

Nanderson Syrlon Pereira

*Dinâmica de Campos Térmicos Aplicada à  
Análise de Distribuições de Estados de Fock*

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, para obtenção do título de mestre em Física Teórica.

Orientador:

Prof.Dr. Ademir A. Santana

Co-orientador:

Prof.Dr.Viktor Dodonov

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

junho de 2006

Dissertação de Mestrado sob o título *Dinâmica de Campos Térmicos Aplicada à Análise de Distribuições de Estados de Fock*, defendida por Nanderson Syrlon Pereira e aprovada em junho de 2006, em Brasília , Distrito Federal, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

---

Prof. Dr. Ademir A. Santana  
Orientador

---

Prof. Dr.  
Universidade Federal da Bahia

---

Prof. Dr.  
Universidade de Brasília

---

Prof.Dr  
Coordenador da  
Pós-graduação-Universidade de Brasília

À minha mãe, *in memoriam*.

# *Agradecimentos*

Em especial ao professor Ademir Santana, cujos ensinamentos e sábios conselhos foram fundamentais nessa empreitada. Ao professor Viktor Dodonov pelas importantes discussões e colaborações. Extendo ainda este agradecimento a todos os professores que colaboraram para minha formação.

Aos amigos Chrystian, Fábio, Nelson, Pedro Ivo, Abraão, Ronni, Marcelo, André, Luciano Lapas, Erich, Álvaro, Mateus, Roberto, Ednardo, Wilian, Goiano, Adoniel, Ítalo, Pedro, que foram fundamentais nesse percurso.

Agradeço também às pessoas que, com seus trabalhos, sempre nos deram o necessário respaldo institucional, como as secretárias do Departamento de Física Célia, Salete, Amanda, e ao senhor Severino.

Por fim, porém não menos importante, sou grato a todas as pessoas cujas ações desenharam meus caminhos, permitindo que eu pudesse concretizar tal percurso: minhas irmãs, Nayhara e Nizamara, pelo amor, conselhos e apoio dados em todos os momentos de minha vida. À Marília pelo amor e compreensão. Aos meus amigos Heraldo e Aeder pelo companheirismo nesta jornada, às minhas tias Divina e Maria José que tão bem me acolhem e a meu tio Salvador pelos conselhos e incentivos.

*"A coisa mais bela e profunda que o ser humano pode vivenciar é o sentimento do misterioso. Ele está na base da religião e das aspirações mais profundas da arte e da ciência. Quem nunca vivenciou isso me parece morto ou cego. Sentir que, por trás do vivenciável, se esconde algo inacessível à nossa mente, algo cuja beleza e sublimidade só nos alcança de forma mediada e como um fraco reflexo: isso é religiosidade. Neste sentido, sou religioso. A mim, basta pressentir estes mistérios com espanto e tentar apreender com a mente e com toda humildade uma imagem pálida da estrutura sublime do ser."*

*Albert Einstein*

# *Resumo*

Utilizamos o formalismo da dinâmica de campos térmicos para introduzir o efeito de temperatura em estados de superposição do campo eletromagnético. Introduzimos e analisamos os efeitos térmicos na estatística dos estados de superposição compostos pelos estados coerentes e estados número. Adicionada a essa análise estatística, obtemos a distribuição de probabilidade térmica para a superposição de dois estados número, estados coerentes e superposição de estados coerentes e estados número. Além disso, mostramos como a prescrição da DCT apresenta-se prática na implementação das contrapartidas térmicas para os estados do campo eletromagnético quantizado.

# *Abstract*

We use the formalism of the thermal field dynamics (TFD) to introduce the effect of temperature in states of overlapping of the electromagnetic field. We introduce and analyze the thermal effect in the statistics of the states of overlapping formed for the coherent states and states number. Added to this analysis statistics, we get the distribution of thermal probability for the overlapping of two states number, states coherent and overlapping of states coherent and states number. Moreover, we show as the formalism of the TFD is presented practical in the implementation of the thermal counterparts for the states of the quantized electromagnetic field.

# *Sumário*

## Lista de Figuras

<b>Introdução</b>	p. 12
<b>1 Dinâmica de Campos Térmicos</b>	p. 15
1.1 Introdução ao formalismo . . . . .	p. 15
1.1.1 Oscilador Bosônico em DCT . . . . .	p. 17
1.1.2 Transformação de Bogoliubov . . . . .	p. 19
1.1.3 Operadores Térmicos . . . . .	p. 21
1.1.4 Oscilador Fermiônico em DCT . . . . .	p. 23
1.1.5 Operadores Térmicos . . . . .	p. 25
1.2 Relação entre o vácuo térmico e a Matriz Densidade . . . . .	p. 27
<b>2 Estados Coerentes</b>	p. 29
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	p. 29
2.2 Definição de Estados Coerentes . . . . .	p. 32
2.3 Propriedades dos Estados Coerentes . . . . .	p. 35
2.3.1 Ortogonalidade . . . . .	p. 35
2.3.2 Relação de Completeza . . . . .	p. 35
2.3.3 Relação de Incerteza . . . . .	p. 36
2.4 Fator de Mandel . . . . .	p. 38
2.5 Estados Coerentes Térmicos . . . . .	p. 38



<b>3</b>	<b>Superposição de Estados Coerentes e Estados Número</b>	p. 42
3.1	Preliminares . . . . .	p. 42
3.2	Superposição de Estados Coerentes e Estados Número . . . . .	p. 43
3.3	Efeitos de Temperatura no estado $ \alpha_n\rangle$ . . . . .	p. 44
3.3.1	Superposição $ \alpha\rangle +  0\rangle$ . . . . .	p. 49
3.3.2	Superposição $ \alpha\rangle +  1\rangle$ . . . . .	p. 51
3.3.3	Superposição $ \alpha\rangle +  2\rangle$ . . . . .	p. 54
<b>4</b>	<b>Distribuições de Probabilidades Térmicas</b>	p. 58
4.1	Superposição de Dois Estados Número . . . . .	p. 58
4.1.1	Superposição $ 1\rangle +  0\rangle$ . . . . .	p. 61
4.1.2	Superposição $ 1\rangle +  2\rangle$ . . . . .	p. 62
4.2	Distribuição de Probabilidade Térmica dos Estados Coerentes . . . . .	p. 64
4.3	Distribuição de Probabilidades Térmicas para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$ . . . . .	p. 67
4.3.1	Distribuição de probabilidade para o estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ . . . . .	p. 69
4.3.2	Distribuição de probabilidade para o estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ . . . . .	p. 71
4.3.3	Distribuição de probabilidade para o estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ . . . . .	p. 72
<b>5</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	p. 74
	<b>Apêndice A</b>	p. 75
	<b>Referências</b>	p. 77

# *Lista de Figuras*

1	Fator de Mandel para diferentes amplitudes e para $n = 2$ à temperatura nula. . . . .	p. 44
2	Fator de Mandel do estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ com $C = 0.61$ , $D = 0.5$ , $\alpha = 1$ . . . . .	p. 50
3	Fator de Mandel do estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $D = 0.5$ e $\alpha = 2, 3, 4, 5$ . . . . .	p. 51
4	Fator de Mandel do estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para diferentes amplitudes e $\alpha = 2$ . . . . .	p. 51
5	Fator de Mandel do estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $E = 0.61$ , $G = 0.5$ e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 52
6	Fator de Mandel do estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $G = 0.5$ e $\alpha = 2, 3, 4, 5$ . . . . .	p. 53
7	Fator de Mandel do estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para diferentes amplitudes e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 54
8	Fator de Mandel do estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para diferentes amplitudes e $\alpha = 2$ . . . . .	p. 54
9	Fator de Mandel do estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $Y = 0.68$ , $W = 0.5$ e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 55
10	Fator de Mandel do estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $Y = 0.66$ , $W = 0.5$ e $\alpha = 2$ . . . . .	p. 56
11	Fator de Mandel do estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para $W = 0.5$ e $\alpha = 3, 4, 5$ . . . . .	p. 56
12	Fator de Mandel do estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para diferentes amplitudes e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 57

13	Fator de Mandel do estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ em função da temperatura $x = v^2(\beta)$ para diferentes amplitudes e $\alpha = 2$ . . . . .	p. 57
14	Distribuição de probabilidade térmica para superposição $\frac{\sqrt{2}}{2} 1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} 0\rangle$ . . . . .	p. 62
15	Distribuição de probabilidade térmica para superposição $\frac{\sqrt{2}}{2} 1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} 2\rangle$ . . . . .	p. 63
16	Distribuição de probabilidade térmica para superposição $\frac{\sqrt{2}}{2} 1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} 2\rangle$ . . . . .	p. 64
17	Distribuição de probabilidade térmica $P_1(\alpha; \beta)$ para o estado coerente. . . . .	p. 67
18	Distribuição de probabilidade térmica $P_p(\alpha; \beta)$ para o estado coerente com $\alpha = 1$ . . . . .	p. 67
19	Distribuição de probabilidade térmica $P_1(\alpha, 0; \beta)$ para o estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ com $A'=B'=1$ . . . . .	p. 70
20	Distribuição de probabilidade térmica $P_r(\alpha, 0; \beta)$ para o estado $ \alpha_0(\beta)\rangle$ com $A' = B' = 1$ e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 70
21	Distribuição de probabilidade térmica $P_r(\alpha, 1; \beta)$ , para o estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ com $A'=B'=1$ . . . . .	p. 71
22	Distribuição de probabilidade térmica $P_r(\alpha, 1; \beta)$ para o estado $ \alpha_1(\beta)\rangle$ com $A'=B'=1$ e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 72
23	Distribuição de probabilidade térmica $P_r(\alpha, 2; \beta)$ para o estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ com $A'=B'=1$ . . . . .	p. 73
24	Distribuição de probabilidade térmica $P_r(\alpha, 2; \beta)$ para o estado $ \alpha_2(\beta)\rangle$ com $A'=B'=1$ e $\alpha = 1$ . . . . .	p. 73

# *Introdução*

Os efeitos de flutuações quânticas e térmicas desempenham um papel crucial em diversas situações de interesse experimental e teórico. O conceito de "térmico" originalmente esteve relacionado intrinsecamente à natureza macroscópica. No entanto, desenvolvimentos recentes em teoria quântica de campos têm diminuído a diferença entre o mundo macroscópico e microscópico [1, 2]. Assim, os efeitos térmicos são agora estudados no contexto da física fundamental, em particular em física de altas energias e cosmologia, motivando o desenvolvimento da teoria de campos à temperatura finita [3]. Neste contexto, primeiramente, surge o formalismo do tempo imaginário de Matsubara [6]. O método explora a relação formal existente entre o operador de evolução temporal,  $e^{-iHt}$ , e o fator de Boltzmann da mecânica estatística,  $e^{-\beta H}$ , quando o parâmetro tempo é continuado analiticamente para o eixo imaginário. A eliminação do tempo torna o formalismo de Matsubara intrinsecamente apropriado ao estudo de fenômenos de equilíbrio.

A necessidade de se estudar sistemas fora do equilíbrio, onde o tempo real é essencial, foi uma das razões que motivaram a formulação de teorias com tempo real. O mais antigo deles, introduzido por Schwinger no contexto de integrais de trajetória, é conhecido como trajetória temporal fechada [37]. Outro mais recente foi desenvolvido em 1975 por Takahashi e Umezawa, conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) [1–4]. Este formalismo foi elaborado a partir da noção de espaços vetoriais, mas é ainda equivalente ao formalismo de Matsubara de tempo imaginário. Contudo, a DCT se diferencia de outros métodos de termalização por descrever a física estatística de campos e partículas a partir de espaços de Hilbert. Este último é construído a partir de dois ingredientes: (i) uma duplicação nos graus de liberdade do sistema original com regras algébricas física e matematicamente bem definidas, as chamadas regras de conjugação dual(ou til). Dessa duplicação, todo estado  $|n\rangle$  no espaço de Hilbert  $H$  tem um correspondente estado  $|\tilde{n}\rangle$  em  $\tilde{H}$ . Uma regra similar é satisfeita pelos operadores: todo operador  $A$  agindo em  $H$  tem um operador imagem  $\tilde{A}$  agindo em  $\tilde{H}$ , e (ii) transformações canônicas do tipo Bogoliubov introduzindo variáveis térmicas.

O cálculo da média de um operador  $A$  em DCT é escrito como uma forma bilinear de

maneira a coincidir com a média canônica da mecânica estatística, ou seja

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \text{Tr}\{A\rho\},$$

onde o estado de vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$  é um vetor definido no espaço de Hilbert duplicado com as regras de conjugação dual. Este vácuo térmico é obtido a partir da aplicação de uma transformação unitária  $U(\beta)$  no vácuo duplicado  $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ , conhecida como transformação de Bogoliubov [9].

Um dos mais interessantes aspectos da DCT é a possibilidade de se estudar o efeito de temperatura a partir de uma teoria de representação de elementos algébricos. E por essas características, tem sido aplicada com pleno sucesso no estudo de diversas propriedades de estados com muitos fótons, incluindo estados coerentes e comprimidos, dentre outros [5, 7, 9].

Estados coerentes foram introduzidos por Schrödinger em 1926 em conexão com o movimento harmônico simples de uma partícula na mecânica quântica. Entretanto, o reconhecimento da importância desses estados se deu a partir de 1963, com os trabalhos de Glauber [10–12], onde o laser é descrito por uma teoria puramente quântica utilizando a noção de coerência da radiação eletromagnética. Um estado coerente é definido a partir dos operadores de criação e destruição que descrevem os modos do campo eletromagnético. Considerando um modo apenas, este estado pode ser definido como:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \tag{1}$$

onde

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a],$$

onde  $a^\dagger$  e  $a$  são os operadores de criação e destruição de fótons no modo, respectivamente. De um ponto de vista formal, este resultado é similar ao esquema da DCT, onde no caso de um modo, a transformação de Bogoliubov é dada por

$$U(\beta) = \exp[-\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)]. \tag{2}$$

Esta similaridade teórica é o que torna atraente o uso da DCT presente contexto. Este interesse tem apresentado trabalhos consagrados na literatura como os desenvolvimentos de Barnett e Knight [21], que mostram a praticidade da Dinâmica de Campos Térmicos

aplicada em óptica quântica. Os trabalhos de Mann e Revzen [5] introduziram a noção de estados coerentes térmicos e analisaram o conceito de incerteza térmica. No entanto, esses estudos, apresentando forte interesse experimental e teórico, não foram ainda conduzidos em toda sua plenitude e diversos aspectos do efeito de temperatura permanecem sem análise apropriada. Nessa perspectiva, atentamo-nos para o uso a DCT estados de interesse, tanto prático como teórico, em particular em estados de superposição do campo eletromagnético quantizado, como por exemplo: superposição de estados número, superposição de estados coerentes [38] e estados número. Como um dos intuitos deste trabalho, faremos um estudo da termalização destes estados, sustentados no formalismo da DCT. Isso inclui a definição de cada estado termalizado, a caracterização explícita da dependência da distribuição de probabilidade de fótons com a temperatura, e a análise estatística dos mesmos através do fator de Mandel [31].

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 será apresentada uma revisão da DCT, onde definimos as primeiras noções que serão importantes para nossos propósitos posteriores. No capítulo 2, realizamos a quantização do campo eletromagnético e introduziremos os estados coerentes, bem como algumas de suas propriedades. Por fim, introduzimos o fator de Mandel e os estados coerentes térmicos, baseados na referência [21]. No capítulo 3 analisaremos o estado de superposição entre o estado coerente e o estado número. Esta análise será realizada inicialmente a temperatura nula, posteriormente inseriremos as variáveis térmicas via DCT e investigaremos a estatística desses estados através do fator de Mandel, o que ainda não foi discutido na literatura. No capítulo 4 encontraremos a distribuição de probabilidade térmica de fótons na superposição de dois estados número e para os estados propostos no capítulo 3. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos as conclusões e perspectivas e as referências bibliográficas.

# 1 *Dinâmica de Campos Térmicos*

Existem diversos formalismos para se introduzir temperatura em teorias de campos. Aqui, em particular, apresentaremos o formalismo desenvolvido inicialmente por Umezawa e Takahashi [4,9,14] conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), que consiste basicamente na construção de uma dinâmica para campos termalizados, na qual o vácuo depende da temperatura de tal forma que o valor esperado de uma variável dinâmica é a sua média estatística no ensemble canônico.

## 1.1 Introdução ao formalismo

Em mecânica estatística do equilíbrio, a média de um observável  $A$  no ensemble canônico é definido como

$$\langle A \rangle = Z(\beta)^{-1} \text{Tr} \{ e^{-\beta H} A \}, \quad (1.1)$$

onde  $\text{Tr}$  indica o traço,  $H$  o hamiltoniano do sistema e  $Z(\beta)$  a função partição, dada por

$$Z(\beta) = \text{Tr} \{ e^{-\beta H} \}, \quad (1.2)$$

com  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. Usando como base os autoestados  $|n\rangle$  de  $H$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (1.3)$$

com  $\langle n|m\rangle = \delta_{mn}$ , temos que

$$\langle A \rangle = Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \quad (1.4)$$

A proposta essencial da DCT é substituir a média estatística de um operador  $A$  pelo valor esperado deste operador num estado térmico  $|0(\beta)\rangle$  definido sobre um espaço de

Hilbert devidamente construído. Assim sendo,

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = Z(\beta)^{-1} \sum_n^{\infty} e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle. \quad (1.5)$$

Escrevendo  $|0(\beta)\rangle$  na base número

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta) |n\rangle, \quad (1.6)$$

temos

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle. \quad (1.7)$$

De (1.7) e (1.5) obtemos,

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z(\beta)^{-1} e^{-\beta E_n} \delta_{mn}. \quad (1.8)$$

No entanto, a relação (1.8) não pode ser satisfeita, pois sabemos que  $f_n(\beta)$  são números. Contudo, esta relação assemelha-se a uma relação de ortogonalidade. Dessa forma, se introduzirmos outro sistema idêntico através da duplicação do espaço de Hilbert original, poderemos satisfazer a equação (1.8). Para fazer isso, realizamos o produto direto do espaço original e um sistema fictício idêntico, chamado sistema til, de tal forma que a média estatística seja satisfeita.

