Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INFINITESIMAL

THALES VICTOR DIAS

Brasília, 2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Victor Dias, Thales

VV643s Sobre o processo ensino-aprendizagem do Cálculo Infinitesimal / Thales Victor Dias; orientador Dr. Rui Seimetz. -- Brasília, 2023.

123 p.

Dissertação(Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. Educação. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Pré requisitos. 4. Ensino Médio. 5. Análise. I. Seimetz, Dr. Rui, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INFINITESIMAL

por

Thales Victor Dias

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de Março de 2023.

Comissão Examinadora:

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz - Orientador (MAT/UnB)

Simone

Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva - (FUP/UnB)

Prof. Dr. Eleandro Adir Phillipsen - (Química/UEG)

Raquel C. Dörr

Prof. Dra. Raquel Carneiro Döor -MAT/UnB)

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INFINITESIMAL

por

Thales Victor Dias

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de Março de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rui Seimetz - Orientador (MAT/UnB)

Profa. Dra. Simone Vasconcelos - (MAT/UnB)

Prof. Dr. Eleandro Adir Phillipsen - (Química/UEG)

Prof. Dra. Raquel Döor - (MAT/UnB)

Agradecimentos

Gostaria de dedicar este trabalho e agradecer às seguintes pessoas de modo muito especial: Ao meu papai Domingos Victor Dias (Domingão da Saneago), à minha mamãe Maria Arlinda de Mendonça Victor Dias (Furtada de Mendonça, Linda Victor), vocês sempre foram os meus mecenas e incentivadores desde o primeiro dia, a vocês devo os ensinamentos sobre a Boa Educação e a Vida Modesta (que pouco mais de dois mil anos antes antecipara Quintos Horatius Flaco), à minha segunda mamãe Tinem (Maria Lindalva Furtado de Mendonça), à minha belíssima esposa Ingrid Bastos Dourado, que tanto me incentivou a continuar firme neste propósito e não me deixou desistir em vários momentos e ao meu motivo maior de viver, o Pierrito (Tales Pierre Bastos Victor Dias) e ao seu irmão (ou irmã) Horácio ou Lorena Sophie: Não importa o que vocês façam (ou não façam) vocês são a minha força maior. A tia Diza e Thaíza, a tia Eva e a Carmelita, Leontino e Tio Dalvan Maria, Tio Bento tia Josefa, Tio Preto (Joanes) e Ana, tia Dalva, tio Domingos e Tia Celsa.

Agradeço a paciência, a doçura, a compreensão e todo o carinho do meu querido e sábio orientador, o Professor Rui Seimetz, que conheci na graduação na Universidade de Brasília há mais de um década na disciplina de Álgebra para o Ensino. Professor Rui é um espelho.

Agradeço também aos seguintes mestres que me marcaram de forma muito intensa ao longo da minha formação, e aqui sei que inevitavelmente vou cometer injustiças ao não mencionar todos, que ainda assim estão no fundo do meu coração: Esp. Isía, Esp. Elizabeth (Beth), Esp. Tadeu, Esp. Toninho, Esp. Weliton, Esp. Roberta, Esp. Rodolfo, Me. Joaquim, Dr. George A., Esp. Eduardo L., Me. Gustavo L., Esp. Juscelino N. N., Esp. Marcelo, Me. Débora S., Esp. Gil, Esp. Giovane, Esp. Maísa, Esp. Carlinhos, Esp. Ferreirinha, Esp. Anderson, Esp. Milanez, Esp. Felippe, Dr. Eleandro A. P., Esp. Izabel, Esp. Cecílio B., PhD. Helliomar, Dr. Oberdan, Esp. Norton, Me. Renato, Dr. Álvaro, Dr. Fábio S. C., Esp. Carlos W., Dr. A. R. Baigorri, Me. Lineu C. A. N., PhD. P. Zörnig, PhD. P. Schumyatsky, Dr. R. Seimetz, PhD. S. Shokranian, Dr. H. T. Godinho, Dr. Celius A. M., Dr. M. L. Rabelo, Dr. M. M. A. Patrão, Dr. R. O. Gandulfo, Dr.Ivair Alves N., Dr. Yuri D. S., Dra. Simone de Vasconcelos a todos os professores do Profmat e a todos os colegas do mestrado - sem todo o apoio de vocês eu não teria conseguido.

Dedico estas linhas aos meus mais espetaculares colegas de trabalho e amigos do coração, Esp. Valdeci Afonso Enes & Neta, eu amo o senhor e a sua família demais, Estevão Santinoni, amo muito o senhor, Fábio, Bruna, Marival, Tássia, Rodrigo, Antônio Borges, Adálcio, Dr. Francisco de Assis, Esp. Marreiros, Esp. Jamiron Valenzuela (Don Miron), Esp. Aurinda, sua linda, Esp. Jaqueline, Esp. Xavier, Esp. Regina Bremenkamp, Esp. Selma, Esp. Cida, Esp. Gilma, Tia Lúcia, Clarisse, Esp. Maíra, Esp. Simone, Esp. Fabiana, Esp. Paulo Cruz, Esp. Solange, Esp. Léo, Esp. Nayara, Esp. Lucas e Miguel, Esp. Ana Paula, Esp. Silvana querida, Esp. Érika, Esp. Giovanni, Dr. George Augusto, Esp. Lander, Me. Fernando, Esp. Fernanda, Esp. Marilene, Me. Ana Paula, Esp. Andrea, Esp. Ivan, Esp. Fernando, Esp. Carlos, Esp. Grazi, sua querida, Esp. Nedma, Me. Dani, meu querido Esp. Valmir, Esp. Jader querido, Esp. Marcos, Esp. Malu, Esp. Sandro querido, Esp. Júlio, Dr. Átila, Esp. Nazarethe, Dra. Saiaka,

Aos meus inesquecíveis alunos e alunas, vocês estão num cofre dentro do meu coração,

Agradeço também a muitas outras pessoas cujos nomes não estão aqui mas cuja gratidão será eterna.

Resumo

Começando por apresentar a evolução por que passa a disciplina conhecida hoje como Cálculo Diferencial e Integral, são enunciadas as principais definições e teoremas presentes nas ementas dos cursos de graduação nas universidades federais como preparação para apresentar a um panorama da discussão que se faz modernamente, sobre como se ensina, se aprende e se superam dificuldades presentes nesse processo ensinar-aprender. Após levantar os principais aspectos deste debate, é feita coleta de dados com dois grupos de estudantes, uma amostra dentre mestrandos do PROFMAT e outra de jovens universitários cursando as disciplinas de Cálculo 1 ou Matemática 1 na Universidade de Brasília - UnB, nos dois períodos do calendário de 2022, respectivamente. Os dados obtidos são descritos detalhadamente e confrontados com a literatura disponível de modo a permitir ao leitor identificar: (i) O que é a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na UnB (ii) Quais são as principais afirmações matemáticas apresentadas aos estudantes (iii) Quais são os principais aspectos do ensino e os consideráveis obstáculos epistemológicos para as aprendizagens (iv) Qual é o perfil dos mestrandos do PROFMAT, na UnB, cursando Fundamentos de Matemática, no primeiro semestre de 2022 (v) Qual é o perfil dos estudantes de graduação cursando Cálculo 1 ou Matemática 1, na UnB, no segundo semestre de 2022 (vi) Contexto de mobilidade, rede de ensino de origem, tempo de estudo, dificuldades, pré-requisitos no Ensino Médio dos estudantes (vii) identificação de habilidades e competências a serem desenvolvidas na Formação Geral Básica (FGB) no Novo Ensino Médio (NEM) para o sucesso em Cálculo Diferencial e Integral (viii) Subsídios para a fundamentação e futura concepção de Disciplinas Eletivas e adequação dos programas das Unidades Currículares das diversas Trilhas de Aprendizagem em que estejam presentes a Matemática e as suas Tecnologias no NEM (viii) A abordagem presente neste trabalho permite sua aplicação em diferentes contextos e para diversos propósitos que atendam ao maior e mais diverso público possível interessado no tema, (ix) Também os dados brutos coletados estão disponibilizados ao final do texto, mantendo, porém, o cuidado de preservar a confidencialidade dos dados pessoais dos participantes, de modo que o leitor interessado poderá por si mesmo formular novas hipóteses e testá-las por sua conta, além de alimentarmos com este gesto o carácter experimental do método científico e a sua capacidade de desafiar os dogmas, no sentido de que o próprio leitor poderá chegar às conclusões a que chegamos reproduzindo quantas vezes desejar o mesmo experimento com o uso do mesmo método.

Palavras-chave: Educação, Matemática, Cálculo, Limites, Ensino, Pré-requisitos, Ensino Médio

Abstract

Starting by presenting the evolution of the discipline known today as Differential and Integral Calculus, the main definitions and theorems present in the syllabuses of undergraduate courses at federal universities are enunciated in preparation for presenting an overview of the discussion that takes place nowadays, about how to teach, learn and overcome difficulties present in this teaching-learning process. After raising the main aspects of this debate, data is collected with two groups of students, a sample among master's students from PROFMAT and another of young university students studying Calculus 1 or Mathematics 1 at the University of Brasília - UnB, in the two periods of the 2022 calendar respectively. The data obtained are described in detail and compared with the available literature in order to allow the reader to identify: (i) What is the discipline of Differential and Integral Calculus at UnB (ii) What are the main mathematical statements presented to students (iii) What are the main aspects of teaching and the considerable epistemological obstacles to learning (iv) What is the profile of PROFMAT master's students, at UnB, studying Fundamentals of Mathematics, in the first half of 2022 (v) What is the profile of students in graduation studying Calculus 1 or Mathematics 1, at UnB, in the second half of 2022 (vi) Mobility context, original teaching network, study time, difficulties, prerequisites in students' High School (vii) identification of skills and competences to be developed in Basic General Training (FGB) in the New High School (NEM) for success in Differential and Integral Calculus (viii) Subsidies for the foundation and future design of Elective Disciplines and adaptation of the programs of the Curriculum Units of the various Paths of Learning where Mathematics and its Technologies are present in NEM (viii) The approach present in this work allows its application in different contexts and for different purposes that serve the largest and most diverse public interested in the subject (ix) The raw data collected are also available at the end of the text, maintaining, however, care to preserve the confidentiality of the participants' personal data, so that the interested reader can formulate new hypotheses by himself and test them on his own, in addition to to feed with this gesture the experimental nature of the scientific method and its ability to challenge dogmas, in the sense that the reader himself will be able to reach the conclusions we arrived at by reproducing the same experiment using the same method as many times as he wants.

Keywords: Education, Mathematics, Calculus, Limits, Teaching, Prerequisites, High

School

Sumário

Lista de Figuras

Memorial

Filho do luzianiense Domingos Victor Dias (1944), de Alípio e Martinha, e da unaiense Maria Arlinda de Mendonça Victor Dias (1964), de Valdemar Cristovão e Corina Gregório, este mineiro-goiano só pôde escrever estas linhas graças a sua Flor de Mandacaru Ingrid e seus filhos, o Querido Tales Pierre e o Horácio, além, é claro, da Luna e do Nick.

Este trabalho é um passo na jornada de uma criança irrequieta - que é como me percebo - na busca do seu lugar-no-mundo. De alguém que procura, ansiosamente, há 33 anos, uma maneira de se expressar e que acredita, no mais íntimo de si, ter na escrita a sua única possibilidade de falar ao outro e aos outros. Não sei fazer quase nada, conhecimento prático não consegui apreender dos meus pais e avós, não tenho habilidades relevantes e o produto que tens aqui, como o mel da abelha, não sei qual ou para quem utilidade terá, mas é tudo o que vivo a fazer na vida.

Vivo em paz com os homens e em guerra com as minhas entranhas, canta o trovador Paco Ibañez, e me parece que falar, para mim, pela escrita, um não-sei-quê de assuntos, tem na forma, mais até que na substância, o caminho para o nirvana.

Espero que você, amiga leitora e caro leitor, tenha paciência para me ouvir até o final dessa prosa.

Thales Victor

Introdução

O instrumental proporcionado pelo domínio global do Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Uma Variável Real é a maneira de se progredir para níveis mais avançados em diversos campos do saber (MEDEIROS, 2002). Sendo de tamanha aplicabilidade, se faz necessário desenvolver técnicas e métodos que facilitem a apreensão pelos alunos dos seus conceitos, parafraseando (GAZZONI e OST, 2008).

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) está presente em todos os cursos de graduação da área de Ciências naturais, matemática e estatística. No primeiro caso, é um curso de serviço, auxiliar, portanto. Quando não é auxiliar, ocorre no bacharelado ou na licenciatura, confome (LIMA, 2012).

A boa compreensão dos conceitos e, sobretudo, o domínio dos algoritmos oriundos de diversos teoremas, para a solução de problemas algébricos é fundamental para o acesso a níveis mais elevados de complexidade nas diferentes sub-áreas das Ciências Exatas e da Terra, em consonância com a exposição de (REZENDE, 2003).

Os diversos grupos de pesquisa em Educação Matemática, como o GIEM (Grupo de Investigação em Educação Matemática) da Universidade de Brasília - UnB, em seu Departamento de Matemática e colaboração estreita com a FE (Faculdade de Educação), por exemplo, nos trabalhos de (DÖRR, MUNIZ, PINA NEVES, 2016), (DIAS, 2015), (SEIMETZ, NEVES e MENEZES, 2020), dentre outros, tem avançado sobre o tema, sobre quais são as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes e como mitigá-las.

Quais são os tópicos dentre os pré-requisitos do CDI que os estudantes consideram mais difíceis? O Questionário 2, disponível em 6.2 será esclarecedor nesse sentido. As respostas dos estudantes consultados em 6.2 serão apresentadas, sistematizadas, analisadas e interpretadas no capítulo 4.

São os exercícios mais importantes do que a teoria? Para esta questão, veremos mais adiante que a seção 3.2, sobre Heurística, juntamente com as respostas obtidas no Questionário 2, disponível em 6.2 corroboram os trabalhos de (TALL, 1978), (GAZZONI e OST, 2008), (PONTES, 2019), (PRESTES, 2003), (HEIN, 2000) além de outros trabalhos de grande relevância para os estudos dos métodos e técnicas de ensino na pesquisa em Educação Matemática, presentes nos trabalhos, por exemplo, do GIEM (Grupo de Investigação em Educação Matemática) da Universidade de Brasília - UnB, disponíveis nas referências deste estudo.

Como resolver problemas de matemática e de CDI em especial? Temos aqui, novamente, uma confluência de resultados a partir das pesquisas citadas em 3.2 e nos Questionários 1, 6.1 e 6.2. Qual é a influência da modelagem matemática e o estímulo à intuição na compreensão dos conceitos de CDI? É do que trata a seção 3.3 ao abordar a modelagem matemática, juntamente com a seção 3.4, que serão corroboradas pelos estudantes, conforme veremos no próximo capítulo, em relação aos Questionários 1 e 2, disponíveis nos 6.1 e 6.2.

De que maneira as tecnologias da informação e comunicações (TICs) podem contribuir para a aprendizagem? Nesta seção 3.6 citaremos um software de código aberto, o Geogebra, como exemplo catalisador na compreensão e visualização dos conceitos, definições e teoremas do CDI.

O que é e para que serve a análise de erros, em matemática? Como trabalhar contraexemplos de modo a evidenciar sutilezas? Para as duas últimas questões aqui postas, as seções 3.5 sobre Análise de Erros e 3.7 sobre sutilezas lógicas, respectivamente, mostraremos que se coadunam com os resultados obtidos nos Questionários 1 e 2, disponíveis em 6.1 e 6.2.

Este estudo está inserido neste contexto. O seu principal objetivo é analisar qualitativa e quantitativamente as respostas de dois grupos de estudantes, um formado pelos alunos de Cálculo 1 e Matemática 1, ofertadas para cursos de graduação de uma universidade pública federal, no segundo semestre de 2022, cuja metodologia se deu por meio de de Questionário online, disponível no Anexo 6.2, e o outro, composto por estudantes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade de Brasília (UnB), no Campus universitário Darcy Ribeiro, no Plano Piloto, da disciplina de Fundamentos de Matemática, ofertada no primeiro semestre de 2022, com metodologia baseada em Questionário impresso, respondido em casa e entregue duas semanas depois, disponível integralmente como Anexo 6.1.

Ambos os questionários apresentando perguntas sobre a compreensão, o processo ensino-aprendizagem, a percepção, e questões técnicas, operacionais sobre Limites, a primeira terça parte de um curso regular de Cálculo l a fim de que se identifiquem lacunas na formação durante as etapas anteriores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, identificadas como pré-requisitos, maiores dificuldades e suas relações com os conceitos para o sucesso no CDI, e, finalmente, obter um panorama da proficiência destes estudantes das turmas pós-pandemia de SARS-COVID-19 em relação aos conceitos de limites de funções de uma variável real por meio de de exercícios típicos do tema.

Durante o processo ensino-aprendizagem da disciplina, diversas dificuldades surgem dependentemente da finalidade a que este conhecimento se destina. Entre as mais frequentes, estão lacunas nos pré-requisitos oriundas de má formação durante o ensino médio, falta de motivação dos alunos originada em questões teóricas como escassez de intertextualidade, ou de ordem mais prática, como a visualização dos conceitos e a interação de grupos.

Entender o Cálculo como uma oportunidade única de visitar alguns temas é uma abordagem propícia para proporcionar compreensão global das suas ferramentas e seus conceitos. Por outro lado, tratar a disciplina como uma Análise mais fácil ou como pré-requisito para o Cálculo Avançado pode tornar superficial esta experiência.

Dentre as maneiras de abordar o seu ensino de modo mais efetivo, destaca-se o uso de softwares, disponível em 3.6, a solução de problemas e exercícios, disponível em 3.2, a Análise não-standard e a análise de erros, disponível em 3.5, dentro desse pensamento observam-se as TICs como recursos que facilitam a mediação pedagógica e o processo de aprendizagem, no entanto é importante que ocorra uma formação contínua do docente para que este esteja capacitado a utilizar esses recursos tecnológicos na prática do ensino de CDI.

No Capítulo 1 será esboçado o contexto e o longo processo de estruturação da disciplina de CDI no Brasil, a partir de 1934, tal qual a conhecemos atualmente.

No Capítulo 2, com base na Ementa da disciplina, disponível no 6.1, para o CDI na Universidade de Brasília, apresentaremos as definições e teoremas mais importantes para a estruturação do Cálculo.

No Capítulo 3 apresentaremos alguns obstáculos presentes no processo de ensino-aprendizagem, segundo (BACHELARD, 1977), uma breve Heurística, na seção 3.2, segundo (PÒLYA, 1995), com destaque para um exemplo de resolução de um problema de razão de variação. Um pouco de modelagem matemática o leitor encontrará na seção 3.3, bem como breves análises sobre uso de softwares, na seção 3.6, finalizando o capítulo com alguns detalhes e sutilezas lógicas, na seção 3.8.

O Capítulo 4 será o cerne deste estudo e discutirá os resultados obtidos a partir da aplicação de dois Questionários, cuja metodologia será a abertura da exposição, com os detalhes sobre a caracterização das amostras, procedimentos e técnicas utilizados.

Finalmente, no Capítulo 5 mostraremos estarem de acordo os resultados obtidos e descritos no capítulo anterior com pesquisas recentes já referidas nos Capítulos 1 e 3, em relação aos conteúdos estruturadores do CDI, descritos de modo sucinto no Capítulo 2.

Nas referências o leitor encontrará todas as pesquisas mencionadas ao longo do texto e nos anexos poderá consultar os questionários, integralmente reproduzidos, juntamente com os bancos de dados gerados a partir daqueles, também integralmente disponíveis confome ditam as boas práticas dos métodos científicos experimentais.

Capítulo 1

História do Cálculo Diferencial e Integral - CDI - no Brasil

1.1 Do ensino do CDI no Brasil a partir de 1934

O primeiro curso superior de Matemática do Brasil surgiu em São Paulo, com a fundação da Universidade de São Paulo (USP) em 1934 (LIMA, 2012). A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral não surge nesse momento, os tópicos eram apresentados na disciplina de Análise.

Antes disso o ensino do Cálculo Diferencial e Integral era utilizado no país somente em escolas militares e em politécnicas, e a sua abordagem tinha um caráter essencialmente prático.

Basicamente ensinavam-se procedimentos algorítmicos, exercícios de cálculos de limites, derivadas e integrais. Definições e deduções eram pouco frequentes e somente constavam aqueles enunciados de que dependessem tópicos mais avançados.

Com a criação do curso de Matemática em 1934, houve um redirecionamento da abordagem, dos objetivos e dos métodos. As universidades europeias foram o espelho que se tentou reproduzir no país.

Os docentes deveriam ser pesquisadores no sentido estrito do termo, e ante a falta de recursos humanos qualificados em número suficiente, muitos matemáticos europeus foram contratados com a intenção de formar pessoas capazes de realizar pesquisa científica, um exemplo foi Luigi Fantappiè, analista italiano.

No curso iniciado por Fantappiè, a partir de 1934, a abordagem era diferente, além de o Cálculo ser visto na perspectiva de Cauchy e seus contemporâneos, o seu ensino não visava à mera aplicabilidade dos seus conteúdos, mas principalmente à conceitualização e fundamentação das teorias expostas num curso de Cálculo.

Não raramente, para fazer esse tipo de exposição, era necessário recorrer a outras teorias, como a construção dos números reais por meio dos cortes de Dedekind, que não eram habitualmente vistas até então no ensino do Cálculo oferecido pelas escolas superiores brasileiras. Assim, foi instituída no Curso de Matemática da FFCL (Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras) da USP a disciplina de Análise Matemática. (LIMA, 2006).

Sobre a evolução do conceito de número e a insuficiência dos números reais, esta questão se coloca de algumas maneiras bastante interessantes. Do que dispomos, naturalmente, de precípuo é a história da matemática como artesã do nosso interesse para buscar adentrar o drama das desventuras, dos intrincados e insuspeitos rastros já borrados, provavelmente à luz da consciência, tal que possamos nos guiar pela trilha discreta do inevitável, dos gambitos e dos contragambitos, e então ter sensação irreal mais possível do castelo cuja abóboda quiçá marginal é que nos resta no vigésimo de séculos talvez cinquenta.

Gregos, de egípcios e fenícios débito têm. Desconhecida, porém, por nós, a matemática chinesa tem permanecido. Vista como uma estrutura sistemática ou como uma coleção de problemas, nossa ciência pôde assim alimentar-se em função daqueles que, de repente, se lhes ocorriam.

Com Thales, Pythagoras, Anaximander, Anaximenes, Mamercus, Mandryatus, Epicharmus, Hippasus, Philolaus, Archippus, Lysis, Archytas e sua solução da duplicação do cubo temos usos dos Naturais, pelos gregos tornados clássicos.

A segunda idade da matemática ela atinge da Idade Média até o Renascimento (BALL, 1960). No sexto século tem início, finaliza-se, digamos, com a invenção da geometria analítica e do cálculo infinitesimal.

A moderna aritmética, a álgebra e a trigonometria são deste período. Os inteiros e racionais estão nos problemas que surgem. As principais rotas comerciais são dos árabes. Arya-Bhata, Brahmagupta, Bhaskara, Al-Khwarizmi, Tabit Ibn Korra, são os autores dos trabalhos mais influentes deste período histórico.

Com Newton e Leibnitz progrediu-se conceitualmente e quanto à notação, especialmente o segundo deles, e os demais matemáticos do décimo oitavo século que, engajados nos problemas da mecânica, definitivamente tornam tácita a aceitação dos complexos.

Consideravelmente distinta daquela das escolas militares, a abordagem para o ensino da Análise na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo (FFCL) era altamente formal, com elevado nível de rigor e demonstrações para todos os enunciados.

Nesse contexto as técnicas de cálculo perderam seu espaço. Objetivava-se assim fornecer sólida conceptualização dos elementos matemáticos estudados ao modo europeu. Não havia uma procura explícita de diálogo entre intuição e rigor, de modo que todos os conceitos eram diretamente sistematizados e a abordagem rigorosa.

Suas duas principais caraterísticas eram o rigor simbólico-formal e a abordagem baseada na organização weierstrassiana do conteúdo, isto é, adotando a sequência de Cauchy-

-Weierstrass de apresentação: a noção formal de limite para embasar as ideias de derivada e integral.

Na década de 1950, com a influência do modelo norte-americano e com a experiência de egressos do curso de Matemática que se tornaram professores na FFCL, e que haviam sentido dificuldades naquela abordagem, ganha força um movimento de mudança da explanação, exemplificado na pessoa de Elza Furtado Gomide, que passou a defender uma necessária adequação no nível de rigor e formalismo com que eram apresentados os conceitos de função, limite, derivada e integral para um curso inicial.

Na USP, essas observações e tendências começaram inicialmente a provocar uma abordagem menos crítica da Análise e com apresentação mais manipulativa, dando base para o que em 1964 passou a se chamar Cálculo.

Na realidade o que se estava propondo era a passagem de um modelo teoricista para um modelo tecnicista (LIMA, 2012). O responsável então pela cátedra de Análise era Omar Catunda, que foi receptivo a essas propostas, e que começou a influenciar todo o país na nova abordagem a partir dos anos 1950 e mais concretamente com a publicação de Um Curso de Análise, de 1962.

