Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Comportamento Assintótico da Probabilidade de Ruína em Modelos de Risco de Renovação sob Variação Consistente

por

Simone Vasconcelos da Silva

Orientadora: Profa. Cátia Regina Gonçalves

Brasília
2009

À minha mãe,

Maria da Graça Pinto Vasconcelos,

que nunca duvidou da minha capacidade

e me ensinou a não duvidar também

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por ter me permitido conviver com todos àqueles a quem agradeço hoje, pela liberdade de acertar e errar em minhas escolhas e pela honra de vivenciar essa experiência.

Aos meus pais, Maria da Graça e José de Ribamar, agradeço por terem me dado asas e me educado de forma a usar corretamente a minha liberdade e às minhas irmãs, Cinthia e Siomara, que são grandes amigas.

À professora Cátia minha admiração e agradecimento, por ter me apresentado à probabilidade com a competência da profissional que é e por dar aulas também de como ser uma mulher divertida e bonita. Um agradecimento especial também aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, que participaram ativamente de minha formação matemática e aos professores Gregório e Cira, pelas contribuições neste trabalho.

Agradeço aos amigos matemáticos que estudaram comigo na graduação: Daniela, Susanne, Patrícia, Manoela, Luciana, Juliana, Igor, Sérgio, Jeferson, Michael, entre outros, pelo companheirismo que permanece até hoje. Agradeço também aos amigos matemáticos que conheci durante o mestrado: Dani, João, André, Vágner, Leonardo, Wembeson, Wesley, e vários outros, que me deram apoio para continuar e foram para mim exemplos.

Aos amigos que não são matemáticos Alana (e a pequena Lorena), Valéria, Luana, Isa, Vaninha, Carol, Rodrigo, Dênio, etc., por compreender minha ausência muitas vezes por ter que estudar e não permitir que apesar disso a amizade se enfraqueça.

Tenho muito que agradecer ao Fernando$^{\heartsuit}$ pela felicidade de cada momento ao seu lado e por me dar também apoio incondicional, assim como seus pais, irmãos, cunhadas, primos, tios, por quem eu tenho um carinho especial e considero como minha família também. Agradeço principalmente à Valdete, Carlos e Isabel, que tantas vezes me acolheram em suas casas e me ajudaram muito a concluir essa etapa da minha vida acadêmica.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento caudal da distribuição da soma de um número aleatório de variáveis aleatórias, sob a hipótese de que as variáveis envolvidas são de variação consistente. Esses resultados são utilizados para a obtenção de relações assintóticas, quando o capital inicial cresce, para as probabilidades de ruína a tempo finito dos modelos de risco de renovação clássico e composto.

Palavras Chave: Cauda pesada; Variação consistente; Soma aleatória; Modelo de Risco de Renovação; Probabilidade de ruína.

Abstract

In this work we study the tail behavior of the sum of a random number of random variables, assuming that the random variables have consistent variation. These results are used to obtain asymptotic relations, when the initial capital increases, for finite-time ruin probabilities in compound and classical renewal risk models.

Key-words: Heavy tail; Consistent variation; Random sum; Renewal risk model; Ruin probability.

Sumário

Introdução

A área da ciência atuarial que estuda modelos relacionados a seguros de não-vida, como por exemplo seguros de automóveis, viagens e residências, é chamada *Teoria de Risco*. Os modelos matemáticos para a evolução da reserva de capital de uma empresa seguradora ao longo do tempo são chamados *modelos de risco* ou *processo de reserva de risco*.

Os primeiros estudos e resultados sobre teoria de risco foram realizados por Lundberg no início do século passado e desde então essa área vem sendo estudada ativamente. Os primeiros modelos de risco eram bastante simples e, consequentemente não havia grande relevância prática nas aplicações, mas nas últimas três décadas a Teoria de Risco atingiu uma considerável maturidade matemática.

No modelo clássico de risco, proposto por Lundberg (1926), considera-se que o processo de chegada dos pedidos de indenizações é um processo de Poisson homogêneo, os valores das indenizações são variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas), independentes dos tempos de ocorrência das indenizações, e a entrada dos prêmios é linear no tempo.

O modelo de risco de renovação, introduzido por Sparre Andersen (1957) é uma extensão natural do modelo de Lundberg, no qual assume-se que o processo de chegada das indenizações é um processo de renovação, ou seja, um processo de contagem onde os tempos entre chegadas das indenizações são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição arbitrária. No modelo de Lundberg, esta distribuição é a exponencial. Assim, no modelo de risco de renovação a reserva de capital de risco ao longo do tempo pode ser descrita como

$$\begin{aligned} R(t) &= x + ct - \sum_{i=1}^{\tau(t)} Z_i \ , \ \ t > 0 \\ R(0) &= x \ , \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x \geq 0$ denota o capital inicial da empresa, $c > 0$ denota a taxa de prêmio constante, $\tau(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ é o número de indenizações individuais pagas no intervalo $[0, t]$, onde T_n é o tempo de ocorrência do n-ésimo acidente e Z_i representa o custo da i-ésima indenização paga. O processo $\{\tau(t), t \geq 0\}$ é um processo de renovação, ou seja, os tempos entre-chegadas dos pedidos de indenizações (sinistros) $\{\theta_i, i \geq 1\}$ são v.a.'s i.i.d. . Assume-se que as sequências $\{Z_i, i \geq 1\}$ e $\{\theta_i, i \geq 1\}$ são independentes.

Uma característica do modelo de risco de renovação clássico, descrito por (1) é que a cada acidente está associado o pagamento de uma única indenização individual. Tang, Su, Jiang e Zhang (2001) introduziram uma generalização do modelo de renovação clássico, chamado modelo de risco de renovação composto, onde em um único acidente pode ocorrer o pagamento de um número arbitrário de indenizações. Processos deste tipo são mais realistas para modelar seguros associados a ocorrência de catástrofes, principalmente relacionadas a eventos naturais como terremotos, furacões, enchentes, etc.. Desta forma, no modelo de risco de renovação composto a reserva de capital de risco ao longo do tempo t á dada por

$$\begin{aligned} R(t) &= x + ct - \sum_{n=1}^{\tau(t)} S_{N_n}^{(n)} \ , \ \ t > 0 \\ R(0) &= x \ , \end{aligned} \tag{2}$$

onde x é o capital inicial, $c > 0$ é a taxa de prêmios, $\{\tau(t), t \geq 0\}$ é um processo de renovação que descreve o número de catástrofes ocorridas ao longo do tempo e $S_{N_n}^{(n)}$ é a perda agregada em decorrência da n-ésima catástrofe e é descrita por

$$S_{N_n}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N_n} Z_i^{(n)} \ ,$$

onde $Z_i^{(n)}$ é o custo da i-ésima indenização individual paga em virtude da n-ésima catástrofe e N_n representa o número de indenizações associadas à n-ésima catástrofe. Neste modelo, para cada $n \geq 1$ as sequências $\{Z_i^{(n)}, i \geq 1\}$ são cópias independentes das v.a.'s i.i.d. $\{Z_i, i \geq 1\}$ e $N_i,\ i \geq 1$ são v.a.'s i.i.d. assumindo valores inteiros não negativos e independentes de $\{Z_i, i \geq 1\}$ e do processo $\{\tau(t), t \geq 0\}$.

Um dos principais interesses da Teoria de Risco é o cálculo da *probabilidade de ruína*, ou seja, a probabilidade de que a reserva de capital da empresa seguradora (reserva de risco) atinja um valor negativo em algum instante de tempo finito. Mais especificamente, o primeiro instante de tempo em que ocorre a ruína é chamado *tempo de ruína* e é dado por

$$\Upsilon(x) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0 \,|\, R(0) = x\}$$

e a probabilidade de ruína a tempo finito $t \geq 0$ é representada pela função bivariada

$$\Psi(x,t) = P(\Upsilon(x) \leq t) \ , \ \ x \geq 0.$$

Para a grande maioria dos modelos de risco não é possível calcular exatamente a probabilidade de ruína. Busca-se, portanto, estimativas para seu valor ou procura-se conhecer o seu comportamento assintótico quando o capital inicial cresce. Os resultados variam bastante de acordo com a classificação das caudas das distribuições dos custos de indenizações.

Em geral, nas várias áreas de probabilidade aplicada e inclusive na teoria de risco, as variáveis aleatórias que melhor ajustam os dados envolvidos nos problemas são de cauda pesada, ou seja, variáveis cujas caudas (á direita) das respectivas funções de distribuição decaem mais lentamente do que qualquer exponencial $e^{-\varepsilon x}$, quando $x \to \infty$.

Dentre as distribuições de cauda pesada mais conhecidas estão as distribuições de cauda de variação regular, as distribuições de variação dominada, de variação longa e as subexponenciais.

Neste trabalho, baseado em Tang (2004a) e Aleškevičienė, Leipus e Šiaulys (2008), estamos interessados no comportamento assintótico, quando $x \to \infty$, da probabilidade de ruína a tempo finito para os modelos de risco de renovação clássico e composto, quando as variáveis envolvidas têm distribuição de variação consistente. A classe de distribuição de variação consistente foi introduzida por Cline (1994) e é uma classe de distribuições de cauda pesada intermediária entre as de cauda de variação regular e as de variação dominada.

O comportamento da cauda de somas aleatórias do tipo

$$S_\eta = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i$$

tem um papel fundamental para a obtenção das relações assintóticas para a probabilidade de ruína a tempo finito nos modelos de risco considerados. A cauda da distribuição de S_η depende essencialmente das caudas de η e das ξ_i's e da interrelação entre elas.

Assim, no Capítulo 1, apresentamos inicialmente as definições das distribuições de variação consistente e das demais classes de distribuições de cauda pesada consideradas e as relações de inclusão entre elas. A seguir, apresentamos alguns resultados, obtidos por Ng, Tang e Yang (2002) e Aleškevičienė et al (2008), sobre o comportamento assintótico da cauda da distribuição de somas aleatórias S_η, com $\{\xi_i\}$ ou η de cauda de variação consistente e para diferentes casos de interrelação entre as caudas de $\{\xi_i\}$ e η, que serão úteis para o desenvolvimento do restante do trabalho.

No Capítulo 2, estudamos o comportamento assintótico das probabilidades de ruína a tempo finito para os modelos de risco de renovação clássico e composto. Iniciamos considerando o modelo de risco de renovação clássico, descrito em (1) e apresentamos no Teorema 2.1 o resultado obtido por Tang (2004a), que estabelece uma relação assintótica para a probabilidade da ruína a tempo finito $\Psi(x,t)$, quando o capital inicial cresce e t varia uniformemente num subconjunto apropriado. A seguir, apresentamos relações assintóticas semelhantes para a probabilidade da ruína a tempo finito, obtidas por Aleškevičienė et al (2008), para o modelo de risco de renovação composto, descrito em (2), considerando três casos (Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4) de interrelações entre a cauda da distribuição da quantia de indenizações individuais $(P(Z > x))$ e a cauda da distribuição do número de indenizações pagas $(P(N > x))$ em cada acidente ou catástrofe. Finalizamos o trabalho apresentando alguns exemplos que ilustram os resultados assintóticos apresentados para o modelo de risco de renovação composto.

Capítulo 1

Somas Aleatórias com Distribuições de Variação Consistente

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos propriedades de distribuições de variação consistente e de somas aleatórias envolvendo distribuições dessa classe, que serão utilizados no desenvolvimento do Capítulo 2.

Inicialmente, apresentamos na seção 1.2 alguns conceitos e notações preliminares, que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Na seção 1.3, apresentamos o conceito de cauda pesada e as definições das principais classes de distribuições de cauda pesada, em especial a classe $\mathcal{C}$, das distribuições de variação consistente, que são de principal interesse neste trabalho. Apresentamos as relações de inclusão entre essas classes, demonstrando em detalhes aquelas envolvendo a classe $\mathcal{C}$.

Por fim, na seção 1.4 apresentamos as relações assintóticas, obtidas por Ng et al (2002) e Aleškevičienė et al (2008), para a cauda da distribuição da soma aleatória

$S_\eta = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i$, que serão aplicados para o estudo do comportamento assintótico da probabilidade de ruína do modelo de risco de renovação composto, a ser estudado no próximo capítulo.

1.2 Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas notações e conceitos que serão usados ao longo de todo o trabalho.

Comecemos com a definição de alguns limites especiais.

Definição 1.1 *Dadas duas funções positivas a(x) e b(x), dizemos que*

(a) A função $a(x)$ é assintoticamente menor que $b(x)$ se

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} \leq 1$$

e denotamos então $a(x) \lesssim b(x)$. Neste caso dizemos também que $b(x)$ é assintoticamente maior que $a(x)$ e denotamos por $b(x) \gtrsim a(x)$.

(b) Se $a(x) \lesssim b(x)$ e $b(x) \lesssim a(x)$, então dizemos que $a(x)$ e $b(x)$ são assintoticamente iguais, ou seja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{a(x)} = 1$$

e denotamos $a(x) \sim b(x)$.

(c) Dizemos que $a(x) = O\left(b(x)\right)$ com $x \to \infty$ se

$$\limsup_{x\to\infty} \left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| < \infty\,.$$

(d) Dizemos que $a(x) = o\left(b(x)\right)$ com $x \to \infty$ quando

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 0\,.$$

Uma observação importante e fácil de se verificar é que a relação de igualdade assintótica dada em *(b)* é uma relação de equivalência.

A propriedade abaixo será usada várias vezes ao longo do trabalho.

Proposição 1.1 *Se* $a(x)$ *e* $b(x)$ *são funções estritamente positivas no intervalo* $(x, x+k) \subset (0, \infty)$*,* $k > 0$ *e* $a(x) \sim b(x)$*, então*

$$\int_x^{x+k} a(u)du \sim \int_x^{x+k} b(u)du\ . \tag{1.1}$$

Demonstração: De acordo com a definição de igualdade assintótica, precisamos verificar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{x+k} a(u)du}{\int_x^{x+k} b(u)du} = 1\ .$$

Como $a(x) \sim b(x)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x > M$,

$$1 - \varepsilon < \frac{a(x)}{b(x)} < 1 + \varepsilon\ . \tag{1.2}$$

Assim, para todo $x > M$ se $u \in (x, x+k)$, então $u > M$. Logo, de (1.2), segue que

$$\frac{\int_x^{x+k} a(u)du}{\int_x^{x+k} b(u)du} = \frac{\int_x^{x+k} \frac{a(u)}{b(u)} b(u)du}{\int_x^{x+k} b(u)du} < (1+\varepsilon)$$

e

$$\frac{\int_x^{x+k} a(u)du}{\int_x^{x+k} b(u)du} = \frac{\int_x^{x+k} \frac{a(u)}{b(u)} b(u)du}{\int_x^{x+k} b(u)du} > (1-\varepsilon)\ .$$

Pela definição de limite, temos portanto que a equivalência (1.1) é válida. □

A definição seguinte é também uma relação assintótica, mas para funções bivariadas, quando uma delas tende a infinito e a outra pertence a um determinado conjunto não vazio. Todos os teoremas do Capítulo 2 usarão esta relação para a probabilidade de ruína, onde uma das variáveis é o capital inicial da empresa seguradora e a outra é o tempo.

Definição 1.2 *Dadas duas funções bivariadas positivas $a(\cdot\,;\cdot)$ e $b(\cdot\,;\cdot)$, dizemos que a relação assintótica $a(x,t) \sim b(x,t)$ vale uniformemente para $t \in \Lambda$ não vazio se*

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\in\Lambda} \left| \frac{a(x,t)}{b(x,t)} - 1 \right| = 0 \,.$$

Claramente, a relação assintótica $a(x,t) \sim b(x,t)$, uniformemente em $t \in \Lambda$ vale se, e somente se

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{t\in\Lambda} \frac{a(x,t)}{b(x,t)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{x\to\infty} \inf_{t\in\Lambda} \frac{a(x,t)}{b(x,t)} \geq 1 \,.$$

As duas inequações acima significam que $a(x,t) \lesssim b(x,t)$, uniformemente para $t \in \Lambda$ e que $a(x,t) \gtrsim b(x,t)$, uniformemente para $t \in \Lambda$, respectivamente.

1.3 Distribuições de Variação Consistente

Uma função de distribuição pode ser classificada como sendo de cauda leve ou pesada, dependendo da velocidade do decaimento a zero de sua cauda quando comparada com a cauda de funções de distribuição da família exponencial, ou seja, $e^{-\varepsilon x}$, para todo $\varepsilon > 0$.

Especificamente, temos

Definição 1.3 *Uma função de distribuição (f.d.) F é dita de cauda pesada (à direita) se para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(x)}{e^{-\varepsilon x}} = \infty \tag{1.3}$$

e é dita de cauda leve (à direita) se existe $\varepsilon > 0$, tal que o limite superior em (1.3) é finito, ou seja $\overline{F}\,(x) = O(e^{-\varepsilon x})$.

Podemos denominar também as variáveis aleatórias como sendo de cauda leve ou pesada, de acordo com a classificação de sua função de distribuição, ou seja, X *é dita* *de cauda pesada*, se a f.d. de X tem cauda pesada. Analogamente para X *de cauda leve*.

É imediato da definição que qualquer distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ é um exemplo de f.d. de cauda leve. Alguns outros exemplos de distribuição de cauda leve são a Geométrica de parâmetro $0 \leq p \leq 1$, a Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, a Weibull com taxa de falha crescente, a Normal, etc.

Alguns exemplos de distribuições de cauda pesada são a Pareto, a Lognormal e a Weibull com taxa de falha decrescente. Para estes e outros exemplos veja Embrechts et al (1997).

A proposição a seguir fornece uma definição equivalente à anterior, cuja demonstração pode ser encontrada em Santana (2006), que permite decidir sobre o comportamento da cauda de uma função de distribuição através da existência da função geradora de momentos $M_X(s) = Ee^{sX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x)$, onde $F(x)$ é a função de distribuição de X.

Proposição 1.2 *Uma v.a. X (ou sua função de distribuição) é de cauda pesada à direita se, e somente se,*

$$M_X(s) = Ee^{sX} = \infty \, ,$$

para todo $s > 0$.

