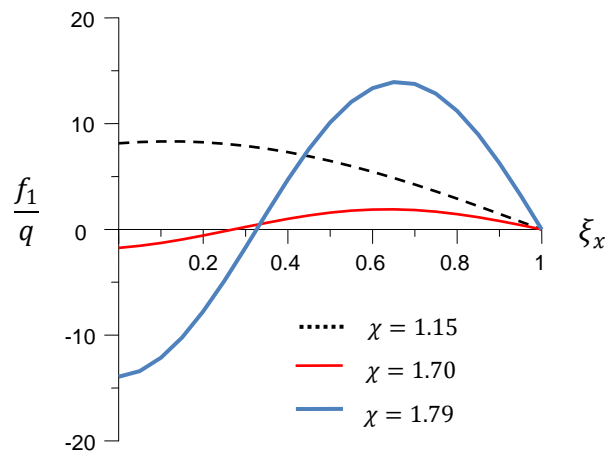


Figura 3.10 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$

A solução correspondente a este valor de  $n$ , durante este intervalo, pode ser obtida com a composição das soluções longitudinal e transversal. Para este caso específico ( $n = 1$ ) a solução transversal apresenta apenas um pico. Entretanto, como a solução longitudinal apresenta duas concavidades, a solução será composta por dois núcleos de sinais opostos. A Figura 3.11 ilustra esta distribuição.

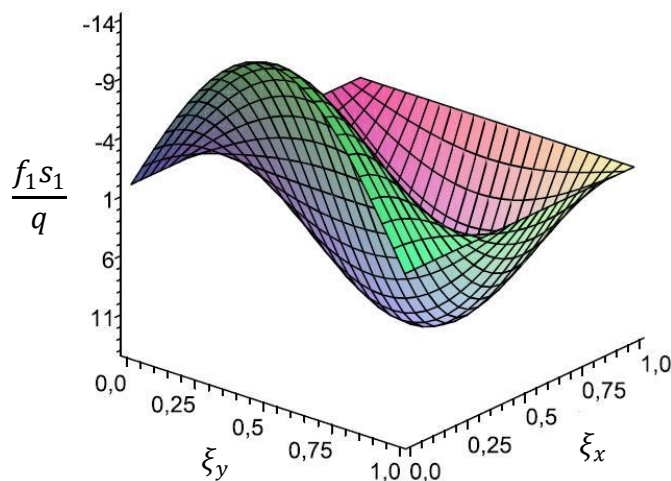


Figura 3.11 – Variação da função  $f_1s_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$  para  $n = 1$  e  $\chi = 1.79$

Deve-se observar que para valores de  $\chi < n$  a relação  $f_1/q$  é composta por funções hiperbólicas, e que para valores de  $\chi > n$  a solução se dá em termos de funções trigonométricas.

Para um dado valor do fator  $\chi$  é possível avaliar a distribuição da relação  $f_1/q$  ao longo do eixo  $\xi_x$  para diferentes valores de  $n$ . A Figura 3.12 apresenta os resultados obtidos para  $\chi = 0.5$ . Observam-se pequenas amplitudes para as curvas  $n = 3$  e  $n = 5$ . A composição da solução longitudinal e transversal para estes valores é indicada na Figura 3.13.

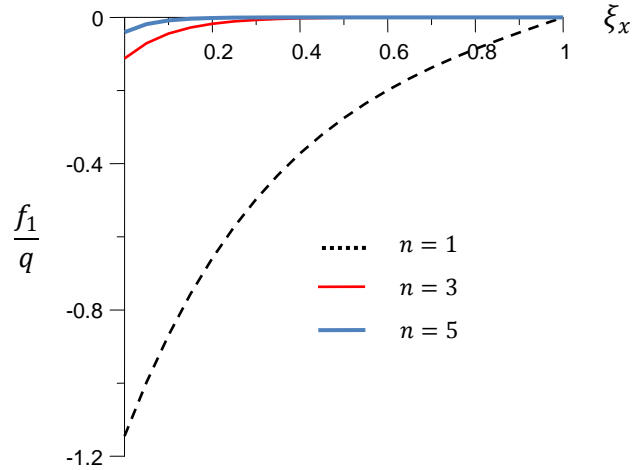


Figura 3.12 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $\chi = 0.5$

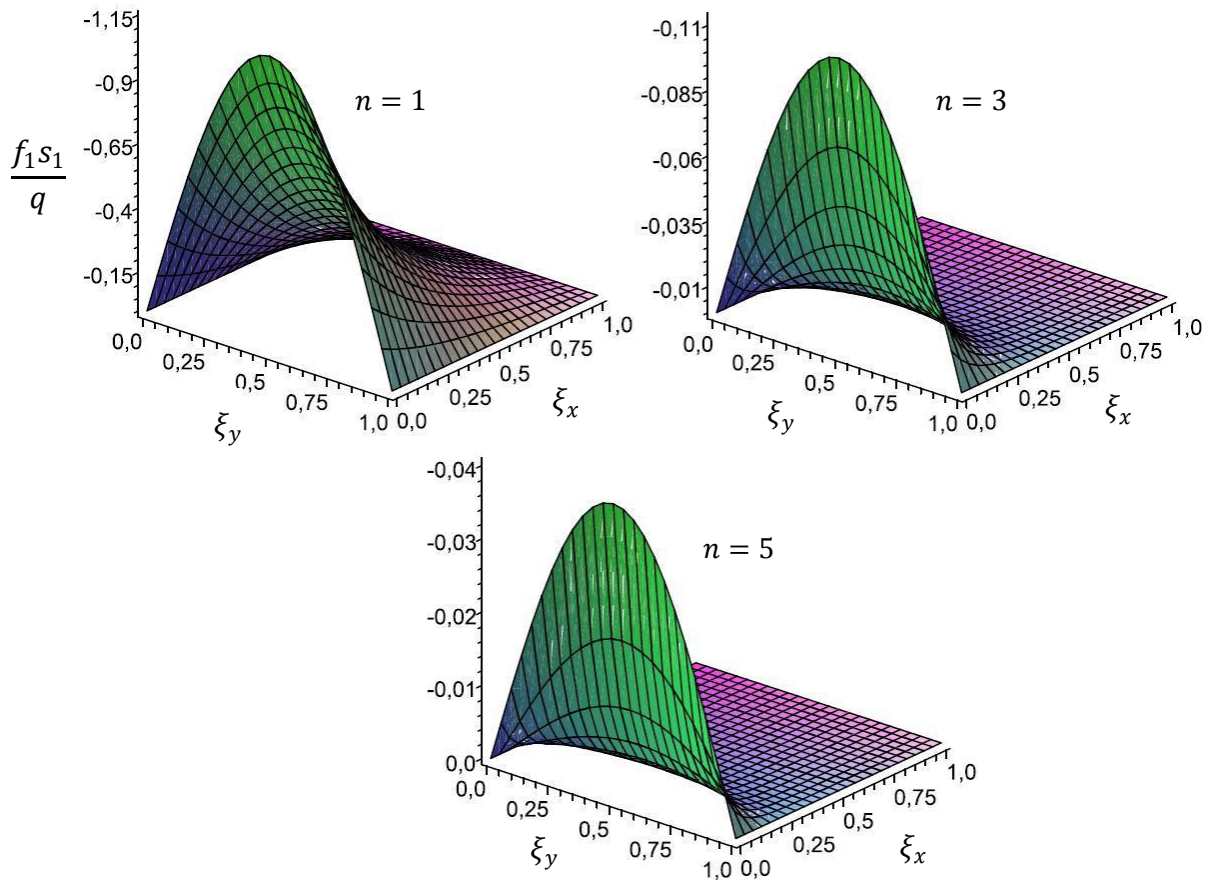


Figura 3.13 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$  para  $n = 1,3,5$  e  $\chi = 0.5$

A contribuição de um determinado índice passa a ser mais significativa à medida que  $\chi$  se aproxima de  $n$ . A Figura 3.14 ilustra os resultados obtidos para  $\chi = 2.9$ , onde é possível observar uma maior participação do índice  $n = 3$ . A composição da solução longitudinal e transversal para estes valores é indicada na Figura 3.15.

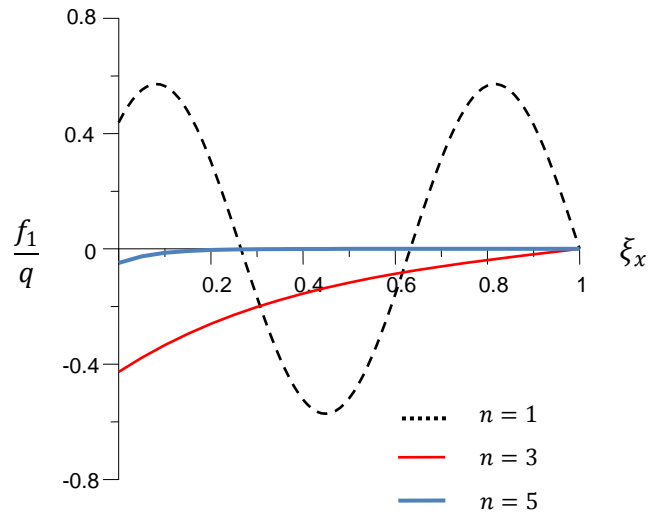


Figura 3.14 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $\chi = 2.9$

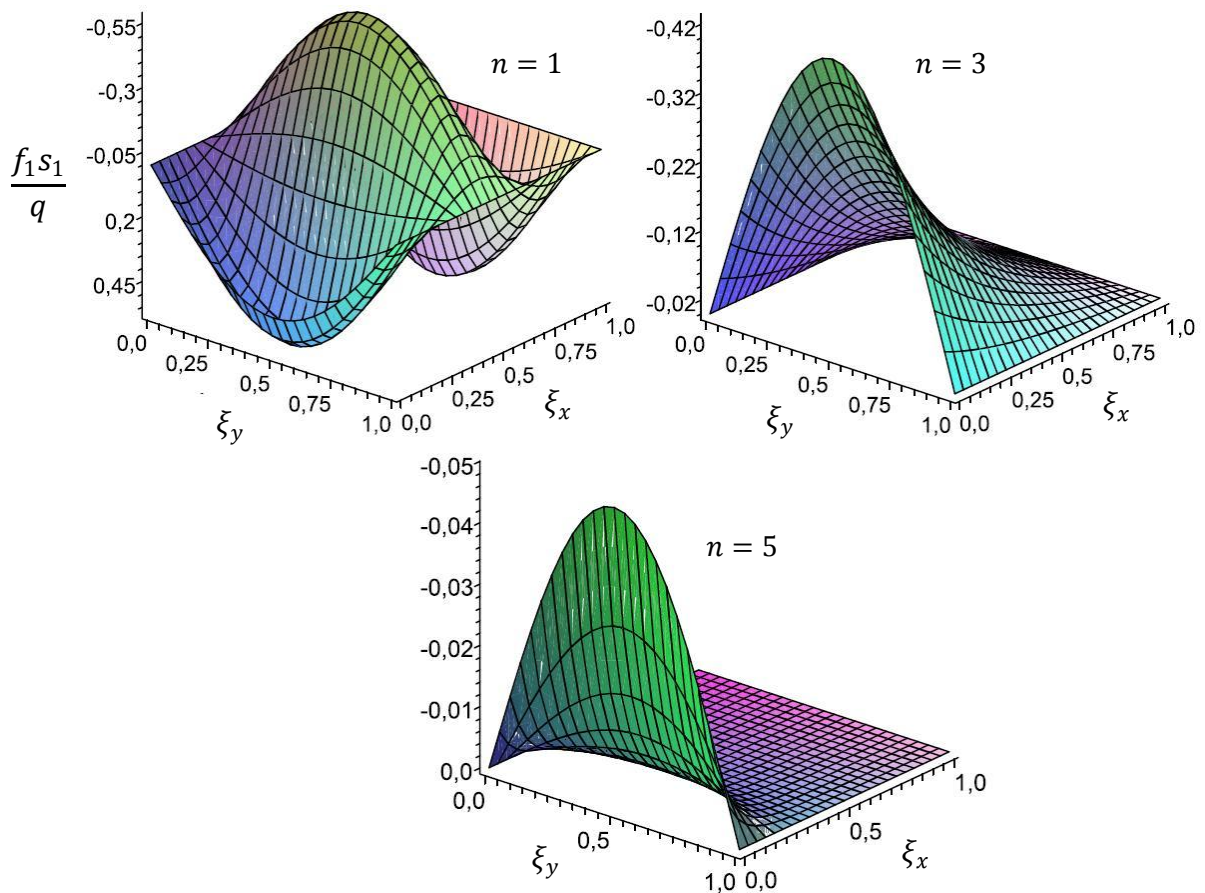


Figura 3.15 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$  para  $n = 1,3,5$  e  $\chi = 2.9$



Nas proximidades de  $\chi = 3$  a função  $f_1/q$ , em  $n = 3$ , também irá apresentar uma tendência de linearização. A Figura 3.16 ilustra os resultados obtidos.

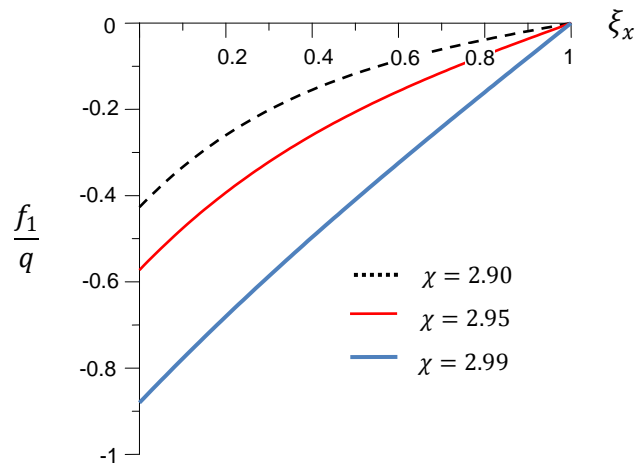


Figura 3.16 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 3$

Em resumo, pode-se concluir que a análise do caso específico envolvendo uma cavidade quadrada pode ser representada por duas soluções: uma longitudinal, dada por (3.23), e uma transversal, dada por  $\text{sen}(n\pi\xi_y)$ . A composição destas duas soluções para cada valor de  $n$  irá representar a solução completa do problema. Como este tipo de solução depende de uma frequência  $\omega$ , foi conveniente adotar um fator  $\chi$ , dado por (3.15), que representa um múltiplo da primeira frequência transversal da cavidade (aberta-aberta). Para valores de  $\chi > n$  a solução longitudinal será dada em termos de funções trigonométricas. Para valores de  $\chi < n$  a solução será representada por funções hiperbólicas. A Equação (3.23) não é definida para  $\chi = n$ . Entretanto, o seu limite é dado por (3.27), indicando a equação de uma reta. Para cada valor de  $n$  existem infinitos valores críticos de  $\chi$ , dados por (3.25), que irão produzir uma resposta infinita na solução longitudinal. Estes pontos sempre serão definidos em valores maiores que o índice  $n$  correspondente. As curvas a esquerda e a direita de um ponto crítico apresentam uma mudança brusca de sinal, preservando o aspecto da função dada por (3.23). Para um dado valor de  $n$ , o aumento de  $\chi$  implica em funções longitudinais com maiores quantidades de ciclos, resultando em uma maior formação de núcleos na solução completa. O conceito de núcleo encontra-se ilustrado na Figura 3.17, que indica uma configuração crítica, onde é possível perceber o desenvolvimento de três núcleos completos no sentido transversal ( $y$ ), além de dois núcleos e um semi-núcleo no sentido longitudinal ( $x$ ).

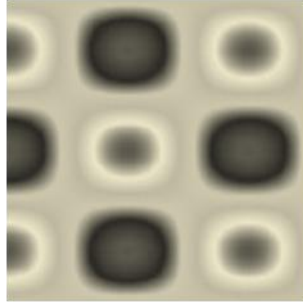


Figura 3.17 – Definição do conceito de núcleo ( $n = 3$  e  $m = 5$ )

As particularidades da cavidade quadrada com contorno rígido-móvel incluem: valores críticos de  $\chi$ , solução longitudinal e solução transversal independentes das dimensões da cavidade.

A Tabela 3.2 ilustra a solução  $f_1 s_1 / q$  para uma série de valores críticos de  $\chi$ . Estas distribuições serão importantes para o estudo dos modos do problema acoplado. Pode-se observar que a solução para  $n = 1$  apresenta apenas uma concavidade na direção transversal. Para  $n = 3$ , surgem três concavidades. O número de concavidades na direção longitudinal, para um dado  $n$ , aumenta com o incremento do valor de  $m$ , seguindo uma relação  $m/2$ . Portanto, para  $m = 5$ , por exemplo, irão surgir dois núcleos e um semi-núcleo. É interessante notar que é possível obter um mesmo valor de  $\chi_{crítico}$  para diferentes valores de  $n$  e  $m$ , resultando em duas configurações distintas. Este fenômeno, denominado duplicidade de modos críticos, será abordado mais adiante.

Todos os modos indicados na Tabela 3.2 compõem a solução de valores próprios de uma cavidade fechada-aberta na direção longitudinal e aberta-aberta na direção transversal. A Tabela 3.3 ilustra esta solução, obtida com a aplicação da Equação (3.28). Estes resultados incluem as soluções onde  $n = 2, 4, 6, \dots$ , que não representam valores críticos de  $\chi$ .

$$\bar{P}_{n,m}(\xi_x, \xi_y) = \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \sin(n\pi\xi_y) \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.28)$$

As distribuições indicadas na Tabela 3.2 são dominantes para valores de  $\chi \cong \chi_{crítico}$ . Isto indica que a contribuição de índices  $n \neq n_{crítico}$  será infinitamente pequena. Nestes casos a solução poderá ser construída utilizando apenas o índice  $n_{crítico}$ .

Tabela 3.2 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  para valores críticos de  $\chi$


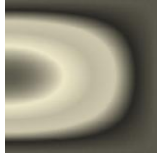
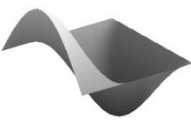
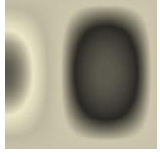

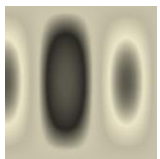

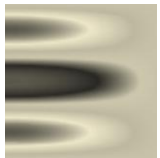
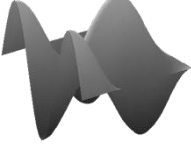
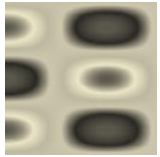

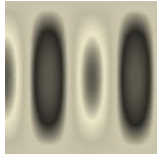



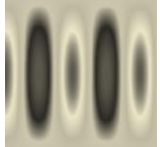
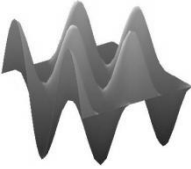
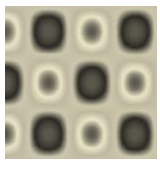
$\chi_{\text{crítico}}$	$n$	$m$	$f_1 s_1/q$	
$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{13}$	1	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{29}$	1	5		
$\frac{1}{2}\sqrt{37}$	3	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{45}$	3	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{53}$	1	7		
$\frac{1}{2}\sqrt{61}$	3	5		
$\frac{1}{2}\sqrt{85}$	1	9		
$\frac{1}{2}\sqrt{85}$	3	7		

Tabela 3.3 – Frequências e modos (cavidade quadrada fechada-aberta e aberta-aberta)

$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$	$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$
$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1	1		$\frac{1}{2}\sqrt{61}$	3	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{13}$	1	3		$\frac{1}{2}\sqrt{65}$	2	7	
$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	2	1		$\frac{1}{2}\sqrt{65}$	4	1	
$\frac{1}{2}\sqrt{25}$	2	3		$\frac{1}{2}\sqrt{73}$	4	3	
$\frac{1}{2}\sqrt{29}$	1	5		$\frac{1}{2}\sqrt{85}$	1	9	
$\frac{1}{2}\sqrt{37}$	3	1		$\frac{1}{2}\sqrt{85}$	3	7	
$\frac{1}{2}\sqrt{41}$	2	5		$\frac{1}{2}\sqrt{89}$	4	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{45}$	3	3		$\frac{1}{2}\sqrt{97}$	2	9	
$\frac{1}{2}\sqrt{53}$	1	7		$\frac{1}{2}\sqrt{101}$	5	1	

A frequência de cada modo é dada por  $\omega = \chi_{modo} \cdot \pi c / L$

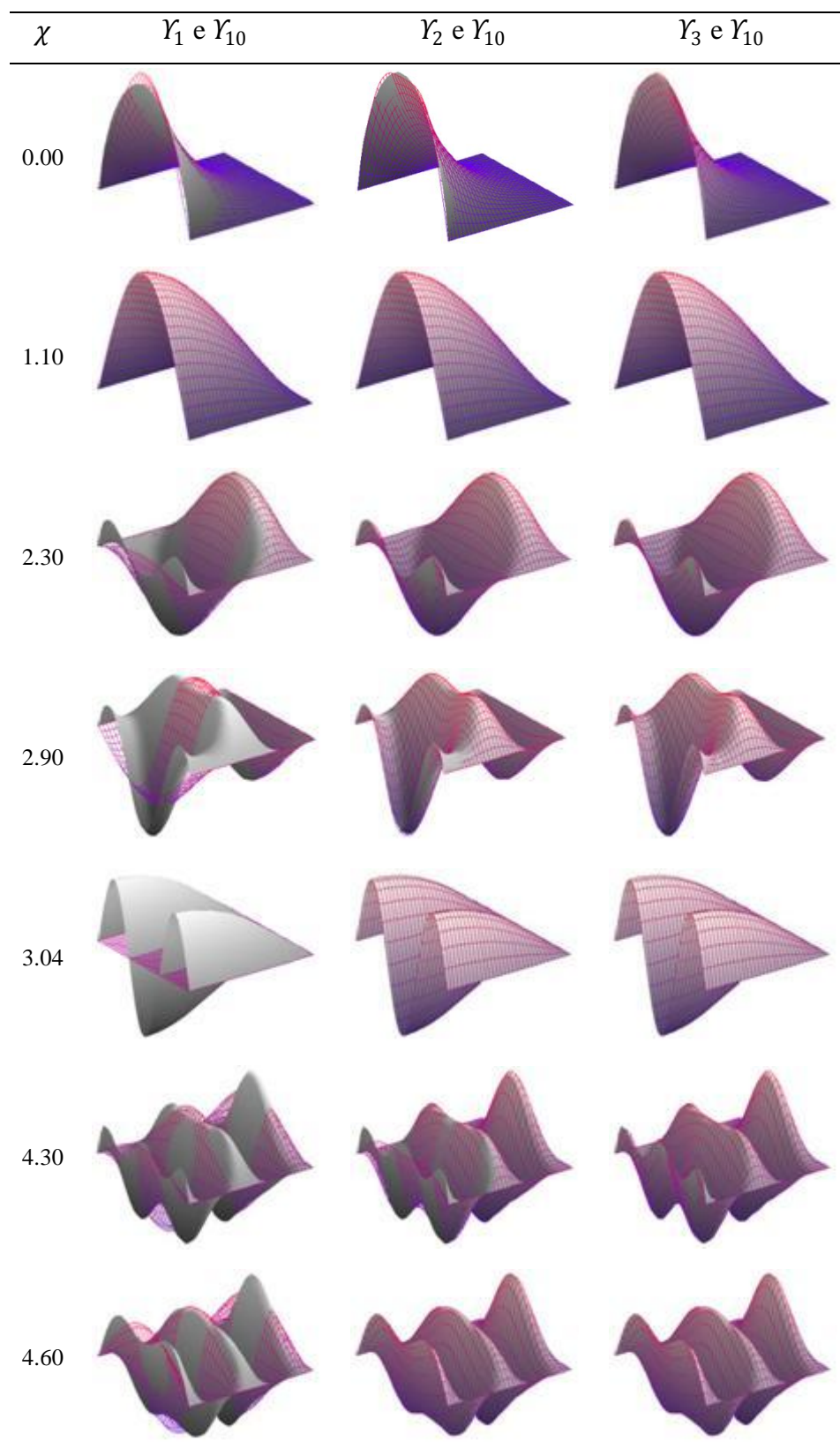
Entretanto, as soluções em que  $\chi$  se distancia de  $\chi_{crítico}$  são compostas pelo conjunto de soluções relacionadas a  $n = 1, 3, 5 \dots$ , dadas por:

$$Y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_1 s_1}{q} \quad (3.29)$$

A Tabela 3.4 ilustra a solução  $Y_\eta$ , relacionada ao somatório de uma determinada quantidade de índices  $\eta$  na série dada por (3.29), para uma excitação arbitrária  $\chi$ . A avaliação desta equação é feita por meio da soma das contribuições individuais de  $f_1 s_1/q$ , incluindo os  $\eta$  primeiros termos da série. Estes resultados são individualmente comparados a curva  $Y_{10}$  (representada por uma superfície), que envolve os dez primeiros índices da soma. Esta tabela indica que modos com configurações diferentes das apresentadas na Tabela 3.2 são possíveis. Isto significa que valores de  $\chi$  que não sejam críticos produzem uma combinação de efeitos das contribuições individuais de  $f_1 s_1/q$ , onde cada índice  $n$  participa da solução. Pode-se observar que, para  $\chi$  variando de 0 a 3,  $Y_2$  produz uma excelente aproximação da resposta, indicando que os índices  $n = 1$  e  $n = 3$  influenciam fortemente a solução. Para  $\chi = 2.90$ , nota-se que o índice  $n = 3$  passa a ter maior contribuição na resposta. Este acréscimo pode ser observado na Figura 3.3, que indica uma maior participação de  $f_1/q$  à medida que  $\chi$  se aproxima de 3. O mesmo ocorre em  $\chi = 4.30$ , onde o índice  $n = 5$  começa a apresentar sua influência. Portanto, pode-se concluir que a participação dos índices  $n$  em  $Y$  irá depender do valor de  $\chi$ . Valores de  $n \gg \chi$  irão exercer influência desprezível.

Para valores de  $\chi$  próximos aos pontos críticos, observam-se modos semelhantes aos da Tabela 3.2. Isto ocorre devido à própria natureza dos valores críticos, que tornam a resposta de um determinado índice infinitamente maior que a dos demais, de forma semelhante ao que ocorre em  $\chi = 3.04$  e  $Y_1 - Y_{10}$ , onde o índice  $n = 3$  governa o problema. Esta característica também é observada em  $\chi = 1.10$ . Neste caso, o índice  $n = 1$  domina a resposta. Em  $\chi = 4.6$ , que é a proximidade de um ponto crítico, ocorre um fenômeno interessante: as participações de  $n = 1$  e  $n = 3$  são significativas, indicando a presença de modos com duplicidade de frequências. De fato, o valor  $\chi_{crítico} = 1/2 \sqrt{85}$  encontra-se presente tanto em  $n = 1$ , como em  $n = 3$ . Portanto, o resultado é um modo composto pelas duas configurações críticas.

Tabela 3.4 – Comparação entre as soluções  $Y_\eta$  e  $Y_{10}$  para um dado valor de  $\chi$



### 3.3.1.1 - Interpretação do fenômeno de valores críticos idênticos para diferentes valores dos índices $m$ e $n$

A análise da Tabela 3.2 indica a possibilidade de mais de um modo compartilhando a mesma frequência. Trata-se de um fenômeno interessante, pois embora as frequências sejam as mesmas, as representações são totalmente distintas. Matematicamente a explicação surge do fato de alguns números poderem ser representados por uma soma de quadrados em mais de uma forma. O número 65, por exemplo, pode ser representado como:  $8^2 + 1^2$  ou  $7^2 + 4^2$ . Graficamente estes números representam dois triângulos retângulos com mesma hipotenusa e catetos distintos (Figura 3.18).

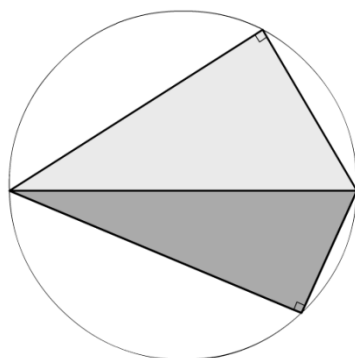


Figura 3.18 – Triângulos retângulos com mesma hipotenusa e catetos distintos

Os catetos deste problema são dados por inspeção da Equação (3.25), resultando em  $n$  e  $m/2$ . Portanto, no caso do número 65, as soluções possíveis serão:  $\{n = 1, m = 4\}$  e  $\{n = 2, m = 7\}$ . Beiler (1966) apresenta um estudo sobre a teoria dos números e explica uma relação interessante: o produto da soma de dois quadrados por outra soma de dois quadrados, sempre irá reproduzir uma soma de dois quadrados. Esta explicação pode ser representada por:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = \begin{cases} (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{cases} \quad (3.30)$$

que indica duas formas de representação. Portanto, no caso do número 65, é possível realizar uma fatoração, resultando em:  $65 = 5 \cdot 13$ . Mas  $5 = 2^2 + 1^2$  e  $13 = 3^2 + 2^2$ . Então 65 é um número composto por uma multiplicação de dois números que podem ser representados por uma soma de quadrados. Logo, aplicando a Equação (3.30) é possível obter duas formas de representação deste número como uma soma de quadrados. De fato:

$$(2^2 + 1^2) \cdot (3^2 + 2^2) = \begin{cases} (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^2 = 8^2 + 1^2 \\ (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2 = 4^2 + 7^2 \end{cases} \quad (3.31)$$

Para o número 85 é possível realizar operação semelhante, pois:  $85 = 5 \cdot 17$ . Então:  $5 = 2^2 + 1^2$  e  $17 = 1^2 + 4^2$ . Aplicando a Equação (3.25) obtém-se:

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2) \cdot (1^2 + 4^2) &= (1 \cdot 1 + 2 \cdot 4)^2 + (1 \cdot 4 - 2 \cdot 1)^2 = 9^2 + 2^2 \\ (2^2 + 1^2) \cdot (4^2 + 1^2) &= (2 \cdot 4 - 1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 1 + 1 \cdot 4)^2 = 7^2 + 6^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tanto 65, como 85, correspondem a radicandos das soluções da Tabela 3.2. Nestes dois casos ocorreram soluções duplicadas. O motivo é a dupla representação destes valores por uma soma de quadrados, obtidos em (3.31) e (3.32).

Beiler (1966) apresenta uma fórmula prática para identificação de quantas vezes um determinado número  $N = 2^{a_0} p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \dots p_n^{2a_n} q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_r^{b_r}$  (onde  $p$  correspondem aos números primos no formato  $4j - 1$  e  $q$  correspondem aos números primos no formato  $4j + 1$ , onde  $j$  é um inteiro) pode ser representado por um soma de dois quadrados distintos. Esta solução é dada por (3.33) caso o numerador seja par, e por (3.34) caso o numerador seja ímpar.

$$\frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_r + 1)}{2} \quad (3.33)$$

$$\left[ \frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_r + 1)}{2} \right] - \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

Por exemplo, o número  $N = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^3$  pode ser representado por:

$$\frac{(1 + 1)(3 + 1)}{2} = 4$$

somas de dois quadrados distintos. Deve-se observar que apenas os expoentes dos números 5 e 7 foram utilizados, pois são números primos do tipo  $4j + 1$ .



As Equações (3.33) e (3.34) ajudam a entender o motivo pelo qual não ocorreu duplicidade em algumas frequências da Tabela 3.2. O número 53, por exemplo, é primo do tipo  $4j + 1$ . Portanto a aplicação de (3.33) resulta em:

$$\frac{(1 + 1)}{2} = 1$$

que indica uma única forma de representação por soma de dois quadrados distintos. Portanto, pode-se imediatamente concluir que números primos do tipo  $4j + 1$  no radicando de  $\chi_{crítico}$  não identificam soluções com mais de uma repetição. A aplicação de (3.33) em  $N = 5 \cdot 17 = 85$  resulta em:

$$\frac{(1 + 1)(1 + 1)}{2} = 2$$

soluções por soma de dois quadrados distintos, cujos resultados foram obtidos em (3.32).

Uma curiosidade matemática consiste no fato de que todos os radicandos da Tabela 3.2 sejam números no formato  $4j + 1$ . Esta característica é resultado da natureza dos índices  $n$  e  $m$ , que podem ser rearranjados na Equação (3.25):

$$\chi_{crítico} = \frac{1}{2} \sqrt{(m)^2 + (2n)^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.35)$$

Como  $m$  é um número ímpar, o seu quadrado também será um número ímpar. O número  $n$ , para a solução da cavidade, poderá ser par ou ímpar. Entretanto, o valor de  $2n$  será sempre um número par. Desta forma, o resultado do radicando será a soma do quadrado de dois números, onde um é par e o outro é ímpar. Fazendo  $m = 2k + 1$ , onde  $k$  é um inteiro arbitrário, e substituindo esta expressão no radicando, obtém-se:

$$\chi_{crítico} = \frac{1}{2} \sqrt{4(k^2 + k + n^2) + 1} \quad (3.36)$$

que prova que neste caso o radicando será sempre do tipo  $4j + 1$ .

### 3.3.2 - Cavidade retangular com contorno rígido-móvel ( $\phi = 1$ )

Para este caso específico adotam-se comprimentos iguais a  $L_x$  na direção longitudinal e  $L_y$  na direção transversal. Adicionalmente o contorno é considerado rígido-móvel, com todos os pontos apresentando mesma amplitude.

A Equação (3.20) indica que:

$$q(n, \chi, r) = n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} r \right] \quad (3.37)$$

onde  $r = L_x/L_y$ .

Neste caso específico o valor de  $f_1$  será dado por:

$$f_1(n, \chi, \xi_x, r) = \text{sen} \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} (\xi_x - 1) r \right] \quad (3.38)$$

Portanto, o valor da relação  $f_1/q$  resulta em:

$$\frac{f_1(n, \chi, \xi_x, r)}{q(n, \chi, r)} = \frac{\text{sen} \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} (\xi_x - 1) r \right]}{n \sqrt{\chi^2 - n^2} \cos \left[ \pi \sqrt{\chi^2 - n^2} r \right]} \quad (3.39)$$

onde deve-se observar a presença do termo  $r$  no numerador e no denominador. Para um valor fixo deste parâmetro o estudo fica reduzido a apenas três variáveis. Para  $r = 1$  a Equação (3.39) assume a mesma forma de (3.23), resultando no problema de uma cavidade quadrada.

No denominador desta expressão existe uma função cosseno, que levará a amplitude ao infinito sempre que o valor desta função trigonométrica se aproximar de zero. Portanto, estes valores críticos serão dados quando:

$$\pi \sqrt{\chi^2 - n^2} r = \frac{m\pi}{2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.40)$$

Da Equação (3.40) resultam os valores críticos de  $\chi$ :

$$\chi_{crítico} = \sqrt{\left(\frac{m}{2r}\right)^2 + n^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.41)$$

Esta última expressão, de forma semelhante a (3.25), indica que cada valor de  $n$  encontra-se associado a infinitos valores críticos do fator  $\chi$ , que levarão a resposta ao infinito. Os valores em questão dependem da relação  $r = L_x/L_y$ . Para valores de  $L_x \gg L_y$  o valor de  $r$  será infinitamente grande. Desta forma, a Equação (3.41) irá apresentar, para um dado valor de  $n$ , uma seqüência de valores críticos muito próximos, já que o incremento  $m/2r$  será infinitamente pequeno.

Para valores de  $L_x \ll L_y$  o valor de  $r$  será infinitamente pequeno, e o seguinte limite será estabelecido:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \chi_{crítico} = \infty \quad (3.42)$$

Estas situações específicas serão analisadas posteriormente. Por enquanto o estudo será limitado a valores de  $r$  iguais a 1/2, 2 e 4. As Figuras 3.19 a 3.21 ilustram os resultados obtidos para a distribuição do parâmetro  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$ , onde o índice  $n = 1$  e os valores de  $r$  mencionados anteriormente foram utilizados.

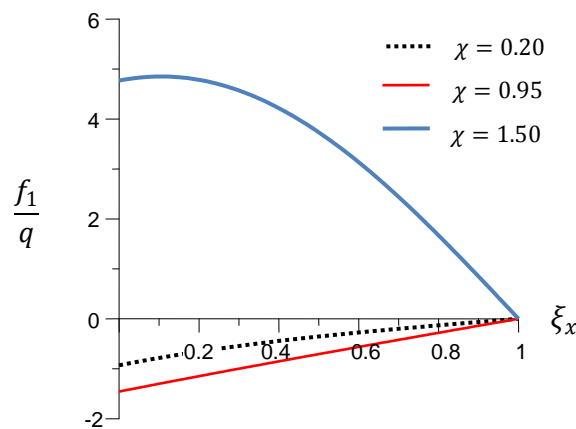


Figura 3.19 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $r = 1/2$

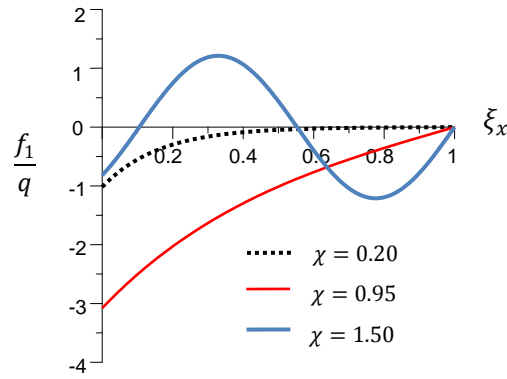


Figura 3.20 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $r = 2$

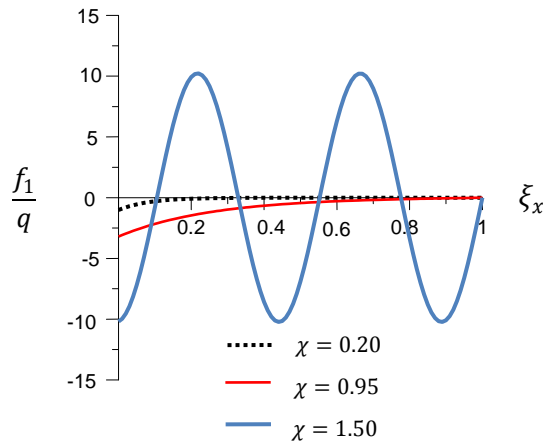


Figura 3.21 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $r = 4$

Por inspeção da Equação (3.39) e das figuras anteriores pode-se concluir que, para  $\chi > n$ , maiores valores de  $r$  irão resultar em um maior número de ciclos na direção longitudinal. Para valores de  $\chi < n$ , a resposta continua sendo dada por funções hiperbólicas. As Figuras 3.22 a 3.24 ilustram os resultados obtidos para a variação de  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$ , onde  $n = 1$  e valores arbitrários de  $\chi < n$  foram adotados.

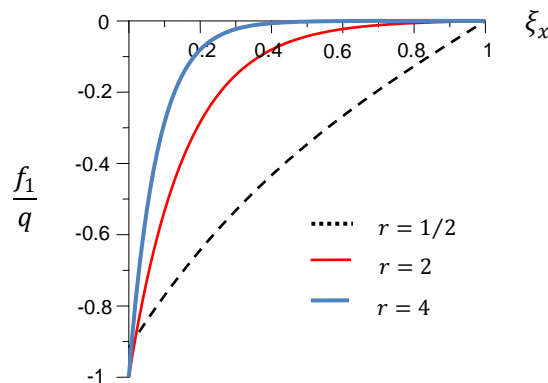


Figura 3.22 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $\chi = 0$

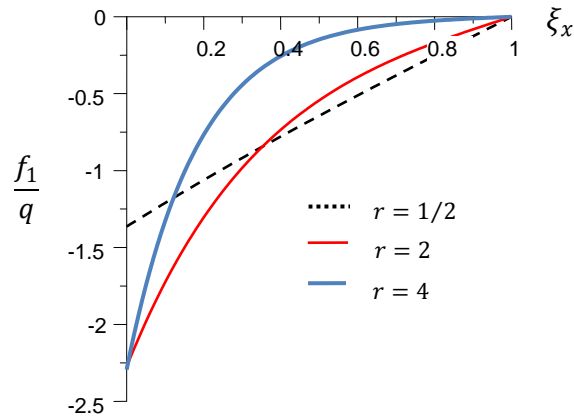


Figura 3.23 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $\chi = 0.9$

Observam-se diferenças entre as curvas, indicando que estas funções também sofrem influência de  $r$ . Embora todas apresentem uma tendência de linearização para  $\chi \rightarrow 1$ , verifica-se que quanto menor for o valor de  $r$ , mais rápida será essa aproximação. A amplitude final também é alterada, sendo maior para maiores valores deste parâmetro. A Equação (3.43) apresenta estes limites.

$$\lim_{\chi \rightarrow n} \frac{f_1}{q} = \frac{r(\pi\xi_x - \pi)}{n} \quad (3.43)$$

Esta última equação corresponde a (3.27) com um termo adicional  $r$  no numerador. Para  $n = 1$  e  $\xi = 0$  as amplitudes serão dadas por  $-r\pi$ . Estes valores são verificados na Figura 3.24.

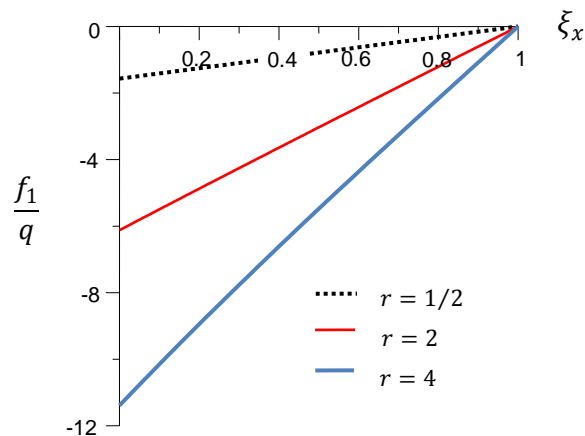


Figura 3.24 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\xi_x$  para  $n = 1$  e  $\chi \cong 1$

De forma semelhante ao caso anterior, este problema também apresenta valores críticos, dados pela Equação (3.41), que correspondem às frequências de uma cavidade retangular fechada-aberta em  $x$  e aberta-aberta em  $y$ . Estes valores são dados por:

$$\omega = \frac{\pi c}{L_y} \sqrt{\left(\frac{m}{2r}\right)^2 + n^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.44)$$

Deve-se notar que a Equação (3.44) não representa toda a gama de frequências da cavidade fechada-aberta e aberta-aberta (que inclui os valores pares do índice  $n$ ). Entretanto, todas as frequências dadas por esta última equação estão incluídas na solução de valores próprios da cavidade equivalente (contorno móvel substituído por parede rígida).

As particularidades deste caso incluem valores críticos e solução longitudinal dependentes do valor de  $r$ , que indica uma relação entre as dimensões da cavidade. A solução transversal  $s_1$  não é alterada, e continua sendo dada por  $\text{sen}(n\pi\xi_y)$ . A composição das soluções longitudinal e transversal para cada valor de  $n$  irá representar a solução completa do problema. É interessante observar que um maior valor de  $r$  implica em uma maior quantidade de pontos críticos. A Figura 3.25 ilustra esta propriedade, onde é apresentada a variação do parâmetro  $q$  ao longo de  $\chi$  para  $n = 1$ . Um novo ponto crítico é estabelecido cada vez que a curva intercepta a abscissa deste gráfico.

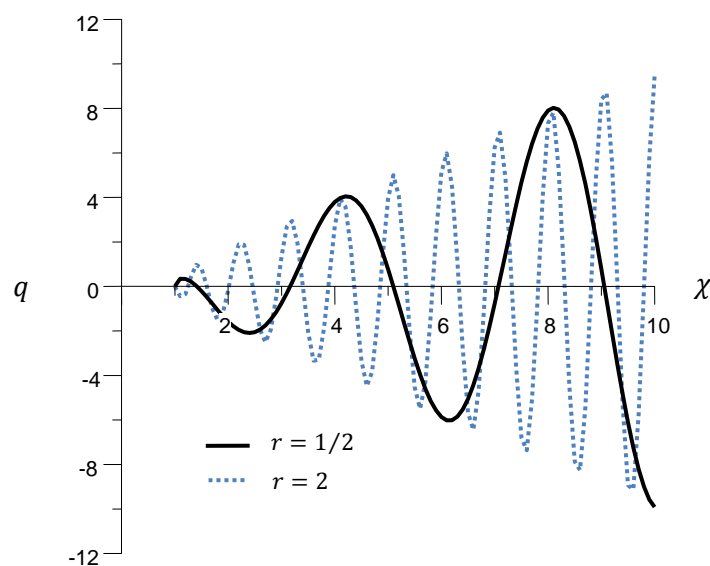


Figura 3.25 – Variação da função  $q$  ao longo de  $\chi$  para  $n = 1$

As Tabelas 3.5 e 3.7 ilustram, respectivamente, a solução  $f_1 s_1 / q$  para uma série de valores críticos de  $\chi$ , utilizando os valores de  $r$  iguais a  $1/2$  e  $2$ . Estas distribuições serão importantes para o estudo dos modos do problema acoplado. Todos os modos indicados nestas tabelas compõem a solução de valores próprios de uma cavidade retangular fechada-aberta na direção longitudinal e aberta-aberta na direção transversal. As Tabelas 3.6 e 3.8 indicam, respectivamente, as soluções da cavidade para  $r = 1/2$  e  $r = 2$ . Estes resultados incluem as soluções onde  $n = 2, 4, 6, \dots$ , que não representam valores críticos do fator  $\chi$ .

Tabela 3.5 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  para valores críticos de  $\chi$  ( $r = 1/2$ )


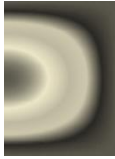
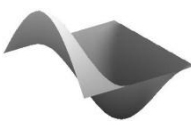
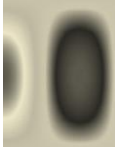

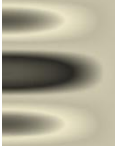
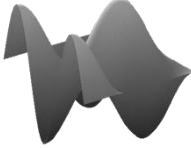


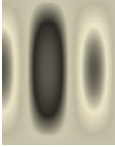

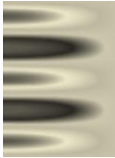
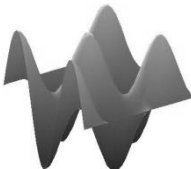

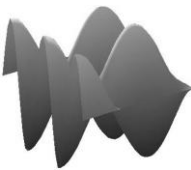


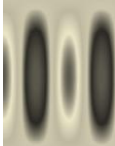
$\chi_{\text{crítico}}$	$n$	$m$	$f_1 s_1/q$	
$\frac{1}{2}\sqrt{8}$	1	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	1	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	3	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{72}$	3	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{104}$	1	5		
$\frac{1}{2}\sqrt{104}$	5	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{136}$	3	5		
$\frac{1}{2}\sqrt{136}$	5	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{200}$	1	7		



Tabela 3.6 – Freqüências e modos (cavidade retangular fechada-aberta e aberta-aberta)  
 $r = 1/2$

$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$	$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$
$\frac{1}{2}\sqrt{8}$	1	1		$\frac{1}{2}\sqrt{104}$	5	1	
$\frac{1}{2}\sqrt{20}$	2	1		$\frac{1}{2}\sqrt{116}$	2	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	1	3		$\frac{1}{2}\sqrt{136}$	3	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	3	1		$\frac{1}{2}\sqrt{136}$	5	3	
$\frac{1}{2}\sqrt{52}$	2	3		$\frac{1}{2}\sqrt{164}$	4	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{68}$	4	1		$\frac{1}{2}\sqrt{200}$	1	7	
$\frac{1}{2}\sqrt{72}$	3	3		$\frac{1}{2}\sqrt{200}$	5	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{100}$	4	3		$\frac{1}{2}\sqrt{212}$	2	7	
$\frac{1}{2}\sqrt{104}$	1	5		$\frac{1}{2}\sqrt{232}$	3	7	

Tabela 3.7 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  para valores críticos de  $\chi$  ( $r = 2$ )


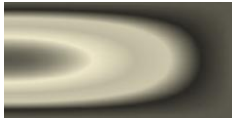
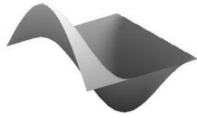
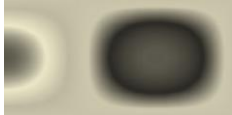



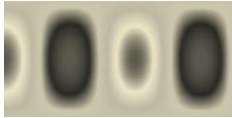
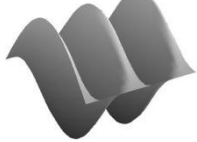

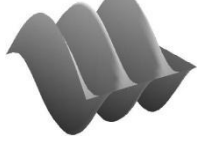

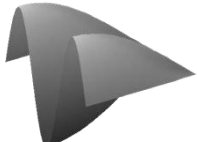
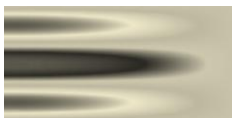
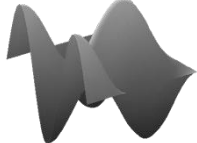
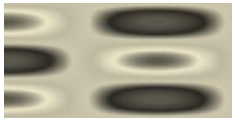
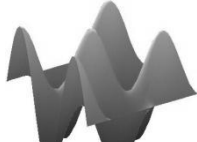

$\chi_{crítico}$	$n$	$m$	$f_1 s_1/q$	
$\frac{1}{4}\sqrt{17}$	1	1		
$\frac{1}{4}\sqrt{25}$	1	3		
$\frac{1}{4}\sqrt{41}$	1	5		
$\frac{1}{4}\sqrt{65}$	1	7		
$\frac{1}{4}\sqrt{97}$	1	9		
$\frac{1}{4}\sqrt{137}$	1	11		
$\frac{1}{4}\sqrt{145}$	3	1		
$\frac{1}{4}\sqrt{153}$	3	3		
$\frac{1}{4}\sqrt{169}$	3	5		

Tabela 3.8 – Frequências e modos (cavidade retangular fechada-aberta e aberta-aberta)  
 $r = 2$

$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$	$\chi_{modo}$	$n$	$m$	$f_1 s_1 / q$
$\frac{1}{4}\sqrt{17}$	1	1		$\frac{1}{4}\sqrt{137}$	1	11	
$\frac{1}{4}\sqrt{25}$	1	3		$\frac{1}{4}\sqrt{145}$	2	9	
$\frac{1}{4}\sqrt{41}$	1	5		$\frac{1}{4}\sqrt{145}$	3	1	
$\frac{1}{4}\sqrt{65}$	1	7		$\frac{1}{4}\sqrt{153}$	3	3	
$\frac{1}{4}\sqrt{65}$	2	1		$\frac{1}{4}\sqrt{169}$	3	5	
$\frac{1}{4}\sqrt{73}$	2	3		$\frac{1}{4}\sqrt{185}$	1	13	
$\frac{1}{4}\sqrt{89}$	2	5		$\frac{1}{4}\sqrt{185}$	2	11	
$\frac{1}{4}\sqrt{97}$	1	9		$\frac{1}{4}\sqrt{193}$	3	7	
$\frac{1}{4}\sqrt{113}$	2	7		$\frac{1}{4}\sqrt{225}$	3	9	

A análise das Tabelas 3.5 e 3.7 indica diferenças nos valores críticos encontrados para estas duas situações. Na cavidade com maior comprimento na direção longitudinal ( $r = 2$ ) predominam os modos longitudinais, e isto pode ser observado pelo desenvolvimento do índice  $n$ , que é mantido em  $n = 1$  até o sexto valor crítico. Desta forma, a solução resultante até esta frequência poderá apresentar apenas uma concavidade na direção transversal. Na cavidade com maior comprimento na direção transversal ( $r = 1/2$ ) os modos transversais surgem nos valores críticos iniciais, e isto pode ser observado pelo desenvolvimento do índice  $n$ , que até o sexto valor crítico atinge o valor  $n = 5$ . Desta forma, a solução resultante até esta frequência poderá apresentar cinco concavidades na direção transversal.

Outra observação importante consiste no fato das soluções apresentadas nas Tabelas 3.5 e 3.7 serem idênticas para um mesmo par de valores de  $n$  e  $m$ . É evidente que, devido às dimensões da cavidade, determinadas frequências irão surgir inicialmente para um dado valor de  $r$ , já que os valores próprios dependem desta relação. Entretanto, o campo de pressões resultante é independente das dimensões da cavidade, e é dado por:

$$\bar{P}_{n,m}(\xi_x, \xi_y) = \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \text{sen}(n\pi\xi_y) \begin{cases} n = 1,3,5, \dots \\ m = 1,3,5, \dots \end{cases} \quad (3.45)$$

Por outro lado, o valor crítico de um determinado par de valores de  $n$  e  $m$  irá variar de acordo com a relação entre as dimensões da cavidade. O conjunto  $n = 1$  e  $m = 1$  indica, por exemplo, um valor crítico igual a  $1/2\sqrt{8}$  para a relação  $r = 1/2$ . Entretanto, para a relação  $r = 2$  este valor corresponde a  $1/4\sqrt{17}$ . Nos dois casos o campo de pressões hidrodinâmicas apresenta a mesma configuração, indicando um mesmo modo para duas frequências distintas, correspondendo à solução de (3.45) para o par de valores dado por  $n = 1$  e  $m = 1$ . Estas duas soluções são idênticas devido ao limite estabelecido quando  $f_1/q$  se aproxima de um ponto crítico, que resulta em:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{\text{crítico}}} \frac{f_1}{q} = \frac{\text{sen}\left[\frac{m\pi}{2}(\xi_x - 1)\right]}{\frac{mn}{2r} \cos\left[\frac{m\pi}{2}\right]} \quad (3.46)$$

que pode ser simplificada para:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{\text{crítico}}} \frac{f_1}{q} = \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right)}{\frac{mn}{2r} \cos\left[\frac{m\pi}{2}\right]} \quad (3.47)$$

Como  $m = 1,3,5, \dots$  a expressão acima fica reduzida a:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{\text{crítico}}} \frac{f_1}{q} = \left[ -\frac{2r}{mn} \tan\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \quad (3.48)$$

onde o termo entre colchetes representa uma amplitude e a função cosseno representa a variação longitudinal. Observa-se que esta variação é independente de  $r$ . A combinação entre esta última equação e a solução transversal resulta em:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{\text{crítico}}} \frac{f_1 s_1}{q} = \left[ -\frac{2r}{mn} \tan\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \text{sen}(n\pi\xi_y) \quad (3.49)$$

É interessante notar as semelhanças existentes entre a expressão acima e (3.45). A normalização de (3.49) irá resultar em uma expressão idêntica a (3.45). Portanto, distribuições de pressões semelhantes serão estabelecidas para um dado par de valores de  $n$  e  $m$ , independente do valor de  $r$  adotado. A Equação (3.49) não é definida para valores de  $m = 1,3,5, \dots$ , resultando em uma amplitude infinita. Entretanto, nas proximidades destes valores a resposta pode ser obtida, com o termo de amplitude assumindo sinal positivo para aproximações pela direita e negativo caso contrário.

Graficamente é possível compreender melhor a distribuição de frequências críticas para um determinado par de valores de  $n$  e  $m$ , em função de  $r$ . Pode-se construir, com auxílio da Equação (3.41), um gráfico denominado mapa de frequências, onde a abscissa indica os valores de  $m$  e a ordenada indica os valores de  $\chi_{\text{crítico}}$ . Ao longo deste gráfico são desenvolvidas curvas para diferentes valores de  $n$ . Os pontos alinhados em uma reta horizontal (indicada na Figura 3.26) representam as soluções de  $n$  e  $m$  possíveis para uma determinada frequência. As Figuras 3.26, 3.27 e 3.28 ilustram, respectivamente, os mapas de frequências para valores de  $r$  iguais a  $1/2$ ,  $1$  e  $2$ .

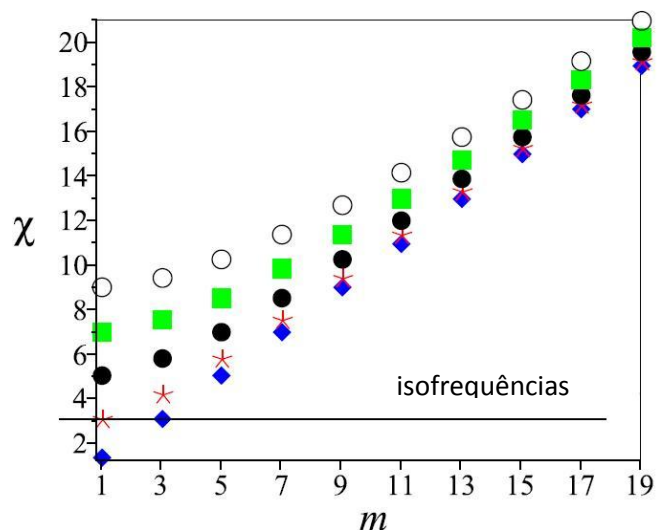


Figura 3.26 – Mapa de frequências críticas para  $r = 1/2$

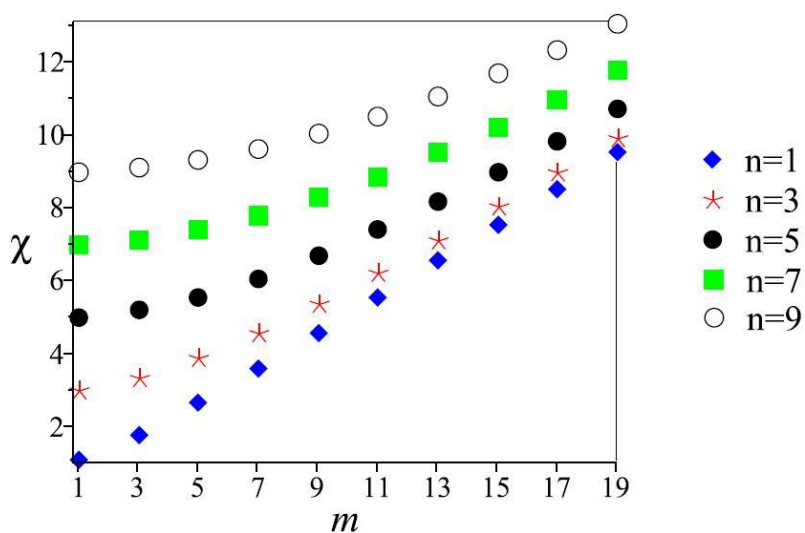


Figura 3.27 – Mapa de frequências críticas para  $r = 1$

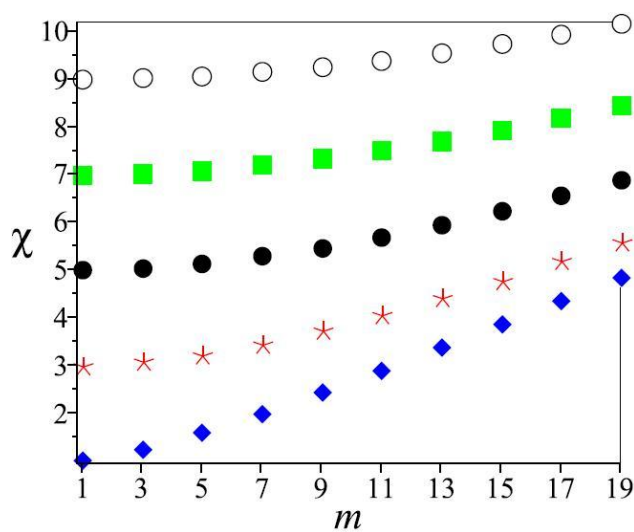


Figura 3.28 – Mapa de frequências críticas para  $r = 2$

A grande vantagem deste tipo de representação é a identificação e ordenamento dos pontos críticos, que variam de acordo com o parâmetro  $r$ . Pode-se observar que a inclinação das retas diminui com o aumento deste fator. Isto implica em um maior distanciamento das curvas, e conseqüentemente em um desenvolvimento seqüencial de valores críticos para uma pequena gama de valores de  $n$ . Nestes casos, o surgimento de modos transversais ocorre após o desenvolvimento de uma longa série de modos longitudinais. Menores valores deste parâmetro implicam em modos iniciais com maior diversidade de valores de  $n$ . Desta forma, as soluções transversais irão apresentar maior participação nas freqüências críticas iniciais. Isto corresponde exatamente ao que foi observado nos resultados das Tabelas 3.5 e 3.7. O limite dado por  $r \rightarrow \infty$  resulta em um gráfico onde as curvas são praticamente retas para valores iniciais de  $m$ , indicando uma seqüência praticamente infinita de modos longitudinais. A Figura 3.29 ilustra esta condição.