Tentava-se aplicar os diferentes níveis de rigor que uma exposição pode apresentar. De fato,

> el rigor de la matemática no es absoluto, está en proceso de continuo desarrolho, los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas. (ALEXSANDROV, 1985)

As mudanças que decorreram dessas influências foram uma maior valorização da intuição, principalmente geométrica, uma abordagem menos abstrata, porém, igualmente rigorosa dos conceitos, os exercícios, escassos desde 1934, de cálculos de limites, derivadas, pontos de máximos e mínimos, esboços de gráficos, integrais, áreas, volumes e comprimentos de arco passaram a figurar explicitamente nos programas.

Em 1964 a cadeira de Análise Matemática juntamente com as disciplinas que dela estavam subordinadas passou a se chamar Cálculo Infinitesimal. O modelo norte-americano prevalecendo, foi criada a disciplina de Cálculo Avançado ou Análise agora distinta daquela anterior a 1964.

Houve um período de perturbação (ou transição) (LIMA, 2012), que o especialista em História das Disciplinas (CHERVEL, 1990) define como a existência simultânea de dois modelos, em que se ensinavam diretamente Análise e também se praticava ensinar inicialmente Cálculo Diferencial e Integral.

1.2 Análise dos livros-texto de G. Thomas e de M. Spivak

Nesta seção compararemos as abordagens de conteúdo específico de dois livros didáticos largamente utilizados e representativos de duas tendências no país e ressaltaremos as diferenças entre eles, a partir das observações da Professora Dra. Simone Vasconcelos.

Com frequência, a abordagem dos conceitos fundamentais - função, limite, derivada e integral não está bem determinada dentro de cada departamento de matemática. Isto é, se o professor da disciplina tem tendência intuicionista, a apresentação tem menor nível de rigor. Se o professor, por outro lado, é formalista, então o uso de demonstrações é frequente. Veja-se o caso da Integração de um ponto de vista intuitivo e operacional, a partir da obra (THOMAS, 2002), largamente utilizada no país.

Conforme a apresentação na obra Finney, Ross L. Cálculo de George B. Thomas Jr., volume 1 / Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução de Paulo Boschcov; revisão técnica Leila Maria Vaconcellos Figueiredo. São Paulo: Addison Wesley, na edição de 2002, a sequência de apresentação da integral, por exemplo, segue a seguinte ordem: a determinação de primitivas e o conceito de integrais indefinidas, problemas de valor inicial e modelagem matemática.

A primitiva é apresentada da seguinte maneira em (THOMAS, 2002):

Definição 1. *Uma função $F(x)$ é uma primitiva de uma função $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x no domínio de f. O conjunto de todas as primitivas de f é a integral indefinida de f em relação a x, denotada por*

$$\int f(x)dx$$

onde $\int$ é o símbolo de uma integral. A função f é o integrando de uma integral e x é a variável de integração.

São apresentados exercícios resolvidos. Um exemplo é:

Calcule $\int e^{2x}dx$.

Tabelas com fórmulas de integrais são apresentadas. A integral indefinida, por exemplo,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = sec^{-1}x + C$$

, e a fórmula que a originou

$$\frac{d}{dx}sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

, $x > 1$.

A seguir apresentam-se exercícios resolvidos sobre os problemas de valor inicial:

Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo-se que ela deve passar pelo ponto $(1, -1)$.

Finalmente, a definição e aplicação dos conceitos com modelagem matemática, nesse caso especificamente, o seguinte exercício resolvido:

Um balão que sobe a uma taxa de 12 pés/s está a uma altura de 80 pés acima do solo quando um pacote é jogado. Quanto tempo o pacote demora para chegar ao solo?

Trata-se aqui de resolver duas equações diferenciais, e utilizar em seguida as condições iniciais.

Os exercícios acima tencionam desenvolver as seguintes habilidades e competências: determinar primitivas, calcular integrais, verificar fórmulas de integração, resolução de problemas de valor inicial por meio de gráficos, determinar posição a partir de velocidade, posição a partir de aceleração, determinar curvas, aplicações: queda na lua, decolar da terra, parar um carro a tempo, frear uma motocicleta, martelo e pena, movimento com aceleração constante, queda livre próxima à superfície do planeta.

A seguir, veja-se a abordagem para o mesmo tópico, integração, a partir da obra *Calculus*. Spivak, Michael. 1967. W. A. Benjamin, Inc., New York.

Considerada de alta dificuldade para os alunos já na USP de 1950 (LIMA, 2012) pelo rigor, formalismo e complexidade dos problemas.

Inicia-se a apresentação dos conceitos de derivadas e integrais como partes constituintes de um mesmo conceito fundamental. São descritas curvas e as suas tangentes. É dada uma definição de curva tangente a partir da noção preliminar de curva secante utilizando a notação de limite.

Definição 2. *Se $h \neq 0$ então os dois pontos distintos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$ determinam uma reta secante a uma curva que passe por aqueles pontos como*

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Em seguida, é definida uma função derivável, apresentados os conceitos e definições de derivada à direita e derivada à esquerda. Enunciado e demonstrado o teorema: Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

Mas são apresentados os seguintes problemas, e problemas no sentido de George Pòlya:

1. Determinar f' para $f(x) = (x)$;

2. Seja $f(x) = 0$ para x irracional, e $\frac{1}{q}$ para x racional. Seja $\frac{p}{q}$, fração irredutível. Demonstrar que f não é derivável em a para nenhum a.

O Capítulo 11 trata do significado da derivada, na página 237. Inicia com as definições de ponto de máximo e valor máximo de uma função de uma variável real. É apresentado o teorema:

Teorema 1. *Seja f uma função definida sobre (a, b). Se x é um máximo (ou um mínimo) para f sobre (a, b), e f é derivável em x, então $f'(x) = 0$.*

Observe-se que não se supõe a derivabilidade, nem sequer a continuidade de f em outros pontos. É apresentada a demonstração. Em seguida, a definição de ponto máximo (mínimo) local, seguido do seguinte teorema:

Teorema 2. *Se f está definida sobre (a, b) e tem um máximo (ou mínimo) local em x, e f é derivável, então $f'(x) = 0$.*

Apresenta-se a definição de ponto crítico e, em seguida, temos o

Teorema 3. *Teorema de Rolle: Se f é contínua sobre $[a, b]$ e derivável sobre (a, b), e $f(a) = f(b)$, então existe um número x em (a, b) tal que $f'(x) = 0$.*

É dada a demonstração.

Teorema 4. *Teorema do Valor Médio: Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe um número x em (a, b) tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

É dada a demonstração.

Corolário 1. *Se se define f sobre um intervalo e $f'(x) = 0$ para todo x do intervalo, então f é constante no intervalo.*

É dada a demonstração deste fato.

Corolário 2. *Se f e g estão definidas no mesmo intervalo e $f'(x) = g'(x)$ para todo x do intervalo, então existe algum número c tal que $f + g = c$.*

É dada a demonstração.

Segue-se a definição de função crescente e decrescente, aparecendo logo depois o

Corolário 3. *Se $f'(x) > 0$ $\forall x \epsilon (a, b)$, então f é crescente no intervalo (a, b).*

É dada a demonstração.

Teorema 5. *Suponhamos $f'(a) = 0$.*

Se $f'(a) > 0$, então f tem um mínimo local em a;

se $f''a < 0$, então f tem um máximo local em a.

É dada a demonstração.

Teorema 6. *Suponhamos que existe $f''(a)$.*

Se f tem um mínimo local em a,então $f''a \geq 0$;

se f tem um máximo local em a, então $f''a \leq 0$.

É dada a demonstração.

Teorema 7. *Teorema: Suponhamos que f é contínua em a, e que existe $f'(x)$ para todos os x de algum intervalo que contém a, exceto possivelmente para $x = a$. Suponhamos, ademais, que existem*

$$\lim_{x \to a} f'(x)$$

Então existe também $f'(a)$, e

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

.

É dada a demonstração.

Teorema 8. *Teorema do Valor Médio de Cauchy: Se f e g são contínuas em a, e deriváveis em (a, b), então existe um número x em a, tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

É dada a demonstração.

Teorema 9. *Teorema Regra de L'Hôpital: Suponhamos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

, e suponhamos também que existe $\lim_{x \to a} f'(x)g'(x)$. *Então existe*

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$$

, e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g(x)} g'(x)$$

É dada a demonstração.

São dadas definições e demonstrações de teoremas sobre funções convexas. É apresentada a noção de função inversa. Definem-se partição, cota inferior e superior.

Finalmente a Integral de Riemann é definida pelo Método de Darboux como segue:

Definição 3. *Uma função f, cotada sobre a, é integrável sobre a, se* $\sup Lf, P$ *:P é uma partição de* $[a, b] = \inf U(f), P$*:P é uma partição de* $[a, b]$.

Neste caso, este número comum recebe o nome de integral de f sobre $[a, b]$ e se denota por

$$\int_a^b f.$$

Teorema 10. *Se f está cotada sobre $[a, b]$, então f é integrável sobre a, se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$, tal que $Uf, P - Lf, P < \epsilon$.*

É dada a demonstração.

Atente-se o leitor para os seguintes fatos: As abordagens são igualmente reputadas no país (LIMA, 2012). Podem ser encontradas pelos alunos no mesmo departamento de matemática. Ambas exigem diferente maturidade matemática quanto à manipulação algébrica presente nas demonstrações.

São necessários em ambas as abordagens, os conhecimentos relacionados às retas, funções e gráficos, funções exponenciais, inversas, logaritmos, trigonométricas e suas inversas e paramétricas. Além da noção de intervalo.

Não se trata, portanto, da inclusão de dificuldades por inclusão de tópicos adicionais como pré-requisitos, mas se exigem dos estudantes conhecimentos mais adequadamente assimilados. Deveria ser necessária a advertência aos postulantes a vagas na disciplina a compreensão dessa exigência adicional, de nível de maturidade elevado, por exemplo. Isso será evidenciado pelos próprios estudantes a partir dos Questionários 6.2 em consonância com (DÖRR, 2016).

1.3 Etnomatemática

Em primeiro lugar, tratemos da história da Matemática, num sentido amplo, cujo berço é a África e a prova mais contundente disto é um osso petrificado encontrado entre Congo e Uganda pelo arqueólogo belga Jean de Heinzelin, nos anos 1950: O Bastão de Ishango, exposto no Instituto de Ciências Naturais da Bélgica e que constitui o mais antigo testemunho matemático da humanidade.

De outro lado, temos a etnomatemática, e.g. por meio das evidentes estruturas musicais complexas modeladas e compreendidas por meio de construções matemáticas no repertório musical contemporâneo de sociedades de tradição oral, com os povos Nzakara e Zande, aparentados pelas línguas que falam, e que ocupam um território que se divide entre a República Centro-Africana, a República Democrática do Congo e o Sudão.

A Harpa zande de cinco cordas é um instrumento usado para acompanhar rituais de canto e o modelo matemático que o acompanha é bastante curioso. É possível, a propósito de Geometria, ensinar aos alunos o conceito de fractal a partir da organização de um palácio real dos Kotovo, povo que vive dos dois lados rio Níger, em Camarões, e que está localizado na aldeia de Logone Birni.

Também na Zâmbia, no povoado Ba-ila, há formas fractais. Falar dos Sona, os gráficos na areia angolana é um modo de ensinar uma matemática interessante aos alunos. O Akwa Kuta Sona ou especialista, é o guardião da tradição de seu povo, os Tshokwe. Ele conta histórias que ilustra com o auxílio de desenhos traçados na areia com o dedo. Mas, os desenhos são tão poderosos meios de comunicação que (...)o estudo dos sona ultrapassou o quadro etnológico e permitiu o surgimento de um novo ramo da matemática.

Dentre outras variações do processo de criação de matemáticas tendo como pressuposto a natureza étnica destaca-se o Sikidy, um método de adivinhação utilizado em toda a ilha de Madagascar. Seus princípios foram herdados da geomancia árabe, que se propagou na África no rastro do Islã (...) e que, para prevenir o destino, os malgaxes, adaptando--o, manipulam quadros de grãos de fano (uma espécie de acácia) que obedecem a regras matemáticas refinadas.

(...) A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nř 9.394, de 20 de dezembro de 1996, em sua redação original, tinha única disposição no que diz respeito à educação para as relações étnico-raciais que, no seu art. 26, parágrafo 4ř, dizia: O ensino da História do Brasil levará em conta as contribuições das diferentes culturas e etnias para a formação do povo brasileiro, especialmente das matrizes indígena, africana e europeia.

Em 2003, foi sancionada a Lei nř 10.639, que modifica a LDB, para nela incluir os artigos: 26- A e 79- B. Com a demanda pela regulamentação da Lei, o Conselho Pleno, do Conselho Nacional de Educação (CNE), aprovou o Parecer 03, do ano de 2004, que instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Culturas Africanas e Afro-brasileiras, elaboradas pela comissão de conselheiros e conselheiras composta por Petronilha Beatriz Gonçalves e Silva (relatora), Carlos Roberto Jamil Cury, Francisca Novantino Pinto de Ângelo e Marília Ancona-Lopez.

Este é um documento-chave na luta por uma educação que promova as relações étnico--raciais no Brasil. Foi este parecer do CNE que trouxe a proposta de Resolução CNE/CP 01, homologada pelo Ministro da Educação, em 17 de junho de 2004. As resoluções do CNE são de aplicação compulsória em todo o território nacional e tornou-se instrumento essencial na implementação da educação para as relações étnico-raciais, embasando o Plano Nacional de Implementação das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana.

Em 2012, após anos de discussão sobre o que se pode denominar racismo acadêmico, e se concluir que seria necessário apresentar propostas concretas que contribuíssem para a igualdade racial no ensino superior, foi promulgada a Lei 12.711/2012. Com esta lei, já neste ano de 2013, todas as universidades e institutos federais terão que reservar 12,5 %, ou seja, 1/8 das suas vagas, para alunos das escolas públicas. Destas vagas reservadas para a escola pública, a metade será destinada a estudantes com renda mensal familiar até um salário mínimo e meio. O preenchimento das vagas deve levar em conta os critérios de cor e raça, seguindo a proporção de pretos e pardos no estado em que a instituição está inserida, conforme dados estatísticos do IBGE.

O artigo Narrativas de docentes sobre a obrigatoriedade do ensino da História e Cultura Afro-brasileira recomenda que esse conteúdo não seja responsabilidade de uma única disciplina ou de um professor ou professora, mas tenha o envolvimento de toda a comunidade escolar.

Qual é o nosso grande interesse nisto? Considera-se essencial que as atividades sejam, deveras, eficazes no combate ao racismo; que revelem a beleza da diversidade das culturas no continente africano, descortinando a grande consciência que têm eles de sermos irmãos na medida inversa em que por este lado do Atlântico predomina, ainda, o desconhecimento da significativa participação dos africanos na formação da nossa identidade, no processo civilizatório brasileiro.

E procurar-se-á, procurar-se-iam produzir atividades que rompessem com a tradicional representação e apresentação da escassa história de África nos currículos, com a descrição do negro como um objeto de estudo arqueológico, fossilizado, numa palavra, como diz F. Fanon em relação às duas possíveis formas de intervir na realidade, procurar-se-á, procurar-se-iam representar não a África-Negro-Tema mas a África-Negro-Vida, i.e. a história viva do continente, com seus desdobramentos mais recentes, inclusive na realidade brasileira.

O próximo capítulo será uma estruturação do CDI, conforme preconiza o programa da disciplina, presente em sua ementa, informada pelo Departamento de Matemática--MAT da Universidade de Brasília - UnB, disponível no Anexo 6.1, apresentado como uma coleção de definições e teoremas.

Por brevidade, não apresentaremos as demonstrações, mas deixaremos disponíveis nas referências obras em que se pode facilmente encontrá-las o leitor interessado.

Capítulo 2

Os teoremas essenciais do CDI

Este capítulo é fortemente baseado na apresentação de Cálculo de George B. Thomas, Volume I, com a colaboração de Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, tradução de Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo, com revisão técnica de Claudio Hirofume Asano. São Paulo - Addison Wesley, 2009. Nossa exposição se concentra nos temas apresentados num primeiro curso de CDI, normalmente divido em três partes, conforme a Ementa da disciplina, cf. 6.1.

A seguir, apresentaremos definições e teoremas do CDI:

Definição 4 (Função). *Uma função de um conjunto $\mathbb{A}$ para um conjunto $\mathbb{B}$ é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in \mathbb{B}$ a cada elemento $x \in \mathbb{A}$.*

2.1 Limites

Definição 5 (Taxa média de variação num certo intervalo). *A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[\ x_1, x_2\ ]$ é*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1))}{h}, h \neq 0$$

Definição 6 (Limite de uma função). *Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que o limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0, é o número L, e escrevemos*

$$\lim_{x \to\ x_0} f(x) = L$$

se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 <\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon$$

Teorema 11 (Leis do limite). *Se L, M, c e k são números reais e* $\lim_{x \to\ c} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to\ c} g(x) = M$*, então*

1. *Regra da soma*
$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$$
2. *Regra da diferença*
$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$$
3. *Regra do produto*
$$\lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = L.M$$
4. *Regra da multiplicação por constante*
$$\lim_{x\to c}(kf(x)) = k.L$$
5. *Regra do quociente*
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M\neq 0$$
6. *Regra da potenciação*

   Se r e s são inteiros e não tem um fator comum, e $s\neq 0$, então
$$\lim_{x\to c} f(x)^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}},$$
   desde que $L^{\frac{r}{s}}$ seja um número real. Se s é par, pressupomos que $L\neq 0$.

Teorema 12 (Teorema do Sanduíche ou do Confronto)**.** *Suponha que $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, em $x=c$. Suponha também que*
$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$
Então, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Teorema 13. *Se $f(x)\leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio $x=c$, e os limites de f e g existem quando x se aproxima de c, então*
$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Definição 7 (Limites à direita e à esquerda.)**.** *Dizemos que $f(x)$ tem um limite à direita L em x_0 e escrevemos*
$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = L$$
se para qualquer número $\epsilon>0$ existe um número correspondente $\delta>0$, de maneira que, para todos os valores de x,
$$x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow \mid f(x)-L\mid < \epsilon$$

Teorema 14. *Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se, e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais:*

$$\lim_{x\to\ c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to\ c^-} f(x) = \lim_{x\to\ c^+} f(x) = L$$

Definição 8. *Limites no infinito e infinitos*

1. *Limite no infinito*

   Dizemos que $f(x)$ possui o limite L quando x tende ao infinito e escrevemos

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

   se, para cada número $\epsilon > 0$, existe um número M correspondente tal que, para todos os valores de x,

   $$x > M \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon$$

2. *Limites infinitos*

   Dizemos que $f(x)$ tende ao infinito quando x tende a x_0 e escrevemos

   $$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = \infty$$

   se, para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que, para todo x,

   $$0 <\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow f(x) > B$$

Definição 9 (Continuidade em um ponto)**.**

Ponto interior: Uma função $y = f(x)$ é contínua em um ponto interior c de seu domínio quando

$$\lim_{x\to\ c} f(x) = f(c)$$

Extremidades: Uma função $y = f(x)$ é contínua na extremidade esquerda a ou é contínua na extremidade direita b de seu domínio quando

$$\lim_{x\to\ a^+} f(x) = f(a)$$

ou

$$\lim_{x\to\ b^-} f(x) = f(b)$$

respectivamente.

Teorema 15. *Propriedades de funções contínuas*

Se as funções f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x = c$:

Somas: $f + g$

Diferenças: $f - g$

Produtos: $f.g$

Multiplicação por constantes: $k.f$*, para qualquer número* k.

Quocientes: $\frac{f}{g}$*, um vez que* $g(c) \neq 0$.

Potenciação: $f^{\frac{r}{s}}$*, uma vez que ela é definida num intervalo aberto contendo* c*, onde* r *e* s *são inteiros.*

Teorema 16 (Composta de funções contínuas)**.** *Se* f *é contínua em* c *e* g *é contínua em* $f(c)$*, então a composta* $g \circ f$ *é contínua em* c.

Teorema 17. *Se* g *é contínua no ponto* b *e*

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x \to c} f(x))$$

Teorema 18 (Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas)**.** *Uma função* $y = f(x)$ *que é contínua em um intervalo fechado* $[a, b]$ *assume cada valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*. Em outras palavras, se* y_0 *for qualquer valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então* $y_0 = f(c)$ *para algum* c *em* $[a, b]$.

2.2 Derivadas

Definição 10 (Coeficiente angular e reta tangente)**.** *O coeficiente angular da curva* $y = f(x)$ *em um ponto* $P\,(x_0, f(x_0))$ *é o número*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Desde que o limite exista. A reta tangente à curva f *em* P *é a reta que passa por* P *e tem esse coeficiente angular.*

Definição 11 (Função derivada)**.** *A derivada de uma função* $f(x)$ *em relação à variável* x *é a função* f' *cujo valor em* x *é*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Teorema 19 (Diferenciabilidade implica continuidade)**.** *Se* f *tem uma derivada em* $x = c$*, então* f *é contínua em* $x = c$.

Teorema 20 (Teorema de Darboux)**.** *Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Teorema 21 (Regras de derivação)**.**

Função constante: Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Potenciação para inteiros positivos: Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Multiplicação por constante: Se u é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Derivada da soma: Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas, $u+v$, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Função exponencial natural:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Produto: Se u e v são deriváveis em x, então o produto uv também é, e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Quociente: Se u e v são deriváveis em x e se $v(x) \neq 0$, então o quociente $\frac{u}{v}$ é derivável é

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Potenciação para inteiros negativos: Se n é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Teorema 22 (A regra da cadeia)**.** *Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta $(f \circ g) = f(g(x))$ é derivável em x e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ é calculada em $u = g(x)$.

Definição 12 (Curva parametrizada)**.** *Se x e y são dados como funções*

$$x = f(t), y = g(t)$$

ao longo de um intervalo de valores de t, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações é uma curva parametrizada. As equações são equações paramétricas para a curva.

Teorema 23 (Derivação de funções inversas)**.** *Se f apresenta um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nulo em I, então f^{-1} é derivável em qualquer ponto de seu domínio. O valor de $(f^{-1})'$ no ponto b do domínio de f^{-1} é a recíproca do valor de f' no ponto $a = f^{-1}(b)$:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

ou

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_{x=b} = \frac{1}{\frac{df}{dx}|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Definição 13 (Máximo absoluto, mínimo absoluto)**.** *Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor máximo absoluto em D em um ponto c se*

$$f(x) \leq f(c)$$

para qualquer x em D, e um valor mínimo absoluto em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c)$$

para qualquer x em D.

Teorema 24 (Teorema do valor extremo)**.** *Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a, b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outro valor de x em $[a, b]$.*

Definição 14 (Máximo local, mínimo local)**.** *Uma função f tem um valor máximo local em um ponto interior c de seu domínio se*

$$f(x) \leq f(c)$$

para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c. Uma função f tem um valor mínimo local em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c)$$

para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c.

Teorema 25 (Primeiro teorema da derivada para valores extremos locais)**.** *Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então*

$$f'(c) = 0$$

Definição 15 (Ponto crítico)**.** *Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um ponto crítico de f.*

Teorema 26 (Teorema de Rolle)**.** *Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior (a, b). Se*

$$f(a) = f(b)$$

então há pelo menos um número c em (a, b) no qual

$$f'(c) = 0$$

Teorema 27 (Teorema do Valor Médio)**.** *Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então há pelo menos um ponto c em (a, b) em que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Uma consequência do Teorema 27 é apresentada no seguinte corolário.

Corolário 4 (Funções com derivadas nulas são constantes)**.** *Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b), então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$, onde C é uma constante.*

Corolário 5 (Funções com a mesma função derivada diferem por uma constante)**.** *Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b), então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b).*

Definição 16 (Função crescente, função decrescente)**.** *Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em I:*

1. *Se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é crescente em I.*

2. *Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é decrescente em I.*

   Uma função que é crescente ou decrescente em I é chamada monotônica em I.

Corolário 6 (Teste da primeira derivada para funções monotônicas)**.** *Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).*

1. *Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.*

2. *Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é descrescente em $[a, b]$.*

Definição 17 (Concavidade para cima, concavidade para baixo)**.** *O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é*

(a) côncavo para cima em um intervalo aberto I, se f' é crescente em I;

(b) côncavo para baixo em um intervalo aberto I, se f' é decrescente em I.

Definição 18 (Ponto de inflexão)**.** *Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um ponto de inflexão.*

Teorema 28 (Teste da segunda derivada para extremos locais)**.** *Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.*

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$.*
3. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.*

Teorema 29 (Regra de L'Hôpital)**.** *Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Teorema 30 (Regra de L'Hôpital)**.** *Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I, se $x \neq a$. Então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

Teorema 31 (Teorema do valor médio de Cauchy)**.** *Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis ao longo de todo o intervalo (a, b); suponha também que $g'(x) \neq 0$ ao longo de todo o intervalo (a, b). Existe, portanto, um número c em (a, b) no qual*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

2.3 Integrais

Definição 19. *Primitiva Uma função F é uma primitiva de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x em I.*

Definição 20. *Integral indefinida O conjunto de todas as primitivas de f é a integral indefinida de f em relação a x, denotada por*

$$\int f(x)dx$$

$\int$ é o símbolo da integral. A função f é o integrando da integral e x é a variável de integração.