Através da demonstração dessa proposição, nota-se que para algum $\varepsilon > 0$, $\overline{F}_X(x) = O(e^{-\varepsilon x})$ se, e somente se $Ee^{sX} < \infty$ para todo $0 < s < \varepsilon$. Ou seja, X é de cauda leve se, e somente se, $M_X(s)$ é finita numa vizinhança (positiva) da origem.

Concluímos então que a v.a. X é de cauda leve se, e somente se tem momentos de todas as ordens finitos. Essa é uma exigência bastante forte para situações práticas envolvendo quaisquer distribuições.

A classe das distribuições de cauda pesada se divide em várias subclasses. Dentre as subclasses de cauda pesada, estamos principalmente interessados na classe de variação consistente, que definimos a seguir.

Definição 1.4 *Dizemos que uma função de distribuição $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$, definida em $(0, \infty)$, é de variação consistente se sua cauda, $\overline{F}(x)$ satisfaz:*

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \tag{1.4}$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{y \downarrow 1} \liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \,. \tag{1.5}$$

Denotaremos $\mathcal{C}$ o conjunto das distribuições de variação consistente e diremos que $F \in \mathcal{C}$ se satisfaz (1.4) ou (1.5).

O conceito de variação consistente foi introduzido por Cline (1994) e desde então vem sendo utilizado em estudos sobre o produto de v.a.'s independentes, na obtenção de relações assintóticas entre soma e máximo de soma de v.a.'s independentes e em diversas aplicações, como em teoria de filas e teoria de risco (veja por exemplo Ng et al (2004) e suas referências).

A classe $\mathcal{C}$ é uma extensão da conhecida classe de distribuição de cauda de variação regular. Na verdade, é uma classe intermediária entre as distribuições de cauda de variação regular e variação dominada, as quais definiremos a seguir juntamente com outras das principais subclasses de distribuição de cauda pesada.

Definição 1.5 *Seja uma função de distribuição $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$ definida em $(0, \infty)$*

(a) Dizemos que F pertence à classe $\mathcal{R}$ se sua cauda $\overline{F}$ é regularmente variante, ou seja, existe $0 \leq \alpha < \infty$ tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}, \quad \textit{para cada } y > 0 \,.$$

Neste caso, denotamos $\overline{F} \in R_{-\alpha}$. *Se* $\alpha = 0$, *dizemos que a cauda de* F *é lentamente variante.*

(b) Dizemos que F *tem variação dominada, e assim pertence à classe* $\mathcal{D}$ *se sua cauda satisfaz*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(xy)}{\overline{F}\,(x)} < \infty\,, \quad \textit{para cada } y \in (0,1)\,.$$

(c) Dizemos que F *tem cauda longa e assim pertence à classe* $\mathcal{L}$, *se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(x+y)}{\overline{F}\,(x)} = 1 \quad \textit{para cada } y > 0\,,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(x-y)}{\overline{F}\,(x)} = 1 \quad \textit{para cada } y > 0\,.$$

(d) Dizemos que F *é subexponencial e assim pertence à classe* $\mathcal{S}$, *se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}\,(x)}{\overline{F}\,(x)} = n\,, \quad \textit{para cada } n \geq 2,$$

onde F^{*n} *denota a n-ésima convolução de* F *consigo mesma.*

Se F é uma f.d. definida em $\mathbb{R}$, dizemos que F pertence a uma determinada classe se a parte positiva de F, denotada por F^+, pertence a essa classe, onde $F^+(x) = F(x)I_{\{x\geq 0\}}$ e I_A denota a função indicadora do conjunto A. Ao longo deste trabalho consideraremos somente funções de distribuição $F(x) = 1 - \overline{F}\,(x)$ definidas em $[0,\infty)$, consequentemente, as v.a.'s associadas à estas funções de distribuição serão não-negativas.

Na proposição abaixo apresentamos as relações entre as classes de cauda pesada definidas anteriormente.

Proposição 1.3 *Seja* $\mathcal{K}$ *o conjunto das funções de distribuição de cauda pesada. São válidas as seguintes relações de inclusão entre as subclasses de* $\mathcal{K}$*:*

(a) $\mathcal{R} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$

(b) $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$

(c) $\mathcal{C} \neq \mathcal{R}$, $\mathcal{C} \neq \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ *e* $\mathcal{L} \neq \mathcal{S}$

Demonstração:

Faremos somente a demonstração das relações envolvendo a classe C, de nosso interesse. As provas das outras relações podem ser encontradas em Santana (2006) ou Embrechts et al (1997) e nas referências lá indicadas.

(i) $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$:

Seja $F \in \mathcal{R}$, então da definição de variação regular, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\,(xy)}{\overline{F}\,(x)} = \lim_{y \uparrow 1} y^{-a} = 1 \,.$$

Portanto $F \in \mathcal{C}$.

(ii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$:

Seja $F \in \mathcal{C}$. É imediato que $\limsup\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overline{F}\,(xy)}{\overline{F}\,(x)} < \infty$, ou seja, $F \in \mathcal{D}$. Para provar que $F \in \mathcal{L}$, basta provarmos que para $z > 0$,

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\,(\,x - z\,)}{\overline{F}\,(x)} \geq 1 \tag{1.6}$$

e

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\,(\,x - z\,)}{\overline{F}\,(x)} \leq 1 \,. \tag{1.7}$$

Começaremos pela verificação de (1.6). Para $z > 0$ fixado, defina

$$y = y(x) = \frac{x - z}{x} \,,$$

Como $y(x) < 1$ e $\overline{F}$ é não-decrescente, então

$$\frac{\overline{F}\,(\,xy(x)\,)}{\overline{F}\,(x)} = \frac{\overline{F}\,(x-z)}{\overline{F}\,(x)} \geq 1, \quad \forall x\;.$$

Portanto (1.6) é válido, para qualquer f.d. F.

Verifiquemos agora (1.7). Observe que $y(x) \uparrow 1$ quando $x \to \infty$, então como $F \in \mathcal{C}$, segue da definição que para cada $z > 0$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que $1 - y(x_\delta) < \delta$, para algum x_δ, implica

$$1 - \varepsilon < \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(\,x \cdot y(x_\delta)\,)}{\overline{F}\,(x)} < 1 + \varepsilon\;. \tag{1.8}$$

Agora, $x > x_\delta$ implica $y(x) > y(x_\delta)$ e daí

$$1 - \delta < y(x_\delta) < y(x) < 1\;.$$

Temos então (1.8) válido para $y(x)$, como desejado, ou seja,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(\,xy(x)\,)}{\overline{F}\,(x)} < 1 + \varepsilon\;.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, tem-se para $z > 0$ fixo

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(\,xy(x)\,)}{\overline{F}\,(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\,(x-z)}{\overline{F}\,(x)} \leq 1\;,$$

que prova a inequação (1.7) e consequentemente completa a prova de $F \in \mathcal{L}$. Portanto $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$.

(iii) $\mathcal{C} \neq \mathcal{R}$:

Considere a v.a

$$X = (1+Y)2^N\;,$$

onde Y e N são v.a's independentes, Y com distribuição Uniforme no intervalo $(0,1)$ e N com distribuição Geométrica de parâmetro $1-p$, ou seja, $P(N = k) = (1-p)p^k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ e $p \in (0,1)$.

Seja F a f.d. de X. Provemos que $F \in \mathcal{C}$, mas $F \notin \mathcal{R}$.

Observe que, como Y e N são independentes,

$$\begin{aligned}
\overline{F}\,(x) &= P\big((1+Y)2^N > x\big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\big((1+Y)2^k > x\big)\cdot P(N=k)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k \cdot P(Y > x2^{-k}-1)\,.
\end{aligned}$$

Primeiro verifiquemos que $F \notin \mathcal{R}$. Para isto, seja $y = 1,5$ e considere a sequência $\{x_n = 2^n, n = 1, 2, ...\}$. Temos que

$$\frac{\overline{F}\,(1,5\cdot x_n)}{\overline{F}\,(x_n)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k\cdot P(Y > 3\cdot 2^{n-k-1}-1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k\cdot P(Y > 2^{n-k}-1)} \tag{1.9}$$

Como Y é uma v.a. com distribuição uniforme em $(0,1)$, temos

$$P(Y > 3\cdot 2^{n-k-1}-1) = \begin{cases} 1/2 & , \text{ se } k = n\\ 1 & , \text{ se } k \geq n+1\\ 0 & , \text{ c. c.}\end{cases}$$

e

$$P(Y > 2^{n-k}-1) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k \geq n\\ 0 & , \text{ c. c.}\end{cases} \tag{1.10}$$

Substituindo estes resultados em (1.9), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F}\,(1,5\cdot x_n)}{\overline{F}\,(x_n)} &= \frac{0,5\cdot p^n + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} p^k}{\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} p^k}\\
&= \left(0,5\cdot p^n + \frac{p^{n+1}}{1-p}\right)\frac{1-p}{p^n}\\
&= 0,5(1+p)\,.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Escolhendo agora a sequência $\{y_n = \frac{2^{n+1}}{3}, n = 1, 2, ...\}$ obtemos

$$\frac{\overline{F}\,(1,5 \cdot y_n)}{\overline{F}\,(y_n)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot P(Y > 2^{n-k} - 1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot P\left(Y > \frac{2^{n-k+1}}{3} - 1\right)} . \tag{1.12}$$

Mas

$$P\left(Y > \frac{2^{n-k+1}}{3} - 1\right) = \begin{cases} 2/3, & \text{se } k = n-1 \\ 1 \quad , & \text{se } k \geq n \\ 0 \quad , & \text{c. c.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Substituindo então (1.10) e (1.13) em (1.12) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}\,(1,5 \cdot y_n)}{\overline{F}\,(y_n)} &= \frac{\dfrac{p^n}{1-p}}{\dfrac{2}{3}p^{n-1} + \dfrac{p^n}{1-p}} \\ &= \frac{3p}{2+p} . \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\,(1,5x)}{\overline{F}\,(x)}$$

não existe. Da definição de variação regular, conclui-se que $F \notin \mathcal{R}$.

Provemos que $F \in \mathcal{C}$. Observe primeiramente que para qualquer $x > 1$, existe um único inteiro $n = n(x)$ tal que $2^n < x \leq 2^{n+1}$. Então, para qualquer $l \in (\frac{1}{2}\ ,\ 1)$,

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{\overline{F}\,(lx)}{\overline{F}\,(x)} &= \frac{P\left((1+Y)2^N > lx\right)}{P\left((1+Y)2^N > x\right)} \\ &= \frac{P\left((1+Y)2^N > x\right) + P\left(lx < (1+Y)2^N \leq x\right)}{P\left((1+Y)2^N > x\right)} \\ &\leq 1 + \frac{P\left(lx < (1+Y)2^N \leq x\right)}{P\left((1+Y)2^N > 2^{n+1}\right)} , \end{aligned} \tag{1.15}$$

pois $x \leq 2^{n+1}$. Agora, de (1.10) segue

$$\begin{aligned} P\left((1+Y)2^N > 2^{n+1}\right) &= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot P(Y > 2^{n-k+1}-1) \\ &= (1-p)\sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \\ &= p^{n+1}\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Substituindo (1.16) em (1.15) e observando que $P\left(lx < (1+Y)2^k \leq x\right) \neq 0$ se, e somente se $k = n-1$ ou $k = n$, obtemos

$$1 \leq \frac{\overline{F}\,(lx)}{\overline{F}\,(x)} \leq 1 + \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=n-1}^{n} P\left(lx < (1+Y)2^k \leq x\right) \cdot P(N=k)\,. \tag{1.17}$$

Mas, para $k = n-1$ ou $k = n$,

$$\begin{aligned} P\left(lx < (1+Y)2^k \leq x\right) &= P\left(lx \cdot 2^{-k} - 1 < Y \leq x \cdot 2^{-k} - 1\right) \\ &= (x \cdot 2^{-k} - 1) - (lx \cdot 2^{-k} - 1) \\ &= x \cdot 2^{-k}(1-l) \\ &\leq (1-l)2^{n-k+1}\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Substituindo (1.18) em (1.17),

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{\overline{F}\,(lx)}{\overline{F}\,(x)} &\leq 1 + \frac{(1-l)\displaystyle\sum_{k=n-1}^{n} p^k(1-p)\cdot 2^{n-k+1}}{p^{n+1}} \\ &= 1 + (1-l)(1-p)\cdot \frac{2^{n+1}}{p^{n+1}}(p^{n-1}\cdot 2^{-(n-1)} + p^n \cdot 2^{-n}) \\ &= 1 + (1-l)\frac{2(1-p)(2+p)}{p^2}\,. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{l \uparrow 1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\,(lx)}{\overline{F}\,(x)} = 1\,.$$

Portanto $F \in \mathcal{C}$.

(iv) $\mathcal{C} \neq \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$:

A prova será omitida e pode ser encontrada em Cline e Samorodnitsky (1994).

■

Para finalizar esta seção apresentaremos a definição dos Índices de Matuszewska, que serão amplamente utilizados nos resultados do próximo capítulo.

Em Bingham et al (1987) tem-se resultados relevantes que envolvem diretamente o índice α para funções regularmente variantes em $R_{-\alpha}$. Com o objetivo de extender esses resultados para classes maiores, define-se então os índices de Matuszewska, que quando finitos, de certa forma exercem papel semelhante ao índice α das funções em $R_{-\alpha}$. Restringiremos aqui sua definição associada à cauda da função de distribuição.

Dada uma f.d. $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$, o limite na definição de variação regular não necessariamente existe. Usaremos então as seguintes notações para o limite superior e inferior (que sempre existem) naquela definição. Para $y > 0$, defina

$$\overline{F}_{\star}(y) = \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad \overline{F}^{\star}(y) = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}.$$

É imediato que para $F \in \mathcal{R}$, com $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, para algum $\alpha > 0$, temos $\overline{F}_{\star}(y) = \overline{F}^{\star}(y) = y^{-\alpha}$, e se $F \in \mathcal{C}$, F de variação consistente, $\lim\limits_{y\uparrow 1} \overline{F}^{\star}(y) = \lim\limits_{y\downarrow 1} \overline{F}_{\star}(y) = 1$.

Note também que se $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, para algum $\alpha > 0$ ($F \in \mathcal{R}$) então podemos escrever

$$\alpha = -\frac{\log \overline{F}_{\star}(y)}{\log y} = -\frac{\log \overline{F}^{\star}(y)}{\log y}.$$

Assim, somos motivados a definir:

Definição 1.6 *Seja $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$ uma função de distribuição. Dizemos então que*

$$\mathbb{J}_F^{+} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}_{\star}(y)}{\log y}, \quad \mathbb{J}_F^{-} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}^{\star}(y)}{\log y}$$

são, respectivamente, os índices superior e inferior de Matuszewska da função de distribuição F.

Na verdade, segundo Bingham et al (1987), $\mathbb{J}_F^-$ e $\mathbb{J}_F^+$ são os índices de Matuszewska da função $\left(\overline{F}\,(x)\right)^{-1}$, $x \geq 0$. Usamos na definição a terminologia de Tang (2004a).

É imediato que se $F \in R_{-\alpha}$ para algum $\alpha \geq 0$, então $\mathbb{J}_F^+ = \mathbb{J}_F^- = \alpha$.

Como consequência da definição temos que

$$0 \leq \mathbb{J}_F^- \leq \mathbb{J}_F^+ \leq \infty. \tag{1.19}$$

De fato, para $y \in (0,1)$, temos $1 \leq \overline{F}_\star(y) \leq \overline{F}^\star(y)$ e $\log(y) < 0$. Já para $y \in (1,\infty)$ temos $0 < \overline{F}_\star(y) \leq \overline{F}^\star(y) \leq 1$ e $\log(y) > 0$. Em ambos os casos temos (1.19).

Além disso, do Teorema 2.1.8 em Bingham et al (1987), podemos ver que $F \in \mathcal{D}$ se, e somente se $\mathbb{J}_F^+ < \infty$. Interpretamos então os índices de Matuszewska como constantes que aproximam, para qualquer função de distribuição $F \in \mathcal{D}$, (consequentemente para f.d. em qualquer subclasse de $\mathcal{D}$) resultados como a taxa α para funções de distribuição cujas caudas estão em $R_{-\alpha}$.

1.4 Comportamento Caudal de Somas Aleatórias sob Variação Consistente

Nos modelos clássicos de risco coletivo estudados na teoria de risco atuarial, a quantia total de indenizações pagas em um portfólio são representadas como somas aleatórias do tipo

$$S_\eta = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i,$$

onde η é uma v.a. a valores inteiros não-negativos, representando o número de indenizações pagas, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ representam as quantias das sucessivas indenizações e são v.a.'s i.i.d. e independentes de η.

O comportamento da cauda de S_η tem um papel fundamental no estudo destes modelos, principalmente para a obtenção da probabilidade de ruína, como veremos no próximo capítulo.

A cauda da distribuição de S_η depende das caudas de η e de ξ. Existem na literatura diversos trabalhos sobre o comportamento caudal de S_η para classes diversas de distribuições para η e ξ, como em Fäy et al (2006) e Robert e Sergers (2007).

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos por Ng et al (2002) e Aleškevičienė et al (2008) sobre o comportamento assintótico da cauda da distribuição de S_η, com $\{\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ ou η em uma das classes $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ ou $\mathcal{C}$ e para diferentes casos de interrelação entre as caudas de ξ_1 e η. Esses resultados serão aplicados no próximo capítulo para o estudo do comportamento assintótico da probabilidade de ruína a tempo finito no modelo de renovação de risco composto, que foi inicialmente proposto por Tang et al (2001).

Iniciamos com o resultado de Ng, Tang e Yang (2002), onde assume-se que ξ_i, com média finita, pertence à classe $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, que inclui a classe $\mathcal{C}$ e além disso a cauda de η é dominada pela cauda de ξ. A prova será omitida.

Teorema 1.7 (Ng et al (2002)) *Suponha que* $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ *é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d. comum* $F_\xi \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ *e* $E|\xi| < \infty$. *Seja* η *uma v.a. assumindo valores inteiros não-negativos, independente da sequência* $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$, *satisfazendo* $P(\eta > x) = o(\overline{F}_\xi(x))$ *com* $x \to \infty$. *Então, quando* $x \to \infty$,

$$P\left(\max_{1 \le k \le \eta}(\xi_1 + \cdots + \xi_k) > x\right) \sim P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x) \sim E\eta \overline{F}_\xi(x) \ . \tag{1.20}$$

O resultado acima estende a Proposição 4.1 de Fäy et al (2006), onde a segunda relação assintótica de (1.20) é obtida para $F_\xi \in \mathcal{R}$.