A caracterização do sistema dual (til) será descrita através das seguintes relações [4, 14]:

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\ (c A_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\ (A_i^\dagger)^\sim &= \tilde{A}_i^\dagger, \\ (\tilde{A}_i)^\sim &= A_i. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Estas propriedades são chamadas de regras de conjugação til. O sistema dual é descrito pelo Hamiltoniano  $\tilde{H}$  e seus autoestados  $|\tilde{n}\rangle$ ,

$$\tilde{H} |\tilde{n}\rangle = E_n |\tilde{n}\rangle \quad (1.10)$$

e  $\langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta_{mn}$ , onde os autovalores  $E_n$  são, por definição, iguais aos da relação (1.3).



O estado  $|0(\beta)\rangle$ , torna-se

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle, \quad (1.11)$$

onde  $|n, \tilde{n}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$ . Temos assim que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle \tilde{n}, n | A | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle \delta_{mn} \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | A | n \rangle, \end{aligned} \quad (1.12)$$

e conseqüentemente

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = Z(\beta)^{-1} e^{-\beta E_n}, \quad (1.13)$$

que tem como solução

$$f_n(\beta) = Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta E_n/2}. \quad (1.14)$$

Desta maneira,  $|0(\beta)\rangle$  assume a seguinte forma

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (1.15)$$

O estado  $|0(\beta)\rangle$  é então definido no espaço de Hilbert duplicado.

Nas próximas seções, construiremos  $|0(\beta)\rangle$  para situações particulares.

### 1.1.1 Oscilador Bosônico em DCT

Vamos agora detalhar o formalismo da DCT através de um exemplo simples. Consideremos o sistema descrito pelo Hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (1.16)$$

onde  $a$  e  $a^\dagger$  são os operadores de destruição e criação respectivamente. Vamos considerar por enquanto  $\hbar = 1$ . Estes operadores satisfazem a seguinte álgebra,

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (1.17)$$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0. \quad (1.18)$$

Os autoestados e os autovalores de  $H$  são definidos por

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle, \quad (1.19)$$

e

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.20)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.21)$$

$$a|0\rangle = 0, \quad (1.22)$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (1.23)$$

onde  $|0\rangle$  é definido como sendo o estado de menor energia possível. O operador número  $N$  é definido por

$$N = a^\dagger a,$$

e satisfaz a equação de autovalor

$$N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Os autovalores de  $N$ , os inteiros não-negativos determinam os níveis energia do oscilador, com autovalores  $n\omega$ . No caso do campo eletromagnético,  $|n\rangle$  representa um estado com  $n$  fótons em um modo específico.

No sentido de construir o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos para tal sistema, devemos realizar uma duplicação dos graus de liberdade seguindo as regras de conjugação dual, isto é, os operadores  $\tilde{a}^\dagger$  e  $\tilde{a}$  devem ser introduzidos. Assim,

$$\tilde{H} = \omega\tilde{a}^\dagger\tilde{a}, \quad (1.24)$$

onde os operadores  $\tilde{a}$  e  $\tilde{a}^\dagger$  satisfazem as seguintes regras

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (1.25)$$

$$[\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (1.26)$$

Assumimos ainda que todas as variáveis complementares do sistema real (sem til) comutam com as variáveis do sistema fictício, ou seja,

$$[a, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = 0.$$

O estado térmico  $|0(\beta)\rangle$  é obtido da seguinte forma

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n/2} |n, \tilde{n}\rangle \quad (1.27)$$

$$= Z(\beta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n/2} \frac{(a^\dagger)^n}{(n!)^{1/2}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{(\tilde{n}!)^{1/2}} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.28)$$

A função de partição para este sistema é obtida exigindo a ortonormalização do estado  $|0(\beta)\rangle$

$$\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1} \sum_{n,m} \langle \tilde{m}, m | e^{-\beta\omega(n+m)/2} |n, \tilde{n}\rangle \quad (1.29)$$

$$= Z(\beta)^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta\omega(n+m)/2} \delta_{nm} \delta_{mn} \quad (1.30)$$

$$= Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta\omega n}. \quad (1.31)$$

Com auxílio da condição de normalização,  $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ , e a expansão da série geométrica  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , encontramos,

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \quad (1.32)$$

A expressão para  $|0(\beta)\rangle$  torna-se finalmente

$$|0(\beta)\rangle = (1 - e^{-\beta\omega})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\omega n/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.33)$$

Observamos que muitos cálculos podem ser simplificados se a equação (1.33) for escrita como uma transformação unitária, na forma  $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$ , onde  $U(\beta)$  é um operador unitário. Na próxima sub-seção veremos como isso pode ser realizado.

### 1.1.2 Transformação de Bogoliubov

Mostraremos agora que o estado de vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$  pode ser obtido do estado de vácuo duplicado  $|0, \tilde{0}\rangle$  em  $T = 0$  por uma transformação unitária, conhecida como transformação de Bogoliubov. Nesse sentido, observamos que a soma na expressão (1.33) é a expansão da expressão

$$|0(\beta)\rangle = (1 - e^{-\beta\omega})^{1/2} \exp(e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.34)$$

Este resultado pode ser expresso através de uma única exponencial, tal como um operador unitário. Para isso, definimos as funções hiperbólicas

$$\cosh \theta(\beta) = u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}, \quad (1.35)$$

$$\sinh \theta(\beta) = v(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}. \quad (1.36)$$

De acordo com as relações (1.35) e (1.36) a expressão (1.34) pode ser escrita como

$$|0(\beta)\rangle = \cosh^{-1} \theta(\beta) e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.37)$$

que pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1} \theta(\beta))} e^{-\ln(\cosh \theta(\beta)) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh(\theta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln(\cosh \theta(\beta))} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a}^\dagger \tilde{a})} e^{-\ln(\cosh \theta(\beta)) a^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a + 1)} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta(\beta) (-\tilde{a} a)} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde usamos a relação de comutação

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1,$$

e

$$|0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = e^{f(\theta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle,$$

em que  $f(\theta)$  é uma função arbitrária de  $\theta$ . Usando a identidade

$$e^{\tau(A+B)} = e^{\tanh(\tau)B} e^{\ln \cosh(\tau)C} e^{\tanh(\tau)A}, \quad (1.39)$$

e fazendo as identificações:

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a} a \\ B &= a^\dagger \tilde{a}^\dagger \\ C &= [A, B] = -\tilde{a} \tilde{a}^\dagger - a^\dagger a \\ \tau &= \theta(\beta), \end{aligned}$$

podemos escrever a equação (1.37) como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.40)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (1.41)$$

A transformação  $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$  é denominada transformação de Bogoliubov e transforma o vácuo duplicado não-térmico no estado térmico  $|0(\beta)\rangle$ , no sentido da equação

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.42)$$

### 1.1.3 Operadores Térmicos

Usando  $U(\beta)$  definimos os seguintes operadores térmicos

$$a(\beta) = U(\beta)aU(\beta)^\dagger, \quad (1.43)$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U(\beta)^\dagger, \quad (1.44)$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^\dagger, \quad (1.45)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger. \quad (1.46)$$

Usando a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!} [B[B, A]] + \dots \quad (1.47)$$

e as relações de comutação

$$[G, a] = -i\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger,$$

$$[G, \tilde{a}] = -i\theta(\beta)a^\dagger,$$

$$[G, a^\dagger] = -i\theta(\beta)\tilde{a},$$

$$[G, \tilde{a}^\dagger] = -i\theta(\beta)a,$$

obtemos

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta)aU(\beta)^\dagger \\ &= a - \frac{i}{1!} [G, a] + \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, a]] - \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, a]]] + \frac{(i)^4}{4!} [G, [G, [G, [G, a]]]] + \dots \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}(\beta)}{(2n)!} \right) a - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}^\dagger \\ &= \cosh \theta(\beta)a - \sinh \theta(\beta)\tilde{a}^\dagger \\ &= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \end{aligned} \quad (1.48)$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^\dagger \\
&= \tilde{a} - \frac{i}{1!} [G, \tilde{a}] + \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, \tilde{a}]] - \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, \tilde{a}]]] + \frac{(i)^4}{4!} [G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]] + \dots \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}(\beta)}{(2n)!} \right) \tilde{a} - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}^\dagger \\
&= \cosh \theta(\beta) \tilde{a} - \sinh \theta(\beta) a^\dagger \\
&= u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

e as respectivas relações para  $a^\dagger(\beta)$  e  $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ :

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a},$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta) \tilde{a}^\dagger - v(\beta) a.$$

Em suma, os operadores térmicos são escritos como

$$a(\beta) = u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger, \tag{1.51}$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^\dagger, \tag{1.52}$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a}, \tag{1.53}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta) \tilde{a}^\dagger - v(\beta) a, \tag{1.54}$$

onde  $u(\beta)$  e  $v(\beta)$  são dados pelas expressões (1.35) e (1.36) respectivamente.

Como a transformação de Bogoliubov é unitária, os operadores térmicos satisfazem as seguintes regras de comutação

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = 1, \tag{1.55}$$

$$[\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1, \tag{1.56}$$

com todas as outras relações de comutação sendo nulas.

O operador aniquilação transformado  $a(\beta)$  destrói estado térmico  $|O(\beta)\rangle$ ,

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \tag{1.57}$$

De forma similar

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \tag{1.58}$$

Nesse sentido  $|0(\beta)\rangle$  é um estado de vácuo puro para os operadores térmicos e um estado térmico para os operadores não-térmicos.

Os operadores não-térmicos são obtidos em função dos térmicos invertendo as equações (1.51-1.54),

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.59)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (1.60)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (1.61)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (1.62)$$

Podemos agora obter o valor médio do operador número  $N = a^\dagger a$  com ajuda de (1.59) e (1.61):

$$\langle N \rangle = \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)][u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

que é a distribuição de Max Planck, como esperado.

#### 1.1.4 Oscilador Fermiônico em DCT

Um oscilador fermiônico é um sistema definido pelo seguinte Hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (1.65)$$

onde os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  satisfazem a seguinte álgebra

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad (1.66)$$

$$\{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, a\} = 0, \quad (1.67)$$

onde  $\{A, B\} = AB + BA$  é o anti-comutador. Analogamente ao caso bosônico tomamos

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (1.68)$$

com  $N = a^\dagger a$ . Usando as equações (1.66) e (1.67) e o fato de  $\langle n|n\rangle = 1$ , podemos mostrar que  $n=0,1$ . Da mesma forma temos que,  $a|0\rangle = 0$ ,  $a|1\rangle = |0\rangle$ ,  $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ ,  $a^\dagger|1\rangle = 0$ . Assim, o espaço de Hilbert é composto somente por dois vetores :  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

A equação de autovalor para o hamiltoniano do sistema resulta em

$$H|0\rangle = 0,$$

$$H|1\rangle = \omega|1\rangle.$$

Agora, para construirmos a DCT deste sistema, realizamos a duplicação dos graus de liberdade introduzindo os operadores til, satisfazendo à mesma álgebra que os operadores originais

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1, \quad (1.69)$$

$$\{a, \tilde{a}^\dagger\} = \{a, \tilde{a}\} = 0. \quad (1.70)$$

Portanto,

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \quad (1.71)$$

$$= Z(\beta)^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.72)$$

Da condição de normalização do estado  $|0(\beta)\rangle$  resulta que

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}. \quad (1.73)$$

Assim,

$$|0(\beta)\rangle = (1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.74)$$

De forma semelhante ao caso anterior, o estado  $|0(\beta)\rangle$  pode ser obtido do vácuo duplicado através da transformação de Bogoliubov  $U(\beta)$  isto é

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{-iG(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.75)$$

com

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger).$$

De fato, expandido a exponencial, a relação (1.75) pode ser reescrita como

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [-i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)]^m |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.76)$$

Usando as relações (1.66-1.70) e as identidades  $(\tilde{a}^\dagger)^m |0, \tilde{0}\rangle = (a^\dagger)^m |0, \tilde{0}\rangle = 0$  para  $m > 1$ ,



os termos da expansão em (1.76) resultaram nas seguintes relações

$$(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2m} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^m |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.77)$$

$$(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2m+1} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^{m+1} \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.78)$$

Logo, o estado  $|0(\beta)\rangle$  é dado por

$$|0(\beta)\rangle = \{\cos \theta(\beta) + \sin \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger\} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.79)$$

onde

$$\cos \theta(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2} = u(\beta), \quad (1.80)$$

$$\sin \theta(\beta) = (1 + e^{\beta\omega})^{1/2} = v(\beta), \quad (1.81)$$

a relação (1.79) resulta na expressão (1.74).

### 1.1.5 Operadores Térmicos

Intrduzimos os operadores térmicos através da transformação de Bogoliubov,

$$a(\beta) = U(\beta)aU(\beta)^\dagger, \quad (1.82)$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U(\beta)^\dagger, \quad (1.83)$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^\dagger, \quad (1.84)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger. \quad (1.85)$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado para o oscilador bosônico, mostraremos como expressar os operadores térmicos em termos das funções  $u(\beta)$  e  $v(\beta)$  definidas na subseção acima (1.80-1.81). Assim, para o operador térmico  $a(\beta)$  temos

$$a(\beta) = e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)}. \quad (1.86)$$

Usando a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B[B, A]] + \dots,$$

fazendo  $A = a$ ,  $B = G$  e utilizando as relações de comutação

$$\begin{aligned} [G, a] &= -i\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger, \\ [G, \tilde{a}^\dagger] &= i\theta(\beta)a, \end{aligned}$$

obtemos

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (1.87)$$

onde  $u(\beta)$  e  $v(\beta)$  são dados pelas equações (1.80) e (1.81).

Usando as regras de conjugação til para férmions e seus respectivos conjugados hermitianos podemos obter da relação (1.87) as seguintes igualdades

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger, \quad (1.88)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \quad (1.89)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a. \quad (1.90)$$

As transformações inversas são dadas por

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.91)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) - v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (1.92)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (1.93)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta)a(\beta). \quad (1.94)$$

Procedendo de maneira semelhante ao caso bosônico, obtemos o valor médio do operador número  $N = a^\dagger a$ :

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] \\ &\quad [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta), \end{aligned} \quad (1.95)$$

e usando a equação (1.81):

$$\langle N \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}}, \quad (1.96)$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac para potencial químico nulo ( $\mu = 0$ ).

## 1.2 Relação entre o vácuo térmico e a Matriz Densidade

A relação entre o estado  $|0(\beta)\rangle$  e a matriz densidade é obtida a partir da definição do vácuo térmico:

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta H/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} e^{-\beta H/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \rho^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n, \tilde{n}\rangle
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

onde a matriz densidade é dada por

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}. \tag{1.98}$$

Definindo  $|I\rangle = \sum_n |n, \tilde{n}\rangle$ , escrevemos

$$|0(\beta)\rangle = \rho^{1/2} |I\rangle.$$

A média de um operador  $A$  é então dada por

$$\begin{aligned}
 \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \langle I | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | I \rangle \\
 &= \sum_{m,n} \langle m, \tilde{m} | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | n, \tilde{n} \rangle \\
 &= \sum_{m,n} \langle m | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | n \rangle \delta_{n,m} \\
 &= \sum_m \langle m | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | m \rangle \\
 &= \text{Tr} \{ \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} \} \\
 &= \text{Tr} \{ \rho A \},
 \end{aligned}$$

com  $\rho = \rho^{\dagger 1/2} \rho^{1/2}$ .

Um outro resultado importante é o cálculo da distribuição de probabilidade, dada por  $|\langle \tilde{m}, m | 0(\beta) \rangle|^2$ . Calculando sua amplitude, temos

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{m}, m | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} e^{-\beta E_m/2}.
 \end{aligned}$$

A probabilidade é desse modo dada por

$$P_n = |\langle \tilde{m}, m | 0(\beta) \rangle|^2 = \frac{e^{-\beta E_m}}{Z(\beta)}.$$

Esse resultados serão generalizados no capítulo 3.

## 2 *Estados Coerentes*

Neste capítulo iremos realizar por completude uma breve revisão de estados do campo eletromagnético. Primeiro, introduziremos a quantização canônica. Posteriormente, apresentaremos os estados coerentes e estudaremos os efeitos de temperatura associado à coerência utilizando a abordagem da Dinâmica de Campos Térmicos. Esta revisão é baseada nas referências [8, 18] e [32].

### 2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Em um cavidade refletora podem existir infinitos modos normais de vibração das ondas estacionárias e o campo eletromagnético pode ser expandido em termos desses modos. Utilizando as equações de Maxwell pode-se mostrar que cada termo da expansão obedece às equações diferenciais de osciladores harmônicos, cada um vibrando com a mesma frequência do modo normal da cavidade.