Definição 21. *Limite de somas de Riemann Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Dizemos que um número I é a integral definida de f em $[a,b]$ e que I é o limite das somas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ se a seguinte condição é satisfeita: Dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ com $||P|| < \delta$ e qualquer escolha de x_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

onde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

e

$||P||$ é a norma de uma partição, isto é, o comprimento do mais longo dos subintervalos

$$max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1...n\}$$

Teorema 32 (Integral definida)**.** *Uma função contínua é integrável. Ou seja, se uma função f é contínua em um intervalo $[a,b]$, então sua integral definida em $[a,b]$ existe.*

Teorema 33 (Propriedades das integrais definidas)**.** *Sejam f e g integráveis no intervalo $[a,b]$, então*

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)d(x)$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

6. *Se f tem o valor máximo* $\max f$ *e o valor mínimo* $\min f$ *em* $[a,b]$*, então*

$$\min f.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f.(b-a)$$

7. $f(x) \geq g(x)$ *em* $[a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Definição 22 (Área sob uma curva)**.** *Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a,b]$, então a área sob a curva $y = f(x)$ em $[a,b]$ será a integral de f de a até b:*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Definição 23. *Valor médio ou média de uma função Se f for integrável em $[a,b]$, então seu valor médio em $[a,b]$, também chamado sua média, será:*

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 34 (Teorema do Valor Médio)**.** *Se f for contínua em $[a,b]$, então em algum ponto c em $[a,b]$*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 35 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e sua derivada é $f(x)$.*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Se f é contínua em qualquer ponto de $[a,b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema 36 (Substituição)**.** *Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Teorema 37. *Se g' é contínua no intervalo $[a,b]$ e f é contínua na imagem de g, então*

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Teorema 38. *Seja f contínua no intervalo simétrico $[-a,a]$.*

(a) *Se f é par, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$*

(b) *Se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$*

Definição 24. *Área entre curvas Se f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b é a integral de $(f - g)$ de a até b:*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Este é o monumento sobre o qual está apoiada a disciplina de CDI, atualmente. O que veremos no próximo capítulo são as dificuldades surgidas durante o processo de ensino--aprendizagem destes saberes, maneiras de fazê-los melhor assimiláveis e, no Capítulo 4, veremos a percepção dos estudantes sobre o CDI, sobre os seus pré-requisitos e finalizaremos medindo e interpretando, contextualizando com a literatura mencionada no Capítulo 3 a sua proficiência na resolução de exercícios relacionados às assíntotas horizontais e verticais.

Capítulo 3

O processo ensino-aprendizagem do CDI

No Capítulo 1 vimos o contexto e de que maneira se estruturou a disciplina de CDI no Brasil, a partir de 1934.

No Capítulo 2, com base na Ementa da disciplina, disponível no 6.1, para o CDI na Universidade de Brasília, apresentamos as definições e teoremas mais importantes para a estruturação do Cálculo. Destaque-se que, por brevidade, são omitidas as demonstrações e apenas referenciadas as obras em que poderãos os leitores interessados encontrar as provas.

Nas seguintes seções deste capítulo, apresentamos alguns obstáculos presentes no processo ensino-aprendizagem, segundo (BACHELARD, 1977), (PAIS, 2008), (HARDY, 1980), (CUNHA, 2004), (PRANDI, 2009), (LABEGALINI, 2009), (BARUFI, 1999), (HELLMEISTER, 2009), (LIMA, 2001), (REIS, 2001), dentre outros devidamente referenciados no corpo do texto além de caminhos possíveis para se superarem esses desafios educacionais, conforme os mesmos pesquisadores acima mencionados, e que serão corroborados no capítulo 4 a partir dos resultados obtidos com a aplicação de dois Questionários, integralmente disponíveis nos Anexos 6.1 e 6.2.

Além disso, também estão disponíveis nos Anexos 6.1 e 6.2 os bancos de dados gerados durante esta pesquisa, de modo que será possível produzir mais informações a partir de tratamento estatístico em trabalhos futuros.

O leitor também encontrará nas seções seguintes uma breve Heurística, na seção 3.2, segundo (PÒLYA, 1995), com destaque para um exemplo de resolução de um problema de razão de variação. Um pouco de modelagem matemática o leitor encontrará na seção 3.3, bem como breves análises sobre uso de softwares, na seção 3.6, finalizando o capítulo com alguns detalhes e sutilezas lógicas, na seção 3.8.

Em relação às diferentes abordagens possíveis, indaga-se: Quais são os tópicos dentre os pré-requisitos do CDI que os estudantes consideram mais difíceis? O Questionário 2, disponível em 6.2 será esclarecedor nesse sentido. As respostas dos estudantes consultados em 6.2 serão apresentadas, sistematizadas, analisadas e interpretadas no capítulo 4.

São os exercícios mais importantes do que a teoria? Para esta questão, veremos mais adiante que a seção 3.2, sobre Heurística, juntamente com as respostas obtidas no Questionário 2, disponível em 6.2 corroboram os trabalhos de (TALL, 1978), (GAZZONI e OST, 2008), (PONTES, 2019), (PRESTES, 2003), (HEIN, 2000) além de outros trabalhos de grande relevância para os estudos dos métodos e técnicas de ensino na pesquisa em Educação Matemática, presentes nos trabalhos, por exemplo, do GIEM (Grupo de Investigação em Educação Matemática) da Universidade de Brasília - UnB, disponíveis nas referências deste estudo.

Como resolver problemas de matemática e de CDI em especial? Temos aqui, novamente, uma confluência de resultados a partir das pesquisas citadas em 3.2 e nos Questionários 1, 6.1 e 6.2. Qual é a influência da modelagem matemática e o estímulo à intuição na compreensão dos conceitos de CDI? É do que trata a seção 3.3 ao abordar a modelagem matemática, juntamente com a seção 3.4, que serão corroboradas pelos estudantes, conforme veremos no próximo capítulo, em relação aos Questionários 1 e 2, disponíveis nos 6.1 e 6.2.

De que maneira as tecnologias da informação e comunicações (TICs) podem contribuir para a aprendizagem? Nesta seção 3.6 citaremos um software de código aberto, o Geogebra, como exemplo catalisador na compreensão e visualização dos conceitos, definições e teoremas do CDI.

O que é e para que serve a análise de erros, em matemática? Como trabalhar contraexemplos de modo a evidenciar sutilezas? Para as duas últimas questões aqui postas, as seções 3.5 sobre Análise de Erros e 3.7 sobre sutilezas lógicas, respectivamente, mostraremos que se coadunam com os resultados obtidos nos Questionários 1 e 2, disponíveis em 6.1 e 6.2.

3.1 Obstáculos didáticos às rupturas epistemológicas

A análise dos obstáculos na matemática é importante pelas características intrínsecas dessa ciência. Conforme (BACHELARD, 1977),

> isto se refere à regularidade do seu processo de desenvolvimento, que apresenta períodos de paradas, mas não etapas de erros ou rupturas que destruíssem o saber estabelecido.

O que o autor está querendo dizer é que velhos conhecimentos frequentemente nos impedem de romper as barreiras entre o não-saber e o novo-saber, esses velhos conhecimentos são então obstáculos para o progresso em relação ao saber científico, que exige verdadeiras rupturas, revoluções, em relação ao saber comum. Nas palavras do Professor Dr. Eleandro A. P., "Gaston Bachelard aponta para um movimento dialético contínuo do processo de construção da ciência, do conhecimento científico e do 'espírito humano-científico', pelo qual nos dá instrumentos de superação do empirismo, do positivismo, do historicismo cronológico. Nos ajuda a superar a neutralidade da ciência."

Esse é o caso, por exemplo, da Física Moderna, em que, nos séculos XIX e XX, as Teorias Quântica e da Relatividade Geral e Restrita reinterpretaram a física clássica ou newtoniana, baseada na Gravitação Universal, do século XVII. Ou na Química, em que a Teoria do Flogístico, hoje, tem relevância apenas de um ponto de vista histórico.

Qual é a relação da característica de regularidade da matemática e a aprendizagem da disciplina? O fato de não haver rupturas durante o processo de evolução da matemática não significa que nela haja uma linearidade absoluta na fase de descoberta. Esse fato, inclusive, dificulta a adoção de novos olhares sobre um mesmo "objeto matemático", de certo modo, a matemática como acúmulo de conhecimento representa uma tendência contra a qual luta continuamente a criatividade das mentes jovens do amanhã, numa atitude de verdadeira transgressão onde, para outros ramos do saber, tal atitude é o *main stream*.

Onde está a possível origem de incompreensão relacionada com o desafio da descoberta e o processo de divulgação por meio da sistematização na forma de demonstrações? Esse registro formal não deixa explícitas as dificuldades do processo de criação. (PAIS, 2008).

Basicamente, disso resulta a reação ao projeto de Nikolas Bourbaki de formalização de toda a matemática, fazendo com que todas as noções e objetos derivem de um processo meramente algébrico. Além da demonstração da impossibilidade de realização de um tal propósito, a partir do Teorema da Incompletude de Gödel, de 1923, também é preciso lembrar do próprio processo de criação matemática.

A ordem natural do avanço da disciplina é a descoberta ou invenção do resultado secundada pela busca do caminho lógico-formal que justifica o resultado.

> Frequentemente o pensamento de um matemático não se dá por ϵ e δ mas, antes, por imagens quase infantis (HARDY, 1980).

Não predomina a linearidade na fase inicial das ideias matemáticas, mas, antes, intensos conflitos da criação do saber. Não é possível reproduzir em artigos ou livros o real caminho de produção, retificação e conexão de ideias matemáticas que efetivamente proporcionou ao autor obter o resultado (PAIS, 2008).

Os obstáculos epistemológicos em relação à formação dos conceitos matemáticos dizem respeito então à necessidade de fazer o aluno compreender as motivações, o processo primário de descoberta das ideias em relação à sua apresentação formalizada por um texto.

Por certo, os obstáculos que aparecem no momento da criação dos conceitos não estão normalmente expostos na redação do saber, estão presentes nos labirintos que o matemático mergulha durante a criação. Dessa forma, no caso da matemática, os obstáculos aparecem com mais intensidade na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento, do que em seu registro histórico.

Assim, quando predomina o saber do cotidiano, as ideias de generalidade e rigor são usadas no sentido do comum e a lógica ainda não tem nenhuma precisão matemática. Os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático praticamente desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico (PAIS, 2008).

Analogamente ao que ocorre na etapa de criação, durante a aprendizagem, que se traduz em redescoberta, intervém diretamente no fenômeno cognitivo esses e outros obstáculos epistemológicos.

Citando (PAIS, 2008) descrever-se-ão três exemplos de obstáculos didáticos. O primeiro, na aritmética, durante a aprendizagem do produto de dois números inteiros positivos que é sempre maior do que cada parcela.

Esse conhecimento pode ser um obstáculo à aprendizagem das propriedades do produto de dois números racionais, para os quais tal proposição nem sempre é verdadeira, como é o caso de duas frações unitárias que é menor do que cada parcela.

O segundo exemplo, no caso da divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor do que um, cujo resultado é um número maior do que o dividendo.

O aspecto inerente à estrutura lógica da matemática entra em conflito direto com o conhecimento que o aluno traz de sua vivência não escolar (PAIS, 2008):

> No cotidiano não refletido, normalmente se conclui, intuitivamente, que o resultado da divisão é sempre menor do que o dividendo, contrariando o caso da divisão de frações.

O terceiro exemplo encontra-se na geometria espacial, quando da representação por meio de perspectiva. A realização ou leitura desse desenho não é uma atividade evidente (PAIS, 2008).

Normalmente, em perspectiva paralela, um cubo aparece com a face superior representada por um paralelogramo não quadrado, em os ângulos não são retos, quando medidos sobre a superfície do papel, mas, por outro lado, representam os ângulos retos da face superior do cubo.

Neste caso,

> se o aluno fixar sua leitura nas particularidades do desenho em si, ele pode ter dificuldades em compreender as propriedades geométricas do sólido representado (PAIS, 2008)

Entende-se assim, que a intuição pode representar obstáculo didático em vista de o conceito sofrer resistência das primeiras impressões, da compreensão natural.

A generalidade pode vir a ser, também, um obstáculo epistemológico para ruptura necessária a contrução de novos saberes.

> Esse problema surge quando ocorre uma tentativa apressada de generalizar uma ideia que está ainda presa ao entendimento pré-reflexivo (PAIS, 2008)

Exemplo concreto é passar da imagem da Balança de Roberval às equações algébricas ao introduzir o tema das equações, o que facilita um conhecimento vago e superficial.

Conforme (CUNHA, 2004), (PRANDI, , 2009) e (LABEGALLINI, 2009), existe a tendência de o professor ensinar como lhe foi ensinado. E isto significa que tende a reproduzir qualidades e prejuízos de seus mestres.

> O índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45% - isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo. (BARUFI, 1999)

Como consequências, tem-se que uma abordagem que desconsidere os aspectos que foram fundamentais para a constituição e desenvolvimento deste campo do conhecimento, os significados principais dos conceitos e métodos, o verdadeiro papel do Cálculo para a construção do conhecimento para futuros matemáticos quanto para professores de Matemática tem como efeito agravar a situação da qualidade matemática do país como um todo.

Na prática, a maioria dos egressos do curso de Matemática tanto na Licenciatura quanto no Bacharelado, em algum momento das suas carreiras haverão de lecionar Cálculo ou necessitar indiretamente dele.

Observa-se que, nesse sentido, a existência de conceitos prévios a serem encarados como empasses e complicadores para o processo de ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral, trata-se dos pré-requisitos, na seção intitulada Preliminares, da décima edição do seu Cálculo, de 2002, George B. Thomas apresenta o que considera serem os pontos sensíveis a revisar. São apresentadas na primeira seção noções da Geometria Analítica tais como incrementos, coeficiente angular de uma Reta, Retas Paralelas e Perpendiculares e Equação de Retas.

Na segunda seção são abordados os conceitos de funções e gráficos, domínios e imagens, funções crescentes e decrescentes, pares e ímpares, definidas em partes, valor absoluto, translação, composição e simetria de funções.

Na terceira seção são apresentadas as funções exponenciais e suas aplicações. A seguir, na seção quatro, as funções inversas e os logaritmos. Nas seções 5, 6 e 7, abordam-se as funções trigonométricas e suas inversas, as equações paramétricas e a modelagem de variações, respectivamente. Comparando com (LIMA, 2012) observa-se que estão descritas as dificuldades mais frequentemente observadas pelos autores.

As principais dificuldades visíveis nos discentes de ensino médio nas disciplinas de exatas, entre elas CDI, estão interligados a mediação pedagógica precária recebida, no qual os alunos não obtém no Ensino Médio o conhecimento prévio adequado a esse conhecimento científico, e este fato torna o ensino aprendizagem muito mais difícil tanto para o discente quanto para o docente, o que leva muitos a reprovarem diversas vezes numa mesma disciplina ou até mesmo desistência do curso superior.

Com relação à diferenciação na apresentação, pelos livros didáticos de CDI para o Bacharelado e a Licenciatura, as diferenças residem em deixar o Cálculo para Licenciatura mais fácil.

Não há, em geral, livros específicos para a Licenciatura em razão da especificidade da destinação desse profissional. Existem boas exceções, como o SANTANA, José Ernandes Oliveira de. Matemática aplicada à química. 2016. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016, mas ainda representam um movimento incipiente.

Para (HELLMEISTER, 2009) "mudou no seguinte sentido - você acolhe mais os alunos. Na Licenciatura temos muitos alunos que vêm (...) mal formados e, então, se percebeu que eles acabavam não aprendendo quase nada daquele Cálculo formal.

> Decidiu-se então ir menos longe nos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, não fazer os teoremas de Gauss, Green e Stokes, fazer pouca coisa de integral de superfície... Enfim, optou-se por avançar menos e ficar mais no começo; tentamos cobrir um pouco essa parte do conteúdo do ensino médio que o aluno não tem. (...) Nós retomamos alguns conteúdos do ensino médio, mas com outra abordagem; trabalhamos um pouco mais funções, funções exponenciais, logarítmicas, (...) as funções trigonométricas, as inversas... Dedicamos mais tempo a isto. E tem também algumas atividades que preparamos para introduzir certos conceitos e que os alunos desenvolvem em grupo. Então, o que se estabeleceu foi essencialmente o seguinte: ir um pouco menos longe e acolher melhor o aluno, (...) fazer testes para diagnosticar as falhas deles e tentar cobrir. (HELLMEISTER, 2009).

Observe que não se trata de uma mudança em função do ofício a ser desempenhado pelo Licenciado, mas tão-somente de cumprir a meta de aprovar alunos, sem critério preciso sobre o porquê de ensinar algo em detrimento de outro conteúdo.

A importância do livro-texto é fundamental,

> "(...) o crítico deve ter me mente que o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo, para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe.
>
> Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amiga e confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual." (LIMA, 2001)

(COCHRAN-SMITH e LYTLE, 1999) durante pesquisas acerca do processo formativo de professores sugerem que a definição de prática docente pressupõe diferentes imagens que relacionam o conhecimento e a prática.

Deste modo, estas autoras destacam três concepções de aprendizagem de professores: conhecimento para prática, conhecimento na prática e conhecimento da prática.

Os professores de Cálculo em geral, são oriundos do curso de Bacharelado. Durante o seu treinamento não há comunicação das disciplinas do eixo principal com disciplinas de natureza pedagógica ou metodológica.

No curso de matemática não se aprende como se aprende matemática ou como se ensina matemática, não somente matemática. Já no Ensino Fundamental e Médio o aluno desse curso tende a reproduzir o que aqui é sem propósito, quando torna-se professor.

> Isto ocorre, por exemplo, na definição de função como conjunto de pares ordenados e na desnecessária definição de equação (LIMA, 2001)

Ainda em relação ao formalismo no CDI, frequentemente é apresentado sem nenhum rigor, amparado apenas na intuição geométrica ou excessivamente rigoroso e formal, do ponto de vista simbólico.

Não se observa um diálogo entre intuição e rigor, juntamente com as demonstrações poderia vir gráficos com esboços das funções em questão, além de comentários de passos mais complicados entre uma passagem e outra.

Nas situações mais formais, pode-se incluir comentários informais de modo a aproximar o leitor do tema. É preciso observar que alguns obstáculos são de natureza comportamental.

> A análise de provas e de exercícios resolvidos mostra um déficit linguístico por parte do aluno que chega à universidade; mal alfabetizados em matemática, muitos alunos têm dificuldade em perguntar, apresentar dúvidas ou defender soluções encontradas. Tal déficit, por certo, pode explicar a ausência de diálogo, mediado pelo conteúdo de Cálculo, entre professores e alunos. (LACHINI, 2001)

Isto revela uma necessidade premente de atividades pensadas para reduzir as lacunas na formação, de variegadas naturezas, mas com intenção explícita de aperfeiçoar o conhecimento matemático dos estudantes que adentram a Universidade.

Mas não só, também atividades que favoreçam a prática em grupos, de modo a proporcionar maior interação, minimizando conflitos e favorecendo a expressividade daqueles que apresentem maiores dificuldades de socialização.

(LIMA, 2012) analisa que tipos de reflexões foram e estão sendo feitas relativamente ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente nas disciplinas que objetivam formar matemáticos e professores de Matemática, pelo seu imediato efeito em larga escala (GRATTAN-GUINESS, 1997) paralelamente a (LIMA, 2012) estão de acordo em que não adotar diferentes níveis de rigor matemático, não buscar aquele nível mais adequado ao contexto e à maturidade matemática, não matizar o rigor com a intuição, sistematizando e expondo com o máximo de rigor possível, mas evitando um aprofundamento precoce em aspectos problemáticos dos conceitos, afinal,

> como os alunos poderiam compreender diretamente a crítica de algo que ainda nem conheciam? (VIEIRA e GOMIDE, 2008)

Nessa fala da importância do Cálculo como oportunidade de compreender os conceitos e a Análise como oportunidade de criticar os mesmos conceitos, há docentes que entendem incorretamente o que se pretende dizer.

Alguns acabam por entender o Cálculo como os pré-requisitos necessários para compreender o que seria visto em Análise, e assim transmitem a ideia do Cálculo como uma disciplina sem objetivos próprios, sem conceitos, fundamentos, especificidades e potencialidades próprias. Para (REIS, 2001) o problema aqui consiste em entender contrapostos o rigor e a intuição.

Não se trata de usar somente a intuição no Cálculo e usar somente o rigor na Análise, mas usar intuição e rigor tanto no Cálculo quanto na Análise, mas em ambos, nos níveis adequados às necessidades dos alunos, às lacunas de formação e à maturidade matemática da turma.

Para (LIMA, 2012), alguns têm entendido o Cálculo como a necessidade de uma abordagem mais manipulativa. Entenderam erroneamente que o Cálculo serve para aprender as técnicas, fazer contas, e na análise, os fundamentos, os teoremas e as demonstrações.

Mas o autor ressalta que a questão fundamental não é apresentar ou não teoremas, fazer ou não demonstrações e sim de que maneira e em que momento do curso inicial de Cálculo estes elementos devem ser trabalhados para que sejam significativos para o aluno.

Para (LIMA, 2012), a partir de 1964, o Cálculo sofreu uma subordinação à Análise, e essa é a concepção do Cálculo como Pré-Análise.

Conforme (BARUFI, 1999), a sequência de Cauchy-Weierstrass é mais adequada para a análise do que para o Cálculo, que é exemplificada na definição que foi apresentada de (SPIVAK, 1970), e para (REZENDE, 2003) ela não é apropriada para cursos mais preocupados com os significados dos resultados do que com a sua sintaxe lógica.

Certamente privilegiar aspectos relativos à formalização dos conceitos e não os aspectos epistemológicos e cognitivos de seus entes fundamentais tornam o aprendizado mais difícil.

Conforme (LIMA, 2012), lançar mão da visualização gráfica bem como a discussão dos significados das notações empregadas, como é caso de (SPIVAK, 1970) ao definir uma função limitada sobre um intervalo fechado que é integrável sobre um intervalo aberto $\int_a^b f$ informa:

> O símbolo $\int$ recebe o nome de sinal integral e em sua origem era um s alongado, indicando soma -; o números a e b recebem o nome de limites de integração inferior e superior. A integral $\int_a^b f$ recebe o nome de área de $R(f, a, b)$ quando $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$".

Ademais, a dosagem do rigor, os modos de apresentação por parte dos docentes, não limitar à disciplina da Análise a demonstração dos resultados, eliminar a crença de que no Cálculo deve-se fazer apenas contas e aplicações de conceitos, eliminar a crença de que o foco do Cálculo deve ser a sistematização dos resultados de acordo com o rigor simbólico-formal, mas em um nível mais moderado do que aquele que será adotado na Análise, eliminar a prática do que (REZENDE, 2003) chama de conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede, que se refere à prática de usar de formalismo e rigor na exposição e procedimentos algorítmicos nas avaliações, que os alunos consideram mais fácil.

3.2 Heurística e Educação Matemática

George Polya é autor dos Dez Mandamentos para Professores, e em seus estudos trás as seguintes regras que são comparadas aos dez mandamentos bíblicos, sendo eles:

> "1. Tenha interesse por sua matéria.
>
> 2. Conheça sua matéria.
>
> 3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
>
> 4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
>
> 5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
>
> 6. Faça-os aprender a dar palpites.
>
> 7. Faça-os aprender a demonstrar.
>
> 8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
>
> 9. Não desvende o segredo de uma vez deixe os alunos darem palpites antes deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
>
> 10. Sugira; não os faça engolir à força."
>
> Polya (1984, p. 527).

O interesse pela componente curricular é, para (PÒLYA, 1984), condição *sine quan non* para se ensinar matemática. Não se pode transmitir entusiasmo sem possuí-lo.

Conhecer a área do conhecimento é conhecer além do que se vai ensinar. A sensibilidade de colocar-se no lugar do outro é a necessária condição para compreendê-lo. O próximo mandamento diz respeito a proporcionar ao menos alguns momentos de descoberta para os alunos.

Não fornecer todas as respostas, ainda que, em face da escassez de tempo não seja possível adotar tal conduta a todo momento. O quinto mandamento diz respeito à heurística, trata-se de ensinar a resolver problemas.

O sexto mandamento diz respeito ao raciocínio plausível. Métodos numéricos de aproximação, verificação de casos especiais e gráficos ou tabelas permitem inferir um comportamento padrão de funções ou outros fenômenos.

Mas o próximo mandamento está para não permitir que essa conduta permaneça incompleta. É preciso generalizar e justificar logicamente a hipótese lançada no passo anterior. Os próximos mandamentos são dedicados ao estímulo à criatividade e iniciativa.

Heurística, helrética ou Ars Inveniendi, ramo de estudo não totalmente delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia e a Psicologia.

> A Heurística estuda os métodos e as regras da descoberta e da invenção (PÒLYA, 1995).

Seus precursores são Euclides, Pappus, Descartes, Leibniz e também Bolzano. Modernamente, busca compreender o processo solucionador de problemas, em especial as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade.

Seu estudo deve levar em conta as suas bases lógicas e psicológicas. Nesta disciplina, procuram-se aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte.