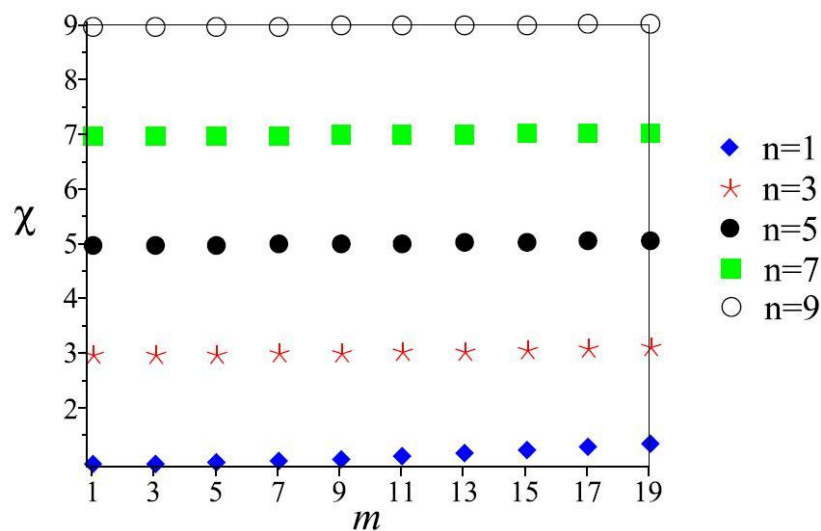


Figura 3.29 – Mapa de freqüências críticas para  $r = 10$

O valor de  $r$  será infinitamente pequeno para valores de  $L_x \ll L_y$ . Para este caso a função  $f_1/q$  (dada pela Equação 3.39) atinge o seguinte limite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1}{q} = \frac{\pi(\xi_x - 1)r}{n} \quad (3.50)$$

Deve-se notar que a expressão (3.50) corresponde a equação de uma reta para valores constantes de  $n$ . A solução completa para um dado  $n$  será obtida pela combinação desta solução com  $s_1$ . Então:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1 s_1}{q} = r\pi(\xi_x - 1) \frac{\text{sen}(n\pi\xi_y)}{n} \quad (3.51)$$

A solução resultante para os valores de  $n = 1, 3, 5, \dots$  será dada por:

$$Y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_1 s_1}{q} = r\pi(\xi_x - 1) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi\xi_y)}{n} \quad (3.52)$$

A série apresentada em (3.52) é convergente, com resultado dado por (2.105). Portanto, esta expressão poderá ser simplificada para:

$$Y = \frac{\pi^2 r}{4} (\xi_x - 1) \quad (3.53)$$

que indica uma expressão unidimensional, confirmando as deduções apresentadas no Capítulo 2 para o Caso 1A, com comprimento transversal infinitamente maior que o comprimento longitudinal. As Figuras 3.30 e 3.31 ilustram a transição da solução bidimensional para a unidimensional, para valores variáveis de  $r$ . A linha sólida nestes gráficos representa a solução dada por (3.53).

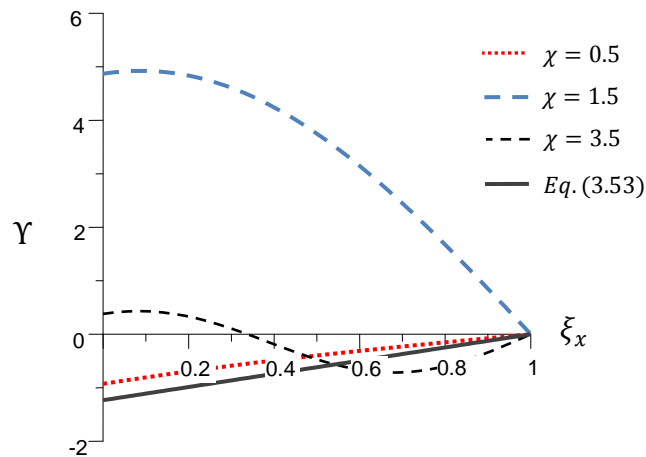


Figura 3.30 – Variação da função  $Y$  ao longo de  $\xi_x$ , em  $\xi_y = 0.5$ , para  $r = 1/2$

Estas figuras indicam que as curvas apresentam uma tendência de aproximação da solução dada por (3.53) à medida que o valor de  $r$  diminui. Quanto menor for o valor de  $\chi$ , mais rápida será esta aproximação.



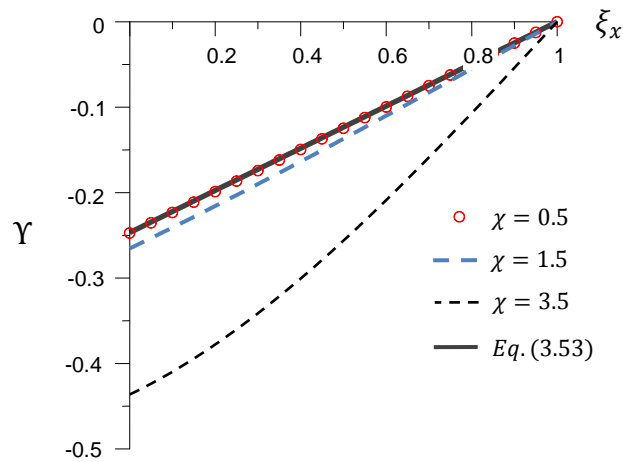


Figura 3.31 – Variação da função  $Y$  ao longo de  $\xi_x$ , em  $\xi_y = 0.5$ , para  $r = 1/10$

A Tabela 3.9 ilustra a transição do campo de pressões dado por  $Y$ , onde podem ser observados aspectos relacionados a  $\chi$  e  $r$ . Deve-se notar que todas as configurações evoluem para um aspecto final semelhante, onde a variação de pressões hidrodinâmicas é unidimensional. Esta característica ajuda a entender a natureza da Equação (3.53), indicando que para  $r \rightarrow 0$  a solução é independente do fator  $\chi$ .

Tabela 3.9 – Variação da função  $Y$  ao longo de  $\xi_x$  e  $\xi_y$

	$r = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{10}$	$r = \frac{1}{100}$	$r \rightarrow 0$ Eq. (3.53)
$\chi = 0.5$				
$\chi = 1.5$				
$\chi = 3.5$				
$\chi = 5.5$				

### 3.3.3 - Cavidade retangular com contorno governado por uma função senoidal

Para este caso específico adotam-se comprimentos iguais a  $L_x$  na direção longitudinal e  $L_y$  na direção transversal. Adicionalmente o contorno é considerado flexível (função de deslocamentos não-uniforme), com a função  $\phi(y)$  sendo definida por:

$$\phi(y) = \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \quad p/ j = 1,2,3, \dots \quad (3.54)$$

que correspondem aos modos de vibração de um viga bi-apoiada.

A Tabela 3.1 fornece as condições de ortogonalidade deste caso, indicando que:

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = \begin{cases} 0 \rightarrow n \neq j \\ \frac{L_y}{2} \rightarrow n = j \end{cases} \quad (3.55)$$

A propriedade de ortogonalidade da função seno indica que a integral (3.55) será nula para valores de  $j \neq n$ . Portanto, a única solução possível será aquela onde  $n = j$ . Então:

$$P(x, y) = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} R_n S_n = -\frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} R_j \frac{L_y}{2} \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \quad (3.56)$$

onde verifica-se que o somatório fica reduzido ao índice  $n = j$ . Esta expressão pode ser simplificada, resultando em:

$$P(\xi_x, \xi_y) = -\frac{\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \frac{\text{sen}[\pi\sqrt{\chi^2 - j^2}(\xi_x - 1) r]}{\sqrt{\chi^2 - j^2} \cos(\pi\sqrt{\chi^2 - j^2} r)} \text{sen}(j\pi\xi_y) \quad (3.57)$$

A expressão acima pode ser reescrita em termos de uma função longitudinal  $f_1$ , uma função transversal  $s_1$  e um fator de amplitude  $q$ . Desta forma:

$$P(\xi_x, \xi_y) = -\frac{\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \frac{f_1(j, \chi, \xi_x, r)}{q(j, \chi, r)} s_1(j, \xi_y) \quad (3.58)$$

As funções  $f_1$  e  $s_1$  são idênticas às expressões apresentadas no caso anterior (contorno rígido-móvel). Entretanto, nesta última solução o campo de pressões hidrodinâmicas era dado por um somatório do termo  $f_1 s_1 / q$ . Na expressão (3.58) apenas o índice  $n = j$  compõe a solução.

Um estudo detalhado da função longitudinal  $f_1/q$  é apresentado nas Figuras 3.32 e 3.33, onde se observa a variação desta relação ao longo de  $\chi$ . Valores arbitrários de  $j$  e  $r$  foram escolhidos. Estes resultados são semelhantes aos obtidos no caso anterior, e incluem: a presença de pontos críticos, que levam a função longitudinal a um valor infinito, e a relação existente entre o fator  $r$  e a frequência de pontos críticos em um dado intervalo.

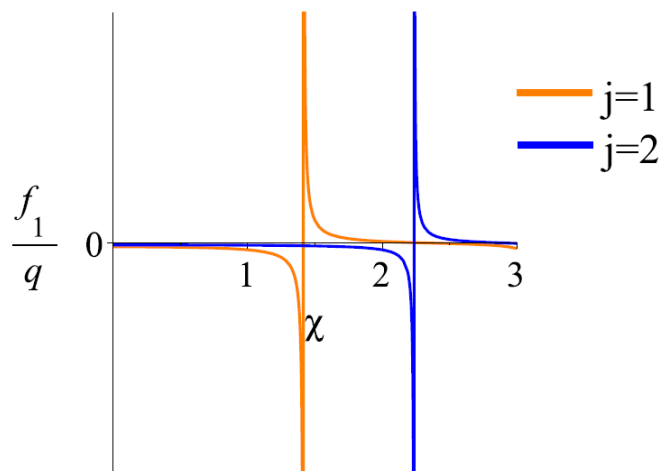


Figura 3.32 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\chi$ , em  $\xi_x = 0$ , para  $r = 1/2$

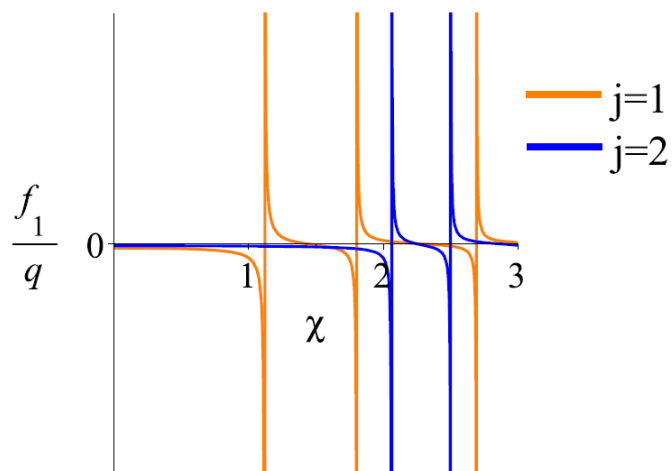


Figura 3.33 – Variação da função  $f_1/q$  ao longo de  $\chi$ , em  $\xi_x = 0$ , para  $r = 1$

O denominador de (3.58) apresenta uma função cosseno, que levará a amplitude ao infinito sempre que o valor desta função trigonométrica se aproximar de zero. Portanto, estes valores críticos serão estabelecidos quando:

$$\chi_{crítico} = \sqrt{\left(\frac{m}{2r}\right)^2 + j^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.59)$$

Desta forma, para cada modo  $j$  da estrutura irão existir infinitos valores críticos que levarão a amplitude da resposta ao infinito. Estes valores serão sempre desenvolvidos para  $\chi > j$ . O limite da expressão (3.58) quando  $\chi \rightarrow \chi_{crítico}$  é dado por:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{crítico}} \frac{f_1}{q} = \frac{\text{sen} \left[ \frac{m\pi}{2} (\xi_x - 1) \right]}{\frac{m}{2r} \cos \left[ \frac{m\pi}{2} \right]} \quad (3.60)$$

que pode ser simplificada para:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{crítico}} \frac{f_1}{q} = \frac{\text{sen} \left( \frac{m\pi \xi_x}{2} \right) \cos \left( \frac{m\pi}{2} \right) - \text{sen} \left( \frac{m\pi}{2} \right) \cos \left( \frac{m\pi \xi_x}{2} \right)}{\frac{m}{2r} \cos \left[ \frac{m\pi}{2} \right]} \quad (3.61)$$

Como  $m = 1,3,5, \dots$  a expressão acima fica reduzida a:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{crítico}} \frac{f_1}{q} = \left[ -\frac{2r}{m} \tan \left( \frac{m\pi}{2} \right) \right] \cos \left( \frac{m\pi \xi_x}{2} \right) \quad (3.62)$$


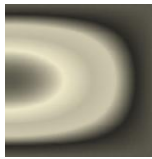

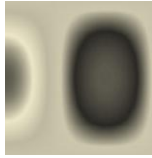

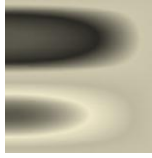

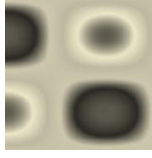

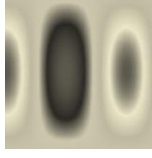

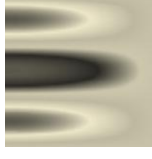


onde o termo entre colchetes representa uma amplitude e a função cosseno indica a variação longitudinal. Nota-se que esta variação é independente de  $r$ . A combinação entre esta última equação e a solução transversal resulta em:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{crítico}} \frac{f_1 s_1}{q} = \left[ -\frac{2r}{m} \tan \left( \frac{m\pi}{2} \right) \right] \cos \left( \frac{m\pi \xi_x}{2} \right) \text{sen}(j\pi \xi_y) \quad (3.63)$$

A Equação (3.63) apresenta características semelhantes à solução dada por (3.49). Assim, as configurações críticas irão corresponder às soluções da cavidade.

As Equações (3.59) e (3.63) indicam que os valores e configurações dos pontos críticos, para  $r = 1$  (cavidade quadrada), irão corresponder exatamente aos resultados ilustrados na Tabela 3.3. É evidente que o índice  $n = j$  irá associar cada uma destas configurações a um determinado modo do contorno vibrante. Estas soluções são apresentadas em uma forma alternativa na Tabela 3.10.

Tabela 3.10 – Variação da função  $f_1 s_1 / q$  para valores críticos de  $\chi$

$\chi_{crítico}$	$j$	$m$	$\phi(y)$	$\frac{f_1 s_1}{q}$
$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{13}$	1	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	2	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{25}$	2	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{29}$	1	5		
$\frac{1}{2}\sqrt{37}$	3	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{41}$	2	5		


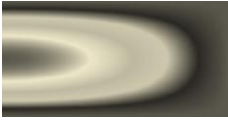

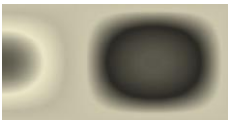





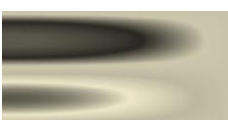



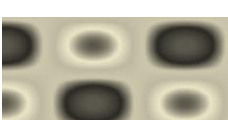
Da Tabela 3.10 pode-se concluir que um determinado modo  $j$  irá produzir apenas  $j$  núcleos na direção transversal. Por exemplo: soluções com dois núcleos na direção transversal serão sempre associadas a uma deformada com modo correspondente a  $j = 2$ . As Tabelas 3.11 e 3.12 ilustram, respectivamente, os resultados obtidos para  $r = 1/2$  e  $r = 2$ .

Tabela 3.11 – Variação da função  $f_1 s_1 / q$  para valores críticos de  $\chi$   
 $r = 1/2$

$\chi_{crítico}$	$j$	$m$	$\phi(y)$	$\frac{f_1 s_1}{q}$
$\frac{1}{2}\sqrt{8}$	1	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{20}$	2	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	1	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{40}$	3	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{52}$	2	3		
$\frac{1}{2}\sqrt{68}$	4	1		
$\frac{1}{2}\sqrt{72}$	3	3		

Tabela 3.12 – Variação da função  $f_1 s_1/q$  para valores críticos de  $\chi$

$$r = 2$$

$\chi_{crítico}$	$j$	$m$	$\phi(y)$	$\frac{f_1 s_1}{q}$
$\frac{1}{4}\sqrt{17}$	1	1		
$\frac{1}{4}\sqrt{25}$	1	3		
$\frac{1}{4}\sqrt{41}$	1	5		
$\frac{1}{4}\sqrt{65}$	1	7		
$\frac{1}{4}\sqrt{65}$	2	1		
$\frac{1}{4}\sqrt{73}$	2	3		
$\frac{1}{4}\sqrt{89}$	2	5		

Estes resultados também são semelhantes aos apresentados nas Tabelas 3.6 e 3.8. Nas cavidades com menores valores do parâmetro  $r$  existe a presença de modos com maiores valores de  $j$ . Nas cavidades com maior comprimento longitudinal ocorre a predominância de modos com valores mais baixos deste índice. Os valores críticos e os modos serão sempre associados à cavidade com um valor correspondente de  $r$ .

### 3.4 - ESTUDO DA SOLUÇÃO – CASO 3A

A expressão geral que governa este caso é dada pela Equação (2.223). Portanto:

$$\begin{aligned}
 P(x, y) = & -\frac{\rho_f \bar{A}}{L_y \sqrt{\alpha_0}} \int_0^{L_y} \phi(y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)] \\
 & - \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy [\text{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \\
 & - \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_n} x)] \cos(\kappa_n y)
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots$ ,  $\alpha_n = (\omega/c)^2 - (\kappa_n)^2$  e  $\kappa_n = n\pi/L_y$

As frequências neste caso também serão representadas por múltiplos da primeira frequência da cavidade na direção transversal. Assim:

$$\omega = \frac{\chi\pi c}{L_y} \tag{3.65}$$

Um estudo detalhado de casos específicos desta cavidade será apresentado a seguir.

#### 3.4.1 - Cavidade retangular com contorno rígido-móvel ( $\phi = 1$ )

Para este caso específico adotam-se comprimentos iguais a  $L_x$  na direção longitudinal e  $L_y$  na direção transversal. Adicionalmente o contorno é considerado rígido-móvel, com todos os pontos apresentando mesma amplitude.

Para  $\phi = 1$  a Equação (3.64) se reduz a solução do pistão unidimensional, dada por:

$$P(x) = -\frac{\rho_f \bar{A}}{\sqrt{\alpha_0}} [\text{sen}(\sqrt{\alpha_0} x) - \tan(\sqrt{\alpha_0} L_x) \cos(\sqrt{\alpha_0} x)] \tag{3.66}$$

onde  $\alpha_0 = (\omega/c)^2$ . A expressão acima pode ser simplificada para:

$$P(\xi_x) = -\rho_f \bar{A} L_x \frac{\text{sen}[\chi_o(\xi_x - 1)]}{\chi_o \cos(\chi_o)} = -\rho_f \bar{A} L_x \frac{f_1}{q} \tag{3.67}$$



onde  $\chi_o = \omega L_x / c$ . Esta última expressão é semelhante às obtidas anteriormente, onde o numerador  $f_1$  indica a variação longitudinal e o denominador  $q$  indica um termo de amplitude. É interessante notar que a Equação (3.67) será sempre função de expressões trigonométricas independente do valor de  $\chi_o$ .

Os valores críticos de (3.67) irão ocorrer quando a função  $\cos(\chi_o) \rightarrow 0$ . Desta forma:

$$\chi_{crítico} = \frac{m\pi}{2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.68)$$

Uma observação importante consiste no fato de que os valores críticos dados por (3.68) correspondem às frequências naturais de uma cavidade unidimensional, fechada-aberta. Estes resultados são facilmente representados por meio da substituição de  $\chi = \omega L_x / c$  em (3.68). Portanto:

$$\omega = \frac{m\pi c}{2L_x} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (3.69)$$

Adicionalmente, é interessante observar o limite de  $f_1/q$  quando  $\chi \rightarrow \chi_{crítico}$ . Assim:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_{crítico}} \frac{f_1}{q} = \frac{\text{sen} \left[ \frac{m\pi}{2} (\xi_x - 1) \right]}{\frac{m\pi}{2} \cos \left( \frac{m\pi}{2} \right)} = \left[ \frac{2}{m\pi} \tan \left( \frac{m\pi}{2} \right) \right] \cos \left( \frac{m\pi \xi_x}{2} \right) \quad (3.70)$$

onde o termo entre colchetes representa uma amplitude e a função cosseno representa a variação longitudinal. A normalização da expressão (3.70) resulta nas formas modais de uma cavidade fechada-aberta unidimensional. Desta forma, pode-se concluir que o significado físico dos valores críticos neste problema é o mesmo dos casos anteriores: são os múltiplos que produzem valores próprios e modos de vibração idênticos aos da cavidade correspondente.

### 3.4.2 - Cavidade retangular com contorno governado por uma função senoidal

Neste caso o contorno é considerado flexível, com a função  $\phi(y)$  sendo definida por (3.54). A Tabela 3.1 fornece as condições de ortogonalidade deste caso, indicando que:

$$I_\phi = \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy = \begin{cases} \frac{jL_y[1 - \cos(j\pi)\cos(n\pi)]}{\pi(j^2 - n^2)} \rightarrow n \neq j \\ 0 \rightarrow n = j \end{cases} \quad (3.71)$$

Esta última expressão indica que a solução será nula para  $n = j$ . Adicionalmente, quando  $j$  e  $n$  forem ímpares, a expressão terá valor nulo. O mesmo ocorre para dois números pares. Assim, pode-se concluir que a única solução possível será aquela onde ocorre uma combinação de um número par com um número ímpar. Por exemplo: para  $j = 1$ , só existem soluções não-nulas de (3.71) com  $n = 2, 4, 6, \dots$ . Para  $j = 2$ , soluções não-nulas irão ocorrer com  $n = 1, 3, 5, \dots$

Para  $n = 0$  a integral indicada em (3.71) fica reduzida a:

$$I_{\phi_0} = \int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) dy = -\frac{L_y}{j\pi} [\cos(j\pi) - 1] \begin{cases} 0 \rightarrow j \text{ par} \\ \frac{2L_y}{j\pi} \rightarrow j \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.72)$$

Então, a solução de pressões dinâmicas deste caso será definida por:

$$P(\xi_x, \xi_y) = P_0(\xi_x) + P_n(\xi_x, \xi_y) \quad (3.73)$$

onde:

$$P_0(\xi_x) = \frac{\rho_f \bar{A} L_y}{j\pi^2} \frac{\text{sen}[\pi\chi(\xi_x - 1)r] [\cos(j\pi) - 1]}{\chi \cos(\pi\chi r)} \quad n = 0 \quad (3.74)$$

$$P_n(\xi_x, \xi_y) = -\frac{2\rho_f \bar{A} L_y}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[\pi\sqrt{\chi^2 - n^2}(\xi_x - 1)r]}{\sqrt{\chi^2 - n^2} \cos(\pi\sqrt{\chi^2 - n^2}r)} \cdot \frac{j[1 - \cos(j\pi)\cos(n\pi)]}{(j^2 - n^2)} \cos(n\pi\xi_y) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.75)$$











A solução completa é definida pela soma das expressões (3.74) e (3.75). A parcela indicada em (3.74) é nula quando  $j$  corresponde a um número par. Neste caso a solução é dada apenas por (3.75), que assume valores não-nulos para  $n = 1, 3, 5 \dots$ . Para valores

ímpares de  $j$  as expressões (3.74) e (3.75) compõem a solução, com (3.75) assumindo resultados não-triviais para  $n = 2, 4, 6 \dots$

Assim como nos casos anteriores, valores críticos também estão presentes nas expressões (3.74) e (3.75). O significado físico destes pontos singulares é preservado, sendo relacionados às frequências e modos de uma cavidade equivalente, onde o contorno móvel é substituído por uma parede rígida. Estes são definidos por:

$$\chi_{critical} = \sqrt{\left(\frac{m}{2r}\right)^2 + n^2} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad m = 1, 3, 5 \dots \quad (3.76)$$

Tabela 3.13 – Frequências e modos da cavidade associados a valores críticos de  $\chi$

<i>j par</i>				<i>j ímpar</i>			
$\chi_{critical}$	$n$	$m$	$\frac{f_1 s_1}{q}$	$\chi_{critical}$	$n$	$m$	$\frac{f_1 s_1}{q}$
$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1	1		$\frac{1}{2}$	0	1	
$\frac{1}{2}\sqrt{13}$	1	3		$\frac{3}{2}$	0	3	
$\frac{1}{2}\sqrt{29}$	1	5		$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	2	1	
$\frac{1}{2}\sqrt{37}$	3	1		$\frac{5}{2}$	0	5	
$\frac{1}{2}\sqrt{53}$	1	7		$\frac{5}{2}$	2	3	

Configurações críticas de (3.73) são estabelecidas quando  $\chi \rightarrow \chi_{crítico}$ . A Tabela 3.13 apresenta estes resultados para  $r = 1$ , com os valores correspondentes de  $n$  e  $m$ . É importante notar que valores ímpares de  $j$  estão relacionados a distribuições simétricas de pressões em relação à  $\xi_y = 1/2$ . O oposto ocorre para valores pares de  $j$ .

As particularidades deste caso incluem a presença de uma série, que poderá ter índices  $n$  pares ou ímpares, dependendo da natureza do índice  $j$ . Adicionalmente, verifica-se em (3.76) a presença de valores críticos de uma cavidade unidimensional para  $n = 0$ , e bidimensional para  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Assim, duas categorias de ressonâncias são possíveis. A primeira, unidimensional, associada a (3.74). E a segunda, bidimensional, associada a (3.75). Quando  $j$  é um número par a expressão (3.74) é nula. Desta forma, as ressonâncias associadas serão representadas apenas por (3.75).

### 3.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram estudadas as propriedades das soluções do domínio do fluido, considerando as contribuições longitudinal e transversal. Verifica-se que, ao contrário da solução transversal (que é independente), a solução longitudinal  $R_n$  depende da constante de separação transversal  $\kappa_n$ , que está diretamente relacionada às condições de contorno na direção  $y$ . Desta forma, os valores  $\alpha_{críticos}$  definidos no capítulo anterior (Tabela 2.8) dependem das características do contorno na direção transversal. Estes valores, quando combinados com  $\kappa_n$ , definem as frequências críticas do problema ( $\omega_{crítico}$ ), indicadas em (3.2), que estão associadas a uma cavidade equivalente onde os contornos móveis são substituídos por paredes rígidas. Observa-se que amplitudes infinitas de pressões são definidas quando  $\omega \rightarrow \omega_{crítico}$ , indicadas em (3.4), com configurações idênticas aos modos da cavidade equivalente.

O parâmetro  $\chi$  foi convenientemente definido como um multiplicador da primeira frequência da cavidade na direção transversal. Desta forma, as soluções  $R_n$  serão dadas por funções hiperbólicas para  $\chi < n$  e funções trigonométricas para  $\chi > n$ . Para um dado valor de  $n$ , o aumento de  $\chi$  implica em funções longitudinais com maiores quantidades de ciclos, resultando em uma maior formação de núcleos na solução completa. O limite  $\chi \rightarrow n$  é definido nas cavidades que possuem uma extremidade aberta na direção longitudinal, ou

dois contornos móveis em fase, estabelecendo uma variação linear de pressões ao longo de  $x$ . Para cavidades fechadas em  $x = L_x$ , ou com dois contornos móveis em oposição de fase, o limite  $\chi \rightarrow n$  resulta em um valor infinito, definindo um ponto crítico adicional ao problema.

As cavidades fechadas na direção transversal apresentam solução válida para  $n = 0$ , com expressões unidimensionais em  $x$ . Estes casos definem, além dos valores críticos associados ao problema bidimensional ( $n > 0$ ), ressonâncias relacionadas à cavidade unidimensional. Esta observação pode ser verificada na análise do Caso 3A, estudado neste capítulo. Neste tipo de problema as soluções longitudinais  $R_0$  são definidas por funções trigonométricas.

O parâmetro  $r$  exerce influência direta nas frequências críticas do problema, definindo o conjunto de modos associados. Nas cavidades com menores valores deste parâmetro predominam os modos transversais, ao passo que maiores valores de  $r$  implicam em uma maior seqüência de modos longitudinais.

A escolha da função de deslocamento  $\phi(y)$  pode resultar em simplificações da solução completa, conforme ilustrado na Tabela 3.1. Uma cavidade aberta na direção transversal, com  $\phi(y)$  definido por (3.54), resulta no caso mais simples a ser analisado, pois reduz a série ao índice  $n = j$ . A natureza da solução de pressões dinâmicas (para uma dada função de deslocamento) será importante no próximo capítulo, permitindo a construção e interpretação das soluções de frequências do problema acoplado.

## **4 - DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO PSEUDO-ACOPLADA**

### **4.1 - INTRODUÇÃO**

O objetivo desta série de estudos é avaliar a influência das pressões dinâmicas em sistemas com acoplamento acústico-estrutural. Uma abordagem direta consiste na solução das equações acopladas, envolvendo os dois domínios. Entretanto, uma estratégia alternativa pode ser estabelecida, onde a solução das pressões na interface é associada a um carregamento externo aplicado à estrutura.

A técnica de acoplamento inercial consiste exatamente na substituição do campo de pressões na interface por um conjunto de massas, que devem ser acrescentadas à estrutura ao longo de sua superfície de contato com o fluido. Este sistema equivalente deve ser capaz de representar os efeitos do acoplamento, eliminando a necessidade de solução de um sistema acoplado. A grande vantagem deste tipo de representação é a eliminação de uma etapa adicional do problema, que consiste na construção do domínio do fluido.

O problema de interação fluido-estrutura envolve a determinação da resposta destes dois subsistemas. Entretanto, deve-se ressaltar que estas soluções não são independentes. O campo de pressões produzido no fluido depende do movimento da estrutura, e este, por sua vez, depende das forças exercidas pelo fluido na interface entre os dois meios. No segundo capítulo foram estabelecidas soluções de pressões dinâmicas para um movimento arbitrário  $\phi(y)$  de uma parede flexível. O campo de pressões dinâmicas produzido por estas soluções ao longo da interface entre o fluido e a estrutura representa exatamente as ações que devem ser acrescentadas à estrutura, fornecendo assim os efeitos de interação entre os dois subsistemas. A combinação entre a solução analítica de pressões do fluido e a equação de movimento da estrutura, em um dado modo de vibração pré-estabelecido, permite o desenvolvimento de uma solução pseudo-acoplada, que incorpora os efeitos do fluido na estrutura e permite a solução das frequências acopladas do problema.

### **4.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O MODELO ESTRUTURAL**

O problema analisado consiste em uma viga bi-apoiada (embora as conclusões a serem obtidas sejam gerais para outras condições de contorno), ilustrada na Figura 4.1.

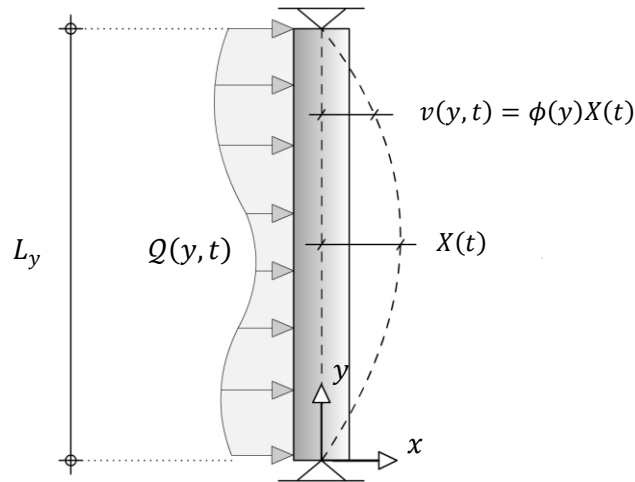


Figura 4.1 – Representação esquemática do modelo estrutural

A resposta dinâmica deste sistema pode ser representada por uma coordenada generalizada  $X(t)$ , tornando possível a obtenção dos parâmetros generalizados (massa, rigidez e força), para um dado modo de vibração, relacionado à função  $\phi(y)$ . Este tipo de solução será muito útil para a introdução dos efeitos do fluido, tendo em vista que as soluções desenvolvidas no segundo capítulo dependem da função de deslocamentos da interface.

Para o desenvolvimento matemático deste problema serão considerados: massa por unidade de comprimento  $\mu(y)$ , rigidez a flexão  $EI(y)$ , comprimento  $L_y$ , carregamento externo distribuído  $F(y, t)$  e largura unitária perpendicular ao plano  $xy$ . As deflexões serão representadas por  $v(y, t)$ , relacionadas a uma coordenada arbitrária  $X(t)$  e a uma função de deslocamento normalizada nesta posição, dada por  $\phi(y)$ . Portanto:

$$v(y, t) = \phi(y)X(t) \quad (4.1)$$

As forças resistentes desenvolvidas neste sistema durante o movimento são dadas por:

$$f_i(y, t) = \mu(y)\ddot{v}(y, t) = \mu(y)[\ddot{X} \phi(y)] \rightarrow \text{força de inércia} \quad (4.2)$$

$$m(y, t) = EI(y) \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} = EI(y) \left[ X(t) \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \right] \rightarrow \text{momentos resist. internos} \quad (4.3)$$

Desta forma, assume-se que apenas deformações de flexão irão ocorrer e que os momentos elásticos desenvolvidos serão proporcionais à curvatura  $\partial^2 v(y, t)/\partial y^2$ .

A equação de movimento do sistema pode ser obtida por meio da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, igualando o trabalho das forças internas ao trabalho das forças externas.

O deslocamento virtual ( $\delta v$ ) consistente com o deslocamento da estrutura ( $\phi$ ) é dado por:

$$\delta v = \phi(y)\delta X \quad (4.4)$$

onde  $\delta X$  corresponde a um deslocamento virtual arbitrário ao longo da coordenada generalizada (no caso da Figura 4.1, a posição  $y = L_y/2$ ).

O trabalho das forças externas exercido durante este deslocamento virtual é dado por:

$$W_e = \int_0^{L_y} Q(y, t) \delta v dy = \delta X \int_0^{L_y} Q(y, t)\phi(y) dy \quad (4.5)$$

O trabalho das forças internas (inércia e momentos) é dado por:

$$W_i = \int_0^{L_y} f_i(y, t) \delta v dy + \int_0^{L_y} m(y, t) \delta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \quad (4.6)$$

Lembrando que:

$$\delta v = \phi(y)\delta X \quad \rightarrow \quad \delta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \delta X \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.2), (4.3) e (4.7) em (4.6):

$$W_i = \int_0^{L_y} \mu(y)[\ddot{X} \phi(y)] \phi(y)\delta X dy + \int_0^{L_y} EI(y) \left[ X \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \right] \delta X \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} dy \quad (4.8)$$

A expressão acima pode ser simplificada, resultando em:

$$W_i = \ddot{X} \delta X \int_0^{L_y} \mu(y)[\phi(y)]^2 dy + X \delta X \int_0^{L_y} EI(y) \left[ \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \right]^2 dy \quad (4.9)$$



Igualando o trabalho externo ao trabalho interno e dividindo a expressão resultante pelo deslocamento virtual arbitrário  $\delta X$ :

$$\int_0^{L_y} Q(y, t) \phi(y) dy = \ddot{X} \int_0^{L_y} \mu(y) [\phi(y)]^2 dy + X \int_0^{L_y} EI(y) \left[ \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \right]^2 dy \quad (4.10)$$

Finalmente, introduzindo as seguintes notações:

$$\tilde{M} = \int_0^{L_y} \mu(y) [\phi(y)]^2 dy \quad (4.11)$$

$$\tilde{K} = \int_0^{L_y} EI(y) \left[ \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} \right]^2 dy \quad (4.12)$$

$$\tilde{F} = \int_0^{L_y} Q(y, t) \phi(y) dy \quad (4.13)$$

e substituindo-as na Equação (4.10):

$$\tilde{M} \ddot{X}(t) + \tilde{K} X(t) = \tilde{F}(t) \quad (4.14)$$

que representa a equação de equilíbrio dinâmico do sistema em termos da coordenada generalizada  $X(t)$ , onde  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K}$  e  $\tilde{F}$  correspondem, respectivamente, a: massa generalizada, rigidez generalizada e força generalizada. Deve-se ressaltar que a rigidez generalizada obtida para este sistema inclui apenas os efeitos das deformações de flexão. Efeitos adicionais podem ser introduzidos por meio da modificação deste parâmetro generalizado. O amortecimento também poderia ser acrescentado a esta estrutura, e neste caso seria mais conveniente expressá-lo por meio de uma razão de amortecimento ( $\xi$ ). Assim:

$$\tilde{C} = 2 \xi \tilde{M} \omega \quad (4.15)$$

### 4.3 - SOLUÇÃO ANALÍTICA SIMPLIFICADA DO SISTEMA ACOPLADO

A solução anterior é função de um carregamento externo. No caso de um sistema acoplado este carregamento é representado pela pressão hidrodinâmica na interface. Então:

$$Q(y, t) = p(0, y, t) \times 1 = P(0, y)e^{-i\omega t} \quad (4.16)$$

onde a função  $P(0, y)$  está relacionada ao tipo de cavidade estudada, com valores definidos no segundo capítulo. É importante lembrar que estas soluções foram definidas para um movimento harmônico do contorno vibrante, com aceleração dada por:

$$\ddot{u}(y, t) = \phi(y)\bar{A}e^{-i\omega t} \quad (4.17)$$

No caso em que o contorno vibrante corresponde à vibração da estrutura a seguinte relação é estabelecida:

$$\ddot{u}(y, t) = \ddot{v}(y, t) = \phi(y)\ddot{X}(t) \quad (4.18)$$

Então, de (4.17) e (4.18) resulta:

$$\ddot{X}(t) = \bar{A}e^{-i\omega t} \quad (4.19)$$

Substituindo (4.13) e (4.16) em (4.14):

$$\tilde{M}\ddot{X}(t) + \tilde{K}X(t) + e^{-i\omega t} \int_0^{L_y} P(0, y) \phi(y) dy = 0 \quad (4.20)$$

Na expressão acima a força generalizada foi posicionada no lado esquerdo da equação, pois fisicamente as pressões dinâmicas apresentam o mesmo sentido de atuação das forças de inércia e elástica. Esta equação pode ser reescrita com a utilização da relação (4.19).

Então:

$$\tilde{M}\ddot{X}(t) + \tilde{K}X(t) + \ddot{X}(t) \int_0^{L_y} \frac{P(0, y)}{\bar{A}} \phi(y) dy = 0 \quad (4.21)$$

que pode ser simplificada para:

$$\left[ \tilde{M} + \int_0^{L_y} \frac{P(0, y)}{\bar{A}} \phi(y) dy \right] \ddot{X}(t) + \tilde{K}X(t) = 0 \quad (4.22)$$

A Equação (4.22) representa uma vibração livre do modelo estrutural, com uma massa generalizada adicional produzida pela interação entre os domínios do fluido e da estrutura. Fisicamente isto significa que a estrutura em contato com o fluido apresenta uma parcela adicional de massa distribuída por unidade de comprimento, pois a expressão da massa generalizada pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{M} = \int_0^{L_y} \left\{ \mu(y) + \frac{P(0, y)}{\bar{A}\phi(y)} \right\} [\phi(y)]^2 dy \quad (4.23)$$

A Equação (4.22) pode ser simplificada com a inclusão de um termo de massa generalizada total, que corresponde à massa da estrutura e do fluido. Portanto:

$$\tilde{M}_{total} \ddot{X}(t) + \tilde{K}X(t) = 0 \quad (4.24)$$

Da expressão (4.19) pode-se concluir que:

$$X(t) = -\frac{\bar{A}e^{-i\omega t}}{\omega^2} \rightarrow \dot{X}(t) = -\omega^2 X(t) \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.24):

$$[\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}_{total}]X(t) = 0 \quad (4.26)$$

Para que a solução não seja trivial o termo entre colchetes da Equação (4.26) deverá ser nulo. Portanto:

$$\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}_{total} = 0 \quad (4.27)$$

A solução da expressão acima irá fornecer as frequências do problema acoplado. Deve-se observar que a rigidez generalizada depende da função  $\phi(y)$ . E a massa generalizada total é composta por duas parcelas: uma relativa a estrutura e outra relativa à massa do fluido. A parcela relacionada à estrutura depende da função  $\phi(y)$ . A parcela associada ao fluido é função de  $\phi(y)$  e  $\omega$ . Estes dois parâmetros representam incógnitas do problema, pois indicam, respectivamente: modo de vibração e frequência do problema acoplado. Desta

forma, o problema estabelece apenas uma equação e duas incógnitas. Uma solução simplificada pode ser obtida com a hipótese de modo de vibração no vácuo idêntico ao modo de vibração acoplado. Assim, assume-se que a presença do fluido não irá alterar os modos do problema desacoplado. Portanto, um determinado modo  $\phi_n(y)$  poderá ser introduzido em (4.27), e o problema poderá ser resolvido para todas as frequências acopladas relacionadas ao modo  $n$ . Esta solução simplificada será denominada pseudo-acoplada, com (4.27) estabelecendo a equação de frequências. Estes valores podem ser substituídos na expressão de  $\tilde{M}_{total}$ , definindo a equação de equilíbrio dinâmico do problema acoplado, que poderá ser resolvida para uma excitação arbitrária. Adicionalmente, é possível estabelecer o modo de vibração correspondente a cavidade por meio da substituição de  $\phi(y)$  e  $\omega$  em  $P(x, y)$ .

#### 4.4 - EQUAÇÃO DE FREQUÊNCIAS COM O MÉTODO PSEUDO-ACOPLADO

Neste item serão apresentados exemplos de aplicação do procedimento pseudo-acoplado a alguns dos casos estudados no segundo capítulo. Os resultados serão validados por meio de soluções obtidas via Métodos dos Elementos Finitos.

##### 4.4.1 - Caso 1A com fronteira governada por funções senoidais

Neste caso, considera-se uma cavidade aberta em todos os bordos. A solução de  $P(x, y)$  é dada pela Equação (2.91). Entretanto, uma solução reduzida, dada pela aplicação de modos desacoplados de uma viga bi-apoiada, é fornecida pela Equação (3.57). Na interface  $\xi_x = 0$  esta solução apresenta a seguinte forma:

$$P(0, \xi_y) = \frac{\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \text{sen}(j\pi \xi_y) \quad (4.28)$$

A massa generalizada do fluido será dada por:

$$\int_0^{L_y} \frac{P(0, \xi_y)}{\bar{A}} \phi(y) dy = \frac{\rho_f L_y}{\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \int_0^{L_y} \left[ \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy \quad (4.29)$$

que pode ser simplificada para:

$$\tilde{M}_{fluido} = \int_0^{L_y} \frac{P(0, \xi_y)}{\bar{A}} \phi(y) dy = \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \quad (4.30)$$

A Equação (4.30) representa a massa generalizada do fluido de uma cavidade retangular aberta em todos os bordos, para uma função  $\phi(y) = \text{sen}(j\pi y/L_y)$  correspondente a um determinado modo  $j$  de uma viga bi-apoiada no vácuo. Esta expressão pode ser acrescentada à massa generalizada desacoplada, resultando em uma massa total dada por:

$$\tilde{M}_{total} = \tilde{M} + \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \quad (4.31)$$

A expressão acima pode ser substituída em (4.27), resultando em:

$$\tilde{K} - \omega^2 \left[ \tilde{M} + \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \right] = 0 \quad (4.32)$$

onde  $\chi$  é dado por:

$$\chi = \frac{\omega L_y}{\pi c} \quad (4.33)$$

Portanto, a solução de (4.32) irá fornecer os valores das freqüências acopladas para um dado modo  $j$ . Os parâmetros generalizados  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$  deste problema são definidos por:

$$\tilde{K} = EI \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^4 \int_0^{L_y} \left[ \cos \left( \frac{j\pi y}{L_y} \right) \right]^2 dy = EI \frac{(j\pi)^4}{2L_y^3} \quad (4.34)$$

$$\tilde{M} = \mu \int_0^{L_y} \left[ \text{sen} \left( \frac{j\pi y}{L_y} \right) \right]^2 dy = \frac{\mu L_y}{2} \quad (4.35)$$

Substituindo (4.34) e (4.35) em (4.32):

$$EI \frac{(j\pi)^4}{2L_y^3} - \omega^2 \left[ \frac{\mu L_y}{2} + \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \right] = 0 \quad (4.36)$$

que representa a equação de frequências do problema acoplado. Para o caso desacoplado o segundo termo entre colchetes é nulo, e a solução é dada por:

$$\omega_{v\u00e1cuo}^j = (j\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu L_y^4}} \quad (4.37)$$

Para o caso acoplado a solu\u00e7\u00e3o envolve maior dificuldade, pois o termo entre colchetes \u00e9 fun\u00e7\u00e3o de  $\chi$ , que por sua vez \u00e9 fun\u00e7\u00e3o de  $\omega$ . Entretanto, pode-se observar uma situa\u00e7\u00e3o espec\u00edfica onde  $\chi < j$ . Neste caso a Equa\u00e7\u00e3o (4.36) assume a seguinte forma:

$$EI \frac{(j\pi)^4}{2L_y^3} - \omega^2 \left[ \frac{\mu L_y}{2} + \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tanh(\pi r \sqrt{j^2 - \chi^2})}{\sqrt{j^2 - \chi^2}} \right] = 0 \quad p/ \chi < j \quad (4.38)$$

que indica uma massa generalizada do fluido governada por uma fun\u00e7\u00e3o hiperb\u00f3lica.

\u00c9 interessante verificar a varia\u00e7\u00e3o do termo de massa generalizada do fluido da Equa\u00e7\u00e3o (4.30) em fun\u00e7\u00e3o do par\u00e2metro  $\chi$ . Esta express\u00e3o pode ser representada por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} f(\chi, j, r) \quad (4.39)$$

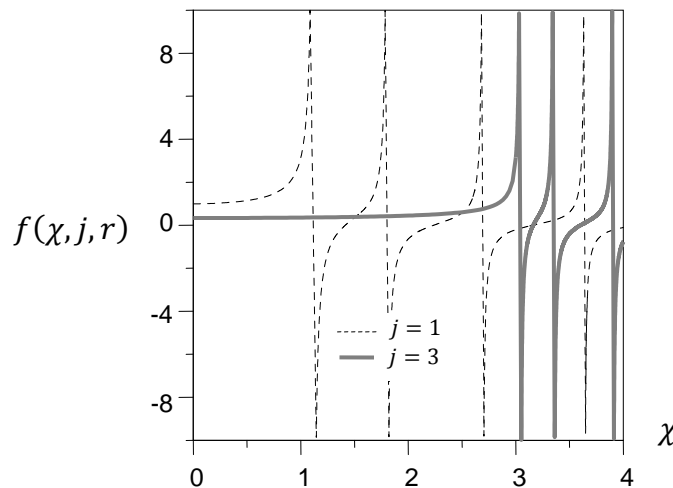


Figura 4.2 – Varia\u00e7\u00e3o de  $f(\chi, j, r)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$ , para  $j = 1$  e  $3$

A Figura 4.2 ilustra a varia\u00e7\u00e3o de  $f(\chi, j, r)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$ , para  $j = 1$  e  $3$ . A an\u00e1lise deste gr\u00e1fico permite concluir que o comportamento da massa generalizada \u00e9

hiperbólico e sem pontos críticos durante o intervalo em que  $\chi < j$ . Deste ponto em diante surgem pontos críticos que levam o valor da massa generalizada do fluido ao infinito (devido à natureza trigonométrica da solução). Trata-se de uma conclusão semelhante à obtida para as pressões dinâmicas no capítulo anterior. É interessante notar que para  $\chi \ll j$  o valor da função é praticamente constante, tendo valor definido em  $\chi = 0$ .

Os pontos críticos de (4.39) são obtidos com a investigação da função  $f(\chi, j, r)$ . Neste caso correspondem aos valores estabelecidos por (3.59), com  $r = 1$ . Este resultado já era esperado, tendo em vista que a massa generalizada crítica está diretamente relacionada ao valor crítico de pressões dinâmicas. Então:

$$\chi_{crítico} = \sqrt{\left(\frac{m}{2r}\right)^2 + j^2} \quad p/ \quad m = 1,3,5 \dots \quad (4.40)$$

O limite em que  $\chi \rightarrow 0$  estabelece:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \tilde{M}_{fluido} = \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tanh(\pi r j)}{j} \quad (4.41)$$

que indica uma massa generalizada independente de  $\omega$ . Neste caso específico é possível estabelecer valores para a função  $f(\chi, j, r)$ . A Tabela 4.1 ilustra estes resultados, com  $r = 1$ . Pode-se observar que modos mais altos mobilizam uma menor parcela de massa generalizada do fluido.

Tabela 4.1 – Valores da função  $f(\chi, j, r)$ , com  $r = 1$ , no limite onde  $\chi \rightarrow 0$

	$j$				
	1	2	3	4	5
$\frac{\tanh(\pi j)}{j}$	0.9963	0.5000	0.3333	0.2500	0.2000

Por conveniência pode-se representar a Equação (4.36) em função de  $\chi$ . Então:

$$EI \frac{(j\pi)^4}{2L_y^3} - \left(\frac{\chi\pi c}{L_y}\right)^2 \left[ \frac{\mu L_y}{2} + \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \right] = 0 \quad (4.42)$$

Também é possível reescrever esta última expressão em termos das frequências da cavidade desacoplada e da estrutura no vácuo. Desta forma:

$$\frac{\mu L_y}{2} \left\{ (\omega_{v\u00e1cuo}^j)^2 - (\chi \omega_{cav.}^1)^2 \left[ 1 + \frac{\rho_f L_y}{\mu \pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \right] \right\} = 0 \quad (4.43)$$

onde  $\omega_{v\u00e1cuo}^j$  é definido por (4.37) e  $\omega_{cav.}^1 = \pi c / L_y$ , que corresponde a primeira frequência transversal da cavidade desacoplada. As soluções das frequências acopladas de (4.43) serão dadas quando o termo entre chaves for nulo. Portanto:

$$(\mathfrak{f}_1)^2 - \chi^2 \left[ 1 + \frac{\mathfrak{f}_2}{\pi} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \right] = J1 - J2 = 0 \quad (4.44)$$

onde foram definidos os seguintes par\u00e2metros adimensionais:  $\mathfrak{f}_1 = \omega_{v\u00e1cuo}^j / \omega_{cav.}^1$  e  $\mathfrak{f}_2 = \rho_f L_y / \mu$ . O termo  $\mu$  pode ser reescrito em termos da densidade da estrutura ( $\rho_s$ ) e de sua espessura ( $F$ ), resultando em:

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} = \frac{\bar{\rho}}{r} \quad (4.45)$$

onde  $\bar{\rho} = \rho_f / \rho_s$  e  $r = F / L_y$ . Portanto, as solu\u00e7\u00f5es do problema acoplado s\u00e3o definidas em fun\u00e7\u00e3o de quatro par\u00e2metros: a frequ\u00eancia desacoplada do modo correspondente, a primeira frequ\u00eancia transversal da cavidade, a rela\u00e7\u00e3o entre as densidades do fluido e da estrutura, e a rela\u00e7\u00e3o entre espessura e altura da estrutura (\u00edndice de esbeltez).

Um estudo param\u00e9trico da Equa\u00e7\u00e3o (4.44), com  $r = 1$ , \u00e9 apresentado na Figura 4.3, para o valor de  $j = 1$ . Nestes gr\u00e1ficos as curvas representam a fun\u00e7\u00e3o  $J2$  associada a um valor de  $\mathfrak{f}_2$ . As solu\u00e7\u00f5es do problema s\u00e3o estabelecidas no ponto de encontro destas curvas com uma reta horizontal de valor constante definida por  $J1 = (\mathfrak{f}_1)^2$ . Uma reta de valor  $J1 = 4$  encontra-se representada nesta figura, servindo de refer\u00eancia para o estudo das solu\u00e7\u00f5es acopladas.

A an\u00e1lise da Figura 4.3 indica que o incremento do termo  $\mathfrak{f}_2$  resulta em um distanciamento da fun\u00e7\u00e3o  $J2$  em rela\u00e7\u00e3o \u00e0s ass\u00edntotas verticais. Isto implica em frequ\u00eancias acopladas com maior diferen\u00e7a relativa em rela\u00e7\u00e3o aos valores cr\u00edticos do problema. O aumento deste



parâmetro ocorre quando a densidade relativa entre o fluido e a estrutura aumenta, ou quando a relação entre espessura e altura diminui. Assim, é possível concluir que o problema analisado irá apresentar frequências mais próximas ou mais distantes dos valores críticos em função destes parâmetros. Com relação à Região A, pode-se perceber que um valor constante de  $f_1$  irá produzir menores soluções de  $\chi$  de acordo com o aumento de  $f_2$ . Ou seja: menores frequências acopladas irão ocorrer quando a densidade do fluido aumentar, ou quando a estrutura se tornar mais esbelta. Observa-se que uma linha horizontal arbitrária ( $J1 = 4$ , por exemplo) irá fornecer infinitas soluções, interceptando as curvas  $J2$  mais de uma vez.

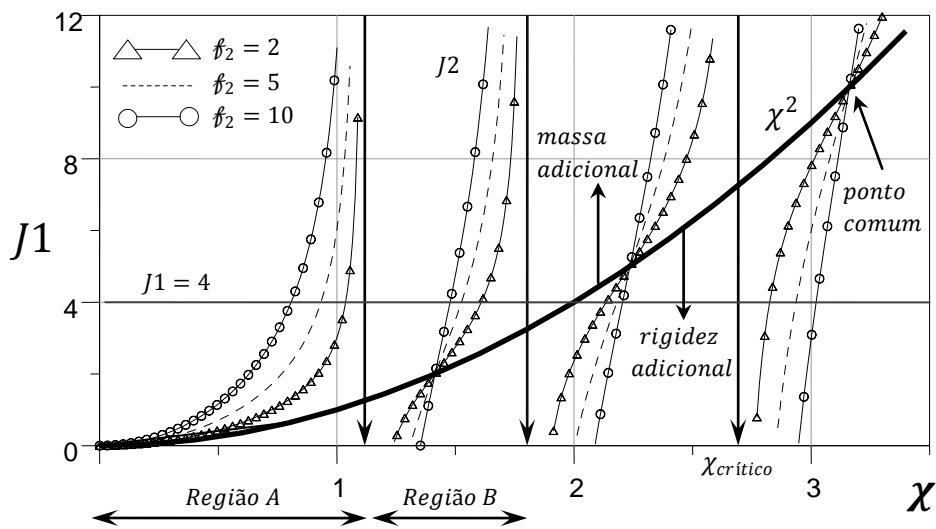


Figura 4.3 – Estudo paramétrico da equação de frequências para  $j = 1$  e  $r = 1$

Uma característica interessante apresentada na Figura 4.3 é a presença de pontos de interseção das curvas  $J2$ , definidos como ponto comum. Estes pontos ocorrem no encontro com a função  $(f_1)^2 = \chi^2$ . Esta condição implica em:

$$\left(\frac{\omega_{v\u00e1cuo}^j}{\omega_{cav.}^1}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_{cav.}^1}\right)^2 \quad \therefore \quad \omega = \omega_{v\u00e1cuo}^j \quad (4.46)$$

Portanto, (4.46) indica que os pontos sobre a curva  $\chi^2$  apresentam frequ\u00eancia acoplada igual \u00e0 frequ\u00eancia desacoplada da estrutura. Trata-se de um fen\u00f4meno interessante, pois neste caso a estrutura se comporta como se n\u00e3o houvesse a presen\u00e7a da cavidade. A regi\u00e3o localizada acima desta curva representa uma zona de frequ\u00eancias acopladas menores que as frequ\u00eancias da estrutura no v\u00e1cuo (massa adicional). A regi\u00e3o abaixo indica exatamente o

contrário (rigidez adicional). Na Região *A* todas as soluções são típicas de massa adicional, com frequências reduzidas em relação à frequência da estrutura no vácuo. Deste ponto em diante o problema irá apresentar características da Região *B*, podendo ocorrer mais soluções com frequências menores (caso onde  $J1 = 4$ ), ou ter início uma série de soluções com frequências maiores que a correspondente ao modo no vácuo (caso onde  $J1 = 1$ ). Entretanto, este gráfico indica que as frequências mais altas sempre se farão presentes, tendo um início retardado dependendo do valor de  $(\beta_1)^2$ . A identificação dos pontos indicados em (4.46) é obtida com a substituição de  $(\beta_1)^2 = \chi^2$  em (4.44). Portanto:

$$-\frac{\beta_2}{\pi} \cdot \frac{\tan(\pi\sqrt{\chi^2 - j^2})}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} = 0 \quad (4.47)$$

Esta última expressão apresenta solução dada por:

$$\pi\sqrt{\chi^2 - j^2} = \bar{m}\pi \quad p/ \bar{m} = 1,2,3 \dots \quad (4.48)$$

Portanto:

$$\chi = \sqrt{\bar{m}^2 + j^2} \quad p/ \bar{m} = 1,2,3 \dots \quad (4.49)$$

Desta forma, pode-se concluir que a expressão acima é independente de  $\beta_2$ , correspondendo exatamente ao que é observado na Figura 4.3. A solução correspondente a  $J1$  quando a condição (4.46) é satisfeita é dada por:

$$J1 = \chi^2 \quad \therefore \quad J1 = \bar{m}^2 + j^2 \quad (4.50)$$

Portanto, problemas definidos pela condição (4.50) irão apresentar uma frequência acoplada de valor igual ao da estrutura no vácuo. Soluções deste tipo irão ocorrer sempre na Região *B*.

As Figuras 4.4 e 4.5 ilustram, respectivamente, o estudo paramétrico da Equação (4.44) para  $j = 2$  e  $j = 3$ , com  $r = 1$ . Deve-se observar que em ambos os casos a Região *A* é ampliada até as proximidades de  $\chi = j$ . As observações realizadas para  $j = 1$  continuam válidas nestes diagramas.

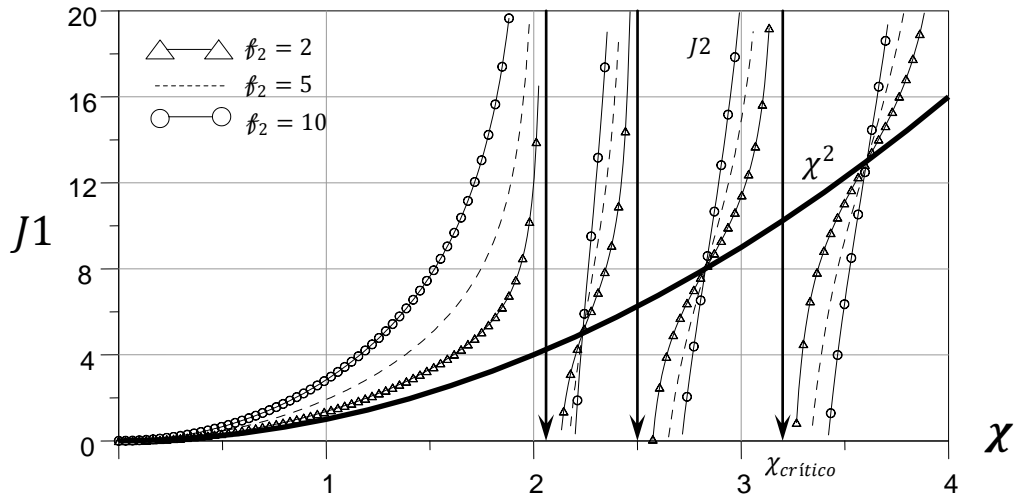


Figura 4.4 – Estudo paramétrico da equação de frequências para  $j = 2$  e  $r = 1$

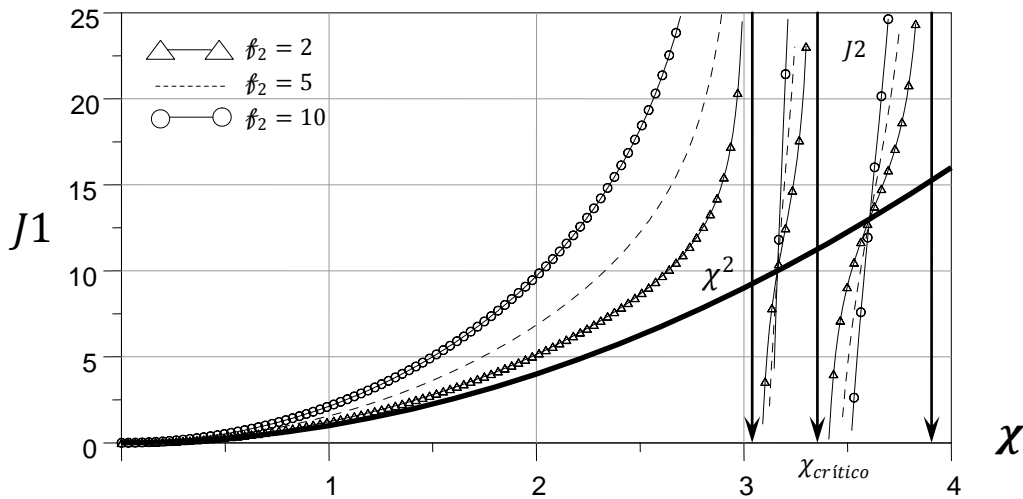


Figura 4.5 – Estudo paramétrico da equação de frequências para  $j = 3$  e  $r = 1$

Os ábacos apresentados nas figuras anteriores estão relacionados a cavidades quadradas, onde  $r = 1$ . Os efeitos deste parâmetro encontram-se associados aos valores críticos definidos por (3.59). Um aumento deste termo resulta em uma maior quantidade de pontos críticos, definindo, em um mesmo intervalo, maior quantidade de Regiões B. A primeira ressonância também é influenciada por este parâmetro, definindo a extensão horizontal da Região A. Uma diminuição no valor de  $r$  resulta em um aumento da Região A e em uma menor frequência de Regiões B.