Na ausência de fontes, o campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell dadas por [34]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

com  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade elétrica do vácuo e a permeabilidade magnética no vácuo. O campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  pode ser escrito em termos do potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) em (2.2) obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0, \quad (2.6)$$

o que implica que  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  é o gradiente de uma função, que denotamos por  $-V$ . Dessa forma temos que

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

onde  $V$  é o potencial elétrico. Dessa forma, as equações são invariantes por transformações de calibre, definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' + \nabla \xi \\ \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V}' = V - \frac{\partial \xi}{\partial t}. \end{aligned}$$

A forma do potencial vetor  $\mathbf{A}$  e escalar  $V$  envolve então um grau de arbitrariedade, ligado à escolha de calibre. Em particular, é sempre possível escolher o potencial vetor  $\mathbf{A}$  de modo que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (calibre de Coulomb). Na ausência de cargas  $V = 0$ , temos que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.4) encontramos que o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  satisfaz a uma equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

É conveniente primeiramente discretizar os modos de propagação do campo, inserindo-o numa cavidade cúbica de aresta  $L$  e tomando condições de contorno periódicas. Ao final dos cálculos fazemos  $L \rightarrow \infty$ , caracterizando o campo livre. A expansão em série de Fourier do campo será realizada em termos de um conjunto discreto de funções, os modos normais, ortogonais  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ , isto é

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{|\omega_k| \epsilon_0} \right) c_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

onde os  $c_k$  são coeficientes que se tornarão operadores quando o campo for quantizado, satisfazendo regras de comutação específicas.

Substituindo a equação (2.9) em (2.8) verifica-se que cada modo  $k$  satisfaz as equações

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \pm \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 c_k(t)}{\partial t^2} = \pm \omega_k^2 c_k(t), \quad (2.11)$$

com  $\omega_k$  representando a frequência de cada modo do campo eletromagnético. O sinal + nas equações (2.10) e (2.11) é eliminado, pois as condições de contorno exigem que o campo eletromagnético seja limitado (a solução das equações com sinal + divergem). Na equação (2.11),  $c_k(t)$  tem a forma

$$c_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t}. \quad (2.12)$$

Por sua vez, as soluções da equação (2.10) têm a forma

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = L^{3/2} \zeta e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.13)$$

em que o termo  $\zeta$  é o vetor polarização.

Pode-se verificar da equação (2.13) que  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{-k}^*(\mathbf{r})$ , e que estas funções formam um conjunto completo, ou seja,

$$\oint_V \mathbf{u}_{-k}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}'_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'}, \quad (2.14)$$

onde  $V$  é a região no interior da cavidade. Substituindo a expressão (2.12) na equação (2.9) obtém-se,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{|\omega_k| \epsilon_0} \right) [\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) a_k e^{-i\omega_k t} + b_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}]. \quad (2.15)$$

Como  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  é real temos  $a_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) = b_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{|\omega_k| \epsilon_0} \right) [\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}]. \quad (2.16)$$

Utilizando essa expressão na equação (2.5) e na expressão (2.7), encontramos

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{|\omega_k| \epsilon_0} \right)^{1/2} i\omega_k [-a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}] \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{|\omega_k| \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \nabla \times \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^* \nabla \times \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}]. \quad (2.18)$$

A quantização do campo é feita substituindo  $a_k$  e  $a_k^*$  por operadores mutuamente adjuntos  $a_k$  e  $a_k^\dagger$ . Uma vez que fótons são bósons, as relações de comutação apropriadas

para tais operadores são dadas por

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad (2.19)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (2.20)$$

O Hamiltoniano do campo eletromagnético é dado por

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d\mathbf{r}. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.17) e usando (2.18) na forma quantizada, temos

$$H = \sum_k^\infty \hbar |\omega_k| \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.22)$$

Portanto, o campo eletromagnético é equivalente a um conjunto de osciladores harmônicos independentes.

## 2.2 Definição de Estados Coerentes

Introduzido por Glauber [10–12] e Sudarshan [13], os estados coerentes possuem o número de fótons indefinido, mas, uma fase razoavelmente definida. Estes estados são definidos como auto-estados do operador de aniquilação de fótons, isto é

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.23)$$

Fazendo uma expansão do estado  $|\alpha\rangle$  na base número  $|n\rangle$ , tem-se

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde

$$c_n(\alpha) = \langle n|\alpha\rangle. \quad (2.25)$$

Substituindo a relação (2.24) na (2.23) encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) |n\rangle, \quad (2.26)$$



e multiplicando ambos os lados de (2.26) por  $\langle m|$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} \langle m|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) \langle m|n\rangle. \quad (2.27)$$

Usando a condição de ortonormalidade dos estados número, obtemos

$$c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n(\alpha), \quad (2.28)$$

de onde temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0(\alpha), \\ c_2(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1(\alpha), \\ c_3(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2(\alpha), \end{aligned}$$

e assim por diante. Conclui-se que

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha). \quad (2.29)$$

A equação (2.24) pode ser escrita como

$$|\alpha\rangle = c_0(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.30)$$

O coeficiente  $c_0(\alpha)$  pode ser obtido pela condição de normalização do estado  $|\alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\alpha\rangle &= |c_0(\alpha)|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m} \alpha^n}{m!n!} \langle m|n\rangle \\ &= |c_0(\alpha)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \\ &= |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

o que nos dá

$$c_0(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (2.32)$$

A equação (2.29) é reescrita como

$$c_n(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (2.33)$$

e o estado coerente assume a forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.34)$$

A distribuição de probabilidade de bósons no estado coerente é obtida usando a equação (2.33),

$$\begin{aligned} P(n) &= |\langle n|\alpha\rangle|^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

que é uma distribuição de Poisson, ou seja, o número de bósons num estado coerente não é definido.

Podemos fazer outra descrição possível para o estado coerente utilizando do operador deslocamento de Glauber  $D(\alpha)$ , definido por

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (2.36)$$

onde

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}. \quad (2.37)$$

Percebemos que os estados coerentes são formas deslocadas do estado de vácuo do oscilador, pela atuação do operador  $D(\alpha)$ . Ambas descrições são equivalentes, para mostrá-lo, usamos a identidade

$$e^{A+B} = e^{-1/2[A,B]} e^A e^B, \quad (2.38)$$

que é válida quando  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ . Tomando  $A = \alpha a^\dagger$  e  $B = -\alpha^* a$  e a definição (2.37), obtemos

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{(\alpha a^\dagger)} e^{(-\alpha^* a)}. \quad (2.39)$$

Substituindo esta última na equação (2.36), encontramos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{(\alpha a^\dagger)} e^{(-\alpha^* a)} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{(\alpha a^\dagger)} \left[ 1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^*)^2}{2!} a^2 + \dots \right] |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{(\alpha a^\dagger)} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que é exatamente a equação (2.34).

## 2.3 Propriedades dos Estados Coerentes

### 2.3.1 Ortogonalidade

Para verificarmos a ortogonalidade dos estados coerentes, temos que analisar a projeção de um estado coerente,  $|\alpha\rangle$ , em outro,  $|\beta\rangle$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2)} \sum_{n,m} \frac{(\alpha^*)^m(\beta)^n}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \langle, m|n\rangle. \quad (2.41)$$

e usando a ortogonalidade dos estados número, temos

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2)} \sum_n \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\alpha^*\beta+|\alpha|^2-|\beta|^2)} = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

A superposição de quaisquer dois estados anula-se rapidamente com a separação de suas amplitudes no plano complexo. De forma que, estados com valores de  $\alpha$  e  $\beta$  muito diferentes são aproximadamente ortogonais.

### 2.3.2 Relação de Completeza

Para mostrarmos que o estado coerente forma um base completa, devemos calcular a integral  $\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha$ . Usando a equação (2.34) temos

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int e^{-|\alpha|^2} (\alpha)^n (\alpha^*)^m d^2\alpha. \quad (2.43)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \alpha &= re^{i\theta}, \\ d\alpha &= d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\}) = dx dy = r dr d\theta, \end{aligned} \quad (2.44)$$

encontramos

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{(m+n)} r dr \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)\theta} d\theta. \quad (2.45)$$

Utilizando a relação

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi\delta_{nm},$$

temos

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha &= 2\pi \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{nm} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{(m+n)} r dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{(2n)} r dr. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável de integração  $z = r^2$  e a identidade

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz = n!,$$

finalmente encontramos

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Enfim, podemos escrever a relação de supercompleteza para o estado coerente

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \mathbf{1}, \quad (2.46)$$

onde  $\mathbf{1}$  é o operador identidade.

### 2.3.3 Relação de Incerteza

O princípio da incerteza de Heisenberg estabelece que medidas simultâneas dos valores médios dos operadores  $X$  e  $P$  no estado  $|\psi\rangle$  são tais que

$$(\Delta X)_\psi (\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.47)$$

$(\Delta X)_\psi$  e  $(\Delta P)_\psi$  são as variâncias dos operadores respectivamente. Podemos construir operadores que satisfazem à mesma relação de incerteza que  $X$  e  $P$  utilizando os operadores  $a$  e  $a^\dagger$ , como segue

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad (2.48)$$

e

$$P = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a - a^\dagger). \quad (2.49)$$

Os valores médios destes operadores no estado coerente  $|\alpha\rangle$  são dados por

$$\begin{aligned}\langle X \rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | (a + a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\text{Re}(\alpha)\end{aligned}\quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}\langle P \rangle_\alpha &= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \langle \alpha | (a - a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} 2\text{Im}(\alpha).\end{aligned}\quad (2.51)$$

Do mesmo modo encontramos:

$$\begin{aligned}\langle X^2 \rangle_\alpha &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(2\text{Re}\alpha)^2 + 1]\end{aligned}\quad (2.52)$$

e

$$\begin{aligned}\langle P^2 \rangle_\alpha &= (-i)^2 \frac{m\omega\hbar}{2} \langle \alpha | (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [1 + (2\text{Im}\alpha)^2].\end{aligned}\quad (2.53)$$

Dessa forma, usando

$$[(\Delta A)_\psi]^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - [\langle A \rangle_\psi]^2, \quad (2.54)$$

encontramos

$$[(\Delta X)_\alpha]^2 = \langle X^2 \rangle_\alpha - [\langle X \rangle_\alpha]^2 = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$[(\Delta P)_\alpha]^2 = \langle P^2 \rangle_\alpha - [\langle P \rangle_\alpha]^2 = \frac{m\omega\hbar}{2},$$

e portanto

$$\begin{aligned}(\Delta X)_\alpha (\Delta P)_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \\ &= \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}\quad (2.55)$$

O que mostra que o estado coerente é um estado de mínima incerteza.

## 2.4 Fator de Mandel

Para estudarmos a natureza estatística de fótons de um determinado estado, introduzimos o fator de Mandel, que para um estado  $|\psi\rangle$  é definido por

$$Q = \frac{(\Delta\hat{n})_\psi^2 - \langle\hat{n}\rangle_\psi}{\langle\hat{n}\rangle_\psi} \quad (2.56)$$

onde

$$(\Delta\hat{n})_\psi^2 = \langle\hat{n}^2\rangle_\psi - \langle\hat{n}\rangle_\psi^2 \quad (2.57)$$

é a variância de  $\hat{n}$ .

Dizemos que um estado possui estatística sub-Poissoniana quando  $Q < 0$ , Poissoniana quando  $Q = 0$  e super-Poissoniana se  $Q > 0$ . Apenas estados não-clássicos apresentam estatística sub-Poissoniana [16]. Além disso, nota-se que  $Q \geq -1$ . Consideremos dois exemplos simples. Para o estado coerente, o fator de Mandel é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|\alpha|^2 + |\alpha|^4 - |\alpha|^2 - |\alpha|^4}{|\alpha|^2} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

logo o estado coerente tem estatística Poissoniana. Para o estado número, o fator de Mandel é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n^2 - n^2 - n}{n} \\ &= -1, \end{aligned} \quad (2.59)$$

logo o estado número é um estado puramente quântico.

## 2.5 Estados Coerentes Térmicos

Analisaremos agora o efeito da temperatura associado sobre os estados coerentes. Para isso, seguiremos as referências [21] e [8], que estudaram o efeito de temperatura em estados coerentes utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos. Neste capítulo e nos próximos, estaremos usando a seguinte notação em que  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzman e  $T$  a temperatura.

Dado um estado coerente expresso pela equação (2.36), o estado coerente térmico é

dado por

$$|\beta; \alpha; \tilde{\alpha}\rangle = D(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta)|0(\beta)\rangle, \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned} D(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) &= e^{[\alpha a^\dagger(\beta) - \alpha^* a(\beta)]} e^{[\alpha \tilde{a}^\dagger(\beta) - \alpha^* \tilde{a}(\beta)]} \\ &= D(\alpha; \beta) \tilde{D}(\alpha; \beta). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Segue como consequência que

$$a(\beta)|\beta; \alpha, \tilde{\alpha}\rangle = \alpha|\beta; \alpha, \tilde{\alpha}\rangle, \quad (2.62)$$

$$\tilde{a}(\beta)|\beta; \alpha, \tilde{\alpha}\rangle = \alpha^*|\beta; \alpha, \tilde{\alpha}\rangle. \quad (2.63)$$

Seguiremos a seguinte notação para o adjunto de qualquer estado térmico

$$\left(|\beta; \alpha, \tilde{\phi}\rangle\right)^\dagger = \langle \tilde{\phi}, \alpha; \beta|, \quad (2.64)$$

onde as variáveis do espaço dual são maracadas pelo símbolo til, o sistema real por não-til e  $\beta = 1/k_B T$ .

A média do operador número  $N = a^\dagger a$  no estado termalizado é dada por

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | N | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger a | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\ &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | [u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta)] \\ &\quad \times [u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta)] | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\ &= [u(\beta) + v(\beta)]^2 |\alpha|^2 + v(\beta)^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

É útil observar que

$$D(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) = U(\beta) D(\alpha, \tilde{\alpha}) U^\dagger(\beta), \quad (2.66)$$

onde

$$D(\alpha, \tilde{\alpha}) = D(\alpha) \tilde{D}(\alpha). \quad (2.67)$$

Dessa forma, obtemos da equação (2.60)

$$\begin{aligned} |\beta; \alpha; \tilde{\alpha}\rangle &= U(\beta) D(\alpha, \tilde{\alpha}) U^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle \\ &= U(\beta) D(\alpha, \tilde{\alpha}) |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.68)$$

o que sugere uma outra forma de definição para o estado coerente térmico

$$\begin{aligned} |\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &= D(\alpha, \tilde{\alpha})|0(\beta)\rangle \\ &= D(\alpha, \tilde{\alpha})U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ou seja, depois de termalizado o vácuo duplicado, procedemos com a aplicação do operador deslocamento  $D(\alpha, \tilde{\alpha})$ . Para esse estado, utilizamos a notação  $(|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle)^\dagger = \langle\beta; \tilde{\alpha}, \alpha|$ .

A média do operador número  $N = a^\dagger a$  no estado  $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle\beta; \tilde{\alpha}, \alpha|a^\dagger a|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle \\ &= v^2(\beta) + |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde escrevemos os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  em função dos operadores térmicos e utilizamos as propriedades do operador deslocamento.

Os estados dados pelas equações (2.60) e (2.69) são fisicamente distintos, embora possamos escrever um em função do outro:

$$\begin{aligned} |\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &= D(\alpha, \tilde{\alpha})U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= \exp\{[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)]\alpha - [v(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)\tilde{a}(\beta)]\tilde{\alpha}^* \\ &\quad - [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)]\alpha^* + [v(\beta)a(\beta) + u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)]\tilde{\alpha}\}U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)\exp\{[u(\beta)a^\dagger + v(\beta)\tilde{a}]\alpha - [v(\beta)a^\dagger + u(\beta)\tilde{a}]\tilde{\alpha}^* \\ &\quad - [u(\beta)a + v(\beta)\tilde{a}^\dagger]\alpha^* + [v(\beta)a + u(\beta)\tilde{a}^\dagger]\tilde{\alpha}\}U^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.71)$$

e agrupando os termos, temos que

$$\begin{aligned} |\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &= U(\beta)\exp(\bar{\alpha}a^\dagger - \bar{\alpha}^*a)\exp(\tilde{\alpha}\tilde{a}^\dagger - \tilde{\alpha}^*\tilde{a})|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)D(\bar{\alpha}, \tilde{\alpha})|0, \tilde{0}\rangle \\ &= |\beta; \bar{\alpha}, \tilde{\alpha}\rangle, \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= u(\beta)\alpha - v(\beta)\tilde{\alpha}^*, \\ \tilde{\alpha} &= u(\beta)\tilde{\alpha} - v(\beta)\alpha^*. \end{aligned}$$

Esse resultado mostra a conexão entre as duas definições para termalização da coerência. Usaremos um ou outro, de acordo com a conveniência.

Usualmente, efeitos térmicos são introduzidos utilizando o formalismo da matriz den-



cidade. Em mecânica estatística do equilíbrio, a média térmica de um operador  $A$  é calculada por  $\langle A \rangle = Tr\{A\rho\}$ , a qual por sua vez deve coincidir com a média de  $A$  no vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$ . O valor esperado de  $A$  no estado  $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \langle \beta, \tilde{\alpha}, \alpha | A | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | D^\dagger(\alpha, \tilde{\alpha}) A D(\alpha, \tilde{\alpha}) | 0(\beta) \rangle \\
 &= Tr\{D^\dagger(\tilde{\alpha}) D^\dagger(\alpha) A D(\alpha) D(\tilde{\alpha}) \rho\} \\
 &= Tr\{A D^\dagger(\alpha) \rho D(\alpha)\},
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

que é a expressão corrente para introduzir efeito de temperatura em estados coerentes, onde o  $\rho$  é a matriz densidade dada pela equação (1.98).