Seu estudo tem objetivos práticos: melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas e, assim, pode-se exercer influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino de matemática. Para (PÒLYA, 1995):

> "Ao tentarmos resolver um problema, consideramos um a um dos seus aspectos, resolvemos os mesmos incessantemente na nossa mente a variação do problema é essencial ao nosso trabalho."

Podemos variar o problema pela decomposição e recombinação dos seus elementos ou pela utilização dos recursos de generalização, particularização e analogia. A variação do problema pode nos levar a elementos auxiliares ou à descoberta de um problema auxiliar mais acessível.

São dois os tipos de problemas, problemas de determinação e problemas de demonstração. A notação adequada e as figuras geométricas são auxílios indispensáveis na resolução de problemas que não sejam demasiadamente simples.

Todos os tipos de problemas, especialmente problemas práticos e enigmas pertencem ao domínio da heurística. Trata-se, enfim, do estudo do comportamento humano em face dos problemas.

A solução de um problema tem quatro fases, conforme (PÒLYA, 1995): A compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto.

A seguir, um mapa mental das quatro fases:

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

EXECUÇÃO DO PLANO

Terceiro.

Execute o seu plano.

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

RETROSPECTO

Quarto.

Examine a solução obtida.

É possível *verificar o resultado?* É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Exemplo da aplicação das quatro fases da resolução de um problema, extraído integralmente de (PÒLYA, 1995):

Um problema de razão de variação. A água escoa para um vaso cilíndrico à razão r. O vaso tem a forma de um cone circular reto, de base horizontal, com o vértice para baixo; o raio da base é a e a altura do cone é b.
Determinar a razão à qual o nível de água sobe quando a profundidade for y. Em seguida, calcular o valor numérico da incógnita, sabendo-se que a=4 m, b=3 m, r=2mş por minuto e y=1 m.
Solução: Admite-se que os alunos conheçam as mais simples regras de diferenciação e a noção de razão de variação. Quais são os dados?;
O raio da base do cone a=4 m; a altura do cone b=3 m; a razão à qual agua escorre para o vaso r=2mş por minuto e a profundidade da água num certo momento y=1 m.
Certo. O enunciado do problema sugere que provisoriamente, se deve desprezar os valores numéricos; trabalhar com as letras; expressar a incógnita em função de a, b, r e y e só no final, depois de chegar à expressão literal da incógnita, substituir as letras pelos valores numéricos. Eu seguiria esta sugestão. Agora, qual é a incógnita? A razão à qual a superfície da água sobe quando a profundidade é y.
Como? Poderia repetir em outras palavras?
A razão de variação da profundidade da água é aumentada. Está certo, a razão de variação de y. Mas o que é razão de variação? Volte às definições.
A derivada é a razão de variação.
Correto. Ora, y é uma função? Como dissemos, desprezamos o valor numérico de y. É possível imaginar como y varia? Sim, y, a profundidade, aumenta com o decorrer do tempo. Portanto, y é uma função de quê?
Do tempo t.
Muito bem. Adote uma notação adequada. Como poderia escrever a razão de variação de y em símbolos matemáticos?

$$\frac{dy}{dt}$$

Certo. Assim, esta é a sua incógnita. E preciso expressá-la em função de a, b, r e y. A propósito, um destes dados é uma razão. Qual deles?
r é a razão à qual a água escoa para o vaso. Como é isso? Pode dizê-lo em outras palavras?
r é a razão de variação do volume de água no vaso.
Como? É possível formulá-lo de uma outra maneira? Como representaria isso numa notação adequada?

$$r = \frac{dV}{dt}$$

O que é V? O volume de água no vaso no instante t. Muito bem. Agora, tem de expressar

$$\frac{dV}{dt}$$

em função de a, b,$\frac{dV}{dt}$ e y. Como faria isto?
Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. Se não perceber ainda a relação que existe entre

$$\frac{dy}{dt}$$

e os dados, procure introduzir alguma conexão mais simples que possa servir de intermediária. Como fazer isto?
Não percebeu que há outras relações? Por exemplo, serão y e V independentes uma do outro?
Não. Quando y cresce, V também cresce.
Portanto, há uma relação. Qual é?
Bem, V é o volume de um cone cuja altura é y. Mas não sei ainda qual é o raio da base.
Não obstante, pode toma-lo em consideração. Chame-o de alguma coisa, digamos x.

$$V = \pi x^2 y$$

Sintetizando as quatro fases do método de (PÒLYA, 1978) abaixo, temos:

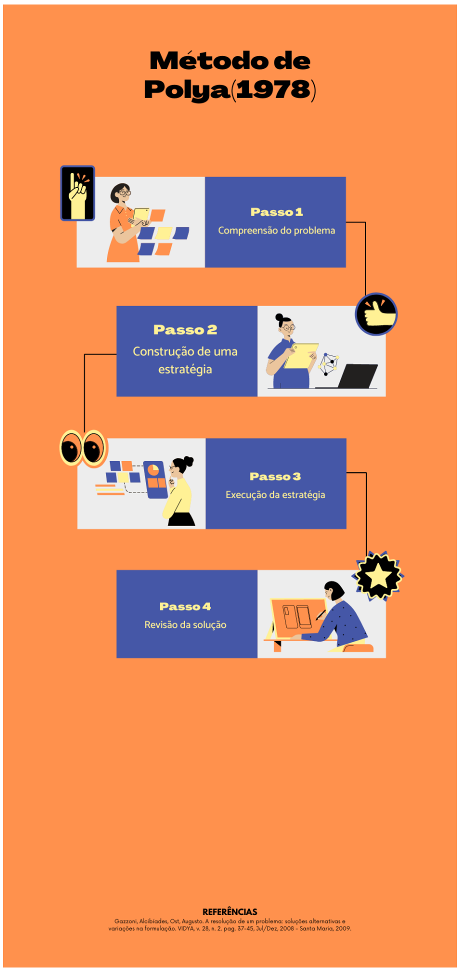


Figura 3.1: Método de Polya (1978)

Usando-se o método de (PÒLYA, 1978) na resolução de problemas podem-se visitar diferentes áreas da matemática ao buscar soluções alternativas além de se estimular o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, no sentido usado por (TALL, 1978) ao se proporem generalizações para problemas que surgem no cotidiano.

Em (GAZZONI e OST, 2008) temos uma abordagem das possibilidades do método e dos processos propostos por Polya ao se resolver o seguinte problema:

> "Um fabricante produz balas maciças em dois tamanhos, mas dispõe de um único modelo de caixa para transportá-las. Felizmente, essa caixa acondiciona perfeitamente uma bola grande, ou 216 pequenas. Sabendo-se que, independentemente do tamanho, as bolas são feitas do mesmo material, qual caixa de bolas que pesará mais?"

Os autores aplicam as quatro etapas com três exemplos de soluções alternativas, utilizando-se proporções, calculando-se o volume das esferas grande e pequena e, finalmente, por semelhança.

No quarto passo, aquele de revisão da solução, conforme a Fig. 3.1 fizeram-se as seguintes reformulações do problema inicial alterando-se as hipóteses:

1. "Se as bolas forem ocas, e sendo-se x(x $\in \Re^*$) a medida da espessura da casca, qual a caixa que pesará mais?"

2. "Quem tem maior área de superfície, a bola grande ou as 216 pequenas?"

Para a segunda pergunta foram propostas duas soluções, a primeira, usando-se a fórmula de área da superfície da esfera, e a segunda utilizando a noção de limite, que é o tema deste trabalho.

Finalizaram, os autores, dando uma formulação genérica para o problema. Esta é uma aplicação que oportuniza ao leitor o "como" se aplica o método de (PÒLYA, 1978), permitindo utilização futura ao serem bastante didáticos em sua exposição.

Diversos trabalhos apresentam situações aplicadas do médo e também no Cálculo isso é possível e constará de trabalhos futuros decorrentes deste. Sua importância e urgência reside no fato de que, conforme (MEDEIROS, 2001):

> "Um rápido olhar sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático, ao longo do tempo, nos leva a perceber que a ativiade de resolução de problemas lhe serve de motor. No entanto, o trabalho com resolução de problemas, em sala de aula, no Ensino Fundamental, não está tendo, para a aprendizagem de matemática um papel que, ao menos, se aproxime daquele desenvolvido nesse campo do conhecimento. [...] De modo geral, os problemas são trabalhados em sala de aula para "fixar" os assuntos que acabaram de ser estudados. Eles se caracterizam como exercícios repetitivos, permitindo ao aluno identificar certas características que se repetem no processo de resolução, criando procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de problemas semelhantes".

Os exemplos citados pelos autores mencionados tem a intenção e o mérito de desenvolver habilidades e competências na resolução de problemas de matemática para além do estímulo-resposta (PONTES, 2019), nesse sentido, citando (GAZZONI e OST, 2008) destaca o benefício em termos de qualidade da aprendizagem e do ensino que pode proporcionar a aplicação do método de (PÒLYA, 1978) em sala de aula.

3.3 A modelagem matemática: Indução e Dedução

A racionalidade técnica compartimentaliza todos os campos do saber. A esse respeito, pode-se notar um currículo prescritivo e/ou conteudista, que apresenta as disciplinas como descobertas, impedindo assim a conexão entre sujeito e objeto.

Apreender os fenômenos da natureza ou as teorias científicas mais sofisticadas torna-se assim superficial. Trata-se de estabelecer relações entre diversos temas, e acabar por historicizá-los.

Na verdade, a matemática como uma linguagem tem sido usada da seguinte maneira, inicialmente os pesquisadores estabelecem relações entre os diversos objetos matemáticos, a seguir traduzem essas relações em linguagem lógico-simbólica, formal, e a seguir espalhados por recônditos pelo mundo, outros matemáticos traduzem novamente essa linguagem para relações facilmente compreensíveis, basicamente imagens.

Até meados do século XX, a maioria das ciências obedecia ao princípio de redução, que limitava o conhecimento do todo ao conhecimento das partes, como se a organização do todo não produzisse qualidades ou propriedades novas em relação às partes consideradas isoladamente.

O princípio de redução leva naturalmente a restringir o complexo ao simples. Assim, aplica às complexidades vivas e humanas a lógica mecânica e determinista da máquina artificial. Pode também cegar e conduzir a excluir tudo aquilo que não seja quantificável e mensurável, eliminando, dessa forma, o elemento humano do humano, isto é, paixões, emoções, dores e alegrias. Da mesma forma, quando obedece estritamente ao postulado determinista, o princípio de redução oculta o imprevisto, o novo e a invenção (MORIN, 2002).

As bases de dados nas quais foram feitas deduções geralmente não são apresentadas e o processo de averiguação, notadamente nas ciências sociais, não pode ser plenamente verificado. Isso é perigoso, no sentido em que podem fomentar resultados sem verificação, corroboração com status científicos para ideologias, por exemplo, xenófobas e racistas. A modelagem matemática é um retorno à busca por reconectar o objeto ao sujeito.

Pode-se definir a experimentação como um conjunto de procedimentos que se estabelecem para verificar as hipóteses. Ela sempre se realiza em situações de laboratório, ou seja, controlando-se as circunstâncias e variáveis capazes de interferir na relação causa/efeito estudada.

As hipóteses, em geral, indicam uma relação de antecedência (variável dependente) entre os fenômenos. Na experimentação, procura-se verificar se a relação existe mesmo e qual é a proporção de variação encontrada em tal relação (PRESTES, 2003).

De fato, a modelagem é compatível com o método experimental e, portanto, com o método científico, em que a hipotetização e a validação são os elementos essenciais. As etapas da modelagem matemática, segundo (HEIN, 2000) são as seguintes:

> 1. Interação: Fase em que o pesquisador faz os primeiros contatos com o problema ou tema a ser modelado, buscando familiarizar-se a respeito e coletar dados que possam ajudá-lo em sua investigação;
> 2. Matematização: Etapa em que são levantadas hipóteses explicativas, com base nos conhecimentos prévios do perquiridor, para as questões suscitadas. É quando se faz uso do instrumental matemático com vistas à consecução do modelo com que se pretende representar o evento, tema ou situação de estudo.
> 3. Modelo: Fase em que se testa a validade do modelo construído, devendo-se,em caso de sua não-adequação ao objeto estudado, retomar a etapa anterior do processo, qual seja a de matematização. (BIEMBENGUT & HEIN, 2000).

Trata-se de um processo interacionista e criativo, propiciando uma relação afetiva mais intensa entre o sujeito e o observador, de modo a construir uma aprendizagem significativa.

3.4 Cálculo infinitesimal e a *Non-standard analysis*

Os conceitos de infinito e infinitésimo remontam à Grécia antiga. Mas as teorias baseadas nesses conceitos foram controversas até o século XX, quando então surgiu a *Non-standard analysis* ou análise não padronizada, que permite apresentar os conceitos da análise de modo mais intuitivo.

> Em meados do século XX, o matemático alemão, Abraham Robinson (1918 1974) recuperou a noção de infinitésimo que, com o auxílio dos métodos da lógica matemática, em particular a teoria dos modelos, foi estabelecida de forma rigorosa. Ele iniciou a construção da chamada Análise não-standard em 1961 com o artigo do mesmo nome, em que, pela primeira vez, demonstrou que o conjunto dos números reais pode ser considerado um subconjunto de um conjunto maior de números que contém infinitésimos e também operações aritméticas apropriadamente definidas, as quais satisfazem todas as regras aritméticas obedecidas pelos números reais padrão. (FELIZARDO, 2005).

Esta possibilidade está de acordo com a didática empregada no ensino da Física, e há muito tempo, no entanto, não só há poucas pesquisas nessa direção, como também não há materiais didáticos para se trabalhar com essa abordagem. Baldino, em (REIS, 2001), diz que os materiais atualmente disponíveis são inadequados (BARONI, 2011)).

A *non-standard analysis* (a análise sobre os números hiperreais devida a Abraham Robinson), com a introdução de números infinitamente pequenos permitiu justificar - com dois séculos de atraso - os raciocínios logicamente duvidosos, mas na prática bastante bem-sucedidos, do cálculo infinitesimal (SALANKIS, 2003), Ian Sterwart, autor de Incríveis Passatempos Matemáticos, nas páginas 186 e 187, descreve assim o surgimento da análise não-standard:

> Os matemáticos levaram séculos de esforço para chegar a um acordo e formular uma teoria logicamente rigorosa dos limites, das séries infinitas e do cálculo, o que chamaram de análise. Todas as ideias sedutoras, porém incoerentes do ponto de vista lógico, sobre números infinitamente grandes e infinitamente pequenos os infinitesimais foram banidas, garantindo a segurança da matemática. O filósofo George Berkeley havia se referido com sarcasmo aos infinitesimais como fantasmas de quantidades falecidas, e todos concordaram que ele estava certo. No entanto, o cálculo ainda assim funcionava, graças aos limites, que exorcizaram os fantasmas.

A infinidade, grande ou pequena, era um processo, e não um número. Nunca somamos todos os termos de uma série infinita: somamos um número finito e perguntamos como a soma se comparta à medida que o número de termos se torna cada vez maior. Nós nos aproximamos do infinito, mas nunca chegamos lá. Da mesma forma, os infinitesimais não existem. Nenhum número positivo pode ser menor que todos os números positivos, pois neste caso teria de ser menor que ele mesmo. Entretanto,

> (...) nunca devemos desistir de uma boa ideia só porque ela não funciona. Nos anos 1960, Abraham Robinson fez algumas descobertas surpreendentes nas fronteiras da lógica matemática, registradas em seu livro Non-Standard Analysis, de 1966. Ele provou que existem extensões do sistema numérico real chamados números hiper-reais que compartilham quase todas as propriedades habituais dos números reais, exceto pelo fato de que os números infinitos e os infinitesimais efetivamente existem. Se n é um número infinito, então $\frac{1}{n}$ é infinitesimal mas diferente de zero. Robinson mostrou que toda a análise pode ser montada para os hiper-reais, de modo que, por exemplo, uma série infinita seja a soma de um número infinito de termos, e nós efetivamente cheguemos ao infinito.Pois bem, um infinitesimal é um novo tipo de número que é menor que qualquer número real positivo, mas não é ele próprio um número real. E não é menor que todos os números hiper-reais positivos. Mas podemos transformar todos os hiper-reais finitos em números reais formando a parte standard, que é o número real único que se encontra infinitesimalmente próximo.Temos um preço a pagar por tudo isso. A prova de que os hiper-reais existem não é construtiva ela mostra que esses números podem ocorrer, mas não nos diz quais são. No entanto, qualquer teorema sobre a análise tradicional que possa ser provado usando-se a análise não standard possui alguma prova na análise tradicional. Portanto, temos aqui um novo método para provar os mesmos teoremas sobre a análise tradicional. Esse método se encontra mais próximo à intuição de pessoas como Newton e Leibniz que aqueles mais técnicos desenvolvidos depois.
> (IAN STERWART, 1998)

Entre as competências adquiridas com o estudo da Análise não-standard estão, saber formalizar e manipular ordens de grandeza de números; o domínio da aplicabilidade e das limitações do princípio de indução matemática e dos princípios de permanência; o domínio dos diversos tipos de regularidade e irregularidade não-standard, incluindo de estruturas e construções discretas de passo infinitesimal; o domínio de cálculos assintóticos e de mudança de escala e o domínio da natureza dos problemas em que a análise não-standard tem relevância, em particular problemas em que intervém diversas ordens de grandeza, problemas com interações entre o discreto e o contínuo e problemas com transições imprecisas.

Como temas introdutórios desse campo do saber, conforme (DIENER *et* DIENER, 1995), temos o axioma de existência de números não standard. Os números infinitesimais, limitados e infinitamente grandes, além das regras de cálculo de Leibniz.

Também conjuntos internos e externos, os princípios de permanência, a indução externa, a análise com números infinitesimais, noções não standard de regularidade de funções: S continuidade, S-derivabilidade, S-integrabilidade. As ordens de grandeza e as mudanças de escala. As perturbações singulares, as aproximações assimptóticas, as discretizações infinitesimais.

3.5 Análise de Erros

Busca-se analisar e classificar os erros em testes, em trabalhos individuais ou grupais. De acordo com (CURY, 2003), citando (RADATZ, 1980) os primeiros trabalhos foram feitos por pesquisadores americanos, ligados ao behaviorismo. Isto, no início do século XX.

Na década de 50,

> foram realizadas pesquisas utilizando os protocolos verbais, com solicitação aos estudantes de que falassem em voz alta durante a realização das tarefas. (CURY, 2003). Numa terceira fase, de cunho construtivista, os investigadores procuravam entender o erro como construtor do conhecimento e não mais como algo a ser eliminado (CURY, 2003).

O erro é considerado, em geral, como algo que deve ser evitado. O acerto ou a resposta esperada é fortemente solicitado e privilegiado desde a mais tenra idade. Uma consequência de longo prazo é a auto repressão do raciocínio não esperado. Mas, o que o erro pode dizer sobre o que o aluno não sabe?

> Os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático. (CURY, 1994).

Para (MORAES, 2013), o erro é um conhecimento, é um saber que o aluno possui e não a falta dele. Ele não considera que os erros demonstram aquilo que os alunos não sabem, assim como não é possível assumir que os acertos demonstram aquilo que eles sabem. Os alunos podem acertar um raciocínio por inúmeras razões sem ter, de fato, absorvido o conteúdo em questão.

Questões de múltipla escolha ou de verdadeiro ou falso tem utilidade quando, por exemplo, a agilidade no processo de correção deve ser considerável. Mas lançar mão destes meios com muita frequência pode minimizar a importância do processo de solução.

> Quando as resoluções divergem, o professor deve identificar o erro, perceber a incidência e planejar situações para provocar a sua superação. Em outras palavras, é necessário que o erro do aluno gere um desafio para o professor, pois o professor exerce uma função fundamental no processo de ensino-aprendizagem. Ele é um mediador entre o aluno e o conhecimento, apresentando o conteúdo de forma a fazer sentido para que o aluno possa gerar significado, promovendo e mantendo o seu interesse. (OZORES, 2015).

Nesse sentido, a Análise de Erros aprimora o processo ensino-aprendizagem. Feita pelo professor, ajuda a traçar um perfil da sala de aula em que atua e facilita a elaboração de novas estratégias de ensino. Feita pelo aluno, proporciona a compreensão do próprio erro, o entendimento do próprio raciocínio e favorece a busca pela autocorreção mediada pela interação com os colegas, com o professor e com os livros didáticos.

3.6 Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs)

É indiscutível o desenvolvimento tecnológico na contemporaneidade e a utilização da tecnologia propicia mediações práticas, acessíveis, com rapidez, segurança e performance em todas classes sociais, econômicas e de pesquisa, de maneira que as informações sejam transmitidas, discutidas e analisadas em altíssima velocidade.

O uso da tecnologia no contexto educacional vem ganhando espaço, em especial as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), e mostram-se mecanismos práticos, eficientes e atrativos para a mediação no ensino da Matemática, principalmente no estudo das funções, gráficos e visualização de figuras espaciais.

Nesta visão, softwares - educacionais ou não - são uma boa maneira de ilustrar conceitos, vistos tridimensionalmente, de maneira dinâmica e com evolução temporal com considerável padrão de qualidade de modo que objetos matemáticos podem ser compreendidos mais intuitivamente.

Ao manusearem as principais ferramentas de plotagem de gráficos no software utilizado, houve maior facilidade de visualização do comportamento das funções abordadas por parte dos acadêmicos, desse modo, ficou claro aos cursistas que em determinados momentos nas aulas de Matemática, é viável a utilização de softwares ao invés das mídias lápis e papel. (SANTOS e MACEDO, 2013).

GeoGebra é a aglutinação das palavras Geometria e Álgebra. Este é um aplicativo de distribuição livre e é escrito em linguagem Java. O seu projeto inicial foi elaborado em 2001 pela Universität Salzburg e é desenvolvido atualmente pela Florida Atlantic University. Pode ser encontrado no endereço: https://www.geogebra.org/?lang=pt.

É possível realizar construções geométricas a partir de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, inserir funções e alterar dinamicamente essas mesmas construções. Podem ser inseridas equações e coordenadas diretamente. Lida com variáveis para números, pontos, vetores, derivadas e integrais, além de determinar raízes e pontos críticos de funções.

3.7 Acerca dos contraexemplos

Na matemática estamos interessados nas deduções formais. Do ponto de vista da validade, esse é o nosso objetivo. Do ponto de vista da aprendizagem, é preciso construir a priori uma argumentação, a partir da qual se produzirá a dedução formal. O Geogebra é uma poderosa ferramenta para ilustrar argumentos incorretos a partir dos contraexemplos, como destaca (ALVES, 2012). A visualização para a construção dessa argumentação é uma saída para que a redação de uma demonstração não se limite a simples aplicação de regras algorítmicas de forma irrefletida, (ALVES, 2012).

A seguir, citaremos dois exemplos apresentados em (ALVES, 2012).

Proposição 1. *Se uma função f: [a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ é definida em (a,b) então assume valores extremos em* $[a, b]$.

Vamos definir a função

$$f(x) = \begin{cases} tanxsenx, & x\epsilon(-\pi/2, \pi/2) \\ 0, & \pm\pi/2 \end{cases}$$

Vemos que $f(x)$ é contínua em $(-\pi/2, \pi/2)$, mas nos extremos $[-\pi/2, \pi/2]$ não existem valores extremos para f(x).

Proposição 2. *Se uma função $y = f(x)$ é definida em $[a, b]$ e vale $f(a).f(b) < 0$, então $\exists\ c\epsilon(a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Na função $g(x)$ vemos que $g(-1).g(1) = -1 < 0$, porém, não existem pontos $[-1, 1]$, tais que $f(c) = 0$.

3.8 Sutilezas lógicas: necessárias ou suficientes?

Jean-Paul Sartre assevera que o diabo mora nos detalhes (SARTRE, 1996). O que nesta seção chamamos de perigos da profissão se tratam de detalhes lógicos, como a implicação, condições necessárias e suficientes, generalização apressada, desconsideração de parâmetros e restrições que representam condições de validade das afirmações, entre outras. Abaixo, dois exemplos de situações em que os tais perigos da profissão se tornam mais frequentes.No Teorema 3, do Capítulo 2, enunciamos o seguinte Teorema: Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio $x = c$, e os limites de f e g existem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to\ c} f(x) \leq \lim_{x \to\ c} g(x)$$

certamente apresenta um risco de acidente de trabalho de natureza grave, já que sob as mesmas hipóteses, a afirmação

$$\lim_{x \to\ c} f(x) < \lim_{x \to\ c} g(x)$$

é completamente falsa. O Teorema 9, no capítulo 2, afirma que se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$, mas a recíproca é falsa, ou seja, uma função não tem necessariamente uma derivada em um ponto onde ela é contínua.

Com base nestes referenciais teóricos, iremos investigar a seguir, mediante Questionários, cuja metologia será discutida na abertura do capítulo 4, como os estudantes percebem a disciplina, seu histórico escolar, o currículo do ensino básico em relação aos pré-requisitos do CDI.

Quais os tópicos do Ensino Médio em que se apresentam mais dificuldades e também aspectos de natureza sócio-econômicos, que são percebidos como fatores de agravamento das dificuldades ao longo do curso pelo próprio público-alvo.