A Equação (4.41) pode ser avaliada para valores de  $j$  e  $r$ . A Tabela 4.2 ilustra estes resultados. Observa-se que valores reduzidos de massa generalizada são obtidos para  $r < 1$  (cavidades curtas). Entretanto, estes efeitos são mais intensos para menores valores de  $j$ ,

com pouca influência em maiores valores deste termo. Cavidades com  $r \geq 1$  apresentam massa generalizada praticamente constante para um dado valor de  $j$ .

Tabela 4.2 – Valores da função  $f(\chi, j, r)$  no limite onde  $\chi \rightarrow 0$

	$j$				
	1	2	3	4	5
$r = \frac{1}{4}$	0.6558	0.4586	0.3274	0.2491	0.1998
$r = \frac{1}{2}$	0.9172	0.4981	0.3333	0.2500	0.2000
$r \geq 1$	0.9963	0.5000	0.3333	0.2500	0.2000

Nota: para  $r \geq 1$  a função pode ser aproximada por  $1/j$

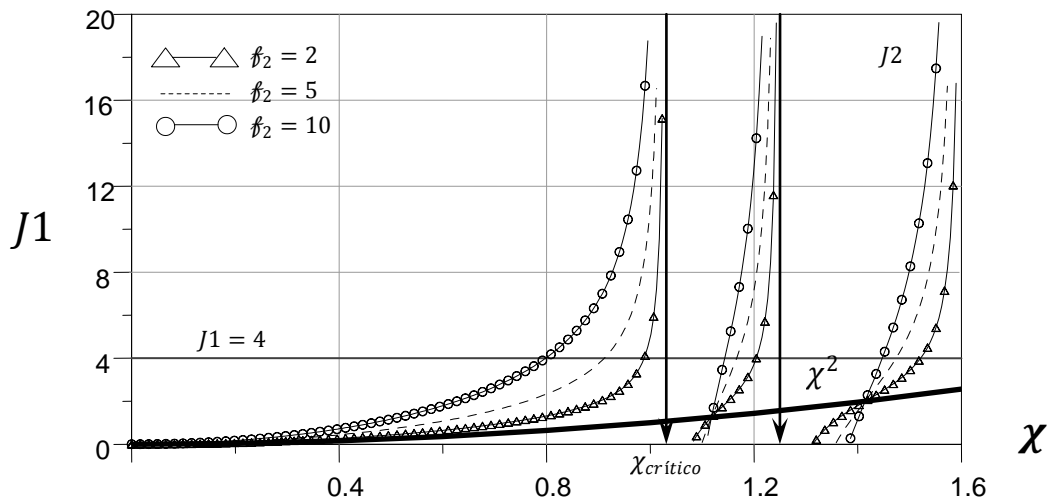


Figura 4.6 – Estudo paramétrico da equação de frequências para  $j = 1$  e  $r = 2$

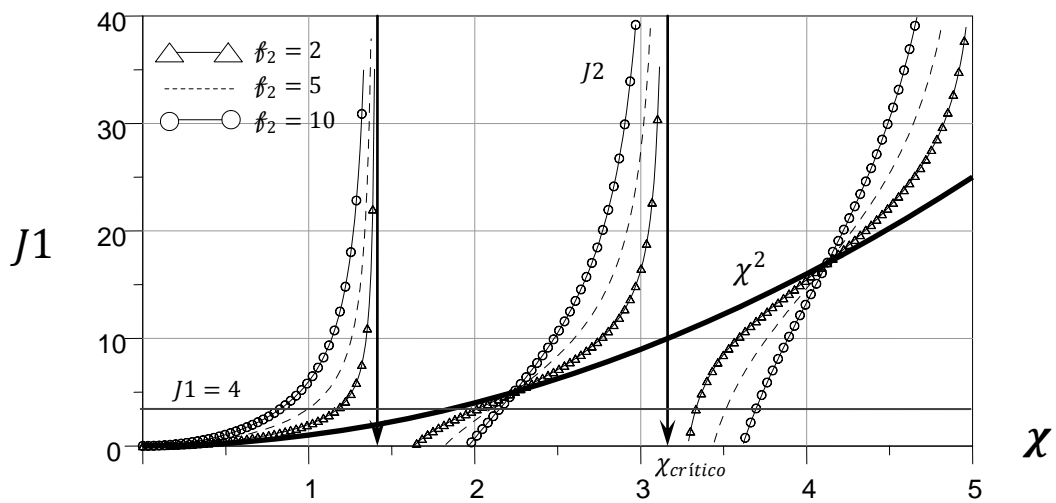


Figura 4.7 – Estudo paramétrico da equação de frequências para  $j = 1$  e  $r = 1/2$

As Figuras 4.6 e 4.7 ilustram, respectivamente, os efeitos de  $r$  nos ábacos paramétricos para  $j = 1$ . A comparação com a Figura 4.3 indica uma maior frequência de Regiões  $B$  para  $r = 2$ . O oposto ocorre para  $r = 1/2$ , com menor frequência e regiões deste tipo deslocadas para valores maiores de  $\chi$ .

#### 4.4.1.1 - Solução exata da equação de frequências

Uma solução exata para este problema foi apresentada por Shin e Chargin (1983), que combinaram as equações diferenciais da viga e do campo acústico, com as pressões dinâmicas associadas a forças externas na interface, para construção de uma equação de frequências. Procedimento semelhante será apresentado no Capítulo 5. A expressão desenvolvida por estes autores é dada por:

$$\omega_j^2 \left[ \mu + \frac{\rho_f \tanh(\hat{\alpha}_j L_x)}{\hat{\alpha}_j} \right] = EI \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^4 \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (4.51)$$

onde:

$$\hat{\alpha}_j = \sqrt{\left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 - \left( \frac{\omega_j}{c} \right)^2} \quad (4.52)$$

A manipulação algébrica de (4.36) resulta em uma expressão idêntica a (4.51). Esta observação indica que a equação de frequências do método pseudo-acoplado é exata no Caso 1A com fronteira governada por funções senoidais. Portanto, a hipótese de modo de vibração no vácuo idêntico ao modo de vibração acoplado é válida neste tipo de problema.

#### 4.4.2 - Caso 3A com fronteira governada por funções senoidais

Neste caso, a cavidade apresenta as seguintes condições de contorno: fronteira móvel e contorno aberto na direção longitudinal, e ambos os contornos fechados na direção transversal. A solução de pressões dinâmicas é dada pela soma das expressões (3.74) e (3.75). Na interface ( $\xi_x = 0$ ) estas equações são definidas por:

$$P_0(0) = -\frac{\rho_f \bar{A} L_y}{j\pi^2} \frac{\tan(\pi r \chi) [\cos(j\pi) - 1]}{\chi} \quad n = 0 \quad (4.53)$$

$$P_n(0, \xi_y) = \frac{2\rho_f \bar{A} L_y}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan[\pi r \sqrt{\chi^2 - n^2}]}{\sqrt{\chi^2 - n^2}} \cdot \frac{j[1 - \cos(j\pi)\cos(n\pi)]}{(j^2 - n^2)} \cos(n\pi \xi_y) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.54)$$

Assim, a pressão na interface será representada por:

$$P(0, \xi_y) = P_0(0) + P_n(0, \xi_y) \quad (4.55)$$

e a massa generalizada produzida pelo fluido será definida por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \int_0^{L_y} \frac{P_0(0)}{\bar{A}} \phi(y) dy + \int_0^{L_y} \frac{P_n(0, \xi_y)}{\bar{A}} \phi(y) dy = \tilde{M}_{fluido 1} + \tilde{M}_{fluido 2} \quad (4.56)$$

Esta última expressão pode ser avaliada com a utilização das propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno. Então, substituindo (4.53) e (4.54) em (4.56):

$$\tilde{M}_{fluido 1} = \frac{\rho_f L_y^2}{\pi^3} \cdot \frac{\tan(\pi r \chi)}{\chi} \cdot \frac{[\cos(j\pi) - 1]^2}{j^2} \quad (4.57)$$

$$\tilde{M}_{fluido 2} = \frac{2\rho_f L_y^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - n^2})}{\sqrt{\chi^2 - n^2}} \cdot \left[ \frac{j[1 - \cos(j\pi)\cos(n\pi)]}{(j^2 - n^2)} \right]^2 \quad (4.58)$$

Tabela 4.3 – Características dos termos de massa generalizada do fluido em função de  $j$

<i>modo associado</i>	$n$	$\tilde{M}_{fluido 1}$	$\tilde{M}_{fluido 2}$
$j$ par	1,3,5, ...	nulo	não-nulo
$j$ ímpar	2,4,6, ...	não-nulo	não-nulo

A Equação (4.56) indica a presença de dois termos de massa generalizada. Deve-se observar que as conclusões obtidas para as pressões dinâmicas permanecem válidas. Ou seja: quando  $j$  for um número par, a expressão (4.57) será nula. Neste caso, (4.58) será representada apenas por índices  $n$  de valores ímpares. Quando  $j$  for um número ímpar, a

massa generalizada será composta pelas duas parcelas, com a expressão (4.58) contendo índices  $n$  de valores pares. Estas conclusões permitem dividir a massa generalizada do fluido em duas categorias, ilustradas na Tabela 4.3.

É interessante verificar a variação do termo de massa generalizada do fluido da Equação (4.56) em função do parâmetro  $\chi$ . Esta expressão pode ser representada por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \frac{\rho_f L_y^2}{\pi^3} f(\chi, j, r, n) \quad (4.59)$$

A Figura 4.8 ilustra a variação de  $f(\chi, j, r, n)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$ , para  $j = 1$  e 3. A Figura 4.9 apresenta os resultados obtidos para  $j = 2$  e 4.

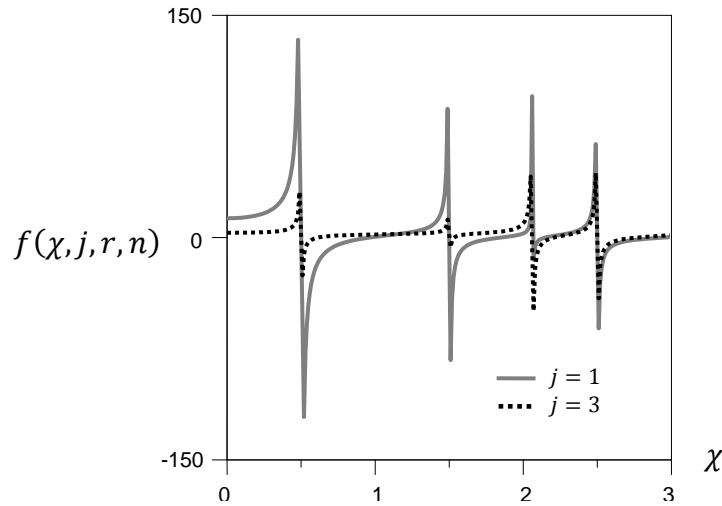


Figura 4.8 – Variação de  $f(\chi, j, r, n)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$ , para  $j = 1$  e 3

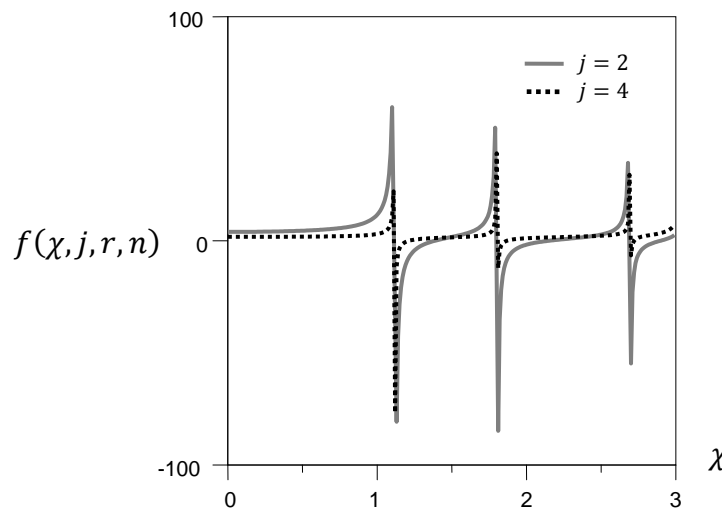


Figura 4.9 – Variação de  $f(\chi, j, r, n)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$ , para  $j = 2$  e 4

A análise da Figura 4.8 indica ressonâncias idênticas para ambos os valores de  $j$ . O mesmo ocorre na Figura 4.9. Nos dois casos os pontos críticos são definidos por (3.76). Valores ímpares de  $j$  estão associados a  $n = 0, 2, 4 \dots$ . Para valores pares de  $j$  apenas os índices  $n$  ímpares produzem soluções não triviais. Esta observação explica a diferença entre as ressonâncias encontradas nestas duas figuras.

De forma semelhante ao caso anterior, uma equação de frequências também é definida neste problema, sendo função dos parâmetros adimensionais  $f_1$  e  $f_2$ . Então:

$$(f_1)^2 - \chi^2 \left[ 1 + \frac{f_2}{\pi^3} \cdot \mathcal{M} \right] = J_1 - J_2 = 0 \quad (4.60)$$

onde:

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi^3}{\rho_f L_y^2} \tilde{M}_{fluido} = \frac{2\pi^3}{\rho_f L_y^2} (\tilde{M}_{fluido\ 1} + \tilde{M}_{fluido\ 2}) \quad ; \quad \omega = \frac{\chi\pi c}{L_y} \quad (4.61)$$

A expressão (4.60) apresenta uma configuração similar a obtida em (4.44), definindo propriedades semelhantes, tais como: regiões de massa adicional e rigidez adicional, além de pontos comuns, onde as frequências acopladas são iguais aos valores associados a estrutura no vácuo. As principais diferenças em relação a uma cavidade totalmente aberta (Caso 1A) incluem: a presença da série (que não é eliminada de  $\mathcal{M}$ ) e o índice  $n = 0$ , que produz solução válida neste tipo de problema. Conforme foi demonstrado em (3.76), os valores críticos deste caso estão associados apenas a natureza de  $j$  (par ou ímpar). Assim, os limites das Regiões  $A$  e  $B$  serão os mesmos para valores pares de  $j$ , e incluem valores de  $n = 1, 3, 5 \dots$ . Valores ímpares deste parâmetro resultam em valores críticos que incluem os índices  $n = 0, 2, 4 \dots$ . A Tabela 3.13 ilustra as ressonâncias e as configurações de pressões associadas neste caso. O fenômeno de ressonâncias coincidentes para diferentes valores de  $j$  será abordado mais adiante e está relacionado a formação de modos compostos, que incluem a combinação de dois ou mais valores de  $j$ .

#### 4.4.3 - Caso 1C com fronteiras governadas por funções senoidais

Neste caso, a cavidade apresenta as seguintes condições de contorno: duas fronteiras móveis na direção longitudinal e ambos os contornos abertos na direção transversal. A



solução de pressões dinâmicas é obtida com o auxílio da Tabela 2.7. Assim, de acordo com (2.257) a solução na interface ( $\xi_x = 0$ ) será definida por:

$$P(0, \xi_y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - n^2}} \left\{ \frac{I_{\phi_2}}{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - n^2})} - \frac{I_{\phi_1}}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - n^2})} \right\} \text{sen}(n\pi \xi_y) \quad (4.62)$$

onde  $\chi = \omega L_y / \pi c$ . Os termos  $I_{\phi_1}$  e  $I_{\phi_2}$  são dados por:

$$I_{\phi_1} = \int_0^{L_y} \phi_1(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad ; \quad I_{\phi_2} = \int_0^{L_y} \phi_2(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (4.63)$$

A aplicação de funções senoidais em (4.63), definidas por (3.54), pode ser realizada de duas maneiras distintas. A primeira, considerando deslocamentos em fase. Ou seja:  $\phi_1 = \phi_2$ . Então:

$$P(0, \xi_y)_{fase} = \frac{\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \left\{ \frac{1}{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} - \frac{1}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} \right\} \text{sen}(j\pi \xi_y) \quad (4.64)$$

Para deslocamentos em oposição de fase  $\phi_1 = -\phi_2$ . Então:

$$P(0, \xi_y)_{opos.} = \frac{\rho_f \bar{A} L_y}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \left\{ \frac{1}{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} + \frac{1}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} \right\} \text{sen}(j\pi \xi_y) \quad (4.65)$$

Verifica-se que a série é eliminada nas expressões (4.64) e (4.65) reduzindo o problema ao índice  $n = j$ . A massa generalizada do fluido relacionada a estrutura na posição 1 é definida por:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{fluido} &= \int_0^{L_y} \frac{P(0, \xi_y)}{\bar{A}} \phi_1(y) dy \\ &= \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \left\{ \frac{\pm 1}{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} - \frac{1}{\text{tan}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} \right\}\end{aligned}\quad (4.66)$$

onde sinal positivo deverá ser utilizado para os modos em fase e o sinal negativo para os modos em oposição de fase. Esta última expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{M}_{fluido} = \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \left\{ \frac{\pm 1 - \cos(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} \right\} = \frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} f(\chi, j, r) \quad (4.67)$$

Os pontos críticos de (4.67) são obtidos com a investigação da função  $f(\chi, j, r)$ , que pode ser simplificada para:

$$f(\chi, j, r) = \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \left\{ \frac{\text{sen}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})}{\cos(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2}) \pm 1} \right\} \quad (4.68)$$

Valores infinitos de massa generalizada ocorrem quando o denominador do termo entre chaves se aproxima de zero. Então:

$$\chi_{crítico} = \sqrt{\left(\frac{m}{r}\right)^2 + j^2} \begin{cases} m = 1,3,5 \dots & \text{fase} \\ m = 2,4,6 \dots & \text{oposição de fase} \end{cases} \quad (4.69)$$

Adicionalmente, a função  $f(\chi, j, r)$  admite os seguintes limites quando  $\chi \rightarrow j$ :

$$\lim_{\chi \rightarrow j} f(\chi, j, r) = \begin{cases} \frac{\pi r}{2} & \text{fase} \\ \pm \infty & \text{oposição de fase} \end{cases} \quad (4.70)$$

Portanto, um ponto crítico extra é definido para os deslocamentos em oposição de fase, ocorrendo quando  $\chi \rightarrow j$ . Esta ressonância também se faz presente no caso onde  $I_{\phi_2} = 0$ , indicando as semelhanças existentes entre a solução em oposição de fase e uma cavidade fechada em  $S_2$ . Nesta situação específica, a Equação (4.66) fica reduzida a:

$$\tilde{M}_{fluido} = \int_0^{L_y} \frac{P(0, \xi_y)}{\bar{A}} \phi_1(y) dy = -\frac{\rho_f L_y^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - j^2}} \frac{1}{\text{tan}(\pi r \sqrt{\chi^2 - j^2})} \quad (4.71)$$

Um estudo da expressão (4.68) é apresentado nas Figuras 4.10 e 4.11. Verifica-se que as ressonâncias são distintas para os modos em fase e oposição de fase, com este último caso apresentando uma ressonância adicional quando  $\chi \rightarrow j$ .

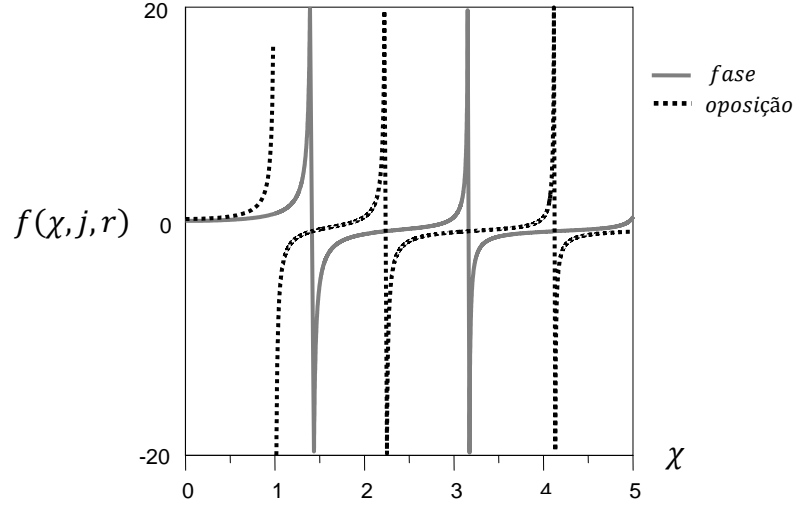


Figura 4.10 – Variação de  $f(\chi, j, r)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$  e  $j = 1$

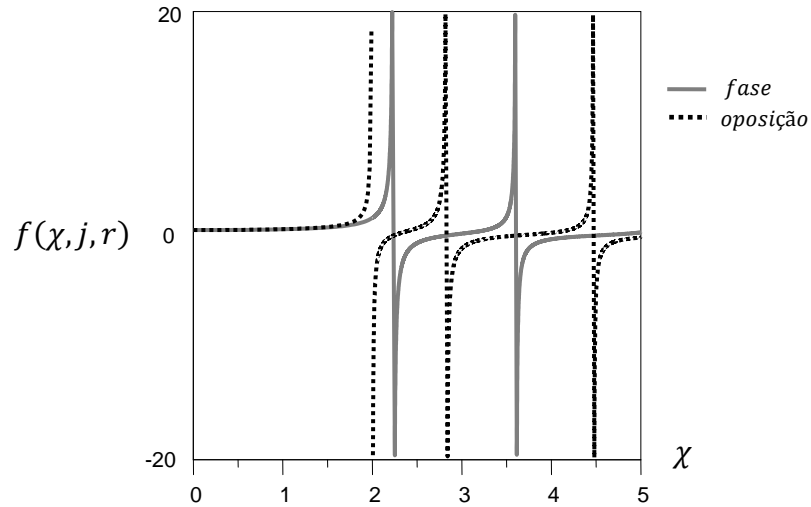


Figura 4.11 – Variação de  $f(\chi, j, r)$  ao longo de  $\chi$ , com  $r = 1$  e  $j = 2$

Uma equação de frequências também é definida neste problema, sendo função dos parâmetros adimensionais  $f_1$  e  $f_2$ . Então:

$$(f_1)^2 - \chi^2 \left[ 1 + \frac{f_2}{\pi} f(\chi, j, r) \right] = J_1 - J_2 = 0 \quad (4.72)$$

onde o parâmetro  $f(\chi, j, r)$  é dado por (4.68) e  $\omega = \chi\pi c/L_y$ .

As principais diferenças desta última expressão em relação ao caso de uma cavidade totalmente aberta (Caso 1A) incluem: a presença de soluções em fase e oposição de fase, e a definição de dois conjuntos de valores críticos, que para um mesmo  $j$  são distintos de acordo com o movimento relativo das paredes móveis.

#### 4.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO PSEUDO-ACOPLADO

Este item apresenta diversos exemplos onde as equações de frequências anteriormente desenvolvidas são utilizadas para a solução e estudo dos valores próprios do problema acoplado. Valores de referência, obtidos em um modelo de elementos finitos, são confrontados com as soluções analíticas propostas, estabelecendo os limites de validade do procedimento simplificado. Esta comparação é necessária, pois a hipótese básica do Método Pseudo-Acoplado corresponde a deformadas modais da estrutura inalteradas pela presença do fluido. Entretanto, numerosos estudos indicam que esta hipótese nem sempre é válida. Assim, são apresentados a seguir exemplos de análise que permitem a avaliação das limitações do procedimento Pseudo-Acoplado.

##### 4.5.1 - Modelo numérico analisado

As análises em elementos finitos, obtidas com o auxílio do software ANSYS v. 11, foram conduzidas em uma cavidade bidimensional quadrada, discretizada com quatrocentos ( $20 \times 20$ ) elementos acústicos planos de quatro nós (Fluid 29). A estrutura foi discretizada com vinte elementos de viga (Beam 3) em  $S1$ , ou em  $S1$  e  $S2$ , com condições de contorno relacionadas a uma estrutura bi-apoiada. A Figura 4.12 ilustra a representação esquemática da cavidade e da estrutura. As propriedades geométricas e dos materiais envolvidos são indicadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Propriedades geométricas e dos materiais utilizados no modelo

<i>fluido</i>		<i>estrutura</i>	
Densidade ( $\rho_f$ )	1000 $kg/m^3$	Módulo de Elasticidade ( $E$ )	<i>definido no caso</i>
Velocidade do som ( $c$ )	1500 $m/s$	Densidade ( $\rho_s$ )	<i>definido no caso</i>
$L_x$	10 $m$	Espessura ( $F$ )	1 $m$
$L_y$	10 $m$		

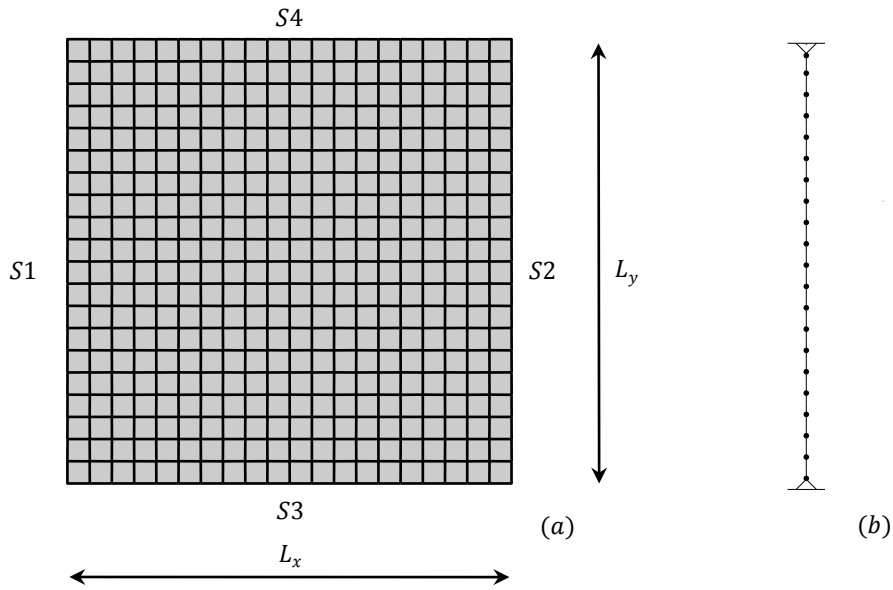


Figura 4.12 – Representação esquemática da cavidade (a) e da estrutura (b)

#### 4.5.2 - Análise 01 (Caso 1A)

Neste caso, considera-se uma cavidade aberta, com uma viga bi-apoiada em S1. A equação de freqüências é indicada em (4.44). O módulo de elasticidade e a densidade são definidos por:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  e  $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ . Os parâmetros  $f_1$  e  $f_2$  são dados por:

$$f_1 = \frac{\omega_{v\u00e1cuo}^j}{\omega_{cav.}^1} \quad (4.73)$$

$$f_2 = \frac{1000 \times 10}{7800 \times 1} \cong 1.28 \quad (4.74)$$

Portanto, as equações acima indicam que o parâmetro  $f_2$  é constante, enquanto o parâmetro  $f_1$  depende de  $j$ , que está associado ao modo de vibração da estrutura. Os três primeiros modos da estrutura no vácuo apresentam as seguintes freqüências:

$$\omega_{v\u00e1cuo}^1 \cong 147.83 \text{ rad/s}; \omega_{v\u00e1cuo}^2 \cong 591.33 \text{ rad/s}; \omega_{v\u00e1cuo}^3 \cong 1330.50 \text{ rad/s} \quad (4.75)$$

A primeira freqüência transversal da cavidade desacoplada é dada por:

$$\omega_{cav.}^1 = \pi c / L_y \cong 471.24 \text{ rad/s} \quad (4.76)$$


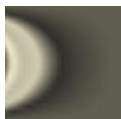

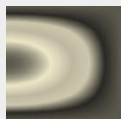



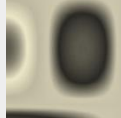

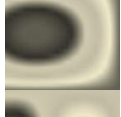
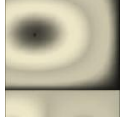




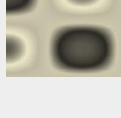





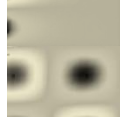
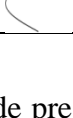
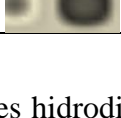
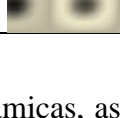
Assim, para os três primeiros modos o parâmetro  $\beta_1$  assume os seguintes valores:

$$\beta_1^1 \cong 0.31 \text{ (1}^\circ \text{ modo)}; \beta_1^2 \cong 1.25 \text{ (2}^\circ \text{ modo)}; \beta_1^3 \cong 2.82 \text{ (3}^\circ \text{ modo)} \quad (4.77)$$

Os valores indicados em (4.77), em conjunto com (4.74), podem ser aplicados nos ábacos paramétricos das Figuras 4.3 a 4.5, ou utilizados na Equação (4.44) para solução das frequências acopladas do problema, que são definidas por:

$$\omega = \chi\pi c/L_y \quad (4.78)$$

Tabela 4.5 – Soluções analítica e numéricas (Análise 01)

Sistema acoplado (viga + cavidade)						Cavidade desacoplada (modos críticos)		
modo	$\omega_{numérico}$ (rad/s)	$\omega_{pseudo-acoplado}$ (rad/s)	$\phi(y/L_y)$	modo analítico	modo numérico	$\chi_{crítico}$ (Eq. 3.59)		modo da cavidade
						$j$	$m$	
1	123.68	122.52				1	1	
2	523.34	527.79				1	3	
3	570.11	570.20				2	1	
4	882.36	881.22				2	3	
5	1002.54	1003.74						
6	1162.82	1187.52						
7	1207.65	1206.37						

A Tabela 4.5 ilustra a distribuição de pressões hidrodinâmicas, as frequências acopladas e as deformadas da estrutura correspondentes aos sete primeiros modos, obtidas analiticamente e numericamente. As duas últimas colunas do lado direito indicam,

respectivamente, as frequências críticas e deformadas modais da cavidade desacoplada. Uma forma alternativa de representação destes resultados é indicada na Tabela 4.6, que ilustra a diferença relativa entre as frequências obtidas analiticamente e numericamente, assim como as diferenças entre as frequências analíticas acopladas e as frequências da cavidade desacoplada (frequências críticas). Esta mesma tabela indica que os modos 1, 2 e 6 não apresentam características de modos da cavidade (ou modos ressonantes), com frequências bastante diferentes das relacionadas à cavidade associada. Os demais modos apresentam certa aproximação em relação aos valores de frequências (conforme verificado na Tabela 4.6) e deformadas modais da cavidade, com configurações modais ligeiramente deslocadas na direção horizontal quando comparadas aos respectivos modos críticos. Os três modos mencionados anteriormente possuem frequências acopladas inferiores aos respectivos valores da estrutura no vácuo. Assim, pode-se concluir que estas soluções estão localizadas na região de massa adicional dos ábacos paramétricos (acima da curva  $\chi^2$ ).

Tabela 4.6 – Diferenças relativas entre as frequências analisadas (%)

<i>modo</i>	$\chi_{numérico}$	$\chi_{analítico}$	$\chi_{crítico}^*$		$\frac{ \chi_{numérico} - \chi_{analítico}  \cdot 100}{\chi_{numérico}}$	$\frac{ \chi_{analítico} - \chi_{crítico}  \cdot 100}{\chi_{crítico}}$
			<i>j</i>	<i>m</i>		
1	0.26	0.26	-	-	0.94	-
2	1.11	1.12	-	-	0.85	-
3	1.21	1.21	1	1	0.02	8.23
4	1.87	1.87	1	3	0.13	3.73
5	2.13	2.13	2	1	0.12	3.32
6	2.47	2.52	-	-	2.12	-
7	2.56	2.56	2	3	0.11	2.40

\* associado por semelhança aos modos acoplados do problema

As frequências dos modos de massa adicional podem ser obtidas de forma aproximada com a utilização da Tabela 4.1 e da Equação (4.41). Assim, as frequências acopladas serão dadas por:

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{\tilde{M}_{total}}} = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{\tilde{M} + \tilde{M}_{fluido}}} \quad (4.79)$$

onde o termo  $\tilde{M}_{fluido}$  é indicado na Tabela 4.1 para um dado valor de  $j$ . Então:

$$\omega_1 \cong 122.52 \text{ rad/s} ; \omega_2 \cong 537.21 \text{ rad/s} ; \omega_3 \cong 1248.78 \text{ rad/s} \quad (4.80)$$

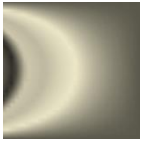
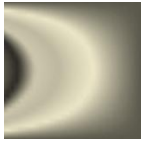










que apresentam uma excelente aproximação, respectivamente, com os valores das frequências dos modos 1, 2 e 6, indicadas na Tabela 4.5. Deve-se observar que resultados mais precisos são obtidos quando  $\chi \ll j$ . Portanto, a solução para  $j = 1$  ( $\chi = 0.26$ ) é praticamente exata, enquanto a solução onde  $j = 3$  ( $\chi = 2.65$ ) apresenta um erro relativo de 7% em relação ao valor indicado na Tabela 4.5.

Uma conclusão importante pode ser estabelecida com os resultados anteriores. Um determinado modo com características nítidas de massa adicional, correspondente a um dado valor de  $j$ , terá valor  $\chi_j$  inferior a:

$$\chi_j < j \quad \therefore \quad \omega_j < \frac{j\pi c}{L_y} \quad (4.81)$$

Desta última expressão é possível concluir que estruturas com frequências acopladas superiores ao lado direito de (4.81) não irão produzir modos com características nítidas de massa adicional. Estes limites correspondem às frequências da cavidade na direção transversal.

Tabela 4.7 – Possíveis configurações para os modos de massa adicional

$j$	$\chi = 0.2$	$\chi = 0.7$	$\chi = 1.2$	$\chi = 1.7$	$\chi = 2.2$	$\chi = 2.7$
1			-	-	-	-
2					-	-
3						



Os modos de massa adicional representam a primeira configuração crítica de um dado  $j$  com uma solução hiperbólica na direção longitudinal. Ou seja: um campo de pressões formado na interface com um decaimento exponencial em direção a  $x = L_x$ . Quanto mais próximo  $\chi_j$  for de  $j$ , maior será a semelhança entre este modo e a configuração crítica correspondente. A Tabela 4.7 ilustra possíveis configurações para os modos de massa adicional.

Os resultados apresentados anteriormente permitem concluir que os modos poderão ser divididos em categorias distintas, de acordo com o valor de  $\chi$ . Caso este parâmetro seja menor que  $j$ , a solução será representada por funções hiperbólicas, e a resposta estará contida em um trecho onde não existem valores críticos, já que o primeiro ponto crítico terá sempre valor maior que  $j$ . Esta configuração representa o modo típico de massa adicional (Região I). Se  $\chi \rightarrow \chi_{crítico}$ , o campo de pressões irá tender à configuração crítica (Ponto crítico). Para valores de  $j < \chi < \chi_{crítico}$ , a configuração do modo será dada pela configuração do modo crítico deslocada para a esquerda (Região II). Se  $\chi > \chi_{crítico}$ , esta configuração será deslocada para a direita (Região III-a). A Tabela 4.8 ilustra a divisão destes domínios para  $j = 1$  e  $m = 1$ , onde  $\chi_{crítico} = \sqrt{5}/2$ .

Tabela 4.8 – Divisão dos domínios para  $j = 1$  e  $m = 1$

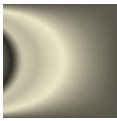
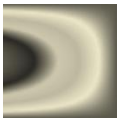
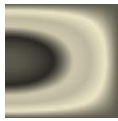
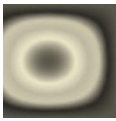
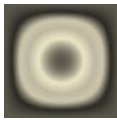
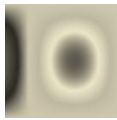
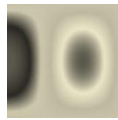
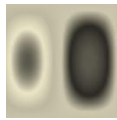
Região I	Região II	Ponto Crítico	Região III-a
$\chi < j$	$j < \chi < \chi_{crítico}$	$\chi_{crítico}$	$\chi_{crítico} < \chi < \chi_{zero}$
$\chi = 0.20$	$\chi = 1.05$	$\chi = \chi_{crítico}$	$\chi = 1.30$
			
hiperbólica	trigonométrica	$\infty$	trigonométrica

Tabela 4.9 – Divisão dos domínios para  $j = 1$  e  $m = 3$

Ponto Zero	Região III-b	Ponto Crítico	Região III-a
$\chi_{zero}$	$\chi_{zero} < \chi < \chi_{crítico}$	$\chi_{crítico}$	$\chi_{crítico} < \chi < \chi_{zero}$
$\chi = \chi_{zero}$	$\chi = 1.60$	$\chi = \chi_{crítico}$	$\chi = 2.10$
			
trigonométrica	trigonométrica	$\infty$	trigonométrica

A Tabela 4.8 permite concluir que os modos acoplados, para um dado valor de  $j$ , são representações modificadas de uma configuração crítica correspondente a um dado valor de  $m$ . Esta alteração é dependente do valor de  $\chi$ . A Tabela 4.9 ilustra a divisão seguinte, onde  $j = 1$  e  $m = 3$ , resultando em  $\chi_{crítico} = \sqrt{13}/2$ . A Região III encontra-se dividida em duas categorias. A primeira, classificada como “a”, está contida no limite definido pelo ponto crítico anterior e pelo ponto zero seguinte. A segunda, classificada como “b”, está contida no limite definido pelo ponto zero anterior e o ponto crítico seguinte. O ponto zero ( $\chi_{zero}$ ) é o ponto que define pressão nula na interface ( $\xi = 0$ ). Este ponto irá ocorrer sempre que a função  $f_1$  for nula. Desta forma, da Equação (3.59) resulta que:

$$f_1 = \text{sen} \left[ -r\pi\sqrt{\chi^2 - j^2} \right] \quad p/ \quad \xi = 0 \quad (4.82)$$

Portanto, os valores de  $\chi_{zero}$  serão dados por:

$$\chi_{zero} = \sqrt{\left(\frac{k}{r}\right)^2 + j^2} \quad p/ \quad k = 1,2,3 \dots \quad (4.83)$$

A Região II marca o início da resposta em termos de funções trigonométricas. O primeiro ponto crítico define a mudança de sinal do termo de amplitude  $f_1/q$ , que passa de negativo a positivo. Este termo continua positivo até o ponto zero, definindo assim a Região III-a. Deste ponto em diante a resposta é negativa até o próximo ponto crítico, definindo a Região III-b. No ponto crítico ocorre a mudança de sinal e o ciclo recomeça. A Figura 4.13 ilustra estes domínios para  $j = 1$  e  $r = 1$ .

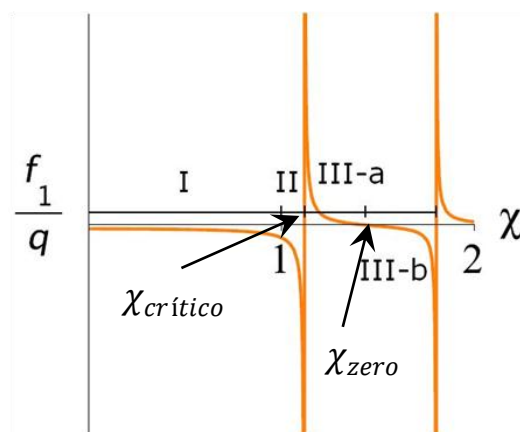


Figura 4.13 – Domínios das soluções para  $j = 1$  e  $r = 1$

### 4.5.3 - Análise 02 (Caso 3A)

Neste caso, considera-se uma cavidade fechada na direção transversal e aberta em S2, com uma viga bi-apoiada em S1. A equação de frequências é indicada em (4.60), onde:

$$\omega = \frac{\chi\pi c}{L_y} \quad (4.84)$$

O módulo de elasticidade e a densidade são definidos por:  $E = 2.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  e  $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ . O parâmetro  $\beta_2$  é dado por:

$$\beta_2 = \frac{1000 \times 10}{2000 \times 1} = 5 \quad (4.85)$$

Os três primeiros modos da estrutura no vácuo apresentam as seguintes frequências:

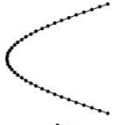
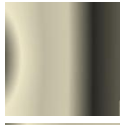


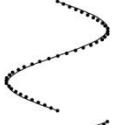
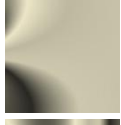
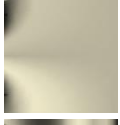
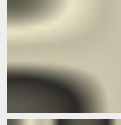
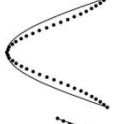
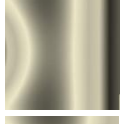
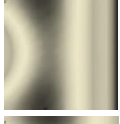
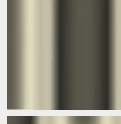
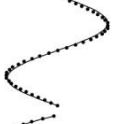
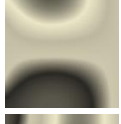
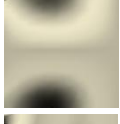
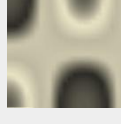
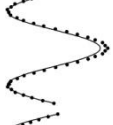


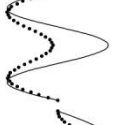
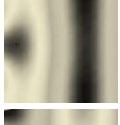
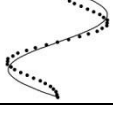
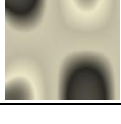

$$\omega_{v\u00e1cuo}^1 \cong 100.73 \text{ rad/s} ; \omega_{v\u00e1cuo}^2 \cong 402.92 \text{ rad/s} ; \omega_{v\u00e1cuo}^3 \cong 906.58 \text{ rad/s} \quad (4.86)$$

Os valores correspondentes do parâmetro  $\beta_1^j$  são dados por:

$$\beta_1^1 \cong 0.21 \text{ (1}^\circ \text{ modo)} ; \beta_1^2 \cong 0.86 \text{ (2}^\circ \text{ modo)} ; \beta_1^3 \cong 1.92 \text{ (3}^\circ \text{ modo)} \quad (4.87)$$

A Tabela 4.10 ilustra a distribuição de pressões hidrodinâmicas, as frequências acopladas e as deformadas da estrutura correspondentes aos sete primeiros modos, obtidas analiticamente e numericamente. Os modos 1, 2 e 5 apresentam frequências acopladas menores que as correspondentes a estrutura no vácuo, indicando características de massa adicional. Os modos 2, 4 e 7 demonstram alguma semelhança com os modos da cavidade, com configurações deslocadas na direção horizontal. Nos demais modos, onde  $j$  é um número ímpar, a identificação de modos semelhantes aos da cavidade não é tão óbvia. Soluções deste tipo incluem valores nulos do índice  $n$ . Portanto, os modos 1 e 3 estão relacionados ao primeiro modo da cavidade desacoplada ( $m = 1, n = 0$ ), enquanto os modos 5 e 6 estão associados ao terceiro modo ( $m = 3, n = 0$ ). Deve-se observar que os valores  $\chi_{crítico}$  deste caso são independentes de  $j$ , sendo uma consequência direta da presença do somatório, que não é eliminado neste tipo de problema.

Tabela 4.10 – Soluções analítica e numéricas (Análise 02)

Sistema acoplado (viga + cavidade)						Cavidade desacoplada (modos críticos)		
modo	$\omega_{numérico}$ (rad/s)	$\omega_{pseudo-acoplado}$ (rad/s)	$\phi(y/L_y)^1$	modo analítico	modo numérico	$\chi_{crítico}$ (Eq. 3.76)		modo da cavidade
						n	m	
1	43.72	43.68				0	1	
2	255.27	255.10				1	1	
3	376.02	381.30				0	3	
4	614.06	616.38				1	3	
5	645.03	642.55						
6	832.30	-		-				
7	914.20	925.42						

<sup>1</sup> ■ numérico (acoplado) ; – analítico (vácuo)

Os efeitos do fluido podem modificar as deformadas modais da estrutura em relação às configurações no vácuo. Esta situação pode ser observada nos modos 3, 6 e 7 (conforme indicado na quarta coluna da Tabela 4.10). O procedimento pseudo-acoplado permanece válido se uma configuração dominante (mobilização semelhante do fluido) for estabelecida por modos de uma viga simplesmente apoiada (modos 3 e 7, por exemplo). Entretanto, o sexto modo apresenta uma exceção, onde nenhuma deformada dominante é identificada, impedindo a avaliação por meio da equação de frequências (limitação do método).

Uma representação alternativa pode ser dada em termos percentuais, com a diferença relativa entre as frequências numérica e analítica. A Tabela 4.11 ilustra estes resultados.

Tabela 4.11 – Diferenças relativas entre as frequências analisadas (%)


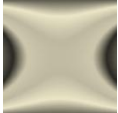
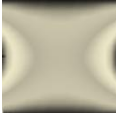


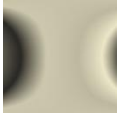
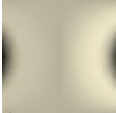


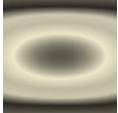
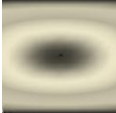






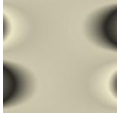


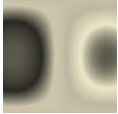


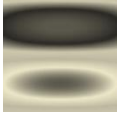
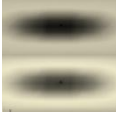
<i>modo</i>	$\chi_{num\acute{e}rico}$	$\chi_{anal\acute{i}tico}$	$\frac{ \chi_{num\acute{e}rico} - \chi_{anal\acute{i}tico}  \cdot 100}{\chi_{num\acute{e}rico}}$
1	0.09	0.09	0.09
2	0.54	0.54	0.07
3	0.80	0.81	1.40
4	1.30	1.31	0.38
5	1.37	1.36	0.38
6	1.77	-	-
7	1.94	1.96	1.23

#### 4.5.4 - Análise 03 (Caso 1C)

Neste caso, considera-se uma cavidade aberta na direção transversal, com duas viga bi-apoiadas idênticas em  $S1$  e  $S2$ . A equação de frequências é indicada em (4.72), com  $\omega = \chi\pi c/L_y$ . O módulo de elasticidade e a densidade são definidos por:  $E = 2.1 \times 10^{11} N/m^2$  e  $\rho_s = 7800 kg/m^3$ . Os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  permanecem os mesmos da Análise 01, com valores definidos, respectivamente, por (4.77) e (4.74).

A Tabela 4.12 ilustra a distribuição de pressões hidrodinâmicas, as frequências acopladas e as deformadas modais da estrutura correspondentes aos sete primeiros modos, obtidas analiticamente e numericamente. A Tabela 4.13 ilustra as diferenças relativas entre frequências analíticas e numéricas. De acordo com (4.69), valores ímpares de  $m$  compõem configurações críticas associadas a modos em fase, enquanto valores pares estão relacionados a modos em oposição de fase. Os valores de  $j$ , por sua vez, definem as características dos deslocamentos da interface. Os modos em fase apresentam relação direta com os modos críticos da cavidade, como pode ser observado no segundo modo, que está associado a  $j = 1$  e  $m = 1$ . Situação semelhante ocorre no quinto modo, relacionado a  $j = 2$  e  $m = 1$ . Nos modos em oposição de fase esta observação não é tão clara. Os modos 1, 3 e 7, por exemplo, não demonstram, aparentemente, nenhuma semelhança com as configurações críticas ilustradas na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Soluções analítica e numéricas (Análise 03)

Sistema acoplado (viga + cavidade + viga)						Cavidade desacoplada (modos críticos)		
modo	$\omega_{num\acute{e}rico}$ (rad/s)	$\omega_{pseudo-acoplado}$ (rad/s)	$\phi(y/L_y)^1$	modo analítico	modo numérico	$\chi_{crítico}$ (Eq. 4.69)		modo da cavidade
						j	m	
1	121.92	122.12 (o)				1	1	
2	125.37	125.64 (f)				1	2	
3	522.06	522.10 (o)				2	1	
4	523.75	529.03 (o)				2	2	
5	524.73	530.14 (f)						
6	741.49	741.30 (f)						
7	979.52	977.45 (o)						

(f) modos em fase ; (o) modos em oposição de fase

Tabela 4.13 – Diferenças relativas entre as frequências analisadas (%)

modo	$\chi_{num\acute{e}rico}$	$\chi_{analítico}$	$\frac{ \chi_{num\acute{e}rico} - \chi_{analítico}  \cdot 100}{\chi_{num\acute{e}rico}}$
1	0.26	0.26	0.16
2	0.27	0.27	0.22
3	1.11	1.11	0.01
4	1.11	1.12	1.01
5	1.11	1.12	1.03
6	1.57	1.57	0.03
7	2.08	2.07	0.21

Uma seqüência de valores  $\chi$  pode ser adotada, com o intuito de verificar o comportamento de modos em fase e em oposição de fase em função deste parâmetro. A Tabela 4.14 apresenta estes resultados para  $r = 1$ .

Tabela 4.14 – Variação dos modos acoplados em função de  $\chi$  para  $r = 1$

$\chi$	$j = 1$		$\chi$	$j = 2$	
	<i>oposição</i>	<i>fase</i>		<i>oposição</i>	<i>fase</i>
0.5			1.5		
1 (a)			2 (a)		
1.2			2.1		
$\sqrt{2}$ (b)			$\sqrt{5}$ (b)		
2			2.5		
$\sqrt{5}$ (c)			$\sqrt{8}$ (c)		

Pontos com freqüências de interesse são indicados com as letras *a*, *b* e *c*. Verifica-se em *a* uma ressonância adicional dos modos em oposição de fase, ocorrendo quando  $\chi \rightarrow j$ . A análise de configurações prévias indica que este modo ressonante corresponde a um alongamento da configuração anterior, com uma fusão de dois núcleos opostos. Esta mesma situação não ocorre nos modos em fase, que apresentam a primeira ressonância apenas em *b*. Nesta freqüência os modos em oposição de fase apresentam núcleos centrados, correspondendo à situação de pressão nula em ambas as interfaces. Deste ponto em diante, o comportamento destes modos é mais previsível, com um núcleo central conservado, seguido de um desenvolvimento de núcleos na direção longitudinal. A primeira ressonância em oposição de fase surge em *c*. Neste ponto, a configuração dos modos em fase assume uma posição centrada. Assim, pode-se concluir que as ressonâncias

dos modos em fase e oposição de fase são opostas, alternando máximos de uma configuração, com interfaces com pressões nulas na situação oposta. Uma característica marcante de cada caso consiste na presença de núcleos centrais nos modos em oposição de fase (após a primeira ressonância) e a ausência destes nos modos em fase. De forma semelhante ao que ocorre na Análise 01, os efeitos do fluido não modificam as deformadas modais associadas a uma viga no vácuo.

#### **4.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Um procedimento analítico simplificado para a solução das frequências acopladas de uma estrutura reticulada com deformadas senoidais associada a cavidades bidimensionais foi apresentado. Uma equação de frequências definida por dois parâmetros adimensionais foi desenvolvida e ábacos de análise foram construídos para facilitar a solução e interpretação do fenômeno. Os resultados encontrados, com uma única exceção (sexto modo, Tabela 4.10), estão de acordo com as soluções obtidas via Método dos Elementos Finitos.

Observa-se neste capítulo a importância de uma solução analítica, que permite a investigação detalhada dos parâmetros envolvidos na análise do sistema acoplado. Vale ressaltar que a única simplificação adotada neste método é a condição de deslocamentos da interface idênticos à deformada da estrutura no vácuo. Em um dos casos estudados (Caso 3A, avaliado no Item 4.5.3) o fluido modifica o modo correspondente a estrutura no vácuo para determinadas frequências do problema. Entretanto, verifica-se que uma deformada dominante é condição suficiente para que o método produza bons resultados.

O procedimento proposto, denominado pseudo-acoplado, representa uma das principais contribuições deste trabalho, com conceitos que podem ser facilmente aplicados a outras condições de contorno da estrutura e da cavidade, incluindo a análise de geometrias tridimensionais. O Caso 1A, que foi amplamente estudado, define características comuns a todos os casos, que incluem a presença de regiões de rigidez e massa adicional, além de pontos onde as frequências acopladas são idênticas às frequências da estrutura no vácuo. Os ábacos paramétricos construídos para este caso ilustram facilmente estas propriedades, facilitando a compreensão do fenômeno, além da influência dos parâmetros adimensionais  $f_1$  e  $f_2$ .



Os modos acoplados apresentam, em todos os casos estudados, relação direta com as ressonâncias das soluções desenvolvidas (valores críticos de  $\chi$ ). Nas soluções onde o somatório é eliminado a identificação das configurações críticas é facilitada, pois depende do valor de  $j$ , produzindo conjuntos específicos de ressonâncias para cada valor deste parâmetro. Nos demais casos, ocorrem ressonâncias em comum para diferentes valores de  $j$ , sendo resultado direto da presença do somatório nas soluções. A presença da série está diretamente relacionada às soluções onde os deslocamentos da interface diferem das deformadas modais da estrutura no vácuo. Portanto, verifica-se que cavidades abertas na direção transversal constituem o problema com menor grau de complexidade. Entretanto, as conclusões obtidas para estes casos podem ser extrapoladas para os demais, fornecendo suporte para a interpretação dos resultados.

Embora os exemplos de aplicação tenham envolvido apenas três casos específicos, soluções para outros tipos de cavidades e outras condições de contorno da estrutura podem ser desenvolvidas, resultando em ábacos de interpretação do fenômeno acoplado. É importante salientar que a única limitação deste procedimento é a necessidade de uma função de deslocamento imposta na interface.

## 5 - SOLUÇÃO ACOPLADA EXATA

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Um procedimento simplificado para o cálculo das frequências do problema acoplado foi apresentado no capítulo anterior. A utilização de deformadas conhecidas na interface (modos da estrutura desacoplada, por exemplo) foi fundamental para a solução do problema, resultando em uma equação de frequências de forma explícita. Entretanto, o conhecimento prévio destas funções representa uma das limitações deste método. Os efeitos de acoplamento podem alterar os modos de vibração da estrutura no vácuo. Nestes casos, a solução será apenas aproximada, podendo resultar em erros significativos.

Neste capítulo serão desenvolvidas soluções analíticas fechadas para o problema de interação entre uma viga e uma cavidade acústica. Os autovalores e autovetores do problema acoplado serão estabelecidos. A influência do acoplamento nos deslocamentos da interface será estudada, permitindo estabelecer uma relação entre os modos acoplados e desacoplados da estrutura. Estes resultados irão permitir a construção de domínios de validade da solução apresentada no capítulo anterior, além de servir de referência para validações de soluções numéricas.

### 5.2 - APRESENTAÇÃO E HIPÓTESES DO PROBLEMA

O problema analisado, indicado na Figura 5.1, consiste em uma viga de altura  $H$  e espessura  $F$ , associada a uma cavidade retangular de dimensões horizontal  $L_x$  e vertical  $L_y$ .

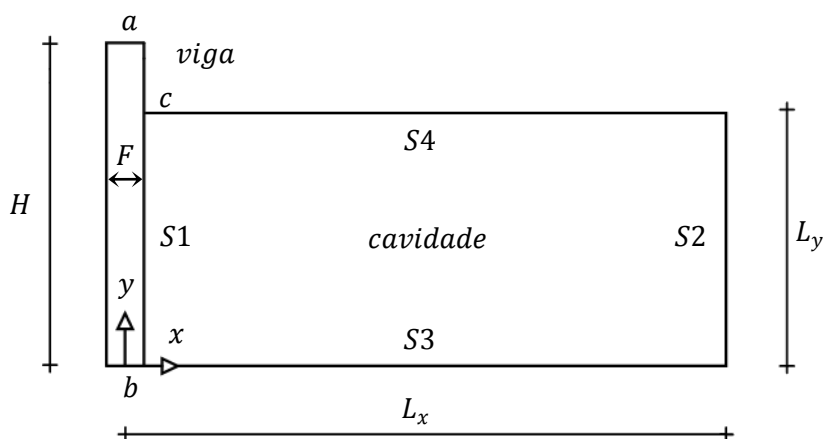


Figura 5.1 – Representação esquemática do problema

Na Figura 5.1 as condições de contorno da estrutura são indicadas nos pontos  $a$  e  $b$ , além do ponto  $c$ , de continuidade entre as partes seca e molhada. As condições  $S1$  a  $S4$  estão relacionadas à cavidade acústica, com  $S1$  representando a interface fluido-estrutura. Inicialmente estes valores serão mantidos arbitrários, com o intuito de generalizar as soluções obtidas.

De forma semelhante ao que foi feito no capítulo anterior, neste estudo as pressões hidrodinâmicas atuantes na interface serão associadas a forças externas. Portanto, o problema se resume a solução da equação diferencial de movimento de uma viga, com uma parte homogênea associada ao trecho seco ( $0 \leq y \leq L_y$ ) e outra não-homogênea associada ao trecho molhado ( $L_y \leq y \leq H$ ). Define-se como  $u_1(y, t)$  e  $u_2(y, t)$  os deslocamentos das partes molhada e seca, respectivamente.

Para os materiais constituintes da estrutura especifica-se rigidez a flexão  $EI(y)$  e massa específica  $\rho_s$ . Para o fluido adota-se  $\rho_f$  e  $c$ , indicando, respectivamente, a massa específica e a velocidade do som na água.

### **5.2.1 - Estratégia de solução da cavidade acústica**

Soluções de cavidades acústicas retangulares para diversas condições de contorno foram deduzidas no Capítulo 2. Todas estas soluções apresentam uma mesma particularidade: uma constante remanescente  $E_n$ , a ser obtida pela aplicação da condição fluido-estrutura em  $S1$ . Para a solução dos problemas que serão apresentados a seguir, é conveniente manter esta constante na solução de pressões. Esta estratégia evita o surgimento da função  $\phi(y)$ , que está relacionada à deformada da estrutura acoplada. A condição fluido-estrutura será aplicada quando a solução de deslocamentos da viga for estabelecida. Assim, será possível obter a constante remanescente por meio de uma aplicação da propriedade de ortogonalidade das funções envolvidas.

### **5.2.2 - Equação de movimento da viga (apenas flexão)**

As análises deste capítulo encontram-se limitadas a vibrações de vigas esbeltas (hipóteses válidas para  $F \ll H$ ), onde os efeitos de cisalhamento não são incluídos nas formulações.

Neste caso, o movimento da parte molhada da viga na direção transversal,  $u_1(y, t)$ , é governado por uma equação diferencial parcial de quarta ordem, dada por:

$$EI \frac{\partial^4 u_1(y, t)}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u_1(y, t)}{\partial t^2} = -p(0, y, t) = -P(0, y) e^{-i\omega t} \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (5.1)$$

onde  $p(0, y, t)$  representa o carregamento externo, suposto harmônico, que neste problema está associado às pressões hidrodinâmicas atuantes na interface ( $x = 0$ ).