## 3 *Superposição de Estados Coerentes e Estados Número*

Neste capítulo vamos analisar estados de superposição entre estados coerentes e estados número do campo eletromagnético. Faremos uma análise estatística destes estados na presença de efeitos térmicos utilizando o fator de Mandel [31] e o formalismo da DCT [4, 9, 14].

### 3.1 Preliminares

Primeiro, construímos um estado duplicado  $|\psi, \tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\tilde{\psi}\rangle$ , o qual aplicamos uma transformação de Bogoliubov, o resultado é o estado normalizado

$$|\psi(\beta)\rangle = U(\beta)|\psi, \tilde{\psi}\rangle.$$

A média de um observável  $A$  neste estado é dada por

$$\langle A \rangle = \langle \psi(\beta) | A | \psi(\beta) \rangle,$$

e a distribuição de partículas é dada por

$$P_n(\beta) = |\langle \tilde{n}, n | \psi(\beta) \rangle|^2.$$

Iniciaremos estudando a superposição de estados do tipo  $A|\alpha\rangle + B|n\rangle$ , generalizando assim o estado  $A|\alpha\rangle + B|0\rangle$  introduzido por S. S. Mizrahi e V. V. Dodonov [30]. Na sequência avaliamos o efeito de temperatura sobre esses estados.

## 3.2 Superposição de Estados Coerentes e Estados Número

Antes de estudarmos os efeitos de temperatura na superposição de estados coerentes e estados número faremos uma análise estatística, para  $T = 0$  e utilizando como parâmetro o fator de Mandel. Dessa forma, introduzimos uma superposição do tipo

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (A|\alpha\rangle + B|n\rangle). \quad (3.1)$$

Por simplicidade, escolhemos  $A$ ,  $B$  e  $\alpha$  reais. O fator  $\eta$  é dado por

$$\eta = A^2 + \frac{2AB\alpha^n e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}} + B^2. \quad (3.2)$$

O valor médio do operador número,  $\hat{N} = a^\dagger a$ , no estado  $|\alpha_n\rangle$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{N} \rangle &= \frac{1}{\eta} \langle \alpha_n | \hat{N} | \alpha_n \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \left( A^2 \alpha^2 + \frac{2ABn\alpha^n e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{n!}} + B^2 n \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A média para o operador número ao quadrado  $\hat{N}^2$  é

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}^2 \rangle &= \frac{1}{\eta} \langle \alpha_n | \hat{N}^2 | \alpha_n \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \left( A^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) + \frac{2ABn^2 \alpha^n e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{n!}} + B^2 n^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

A estatística de fótons do estado  $|\alpha_n\rangle$  pode agora ser estudada através do fator de Mandel, definido na equação (2.56):

$$Q = \frac{A^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) + F + B^2 n^2}{A^2 \alpha^2 + F + B^2 n} - \frac{1}{\eta} (A^2 \alpha^2 + F + B^2 n) - 1, \quad (3.5)$$

onde

$$F = \frac{2ABn^2 \alpha^n e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{n!}}.$$

É interessante observar o comportamento do fator de Mandel no estado  $|\alpha_n\rangle$  para diversos valores de  $\alpha$  e com diferentes valores de  $B$ . Neste sentido, construímos o gráfico do parâmetro de Mandel de acordo com a figura (1). Observamos que a temperatura nula e para  $n = 2$ , a estatística do estado  $|\alpha_n\rangle$  permanece sub-Poissoniana para uma faixa mais ampla do parâmetro  $\alpha$  à medida que o fator  $B$  aumenta.

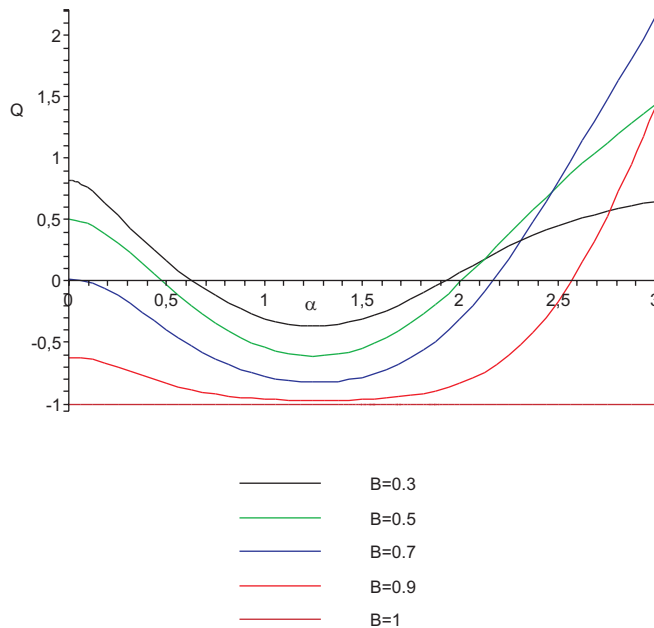


Figura 1: Fator de Mandel para diferentes amplitudes e para  $n = 2$  à temperatura nula.

### 3.3 Efeitos de Temperatura no estado $|\alpha_n\rangle$

No capítulo 2 vimos que o valor esperado de um operador (agindo apenas na parte do espaço não-til) no estado de vácuo térmico representa a média térmica. Seguindo a mesma prescrição, estendemos o método de termalização para os estados de superposição entre estados coerentes e de estados de Fock, como descrito acima. Introduzindo variáveis térmicas no estado representado pela equação (3.1), através do formalismo da DCT. Assim, seja o estado de superposição

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (A|\alpha\rangle + B|n\rangle), \quad (3.6)$$

com  $\eta$  é dado pela equação (3.2). Duplicando-se os graus de liberdade e empregando a transformação de Bogoliubov, obtemos a contrapartida térmica do estado  $|\alpha_n\rangle$ , a qual é expressa por

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle &= U(\beta)|\alpha_n, \tilde{\alpha}_n\rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \left\{ A^2 U(\beta)|\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + AB U(\beta)|\alpha, \tilde{n}\rangle \right. \\ &\quad \left. + AB U(\beta)|n, \tilde{\alpha}\rangle + B^2 U(\beta)|n, \tilde{n}\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analisaremos a estatística do estado térmico  $|\alpha_n(\beta)\rangle$  através do fator de Mandel,

calculando o valor médio dos operadores  $\hat{N}$  e  $\hat{N}^2$  no estado de superposição térmico. Dessa maneira, a média do operador número no estado  $|\alpha_n(\beta)\rangle$  pode ser obtida pela expressão

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_n(\beta) | \hat{N} | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ A^4 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta, \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \right. \\
&+ A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^3 B \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + AB^3 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^3 B \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + AB^3 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^2 B^2 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + AB^3 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ AB^3 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + B^4 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \left. \right\}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

No caso em que  $\alpha$  real, e como  $\hat{N}$  é um operador hermitiano, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{n}, \alpha, \beta | \hat{N} | \beta, \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
\langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, n, \beta | \hat{N} | \beta, \alpha, \tilde{n} \rangle \\
\langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{n}, n, \beta | \hat{N} | \beta, \alpha, \tilde{n} \rangle \\
\langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{n}, n, \beta | \hat{N} | \beta, n, \tilde{\alpha} \rangle
\end{aligned}$$

Assim, a equação (3.8) torna-se

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_n(\beta) | \hat{N} | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ A^4 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + 2A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \right. \\
&+ 2A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + 2A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \\
&+ A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle + 2A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle \\
&+ 2AB^3 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle + A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle \\
&+ 2AB^3 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle + B^4 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \left. \right\}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Para ilustrar o procedimento de cálculo das médias, faremos uma descrição detalhada da obtenção dos dois primeiros termos da equação acima. Escrevendo os operadores não-térmicos em função dos térmicos com o auxílio das equações (1.59) e (1.61) para o primeiro

termo da equação (3.9). O fator  $\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle$  se escreve como

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle &= [u(\beta)^2 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
&+ u(\beta)v(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
&+ u(\beta)v(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle \\
&+ v^2(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando as relações (2.62) e (2.63) temos

$$\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{\alpha} \rangle = [(u(\beta)^2 + v^2(\beta))\alpha^2 + v^2(\beta)]. \tag{3.11}$$

Procedendo de maneira similar para o segundo termo da equação (3.9), encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= u^2(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ u(\beta)v(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ u(\beta)v(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&+ v^2(\beta) \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde os termos da equação (3.12) são dados por:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha | a^\dagger a | \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&= \frac{e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^{n+2}}{\sqrt{n!}},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha | a^\dagger \tilde{a}^\dagger | \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&= \frac{e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^{n+2}}{\sqrt{n!}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) a(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha | \tilde{a} a | \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&= \frac{\alpha^n \sqrt{n} e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{(n-1)!}},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{\alpha}, \alpha | \tilde{a} \tilde{a}^\dagger | \alpha, \tilde{n} \rangle \\
&= \frac{(n+1) \alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{n!}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde utilizamos  $U^\dagger(\beta)U(\beta) = 1$  e as equações (1.43) e (1.44). Agora, podemos escrever a

relação (3.12) como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle &= u^2(\beta) \frac{e^{(-\alpha^2)} \alpha^{n+2}}{\sqrt{n!}} + u(\beta)v(\beta) \frac{e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^{n+2}}{\sqrt{n!}} \\ &+ u(\beta)v(\beta) \frac{\alpha^n \sqrt{n} e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{(n-1)!}} + v^2(\beta) \frac{(n+1) \alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{n!}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Seguindo a mesma prescrição obtemos os termos restantes da equação (3.9), os quais são expressos pelas equações abaixo

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle &= \frac{u^2(\beta) n \alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{n!}} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) \alpha^{n+2} e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{n!}} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) \sqrt{n} \alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{(n-1)!}} \\ &+ \frac{v^2(\beta) \alpha^n e^{(-\alpha^2/2)} (1 + \alpha^2)}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}, \alpha, \beta | \hat{N} | n, \tilde{n} \rangle &= \frac{u^2(\beta) n e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^{2n}}{n!} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) (n+1) e^{(-\alpha^2)} \alpha^{2(n+1)}}{(n+1)!} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) n e^{(-\alpha^2)} \alpha^{2(n-1)}}{(n-1)!} \\ &+ \frac{v^2(\beta) (n+1) e^{(-\alpha^2)} \alpha^{2n}}{n!} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle = u^2(\beta) \alpha^2 + v^2(\beta) (n+1) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N} | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle &= \frac{u^2(\beta) n e^{(-\alpha^2)} \alpha^{2n}}{n!} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) \sqrt{n(n+1)} \alpha^{2n} e^{(-\alpha^2)}}{\sqrt{(n+1)!(n-1)!}} \\ &+ \frac{u(\beta)v(\beta) \sqrt{n} \alpha^{2n} e^{(-\alpha^2)}}{\sqrt{(n-1)!(n)!}} \\ &+ v^2(\beta) \alpha^{2n} e^{(-\alpha^2)} \left( \frac{1}{n!} + \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}, \alpha, \beta | \hat{N} | \beta, n, \tilde{n} \rangle &= \frac{u^2(\beta) n e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^n}{\sqrt{n!}} \\ &+ \frac{v^2(\beta) (n+1) e^{(-\alpha^2/2)} \alpha^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\langle \tilde{\alpha}, n, \beta | \hat{N} | \beta, n, \tilde{\alpha} \rangle = u^2(\beta) n + v^2(\beta) (1 + \alpha^2) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\alpha}, n, \beta | \hat{N} | \beta, n, \tilde{n} \rangle &= \frac{u^2(\beta)n\alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}}{\sqrt{n!}} \\ &+ \frac{v^2(\beta)\alpha^n e^{(-\alpha^2/2)}(1+n)}{\sqrt{n!}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\langle \tilde{n}, n, \beta | \hat{N} | \beta, n, \tilde{n} \rangle = u^2(\beta)n + v^2(\beta)(1+n). \quad (3.25)$$

Finalmente, podemos escrever a equação (3.9) como

$$\begin{aligned}\langle \alpha_n(\beta) | \hat{N} | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ A^4 \left[ (u(\beta)^2 + v^2(\beta))\alpha^2 + v^2(\beta) \right] \right. \\ &+ 2A^3 B \alpha^n e^{-\alpha^2/2} \left[ u^2(\beta)\phi_1 + 2u(\beta)v(\beta)\phi_2 + v^4(\beta)\phi_3 \right] \\ &+ 2A^2 B^2 \alpha^{2n} e^{-\alpha^2} \left[ \frac{2u^2(\beta)n}{n!} + u(\beta)v(\beta)\varphi_1 + v^2(\beta)\varphi_2 \right] \\ &+ A^2 B^2 \left[ \frac{2u^2(\beta)n}{\sqrt{n!}} + \frac{2v^2(\beta)(n+1)}{\sqrt{n!}} \right] \\ &\left. + B^4 \left[ u^2(\beta)n + v^2(\beta)(n+1) \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.26)$$

onde as funções  $\phi_k$ , com  $k = 1, 2, 3$  e  $\varphi_l$  com  $l = 1, 2$ , encontram-se no apêndice A.

O operador número ao quadrado no estado  $|\alpha_n(\beta)\rangle$  é dado por

$$\begin{aligned}\langle \alpha_n(\beta) | \hat{N}^2 | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ A^4 \langle \tilde{\alpha}, \alpha, \beta | \hat{N}^2 | \beta, \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + 2A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle \right. \\ &+ 2A^3 B \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle + 2A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{n} \rangle \\ &+ A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; \alpha, \tilde{n} \rangle + 2A^2 B^2 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle \\ &+ 2AB^3 \langle \tilde{n}, \alpha; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{n} \rangle + A^2 B^2 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{\alpha} \rangle \\ &\left. + 2AB^3 \langle \tilde{\alpha}, n; \beta | \hat{N}^2 | \beta; n, \tilde{n} \rangle + B^4 \langle \tilde{n}, n, \beta | \hat{N}^2 | \beta, n, \tilde{n} \rangle \right\}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

O cálculo das médias na expressão (3.27) é totalmente análogo ao realizado na obtenção da média do operador número desenvolvida anteriormente. Dessa forma reescrevemos a equação (3.27) como

$$\begin{aligned}\langle \alpha_n(\beta) | \hat{N}^2 | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ A^4 \left[ u^4(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) + u^3(\beta)v(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) \right. \right. \\ &+ u^3(\beta)v(\beta)\alpha^4 + u^2(\beta)v^2(\beta)(1+\alpha^2) + u^3(\beta)v(\beta)\alpha^4 \\ &+ u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^4 + u(\beta)v^3(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) + u^3(\beta)v(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) \\ &+ u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^4 + u^2(\beta)v^2(\beta)(1+\alpha^2)^2 + u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^4 \\ &+ u(\beta)v^3(\beta)\alpha^2(2+\alpha^2) + u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) + u(\beta)v^3(\beta)\alpha^2(2+\alpha^2) \\ &\left. + u(\beta)v^3(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) + v^4(\beta)(1+3\alpha^2+\alpha^4) \right]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2A^3B\alpha^n e^{-\alpha^2/2} \left[ \frac{u^4(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2)}{\sqrt{n!}} + u^3(\beta)v(\beta)f_1 + u^2(\beta)v^2(\beta)f_2 \right. \\
& + \left. u(\beta)v^3(\beta)f_3 + v^4(\beta)f_4 \right] + 2A^3B\alpha^n e^{-\alpha^2/2} \left[ \frac{u^4(\beta)n^2}{\sqrt{n!}} + u^3(\beta)v(\beta)g_1 \right. \\
& + \left. u^2(\beta)v^2(\beta)g_2 + u(\beta)v^3(\beta)g_3 + v^4(\beta)g_4 \right] + 2A^2B^2\alpha^{2n} e^{-\alpha^2} \left[ \frac{u^4(\beta)n^2}{\sqrt{n!}} \right. \\
& + \left. u^3(\beta)v(\beta)h_1 + u^2(\beta)v^2(\beta)h_2 + u(\beta)v^3(\beta)h_3 + v^4(\beta)h_4 \right] \\
& + A^2B^2 \left[ u^4(\beta)\alpha^2(1+\alpha^2) + 2u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^2(n+1) + u^2(\beta)v^2(\beta)\alpha^2(n) \right. \\
& + \left. u^2(\beta)v^2(\beta)(n+1)(1+\alpha^2) + v^4(\beta)(n+1)^2 \right] \\
& + 2A^2B^2\alpha^{2n} e^{-\alpha^2} \left[ \frac{u^4(\beta)n^2}{n!} + u^3(\beta)v(\beta)y_1 + u^2(\beta)v^2(\beta)y_2 + u(\beta)v^3(\beta)y_3 \right. \\
& + \left. v^4(\beta)y_4 \right] + 2AB^3\alpha^n e^{-\alpha^2} \left[ \frac{n^2u^4(\beta)}{\sqrt{n!}} + u^2(\beta)v^2(\beta)q_1 + v^4(\beta)q_2 \right] \\
& + A^2B^2 \left[ u^4(\beta)n^2 + 3nu^2(\beta)v^2(\beta)(1+\alpha^2) + u^2(\beta)v^2(\beta)(1+\alpha^2) \right. \\
& + \left. v^4(\beta)(1+3\alpha^2+\alpha^4) \right] \\
& + 2AB^3\alpha^n e^{-\alpha^2} \left[ \frac{u^4(\beta)n^2}{\sqrt{n!}} + u^2(\beta)v^2(\beta)p_1 + v^4(\beta)p_2 \right] \\
& + B^4 \left[ u^4(\beta)n^2 + u^2(\beta)v^2(\beta)(n+1)(3n+1) \right. \\
& + \left. u^2(\beta)v^2(\beta)n^2 + v^4(\beta)(n+1)^2 \right] \}, \tag{3.28}
\end{aligned}$$

onde as funções auxiliares  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$ ,  $y_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $q_j$ ,  $p_j$  com  $j = 1, 2$ , estão expostas no apêndice A.