Mediremos a proficiência dos estudantes no tratamento de assíntotas verticais e horizontais. Os resultados serão contextualizados e interpretados de modo a confrontá-los com as pesquisas referenciadas neste capítulo aqui finalizamos.

Capítulo 4

Questionários, amostras, análises, interpretação e hipóteses

4.1 Metodologia

Uma pesquisa envolve diversas etapas, desde a escolha do tema, dos objetivos principais e secundários, do público-alvo, da identificação das variáveis pesquisadas, entre outras. Um dos seus principais momentos, a propósito, é a coleta de dados, GIL (2002).

Existem muitas maneiras de coletar dados para uma pesquisa acadêmica e os questinários são uma das mais frequentes. O modo como são distribuídos, o tamanho da amostra, a quantidade de espaço de armazenamento dos dados variam bastante em função das ferramentas utilizadas e impactam diretamente nos custos da pesquisa, em recursos financeiros e de tempo.

Conforme evidencia Zanini (2007), o formulário eletrônico é uma possibilidade que minimiza estes custos. Solução que apresenta longo alcance, alta confiabilidade dos dados, acessibilidade, baixo custo em termos de tempo de e espaço de armazenamento é a ferramenta da empresa Google Inc. chamada de Google Forms, com evidentes vantagens conforme destacam Oliveira e Penteado (2016) e por essa razão foi escolhido para este trabalho.

O Google Forms permite a criação de formulários personalizáveis com opções de respostas nos formatos múltipla escolha, checkbox, respostas em menu dropdown, resposta curta, resposta em parágrafo, grid de múltipla escolha, escala linear de opções, e também data e hora Google (2017).

O modelo foi utilizado em larga escala nas escolas da SEEDF e em outras unidades federativas ao longo da pandemia de SARS-COVID-19. Deve-se ainda levar em conta o fato de que as respostas de um formulário são agrupadas em uma planilha, também dentro da estrutura Google.

O formulário é leve, rápido, responsivo, sendo hospedado pelo próprio Google e mantém um resumo das respostas em modelo gráfico, a fim de melhorar a visualização. Além dessas características, e ainda fazendo uso da estrutura Google,é possível também tornar colaborativa uma pesquisa, convidando amigos e colegas para fazer parte na edição das perguntas e visualização das respostas Google (2017).

4.2 Questionário 1 - Mestrandos do PROFMAT-UnB

Utilizamos um formulário para conhecer o perfil de estudantes de uma disciplina do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da disciplina de Fundamentos de Matemática. Depois de descrever nossa metodologia e procedimentos, além dos resultados, faremos a necessária crítica da nossa abordagem, que será aperfeiçoada em trabalhos futuros.

O principal objetivo deste modesto estudo foi refletir junto dos pares, com experiência na profissão, sobre a sua vivência em cálculo e sobre a sua formação, reunindo também as suas soluções para os exercícios disponibilizados no formulário apresentado ao final deste capítulo.

Esta pesquisa teve cunho mais qualitativo do que quantitativo, já que quantidades mínimas de elementos para a validação de uma amostra não foram viáveis de se implementar, em função de fatores tais como a alta taxa de absenteísmo dos estudantes, que em geral trabalham todos os dias da semana, fora do Plano Piloto, em dois turnos diários, as dificuldades de mobilidade nos horários das aulas e limitações provocadas pela resistente pandemia de SARS-COVID 2.

Foram consultados 20 alunos da turma, a quase totalidade. Este tipo de estudo exige que se conheçam as teorias e abordagens dos fenômenos que os pesquisadores querem estudar e identificar pontos controversos ou lacunas no conhecimento Stockemer(2019). Estas lacunas servirão como pontos de referência para a formulação de hipóteses ou de questões a serem elaboradas em pesquisas futuras.

Os mestrandos que responderam ao Questionário, 25 por cento da turma, apresentam idades acima de trinta anos, uma pessoa com 33, outra com 34, a seguir, três com idades de 40, 49 e 50 anos.

Todos os que responderam são licenciados em Matemática. A facilidade na disciplina e considerações sobre o mercado de trabalho juntamente com a necessidade de trabalhar foram os fatores que levaram estes estudantes para o magistério.

Além de mestrandos, todos os participantes são especialistas, e apenas um em área não diretamente relacionada com a disciplina que lecionam - Ensino Religioso - os demais tem especialização em Educação Matemática e um em Gestão Educacional.

A respeito da atuação como professora ou professor de Matemática, o tempo de prática foi de 6 anos, 11, 15, 26 e 32 de carreira. Estamos tratando com pessoas com experiência considerável no ensino.

Sessenta por cento dos pesquisados são oriundos de escolas públicas. A sua relação afetiva com a Matemática raramente começou no Ensino Médio, em geral veio da facilidade ao resolver problemas e exercícios e também pela afinidade com o assunto.

É espontânea a afirmação incisiva da dificuldade enfrentada em Cálculo I, dentre as pessoas que encontraram relevante estranhamento, vemos considerações "desafiador", "traumático", "um pouco difícil, com muitas novidades e dificuldades", já dentre as descrições mais positivas, encontramos "deslumbramento com o poder desta ferramenta" e uma vivência "tranquila".

Perguntamos sobre as principais dificuldades durante o estudo de Cálculo I e, mesmo aqueles que tiveram uma boa experiência, em geral tem recordações específicas de dificuldades.

"Entender as resoluções e encontrar as suas aplicações", os "exercícios mais teóricos", a "construção de gráficos usando a análise das derivadas de 2ª ordem", "o desenvolvimento e a metodologia do Cálculo", são as observações dos mestrandos.

Estas respostas estão em sincronia com os resultados obtidos pelos professores Dörr e Wescley em seus estudos abrangentes sobre o tema, nesta mesma Universidade. Os seus trabalhos também foram amplamente utilizados nesta nossa exposição do assunto.

Pedimos sugestões que os pesquisados dariam para as pessoas que apresentem as mesmas ou semelhantes dificuldades descritas por eles mesmos e obtivemos a recomendação de consultar "outros livros", além do livro-texto, em busca de "novos olhares", "explicações" de outras perspectivas para compreender de maneira mais ampla. Um curso de pré-cálculo e a dedicação aos pré-requisitos também foi recomendada.

A busca de "aplicações da análise de como se comporta a derivada de 2ł ordem em determinado ponto ou intervalo", o estudo cuidadoso de variegados "exercícios resolvidos".

Quisemos conhecer a rotina de estudos dos entrevistados, apenas vinte por cento deles apenas estudava. Os demais trabalhavam, em geral, desde muito jovens e os "fins de semana", no "sábado", sobretudo, durante o dia, "pouca assiduidade" nos estudos, "pouca disciplina", "pouco tempo", são as respostas incisivas que recebemos.

O Questionário 1 a que os participantes tiveram acesso está disponível no Anexo 6.2 e imediatamente depois, seguem as suas respostas. Em seguida, procederemos a interpretação e análise dos resultados.

4.3 Análise dos resultados - Questionário 1

Neste estudo, como modelo conceitual para identificar os possíveis erros dos estudantes nos baseamos no Modelo da Hierarquia de Erros de Newman - NEHM - na sigla em inglês, que compreende os erros de Leitura e Compreensão, de Transformação, de Habilidades de Processamento e Codificação.

Observam-se nas reproduções das respostas, disponíveis no Anexo 6.2 que, aqueles que responderam foram capazes de ler compreender suficientemente ao identificar quando e como calcular limites, na questão 1 e a derivada, na questão 2.

Ninguém dentre os pesquisados escreveu as afirmações matemáticas nem as condições em geral em que são válidas para se aplicar os limites.

Ou seja, temos aqui indícios de que ainda que possam compreender, é provável que tenham dificuldades em algum grau para transformar, modelar o problema usando linguagem matemática, utilizando lógica simbólica.

Observamos também que nenhum dos pesquisados definiu as variáveis utilizadas, ainda que tenham realizado os procedimentos de maneira coerente.

Não notamos dificuldades na leitura e interpretação dos comandos das questões. Mas a compreensão aprofundada e o uso frequente da linguagem algébrica e simbólica foi menor, em consonância com vários estudos, como em Dörr, Wescley, Newman.

Aumentar, durante o ensino, o foco sobre as necessidades dos estudantes em relação aos pré-requisitos curriculares. Os erros dos estudantes numa sala de aula requerem uma atividade especializada focada nesses erros em relação às competências e habilidades necessárias.

Há uma demanda de aplicação do profundo conhecimento do professor em relação aos conteúdos baseado nos erros e dificuldades dos estudantes quando ensinando um conteúdo em particular Sapire et al. (2016).

As lacunas podem ser preenchidas por meio de uma prática mais frequente na escrita de soluções com ênfase na comunicabilidade das soluções, e não somente na eficiência do algoritmo.

4.4 Questionário 2 - Graduandos

Esta investigação obteve as respostas de 117 estudantes dos cursos de graduação que estudaram ou Matemática 1 ou Cálculo 1 no Período 2022/2 na Universidade de Brasília.

Está disponível, integralmente, no Anexo 6.2, o Questionário 2 a que os participantes tiveram acesso, e imediatamente depois, seguem-se as suas respostas no Banco de Dados gerado. Em seguida, procederemos a interpretação e análise dos resultados.

4.5 Análise dos resultados - Questionário 2

Contamos com 117 respostas para o Questionário 2. Solicitamos aos estudantes de uma turma de Cálculo 1 e uma turma de Matemática 1 do período 2022/2, da Universidade de Brasília - UnB, no Campus Universitário Darcy Ribeiro, que respondessem as perguntas propostas.

Todas e todos os 117 participantes declararam que leram o Termo de Consentimento e aceitaram participar da pesquisa.

O nome e o endereço de e-mail foram informações opcionais.

Quando perguntado "Qual é a sua idade?" obtivemos respostas que vão dos 17 anos aos 72 anos de idade. Sintetizamos as informações no quadro abaixo:

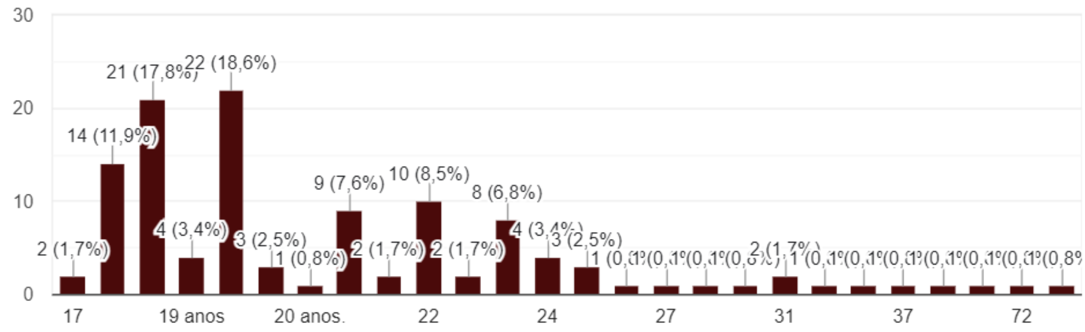


Figura 4.1: Idade

Na Fig. 4.1, vemos que 18, 19 e 20 anos são as idades mais frequentes.

Perguntamos, a seguir, se o participante só estuda ou se estuda e trabalha, sendo que pouco mais da metade só estuda, conforme ilustrado na Fig. 4.2:

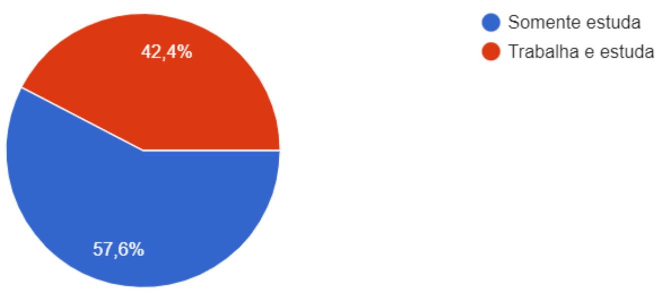


Figura 4.2: Estuda/trabalha

Sabemos que a distância da casa do estudante até a Universidade impacta a qualidade desse mesmo estudo. Quando indagamos a respeito, obtivemos distância mínima de 1 km e distância máxima de 90 km, com distância média de 26 km de distância.

Sobre o principal modo de deslocamento diário entre o Campus e a sua residência, observe o resultado que obtivemos:

Na Fig. 4.3 vemos que a grande maioria dos estudantes se desloca de ônibus, seguida de um grande contingente que se desloca de carro.

Em relação a natureza privada ou pública da rede em que está inserida a instituição de ensino na qual o participante cursou majoritariamente o ensino fundamental obtivemos:

Na Fig. 4.4 vemos que há uma quase paridade em relação ao ensino fundamental, provavelmente decorrente das políticas de ações afirmativas.

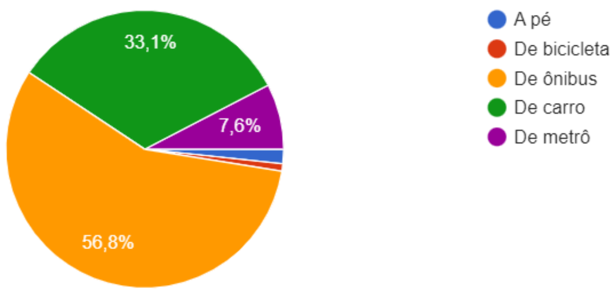


Figura 4.3: Forma de deslocamento

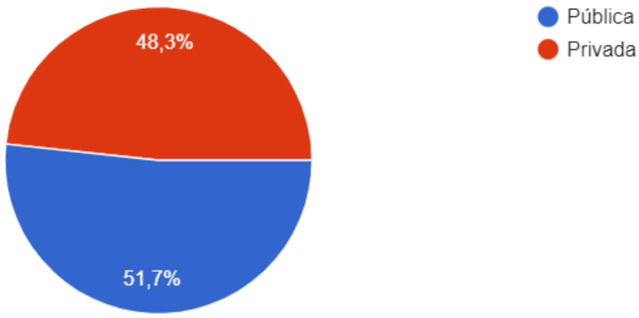


Figura 4.4: Ensino fundamental

Sobre o equivalente para o Ensino Médio, veja o que encontramos, conforme a Fig. 4.5, nota-se uma diferença maior.

Em relação ao curso de graduação do participante da pesquisa, os cursos são dos mais diversos, dentre os mais frequentes estão Ciência da Computação, Ciências Ambientais, Contábeis, Biológicas, Econômicas, Farmácia, Engenharias (Elétrica, Florestal, Civil, Mecânica), Agronomia, Física, Administração, Estatística.

Indagamos os estudantes sobre as razões da escolha do curso mencionado anteriormente, dentre as respostas obtemos "mercado de trabalho", "área de interesse", "currículo

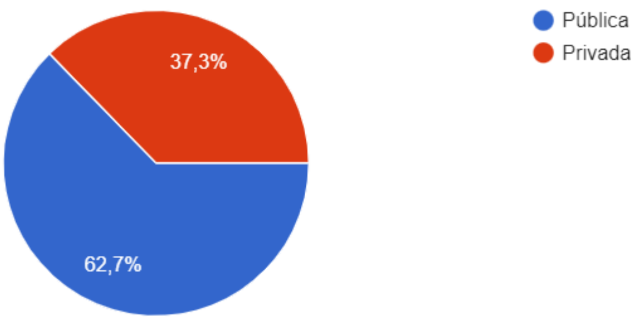


Figura 4.5: Ensino Médio

do curso", "questão financeira", "por exclusão", "afinidade", "incentivo familiar", "tradição familiar", "concursos públicos", "variedade de campos de atuação", "quantidade de vagas disponíveis", "segunda graduação", "sonho", "não sei", "por ter sido menor aprendiz na área", "ser professor/a", "preferência desde o ensino médio", "inspiração a partir de um professor", "testes vocacionais".

Perguntamos a seguir se "Você possui certificações adicionais, como cursos de idiomas ou de natureza técnica?", obtemos "SIM" em 61,9% das respostas e, portanto, "NÃO" em 38,1%.

A questão seguinte foi: "Como avalia a sua relação com a Matemática no Ensino Básico?" e produziu os resultados abaixo:

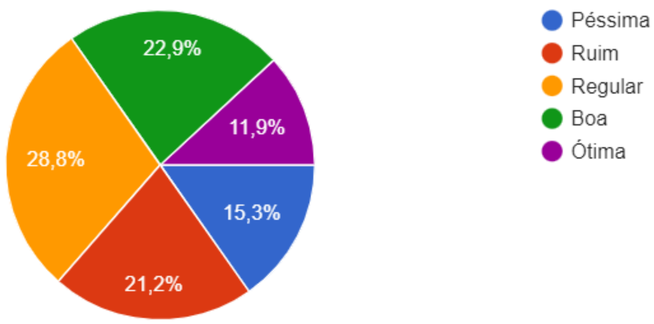


Figura 4.6: Relação com a Matemática

Conforme a Fig. 4.6, notamos que Regular, Ruim e Péssimo são a maioria das respostas.

A próxima pergunta que fizemos teve resultado de acordo com o que descreve a importante literatura mencionada nas referências. Perguntamos se "Você considera que o seu ensino básico forneceu a quantidade certa de teoria e prática necessários ao estudo e aproveitamento no Cálculo Diferencial e Integral?",

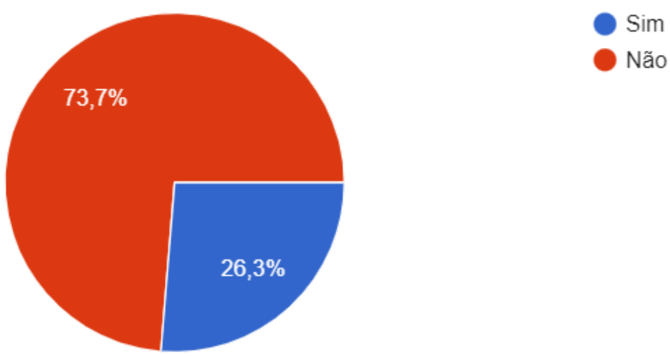


Figura 4.7: Quantidade de Teoria e Prática como pré-requisito adequada

O resultado descrito na Fig. 4.7 não deixa de ser alarmante dado que estamos tratando dos alunos que, em geral, tiveram o melhor aproveitamento na Matemática e Suas Tecnologias ao longo do Ensino Fundamental e Médio em suas classes.

Nas questões a seguir, começamos a inquirir, de fato, a respeito especificamente do CDI, e começamos por "quão difícil está sendo a disciplina de Cálculo para você até o estudo de Limites?", obtendo

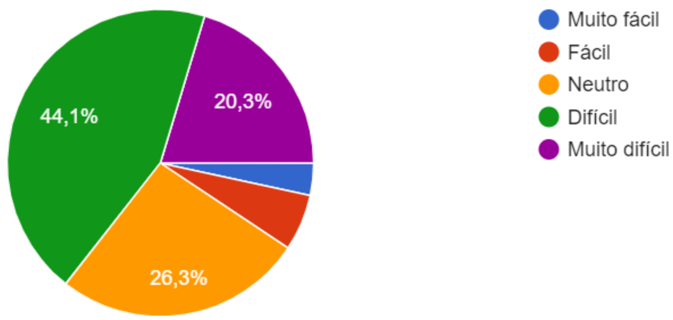


Figura 4.8: Dificuldade

Conforme a Fig. 4.8, apenas 3,4% consideram a experiência do estudo de CDI estar sendo "muito fácil" e 5,9% "fácil".

Lidando com expectativas, perguntamos "Você acredita que as lições do curso de Cálculo Diferencial e Integral serão úteis para o crescimento de sua carreira?", 34,7% responderam "SIM", 22% "Não" e 43,2% "Talvez".

A seguir, foi perguntado "Qual é o assunto estudado durante o Ensino Médio que você considera mais importante para o sucesso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?" obtendo-se dentre as respostas, "Funções", "Trigonometria", "Fatoração", "Geometria Analítica", "Produtos Notáveis", "Polinômios", "Não sei, pois ainda estou aprendendo a matemática básica necessária", "manipulação algébrica", "Álgebra", "notação matemática", "Conjuntos".

Num exercício de empatia com aqueles que serão os seus futuros "calouros", os estudantes responderam a pergunta "Que tipos de sugestões você faria para pessoas que apresentem dificuldades no estudo do Cálculo I?" com as seguintes observações ou análogas: "fazer muitos exercícios práticos", "não se matricular em muitas disciplinas no semestre em que estiver presente a disciplina de Cálculo 1", "fazer as listas de exercícios", "assistir videoaulas", "frequentar as monitorias", "tirar dúvidas durante as aulas", "estudar em casa quando possível", "estudar em grupo", "revisar os tópicos do Ensino Médio", "sempre estudar conteúdos adicionais e em graus de dificuldade maiores do que os apresentados durante as aulas", "aulas particulares", "estudar resoluções comentadas de exercícios", "assistir aos vídeos disponíveis no moodle", "fazer analogias", "praticar as notações".

Em geral, os estudantes tem uma visão crítica em relação a sua rotina de estudos, poucos estão satisfeitos com o ritmo de estudos atual e muitos mencionam a dificuldade e disponibilidade de horários pelo tempo de deslocamento ou pelo trabalho.

As questões abaixo estavam presentes integralmente ou em partes, nas Listas de Exercícios das semanas anteriores à aplicação do Questionário.

A Questão 1, trata de assíntotas horizontais:

Questão 1. Calculando o limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$$

obtemos:

(a) 1, ∀x

(b) -1, ∀x

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \to +\infty \\ -1, & x \to -\infty \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \to +\infty \\ 0, & x \to -\infty \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} 0, se & x \to +\infty \\ -1, se & x \to -\infty \end{cases}$$

O desempenho dos participantes nesta questão 1 está apresentado abaixo:

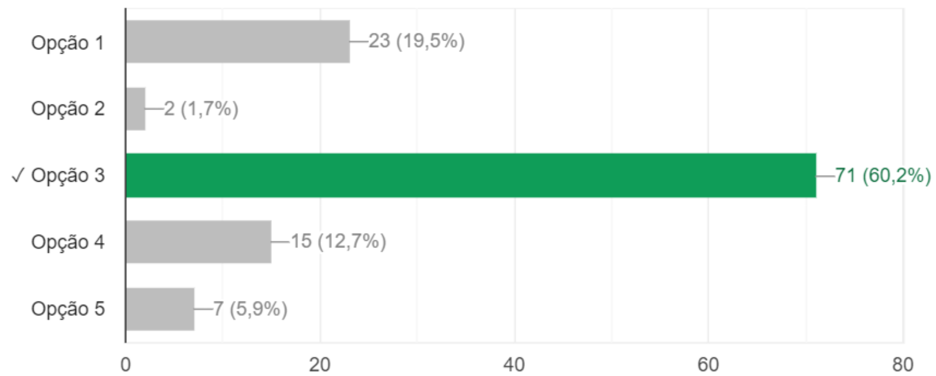


Figura 4.9: Respostas para a Questão 1

Conforme a Fig. 4.9, tivemos uma taxa de acertos de 60,2%.

A Questão 2, abaixo, aborda o cálculo de um limite para uma assíntota horizontal com a presença de uma função trigonométrica:

Questão 2. Calculando o limite abaixo, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + sen^3(x)}{5x + 6}$$

(a) $\frac{6}{5}$
(b) $\frac{1}{5}$
(c) $\frac{5}{6}$
(d) $\frac{1}{6}$
(e) $\frac{1}{3}$

O desempenho dos participantes nesta questão 2 está apresentado abaixo:

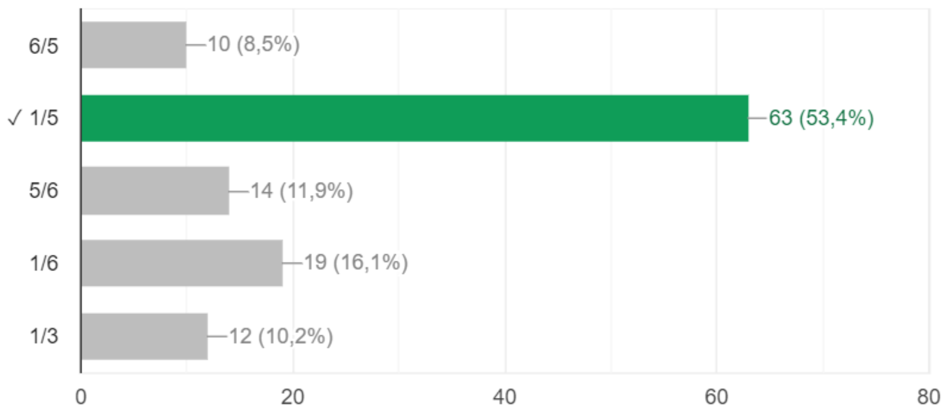


Figura 4.10: Respostas para a Questão 2

Conforme a Fig. 4.10, tivemos uma taxa de acertos de 53,4%.

Apresentamos, a seguir, a questão 3, que apresenta uma função polinomial racional de grau 2, com pré-requisito a fatoração, habilidade cuja competência é desenvolvida no Ensino Fundamental 2.