Se a condição principal do teorema anterior, que diz que a cauda da distribuição de η é dominada pela cauda de ξ, não é satisfeita então obtém-se uma relação assintótica diferente para a cauda de S_η. Para o caso em que $\eta \in \mathcal{R}$ e a cauda de ξ é dominada pela cauda de η, ou seja, $\overline{F}_\xi(x) = o(\overline{F}_\eta(x))$, Fäy et al (2006) (Proposição 4.3) obtiveram a seguinte relação assintótica para a cauda de S_η: quando $x \to \infty$

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x) \sim P\left(\eta > \frac{x}{E\xi}\right) \sim (EX)^\beta P(\eta > x) \ , \tag{1.21}$$

onde β é o índice de variação regular da cauda de η. No caso de $\beta = 1$ assume-se também $E\eta < \infty$.

A seguir detalhamos as demonstrações dos dois teoremas de Aleškevičienė et al (2008), que estendem os resultados de Fäy para a classe de variação consistente, $\mathcal{C}$.

Teorema 1.8 (Aleškevičienė et al (2008)) *Suponha que* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *é uma sequência de v.a.'s i.i.d., não-negativas, com f.d. comum* F_ξ. *Seja* η *uma v.a. assumindo valores inteiros não-negativos, com média* $E\eta$ *finita e f.d.* $F_\eta \in \mathcal{C}$. *Considere ainda que* η *é independente da sequência* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$, *satisfazendo* $\overline{F}_\xi(x) = o(\overline{F}_\eta(x))$ *com* $x \to \infty$. *Então, quando* $x \to \infty$,

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x) \sim P\left(\eta > \frac{x}{E\xi}\right) . \tag{1.22}$$

Para demonstrar o teorema necessitamos de alguns resultados auxiliares que descreveremos a seguir.

O primeiro resultado refere-se a uma propriedade de funções lentamente variantes (lembrando, L é lentamente variante se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{L(xy)}{L(x)} = 1 \ , \ \forall\ y > 0$), que será usada na prova da Proposição 1.4. Sua demonstração será omitida e pode ser encontrada em Fäy et al (2006).

Lema 1.1 (Fäy et al (2006)) *Seja* $h(x) > 0$ *e* $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. *Existe então uma função* L, *lentamente variante, tal que* $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to\infty} L(x) \cdot h(x) = 0$.

O próximo resultado foi provado por Ng et al (2002) e estabelece uma relação entre a cauda da soma e a soma das caudas de v.a.'s i.i.d. de variação dominada.

Lema 1.2 (Ng et al (2002)) *Seja G uma f.d. definida sobre o intervalo $[0, \infty)$ pertencente à classe $\mathcal{D}$, com média finita μ. Então, para qualquer $\gamma > \mu$, existe uma constante $C = C(\gamma) > 0$ tal que*

$$\overline{G^{*n}}\,(x) \leq Cn\overline{G}\,(x)\,,$$

para todo $n > 1$ e todo $x > \gamma n$, onde G^{*n} indica a n-ésima convolução de G.

Finalmente, na próxima proposição constrói-se v.a.'s auxiliares $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$ a serem utilizadas na segunda parte da demonstração do Teorema 1.8 e estabelece-se relações entre estas e as variáveis $\xi_1, \xi_2, \ldots$ das hipóteses iniciais do teorema.

Proposição 1.4 *Sejam ξ, ξ_1, ξ_2 $\ldots$ e η v.a.'s que satisfazem as hipóteses do Teorema 1.8.*

(a) Existe uma função lentamente variante $L(x)$ tal que $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$ e

$$\overline{F}_\xi\,(x) \leq \frac{\overline{F}_\eta\,(x)}{L(x)} \leq 1\,, \quad \forall x > x'\,, \tag{1.23}$$

para algum $x' > 0$ suficientemente grande.

(b) Se ξ', ξ'_1, ξ'_2 $\ldots$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d. cuja cauda da função de distribuição é dada por:

$$\overline{F}_{\xi'}\,(x) = \begin{cases} 1 \quad , & se\ 0 \leq x \leq x' \\ \frac{\overline{F}_\eta(x)}{L(x)} \quad , & se\ x > x'\,, \end{cases} \tag{1.24}$$

onde x' é dado em (a), então:

(b.1) Para todo $x \geq 0$ e para todo $n \geq 1$,

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n > x) \leq P(\xi_1' + \xi_2' + \cdots + \xi_n' > x) \tag{1.25}$$

(b.2)

$$E\xi \leq E\xi' < \infty \ \ e \ \ F_{\xi'} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \, . \tag{1.26}$$

Demonstração:

(a) Para provar (1.23) basta notar que $h(x) = \dfrac{\overline{F}_\xi\,(x)}{\overline{F}_\eta\,(x)} > 0$ e, por hipótese, temos $\overline{F}_\xi\,(x) = o\left(\overline{F}_\eta\,(x)\right)$, ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\,(x)}{\overline{F}_\eta\,(x)} = 0 \, .$$

Assim, pelo Lema 1.1, existe uma função L, lentamente variante, tal que

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} L(x) \frac{\overline{F}_\xi\,(x)}{\overline{F}_\eta\,(x)} = 0 \, .$$

Além disso, como $\overline{F}_\eta$ é limitada, segue que $\overline{F}_\eta\,(x) = o\,(L(x))$.

Portanto, existe $x' > 0$ tal que

$$\overline{F}_\xi(x) \leq \frac{\overline{F}_\eta(x)}{L(x)} \leq 1 \, , \ \ \forall\, x > x' \, , \tag{1.27}$$

como queríamos provar.

(b) Sejam $\xi', \xi_1', \xi_2', \ldots$ v.a.'s i.i.d. com f.d. $F_{\xi'}(x) = 1 - \overline{F}_{\xi'}\,(x)$ onde $\overline{F}_{\xi'}$ é definida em (1.24).

(b.1) Faremos a prova de (1.25) por indução sobre n. Suponha $n = 1$. Por (1.24) temos que se $0 \leq x \leq x'$, então $\overline{F}_\xi\,(x) \leq 1 = \overline{F}_{\xi'}\,(x)$, e para $x \geq x'$, segue de (1.27) que $\overline{F}_\xi\,(x) \leq \dfrac{\overline{F}_\eta\,(x)}{L(x)} = \overline{F}_{\xi'}\,(x)$.

Suponha agora que (1.25) é válido para $n \geq 1$. Provaremos o resultado para $n+1$. Da Regra da Probabilidade Total, como $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ são i.i.d., podemos escrever $\forall\, x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1} > x) &= \int_0^\infty P(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x - y) dF_\xi(y) \\ &= \int_0^x P(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x - y) dF_\xi(y) \\ &\quad + \int_x^\infty P(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x - y) dF_\xi(y) \,. \end{aligned}$$

Como $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ e $\xi', \xi_1', \xi_2', \ldots$ são v.a.'s não-negativas, temos para $x \geq 0$ e $x < y < \infty$, $P(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x - y) = 1 = P(\xi_1' + \cdots + \xi_n' > x - y)$. Assim, da hipótese de indução segue

$$\begin{aligned} P(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1} > x) &\leq \int_0^x P(\xi_1' + \cdots + \xi_n' > x - y) dF_\xi(y) + \int_x^\infty dF_\xi(y) \\ &= P(\xi_1' + \cdots + \xi_n' + \xi_{n+1} > x) \,. \end{aligned}$$

Agora, usando novamente a Regra da Probabilidade Total, mas condicionando em relação à $\xi_1' + \cdots + \xi_n'$, cuja função de distribuição é $F_{\xi'}^{*n}(x)$, a n-ésima convolução de $F_{\xi'}(x)$, e usando o mesmo raciocínio anterior podemos obter

$$\begin{aligned} P(\xi_1 + \cdots + \xi_n + \xi_{n+1} > x) &\leq \int_0^x P(\xi_{n+1} > x - y) dF_{\xi'}^{*n}(y) \\ &\quad + \int_x^\infty P(\xi_{n+1} > x - y) dF_{\xi'}^{*n}(y) \\ &\leq \int_0^x P(\xi_{n+1}' > x - y) dF_{\xi'}^{*n}(y) + \int_x^\infty dF_{\xi'}^{*n}(y) \\ &= P(\xi_1' + \cdots + \xi_n' + \xi_{n+1}' > x) \,, \end{aligned}$$

o que conclui a prova da indução.

(b.2) Primeiro provemos que $E\xi \leq E\xi' < \infty$.

Por (1.24), temos que $\overline{F}_{\xi}(x) \leq \overline{F}_{\xi'}(x)$ e como $\lim_{x\to\infty} L(x) = +\infty$, temos

$$E\xi = \int_0^\infty \overline{F}_{\xi}(x)\,dx \leq \int_0^\infty \overline{F}_{\xi'}(x)\,dx = E\xi'$$

e

$$\begin{aligned} E\xi' &= \int_0^{x'} dx + \int_{x'}^\infty \frac{\overline{F}_{\eta}(x)}{L(x)} dx \\ &\leq \int_0^{x'} dx + M\int_{x'}^\infty \overline{F}_{\eta}(x)\,dx \\ &\leq x' + ME\eta \\ &< \infty\,, \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x>x'} \dfrac{1}{L(x)}$.

Resta provar que $F_{\xi'} \in \mathcal{C}$. De fato, da definição de $\overline{F}_{\xi'}(x)$, como $F_{\xi} \in \mathcal{C}$ e L é lentamente variante, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_{\xi'}(xy)}{\overline{F}_{\xi'}(x)} &= \lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_{\eta}(xy)}{L(xy)}\cdot\frac{L(x)}{\overline{F}_{\eta}(x)} \\ &= \lim_{y\uparrow 1}\left[\left(\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_{\eta}(xy)}{\overline{F}_{\eta}(x)}\right)\cdot\left(\limsup_{x\to\infty}\frac{L(x)}{L(xy)}\right)\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

e concluímos a prova da proposição.

□

Demonstração do Teorema 1.8:

Para simplificar, denotemos $S_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i$.

Observe que as hipóteses do teorema implicam $0 \leq E\xi < \infty$. De fato, como $\overline{F}_{\xi}(x) = o(\overline{F}_{\eta}(x))$ com $x \to \infty$, então para x_0 suficientemente grande, $\overline{F}_{\xi}(x) \leq \overline{F}_{\eta}(x)$, para todo $x > x_0$. Como as v.a.'s $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ são não negativas e $E\eta < \infty$, então

$0 < E\xi < E\eta < \infty$. O teorema consiste em verificar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{P\left(\eta > x(E\xi)^{-1}\right)} = 1$. Vamos então dividir a demonstração em duas partes.

(i) Provemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(S_\eta > x)}{P\left(\eta > x(E\xi)^{-1}\right)} \geq 1\,. \tag{1.28}$$

Como $\xi_1, \xi_2, \ldots$ são v.a.'s não-negativas e independentes da v.a. η então para $\Delta > 0$ arbitrário, e x suficientemente grande tal que

$$m_x = \left\lceil (1+\Delta)x(E\xi)^{-1} \right\rceil > 1\,,$$

onde $\lceil z \rceil$ indica o menor inteiro maior ou igual a z, segue que:

$$\begin{aligned}
P(S_\eta > x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n > x) \cdot P(\eta = n) \\
&\geq \sum_{n > (1+\Delta)x(E\xi)^{-1}} P(S_n > x) \cdot P(\eta = n) \\
&\geq P(\xi_1 + \cdots + \xi_{\lceil (1+\Delta)x(E\xi)^{-1} \rceil} > x) \sum_{n > (1+\Delta)x(E\xi)^{-1}} P(\eta = n) \\
&= P\left(\frac{S_{m_x}}{m_x} > \frac{x}{m_x} \right) \cdot P\left(\eta > (1+\Delta)x(E\xi)^{-1}\right)\,.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{x}{m_x} < \dfrac{2}{\Delta+2} E\xi$, então obtemos

$$\frac{P(S_\eta > x)}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \geq I_1 \cdot I_2\,, \tag{1.29}$$

onde

$$I_1 = P\left(\frac{S_{m_x}}{m_x} > \frac{2}{\Delta+2} E\xi \right) \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{P\left(\eta > (1+\Delta)x(E\xi)^{-1}\right)}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})}\,. \tag{1.30}$$

Agora, por um lado, como $F_\eta \in \mathcal{C}$, tomando $y = (1+\Delta)$ e $w = x(E\xi)^{-1}$, segue que

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \liminf_{x\to\infty} I_2 = \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{w\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta(yw)}{\overline{F}_\eta(w)} = 1 \,. \tag{1.31}$$

Por outro lado, para o limite em I_1, como $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ são v.a's i.i.d. com $E|\xi| = E\xi < \infty$, temos pela Lei Fraca dos Grandes Números que $\frac{S_{m_x}}{m_x}$ converge em probabilidade para $E\xi$, quando $x \to \infty$ (consequentemente $m_x \to \infty$). Logo $\frac{S_{m_x}}{m_x}$ converge em distribuição para a constante $E\xi$, quando $m_x \to \infty$ e assim

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \liminf_{x\to\infty} I_1 = \lim_{\Delta\to 0^+} \liminf_{x\to\infty} P\left(\frac{S_{m_x}}{m_x} > \frac{2}{2+\Delta}E\xi\right) = 1 \,, \tag{1.32}$$

pois $\frac{2}{2+\Delta}E\xi < E\xi$.

Portanto, usando (1.31) e (1.32) em (1.29) provamos (1.28).

(ii) Vamos mostrar que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(S_\eta > x)}{P\left(\eta > x(E\xi)^{-1}\right)} \leq 1 \,. \tag{1.33}$$

Seja $x > 0$ e $\Delta_1 \in (0,1)$. Então, como η e ξ's são independentes, temos que

$$\begin{aligned} P(S_\eta > x) &= \sum_{1\leq n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}} P(S_n > x)\cdot P(\eta = n) \\ &\quad + \sum_{n > (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}} P(S_n > x)\cdot P(\eta = n) \\ &\leq J_1 + P(\eta > (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}) \,, \end{aligned} \tag{1.34}$$

onde

$$J_1 = \sum_{1\leq n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}} P(S_n > x)\cdot P(\eta = n) \,.$$

Então, como $F_\eta \in \mathcal{C}$ segue que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(S_\eta > x)}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \leq \lim_{\Delta_1\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{J_1}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \lim_{\Delta_1\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{P(\eta > (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1})}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \\
&= 1 + \lim_{\Delta_1\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{J_1}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \,.
\end{aligned}
$$

Basta provar agora que

$$
\lim_{\Delta_1\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{J_1}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} = 0 \,.
$$

Para isto, considere as variáveis $\xi', \xi_1', \xi_2', \ldots$ definidas na Proposição 1.4, então temos que $(1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1} \leq (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}$ e podemos decompor

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \sum_{1\leq n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} P(S_n > x)\cdot P(\eta = n) \\
&\quad + \sum_{(1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1} < n \leq (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}} P(S_n > x)\cdot P(\eta = n) \qquad (1.35)\\
&= J_{11} + J_{12} \,.
\end{aligned}
$$

Trabalharemos primeiro com J_{11}. Por *(b.1)* da Proposição 1.4, temos que

$$
\begin{aligned}
J_{11} &= \sum_{n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} P(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x)\cdot P(\eta = n) \\
&\leq \sum_{n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} P(\xi_1' + \cdots \xi_n' > x)\cdot P(\eta = n) \\
&= \sum_{n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} \overline{F_{\xi'}^{*n}}\,(x)\cdot P(\eta = n) \,. \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

Agora, por *(b.2)* da Proposição 1.4 temos $F_{\xi'} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, então aplicando o Lema 1.2 com $G = F_{\xi'}$ e $\gamma = \dfrac{E\xi'}{1-\Delta_1} > E\xi' = \mu$, como em J_{11} $n \leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}$, temos que existe uma constante $C(\Delta_1) > 0$, dependendo de Δ_1, tal que

$$
\begin{aligned}
J_{11} &\leq \sum_{n\leq (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} C(\Delta_1)\overline{F}_{\xi'}\,(x)\cdot nP(\eta = n) \\
&\leq C(\Delta_1)\cdot \overline{F}_{\xi'}\,(x)\cdot E\eta \,.
\end{aligned}
$$

Logo, como $\overline{F}_{\xi'}(x) = \overline{F}_{\eta}(x)\, L(x)$ para $x > x'$, $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$ e $F_\eta \in \mathcal{D}$ (ou seja, $\limsup_{w\to\infty} \dfrac{\overline{F}_{\eta}(yw)}{\overline{F}_{\eta}(w)} < \infty$, para todo $y > 0$) segue que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{J_{11}}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} &\leq C(\Delta_1)E\eta \cdot \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_{\xi'}(x)}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \\
&= C(\Delta_1)E\eta \cdot \limsup_{x\to\infty} \left[\left(\frac{\overline{F}_{\xi'}(x)}{\overline{F}_{\eta}(x)} \right) \left(\frac{\overline{F}_{\eta}(x)}{\overline{F}_{\eta}(x(E\xi)^{-1})} \right) \right] \\
&= C(\Delta_1)E\eta \left(\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{L(x)} \right) \left(\limsup_{w\to\infty} \frac{\overline{F}_{\eta}(yw)}{\overline{F}_{\eta}(w)} \right) \\
&= 0 \,. \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, seja

$$n_x = \left\lceil (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1} \right\rceil \,.$$

De maneira análoga à parte (i) acima segue

$$
\begin{aligned}
J_{12} &\leq \sum_{(1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1} < n \leq (1-\Delta_1)x(E\xi)^{-1}} P(S_{n_x} > x) \cdot P(\eta = n) \\
&\leq P(S_{n_x} > x) \cdot \sum_{n > (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}} P(\eta = n) \\
&= P\left(\frac{S_{n_x}}{n_x} > \frac{x}{n_x} \right) \cdot P(\eta > (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1}) \,.
\end{aligned}
$$

Agora, para x suficientemente grande,

$$\frac{x}{n_x} > \left(1 + \frac{\Delta_1}{2(1-\Delta_1)} \right) E\xi \,.$$

Logo, para x suficientemente grande temos

$$
\begin{aligned}
\frac{J_{12}}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} &\leq P\left(\frac{S_{n_x}}{n_x} > \left(1 + \frac{\Delta_1}{2(1-\Delta_1)} \right) E\xi \right) \\
&\quad \times \frac{P(\eta > (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1})}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

Agora, por um lado usando a Lei Fraca dos Grandes Números de maneira análoga à parte (i) podemos obter

$$\limsup_{x\to\infty} P\left(\frac{S_{n_x}}{n_x} > \left(1 + \frac{\Delta_1}{2(1-\Delta_1)}\right) E\xi\right) = 0\,, \tag{1.39}$$

pois $\left(1 + \dfrac{\Delta_1}{2(1-\Delta_1)}\right) E\xi > E\xi$.