Na parte seca, a equação de movimento será homogênea, pois nenhum carregamento externo estará presente. Então:

$$EI \frac{\partial^4 u_2(y, t)}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u_2(y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad L_y \leq y \leq H \quad (5.2)$$

Na solução do problema de vibrações livres, é conveniente definir os deslocamentos da viga como sendo harmônicos de frequência  $\omega$ , de forma semelhante ao que foi feito no Capítulo 2 para a solução da cavidade. Assim:

$$u_1(y, t) = U_1(y) e^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

$$u_2(y, t) = U_2(y) e^{-i\omega t} \quad (5.4)$$

A introdução de (5.3) em (5.1) resulta:

$$EI U_1^{(iv)}(y) - \rho_s F \omega^2 U_1(y) = -P(0, y) \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (5.5)$$

que pode ser simplificada com a introdução do parâmetro  $\varphi$ , dado por:

$$\varphi^4 = \frac{\rho_s F \omega^2}{EI} \quad (5.6)$$

Então:

$$U_1^{(iv)}(y) - \varphi^4 U_1(y) = -\frac{P(0, y)}{EI} \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (5.7)$$

De forma análoga, a introdução de (5.4) em (5.2) irá resultar em:

$$U_2^{(iv)}(y) - \varphi^4 U_2(y) = 0 \quad L_y \leq y \leq H \quad (5.8)$$

Assim, o problema fica resumido a duas equações diferenciais ordinárias. Para a solução de (5.7) serão necessárias quatro constantes. O mesmo ocorre para (5.8). Portanto, este problema define um total de oito constantes desconhecidas. Os extremos da viga em  $a$  e  $b$  definem um total de quatro constantes. Adicionalmente, as condições de continuidade em  $c$  garantem uma compatibilidade de deslocamento, giro, momento fletor e esforço cortante entre as partes seca e molhada. É evidente que estas equações só poderão ser resolvidas quando as condições de contorno da estrutura e do fluido forem definidas.

Apresentam-se a seguir soluções específicas para algumas das cavidades acústicas estudadas no Capítulo 2.

### 5.3 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 3A

Neste caso a solução de  $P(0, y)$  é dada pela substituição de  $x = 0$  em (2.211). Então:

$$P(0, y) = -\sum_{n=0}^{\infty} E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\kappa_n y) \quad (5.9)$$

A substituição de (5.9) em (5.7) resulta em:

$$U_1^{(iv)}(y) - \varphi^4 U_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)}{EI} \cos(\kappa_n y) \quad (5.10)$$

A solução geral de (5.10) tem a forma:

$$U_1(y) = U_1^h(y) + U_1^p(y) \quad (5.11)$$

onde  $U_1^h(y)$  e  $U_1^p(y)$  indicam, respectivamente, as soluções homogênea e particular. Uma solução particular de (5.11) pode ser obtida por meio da seguinte equação:

$$V^{(iv)}(y) - \varphi^4 V(y) = \frac{E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)}{EI} \cos(\kappa_n y) \quad (5.12)$$

A solução de (5.12) pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar, por exemplo, resultando em:

$$V(y) = \frac{E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)}{EI} \frac{1}{\kappa_n^4 - \varphi^4} \cos(\kappa_n y) \quad (5.13)$$

A solução particular de (5.10) será dada pela soma de todas as soluções possíveis em  $n$ . Então:

$$U_1^p(y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.14)$$

onde:

$$F_n = \frac{E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)}{EI} \frac{1}{\kappa_n^4 - \varphi^4} \quad (5.15)$$

A solução homogênea de (5.10) é dada por:

$$U_1^h(y) = c_1 \sin(\varphi y) + c_2 \cos(\varphi y) + c_3 \sinh(\varphi y) + c_4 \cosh(\varphi y) \quad (5.16)$$

que pode ser simplificada para:

$$U_1^h(y) = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) \quad (5.17)$$

onde  $\phi_j$  corresponde a base de funções da solução homogênea, indicada em (5.18), e  $c_j$  representa as constantes associadas.

$$\phi_1 = \text{sen}(\varphi y) ; \phi_2 = \text{cos}(y) ; \phi_3 = \text{senh}(\varphi y) ; \phi_4 = \text{cosh}(\varphi y) \quad (5.18)$$

A solução completa de (5.10) será dada por (5.14) e (5.17). Então:

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{cos}(\kappa_n y) \quad (5.19)$$

que representa a solução de deslocamentos da parte molhada da viga. Para a parte seca, a solução é imediata, já que (5.8) define uma equação homogênea. Então:

$$U_2(y) = \sum_{j=1}^4 d_j \phi_j(y) \quad (5.20)$$

onde percebe-se a presença de mais quatro constantes a determinar.

### 5.3.1 - Aplicação da condição de contorno da interface

A condição de contorno em S1 estabelece:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \frac{\partial^2 u_1(y, t)}{\partial t^2} \quad \therefore \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \rho_f \omega^2 U_1(y) \quad (5.21)$$

Então, substituindo (2.211) na expressão acima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \sqrt{\alpha_n} \text{cos}(\kappa_n y) = \rho_f \omega^2 U_1(y) \quad (5.22)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n \sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \text{cos}(\kappa_n y) \quad (5.23)$$

A substituição de (5.19) em (5.23) resulta em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\kappa_n y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n \sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \cos(\kappa_n y) \quad (5.24)$$

Esta equação pode ser resolvida com a utilização da propriedade de ortogonalidade da função cosseno, dada por (2.142). Então, multiplicando ambos os lados por  $\cos(\kappa_m y)$  e integrando de 0 a  $L_y$ , em  $y$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 c_j \int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy + F_n \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \\ = \frac{E_n \sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \end{aligned} \quad (5.25)$$

Definindo:

$$I_n = \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \quad ; \quad I_{n,j} = \int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (5.26)$$

A substituição de (5.26) em (5.25) resulta em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} + F_n I_n = \frac{E_n \sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} I_n \quad (5.27)$$

A expressão (5.15) indica que:

$$E_n = \frac{F_n EI (\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \quad (5.28)$$

que pode ser substituída em (5.27), resultando em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} + F_n I_n = F_n I_n \left[ \frac{EI(\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \right] \quad (5.29)$$



A manipulação algébrica de (5.29) estabelece:

$$F_n I_n \left\{ 1 - \left[ \frac{EI(\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \right] \right\} = - \sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} \quad (5.30)$$

Então:

$$F_n = \sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} G_n \quad (5.31)$$

onde:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{EI(\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\rho_f \omega^2} \right] - 1 \right\}} \quad (5.32)$$

Da expressão (5.6) obtém-se:

$$\omega^2 = \frac{\varphi^4 EI}{\rho_s F} \quad (5.33)$$

A substituição de (5.33) em (5.32) resulta em:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{(\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\rho_s F \varphi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.34)$$

A expressão (5.6) pode ser representada de forma alternativa por:

$$\varphi^4 = \omega^2 \frac{\rho_s F}{EI} = \left( \frac{\omega}{\omega_b} \right)^2 \left( \frac{1}{L_y} \right)^4 \quad (5.35)$$

onde  $\omega_b$  corresponde a uma frequência base, dada por:

$$\omega_b^2 = \frac{EI}{\rho_s F L_y^4} \quad (5.36)$$

Assim, substituindo (5.35) em (5.34) e lembrando que  $\kappa_n = n\pi/L_y$ :

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[(n\pi)^4 - (\frac{\omega}{\omega_b})^2]}{\tan(\sqrt{\alpha_n} L_x)} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\rho_f}{\rho_s F} (\frac{\omega}{\omega_b})^2} \right] - 1 \right\}} \quad (5.37)$$

Definindo:

$$\omega = \chi^2 \frac{\pi C}{L_y} = \chi^2 \omega_{cav}^1 \quad (5.38)$$

e operando o termo  $\sqrt{\alpha_n}$  de (5.37) :

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[(n\pi)^4 - (\frac{\omega}{\omega_b})^2]}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^4 - n^2})} \frac{\pi \sqrt{\chi^4 - n^2}}{\frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} (\frac{\omega}{\omega_b})^2} \right] - 1 \right\}} \quad (5.39)$$

Esta última expressão pode ser simplificada mais uma vez com a introdução dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\beta_1 = \frac{\omega_b}{\omega_{cav}^1} \quad e \quad \beta_2 = \frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} \quad (5.40)$$

Então:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (n\pi)^4 - \chi^4]}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^4 - n^2})} \frac{\pi \sqrt{\chi^4 - n^2}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.41)$$

Assim, a expressão inicial dada por (5.32) fica reduzida a (5.41), que é função apenas dos parâmetros adimensionais  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $r$  e  $\chi$ , com este último estabelecendo uma relação entre a frequência acoplada e a primeira frequência transversal da cavidade. É importante notar que em (5.38) foi utilizado o fator  $\chi^2$ , ao invés de  $\chi$ . A análise de (5.35) e (5.38) indica que:

$$\varphi = \frac{\chi}{L_y} \sqrt{\frac{1}{f_1}} \quad (5.42)$$

Desta forma, a utilização do fator  $\chi^2$  elimina a presença de um radical de  $\chi$  em (5.42), facilitando a solução matemática do problema, que será estabelecida em função desta variável.

Portanto, a solução completa da parte molhada, indicada em (5.19), pode ser representada por:

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) + \sum_{n=0}^{\infty} [c_1 I_{n,1} + c_2 I_{n,2} + c_3 I_{n,3} + c_4 I_{n,4}] G_n Y_n(y) \quad (5.43)$$

onde:

$$Y_n(y) = \cos(\kappa_n y) \quad (5.44)$$

Uma representação alternativa de (5.43) é dada por:

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(y) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(y) \right] c_j \quad (5.45)$$

De forma semelhante, a solução da parte seca da viga será dada por:

$$U_2(y) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(y) d_j \quad (5.46)$$

### 5.3.2 - Resumo dos principais parâmetros

A Tabela 5.1 apresenta o resumo dos principais parâmetros envolvidos neste caso.

Tabela 5.1 – Resumo da solução do Caso 3A

$G_n$	$I_n$	$I_{n,j}$
1		
$I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (n\pi)^4 - \chi^4]}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^4 - n^2})} \frac{\pi \sqrt{\chi^4 - n^2}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}$	$\int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy$	$\int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy$
$\kappa_n$	$Y_n$	$\varphi$
$\frac{n\pi}{L_y}$	$\cos(\kappa_n y)$	$\frac{\chi}{L_y} \sqrt{\frac{1}{\beta_1}}$
$n = 0, 1, 2 \dots$		

### 5.3.3 - Aplicação a uma viga bi-apoiada com cavidade preenchida

Neste caso será analisada uma cavidade acústica preenchida ( $L_y = H$ ) associada a uma viga bi-apoiada. Assim, existirá apenas a solução da parte em contato com o fluido,  $U_1(y)$ .

As condições de contorno da estrutura nos extremos  $a$  e  $b$  definem os valores dos momentos ( $M$ ) e deslocamentos ( $U_1$ ) como sendo nulos. Então:

$$U_1(0) = 0 \quad ; \quad M(0) = EIU_1''(0) = 0 \quad \text{em "a"} \quad (5.47)$$

$$U_1(H) = 0 \quad ; \quad M(H) = EIU_1''(H) = 0 \quad \text{em "b"} \quad (5.48)$$

Portanto, são definidas as quatro condições de contorno necessárias para a solução do problema (já que as condições de continuidade em  $c$  serão desnecessárias neste exemplo).

A aplicação de (5.47) e (5.48) em (5.45) resulta em:

$$U_1(0) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(0) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(0) \right] c_j = 0 \quad (5.49)$$

$$U_1(H) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(H) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(H) \right] c_j = 0 \quad (5.50)$$

$$U_1''(0) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j''(0) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(0) \right] c_j = 0 \quad (5.51)$$

$$U_1''(H) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j''(H) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(H) \right] c_j = 0 \quad (5.52)$$

Estas equações podem ser representadas em notação matricial, estabelecendo um sistema de equações lineares. A matriz dos coeficientes será denominada  $\mathcal{R}$  e a matriz das constantes será definida como  $\mathcal{C}$ . Então:

$$[\mathcal{R}_{ij}]_{4 \times 4} [\mathcal{C}_{ij}]_{4 \times 1} = [0]_{4 \times 1} \quad (5.53)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{14} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{24} \\ \mathcal{R}_{31} & \mathcal{R}_{32} & \mathcal{R}_{33} & \mathcal{R}_{34} \\ \mathcal{R}_{41} & \mathcal{R}_{42} & \mathcal{R}_{43} & \mathcal{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

onde os termos  $\mathcal{R}_{ij}$  são dados por:

$$\mathcal{R}_{1j} = \phi_j(0) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(0) \quad (5.55)$$

$$\mathcal{R}_{2j} = \phi_j(H) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(H) \quad (5.56)$$

$$\mathcal{R}_{3j} = \phi_j''(0) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(0) \quad (5.57)$$

$$\mathcal{R}_{4j} = \phi_j''(H) + \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(H) \quad (5.58)$$

A matriz  $\mathcal{R}$  do sistema indicado na Equação (5.54) deve satisfazer a seguinte condição:

$$\det(\mathcal{R}) = 0 \quad (5.59)$$

Assim, serão obtidas soluções não triviais para o problema. O procedimento envolvido no cálculo de  $\det(\mathcal{R})$  não é uma tarefa simples. Os índices da matriz  $\mathcal{R}$  envolvem somas infinitas e o determinante envolve produtos destes termos. Uma alternativa consiste em fixar o número de termos  $n$  do somatório. Desta forma, será possível obter a equação de frequências do problema, cujas raízes irão fornecer os valores de  $\chi$  que são solução de (5.59).

### 5.3.4 - Exemplo numérico

Como exemplo de análise será considerado o sistema apresentado na Figura 4.12. As mesmas propriedades dos materiais serão utilizadas, com  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  e  $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ . A cavidade será tratada como equivalente ao Caso 3A.

Neste caso específico os parâmetros adimensionais  $\mathfrak{f}_1$ ,  $\mathfrak{f}_2$  e  $r$  serão dados por:

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{\omega_b}{\omega_{cav.}^1} \cong 0.0318 \quad (5.60)$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} \cong 1.2821 \quad (5.61)$$

$$r = \frac{L_x}{L_y} = 1 \quad (5.62)$$

Adicionalmente, o parâmetro  $\varphi$  é definido por:

$$\varphi = \frac{\chi}{L_y} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{f}_1}} \cong 5.6077 \frac{\chi}{L_y} \quad (5.63)$$

O sistema de equações que define este problema é dado por (5.54). O determinante de  $\mathcal{R}$ , obtido com o auxílio do software Maple v. 12 (com aplicação do método racional de cálculo), resulta na equação de freqüências. A Figura 5.2 ilustra a variação desta função ao longo de  $\chi$ . Nesta análise foram utilizados seis termos no somatório ( $n = 0.5$ ), precisão numérica de 20 casas decimais e passo  $\Delta\chi = 0.005$ . As raízes desta função, obtidas no ponto médio da inversão de sinal de um dado intervalo, definem as freqüências do problema, que podem ser obtidas com a aplicação da Equação (5.38).

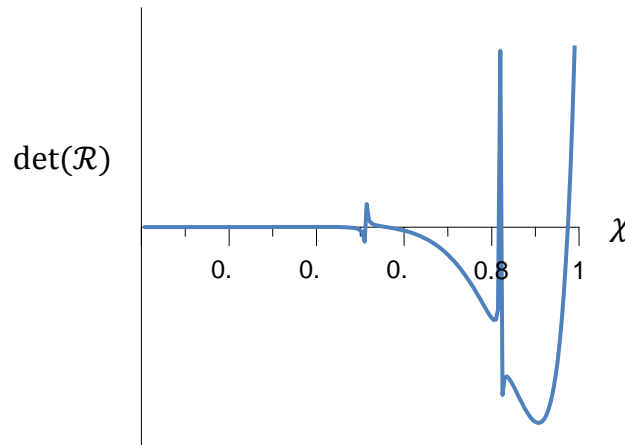


Figura 5.2 – Variação do determinante de  $\mathcal{R}$  ao longo de  $\chi$

Uma análise detalhada das raízes de  $\det(\mathcal{R})$  é apresentada na Tabela 5.2. São indicadas as freqüências analíticas exatas, as soluções analíticas aproximadas obtidas com o procedimento do capítulo anterior (pseudo-acoplado) e os valores obtidos em um modelo numérico de elementos finitos. O índice  $j$  da solução analítica aproximada corresponde ao modo imposto na solução, dado por:

$$\phi(y) = \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \quad (5.64)$$

Tabela 5.2 – Tabela comparativa das soluções de freqüências acopladas ( $rad/s$ )











modo	Analítica exata	Pseudo-Acoplado		Numérica (MEF)
		índice $j$ associado	freqüência	
1	98.39	1	98.40	98.34
2	316.15	1	316.59	315.66
3	447.29	2	447.45	446.50
4	624.75	2	624.88	621.32
5	734.79	1	737.52	736.36
6	886.11	2	886.97	888.19
7	955.25	3	949.16	958.50
8	1131.11	3	1131.20	1132.42

A Tabela 5.2 indica uma excelente aproximação entre as soluções acopladas apresentadas. Assim, a solução analítica aproximada é capaz de reproduzir as frequências do problema, indicando o modo correspondente da estrutura. Além disso, pode-se concluir também, que uma pequena quantidade de termos do somatório é suficiente para a obtenção de bons resultados na solução exata.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados de frequências e modos desacoplados da estrutura, obtidos com (5.64), e da cavidade, obtidos com:

$$\bar{P}_{m,n}(\xi_x, \xi_y) = \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \cos(n\pi\xi_y) \begin{cases} m = 1,3,5 \dots \\ n = 0,1,2 \dots \end{cases} \quad (5.65)$$

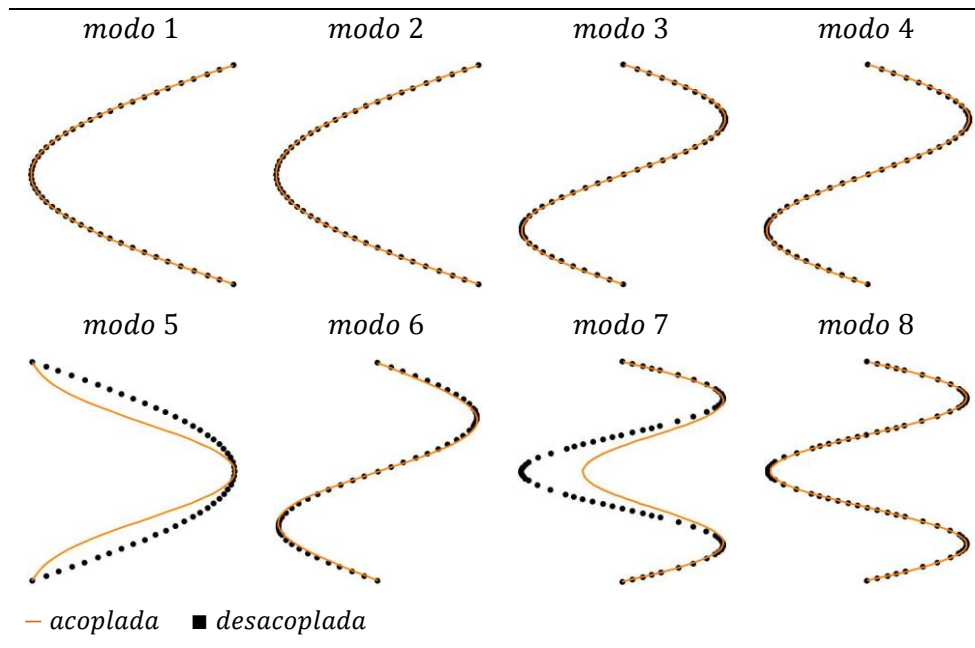
Tabela 5.3 –Frequências e modos desacoplados da estrutura e da cavidade

modo	Estrutura		Cavidade			
	$\omega$ (rad/s)	Deformada modal	$m$	$n$	$\omega$ (rad/s)	Deformada modal
1	147.83		1	0	235.62	
2	591.33		1	1	526.86	
3	1330.50		3	0	706.86	
4			3	1	849.54	
5			1	2	971.48	
6			5	0	1178.10	
7			3	2	1178.10	



Após a solução de frequências é possível obter os valores das constantes  $c_j$  (por meio da solução do sistema linear), que serão aplicadas em (5.45) para construção das deformadas modais da estrutura. A Tabela 5.4 apresenta os resultados analíticos acoplados e a configuração da deformada estrutural no vácuo (normalizados em  $y = H/4$  para os modos 3, 4 e 6, e  $y = H/2$  para os demais modos).

Tabela 5.4 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura



A Tabela 5.4 indica que até o quarto modo as configurações acoplada e desacoplada são praticamente idênticas, o que contribui para a adoção do procedimento analítico simplificado (pseudo-acoplado), já que nestes casos adotam-se deformadas acopladas iguais as respectivas deformadas no vácuo. O quinto e o sétimo modos, entretanto, mostram que o fluido é capaz de alterar a configuração da deformada modal. Mas, apesar disto, o erro cometido na solução analítica aproximada é pouco significativo. A Tabela 5.2 apresenta uma frequência analítica aproximada de  $737.52 \text{ rad/s}$  para o quinto modo, enquanto a solução exata corresponde a  $734.79 \text{ rad/s}$ . Assim, um erro relativo de apenas 0.4% é encontrado.

As deformadas modais e frequências acopladas exatas permitem a construção dos modos correspondentes a cavidade associada, que podem ser obtidos com a utilização da Equação (2.223). A Tabela 5.5 ilustra estes resultados. Adicionalmente, são apresentados os modos da cavidade desacoplada relacionados.

Tabela 5.5 – Tabela comparativa dos modos da estrutura e da cavidade

modo	deformada modal da estrutura acoplada	modo da cavidade acoplada (analítico)	modo(s) da cavidade desacoplada relacionado(s)		
			$m$	$n$	modo(s)
1			1	0	
2			1	0	
3			1	1	
4			1	1	
5*			3	0	
			1	2	
6			3	1	
7*			1	2	
			3	0	
8*			3	2	
			5	0	

\* modos compostos

Os resultados apresentados na Tabela 5.4 indicam uma excelente aproximação entre soluções analíticas e numéricas. Estes resultados, em conjunto com os ilustrados nas Tabelas 5.2 e 5.3, permitem concluir que os modos 1, 3, 7 e 8 desenvolvem características de massa adicional, com frequências reduzidas em relação aos valores no vácuo. Os demais apresentam características de rigidez adicional. Os modos 1 e 2 estão relacionados ao primeiro modo da cavidade desacoplada, enquanto os modos 3 e 4 são semelhantes ao segundo modo da cavidade. O sexto modo acoplado é praticamente idêntico ao quarto modo da cavidade desacoplada. O quinto e sétimo modos são especiais por dois motivos: apresentam deformada modal influenciada pelo fluido e solução da cavidade acoplada envolvendo uma combinação de mais de um modo da cavidade desacoplada. Observa-se também uma relação entre a deformada modal e o número de núcleos na direção transversal da solução acoplada. Por exemplo: os modos 3 e 4 apresentam deformadas com dois núcleos, pois estão associados a segunda deformada da estrutura. O oitavo modo acoplado também é composto, mas neste caso a combinação é dada pelo sexto e sétimo modos da cavidade desacoplada, que apresentam mesma frequência. Assim, a configuração da deformada modal correspondente é associado ao número de núcleos na direção  $y$ .

Valores pares de  $n$  definem soluções da cavidade desacoplada simétricas na direção horizontal, ao passo que valores ímpares definem soluções anti-simétricas. Portanto, pode-se induzir que modos simétricos da estrutura estarão associados a valores pares de  $n$ , e que modos anti-simétricos estarão relacionados a valores ímpares deste parâmetro. De fato, os modos 3 e 4, por exemplo, são anti-simétricos e estão relacionados a  $n = 1$ . Resultados semelhantes são apresentados na Tabela 3.13, onde os modos da estrutura são definidos por  $\text{sen}(j\pi y/L_y)$ . Para  $j = \text{par}$ , o modo é anti-simétrico e apenas os índices ímpares do somatório são mantidos. O contrário ocorre para  $j = \text{ímpar}$ .

A deformada modal da estrutura no quinto modo pode ser explicada pela associação dos modos 3 e 5 da cavidade desacoplada. Como ambos os modos apresentam  $n = \text{par}$ , o modo correspondente da estrutura deverá ser formado por funções simétricas na direção horizontal. Assim, pode-se supor para a deformada  $\phi(y)$  a seguinte função:

$$\phi(y) = \frac{1}{A+B} \left[ A \text{sen} \left( \frac{\pi y}{L_y} \right) - B \text{sen} \left( \frac{3\pi y}{L_y} \right) \right] \quad (5.66)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias, que irão depender da participação de cada índice  $n$  no modo da estrutura acoplada. Os resultados do quinto modo indicam forte participação do terceiro modo da cavidade desacoplada. Assim, assume-se um maior valor para a constante  $A$ . Gráficos de (5.66), com  $A = 0.8$  e  $B = 0.2$ , e da deformada exata são apresentados na Figura 5.3. Observa-se que a função proposta apresenta grande semelhança com a solução acoplada.

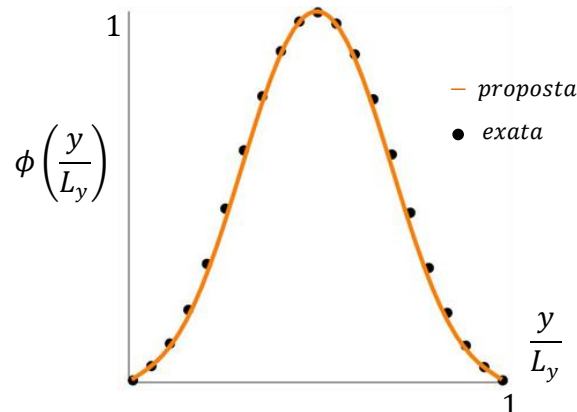


Figura 5.3 – Deformada modal do quinto modo e função aproximada

Na verdade, a configuração modal é ainda mais complexa, pois deve incluir todos os índices pares da série, que irão apresentar participação reduzida com o avanço de  $n$ . Caso a configuração seja anti-simétrica, os índices envolvidos serão ímpares. No Caso 1A, desenvolvido no Capítulo 3, o somatório da solução pseudo-acoplada era eliminado, restando apenas um único índice  $n = j$  para representação das pressões dinâmicas. Assim, modos acoplados da estrutura eram idênticos aos modos desacoplados. No Caso 3A, este somatório não é eliminado e passa a fazer parte da solução. Assim, a ocorrência de modos combinado é possível. Sempre que isto ocorrer, a deformada modal da estrutura também será dada por uma combinação de funções, resultando em configurações que irão diferir dos valores no vácuo.

#### 5.4 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 2A

Neste caso a solução de  $P(0, y)$  é dada pela substituição de  $x = 0$  em (2.139). Então:

$$P(0, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \tan(\sqrt{\alpha_n} L_x) \cos(\kappa_n y) \quad (5.67)$$

O desenvolvimento matemático deste caso é semelhante ao apresentado anteriormente, podendo ser obtido por analogia. Algumas diferenças incluem: o índice  $n$  do somatório, que neste caso tem início em 1, e o termo  $\kappa_n$ , que agora é definido por:

$$\kappa_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L_y} \quad (5.68)$$

Portanto, as soluções das partes molhada e seca serão dadas, respectivamente, pelas equações (5.69) e (5.70). Os parâmetros envolvidos nestas formulações são apresentados na Tabela 5.5.

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(y) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(y) \right] c_j \quad (5.69)$$

$$U_2(y) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(y) d_j \quad (5.70)$$

#### 5.4.1 - Resumo dos principais parâmetros

A Tabela 5.6 apresenta o resumo dos principais parâmetros envolvidos neste caso.

Tabela 5.6 – Resumo da solução do Caso 2A

$G_n$	$I_n$	$I_{n,j}$
1	$\int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy$	$\int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy$
$I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (\tilde{n}\pi)^4 - \chi^4]}{\tan(\pi r \sqrt{\chi^4 - \tilde{n}^2})} \frac{\pi \sqrt{\chi^4 - \tilde{n}^2}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}$		
$\kappa_n$	$Y_n$	$\varphi$
$\frac{(2n - 1)\pi}{2L_y}$	$\cos(\kappa_n y)$	$\frac{\chi}{L_y} \sqrt{\frac{1}{\beta_1}}$
$n = 1, 2, 3 \dots$	$\tilde{n} = (2n - 1)/2$	

#### 5.4.2 - Aplicação a uma viga engastada-livre com cavidade preenchida

Neste caso será analisada uma cavidade preenchida ( $L_y = H$ ) associada a uma viga engastada-livre. Assim, existirá apenas a solução da parte em contato com o fluido,  $U_1(y)$ .

As condições de contorno da estrutura em  $a$  definem valores de deslocamentos ( $U_1$ ) e rotações ( $U_1'$ ) como sendo nulos. Em  $b$  serão nulos o momento fletor ( $M$ ) e o esforço cortante ( $\mathcal{V}$ ). Então:

$$U_1(0) = 0 \quad ; \quad U_1'(0) = 0 \quad \text{em "a"} \quad (5.71)$$

$$M(H) = EI U_1''(H) = 0 \quad ; \quad \mathcal{V}(H) = EI U_1'''(H) = 0 \quad \text{em "b"} \quad (5.72)$$

A aplicação de (5.71) e (5.72) em (5.69) resulta em:

$$U_1(0) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(0) \right] c_j = 0 \quad (5.73)$$

$$U_1'(0) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'(0) \right] c_j = 0 \quad (5.74)$$

$$U_1''(H) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j''(H) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(H) \right] c_j = 0 \quad (5.75)$$

$$U_1'''(H) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j'''(H) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'''(H) \right] c_j = 0 \quad (5.76)$$

Estas equações podem ser representadas em notação matricial, estabelecendo um sistema de equações lineares semelhante ao caso anterior, dado por:

$$[\mathcal{R}_{ij}]_{4 \times 4} [c_{ij}]_{4 \times 1} = [0]_{4 \times 1} \quad (5.77)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{14} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{24} \\ \mathcal{R}_{31} & \mathcal{R}_{32} & \mathcal{R}_{33} & \mathcal{R}_{34} \\ \mathcal{R}_{41} & \mathcal{R}_{42} & \mathcal{R}_{43} & \mathcal{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

onde os termos  $\mathcal{R}_{ij}$  são dados por:

$$\mathcal{R}_{1j} = \phi_j(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(0) \quad (5.79)$$

$$\mathcal{R}_{2j} = \phi_j'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'(0) \quad (5.80)$$

$$\mathcal{R}_{3j} = \phi_j''(H) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(H) \quad (5.81)$$

$$\mathcal{R}_{4j} = \phi_j'''(H) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'''(H) \quad (5.82)$$

A matriz  $\mathcal{R}$  do sistema indicado na Equação (5.78) deve satisfazer a seguinte condição:

$$\det(\mathcal{R}) = 0 \quad (5.83)$$

Esta última expressão define a equação característica do problema.

### 5.4.3 - Exemplo numérico

Como exemplo de análise será considerado o sistema apresentado na Figura 4.12. As mesmas propriedades dos materiais serão utilizadas, com  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  e  $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ . A cavidade será tratada como equivalente ao Caso 2A e a estrutura terá condições de contorno relacionadas a uma viga engastada em  $x = 0$  e livre em  $x = H$ .

Os parâmetros  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $r$  e  $\varphi$  apresentam valores definidos por (5.60), (5.61), (5.62) e (5.63).

O determinante de  $\mathcal{R}$ , obtido com o auxílio do software Maple v. 12, resulta na equação de frequências. A Figura 5.4 ilustra a variação desta função ao longo de  $\chi$ . Nesta análise foram utilizados cinco termos no somatório ( $n = 1..5$ ), precisão numérica de 20 casas decimais e  $\Delta\chi = 0.005$ .

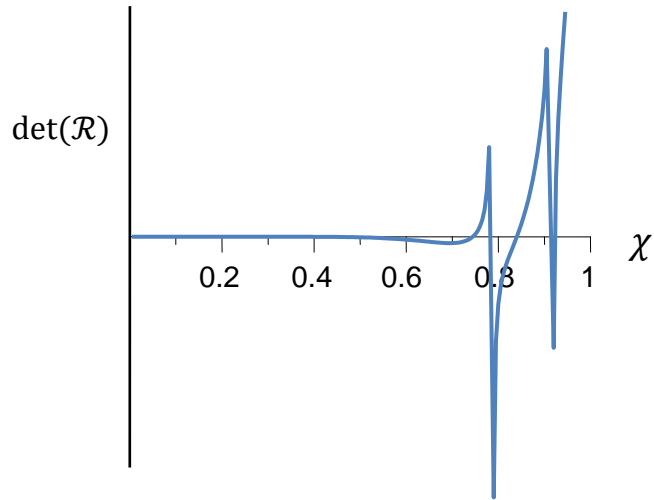


Figura 5.4 – Variação do determinante de  $\mathcal{R}$  ao longo de  $\chi$

Uma análise detalhada das raízes de  $\det(\mathcal{R})$  é apresentada na Tabela 5.7. São indicadas as frequências analíticas exatas, as soluções analíticas aproximadas obtidas com o procedimento do capítulo anterior (pseudo-acoplado) e os valores obtidos em um modelo numérico de elementos finitos. O índice  $aH$  da solução analítica aproximada corresponde ao modo imposto na solução, que é obtido por meio da seguinte equação transcendental:

$$\cos(aH) = -1/\cosh(aH) \quad ; \quad a^4 = \omega^2 \rho_s F/EI \quad (5.84)$$

que resulta nas frequências no vácuo de uma viga engastada-livre, com modos dados por (5.85), sendo necessária a normalização em  $y = H$ .

$$\phi(y) = \cos(ay) - \cosh(ay) - \frac{\cos(aH) + \cosh(aH)}{\sin(aH) + \sinh(aH)} [\sin(ay) - \sinh(ay)] \quad (5.85)$$

Tabela 5.7 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas ( $rad/s$ )

modo	Analítica exata	Pseudo-Acoplado		Numérica (MEF)
		índice $aH$ associado	frequência	
1	46.37	1.875 (1° modo)	46.60	46.29
2	261.10	4.694 (2° modo)	254.52	259.36
3	400.94	4.694 (2° modo)	399.03	399.09
4	720.15	7.855 (3° modo)	717.98	719.05
5	780.62	-	-	781.88
6	884.22	7.855 (3° modo)	890.97	869.88
7	1032.98	-	-	1035.16
8	1202.94	-	-	1237.17



A Tabela 5.7 indica uma excelente aproximação entre as soluções acopladas apresentadas. A solução analítica aproximada é capaz de reproduzir algumas frequências do problema, indicando o modo correspondente da estrutura. Entretanto, a partir do quarto modo torna-se difícil identificar o modo dominante, pois as equações de frequências relacionadas a cada modo passam a apresentar soluções semelhantes. A Tabela 5.8 ilustra os resultados obtidos com este procedimento. Os valores sublinhados indicam as frequências que foram utilizadas na Tabela 5.7. Verifica-se que alguns destes valores não correspondem a soluções do problema, como a primeira solução do 3º modo, por exemplo, que corresponde a primeira ressonância da cavidade. Existem também soluções muito próximas, indicadas na quarta e quinta linhas da Tabela 5.8. Assim, a correspondência com modos acoplados neste caso é limitada a poucas frequências, que estão associadas aos modos iniciais do problema.

Tabela 5.8 – Frequências acopladas obtidas pelo Método Pseudo-Acoplado (*rad/s*)

índice <i>aH</i> associado			
1.875 (1º modo)	4.694 (2º modo)	7.855 (3º modo)	10.996 (4º modo)
<u>46.60</u>	<u>254.52</u>	331.54	333.01
346.82	<u>399.03</u>	<u>717.98</u>	744.08
765.28	765.48	<u>890.97</u>	998.86
1010.84	1001.60	1025.95	1195.74
1208.61	1217.25	1216.82	1365.93

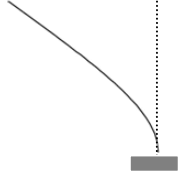


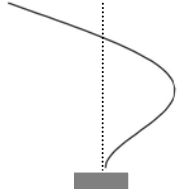

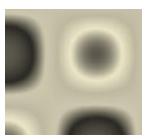
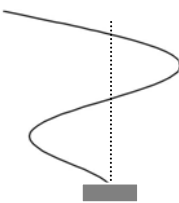
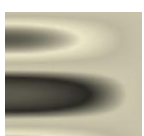
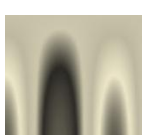
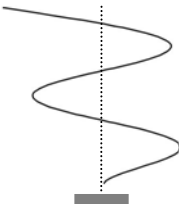
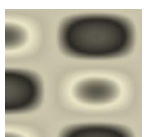
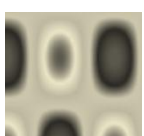
A Tabela 5.9 apresenta os resultados de frequências e modos desacoplados da estrutura, obtidos com (5.84), e da cavidade, obtidos com:

$$\bar{P}_{m,n}(\xi_x, \xi_y) = \cos\left(\frac{m\pi\xi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi\xi_y}{2}\right) \begin{cases} m = 1,3,5 \dots \\ n = 1,3,5 \dots \end{cases} \quad (5.86)$$

A solução da cavidade desacoplada apresenta uma série de modos com valores idênticos de frequências. Portanto, na solução acoplada, a presença de modos compostos será inevitável.

Após a solução das frequências é possível obter os valores das constantes  $c_j$  (por meio da solução do sistema linear), que serão utilizadas em (5.69) para construção das deformadas modais da estrutura. A Tabela 5.10 apresenta os resultados analíticos acoplados e a configuração da deformada no vácuo.

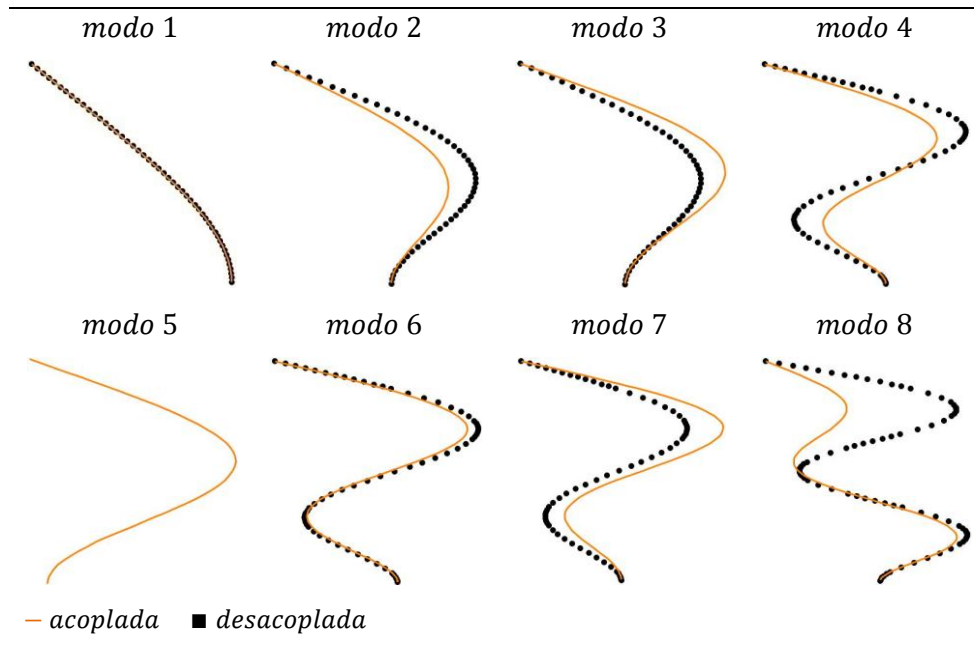
Tabela 5.9 –Frequências e modos desacoplados da estrutura e da cavidade

Estrutura			Cavidade				
Modo	$\omega$ (rad/s)	Deformada modal	Modo	$m$	$n$	$\omega$ (rad/s)	Deformada modal
1	52.66		1	1	1	333.22	
			2	1	3	745.09	
2	330.03		3	3	1	745.09	
			4	3	3	999.65	
3	924.20		5	1	5	1201.43	
			6	5	1	1201.43	
4	1810.95		7	3	5	1373.89	
			8	5	3	1373.89	

A Tabela 5.10 indica que até o quarto modo as configurações acoplada e desacoplada (normalizadas em  $y = H$ ) são praticamente idênticas, o que contribui para a adoção do procedimento analítico simplificado (pseudo-acoplado), já que nestes casos adotam-se deformadas acopladas iguais as respectivas deformadas no vácuo. O quinto e o oitavo modos, entretanto, mostram que o fluido é capaz de alterar a configuração da deformada modal, com alterações tão significativas que podem impedir a correlação com os modos desacoplados. O sétimo modo apresenta alterações discretas, mas a análise da quarta linha da Tabela 5.8 mostra que a identificação desta frequência torna-se difícil, pois tanto o

primeiro como o segundo modos apresentam valores muito próximos do obtido com o terceiro modo no vácuo. Nesta análise, os primeiros modos, tanto neste caso como no anterior, sofrem pouca influência dos efeitos de acoplamento, com deformadas praticamente idênticas às configurações obtidas no vácuo.

Tabela 5.10 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura



As deformadas modais e frequências acopladas exatas permitem a construção dos modos correspondentes a cavidade associada, que podem ser obtidos com a utilização da Equação (2.150). A Tabela 5.11 ilustra estes resultados. Adicionalmente, são apresentados os modos da cavidade desacoplada relacionados.

A análise dos resultados da Tabela 5.11 indica a presença de três modos compostos, sendo consequência da solução da cavidade desacoplada, que implica em frequências iguais para valores de  $m$  e  $n$  alternados, tais como 1 e 3, por exemplo. Assim, nestes casos, o modo da cavidade é dado por uma composição das configurações ilustradas na Tabela 5.9. Observa-se também que modos de ordem superior ao terceiro são associados a valores de  $n$  maiores que 1. O sexto modo apresenta uma configuração com múltiplos núcleos, dificultando a identificação dos modos relacionados. De maneira geral, os modos deste problema são mais complexos que os apresentados no Caso 3A, tendo como uma das causas a falta de simetria das condições de contorno da cavidade e da estrutura. Adicionalmente, deve-se observar a presença de modos compostos, que dificultam a análise.








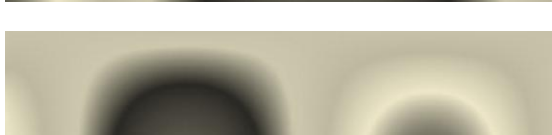


Tabela 5.11 – Tabela comparativa dos modos da estrutura e da cavidade

modo	deformada modal da estrutura acoplada	modo da cavidade acoplada (analítico)	modo(s) da cavidade desacoplada relacionado(s)		
			$m$	$n$	modo(s)
1			1	1	
2			1	1	
3			1	1	
4*			1	3	
			3	1	
5*			1	3	
			3	1	
6			-	-	-
7			3	3	
8*			1	5	
			5	1	

\* modos compostos

Um estudo de interesse para a aplicação em problemas de interação barragem-reservatório surge quando o comprimento horizontal é muitas vezes maior que o vertical. A Tabela 5.12 ilustra os valores das frequências e modos da estrutura e cavidade, obtidos analiticamente com cinco termos no somatório, associados a uma variação do parâmetro  $r = L_x/L_y$ .

Tabela 5.12 – Frequências e modos acoplados em função do parâmetro  $r$

		$r = 10$	
Modo	$\omega$ (rad/s)	Modo da estrutura	Modo da Cavidade
1	46.12		
2	230.32		
3	242.49		
4	258.22		
5	279.56		

Os resultados da Tabela 5.12 indicam uma tendência já estudada no Capítulo 3 (Tabelas 3.6 e 3.8). Ou seja: à medida que o comprimento longitudinal aumenta, passam a predominar os modos longitudinais da cavidade. A consequência prática disto é a associação de uma mesma deformada a pequenas variações de frequências na solução. No caso de  $r = 10$ , por exemplo, até o quinto modo surge apenas o segundo modo equivalente a configuração da estrutura no vácuo. É interessante notar que a primeira frequência permanece praticamente inalterada com a variação deste parâmetro. Uma explicação simples para a predominância dos modos longitudinais pode ser dada pela observação da Equação (5.87), que estabelece as frequências da cavidade desacoplada:

$$\omega = \frac{\pi c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad \begin{cases} m = 1,3,5 \dots \\ n = 1,3,5 \dots \end{cases} \quad (5.87)$$

Assim, como  $L_x > L_y$ , as primeiras freqüências da cavidade serão desenvolvidas com o incremento de  $m$ , com  $n$  assumindo um valor unitário. É evidente que quanto maior for o valor de  $r$ , maior será a seqüência de modos longitudinais antes do surgimento do primeiro modo com  $m = 1$  e  $n = 3$ . O valor limite do desenvolvimento de  $m$  para um dado  $r$  pode ser calculado por meio da seguinte expressão:

$$\left(\frac{m}{r}\right)^2 + (1)^2 < \left(\frac{1}{r}\right)^2 + (3)^2 \quad (5.88)$$

Portanto:


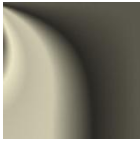

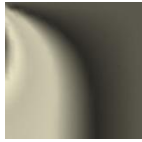

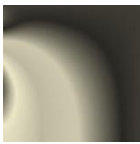

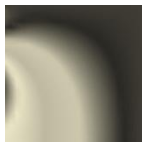



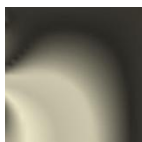

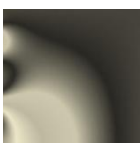

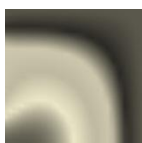

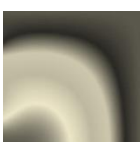


$$m < \sqrt{8r^2 + 1} \quad (5.89)$$

Após o surgimento deste índice, passará a existir o primeiro modo da cavidade desacoplada com  $n = 3$ .

Deve-se observar que, na Tabela 5.12, para  $r = 10$ , quatro dos cinco modos estão associados ao segundo modo da estrutura no vácuo. Uma explicação para este fenômeno pode ser obtida por meio da comparação entre a segunda freqüência desacoplada da estrutura,  $330.03 \text{ rad/s}$ , e as primeiras freqüências desacopladas da cavidade, que são iguais a:  $236.79$ ,  $246.00$ ,  $263.43$  e  $287.61 \text{ rad/s}$ . Nota-se que a aproximação entre estes valores e a freqüência no vácuo implica em forte influência do segundo modo. Observa-se também uma pequena diferença entre estes valores e as freqüências acopladas, indicando soluções próximas às ressonâncias.

Outro parâmetro de interesse é dado por  $f_1$ , indicado em (5.40). Considerando as propriedades da cavidade inalteradas e variando o valor da freqüência base,  $\omega_b$ , torna-se possível avaliar os efeitos das propriedades da estrutura no sistema acoplado. A Tabela 5.13 apresenta os resultados, com  $r = 1$ , para uma variação de  $f_1$ .

Tabela 5.13 – Freqüências e modos acoplados em função do parâmetro  $\beta_1$

Modo	$\beta_1 = 0.005$			$\beta_1 = 0.010$		
	$\omega$ (rad/s)	Modo da estrutura	Modo da cavidade	$\omega$ (rad/s)	Modo da estrutura	Modo da Cavidade
1	7.16			14.68		
2	43.83			89.46		
3	129.31			259.93		
4	258.87			385.05		
5	381.91			541.91		

Os parâmetros  $\beta_1$  indicados na Tabela 5.13 foram obtidos com a variação do módulo de elasticidade ( $E$ ). Assim, para  $\beta_1 = 0.005$  foi adotado  $E = 5 \times 10^9 Pa$ , enquanto para  $\beta_1 = 0.010$  foi adotado  $E = 2.1 \times 10^{10} Pa$ . A modificação do módulo de elasticidade implica em novos valores para as freqüências da estrutura no vácuo, que são indicadas na Tabela 5.14.

Tabela 5.14 – Freqüências desacopladas da estrutura








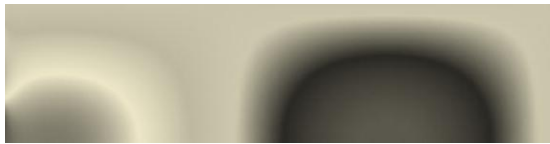


	$\beta_1 = 0.005$	$\beta_1 = 0.010$
modo	$\omega$ (rad/s)	$\omega$ (rad/s)
1	8.13	16.65
2	50.93	104.37
3	142.61	292.26
4	279.44	572.68

Por meio da análise das Tabelas 5.13 e 5.14 verifica-se a presença de quatro modos típicos de massa adicional para  $\beta_1 = 0.005$ . A solução com  $\beta_1 = 0.010$  apresenta três modos

desta categoria. Em ambas as soluções estes modos ocorrem antes da primeira frequência da cavidade desacoplada ( $333.22 \text{ rad/s}$ ), surgindo na mesma seqüência dos modos desacoplados da estrutura. Deve-se observar que esta seqüência de modos é limitada ao valor da primeira ressonância da cavidade. Assim, quanto maior for a faixa de frequências da estrutura desacoplada neste intervalo, maior será a quantidade de modos de massa adicional. No caso específico da variação do módulo de elasticidade verifica-se que a redução deste parâmetro implica em uma maior faixa de modos. Resultados semelhantes podem ser obtidos com a variação dos outros parâmetros envolvidos em  $\omega_b$ .

Outra propriedade importante pode ser verificada em cavidades longas com uma seqüência de modos antes da primeira ressonância. A Tabela 5.15 ilustra os resultados para  $r = 10$ . Os três primeiros modos apresentam frequências praticamente idênticas às apresentadas na Tabela 5.13. Neste caso, a primeira ressonância é dada por  $236.79 \text{ rad/s}$ . Assim, conclui-se que as soluções que antecedem a primeira ressonância são independentes de  $r$ .

Tabela 5.15 – Frequências e modos acoplados em função dos parâmetros  $\beta_1$  e  $r$

$\beta_1 = 0.005$ e $r = 10$			
Modo	$\omega \text{ (rad/s)}$	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	7.13		
2	43.45		
3	128.82		
4	248.22		
5	258.38		



Assim como no Caso 1A, as frequências acopladas menores que a primeira ressonância apresentam perturbações localizadas próximas à interface. Entretanto, quando as soluções ultrapassam este limite surgem modos característicos da cavidade. Na Tabela 5.15, por exemplo, o quarto e quinto modos são representativos deste fenômeno, correspondendo, respectivamente, a segunda e terceira ressonâncias da cavidade.

Uma explicação para os resultados semelhantes com diferentes valores do parâmetro  $r$  é dada pela não perturbação do fluido a partir de uma determinada distância da interface. Assim, a cavidade alongada assume pressão praticamente nula na posição correspondente ao comprimento longitudinal da cavidade curta. A Figura 5.5 esclarece estes comentários.

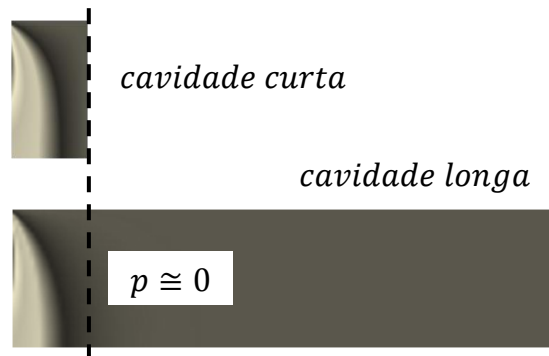


Figura 5.5 – Explicação do fenômeno de frequências idênticas independente de  $r$

É importante notar que, à medida que a frequência acoplada se aproxima da primeira frequência da cavidade desacoplada, a configuração modal tende a assumir as características da primeira ressonância. Este fenômeno pode ser observado no segundo modo da Tabela 5.12. A consequência prática é a perturbação da cavidade na distância equivalente a cavidade curta. Isto explica as diferenças encontradas entre esta frequência,  $230.32 \text{ rad/s}$ , e a obtida na Tabela 5.7,  $261.10 \text{ rad/s}$ . Portanto, atenção especial deve ser dada aos modos que apresentam frequências próximas a primeira ressonância. De maneira geral, este valor será dado por:

$$\omega = \frac{\pi c}{2L_y} \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + 1} \quad (5.90)$$

Para cavidades muito longas  $r \rightarrow \infty$  e esta última expressão se reduz a:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = \frac{\pi c}{2L_y} \quad (5.91)$$

que corresponde a primeira frequência da cavidade na direção transversal. Esta última expressão será utilizada na solução do problema de interação barragem-reservatório, que será abordado no próximo item.

### 5.5 - DESENVOLVIMENTO DO CASO 2A COM COMPRIMENTO INFINITO NA DIREÇÃO LONGITUDINAL

Para o desenvolvimento deste problema é conveniente reformular a solução do Caso 2A antes da aplicação das condições de contorno na direção longitudinal. Assim, a solução na direção transversal será dada por (2.129). Então:

$$G(y) = A \cos(\kappa_n y) \quad (5.92)$$

onde  $\kappa$  é dado por:

$$\kappa_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L_y} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.93)$$

De acordo com a Tabela 2.1, a solução na direção longitudinal correspondente a  $\beta = \kappa^2$  será dada por:

$$F(x) = C_3 e^{i\sqrt{\alpha_n}x} + C_4 e^{-i\sqrt{\alpha_n}x} \quad (5.94)$$

onde a constante de separação  $\alpha$  é definida por:

$$\alpha_n = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[ \frac{(2n - 1)\pi}{2L_y} \right]^2 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.95)$$

A solução definida em (5.94) pode ser representada em termos de funções trigonométricas (com a utilização das identidades de Euler). Este foi o artifício empregado na solução do Caso 2A. Então:

$$F(x) = C \cos(\sqrt{\alpha_n} x) + D \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n} x) \quad p/ \alpha_n > 0 \quad (5.96)$$

Entretanto, deve-se observar que a condição de contorno de pressão nula no infinito impossibilita este tipo de solução, já que o limite de  $F(x)$  quando  $x \rightarrow \infty$  é indefinido.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \nexists \quad p/ \alpha_n > 0 \quad (5.97)$$

Portanto,  $\alpha_n$  não poderá ser um número positivo. Outra possibilidade consiste em analisar a situação onde  $\alpha_n$  é negativo. Neste caso, a solução será dada por:

$$F(x) = C_3 e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} + C_4 e^{\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \quad p/ \alpha_n < 0 \quad (5.98)$$

onde  $\hat{\alpha}_n$  é definido por:

$$\hat{\alpha}_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \right]^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (5.99)$$

O limite de (5.98) quando  $x \rightarrow \infty$  implica em:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = C_3 e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} \infty} + C_4 e^{\sqrt{\hat{\alpha}_n} \infty} = 0 \quad p/ \alpha_n < 0 \quad (5.100)$$

Então:

$$C_4 = 0 \quad (5.101)$$

Portanto, a solução na direção longitudinal será dada por:

$$F(x) = C_3 e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \quad p/ \alpha < 0 \quad (5.102)$$

que é válida apenas para valores de  $\alpha < 0$ , o que implica em  $\hat{\alpha}_n > 0$ . Assim, a solução completa deste problema será dada pela combinação de (5.92) e (5.102). Então:

$$P(x, y) = \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n e^{-\sqrt{\hat{\alpha}_n} x} \cos(\kappa_n y) \quad (5.103)$$

onde  $n_0$  é o menor inteiro que satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{(2n_0 - 1)\pi}{2L_y} > \frac{\omega}{c} \quad (5.104)$$

Assim, a solução com comprimento infinito na direção longitudinal indicada em (5.103) será sempre representada por funções exponenciais na direção longitudinal. É interessante notar que as frequências do problema irão obedecer a seguinte relação:

$$\omega < \frac{(2n_0 - 1)\pi c}{2L_y} \quad (5.105)$$

onde o lado direito da expressão é equivalente às frequências na direção transversal da cavidade desacoplada. Para  $n_0 = 1$  este termo assume valor idêntico ao indicado em (5.91). Portanto, as frequências deste problema que são inferiores a primeira ressonância podem ser simuladas em uma solução do tipo cavidade finita (Caso 2A), já que ambas as soluções serão representadas por decaimentos exponenciais em direção ao limite longitudinal do reservatório.

Neste tipo de solução a resposta de pressões continuará sendo exponencial mesmo após a primeira ressonância da cavidade. Isto ocorre devido à mudança do índice do somatório  $n_0$  em (5.103), que deverá obedecer a relação (5.104). Assim, soluções semelhantes às observadas nos três primeiros modos da Tabela 5.15 são esperadas neste tipo de problema.

Neste caso a solução de  $P(0, y)$  é dada pela substituição de  $x = 0$  em (5.103). Então:

$$P(0, y) = \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.106)$$

O desenvolvimento matemático deste caso é semelhante aos apresentados anteriormente, podendo ser obtido por analogia. Substituindo (5.106) em (5.7):

$$U_1^{(iv)}(y) - \varphi^4 U_1(y) = - \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.107)$$

Uma solução particular de (5.107) pode ser obtida por meio da seguinte equação:

$$V^{(iv)}(y) - \varphi^4 V(y) = - \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.108)$$

Assim, a solução de (5.108) será dada por:

$$V(y) = - \frac{E_n}{EI} \frac{1}{\kappa_n^4 - \varphi^4} \cos(\kappa_n y) \quad (5.109)$$

A solução particular de (5.107) será dada pela soma de todas as soluções possíveis em  $n$ .  
Então:

$$U_1^p(y) = \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.110)$$

onde:

$$E_n = - \frac{E_n}{EI} \frac{1}{\kappa_n^4 - \varphi^4} \quad (5.111)$$

A solução homogênea de (5.107) é dada por:

$$U_1^h(y) = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) \quad (5.112)$$

onde  $\phi_j$  corresponde a base de funções da solução homogênea, indicada em (5.113), e  $c_j$  representa as constantes associadas.

$$\phi_1 = \text{sen}(\varphi y) ; \phi_2 = \text{cos}(y) ; \phi_3 = \text{senh}(\varphi y) ; \phi_4 = \text{cosh}(\varphi y) \quad (5.113)$$

A solução completa de (5.107) será dada por (5.110) e (5.112). Então:

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) + \sum_{n=n_0}^{\infty} F_n \cos(\kappa_n y) \quad (5.114)$$

que representa a solução de deslocamentos da parte molhada da viga. Para a parte seca, a solução é imediata, já que (5.8) define uma equação homogênea. Então:

$$U_2(y) = \sum_{j=1}^4 d_j \phi_j(y) \quad (5.115)$$

### 5.5.1 - Aplicação da condição de contorno da interface

A condição de contorno em S1 estabelece:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho_f \frac{\partial^2 u_1(y, t)}{\partial t^2} \quad \therefore \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \rho_f \omega^2 U_1(y) \quad (5.116)$$

Então, substituindo (5.103) na expressão acima:

$$- \sum_{n=n_0}^{\infty} E_n \sqrt{\hat{\alpha}_n} \cos(\kappa_n y) = \rho_f \omega^2 U_1(y) \quad (5.117)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_1(y) = - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{E_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} \cos(\kappa_n y) \quad (5.118)$$

A substituição de (5.114) em (5.118) resulta em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j \phi_j(y) + \sum_{n=n_0}^{\infty} F_n \cos(\kappa_n y) = - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{E_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} \cos(\kappa_n y) \quad (5.119)$$

Esta equação pode ser resolvida com a utilização da propriedade de ortogonalidade da função cosseno, de forma semelhante aos casos anteriores. Então, multiplicando ambos os lados por  $\cos(\kappa_n y)$  e integrando de 0 a  $L_y$ , em  $y$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 c_j \int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy + F_n \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \\ = -\frac{E_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \end{aligned} \quad (5.120)$$

Definindo:

$$I_n = \int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy \quad ; \quad I_{n,j} = \int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (5.121)$$

A substituição de (5.121) em (5.120) resulta em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} + F_n I_n = -\frac{E_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} I_n \quad (5.122)$$

A expressão (5.111) indica que:

$$-E_n = F_n EI (\kappa_n^4 - \varphi^4) \quad (5.123)$$

que pode ser substituída em (5.122), resultando em:

$$\sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} + F_n I_n = F_n I_n \frac{EI (\kappa_n^4 - \varphi^4) \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} \quad (5.124)$$

A manipulação algébrica de (5.124) estabelece:

$$F_n I_n \left\{ 1 - \left[ \frac{EI (\kappa_n^4 - \varphi^4) \sqrt{\hat{\alpha}_n}}{\rho_f \omega^2} \right] \right\} = -\sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} \quad (5.125)$$

Então:

$$F_n = \sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j} G_n \quad (5.126)$$

onde:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{EI(\kappa_n^4 - \varphi^4)}{\rho_f \omega^2} \sqrt{\hat{\alpha}_n} \right] - 1 \right\}} \quad (5.127)$$

Esta última expressão pode ser simplificada com a introdução de (5.33) e (5.35), além da definição de  $\kappa_n = \tilde{n}\pi/L_y$ , com  $\tilde{n} = (2n - 1)/2$ . Então:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{\left[ (\tilde{n}\pi)^4 - \left( \frac{\omega}{\omega_b} \right)^2 \right]}{\frac{\rho_f}{\rho_s F} \left( \frac{\omega}{\omega_b} \right)^2} \sqrt{\hat{\alpha}_n} \right] - 1 \right\}} \quad (5.128)$$

Definindo:

$$\omega = \chi^2 \frac{\pi c}{L_y} = \chi^2 \omega_{cav}^1 \quad (5.129)$$

e operando o termo  $\sqrt{\hat{\alpha}_n}$  de (5.128) :

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{\left[ (\tilde{n}\pi)^4 - \left( \frac{\omega}{\omega_b} \right)^2 \right]}{\frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} \left( \frac{\omega}{\omega_b} \right)^2} \pi \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.130)$$

Esta última expressão pode ser simplificada mais uma vez com a introdução dos seguintes parâmetros adimensionais:



$$\beta_1 = \frac{\omega_b}{\omega_{cav}^1} \quad e \quad \beta_2 = \frac{\rho_f L_y}{\rho_s F} \quad (5.131)$$

Então:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (\tilde{n}\pi)^4 - \chi^4]}{1} \frac{\pi \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.132)$$

O parâmetro  $\varphi$  é definido por (5.42), e deverá ser utilizado na base de funções indicada em (5.113).