Questão 3. Ao determinar todas as assíntotas da função $g(x)$ abaixo, obtemos:

$$g(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3x}$$

(a) Verticais: não existem, Horizontais: não existem;
(b) Verticais: $x = 0$, Horizontais: não existem;
(c) Verticais: não existem, Horizontais: $y = -1$ e $y = -2$;
(d) Verticais: $x = -2$ e $x = 2$, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$;
(e) Verticais: $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$, Horizontais: $y = 1$.

O desempenho dos participantes nesta questão 3 está apresentado abaixo:

Conforme a Fig. 4.11, tivemos uma taxa de acertos de 50,8%.

Abaixo, e por último, está a Questão 4:

Questão 4.

Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f, então

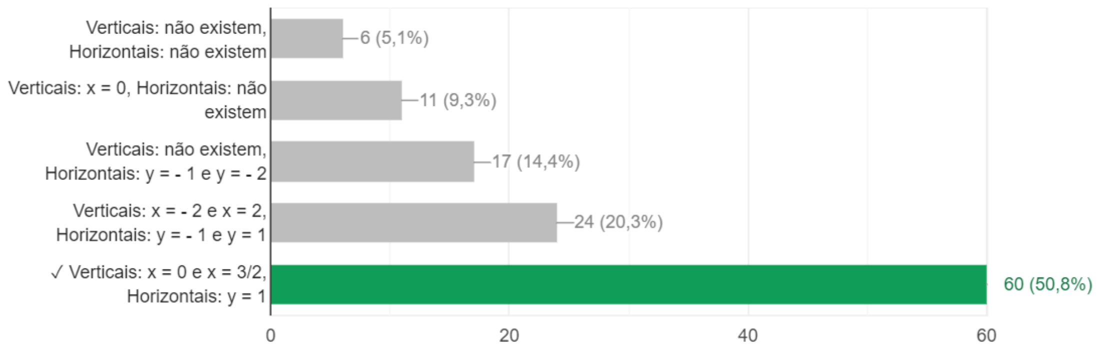


Figura 4.11: Respostas para a Questão 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - mx| = b.$$

Logo, uma estratégia para encontrar as assíntotas é verificar se o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ é finito. Em caso afirmativo, denotamos por m o valor deste limite e verificamos se o limite $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - mx|$ é finito. Se este também for finito, denotamos por b seu resultado e obtemos assim a assíntota $y = mx + b$. O mesmo vale quando $x \to -\infty$. Utilizando este procedimento, calcularemos agora as assíntotas da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x - 1}$$

para obter:

(a)
$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

(b)
$$y = \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}$$

(c)
$$y = \frac{x}{9} + \frac{1}{3}$$

(d)
$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

(e)
$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

O desempenho dos participantes nesta questão 4 está apresentado abaixo:

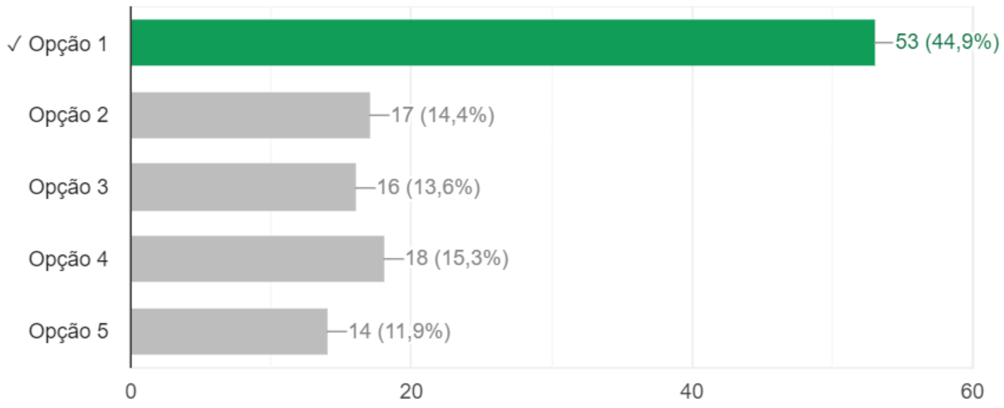


Figura 4.12: Respostas para a Questão 4

Conforme a Fig. 4.12, tivemos uma taxa de acertos de 44,9%.

Observamos que os índices de acerto vão caindo consideravelmente a medida em que o conteúdo teórico avança. O Curso de Cálculo 1 pode ser dividido, para fins didáticos, em três partes, três momentos, limites, derivadas e integrais. Apenas em 33% do curso, isto é, na primeira terça parte da disciplina, já notamos uma queda de desempenho relevante.

Capítulo 5

Considerações Finais

Vimos que a boa compreensão dos conceitos e, sobretudo, o domínio dos algoritmos oriundos de diversos teoremas, para a solução de problemas algébricos é fundamental para o acesso a níveis mais elevados de complexidade nas diferentes sub-áreas das Ciências Exatas e da Terra, em consonância com a exposição de Rezende (2003).

Com os quatro capítulos anteriores é possível ao leitor compreender a evolução do ensino de CDI no Brasil (Capítulo 1), os seus principais teoremas (Capítulo 2), alguns modernos métodos e técnicas utilizados para a maximização da compreensão (Capítulo 3) além de evidenciares as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes e como mitigá-las (Capítulo 4).

Responderam-se as seguintes perguntas: Quais são os tópicos dentre os pré-requisitos do CDI que os estudantes consideram mais difíceis? O Questionário 2, disponível em 6.2 buscou responder a esta interrogação. As respostas dos estudantes consultados em 6.2 foram apresentadas, sistematizadas, analisadas e interpretadas no capítulo 4.

São os exercícios mais importantes do que a teoria? Para esta questão, vimos na seção 3.2, sobre Heurística, juntamente com as respostas obtidas no Questionário 2, disponível em 6.2 que a resposta é afirmativa e corrobora os trabalhos de Tall (1978), Gazzoni e Ost (2008), Pontes (2019), Prestes (2003), Hein (2000), mencionados nos Capítulos 1 e 3.

Como resolver problemas de matemática e de CDI em especial? Temos aqui, novamente, uma confluência de resultados a partir das pesquisas citadas em 3.2 e nos Questionários 1, 6.1 e 6.2. Qual é a influência da modelagem matemática e o estímulo à intuição na compreensão dos conceitos de CDI? É do que tratamos na breve seção 3.3 ao abordar a modelagem matemática, juntamente com a seção 3.4, foram corroboradas pelos estudantes, por meio de pesquisa qualitativa e quantitativa mediante Questionários, disponíveis nos 6.1 e 6.2.

De que maneira as tecnologias da informação e comunicações (TICs) podem contribuir para a aprendizagem? Nesta seção 3.6 mencionamos brevemente um software de código aberto, o Geogebra, como exemplo catalisador na compreensão e visualização dos conceitos, definições e teoremas do CDI.

O que é e para que serve a análise de erros, em matemática? Como trabalhar contra-exemplos de modo a evidenciar sutilezas? Para as duas últimas questões aqui postas, as seções 3.5 sobre Análise de Erros e 3.7 sobre sutilezas lógicas, respectivamente, destacaram a sua relevância e se coadunam com os resultados obtidos nos Questionários 1 e 2, disponíveis em 6.1 e 6.2.

A partir da literatura revisitada e dos dados coletados nos questionários 1 e 2 vimos que as dificuldades dos estudantes influenciam diretamente no compreensão e no aproveitamento nas disciplinas de CDI. Além disso, tivemos a oportunidade de verificar que os estudantes tem consciência da importância dos tópicos considerados pré-requisitos. As dificuldades aumentam quando são necessárias manipulações algébricas menos frequentes e quando ocorrem funções trigonométricas e polinomiais.

A criação de disciplinas eletivas nas diversas trilhas formativas no Novo Ensino Médio (NEM), poderão contribuir para tornar mais suave a transição entre o ensino médio e a graduação. A construção de eletivas com planos de ensino e planos de aula adaptados a semestralidade é um dos nossos objetivos nos trabalhos futuros nessa linha.

Uma outra sequência para esta investigação aponta para os egressos da Universidade, a partir de análises dos resultados do Enade, com tratamento estatístico usando o excelente SPSS, um software de análise estatística avançada, vale dizer, de grande utilidade para o tratamento de dados e informações estatísticas.

Outro caminho que tomaremos a partir deste trabalho será a investigação das dificuldades no processo ensino-aprendizagem nas disciplinas de Álgebra 1, 2 e 3 da graduação. As dificuldades na Álgebra ou na Combinatória podem ser interpretados à luz da compreensão da Linguagem, num sentido amplo, e da Lógica-simbólica, em especial. Quais seriam os benefícios e as dificuldades para se incluir o ensino da Álgebra e do Análise, juntamente com outros idiomas artificiais, como as linguagens de programação, dentro do estudo das Linguagens, em geral? Estes são caminhos derivados desta investigação inicial e poderão contribuir na perspectiva de novas interfaces entre estes conteúdos científicos com frequência estudados distantes uns dos outros.

Bibliografia

1. ALEXSANDROV, A.D et al. *Vision General de la Matemática. In: La matemática: su contenido, métodos y significado. 7 ed. Madrid: Alianza Universidad, 1985.*

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. *Filosofando: Introdução à filosofia., 2. ed. rev. atual. São Paulo: Moderna, 1993.*

ARAÚJO, Gustavo Cunha de *O processo de massificação do ensino fundamental brasileiro a partir da análise das LDB 4.024/61 E 5.692/71. Disponível em http://www.simposioestadopoliticas.ufu.br/imagens/anais/pdf/DC32.pdf. Acessado em 30/03/2017, às 04:11.*

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico. São Paulo: Contraponto, 1996.*

BACHELARD, G *O racionalismo aplicado. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.*

BACHELARD, G. *A filosofia do não. Pensadores. São Paulo: Abril, 1978.*

BALL, W. W. Rouse *A Short Account of the History of Mathematics, . 1960.*

BARONI, Rosa Lucia Sverzut *Algumas questões sobre o ensino de análise em cursos de formação de professores de matemática. UNESP/Rio Claro. III Forum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil PUC/SP. Grupo de Discussões 11: Sobre ensino de Cálculo e Análise.2011.*

BARUFI, Maria Cristina Bonomi *A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral.. Tese (Doutorado em Educação),Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.*

BIEMBENGUT, M. S., N. Hein. *Modelagem matemática no ensino. Contexto, São Paulo. 2000.*

COCHRAN-SMITH, M., e Lytle, S *Relationship of Knowledge and Practice: TeacherLearning in Communities. In A. Iran-Nejad & C. D. Pearson (Eds.), Review of research in education (Vol. 24, pp. 249-306). Washington, DC: American Educational Research Association. 1999.*

CUNHA, Maria Isabel *Diferentes Olhares sobre as Práticas Pedagógicas no Ensino Superior: a docência e sua formação.In: Educação, Porto Alegre, ano XXVII, n.3 (54), p. 525 536, Set./Dez. 2004.*

CURY, Helena Noronha *Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. Cobenge, 2003.*

CURY, Helena Noronha *As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos. Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.*

DESCARTES, Rene *Discurso do Método. Obras escolhidas. Introdução de Gilles-Gaston Granger; prefácio e notas de Gérard Lebrun; tradução de Jacob Guinsburg e Bento Prado Jr. São Paulo: Difel Difusão Européia do Livro, 1962 (col. Clássicos Garnier); 1973, pp. 39-103.*

DIENER ET DIENER *Non standard analysis in practice. Springer, New York, 1995.*

FELIZARDO, Sterliane Blanc *Aplicação da Análise não-standard à Teoria da Medida: Uma Representação Hiperfinita da Medida de Lebesgue. Curitiba. 2005.*

FINNEY, Ross L.,Maurice D. Weir, Frank R. Giordano *Cálculo de George B. Thomas Jr.. tradução de Paulo Boschcov; revisão técnica Leila Maria Vaconcellos Figueiredo. São Paulo: Addison Wesley, 2002.*

GRATTAN-GUINNES, Ivor *O que foi e o que deveria ser o Cálculo?. In: Zetetiké, vol. 5, n.7, pp. 69-94, Jan./Jun. 1997 CEMPEM/FE/UNICAMP Campinas SP.*

HELLMEISTER, Ana Catarina Pontone *Entrevista concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 10 de fevereiro de 2009.*

KANT, Immanuel *Fundamentação da metafísica dos costumes. In: Os pensadores. 1aed. São Paulo: Editora Abril SA, 1974.*

LABEGALINI, Andréia Cristina Fregate Baraldi *A didática no ensino superior: saberes e competências da nossa época. In: LABEGALINI, A. C. F. B. e MARÇOLLA, R. (Org.). Comunicação e Educação: a didática a serviço do ensino superior. Marília: Arte e Ciência Editora, p. 11 18, 2009.*

LACHINI, J. *Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In: LAUDARES, J.B.,LACHINI, J. (Org.). A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-190.*

LEVY, Lënio Fernandes, Santo, Adilson Oliveira do Espíritu. *A teoria da complexidade e o ensino-aprendizagem de ciências e matemática via modelagem matemática. Junio de 2006, Número 6, páginas 21 29. Revista Iberoamericana de Educación Matematica.*

LIMA, Alceu Amoroso *1922 em Vicente Licínio Cardoso (org.), À margem da História do Brasil Inquérito por escritores da geração nascida com a República, 2ł ed., Câmara dos Deputados/Editora Universidade de Brasília, 1981, t. II, p. 51.*

LIMA, Gabriel Loureiro de *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.*

MASON, Stephen F. *A History of the Sciences.* Collier Books, New York, 1962.

MONDIN, Battista *Introdução à filosofia: problemas, sistemas, obras. Trad. de Danilo Morales; revisão literária de Luiz Antônio Miranda. São Paulo: Paulus, 1980.*

MORAES, F. R *Um estudo sobre erro na resolução de equações do 1ž grau com o software APLUSIX. Campo Grande, Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.*

MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à educação do futuro. 6.ed. Cortez, São Paulo, 2002.*

NETO, Ernane Guimarães. *In http://www1.folha.uol.com.br/fsp/mais/fs0208200921.htm. Visitado em 03/04/14 quinta-feira, às 18h33min.*

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. *Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática Uma Abordagem Integrando Oralidade, Escrita e Informática. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.*

OZORES, Ana Luiza Festa. *A Análise de Erros como estratégia de ensino. IME-USP. São Paulo. 2015.*

PAIS, Luis Carlos. *Didática da matemática; uma análise da influência francesa. 2ł ed. 2 reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 128 p. Coleção Tendências em Educação Matemática 3.*

PINTO, N. B. *O erro com estratégia didática: Estudo do erro no ensino da Matemática Elementar. Campinas: Papirus, 2000.*

POLYA, George *Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton Univ. Press, 1954.*

POLYA, George. *Mathematical Discovery. 2 vols., Wiley, 1962 e 1965. Artigo publicado no "Journal of Educatíon", University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69, Reproduzido nos "Collected Papers" de George Polya, vol. IV, pp. 525--533, MIT Press 1984.Traduzido por Maria Celano Maia. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. Com apresentação do professor Elon Lages Lima. RPM Revista do Professor de Matemática, nř 10.*

PRANDI, Luiz Roberto. *Tendências do Processo Didático-Pedagógico no Ensino Superior na Contemporaneidade.In: Akrópolis, Umuarama, v.17, n. 3, p. 137 142, jul./set. 2009.*

PRESTES, M. L. M. *(2003): A pesquisa e a construção do conhecimento científico: do planejamento aos textos, da escola à academia. 2.ed. Rêspel, São Paulo.*

RADATZ, Hendrik. *Students'errors in the mathematical learning process: a survey. For the Learning of Mathematics. Princeton Univ. Press, 1954.*

RECH, Hildemar Luis. *Elementos da formação social brasileira. Princeton Univ. Press, 1954.*

REIS, Frederico da Silva. *A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.*

REZENDE, Wanderley Moura. *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.*

SALANSKIS, Jean-michel. *Scientific American Brasil. 2003. Nř 15.*

SANTOS, A. C. F. dos; Macêdo, J. A. *A utilização das tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática e física. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 10, 2013, Curitiba (PR). Anais... Curitiba, 2013.*

SARTRE, Jean-Paul *O imaginário. São Paulo: Ática, 1996.*

SHIROMA, Eneida Oto *Org. Política Educacional. Rio de Janeiro: DPeA Editora, 2004.*

SPIVAK, Michael. *Calculus. W. A. Benjamin, Inc., New York. 1967.*

STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos. Tradução: Diego Alfaro. Revisão técnica: Samuel Jurkiewics Coppe UFRJ. Zahar. São Paulo. 2010. VIEIRA,* *A. M. D. P. GOMIDE, Angela G. V. História da Formação de Professores no Brasil: PrimadodasInfluenciasExternas. 2008.http://wiki.geogebra.org/pt/P*

ALVES, Francisco Regis Vieira. *O papel do contraexemplo no ensino do Cálculo: Uma discussão com o uso do Geogebra. Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. Uruguay, 2012.*

DUVAL, Raymond. *Structure du raisonnement deductif et apprentissage de lademonstration. In Educational Studies in Mathematics. 22, p. 233-261. 1991.*

CARNEIRO DÖRR, Raquel. *Análises de Aprendizagens em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso de Desenvolvimento de Conceitos e Procedimentos Algébricos em uma Universidade Pública Brasileira. Orientador: Cristiano Alberto Muniz. Brasília, 2017. 237 p.*

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques v. 10, n.2, 3, p.133-170, 1990.*

TALL, David. *Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics teaching, v. 82, p. 44-49, 1978.*

TALL, David. *Students difficulties in Calculus. In: Proc. ICME 1992 of the Working Group 3, Vol. 2, pp. 13-28, 1993.*

STEWART, James. *Cálculo. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2011.*

SWOKOSWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria Analítica, 3.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.*

SOUZA, M. M. *Uma história do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília UNB: 1962-1972. 2015. 229f. Tese (Doutorado) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.*

SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: Makron Books, São Paulo, 1987, vol. 1.*

ROSA, Odileia S. *Aspectos Motivacionais do Cálculo Diferencial e Integral. 2011. 117f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, 2011.*

ROBERT, Aline; SCHWARZENBERGER, Rolph. *Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In: Advanced mathematical thinking. Springer Netherlands, 2002, p. 127-139.*

RAAD, M. R. *História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura. 2012. Dissertação (Mestrado), UFJF, Juiz de Fora, 2012.*

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Ed. Paz e Terra, 2011.*

DREYFUS,Tommy. *Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Advanced mathematical thinking. Springer Netherlands, 2002, p.25-41.*

DORR, Raquel C.; MUNIZ, Cristiano A.; PINA NEVES, Regina S. *Operações algébricas e funções como obstáculos à aprendizagem no cálculo. In: I LADIMA. Anais do 1žLadima, Bonito, MS, 2016.*

DORR, Raquel C.; PINA NEVES, Regina. *O perfil de ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In: VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática, Anais do VI EBREM, 2014. Brasília, DF.*

DISTRITO FEDERAL. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. *Currículo em Movimento da Educação Básica; Ensino Fundamental Anos Finais. Brasília, 2013. Disponível em: http://www.se.df.gov.br/materiais-pedagogicos/curriculoemmovimento.html. Acesso em: 19/09/2022.*

DIAS, M. A.A. *Aplicações do estudo de cálculo integral no nível básico de ensino associado à resolução do cálculo de áreas de figuras planas. 2015. Dissertação (Mestrado)-Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.*

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 2012.*

BEZERRA, W. W. V.; Gontijo, Cleyton Hércules. *Percepções de professores de Cálculo 1 sobre avaliação e suas relações com as aprendizagens dos estudantes.. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 9, p. 538-554, 2020.*

BEZERRA, W. W. V.; Gontijo, Cleyton Hércules. *Avaliação para as aprendizagens: Uma abordagem a partir do trabalho com limites de funções reais num curso de Cálculo 1. Educação Matemática em Revista, v. dez 2017, p. 261-276, 2017.*

BRAGA, MARIA DALVIRENE ; MENEZES, JOSINALVA ESTACIO ; SEIMETZ, RUI ; MARIA DA SILVA, POLIANA ; ARAÚJO DA SILVA, SAMARA. *Um Estudo Comparativo sobre as Impressões de Alunos das Licenciaturas no Ensino Remoto em Duas Universidades Públicas. Perspectivas da educação matemática, v. 14, p. 1-19, 2021.*

SEIMETZ, R.; NEVES, R. S. P. ; MENEZES, J. E. *Introdução - Histórico. In: Maria Dalvirene Braga;Carine Almeida Silva Noleto; Cleia Alves Nogueira. (Org.). Investigações em Ensino de Matemática: práticas pedagógicas. 1ed.São Paulo: Paco Editorial, 2020, v. 1, p. 7-37.*

BRAGA, M. D. ; MENEZES, J. E. ; SIQUEIRA, I. B. ; ROSA, S. I. ; SEIMETZ, R. *Aplicações do cálculo diferencial e integral na formação profissional dos cursos de graduação da UnB. In: Maria Dalvirene Braga; Carine Almeida Silva Noleto; Cleia Alves Nogueira. (Org.). Investigações em Ensino de Matemáticatica: a formação de professores que ensinam matemática. 1ed.São Paulo: Paco Editorial, 2020, v. 1, p. 129-140.*

SEIMETZ, R.; BRAGA, M. D. ; MENEZES, J. E. *Estudo de caso: um estudante com altas habilidades nas ciências exatas e os reflexos no atual curso de Engenharias. In: VIII Congresso Brasileiro de Educação Esepecial 2018l, 2018, São Carlos - SP. https://proceedings.science/proceedings/100051/authors/40746, 2018.*

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 3ł Edição, 2013.*

BICUDO, I. *Elementos, UNESP, 2009*

BRESSOUD, D. *Was Calculus Invented in India?. The College Mathematics Journal,(2002), pp.2-13.*

DREYER J. L. C. *A History od Astronomy from Thales to Kepler. Dover Publications Inc. 1953.*

HEATH, L. T. *A History of Greek Mathematics, Volume 1. Dover Publications Inc.. 1981.*

JOSEPH, GEORGE G. *Indian Mathematics: Engaging with the World from Ancient to Modern Times. World Scientific Publishing (UK). 2016.*

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: an Introduction, 3ª edição, Addison-Wesley, 2009.*

KATZ, V. J. *Ideas of Calculus in Islam and India.* Magazine (1995) pp.163-174.

NEUGEBAUER, O. *The Exatc Sciences in Antiquity. Dover Publications Inc. 2ł edição. 1969.*

PTOLOMEU *O Almagesto - Traduzido por G. J. Toomer Duckworth. 1ª edição, 1984.*

RODRIGUES, M. *Relógios de Sol: Seu Funcionamento e sua Construção.* Disponível em <www.mat.unb.br/pibid/modules/cadernos/pdf/75.pdf,acessoem20/01/2020.>

ROY, R. *The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. Math. Magazine, (1990) pp.291-306.*

SPIVAK, M. *Calculus, Publish or Perish, 4ª Edição, 2009.*

VAN BRUMMELEN, GLEN *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry. Princeton University Press. 2013.*

VAN BRUMMELEN, GLEN *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry. Princeton University Press. 2009.*

GAZZONI, ALCIBIADES; OST, AUGUSTO *A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação. VIDYA, v. 28, n. 2, pag. 37-45, Jul/Dez, 2008 - Santa Maria, 2009.*

PONTES, E. A. S. *Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. HOLOS, ano 35, v. 3, ed. 6703, 2019.*

ONUCHIC, L. D. L., ALLEVATO, N. S. G. *Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema-Mathematics Education Bulletin. pag. 73-98. 2011.*

MEDEIROS, K. M. *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 2001.*

JONOFON, SÉRATES *Raciocínio lógico. Brasília: Jonofon Sérates. 11. ed. v. 2.*

SANTANA, JOSÉ ERNANDES OLIVEIRA DE. Matemática aplicada à química. 2016. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

Capítulo 6

Anexos e Apêndices

6.1 Anexo A

Na Universidade de Brasília, a disciplina tem a seguinte ementa:

, , ,

, ,

EMENTA DE CÁLCULO I DA UNIVERSIDADE DE BRASILIA – UnB

Disciplina - Listagem de Ementa/Programa

Disciplina: 113034 - Cálculo 1

(Ver Oferta)

Órgão:	MAT - Departamento de Matemática.
Código:	113034
Denominação:	Cálculo 1
Nível:	Graduação
Vigência:	2016/1
Pré-req:	Disciplina sem pré-requisitos
Ementa:	Funções de uma variável real, limite e continuidade, derivada, integral, aplicações da integral.
Programa:	1. Funções: conceito de função; exemplo de funções de uma variável real; tipos de funções; gráficos; função composta; função inversa; funções trigonométricas e suas inversas; função exponencial; função logaritmo; 2. Limite e continuidade: conceito de limite; propriedades dos limites; limites laterais; limites envolvendo o infinito; continuidade; Teorema do Valor Intermediário; 3. Derivadas: conceito de derivada; reta tangente e reta normal; derivadas laterais; regras básicas de derivação; regra da cadeia; taxas relacionadas; derivada da função inversa; derivação implícita; comportamento de funções; máximos e mínimos; Teorema do Valor Médio; regras de l'Hospital; concavidade, inflexão e gráficos; problemas de otimização; 4. Integrais: primitivas; integrais indefinidas e suas propriedades; integral definida e suas propriedades; Teorema Fundamental do Cálculo; integração por substituição; integração por partes; integração por frações parciais; integração de produtos de funções trigonométricas; integração por substituição inversa; integração por substituições especiais. 5. Aplicações da integral: aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes e áreas de sólidos.
Bibliografia:	Bibliografia Básica : THOMAS, George B., Cálculo, São Paulo: Ed. Addison Wesley, 2008. LEITHOLD, Louis , O cálculo com geometria analítica – 3. ed. – São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994. [ELIBRARY] Hill, G., Everything Guide To Calculus I : A Step-By-Step Guide To The Basics Of Calculus - In Plain English! ebrary Reader, Editor: F+W Media, 2011. Bibliografia Complementar : SWOKOWSKI, Earl William, Cálculo com geometria analítica – 2. ed. – São Paulo : Makron Books, 1994. GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001. STEWART, James. Cálculo. Austrália; São Paulo: Cengage Learning, 2013. 2 v. ISBN 9788522112586 (v. 1). Classificação: 517 S849c =690 2013 Ac.1013137 (16 unidades na biblioteca) FLEMINNG, Diva M., GONÇALVES, Mírian B. Cálculo A: Funções Limite, derivação e integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. PATRÃO. Mauro. Cálculo 1: derivada e integral em uma variável. Brasília:

Editora Universidade de Brasília, 2011. Disponível em [http://repositorio.bce.unb.br/handle/10482/7183]

6.2 Anexo B

Este é o Questionário 1 e as respostas obtidas

QUESTIONÁRIO

Este é um convite para você participar da pesquisa “Perspectivas no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral”, desenvolvida por Thales Victor sob a supervisão da Profº. Drº. Rui Seimetz, do Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional PROFMAT da Universidade de Brasília - UnB, no Departamento de Matemática - MAT/UnB.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Sua participação é voluntária e você pode recusar ou interromper o preenchimento a qualquer momento. Sua contribuição é fundamental para que esta pesquisa possa alcançar seus objetivos e gerando resultados a partir da análise das resoluções de exercícios relacionados ao cálculo de limites e derivadas. Seu anonimato está garantido, de forma que não há riscos de que dados individuais sejam identificados como seus. Os resultados serão tratados estatisticamente de forma agregada e os respondentes não serão identificados, privilegiando o sigilo das informações. Caso existam dúvidas no preenchimento ou necessite de esclarecimentos, favor contatar-nos pelo e-mail thalesvictordias@gmail.com ou pelo telefone 61 9 96607916. Agradecemos sua atenção e esperamos receber sua valiosa contribuição.