Por outro lado, como $F_\eta \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, para $y = (1-\Delta_1)E\xi \cdot (E\xi')^{-1}$ e $w = x(E\xi)^{-1}$, temos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\eta > (1-\Delta_1)x(E\xi')^{-1})}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} = \limsup_{w\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta\,(yw)}{\overline{F}_\eta\,(w)} < \infty\,. \tag{1.40}$$

Assim, de (1.38), (1.39) e (1.40) obtemos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{J_{12}}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} = 0\,. \tag{1.41}$$

Finalmente, pelas equações (1.34), (1.35), (1.37) e (1.41) segue

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{P(S_\eta > x)}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} &\le \limsup_{x\to\infty} \frac{J_{11}}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} \\
&\quad + \lim_{\Delta_1\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{J_{12}}{P(\eta > x(E\xi)^{-1})} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

e (1.33) está provado, o que conclui a demonstração do teorema.

■

Teorema 1.9 (Aleškevičienė et al (2008)) *Suponha que* $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ *é uma sequência de v.a.'s i.i.d. não-negativas com f.d. comum* $F_\xi \in \mathcal{C}$ *e esperança finita* $E\xi$. *Seja* η *uma v.a. assumindo valores inteiros não-negativos, independente da sequência* $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$*, satisfazendo* $\overline{F}_\eta\,(x) \sim C^\star \overline{F}_\xi\,(x)$ *para uma constante* $C^\star > 0$. *Então*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi(x)} \le E\eta + C^\star \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\,(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi(x)} \tag{1.42}$$

e

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1+\cdots+\xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi(x)} \;\geq\; E\eta \,+\, C^\star \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\,. \tag{1.43}$$

Se trocarmos a hipótese de $F_\xi \in \mathcal{C}$ por $\overline{F}_\xi \in R_{-\alpha}$, para algum $\alpha > 0$ no Teorema 1.9, teremos:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi(x)} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi(x)} = (E\xi)^\alpha\,.$$

Então as inequações (1.42) e (1.43) no Teorema 1.9 se reduzem a

$$P(\xi_1+\cdots+\xi_\eta > x) \sim \left(E\eta + C^\star (E\xi)^\alpha\right) \overline{F}_\xi\,(x)\ ,$$

que coincide com o Lema 4.7 também em Fäy et al (2006).

Na demonstração do teorema acima necessitaremos do seguinte resultado auxiliar:

Lema 1.3 (Ng et al (2004)) *Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s i.i.d. não-negativas com f.d. comum $F \in \mathcal{C}$ e esperança finita μ. Então, para qualquer $\gamma > 0$ fixado,*

$$P(S_n - n\mu > x) \sim n\overline{F}\,(x)\ ,$$

uniformemente, para $x \geq \gamma n$.

Demonstração do Teorema 1.9:

Primeiramente verifiquemos que $E\eta$ é finita. Por hipótese $\overline{F}_\eta\,(x) \sim C^\star \overline{F}_\xi\,(x)$ para alguma constante $C^\star > 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe x_0 tal que para todo $x > x_0$, $\overline{F}_\eta\,(x) < (C^\star + \varepsilon)\overline{F}_\xi\,(x)$.

Como ambas as variáveis são não-negativas, temos que

$$E\eta \leq \int_0^{x_0} \overline{F}_\eta\,(x)\,dx + (C^\star+\varepsilon)E\xi < \infty\,.$$

(i) Verifiquemos (1.42).

Para qualquer inteiro positivo M, qualquer $\Delta_3 \in (0,1)$ e x suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \frac{P(\xi_1+\cdots+\xi_\eta>x)}{\overline{F}_\xi(x)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi(x)} \\ &= L_1+L_2+L_3\,, \end{aligned} \tag{1.44}$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{n=1}^{M}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi(x)}\,, \\ L_2 &= \sum_{n=M+1}^{\lfloor(1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}\rfloor}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi(x)}\,, \\ L_3 &= \sum_{n>(1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi(x)}\,. \end{aligned}$$

Assim basta obter os limites superiores quando $x\to\infty$ de L_1, L_2 e L_3.

Como $F_\xi \in \mathcal{C}\subset\mathcal{S}$, então para todo n fixo, $\overline{F_\xi^{*n}}(x)\sim n\overline{F}_\xi(x)$. Como $E\eta$ é finita e L_1 é a soma de finitos termos, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} L_1 &= \lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{M}\frac{\overline{F_\xi^{*n}}(x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi(x)} \\ &= \sum_{n=1}^{M} nP(\eta=n) \\ &= E\eta-\epsilon(M)\,, \end{aligned} \tag{1.45}$$

onde $\lim_{M\to\infty}\epsilon(M)=0$.

Agora, em L_2 temos $n\le(1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}$, então $x\ge nE\xi+\Delta_3 x$. Assim,

$$P(S_n>x)\le P(S_n>nE\xi+\Delta_3 x)$$

e daí

$$
\begin{aligned}
L_2 &\le \sum_{n=M+1}^{\lfloor (1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}\rfloor} \frac{P(S_n - nE\xi > \Delta_3 x)\cdot P(\eta = n)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&= \frac{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \sum_{n=M+1}^{\lfloor (1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}\rfloor} \frac{P(S_n - nE\xi > \Delta_3 x)\cdot P(\eta = n)}{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)}\,. \qquad (1.46)
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 1.3 em (1.46), temos que para x suficientemente grande,

$$
\frac{P(S_n - nE\xi > \Delta_3 x)}{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)} < n(1+\epsilon_1(\Delta_3, M))\,,
$$

onde $\lim_{M\to\infty}\epsilon_1(\Delta_3, M) = 0$ para qualquer Δ_3.

Então,

$$
\begin{aligned}
L_2 &\le (1+\epsilon_1(\Delta_3, M))\frac{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \sum_{n=M+1}^{\lfloor (1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}\rfloor} nP(\eta = n) \\
&\le \frac{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \sum_{n=M+1}^{\lfloor (1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}\rfloor} nP(\eta = n)\,.
\end{aligned}
$$

Agora, como $F_\xi \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ e a v.a η tem média finita, obtemos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} L_2 &\le \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\,(\Delta_3 x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \sum_{n=M+1}^{\infty} nP(\eta = n) \\
&= C(\Delta_3)\cdot\epsilon_2(M) \\
&= \epsilon_3(\Delta_3, M)\,, \qquad (1.47)
\end{aligned}
$$

onde $\lim_{M\to\infty}\epsilon_3(\Delta_3, M) = 0$, para qualquer Δ_3 fixado.

Para o termo L_3, observe que

$$
\begin{aligned}
L_3 &\le \frac{1}{\overline{F}_\xi\,(x)} \sum_{n>(1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1}} nP(\eta = n) \\
&= \frac{P(n > (1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&= \frac{\overline{F}_\eta\,((1-\Delta_3)x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\eta\,(x(E\xi)^{-1})}\cdot\frac{\overline{F}_\eta\,(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x(E\xi)^{-1})}\cdot\frac{\overline{F}_\xi\,(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x)}\,. \qquad (1.48)
\end{aligned}
$$

Por hipótese, $\overline{F}_\eta(x) \sim C^\star \overline{F}_\xi(x)$. Assim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)} = 1 \tag{1.49}$$

e também para x suficientemente grande,

$$(C^\star - \epsilon_4(x))\overline{F}_\xi(x) < \overline{F}_\eta(x) < C^\star \overline{F}_\xi(x) \ ,$$

onde $\lim_{x\to\infty} \epsilon_4(x) = 0$. Daí e como $F_\xi \in \mathcal{C}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta_3\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1-\Delta_3)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)} &\leq \lim_{\Delta_3\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{C^\star}{C^\star - \epsilon_4(x)} \frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{(1-\Delta_3)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)} \\
&= 1 \ ,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Logo, usando (1.49) e (1.50) em (1.48) segue:

$$\lim_{\Delta_3\to 0^+} \limsup_{x\to\infty} L_3 \leq C^\star \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi(x)} \ . \tag{1.51}$$

Agora, de (1.44), (1.45), (1.47), (1.49) e (1.49) concluímos

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi(x)} &\leq E\eta - \epsilon(M) + \epsilon_3(\Delta_3, M) \\
&\quad + C^\star \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1-\Delta_3)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)} \cdot \frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)} \ .
\end{aligned}$$

Fazendo $M \to \infty$, temos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi(x)} \leq E\eta + C^\star \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1-\Delta_3)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)} \cdot \frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)} \ .$$

Finalmente, fazendo $\Delta_3 \to 0^+$, de (1.50) obtemos

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi(x)} \leq E\eta + C^\star \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi(x)} \ .$$

(ii) Provaremos agora a expressão (1.43). Para qualquer inteiro positivo M, qualquer real $\Delta_4 \in (0,1)$ e x suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\frac{P(\xi_1+\cdots+\xi_\eta>x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&= L_1+\sum_{n=M+1}^{\lfloor(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}\rfloor}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&\quad+\sum_{n>(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&\geq L_1+\sum_{n>(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}}\frac{P(S_n>x)\cdot P(\eta=n)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \\
&= L_1+L_4\,,
\end{aligned} \tag{1.52}$$

onde L_1 é a mesma expressão definida anteriormente. Usando a notação

$$k_x=\lceil(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}\rceil\,,$$

temos

$$\begin{aligned}
L_4 &\geq \frac{P(S_{k_x}>x)}{\overline{F}_\xi\,(x)}\sum_{n>(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}}P(\eta=n) \\
&= P(S_{k_x}>x)\frac{P(\eta>(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x)}\,.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Usaremos, de maneira análoga à demonstração do teorema anterior, a Lei Fraca dos Grandes Números em L_4.

Observe que

$$P(S_{k_x}>x)\geq P\left(\frac{S_{k_x}}{k_x}>\frac{2}{\Delta_4+2}E\xi\right)\,.$$

De fato, como $\Delta_4>0$ e $x>0$, temos

$$x<\left(\frac{2\Delta_4+2}{\Delta_4+2}\right)=\frac{2}{\Delta_4+2}(\Delta_4+1)x(E\xi)^{-1}E\xi\leq\frac{2}{\Delta_4+2}k_xE\xi\,,$$

pois k_x é o menor inteiro maior ou igual a $(1+\Delta_4)x(E\xi)^{-1}$. Segue portanto da Lei Fraca dos Grandes Números que

$$\lim_{k_x\to\infty} P\left(\frac{S_{k_x}}{k_x} > \frac{2}{\Delta_4+2}E\xi\right) = \lim_{x\to\infty} P\left(\frac{S_{k_x}}{k_x} > \frac{2}{\Delta_4+2}E\xi\right) = 1\,, \tag{1.54}$$

pois $\dfrac{2}{\Delta_4+2}E\xi < E\xi$.

Então de (1.53), (1.54) e como $\overline{F}_\eta(x) \sim C^\star \overline{F}_\xi(x)$ segue

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\infty} L_4 &\geq \liminf_{x\to\infty}\left(P\left(\frac{S_{k_x}}{k_x} > \frac{2}{\Delta_4+2}E\xi\right)\cdot \frac{P\left(\eta > \frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\right)\\
&= \liminf_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)}\cdot\frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}\cdot\frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\right)\\
&= C^\star \liminf_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)}\cdot\frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\right).
\end{aligned}$$

Novamente, para x suficientemente grande,

$$\left(C^\star - \epsilon_4(x)\right)\overline{F}_\xi(x) < \overline{F}_\eta(x) < C^\star\overline{F}_\xi(x)\ ,$$

onde $\lim_{x\to\infty}\epsilon_4(x) = 0$. Como $F_\xi \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{\Delta_4\to 0^+}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)} \geq \lim_{\Delta_4\to 0^+}\liminf_{x\to\infty}\frac{\left(C^\star - \epsilon_4(x)\right)\overline{F}_\xi\left(\frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{C^\star\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)} = 1\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta_4\to 0^+}\liminf_{x\to\infty} L_4 &\geq C^\star \lim_{\Delta_4\to 0^+}\liminf_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{F}_\eta\left(\frac{(1+\Delta_4)x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\eta\left(\frac{x}{E\xi}\right)}\cdot\frac{\overline{F}_\xi\left(\frac{x}{E\xi}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\right)\\
&\geq C^\star \liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_\xi\left(x(E\xi)^{-1}\right)}{\overline{F}_\xi(x)}\,.
\end{aligned}\tag{1.55}$$

De (1.45) e (1.55) em (1.52), fazendo $\Delta_4 \to 0^+$ obtemos

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \geq E\eta - \epsilon(M) + C^\star \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\,(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x)}\ .$$

Finalmente, fazendo $M \to 0$, temos

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\xi_1 + \cdots + \xi_\eta > x)}{\overline{F}_\xi\,(x)} \geq E\eta + C^\star \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_\xi\,(x(E\xi)^{-1})}{\overline{F}_\xi\,(x)}\ .$$

Concluímos assim a expressão (1.43) e a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Probabilidade de Ruína a tempo finito em Modelos de Risco de Renovação

2.1 Introdução

A Teoria de Risco é a sub-área da ciência atuarial que estuda modelos matemáticos para a movimentação financeira de uma empresa de seguros de não-vida. Esses modelos matemáticos são chamados modelos de risco e em suas mais variadas formas analisam a evolução da reserva de capital da seguradora ao longo do tempo.

Uma das informações mais significantes para seguradora é conhecer a probabilidade de ruína, ou seja, a probabilidade de que em algum instante de tempo finito a reserva de capital torne-se negativa.

Nos modelos de risco a tempo contínuo o capital da empresa pode ser avaliado em qualquer instante de tempo.

Neste capítulo estudamos dois modelos de risco: O Modelo de Risco de Renovação Clássico, introduzido por Sparre Andersen há cerca de meio século e o Modelo de Risco de Renovação Composto, introduzido por Tang, Su, Jiang e Zhang (2001).

Em ambos os modelos o custo das indenizações individuais e o tempo entre-chegadas de acidentes formam duas sequências de v.a.'s i.i.d. independentes uma da outra.

A principal diferença entre os dois modelos é que no clássico a cada acidente está relacionado um único pagamento de indenização, enquanto que no modelo composto a cada acidente podem estar relacionados vários pagamentos de indenizações. O modelo composto portanto generaliza o clássico e está associado ao pagamento de indenizações devido a ocorrência de catástrofes como terremotos, enchentes, etc.

Devido à dificuldade de obtenção de valores exatos para a probabilidade de ruína, busca-se aproximações assintoticamente equivalentes. Os resultados apresentados neste capítulo, tanto para o modelo clássico quanto para o composto, são portanto, aproximações para a probabilidade de ruína quando o capital inicial tende a infinito.

Na seção 2.2 investigamos a probabilidade de ruína no modelo de risco de renovação clássico e apresentamos o resultado de Tang (2004a) para o comportamento assintótico da probabilidade de ruína quando o capital inicial cresce (Teorema 2.1), que será válido uniformemente para o tempo variando em um intervalo apropriado. Uma das hipóteses para o resultado é que os custos de indenizações individuais tem distribuição de variação consistente.

Apresentamos na seção 2.3 a descrição do modelo de risco de renovação composto e três resultados de Aleškevičienė et al (2008) (os Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4) similares ao obtido na seção anterior para o modelo clássico. Cada resultado considera um tipo de relação entre a cauda dos custos de indenizações individuais e a cauda do número de indenizações pagas em cada acidente. No Teorema 2.2 a cauda do número de indenizações é dominada pela cauda do custo de indenizações, no Teorema 2.3 ocorre exatamente o contrário, ou seja, a cauda do custo de indenizações é dominada pela cauda da quantidade de indenizações pagas e no Teorema 2.4 as caudas são assintoticamente iguais, quando ajustadas por uma constante.

Finalmente, exemplos para os resultados obtidos na seção 2.3 são apresentados na seção 2.4.

2.2 Modelo de Risco de Renovação Clássico

Sejam Z_i, $i \geq 1$ os custos de indenizações individuais e $\theta_i, i \geq 1$ o tempo entre-chegadas dos sucessivos pedidos de indenizações. Então

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \, , \quad n \geq 1$$

é o tempo de ocorrência do pagamento da n-ésima indenização.

Assumiremos que $Z, Z_1, Z_2 \ldots$ são v.a.'s i.i.d. não-negativas com função de distribuição comum $B = 1 - \overline{B}$ e média finita $\beta = EZ$. As variáveis aleatórias $\theta, \theta_1, \theta_2 \ldots$ formam outra sequência de v.a.'s i.i.d. não-negativas com média finita $E\theta = 1/\lambda$. Mais ainda, a sequência $Z,\ Z_1,\ Z_2\ \ldots$ é independente de $\theta,\ \theta_1,\ \theta_2\ \ldots$.

Seja $\tau(t)$ o número de indenizações pagas no intervalo de tempo $[0,t]$. Então

$$\tau(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\} \, ,$$

onde $\sup \emptyset = 0$, por convenção.

O processo de chegada de indenizações $\{\tau(t), t \geq 0\}$ é um processo de renovação. Denotemos a função média $\lambda(t) = E\tau(t)$. Como o tempo entre ocorrência de indenizações tem média $1/\lambda$, então é conhecido que

$$\lambda(t) \sim \lambda t \quad \text{quando} \quad t \to \infty \, . \tag{2.1}$$

Veja, por exemplo, Ross (1982), Capítulo 3.