Tomando  $T \rightarrow 0$  ( $v(\beta) = 0$  e  $u(\beta) = 1$ ) nas expressões (3.26) e (3.28), e utilizando a condição de normalização, obtemos, como esperado, as equações (3.3) e (3.4), recuperando os resultados para temperatura nula.

Com auxílio das equações (2.56), (2.57), (3.26) e (3.28) podemos calcular o fator de Mandel para o estado de superposição térmico. Para esse propósito, analisaremos os efeitos térmicos para algumas situações particulares da equação (3.1) baseados no estudo do comportamento do fator de Mandel em função da temperatura.

### 3.3.1 Superposição $|\alpha\rangle + |0\rangle$

Estudaremos inicialmente a superposição mais simples entre o estado coerente e o estado número, a saber:

$$|\alpha_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}} (C|\alpha\rangle + D|0\rangle), \tag{3.29}$$

com

$$\eta_0 = C^2 + 2CDe^{-\alpha^2/2} + D^2.$$

Neste estado, introduzido na referência [30], o operador aniquilação destrói a componente do vácuo, transformando o  $|\alpha_0\rangle$  no estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Esta transformação é acompanhada pelo aumento do número médio de fótons em determinadas condições [30]. Inserindo o efeito de temperatura via DCT nesse estado, temos

$$|\alpha_0(\beta)\rangle = \frac{1}{\eta_0} \left( C^2 U(\beta) |\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + CDU(\beta) |\alpha, \tilde{0}\rangle + CDU(\beta) |0, \tilde{\alpha}\rangle + D^2 U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \right). \quad (3.30)$$

Fazendo  $n = 0$ ,  $A = C$  e  $B = D$  nas expressões (3.26), (3.28) e (3.2), encontramos as médias do operador número e o operador número ao quadrado no estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$ . Assim, podemos examinar tal estado estatisticamente através de gráficos do fator de Mandel em função da temperatura, nas figuras 2 e 3.

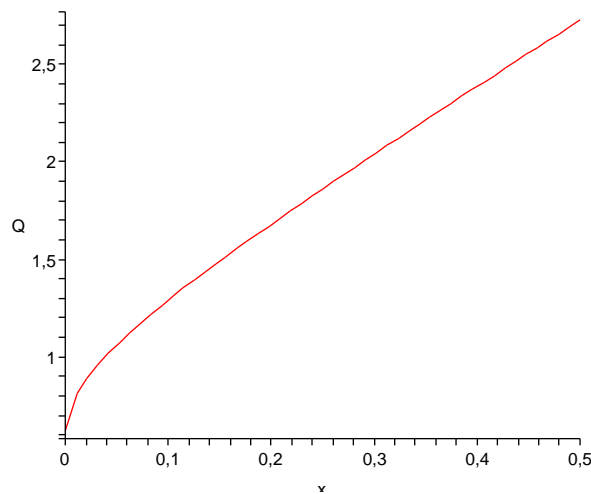


Figura 2: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  com  $C = 0.61$ ,  $D = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ .

Observamos que o estado de superposição  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  apresenta estatística super-Poissoniana e que a variação do parâmetro de Mandel em função da temperatura aumenta à medida que  $\alpha$  cresce, como pode ser observado nos gráficos das figuras (2) e (3). Atentamos ainda que a estatística do estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  permanece super-Poissoniana para  $\alpha = 2$ , mesmo para diferentes amplitudes  $C$  e  $D$  escolhidas nesta análise. Isso pode ser verificado na figura 4.

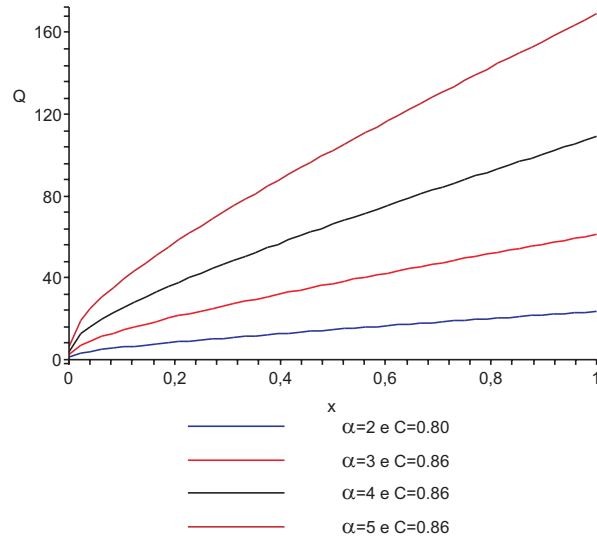


Figura 3: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $D = 0.5$  e  $\alpha = 2, 3, 4, 5$ .

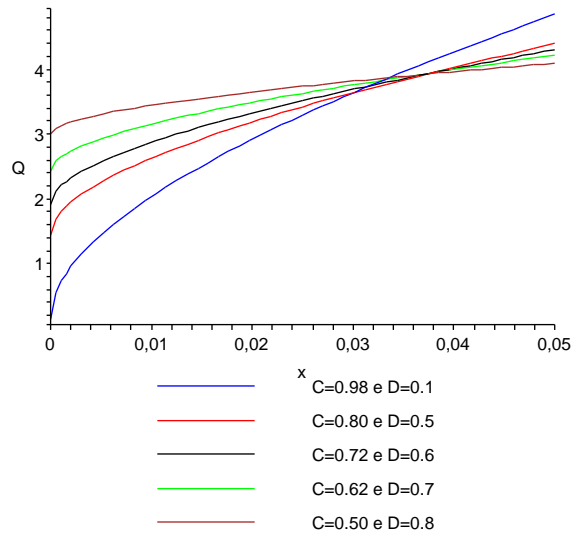


Figura 4: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para diferentes amplitudes e  $\alpha = 2$ .

### 3.3.2 Superposição $|\alpha\rangle + |1\rangle$

Nossa próxima situação de interesse é a superposição do estado coerente e o estado de Fock a um fóton. Dessa maneira:

$$|\alpha_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta_1}} (E|\alpha\rangle + G|1\rangle), \quad (3.31)$$

com

$$\eta_1 = E^2 + 2EG\alpha e^{-\alpha^2/2} + G^2.$$

Utilizando da mesma sistemática apresentada anteriormente, introduzimos o estado térmico como

$$|\alpha_1(\beta)\rangle = \frac{1}{\eta_1} \left( E^2 U(\beta) |\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + EGU(\beta) |\alpha, \tilde{1}\rangle + EGU(\beta) |1, \tilde{\alpha}\rangle + G^2 U(\beta) |1, \tilde{1}\rangle \right). \quad (3.32)$$

Inserindo  $n = 1$ ,  $A = E$  e  $B = G$  nas expressões (3.26), (3.28) e (3.2), analisamos o comportamento do fator de Mandel com a temperatura de acordo com as figuras (5) e (6).

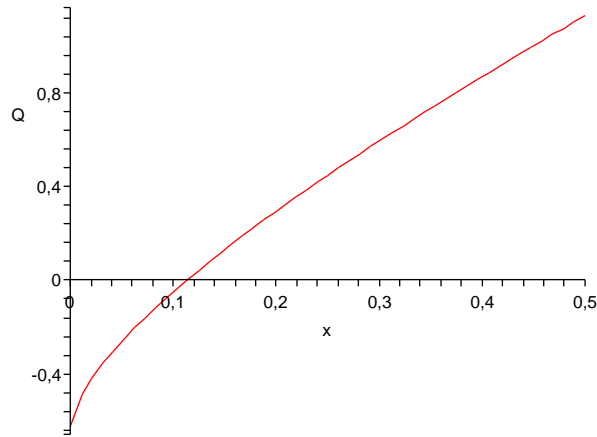


Figura 5: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $E = 0.61$ ,  $G = 0.5$  e  $\alpha = 1$ .

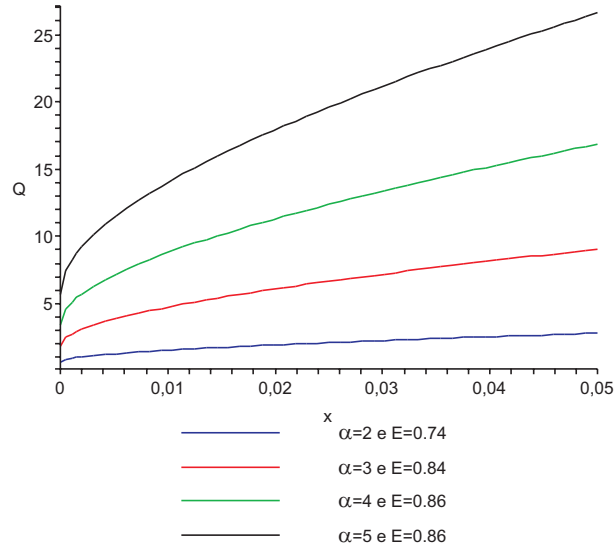


Figura 6: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $G = 0.5$  e  $\alpha = 2, 3, 4, 5$ .

Observamos na figura (5) que para  $\alpha = 1$  e  $G = 0.5$  a estatística do estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  passa de valores sub-Poissonianos a super-Poissonianos à medida que a temperatura cresce. Para  $\alpha \geq 2$  notamos que o estado apresenta estatística super-Poissoniana, e além disso a variação do fator de Mandel com a temperatura torna-se mais acentuada à medida que  $\alpha$  cresce (figura 6).

Para  $\alpha = 1$  e escolhendo diferentes valores para as amplitudes  $E$  e  $G$ , o fator de Mandel passa de valores sub-Poissonianos a super-Poissonianos. No entanto, para  $\alpha = 2$ , notamos que o estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  é super-Poissoniano, como podemos verificar nas figuras 7 e 8.

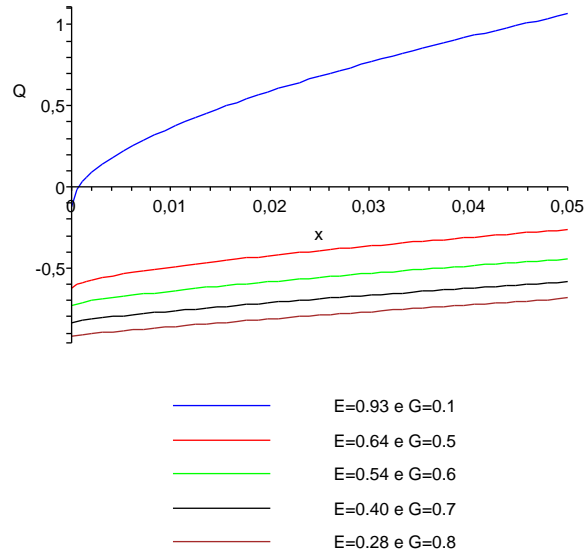


Figura 7: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para diferentes amplitudes e  $\alpha = 1$ .

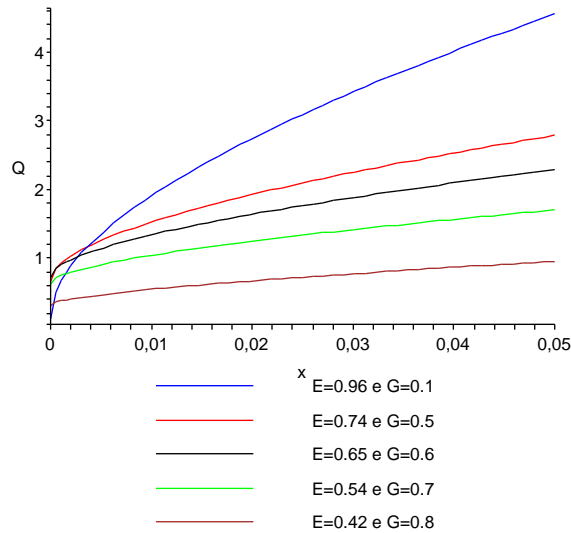


Figura 8: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para diferentes amplitudes e  $\alpha = 2$ .

### 3.3.3 Superposição $|\alpha\rangle + |2\rangle$

Na mesma perspectiva, vamos investigar a superposição de um estado coerente e um estado de Fock a dois fótons. Consideremos assim uma superposição da forma

$$|\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta_2}} (Y|\alpha\rangle + W|2\rangle), \quad (3.33)$$

onde

$$\eta_2 = Y^2 + \frac{2YW\alpha^2 e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{2}} + W^2.$$

O estado  $|\alpha_2\rangle$  termalizado a partir do formalismo da DCT é escrito como

$$|\alpha_2(\beta)\rangle = \frac{1}{\eta_2} \left( Y^2 U(\beta) |\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + YWU(\beta) |\alpha, \tilde{2}\rangle + YWU(\beta) |2, \tilde{\alpha}\rangle + W^2 U(\beta) |2, \tilde{2}\rangle \right).$$

Os valores médios dos operadores número e número quadrado no estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  podem ser obtidos tomando-se  $n = 2$ ,  $A = Y$  e  $B = W$  nas equações (3.26), (3.28) respectivamente. Mostramos os gráficos do fator de Mandel para algumas situações nas figuras 9, 10 e 11.

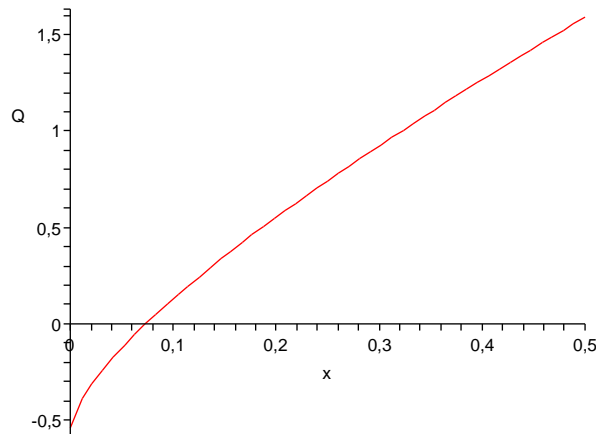


Figura 9: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $Y = 0.68$ ,  $W = 0.5$  e  $\alpha = 1$

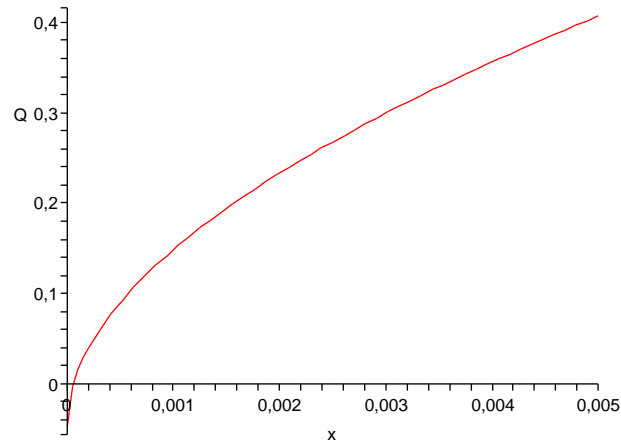


Figura 10: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $Y = 0.66$ ,  $W = 0.5$  e  $\alpha = 2$ .

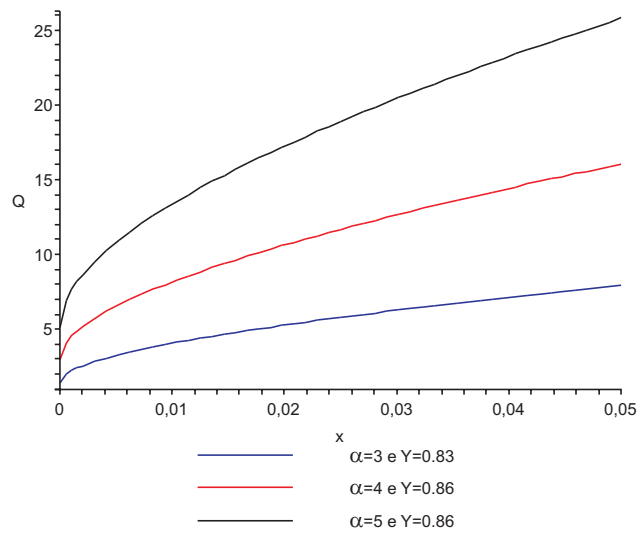


Figura 11: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para  $W = 0.5$  e  $\alpha = 3, 4, 5$ .

Observamos nas figuras que para  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $W = 0.5$  a estatística do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  passa de valores sub-Poissonianos a super-Poissonianos à medida que a temperatura aumenta. Para  $\alpha \geq 3$  e  $W = 0.5$  reparamos que o estado apresenta estatística super-Poissoniana, e também verificamos que a variação do fator de Mandel com a temperatura torna-se mais acentuada à medida que  $\alpha$  cresce.

Podemos novamente analisar o comportamento do fator de Mandel com a temperatura para amplitudes variadas. Com auxílio das figuras 12 e 13 observamos que para  $\alpha = 1$ ,



o estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  altera sua estatística de sub-Poissoniana para super-Poissoniana a mais altas temperaturas do que para  $\alpha = 2$ . Novamente observamos que aumentar o parâmetro  $\alpha$  contribui para tornar o estado super-Poissoniano.