Portanto, as soluções das partes molhada e seca serão dadas, respectivamente, pelas equações (5.133) e (5.134). Os parâmetros envolvidos nestas formulações são apresentados na Tabela 5.16.

$$U_1(y) = \sum_{j=1}^4 \left[ \phi_j(y) + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(y) \right] c_j \quad (5.133)$$

$$U_2(y) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(y) d_j \quad (5.134)$$

### 5.5.2 - Resumo dos principais parâmetros

A Tabela 5.16 apresenta o resumo dos principais parâmetros envolvidos neste caso.

Tabela 5.16 – Resumo da solução do Caso 2A com  $L_x \rightarrow \infty$

$G_n$	$I_n$	$I_{n,j}$
$\frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (\tilde{n}\pi)^4 - \chi^4]}{1} \frac{\pi \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}}$	$\int_0^{L_y} [\cos(\kappa_n y)]^2 dy$	$\int_0^{L_y} \phi_j(y) \cos(\kappa_n y) dy$
$\kappa_n$	$Y_n$	$\varphi$
$\frac{(2n-1)\pi}{2L_y}$	$\cos(\kappa_n y)$	$\frac{\chi}{L_y} \sqrt{\frac{1}{\beta_1}}$
$n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$	$\tilde{n} = (2n-1)/2$	

Deve-se observar que a Tabela 5.16 apresenta grande semelhança com os resultados ilustrados na Tabela 5.6. Na verdade, os únicos parâmetros diferentes são dados pelos índices  $n$  e por  $G_n$ . O termo  $G_n$  apresentado na Tabela 5.6 pode ser reduzido ao apresentado nesta última tabela. Para isto, basta apenas inverter os termos dos radicais com a utilização do número imaginário  $i$ , que será cancelado no numerador e denominador, pois  $\tanh(ia) = i \tanh(a)$ . Então:

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (\tilde{n}\pi)^4 - \chi^4]}{\tanh(\pi r \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4})} \frac{\pi \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.135)$$

Lembrando que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1 \quad (5.136)$$

Assim, assumindo  $r \rightarrow \infty$  e substituindo esta última expressão em (5.135):

$$G_n = \frac{1}{I_n \left\{ \left[ \frac{[\beta_1^2 (\tilde{n}\pi)^4 - \chi^4]}{1} \frac{\pi \sqrt{\tilde{n}^2 - \chi^4}}{\beta_2 \chi^4} \right] - 1 \right\}} \quad (5.137)$$

indicando uma expressão idêntica a apresentada na Tabela 5.16. Assim, pode-se concluir que o Caso 2A com  $r \rightarrow \infty$  corresponde exatamente a solução desenvolvida neste item. Entretanto, atenção especial deve ser dada aos índices envolvidos, já que no Caso 2A a solução tem início em  $n = 1$ . Para uma cavidade com comprimento infinito o termo no radical deverá obrigatoriamente ser positivo. Portanto, as duas soluções serão idênticas somente nos casos em que  $n_0 = 1$ . Esta condição implica em frequência do problema inferior a primeira ressonância da cavidade.

### 5.5.3 - Aplicação a uma viga engastada-livre com cavidade preenchida

Neste caso será analisada uma cavidade preenchida ( $L_y = H$ ) associada a uma viga engastada-livre. Assim, existirá apenas a solução da parte em contato com o fluido,  $U_1(y)$ .

Este problema é semelhante ao desenvolvido no item 5.4.2. Então, será definida uma matriz 4 x 4, cujo determinante irá estabelecer a equação característica. Portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{14} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{24} \\ \mathcal{R}_{31} & \mathcal{R}_{32} & \mathcal{R}_{33} & \mathcal{R}_{34} \\ \mathcal{R}_{41} & \mathcal{R}_{42} & \mathcal{R}_{43} & \mathcal{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

onde os termos  $\mathcal{R}_{ij}$  são dados por:

$$\mathcal{R}_{1j} = \phi_j(0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n(0) \quad (5.139)$$

$$\mathcal{R}_{2j} = \phi_j'(0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'(0) \quad (5.140)$$

$$\mathcal{R}_{3j} = \phi_j''(H) + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n''(H) \quad (5.141)$$

$$\mathcal{R}_{4j} = \phi_j'''(H) + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_{n,j} G_n Y_n'''(H) \quad (5.142)$$

Onde  $n_0$  deverá satisfazer a relação indicada em (5.104).

#### 5.5.4 - Exemplo numérico

Como exemplo de análise será considerado o sistema apresentado na Tabela 5.15. As mesmas propriedades dos materiais serão utilizadas. A cavidade será tratada como equivalente ao Caso 2A, com comprimento infinito na direção longitudinal, e a estrutura terá condições de contorno relacionadas a uma viga engastada em  $x = 0$  e livre em  $x = H$ .

O determinante de  $\mathcal{R}$ , obtido com o auxílio do software Maple v. 12, resulta na equação de frequências. A Figura 5.6 ilustra a variação desta função ao longo de  $\chi$ , para  $n_0 = 1$ . Nesta análise foram utilizados cinco termos no somatório ( $n = 1..5$ ), precisão numérica de 30 casas decimais e  $\Delta\chi = 0.005$ .

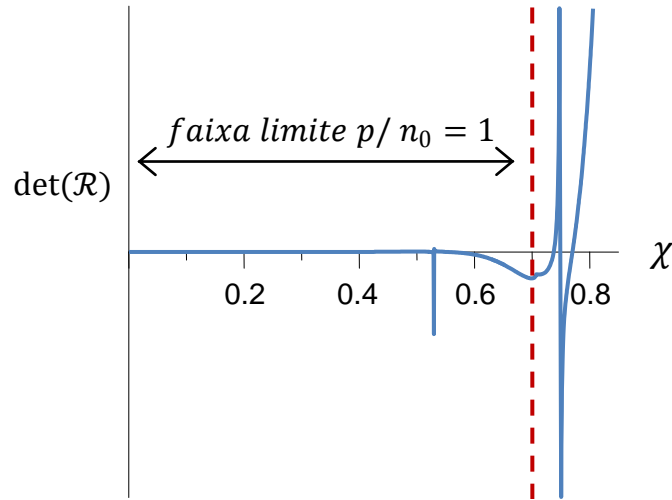


Figura 5.6 – Variação do determinante de  $\mathcal{R}$  ao longo de  $\chi$  para  $n_0 = 1$

A faixa limite indicada na Figura 5.6 está relacionada a primeira ressonância da cavidade na direção transversal, já que para  $n_0 = 1$  a relação definida em (5.105) estabelece:

$$\omega < \frac{\pi c}{2L_y} \quad (5.105)$$

Assim, lembrando que  $\omega = \chi^2 \pi c / L_y$  e substituindo esta última expressão em (5.105):

$$\chi^2 < \frac{1}{2} \quad (5.106)$$

Portanto, somente serão válidas as soluções contidas neste limite. Uma análise detalhada das raízes de  $\det(\mathcal{R})$  é apresentada na Tabela 5.17. São indicadas as frequências analíticas exatas e as soluções analíticas aproximadas (pseudo-acoplado).

Tabela 5.17 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas ( $rad/s$ )

Modo	Analítica exata $c/$ comprimento infinito <sup>1</sup>	Analítica exata $c/$ comprimento finito e $r = 10$	Pseudo- Acoplado <sup>1</sup>
1	7.13	7.13	7.16
2	43.45	43.45	42.98
3	128.82	128.82	128.80

<sup>1</sup> faixa de soluções onde  $n_0 = 1$

Os resultados da Tabela 5.17 indicam soluções idênticas para as cavidades com comprimentos finito e infinito. Esta concordância de soluções ocorre devido ao fato de  $n_0$  ter início em 1. Adicionalmente, a solução aproximada também produz bons resultados,

apesar das deformadas desacopladas serem utilizados no cálculo. Ao contrário dos casos anteriores, a solução pseudo-acoplada apresenta apenas uma solução associada a cada deformada, conforme ilustrado na Figura 5.7.

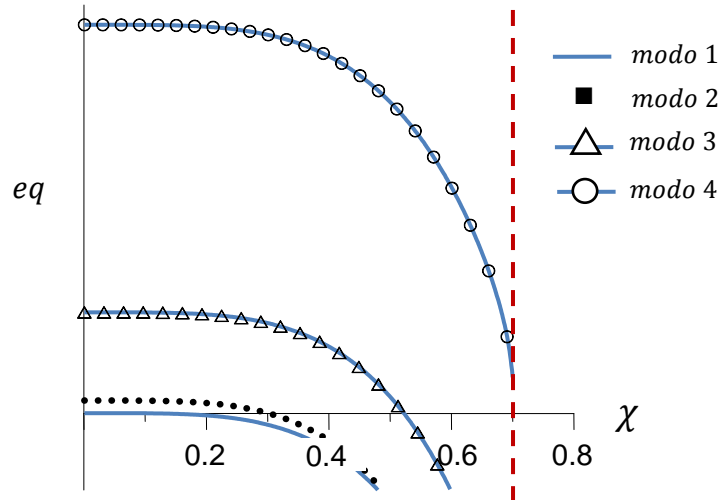


Figura 5.7 – Variação da solução pseudo-acoplada com  $n_0 = 1$  ao longo de  $\chi$

A análise da Figura 5.7 indica que até o terceiro modo existem soluções que antecedem a faixa limite. Deste ponto em diante a solução pseudo-acoplada não produz mais soluções reais, pois o radical envolvido na formulação de  $G_n$  torna-se negativo. Assim, as equações dos modos subsequentes apresentam a característica de uma assíntota vertical na direção da faixa limite.

Para o estudo dos próximos modos será necessário utilizar um índice superior ao anterior. Portanto, adota-se  $n_0 = 2$ . As soluções válidas serão as localizadas entre a faixa limite anterior ( $\sqrt{1/2}$ ) e a próxima faixa limite ( $\sqrt{3/2}$ ). A Tabela 5.18 ilustra as soluções obtidas. No cálculo exato foi utilizada uma variação de  $n = 2..10$ .

Tabela 5.18 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas ( $rad/s$ )

Modo	Análítica exata c/ comprimento infinito <sup>1</sup>	Pseudo-Acoplado <sup>1</sup>
4	265.49	268.06
5	441.93	451.30
6	662.53	678.32

<sup>1</sup> faixa de soluções onde  $n_0 = 2$

Mais uma vez observa-se uma boa concordância entre as soluções exata e aproximada.

Uma alternativa para a interpretação deste problema com o procedimento pseudo-acoplado consiste em construir o gráfico da parte real da equação. Assim, elimina-se a necessidade de variar o índice  $n_0$ . A solução do modo relacionado estará contida entre duas faixas limites. A Figura 5.8 esclarece, ilustrando a equação do quinto modo do problema.

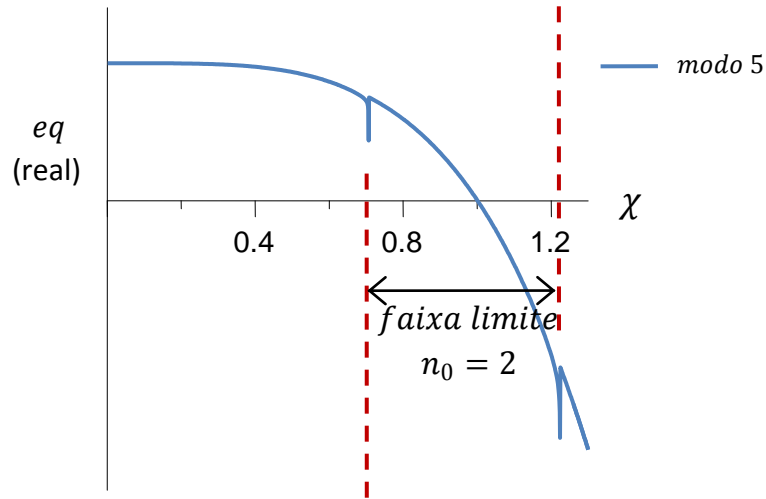
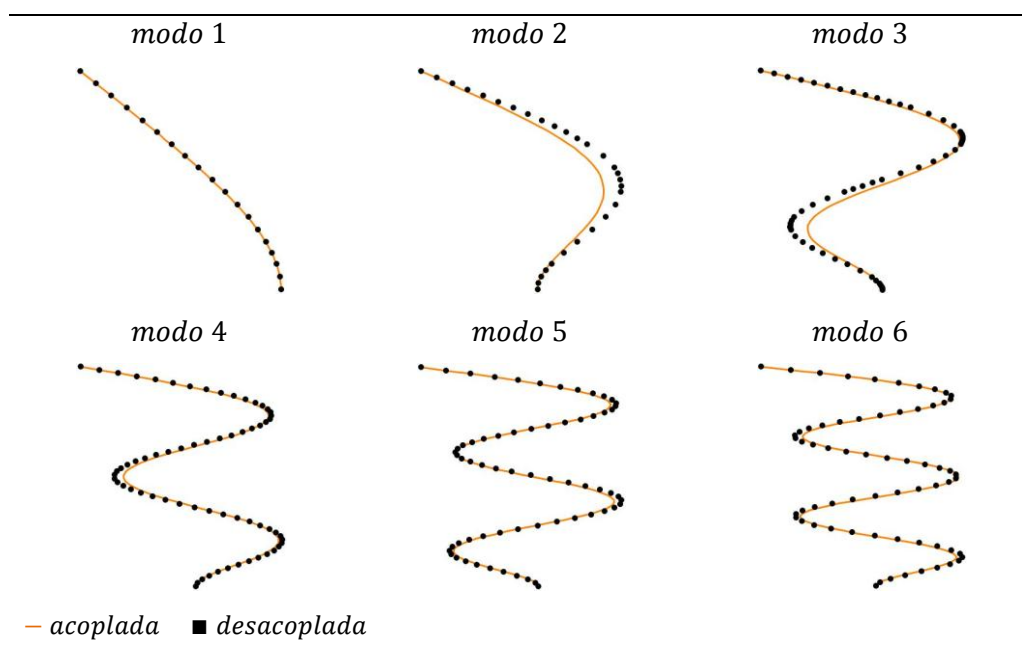


Figura 5.8 – Variação da solução pseudo-acoplada ao longo de  $\chi$  (parte real)











Portanto, neste caso, o procedimento pseudo-acoplado produz não só soluções satisfatórias, como também serve de parâmetro para busca do índice  $n_0$ . Nota-se também que cada modo produz uma única solução. A Tabela 5.19 ilustra as deformadas da estrutura (normalizadas em  $y = H$ ).

Tabela 5.19 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura



A Tabela 5.20 ilustra os resultados das freqüências e modos da estrutura e cavidade, obtidos com a solução exata. A análise destes resultados indica, para os três primeiros modos, configurações idênticas às apresentadas na Tabela 5.15. Adicionalmente, observa-se que não existem modos com características da cavidade. Os valores das freqüências, quando comparados aos resultados da Tabela 5.14, indicam características de massa adicional, com valores menores que os obtidos para a estrutura no vácuo.

Tabela 5.20 – Freqüências e modos acoplados (comprimento longitudinal infinito)

$\beta_1 = 0.005$			
Modo	$\omega$ (rad/s)	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	7.13		
2	43.45		
3	128.82		
4	265.49		
5	441.93		

Esta última tabela revela as principais diferenças existentes entre as soluções com comprimento finito e infinito na direção longitudinal. Até a primeira ressonância da cavidade as soluções são idênticas. Entretanto, deste ponto em diante os resultados passam a diferir. Para a cavidade com comprimento finito passam a surgir modos com características da cavidade, com perturbações na interface. Estes modos incluem repetições de modos da estrutura, podendo ser modificados pelo fluido. Para a cavidade com comprimento infinito as soluções continuam sendo de natureza exponencial, com um

decaimento na direção longitudinal. Cada modo é associado a uma determinada deformada da estrutura no vácuo, que pode ser alterada pela presença do fluido. Não existe repetição de deformadas. Assim, a quantidade de modos acoplados será igual à quantidade de modos da estrutura.

A solução de uma cavidade infinita define uma particularidade matemática que não pode ser representada pelo modelo de cavidade finita. Ainda que se adote um valor de  $r$  infinitamente grande, esta última solução continuará apresentando variações dos modos da cavidade. No modelo infinito estes modos são eliminados, pois apenas soluções que atendem a condição de decaimento exponencial são válidas. Assim, cria-se uma incompatibilidade de modelos, pois para um comprimento finito (por maior que seja) irão existir soluções típicas da cavidade, enquanto para um comprimento infinito o mesmo não irá ocorrer. Embora não tenham sido apresentadas, soluções idênticas para o quarto, quinto e sexto modos poderiam ter sido obtidas com o modelo finito caso o índice  $n$  fosse tomado com início em 2.

Outro parâmetro de interesse neste tipo de problema está relacionado ao fator  $\beta_2$ . Como exemplo, será considerada uma redução da espessura  $F$ , mantendo constante o fator  $\beta_1$  (por meio do aumento do módulo de elasticidade). Desta forma torna-se possível avaliar os efeitos deste parâmetro em uma estrutura com mesmos valores de frequências no vácuo. Assim, adota-se  $E = 2 \times 10^{10} Pa$  e  $F = 0.5m$ . Neste caso  $\beta_2 \cong 2.56$ , que corresponde ao dobro do valor estudado anteriormente. A Tabela 5.21 ilustra os resultados das frequências obtidas para uma cavidade com comprimento infinito na direção longitudinal.

Tabela 5.21 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas ( $rad/s$ )

$\beta_1 = 0.005$ e $\beta_2 \cong 2.56$			
Modo	Analítica exata c/ comprimento infinito <sup>1</sup>	Analítica exata c/ comprimento finito e $r = 10$	Pseudo- Acoplado <sup>1</sup>
1	6.42	6.42	6.44
2	39.12	39.12	37.75
3	119.75	119.75	116.64

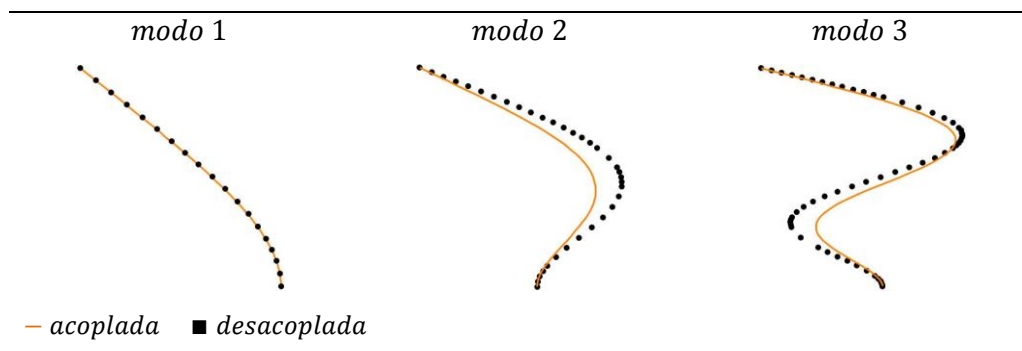
<sup>1</sup> faixa de soluções onde  $n_0 = 1$

Os resultados da Tabela 5.21 indicam soluções idênticas para as cavidades com comprimentos finito e infinito. Nota-se também uma boa concordância entre as soluções exata e aproximada, mas com uma diferença maior que a encontrada anteriormente.



A análise das deformadas no vácuo e acoplada ilustrada na Tabela 5.22 (normalizadas em  $y = H$ ) ajuda a entender o motivo do maior erro encontrado na solução aproximada. Verifica-se que o incremento do parâmetro  $\beta_2$  não só aumenta a massa adicional acrescentada a estrutura, como também modifica de forma mais efetiva a deformada em relação à configuração no vácuo. Entretanto, os resultados fornecidos pelo método aproximado permanecem satisfatórios, com erros relativos inferiores a 4%.

Tabela 5.22 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura



Uma influência semelhante é obtida quando a relação entre as densidades do fluido e da estrutura sofre um acréscimo. Considerando, por exemplo, a densidade da estrutura como  $\rho_s = 2000\text{kg}/\text{m}^3$  e a mesma espessura da análise anterior, obtém-se  $\beta_2 = 10$ . Para o módulo de elasticidade adota-se  $E \cong 5.13 \times 10^9\text{Pa}$ , que resulta no mesmo valor do parâmetro  $\beta_1$  estudado anteriormente, definido frequências no vácuo equivalentes. A Tabela 5.23 ilustra os resultados das frequências obtidas para uma cavidade com comprimento infinito na direção longitudinal.

Tabela 5.23 – Tabela comparativa das soluções de frequências acopladas ( $\text{rad}/\text{s}$ )

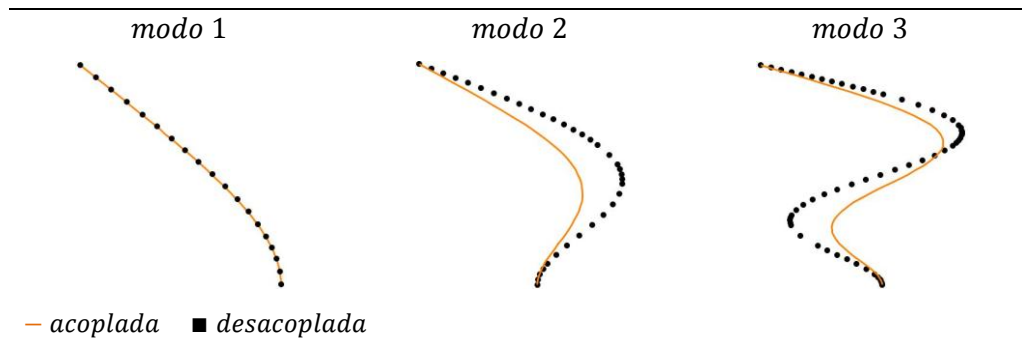
$\beta_1 = 0.005$ e $\beta_2 = 10$			
Modo	Analítica exata c/ comprimento infinito <sup>1</sup>	Analítica exata c/ comprimento finito e $r = 10$	Pseudo- Acoplado <sup>1</sup>
1	4.43	4.43	4.47
2	28.25	28.25	24.92
3	92.46	92.46	84.32

<sup>1</sup> faixa de soluções onde  $n_0 = 1$

A análise dos resultados da Tabela 5.23 indica uma redução de frequências ainda maior que a obtida na Tabela 5.21. A solução aproximada começa a apresentar erros relativos

maiores que 10%, dando indícios de que a presença do fluido está alterando de forma significativa a deformada da estrutura no vácuo. Verifica-se que o modo fundamental é preservado, com erro inferior a 1%. A Tabela 5.24 ilustra as deformadas acopladas e desacopladas (normalizadas em  $y = H$ ).

Tabela 5.24 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura



A comparação das frequências acopladas das Tabelas 5.21 e 5.23 com os resultados desacoplados indicados na Tabela 5.14 fornece conclusões importantes sobre os efeitos do parâmetro  $\beta_2$ . No caso mais crítico a frequência acoplada pode corresponder a apenas 55% do valor da frequência no vácuo. Portanto, maior influência do acoplamento irá ocorrer quando houver um acréscimo na relação entre as densidades do fluido e da estrutura, ou quando a relação entre o comprimento vertical da cavidade e a espessura da estrutura aumentar, ou ambos.

## 5.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram abordadas as soluções exatas para o problema de interação entre uma estrutura reticulada e uma cavidade acústica bidimensional. A estratégia de solução consiste em conservar a constante  $E_n$ , construindo a solução da equação diferencial em função deste parâmetro. Posteriormente a equação é resolvida com a introdução da condição fluido-estrutura em  $S_1$ . O procedimento apresentado é geral e pode ser aplicado em qualquer um dos casos descritos no Capítulo 2, onde as soluções já foram desenvolvidas, facilitando em grande parte o trabalho matemático.

Um sistema de equações lineares pode ser estabelecido com a introdução das condições de contorno da estrutura, podendo ser composto por quatro equações (no caso de uma

cavidade completamente preenchida) ou oito equações (no caso de uma cavidade parcialmente preenchida). A solução dos autovalores é estabelecida por meio das raízes da equação característica, definida como o determinante da matriz  $\mathcal{R}$ . Esta solução não pode ser obtida analiticamente e necessita de um programa de manipulação algébrica. Após a obtenção das frequências podem ser construídas as deformadas modais da estrutura. Estas funções, em conjunto com as frequências, podem ser substituídas nas soluções do Capítulo 2, fornecendo os modos da cavidade acoplada.

Os resultados encontrados indicam que a presença do fluido pode alterar as deformadas modais da estrutura no vácuo. Esta modificação é prejudicial para a qualidade da solução pseudo-acoplada, tendo em vista que são utilizadas as deformadas desacopladas da estrutura nas formulações. Verifica-se que, geralmente, os efeitos são pequenos nos modos iniciais e a solução analítica aproximada produz bons resultados. A grande vantagem da solução pseudo-acoplada consiste em produzir um indicativo do modo dominante da estrutura na solução. Assim, ao contrário da solução exata, a busca por frequências acopladas é realizada apenas para um modo pré-determinado da estrutura. A facilidade de interpretação da formulação é um dos grandes atrativos do método, que não envolve determinantes de matrizes na solução do problema. Adicionalmente, os termos envolvidos na matriz  $\mathcal{R}$  da solução exata são compostos por séries infinitas, impossibilitando a construção de soluções sem o truncamento da série.

No caso de problemas com simetria tanto das condições de contorno da estrutura, como da cavidade, a interpretação das soluções torna-se mais simples. Foi exatamente o que ocorreu no Caso 3A. Assim, verifica-se que modos simétricos da estrutura irão produzir modos simétricos da cavidade. O contrário ocorre para modos anti-simétricos. A combinação de modos também é possível, já que apenas o Caso 1A tem somatório eliminado na solução analítica.

Para todos os casos estudados foi possível perceber que os modos acoplados correspondentes a cavidade são variações das ressonâncias deste sistema, obtidas com a substituição da fronteira vibrante por uma parede rígida. A deformada da estrutura acompanha a distribuição de pressões da interface, produzindo uma configuração compatível. Quanto mais próxima for a frequência acoplada de uma determinada ressonância da cavidade, maior será a dominância deste modo.

A análise dos casos voltados ao problema de interação barragem-reservatório revela basicamente duas abordagens distintas: cavidades com comprimento finito e infinito na direção longitudinal. No primeiro sistema um parâmetro de grande interesse é dado pela primeira ressonância da cavidade desacoplada. Para cavidades muito longas ( $r \rightarrow \infty$ ) este valor acaba sendo reduzido a frequência na direção transversal. O número de modos acoplados da estrutura que antecede a primeira ressonância está diretamente relacionado ao fator  $\beta_1$ . Para uma mesma cavidade uma diminuição neste parâmetro implica em uma maior quantidade de modos, que surgem na mesma seqüência dos modos desacoplados da estrutura. É interessante notar que todas estas configurações são típicas de massa adicional, com decaimento exponencial na direção  $x$ . Frequências maiores que a primeira ressonância surgem com a participação de modos da cavidade, com perturbações localizadas próximas a interface (podendo ocorrer a repetição de modos da estrutura). Para cavidades com comprimento infinito os modos sempre se enquadram em soluções com decaimento exponencial, sendo consequência do desenvolvimento matemático, que impede soluções trigonométricas (por não apresentar limite definido quando  $x \rightarrow \infty$ ). Adicionalmente, observa-se que os modos da solução com comprimento infinito surgem na mesma seqüência dos modos da estrutura, sem repetições. Assim, a primeira ressonância da cavidade desacoplada define o limite entre soluções idênticas nas abordagens com comprimento finito e infinito. As soluções desta última abordagem, que são independentes de  $L_x$ , podem ser utilizadas para o cálculo da distância longitudinal onde  $P \cong 0$ , possibilitando a representação do problema por meio de uma cavidade finita do Caso 2A. Esta estratégia permite, por exemplo, a construção de modelos numéricos onde o reservatório é discretizado com o comprimento mínimo necessário para a captura de uma determinada faixa de modos do problema.

Uma análise adicional do parâmetro  $\beta_2$  revela que duas estruturas equivalentes, com valores idênticos de frequências no vácuo, podem ser submetidas a efeitos mais intensos produzidos pelo fluido. Na verdade, o incremento deste parâmetro reduz o valor da frequência e modifica de forma mais significativa a deformada acoplada em relação à configuração correspondente no vácuo. Assim, estruturas mais esbeltas e menos densas em relação ao fluido estão mais sujeitas aos efeitos de acoplamento.

Na prática pode surgir o questionamento sobre qual dos dois modelos (cavidade finita ou infinita) seria o mais correto para representação do sistema barragem-reservatório. Sabe-se

que por maior que seja a extensão de um reservatório, esta ainda terá um comprimento finito. Por outro lado, a introdução de uma fronteira finita onde a pressão é nula também implica em limitações, já que não se sabe a priori o valor deste comprimento. Além disso, a imposição desta condição em um reservatório finito é incompatível com o contorno apresentado na fronteira, que não terá pressão nula. Adicionalmente, deve-se lembrar que existem outras incertezas presentes no problema, tais como os efeitos tridimensionais da geometria e mecanismos dissipativos do reservatório. Apesar destas limitações, pode-se concluir que as duas abordagens apresentam soluções idênticas para frequências localizadas abaixo da primeira ressonância da cavidade. O estudo da resposta dinâmica nesta faixa de frequências será apresentado no próximo capítulo, permitindo avaliar a contribuição destes modos na resposta total do sistema.

## 6 - SOLUÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO

### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão desenvolvidas soluções no domínio do tempo envolvendo os conceitos apresentados nos capítulos anteriores. Até este ponto as análises foram concentradas em vibrações livres do sistema estrutura-cavidade, determinando as frequências e modos do problema acoplado.

No procedimento pseudo-acoplado o sistema é representado por uma solução em coordenadas generalizadas, onde as frequências do problema são obtidas com a introdução da deformada desacoplada na equação de frequências. Este valor, uma vez obtido, permite o cálculo da massa generalizada produzida pelo fluido. Com os parâmetros generalizados definidos, torna-se possível a construção da equação de equilíbrio dinâmico aproximada do modo associado. Raciocínio semelhante pode ser utilizado para a solução exata obtida no capítulo anterior, definindo a equação de equilíbrio dinâmico exata para um determinado modo de vibração do sistema. Uma vez determinada, esta expressão irá possibilitar o cálculo da resposta dinâmica para uma excitação arbitrária. É evidente que esta solução será válida apenas para um único modo do sistema. Entretanto, o procedimento de superposição modal poderá ser aplicado, incluindo os efeitos de modos superiores na resposta dinâmica. Análises numéricas do sistema acoplado serão conduzidas com o objetivo de validar as soluções obtidas e verificar a influência do conjunto de modos na resposta dinâmica. Estudos adicionais sobre a influência dos parâmetros  $f_1$  e  $f_2$ , e da compressibilidade do fluido também serão realizados, permitindo estabelecer conclusões gerais sobre as variáveis envolvidas.

A Tabela 6.1 ilustra as principais características das soluções empregadas neste capítulo.

Tabela 6.1 – Principais características das soluções em vibração livre

Método	Frequências	Deformadas da Estrutura <sup>2</sup>	Parâmetros Generalizados
Pseudo-Acoplado	Aproximadas	Inalteradas pelo fluido	Aproximados <sup>1</sup>
Exato	Exatas	Alteradas pelo fluido	Exatos

<sup>1</sup> A qualidade dos resultados é tanto maior, quanto mais discreta for a alteração das deformadas modais da estrutura produzida pelo fluido. <sup>2</sup> Quando comparadas às configurações modais no vácuo.

## 6.2 - RESPOSTA ESTRUTURAL PARA VIBRAÇÕES LIVRES

No caso das estruturas estudadas nos capítulos anteriores torna-se necessária a verificação da influência de determinadas variáveis na resposta dinâmica. Assim, serão conduzidas quatro análises do Caso 2A com comprimento  $L_x \rightarrow \infty$ . Diferentes parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  serão estudados, em exemplos onde o fluido poderá ser tratado como compressível ou incompressível. O principal objetivo deste estudo é a determinação dos parâmetros generalizados em vibração livre, que serão em seguida aplicados à equação de equilíbrio dinâmico do sistema em vibração forçada.

Em todas as análises adota-se uma cavidade com comprimento longitudinal infinito preenchida por água, em contato com uma viga engastada-livre que poderá ser caracterizada por dois materiais distintos. As propriedades geométricas e dos materiais são definidas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Propriedades geométricas e dos materiais

Estrutura 1	$H$	10 m	Fluido (Água)	$L_x$	$\infty$
	$F$	1 m			
	$E$	$1 \times 10^{11} Pa$		$L_y$	10 m
	$\rho_s$	$7800 kg/m^3$			
Estrutura 2	$H$	10 m		$c^*$	1500 m/s
	$F$	0.70 m			
	$E$	$7 \times 10^{10} Pa$		$\rho_f$	$1000 kg/m^3$
	$\rho_s$	$2690 kg/m^3$			

\* para os casos onde o fluido é incompressível  $c \rightarrow \infty$  (adotado:  $10^5 m/s$ )

As propriedades ilustradas na Tabela 6.2 garantem frequências no vácuo praticamente idênticas para as estruturas 1 e 2, que são apresentadas na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Frequências desacopladas das estruturas 1 e 2

	Estrutura 1	Estrutura 2
modo	$\omega$ (rad/s)	$\omega$ (rad/s)
1	36.34	36.24
2	227.74	227.13
3	637.76	636.02
4	1249.68	1246.28

Um resumo das estruturas associadas à cavidade, das considerações da compressibilidade do fluido, e dos valores dos parâmetros  $f_1$  e  $f_2$ , em função das análises realizadas é apresentado na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Resumo das análises realizadas

	Análise 1	Análise 2	Análise 3	Análise 4
<i>estrutura</i>	1	1	2	2
<i>fluido</i>	<i>incompressível</i>	<i>compressível</i>	<i>incompressível</i>	<i>compressível</i>
$f_1$	0	0.022	0	0.022
$f_2$	5.311	5.311	1.282	1.282

A escolha de duas estruturas distintas resulta em diferentes valores do parâmetro  $f_2$ . Adicionalmente, a consideração da compressibilidade do fluido produz o mesmo valor do parâmetro  $f_1$ , tanto para a Estrutura 1, como para a Estrutura 2. Para um fluido incompressível o valor deste parâmetro tende a zero. Assim, as quatro análises desenvolvidas permitem avaliar as seguintes características: (1) efeito da compressibilidade do fluido em um mesmo tipo de estrutura, o que equivale a uma verificação da influência de  $f_1$  para  $f_2$  constante; (2) efeito da relação entre as massas da estrutura e do fluido na interface, indicando a influência do parâmetro  $f_2$  quando  $f_1$  é mantido constante em fluidos compressíveis e incompressíveis.

Os parâmetros generalizados da estrutura desacoplada e do sistema acoplado em vibração livre, das análises indicadas na Tabela 6.4, são desenvolvidos nos itens a seguir.

### 6.2.1 - Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada

A deformadas exatas dos dois primeiros modos para uma viga engastada-livre são definidas, respectivamente, pelas Equações (6.1) e (6.2).

$$\begin{aligned} \phi_1\left(\frac{y}{H}\right) = & \frac{1}{2} \cosh\left(1.875 \frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(1.875 \frac{y}{H}\right) - 0.367 \sinh\left(1.875 \frac{y}{H}\right) \\ & + 0.367 \sin\left(1.875 \frac{y}{H}\right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_2\left(\frac{y}{H}\right) = & \frac{1}{2} \cos\left(4.694 \frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2} \cosh\left(4.695 \frac{y}{H}\right) - 0.509 \sin\left(4.694 \frac{y}{H}\right) \\ & + 0.509 \sinh\left(4.694 \frac{y}{H}\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$



Os parâmetros generalizados  $\tilde{M}$  e  $\tilde{K}$ , relacionados à extremidade livre da viga, podem ser obtidos com as Equações (4.11) e (4.12). A Tabela 6.5 indica estes resultados.

Tabela 6.5 – Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada

Modo	Parâmetro	Estrutura 1	Estrutura 2
1º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$0.47 \times 10^4$	$1.95 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$6.18 \times 10^6$	$2.58 \times 10^7$
2º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$0.47 \times 10^4$	$1.95 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$2.43 \times 10^8$	$1.01 \times 10^9$

Os parâmetros indicados na Tabela 6.5 permitem a construção das equações de movimento em vibração livre relacionadas a cada um dos modos indicados. De maneira geral, para um dado modo  $j$ :

$$\tilde{M}_j \ddot{X}(t) + \tilde{K}_j X(t) = 0 \quad (6.3)$$

### 6.2.2 - Frequências e modos das Análises 1 e 2

A solução das frequências e modos acoplados pode ser obtida: com a utilização do procedimento pseudo-acoplado, ou com a aplicação da solução exata apresentada no capítulo anterior. As Tabelas 6.6 e 6.7 ilustram estes resultados.

Tabela 6.6 – Soluções de frequências ( $rad/s$ ) e modos acoplados (Análise 1)













Modo	Analítica exata	Pseudo Acoplado	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	24.16	24.30		
2	149.93	138.77		
3	477.66	454.89		

Tabela 6.7 – Soluções de frequências ( $rad/s$ ) e modos acoplados (Análise 2)

Modo	Analítica exata	Pseudo Acoplado	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	24.14	24.28		
2	144.35	131.78		
3*	518.84	494.43		

\* obtido com  $n_0 = 2$

A solução da Análise 2 (fluido compressível) apresenta o terceiro modo obtido com  $n_0 = 2$ . Neste caso, a frequência calculada é maior que a primeira ressonância da cavidade ( $235.62 rad/s$ ), o que justifica a utilização deste índice. Na Análise 1 (fluido incompressível) esta condição não é observada, já que a consideração de um fluido incompressível leva a primeira ressonância a um valor infinito.

A solução analítica aproximada indica frequências do modo fundamental praticamente idênticas às obtidas com a solução exata. Nos demais modos um erro relativo é observado. As deformadas acopladas dos modos superiores são alteradas pela presença do fluido, modificando suas configurações em relação às deformadas da estrutura no vácuo. As Tabelas 6.8 e 6.9 ilustram estes resultados (normalizados em  $y = H$ ).

Tabela 6.8 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 1)

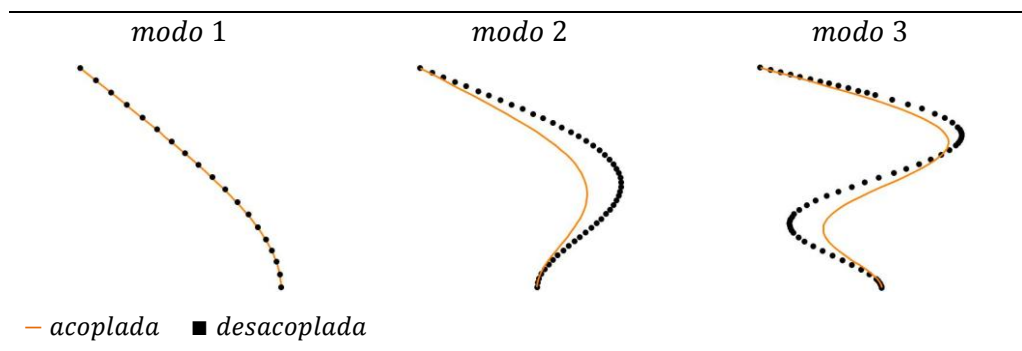
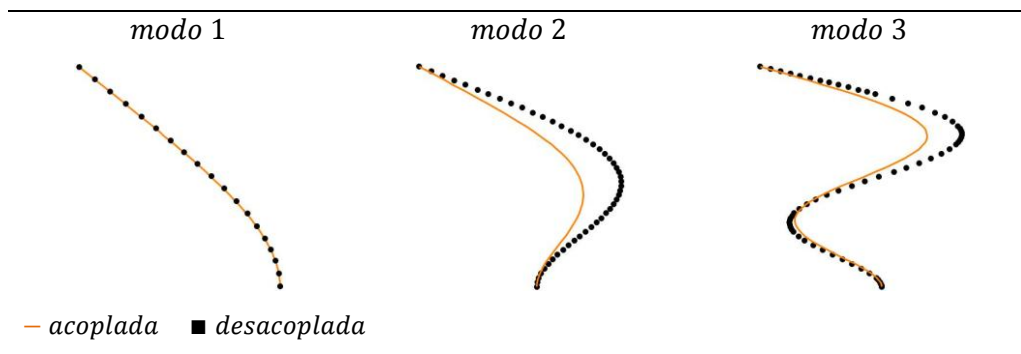


Tabela 6.9 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 2)



Observa-se que a modificação das deformadas modais da estrutura ocorre tanto na análise compressível, como na incompressível. Uma comparação entre as duas configurações acopladas, para um dado modo, permite avaliar a importância dos efeitos de compressibilidade do fluido na deformada estrutural acoplada. A Figura 6.1 ilustra os resultados obtidos para o segundo modo, onde é possível notar que alterações de pequena importância ocorrem com a consideração desta hipótese.

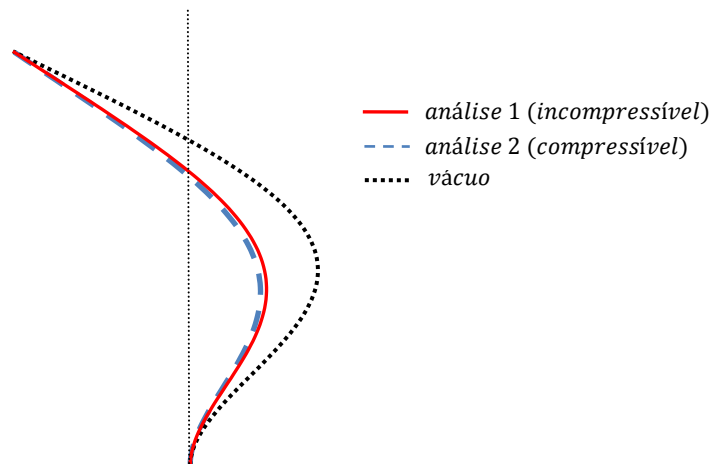


Figura 6.1 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de  $c$ )

### 6.2.3 - Parâmetros generalizados das Análises 1 e 2

O cálculo dos parâmetros generalizados pode ser desenvolvido: com as deformadas desacopladas (solução aproximada), o que facilita em grande parte o trabalho matemático (já que a solução exata dos deslocamentos é composta por uma série infinita, que deve ser truncada), ou com a deformada acoplada exata (solução exata). No caso acoplado surge o termo de massa generalizada do fluido, dado por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \int_0^{L_y} \frac{P(0,y)}{\bar{A}} \phi(y) dy \quad (6.4)$$

Assim, a massa generalizada total do sistema será definida por:

$$\tilde{M}_{total} = \tilde{M} + \tilde{M}_{fluido} = \int_0^H \mu(y) [\phi(y)]^2 dy + \int_0^{L_y} \frac{P(0,y)}{\bar{A}} \phi(y) dy \quad (6.5)$$

A Tabela 6.10 ilustra os parâmetros generalizados obtidos com as soluções aproximada e exata, para as Análises 1 e 2. Para o primeiro modo são observados valores muito próximos em ambas as análises, tanto para a solução aproximada, como para a solução exata. Estes resultados são facilmente explicados com as frequências das Tabelas 6.6 e 6.7, e com as deformadas das Tabelas 6.8 e 6.9. Tanto as frequências, como as deformadas, são praticamente idênticas, independente do método de solução e da consideração de compressibilidade do fluido. É interessante notar que este fenômeno não ocorre no segundo modo, onde a solução aproximada produz parâmetros muito diferentes dos observados na solução exata. Adicionalmente, a hipótese de fluido compressível produz uma pequena redução (em torno de 4%) na frequência acoplada deste modo.

Tabela 6.10 – Parâmetros generalizados da estrutura acoplada (Análises 1 e 2)

Modo	Parâmetro	Análise 1		Análise 2	
		aproximada	exata	aproximada	exata
1º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$0.47 \times 10^4$	$0.48 \times 10^4$	$0.47 \times 10^4$	$0.48 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$6.18 \times 10^6$	$6.36 \times 10^6$	$6.18 \times 10^6$	$6.36 \times 10^6$
	$\tilde{M}_{fluido} (Ns^2/m)$	$0.58 \times 10^4$	$0.61 \times 10^4$	$0.59 \times 10^4$	$0.61 \times 10^4$
2º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$0.47 \times 10^4$	$0.28 \times 10^4$	$0.47 \times 10^4$	$0.27 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$2.43 \times 10^8$	$1.17 \times 10^8$	$2.43 \times 10^8$	$1.06 \times 10^8$
	$\tilde{M}_{fluido} (Ns^2/m)$	$0.80 \times 10^4$	$0.26 \times 10^4$	$0.94 \times 10^4$	$0.26 \times 10^4$

Quando os resultados do primeiro modo da Tabela 6.10 são comparados aos da Tabela 6.5 (Estrutura 1, desacoplada), verifica-se que os parâmetros generalizados de massa e rigidez permanecem praticamente inalterados, sendo consequência direta da deformada acoplada deste modo, que é semelhante à deformada da estrutura no vácuo. Para o segundo modo acoplado, estes parâmetros generalizados são alterados de forma significativa.

Para soluções acopladas, a equação de movimento de um dado modo  $j$  é definida por:

$$\left[ \tilde{M}_j + (\tilde{M}_{fluido})_j \right] \ddot{X}(t) + \tilde{K}_j X(t) = 0 \quad (6.6)$$

Os parâmetros generalizados presentes em (6.6) são função da deformada modal acoplada. Adicionalmente, o termo de massa generalizada produzido pelo fluido também é função da frequência de vibração ( $\omega$ ).

Os resultados da Tabela 6.10 indicam que a equação de movimento do modo fundamental, praticamente exata, pode ser obtida com a aplicação do procedimento pseudo-acoplado (solução aproximada). A vantagem, neste caso, é a utilização de funções simplificadas (correspondentes aos modos desacoplados da estrutura) para o cálculo dos parâmetros generalizados e frequências acopladas. De maneira geral, o tempo de processamento computacional envolvido na solução com estas equações é reduzido em relação ao cálculo exato.

#### 6.2.4 - Frequências e modos das Análises 3 e 4

As Tabelas 6.11 e 6.12 ilustram os resultados das Análises 3 e 4, obtidos com o procedimento pseudo-acoplado e com a solução exata.

Tabela 6.11 – Soluções de frequências ( $rad/s$ ) e modos acoplados (Análise 3)













Modo	Analítica exata	Pseudo Acoplado	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	31.87	31.93		
2	194.63	192.12		
3	579.16	574.89		

Tabela 6.12 – Soluções de frequências ( $rad/s$ ) e modos acoplados (Análise 4)

Modo	Analítica exata	Pseudo Acoplado	Modo da estrutura	Modo da cavidade
1	31.85	31.91		
2	184.67	180.38		
3*	589.44	585.42		

\* obtido com  $n_0 = 2$

A solução analítica aproximada indica frequências do modo fundamental praticamente idênticas às obtidas com a solução exata. Nos demais modos um erro relativo é observado. As deformadas acopladas dos modos superiores são alteradas pela presença do fluido, modificando suas configurações em relação às deformadas da estrutura no vácuo. As Tabelas 6.13 e 6.14 ilustram estes resultados (normalizados em  $y = H$ ).

Tabela 6.13 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 3)

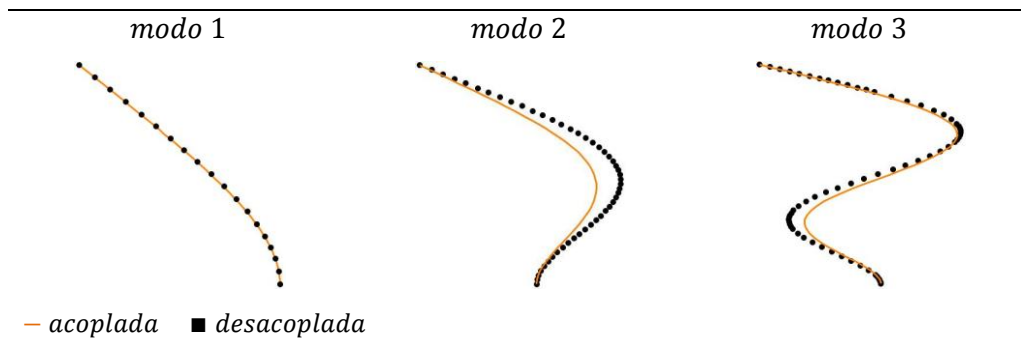
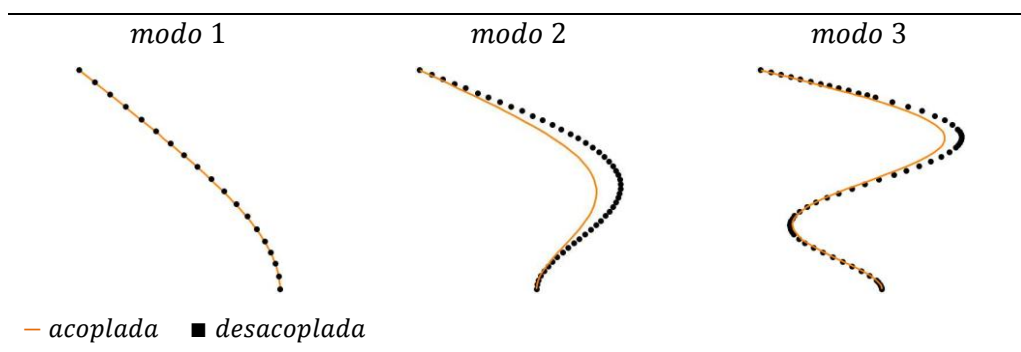


Tabela 6.14 – Deformadas acopladas e desacopladas da estrutura (Análise 4)



Os resultados destas duas análises, quando comparados aos obtidos anteriormente (Análises 3 e 4), indicam uma menor participação dos efeitos do fluido, incluindo menor redução de frequências acopladas (em relação aos respectivos valores no vácuo) e menor alteração da configuração modal em relação ao modo estrutural desacoplado.

A Figura 6.2 ilustra a deformada do segundo modo, relativa às Análises 2 e 4. Observa-se uma maior influência do fluido no primeiro caso estudado, onde o parâmetro  $\beta_2$  é maior.

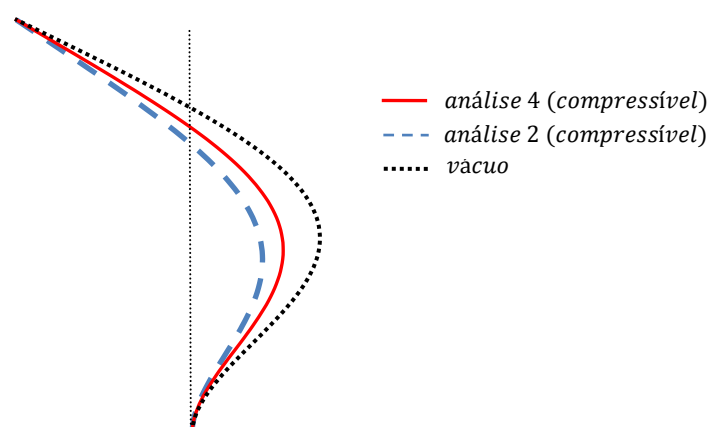


Figura 6.2 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de  $\beta_2$ )

### 6.2.5 - Parâmetros generalizados das Análises 3 e 4

A Tabela 6.15 ilustra os parâmetros generalizados obtidos com as soluções aproximada e exata, para as Análises 3 e 4.

Tabela 6.15 – Parâmetros generalizados da estrutura acoplada (Análises 3 e 4)

Modo	Parâmetro	Análise 3		Análise 4	
		aproximada	exata	aproximada	exata
1º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$1.95 \times 10^4$	$1.98 \times 10^4$	$1.95 \times 10^4$	$1.97 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$2.58 \times 10^7$	$2.60 \times 10^7$	$2.58 \times 10^7$	$2.60 \times 10^7$
	$\tilde{M}_{fluido} (Ns^2/m)$	$0.58 \times 10^4$	$0.59 \times 10^4$	$0.59 \times 10^4$	$0.60 \times 10^4$
2º modo	$\tilde{M} (Ns^2/m)$	$1.95 \times 10^4$	$1.46 \times 10^4$	$1.95 \times 10^4$	$1.32 \times 10^4$
	$\tilde{K} (N/m)$	$1.01 \times 10^9$	$7.27 \times 10^8$	$1.01 \times 10^9$	$6.33 \times 10^8$
	$\tilde{M}_{fluido} (Ns^2/m)$	$0.80 \times 10^4$	$0.48 \times 10^4$	$1.17 \times 10^4$	$0.56 \times 10^4$

Os resultados apresentados na Tabela 6.15 indicam, de forma semelhante ao que ocorre nas Análises 1 e 2, soluções semelhantes para o modo fundamental, independente do método utilizado e da consideração de compressibilidade do fluido. Mais uma vez estes resultados são justificados pela deformada acoplada deste modo, que permanece praticamente inalterada quando comparada à deformada da estrutura no vácuo. O segundo modo, por sua vez, tem seus parâmetros de massa e rigidez generalizados alterados de forma significativa quando comparados aos valores da estrutura desacoplada (Tabela 6.5, Estrutura 2). Os efeitos de compressibilidade do fluido produzem alterações discretas neste modo, conforme indicado na Figura 6.3.

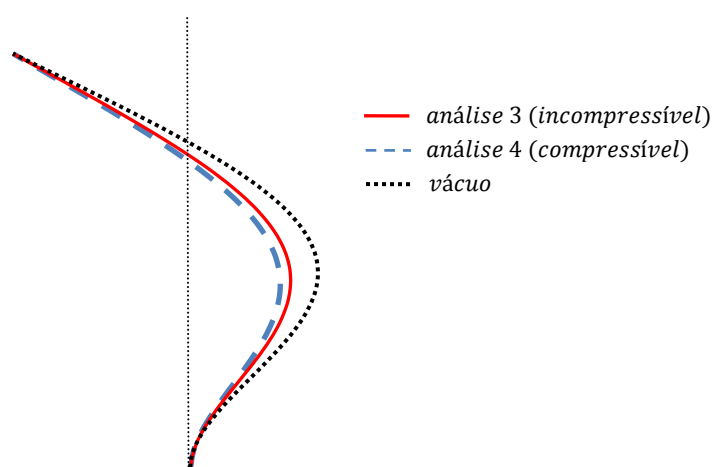


Figura 6.3 – Deformada estrutural acoplada (2º modo, influência de  $c$ )

### 6.2.6 - Comentários gerais sobre as análises apresentadas

Os resultados obtidos nas Análises 1 a 4 permitem estabelecer conclusões importantes sobre as variáveis estudadas. Pode-se perceber, por exemplo, que o parâmetro  $f_2$  exerce grande influência nos valores de frequências e deformadas modais. Nas análises apresentadas, as estruturas 1 e 2 possuem frequências no vácuo equivalentes. Entretanto, a redução de frequências apresenta maior magnitude nas Análises 1 e 2, que possuem maior valor do parâmetro  $f_2$ . Este termo também está relacionado a modificações na deformada da estrutura acoplada, quando comparada à respectiva configuração no vácuo. A Figura 6.2 ilustra este fenômeno, indicando efeitos mais intensos para a Análise 2, que possui maior valor deste parâmetro.

Alterações de frequências e deformadas modais, nos modos iniciais, devido à compressibilidade do fluido, são discretas. De maneira geral, modos com frequências



próximas a primeira ressonância da cavidade recebem maior influência deste parâmetro. No modo fundamental, por exemplo, a influência desta variável é praticamente nula, produzindo frequências equivalentes nas soluções compressível e incompressível. No segundo modo, pequenas alterações são percebidas, relacionadas a uma redução de frequências (em torno de 5%) devido à compressibilidade do fluido. Para este mesmo modo, alterações de maior importância na deformada modal são observadas entre as Análises 3 e 4 (Figura 6.3), quando comparadas às diferenças obtidas entre as Análises 1 e 2 (Figura 6.1). Estes resultados são justificados pela maior proximidade da frequência acoplada da Análise 4 ( $184.67 \text{ rad/s}$ ) em relação a primeira ressonância da cavidade ( $235.62 \text{ rad/s}$ ). Observa-se que a compressibilidade do fluido modifica os parâmetros generalizados obtidos para um determinado modo, conforme indicado nas Tabelas 6.10 e 6.15.

A Tabela 6.16 apresenta um resumo das principais características dos casos estudados, considerando o termo  $f_1$  constante.

Tabela 6.16 – Principais características das análises realizadas ( $f_1$  constante)

Parâmetros		Influência no sistema (viga + cavidade)	
Parâmetro constante	Parâmetro variável	Deformadas modais (estrutura)	Frequências
$c$	$f_2$	<i>alterações importantes, aumentando com o incremento de <math>f_2</math></i>	<i>diminuem à medida que <math>f_2</math> aumenta</i>
$f_2$	$c$	<i>alterações discretas*, para frequências próximas da ressonância da cavidade</i>	<i>diminuem* para frequências próximas da ressonância da cavidade</i>

\* Em relação ao caso incompressível

### 6.2.7 - Efeitos de compressibilidade do fluido e o modo fundamental acoplado

Uma explicação para os efeitos de compressibilidade do fluido surge quando a distribuição de pressões na interface é analisada. No caso incompressível a primeira ressonância da cavidade é infinitamente grande, pois  $c \rightarrow \infty$ . Assim, as pressões hidrodinâmicas tornam-se independentes da frequência acoplada do problema. No caso compressível a primeira ressonância é definida. À medida que a frequência se aproxima deste valor, o campo de

pressões na interface passa a ter sua magnitude amplificada. Isto foi exatamente o que ocorreu na Análise 4, onde o segundo modo tem solução próxima a esta frequência.

Em todas as análises o primeiro modo acoplado permaneceu com configuração praticamente inalterada em relação à solução no vácuo. Isto indica que a deformada desacoplada é capaz de produzir bons resultados para os parâmetros generalizados deste modo. Adicionalmente, percebe-se que, geralmente, esta solução encontra-se distante da primeira ressonância da cavidade. Assim, pode-se supor uma simplificação onde o fluido é tratado como incompressível. Ou seja: independente da frequência acoplada  $\omega$ . Então:

$$P(0, y) = \frac{2\rho\bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \cos(\kappa_n y) \quad (6.7)$$

que corresponde a solução de pressões na interface do Caso 2A com comprimento infinito na direção longitudinal. Portanto, a massa generalizada do fluido será dada pela aplicação da Equação (6.4), onde para a função  $\phi(y)$  será adotada a deformada fundamental desacoplada, indica em (6.1). Assim, a solução truncada no décimo termo da série resulta em:

$$\tilde{M}_{fluido}^1 \cong 0.0593 \rho_f L_y^2 \quad (6.8)$$

A expressão (6.8) indica a massa generalizada do fluido associada ao modo fundamental de uma viga engastada-livre, supondo um fluido incompressível e deformada modal da estrutura inalterada pela presença do fluido.