A perda agregada até o tempo t é o custo total de indenizações pagas até o tempo t, ou seja,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\tau(t)} Z_i \, ,$$

onde $\sum_{i=1}^{0} Z_i = 0$, por convenção. Portanto, $S(t)$ é uma soma aleatória e podemos verificar que sua função média é $\beta(t) = ES(t) = \beta\lambda(t)$.

O processo de reserva de capital de risco de uma companhia de seguros é então definido por

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\tau(t)} Z_i \, , \quad t \geq 0 \, , \tag{2.2}$$

onde $x \geq 0$ denota o capital inicial da empresa e $c > 0$ denota a taxa de prêmio constante.

Uma medida útil do risco financeiro da seguradora é o cálculo da *probabilidade de ruína*, ou seja, a probabilidade de que em algum período de tempo finito o capital da seguradora torne-se negativo.

O primeiro instante de tempo em que ocorre a ruína é chamado *tempo de ruína*. É razoável considerarmos que o tempo de ruína de uma seguradora dependa do capital inicial da empresa e podemos então definí-lo por

$$\Upsilon(x) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0 \,|\, R(0) = x\} \, .$$

Então, a probabilidade de ruína a tempo finito $t \geq 0$ é representada pela função bivariada

$$\Psi(x,t) = P(\Upsilon(x) \leq t) \, ,$$

e a probabilidade de ruína é dada por

$$\Psi(x) = \Psi(x,\infty) = \lim_{t\to\infty} \Psi(x,t) = P(\Upsilon(x) < \infty) \, .$$

Para que não se tenha a ruína certa, ou seja, não se tenha probabilidade de ruína um, é natural assumirmos que

$$\mu = cE\theta - EZ > 0\,.$$

De fato, para todo $n \geq 1$, entre o $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo acidentes, a reserva de risco tem superávit médio $cE\theta$. Se em média o custo da indenização do n-ésimo acidente é maior que $cE\theta$, então a reserva de risco no instante T_n é menor que a reserva de risco no instante T_{n-1}. Então a reserva de risco analisada nos tempos T_n formam uma sequência decrescente e não limitada, logo será negativa em algum instante de tempo.

Asmussen (1984) apresenta um resultado célebre para o comportamento assintótico da probabilidade de ruína, considerando que o custo de indenizações é de cauda leve, conhecida como aproximação de Crámer-Lundberg. No caso em que o custo das indenizações tem cauda pesada, outras aproximações são conhecidas. Por exemplo, Veraverbeke (1997) e Embrechts e Veraverbeke (1982) estabeleceram a seguinte relação assintótica para a probabilidade de ruína, considerando a função de distribuição dos custos de indenizações $B \in \mathcal{S}$:

$$\Psi(x,\infty) \sim \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \overline{B}\,(u)\,du\,, \text{ quando } x \to \infty\,. \tag{2.3}$$

Resultados sobre a probabilidade de ruína a tempo finito são mais desejáveis, porém mais trabalhosos de se obter do que resultados para probabilidade de ruína (a tempo ilimitado). O problema de encontrar aproximações precisas para a probabilidade de ruína a tempo finito tem uma longa história e vários métodos vem ainda sendo desenvolvidos. Uma revisão sobre estudos pioneiros em probabilidade de ruína a tempo finito pode ser encontrada em Asmussen (1984).

Apresentamos a seguir o resultado obtido por Tang (2004a), que fornece uma relação assintótica para a probabilidade de ruína a tempo finito $\Psi(x,t)$, quando $x \to \infty$, sob a hipótese de que a distribuição B, dos custos de indenizações é de variação consistente.

Teorema 2.1 (Tang (2004a)) *Considere o modelo risco de renovação clássico (2.2), com* $\mu = cE\theta - EZ > 0$. *Se* $B \in \mathcal{C}$ *e* $E\theta^p < \infty$ *para algum* $p > \mathbb{J}_B^+ + 1$ *(onde* $\mathbb{J}_B^+$ *é o índice superior de Matuszewska da função* B*). Então, quando* $x \to \infty$,

$$\Psi(x,t) = P\left(\max_{1\le k\le \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c\theta_i) > x\right) \sim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.4}$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$, *onde* $\lambda(t) = E\tau(t)$.

Demonstração do Teorema 2.1:

A demonstração do Teorema será dividida em três passos, que serão apresentados em três proposições a seguir.

Para justificar esse raciocínio, considere $\underline{t} = \inf\{t : \lambda(t) > 0\}$. Podemos observar que $\lambda(t) > 0$ se, e só se, com probabilidade positiva, o primeiro sinistro ocorreu até o tempo t, ou seja, $P(\theta_1 \le t) > 0$. Então $\underline{t} = \inf\{t : P(\theta_1 \le t) > 0\}$. Sendo assim, temos

$$\Lambda = \begin{cases} [\underline{t}, \infty] & , \quad \text{se } P(\theta_1 = \underline{t}) > 0 \\ (\underline{t}, \infty] & , \quad \text{se } P(\theta_1 = \underline{t}) = 0\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Dividimos a demonstração então da seguinte maneira: A Proposição 2.1 juntamente com a Proposição 2.2 provam a relação assintótica (2.4) uniformemente para $t \in [t_0, \infty]$ onde $t_0 \in \Lambda$ arbitrário. Como por (2.5) Λ pode ou não incluir $\underline{t}$, na Proposição 2.3 prova-se a relação (2.4) uniformemente para $t \in (\underline{t}, t_0)$, onde $t_0 \in (\underline{t}, \infty)$ e a demonstração do teorema será concluída para todo $t \in \Lambda$.

Para a prova das proposições necessitaremos de alguns resultados auxiliares cujas demonstrações serão omitidas. O primeiro deles é uma consequência da Proposição 2.2.1 em Bingham et al (1987).

Enunciaremos agora os três lemas que serão utilizados na demonstração:

Lema 2.1 (Bingham et al (1987)) *Para uma função de distribuição* $F \in \mathcal{D}$*, temos que* $\overline{F}\,(x) = o(x^{-p})$ *com* $x \to \infty$*, para qualquer* $p < \mathbb{J}_F^-$ *e que* $x^{-p} = o(\overline{F}\,(x))$ $x \to \infty$*, para qualquer* $p > \mathbb{J}_F^+$*.*

O seguinte resultado é devido a Tang (2004b) e é uma ferramenta essencial na demonstração das Proposições.

Lema 2.2 (Tang (2004b)) *Seja* $X, X_1, X_2, \ldots$ *uma sequência de v.a's i.i.d. com função de distribuição comum* $F \in \mathcal{C}$ *e média finita e negativa* EX*, e seja* $\{\tau(t), t > 0\}$ *um processo de renovação independente da sequência* $\{X_i, i \geq 1\}$*. Então*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim \frac{1}{|EX|} \int_x^{x+|EX|\lambda(t)} \overline{F}\,(u)\, du\,,$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$*, onde* $\lambda(t) = E\tau(t)$ *e, por convenção* $\max\limits_{1 \leq k \leq 0}(.) = 0$*.*

Note que a principal dificuldade na prova do Teorema 2.1 é que a sequência $\{Z_i - c\theta_i, i \geq 1\}$ não é independente do processo $\{\tau(t), t \geq 0\}$ e por isso o Lema 2.2 não pode ser aplicado diretamente.

Encerramos os lemas necessários para a demonstração exibindo um resultado clássico de Kiefer e Wolfwitz (1956).

Lema 2.3 (Kiefer e Wolfwitz (1956)) *Seja* $\{X_i, i \geq 1\}$ *uma sequência de v.a.'s i.i.d. com média finita e negativa. Considere* $M = \max_{1 \leq k < \infty} \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$*. Então para qualquer* $p > 0$*, temos que* $EM^p < \infty$ *se, e somente se* $E(max\{X_1, 0\})^{p+1} < \infty$*.*

A primeira das três proposições que demonstram o teorema é a seguinte:

Proposição 2.1 *Considere o modelo risco de renovação clássico e* $\mu = cE\theta - EZ > 0$*. Se* $B \in \mathcal{C}$*, então para* $t_0 \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$ *dado arbitrariamente,*

$$\Psi(x,t) \lesssim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.6}$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty]$.

Demonstração:

O resultado (2.3) assegura que é suficiente provar a uniformidade de (2.6) para $t \in [t_0, \infty)$.

Por hipótese, $\mu = cE\theta - EZ > 0$. Então seja $\varepsilon \in (0,1)$ arbitrário tal que

$$\mu_{-\varepsilon} = c(1-\varepsilon)E\theta - EZ > 0\,.$$

Para $\delta \in (0,1)$ arbitrário e fixo, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= P\left(\max_{1\le k\le\tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c\theta_i) > x\right) \qquad (2.7)\\
&= P\left(\max_{1\le k\le\tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c(1-\varepsilon)E\theta + c(1-\varepsilon)E\theta - c\theta_i) > x\right)\\
&\le P\left(\max_{1\le k\le\tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c(1-\varepsilon)E\theta) + c\max_{1\le k\le\tau(t)} \sum_{i=1}^{k} ((1-\varepsilon)E\theta - \theta_i) > x\right)\\
&\le I_1(x,t) + I_2(x)\,,
\end{aligned}$$

onde

$$I_1(x,t) = P\left(\max_{1\le k\le\tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c(1-\varepsilon)E\theta) > (1-\delta)x\right)$$

e

$$I_2(x) = P\left(c\max_{1\le k<\infty} \sum_{i=1}^{k} ((1-\varepsilon)E\theta - \theta_i) > \delta x\right)\,.$$

Analisemos primeiro $I_1(x,t)$. A sequência $\{Z_i - c(1-\varepsilon)E\theta, i \ge 1\}$ é de v.a's i.i.d., com média $-\mu_{-\varepsilon}$ finita. Além disso, agora temos que o processo de renovação $\{\tau(t), t \ge 0\}$ independe da sequência $\{Z_i - c(1-\varepsilon)E\theta, i \ge 1\}$ pois é independente da sequência $\{Z_i, i \geq 1\}$ e como $B \in \mathcal{C}$ e $P(Z - c(1-\varepsilon)E\theta > u) = \overline{B}\,(u + c(1-\varepsilon)E\theta)$, então a função de distribuição de $Z - c(1-\varepsilon)E\theta$ também está em $\mathcal{C}$. Portanto, todas as hipóteses do Lema 2.2 são satisfeitas e assim segue

$$I_1(x,t) \quad \sim \quad \frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}\,(u + c(1-\varepsilon)E\theta)\,du\,,$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$.

Agora, como $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, então $\overline{B}\,(u + c(1-\varepsilon)E\theta) \sim \overline{B}\,(u)$. Pela Proposição 1.1, segue que

$$I_1(x,t) \sim \frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.8}$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$.

Observe agora que para todo $t \in [t_0, \infty)$, como $\lambda(t)$ é não-decrescente, o intervalo $[(1-\delta)x\,,\ (1-\delta)x + \mu_{-\varepsilon}\lambda(t_0)] \subset [(1-\delta)x\,,\ (1-\delta)x + \mu_{-\varepsilon}\lambda(t)]$. Então

$$I_1(x,t) \gtrsim \frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t_0)} \overline{B}\,(u)\,du \;=\; \lambda(t_0)\overline{B}\,((1-\delta)x + k)\ \ ,$$

para algum $k \in [0, \mu_{-\varepsilon}\lambda(t_0)]$.

Além disso, $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, então $\overline{B}\,((1-\delta)x + k) \sim \overline{B}\,((1-\delta)x)$. Então

$$I_1(x,t) \gtrsim \lambda(t_0)\overline{B}\,((1-\delta)x)\ \ . \tag{2.9}$$

Analisemos agora $I_2(x)$. A v.a. $(1-\varepsilon)E\theta - \theta$ tem média $-\varepsilon/\lambda$ finita e negativa. Além disso, como a v.a. θ assume valores inteiros não-negativos, temos que

$$0 \leq \max\{(1-\varepsilon)E\theta - \theta\ ,\ 0\} \leq \max\{E\theta\ ,\ 0\} = E\theta\,.$$

e daí segue que para todo $j > 0$,

$$E\left(\max\{(1-\varepsilon)E\theta - \theta\ ,\ 0\}\right)^j \leq \frac{1}{\lambda^j} < \infty\,.$$

Assim, tomando $j = p+2$, pelo Lema 2.3, temos que para todo $p > 0$,

$$EM^{p+1} < \infty\,, \tag{2.10}$$

onde $M = \max_{1\le k<\infty} \sum_{i=1}^{k} [(1-\varepsilon)E\theta - \theta_i]$.

Logo

$$\begin{aligned} I_2(x) &= P\left(c \max_{1\le k<\infty} \sum_{i=1}^{k} (1-\varepsilon)E\theta - \theta_i > \delta x\right) \\ &= P\left(M > \frac{\delta}{c}x\right) \\ &\le \frac{E|M|^{p+1}c^{p+1}}{(\delta x)^{p+1}}\,, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Markov. De (2.10) temos que $E|M|^{p+1} < \infty$ e assim temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_2(x)}{x^{-p}} \le \lim_{x\to\infty} \frac{E|M|^{p+1}c^{p+1}}{\delta^{p+1}x} = 0\,,$$

ou seja, $I_2(x) = o(x^{-p})$, para todo $p > 0$.

Pelo Lema 2.1, para qualquer $p > \mathbb{J}_B^+$, tem-se $x^{-p} = o\left(\overline{B}\,((1-\delta)x)\right)$. Sendo assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_2(x)}{\overline{B}\,((1-\delta)x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{I_2(x)}{x^{-p}} \cdot \frac{x^{-p}}{\overline{B}\,((1-\delta)x)} = 0\,. \tag{2.11}$$

Agora, voltando em 2.8, se definirmos

$$L(x,t) = \frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,,$$

temos que

$$\frac{\Psi(x,t)}{L(x,t)} \le \frac{I_1(x,t)}{L(x,t)} + \frac{I_2(x)}{L(x,t)}\,.$$

Mas, por 2.8, $I_1(x,t) \sim L(x,t)$ e de (2.11) e (2.9) temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_2(x)}{L(x,t)} \le \frac{I_2(x)}{\lambda(t_0)\overline{B}\,((1-\delta)x)} = 0\,.$$

Logo $\Psi(x,t) \lesssim L(x,t)$, uniformemente para $t \in [t_0,\infty)$, ou seja,

$$\Psi(x,t) \lesssim \frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.12}$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$.

Para completar a prova da proposição, precisamos que se tenha μ ao invés de $\mu_{-\varepsilon}$ em (2.12). Mas como $\mu_{-\varepsilon} \leq \mu$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}(u)\, du &= \frac{(1-\delta)}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{x}^{x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}((1-\delta)v)\, dv \\
&\leq \frac{(1-\delta)}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}((1-\delta)v)\, dv \\
&\leq \frac{(1-\delta)}{\mu_{-\varepsilon}} \left(\int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} + \int_{x+\mu\lambda(t)}^{x+\frac{1}{1-\delta}\mu\lambda(t)} \right) \frac{\overline{B}((1-\delta)v)}{\overline{B}(v)} \overline{B}(v)\, dv \\
&\leq \frac{(1-\delta)}{\mu_{-\varepsilon}} \sup_{v>x} \left\{ \frac{\overline{B}((1-\delta)v)}{\overline{B}(v)} \right\} \times \\
&\qquad \left(\int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} + \int_{x+\mu\lambda(t)}^{x+\frac{1}{1-\delta}\mu\lambda(t)} \right) \overline{B}(v)\, dv \,. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Como $\overline{B}$ é não-crescente, então

$$\int_{x+\mu\lambda(t)}^{x+\frac{1}{1-\delta}\mu\lambda(t)} \overline{B}(v)\, dv \leq \frac{\delta}{1-\delta} \mu\lambda(t) \overline{B}(x+\mu\lambda(t)) \,. \qquad (2.14)$$

Então, de (2.13) e (2.14) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{-\varepsilon}} \int_{(1-\delta)x}^{(1-\delta)x+\mu_{-\varepsilon}\lambda(t)} \overline{B}(u)\, du &\leq \frac{(1-\delta)}{\mu_{-\varepsilon}} \sup_{v>x} \left\{ \frac{\overline{B}((1-\delta)v)}{\overline{B}(v)} \right\} \times \\
&\qquad \left(\int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}(v)\, dv + \frac{\delta}{1-\delta} \mu\lambda(t) \overline{B}(x+\mu\lambda(t)) \right) .
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de ε e δ, fazendo ambos tender a zero, como $B \in \mathcal{C}$, segue

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\mu} \lesssim \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}(v)\, dv \,,$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$. ∎

Proposição 2.2 *Considere o modelo risco de renovação clássico e* $\mu = cE\theta - EZ > 0$. *Se* $B \in \mathcal{C}$ *e* $E\theta^p < \infty$, *para algum* $p > \mathbb{J}_B^+ + 1$, *então para* $t_0 \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$ *dado arbitrariamente,*

$$\Psi(x,t) \gtrsim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.15}$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty]$.

Demonstração:

A demonstração é análoga à anterior. Novamente aqui, pelo resultado (2.3), é suficiente provar a uniformidade de (2.15) para $t \in [t_0, \infty)$.

Dados ε e δ pertencentes ao intervalo $(0,1)$, analogamente a (2.8) podemos obter

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= P\left(\max_{1\le k\le \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c\theta_i) > x\right) \\ &\ge I_3(x,t) - I_4(x)\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$I_3(x,t) = P\left(\max_{1\le k\le \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - c(1+\varepsilon)E\theta) > (1+\delta)x\right)$$

e

$$I_4(x) = P\left(c \max_{1\le k<\infty} \sum_{i=1}^{k} (\theta_i - (1+\varepsilon)E\theta) > \delta x\right)\,.$$

Analisemos primeiro $I_3(x,t)$. Como $\mu = cE\theta - EZ > 0$, então

$$\mu_\varepsilon = c(1+\varepsilon)E\theta - EZ > \mu > 0\,.$$

Como $\{Z_i - c(1+\varepsilon)E\theta, i \ge 1\}$ é independente do processo $\{\tau(t), t \ge 0\}$, aplicando o Lema 2.2, segue

$$I_3(x,t) \sim \frac{1}{\mu_\varepsilon} \int_{(1+\delta)x}^{(1+\delta)x+\mu_\varepsilon\lambda(t)} \overline{B}\,(u + c(1+\varepsilon)E\theta)\,du\,,$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$, pois $P(Z - c(1+\varepsilon)E\theta > u) = \overline{B}\,(u + c(1+\varepsilon)E\theta)$.