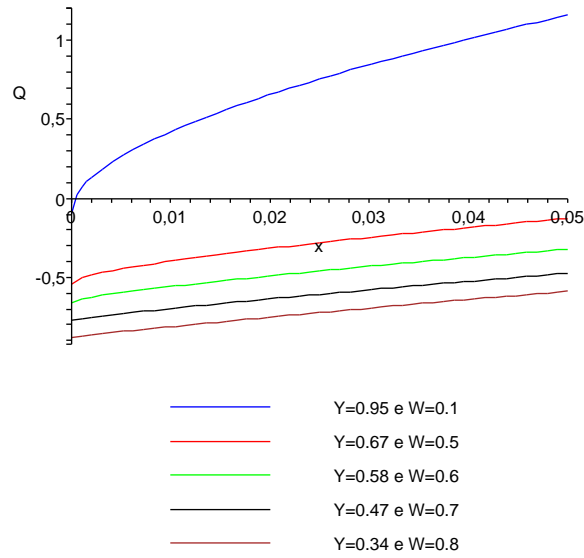


Figura 12: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para diferentes amplitudes e  $\alpha = 1$ .

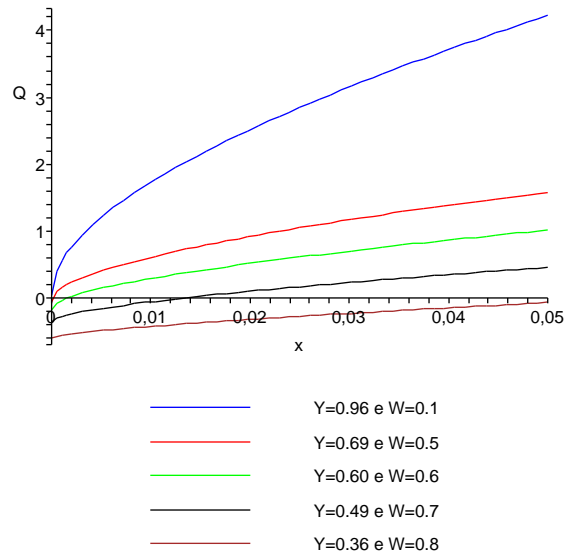


Figura 13: Fator de Mandel do estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  em função da temperatura  $x = v^2(\beta)$  para diferentes amplitudes e  $\alpha = 2$ .

## 4 *Distribuições de Probabilidades Térmicas*

Neste capítulo utilizaremos o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos para obter e analisar o comportamento da distribuição de probabilidade de fótons com a temperatura, para estados de superposição de dois estados número e para os estados apresentados no capítulo anterior.

### 4.1 Superposição de Dois Estados Número

Iniciaremos com uma situação simples de superposição de dois estados número [38] para evidenciar o tipo de procedimento teórico. Para esse estado, não realizaremos as mesmas análises do capítulo anterior, pois estas já se encontram disponíveis na literatura [32]. Seja então a superposição

$$|\psi_{nm}\rangle = C_1|n\rangle + C_2|m\rangle, \quad (4.1)$$

onde  $C_1 = C_2 = \sqrt{2}/2$ . Procedendo com a duplicação do estado  $|\psi_{nm}\rangle$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi_{nm}, \tilde{\psi}_{nm}\rangle &= \frac{1}{2}(|n, \tilde{n}\rangle + |n, \tilde{m}\rangle \\ &+ |m, \tilde{n}\rangle + |m, \tilde{m}\rangle). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Inserindo as variáveis térmicas através da aplicação da transformação de Bogoliubov,  $U(\beta)$ , obtemos

$$\begin{aligned} |\psi_{nm}(\beta)\rangle &= \frac{1}{2}(U(\beta)|n, \tilde{n}\rangle + U(\beta)|n, \tilde{m}\rangle \\ &+ U(\beta)|m, \tilde{n}\rangle + U(\beta)|m, \tilde{m}\rangle). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A amplitude de probabilidade é dada por

$$\langle \tilde{r}, r | \psi_{nm}(\beta) \rangle = \frac{1}{2}(\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{n} \rangle + \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{m} \rangle$$

$$+ \langle \tilde{r}, r|U(\beta)|m, \tilde{n}\rangle + \langle \tilde{r}, r|U(\beta)|m, \tilde{m}\rangle. \quad (4.4)$$

Os elementos matriciais na equação (4.4) são dados por

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r|U(\beta)|n, \tilde{n}\rangle &= \frac{1}{n!} \langle \tilde{r}, r|U(\beta)[a^\dagger]^n[\tilde{a}^\dagger]^n|0, \tilde{0}\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \langle \tilde{r}, r|U(\beta)[a^\dagger]^n U^\dagger(\beta) U(\beta) [\tilde{a}^\dagger]^n U^\dagger(\beta) U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \langle \tilde{r}, r|[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}(\beta)^\dagger]^n |0(\beta)\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos as equações (1.44), (1.46) e (1.42). Utilizando a equação (1.15) e escrevendo os operadores térmicos em função dos não-térmicos com auxílio das expressões (1.53) e (1.54), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r|U(\beta)|n, \tilde{n}\rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \langle \tilde{r}, r|[u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}]^n \\ &\quad \times [u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a]^n |s, \tilde{s}\rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como os operadores til e não-til comutam, podemos realizar uma expansão binomial usual na equação (4.5), ou seja

$$[u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [u(\beta)a^\dagger]^{n-k} [-v(\beta)\tilde{a}]^k, \quad (4.6)$$

$$[u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [u(\beta)\tilde{a}^\dagger]^{n-j} [-v(\beta)a]^j. \quad (4.7)$$

Substituindo essas expressões na equação (4.5) temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r|U(\beta)|n, \tilde{n}\rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \\ &\quad \times \langle \tilde{r}, r|[-v(\beta)\tilde{a}]^k [u(\beta)\tilde{a}^\dagger]^{n-j} [u(\beta)a^\dagger]^{n-k} [-v(\beta)a]^j |s, \tilde{s}\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

As aplicações sucessivas dos operadores criação e destruição no estado número  $|s, \tilde{s}\rangle$  podem ser calculadas com auxílio das propriedades

$$a^p |s\rangle = \sqrt{\frac{s!}{(s-p)!}} |s-p\rangle, \quad (4.9)$$

$$(a^\dagger)^w |s\rangle = \sqrt{\frac{(s+w)!}{s!}} |s+w\rangle, \quad (4.10)$$

que são também evidentemente válidas para os operadores  $\tilde{a}$  e  $\tilde{a}^\dagger$ . Então, podemos escrever a equação (4.8) como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{n} \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(s+n-j)!}{(s-j)!} \\ &\times [-v(\beta)]^{(k+j)} [u(\beta)]^{(2n-k-j)} \theta(s-j) \\ &\times \delta_{r, s-j+n-k} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}-j+n-k}, \end{aligned}$$

onde  $\theta(x)$  é a função degrau. Desta última equação observamos que o segundo e terceiro termo da expressão (4.4) anulam-se, pois  $n \neq m$ . Já o último termo desta expressão pode ser obtido apenas trocando  $n$  por  $m$ ,  $j$  por  $j'$  e  $k$  por  $k'$  na equação (4.11):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | m, \tilde{m} \rangle &= \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k'=0}^m \binom{m}{k'} \sum_{j'=0}^m \binom{m}{j'} \frac{(s+m-j')!}{(s-j')!} \\ &\times [-v(\beta)]^{(k'+j')} [u(\beta)]^{(2m-k'-j')} \theta(s-j') \\ &\times \delta_{r, s-j'+m-k'} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}-j'+m-k'}. \end{aligned}$$

Enfim, podemos escrever a equação (4.4) como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | \psi_{nm}(\beta) \rangle &= \frac{1}{2n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(s+n-j)!}{(s-j)!} \\ &\times [-v(\beta)]^{(k+j)} [u(\beta)]^{(2n-k-j)} \theta(s-j) \\ &\times \delta_{r, s-j+n-k} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}-j+n-k} \\ &+ \frac{1}{2m!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k'=0}^m \binom{m}{k'} \sum_{j'=0}^m \binom{m}{j'} \frac{(s+m-j')!}{(s-j')!} \\ &\times [-v(\beta)]^{(k'+j')} [u(\beta)]^{(2m-k'-j')} \theta(s-j') \\ &\times \delta_{r, s-j'+m-k'} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}-j'+m-k'}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

que tem como caso particular os resultados a temperatura nula.

A probabilidade de encontrarmos  $r$  fótons no estado  $|\psi_{nm}(\beta)\rangle$  pode ser obtida tomando o módulo ao quadrado da expressão acima.

$$P_r(\beta) = |\langle \tilde{r}, r | \psi_{nm}(\beta) \rangle|^2. \tag{4.12}$$

Com esse resultado, podemos analisar uma série de situações interessantes, e em particular o comportamento da distribuição com a temperatura para alguns estados de superposição característicos.

### 4.1.1 Superposição $|1\rangle + |0\rangle$

Primeiramente estamos interessados na superposição mais simples entre dois estados número,

$$|\psi_{10}\rangle = C'_1|1\rangle + C'_2|0\rangle, \quad (4.13)$$

onde  $C'_1 = C'_2 = \sqrt{2}/2$ . Duplicando-se os graus de liberdade, encontramos

$$\begin{aligned} |\psi_{10}, \tilde{\psi}_{10}\rangle &= \frac{1}{2}(|1, \tilde{1}\rangle + |1, \tilde{0}\rangle \\ &+ |0, \tilde{1}\rangle + |0, \tilde{0}\rangle). \end{aligned} \quad (4.14)$$

À temperatura zero, a probabilidade de encontrarmos o estado duplicado  $|\psi_{10}, \tilde{\psi}_{10}\rangle$  no estado fundamental ou com apenas um fóton é dada respectivamente por

$$|\langle \tilde{0}, 0 | \psi_{10} \rangle|^2 = C'^2_1 = 1/4 \quad (4.15)$$

e

$$|\langle \tilde{1}, 1 | \psi_{10} \rangle|^2 = C'^2_2 = 1/4. \quad (4.16)$$

Essas quantidades são importantes aqui, uma vez que nossos resultados à temperatura finita deverão resgatá-las como casos particulares.

Inserindo as variáveis térmicas através da aplicação da transformação Bogoliubov, obtemos

$$\begin{aligned} |\psi_{10}(\beta)\rangle &= \frac{1}{2}(U(\beta)|1, \tilde{1}\rangle + U(\beta)|1, \tilde{0}\rangle \\ &+ U(\beta)|0, \tilde{1}\rangle + U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Afim de encontrarmos a distribuição de probabilidade térmica, fazemos  $n = 1$  e  $m = 0$  na equação (4.11), encontramos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | \psi_{10}(\beta) \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(-\beta\epsilon_{r-1/2})} u^2(\beta)(r)}{Z(\beta)^{1/2}} + \frac{e^{(-\beta\epsilon_r/2)} u(\beta)v(\beta)(2r+1)}{Z(\beta)^{1/2}} \right. \\ &+ \left. \frac{e^{(-\beta\epsilon_{r+1/2})} v^2(\beta)(r+1)}{Z(\beta)^{1/2}} + \frac{e^{-\beta\epsilon_r/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mostramos na figura 14, o comportamento da distribuição em função da temperatura para diferentes números de fótons. Observamos que nosso resultado recupera a equações (4.15) e (4.16) à temperatura zero. Verificamos ainda que a probabilidade de encontrarmos

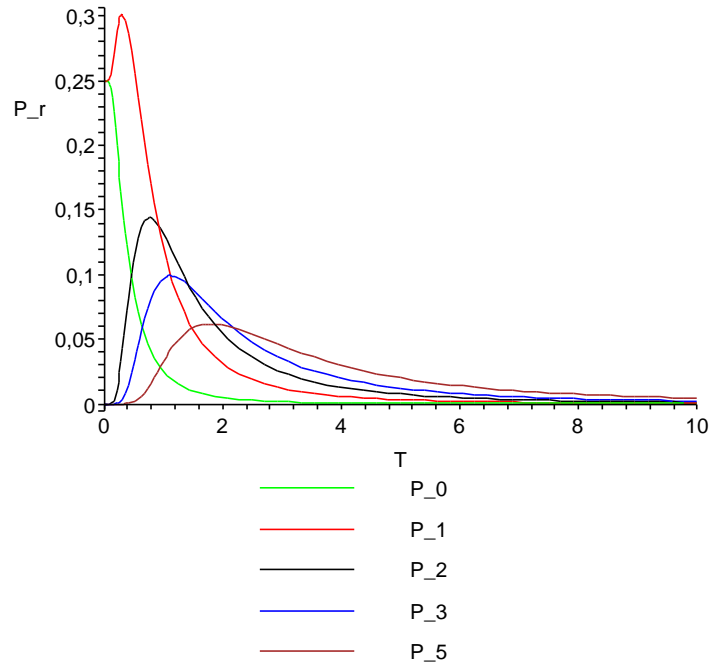


Figura 14: Distribuição de probabilidade térmica para superposição  $\frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle$ .

o estado  $|\psi_{10}(\beta)\rangle$  no estado fundamental diminui à medida que a temperatura aumenta, o mesmo acontecendo para mais fótons. Nesses casos, notamos a presença de um máximo na distribuição de probabilidade para temperaturas diferentes de zero.

#### 4.1.2 Superposição $|1\rangle + |2\rangle$

Continuando nossas análises, propomos a superposição dos estados a um e dois fótons. Dessa maneira, tomamos

$$|\psi_{12}\rangle = D'_1|1\rangle + D'_2|2\rangle, \quad (4.19)$$

onde  $D'_1 = D'_2 = \sqrt{2}/2$ . Procedendo com o formalismo da DCT descrito anteriormente, temos

$$\begin{aligned} |\psi_{12}(\beta)\rangle &= \frac{1}{2}(U(\beta)|1, \tilde{1}\rangle + U(\beta)|1, \tilde{2}\rangle \\ &+ U(\beta)|2, \tilde{1}\rangle + U(\beta)|2, \tilde{2}\rangle). \end{aligned} \quad (4.20)$$

A projeção do estado  $|\psi_{12}(\beta)\rangle$  no estado número é obtida fazendo-se  $n = 1$  e  $m = 2$  na equação (4.11), de modo que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | \psi_{12}(\beta) \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(-\beta\epsilon_{r-1}/2)} u^2(\beta)(r)}{Z(\beta)^{1/2}} + \frac{e^{(-\beta\epsilon_r/2)} u(\beta)v(\beta)(2r+1)}{Z(\beta)^{1/2}} + \frac{e^{(-\beta\epsilon_{r+1}/2)} v^2(\beta)(r+1)}{Z(\beta)^{1/2}} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{e^{(-\beta\epsilon_{r-2}/2)} u^4(\beta)r(r-1)}{Z(\beta)^{1/2}} - \frac{4e^{(-\beta\epsilon_{r-1}/2)} u^3(\beta)v(\beta)(r^2)}{Z(\beta)^{1/2}} \right. \\ &+ \frac{e^{-\beta\epsilon_r/2} u^2(\beta)v^2(\beta)(6r^2+6r+2)}{Z(\beta)^{1/2}} - \frac{2u(\beta)v^3(\beta)e^{-\beta\epsilon_r+1/2}(2r^2+4r+2)}{Z(\beta)^{1/2}} \\ &\left. + \frac{v^4(\beta)e^{-\beta\epsilon_r+2/2}(r+2)(r+1)}{Z(\beta)^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

A distribuição de probabilidade térmica  $P_r = |\langle \tilde{r}, r | \psi_{12}(\beta) \rangle|^2$  com a temperatura é mostrado nas figuras 15 e 16.

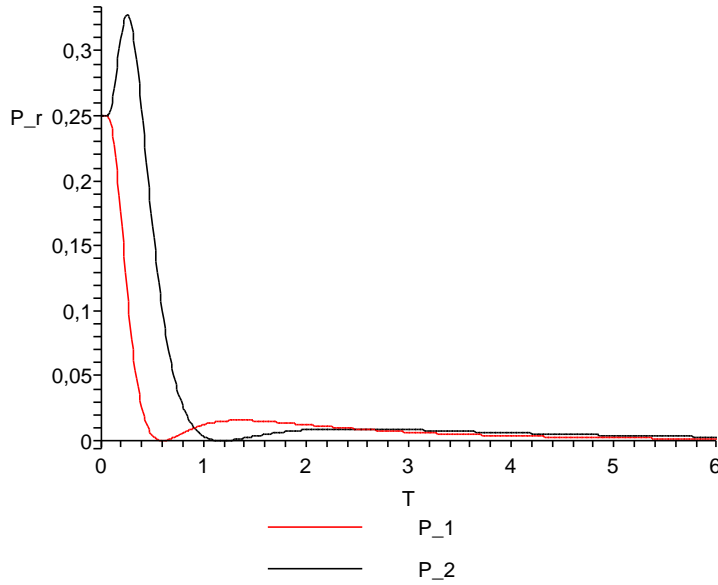


Figura 15: Distribuição de probabilidade térmica para superposição  $\frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|2\rangle$ .

Observamos que diferentemente da superposição anterior, a probabilidade de encontrarmos um ou dois fótons no estado  $|\psi_{12}(\beta)\rangle$  decai mais rapidamente para zero. Notamos que a probabilidade de encontrarmos o estado  $|\psi_{12}(\beta)\rangle$  com mais de dois fótons é, em geral, não-nula.