### 6.3 - RESPOSTA ESTRUTURAL PARA VIBRAÇÕES FORÇADAS

Nesta seção pretende-se avaliar os efeitos de modos superiores na resposta dinâmica do sistema acoplado.

#### 6.3.1 - Resposta transiente dos modos para uma excitação harmônica

Outro estudo importante consiste na avaliação da resposta dinâmica dos modos acoplados em relação a uma excitação harmônica. Supondo uma força concentrada aplicada na extremidade livre da viga, governada pela seguinte equação:

$$Q(t) = A_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) \quad (6.9)$$

onde  $A_1$  representa uma amplitude e  $\bar{\omega}_1$  a frequência da excitação aplicada.

As equações de movimento dos dois primeiros modos da estrutura podem ser avaliadas para a excitação dada por esta última equação. Considerando a Análise 4 (com parâmetros generalizados da solução exata), tem-se:

$$[2.57 \times 10^4]\ddot{X} + [2.60 \times 10^7]X = A_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) \quad (1^\circ \text{ modo}) \quad (6.10)$$

$$[1.88 \times 10^4]\ddot{X} + [6.33 \times 10^8]X = A_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) \quad (2^\circ \text{ modo}) \quad (6.11)$$

Estas duas últimas equações representam um problema clássico de dinâmica das estruturas, cuja solução da equação diferencial, para um sistema partindo do repouso, em um dado modo  $n$  é definida por:

$$X_n(t) = \frac{A_1}{\bar{K}_n} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] [\text{sen}(\bar{\omega}_1 t) - \beta_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (6.12)$$

onde  $\beta_n = \bar{\omega}_1 / \omega_n$ . Este parâmetro encontra-se diretamente relacionado à resposta dos modos na solução de deslocamentos. As Figuras 6.4 e 6.5 ilustram os resultados obtidos, considerando o fator  $A_1 = 10^7 N$ .

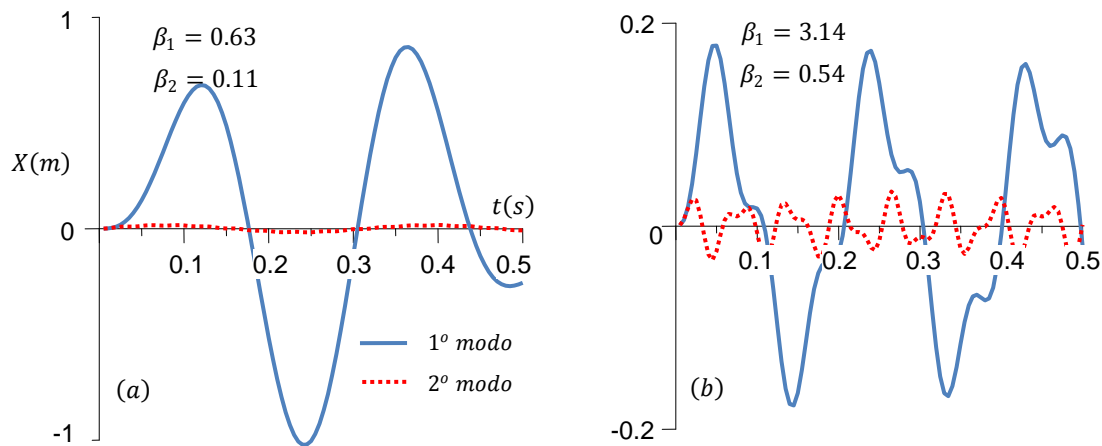


Figura 6.4 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação senoidal)

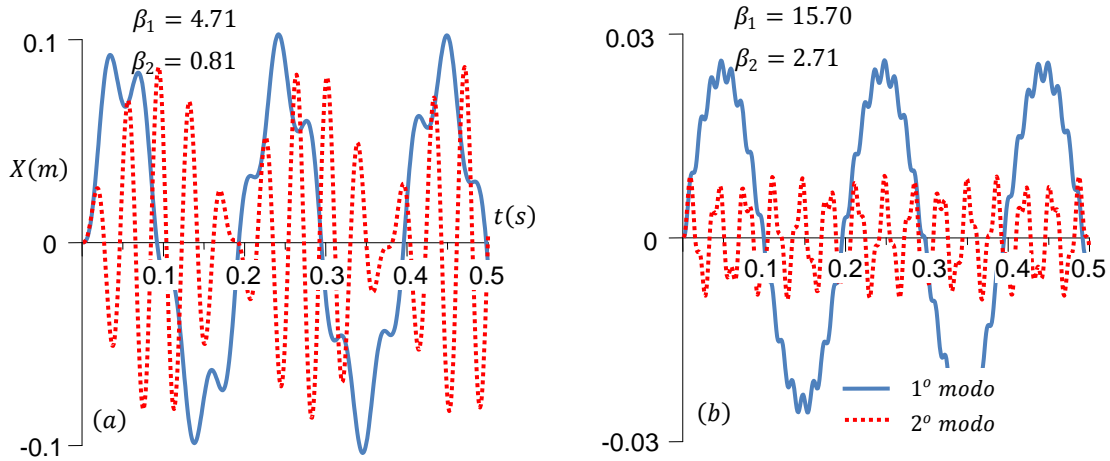


Figura 6.5 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação senoidal)

A análise das Figuras 6.4 e 6.5 revela que valores de  $\beta_1$  menores que 1 excitam apenas o modo fundamental do sistema. À medida que  $\beta_2$  se aproxima de 1, a contribuição do segundo modo passa a ser mais significativa. Isto é exatamente o que ocorre na Figura 6.5a. Neste caso, a participação dos dois modos é praticamente idêntica. Com o aumento de  $\beta_2$  a participação deste modo diminui, sendo sempre menor que a obtida para o primeiro modo. Uma explicação para este fenômeno surge devido à rigidez generalizada de (6.11), que é maior que a indicada em (6.10). Nesta análise valores de  $\beta_1$  próximos a 1 produzem maiores amplitudes que as obtidas quando  $\beta_2 \rightarrow 1$ .

A Equação (6.12) pode ser reescrita em função de duas amplitudes, relacionadas aos termos trigonométricos. Então:

$$X_n(t) = \mathcal{F}_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) - \mathcal{F}_2 \text{sen}(\omega_n t) \quad (6.13)$$

onde  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  são dados por:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{A_1}{\bar{K}_n} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] \quad ; \quad \mathcal{F}_2 = \beta_n \mathcal{F}_1 \quad (6.14)$$

Portanto, a resposta  $X_n(t)$  é composta por duas funções seno, cujas amplitudes estão relacionadas ao parâmetro  $\beta_n$ .

A Figura 6.6 ilustra a variação de  $\mathcal{F}_1$  para os dois modos estudados. O ponto onde  $\beta_n = 0$  define a resposta estática de deslocamentos. Observa-se que para  $\beta_1 = \beta_2$  a amplitude do

primeiro modo será sempre maior que a do segundo modo. Entretanto, para que isto ocorra os dois modos devem ter a mesma frequência, o que não é o caso. Em aplicações práticas pode ocorrer a participação mais efetiva de um determinado modo superior, conforme observado na Figura 6.5a. Neste caso, o valor de  $\beta_2$  se aproxima de 1. Assim, para frequências de excitação distantes da segunda frequência acoplada a resposta será dominada pelo primeiro modo. Para valores de  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \infty$ ,  $\beta_n \rightarrow \infty$  e a diferença entre as duas amplitudes é praticamente constante, sendo resultado do comportamento assintótico desenvolvido pelas duas funções.

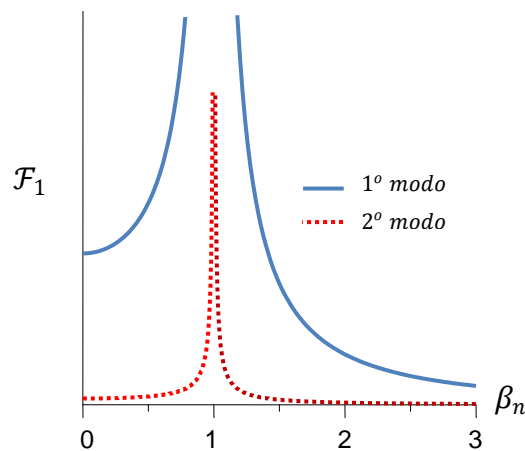


Figura 6.6 – Amplitudes da resposta dinâmica

Outra consideração deve ser feita em relação a excitações compostas por mais de uma frequência. Para o caso de duas frequências de excitação a Equação (6.9) pode ser definida por:

$$Q(t) = A_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) + A_2 \text{sen}(\bar{\omega}_2 t) \quad (6.15)$$

Assim, é possível a ocorrência das seguintes situações: duas frequências distintas associadas a uma mesma amplitude, ou frequências distintas e amplitudes distintas. Nos casos em que as frequências são idênticas a solução é reduzida à obtida anteriormente, onde a amplitude é dada pela soma de  $A_1$  e  $A_2$ .

Para soluções com excitações compostas define-se o parâmetro  $\beta_{ij}$ , dado por:

$$\beta_{ij} = \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_{ni}} \quad (6.16)$$

que indica o valor de  $\beta$  para um dado modo  $i$  devido a uma excitação  $j$

A Figura 6.7 ilustra a resposta de deslocamentos para o caso em que as amplitudes são idênticas, com  $A_1 = A_2 = 10^7 N$ .

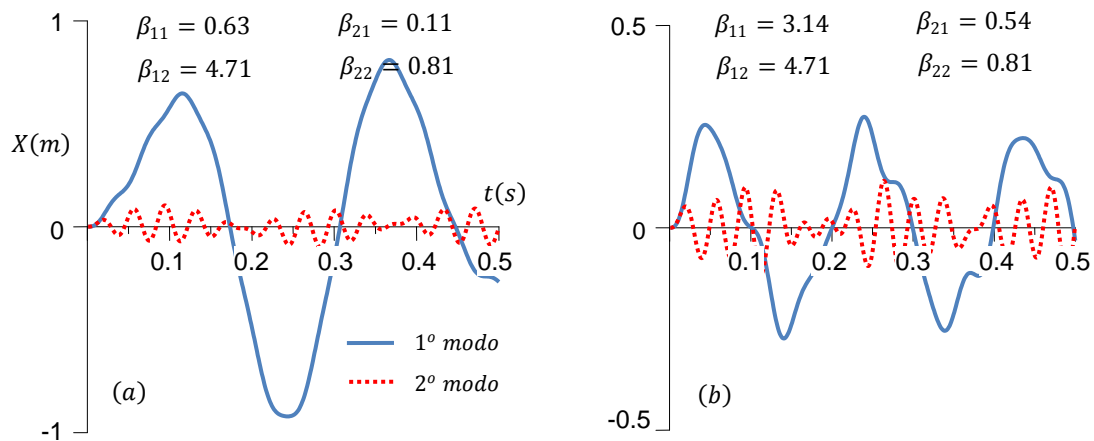


Figura 6.7 – Resposta de deslocamentos (excitação harmônica composta)

Para uma função de excitação composta é válido o princípio de superposição dos efeitos, onde a resposta total pode ser obtida pela soma das soluções relativas a cada excitação.

A combinação dos gráficos das Figuras 6.4a e 6.5a ajuda a compreender as respostas apresentadas na Figura 6.7a. Neste caso, o primeiro modo é dominante, produzindo amplitudes superiores às obtidas com o segundo modo. Embora a relação  $\beta_{22} = 0.81$  excite o segundo modo, os deslocamentos produzidos são apenas uma pequena fração da resposta produzida pelo primeiro modo. Isto explica a configuração final apresentada na Figura 6.7a, que é bastante semelhante à ilustrada na Figura 6.4a. Deve-se observar que frequências próximas ao segundo modo acoplado excitam este modo de forma mais significativa, embora a participação do modo fundamental permaneça predominante. Isto é exatamente o que ocorre na Figura 6.7b.

Quando os fatores de amplitude da excitação são diferentes, as participações dos modos passam ser governadas pela relação existente entre estes termos. Maiores valores de  $A_1$  excitam de forma mais significativa os modos próximos a  $\bar{\omega}_1$ . O mesmo ocorre para  $A_2$ . Assim, quando um dos fatores for infinitamente maior que o outro, a resposta dominante será estabelecida por apenas uma frequência de excitação. A Figura 6.8 ilustra a resposta

dinâmica do problema para uma relação  $A_1/A_2 = 5$ . Observa-se que as respostas, apesar de relacionadas a uma excitação composta, apresentam configurações semelhantes às indicadas nas Figuras 6.4a e 6.4b, com forte participação de  $\bar{\omega}_1$ .

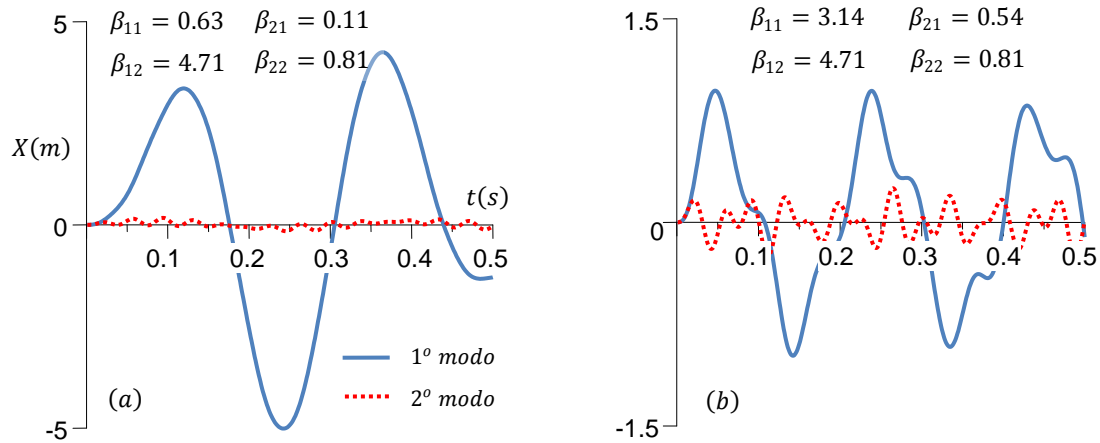


Figura 6.8 – Resposta para uma excitação harmônica composta com  $A_1/A_2 = 5$

Uma análise alternativa consiste em considerar a excitação definida por uma função cosseno. Então:

$$Q(t) = A_1 \cos(\bar{\omega}_1 t) \quad (6.17)$$

Neste caso, a solução da equação de movimento, para um sistema partindo do repouso, em um dado modo  $n$  é definida por:

$$X_n(t) = \frac{A_1}{\bar{K}_n} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] [\cos(\bar{\omega}_1 t) - \cos(\omega_n t)] \quad (6.18)$$

A Figura 6.9 ilustra os resultados obtidos com a aplicação desta excitação, considerando o fator  $A_1 = 10^7 N$ . Observa-se que, ao contrário dos resultados obtidos na Figura 6.4, o segundo modo é dominante para valores de  $\beta_2$  maiores que 1. Entretanto, isto não indica que em uma excitação composta este modo irá governar a resposta.

De forma semelhante ao que ocorre em uma excitação senoidal, as amplitudes passam a diminuir de magnitude à medida que  $\beta_n \rightarrow \infty$ . Observa-se também que valores de  $\beta_1$  próximos a 1 produzem maiores amplitudes que as associadas a  $\beta_2 \rightarrow 1$ . É interessante

notar as diferenças existentes entre as Figuras 6.5b e 6.8d. A curva do modo fundamental, por exemplo, apresenta uma frequência bem definida nesta primeira figura, com pequenas perturbações produzidas pela frequência do carregamento. O mesmo não ocorre na excitação cossenoidal, na qual a participação do carregamento é mais efetiva. A análise da expressão entre chaves da Equação (6.12) revela a presença do termo  $\beta_n \text{sen}(\omega_n t)$ . Assim, a resposta produzida na frequência natural do sistema desenvolve uma amplitude  $\beta_n$  vezes maior que a obtida na frequência do carregamento. Conseqüentemente, valores muito altos deste parâmetro irão produzir soluções governadas pela frequência  $\omega_n$ . Na solução definida em (6.18) este termo adicional de amplitude não se faz presente. Isto explica as diferenças nas configurações da resposta.

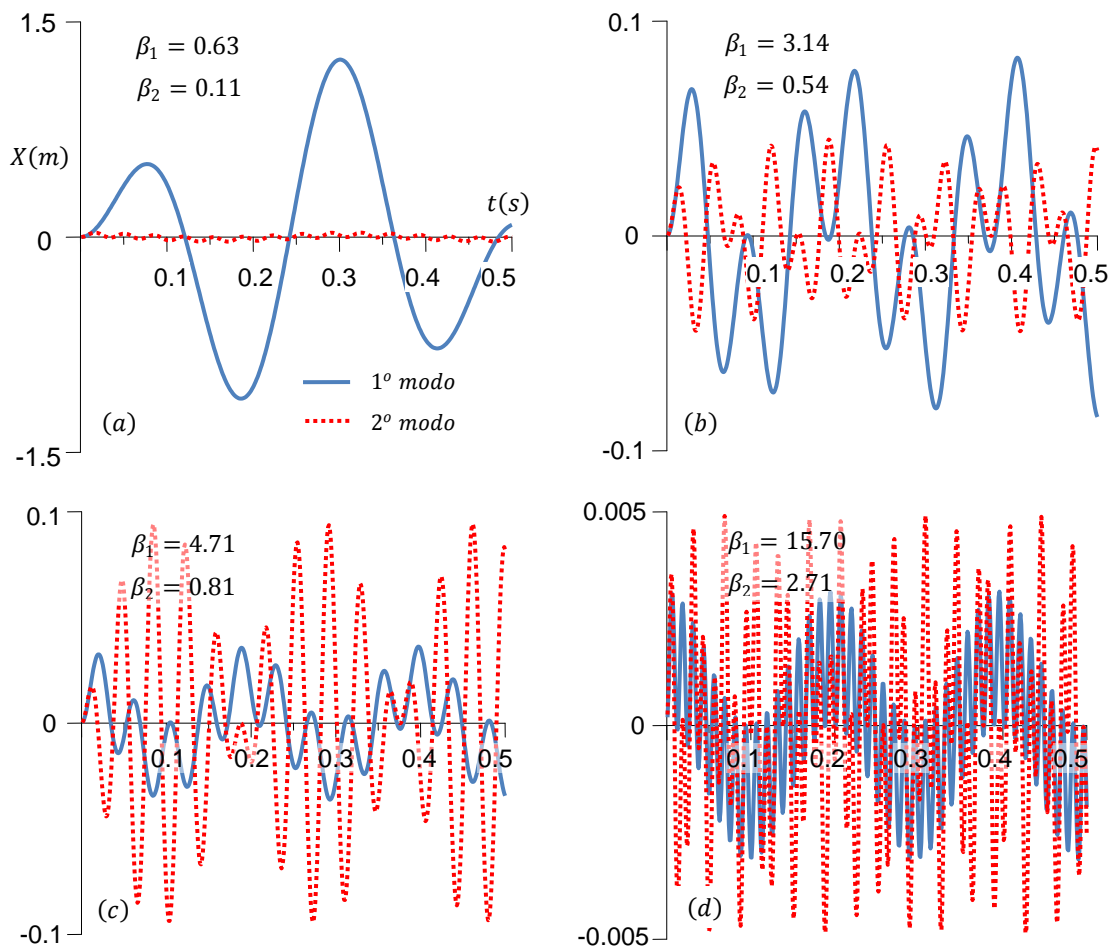


Figura 6.9 – Resposta dinâmica de deslocamentos (excitação cossenoidal)

É importante lembrar que o diagrama de amplitudes definido na Figura 6.6 é válido para os dois tipos de excitação (senoidal e cossenoidal), já que o fator  $\mathcal{F}_1$ , definido em (6.14), é o mesmo nos dois casos.



Duas funções, uma para cada modo, podem ser construídas utilizando (6.14). Então, a substituição dos termos correspondentes resulta em:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2.60} \left[ \frac{1}{1 - (\bar{\omega}_1/31.81)^2} \right] \quad (1^\circ \text{ modo}) \quad (6.19)$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{63.30} \left[ \frac{1}{1 - (\bar{\omega}_1/183.50)^2} \right] \quad (2^\circ \text{ modo}) \quad (6.20)$$

Estas duas últimas expressões podem ser representadas graficamente em função de  $\bar{\omega}_1$ . Assim, torna-se possível a identificação de trechos onde predominam as respostas de um determinado modo. Em (6.19) valores de  $\bar{\omega}_1 > 31.81$  irão produzir amplitudes negativas. Este valor pode ser redefinido com a inversão do denominador do termo entre chaves. O mesmo procedimento pode ser adotado para a expressão (6.20).

A Figura 6.10 ilustra a variação de (6.19) e (6.20) ao longo de  $\bar{\omega}_1$ , indicando que, a partir de  $\bar{\omega}_1 \cong 150 \text{ rad/s}$  o segundo modo passa a apresentar maior fator  $\mathcal{F}_1$ . Portanto, a configuração final quando  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \infty$  será dada por duas assíntotas horizontais, com o segundo modo apresentando maior amplitude que o primeiro. Isto corresponde exatamente ao que é observado na Figura 6.9d.

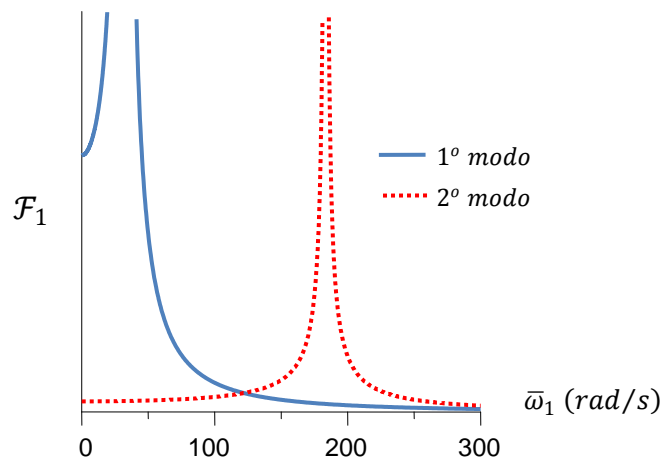


Figura 6.10 – Amplitudes da resposta dinâmica em função de  $\bar{\omega}_1$  (excitação cossenoidal)

No caso de uma excitação senoidal surge o termo adicional de amplitude,  $\beta_n$ , que deve multiplicar o fator  $\mathcal{F}_1$  relacionado a cada modo. A Figura 6.11 ilustra esta variação.

Observa-se que o primeiro modo predomina em boa parte da faixa de excitações, apresentando maior amplitude quando  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \infty$  (conforme indicado na Figura 6.5b).

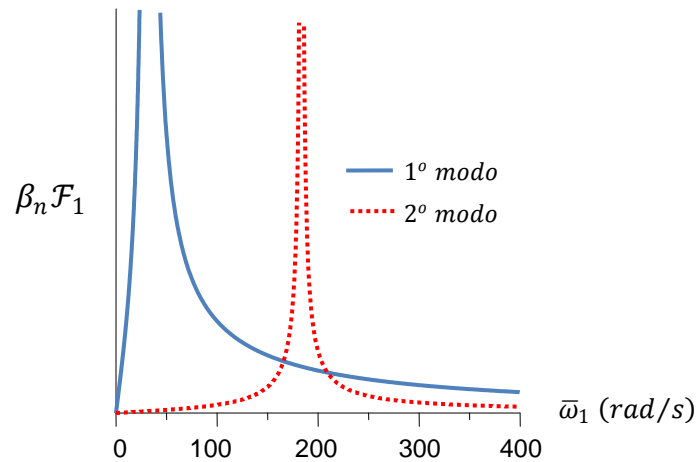


Figura 6.11 – Amplitudes da resposta dinâmica em função de  $\bar{\omega}_1$  (excitação senoidal)

Verifica-se que independente da natureza de excitação (senoidal ou cossenoidal) a resposta do sistema a uma força harmônica de frequência muito alta é praticamente nula.

O estudo de uma excitação cossenoidal composta por duas frequências, com amplitudes idênticas, é apresentado na Figura 6.12. Observa-se que o princípio de superposição continua válido, com respostas formadas pela combinação das soluções para excitações simples. De forma semelhante ao que foi apresentado em uma excitação senoidal, valores de  $\beta_2 \rightarrow 1$  excitam de forma mais significativa o segundo modo. Entretanto, as amplitudes alcançadas são menores que as obtidas para valores de  $\beta_1$  próximos a 1. Isto explica os maiores valores alcançados para o modo fundamental na Figura 6.12.

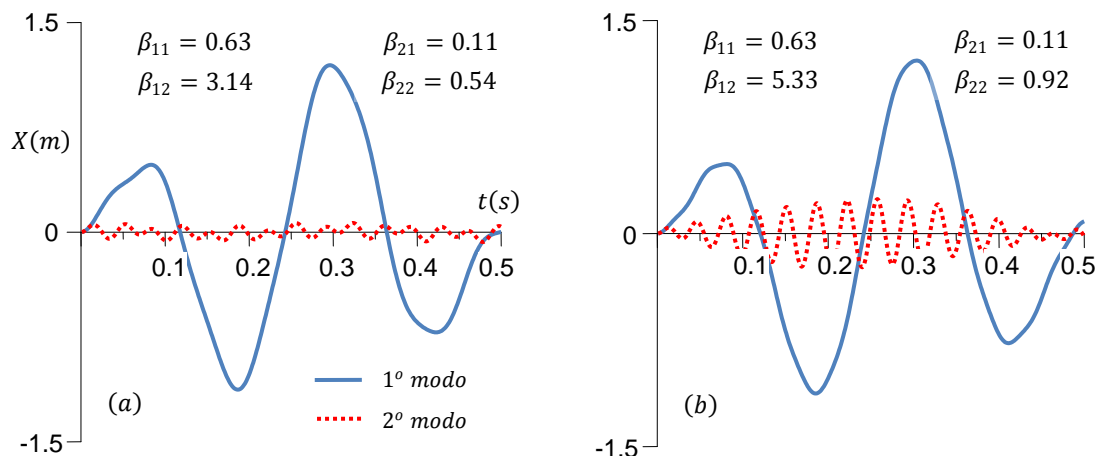


Figura 6.12 – Resposta de deslocamentos (excitação harmônica composta)

### 6.3.2 - Superposição modal das respostas individuais

Até o momento as respostas dos modos acoplados foram apresentadas de forma isolada. Entretanto, a solução dinâmica do problema requer a combinação destas participações individuais. Inicialmente será demonstrado o procedimento envolvido em uma estrutura desacoplada, baseado em Rao (2008), sendo em seguida aplicado a um sistema acoplado.

A equação de movimento de uma viga esbelta no vácuo, em vibração forçada, é dada por:

$$EI \frac{\partial^4 u(y, t)}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = Q(y, t) \quad (6.21)$$

onde  $Q(y, t)$  representa uma força distribuída.

Supondo que a solução da equação diferencial (6.21) possa ser representada por:

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) q_n(t) \quad (6.22)$$

onde  $\phi_n(y)$  é o modo de vibração  $n$  associado a solução da equação de movimento em vibração livre, dada por:

$$EI \frac{d^4 \phi_n(y)}{dy^4} - \omega_n^2 \rho_s F \phi_n(y) = 0 \quad (6.23)$$

e  $q_n(t)$  representa a coordenada generalizada correspondente. A substituição de (6.22) em (6.21) resulta em:

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 \phi_n(y)}{dy^4} q_n(t) + \rho_s F \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = Q(y, t) \quad (6.24)$$

A Equação (6.23) fornece:

$$\frac{d^4 \phi_n(y)}{dy^4} = \frac{\omega_n^2 \rho_s F}{EI} \phi_n(y) \quad (6.25)$$

Esta última expressão pode ser substituída em (6.24), resultando em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \phi_n(y) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho_s F} Q(y, t) \quad (6.26)$$

Para a solução da expressão acima pode ser utilizada a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração, que estabelece:

$$\int_0^H \phi_n(y) \phi_m(y) dy = 0 \quad p/ m \neq n \quad (6.27)$$

Assim, multiplicando (6.26) por  $\phi_m(y)$  e integrando de 0 a  $H$  em  $y$ , obtém-se:

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho_s F b} \int_0^H Q(y, t) \phi_n(y) dy \quad (6.28)$$

onde:

$$b = \int_0^H [\phi_n(y)]^2 dy \quad (6.29)$$

A expressão (6.28) pode ser reescrita em termos dos parâmetros generalizados. Para isto deve-se observar que o denominador do termo do lado direito desta equação representa massa generalizada do modo  $n$ . Adicionalmente, o numerador representa a excitação generalizada. Então:

$$\tilde{M}_n = \rho_s F b = \mu \int_0^H [\phi_n(y)]^2 dy \quad (6.30)$$

$$\tilde{F}_n = \int_0^H Q(y, t) \phi_n(y) dy \quad (6.31)$$

Portanto, lembrando que  $\omega_n^2 = \tilde{K}_n / \tilde{M}_n$  e substituindo estas duas últimas expressões em (6.28), obtém-se:

$$\tilde{M}_n \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \tilde{K}_n q_n(t) = \tilde{F}_n \quad (6.32)$$

A expressão (6.32) representa a equação de movimento do modo  $n$  de um sistema não-amortecido com um grau de liberdade. Uma equação deste tipo pode ser definida para cada modo do problema e resolvida para a função  $q_n(t)$  associada. Estas soluções podem ser substituídas em (6.22) para avaliação da resposta de deslocamentos do problema. O termo de amortecimento estrutural pode ser incluído nesta última equação, por meio de uma razão de amortecimento  $\xi$ . Assim:

$$\tilde{M}_n \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \tilde{C}_n \frac{dq_n(t)}{dt} + \tilde{K}_n q_n(t) = \tilde{F}_n \quad (6.33)$$

onde:

$$\tilde{C}_n = 2 \xi \tilde{M}_n \omega_n \quad (6.34)$$

Posteriormente, a distribuição de momentos fletores ( $M$ ) e esforços cortantes ( $\mathcal{V}$ ) pode ser obtida com a utilização das seguintes equações:

$$M(y, t) = EI \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y^2} \quad (6.35)$$

$$\mathcal{V}(y, t) = EI \frac{\partial^3 u(y, t)}{\partial y^3} \quad (6.36)$$

Por analogia ao procedimento anterior, conclui-se que parâmetros generalizados obtidos em uma solução acoplada podem ser substituídos em (6.32) ou (6.33). Assim, os modos acoplados e as funções  $q_n(t)$  associadas são aplicados em (6.22), definido a solução de deslocamentos do problema.

Nas análises do item anterior o carregamento foi definido como uma força concentrada. Na solução da força generalizada, dada por (6.31), a função  $Q(y, t)$  não será dada por uma constante. Na verdade, só existirá força aplicada quando  $y = H$ . Para esta condição é

conveniente a definição de impulso unitário, representado pelo Delta de Dirac (ou Função Delta).

A função  $Q(y, t)$  pode ser representada por:

$$Q(y, t) = Q(t)\delta(y - \epsilon) \quad (6.37)$$

onde a função  $\delta(y - \epsilon)$  representa o Delta de Dirac centrado em  $\epsilon$ . Portanto, quando  $y \neq \epsilon$  a expressão dada por (6.37) irá assumir valor nulo. Para  $y = \epsilon$  esta expressão assume valor igual a  $Q(t)$ . Como consequência, o parâmetro indicado em (6.31) será definido por:

$$\tilde{F}_n = \int_0^H Q(t)\delta(y - \epsilon) \phi_n(y) dy = Q(t) \phi_n(\epsilon) \quad (6.38)$$

Nos exemplos apresentados anteriormente as deformadas modais foram normalizadas no ponto de aplicação do carregamento ( $\epsilon = H$ ). Assim, a excitação generalizada é representada apenas pelo valor da função  $Q(t)$ . Uma abordagem alternativa consiste em interpretar este parâmetro como sendo o trabalho produzido por uma força externa na direção da deformada modal associada.

### 6.3.3 - Construção de um modelo equivalente em elementos finitos

As respostas transientes obtidas analiticamente podem ser comparadas aos resultados de uma análise acoplada de um modelo equivalente em elementos finitos, utilizando o software ANSYS (v. 11). Inicialmente, é necessário o cálculo do comprimento longitudinal  $L_x$  da malha do reservatório, que irá produzir resultados semelhantes aos obtidos na solução com comprimento longitudinal infinito. Em resumo: deve-se determinar o comprimento da cavidade na solução do Caso 2A – finito que produz os mesmos resultados do Caso 2A – infinito. A Tabela 6.17 ilustra os valores das frequências dos dois primeiros modos, obtidos com a variação do parâmetro  $r$  do Caso 2A com comprimento finito. Observa-se que a solução com  $r = 5$  produz resultados idênticos aos indicados na Tabela 6.12. Portanto, o modelo equivalente será representado por uma cavidade com comprimento longitudinal igual a  $50m$  e comprimento transversal igual a  $10m$ .

Tabela 6.17 –Frequências acopladas do Caso 2A em função de  $r$  ( $rad/s$ )

Modo	$r = 1$	$r = 2$	$r = 5$	$r = \infty$
1	32.01	31.86	31.85	31.85
2	190.37	185.45	184.67	184.67

O procedimento apresentado anteriormente consiste em um artifício de construção de modelos numéricos muito útil, já que evita a discretização de reservatórios com comprimentos muito extensos. Assim, sempre que possível, deve ser realizada uma análise preliminar do Caso 2A com comprimento finito. A Figura 6.13 ilustra o modelo de elementos finitos utilizado nesta análise. O nó 1, indicado nesta figura, representa a origem do sistema de coordenadas e a base engastada da estrutura, que foi discretizada com dez elementos de viga. Para o fluido foram utilizados elementos acústicos planos de quatro nós. Os materiais foram definidos com as propriedades indicadas na Tabela 6.2, relacionadas à Estrutura 2. O fluido foi suposto compressível, caracterizando um exemplo compatível com a Análise 4.

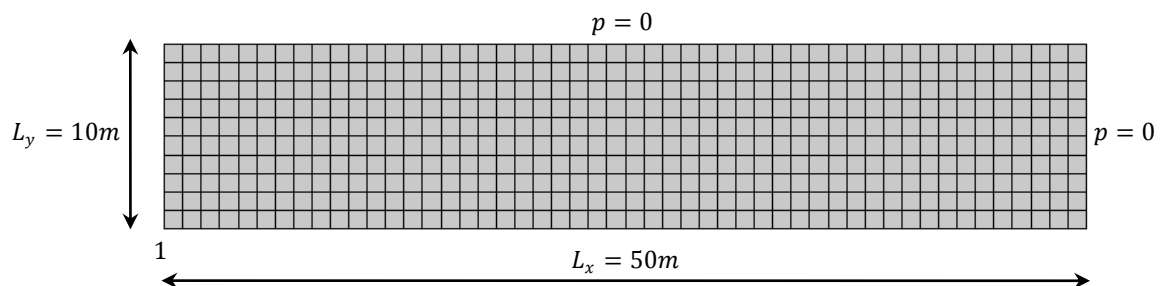





Figura 6.13 – Modelo de elementos finitos utilizado na análise

As frequências e modos do modelo apresentado na Figura 6.12 são indicados na Tabela 6.18. Verifica-se que os dois primeiros modos possuem resultados consistentes com a Tabela 6.12. Deste ponto em diante é ultrapassada a primeira ressonância da cavidade e as soluções finita e infinita não são mais compatíveis.

As soluções transientes obtidas com o modelo numérico podem ser comparadas às obtidas analiticamente (com os parâmetros generalizados indicados na Tabela 6.15). Considerando, por exemplo, a seguinte excitação aplicada na extremidade livre da estrutura:

$$Q(t) = A_1 \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) \quad (6.39)$$

Tabela 6.18 –Frequências e modos obtidos no modelo numérico

Modo	Frequência (rad/s)	Modo associado
1	31.82	
2	183.83	
3	251.11	

Assim, para uma amplitude  $A_1 = 10^7 N$  as soluções analíticas do primeiro e segundo modos podem ser obtidas com a aplicação de (6.12). Então:

$$X_1(\bar{\omega}_1, t) = \frac{1}{2.60} \left[ \frac{1}{1 - (\bar{\omega}_1/31.81)^2} \right] \left[ \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) - \frac{\bar{\omega}_1}{31.81} \text{sen}(31.81t) \right] \quad (6.40)$$

$$X_2(\bar{\omega}_1, t) = \frac{1}{63.30} \left[ \frac{1}{1 - (\bar{\omega}_1/183.50)^2} \right] \left[ \text{sen}(\bar{\omega}_1 t) - \frac{\bar{\omega}_1}{183.50} \text{sen}(183.50t) \right] \quad (6.41)$$

É evidente que a solução obtida no modelo numérico não irá corresponder a nenhuma destas duas últimas equações. Entretanto, conforme comentado no item anterior, podem ocorrer situações onde a resposta dinâmica será dada, de forma satisfatória, pelo modo fundamental, ou pela combinação das respostas dos dois primeiros modos. As funções  $X_n(t)$  são equivalentes às coordenadas generalizadas  $q_n(t)$ . Assim, a resposta completa do problema pode ser obtida com a aplicação de (6.22). Para a extremidade livre da viga  $\phi_1 = \phi_2 = 1$ . Portanto, a resposta envolvendo os dois primeiros modos nesta posição será dada pela soma de (6.40) e (6.41). Para uma excitação  $\bar{\omega}_1 = 20 \text{ rad/s}$  esta solução é definida por:

$$u(H, t) = 0.650 \text{sen}(20t) - 0.398 \text{sen}(31.81t) - 0.002 \text{sen}(183.50t) \quad (6.42)$$



que representa a resposta de deslocamentos da extremidade livre da viga. De forma semelhante, a resposta para uma excitação  $\bar{\omega}_1 = 150 \text{ rad/s}$  é definida por:

$$u(H, t) = 0.029 \text{ sen}(150t) + 0.086 \text{ sen}(31.81t) - 0.039 \text{ sen}(183.50t) \quad (6.43)$$

A Figura 6.14 ilustra os resultados de deslocamentos obtidos no modelo numérico e com a utilização destas duas últimas expressões. Verifica-se uma excelente aproximação entre as soluções analíticas e numéricas.

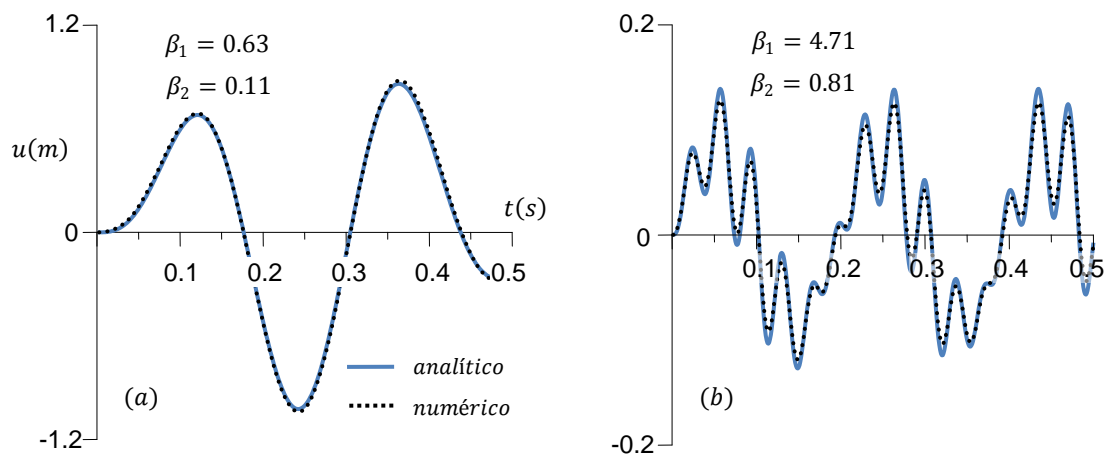


Figura 6.14 – Soluções analíticas (2 modos) e numéricas de deslocamentos

Os resultados apresentados na Figura 6.14 permitem concluir que o procedimento de superposição modal continua válido para parâmetros generalizados relacionados ao modelo acoplado. Assim, um problema complexo (envolvendo os dois domínios) pode ser reduzido a equações de movimento analíticas, sendo resolvidas para uma excitação arbitrária. É interessante notar que a resposta da Figura 6.14a poderia ser obtida, com certa aproximação, com a utilização apenas do modo fundamental. Entretanto, o mesmo procedimento não poderia ser aplicado à Figura 6.14b, sem a ocorrência de erros significativos. A Figura 6.15 ilustra os resultados envolvendo apenas o modo fundamental. A análise de (6.42) indica uma pequena amplitude associada ao termo de frequência do segundo modo ( $183.50 \text{ rad/s}$ ). Entretanto, na expressão (6.43) esta amplitude apresenta maior magnitude (cerca de vinte vezes maior). Isto explica a diferença de resultados obtidos entre as Figuras 6.14b e 6.15b.

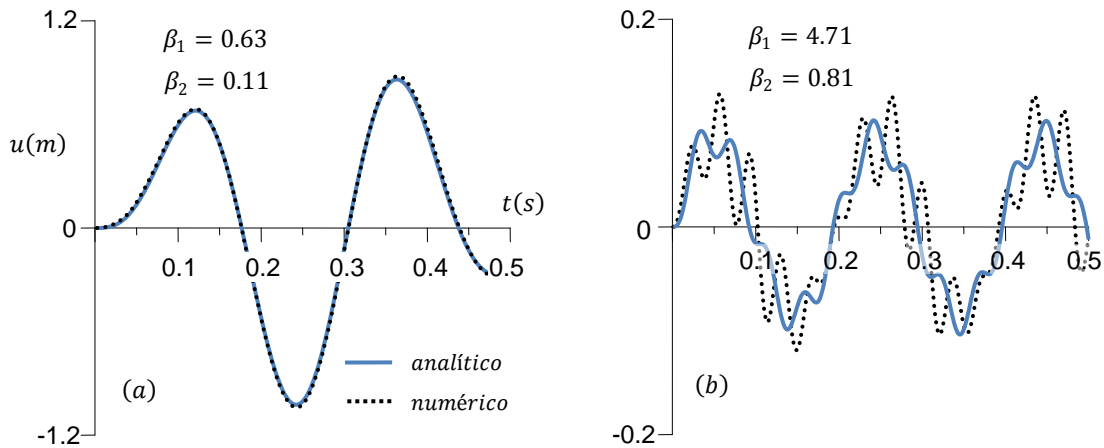


Figura 6.15 – Soluções analíticas (1 modo) e numéricas de deslocamentos

A análise da resposta para uma excitação composta também é possível. Considerando, por exemplo, uma função de excitação dada por:

$$Q(t) = 10^7 \text{ sen}(20t) + 10^7 \text{ sen}(150t) \quad (6.44)$$

Assim, pelo princípio de superposição a resposta será dada pela soma de (6.42) e (6.43). Então:

$$u(H, t) = 0.650 \text{ sen}(20t) + 0.029 \text{ sen}(150t) - 0.312 \text{ sen}(31.81t) - 0.041 \text{ sen}(183.50t) \quad (6.45)$$

Nesta última expressão observa-se a presença de quatro frequências distintas, sendo duas relacionadas às frequências do sistema e duas relacionadas às frequências de excitação. Se apenas o modo fundamental fosse utilizado na solução, esta expressão seria dada por:

$$u_1(H, t) = 0.634 \text{ sen}(20t) - 0.018 \text{ sen}(150t) - 0.312 \text{ sen}(31.81t) \quad (6.46)$$

De forma semelhante, a resposta do segundo modo é dada por:

$$u_2(H, t) = 0.016 \text{ sen}(20t) + 0.047 \text{ sen}(150t) - 0.041 \text{ sen}(183.50t) \quad (6.47)$$

A análise de (6.46) e (6.47) indica que o modo fundamental irá exercer maior influência na resposta, pois apresenta, em geral, termos com maiores amplitudes. A Figura 6.16 ilustra os resultados obtidos com as soluções numéricas e analíticas, considerando a participação

dos dois primeiros modos (6.16a) e apenas do modo fundamental (6.16b). Observa-se que apesar de  $\beta_{22} \rightarrow 1$ , a resposta é governada pelo modo fundamental.

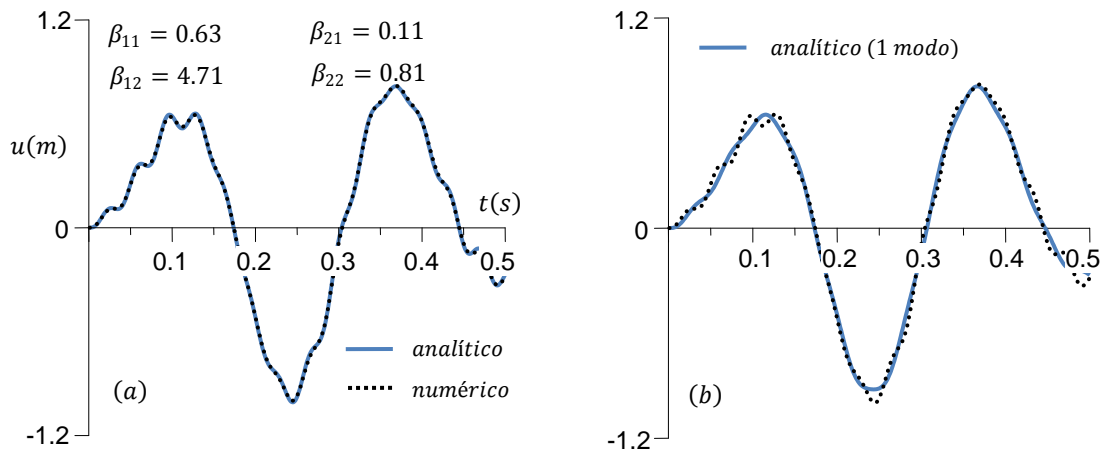


Figura 6.16 – Soluções analíticas e numéricas de deslocamentos (excitação composta)

O modelo numérico construído anteriormente foi baseado em fluido compressível. Para um fluido incompressível a determinação do comprimento longitudinal equivalente é simplificada, já que, neste caso  $c \rightarrow \infty$ . A consequência prática é a modificação da primeira ressonância da cavidade, que assume um valor infinitamente grande.

Valores de ressonâncias infinitamente grandes inibem a ocorrência de modos altamente compressíveis, tais como o segundo modo da Tabela 6.12, onde o campo de pressões se estende a grandes distâncias da interface. Portanto, cavidades finitas relativamente curtas podem ser utilizadas para simular o problema. Ao contrário do que ocorre no caso compressível, todos os modos deste problema estão contidos na faixa de frequências que antecede a primeira ressonância. A Tabela 6.19 ilustra os resultados em função de  $r$ .



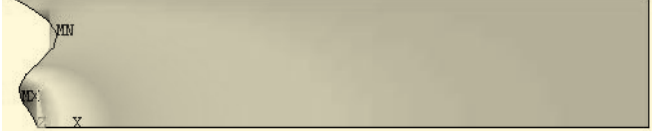
Tabela 6.19 –Frequências acopladas do Caso 2A - incompressível ( $rad/s$ )

Modo	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = \infty$
1	32.03	31.88	31.87	31.87
2	196.23	194.70	194.64	194.63
3	580.43	579.22	579.16	579.16

A análise da Tabela 6.19 indica que a convergência para o caso infinito ocorre de forma praticamente idêntica em todos os modos. Uma relação  $r = 2$  implica em erro relativo praticamente nulo. Assim, uma cavidade com comprimento longitudinal igual ao dobro da altura é suficiente para representação deste problema.

Em um modelo de elementos finitos com fluido incompressível deve-se adotar um valor de  $c$  grande o suficiente para permitir a faixa de modos desejada antes da primeira ressonância. A Tabela 6.20 ilustra os resultados obtidos no modelo anterior, quando  $c = 5000 \text{ m/s}$ . É interessante notar que a principal vantagem deste modelo é a possibilidade de representação de uma seqüência de modos que não poderiam ser analisados no caso compressível, devido à limitação da frequência de corte da cavidade. Isto é exatamente o que ocorre no terceiro modo do caso compressível (Tabela 6.18), que difere do obtido na Tabela 6.12.

Tabela 6.20 –Frequências e modos obtidos no modelo numérico incompressível

Modo	Frequência ( $rad/s$ )	Modo associado
1	31.83	
2	192.73	
3	560.81	

### 6.3.4 - Solução do problema para uma excitação sísmica

No caso de uma excitação de origem sísmica é conveniente representar o problema em termos de componentes do solo ( $u_g$ ) e relativa ( $u_r$ ), que somadas representam a resposta dinâmica total do sistema ( $u_t$ ). Estes conceitos são esclarecidos na Figura 6.17, que ilustra um sistema de um grau de liberdade não-amortecido.

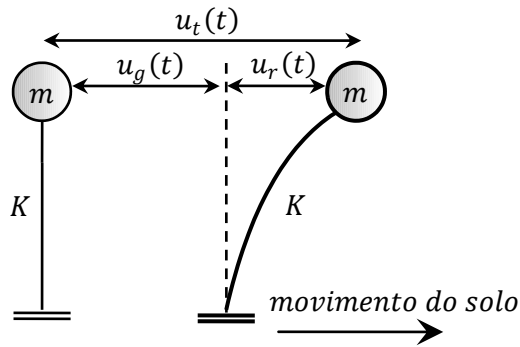


Figura 6.17 – Representação esquemática do problema de excitação sísmica

A Figura 6.17 permite a construção da equação de equilíbrio dinâmico deste sistema, que será dada por:

$$m\ddot{u}_t(t) + Ku_r(t) = 0 \quad (6.48)$$

Verifica-se que a aceleração total pode ser decomposta em termos de suas componentes do solo e relativa:

$$\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_r(t) \quad (6.49)$$

Então, substituindo esta última expressão em (6.48):

$$m\ddot{u}_r(t) + Ku_r(t) = -m\ddot{u}_g(t) = p_{ef}(t) \quad (6.50)$$

onde o termo do lado direito desta equação representa a força efetiva ( $p_{ef}$ ) gerada pelo sismo. Portanto, o deslocamento relativo ( $u_r$ ) produzido pelo sismo é o mesmo que ocorre quando o sistema é considerado com uma base fixa e submetido a uma força externa dada por  $-m\ddot{u}_g(t)$ .

Para um sistema de parâmetros distribuídos esta excitação pode ser obtida de forma análoga, com a utilização da Equação (6.31). Então:

$$\tilde{F}_n = -\ddot{u}_g(t) \int_0^H \mu(y) \phi_n(y) dy = -\ddot{u}_g(t) \tilde{L}_n \quad (6.51)$$

onde  $\tilde{L}_n$  representa o fator de excitação sísmico, que indica a participação do sismo na reposta de um dado modo  $\phi_n$ . Assim, a equação de equilíbrio dinâmico de um modo arbitrário será dada por:

$$\tilde{M}_n \ddot{X}_n(t) + \tilde{K}_n X_n(t) = -\ddot{u}_g(t) \tilde{L}_n \quad (6.52)$$

As expressões apresentadas anteriormente são válidas para um sistema desacoplado. Quando o problema envolve dois domínios (fluido e estrutura) considerações especiais devem ser feitas, pois o movimento translacional produz um campo de pressões diferente do produzido pelo movimento relativo. Assim, é comum encontrar na literatura a divisão em: pressão de movimento de corpo rígido e pressão associada à deformada modal (FERC, 2002). Uma interpretação simples para este fenômeno pode ser estabelecida definindo forças inerciais produzidas pelo fluido ( $\ddot{u}_r$  e  $\ddot{u}_g$ ), proporcionais às acelerações relativa ( $\ddot{u}_r$ ) e do solo ( $\ddot{u}_g$ ). Assim, a equação de equilíbrio dinâmico será dada por:

$$m\ddot{u}_t(t) + Ku_r(t) = -\ddot{u}_r(t) - \ddot{u}_g(t) \quad (6.53)$$

A substituição de (6.49) nesta última expressão resulta em:

$$[m + \ddot{u}_r]\ddot{u}_r(t) + Ku_r(t) = -[m + \ddot{u}_g]\ddot{u}_g(t) \quad (6.54)$$

A análise da Equação (6.54) revela a presença de forças inerciais produzidas pelo fluido em ambos os lados desta expressão. A massa adicionada ao lado esquerdo é diferente da associada ao lado direito, já que a primeira encontra-se relacionada ao movimento relativo do sistema, ao passo que a segunda está associada ao movimento translacional. Adicionalmente, observa-se que os efeitos inerciais do fluido continuam presentes mesmo quando a excitação do solo é nula (casos abordados até o momento).

Quando a aceleração do solo é nula, a expressão (6.54) assume as características de vibração livre de um sistema acoplado. Isto revela que a excitação produzida pelo sismo está associada a um fator adicional, além da massa generalizada produzida pelo fluido. Assim, a expressão definida em (6.51) passa a ser representada por:

$$\tilde{F}_n = -\ddot{u}_g(t) \left[ \int_0^H \mu(y) \phi_n(y) dy + \int_0^{L_y} \tilde{f}_g(y) \phi_n(y) dy \right] = -\ddot{u}_g(t) [\tilde{L}_n + \tilde{N}_n] \quad (6.55)$$

onde  $\tilde{N}_n$  indica o fator de excitação sísmico adicional, relacionado aos efeitos do fluido, proporcionais ao movimento translacional do sistema. Então:

$$\tilde{N}_n = \int_0^{L_y} \tilde{f}_g(y) \phi_n(y) dy \quad (6.56)$$

Para o cálculo de  $\tilde{f}_g(y)$  considera-se uma fronteira rígida e uma frequência acoplada nula, resultando no campo de pressões de um fluido incompressível, dado por:

$$\tilde{f}_{g\text{ série}}(y) = \frac{P(0, y)}{\bar{A}} = \frac{2\rho_f}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\kappa_n^2} \cos(\kappa_n y) \quad (6.57)$$

que indica a distribuição de pressões na interface para o Caso 2A com comprimento longitudinal infinito. Uma alternativa consiste na utilização da solução simplificada de Westergaard (1933), definida em (6.58):

$$\tilde{f}_{g\text{ Westerg.}}(y) = \frac{P(0, y)}{\bar{A}} = \frac{7}{8} \rho_f L_y \sqrt{1 - \frac{y}{L_y}} \quad (6.58)$$

Portanto, os parâmetros generalizados  $\tilde{K}_n$  e  $\tilde{M}_n$  definidos anteriormente, relacionados ao movimento relativo, continuam válidos. Entretanto, a equação de equilíbrio dinâmico do sistema acoplado passa a ser definida por:

$$\tilde{M}_n \ddot{X}_n(t) + \tilde{K}_n X_n(t) = -\ddot{u}_g(t) [\tilde{L}_n + \tilde{N}_n] \quad (6.59)$$

onde  $X_n(t)$  corresponde a solução de deslocamentos relativos de um dado modo  $n$ .

De forma análoga ao caso desacoplado, este problema pode ser representado por um sistema de base fixa, submetido a uma excitação composta pela massa da estrutura acrescida dos efeitos inerciais produzidos pelo fluido, acelerados por  $\ddot{u}_g(t)$ .

Estes conceitos podem ser aplicados à Análise 4. Assim, os parâmetros generalizados  $\tilde{L}_1$  e  $\tilde{N}_1$ , do modo fundamental, serão dados por:

$$\tilde{L}_1 = \mu \int_0^H \phi_1(y) dy \quad (6.60)$$

$$\tilde{N}_1 = \int_0^{L_y} \left\{ \frac{2\rho_f}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\kappa_n^2} \cos(\kappa_n y) \right\} \phi_1(y) dy \quad (6.61)$$

onde  $\phi_1(y)$  corresponde à deformada fundamental exata da Análise 4. A avaliação destas duas expressões, considerando a série truncada no quinto termo, resulta em:

$$\tilde{L}_1 \cong 3.08 \times 10^4 \text{ N s}^2/\text{m} \quad (6.62)$$

$$\tilde{N}_1 \cong 1.53 \times 10^4 \text{ N s}^2/\text{m} \quad (6.63)$$

Portanto, a equação de movimento do modo fundamental será definida pela substituição (6.62) e (6.63), e dos parâmetros generalizados da Tabela 6.15 em (6.59). Assim:

$$[2.56 \times 10^4] \ddot{X}_1 + [2.60 \times 10^7] X_1 = -\ddot{u}_g(t) [4.61 \times 10^4] \quad (1^\circ \text{ modo}) \quad (6.64)$$

De forma semelhante, para o segundo modo são obtidos os seguintes parâmetros:

$$\tilde{L}_2 \cong -0.70 \times 10^4 \text{ N s}^2/\text{m} \quad (6.65)$$

$$\tilde{N}_2 \cong -1.16 \times 10^4 \text{ N s}^2/\text{m} \quad (6.66)$$

que indicam parâmetros negativos, cujos sinais devem ser mantidos (neste caso a força sísmica equivalente apresenta mesmo sentido de atuação da aceleração do solo). Assim, a equação correspondente ao segundo modo é dada por:

$$[1.88 \times 10^4] \ddot{X}_2 + [6.33 \times 10^8] X_2 = \ddot{u}_g(t) [1.86 \times 10^4] \quad (2^\circ \text{ modo}) \quad (6.67)$$



Caso a excitação do solo  $\ddot{u}_g(t)$  seja do tipo harmônica, as soluções das Equações (6.64) e (6.67) ficam reduzidas aos casos estudados anteriormente, com repostas definidas por (6.12), no caso de uma função seno, ou (6.18), no caso de uma função cosseno. O princípio de superposição permanece válido, com a resposta total sendo composta pela solução dos modos individuais.

A Figura 6.18 ilustra os resultados de acelerações e deslocamentos relativos obtidos no modelo numérico e com a utilização da solução analítica (envolvendo os dois primeiros modos), para uma excitação  $\ddot{u}_g(t) = \text{sen}(20t)$ .

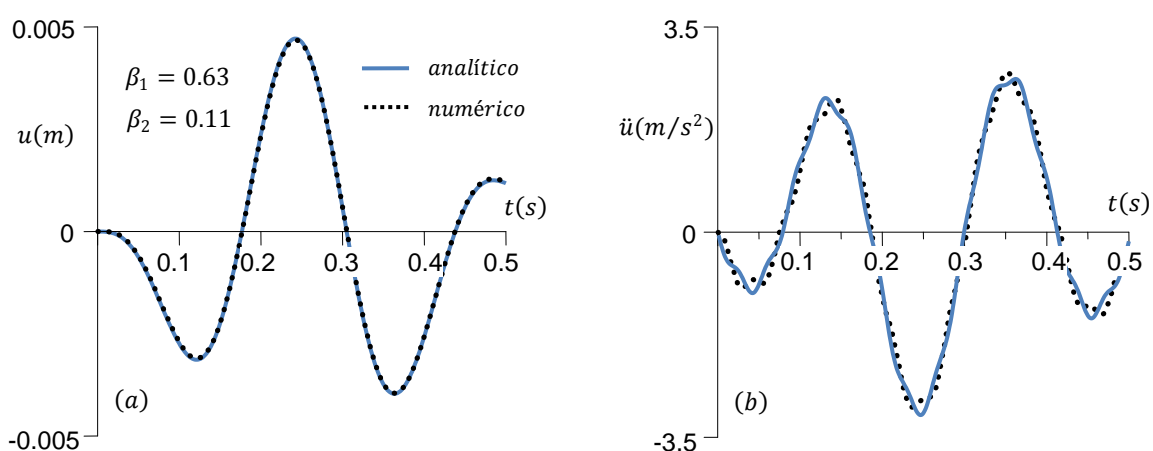


Figura 6.18 – Respostas de deslocamentos (a) e acelerações relativas (b)

A análise dos resultados ilustrados na Figura 6.18 revela uma excelente aproximação entre deslocamentos analíticos e numéricos. A aceleração relativa é prejudicada pela utilização de apenas dois modos na solução analítica, mas apresenta resultados satisfatórios. É interessante notar que a amplitude máxima da aceleração relativa é aproximadamente o triplo do valor da aceleração do solo. Este fenômeno, conhecido como amplificação do movimento do solo é importante para o estudo da análise sísmica de estruturas, e será abordado mais adiante na análise de barragens.