( ) Declaro que li e concordo em participar.

Perguntas preliminares:

1. Qual foi o seu curso de gradução? Por que o escolheu?

2. Qual é a sua idade?

3. Possui pós-graduação? Se sim, qual ou quais?

4. Você atua como professor ou professora? De quais disciplinas? Há quanto tempo?

5. Você estudou o Ensino Médio em instuição de ensino pública ou privada?

6. Qual era a sua relação com a Matemática no ensino básico?

7. Como foi a sua experiência no Cálculo I?

8. Qual foi a sua principal dificuldade durante o estudo do Cálculo I?

9. Que tipo de sugestões você faria para as pessoas que apresentem a mesma dificuldade?

10. Como era a sua rotina de estudos?

Para finalizar, Por gentileza, responda as duas questões da próxima página.

- Na **Questão 1**, responda os itens **c** e **d**;
- Na **Questão 2**, responda os itens **a**, **b** e **c**.

Muito obrigado!

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 01

Temas abordados: Introdução ao Cálculo e Revisão
Seções do livro: 2.1; 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

1) Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada por $s(t) = (4 + t^2)$, então a velocidade média entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$ é dada por (veja Texto 1 e/ou vídeo)

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{[4 + (2+h)^2] - [4 + 2^2]}{h} = \cdots = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h.$$

Quanto mais próximo h estiver de zero, mais perto a velocidade média estará da velocidade em $t = 2$, de modo que essa velocidade vale

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(4 + h) = (4 + 0) = 4.$$

Para cada função abaixo, simplifique o quociente $(s(t_0+h) - s(t_0))/h$ que dá a velocidade média entre os instantes $t = t_0$ e $t = t_0+h$. Em seguida, calcule a velocidade $v(t_0)$ fazendo h se aproximar de zero.

(a) $s(t) = t^2$, no ponto $t_0 = 3$

(b) $s(t) = t^3$, no ponto $t_0 = 1$

(c) $s(t) = \sqrt{t}$, no ponto $t_0 = 9$

(d) $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2} t^2$, com s_0, v, $a \in \mathbb{R}$, em um ponto $t_0 > 0$ genérico

Dica: para o item (b), lembre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\sqrt{9+h} + 3)$

2) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, a *reta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(a, f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe (veja Texto 2 e/ou vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y = y(x)$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. A expressão acima significa que, quando x se aproxima de a, o quociente $(f(x) - f(a))/(x - a)$ se aproxima do número $f'(a)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$ e $a = 1$, então

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3,$$

de modo que a equação da reta tangente no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é $y - 1 = 3(x - 1)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ para o valor de a indicado. Em seguida, calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

(a) $f(x) = x^2$, para $a = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $a = 3$

(c) $f(x) = mx + b$, com m, $b \in \mathbb{R}$, para um valor genérico de a

Dica: para calcular $f'(2)$ no item (a), fatore o numerador $(x^2 - 4)$ de modo a cancelar o denominador $(x - 2)$; no item (b), calcule a diferença $(1/x) - (1/3)$ reduzindo as frações a um mesmo denominador, de modo a eliminar o denominador $(x - 3)$

...estão 1.

(c)

$$v(9) = \lim_{t \to 0} \frac{(\sqrt{t+9} - \sqrt{9})}{t} \cdot \frac{\sqrt{t+9} + 3}{\sqrt{t+9} + 3}$$

$$v(9) = \lim_{t \to 0} \frac{t+9-9}{t(\sqrt{t+9}+3)} = \lim_{lim \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

(d)

$$v(t_0) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{s_0 + v_0(t+t_0) + \frac{a}{2}(t+t_0)^2 - \cancel{s_0} - v_0 t - \frac{a}{2}t^2}{t_0}$$

$$= \lim_{t_0 \to 0} \frac{\cancel{v_0 t} + v_0 t_0 + \cancel{\frac{a}{2}t^2} + a t t_0 + t_0^2 - \cancel{v_0 t} - \cancel{\frac{a}{2}t^2}}{t_0}$$

$$= \lim_{t_0 \to 0} \frac{v_0 t_0 + a t t_0 + t_0^2}{t_0} = \lim_{t_0 \to 0} v_0 + at + t_0$$

$$= v_0 + at$$

2) a) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$

Reta

Ponto $(2;4)$ $\Rightarrow$ Equação da reta

$y - 4) = 4(x-2)$

b) $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{3x} \div x - 3 =$

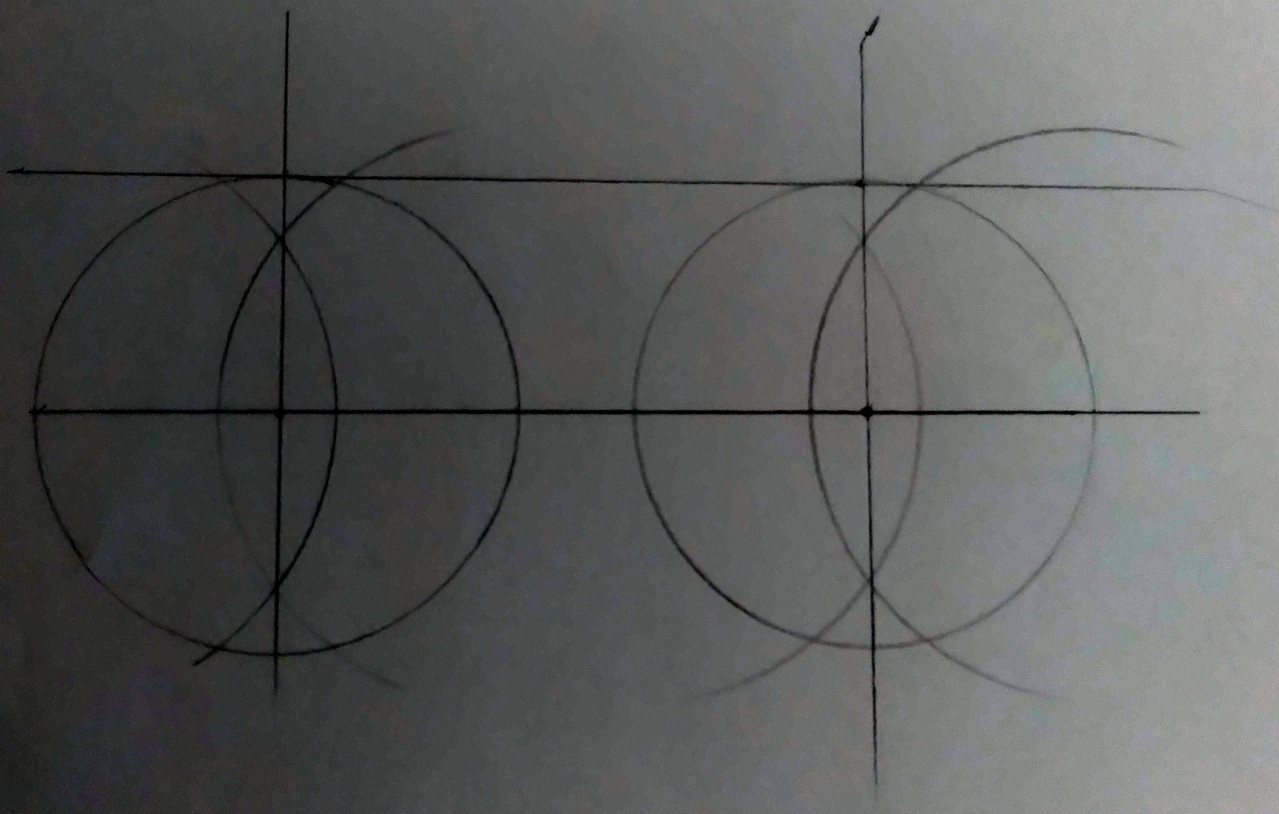
$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-x}{3x} \cdot \dfrac{1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} -\dfrac{1}{3x} = -\dfrac{1}{9}$

Ponto $(3, \frac{1}{3})$ Reta $y - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{9}(x-3)$

c) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{mx + \cancel{b} - ma - \cancel{b}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = m.$

Ponto $(a, ma+b)$ Reta $y - ma - b = m(x-a) \Rightarrow$

$y - b = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + b}$



2. a) $f(x) = x^2$ e $a = 2$

Ponto $(2, f(2)) = (2,4)$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

eq da reta. $y - 4 = 4(x-2)$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $a = 3$

Ponto $(3, f(3)) = (3, 1/3)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

Equação da reta

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x-3)$$

c) $f(x) = mx + b$, com $b, m \in \mathbb{R}$

Ponto: $(a, f(a)) = (a, am + b)$

$f(a) = am + b$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{mx + \cancel{b} - am - \cancel{b}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = m$$

Equação da reta

$$y - am - b = m(x-a)$$

$$y - b = mx$$

1 d) $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \frac{s_0+v_0(t_0+h)+\frac{a}{2}(t_0+h)^2-(s_0+v_0t_0+\frac{a}{2}t_0^2)}{h}$

$= \frac{v_0h+2at_0h+\frac{ah^2}{2}}{h} = \frac{2v_0+4at_0+ha}{2}$

$t_0=2;\ a=4$ e $s_0=1$

$v(2) = \lim_{h\to 0} s(2+h)-s(2) = \frac{2.2+4.4.2+\cancel{h.2}^{0}}{2} = \frac{36}{2} = \boxed{18}$

Questão 2

a) $f(x)=x^2$ $\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = x+2 = 2+2 = 4$

se $a=2 \Rightarrow f(2)=4$

equação no ponto $(a; f(a)) = (2;4) \Rightarrow y-4=4(x-2)$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} =$

se $a=3 \Rightarrow f(3)=\frac{1}{3}$

c) $f(x)=mx+b$ $\quad \lim_{x\to a} \frac{mx+\cancel{b}-(ma+\cancel{b})}{x-a} = \frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}} = m$

$f(a)=ma+b$

$(a; ma+b) = y-(m.a+b)=m(x-a)$

6.3 Anexo C

QUESTIONÁRIO - PESQUISA - PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA GRADUAÇÃO - PROFMAT - Universidade de Brasília - UnB - Campus Universitário Darcy Ribeiro - Plano Piloto - Brasília - DF.

Este é um convite para você participar da pesquisa "Perspectivas no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral", desenvolvida por
Thales Victor sob a supervisão do Profº. Drº. Rui Seimetz, do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade de Brasília - UnB, no Departamento de Matemática - MAT/UnB.

*Obrigatório

1. TERMO DE CONSENTIMENTO *

Sua participação é voluntária e você pode recusar ou interromper o preenchimento a qualquer momento. Sua contribuição é fundamental para que esta pesquisa possa alcançar seus objetivos e gerando resultados a partir da análise das resoluções de exercícios relacionados ao cálculo de limites. Seu anonimato está garantido, de forma que não há riscos de que dados individuais sejam identificados como seus. Os resultados serão tratados estatisticamente de forma agregada e os respondentes não serão identificados, privilegiando o sigilo das informações. Caso existam dúvidas no preenchimento ou necessite de esclarecimentos, favor contatar-nos pelo e-mail thalesvictordias@gmail.com ou pelo telefone +55 61 9 96607916. Agradecemos sua atenção e esperamos receber sua valiosa contribuição.

Marque todas que se aplicam.

☐ Declaro que li e concordo em participar.

2. Nome (Opcional)

3. E-mail (Opcional)

PRIMEIRA PARTE

Aqui temos a intenção de conhecer um pouco mais sobre você e sobre a sua formação, especialmente relacionada ao desenvolvimento e aprimoramento de habilidades e competências da Matemática e das suas tecnologias.

4. Qual é a sua idade? *

5. Você, atualmente: *

Marcar apenas uma oval.

- Somente estuda
- Trabalha e estuda

6. Qual é a distância aproximada, em quilômetros, de onde você reside até o Campus da Universidade? *

7. Qual é o principal modo de deslocamento diário entre o Campus e a sua residência? *

Marcar apenas uma oval.

- A pé
- De bicicleta
- De ônibus
- De carro
- De metrô

8. Você cursou o Ensino Fundamental majoritariamente em instituição de ensino da rede: *

Marcar apenas uma oval.

- Pública
- Privada

9. Você cursou o Ensino Médio majoritariamente em instituição de ensino da rede: *

Marcar apenas uma oval.

- Pública
- Privada

10. Qual é o seu curso de Graduação? *

11. Em relação à questão anterior, por que você o escolheu? *

____
____
____
____
____

12. Você possui certificações adicionais, como cursos de idiomas ou de natureza técnica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

13. Como avalia a sua relação com a Matemática no Ensino Básico? *

Marcar apenas uma oval.

- Péssima
- Ruim
- Regular
- Boa
- Ótima

14. Você considera que o seu ensino básico forneceu a quantidade certa de teoria e prática necessários ao estudo e aproveitamento no Cálculo Diferencial e Integral? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

15. Quão difícil está sendo o programa de Cálculo para você até o estudo de Limites? *

Marcar apenas uma oval.

- Muito fácil
- Fácil
- Neutro
- Difícil
- Muito difícil

16. Você acredita que as lições do curso de Cálculo Diferencial e Integral serão úteis para o crescimento de sua carreira? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

17. Qual é o assunto estudado durante o Ensino Médio que você considera mais importante para o sucesso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? *

18. Que tipos de sugestões você faria para pessoas que apresentem dificuldades no estudo do Cálculo I?

19. Como é a sua rotina de estudos?

SEGUNDA (E ÚLTIMA) PARTE

Nesta segunda parte apresentamos questões relacionadas ao estudo de limites envolvendo o infinito, por meio de assíntotas verticais e horizontais.

20. Calculando o limite abaixo, obtemos: *

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1}$$

Marcar apenas uma oval.

$1, \forall x$

Opção 1

$-1, \forall x$

Opção 2

$$\begin{cases} 1, se & x \to +\infty \\ -1, se & x \to -\infty \end{cases}$$

Opção 3

$$\begin{cases} 1, se & x \to +\infty \\ 0, se & x \to -\infty \end{cases}$$

Opção 4

$$\begin{cases} 0,\, se & x \to +\infty \\ -1,\, se & x \to -\infty \end{cases}$$

- [ ] Opção 5

21. Calculando o limite abaixo, obtemos: *

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + sen^3(x)}{5x + 6}$$

Marcar apenas uma oval.

- [ ] 6/5
- [ ] 1/5
- [ ] 5/6
- [ ] 1/6
- [ ] 1/3

22. Ao determinar todas as assíntotas da função abaixo, obtemos: *

$$g(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3x}$$

Marcar apenas uma oval.

- Verticais: não existem, Horizontais: não existem
- Verticais: x = 0, Horizontais: não existem
- Verticais: não existem, Horizontais: y = - 1 e y = - 2
- Verticais: x = - 2 e x = 2, Horizontais: y = - 1 e y = 1
- Verticais: x = 0 e x = 3/2, Horizontais: y = 1

23. *

Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - mx| = b.$$

Logo, uma estratégia para encontrar as assíntotas é verificar se o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ é finito. Em caso afirmativo, denotamos por m o valor deste limite e verificamos se o limite $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - mx|$ é finito. Se este também for finito, denotamos por b seu resultado e obtemos assim a assíntota $y = mx + b$. O mesmo vale quando $x \to -\infty$. Utilizando este procedimento, calcularemos agora as assíntotas da função

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1}$$

para obter:

Marcar apenas uma oval.

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

Opção 1

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}$$

Opção 2

$$y = \frac{x}{9} + \frac{1}{3}$$

Opção 3

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

Opção 4

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

Opção 5

CONCLUSÃO

Gostaríamos de agradecer pela sua participação.

Para falar conosco, você pode enviar uma mensagem para thalesvictordias@gmail.com ou para o número de telefone +55 61 9 96607916.

Assim que o resultado desta pesquisa estiver validado, você poderá acessá-lo na íntegra e constatar a importância da sua participação para aprimorar a visão global que os autores construíram sobre o tema.

Banco de dados gerado a partir do Questionário 2:

Qual é a sua idade?	Você, atualmente:	Qual é a distância aproxi	Qual é o principal modo d	Você cursou o Ensino Fu
89	Trabalha e estuda	89	A pé	Privada
19	Somente estuda	22km	De metrô	Privada
21	Somente estuda	50km	De ônibus	Pública
22	Trabalha e estuda	45km	De ônibus	Privada
21	Somente estuda	35 km	De carro	Privada
19	Somente estuda	27km	De metrô	Privada
20 anos	Somente estuda	20km	De carro	Privada
18	Somente estuda	13 km	De carro	Privada
22	Somente estuda	60km	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	15km	De carro	Privada
21 anos	Trabalha e estuda	20 Km	De metrô	Pública
19 anos	Somente estuda	10km	De carro	Privada
24	Trabalha e estuda	25	De carro	Pública
19	Somente estuda	mais ou menos 25 km	De ônibus	Pública
22 anos	Somente estuda	21 km	De ônibus	Privada
17	Somente estuda	19 km	De ônibus	Privada
20	Somente estuda	30 km	De ônibus	Privada
72	Somente estuda	10	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	50 quilômetros	De ônibus	Privada
19 anos	Trabalha e estuda	15 Km	De ônibus	Pública
22	Trabalha e estuda	24km	De carro	Pública
23	Somente estuda	28km	De ônibus	Pública
19 anos	Somente estuda	9km	De ônibus	Privada
20	Trabalha e estuda	25 km	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	13km	De carro	Privada
20 anos	Somente estuda	32km	De metrô	Privada
24	Trabalha e estuda	42Km	De ônibus	Pública
37	Trabalha e estuda	30	De carro	Pública
18	Somente estuda	68KM	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	30km	De carro	Privada
18	Somente estuda	10	De carro	Privada
19	Somente estuda	15 km	De carro	Privada
18	Somente estuda	3	De carro	Privada
18	Somente estuda	4	De carro	Privada
18	Trabalha e estuda	5km	De carro	Privada
18	Trabalha e estuda	25.8 km	De ônibus	Pública
21	Somente estuda	10km	De ônibus	Pública
21	Somente estuda	19	De ônibus	Pública
38	Trabalha e estuda	3 km	De carro	Privada
20	Trabalha e estuda	15	De carro	Privada
20	Somente estuda	15	De carro	Privada
19	Somente estuda	2 Km	De carro	Privada
19	Somente estuda	33km	De carro	Privada
18	Somente estuda	38 km	De ônibus	Pública
20	Somente estuda	10 km	De ônibus	Pública
21	Somente estuda	10	De ônibus	Privada
25	Somente estuda	15km	De carro	Privada
23	Trabalha e estuda	20km	De carro	Privada
19	Somente estuda	30KM	De ônibus	Privada
20	Somente estuda	24 a 28 km	De carro	Privada

Você cursou o Ensino Me	Qual é o seu curso de Gr	Em relação à questão an	Você possui certificações	Como avalia a sua relaçã
Pública	luta	op	Sim	Péssima
Privada	Ciências Biológicas	Me identifico na área e q	Sim	Regular
Pública	Biologia	Escolhi devido a ser meu	Não	Regular
Pública	Gestão de Políticas Públi	área que me interessava	Não	Péssima
Privada	Ciência da Computação	Por afinidade após cursa	Sim	Boa
Privada	CIÊNCIAS biológicas	Porque gosto da área de	Sim	Regular
Privada	Ciências ambientais	Área de interesse de trab	Sim	Boa
Privada	Ciência da computação	Porque tenho interesse n	Sim	Ótima
Pública	Ciência da computação	Era o que mais me agrad	Não	Péssima
Privada	Ciência da Computação	Afinidade com a área, bo	Não	Ótima
Pública	Ciências Ambientais	Interesse na área	Sim	Ruim
Privada	Engenharia elétrica	Por ser uma engenharia	Sim	Ótima
Pública	Gestão de Agronegócios	Maior identificação	Sim	Péssima
Pública	Ciência da computação	Bom, escolhi porque gos	Sim	Péssima
Privada	Ciências Ambientais	Por me identificar com o	Sim	Regular
Privada	Ciência da Computação	Afinidade com a área de	Não	Boa
Privada	Fonoaudiologia	Por uma questão de voca	Sim	Boa
Pública	Ciências Ambientais	Sou formado em biologia	Não	Boa
Pública	Estatística	Gosto muito de exatas e	Sim	Ruim
Pública	Ciências Ambientais	Porque é uma área que t	Não	Regular
Pública	Ciência da computação	Área com recursos que a	Sim	Boa
Pública	Biologia- licenciatura	Sempre me interessei pe	Sim	Ruim
Pública	Farmácia	Sempre gostei bastante c	Não	Péssima
Pública	Agronomia	Eu sempre tive interesse	Não	Péssima
Privada	Engenharia Elétrica	facilidade com exatas e i	Sim	Boa
Pública	Ciências ambientais	Para poder me formar e r	Não	Regular
Pública	Ciências Contábeis	Influência de amigos	Não	Ruim
Privada	Ciencias Contábeis	Afinidade com o curso ap	Sim	Ruim
Pública	Ciência da Computação	Durante parte do fundam	Sim	Boa
Privada	Ciências da computação	Aptidão	Sim	Boa
Pública	Ciência da Computação	Gosto dos assuntos relac	Sim	Ruim
Privada	Ciência da Computação	Possui oportubidades de	Sim	Ótima
Privada	Ciencia da computacao	Afinidade pelo conteúdo	Sim	Ótima
Privada	Ciência da Computação	Afinidade com tecnologia	Não	Ótima
Privada	Ciência da Computação	Pois quero trabalhar com	Sim	Ótima
Pública	Ciências da computação	É algo que realmente am	Sim	Regular
Pública	Economia	Pois acredito que compre	Sim	Ruim
Pública	Ciência da computação	Afinidade pessoal, merca	Sim	Regular
Privada	Economia	Vontade de cursar uma 2	Sim	Regular
Privada	Engenharua Civil	Minha familia atua na are	Sim	Boa
Privada	Economia	Sempre tive interesse na	Sim	Ótima
Privada	Ciência da Computação	Meu pai é da área e eu a	Sim	Ruim
Privada	Engenharia Civil	Por que meus tios são er	Sim	Ótima
Pública	Ciência da computação	Gosto da área	Não	Ruim
Pública	Ciências Econômicas	interesse genuíno em es	Não	Péssima
Privada	Eng civil	Minha familia tem muitos	Sim	Boa
Privada	Ciências Biológicas Bach	Interesse na área de estu	Sim	Ruim
Privada	Gestão de agronegócios	Me identifiquei	Não	Regular
Pública	Ciência da computação	Mercado de trabalho	Não	Regular
Privada	Economia	apreço pela área e exper	Sim	Boa