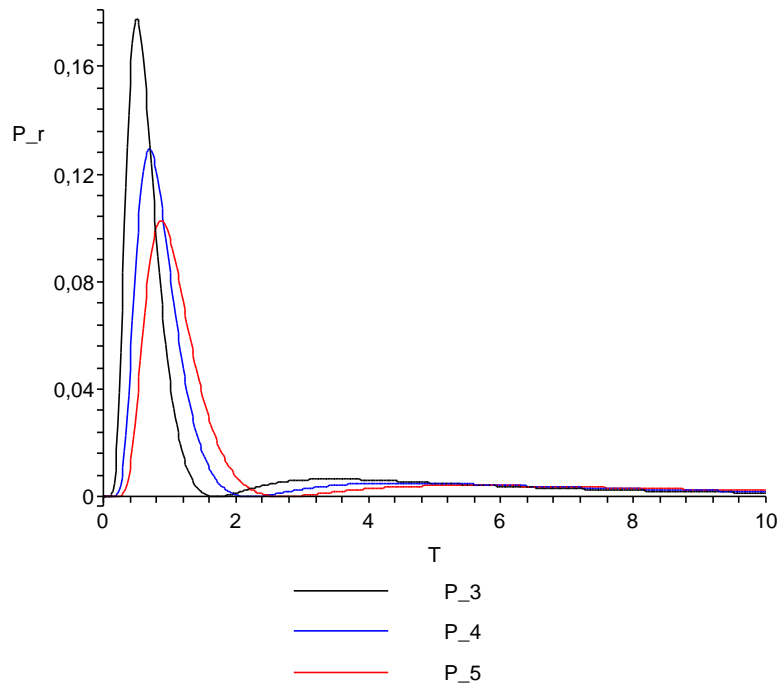


Figura 16: Distribuição de probabilidade térmica para superposição  $\frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|2\rangle$ .

## 4.2 Distribuição de Probabilidade Térmica dos Estados Coerentes

Neste momento, estamos interessados em escrever explicitamente a distribuição de probabilidade em função da temperatura para o estado coerente térmico  $|\alpha, \tilde{\alpha}, \beta\rangle$ . Vamos proceder de forma bastante similar à apresentada anteriormente, sustentando-nos na prescrição da DCT exposta no início do capítulo.

No capítulo 3 introduzimos o estado coerente térmico obtido via DCT da seguinte maneira

$$|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} U(\beta) |n, \tilde{m}\rangle, \quad (4.22)$$

que pode também ser escrita como

$$|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{n+m}}{n!m!} U(\beta) (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^m |0, \tilde{0}\rangle. \quad (4.23)$$



Inserindo  $U^\dagger(\beta)U(\beta) = 1$  na expressão acima obtemos

$$|\alpha, \tilde{\alpha}, \beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{n+m}}{n!m!} U(\beta) (a^\dagger)^n U^\dagger(\beta) U(\beta) (\tilde{a}^\dagger)^m U^\dagger(\beta) U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle &= |0(\beta)\rangle, \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta) \end{aligned}$$

e utilizando a equação (1.15), podemos expressar o estado coerente térmico como

$$|\alpha, \tilde{\alpha}, \beta\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{n+m}}{n!m!} [a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^m |s, \tilde{s}\rangle. \quad (4.24)$$

Escrevendo os operadores térmicos em função dos não-térmicos com auxílio das expressões (1.53) e (1.54) encontramos

$$\begin{aligned} |\alpha, \tilde{\alpha}, \beta\rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{n+m}}{n!m!} \\ &\times [u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}]^n [u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a]^m |s, \tilde{s}\rangle. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Realizando uma expansão binomial nos termos da equação acima, temos que

$$[u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [u(\beta)a^\dagger]^{n-k} [-v(\beta)\tilde{a}]^k, \quad (4.26)$$

$$[u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a]^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} [u(\beta)\tilde{a}^\dagger]^{m-j} [-v(\beta)a]^j. \quad (4.27)$$

Utilizaremos essas expansões para calcular a aplicação dos operadores  $[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^m$  no estado  $|s, \tilde{s}\rangle$ . Antes disso, faz-se necessário realizarmos uma pequena análise afim de simplificarmos cálculos posteriores. No cálculo da probabilidade

$$P_p(\alpha, \beta) = |\langle \tilde{p}, p | \alpha, \tilde{\alpha}, \beta \rangle|^2. \quad (4.28)$$

somente os termos com  $n = m$  nas expressões obtidas anteriormente contribuem. Utilizando as expansões (4.26) e (4.27), a equação (4.25) se escreve como

$$|\alpha, \tilde{\alpha}, \beta\rangle = \Theta(\beta; s, n, j, k) |s + n - j - k, \tilde{s} + m - j - k\rangle,$$

onde  $\Theta(\beta; s, n, j, k)$  são os coeficientes resultantes das aplicações dos operadores depois de implementadas as expansões binomiais na equação (4.25). Ao projetarmos no estado número  $|p, \tilde{p}\rangle$  encontramos

$$P_p(\alpha, \beta) = \Theta^2(\beta; s, n, j, k) \left[ \delta_{p, s+n-j-k} \delta_{\tilde{p}, s+m-j-k} \right]^2. \quad (4.29)$$

Logo, somente os termos  $n = m$  sobrevivem. Ou seja, para o cálculo da distribuição não haverá soma no índice  $m$ , o que simplifica consideravelmente as equações posteriores.

Assim, utilizando a expansão binomial e as equações (4.9) e (4.10), podemos encontrar a distribuição de probabilidade através da equação abaixo

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}, p | \alpha, \tilde{\alpha}, \beta \rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \epsilon_s / 2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{2n}}{(n!)^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(s+n-j)!}{(s-j)!} \\ &\times [-v(\beta)]^{(k+j)} [u(\beta)]^{(2n-k-j)} \theta(s-j) \\ &\times \delta_{p, s-j+n-k} \delta_{\tilde{p}, \tilde{s}-j+n-k}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $\theta(x)$  é a função degrau. Fazendo  $T \rightarrow 0$ , o que implica  $v(\beta) = 0$  e  $Z(\beta) = u(\beta) = 1$  nessa expressão, obtemos após algumas manipulações

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}, p | \alpha, \tilde{\alpha}, \beta \rangle_{T=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{2n}}{(n!)^2} n! \delta_{p,n} \\ &= \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{2n}}{n!}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que é a amplitude de probabilidade  $\langle \tilde{p}, p | \alpha, \tilde{\alpha} \rangle$  para o estado coerente duplicado a temperatura nula. A distribuição de probabilidade sob efeito de temperatura  $P_p(\alpha, \beta)$  para estado coerente térmico é mostrada nas figuras 17 e 18.

Notamos na figura 17 notamos que a probabilidade de encontrarmos um fóton no estado coerente térmico possui um máximo para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ , e que tal máximo diminui à medida que  $\alpha$  cresce. Observa-se ainda da figura 18 que o estado fundamental e o estado a um fóton são mais prováveis a temperatura nula, ao contrário dos sistemas com mais fótons que possuem máximos a temperatura não-nula. No entanto, todas as distribuições tendem para zero quando a temperatura aumenta.

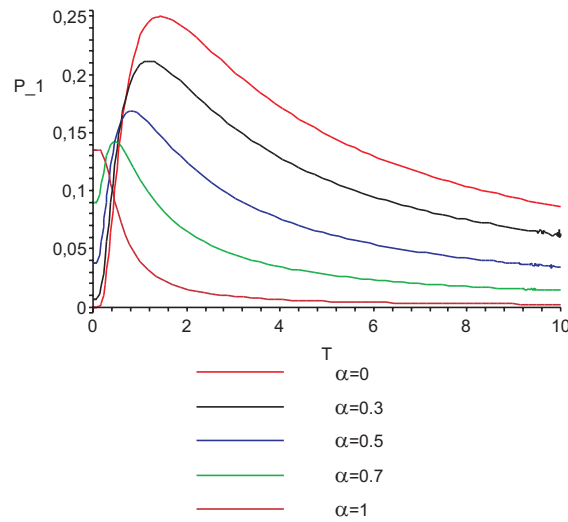


Figura 17: Distribuição de probabilidade térmica  $P_1(\alpha; \beta)$  para o estado coerente.

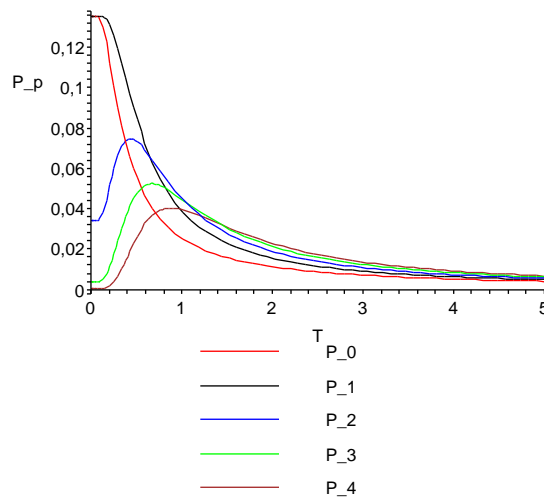


Figura 18: Distribuição de probabilidade térmica  $P_p(\alpha; \beta)$  para o estado coerente com  $\alpha = 1$ .

### 4.3 Distribuição de Probabilidades Térmicas para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$

Seja o estado de superposição entre o estado coerente e o estado número proposto no capítulo antecedente. Nosso interesse é encontrar, a exemplo dos casos anteriores, a distribuição de probabilidade térmica para tal estado. Recapitulando o que foi realizado

na seção (3.2) temos que o estado de superposição de interesse é dado por

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (A'|\alpha\rangle + B'|n\rangle), \quad (4.32)$$

onde por simplicidade escolhemos  $A'$ ,  $B'$   $\alpha$  são reais e  $\eta$  é dado por

$$\eta = A'^2 + \frac{2A'B'\alpha^n e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}} + B'^2.$$

Da seção (3.3), o estado  $|\alpha_n\rangle$  termalizado via DCT é escrito como

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle &= \frac{1}{\eta} \{ A'^2 U(\beta) |\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + A'B' U(\beta) |\alpha, \tilde{n}\rangle \\ &+ A'B' U(\beta) |n, \tilde{\alpha}\rangle + B'^2 U(\beta) |n, \tilde{n}\rangle \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Encontramos assim a amplitude de probabilidade

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}, r | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta} \{ A'^2 \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + A'B' \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle \\ &+ A'B' \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{\alpha} \rangle + B'^2 \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{n} \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O primeiro e o quarto termo da expressão acima foram obtidos anteriormente e são dados pelas equações (4.30) e (4.11). O segundo termo é dado por

$$\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m e^{-\alpha^2/2}}{m! \sqrt{n!}} \langle \tilde{r}, r | U(\beta) [a^\dagger]^m [\tilde{a}^\dagger]^n | 0, \tilde{0} \rangle. \quad (4.35)$$

Usando  $U^\dagger(\beta)U(\beta) = 1$ , a definição (1.15) e as expressões (1.44) e (1.46) temos

$$\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m e^{-\alpha^2/2}}{m! \sqrt{n!}} \langle \tilde{r}, r | [a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n | s, \tilde{s} \rangle. \quad (4.36)$$

De forma idêntica ao procedimento realizado na seção (4.2), concluímos que o único termo da soma em  $m$  que contribui para o cálculo das distribuições de probabilidade é aquele no qual  $n = m$ . Logo, a equação anterior assume a forma simplificada abaixo

$$\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\epsilon_s/2}}{Z(\beta)^{1/2}} \frac{\alpha^n e^{-\alpha^2/2}}{(n!)^{3/2}} \langle \tilde{r}, r | [a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n | s, \tilde{s} \rangle. \quad (4.37)$$

Escrevendo os operadores térmicos em função dos não-térmicos com as equações (1.53) e

(1.54), e efetuando a expansão binomial encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \epsilon_s / 2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \\
&\times \frac{\alpha^n e^{-\alpha^2 / 2}}{(n!)^{3/2}} [-v(\beta)]^{(k+j)} [u(\beta)]^{(2n-k-j)} \\
&\times \frac{(s+n-j)!}{(s-j)!} \theta(s-j) \\
&\times \delta_{r, s+n-j-k} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}+n-j-k}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Analogamente, o terceiro termo da expressão (4.34) é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{\alpha} \rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \epsilon_s / 2}}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_{k'=0}^n \binom{n}{k'} \sum_{j'=0}^n \binom{n}{j'} \\
&\times \frac{\alpha^n e^{-\alpha^2 / 2}}{(n!)^{3/2}} [-v(\beta)]^{(k'+j')} [u(\beta)]^{(2n-k'-j')} \\
&\times \frac{(s+n-j')!}{(s-j')!} \theta(s-j') \\
&\times \delta_{r, s+n-j'-k'} \delta_{\tilde{r}, \tilde{s}+n-j'-k'}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

A temperatura nula, as equações (4.38) e (4.39) tornam-se as expressões conhecidas

$$\langle \tilde{r}, r | U(\beta) | \alpha, \tilde{n} \rangle_{T=0} = \langle \tilde{r}, r | U(\beta) | n, \tilde{\alpha} \rangle_{T=0} = \frac{\alpha^r e^{-\alpha^2 / 2}}{\sqrt{r!}},$$

ou seja, todos os termos da equação (4.34) reproduzem os resultados esperados.

Assim, a distribuição de probabilidade para bósons no estado  $|\alpha_n(\beta)\rangle$

$$P_r(\alpha, n, \beta) = |\langle \tilde{r}, r | \alpha_n(\beta) \rangle|^2,$$

pode ser obtida com auxílio das expressões (4.11), (4.30), (4.38) e (4.39). A análise do comportamento desta distribuição em função da temperatura para algumas situações particulares é descrita a seguir.

### 4.3.1 Distribuição de probabilidade para o estado $|\alpha_0(\beta)\rangle$

A distribuição  $P_r(\alpha, n, \beta)$  para  $n = 0$  é mostrada nas figuras 19 e 20 para alguns valores de  $\alpha$  e  $r$ . Observamos da figura 19 que a probabilidade de encontrarmos um fóton no estado de superposição  $|\alpha_n(\beta)\rangle$  possui máximos que decrescem à medida que  $\alpha$  cresce. Nota-se ainda que todas as distribuições tendem a zero para altas temperaturas.

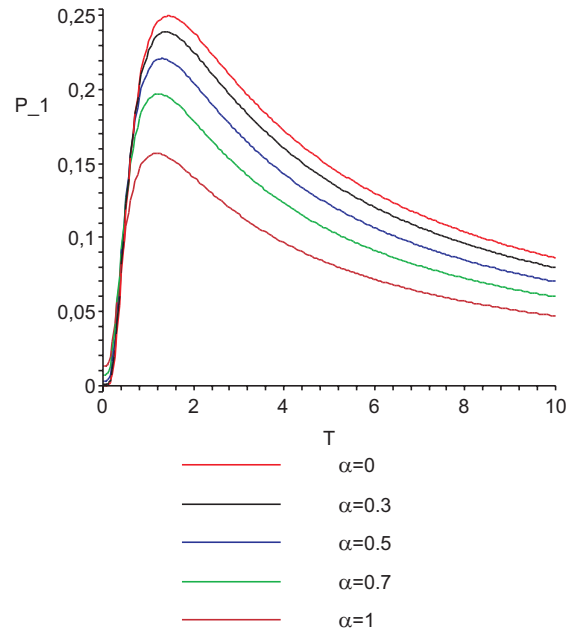


Figura 19: Distribuição de probabilidade térmica  $P_1(\alpha, 0; \beta)$  para o estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  com  $A'=B'=1$ .

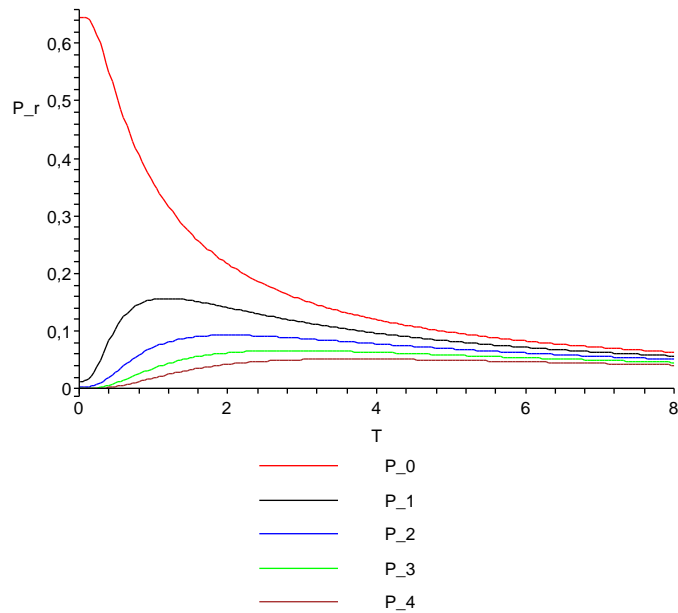


Figura 20: Distribuição de probabilidade térmica  $P_r(\alpha, 0; \beta)$  para o estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  com  $A' = B' = 1$  e  $\alpha = 1$ .

Na figura 20, verificamos que o estado fundamental é mais provável quando comparado aos demais e que a distribuição de probabilidade para essa situação é maior a temperatura zero, diferentemente dos estados com mais fótons, cujos máximos correspondem a

temperaturas não-nulas. Novamente observamos que a distribuições tendem a zero para altas temperaturas.

### 4.3.2 Distribuição de probabilidade para o estado $|\alpha_1(\beta)\rangle$

Continuando nossa análise, vamos investigar o comportamento da distribuição de probabilidade para o estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$ . Neste sentido, substituímos  $n = 1$  nas equações que constituem a expressão para  $P_r(\alpha, n; \beta)$ , mostrada nas figuras 21 e 22 para algumas situações características.