Pela mesma argumentação usada para provar (2.8) na proposição anterior, podemos obter

$$I_3(x,t) \sim \frac{1}{\mu_\varepsilon} \int_{(1+\delta)x}^{(1+\delta)x+\mu_\varepsilon\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.17}$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty)$.

Por outro lado, pelo Lema 2.3 e semelhante argumentação usada para obter (2.10), conclui-se que

$$E\left(\max_{0\le k<\infty} \sum_{i=1}^{k} (\theta_i - (1+\varepsilon)E\theta)\right)^{p-1} < \infty\,.$$

Pelo Lema 2.1 verifica-se que $I_4(x) = o(x^{-p+1}) = o(\overline{B}\,(x))$. Agora, por (2.17) temos $I_3(x,t_0) \sim \lambda(t_0)\overline{B}\,((1+\delta)x)$, então segue que

$$I_4(x) = o(I_3(x,t_0))\,. \tag{2.18}$$

Assim, de (2.16), (2.17) e (2.18) podemos mostrar

$$\Psi(x,t) \gtrsim \frac{1}{\mu_\varepsilon} \int_{x(1+\delta)}^{x(1+\delta)+\mu_\varepsilon\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,,$$

uniformemente para $t \in [t_0, \infty]$.

Por argumentação similar usada na conclusão da proposição anterior prova-se também 2.15.

■

A demonstração do Teorema 2.1 é concluída quando consideramos a última proposição:

Proposição 2.3 *Considere o modelo risco de renovação clássico e* $\mu = cE\theta - EZ > 0$. *Se* $B \in \mathcal{C}$, *então dado* $t_0 \in (\underline{t}, \infty)$,

$$\Psi(x,t) \sim \frac{1}{\mu} \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.19}$$

uniformemente para $t \in (\underline{t}, t_0]$.

Demonstração:

Para todo $t \in (\underline{t}, t_0]$, podemos obter

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\leq P\left(\sum_{i=1}^{\tau(t)} (Z_i - cE\theta) > x - (cE\theta)\tau(t)\right) \\
&\leq P\left(\sum_{i=1}^{\tau(t)} (Z_i - cE\theta) > x - (cE\theta)\tau(t) \ , \ \tau(t) < \sqrt{x}\right) + P\left(\tau(t) \geq \sqrt{x}\right) \\
&\leq I_5(x,t) + I_6(x,t) \ , \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

onde

$$I_5(x,t) = P\left(\max_{1\leq k\leq \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - cE\theta) > x - (cE\theta)\sqrt{x}\right)$$

e

$$I_6(x,t) = P\left(\tau(t) \geq \sqrt{x}\right) \ .$$

Analogamente às provas das proposições anteriores, pelo Lema 2.2 e como $B \in \mathcal{C}$, segue que

$$I_5(x,t) \sim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du \ , \qquad (2.21)$$

uniformemente para $t \in (\underline{t}, t_0]$.

Agora, analisando $I_6(x,t)$, como $\tau(t) \geq n$ se, e somente se $T_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \leq t$ e $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ são i.i.d., então $E\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \leq t) \leq P(\theta \leq t)$ e para todo $x \geq 0$ suficientemente grande, segue que

$$I_6(x,t) \leq P(\theta \leq t)\cdot P\left(\sum_{1\leq i\leq \sqrt{x}-1} \theta_i \leq t\right) \leq E\tau(t)P(\tau(t_0) \geq \sqrt{x} - 1) \ ,$$

para $t \in (\underline{t}, t_0]$.

Assim, como a v.a. $\tau(t_0)$ tem momentos finitos, de todas as ordens (vide Stein (1946)), segue da Desigualdade de Markov e do Lema 2.1 que

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\in(\underline{t},t_0]} \frac{I_6(x,t)}{I_5(x,t)} \leq \lim_{x\to\infty} \sup_{t\in(\underline{t},t_0]} \frac{\lambda(t)P(\tau(t_0) \geq \sqrt{x} - 1)}{\lambda(t)\overline{B}\,(x + \mu\lambda(t_0))} = 0 \ . \qquad (2.22)$$

Logo, de (2.20), (2.21) e (2.22) obtemos

$$\Psi(x,t) \lesssim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du\ , \tag{2.23}$$

uniformemente para $t \in (\underline{t}, t_0]$.

Por outro lado, analogamente podemos escrever

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &\leq P\left(\sum_{i=1}^{\tau(t)} (Z_i - ct_0 E\theta) > x \right) \\ &\leq P\left(\max_{1\leq k\leq \tau(t)} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - cE\theta) > x + ct_0 \right) . \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 2.2, segue que

$$\Psi(x,t) \gtrsim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du\ , \tag{2.24}$$

uniformemente para $t \in (\underline{t}, t_0]$. Portanto a relação (2.19) segue de (2.23) e (2.24).

■

2.3 Modelo de Risco de Renovação Composto

No modelo de risco de renovação clássico, apresentado na seção anterior, a cada ocorrência de acidente está associado um único pagamento de indenização por parte da seguradora.

No modelo de risco de renovação composto, apresentado nesta seção, a cada acidente podem estar associados vários pagamentos de indenizações. Este modelo está associado a ocorrência de catástrofes como terremotos, enchentes, acidentes aéreos, etc.

Como no modelo clássico, sejam $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ v.a's i.i.d. não-negativas denotando o custo das indenizações individuais, com função de distribuição B e média finita $\beta = EZ < \infty$.

A sequência $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ de v.a.'s i.i.d. não-negativas, com média $E\theta = 1/\lambda$ terá outro significado neste modelo. Aqui ela representa o *tempo entre ocorrência de acidentes (catástrofes)*, e não o tempo entre ocorrência de *indenizações*, como no modelo clássico. Além disso, $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ são independentes de $Z, Z_1, Z_2, \ldots$.

Para destacar a diferença entre os modelos, chamaremos acidentes aqui de catástrofes. Isso não significa que em todos os acidentes ocorridos o número de indenizações pagas pela seguradora seja maior que um. A intenção é ressaltar que esse número pode ser maior que um.

A soma $T_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$, por sua vez representa o *tempo de ocorrência da n-ésima catástrofe.*

Denotaremos por N_n a quantidade de indenizações pagas na n-ésima catástrofe, ocorrida no tempo T_n. Considere que $N, N_1, N_2, \ldots$ são v.a.'s i.i.d., assumindo valores inteiros positivos, independentes das sequências $\{Z_i, i \geq 1\}$ e $\{\theta_i, i \geq 1\}$, com média $\nu = EN < \infty$.

As *quantias de indenizações individuais geradas pela n-ésima catástrofe* serão denotadas por $Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}, \ldots, Z_{N_n}^{(n)}$. As sequências $\{Z_i^{(n)}, i \geq 1\}$ são cópias independentes de $\{Z_i, i \geq 1\}$, para todo $n \geq 1$.

Sendo assim, o *número de catástrofes ocorridas no intervalo* $[0, t]$ é dado por

$$\tau(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\} .$$

De modo análogo ao obtido no modelo clássico, o processo de ocorrência de catástrofes $\{\tau(t), t \geq 0\}$ é um processo de renovação. Considerando $\lambda(t) = E\tau(t)$ a função média do processo, temos novamente que $\lambda(t) \sim \lambda t$, quando $t \to \infty$.

A *perda agregada em decorrência da n-ésima catástrofe*, é dada por

$$S_{N_n}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N_n} Z_i^{(n)} = Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} + \cdots + Z_{N_n}^{(n)} ,$$

onde $Z_i^{(n)}$ é o custo da i-ésima indenização paga em decorrência da n-ésima catástrofe. Observe que $S_{N_n}^{(n)}$ é uma soma aleatoriamente indexada.

A *perda agregada até o tempo* t é dada por

$$\sum_{k=1}^{\tau(t)} S_{N_k}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\tau(t)} \sum_{i=1}^{N_k} Z_i^{(k)} .$$

Assim, neste modelo, o processo de reserva de capital de risco da seguradora é dado por

$$R(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{\tau(t)} S_{N_k}^{(k)} ,$$

onde $x \geq 0$ é o capital inicial da empresa e $c > 0$ é a taxa constante de recebimento de prêmios.

Denotamos a *probabilidade de ruína até o tempo* t como sendo a função bivariada

$$\Psi(x,t) = P\left(\inf_{0 \leq s \leq t} R(s) < 0 \,\middle|\, R(0) = x \right) .$$

Claramente a ruína só é possível nos instantes de tempo T_n, ou seja, em que ocorrem catástrofes, que equivale aos instantes em que ocorrem pagamentos de indenizações. Nos intervalos de tempo em que não ocorrem catástrofes, a reserva de capital de risco cresce à taxa constante c, devido o recebimento de prêmios.

Então a probabilidade de ruína a tempo finito pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= P\left(\min_{1 \leq k \leq \tau(t)} \left\{ x - \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{N_i} Z_j^{(i)} - c\theta_i \right) \right\} < 0 \right) \\ &= P\left(\min_{1 \leq k \leq \tau(t)} \left\{ x - \sum_{i=1}^{k} \left(S_{N_i}^{(i)} - c\theta_i \right) \right\} < 0 \right) \end{aligned}$$

O modelo de risco composto pode ser reduzido ao modelo clássico bastando considerar $N_1 = N_2 = \cdots = 1$.

Observe que as variáveis aleatórias $S_{N_1}^{(1)}, S_{N_2}^{(2)}, \ldots$ são i.i.d. e são cópias independentes da soma aleatoriamente indexada $S_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i$. Por argumentação análoga à usada no modelo clássico, a condição sobre os custos de indenizações e tempo entre ocorrência de catástrofes para que a ruína não seja certa é

$$cE\theta - ES_N > 0 \, .$$

Como $ES_N = ENEZ = \nu EZ$, então podemos escrever a condição acima como

$$cE\theta - \nu EZ > 0 \, .$$

Apresentaremos agora no modelo de risco de renovação composto três resultados, obtidos por Aleškevičienė et al (2008), para o comportamento assintótico da probabilidade de ruína, similares ao Teorema 2.1 no modelo clássico.

Cada um dos três teoremas considerará um dos três casos de interrelação entre as caudas das distribuições de custos individuais $P(Z > x) = \overline{B}\,(x)$ e a cauda da distribuição do número de indenizações $P(N > x) = \overline{F}_N\,(x)$. No primeiro teorema considera-se $\overline{F}_N\,(x) = o(\overline{B}\,(x))$, no segundo $\overline{B}\,(x) = o(\overline{F}_N\,(x))$ e no terceiro considera-se $\overline{F}_N\,(x) \sim C\overline{B}\,(x)$, para alguma constante $C > 0$.

O Teorema 2.1 será usado na demonstração dos três teoremas aqui, identificando as v.a's S_N no modelo composto como Z do modelo clássico. Precisaremos para tal relacionar a cauda da soma aleatória S_N com a cauda de Z, em todos os três casos. As relações assintóticas desejadas entre as caudas de S_N e Z serão fornecidas pelos Teoremas 1.7, 1.8 e 1.9 do capítulo anterior.

Teorema 2.2 (Aleškevičienė et al (2008)) *Considere o modelo de risco de renovação composto e $\mu = cE\theta - \nu EZ > 0$. Se $B \in \mathcal{C}$, $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$ e $E\theta^p < \infty$ para algum $p > \mathbb{J}_B^+ + 1$, então*

$$\Psi(x,t) \sim \frac{\nu}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du \, , \qquad (2.25)$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$.

Demonstração:

Da definição de probabilidade de ruína, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= P\left(\min_{1\le k\le \tau(t)}\left\{x - \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{N_i} Z_j^{(i)} - c\theta_i\right)\right\} < 0\right)\\
&= P\left(\min_{1\le k\le \tau(t)}\left\{x - \sum_{i=1}^{k}\left(S_{N_i}^{(i)} - c\theta_i\right)\right\} < 0\right)\\
&= P\left(\max_{1\le k\le \tau(t)}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(S_{N_i}^{(i)} - c\theta_i\right)\right\} > x\right) . \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Observe que $S_{N_i}^{(i)} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + \cdots + Z_{N_i}^{(i)}$ é uma soma aleatoriamente indexada pela v.a. N_i. Por hipótese, temos que $\{Z_j^{(i)}, j \ge 1\}$ são cópias independentes de $\{Z_j, j \ge 1\}$ para todo $i \ge 1$ e $\{N_i, i \ge 1\}$ são v.a.'s i.i.d. Portanto $S_{N_1}^{(1)}, S_{N_2}^{(2)}, \ldots$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas. Podemos então considerar, para cada i fixo, $S_{N_i}^{(i)}$ como sendo $S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$.

Queremos utilizar o Teorema 2.1 de forma que a sequência $\{S_{N_i}^{(i)}, i \ge 1\}$ de v.a's i.i.d. nesta demontração seja a sequência $\{Z_i, i \ge 1\}$ no Teorema 2.1. Para isso, precisamos que todas as hipóteses do Teorema 2.1 sejam satisfeitas para a sequência $\{S_{N_i}^{(i)}, i \ge 1\}$.

Por hipótese $\mu = cE\theta - ES_N = cE\theta - ENEZ = cE\theta - \nu EZ > 0$ e $E\theta^p < \infty$ para algum $p > \mathbb{J}_B^+ + 1$.

Precisamos provar ainda que $P(S_N \le x) = F_{S_N}(x) \in \mathcal{C}$.

De fato, também por hipótese $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, $\beta = EZ < \infty$, e $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$. Pelo Teorema 1.7, a soma S_N satisfaz

$$P\left(\max_{1\le k\le N} S_k > x\right) \sim P(S_N > x) \sim \nu\overline{B}\,(x) . \qquad (2.27)$$

Por um lado, para todo $y \in (0,1)$,

$$\frac{\overline{F}_{S_N}(xy)}{\overline{F}_{S_N}(x)} \ge 1 , \quad \forall x > 0 . \qquad (2.28)$$

Por outro lado, da segunda relação de equivalência em (2.27) temos que

$$(1-\varepsilon(x))\,\nu\overline{B}\,(x) < \overline{F}_{S_N}\,(x) < (1+\varepsilon(x))\,\nu\overline{B}\,(x)\ ,$$

onde $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

Então

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_{S_N}\,(xy)}{\overline{F}_{S_N}\,(x)}\leq 1 \tag{2.29}$$

e de (2.28) e (2.29), concliu-se portanto que $F_{S_N}\in\mathcal{C}$.

Finalmente, pelo Teorema 2.1 a probabilidade de ruína é aproximada por

$$\Psi(x,t)\sim\frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{F}_{S_N}\,(u)\,du\,, \tag{2.30}$$

uniformemente em $t\in\Lambda=\{t:\lambda(t)>0\}$.

Para concluir a demostração precisamos ter $\overline{B}\,(u)$ ao invés de $\overline{F}_{S_N}\,(u)$ na integral em (2.30). Observe que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{F}_{S_N}\,(u)\,du &= \nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\,du+\nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\left(\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu\overline{B}\,(u)}-1\right)du\\ &= \nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\,du+R(x,t)\,,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}|R(x,t)| &= \left|\nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\left(\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu\overline{B}\,(u)}-1\right)du\right|\\ &\leq \nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\left|\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu\overline{B}\,(u)}-1\right|du\\ &\leq \nu\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\left(\sup_{u\geq x}\left|\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu\overline{B}\,(u)}-1\right|\right)du\\ &= \nu\cdot\sup_{u\geq x}\left|\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu\overline{B}\,(u)}-1\right|\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\,du\\ &= \nu\cdot\epsilon_1(x)\int_x^{x+\mu\lambda(t)}\overline{B}\,(u)\,du\,.\end{aligned}$$

Mas por (2.27) temos $P(S_N > x) \sim \nu \overline{B}\,(x)$, então segue

$$0 = \limsup_{x\to\infty} \left| \frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu \overline{B}\,(u)} - 1 \right| = \lim_{x\to\infty} \sup_{u\geq x} \left| \frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{\nu \overline{B}\,(u)} - 1 \right| = \lim_{x\to\infty} \epsilon_1(x)\,.$$

para $x > 0$, $\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du \leq EZ < \infty$, então obtemos $\lim_{x\to\infty} |R(x,t)| = 0$.

Portanto,

$$\Psi(x,t) \sim \frac{\nu}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,.$$

■

Teorema 2.3 (Aleškevičienė et al (2008)) *Considere o modelo risco de renovação composto e* $\mu = cE\theta - \nu EZ > 0$. *Se* $F_N(x) := P(N \leq x) \in \mathcal{C}$, $\overline{B}\,(x) = o(\overline{F}_N\,(x))$ *e* $E\theta^p < \infty$ *para algum* $p > \mathbb{J}^+_{F_N} + 1$, *então*

$$\Psi(x,t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N \left(\frac{u}{\beta}\right) du\,, \tag{2.31}$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$.