A Figura 6.19 ilustra os resultados obtidos com as soluções analíticas e numéricas, considerando a participação dos dois primeiros modos (6.19a) e apenas do modo fundamental (6.19b), para uma excitação  $\ddot{u}_g(t) = \text{sen}(150t)$ . A análise dos gráficos desta figura revela a predominância do modo fundamental na resposta.

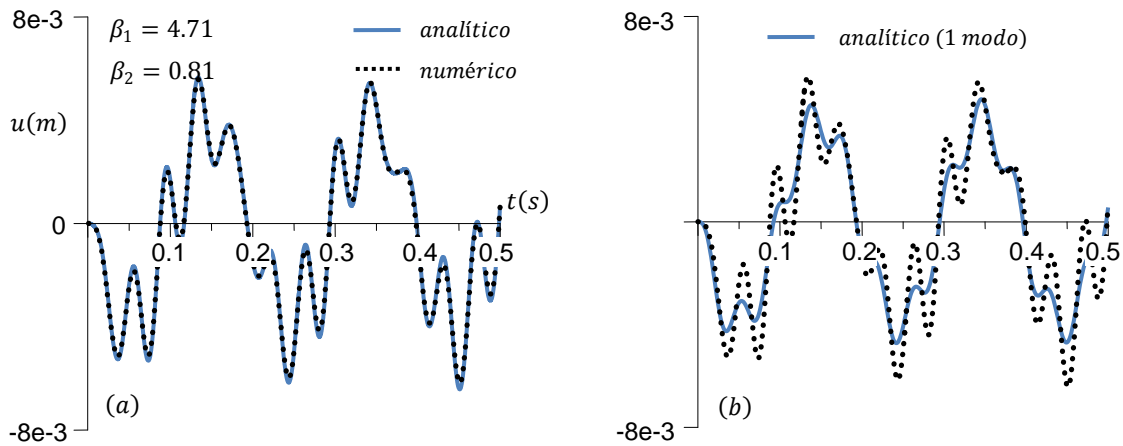


Figura 6.19 – Soluções analíticas e numéricas de deslocamentos

Uma representação alternativa das soluções deste problema pode ser obtida com o emprego de (6.12), substituindo o fator de amplitude  $A_1$  pela amplitude dada pela massa da estrutura acrescida dos efeitos inerciais produzidos pelo fluido. Então:

$$X_n(t) = -\frac{(\tilde{L}_n + \tilde{N}_n)}{\tilde{K}_n} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] [\text{sen}(\bar{\omega}_1 t) - \beta_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (6.68)$$

Portanto, verifica-se nesta última expressão que a amplitude de excitação está diretamente relacionada à magnitude da força sísmica efetiva. O segundo modo, por exemplo, apresenta rigidez superior e amplitude inferior ao primeiro modo. Isto explica os resultados apresentados na Figura 6.19b, onde este modo exerce pouca influência na resposta dinâmica do sistema.

No caso de uma excitação sísmica real, o movimento do solo pode ser decomposto em uma gama de frequências, cada uma associada a uma determinada amplitude. Assim, este problema pode ser interpretado como uma excitação composta, onde a resposta completa pode ser obtida pela superposição das soluções relacionadas a cada uma das frequências de excitação. Pode-se supor, por exemplo, uma excitação de amplitudes iguais dada por:

$$\ddot{u}_g(t) = \cos(50t) + \cos(100t) + \cos(150t) + \cos(200t) \quad (6.69)$$

Os valores de  $\beta$  desta excitação, associados aos dois primeiros modos, são indicados na Tabela 6.21.

Tabela 6.21 –Valores de  $\beta$  associados aos dois primeiros modos do sistema

Modo	$\bar{\omega}$ (rad/s)			
	50	100	150	200
1	1.57	3.14	4.71	6.28
2	0.27	0.54	0.81	1.08

A Tabela 6.21 indica dois valores de  $\beta$  relativamente próximos à ressonância do segundo modo (0.81 e 1.08). Esta gama de frequências está afastada da primeira ressonância do sistema, o que pode levar a falsa impressão de que o primeiro modo não irá contribuir de forma significativa na resposta.

Por meio da Equação (6.18) pode-se construir a solução de deslocamentos relativos para uma excitação do solo relacionada a uma função cossenoidal. Então:

$$X_n(t) = \left\{ -\frac{(\tilde{L}_n + \tilde{N}_n)}{\tilde{K}_n} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] \right\} [\cos(\bar{\omega}_1 t) - \cos(\omega_n t)] \quad (6.70)$$

onde o termo entre colchetes representa uma amplitude  $\bar{X}_n$  relacionada ao modo e ao valor de  $\beta_n$ . A Tabela 6.22 ilustra os resultados obtidos para a excitação definida em (6.69).

Tabela 6.22 –Valores de  $\bar{X}_n \times 10^5$  (m) associados aos dois primeiros modos do sistema

Modo	$\bar{\omega}$ (rad/s)			
	50	100	150	200
1	12.13	2.00	0.84	0.46
2	0.32	0.42	0.89	1.56

Os resultados desta última tabela revelam a importância do modo fundamental. De fato, a contribuição deste modo é superior a do modo seguinte mesmo em frequências muito afastadas da primeira ressonância. Assim, se a frequência de excitação fosse dada por apenas  $\bar{\omega} = 150 \text{ rad/s}$  o segundo modo teria contribuição praticamente idêntica ao primeiro. Entretanto, são as frequências iniciais que definem a resposta, produzindo grandes amplitudes associadas ao primeiro modo. Assim, respostas intensas do segundo modo somente irão ocorrer quando a faixa de excitações for concentrada em valores de  $\beta_2$

próximos ou maiores que 1. Estas conclusões serão utilizadas na interpretação da resposta dinâmica para um registro sísmico real, que será apresentada a seguir. A resposta de deslocamentos relativos obtida com a excitação (6.69) é apresentada na Figura 6.20, considerando a participação dos dois primeiros modos e apenas do modo fundamental.

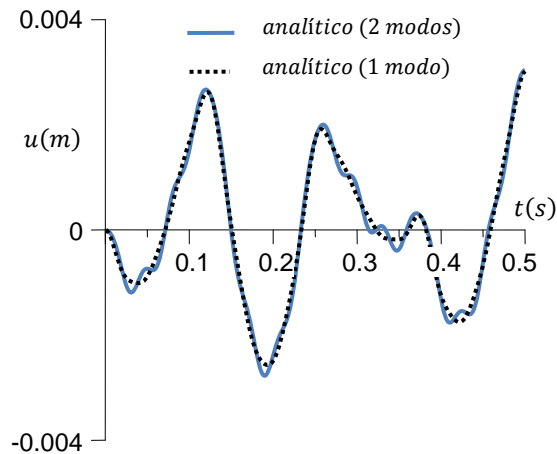


Figura 6.20 – Resposta analítica de deslocamentos relativos (múltiplas freqüências)

### 6.3.5 - Resposta a um registro sísmico real

A Figura 6.21 ilustra o registro de aceleração do solo e uma janela de tempo de 5s da componente norte-sul do terremoto El Centro – 1940. Trata-se de um sismo clássico, com dados disponíveis facilmente na literatura, tal como apresentado por Chopra (2001).

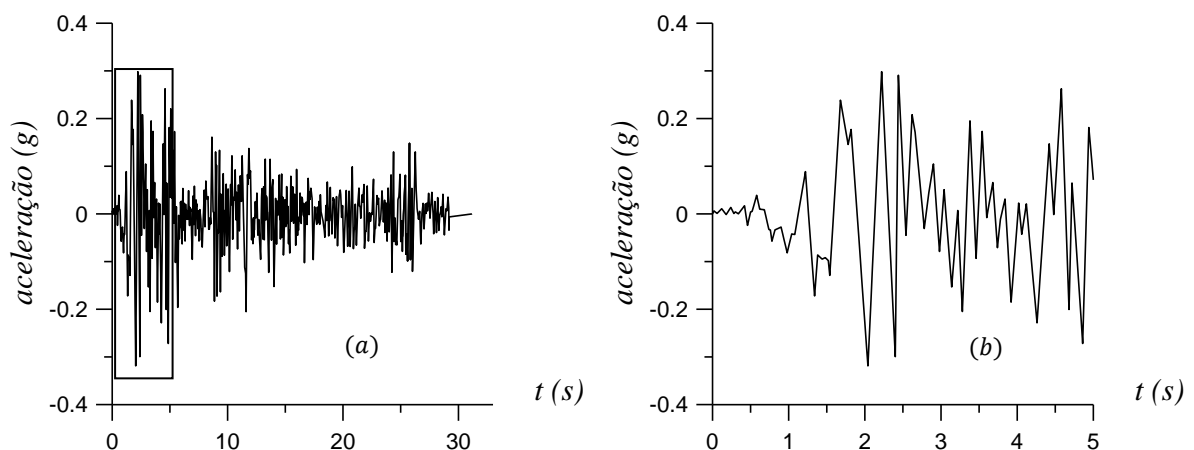


Figura 6.21 – Registro completo (a) e janela de tempo (b) do terremoto El Centro

A natureza do registro sísmico impede a avaliação da resposta dinâmica de forma analítica. Assim, um procedimento numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (desenvolvido em

linguagem Fortran 90) será utilizado para o cálculo dos deslocamentos relativos, que será aplicado às Equações (6.64) e (6.67). A Figura 6.22 ilustra os resultados obtidos com este procedimento e com uma análise acoplada do modelo numérico. A Figura 6.22a revela que a resposta dinâmica do sistema é governada pelo modo fundamental, com excelente aproximação produzida pelo procedimento de Runge-Kutta. O segundo modo também é excitado, mas pouca influencia na resposta, devido às pequenas amplitudes apresentadas na Figura 6.22b.

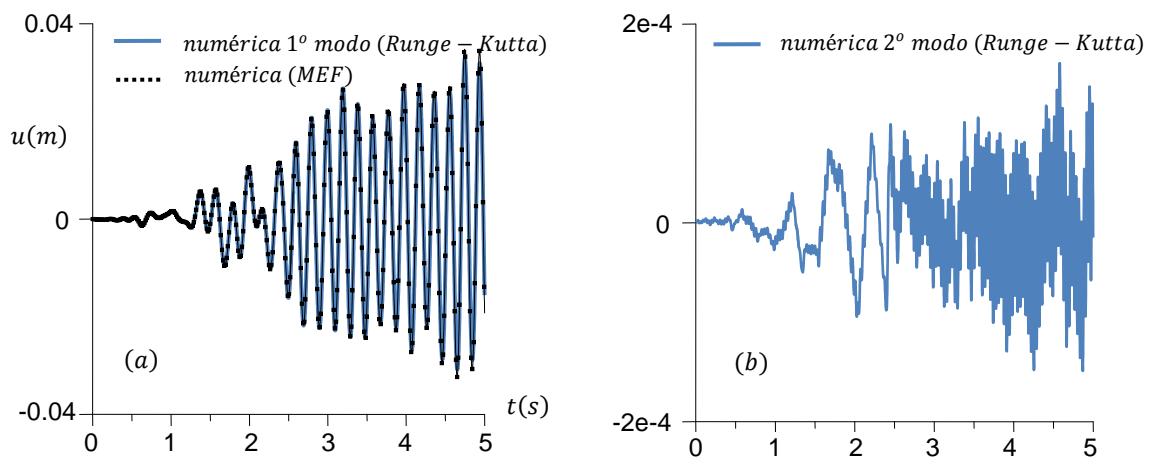


Figura 6.22 – Resposta de deslocamentos relativos (El Centro – Análise 4)

Os resultados apresentados nesta última figura podem ser explicados pela análise do espectro de frequências da excitação sísmica. A Figura 6.23 ilustra esta distribuição, onde boa parte das amplitudes está localizada na faixa compreendida entre 0 e 8 Hz.

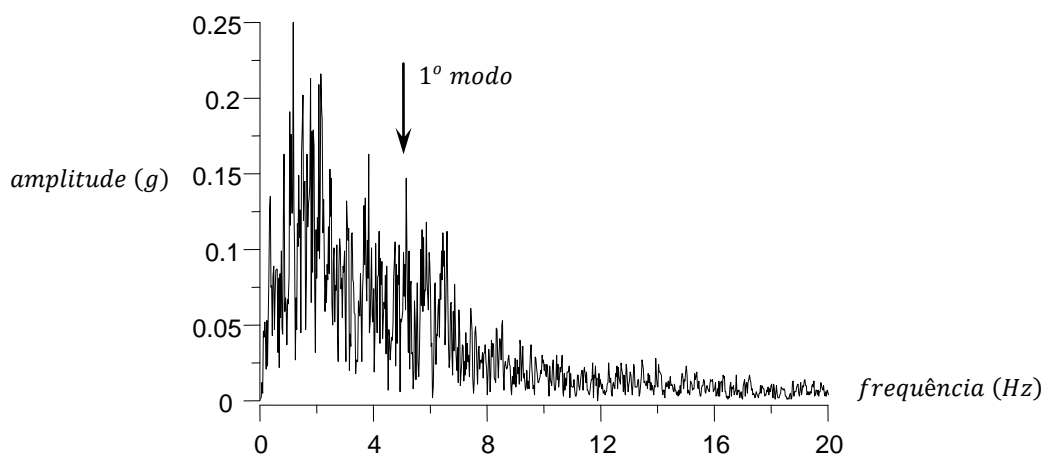


Figura 6.23 – Espectro de frequências da excitação (El Centro)

A primeira frequência do sistema acoplado é aproximadamente 5.07 Hz, enquanto a do segundo modo é de 29.39 Hz. Assim, pode-se concluir que boa parte da excitação

mobilizou o modo fundamental, resultando em um fenômeno semelhante ao apresentado na Tabela 6.22.

#### **6.4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste capítulo foram apresentados diversos exemplos de análises no domínio do tempo envolvendo vibrações livres e forçadas. Inicialmente foi realizado o cálculo dos parâmetros generalizados do sistema acoplado, utilizando a solução exata, que foram em seguida comparados aos obtidos com o procedimento pseudo-acoplado. Nestas análises foram identificados os seguintes pontos de destaque: (1) Verifica-se que o modo fundamental permanece com deformada praticamente inalterada pelos efeitos de acoplamento, tendo parâmetros definidos com aproximação satisfatória pela solução aproximada; (2) Os efeitos de compressibilidade do fluido são desprezíveis para modos com frequências distantes da primeira ressonância da cavidade; (3) Modos com frequências próximas à ressonância da cavidade são alterados sensivelmente pela compressibilidade, com modificações discretas nas frequências e deformadas modais; (4) Modos superiores ao primeiro podem apresentar deformadas modais bem distintas das associadas à estrutura no vácuo, com o parâmetro  $\beta_2$  exercendo grande influência neste fenômeno. (5) O procedimento pseudo-acoplado, apesar da boa aproximação de frequências, é recomendado apenas para o cálculo de parâmetros generalizados do modo fundamental. Para modos superiores erros consideráveis são produzidos, sendo resultado direto da consideração da deformada acoplada idêntica à deformada da estrutura no vácuo.

Análises envolvendo vibrações forçadas também foram apresentadas, produzindo excelentes resultados frente a soluções numéricas e revelando a participação de modos superiores na resposta dinâmica. Verifica-se que o modo fundamental apresenta grande contribuição em estruturas do tipo engastada-livre, com maior importância quando a excitação aplicada é do tipo sísmica.

As observações de deformada fundamental inalterada pelo fluido e de participação dominante deste modo na resposta dinâmica serão utilizadas no capítulo seguinte, para a formulação de um procedimento simplificado de análise sísmica de barragens, que representa uma das principais contribuições deste trabalho.

## 7 - ESTUDO DA INTERAÇÃO BARRAGEM-RESERVATÓRIO

No capítulo anterior foram apresentadas soluções exatas no domínio do tempo para o sistema acoplado em função de uma coordenada generalizada. Nas estruturas reticuladas os parâmetros generalizados podem ser obtidos analiticamente. No caso de estruturas de barragens este problema torna-se mais envolvente, pois a obtenção destes termos deve considerar uma geometria bidimensional e, geralmente, de forma irregular. Adicionalmente, deve-se levar em consideração que a geometria de uma barragem é específica de uma determinada condição de projeto, o que dificulta a definição de um perfil padrão. Assim, uma solução analítica sem simplificações torna-se inviável.

Uma solução intermediária entre as abordagens totalmente analíticas e numéricas será apresentada neste capítulo. Desta forma, pretende-se utilizar as vantagens de cada um destes procedimentos, eliminando as limitações de problemas mais gerais apresentados em soluções analíticas e diminuindo a complexidade do modelo e tempo de processamento computacional das soluções numéricas.

A Figura 7.1 apresenta o esquema e as estratégias de solução dos problemas acoplados abordados até o momento, incluindo o envolvido na interação dinâmica barragem-reservatório, que será estudado neste capítulo.

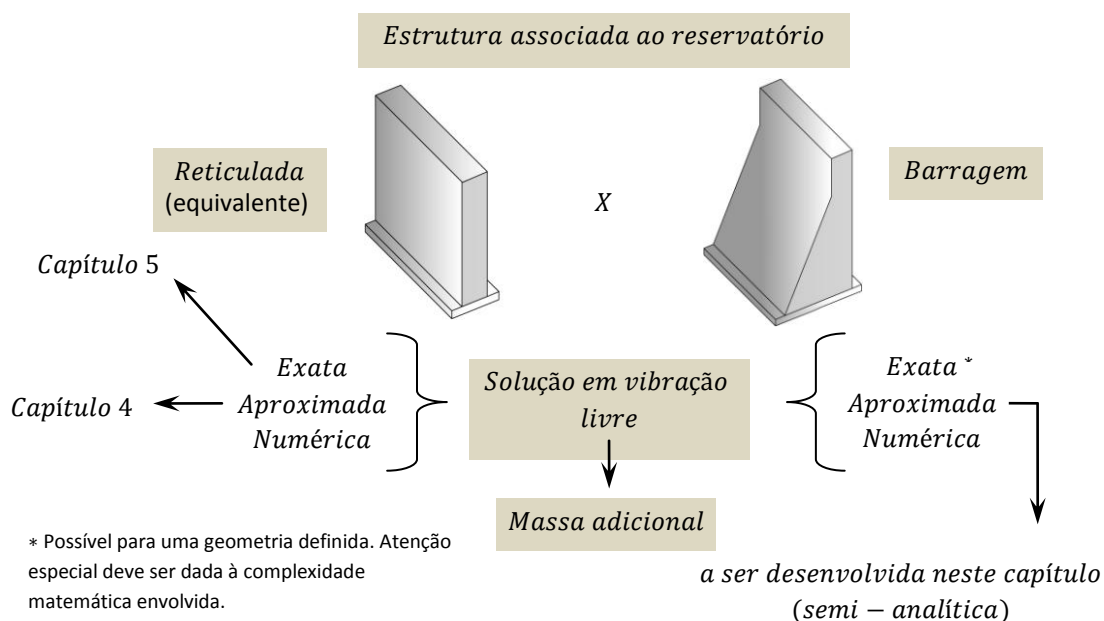


Figura 7.1 – Esquema e estratégias de solução dos problemas acoplados

## 7.1 - SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PROPOSTA

As análises realizadas até o momento permitem concluir que a deformada fundamental da estrutura no vácuo sofre poucas alterações em sua configuração devido aos efeitos de acoplamento. Verifica-se também que o procedimento pseudo-acoplado é capaz de resolver as frequências iniciais do problema com grande precisão. Além disso, foi verificado no capítulo anterior que a participação do modo fundamental governa a resposta no caso de uma excitação sísmica. Todos estes fatores contribuem para o desenvolvimento de uma solução semi-analítica, onde uma análise modal auxiliar da geometria da barragem será realizada em um programa de elementos finitos. Assim, será possível obter parâmetros generalizados desacoplados de massa e rigidez, além da deformada da interface do modo fundamental. Estes parâmetros podem ser substituídos na equação de frequências do método pseudo-acoplado, que irá fornecer a frequência fundamental acoplada do problema. Este valor, em conjunto com a deformada da interface, permite o cálculo da massa generalizada adicional produzida pelo fluido, que deve ser acrescentada à massa da estrutura. Desta forma, ficam definidos os parâmetros generalizados da estrutura acoplada, estabelecendo a equação de equilíbrio dinâmico do problema, que poderá ser resolvida para uma excitação arbitrária (Solução 1). Outra estratégia consiste em substituir os efeitos produzidos pelo fluido por massas concentradas, que deverão ser adicionadas aos nós da interface do modelo estrutural. Este procedimento permite a construção de um modelo equivalente em elementos finitos (Solução 2), eliminando a necessidade de discretização do reservatório e capaz de representar adequadamente o problema acoplado no modo fundamental de vibração.

A principal vantagem destas abordagens consiste na eliminação da solução simultânea de dois domínios (fluido e estrutura), reduzindo o problema, no caso da Solução 1, a uma equação de movimento relacionada a uma determinada coordenada generalizada. Adicionalmente, pode-se citar a possibilidade de conduzir análises em programas de elementos finitos que apresentam limitações em análises acopladas (no caso da Solução 2). Esta estratégia reduz consideravelmente o tempo de processamento computacional.

A Figura 7.2 ilustra o esquema de solução semi-analítico proposto, com a seqüência de etapas envolvidas.



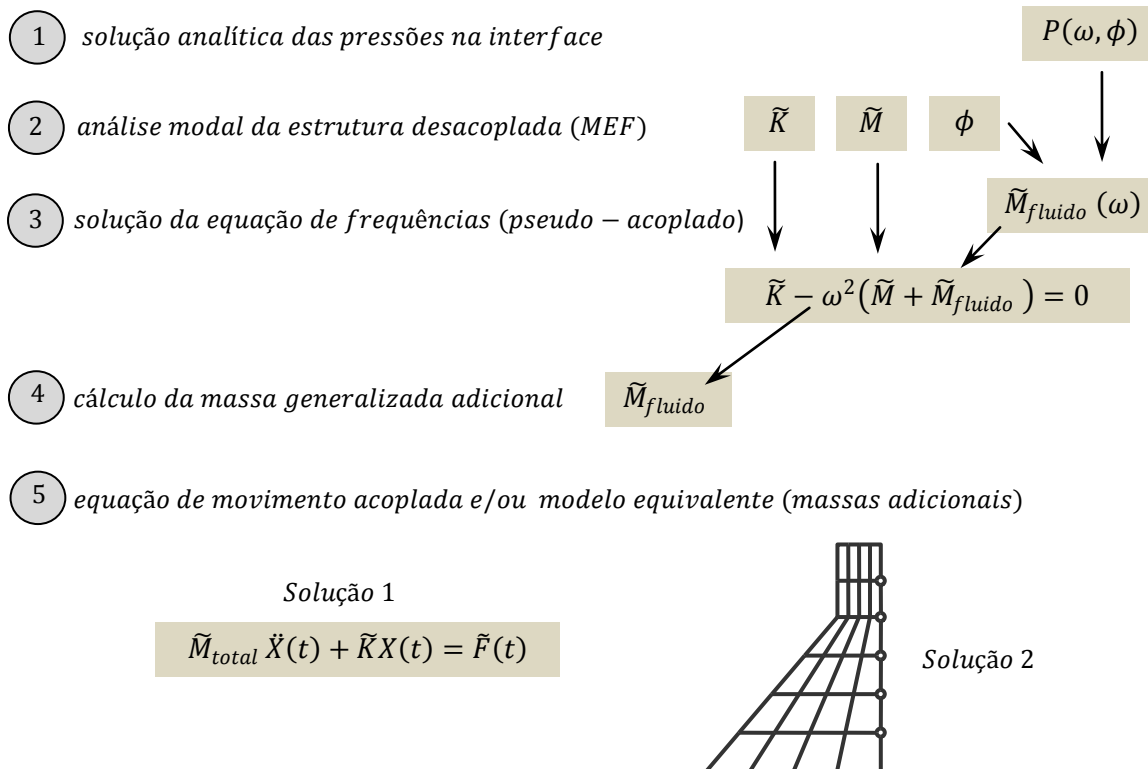


Figura 7.2 – Esquema de solução do problema de interação barragem-reservatório

As etapas descritas nesta última figura são desenvolvidas detalhadamente a seguir.

### 7.1.1 - Soluções analíticas para as pressões hidrodinâmicas

Nos problemas de interação barragem-reservatório encontra-se bastante difundido o conceito de massa adicional, onde os efeitos inerciais de interação produzidos pelo fluido são aplicados a estrutura. Em geral, estes efeitos são resultados de soluções analíticas, onde o fluido pode ser considerado compressível ou incompressível, e a barragem pode ser suposta rígida ou flexível. A dependência da frequência acoplada do problema é provavelmente uma das principais desvantagens das soluções onde os efeitos de compressibilidade do reservatório são considerados. Para perfis típicos de barragens a determinação destes valores é um trabalho que envolve grande dificuldade matemática, conforme foi comentado anteriormente. Assim, soluções deste problema podem ser divididas em quatro categorias, que serão apresentadas a seguir. Todas as formulações são baseadas no Caso 2A com comprimento longitudinal infinito, discutido no Capítulo 2.

A primeira categoria, denominada Caso CF (compressível e flexível) envolve a solução mais geral, onde a deformada da interface é definida por uma função  $\phi(y)$  e assume-se  $c \neq 0$ . Assim, a solução correspondente será dada por:

$$P(0, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_n}} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \cos(\kappa_n y) \quad \text{Caso CF} \quad (7.1)$$

onde:

$$\hat{\alpha}_n = \kappa_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad ; \quad \kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_y} \quad (7.2)$$

A segunda categoria, denominada Caso IF (incompressível e flexível) é um caso particular de (7.1) quando  $c \rightarrow \infty$ . Então:

$$P(0, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^{L_y} \phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \cos(\kappa_n y) \quad \text{Caso IF} \quad (7.3)$$

onde é definida uma expressão independente de  $\omega$ .

Outro caso particular de (7.1) pode ser obtido com a consideração de  $\phi(y) = 1$  (parede rígida) e  $c \neq 0$ . Assim, resulta o caso CR (compressível e rígido), que tem solução dada por:

$$P(0, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\kappa_n \sqrt{\hat{\alpha}_n}} \cos(\kappa_n y) \quad \text{Caso CR} \quad (7.4)$$

O último caso é dado pela situação onde  $c \rightarrow \infty$  na expressão anterior, definindo o caso IR (incompressível e rígido). Então:

$$P(0, y) = \frac{2\rho_f \bar{A}}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\kappa_n^2} \cos(\kappa_n y) \quad \text{Caso IR} \quad (7.5)$$

A análise das soluções anteriores indica que a compressibilidade do fluido torna a solução de pressões hidrodinâmicas dependente da frequência acoplada  $\omega$  do problema. Caso a flexibilidade também seja considerada, surge uma incógnita adicional, dada pela deformada acoplada  $\phi(y)$  da interface.

### 7.1.2 - Cálculo dos parâmetros generalizados do problema

Para o cálculo dos parâmetros generalizados de uma geometria mais complexa, associada a uma estrutura de barragem, será utilizada uma análise modal em elementos finitos, onde a estrutura desacoplada será analisada. É interessante notar que a deformada modal da barragem é composta por componentes em duas direções,  $x$  e  $y$ , podendo, em estruturas mais simples, apresentar componentes desprezíveis na direção  $y$  (FERC, 2002). Desta forma, para um determinado nó  $j$  do modelo estrutural, o deslocamento modal resultante será dado por:

$$\phi_r^j = \sqrt{(\phi_x^j)^2 + (\phi_y^j)^2} \quad (7.6)$$

onde  $\phi_x^j$  e  $\phi_y^j$ , representam, respectivamente, os deslocamentos modais nas direções  $x$  e  $y$ . O deslocamento resultante  $\phi_r^j$  deverá ser normalizado para um valor unitário na crista da barragem, sendo utilizado no cálculo da massa generalizada, que será dada por:

$$\tilde{M} = \sum_{j=1}^{j_m} m^j \cdot (\phi_r^j)^2 \quad (7.7)$$

onde  $j_m$  indica o número total de nós do modelo e  $m^j$  representa a massa associada ao nó  $j$ . A rigidez generalizada é obtida de forma imediata, uma vez que a frequência do modo ( $\omega_{v\u00e1cuo}$ ) é definida pela solução num\u00e9rica. Ent\u00e3o:

$$\tilde{K} = (\omega_{v\u00e1cuo})^2 \cdot \tilde{M} \quad (7.8)$$

A massa generalizada adicional produzida pelo fluido,  $\tilde{M}_{fluido}$ , \u00e9 fun\u00e7\u00e3o do trabalho das for\u00e7as externas associadas \u00e0s press\u00f5es hidrodin\u00e2micas. Assim, admite-se, de forma simplificada, que a dire\u00e7\u00e3o de atua\u00e7\u00e3o das press\u00f5es ser\u00e1 paralela ao eixo  $x$ . Portanto, a fun\u00e7\u00e3o  $\phi(y)$  ser\u00e1 dada por uma aproxima\u00e7\u00e3o polinomial dos deslocamentos  $\phi_x^j$  dos n\u00f3s da interface. Esta fun\u00e7\u00e3o dever\u00e1 ser normalizada para um valor unit\u00e1rio na crista da barragem.

Para o c\u00e1lculo de estruturas submetidas a excita\u00e7\u00f5es dos apoios \u00e9 conveniente definir o fator de participa\u00e7\u00e3o s\u00edsmico  $\tilde{L}$ , dado por:

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{j_m} m^j \cdot \phi_x^j \quad (7.9)$$

### 7.1.3 - Solução da frequência do problema acoplado

Os Casos CF (compressível flexível) e CR (compressível rígido) dependem da frequência acoplada  $\omega$ . As soluções apresentadas nas Equações (7.1) e (7.4) são válidas para qualquer valor deste parâmetro. Entretanto, apenas os autovalores do problema acoplado irão satisfazer a solução de pressões hidrodinâmicas. O que se procura, na verdade, são os valores das pressões correspondentes a um determinado modo do sistema barragem-reservatório. É evidente que esta solução irá depender tanto das propriedades da estrutura, como do reservatório. Um procedimento prático para a solução deste tipo de problema foi apresentado no Capítulo 4, onde a equação de movimento da estrutura é estabelecida em termos de uma coordenada generalizada  $X$  e as pressões hidrodinâmicas na interface são consideradas como um carregamento externo. Desta forma, a massa generalizada da estrutura é acrescida de um termo extra, relacionado aos efeitos produzidos pelo fluido. Então:

$$\left[ \tilde{M} + \int_0^{L_y} \frac{P(0, y)}{\bar{A}} \phi(y) dy \right] \ddot{X} + \tilde{K}X = 0 \quad \therefore \quad [\tilde{M} + \tilde{M}_{fluido}] \ddot{X} + \tilde{K}X = 0 \quad (7.10)$$

A Equação (7.10) representa uma vibração livre do modelo estrutural, com uma massa generalizada adicional produzida pela interação entre os domínios do fluido e da estrutura. Esta expressão pode ser simplificada com a inclusão de um termo de massa generalizada total,  $\tilde{M}_{total}$ , que corresponde à massa da estrutura acrescida da massa do fluido. Assim:

$$\tilde{M}_{total} \ddot{X} + \tilde{K}X = 0 \quad (7.11)$$

Os valores próprios do problema acoplado serão estabelecidos com a solução da seguinte equação:

$$\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}_{total} = 0 \quad ; \quad \tilde{M}_{total} = \tilde{M} + \tilde{M}_{fluido} \quad (7.12)$$

onde  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$  representam, respectivamente, a rigidez e a massa generalizada da estrutura. Estes parâmetros, e  $\tilde{M}_{fluido}$ , dependem da deformada modal da estrutura acoplada. Entretanto, neste estudo será adotada uma simplificação onde a deformada acoplada será suposta idêntica à deformada desacoplada. Os valores de  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{M}$  e  $\tilde{M}_{fluido}$ , uma vez estabelecidos, deverão ser substituídos na Equação (7.12), para o cálculo da frequência acoplada ( $\omega$ ). Esta equação não apresenta solução analítica fechada, pois o termo  $\tilde{M}_{fluido}$  é função de  $\omega$  e está associado a um somatório infinito. Uma alternativa consiste em utilizar um software matemático para solução do problema. É interessante notar que para o caso de um fluido incompressível a solução é direta, pois  $\tilde{M}_{fluido}$  será independente de  $\omega$ . Esta representa a principal vantagem das soluções envolvendo os casos IF e IR.

Neste estudo será utilizado o software Maple 12 para avaliação da frequência acoplada do modo fundamental de vibração. A qualidade dos resultados é influenciada pelo número de termos do somatório. Entretanto, a convergência é rápida. Esta solução pode ser substituída na equação de pressões hidrodinâmicas, que será posteriormente utilizada para construção de um sistema equivalente barragem reservatório. A avaliação de soluções onde a compressibilidade do fluido não é desprezada exige obrigatoriamente a conclusão desta etapa.

#### 7.1.4 - Sistema equivalente barragem-reservatório

As pressões hidrodinâmicas atuantes no paramento de montante ( $x = 0$ ) podem ser associadas a massas distribuídas  $\bar{m}^i$  ao longo dos nós  $i$  da interface, considerando uma determinada área de influência. Assim, procura-se substituir a integral de  $\tilde{M}_{fluido}$  por um conjunto de elementos que representam os efeitos de interação barragem-reservatório. Neste caso, este parâmetro generalizado será dado por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \sum_{i=1}^{i_f} \bar{m}_i \cdot (\phi_x^i)^2 \quad (7.13)$$

onde  $i_f$  representa o número de nós da interface com massas adicionais. A massa por nó  $\bar{m}_i$  será dada por:

$$\bar{m}_i = \frac{P(0, y_i)}{\bar{A}} \cdot \frac{S_i}{\phi_x^i} \quad (7.14)$$

onde  $S_i$  representa a área de influência do nó  $i$ . Os valores obtidos na Equação (7.14) deverão ser acrescentados aos nós da interface do modelo estrutural. Deve-se observar que a massa generalizada adicional será dada pela Eq. (7.13), que depende dos deslocamentos da estrutura na direção  $x$ . Entretanto, no modelo de elementos finitos a interface irá apresentar deslocamentos nas duas direções. Assim, no modelo numérico este parâmetro será dado por:

$$\tilde{M}_{fluido} = \sum_{i=1}^{i_f} \bar{m}_i \cdot (\phi_r^i)^2 \quad (7.15)$$

Portanto, é necessário estabelecer um fator de correção para que as Equações (7.13) e (7.15) sejam compatíveis. Então:

$$\bar{m}_i = \frac{P(0, y_i)}{\bar{A}} \cdot \frac{S_i}{\varphi_x^i} \quad (7.16)$$

onde  $\varphi_x^i = (\phi_r^i)^2 / \phi_x^i$ , que representa o fator de correção dos deslocamentos. Caso os deslocamentos verticais sejam desprezíveis,  $\phi_r^i \cong \phi_x^i$  e a Equação (7.13) se reduz a Equação (7.15).

Para facilitar o procedimento pode-se utilizar uma tabela prática, onde é realizado o cálculo das massas nodais relacionadas aos respectivos nós da interface. A Tabela 7.1 ilustra um modelo, com parâmetros relacionados a um nó arbitrário  $i$ . A Figura 7.3 ilustra o sistema equivalente, com os termos indicados na tabela.

Tabela 7.1 –Planilha de cálculo de massas adicionais (sistema equivalente)

(a) Nó	(b) Elev.	(c) $\varphi_x^i$	(d) $P_{norm.}$	(e) $S_i$	(f) $\bar{m}_i$
$i$	$y_i$	$\frac{(\phi_r^i)^2}{\phi_x^i}$	$\frac{P(0, y_i)}{\rho_f \bar{A} L_y}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2}$	$\frac{(d)(e)}{(c)} \rho_f L_y$

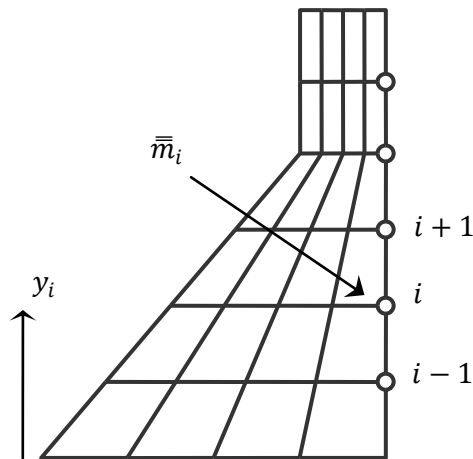


Figura 7.3 – Sistema equivalente barragem-reservatório

## 7.2 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO

O procedimento descrito anteriormente será aplicado na solução do problema de interação barragem-reservatório. Análises transientes da barragem ilustrada na Figura 7.4 serão realizadas e os resultados serão comparados aos obtidos em uma análise acoplada. Para a estrutura será adotado um módulo de elasticidade  $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$  e uma densidade  $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ . Para o fluido admite-se uma densidade  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  e uma velocidade de propagação do som  $c = 1500 \text{ m/s}$ .

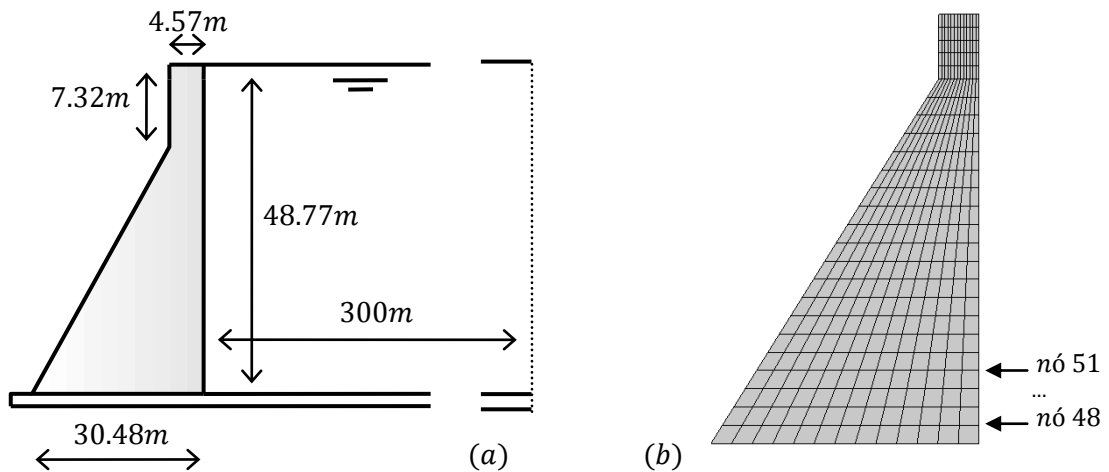


Figura 7.4 – Geometria da barragem (a) e malha de elementos finitos (b)

Uma análise modal em elementos finitos (utilizando o programa ANSYS v. 11) do modelo indicado na Figura 7.4b foi realizada para a obtenção dos parâmetros generalizados da estrutura. Nesta etapa foram utilizados elementos de estado plano de deformação, com quatro nós por elemento. Os nós da base do modelo foram engastados.

### 7.2.1 - Parâmetros generalizados da estrutura desacoplada

Os parâmetros generalizados do modo fundamental de vibração da estrutura, que apresenta  $\omega_{v\u00e1cuo} = 45.55 \text{ rad/s}$ , são indicados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 –Parâmetros generalizados do modo fundamental desacoplado

$\tilde{M}_1$	$\tilde{K}_1$	$\tilde{L}_1$
$\left(\frac{N \cdot s^2}{m}\right)$	$\left(\frac{N}{m}\right)$	$\left(\frac{N \cdot s^2}{m}\right)$
$1.0164 \times 10^5$	$2.1085 \times 10^8$	$2.4086 \times 10^5$

A deformada  $\phi(y)$  é representada por uma aproximação polinomial dos deslocamentos horizontais dos nós da interface. Então:

$$\phi(y) = 0.1085 \left(\frac{y}{L_y}\right)^4 + 0.6127 \left(\frac{y}{L_y}\right)^3 + 0.0792 \left(\frac{y}{L_y}\right)^2 + 0.2041 \left(\frac{y}{L_y}\right) + 0.0011 \quad (7.17)$$

### 7.2.2 - Cálculo da frequência fundamental acoplada

O cálculo da frequência acoplada está diretamente relacionado ao tipo de modelo adotado para as pressões hidrodinâmicas (Casos CF, IF, CR ou IR), pois esta função define a massa generalizada adicional produzida pelo fluido  $\tilde{M}_{fluido}$ . A Tabela 7.3 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 7.3 – Frequências fundamentais para os diversos casos analisados

	Caso CF	Caso IF	Caso CR	Caso IR	Referência (Acoplado)	Referência (Vácuo)
$\omega$ (rad/s)	32.88	34.09	23.17	24.09	33.25	45.55

Os valores de referência da Tabela 7.3 indicam os resultados obtidos em uma análise de elementos finitos dos modelos acoplado e desacoplado. Observa-se que os Casos CF e IF produzem boa aproximação em relação ao valor acoplado. Entretanto, os Casos CR e IR apresentam diferenças significativas, com uma redução acentuada das frequências. Desta



forma, pode-se concluir que a consideração da flexibilidade da interface é fundamental neste tipo de solução.

A consideração da compressibilidade do fluido diminui o valor da frequência acoplada para uma mesma hipótese de deslocamento (rígido ou flexível). Nos dois casos as reduções observadas foram da ordem de 4%.

### 7.2.3 - Construção do modelo equivalente

De acordo com o esquema apresentado na Figura 7.2, após a solução da frequência acoplada torna-se possível o cálculo da massa generalizada adicional produzida pelo fluido  $\tilde{M}_{fluido}$ . A Tabela 7.4 ilustra estes resultados para os casos analisados.

Tabela 7.4 – Massa generalizada adicional do modo fundamental

	Caso CF	Caso IF	Caso CR	Caso IR
$\tilde{M}_{fluido}$ ( $Ns^2/m$ )	$9.34 \times 10^4$	$7.98 \times 10^4$	$2.91 \times 10^5$	$2.62 \times 10^5$

Para a construção do modelo equivalente serão consideradas as soluções de frequências obtidas nos casos CF e IF, já que os demais não representam de forma adequada a frequência acoplada do problema. Portanto, duas soluções de  $\bar{m}_i$  serão desenvolvidas, resultando em dois modelos de massa adicional. No total, serão adicionados elementos de massa aos 24 nós da interface. As Tabelas 7.5 e 7.6 ilustram estes resultados para a seqüência de nós 48-51, ilustrada na Figura 7.4b. O procedimento de cálculo é o mesmo descrito Tabela 7.1.

Tabela 7.5 – Planilha de cálculo das massas adicionais – Caso CF

Nó	Elev. (m)	$\varphi_x^i$	$P_{norm.}$	$S_i$ ( $m^2$ )	$\bar{m}_i$ ( $10^6 Ns^2/m$ )
48	2.0726	0.0313	0.1347	2.0726	0.4350
49	4.1453	0.0606	0.1358	2.0726	0.2264
50	6.2179	0.0868	0.1373	2.0726	0.1598
51	8.2906	0.1107	0.1392	2.0726	0.1271
...	...	...	...	...	...

Tabela 7.6 – Planilha de cálculo das massas adicionais – Caso IF

Nó	Elev. (m)	$\varphi_x^i$	$P_{norm.}$	$S_i (m^2)$	$\bar{m}_i (10^6 N s^2/m)$
48	2.0726	0.0313	0.0861	2.0726	0.2781
49	4.1453	0.0606	0.0874	2.0726	0.1457
50	6.2179	0.0868	0.0894	2.0726	0.1040
51	8.2906	0.1107	0.0918	2.0726	0.0838
...	...	...	...	...	...

A análise das tabelas anteriores indica que o modelo de fluido incompressível (IF) apresenta menores valores de massas adicionais quando comparado ao modelo compressível (CF). Isto ocorre devido aos menores valores de pressões normalizadas apresentadas neste caso. Verifica-se que apenas a solução do modo fundamental dos modelos equivalentes é válida para comparação com soluções do modelo acoplado, já que a massa adicional é calculada apenas para o primeiro modo. As três primeiras frequências dos modelos equivalentes são apresentadas na Tabela 7.7. Observa-se que apenas as frequências do primeiro modo dos casos CF e IF se aproximam do valor acoplado de referência.

Tabela 7.7 – Frequências dos modelos equivalentes

Modo	Caso CF	Caso IF	Acoplado
1	32.78	34.05	33.25
2	74.39	78.72	49.97
3	107.07	113.46	54.73

#### 7.2.4 - Análise transiente da estrutura desacoplada

Uma análise desacoplada pode ser realizada antes do cálculo acoplado. Isto irá permitir uma avaliação dos efeitos inerciais da estrutura, produzidos pelo modo fundamental, além de validar a Solução 1, que corresponde à equação de movimento da estrutura desacoplada.

##### 7.2.4.1 - Equações de movimento (Solução 1)

Equações em coordenadas generalizadas do sistema (amortecido e não-amortecido) podem ser obtidas facilmente com a aplicação dos parâmetros da Tabela 7.2. Então:

$$[1.02 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[2.41 \times 10^5] \quad (7.18)$$

que representa a equação não-amortecida do modo fundamental relacionada a uma coordenada generalizada na crista da barragem.

O amortecimento estrutural (sem a consideração dos efeitos produzidos pelo fluido) pode ser incluído por meio do parâmetro generalizado  $\tilde{C}$ , dado por:

$$\tilde{C} = 2\xi\tilde{M}\omega \quad (7.19)$$

A estimativa da taxa de amortecimento ( $\xi$ ) representa um problema envolvente, uma vez que os mecanismos de dissipação de energia presentes em sistemas estruturais não são totalmente compreendidos (Clough, 1993). Em muitas situações práticas são utilizadas análises experimentais, com um amortecimento viscoso equivalente estimado por meio de um decaimento de amplitudes entre um determinado número de ciclos (método de decaimento em vibração livre). Boa parte dos códigos normativos direcionados ao projeto sísmico adota valores de  $\xi$  em torno de 5%, independente da natureza do material envolvido (Chopra, 2001). É evidente que a presença do reservatório adjacente exerce influência direta neste parâmetro. Neste caso surge o conceito de amortecimento adicional, proporcionado pelos efeitos de interação com o fluido (Chopra, 1988). Assim, na ausência de resultados experimentais será adotado o valor clássico presente em códigos normativos ( $\xi = 0.05$ ). Então:

$$\tilde{C} = 4.65 \times 10^5 \text{ Ns/m} \quad (7.20)$$

Portanto, a equação de equilíbrio dinâmico do sistema amortecido é definida por:

$$[1.02 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [4.65 \times 10^5]\dot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[2.41 \times 10^5] \quad (7.21)$$

A Figura 7.5 ilustra os resultados de deslocamentos relativos na crista da barragem, para o sismo El Centro (indicado Figura 6.21), obtidos com a solução numérica em elementos finitos considerando apenas o modo fundamental e com a aplicação do procedimento numérico de Runge-Kutta nas Equações (7.18) e (7.21).

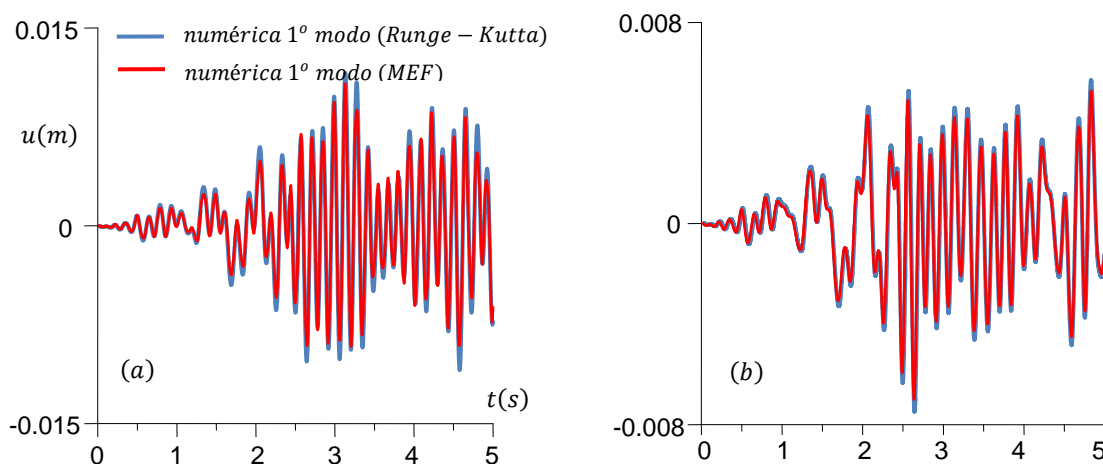


Figura 7.5 – Resultados numéricos de deslocamentos relativos (crista) para os sistemas não-amortecido (a) e amortecido (b)

Os resultados apresentados na Figura 7.5 indicam que (7.18) e (7.21) são válidas para a representação do modo fundamental desacoplado do problema (validando a Solução 1). As diferenças entre os sistemas amortecido e não-amortecido ficam mais nítidas quando as duas curvas são comparadas. A Figura 7.6 ilustra os resultados obtidos com estas equações.

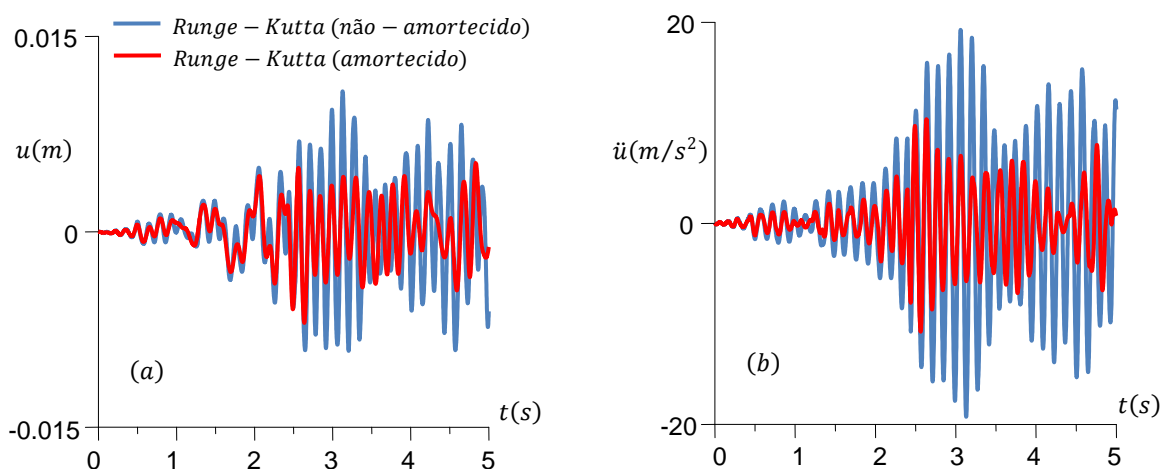


Figura 7.6 – Deslocamentos (a) e acelerações relativas (b) da crista da barragem no modo fundamental

#### 7.2.4.2 - Efeito de amplificação da aceleração do solo

A análise da Figura 7.6b indica acelerações relativas máximas de aproximadamente  $20 \text{ m/s}^2$  para o sistema não-amortecido e  $11 \text{ m/s}^2$  para o sistema amortecido. O maior valor de aceleração do solo registrado na janela de 5s da excitação sísmica é igual a

$3.13 \text{ m/s}^2$ . Assim, verifica-se a importância da natureza dinâmica do problema, que produz uma aceleração relativa muitas vezes superior a aceleração do solo.

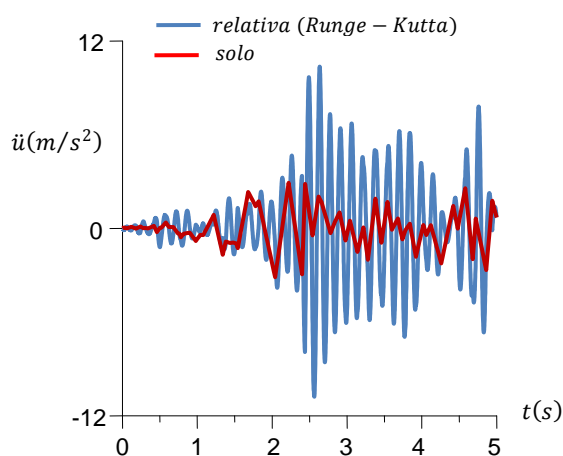


Figura 7.7 – Comparativo entre acelerações relativa (amortecido; crista) e do solo

A aceleração total é dada pela soma das componentes de aceleração do solo e relativa, o que torna este efeito ainda mais intenso. A Figura 7.7 ilustra o registro de aceleração do solo e aceleração relativa da crista da barragem no sistema amortecido. A amplificação de acelerações do solo indica que abordagens onde a máxima aceleração do solo é tomada constante ao longo da altura da barragem podem ser contrárias à segurança e devem ser evitadas. Um estudo ilustrativo dos modelos numéricos é realizado com a comparação entre o campo de tensões (considerando apenas o modo fundamental) obtido no instante de máxima aceleração relativa ( $t = 2.56\text{s}$ ) e o obtido com a aplicação de uma aceleração horizontal constante de valor igual à máxima aceleração do solo ( $3.13 \text{ m/s}^2$ ). As Figuras 7.8 e 7.9 apresentam estes resultados (tensões  $S1$  e  $S3$  no ANSYS, respectivamente).

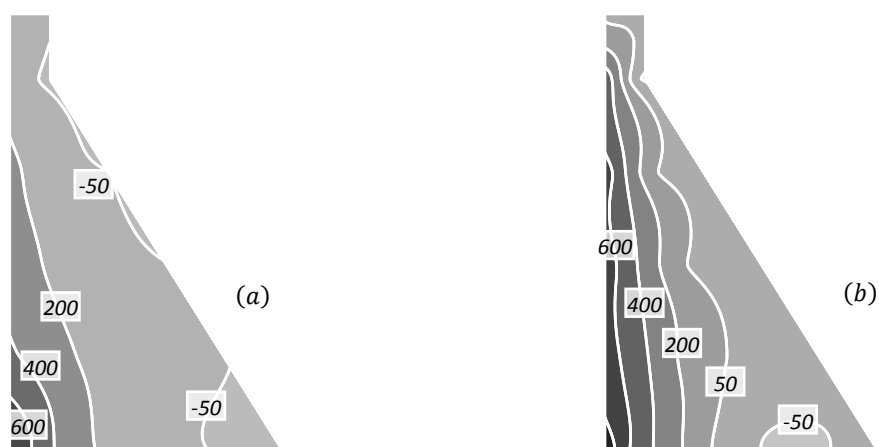


Figura 7.8 – Tensões principais máximas ( $kPa$ ) para uma aceleração constante (a) e em  $t = 2.56\text{s}$  (b)

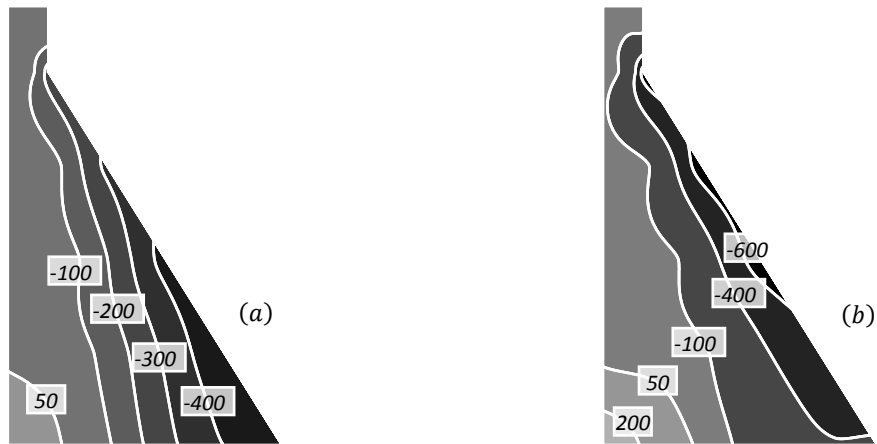


Figura 7.9 – Tensões principais mínimas ( $kPa$ ) para uma aceleração constante (a) e em  $t = 2.56s$  (b)

Os resultados ilustrados nas Figuras 7.8 e 7.9, onde tensões de tração são positivas e de compressão negativas, revelam que o modelo de aceleração constante produz campos de tensões com magnitudes inferiores aos de uma análise dinâmica, com diferenças mais nítidas nos paramentos de montante e jusante. Estas tensões são produzidas apenas pelas forças inerciais relacionadas à massa da estrutura (neste exemplo não há efeitos do fluido).

#### 7.2.4.3 - Contribuição de modos superiores na resposta

É interessante investigar as diferenças existentes entre uma solução envolvendo um único modo e outra envolvendo a participação de modos superiores. A Figura 7.10 apresenta os resultados de aceleração relativa de uma solução em elementos finitos produzida com os cinco primeiros modos do problema, considerando uma taxa de amortecimento de 5%.

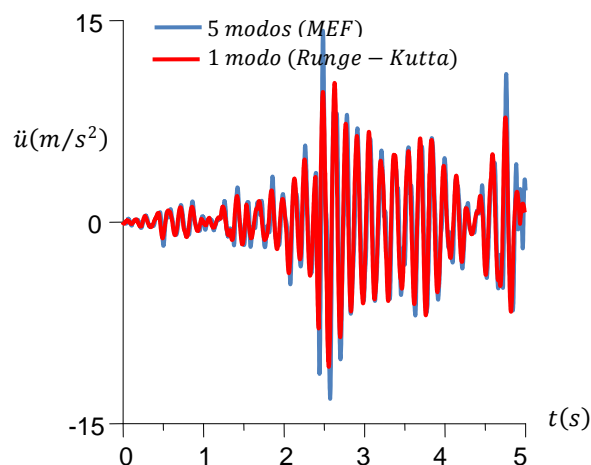


Figura 7.10 – Comparativo entre acelerações relativas (amortecidas) com 1 e 5 modos

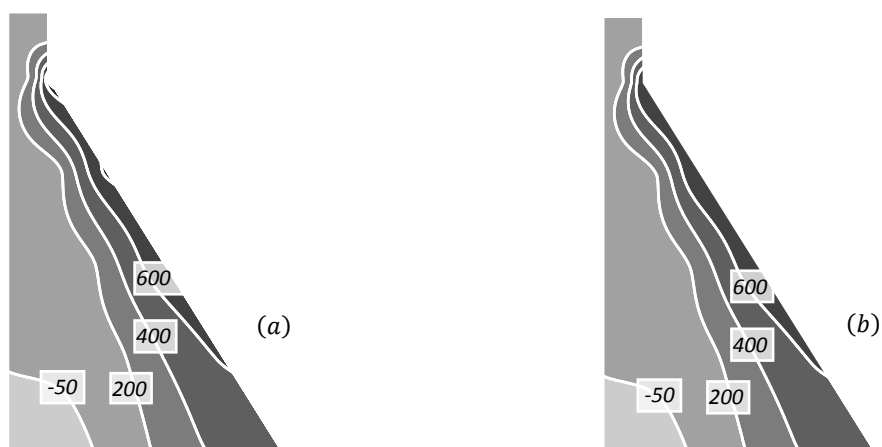


Figura 7.11 – Tensões principais máximas ( $kPa$ ) considerando 5 modos (a) e 1 modo (b)  
 $t = 2.48s$

A análise da Figura 7.10 revela que modos superiores são capazes de amplificar a aceleração relativa obtida no modo fundamental. Portanto, é importante avaliar a modificação produzida no campo de tensões por estes modos. A Figura 7.11a ilustra os resultados obtidos em um modelo de elementos finitos, para o instante de máxima aceleração relativa na solução com modos superiores ( $t = 2.48s$ ). Adicionalmente, são apresentados na Figura 7.11b os resultados obtidos considerando apenas o modo fundamental. Pequenas alterações são observadas entre estas duas distribuições, com a solução de modos superiores apresentando maior magnitude.

#### 7.2.4.4 - Considerações sobre a análise espectral

Os resultados anteriores, relacionados a análises no domínio do tempo, são importantes para validação da resposta dinâmica do modo fundamental, que será utilizado no modelo acoplado equivalente. Entretanto, a avaliação das maiores ações produzidas pelo sismo pode ser obtida, de forma mais eficiente, com uma análise espectral. A Figura 7.12a ilustra o espectro de deslocamentos ( $\mathcal{D}$ ) em função do período de vibração ( $T$ ) para uma taxa de amortecimento igual a 5%, desenvolvido com auxílio do software SeismoSignal v. 3.3.0. A Figura 7.12b apresenta o registro de deslocamentos relativos da crista da barragem, obtidos com (7.21), durante o período de duração do evento (30s). O período de vibração da estrutura amortecida é dado por  $T \cong 0.14s$ . Este resultado, indicado na Figura 7.12a, corresponde a  $\mathcal{D} \cong 0.0032m$  (relacionado a um sistema de um grau de liberdade).