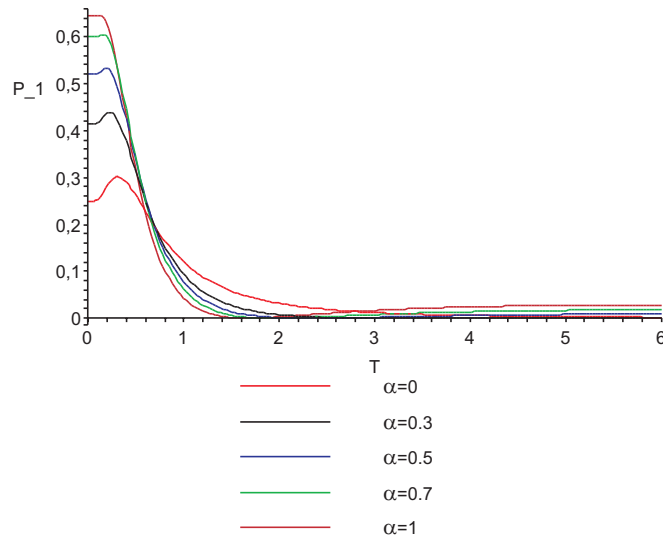


Figura 21: Distribuição de probabilidade térmica  $P_r(\alpha, 1; \beta)$ , para o estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  com  $A'=B'=1$ .

Verifica-se da figura 21 que, ao contrário do resultado obtido para o estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$ , em um dado intervalo de temperatura a distribuição de probabilidade no estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  tem máximos maiores à medida que  $\alpha$  aumenta, apesar de todas tenderem a zero para altas temperaturas. Da figura 22 constatamos que a probabilidade de obtermos um fóton no estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  possui um máximo a temperatura zero e em geral torna-se não-nula para maiores temperaturas. Para estados com mais fótons, a maior probabilidade encontra-se para temperaturas não-nulas.

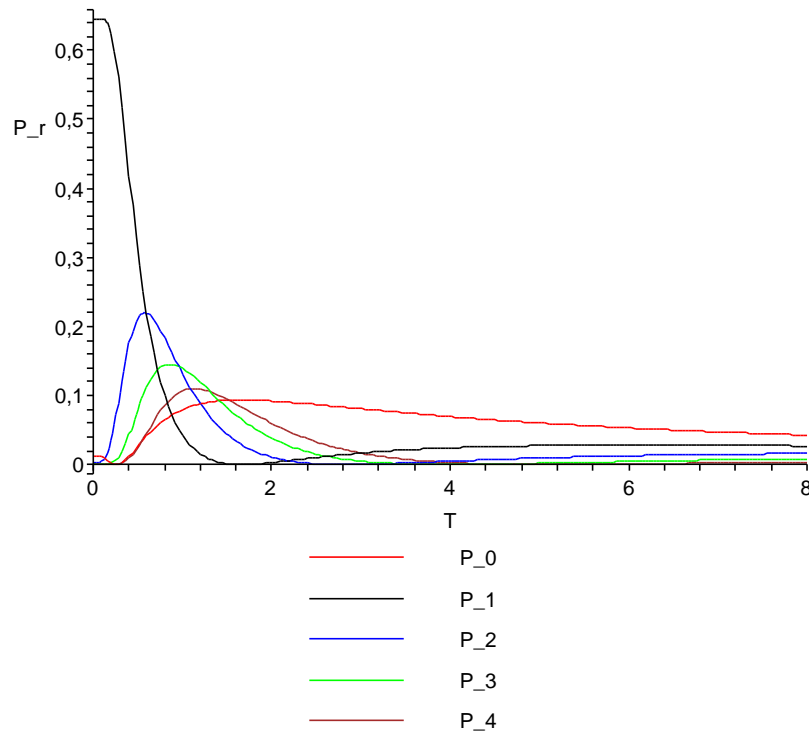


Figura 22: Distribuição de probabilidade térmica  $P_r(\alpha, 1; \beta)$  para o estado  $|\alpha_1(\beta)\rangle$  com  $A'=B'=1$  e  $\alpha = 1$ .

### 4.3.3 Distribuição de probabilidade para o estado $|\alpha_2(\beta)\rangle$

Por fim, vamos descrever o comportamento da distribuição de probabilidade para o estado de superposição  $|\alpha_2(\beta)\rangle$ . De maneira análoga aos casos anteriores, construímos os gráficos nas figuras 23 e 24. Para valores distintos do parâmetro  $\alpha$ , a probabilidade de obtermos um fóton no estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  possui um comportamento diferente do obtido para o estado  $|\alpha_0(\beta)\rangle$  e  $|\alpha_1(\beta)\rangle$ , pois notamos a presença de outros máximos para temperaturas diferentes de zero (ver figura 23). Com auxílio da figura 24, verificamos que a probabilidade de obtermos dois fótons no estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  é máxima para temperatura nula, ao contrário dos estados com diferentes números de fótons, cuja maior probabilidade ocorre a temperaturas não-nulas.



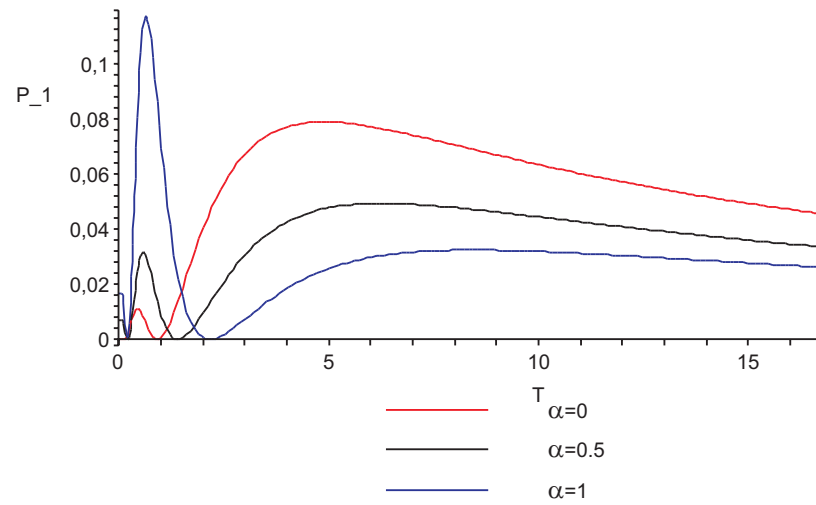


Figura 23: Distribuição de probabilidade térmica  $P_r(\alpha, 2; \beta)$  para o estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  com  $A'=B'=1$ .

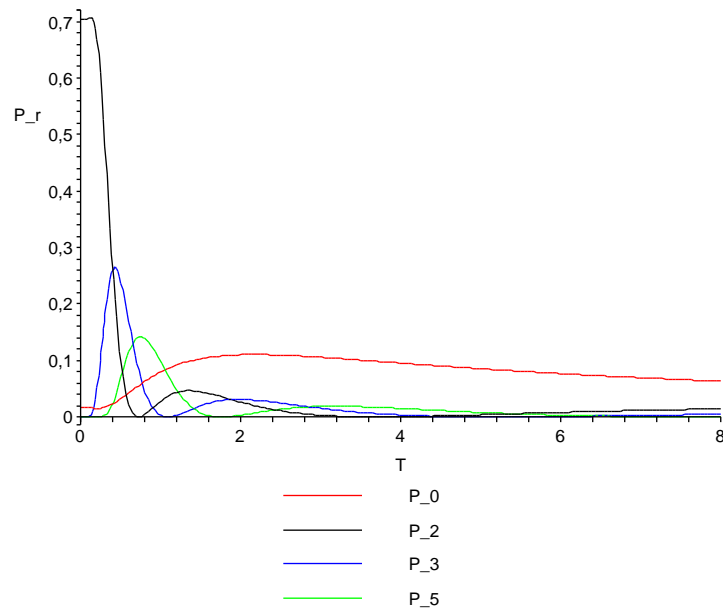


Figura 24: Distribuição de probabilidade térmica  $P_r(\alpha, 2; \beta)$  para o estado  $|\alpha_2(\beta)\rangle$  com  $A'=B'=1$  e  $\alpha=1$ .

## 5 *Conclusão e Perspectivas*

Neste trabalho utilizamos o formalismo da dinâmica de campos térmicos para analisar os efeitos de temperatura na estatística dos estados de superposição do campo eletromagnético; introduzimos o estado térmico na superposição do estado coerente e o estado número e encontramos o fator de Mandel para o sistema, analisando seu comportamento para fatores distintos de normalização, e para diferentes valores do parâmetros  $\alpha$  do estado coerente. Em particular, concluímos que a estatística do estado de superposição formado pelo estado fundamental e pelo estado coerente é super-Poissoniana, como descrito nas figuras (2) e (3). Na superposição  $|\alpha\rangle + |1\rangle$  e  $|\alpha\rangle + |2\rangle$  observamos que o aumento do fator  $\alpha$  concorre para tornar o estado de superposição super-Poissoniano, enquanto o aumento do número de fótons no estado de Fock compete para transformar a estatística deste estado de superposição sub-Poissoniana.

Adicionada a essa análise estatística, encontramos a dependência explícita da distribuição de probabilidade com a temperatura para superposição de dois estados número, para o estado coerente, e por fim para superposição entre o estado coerente e os estados de Fock. No caso do estado coerente, observamos que a distribuição de probabilidade para fótons decai mais rapidamente à medida que  $\alpha$  cresce (figura 17), além disso nota-se a presença de máximos na distribuição à temperatura não nula para estados com dois ou mais fótons (figura 18).

Além dos resultados específicos dos estados estudados, vale ressaltar aspectos práticos característicos do formalismo da DCT. Um deles é a facilidade em introduzir o efeito de temperatura nos estados de superposição estudados, uma vez que o formalismo descreve a Física Estatística a partir de espaços Hilbertianos. Dessa forma, é bastante promissor utilizar essa estrutura para construir novos estados de superposição em desenvolvimentos posteriores, bem como implementar a DCT para representações destes estados no espaço de fase.

## Apêndice A

A média do operador número,  $N$ , apresentada na seção (3.3) do capítulo 3 é obtida através das funções auxiliares listadas abaixo

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{n + \alpha^2}{\sqrt{n!}}, \\
 \phi_2 &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}} + \sqrt{\frac{n}{(n-1)!}}, \\
 \phi_3 &= \frac{n + \alpha^2 + 2}{\sqrt{n!}}, \\
 \varphi_1 &= \frac{(n+1)\alpha^2}{(n+1)!} + \frac{n\alpha^{-2}}{(n-1)!} + \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)!(n-1)!}} + \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}}, \\
 \varphi_2 &= \frac{n+2}{n!} + \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}}.
 \end{aligned}$$

As funções apresentadas no capítulo 3 que definem a média do operador número quadrado,  $N^2$ , são dadas por

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{2\alpha^4 + \alpha^2}{\sqrt{n!}} + (2\alpha^2 + 1)\sqrt{\frac{n}{(n-1)!}}, \\
 f_2 &= \frac{\alpha^2(4n + 3 + \alpha^2) + n + 1}{\sqrt{n!}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)!}}, \\
 f_3 &= \frac{(2n+3)\alpha^2}{\sqrt{n!}} + (2n+1)\sqrt{\frac{n}{(n-1)!}}, \\
 f_4 &= \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n!}}, \\
 g_1 &= \frac{\alpha^2(2n+1)}{\sqrt{n!}} + (2n-1)\sqrt{\frac{n}{(n-1)!}}, \\
 g_2 &= \frac{(3n+1)(1+\alpha^2) + \alpha^4}{\sqrt{n!}} + \alpha^2\sqrt{\frac{n}{(n-1)!}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)!}}, \\
 g_3 &= \frac{\alpha^2(3+2\alpha^2)}{\sqrt{n!}} + (3+2\alpha^2)\sqrt{\frac{n}{(n-1)!}}, \\
 g_4 &= \frac{\alpha^4 + 3\alpha^2 + 1}{\sqrt{n!}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{\alpha^2(n+1)}{n!} + \alpha^{-2} \sqrt{\frac{n^2(n-1)}{(n-2)!(n-1)!} + \frac{n\alpha^2}{n!} + \frac{n^2\alpha^{-2}}{(n-1)!}}, \\
h_2 &= \sqrt{\frac{n(n+1)^2}{(n-1)!n!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)\alpha^{-4}}{(n-2)!} + \frac{(n+1)^2 + n(n+1)}{n!}}, \\
h_3 &= \frac{(n+1)\alpha^2}{n!} + \frac{(2n^2+n)\alpha^{-2}}{(n-1)!} + \frac{(n+1)(n+2)\alpha^2}{(n+1)!}, \\
h_4 &= \frac{(n+1)^2}{n!}, \\
y_1 &= (2n+1) \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-1)!(n+1)!}} + (2n-1) \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}}, \\
y_2 &= \frac{3n+1}{n!} + (2n+1) \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}} + 2 \sqrt{\frac{n(n-1)}{n!(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{\sqrt{(n-1)!}}}, \\
y_3 &= 3 \sqrt{\frac{n}{n!(n-1)!}} + 2 \sqrt{\frac{n(n-1)}{n!(n-2)!} + \frac{2n}{(n-1)!} + 2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{\sqrt{n}}{n!(n-1)!}}, \\
y_4 &= \frac{1}{n!} + \frac{3\sqrt{n}}{n!(n-1)!} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{n!(n-2)!}}, \\
q_1 &= \frac{n^2 + (n+1)(2n+1)}{\sqrt{n!}}, \\
q_2 &= \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n!}}, \\
p_1 &= \frac{(3n+1)(n+1) + n^2}{\sqrt{n!}}, \\
p_2 &= \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n!}}.
\end{aligned}$$

## *Referências*

- [1] H. Umezawa and Yamanaka, Adv. Phys. **37** (1989) 531
- [2] H. Umezawa, Phys. Essay **2** (1989) 101
- [3] K. Kowalski, N. P. Landsman and Ch. G. Van Weert Eds., Thermal Field Theories and Their Applications, Physica A **158** (1989)
- [4] H. Umezawa, H. Matsunomoto and M. Tachick, Thermofield Dynamics and Condensed States(North-Holland, N. York, 1982)
- [5] A. Mann and Revzen, Phys. Lett A **134** (1989) 273
- [6] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351
- [7] A. E. Santana, F. C. Khanna, M Revzen. Phys. Rev. A (2002)
- [8] F. C. Khanna and A. E. Santana, An introduction to Thermal Field Dynamics, (monografia a ser publicada-notas de curso UnB)
- [9] H. Umezawa, Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics(American Institute of Physics, N. York, 1982)
- [10] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130** (1963) 2529
- [11] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131** (1963) 2766
- [12] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett **10** (1963) 84
- [13] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [14] Y. Takahashi and H. Umezawa, collect. Phenom. **2** (1975) 55(reprinted in Int. J. Mod. Phys. **10** (1966) 1755
- [15] F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa, Eds. ; *Banff/CAPWorkshop on Therman Field Theories and their applications* (World Scientific, Singapore, 1984)
- [16] V. V Dodonov, ‘Nonclassical’ states in quantum optics: a ‘squeezed’ review of the first 75 years, Journal of Optics: Quantum and Semiclassical Optics, **4** (2002) R1-R33.
- [17] T. H. Boyer; Phys. Rev. A **9** (1974) 2078
- [18] D. F. Walls e G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer-Verlag, Berlim, 1994)
- [19] A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa e Y. Yamanaka, Phys. Lett. A **140** (1989) 475
- [20] B. Baseia, S. B. Duarte e J. M. C. Malbouisson, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt **3** (2001)

- [21] S. M. Barnett e P. L. Knight, *J. Opt. Soc. Am. B* **2** (1985) 467
- [22] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of many-particles Systems* (McGraw-Hill, N. York, 1982)
- [23] H. Chu and H. Umezawa, *Inst. J. Mod.Phys. A* **9** (1994) 2363
- [24] I. Ojima, *Ann. Phys. (N.Y.)* **137** (1981) 1
- [25] A. Matos neto, J. D. M. Vianna, A. E. Santana, F. C. Khanna, *Physcs Essay*, **9** (1996) 569
- [26] S. Song, S. X. Ding and I. An, *J. Phys. A. Math. Gen.* **26** (1993) 5197
- [27] G. Vitiello, *The Algebraic Structure of Thermofield Dynamics and q-Deformation of the Weyl-Heisenberg Algebra in Proceedings of the Workshop on Thermal Theories and Their Application*, Eds. Y. X. Gui, F. C. Khanna and Z. B. Su (World Scientific, Singapore, 1996). Ver Também, E. Coleghini, M. Rasetti and G. Vitiello, *Phys. Rev Lett* **66** (1991) 2056, A. Iorio and G. Vitiello, *Mod. Phys. Lett B.* **8** (1994) 269; Y. N. Srivastava, G. Vitiello and Widom, *Ann. Phys. (N.Y.)* **238** (1995) 200
- [28] T. Kopf, A. E. Santana, F. C. Khanna, *J. math. Phys.* **38** (1997) 4971
- [29] A. E. Santana and F. C. Khanna, *Phys. Lett. A* **203** 68
- [30] S. S. Mizrahi and V. V. Dodonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 8847-8857
- [31] L. Mandel, *Opt. Lett.* (1979) **205**
- [32] G. R. de Melo, *Dinâmica de Campos Térmicos em Estados de Superposição do Campo Eletromagnético Quantizado*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Bahia, 2004.
- [33] H. M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics*(Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1973)
- [34] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamic*, Wiley, 3a edição.
- [35] R. J. Glauber. *Quantum optics*. New york: Academic Press
- [36] Klauder, John R. *Coherent states: Applications in physics and mathematical physics*. Singapore: World Sci
- [37] J. S. Schwinger, *Brownian motion of a quantum oscillator*, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407432.
- [38] K. Wódkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle, and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A*, **35** (1987) 2567-2577.