Demonstração:

A demonstração aqui é análoga à anterior. Lembremos que a probabilidade de ruína é dada por

$$\Psi(x,t) = P\left(\max_{1\leq k\leq \tau(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left(S_{N_i}^{(i)} - c\theta_i \right) \right\} > x \right)\,.$$

Novamente, para que possamos utilizar o Teorema 2.1 precisamos antes verificar que $F_{S_N} \in \mathcal{C}$. Pelo Teorema 1.8, temos

$$P(S_N > x) \sim P\left(N > \frac{x}{EZ}\right) = \overline{F}_N \left(\frac{x}{\beta}\right)\,. \tag{2.32}$$

Como $N \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{y\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(xy)}{\overline{F}_{S_N}\,(x)} = \lim_{y\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_N\,(xy\beta^{-1})}{\overline{F}_N\,(x\beta^{-1})} = 1\,,$$

ou seja, $F_{S_N} \in \mathcal{C}$. Então, pelo Teorema 2.1 vale novamente a relação (2.30) uniformemente para $t \in \Lambda$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_{S_N}(u)\,du &= \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(\frac{u}{\beta}\right) du \\
&\quad + \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(u\beta^{-1}\right)\left(\frac{\overline{F}_{S_N}(u)}{\overline{F}_N(u\beta^{-1})} - 1\right) du \\
&= \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(u\beta^{-1}\right) du \,+\, R_1(x,t)\,,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
|R_1(x,t)| &\le \sup_{u\ge x}\left|\frac{\overline{F}_{S_N}(u)}{\overline{F}_N(u\beta^{-1})} - 1\right| \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(\frac{u}{\beta}\right) du \\
&= \epsilon_2(x) \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(u\beta^{-1}\right) du\,.
\end{aligned}$$

Mas, da equação (2.32) conclui-se que $\lim_{x\to\infty} \epsilon_2(x) = 0$. Consequentemente, como $\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N(u\beta^{-1})\,du \le EN < \infty$, temos $\lim_{x\to\infty} |R_1(x,t)| = 0$. Segue portanto que

$$\Psi(x,t) \sim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_N\left(\frac{u}{\beta}\right) du\,,$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$. ■

Teorema 2.4 (Aleškevičienė et al (2008)) *Considere o modelo risco de renovação composto e* $\mu = cE\theta - \nu EZ > 0$. *Se* $B \in R_{-\alpha}$, $\alpha \ge 1$, $\overline{F}_N(x) \sim C\overline{B}(x)$ *para alguma constante* $C > 0$ *e* $E\theta^p < \infty$ *para algum* $p > \alpha + 1$, *então*

$$\Psi(x,t) \sim \frac{\nu + C\beta^\alpha}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}(u)\,du\,, \tag{2.33}$$

uniformemente para $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$.

Demonstração:

Como $B \in R_{-\alpha} \subset \mathcal{C}$, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{B}\,(x\beta^{-1})}{\overline{B}\,(x)} = \beta^{\alpha}$$

e pelas inequaçãoes (1.42) e (1.43) do Teorema 1.9, concluímos que

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(x)}{\overline{B}\,(x)} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(x)}{\overline{B}\,(x)} = \nu + C(EZ)^{\alpha}\,,$$

ou seja,

$$\overline{F}_{S_N}\,(x) \sim (\nu + C\beta^{\alpha})\overline{B}\,(x)\ . \tag{2.34}$$

Daí,

$$(1 - \epsilon'(x))\,\overline{B}\,(x)\,(C + \beta^{\alpha}) < \overline{F}_{S_N}\,(x) < (1 + \epsilon'(x))\,\overline{B}\,(x)\,(C + \beta^{\alpha})\,,$$

onde $\lim_{x \to \infty} \epsilon'(x) = 0$. Então, para qualquer $y > 0$ fixado,

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(xy)}{\overline{F}_{S_N}\,(x)} &\leq \limsup_{x \to \infty} \frac{(1 + \epsilon'(xy))\,\overline{B}\,(xy)\,(C + \beta^{\alpha})}{(1 - \epsilon'(x))\,\overline{B}\,(x)\,(C + \beta^{\alpha})} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\overline{B}\,(xy)}{\overline{B}\,(x)} = y^{-\alpha}\ .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(xy)}{\overline{F}_{S_N}\,(x)} \geq \lim_{x \to \infty} \frac{\overline{B}\,(xy)}{\overline{B}\,(x)} = y^{-\alpha}\ .$$

Logo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}_{S_N}\,(xy)}{\overline{F}_{S_N}\,(x)} = y^{-\alpha}\,,$$

ou seja, $F_{S_N} \in R_{-\alpha} \subset \mathcal{C}$. Pelo Teorema 2.1, a probabilidade de ruína $\Psi(x,t)$ satisfaz a relação (2.30). Pelo mesmo argumento dos casos anteriores, temos que

$$\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F}_{S_N}\,(u)\,du \;=\; (\nu + C\beta^{\alpha}) \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du$$

$$
\begin{aligned}
&+(\nu + C\beta^{\alpha}) \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u) \left(\frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{(\nu + C\beta^{\alpha})\overline{B}\,(u)} - 1 \right) du \\
= \;& (\nu + C\beta^{\alpha}) \left(\int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du + R_2(x,t) \right) ,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
|R_2(x,t)| \;&\leq\; \sup_{u\geq x} \left| \frac{\overline{F}_{S_N}\,(u)}{(\nu + C\beta^{\alpha})\overline{B}\,(u)} - 1 \right| \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du \\
&=\; \epsilon_3(x) \int_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\, du \,.
\end{aligned}
$$

Aqui também $\lim_{x\to\infty} \epsilon_3(x) = 0$. Segue portanto a relação (2.4). Completamos assim a demonstração do teorema.

■

Observação 2.1

A uniformidade nas relações dos Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4 permitem que a variável tempo t varie de forma flexivel conforme x.

Essas relações continuam válidas se substituirmos os limitantes superiores $x + \mu\lambda(t)$ nas correspondentes integrais por $x + \mu\lambda t$, desde que troquemos o conjunto de convergência uniforme $\Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$ por $[f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Sendo assim, considerando as hipóteses do Teorema 2.2, provemos que

$$
\Psi(x,t) \sim \frac{\nu}{\mu} \int_{x}^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\, du \,, \tag{2.35}
$$

uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

De fato, observe que a relação $\lambda(t) \sim \lambda t$ pode ser interpretada como: dado $\varepsilon > 0$, existe $f(x)$ uma função estritamente crescente e não limitada tal que $\forall t \geq f(x)$, $(1-\varepsilon)\lambda(t) < \lambda t < (1+\varepsilon)\lambda(t)$.

Para $x > x_0$ suficientemente grande, $f(x) > 0$. Então, para $x > x_0$ e $t \geq f(x)$, $\lambda(t) > \frac{\lambda t}{1+\varepsilon} > 0$. Sendo assim, para x suficientemente grande, $t \in [f(x), \infty)$ implica $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$. Como estamos aplicando o limite para x tendendo a infinito, a relação (2.2) continua válida uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$.

Segue portanto que

$$\Psi(x,t) = \frac{\nu}{\mu}(1+o(1)) \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\,, \tag{2.36}$$

uniformemente para $t \geq f(x)$ e x suficientemente grande.

Para tais t e x, observe que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du &= \int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\,du + \int_{x+\mu\lambda t}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du \\ &= \int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\,du \left(1 + \frac{\int_{x+\mu\lambda t}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du}{\int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\,du}\right). \end{aligned}$$

Mas,

$$\left|\frac{\int_{x+\mu\lambda t}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du}{\int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\,du}\right| \leq \frac{\overline{B}\,(x+\mu\lambda t+k)\,\mu|\lambda(t)-\lambda t|}{\overline{B}\,(x+\mu\lambda t)\,\mu\lambda t}\,,$$

onde k é uma constante de tal maneira que:

(i) Se $\lambda t < \lambda(t)$, então $k > 0$ tal que

$$\left|\int_{x+\mu\lambda t}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du\right| = \overline{B}\,(x+\mu\lambda t+k)\,\mu|\lambda(t)-\lambda t|\,; \tag{2.37}$$

(ii) Se $\lambda(t) < \lambda t$, então $k < 0$ tal que a igualdade (2.37) é válida.

Como $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ e $\dfrac{\lambda(t) - \lambda t}{\lambda t} = o(1)$, temos na equação (2.36) que

$$\Psi(x,t) = \frac{\nu}{\mu}(1 + o(1))(1 + o(1)) \int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{B}\,(u)\,du\,,$$

uniformemente para $t \geq f(x)$ e x suficientemente grande. Fazendo então x tender a infinito, temos finalmente a relação (2.35) válida uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

De maneira análoga prova-se também o resultado para os teoremas 2.3 e 2.4.

Essas observações simplicam o cálculo das integrais nos teoremas dessa seção e serão úteis na próxima seção.

2.4 Exemplos

Nesta seção apresentamos exemplos que ilustram os resultados assintóticos fornecidos pelos Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4 dados na seção anterior.

Os Exemplos 1, 2 e 3 ilustram o Teorema 2.2. Os Exemplos 4 e 5 ilustram os Teoremas 2.3 e 2.4, respectivamente.

Exemplo 1

Suponha que N tem distribuição Poisson$(\alpha + 1)$, $\alpha > 0$, então $\nu = EN = \alpha + 1$.

Considere Z com distribuição Pareto de parâmetros $\gamma > 1$ e $\delta > 0$, com função densidade dada por

$$b(x) = \frac{\delta^\gamma \cdot \gamma}{(\delta + x)^{\gamma+1}}\,, \quad x \geq 0$$

ou, respectivamente,

$$\overline{B}\,(x) = \left(\frac{\delta}{\delta + x}\right)^\gamma, \quad x \geq 0\,.$$

Temos $EZ = \dfrac{\delta}{\gamma - 1}$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{B}\,(xy)}{\overline{B}\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\delta + x}{\delta + xy}\right)^{\gamma} = y^{-\gamma} \, .$$

Então $B \in R_{-\gamma} \subset \mathcal{C}$. Da definição de índice superior de Matuszewska, temos

$$\mathbb{J}_B^{+} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{B}_{\star}\,(y)}{\log y} = -\lim_{y\to\infty} \log_y \overline{B}_{\star}\,(y) \ ,$$

onde

$$\overline{B}_{\star}\,(y) = \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{B}\,(xy)}{\overline{B}\,(x)} = y^{-\gamma} \, ,$$

então

$$\mathbb{J}_B^{+} = -\lim_{y\to\infty} \log_y y^{-\gamma} = \gamma \, .$$

Considere ainda que os tempos entre-chegadas de acidentes θ tem distribuição Exponencial de parâmetro $k > 0$. Portanto $(E\theta)^{-1} = k$ e $\tau(t)$ é um processo de Poisson, onde $\lambda(t) = E\tau(t) = kt$, $\forall t > 0$. Sabe-se que $\forall n$ inteiro positivo $E\theta^n = \dfrac{n!}{k^n}$. Tomando $p - 1 = \lceil \gamma + 1 \rceil$, temos $p > \gamma + 1$ e

$$E\theta^p = \frac{p!}{k^p} < \infty \, .$$

Impondo a condição

$$\mu = \frac{c}{k} - \frac{(\alpha+1)\delta}{\gamma - 1} > 0,$$

para podermos aplicar o Teorema 2.2 resta verificar a hipótese $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$.

Para mostrar isto, basta lembrar que, como N tem distribuição Poisson $(\alpha + 1)$, com $EN = varN = \alpha + 1$, segue do Teorema do Limite Central que

$$\begin{aligned} P(N \le x) \ &\sim \ \psi\left(\frac{x - (\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+1}}\right) \\ &= \ P\left(Z \le \frac{x - (\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+1}}\right) \\ &= \ P(Z\sqrt{\alpha+1} + (\alpha+1) \le x) \, , \end{aligned}$$

onde $\psi(x) = P(Z \leq x)$ é a f.d. Normal$(0,1)$. Mas sabemos que $W = Z\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)$ tem distribuição Normal$(\alpha+1, \alpha+1)$ e portanto é de cauda leve, pois

$$M_W(e^{\varepsilon W}) = e^{\varepsilon(\alpha+1)+\frac{(\alpha+1)\varepsilon^2}{2}} < \infty\,, \;\; \forall\, \varepsilon > 0\,.$$

ou seja, W é de cauda leve. Agora, como B é de cauda pesada, temos finalmente que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{P(N > x)}{\overline{B}\,(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(W > x)}{\overline{B}\,(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{P(W > x)}{e^{-\varepsilon x}} \cdot \frac{e^{-\varepsilon x}}{\overline{B}\,(x)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$. Aplicando o Teorema 2.2, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\sim \frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{B}\,(u)\,du \\
&= \frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu kt} \left(\frac{\delta}{\delta+u}\right)^{\gamma} du \\
&= \frac{\nu\delta^{\gamma}}{\mu}\int_x^{x+\mu kt} \frac{1}{(\delta+u)^{\gamma}} du\,,
\end{aligned}$$

uniformemente para $t \in (0,\infty)$ (pois $\lambda(t) = kt > 0$ para todo $t > 0$).

Pela Proposição 1.1, temos que

$$\int_x^{x+\mu kt} \frac{1}{(\delta+u)^{\gamma}}\,du \sim \int_x^{x+\mu kt} \frac{1}{u^{\gamma}}\,du\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\sim \frac{\nu\delta^{\gamma}}{\mu}\int_x^{x+\mu kt} \frac{1}{u^{\gamma}} du \\
&= \frac{k(\alpha+1)\delta^{\gamma}}{c(\gamma-1)-k(\alpha+1)\delta} \left(\frac{1}{x^{\gamma-1}} - \frac{1}{\left(x + \left(c - \dfrac{k(\alpha+1)\delta}{\gamma-1}\right) t\right)^{\gamma-1}} \right)
\end{aligned}$$

uniformemente para $t \in (0, \infty)$.

Exemplo 2

Suponha que o custo das indenizações individuais, Z, e o tempo entre ocorrência de acidentes, θ, tenham distribuição Pareto com parâmetros $\gamma_1 > 1$ e $\gamma_2 > 1$, respectivamente, isto é,

$$B(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{\gamma_1}}\,, \quad x \geq 0 \qquad \text{e} \qquad F_\theta(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{\gamma_2}}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Análogo ao exemplo 1, temos que B pertence à classe $\mathcal{R}$ de parâmetro γ_1 e é subconjunto de $\mathcal{C}$. Segue daí que $\mathbb{J}_B^+ = \gamma_1$, $EZ = \dfrac{1}{\gamma_1 - 1} > 0$ e $E\theta = \dfrac{1}{\gamma_2 - 1} > 0$. Provaremos a seguinte afirmação:

$$E\theta^p < \infty \quad \text{se, e somente se} \quad p < \gamma_2\,.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
E\theta^p &= \gamma_2 \int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^{\gamma_2+1}}\,dx \\
&\leq \gamma_2 \int_0^\infty x^{p-(\gamma_2+1)} dx \\
&= \frac{\gamma_2}{p-\gamma_2}\left(\lim_{x\to\infty} x^{p-\gamma_2}\right).
\end{aligned}$$

Então, se $p < \gamma_2$ implica $E\theta^p < \infty$.

Suponha agora $p \geq \gamma_2$. Então

$$\begin{aligned}
E\theta^p &= \gamma_2 \int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^{\gamma_2+1}}\,dx \\
&\geq \gamma_2 \int_1^\infty \frac{x^p}{(1+x)^{\gamma_2+1}}\,dx \\
&\geq \gamma_2 \int_1^\infty \frac{x^p}{(2x)^{\gamma_2+1}}\,dx \\
&= \frac{\gamma_2}{2^{\gamma_2+1}} \int_1^\infty x^{p-(\gamma_2+1)}\,dx \\
&= \infty\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $p \geq \gamma_2$, $E\theta^p = \infty$, que conclui a afirmação.

O Teorema 2.2 exige que $E\theta^p < \infty$, para algum $p > \gamma_1 + 1$. Consideremos então $\gamma_2 > \gamma_1 + 1$. Assim $E\theta^p$ é finita, para todo $p \in (\gamma_1 + 1, \gamma_2)$.

Suponha ainda que o número de indenizações individuais N tem f.d. de cauda pesada dada por

$$F_N(x) = P(N \leq x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma_3+1}} \right\}^{-1} \cdot \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{\gamma_3+1}}$$

com parâmetro $\gamma_3 > 1$.

Observe que para todo n inteiro e positivo, temos

$$\begin{aligned}
P(N = n) &= P(N \leq n) - P(N < n) \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} \right\}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} \right) \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} \right\}^{-1} \left(\frac{1}{n^{\gamma_3+1}} \right) .
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
EN &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} \right\}^{-1} \left(\frac{1}{n^{\gamma_3+1}} \right) \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\gamma_3+1}} \right\}^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma_3}} \\
&= \frac{\zeta(\gamma_3)}{\zeta(\gamma_3 + 1)} ,
\end{aligned}$$

onde $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é a função zeta de Riemann.

Provaremos agora que a seguinte relação é válida:

$$P(N > x) \sim \frac{1}{\gamma_3 x^{\gamma_3} \zeta(\gamma_3 + 1)} \,. \tag{2.38}$$

Precisamos portanto verificar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(N > x)}{\gamma_3 x^{\gamma_3} \zeta(\gamma_3 + 1)^{-1}} \;=\; \gamma_3 x^{\gamma_3} \sum_{k=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{k^{\gamma_3+1}} \;=\; 1$$

Considere a seguinte consequência do Teorema do Teste da Integral:

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série convergente de termos positivos. Seja $g(x)$ a função que resulta quando k for substituído por x no termo geral da série. Se f é decrescente e contínua no intervalo $[n, \infty)$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} g(x)dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k < \int_{n}^{\infty} g(x)dx \tag{2.39}$$

Tome $g(x) = \frac{1}{x^{\gamma_3+1}}$. Portanto f é decrescente e contínua em $(-\infty, \infty)$. Por (2.39), temos que

$$\frac{x^{\gamma_3}}{(\lfloor x \rfloor + 1)^{\gamma_3}} = \gamma_3 x^{\gamma_3} \int_{\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{y^{\gamma_3+1}} dy < \gamma_3 x^{\gamma_3} \sum_{k=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{k^{\gamma_3+1}} < \gamma_3 x^{\gamma_3} \int_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \frac{1}{y^{\gamma_3+1}} dy = \frac{x^{\gamma_3}}{(\lfloor x \rfloor)^{\gamma_3}}$$

Observe que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\gamma_3}}{(\lfloor x \rfloor + 1)^{\gamma_3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\gamma_3}}{(\lfloor x \rfloor)^{\gamma_3}} = 1 \,.$$

Então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to\infty} \gamma_3 x^{\gamma_3} \sum_{k=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{k^{\gamma_3+1}} = 1 \,.$$

Portanto (2.38) é válido.

Agora, da relação (2.38), supondo $\gamma_3 > \gamma_1$, provaremos que $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$. De fato,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(N > x)}{\overline{B}\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 + x)^{\gamma_1}}{\gamma_3 x^{\gamma_3} \zeta(\gamma_3 + 1)} \,.$$

Mas, por um lado,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{\gamma_1}}{\gamma_3 x^{\gamma_3}\zeta(\gamma_3+1)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\gamma_1-\gamma_3}}{\gamma_3\zeta(\gamma_3+1)} = 0\,,$$

e por outro lado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{\gamma_1}}{\gamma_3 x^{\gamma_3}\zeta(\gamma_3+1)} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{\gamma_1-\gamma_3}}{\gamma_3\zeta(\gamma_3+1)} = 0\,.$$

Logo, segue que $P(N > x) = o(\overline{B}\,(x))$.