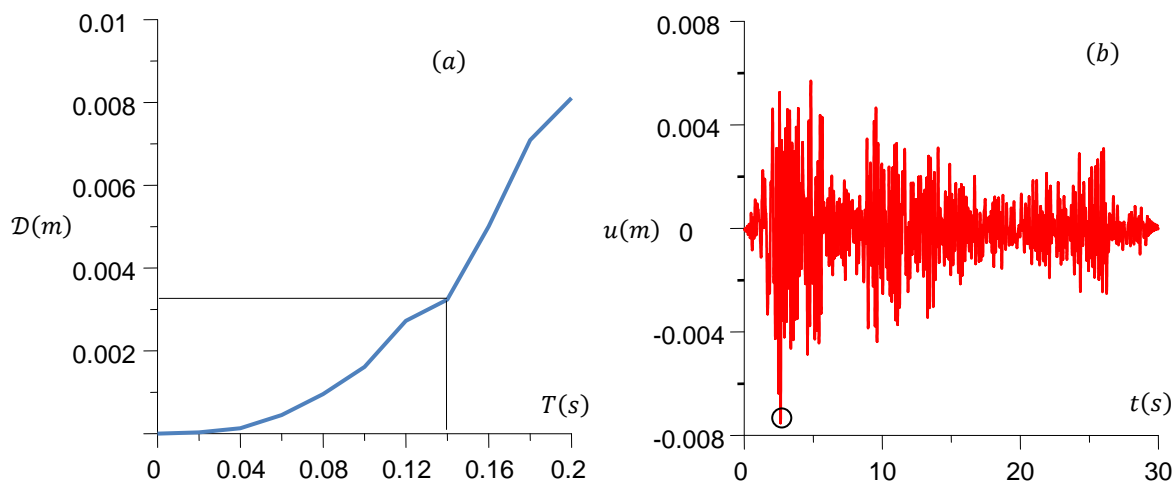


Figura 7.12 – Espectro de deslocamentos (a) e deslocamentos da crista da barragem (b)

Em coordenadas generalizadas o máximo deslocamento resulta em:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{M}_1} \mathcal{D} = \frac{2.41}{1.02} \times 0.0032 \cong 0.0075m \quad (7.22)$$

indicando uma excelente aproximação em relação ao resultado ilustrado na Figura 7.12b, relativo a  $t \cong 2.64s$ . Deve-se observar que os valores de  $\tilde{L}_1$  e  $\tilde{M}_1$  são obtidos diretamente na Tabela 7.2.

Neste estudo deve-se introduzir o conceito de forças sísmicas equivalentes na análise espectral, que corresponde à máxima distribuição de forças laterais,  $q(y)$ , ao longo da altura da barragem. Da teoria de dinâmica da estruturas (Clough, 1993) resulta:

$$q(y) = m_s(y)\phi(y)[\omega^2 u_{m\acute{a}x}] = m_s(y)\phi(y) \left[ \omega^2 \frac{\tilde{L}}{\tilde{M}} \mathcal{D} \right] \quad (7.23)$$

onde  $m_s(y)$  define a distribuição de massa ao longo da altura da barragem. O termo entre colchetes é denominado pseudo-aceleração, pois corresponde à aceleração que efetivamente produz deformações na estrutura, tendo significado distinto da aceleração total (sendo idêntico apenas no caso de sistemas não-amortecidos). Esta última expressão permite uma análise estática equivalente (utilizando teoria de vigas ou aplicando cargas estáticas em um modelo numérico, por exemplo) da geometria da barragem submetida aos maiores efeitos produzidos pelo sismo. Este procedimento foi inicialmente estudado por



Chopra (1978), que assume  $\tilde{L}_1/\tilde{M}_1 = 3$ . É evidente que esta consideração é conservadora neste exemplo, já que  $\tilde{L}_1/\tilde{M}_1 \cong 2.36$ .

A Tabela 7.8 apresenta os resultados de tensões de análises numéricas, obtidas em modelos de elementos finitos, envolvendo a análise estática equivalente e a análise dinâmica do modo fundamental, para  $t = 2.64s$ .

Tabela 7.8 – Tensões principais da análise desacoplada (kPa)

Elevação (m)	Análise estática equivalente		Análise dinâmica em $t = 2.64s$	
	Montante (mín.)	Jusante (máx.)	Montante (mín.)	Jusante (máx.)
45.84	-162	154	-180	147
41.45	-875	1422	-841	1106
31.09	-960	1074	-1020	1041
20.73	-941	1043	-1019	1029
10.36	-942	824	-1004	807

### 7.2.5 - Análise transiente da estrutura acoplada

Os resultados anteriores indicam que o modo fundamental representa de forma satisfatória a resposta dinâmica do sistema desacoplado, quando submetido a uma excitação sísmica. Neste item serão apresentados os resultados obtidos com as equações de movimento do sistema acoplado (Solução 1) e com os modelos equivalentes dos Casos CF e IF (Solução 2), ambos relacionados ao modo fundamental, que serão comparados aos valores obtidos em uma análise numérica do modelo acoplado, incluindo todos os modos de vibração.

#### 7.2.5.1 - Equações de movimento (Solução 1)

As equações de movimento não-amortecidas dos modelos acoplados podem ser obtidas com os parâmetros generalizados indicados na Tabela 7.2 e com o termo  $\tilde{N}_1$ , que irá compor a força sísmica efetiva em conjunto com  $\tilde{L}_1$ . Este parâmetro, definido por (6.61), será idêntico nos dois casos estudados, pois está relacionado a uma componente inercial do fluido independente da compressibilidade. Então:

$$\tilde{N}_1 = 2.59 \times 10^5 \text{ N s}^2/\text{m} \quad \therefore \quad \tilde{F}_1 = -\ddot{u}_g(t) [\tilde{L}_1 + \tilde{N}_1] \quad (7.24)$$

$$[1.95 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[5.00 \times 10^5] \quad (\text{Caso CF}) \quad (7.25)$$

$$[1.81 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[5.00 \times 10^5] \quad (\text{Caso IF}) \quad (7.26)$$

Nas Equações (7.25) e (7.26) assume-se que os efeitos produzidos pela interação não alteram a deformada desacoplada da estrutura. Deve-se observar que apenas a massa generalizada é modificada, já que  $\tilde{K}_1$ ,  $\tilde{L}_1$  e  $\tilde{N}_1$  permanecem inalterados. O amortecimento estrutural pode ser incluído de forma semelhante ao caso desacoplado. Assim, para o caso CF, a aplicação de (7.19) com  $\xi = 0.05$  resulta em:

$$\tilde{C} = 6.41 \times 10^5 \text{ Ns/m} \quad (\text{Caso CF}) \quad (7.27)$$

De forma semelhante, para o caso IF obtém-se:

$$\tilde{C} = 6.18 \times 10^5 \text{ Ns/m} \quad (\text{Caso IF}) \quad (7.28)$$

Portanto, as equações de movimento com amortecimento serão dadas por:

$$[1.95 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [6.41 \times 10^5]\dot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[5.00 \times 10^5] \quad (7.29)$$

$$[1.81 \times 10^5]\ddot{X}_1 + [6.18 \times 10^5]\dot{X}_1 + [2.11 \times 10^8]X_1 = -\ddot{u}_g(t)[5.00 \times 10^5] \quad (7.30)$$

#### 7.2.5.2 - Validação dos modelos equivalentes (Solução 2)

Uma validação dos modelos numéricos equivalentes é realizada neste item. Assim, os resultados do modo fundamental obtidos nestes sistemas não-amortecidos são comparados aos obtidos em uma análise acoplada incluindo todos os modos de vibração. A Figura 7.13 ilustra os deslocamentos relativos relacionados aos modelos equivalentes e à solução acoplada. O modelo compressível (CF) apresenta excelente aproximação ao passo que o modelo incompressível (IF) desenvolve menores amplitudes quando comparado à análise acoplada. A diferença relativa entre frequências nos dois modelos é de apenas 4%, quando comparada ao Caso CF. Entretanto, as Equações (7.25) e (7.26) indicam que o Caso IF apresenta menor massa e mesma rigidez generalizada do Caso CF, explicando as menores amplitudes da Figura 7.13b.

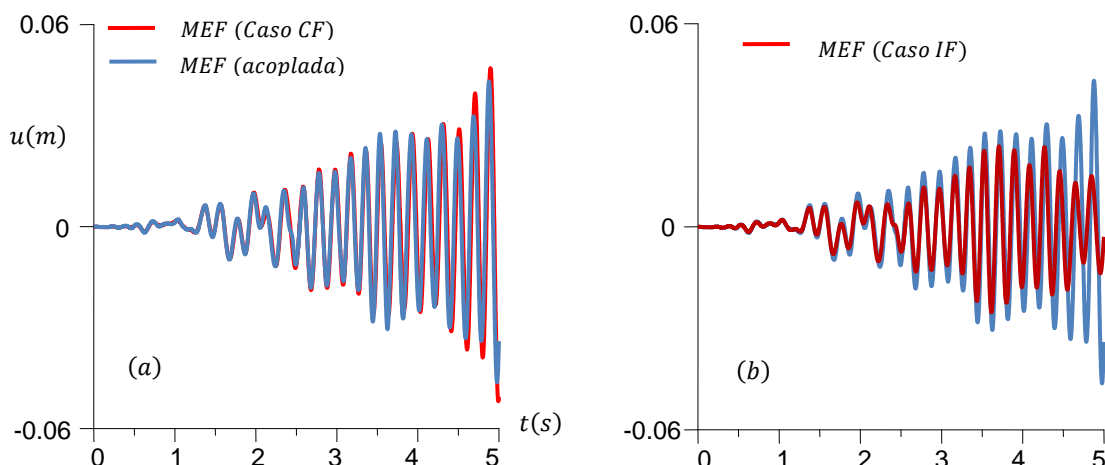


Figura 7.13 – Resposta de deslocamentos relativos não-amortecidos. Casos CF (a) e IF (b)

Além da verificação de deslocamentos, também devem ser avaliadas as acelerações relativas desenvolvidas pelos modelos equivalentes e pela solução acoplada. A Figura 7.14 ilustra estes resultados. O modelo equivalente compressível (CF) produz uma boa aproximação em relação à solução acoplada. O modelo equivalente incompressível (IF), por outro lado, apresenta erros significativos a partir de  $t = 4.5s$ .

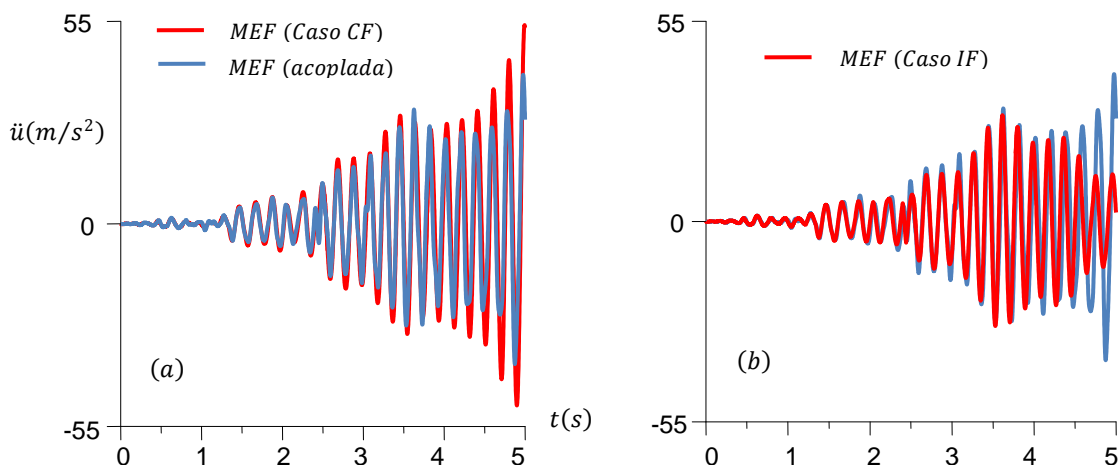


Figura 7.14 – Resposta de acelerações relativas não-amortecidas. Casos CF (a) e IF (b)

Os resultados de análises incluindo uma taxa de amortecimento igual a 5% são apresentados na Figura 7.15. Existe uma boa correlação entre o modelo equivalente CF e análise acoplada, com o primeiro desenvolvendo menores amplitudes (Figura 7.15b). Estas diferenças diminuem quando a Solução 1 (equação de movimento) é utilizada, indicando uma limitação do modelo equivalente (Figura 7.15a).

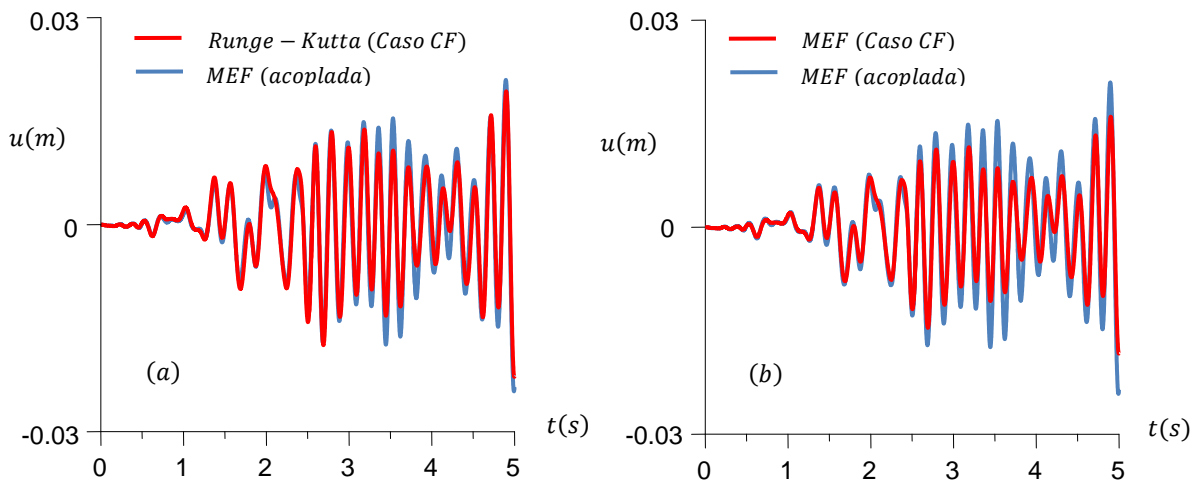


Figura 7.15 – Resposta de deslocamentos relativos amortecidos. Soluções 1 (a) e 2 (b)

### 7.2.5.3 - Compatibilidade de tensões dos modelos equivalentes (não-amortecido)

A Figura 7.16 ilustra a distribuição de tensões principais máximas produzida no instante  $t = 4.5s$ . Verifica-se uma boa aproximação entre os resultados das soluções acoplada e do Caso CF. Neste instante específico, a solução do modelo equivalente apresenta um campo de tensões de maior intensidade.

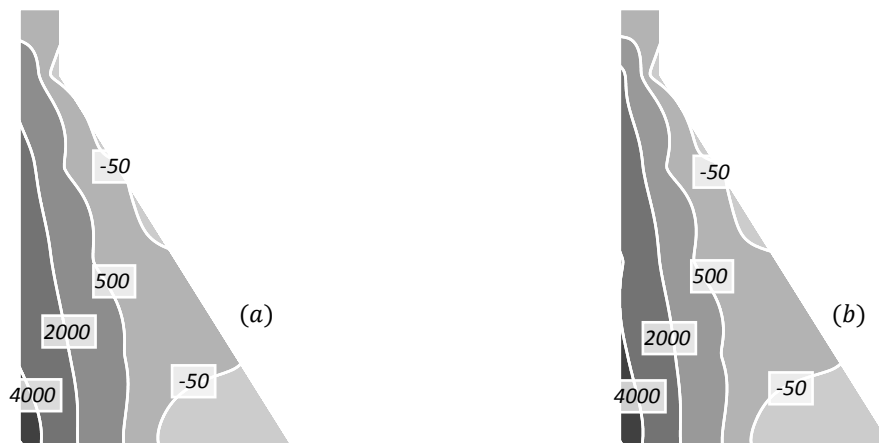


Figura 7.16 – Tensões principais máximas ( $kPa$ ) do modelo acoplado (a) e do Caso CF (b)  
 $t = 4.5s$  (sistemas não-amortecidos)

### 7.2.5.4 - Compatibilidade de tensões dos modelos equivalentes (amortecido)

A Figura 7.17 ilustra a distribuição de tensões principais máximas em  $t = 2.5s$ . Estes resultados indicam que o modelo equivalente CF (Figura 7.17b) é capaz de representar satisfatoriamente a configuração de tensões do modelo acoplado (Figura 7.17a)

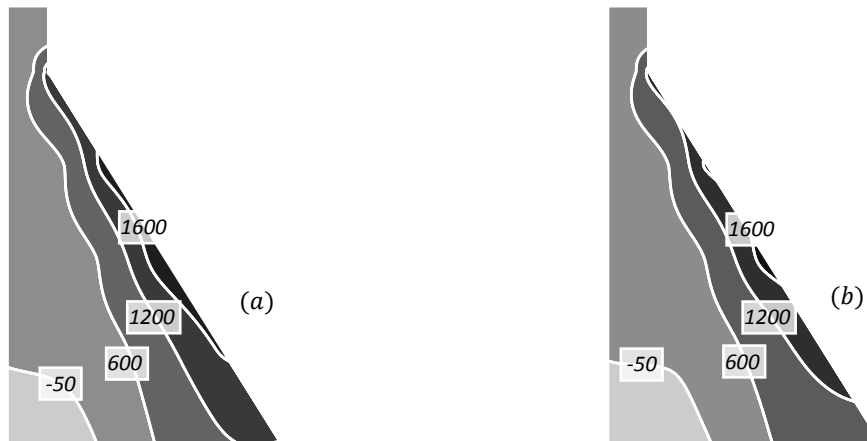


Figura 7.17 – Tensões principais máximas ( $kPa$ ) do modelo acoplado (a) e do Caso CF (b)  
 $t = 2.5s$  (sistemas amortecidos)

A análise dos resultados deste exemplo indica uma participação dominante do modo fundamental na resposta do sistema acoplado. Observa-se que o modelo equivalente do Caso CF representa com aproximação razoável os deslocamentos, acelerações e tensões do problema acoplado. Entretanto, pequenas diferenças de fase podem ocorrer nas respostas devido ao procedimento aproximado de cálculo das massas adicionais. De acordo com a Tabela 7.7, a frequência do modelo equivalente CF é aproximadamente 1.4% menor que a correspondente à solução acoplada, sendo suficiente para produzir diferenças nas respostas (que são cumulativas e mais nítidas ao longo do tempo). Ainda assim, uma análise deste modelo irá fornecer uma boa estimativa da resposta dinâmica produzida pela excitação sísmica.

#### 7.2.5.5 - Considerações sobre a análise espectral

O período de vibração do sistema acoplado amortecido é obtido com as frequências indicadas na Tabela 7.3. Então:

$$T \cong 0.191s \text{ (Caso CF)} \quad (7.31)$$

$$T \cong 0.184s \text{ (Caso IF)} \quad (7.32)$$

A Figura 7.18 ilustra o registro de deslocamentos relativos amortecidos dos Casos CF e IF, obtidos com a avaliação das Equações (7.29) e (7.30), para a janela de 30s de duração do

evento. As maiores amplitudes ocorrem em  $t \cong 5s$ , com  $u_{m\acute{a}x} = 0.022m$  no Caso CF e  $u_{m\acute{a}x} = 0.021m$  no Caso IF.

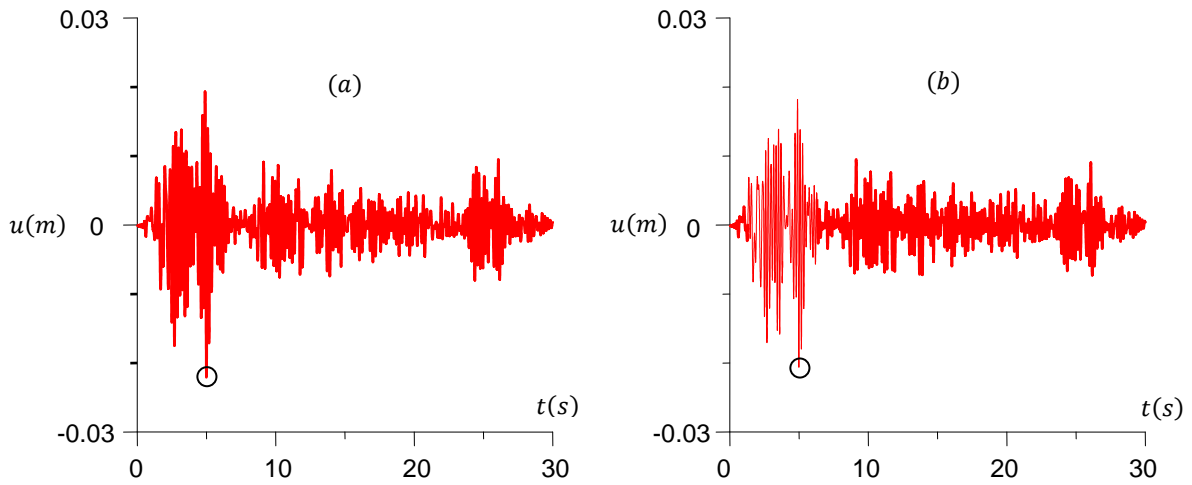


Figura 7.18 – Deslocamentos amortecidos da crista da barragem. Casos CF (a) e IF (b)

O espectro de deslocamentos da Figura 7.12a indica  $\mathcal{D} \cong 0.0077m$  para o Caso CF e  $\mathcal{D} \cong 0.0073m$  para o Caso IF. Então:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\tilde{L}_1^*}{\tilde{M}_1^*} \mathcal{D} = \frac{5}{1.95} \times 0.0077 \cong 0.020m \quad (\text{Caso CF}) \quad (7.33)$$

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\tilde{L}_1^*}{\tilde{M}_1^*} \mathcal{D} = \frac{5}{1.81} \times 0.0073 \cong 0.020m \quad (\text{Caso IF}) \quad (7.34)$$

onde os parâmetros generalizados acoplados são indicados com sobrescritos, para serem diferenciados dos relacionados à análise desacoplada. Estes valores são obtidos nas Equações (7.29) e (7.30). É interessante notar que tanto (7.33), como (7.34), apresentam boa aproximação em relação à maior amplitude registrada na Figura 7.18. As diferenças encontradas são explicadas pela rotina de cálculo do software SeismoSignal, que produz resultados em subdivisões de  $0.02s$  para o período de vibração ( $T$ ). Assim, uma interpolação linear é realizada para os valores indicados em (7.31) e (7.32).

Os resultados anteriores indicam amplitudes máximas idênticas nos Casos CF e IF. Verifica-se neste exemplo que a compressibilidade exerce pouca influência na análise espectral de deslocamentos.

Um carregamento sísmico equivalente pode ser definido nesta análise, de forma semelhante ao caso desacoplado. Entretanto, devem ser incluídos os efeitos do reservatório. Assim, a pseudo-aceleração ( $\omega^2 \mathcal{D}$ ) mobiliza tanto a massa da estrutura, como a massa produzida pela interação com o fluido. Então:

$$q(y) = \{m_s(y)\phi(y) + m_f(y)\} \left[ \omega^2 \frac{\tilde{L}^*}{\tilde{M}^*} \mathcal{D} \right] \quad (7.35)$$

onde  $m_f(y)$  indica o efeito inercial do fluido ao longo da altura da barragem, sendo definido por:

$$m_f(y) = \frac{P(0, y)}{\bar{A}} \quad (7.36)$$

É evidente que a expressão (7.36), que é função de  $P(0, y)$ , depende da consideração ou não da compressibilidade do fluido. Assim, pode-se adotar a expressão (7.1) para o Caso CF e (7.3) para o Caso IF.

A Tabela 7.9 apresenta os resultados de tensões de análises numéricas, obtidas em modelos de elementos finitos, envolvendo a análise estática equivalente (Solução 1) e a análise dinâmica dos modelos acoplado e equivalente (Solução 2), para  $t = 4.99s$ .

Tabela 7.9 – Tensões principais da análise acoplada (kPa)

Elevação (m)	Análise estática equiv. (Caso CF – Solução 1)		Análise dinâmica (Caso CF – Solução 2)		Análise dinâmica (Acoplado)	
	Montante (mín.)	Jusante (máx.)	Montante (mín.)	Jusante (máx.)	Montante (mín.)	Jusante (máx.)
45.84	257	239	77	260	113	324
41.45	289	2763	155	2320	228	2960
31.09	330	2549	144	2656	254	3453
20.73	276	2673	107	2772	251	3772
10.36	176	2243	33	2216	231	3229

Os resultados desta última tabela indicam tensões inferiores, quando comparadas a análise acoplada, para as Soluções 1 e 2. Em ambas as análises apenas o modo fundamental foi utilizado, enquanto a análise acoplada inclui o resultado de todos os modos do problema.

Adicionalmente, o deslocamento espectral indicado em (7.33), utilizado na Solução 1, e o obtido com o modelo equivalente ( $0.018m$ ), resultante da Solução 2, são menores que o associado à análise acoplada, onde  $u_{m\acute{a}x} \cong 0.024m$ . Uma correção pode ser aplicada à análise estática equivalente, com a consideração da maior amplitude indicada na Figura 7.18a, substituindo a indicada pelo espectro. A Tabela 7.10 apresenta estes resultados.

Tabela 7.10 – Tensões principais da análise estática equivalente - corrigida (kPa)

Elevação (m)	Análise estática equiv. (Caso CF – Solução 1)		Análise dinâmica (Acoplado)	
	Montante (mín.)	Jusante (máx.)	Montante (mín.)	Jusante (máx.)
45.84	285	267	113	324
41.45	323	3086	228	2960
31.09	368	2847	254	3453
20.73	308	2985	251	3772
10.36	196	2505	231	3229

As diferenças encontradas nas Tabelas 7.9 e 7.10 são justificadas pelo espectro do software SeismoSignal, que utiliza passos de tempo de  $0.02s$ , sendo necessária uma interpolação para valores intermediários. A análise estática equivalente, quando corrigida, resulta em tensões a jusante em torno de 20% menores que as obtidas na análise acoplada.

É interessante observar que a análise estática equivalente do modelo desacoplado (cujos resultados estão indicados na Tabela 7.8) produz uma excelente aproximação da distribuição de tensões quando comparada à respectiva análise dinâmica. Por outro lado, esta mesma aproximação não é encontrada na Tabela 7.10. Esta diferença pode ser explicada pela presença de modos superiores do modelo acoplado com frequências próximas ao modo fundamental, conforme indicado na Tabela 7.7. Entretanto, deve-se notar que o segundo modo acoplado apresenta frequência superior a primeira ressonância da cavidade ( $48.95 \text{ rad/s}$ ), caracterizando um modo típico do reservatório associado, que ocorre apenas devido à consideração de um modelo finito na discretização do fluido. Conforme foi comentado no Capítulo 5, soluções com comprimento infinito na direção longitudinal apresentam apenas modos associados a decaimentos exponenciais em direção aos limites do reservatório. Desta forma, a contribuição dos modos superiores da cavidade não corresponde à realidade de um modelo com reservatório infinito, cuja discretização é tributária de condições de radiação ao infinito.



### 7.3 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um procedimento semi-analítico para o cálculo de sistemas com acoplamento barragem-reservatório foi apresentado. Inicialmente foram discutidas as diversas possibilidades de interpretação da interação entre uma fronteira móvel e o reservatório adjacente. Desta forma, foram obtidas soluções para as pressões hidrodinâmicas em quatro casos distintos, envolvendo os deslocamentos da fronteira e a compressibilidade do fluido. Estes dois parâmetros, no caso mais geral (Caso CF), representam incógnitas do problema, podendo ser eliminadas de acordo com as simplificações adotadas nos demais casos (fronteira rígida e/ou fluido incompressível). Uma solução harmônica do sistema em coordenadas generalizadas permite relacionar as pressões hidrodinâmicas na interface a uma massa adicional, eliminando as forças externas e caracterizando uma vibração livre do sistema equivalente. A equação resultante é denominada equação de frequências, e é função dos parâmetros generalizados do sistema. Para geometrias mais complexas, a obtenção destes parâmetros apresenta grandes dificuldades matemáticas. Portanto, é conveniente utilizar uma análise modal em elementos finitos do modelo desacoplado, de onde resultam rigidez e massa generalizadas, além da deformada da interface. Estes parâmetros, supostos inalterados no modelo acoplado, permitem o cálculo da frequência fundamental da barragem incluindo os efeitos do reservatório. Após a obtenção da frequência do sistema barragem-reservatório, fica determinada a massa adicional generalizada, que pode ser substituída em uma equação de movimento (Solução 1), ou por um conjunto de massas equivalentes ao longo da interface dos subsistemas (Solução 2).

Dois exemplos de aplicação do procedimento semi-analítico foram apresentados. O primeiro (Solução 1) considera apenas a equação de movimento do modo fundamental, sendo útil para a construção da resposta dinâmica do sistema submetido a uma excitação arbitrária, além de permitir o cálculo do fator  $\tilde{L}_1/\tilde{M}_1$ , necessário a uma análise estática equivalente. O segundo (Solução 2) consiste na construção de um modelo equivalente em elementos finitos, onde os efeitos do reservatório são substituídos por massas acrescentadas aos nós da interface, com solução transiente associada ao modo fundamental. A primeira abordagem produz excelentes aproximações de deslocamentos, enquanto a segunda apresenta resultados de qualidade inferior. As soluções são apenas satisfatórias quando resultados de tensões são analisados. Apesar das desvantagens em relação à estimativa de tensões, nota-se que o tempo de processamento computacional dos

modelos equivalentes é muitas vezes menor que o da solução acoplada. Adicionalmente, com esta técnica torna-se viável a análise de estruturas em softwares básicos de elementos finitos, que não permitem a solução de problemas de interação fluido-estrutura. No caso da Solução 1, apenas um programa de integração numérica é suficiente para estimativa da máxima resposta de deslocamentos, permitindo uma análise estática equivalente do modelo estrutural. A Tabela 7.11 apresenta um resumo das principais características associadas às soluções propostas.

Tabela 7.11 – Resumos das principais características das soluções propostas

Solução	Aproximação de deslocamentos	Aproximação de tensões	Aplicações
1	<i>excelente</i>	<i>satisfatória</i>	<i>equação de equilíbrio dinâmico / análise estática equivalente</i>
2	<i>satisfatória</i>	<i>satisfatória</i>	<i>análise transiente</i>

## **8 - CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS**

Este último capítulo resume as contribuições desta tese, conclusões relevantes da teoria desenvolvida e perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

### **8.1 - SÍNTESE DA TESE E CONCLUSÕES**

A teoria desenvolvida nesta tese foi baseada em soluções analíticas de cavidades acústicas bidimensionais envolvendo fronteiras flexíveis, com vibrações harmônicas. Este problema, se resolvido apenas pelo referencial matemático, resulta em equações de pressões dinâmicas que dependem da função de deslocamentos da fronteira (ou interface entre os meios) e da frequência de vibração do sistema fronteira-cavidade. Este desenvolvimento apresenta, em geral, pouca complexidade matemática, podendo ser solucionado pela técnica de separação de variáveis. Alguns exemplos, envolvendo condições de contorno diversas, foram estudados no Capítulo 2. Ao final, o procedimento foi generalizado, com a construção de uma tabela que aborda um total de nove casos possíveis para o problema bidimensional.

As particularidades das soluções matemáticas foram estudadas no terceiro capítulo. Merece destaque a presença de pontos críticos em todas as soluções, que levam a resposta de pressões dinâmicas ao infinito. Estes valores estão associados às frequências de uma cavidade equivalente, onde a fronteira vibrante é substituída por uma parede rígida. As séries envolvidas nas soluções podem ser simplificadas de acordo com a função adotada para os deslocamentos da fronteira, com uma cavidade aberta na direção transversal e uma função senoidal representando a solução de menor complexidade, onde a série é eliminada (Caso 1A).

O tratamento do problema acoplado propriamente dito foi apresentado no Capítulo 4. Neste ponto surge uma das contribuições relevantes da tese, que é o procedimento analítico definido como Método Pseudo-Acoplado. Trata-se de uma solução em coordenadas generalizadas da estrutura, onde se supõe, na equação de pressões, uma determinada função de deslocamentos da interface acoplada, que corresponde aos modos de vibração da estrutura no vácuo. Esta simplificação permite a construção de uma equação de

freqüências, de onde resultam os valores próprios do sistema estrutura-cavidade. Este procedimento é geral e pode ser aplicado a estruturas associadas a qualquer uma das cavidades estudadas no segundo capítulo. Após o cálculo da freqüência acoplada torna-se possível a avaliação da massa generalizada adicional, que corresponde à substituição dos efeitos externos de interação por um termo de massa equivalente.

O Caso 1A foi analisado detalhadamente pelo procedimento pseudo-acoplado. É interessante notar que esta situação específica define solução aproximada idêntica a solução exata do problema acoplado (item 4.4.1.1). Ábacos adimensionais foram apresentados, revelando zonas de rigidez e massa adicional, além de pontos onde as freqüências acopladas correspondem aos valores próprios da estrutura no vácuo. As características deste problema são comuns aos demais casos envolvendo outras condições de contorno. De maneira geral, os modos acoplados correspondem a situações intermediárias dos valores críticos das cavidades equivalentes. A representação por meio de ábacos permite uma interpretação detalhada do fenômeno, indicando que modos e freqüências do sistema acoplado correspondem a uma combinação de modos da estrutura e da cavidade equivalente. Embora a solução do Caso 1A seja exata, para outras condições de contorno o procedimento pseudo-acoplado é apenas aproximado, já que os efeitos do fluido passam a alterar as deformadas modais da estrutura em relação às configurações no vácuo. Ainda assim, a presença de uma função dominante (governada fortemente pela configuração no vácuo) é condição suficiente para que o método produza bons resultados nos casos analisados.

No quinto capítulo foram apresentadas soluções exatas do problema acoplado viga-cavidade. A generalização desta abordagem também é um dos pontos importantes deste trabalho. Neste caso, nenhuma simplificação é adotada e as equações do segundo capítulo continuam válidas para o desenvolvimento matemático. A configuração final das soluções, que resultam em uma matriz  $\mathcal{R}$  onde os índices são compostos por séries infinitas, é uma das principais desvantagens da solução exata, dificultando a análise paramétrica do problema. Entretanto, os resultados deste procedimento são úteis em situações onde o procedimento pseudo-acoplado perde precisão, indicando a solução exata do problema.

Um procedimento de superposição modal pode ser aplicado para avaliação da resposta dinâmica do sistema acoplado. Duas abordagens são possíveis: a utilização de parâmetros

generalizados do método pseudo-acoplado, ou o emprego de parâmetros exatos da solução desenvolvida no quinto capítulo. Os resultados das análises revelam que o modo fundamental, dependendo da natureza de excitação, é capaz de representar satisfatoriamente o problema. Neste caso, a solução pseudo-acoplada produz resultados semelhantes aos obtidos com a solução exata. De maneira geral, verifica-se que o modo fundamental, no caso de estruturas engastadas submetidas a excitações sísmicas, governa a resposta, com deformadas acopladas inalteradas em relação à configuração no vácuo.

A solução transiente de barragens submetidas a excitações sísmicas foi estudada no sétimo capítulo. A complexidade da geometria envolvida limita a avaliação de parâmetros generalizados. Entretanto, uma análise auxiliar da estrutura pode ser realizada em programas de elementos finitos, fornecendo parâmetros generalizados e deformada da interface associados ao modo fundamental. Assim, foi proposto um esquema de solução semi-analítico, onde os parâmetros de uma análise numérica são inseridos na equação de frequências do Método Pseudo-Acoplado. Após a obtenção da frequência fundamental do sistema barragem-reservatório duas soluções são possíveis: a primeira envolvendo a construção de uma equação de equilíbrio dinâmico (Solução 1), e a segunda associada a construção de um modelo equivalente em elementos finitos, onde o efeito do reservatório é substituído por massas adicionadas aos nós da interface (Solução 2). A solução semi-analítica produz uma excelente aproximação de deslocamentos e resultados satisfatórios de tensões quando comparada a análise acoplada. A primeira solução pode ser avaliada em programas de integração numérica, fornecendo uma estimativa da resposta dinâmica frente a uma excitação arbitrária. Adicionalmente, esta abordagem permite o cálculo das forças sísmicas equivalentes, que podem ser aplicadas em uma análise estática. Com a segunda abordagem torna-se viável a análise de estruturas em softwares de elementos finitos que não permitem a solução de problemas de interação fluido-estrutura.

## **8.2 - VISÃO GLOBAL DAS CONTRIBUIÇÕES**

Uma visão global da tese revela o desenvolvimento de três pontos de destaque: (1) O Método Pseudo-Acoplado, (2) Soluções exatas do sistema viga-cavidade, (3) Solução semi-analítica da interação barragem-reservatório.

O procedimento pseudo-acoplado demonstrou sua validade para solução de problemas diversos, podendo ter seu campo de aplicação expandido a outras condições de contorno e geometrias tridimensionais. As limitações envolvem a presença de uma configuração modal dominante (imposta na interface), onde a função de deslocamentos da estrutura deve preservar suas características em relação à respectiva configuração no vácuo. A generalização do procedimento é um dos grandes atrativos do método, que pode ser conduzida sem maiores dificuldades. Em geral, as hipóteses deste procedimento são válidas para os modos iniciais do problema, fornecendo valores de frequências e modos da cavidade. Adicionalmente, uma boa estimativa da resposta transiente é obtida para o modo fundamental com os parâmetros generalizados deste método.

A solução exata supera as limitações do procedimento aproximado. Entretanto, o desenvolvimento matemático é exaustivo, envolvendo a avaliação de determinantes para a construção da equação de frequências do problema. Ainda assim, para a solução de problemas transientes onde modos superiores são utilizados recomenda-se a aplicação desta abordagem, já que os parâmetros generalizados não incluem as limitações do Método Pseudo-Acoplado.

Os efeitos de interação do sistema barragem-reservatório podem ser avaliados por meio do procedimento semi-analítico proposto. Para uma análise espectral a Solução 1 é suficiente, com a estimativa da máxima resposta de deslocamentos e da força sísmica equivalente a ser aplicada em uma análise estática. Para uma análise dinâmica em elementos finitos pode-se empregar a Solução 2, que irá produzir uma resposta satisfatória das tensões desenvolvidas na estrutura. É importante salientar que as duas abordagens consideram apenas o modo fundamental de vibração do sistema barragem-reservatório.

### **8.3 - PERSPECTIVAS**

Pesquisas futuras podem contribuir no desenvolvimento deste trabalho em direção a situações mais complexas ou no aprimoramento das soluções apresentadas. A seguir são propostas sugestões para novos trabalhos:

- Aplicação da condição de contorno de Sommerfeld para estudo de reservatórios com comprimento longitudinal infinito.

- Estudo dos efeitos de ondas de superfícies nas soluções propostas.
- Avaliação dos efeitos de modos superiores na interação barragem-reservatório.
- Estudo de problemas tridimensionais com aplicação do Método Pseudo-Acoplado (placas, comportas e barragens em arco, por exemplo).
- Avaliação da interação barragem-reservatório-fundação.
- Estimativa analítica dos parâmetros generalizados de massa e rigidez da barragem, eliminando a necessidade de uma análise auxiliar em elementos finitos.
- Investigação detalhada de soluções aproximadas e exatas de problemas envolvendo dois contornos móveis.
- Estudo de soluções fechadas no domínio do tempo para o problema de interação fluido-estrutura.
- Construção de soluções analíticas para problemas com outras condições de contorno da cavidade como, por exemplo, fundo inclinado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramson, H.N. "Hydroelasticity Some Problems and Some Solutions". In: *Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium*, Pennsylvania, ASME, pp.189-192, 210-212, nov.1967.

Ahmida, K. M. "Estudo de Cavidades Acústicas Usando o Método dos Elementos Finitos via Galerkin/Mínimos Quadrados". Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, 1996.

Amabili, M.; Kwak, M. K. "Free Vibrations of Circular Plates Coupled with Liquids: Revising the Lamb Problem". In: *Journal of Fluids and Structures*, 10, p. 743-761, 1996.

Antes, H.; von Estorff, O. "Analysis of absorption effects on the dynamic response of dam reservoir systems by boundary element methods". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, p. 1023-1036, 1987.

Araújo, J. M. "Análise de Barragens de Gravidade de Concreto Considerando a Fase Construtiva e a Interação Dinâmica Barragem-Reservatório-Fundação". Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.

Avilés, J.; Li, X. "Analytical-Numerical Solution for Hydrodynamic Pressures on Dams with Slopping Face Considering Compressibility and Viscosity of Water". In: *Computers & Structures*, vol. 66, no. 4, p. 481-488, 1998.

Awruch, A. M.; Teixeira, P. R. F. "Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction Using the Finite Element Method". In: *Computers & Fluids*, Editora Elsevier, v. 34, n. 2, p. 249-273, 2005.

Axisa, F. e Antunes, J. "Modeling of Mechanical Systems: Fluid-Structure Interaction". 1a ed., vol. 3, Butterworth Heinemann, 2007.

Barbosa, A.N. "Uma Formulação Potencial Simétrica para o Cálculo Estático e Dinâmico de Problemas de Interação Fluido-Estrutura." Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/98, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 1998.

Barbosa, A. N.; Pedroso, L. J. "Simulação do comportamento transiente num sistema acústico acoplado". In: *XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, paper code: est05\_024, Santiago-Chile, maio/2008.

Bathe, K. J. Fluid-Structure Interactions. In: *Mechanical Engineering Magazine*. Abril, 1998.



Bayliss, A.; Turkel, E. "Radiation boundary conditions for wave-like equations". In: *ICASE Report*, p. 79-126, 1979.

Beiler, H. A. "Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains". 2a ed., Dover, New York, 1966.

Blevins, R. D. "Flow-Induced Vibration". 2a ed., VNR, Nova York, 1990.

Bouaanani, N.; Paultre, P.; Proulx, P. "A closed-form formulation for earthquake-induced hydrodynamic pressure on gravity dams". In: *Journal of Sound and Vibration*, Letter to the Editor, vol. 261, p. 573-582, 2003.

Brahtz. B.A.; Heilbron. C. H. Discussion of "Water Pressures on Dams During Earthquakes." by H. M. Westergaard. In: *Transactions. ASCE*, Vol. 98, pp. 452-460, 1933.

Bustamante, J. I.; Rosenblueth, E.; Herrera, I.; Flores, A. "Presión Hidrodinámica en Presas y Depósitos". Boletín Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica. Vol. 1, No.2. Out. 1963.

Chopra, A. K. "Earthquake effects on dams". Tese de Doutorado, Universidade da Califórnia – Berkeley, 1966.

Chopra, A.K., "Hydrodynamic Pressures on Dams During Earthquakes" In: *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE. Vol. 93, No. EM6, Proc. Paper 5695, p. 205-223, Dez. 1967.

Chopra, A. K. "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams". In: *Report No EERC 70-1*, Earthquake Engineering Research Center, University of California – Berkeley, Janeiro 1970.

Chopra, A. K.; Chakrabarti, P. "The Koyna Earthquake of December 11, 1967 and the Performance of Koyna Dam". In: *Report No EERC 71-1*, Earthquake Engineering Research Center, University of California – Berkeley, Abril 1971.

Chopra, A. K. "Earthquake resistant design of concrete gravity dams". In: *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 104, n. ST6, p. 953-971, jun. 1978.

Chopra, A.K.; Chakrabarti, P. "Earthquake analysis of concrete gravity dams including dam-fluid-foundation rock interaction." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9, p. 363-383. 1981.

Chopra, A. K. ; "Earthquake Response Analysis of Concrete Dams" in *Advanced Dam Engineering for Design, Construction and Rehabilitation*, Ed. R. B. Jansen, Van Nostrand Reinhold, pp 416-465.

Chopra, A. K. "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering". 2a ed., Prentice Hall, New Jersey, 2001.

Chwang, A. T. “Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes, part 2: exact theory”. In: *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 87, p. 343-348, 1978.

Committee on Earthquake Engineering (CEE). *Earthquake Engineering for Concrete Dams: Design, Performance, and Research Needs*. Washington: National Academy Press, 1990.

Davis, R. B. “Techniques to Assess Acoustic-Structure Interaction in Liquid Rocket Engines”. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade de Duke, 2008.

Donin, N. E. “Vibrações Naturais em um Sistema de Interação Viga-Água Incluindo o Efeito de Onda de Superfície”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, 2003.

Dowell, E. H.; Voss, H. M. “The effect of a cavity on panel vibrations”. In: *AIAA Journal*, vol. 1, p. 476-477, 1963.

Dowell, E. H.; Gorman III, G. F.; Smith, D. A. “Acoustoelasticity: General theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation including comparisons with experiment”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 52(4), p.519-542, 1977.

Fahy, F. “Foundations of Engineering Acoustics”. 1a ed., Academic Press, 2001.

Fahy, F. “Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission, and Response”. 2a ed., Academic Press, 2007.

Fenves, G. L.; Chopra, A. K.; “Earthquake Analysis and Response of Concrete Gravity Dams”. In: *UCB/EERC-84/10*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 228 p, 1984.

Fenves, G. and Chopra, A. K. “Effects of Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams”. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 13, p. 13-31, 1985.

FERC (Federal Energy Regulatory Commission). Chapter III Gravity Dams. In: Federal Energy Regulatory Commission, Office of Hydropower Licensing. *Engineering guidelines for evaluation of hydropower projects*. Washington, 2002.

Filippi, P.; Bergassoli, A.; Habault, D.; Lefebvre, J. P. “Acoustics: Basic Physic Theory and Methods”. 1a ed., Academic Press, 1999.

Galli, L. A. F. “Estudo do Comportamento Dinâmico de Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura utilizando-se uma Formulação Simétrica em Potencial de Velocidades”. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, 1995.

Gerges, S. N. Y.; Fahy, F. “Acoustically induced vibration of, and sound radiation from beams inside an enclosure”. In: *Journal of Sound and Vibration*, vol. 45, no. 4, p. 584-594, 1976.

Gerges, S. N. Y.; Fahy, F. “Distorted cylindrical shell response to internal acoustic excitation below the cut-off frequency”. In: *Journal of Sound and Vibration*, vol. 52, no. 3, p. 441-452, 1977.

Gerges, S. N. Y. “Estado da Arte para Solução de Problemas Vibroacústicos por Métodos de Elementos Numéricos”. TecniAcústica Madri, 2000.

Getelina, B. R. C. “Vibrações Naturais em um Sistema de Interação Viga-Água”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, 2002.

Gibert, R. J. “Vibrations des structures – Interactions avec les fluids – Sources d’excitation aléatoires”. Ed. Eyrolles, Paris, França, 1988.

Gonçalves, P. B.; Ramos, N. R. S. S. “Free-Vibration Analysis Of Cylindrical Tanks Partially Filled With Liquid”. In: *Journal of Sound and Vibration*, v. 195, n. 3, p. 429-444, 1996.

Gonçalves, P. B.; Silva, F.M.A.; Del Prado, Z. J. G. “Transient Stability of Empty and Fluid-Filled Cylindrical Shells”. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, v. XXVIII, p. 331-338, 2006.

Goto, H.; Toki, K. “Vibrational characteristics and seismic design of submerged bridge piers”. In: *Kyoto University – Faculty of Engineering – Memoirs 27*, p. 17-30, 1965.

Guy, R. W.; Bhattacharya, M. C. “The transmission of sound through a cavity-backed finite plate”. In: *Journal of Sound and Vibration*, vol. 27, no. 2, p. 207-223, 1973.

Hall, J.F.; Chopra, A.K. “Two dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, p. 305-332, 1982.

Hong, K. L.; Kim, J. “Analysis of Free Vibration of Structural-Acoustic Coupled Systems. Part I: Development and Verification of the Procedure”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 188(4), p. 561-575, 1995a.

Hong, K. L.; Kim, J. “Analysis of Free Vibration of Structural-Acoustic Coupled Systems. Part II: Two and Three-Dimensional Examples”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 188(4), p. 577-600, 1995b.

Hoskins. L. M.; Jacobsen, L. S. "Water Pressure in a Tank Caused by a Simulated Earthquake." In: *Bulletin. Seismological Society of America*, Vol. 24, No.1, pp. 1-32, Jan. 1934.

Howe, M. S. “Acoustics of Fluid-Structure Interactions”. Cambridge University Press, New York, NY, 1998.

- Humar, J.; Roufaiel, M. "Finite element analysis of reservoir vibration". In: *Proc. ASCE 109 (EMI)*, p. 215-230, 1983.
- Humar, J.L., Jablonski, A.M. "Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, p. 1129-1156, 1988.
- Junger, M. C.; Feit, D. "Sound, Structures, and Their Interaction". Acoustical Society of America, Melville, NY, 1993.
- Junger, M. C. "Acoustic Fluid-Elastic Structure Interactions: Basic Concepts". In: *Computers & Structures*, vol. 65, no. 3, p. 287-293, 1997.
- Kotsubo, S. "Dynamic Water Pressure on Dams Due to Irregular Earthquakes," Memoirs Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka. Japan, Vol. 18, No.4, 1959. pp. 119-129.
- Küçükarslan, S. "Dam-Reservoir Interaction Including the Reservoir Bottom Effects in Time Domain". In: *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, July 16-18, University of Washington, Seattle, 2003.
- Lamb, H. "On the vibrations of an elastic plate in contact with water". In: *Proceedings of the Royal Society of London A*98, 205 – 216, 1921.
- Lamb, H. "Hydrodynamics". 6a ed, Dover, New York, 1945.
- Lee, G. C.; Tsai, C. S. "Time domain analyses of dam reservoir system. I: Exact solution". In: *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 117, no. 9, p. 1990-2006, 1991.
- Liaw, C-Y.; Chopra, A. K.; "Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water". In: *UCB/EERC Report 73-25*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1973.
- Liu, P. L. F. "Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes". In: *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 165, p. 131-145, 1986.
- Lotfi, V.; Roesset, M.; Tassoulas, J.L. "A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, p. 463-490, 1987.
- Lyon, R. H. "Noise reduction of rectangular enclosures with one flexible wall". In: *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, p. 1791-1797, 1963.
- Martini, J. N. "Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas". Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, 1996.
- McLachlan, N. W. "The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid". In: *Proceedings of the Physical Society (London)* 44, 546 – 555, 1932.

Morse, P. M.; Ingard, K. U. "Theoretical Acoustics", 1a ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.

Medina, F.; Dominguez, J. "Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects". In: *Engineering Analysis*, 6, p. 152-157, 1989.

Méhauté, B. L. "An Introduction to Hydrodynamics & Waterwaves". Springer-Verlag, New York, 1976.

Morais, M.V. "Modelização Numérica pelo Método dos Elementos Finitos de Problemas de Interação Fluido-Estrutura". Dissertação de Mestrado em Estruturas; Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, UnB-FT/ENC, Brasília, 2000.

Myint-U, T. "Partial Differential Equations of Mathematical Physics". 2a ed., Elsevier Publishing Company, New York, 1976.

Oliveira Júnior, V. G.; Pedroso, L. J. "Vibrações livres de reservatórios retangulares com fluido pelo método das diferenças finitas". In : *XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, paper code: est01\_006, Santiago-Chile, maio/2008a.

Oliveira Júnior, V. G.; Pedroso, L. J. "Frequências e Modos Acústicos de Vibrações de Reservatórios pelo Método das Diferenças Finitas". In : *Revista de Pesquisa Aplicada à Engenharia*. UnB-FT/ENC. PET Engenharia Civil. ISSN 1984-0136. Vol. 1, No 1, 2008b.

Pan, J.; Bies D. A. "The effect of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure – Theoretical part". In: *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, no. 2, p. 691-707, Fevereiro, 1990.

Pani, P. K.; Bhattacharyya, S. K. "Hydrodynamic Pressure on a Vertical Gate Considering Fluid-Structure Interaction". In: *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 44, p. 759-766, 2008.

Paula, M. A. R. "Estudo do acoplamento acústico-estrutural de uma estrutura do tipo casca cilíndrica uniforme". Universidade Federal de Itajubá. Pró-diretoria de pesquisa e pós-graduação programa de pós-graduação em engenharia mecânica. Dissertação de Mestrado, 2003.

Pavan, L. "Análise Modal e Otimização Numérica de Sistemas Acoplados Vibroacústicos Tridimensionais". Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

Pavanello, R.; Ahmida, K. M. "Análise acústica de cavidades utilizando um Método dos Elementos Finitos do Tipo Galerkin/Mínimos Quadrados". In: *IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte Nordeste*, Anais do IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte Nordeste. Recife, Brasil., v. 1, p. 657-680, 1996.

Pedroso, L. J. “Formulação para o tratamento acoplado fluido-estrutura baseada num enfoque variacional para os domínios sólido e fluido pelo M.E.F – uma abordagem com ênfase nas aplicações em estruturas de reatores nucleares”. In: *Projetos de Estudos e Pesquisas, UnB, FT/ENC – CNPq*, Ref. Proc. No 301516/88-0/EC/FV, 1996.

Pedroso, L. J. “Fluid-Structure Interaction and Earthquake Analysis In Concrete Dams”. In: *Relatório de Estudos de Pós-Doutorado*, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division, 2000.

Pedroso, L. J.; Sousa Jr., L. C. “Um tratamento simplificado para a avaliação da segurança sísmica em Barragens Gravidade de Concreto – Método Pseudo-Estático”. In: *5<sup>th</sup> LATIN-AMERICAN CONGRESS ON ELETRICITY GENERATION AND TRANSMISSION - CLAGTEE*, Paper n<sup>o</sup> B-022, Topic CMPADPP, São Pedro-SP, 2003.

Pedroso, L. J. “Interação Fluido-Estrutura.” In: *Notas de Curso e Apostila Didática*, UnB-FT/ENC, Vs.3, Brasília-DF, 2003.

Powell, J. H.; Roberts, J. H. T. “On the frequency of vibration of circular diaphragms”. *Proceedings of the Physical Society (London)* 35, 170 – 182, 1923.

Pretlove, A. J. “Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity”. In: *Journal of Sound and Vibration*, vol. 2, p. 197-209, 1965.

Pretlove, A. J. “Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity”. In: *Journal of Sound and Vibration*, vol. 3, p. 252-261, 1966.

Rashed, A. “Dynamic Analyses of Fluid-Structure Systems”. Tese de doutorado, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1983.

Rayleigh, J. W. S. “The Theory of Sound”, vol. 1, 2a ed. (1a ed. 1877), Dover, New York, 1945.

Ribeiro, P. M. V. “Uma Metodologia Analítica para Avaliação do Campo de Tensões em Barragens de Concreto Durante Terremotos”, Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 162 p., 2006.

Ribeiro, P.M.V.; Pedroso, L.J. “Analytical Procedure for Stress Field Solution in Concrete Gravity Dams”. In: *Solid Mechanics in Brazil 2007 - MecSol 2007*, Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering- ABCM Symposium Series. Vol. I - pp. 469-483, 2007.

Ribeiro, P.M.V.; Melo, C. A. E.; Pedroso, L.J. “Semi-Analytical Solution of Dam-Reservoir Interaction in the Fundamental Mode Shape”. In: *Solid Mechanics in Brazil 2009 - MecSol 2009*, Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering- ABCM Symposium Series, 2009.

Saini, S.S.; Bettess, P; Zienkiewicz, O.C. “Coupled hydrodynamic response of concrete dams using finite and infinite elements.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, p. 363-374, 1978.

Sanches, R. A. K. “Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código computacional”. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, 2006.

Shang-ming, L.; Hong, L.; Ai-min, L. “A semi-analytical solution for characteristics of a dam-reservoir system with absorptive reservoir bottom”. In: *Journal of Hydrodynamics - Elsevier*, 20(6), p. 727-734, 2008.

Sharan, S. K. “Finite element modeling of infinite reservoirs”. In: *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 111, p. 1457-1469, 1985.

Sharan, S.K. “Time domain analysis of infinite fluid vibration”. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24, p. 945-958, 1987.

Shin Y. S. and Chargin M. K. Acoustic responses of coupled fluid-structure system by acoustic-structural analogy. *Shock Vibration Bulletin*, proc. 53(part 2):11–21, 1983

Silva, S.F.; Pedroso, L. J. “Estudo Analítico-Numérico da Pressão Hidrodinâmica em Uma Barragem Flexível na Interface de um Fluido Incompressível”. In: *XXVI CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*; Belém-PA, paper code: 30-506, 2006a.

Silva, S. F.; Pedroso, L. J. “Barragem Flexível na Interface de um Fluido Compressível: Análise Paramétrica”. In: *RTP-SFS10 - 12/2006*, Brasília: UnB-FT / ENC / GDFE, 2006b.

Silva, S. F. “Interação Dinâmica Barragem-Reservatório: Modelos Analíticos e Numéricos”, Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-05A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 220 p., 2007.

Silva, S.F.; Ribeiro, P.M.V; Pedroso, L.J. “Uma Modificação ao Método do Coeficiente Sísmico Incluindo os Efeitos da Compressibilidade do Fluido”. In: *Anais do XXVII Seminário Nacional de Grandes Barragens-CBDB*, Belém - PA, 27-31/05/2007.

Sommerfeld, A. “Partial Differential Equations in Physics”, Academic Press, New York, 1947.

Sousa Jr., L. C.; Pedroso, L.J “Acoplamento Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas” In: *XXXI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, Mendoza, Argentina, maio/2004.

Sousa Jr., L. C. “Uma Formulação Não-Simétrica U-P para Problemas de Fluido-Estrutura”. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, 2006.

Sousa Jr., L.C.; Pedroso, L.J; Barbosa, A.N. “Estudo Analítico-Numérico de Vibrações Livres Acopladas Fluido-Estrutura em Barragens de Concreto” In: *XXXII Jornadas*

*Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, paper code: JOR0607, Campinas, Brasil, maio/2006.

Souza, S. M. “Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis”. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UnB-FT/ENC, Brasília, 2007.

Souza, S. M.; Pedroso, L. J. “Interpretação do Problema de Interação Fluido-Estrutura através do Código ANSYS para uma Cavidade Acústica com Paredes Flexíveis”. In: *XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, paper code: est05\_162, Santiago-Chile, maio/2008.

Stokes, G. G. “On the communication of vibration from a vibrating body to a surrounding gas”. *Philos. Trans. Royal Society London*. 158, 417-463, 1868.

Tsai, C. S.; Lee, G. C. “Methods for the transient analysis of three dimensional dam-reservoir interactions”. In: *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 116, p. 2151-2172, 1990.

Tsai, C. S.; Lee, G. C.; Ketter, R. L. “A semi-analytical method for time domain analyses of dam-reservoir interactions”. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, p. 913-933, 1990.

Tsai, C. S.; Lee, G. C. “Time domain analyses of dam reservoir system. II: Substructure Method”. In: *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 117, no. 9, p. 2007-2026, 1991.

Tychonov, A. N.; Samarski, A. A. “Partial Differential Equations of Mathematical Physics”. Vol. 1, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.

USBR (United States Bureau of Reclamation). “*Design of gravity dams*”. Denver: United States Department of the Interior – Bureau of Reclamation, 1976.

Weber, B. “Rational Transmitting Boundaries for Time-Domain Analysis of Dam-Reservoir Interaction”. Tese de Doutorado. In: *Diss. ETH No. 10673*, Swiss Federal Institute of Technology – Zurich, 1994.

Wepf, D. H.; Wolf, J. P.; Bachmann, H. “Hydrodynamic stiffness matrix based on boundary elements for time domain dam-reservoir-soil analysis”. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, p. 417-432, 1988.

Westergaard, H. M. “Water pressures on dams during earthquakes”. In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v. 98, p. 418-433, 1933.

Xing, J. T.; Price, W. G.; Pomfret, M. J.; Yam, L. H. “Natural Vibration of a Beam-Water Interaction System”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 199(3), p. 491-512, 1997.

Zangar, C. N., "Hydrodynamic Pressures on Dams Due to Horizontal Earthquake Effects," Engineering Monograph No. 11, U.S. Bureau of Reclamation, Maio. 1952.



Zhu, Y.; Weng, Z.; Wu, J. "The coupled vibration between column and water considering the effects of surface wave and compressibility of water". In: *Acta Mechanica Sinica*, 10, p. 657-667, 1989.