Você considera que o se	Quão difícil está sendo o	Você acredita que as liçõ	Qual é o assunto estudad	Que tipos de sugestões v
Sim	Muito fácil	Sim	jljçlkç	kjklhjl
Não	Difícil	Não	Polinômios, Exponencial	Fazer muitos exercícios p
Não	Difícil	Talvez	Em minha opinião os ele	olha dica em si eu não se
Não	Muito difícil	Não	todos	quem não teve uma base
Não	Neutro	Não	Função	Estudar
Não	Neutro	Talvez	Geometria analítica e fun	Mais atividades e trabalh
Sim	Fácil	Talvez	Funções e matemática ba	Fazer as listas, assistir ví
Sim	Neutro	Sim	Fatoração, trigonometria	Tentar fazer as listas de e
Não	Difícil	Talvez	Não sei, ainda estou apre	Se tiver a mesma condiçã
Sim	Fácil	Não	Funções, álgebra básica.	Aprender a fazer manipu
Não	Muito difícil	Talvez	Funções	Estudar mais e treinar co
Sim	Fácil	Sim	Seno e coseno	Realizar as listas e frequ
Não	Difícil	Sim	Funções	Tentar fazer mais exercíc
Não	Difícil	Talvez	Praticamente todos as as	Buscar a monitoria ou co
Sim	Difícil	Talvez	Funções.	Participar das monitorias
Não	Neutro	Talvez	Não sei, porque ainda nã	Reforçar os assuntos ens
Sim	Neutro	Sim	Estudo das funções, equ	Tentar ao máximo entend
Não	Difícil	Talvez	Funções	Estude mais.
Não	Difícil	Sim	Função e trigonometria	Revisar os conteúdos do
Não	Difícil	Talvez	Acredito que tudo, é nece	Buscar estudar por fora d
Não	Neutro	Não	Tudo	Não subestimar a discipli
Não	Muito difícil	Talvez	Fatoraçâo, radiciação, fu	Rever conceitos básicos
Não	Difícil	Sim	Funções	Irem às monitorias e se p
Não	Muito difícil	Talvez	funções	Ir em todas as aulas extra
Sim	Neutro	Talvez	funções, produtos notáve	procurar por vídeo aulas
Não	Difícil	Sim	Funções	Fazer exercícios com um
Não	Muito difícil	Não	Produtos notáveis e man	Buscar resoluções de exe
Não	Muito difícil	Não	Baskara e Polinomios	Estudem bastante
Não	Neutro	Talvez	Funções	Se acalme, não tenha ve
Sim	Neutro	Sim	Propriedades algebricas	Veja os vídeos do moodle
Não	Fácil	Sim	Funções e Álgebra	Procurem entender os co
Sim	Neutro	Sim	Algebra e a manipulação	Revisar os conteúdos bá
Sim	Muito fácil	Não	Trigonometria	Estudar o conteúdo de pr
Sim	Muito fácil	Talvez	Trigonometria, foi o assu	Se esforçar para entende
Sim	Difícil	Talvez	Fatoração	Faça listas de exercícios
Não	Difícil	Sim	Trigonometria	
Não	Muito difícil	Não	Acredito que álgebra teria	Diria para estudarem ber
Não	Difícil	Talvez	Funções	Revisão de conteúdo est
Não	Neutro	Sim	Funções	
Sim	Neutro	Talvez	Algebra	Procurar por analogias, e
Sim	Neutro	Sim	Funções	Fazer mais exercícios
Não	Difícil	Talvez	Fatoração, função afim e	Estudar
Sim	Neutro	Talvez	Geometria analítica	Fazer exercícios até não
Não	Difícil	Não	Fatoração	Estudar muito
Não	Difícil	Sim	Funções	Fortalecer a matemática
Sim	Neutro	Sim	Aprender notações mate	Estuda notações, os limit
Sim	Neutro	Não	Funções	
Sim	Difícil	Não	Não sei	Fazer exercícios
Não	Difícil	Talvez	funções	que busquem a monitoria
Sim	Difícil	Sim	álgebra e trigonometria	Fazer grandes quantidad

Como é a sua rotina de e	Calculando o limite abaix	Calculando o limite abaix	Ao determinar todas as assíntotas da função abaix	
hjljkl	Opção 4	1/6	Verticais: não existem, H	Opção 1
Regular	Opção 5	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 1
Minha rotina de estudo e	Opção 4	5/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 2
complicadíssima. Trabalh	Opção 4	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 5
Seguir o roteiro de estud	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Eu assisto as vídeo aulas	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo todos os dias que	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
exercício	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Estudar o conteúdo da se	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 5
Atualmente está meio lar	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Em torno de 2h por dia	Opção 3	1/6	Verticais: não existem, H	Opção 4
Realizar ao menos 75% (	Opção 1	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 1
Reduzida devido ao traba	Opção 3	1/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 2
Está sendo complicada n	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo quando tenho ten	Opção 5	1/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 2
Normalmente estudo de	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Ao longo da semana, sep	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 2
1 hora por dia.	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Tento entrar todo dia, par	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 2
Só tenho as manhãs para	Opção 3	1/3	Verticais: não existem, H	Opção 1
na e não confiar no que é	Opção 2	6/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Varia a cada dia e neces	Opção 4	6/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 5
Estudo sempre depois da	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 2
Estudo o máximo que po	Opção 3	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 2
estudo cálculo terça e qu	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo na parte da manh	Opção 4	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 5
Muito curta, trabalho 8h (	Opção 1	1/3	Verticais: não existem, H	Opção 2
2 hrs de aulas particulare	Opção 5	5/6	Verticais: não existem, H	Opção 1
Tento estudar 1 hora diar	Opção 3	5/6	Verticais: não existem, H	Opção 4
Estudo antes de ir pra un	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo todos os dias.	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 5
Não tenho uma rotina mu	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Resolução de exercícios	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo sozinho durante t	Opção 3	6/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Fazer a lista de exercício	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
	Opção 3	1/3	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 4
Em relação a cálculo vejo	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
Estudo em média 4 horas	Opção 1	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 5
	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Corrida, tenho pouco tem	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Primeiramente por vídeos	Opção 3	1/6	Verticais: não existem, H	Opção 3
Estudo um pouco a cada	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 1
Fraca	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo pouco Apenas no final de sema	Opção 1	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 3
além das aulas, visito o B	Opção 1	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
5 horas por semana faço	Opção 3	5/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 1
	Opção 1	6/5	Verticais: não existem, H	Opção 5
Fraca, pela demanda de	Opção 4	1/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 1
vejo o conteúdo semanal	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo na BCE após a a	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1

Qual é a sua idade?	Você, atualmente:	Qual é a distância aproxi	Qual é o principal modo d	Você cursou o Ensino Fu
27 anos	Somente estuda	25 km	De metrô	Pública
20	Trabalha e estuda	23 km	De carro	Privada
19	Somente estuda	7km	De ônibus	Privada
20	Trabalha e estuda	40km	De ônibus	Pública
17	Somente estuda	45	De carro	Pública
20	Somente estuda	3	De ônibus	Privada
28	Trabalha e estuda	2 km	De bicicleta	Pública
18	Somente estuda	30 km	De metrô	Pública
19	Somente estuda	10 km	De carro	Privada
19	Somente estuda	37 quilômetros	De ônibus	Pública
24	Somente estuda	30 km	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	30	De metrô	Privada
22	Somente estuda	49 Km	De ônibus	Pública
20	Somente estuda	5	De ônibus	Privada
19	Somente estuda	5.5	De carro	Privada
19	Somente estuda	23km	De ônibus	Pública
19	Somente estuda	45	De ônibus	Privada
20	Trabalha e estuda	27 km	De metrô	Privada
26	Trabalha e estuda	40	De carro	Pública
21	Somente estuda	50km	De ônibus	Pública
54 anos	Trabalha e estuda	52Km	De ônibus	Pública
31	Trabalha e estuda	27 km	De ônibus	Pública
21	Trabalha e estuda	28	De ônibus	Pública
18	Somente estuda	22km	De carro	Privada
19	Trabalha e estuda	24km	De ônibus	Pública
18	Trabalha e estuda	35 km	De ônibus	Privada
22	Trabalha e estuda	22km	De ônibus	Privada
21 anos	Trabalha e estuda	30 km	De carro	Privada
25	Trabalha e estuda	10	De ônibus	Pública
20	Trabalha e estuda	35/ 40 km	De ônibus	Pública
20	Trabalha e estuda	18 km	De carro	Pública
23	Trabalha e estuda	30 Km	De carro	Pública
21	Trabalha e estuda	52 km.	De ônibus	Privada
35	Trabalha e estuda	1 km	De carro	Privada
22	Trabalha e estuda	22	De ônibus	Privada
24	Trabalha e estuda	40	De carro	Privada
19	Somente estuda	5km	De ônibus	Privada
25	Somente estuda	20 km	De ônibus	Pública
22 anos	Somente estuda	30km	De ônibus	Pública
19 anos	Somente estuda	Aproximadamente 4 km	De ônibus	Privada
27	Trabalha e estuda	25km	De carro	Pública
19	Somente estuda	32km	De ônibus	Pública
20	Trabalha e estuda	20 km	De ônibus	Privada
23	Somente estuda	53	De ônibus	Pública
20	Trabalha e estuda	27km	De ônibus	Pública
20 anos.	Somente estuda	20km	De carro	Pública
31	Trabalha e estuda	01km	A pé	Pública
20 anos	Trabalha e estuda	44km	De ônibus	Pública
20	Somente estuda	54 Km	De ônibus	Privada
18	Trabalha e estuda	40km	De ônibus	Privada

Você cursou o Ensino Me	Qual é o seu curso de Gr	Em relação à questão an	Você possui certificações	Como avalia a sua relaçã
Pública	Economia	Curso bastante útil na pra	Sim	Péssima
Privada	Engenharia elétrica	Entre as matérias que eu	Sim	Ótima
Privada	Ciência da computação	Interesse pessoal e sens	Sim	Boa
Pública	Licenciatura em Biologia	Afinidade com a matéria	Não	Ruim
Pública	Ciência da Computação	Sou apaixonado pela áre	Sim	Ótima
Privada	Biologia Bacharelado	Interesse desde pequeno	Sim	Ruim
Pública	Ciências Ambientais	Foi o curso que mais se a	Sim	Boa
Pública	Computação (Licenciatur	Pois é uma área que esta	Não	Péssima
Privada	engenharia civil	ser um curso de exatas	Não	Regular
Pública	Ciências da computação	Por ser uma área que ab	Não	Ruim
Pública	Ciências econômicas	Pelo conteúdo da grade c	Não	Ruim
Privada	Computação	Pois gosto muito dessa á	Sim	Boa
Pública	Ciência da computação	Grande mercado e certa	Não	Regular
Privada	Eng. Civil	Gosto da ideia de ser um	Sim	Boa
Privada	Ciência da Computação	Sempre gostei da área	Não	Boa
Pública	Engenharia Civil	Porque sempre gostei do	Não	Ótima
Pública	Ciência da computação	Porque sempre me intere	Sim	Péssima
Privada	Ciências Econômicas	Afinidade com o curso, p	Sim	Regular
Pública	Engenharia de Computaç	Afinidade com a área	Sim	Boa
Pública	Ciências Biológicas	Minha matéria favorita no	Não	Ruim
Pública	Computação Licenciatura	Desde os 18 anos trabalh	Sim	Boa
Pública	Ciências contábeis	Questão financeira	Não	Ruim
Pública	Engenharia florestal	Achei interessante	Não	Ruim
Privada	Ciências Ambientais	Por ter afinidade com o m	Não	Regular
Pública	Farmácia	Porque quero prestar cor	Não	Péssima
Pública	Economia	Pois gosto de saber com	Sim	Ruim
Pública	Ciências Contábeis	Foi o curso que mais apa	Sim	Regular
Privada	Engenharia florestal	Para ajudar no meio amb	Sim	Regular
Pública	Ciências Ambientais	Me interesso pela área	Sim	Regular
Pública	Ciências Ambientais	Por amor e minha conexã	Não	Péssima
Pública	Ciências Ambientais	Porque amo a área ambi	Não	Ruim
Pública	Ciências Contábeis	Pelo amplo mercado de t	Sim	Ótima
Pública	Ciências Biológicas	Por afinidade.	Não	Péssima
Privada	Agronegocio	É minha segunda gradua	Sim	Regular
Pública	Ciências contábeis	Não sei	Sim	Ruim
Privada	Contábeis	Facilidade	Sim	Regular
Privada	Ciência da Computação	Parecia legal	Não	Boa
Pública	Engenharia florestal	Oportunidade	Sim	Péssima
Pública	Licenciatura em ciências	Identificação com os idea	Não	Péssima
Privada	Biotecnologia	Áreas de interesse e mer	Não	Regular
Pública	Ciências Biológicas	Afinidade	Sim	Boa
Pública	Biologia	Curso que mais me ident	Não	Regular
Privada	Farmácia	Afinidade com o curso e	Não	Regular
Privada	Farmácia	Afinidade com química e	Não	Boa
Pública	Engenharia florestal	Porque eu gosto da área	Sim	Ruim
Pública	Economia	Pessoas que admiro	Não	Ruim
Pública	Ciências Econômicas	Ingressei no referido curs	Sim	Ruim
Pública	Engenharia Mecânica	Quero usar meus conhec	Sim	Regular
Pública	Licenciatura em Ciências	Afinidade, essa área sem	Sim	Boa
Pública	Biologia-Licenciatura	Porque eu sempre goste	Sim	Péssima

Você considera que o se	Quão difícil está sendo o	Você acredita que as liçõ	Qual é o assunto estudad	Que tipos de sugestões v
Não	Muito difícil	Sim	Divisão, multiplicação	Estudar bastante
Não	Difícil	Sim	Produtos notáveis	Façam as listas na sema
Sim	Neutro	Talvez	Exponeciação e radiciação	
Não	Muito difícil	Talvez	Logaritmo, função, baska	Fazer as listas
Sim	Fácil	Talvez	Trigonometria	Estude trigonometria e p
Sim	Muito difícil	Não	Produtos notáveis e cálc	Revisar os fundamentos
Não	Difícil	Talvez	Sem resposta	Estuda mais..
Não	Difícil	Não	Função	Não tem muito pra onde
Sim	Difícil	Talvez	n sei	como decompor equaçõe
Não	Difícil	Sim	Fatoração e trigonometri	A compreensão dos con
Não	Neutro	Sim	Função seno e cosseno,	Estudar matemática bási
Não	Difícil	Talvez	Matemática básica	Reforçar a matemática b
Não	Difícil	Talvez	Funções	Ter um detalhamento ma
Sim	Fácil	Sim	Saber fazer bem os limite	Treinar algebra
Sim	Neutro	Talvez	Funções	Revisar conteúdos básic
Não	Muito difícil	Sim	Funções, trigonometria.	Estudar a base da mater
Não	Difícil	Não	Praticamente não tive au	Diminuir a dificuldade da
Não	Difícil	Não	Algebra básica	Fazer o máximo de ques
Não	Muito fácil	Sim	Trigonometria	Siga o ritmo do curso e e
Não	Difícil	Sim	Manipulação algébrica	
Não	Difícil	Talvez	Trigonometria	Repassar todo ensino me
Não	Difícil	Talvez	Todos	A aula teórica ser mais c
Não	Difícil	Sim	Logaritmo	Pratiquem muito exercíci
Não	Muito difícil	Talvez	Estudo de equação e fatoração	
Não	Muito difícil	Não	Eu passei a maioria do m	Não sei, eu sou uma dela
Não	Muito difícil	Talvez	Funções	Treinar bastante
Não	Muito difícil	Não	Todo ele, mas sem dúvid	Estudar bastante pré-cál
Não	Difícil	Não	Funções e polinômios	Praticar e estudar funçõe
Não	Muito difícil	Talvez	Funções	Monitoria e prática de ex
Não	Difícil	Sim	Funções	Monitorar essas pessoas
Não	Muito difícil	Talvez	Limites.	Fazer exercícios todos o
Não	Difícil	Talvez	Geometria analítica	Estudo complementar po
Não	Muito difícil	Sim	Toda matemática básica.	Revisar os conteúdos de
Não	Muito difícil	Não	Funções	Aprender fatoração, funç
Não	Difícil	Não	Equações	Faça muitos exercícios
Não	Muito difícil	Não	Oração	Grupo de estudos
Não	Neutro	Sim	Trigonometria	Tente gostar do assunto,
Não	Muito difícil	Sim	Função	Estudar função e todas a
Não	Muito difícil	Talvez	Fixação das propriedade de operação, e o seu usc	Tentar fazer muitos exerc
Não	Difícil	Talvez	Funções; Fração; Potenc	Fazer bastantes exercíci
Não	Neutro	Sim	Funções	Resolução de exercícios
Não	Neutro	Talvez	Equações do 1 e 2 grau;	Estudar reta; funções
Não	Difícil	Talvez	Funções	
Não	Neutro	Talvez	Polinômios	
Não	Difícil	Talvez	Polinômio, funções	Fazer muitos exercícios,
Não	Difícil	Sim	Produtos notáveis	Estudar o máximo que pu
Não	Difícil	Sim	Fatoração, Polinômios e	Para retomarem os estu
Não	Difícil	Talvez	Trigonometria	Refaça seu ensino médic
Não	Neutro	Sim	Equações tanto de prime	O site do khan academy
Não	Muito difícil	Talvez	Matemática básica	Revisar muito conteúdos

Como é a sua rotina de e	Calculando o limite abaix	Calculando o limite abaix	Ao determinar todas as assíntotas da função abaix	
Estudo durante toda a se	Opção 4	5/6	Verticais: não existem, H	Opção 2
Depende da quantidade (	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 5
	Opção 3	5/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Divido as horas entre as	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudar a tarde após as a	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Preciso melhorar	Opção 4	1/3	Verticais: não existem, H	Opção 2
Estudo pra concurso de r	Opção 2	6/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 2
fazer exercícios	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 4
Estudo pela manhã e a ta	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Eu procuro sempre estuc	Opção 5	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Estudos todos os dias, e	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Estudo pela manhã em c	Opção 3	1/3	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
estudo 7 horas por sema	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudar em casa, geralm	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Não tenho horários certo	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Acordar de manhã e estu	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
4 horas por dia	Opção 3	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 1
Geralmente só estudo ac	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
	Opção 3	6/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Só consigo de fato no ca	Opção 3	1/3	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 5
Tenho pouco tempo para	Opção 5	1/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
Não tenho	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Tento estudar teoria do c	Opção 1	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 4
Eu estudo quando da, nã	Opção 4	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 5
Varia bastante de acordo	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Por conta do trabalho e c	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
4 horas semanais	Opção 3	5/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 5
Tenho pouco tempo para	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 2
Trabalho e tenho pouco t	Opção 3	5/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
Tenho pouco tempo de e	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 4
5 horas de estudo por se	Opção 4	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo principalmente nc	Opção 3	5/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 2
Não tenho.	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Revisar as matérias no m	Opção 4	1/3	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 3
5 horas por dia	Opção 3	5/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 2
Estudo quase todo dia. E	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Desorganizada, mais est	Opção 5	1/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 1
3 a 4 dias na semana, de	Opção 3	1/3	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 3
Aula teórica e exercícios	Opção 1	6/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Tento ao menos praticar	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Tento estudar 3h por dia.	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 4
Complicada	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Apenas final de semana	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 4
Estudo 3 horas por dia al	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Estudo sempre quando p	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 1
Neste semestre, estou cu	Opção 5	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 5
de matemática	Opção 3	1/6	Verticais: não existem, H	Opção 5
Estudo umas 6 horas por	Opção 1	1/5	Verticais: não existem, H	Opção 3
Eu trabalho o dia todo e	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1

Qual é a sua idade?	Você, atualmente:	Qual é a distância aproxi	Qual é o principal modo (	Você cursou o Ensino Fu
22	Trabalha e estuda	36 km	De ônibus	Pública
20	Somente estuda	30	De ônibus	Pública
18	Somente estuda	40km	De ônibus	Pública
20	Somente estuda	15km	De ônibus	Pública
22	Trabalha e estuda	43,5	De ônibus	Pública
23	Trabalha e estuda	17 km	De ônibus	Pública
23	Somente estuda	10 quilômetros	De carro	Pública
20	Trabalha e estuda	30km	De ônibus	Privada
22	Trabalha e estuda	7	De carro	Privada
20	Trabalha e estuda	30 km	De ônibus	Privada
18	Somente estuda	39KM	De ônibus	Pública
21	Trabalha e estuda	22km	De ônibus	Pública
34	Somente estuda	46 km	De ônibus	Pública
23	Somente estuda	35 km	De ônibus	Pública
22	Somente estuda	12 km	De metrô	Pública
20	Trabalha e estuda	25 km	De ônibus	Pública
20	Trabalha e estuda	40 km	De ônibus	Pública
23	Trabalha e estuda	40km	De carro	Pública

Você cursou o Ensino Me	Qual é o seu curso de Gr	Em relação à questão an	Você possui certificações	Como avalia a sua relaçã
Pública	Engenharia	Afinidade	Não	Boa
Pública	Licenciatura em Biologia	Por gostar de biologia e (	Não	Regular
Pública	Ciência da computação	Gosto de programação e	Sim	Regular
Pública	Ciências Econômicas	Interesse em entender a	Não	Regular
Pública	Ciências Biológicas	Gosto de estudar sobre (	Sim	Ruim
Pública	Ciências biológicas	A área de biologia sempr	Não	Ruim
Pública	Engenharia Florestal	Pela quantidade de vaga	Sim	Regular
Pública	Engenharia de redes de (	Mercado de trabalho amp	Sim	Regular
Privada	contabilidade	tradição familiar	Sim	Boa
Pública	Licenciatura em Ciencias	Inspiração Familiar	Não	Regular
Pública	Ciências Biológicas Bach	Gosto muito da área e m	Sim	Ótima
Pública	Ciências Contábeis	Fui menor aprendiz na ár	Sim	Péssima
Pública	CIÊNCIAS BIOLÓGICAS	Interesse pessoal pelo es	Sim	Regular
Pública	Biologia	Sempre gostei muito de (	Sim	Regular
Privada	Ciências Econômicas	Afinidade com as questõ	Sim	Boa
Pública	Administração	Mercado de trabalho e br	Sim	Boa
Pública	Licenciatura em física	Me encantei pela matéria	Não	Regular
Pública	Ciências Contábeis	Mercado de trabalho	Sim	Regular

Você considera que o se	Quão difícil está sendo o	Você acredita que as liçõ	Qual é o assunto estudad	Que tipos de sugestões v
Sim	Neutro	Sim	Matemática	Fazer mais exercícios
Sim	Difícil	Talvez	Álgebra, principalmente F	Estudar bastante algebra
Não	Neutro	Não	Trigonometria (não sei, p	Ir às monitorias e tirar dú
Sim	Neutro	Sim	Fatoração de polinômios	Vejam o básico e estude
Não	Muito difícil	Não	Fatoração e álgebra	Aulas particulares
Não	Difícil	Talvez	não sei dizer	ir nas monitorias
Sim	Difícil	Sim	pre-calculo	dá uma revisada em vide
Não	Neutro	Sim	Fatoração e trigonometria	Focar em revisões de pre
Não	Difícil	Não	equações	fazer muitos exercícios e
Não	Neutro	Talvez	Limites	Sempre trabalhar exercic
Não	Difícil	Sim	Funções e polinomios	Revisem os conteúdos a
Não	Difícil	Talvez	A base de dos cálculos e	Fazer monitoria
Não	Neutro	Talvez	Funções	Revisar os conteúdos de
Não	Difícil	Talvez	Faturação, mmc, regras c	Estudar com antecedênc
Sim	Fácil	Talvez	Conjuntos, Funções, poli	Ter almplo domínio da ba
Não	Neutro	Sim	Funções, Equações, Geo	Construir uma base sólid
Não	Difícil	Sim	Manipulações algébricas	Constância e resolução c
Não	Difícil	Não	Funções, logaritmos, trig	Professor único entre tec

Como é a sua rotina de e	Calculando o limite abaix	Calculando o limite abaix	Ao determinar todas as assíntotas da função abaix	
Quase diariamente	Opção 3	1/5	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 5
Normalmente começo a (	Opção 4	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Faço os exercícios que s	Opção 1	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Se as aulas são até 12 h	Opção 3	1/5	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
Bagunçada	Opção 3	5/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 3
sem rotina fixa	Opção 3	6/5	Verticais: não existem, H	Opção 4
corrida. Não trabalho no	Opção 4	5/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 1
2 vezes na semana estu(	Opção 1	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 1
de segunda a sexta pela	Opção 3	1/3	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 3
difícil, não sobra muito te	Opção 4	5/6	Verticais: não existem, H	Opção 4
Nos meios de semana nc	Opção 3	1/6	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 2
Estudo aos finais de sem	Opção 4	1/6	Verticais: x = 0 e x = 3/2,	Opção 3
Leio as apostilas e faço c	Opção 1	6/5	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 4
Estudo pelo menos 2 hor	Opção 3	6/5	Verticais: não existem, H	Opção 2
Passo das 8 às 13 na un	Opção 1	1/3	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 1
Estudo aproximadament(	Opção 3	1/3	Verticais: x = 0, Horizonta	Opção 1
Consigo estudar apenas	Opção 3	5/6	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 2
Cansativa, estou no últim	Opção 1	1/3	Verticais: x = - 2 e x = 2,	Opção 3