Sob as condições

$$\gamma_2 > \gamma_1 + 1, \quad \gamma_3 > \gamma_1 > 1 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{c}{\gamma_2 - 1} - \frac{\zeta(\gamma_3)}{(\gamma_1-1)\zeta(\gamma_3+1)} > 0\,,$$

aplicando o Teorema 2.2 e a Observação 2.1, temos

$$\Psi(x,t) \sim \frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda t} \frac{1}{(1+u)^{\gamma_1}}du\,,$$

uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada. Pela Proposição 1.1, temos

$$\frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda t} \frac{1}{(1+u)^{\gamma_1}}du \sim \frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda t} \frac{1}{u^{\gamma_1}}du\,.$$

Resolvendo a integral á direita, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\sim \frac{\nu}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda t} \frac{1}{u^{\gamma_1}}du \\
&\sim \frac{(\gamma_2-1)\zeta(\gamma_3)}{c(\gamma_1-1)\zeta(\gamma_3+1) - (\gamma_2-1)\zeta(\gamma_3)} \times \\
&\quad \left(\frac{1}{x^{\gamma_1-1}} - \frac{1}{\left(x + \left(c - \frac{(\gamma_2-1)\zeta(\gamma_3)}{(\gamma_1-1)\zeta(\gamma_3+1)}\right)t\right)^{\gamma_1-1}} \right)\,,
\end{aligned}$$

uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Exemplo 3

Neste exemplo consideraremos um caso em que os custos de indenizações são v.a.'s em $\mathcal{C}$, mas não são v.a.'s em $\mathcal{R}$. Usaremos portanto a v.a. dada na Proposição 1.3 que prova que a inclusão de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{C}$ é própria. Suponha que os custos das indenizações individuais são cópias independentes de Z com distribuição dada por

$$Z = (1+U)2^M,$$

onde U e M são variáveis aleatórias independentes, U é uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$, e M é uma v.a. com distribuição Geométrica de parâmetro $1-\gamma_4$ com $\gamma_4 \in (0, \frac{1}{2})$, ou seja,

$$P(M=k) = (1-\gamma_4)\gamma_4^k\ , \quad \text{para } \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

A esperança da v.a. Z é dada por

$$\begin{aligned} \beta = EZ \ &= \ E(1+U)E(2^M) \\ &= \ \frac{3}{2}(1-\gamma_4)\sum_{k=0}^{\infty}(2\gamma_4)^k \\ &= \ \frac{3(1-\gamma_4)}{2(1-2\gamma_4)}\ , \end{aligned}$$

já que $0 < \gamma_4 < 1/2$.

Observe que

$$P(Z > x) = \overline{B}\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(U > 2^{-k}x - 1\right) P(M=k)$$

Como U é Uniforme no intervalo $(0,1)$, temos que

$$P(U > x2^{-k} - 1) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{se } k \geq \log_2 x \\ 2 - x2^{-k}, & se\ k \in (\log_2 x - 1\ ,\ \log_2 x) \\ 0 \quad , & \text{se } k \leq \log_2 x - 1 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\overline{B}\,(x) &= (1-\gamma_4)\sum_{k=0}^{\infty} P\left(U > 2^{-k}x - 1\right)\gamma_4^k \\
&= (1-\gamma_4)\left(\left(2 - x2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor}\right)\gamma_4^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + \sum_{k=\lfloor \log_2 x \rfloor + 1}^{\infty} \gamma_4^k\right) \\
&= (1-\gamma_4)\left(2 - x2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor}\right)\gamma_4^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + \gamma_4^{\lfloor \log_2 x \rfloor + 1}
\end{aligned}$$

Suponha que o tempo entre ocorrência de acidentes tenha distribuição Lognormal com parâmetros a e σ^2, ou seja,

$$F_\theta(x) = P(\theta \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left\{-\frac{(\log y - a)^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{dy}{y}\,,\ x \geq 0.$$

É conhecido que

$$E\theta^p = \exp\left\{ap + \frac{\sigma^2 p^2}{2}\right\} < \infty,$$

para todo $p \geq 0$. Portanto, não é necessário obter o índice superior de Matuszewska, $\mathbb{J}_B^+$, para aplicar o Teorema 2.2. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, sabemos que $\mathbb{J}_B^+$ é pelo menos finito. Além disso, temos que

$$\lambda = (E\theta)^{-1} = \exp\left\{-a - \frac{\sigma^2}{2}\right\}.$$

Suponha também que a quantidade de indenizações N tenha outra distribuição geométrica com parâmetro $\gamma_5 \in (0,1)$, então

$$\nu = EN = \frac{1}{1-\gamma_5}.$$

A função geradora de Momento da v.a. N é dada por

$$M_N(\varepsilon) = \frac{(1-\gamma_5)}{\gamma_5}\sum_{n=1}^{\infty}(e^\varepsilon\gamma_5)^n < \infty\,,\ \forall\,\varepsilon > 0\,,$$

pois $e^{\varepsilon}\gamma_5 < 1$, já que $\varepsilon > 0$ e $0 < \gamma_5 < 1$. Assim, F_N é de cauda leve e como B é de cauda pesada, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_N\,(x)}{\overline{B}\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_N\,(x)}{e^{-\varepsilon x}}\frac{e^{-\varepsilon x}}{\overline{B}\,(x)} = 0\,.$$

ou seja, $\overline{F}_N\,(x) = o(\overline{B}\,(x))$.

Supondo que

$$\mu = c\cdot\exp\left\{a+\frac{\sigma^2}{2}\right\} - \frac{3(1-\gamma_4)}{2(1-2\gamma_4)(1-\gamma_5)} > 0\,,$$

temos pelo Teorema 2.2 e pela Observação 2.1 que

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) \quad \sim \quad & \frac{1}{(1-\gamma_5)\mu}\int_x^{x+\mu\exp\{-a-\sigma^2/2\}t} \\ & \times\left((1-\gamma_4)\left(2-u2^{-\lfloor\log_2 u\rfloor}\right)\gamma_4^{\lfloor\log_2 u\rfloor} + \gamma_4^{\lfloor\log_2 u\rfloor+1}\right)du\,,\end{aligned}$$

uniformemente em $t \in [f(x),\infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Exemplo 4

Considere que o custo das indenizações Z tenha distribuição exponencial de parâmetro γ_6 e o tempo entre ocorrência de acidentes θ tenha distribuição Weibull com parâmetro γ_7, ou seja,

$$\overline{F}_\theta\,(x) = e^{-x^{\gamma_7}}\;,\quad x \geq 0\,,$$

onde $0 < \gamma_7 < 1$. Temos que $EZ = \frac{1}{\gamma_6}$ e observe que para todo $p > 0$,

$$E\theta^p = \int_0^\infty \gamma_7 x^p x^{\gamma_7-1}e^{-x^{\gamma_7}}dx = \int_0^\infty t^{\frac{p}{\gamma_7}}\cdot e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{p}{\gamma_7}+1\right)\;,$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ representa a função gama. Portanto $E\theta^p < \infty$, para todo $p > 0$.

Considere ainda que a quantidade de indenizações, N, tem função de distribuição com cauda

$$\overline{F}_N(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma_8+1}} \right\}^{-1} \cdot \sum_{n>x} \frac{1}{n^{\gamma_8+1}} = \frac{1}{\zeta(\gamma_8+1)} \cdot \sum_{n>x} \frac{1}{n^{\gamma_8+1}} \ ,$$

com $\gamma_8 > 2$ e como anteriormente, $\zeta(s)$ denota a função zeta de Riemann.

De maneira análoga ao Exemplo 2 temos que

$$\overline{F}_N(x) \sim \frac{1}{(\gamma_8-1)x^{\gamma_8-1}\zeta(\gamma_8)} \ , \tag{2.40}$$

basta substituir γ_3 por $\gamma_8 - 1$ na verificação de (2.38).

Sendo assim, para qualquer $y > 0$,

$$\frac{\overline{F}_N(xy)}{\overline{F}_N(x)} \sim \frac{(\gamma_8-1)x^{\gamma_8-1}\zeta(\gamma_8)}{(\gamma_8-1)(xy)^{\gamma_8-1}\zeta(\gamma_8)} = y^{-(\gamma_8-1)} \ .$$

Como $\gamma_8 > 2$, então $\gamma_8 - 1 > 0$ e, portanto F_N pertence à classe $\mathcal{R}$ com $\overline{F}_N \in R_{-(\gamma_8-1)}$. Portanto $F_N \in \mathcal{C}$.

Além disso, como F_N é de cauda pesada, pela definição temos que $\forall \varepsilon > 0$,

$$e^{-\varepsilon x} = o\left(\overline{F}_N(x)\right) \ .$$

Tomando $\varepsilon = \gamma_6$, obtém-se $\overline{B}(x) = o\left(\overline{F}_N(x)\right)$.

Do Teorema 2.3 e da Observação 2.1, supondo

$$\gamma_8 > 2, \quad \text{e} \quad \mu = c \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\gamma_7} + 1\right) - \frac{\zeta(\gamma_8-1)}{\gamma_6\zeta(\gamma_8)} > 0 \ ,$$

temos que

$$\Psi(x,t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{F}_N(u\gamma_6)\, du \ ,$$

uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Da relação (2.40) e da Proposição 1.1, temos que

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\sim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{F}_N\left(u\gamma_6\right) du \\
&= \frac{1}{\mu\gamma_6^{\gamma_8-1}(\gamma_8-1)\zeta(\gamma_8)}\int_x^{x+\mu\lambda t} u^{-\gamma_8+1} \\
&= \frac{1}{\mu\gamma_6^{\gamma_8-1}(\gamma_8-1)(\gamma_8-2)\zeta(\gamma_8)}\left(\frac{1}{x^{\gamma_8-2}} - \frac{1}{\left(x+\mu\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\gamma_7}+1\right)t\right)^{\gamma_8-2}}\right),
\end{aligned}
$$

uniformemente para $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Exemplo 5

Suponha que os custos das indenizações, Z, tem função de distribuição dada por

$$
B(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad \text{se } x < e^{\gamma_9} , \\ 1 - \dfrac{\log x}{x^{\gamma_9}} \quad , \quad \text{se } x \geq e^{\gamma_9} \end{cases}
$$

para alguma constante $\gamma_9 > 1$. Observe que B é de fato uma função de distribuição. Para $x \geq \gamma_9$, $B(x)$ é crescente. Além disso, B é contínua pela direita, possui um salto no ponto e^{γ_9} e

$$
\lim_{x\to\infty} B(x) = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\gamma_9}} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\gamma_9 x^{\gamma_9}} = 1 .
$$

Separando a distribuição de Z na parte discreta e contínua, obtemos que

$$
\beta = EZ = e^{\gamma_9} + \frac{1}{(\gamma_9-1)e^{\gamma_9(\gamma_9-1)}}\left(\gamma_9 + \frac{1}{\gamma_9-1}\right) .
$$

Observe ainda que $\forall y > 0$ fixo,

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{B}\left(xy\right)}{\overline{B}\left(x\right)} = \frac{\log x + \log y}{y^{\gamma_9 \log x}} = \frac{1}{y^{\gamma_9}} ,
$$

portanto B pertence à classe $\mathcal{R}$ com índice γ_9.

Defina a distribuição do tempo entre ocorrência de acidentes como sendo Pareto com parâmetro $\gamma_9 + 2$, ou seja,

$$\overline{F}_\theta\,(x) = \frac{1}{(1+x)^{\gamma_9+2}}, \quad x \geq 0\,.$$

Como vimos nos Exemplos anteriores, $\lambda = (E\theta)^{-1} = \gamma_9 + 1$. De maneira análoga, também temos que θ é uma v.a. em $\mathcal{R}$. Pela mesma justificativa do Exemplo 2, temos que $E\theta^p < \infty$ se, e somente se $p < \gamma_9 + 2$. Para utilizarmos o Teorema 2.4, basta que $E\theta^p < \infty$ para algum $p > \gamma_9 + 1$. Sendo assim, para todo $p \in (\gamma_9 + 1, \gamma_9 + 2)$ a hipótese do teorema é satisfeita.

Seja ainda a distribuição da quantidade de indenizações dada por

$$F_N(x) = \frac{1}{\zeta'(\gamma_9+1)} \sum_{2\leq n\leq x} \frac{\log n}{n^{\gamma_9+1}}\,,$$

onde $\zeta'(s) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$ denota a derivada da função zeta de Riemann. Como $P(N = n) = \frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)} \dfrac{\log n}{k^{\gamma_9}}$, então $\nu = EN = \dfrac{\zeta'(\gamma_9)}{\zeta'(\gamma_9+1)}$.

Novamente pela argumentação usada nos exemplos anteriores, temos que

$$\overline{F}_N\,(x) \sim \frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)} \frac{\log x}{x^{\gamma_9}} \sim \frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)} \overline{B}\,(x)\,\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_N\,(xy)}{\overline{F}_N\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)}\overline{B}\,(xy)}{\frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)}\overline{B}\,(x)} = y^{-\gamma_9}\,,$$

ou seja, F_N também pertence à classe $\mathcal{R}$.

Considerando $C = \frac{1}{\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)}$ e

$$\gamma_9 > 1, \quad \mu = \frac{c}{\gamma_9+1} - \frac{\zeta'(\gamma_9)}{\zeta'(\gamma_9+1)}\,,$$

aplicando então o Teorema 2.4 e considerando também a Observação 2.1, temos que

$$\Psi(x,t) \;\; \sim \;\; \frac{\nu + C\beta^{\gamma_9}}{\mu} \int_x^{x+\mu(\gamma_9-1)t} \frac{\log u}{u^{\gamma_9}} du$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_9\zeta'(\gamma_9)+\beta^{\gamma_9}}{\mu\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)}\int_x^{x+\mu(\gamma_9-1)t}\frac{\log u}{u^{\gamma_9}}du \\
&= \frac{\gamma_9\zeta'(\gamma_9)+\beta^{\gamma_9}}{(\gamma_9-1)\mu\gamma_9\zeta'(\gamma_9+1)}\times \\
&\quad \left(\frac{\log x}{x^{\gamma_9-1}}+\frac{1}{x^{\gamma_9-1}}-\frac{\log(x+\mu(\gamma_9-1)t)}{(x+\mu(\gamma_9-1)t)^{\gamma_9-1}}-\frac{1}{(x+\mu(\gamma_9-1)t)^{\gamma_9-1}}\right),
\end{aligned}
$$

uniformemente em $t \in [f(x), \infty)$, onde $f(x)$ é uma função estritamente crescente e não limitada.

Referências Bibliográficas

[1] Aleškevičienė, A. Leipus, R., Šiaulys, J.: Tail behaviour of random sums under consistent variation with applications to the compound renewal risk model. Extremes. **11**, 261-279 (2008)

[2] Asmussen, S.: Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore (2000)

[3] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, C.M.: Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[4] Cai, J., Tang, Q.: On max-type equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications. J. Appl. Probab. **41**, 117-130 (2004)

[5] Cline, D.B.H.: Intermediate regular and Π variation. Proc. London Math. Soc. **68**, 594-611 (1994)

[6] Cline, D.B.H., Samorodnitsky, G.: Subexponentiality of the product of independent random variables. Stochastic Process. Appl. **49**, 75-98 (1994)

[7] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T.: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin(1997)

[8] Embrechts, P., Omey, E.: A property of long tailed distributions. J. Appl. Probab. **21**, 80-87 (1984)

[9] Embrechts, P., Veraverbeke, N.: Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance Math. Econom. **1**, 55-72 (1982)

[10] Fäy, G., González-Arévalo, B., Mikosch, T., Samorodnitsky, G.: Modelling teletraffic arrivals by a Poison cluster process. Queueing Syst.: Theor. Appl. **54**, 121-140 (2006)

[11] Kiefer, J., Wolfwitz, J.: On the characteristics of the general queueing process, with applications to random walk. Ann. Math. Statist. **27**, 147-161 (1956)

[12] Leipus, R., Šiaulys, J.: Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability under subexpobential claim sizes. Insur.: Math. Econ. **40**, 498-508 (2007)

[13] Lundberg, F.: Försäkringsteknisk Riskutjämning. F. Englunds Boktryckeri AB, Stockholm (1926)

[14] Mikosch, T.: Non-life Insurance Mathematics. Springer-Verlag, New York (2004)

[15] Ng, K.W., Tang, Q.H., Yan, J.A., Yang, H.: Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails. J. Appl. Probab. **41** 93-107 (2004)

[16] Ng, K.W., Tang, Q.H., Yang, H.: Maxima of sums of a heavy-tailed random variables ASTIN Bulletin **32** 43-55 (2002)

[17] Robert, C.Y., Sergers, J.: Tails of random sums of a heavy-tailed number of light-tailed terms. Insur.: Math. Econ. **43** 85-92 (2007)

[18] Ross, S.: Stochastic Processes. John Wiley & Sons, Berkeley (1982)

[19] Santana, F.T.: Propriedades assintóticas de somas ponderadas de variáveis aleatórias com aplicação à teoria da ruína. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UnB, 2006

[20] Sparre Andersen, E.: On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. Transactiores XV th International Congress of Actuaries. New York, **II** 219-229 (1957)

[21] Stein, C.:A note on cumulative sums. Ann. Math. Statistics **17**, 498-499 (1946).

[22] Tang, Q.: Asymptotics for the finite time ruin probability in the renewal model with consistent variation. Stoch. Models **20**, 281-297 (2004a)

[23] Tang, Q.: Uniform estimates for the tail probability of maxima over finite horizons with subexponential tails. Probab. Engrg. Inform. Sci. **18**, 71-86 (2004b)

[24] Tang, Q., Su, C., Jiang, T., Zhang, J.: Large deviation for heavy-tailed random sums in compound renewal model. Stat. Probab. Lett. **52**, 91-100 (2001)

[25] Veraverbeke, N.: Asymptotic behaviour of Winer-Hopf factors of a random walk. Stochastic Process. Appl. **5**, 27-37 (1977)